



NOUVELLE SOLUTION

DU

PROBLÈME DU MOUVEMENT DE ROTATION

D'UN CORPS DE FIGURE QUELCONQUE

QUI N'EST ANIMÉ PAR AUCUNE FORCE ACCÉLÉRATRICE.



NOUVELLE SOLUTION

DU

PROBLÈME DU MOUVEMENT DE ROTATION

D'UN CORPS DE FIGURE QUELCONQUE

QUI N'EST ANIMÉ PAR AUCUNE FORCE ACCÉLÉRATRICE.

(Nouveaux Mémoires de l'Académie royale des Sciences et Belles-Lettres
de Berlin, année 1773.)

Ce Problème, l'un des plus curieux et des plus difficiles de la Mécanique, a déjà été résolu par M. Euler dans les *Mémoires* de cette Académie pour l'année 1758, et dans le tome III de sa *Mécanique*. M. d'Alembert l'a résolu aussi dans ses *Opuscules*. Les solutions de ces deux grands Géomètres sont fort différentes quant à la méthode, mais elles sont fondées l'une et l'autre sur la considération mécanique de la rotation du corps autour d'un axe mobile, et elles supposent qu'on connaisse la position de ses trois axes de rotation uniforme; ce qui exige la résolution d'une équation cubique. Cependant, à considérer le Problème en lui-même, il semble qu'on devrait pouvoir le résoudre directement et indépendamment des propriétés des axes de rotation, propriétés dont la démonstration est assez difficile, et qui devraient d'ailleurs être plutôt des conséquences de la solution même que les fondements de cette solution. En effet, si l'on imagine un système d'un nombre indéfini de corps considérés comme des points et liés ensemble de manière que leurs distances mutuelles restent toujours les mêmes, et qu'on cherche le mouvement de ce système après qu'il aura reçu une impulsion quelconque,

c'est une question qui ne dépend que des principes ordinaires de la Dynamique, et qui ne demande d'autres secours que ceux que l'Analyse elle-même peut fournir.

J'ai donc cru que ce serait un travail avantageux aux progrès de l'une et de l'autre de ces deux sciences que de chercher une solution tout à fait directe et purement analytique de la question dont il s'agit; c'est l'objet que je me suis proposé de remplir dans ce Mémoire; les difficultés qu'il présente m'ont arrêté longtemps, mais enfin j'ai trouvé moyen de les surmonter par une méthode assez singulière et entièrement nouvelle, qui me paraît digne de l'attention des Géomètres.

Le mérite de ma solution, si elle en a quelqu'un, consiste donc uniquement dans l'Analyse que j'y emploie, et qui renferme différents artifices de calcul assez remarquables, ainsi que plusieurs formules nouvelles et utiles dans bien des cas; c'est par cette raison surtout que j'espère qu'on me pardonnera d'avoir entrepris de traiter un sujet qui a déjà été si savamment discuté par deux des premiers Géomètres de ce siècle. D'ailleurs mes recherches n'ont rien de commun avec les leurs que le Problème qui en fait l'objet; et c'est toujours contribuer à l'avancement des Mathématiques que de montrer comment on peut résoudre les mêmes questions et parvenir aux mêmes résultats par des voies très-différentes; les méthodes se prêtent par ce moyen un jour mutuel et en acquièrent souvent un plus grand degré d'évidence et de généralité.

LEMME.

1. Soient neuf quantités quelconques $x, y, z, x', y', z', x'', y'', z''$, je dis qu'on aura cette équation identique

$$\begin{aligned} & (x y' z'' + y z' x'' + z x' y'' - x z' y'' - y x' z'' - z y' x'')^2 \\ &= (x^2 + y^2 + z^2)(x'^2 + y'^2 + z'^2)(x''^2 + y''^2 + z''^2) \\ &+ 2(x x' + y y' + z z')(x x'' + y y'' + z z'')(x' x'' + y' y'' + z' z'') \\ &- (x^2 + y^2 + z^2)(x' x'' + y' y'' + z' z'')^2 \\ &- (x'^2 + y'^2 + z'^2)(x x'' + y y'' + z z'')^2 \\ &- (x''^2 + y''^2 + z''^2)(x x' + y y' + z z')^2. \end{aligned}$$

2. COROLLAIRE I. — Donc, si l'on a entre les neuf quantités précédentes ces six équations

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + z^2 &= a, & x'x'' + y'y'' + z'z'' &= b, \\ x'^2 + y'^2 + z'^2 &= a', & x x'' + y y'' + z z'' &= b', \\ x''^2 + y''^2 + z''^2 &= a'', & x x' + y y' + z z' &= b'', \end{aligned}$$

et qu'on fasse, pour abrégé,

$$\begin{aligned} \xi &= y'z'' - z'y'', & \eta &= z'x'' - x'z'', & \zeta &= x'y'' - y'x'', \\ \beta &= \sqrt{aa'a'' + 2bb'b'' - ab^2 - a'b^2 - a''b^2}, \end{aligned}$$

on aura

$$x\xi + y\eta + z\zeta = \beta.$$

On aura de plus les équations identiques suivantes

$$\begin{aligned} x'\xi + y'\eta + z'\zeta &= 0, & x''\xi + y''\eta + z''\zeta &= 0, & \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 &= a'a'' - b^2, \\ y'\zeta - z'\eta &= bx' - a'x'', & y''\zeta - z''\eta &= a'x' - bx'', \\ z'\xi - x'\zeta &= by' - a'y'', & z''\xi - x''\zeta &= a'y' - by'', \\ x'\eta - y'\xi &= bz' - a'z'', & x''\eta - y''\xi &= a'z' - bz'', \end{aligned}$$

qui sont très-faciles à vérifier par le calcul.

3. COROLLAIRE II. — Si l'on prend les trois équations

$$\begin{aligned} x\xi + y\eta + z\zeta &= \beta, \\ x x' + y y' + z z' &= b'', \\ x x'' + y y'' + z z'' &= b', \end{aligned}$$

et qu'on en tire les valeurs des quantités x, y, z , on aura par les formules connues

$$\begin{aligned} x &= \frac{\beta(y'z'' - z'y'') + b'(\eta z' - \xi y') + b''(\xi y'' - \eta z'')}{\xi(y'z'' - z'y'') + \eta(z'x'' - x'z'') + \zeta(x'y'' - y'x'')}, \\ y &= \frac{\beta(z'x'' - x'z'') + b'(\xi x' - \zeta z') + b''(\xi z'' - \zeta x'')}{\xi(y'z'' - z'y'') + \eta(z'x'' - x'z'') + \zeta(x'y'' - y'x'')}, \\ z &= \frac{\beta(x'y'' - y'x'') + b'(\xi y' - \eta x') + b''(\eta x'' - \xi y'')}{\xi(y'z'' - z'y'') + \eta(z'x'' - x'z'') + \zeta(x'y'' - y'x'')}. \end{aligned}$$

done, faisant les substitutions du numéro précédent et supposant, pour abrégér,

$$\alpha = a'a'' - b'b'',$$

on aura

$$\begin{aligned} x &= \frac{\beta \xi + (a'b'' - bb')x' + (a'b' - bb'')x''}{\alpha}, \\ y &= \frac{\beta \eta + (a'b'' - bb')y' + (a'b' - bb'')y''}{\alpha}, \\ z &= \frac{\beta \zeta + (a'b'' - bb')z' + (a'b' - bb'')z''}{\alpha}. \end{aligned}$$

4. COROLLAIRE III. — Si l'on fait varier les quantités $x', y', z', x'', y'', z''$, en regardant comme constantes les quantités a', a'' et b , et qu'on suppose

$$\begin{aligned} x'dx' + y'dy' + z'dz' &= d\omega, \\ \xi dx' + \eta dy' + \zeta dz' &= d\psi, \\ \xi dx'' + \eta dy'' + \zeta dz'' &= d\varphi, \end{aligned}$$

on aura, en vertu des équations du Corollaire I, ces six autres-ci

$$\begin{aligned} x'dx' + y'dy' + z'dz' &= 0, \\ x''dx'' + y''dy'' + z''dz'' &= 0, \\ \xi d\xi + \eta d\eta + \zeta d\zeta &= 0, \\ x'dx'' + y'dy'' + z'dz'' &= -d\omega, \\ x'd\xi + y'd\eta + z'd\zeta &= -d\psi, \\ x''d\xi + y''d\eta + z''d\zeta &= -d\varphi, \end{aligned}$$

et à l'aide de ces neuf équations on pourra déterminer les neuf différentielles $d\xi, d\eta, d\zeta, dx', dy', dz', dx'', dy'', dz''$ par des opérations et des réductions semblables à celles du numéro précédent.

Il n'y aura pour cet effet qu'à changer, dans les expressions de x, y, z , les quantités β, b', b'' , d'abord en 0, $-d\varphi$, $-d\psi$, ensuite en $d\psi, d\varphi, 0$, et enfin en $d\varphi, 0, -d\omega$, et l'on aura

$$\begin{aligned} d\xi &= \frac{x'(bd\varphi - a'd\psi) + x''(bd\psi - a'd\varphi)}{\alpha}, \\ d\eta &= \frac{y'(bd\varphi - a'd\psi) + y''(bd\psi - a'd\varphi)}{\alpha}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d\zeta &= \frac{z'(bd\varphi - a'd\psi) + z''(bd\psi - a'd\varphi)}{\alpha}, \\ dx' &= \frac{\xi d\psi - (bx' - a'x'')d\omega}{\alpha}, \\ dy' &= \frac{\eta d\psi - (by' - a'y'')d\omega}{\alpha}, \\ dz' &= \frac{\zeta d\psi - (bz' - a'z'')d\omega}{\alpha}, \\ dx'' &= \frac{\xi d\varphi - (ax'' - bx'')d\omega}{\alpha}, \\ dy'' &= \frac{\eta d\varphi - (ay'' - by'')d\omega}{\alpha}, \\ dz'' &= \frac{\zeta d\varphi - (az'' - bz'')d\omega}{\alpha}. \end{aligned}$$

Si l'on différencie maintenant les valeurs de x, y, z du Corollaire précédent, en supposant aussi constantes les quantités β, b', b'' , qu'on y substitue ensuite les valeurs de $d\xi, d\eta, d\zeta, dx', dy', dz', \dots$ qu'on vient de trouver, et qu'on fasse, pour abrégér,

$$d\Phi = bd\varphi - a'd\psi, \quad d\Psi = bd\psi - a'd\varphi,$$

on aura

$$\begin{aligned} dx &= \frac{-\xi(b'd\Psi + b''d\Phi) + x'(\beta d\Phi - \alpha b'd\omega) + x''(\beta d\Psi + \alpha b''d\omega)}{\alpha^2}, \\ dy &= \frac{-\eta(b'd\Psi + b''d\Phi) + y'(\beta d\Phi - \alpha b'd\omega) + y''(\beta d\Psi + \alpha b''d\omega)}{\alpha^2}, \\ dz &= \frac{-\zeta(b'd\Psi + b''d\Phi) + z'(\beta d\Phi - \alpha b'd\omega) + z''(\beta d\Psi + \alpha b''d\omega)}{\alpha^2}. \end{aligned}$$

Et, si l'on substitue ces valeurs ainsi que celles de x, y, z dans ces expressions $xdy - ydx, zdx - xdz, ydz - zdy$, on aura, en employant les réductions du n° 2,

$$\begin{aligned} xdy - ydx &= \frac{\beta(a'b'' - bb')d\Psi - \beta(a'b' - bb'')d\Phi + \alpha(a'b'^2 + a''b''^2 - 2bb'b'')d\omega}{\alpha^2} \\ &\quad - \frac{z'(\beta^2 + \alpha b'b'')d\Phi + (\alpha'\beta^2 + \alpha b'^2)d\Psi + \alpha\beta(a'b'' - bb'')d\omega}{\alpha^2} \\ &\quad + \frac{z''(\beta^2 + \alpha b'b'')d\Psi + (\alpha'\beta^2 + \alpha b''^2)d\Phi - \alpha\beta(a'b' - bb')d\omega}{\alpha^2}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& z dx - x dz \\
&= \gamma \frac{\beta(a'b'' - b'b') d\Psi - \beta(a'b' - b'b'') d\Phi + \alpha(a'b'^2 + a''b'^2 - 2bb'b'') d\omega}{\alpha^2} \\
&\quad - \gamma' \frac{(b\beta^2 + \alpha b'b'') d\Phi + (a'\beta^2 + \alpha b'^2) d\Psi + \alpha\beta(a'b'' - b'b') d\omega}{\alpha^3} \\
&\quad + \gamma'' \frac{(b\beta^2 + \alpha b'b'') d\Psi + (a'\beta^2 + \alpha b'^2) d\Phi - \alpha\beta(a'b' - b'b'') d\omega}{\alpha^3}, \\
&y dz - z dy \\
&= \xi \frac{\beta(a'b'' - b'b') d\Psi - \beta(a'b' - b'b'') d\Phi + \alpha(a'b'^2 + a''b'^2 - 2bb'b'') d\omega}{\alpha^2} \\
&\quad - x' \frac{(b\beta^2 + \alpha b'b'') d\Phi + (a'\beta^2 + \alpha b'^2) d\Psi + \alpha\beta(a'b'' - b'b') d\omega}{\alpha^3} \\
&\quad + x'' \frac{(b\beta^2 + \alpha b'b'') d\Psi + (a'\beta^2 + \alpha b'^2) d\Phi - \alpha\beta(a'b' - b'b'') d\omega}{\alpha^3},
\end{aligned}$$

5. REMARQUE I. — Si l'on regarde les trois quantités x, y, z comme les coordonnées rectangulaires d'un point M rapporté à trois axes fixes et perpendiculaires entre eux, et pareillement les quantités x', y', z' comme les coordonnées rectangulaires d'un autre point M' rapporté aux mêmes axes, et enfin les quantités x'', y'', z'' comme les coordonnées rectangulaires d'un troisième point M'' rapporté aussi à ces trois axes, il est visible que les quantités a, a', a'' , que nous avons supposées égales à

$$x^2 + y^2 + z^2, \quad x'^2 + y'^2 + z'^2, \quad x''^2 + y''^2 + z''^2,$$

seront les carrés des distances des points M, M', M'' au point commun d'intersection des trois axes, lequel nous nommerons simplement le centre des coordonnées; et il est facile de voir de plus que les trois quantités

$$a + a' - 2b'', \quad a + a'' - 2b', \quad a' + a'' - 2b,$$

lesquelles, suivant nos hypothèses, sont égales à

$$\begin{aligned}
&(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2, \\
&(x - x'')^2 + (y - y'')^2 + (z - z'')^2, \\
&(x' - x'')^2 + (y' - y'')^2 + (z' - z'')^2,
\end{aligned}$$

exprimeront les carrés des distances entre les points M, M', entre les points M, M'' et entre les points M', M''; de sorte que, nommant h', h'', h les carrés de ces distances, on aura

$$b = \frac{a' + a'' - h}{2}, \quad b' = \frac{a + a'' - h'}{2}, \quad b'' = \frac{a + a' - h''}{2}.$$

Or si l'on nomme $\varepsilon, \varepsilon', \varepsilon''$ les angles formés au centre des coordonnées par les rayons $\sqrt{a'}, \sqrt{a''}$, par les rayons $\sqrt{a}, \sqrt{a'}$ et par les rayons $\sqrt{a}, \sqrt{a''}$, on aura, par la considération des triangles dont les côtés sont $\sqrt{a}, \sqrt{a'}, \sqrt{h}$, ou $\sqrt{a}, \sqrt{a'}$, $\sqrt{h'}$, ou $\sqrt{a}, \sqrt{a''}$, $\sqrt{h''}$, on aura, dis-je, ces valeurs de h, h', h''

$$h = a' + a'' - 2\sqrt{a'a''}\cos\varepsilon,$$

$$h' = a + a'' - 2\sqrt{aa''}\cos\varepsilon',$$

$$h'' = a + a' - 2\sqrt{aa'}\cos\varepsilon'';$$

done

$$b = \sqrt{a'a''}\cos\varepsilon, \quad b' = \sqrt{aa''}\cos\varepsilon', \quad b'' = \sqrt{aa'}\cos\varepsilon''.$$

D'où il s'ensuit que si l'on a $b = 0, b' = 0, b'' = 0$, les trois rayons $\sqrt{a}, \sqrt{a'}, \sqrt{a''}$ feront nécessairement entre eux des angles droits.

Imaginons maintenant une pyramide triangulaire qui ait ses quatre angles, l'un au centre des coordonnées, les autres aux points M, M', M'', il n'est pas difficile de prouver que la solidité de cette pyramide sera exprimée par les coordonnées $x, y, z, x', y', z', \dots$ de cette manière

$$\frac{z(x'y'' - y'x'') + z'(y'x'' - x'y'') + z''(x'y' - y'x')}{6},$$

c'est-à-dire par la formule

$$\frac{x\xi + \gamma\eta + z\zeta}{6},$$

par conséquent (2) cette solidité sera égale à $\frac{\beta}{6}$; d'où l'on voit que la quantité β n'est autre chose que la pyramide dont il s'agit prise six fois. Ainsi cette quantité sera nulle toutes les fois que la pyramide en ques-

tion s'évanouira, ce qui arrive lorsque les trois points M, M', M'' sont dans un même plan passant par le centre des coordonnées.

Comme toute pyramide est égale au tiers du produit de la base par la hauteur, si l'on divise la quantité $\frac{\beta}{6}$ par l'aire du triangle qui a ses trois angles, l'un au centre des coordonnées, les deux autres aux points M' et M'', on aura la perpendiculaire menée de l'autre point M sur le plan de ce triangle; or puisque ce même triangle est formé par les deux lignes $\sqrt{a'}$, $\sqrt{a''}$, qui forment entre elles l'angle ϵ , on aura

$$\frac{\sqrt{a'a''} \sin \epsilon}{2}$$

pour son aire; mais on a

$$b = \sqrt{a'a''} \cos \epsilon;$$

donc cette aire sera (3)

$$\frac{\sqrt{a'a''} - b^2}{2} = \frac{\sqrt{a'}}{2},$$

donc $\frac{\beta}{\sqrt{a'}}$ sera la valeur de la perpendiculaire menée du point M sur le plan passant par le centre des coordonnées et par les deux autres points M' et M''.

De plus, si l'on imagine par le même centre des coordonnées deux autres plans, l'un perpendiculaire au rayon $\sqrt{a'}$ du point M', l'autre perpendiculaire au rayon $\sqrt{a''}$ du point M'', on verra aisément que la distance perpendiculaire du point M sur le premier de ces plans sera représentée par

$$\sqrt{a'} \sin (90^\circ - \epsilon'') = \sqrt{a'} \cos \epsilon';$$

et que la distance perpendiculaire du même point M sur l'autre plan le sera par

$$\sqrt{a''} \sin (90^\circ - \epsilon') = \sqrt{a''} \cos \epsilon';$$

donc, puisqu'on a trouvé plus haut

$$b' = \sqrt{aa''} \cos \epsilon' \quad \text{et} \quad b'' = \sqrt{aa'} \cos \epsilon',$$

on aura $\frac{b''}{\sqrt{a'}}$ pour la distance perpendiculaire du point M au premier plan, et $\frac{b'}{\sqrt{a''}}$ pour la distance perpendiculaire du même point au second plan.

6. REMARQUE II. — Si l'on imagine qu'aux points M, M', M'' il y ait des corps de masses données, et qui soient unis ensemble par des verges inflexibles ou autrement, de manière qu'ils soient obligés de garder toujours entre eux les mêmes distances $\sqrt{h}$, $\sqrt{h'}$, $\sqrt{h''}$, et qu'on suppose de plus que ces corps puissent tourner dans tous les sens autour du centre des coordonnées, sans néanmoins que leurs distances à ce centre $\sqrt{a}$, $\sqrt{a'}$, $\sqrt{a''}$ varient, il est clair qu'on aura le cas du Lemme et de ses Corollaires, et qu'on pourra appliquer au mouvement de ce système les formules que nous y avons données. Ainsi l'on pourra ramener le mouvement du corps M, dont les coordonnées sont x , y , z , aux mouvements des corps M' et M'', dont les coordonnées sont x' , y' , z' , x'' , y'' , z'' .

En général, si l'on a un système d'autant de corps qu'on voudra, disposés de manière qu'ils soient forcés de conserver toujours les mêmes distances tant entre eux qu'à l'égard d'un point donné, les formules ci-dessus serviront à rapporter le mouvement de chacun de ces corps aux mouvements de deux quelconques d'entre eux pris à volonté; car prenant x' , y' , z' et x'' , y'' , z'' pour les coordonnées rectangles de ces deux corps, que je désignerai par M' et M'', et nommant, en général, x , y , z les coordonnées d'un autre corps quelconque M du système, on pourra exprimer tant les variables x , y , z que leurs différentielles dx , dy , dz par les seules variables x' , y' , z' , x'' , y'' , z'' et $d\pi$, $d\psi$, $d\varphi$, lesquelles se rapportent uniquement aux corps M' et M''. Et l'on remarquera que les constantes a' , a'' , h , et par conséquent aussi b et a , seront les mêmes pour tous les corps M, puisqu'elles ne dépendent que de la position des corps M' et M''; mais que les constantes a , h' , h'' , et par conséquent aussi β , β' , β'' , seront différentes pour chaque corps M, puisqu'elles dépendent de sa situation à l'égard des corps M' et M''.

Au reste, si dans les formules du Corollaire III nous avons supposé les

588 NOUVELLE SOLUTION DU PROBLÈME DU MOUVEMENT

quantités a, a', a'', b, b', b'' constantes, ce n'a été que pour plus de simplicité et parce que cette supposition était suffisante pour notre objet; car d'ailleurs, si l'on voulait regarder ces quantités comme variables, il n'y aurait qu'à employer, au lieu des équations

$$\begin{aligned}x'dx' + y'dy' + z'dz' &= 0, \\x''dx'' + y''dy'' + z''dz'' &= 0, \\ \xi d\xi + \eta d\eta + \zeta d\zeta &= 0, \\x'dx'' + y'dy'' + z'dz'' &= -d\omega,\end{aligned}$$

celles-ci

$$\begin{aligned}x'dx' + y'dy' + z'dz' &= \frac{da'}{2}, \\x''dx'' + y''dy'' + z''dz'' &= \frac{da''}{2}, \\ \xi d\xi + \eta d\eta + \zeta d\zeta &= \frac{d\alpha}{2}, \\x'dx'' + y'dy'' + z'dz'' &= db - d\omega,\end{aligned}$$

et ensuite avoir égard à la variabilité des coefficients

$$\frac{\beta}{\alpha}, \frac{a'b' - bb'}{\alpha}, \frac{a'b'' - bb''}{\alpha}$$

dans la différentiation des valeurs de x, y, z ; on trouverait ainsi des formules analogues à celles du Corollaire cité, et qui pourraient être utiles dans quelques occasions.

7. REMARQUE III. — Si dans les équations du n° 2 on suppose

$$a = a' = a'' = 1$$

et

$$b = b' = b'' = 0,$$

on aura

$$\beta = 1 \text{ et } \alpha = 1;$$

de là on aura (3)

$$x = \xi, \quad y = \eta, \quad z = \zeta,$$

savoir

$$x = y'z'' - z'y'', \quad y = z'x'' - x'z'', \quad z = x'y'' - y'x'';$$

DE ROTATION D'UN CORPS DE FIGURE QUELCONQUE. 589

et l'on trouvera de même, par la simple analogie,

$$\begin{aligned}x' &= y''z - z''y, & y' &= z''x - x''z, & z' &= x''y - y''x, \\x'' &= y'z' - zy', & y'' &= zx' - xz', & z'' &= xy' - yx'.\end{aligned}$$

Et si l'on multiplie ces équations respectivement par $x, y, z, x', y', z', \dots$ et qu'on les ajoute ensemble trois à trois, on aura, en vertu du Lemme, ces nouvelles formules

$$\begin{aligned}x^2 + x'^2 + x''^2 &= 1, & xy + x'y' + x''y'' &= 0, \\y^2 + y'^2 + y''^2 &= 1, & xz + x'z' + x''z'' &= 0, \\z^2 + z'^2 + z''^2 &= 1, & yz + y'z' + y''z'' &= 0,\end{aligned}$$

qui pourront aussi nous être utiles dans la suite.

Au reste, si l'on voulait dans cette hypothèse résoudre les six équations du n° 2, c'est-à-dire déterminer six des neuf quantités $x, y, z, x', y', z', \dots$ par les trois autres, on y parviendrait aisément à l'aide des formules précédentes; car supposons que les trois données soient x, y, x' , on aura d'abord par la première équation du n° 2

$$z = \sqrt{1 - x^2 - y^2},$$

ensuite la première des équations trouvées en dernier lieu donnera

$$x'' = \sqrt{1 - x^2 - x'^2}.$$

Connaissant ainsi les cinq quantités x, y, z, x', x'' , on trouvera les quatre autres à l'aide des équations

$$\begin{aligned}z &= x'y'' - y'x'', & y &= z'x'' - x'z'', \\xy + x'y' + x''y'' &= 0, \\xz + x'z' + x''z'' &= 0,\end{aligned}$$

lesquelles donnent

$$\begin{aligned}y' &= -\frac{x''z + x'x'y''}{x'^2 + x''^2}, & z' &= \frac{x''y - x'x'z}{x'^2 + x''^2}, \\y'' &= \frac{x'z - x'x'y''}{x'^2 + x''^2}, & z'' &= -\frac{x'y + x'x'z}{x'^2 + x''^2}.\end{aligned}$$

PROBLÈME.

8. Déterminer le mouvement d'un corps de figure quelconque qui n'est animé par aucune force accélératrice, et qui est seulement retenu par un de ses points, autour duquel il peut d'ailleurs tourner dans tous les sens.

SOLUTION. — Je considère le corps proposé comme l'assemblage d'une infinité de corpuscules ou points massifs unis ensemble de manière qu'ils gardent toujours nécessairement entre eux les mêmes distances; et pour connaître le mouvement de ce système, j'imagine trois axes fixes et perpendiculaires entre eux, qui passent par le point du corps qu'on suppose demeurer immobile, et auxquels je rapporte la position de chaque particule δm du corps par le moyen de trois coordonnées x, y, z parallèles à ces mêmes axes. J'aurai par les principes de mécanique, à cause que le système est supposé libre autour d'un point fixe, et qu'il n'est d'ailleurs sollicité par aucune force étrangère, j'aurai, dis-je, sur-le-champ ces trois équations

$$(1) \quad \sum \left(\frac{x dy - y dx}{dt} \right) \delta m = A,$$

$$(2) \quad \sum \left(\frac{z dx - x dz}{dt} \right) \delta m = B,$$

$$(3) \quad \sum \left(\frac{y dz - z dy}{dt} \right) \delta m = C,$$

auxquelles on peut joindre cette quatrième

$$(4) \quad \sum \left(\frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{dt} \right) \delta m = D.$$

Dans ces équations les quantités A, B, C, D sont des constantes arbitraires dépendantes de l'état initial du corps, dt est l'élément du temps, et $\sum$ est le signe d'intégration relativement aux différentes particules δm du corps.

Les trois premières équations résultent de ce principe connu que : dans tout système de corps qui agissent les uns sur les autres d'une ma-

nière quelconque, et qui sont de plus, si l'on veut, animés par des forces tendantes à un point fixe, ou assujettis de quelque manière que ce soit à se mouvoir autour d'un tel point, la somme des différentes aires ou secteurs que chaque corps décrit relativement à un plan fixe quelconque, multipliés chacun par la masse du corps qui le décrit, est toujours proportionnelle au temps; de sorte que la somme des produits des aires élémentaires par leurs masses respectives, divisée par l'élément du temps, est nécessairement une quantité constante. Ce principe est facile à démontrer dans tous les cas, mais surtout dans le cas présent, où il suffit de considérer que la somme des moments de toutes les forces

$$\frac{d^2 x}{dt^2} \delta m, \quad \frac{d^2 y}{dt^2} \delta m, \quad \frac{d^2 z}{dt^2} \delta m$$

par rapport à un axe quelconque doit être nulle, ce qui donne immédiatement les trois équations

$$\sum \left(\frac{x dy - y dx}{dt^2} \right) \delta m = 0,$$

$$\sum \left(\frac{z dx - x dz}{dt^2} \right) \delta m = 0,$$

$$\sum \left(\frac{y dz - z dy}{dt^2} \right) \delta m = 0,$$

dont les trois premières équations ci-dessus ne sont que les intégrales.

À l'égard de la quatrième équation, elle renferme le principe très-connu de la conservation des forces vives; on pourrait la déduire, dans le cas présent, des trois précédentes à l'aide des différentiations et d'une nouvelle intégration, comme nous le ferons voir plus bas; mais puisqu'elle présente une intégrale toute trouvée, nous nous en servons pour simplifier notre solution. Toute la difficulté se réduit donc à déterminer le mouvement du corps par le moyen de ces équations, et c'est dans cette détermination que consiste uniquement le mérite de ma solution, si elle en a quelqu'un.

Il est clair, par la dernière Remarque, que les formules trouvées dans

592 NOUVELLE SOLUTION DU PROBLÈME DU MOUVEMENT

les nos 2 et suivants s'appliquent naturellement au Problème dont il s'agit. Pour cela il n'y a qu'à prendre dans l'intérieur du corps deux points quelconques M' et M'', pour lesquels les coordonnées soient $x', y', z', x'', y'', z''$; et comme la position de ces points est à volonté, il sera bon de les prendre tels que leurs distances au point fixe, qui est en même temps le centre des coordonnées, soient toutes deux égales à 1, et que de plus les rayons menés de ce centre aux mêmes points fassent entre eux un angle droit; on aura de cette manière (5)

$$a' = 1, \quad a'' = 1, \quad \varepsilon = 90^\circ,$$

donc (3)

$$b = 0, \quad \alpha = 1.$$

De plus, si l'on nomme r la distance de la particule δm au plan qui passe par le point fixe et par les deux points donnés M' et M'', q la distance de cette même particule à un plan passant par le point fixe et perpendiculaire au rayon du point M', et enfin p la distance de la même particule à un plan passant aussi par le point fixe, mais perpendiculaire au rayon du point M'', on aura (5)

$$\beta = r, \quad b' = q, \quad b'' = p.$$

Et il est clair que les trois quantités p, q, r ne seront autre chose que les coordonnées rectangles qui donnent la position de chaque particule δm par rapport à trois axes perpendiculaires entre eux, passant par le point fixe du corps et demeurant toujours fixes au dedans du corps; en sorte que ces quantités ne seront variables que pour les différentes particules, mais seront toujours constantes pour une même particule pendant le mouvement du corps.

Faisant donc ces substitutions dans les formules des nos 3 et 4, on aura d'abord

$$x = \xi r + x' q + x'' p,$$

$$y = \eta r + y' q + y'' p,$$

$$z = \zeta r + z' q + z'' p;$$

DE ROTATION D'UN CORPS DE FIGURE QUELCONQUE. 593

ensuite, à cause de $d\phi = -d\psi$ et $d\Psi = -d\varphi$,

$$dx = \xi(p d\varphi + q d\psi) - x'(r d\psi + p d\omega) + x''(q d\omega - r d\varphi),$$

$$dy = \eta(p d\varphi + q d\psi) - y'(r d\psi + p d\omega) + y''(q d\omega - r d\varphi),$$

$$dz = \zeta(p d\varphi + q d\psi) - z'(r d\psi + p d\omega) + z''(q d\omega - r d\varphi);$$

et enfin

$$x dy - y dx = -\zeta [qr d\varphi - pr d\psi - (p^2 + q^2) d\omega]$$

$$+ z' [pq d\psi + (p^2 + r^2) d\varphi - qr d\omega]$$

$$- z'' [pq d\varphi + (q^2 + r^2) d\psi + pr d\omega],$$

$$z dx - x dz = -\eta [qr d\varphi - pr d\psi - (p^2 + q^2) d\omega]$$

$$+ y' [pq d\psi + (p^2 + r^2) d\varphi - qr d\omega]$$

$$- y'' [pq d\varphi + (q^2 + r^2) d\psi + pr d\omega],$$

$$y dz - z dy = -\xi [qr d\varphi - pr d\psi - (p^2 + q^2) d\omega]$$

$$+ x' [pq d\psi + (p^2 + r^2) d\varphi - qr d\omega]$$

$$- x'' [pq d\varphi + (q^2 + r^2) d\psi + pr d\omega].$$

Donc, si l'on multiplie ces trois dernières équations par δm , qu'ensuite on les intègre par rapport à la caractéristique $\sum$, en ne faisant varier que les quantités p, q, r , et regardant les autres comme constantes, et qu'on fasse, pour abrégér,

$$\sum qr \delta m = F, \quad \sum pr \delta m = G, \quad \sum pq \delta m = H, \\ \sum (q^2 + r^2) \delta m = L, \quad \sum (p^2 + r^2) \delta m = M, \quad \sum (p^2 + q^2) \delta m = N,$$

on aura, en vertu des équations (1), (2), (3) ci-dessus, ces trois-ci

$$(5) \quad \begin{cases} -\zeta \left(F \frac{d\varphi}{dt} - G \frac{d\psi}{dt} - N \frac{d\omega}{dt} \right) \\ + z' \left(H \frac{d\psi}{dt} + M \frac{d\varphi}{dt} - F \frac{d\omega}{dt} \right) \\ - z'' \left(H \frac{d\varphi}{dt} + L \frac{d\psi}{dt} + G \frac{d\omega}{dt} \right) = A, \end{cases}$$

III.

75

$$(6) \quad \begin{cases} -n \left(F \frac{d\varphi}{dt} - G \frac{d\psi}{dt} - N \frac{d\omega}{dt} \right) \\ + y' \left(H \frac{d\psi}{dt} + M \frac{d\varphi}{dt} - F \frac{d\omega}{dt} \right) \\ - y'' \left(H \frac{d\varphi}{dt} + L \frac{d\psi}{dt} + G \frac{d\omega}{dt} \right) = B, \end{cases}$$

$$(7) \quad \begin{cases} -z \left(F \frac{d\varphi}{dt} - G \frac{d\psi}{dt} - N \frac{d\omega}{dt} \right) \\ + x' \left(H \frac{d\psi}{dt} + M \frac{d\varphi}{dt} - F \frac{d\omega}{dt} \right) \\ - x'' \left(H \frac{d\varphi}{dt} + L \frac{d\psi}{dt} + G \frac{d\omega}{dt} \right) = C. \end{cases}$$

Ces équations étant élevées chacune au carré, et ensuite ajoutées ensemble, donnent d'abord (en vertu des formules du n° 2, et à cause de $a' = 1$, $a'' = 1$, $b = 0$) celle-ci, où les quantités x' , y' , z' , x'' , y'' , z'' ne se trouvent plus,

$$(8) \quad \begin{cases} \left(F \frac{d\varphi}{dt} - G \frac{d\psi}{dt} - N \frac{d\omega}{dt} \right)^2 \\ + \left(H \frac{d\psi}{dt} + M \frac{d\varphi}{dt} - F \frac{d\omega}{dt} \right)^2 \\ + \left(H \frac{d\varphi}{dt} + L \frac{d\psi}{dt} + G \frac{d\omega}{dt} \right)^2 = A^2 + B^2 + C^2. \end{cases}$$

De plus, si l'on ajoute ensemble les carrés des valeurs de dx , dy , dz trouvées ci-dessus, on aura, en ayant égard aux mêmes formules du n° 2,

$$\begin{aligned} dx^2 + dy^2 + dz^2 &= (p d\varphi + q d\psi)^2 + (r d\psi + p d\omega)^2 + (q d\omega - r d\varphi)^2 \\ &= (p^2 + r^2) d\varphi^2 + (q^2 + r^2) d\psi^2 + (p^2 + q^2) d\omega^2 \\ &\quad + 2pq d\varphi d\psi + 2pr d\psi d\omega - 2qr d\varphi d\omega; \end{aligned}$$

done multipliant par δm , intégrant par rapport à la caractéristique Σ , et faisant les substitutions ci-dessus, on aura, en vertu de l'équation (4), celle-ci

$$(9) \quad M \frac{d\varphi^2}{dt^2} + L \frac{d\psi^2}{dt^2} + N \frac{d\omega^2}{dt^2} + 2H \frac{d\varphi}{dt} \frac{d\psi}{dt} + 2G \frac{d\psi}{dt} \frac{d\omega}{dt} - 2F \frac{d\varphi}{dt} \frac{d\omega}{dt} = D^2.$$

Ainsi voilà déjà deux équations (8) et (9) qui ne renferment que les

trois inconnues $\frac{d\varphi}{dt}$, $\frac{d\psi}{dt}$, $\frac{d\omega}{dt}$, et par lesquelles on pourra par conséquent déterminer deux quelconques d'entre elles par la troisième.

Faisons pour plus de simplicité

$$(10) \quad \begin{cases} \lambda = -F \frac{d\varphi}{dt} + G \frac{d\psi}{dt} + N \frac{d\omega}{dt}, \\ \mu = M \frac{d\varphi}{dt} + H \frac{d\psi}{dt} - F \frac{d\omega}{dt}, \\ \nu = H \frac{d\varphi}{dt} + L \frac{d\psi}{dt} + G \frac{d\omega}{dt}, \end{cases}$$

et les deux équations dont nous venons de parler pourront se mettre sous cette forme assez simple

$$(11) \quad \begin{cases} \lambda^2 + \mu^2 + \nu^2 = A^2 + B^2 + C^2, \\ \lambda \frac{d\omega}{dt} + \mu \frac{d\varphi}{dt} + \nu \frac{d\psi}{dt} = D^2. \end{cases}$$

Tirant donc des trois équations ci-dessus les valeurs de $\frac{d\varphi}{dt}$, $\frac{d\psi}{dt}$, $\frac{d\omega}{dt}$ en λ , μ , ν , et les substituant dans la seconde des deux équations (11), on aura deux équations en λ , μ , ν à l'aide desquelles on pourra déterminer, par exemple, les valeurs de μ et ν en λ ; de sorte qu'il ne restera plus qu'à connaître λ .

Pour cela je reprends les trois équations (5), (6), (7), lesquelles par l'introduction des quantités λ , μ , ν se réduisent à cette forme

$$(12) \quad \begin{cases} \zeta \lambda + \alpha' \mu - \alpha'' \nu = A, \\ \eta \lambda + \gamma' \mu - \gamma'' \nu = B, \\ \xi \lambda + \alpha' \mu - \alpha'' \nu = C; \end{cases}$$

et ajoutant ensemble ces équations après les avoir multipliées, la première par ζ , la seconde par η , et la troisième par ξ , j'ai par les formules du n° 2

$$\lambda = A\zeta + B\eta + C\xi.$$

J'aurai de même en multipliant ces équations respectivement par $d\zeta$, $d\eta$, $d\xi$, et les ajoutant ensuite ensemble, en ayant égard aux formules du n° 4,

$$-\mu d\psi + \nu d\varphi = A d\zeta + B d\eta + C d\xi.$$

Mais l'équation précédente donne par la différentiation

$$d\lambda = Ad\xi + Bd\eta + Cd\xi;$$

donc on aura

$$d\lambda = -\mu d\psi + \nu d\varphi,$$

et par conséquent

$$(13) \quad \frac{d\lambda}{-\mu \frac{d\psi}{dt} + \nu \frac{d\varphi}{dt}} = dt.$$

Ainsi, comme $\frac{d\psi}{dt}$ et $\frac{d\varphi}{dt}$ sont donnés en λ, μ, ν , et que μ, ν sont déjà connus en λ , cette équation ne contiendra que les deux variables t et λ déjà séparées, et donnera par conséquent par l'intégration la valeur de t en λ , et *vice versa* celle de λ en t ; ainsi l'on connaîtra les quantités λ, μ, ν par des fonctions du temps t .

Pour pouvoir connaître maintenant le mouvement de chaque point du corps, nommons, comme ci-dessus, x, y, z les trois coordonnées rectangles qui déterminent la position instantanée d'un point quelconque donné du corps, dans l'espace, et soient de même p, q, r les coordonnées rectangles qui déterminent la position du même point dans le corps même; on aura donc comme ci-devant

$$x = \xi r + \xi' q + \xi'' p,$$

$$y = \eta r + \eta' q + \eta'' p,$$

$$z = \zeta r + \zeta' q + \zeta'' p,$$

d'où l'on tire d'abord l'équation

$$(14) \quad x^2 + y^2 + z^2 = p^2 + q^2 + r^2.$$

Ensuite, faisant, pour abrégér,

$$P = pq \frac{d\varphi}{dt} + pr \frac{d\varpi}{dt} + (q^2 + r^2) \frac{d\psi}{dt},$$

$$Q = qr \frac{d\varpi}{dt} - pq \frac{d\psi}{dt} - (p^2 + r^2) \frac{d\varphi}{dt},$$

$$R = qr \frac{d\varphi}{dt} - pr \frac{d\psi}{dt} - (p^2 + q^2) \frac{d\varpi}{dt},$$

on aura aussi

$$ydx - xdy = (\zeta R + \xi' Q + \xi'' P) dt,$$

$$x dz - z dx = (\eta R + \eta' Q + \eta'' P) dt,$$

$$z dy - y dz = (\xi R + \xi' Q + \xi'' P) dt.$$

Ces trois équations, ainsi que les trois précédentes, étant multipliées respectivement par les équations (12), et les produits étant ajoutés ensemble, il viendra, en vertu des formules du n° 2, ces deux équations-ci

$$(15) \quad A z + B y + C x = r\lambda + q\mu - p\nu,$$

$$(16) \quad A(ydx - xdy) + B(xdz - zdx) + C(zdy - ydz) = (R\lambda + Q\mu - P\nu) dt,$$

lesquelles, étant combinées avec l'équation (14) ci-dessus, serviront à déterminer les trois inconnues x, y, z .

Je remarque d'abord que si les deux constantes arbitraires B et C étaient nulles, la détermination dont il s'agit n'aurait aucune difficulté; car faisant, pour abrégér,

$$\theta = r\lambda + q\mu - p\nu,$$

$$\Theta = R\lambda + Q\mu - P\nu,$$

$$n^2 = p^2 + q^2 + r^2$$

(θ et Θ étant des fonctions connues de t , et n une constante qui exprime la distance du point donné du corps au centre autour duquel il se meut), l'équation (15) donnera d'abord

$$z = \frac{\theta}{\Lambda},$$

et l'équation (14) donnera

$$x^2 + y^2 = n^2 - \frac{\theta^2}{\Lambda^2}.$$

Ensuite l'équation (16) donnera

$$ydx - xdy = \frac{\Theta dt}{\Lambda},$$

laquelle étant divisée par la précédente, on aura cette équation intégrable

$$\frac{ydx - xdy}{x^2 + y^2} = \frac{\Lambda \Theta dt}{\Lambda^2 n^2 - \theta^2}.$$

Soit donc, pour abrégér,

$$T = \int \frac{A \Theta dt}{A^2 n^2 - \Theta^2},$$

et l'on aura

$$\frac{y}{x} = \tan T,$$

d'où, à cause de

$$x^2 + y^2 = \frac{A^2 n^2 - \Theta^2}{A^2},$$

on tire

$$x = \frac{\sqrt{A^2 n^2 - \Theta^2}}{A} \cos T, \quad y = \frac{\sqrt{A^2 n^2 - \Theta^2}}{A} \sin T.$$

Mais, pour ne pas borner notre solution au cas de $B = 0$ et $C = 0$, je vais résoudre les trois équations (14), (15) et (16) dans toute leur généralité.

Je fais pour cela

$$h^2 = A^2 + B^2 + C^2$$

et

$$f = \frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}, \quad g = \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}, \quad h = \frac{C}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}},$$

d'où

$$A = hf, \quad B = hg, \quad C = hh;$$

en sorte qu'on ait

$$f^2 + g^2 + h^2 = 1,$$

et je prends six autres quantités $f', g', h', f'', g'', h''$, entre lesquelles et les trois quantités f, g, h j'établis les mêmes rapports qu'entre les quantités $x, y, z, x', y', z', x'', y'', z''$ du n° 2, en y supposant

$$a = a' = a'' = 1 \quad \text{et} \quad b = b' = b'' = 0;$$

j'aurai donc aussi entre ces mêmes quantités $f, g, h, f', g', h', f'', g'', h''$ des relations analogues à celles qu'on a trouvées dans le n° 7 entre $x, y, z, x', y', z', x'', y'', z''$, en sorte que prenant à volonté les trois quantités f, g, f' , on pourra par leur moyen déterminer les six autres.

Cela posé, je suppose encore

$$fz + gy + hx = Z,$$

$$f'z + g'y + h'x = Y,$$

$$f''z + g''y + h''x = X;$$

j'aurai d'abord, en ajoutant ensemble les carrés de ces trois équations,

$$z^2 + y^2 + x^2 = Z^2 + Y^2 + X^2,$$

à cause des relations établies entre les quantités $f, g, h, f', g', h', \dots$ (2); ainsi l'on aura par l'équation (14)

$$X^2 + Y^2 + Z^2 = n^2.$$

Ensuite l'équation (15) deviendra

$$hZ = \Theta.$$

Or si l'on cherche la valeur de $YdX - XdY$, on la trouvera égale à

$$(g'h'' - h'g'')(ydx - xdy) + (h'f'' - f'h'')(xdz - zdx) \\ + (f'g'' - g'f'')(zdy - ydz);$$

mais, par les formules du n° 7, on aura

$$g'h'' - h'g'' = f, \quad h'f'' - f'h'' = g, \quad f'g'' - g'f'' = h,$$

donc l'équation (16) deviendra

$$h(YdX - XdY) = \Theta dt.$$

Ainsi l'on a maintenant entre X, Y et Z les mêmes équations qu'on a eues ci-dessus entre x, y, z dans le cas de $B = 0$ et $C = 0$, avec cette seule différence qu'il y a ici k à la place de A . On aura donc sur-le-champ

$$X = \frac{\sqrt{h^2 n^2 - \Theta^2}}{h} \cos T, \quad Y = \frac{\sqrt{h^2 n^2 - \Theta^2}}{h} \sin T, \quad Z = \frac{\Theta}{h}.$$

Ayant les valeurs de X, Y, Z , on tirera des formules précédentes celles de x, y, z , et l'on aura (7) par les relations qui doivent avoir lieu entre

les coefficients $f, g, h, f', g', h', \dots$

$$\begin{aligned}x &= hZ + h'Y + h''X, \\y &= gZ + g'Y + g''X, \\z &= fZ + f'Y + f''X.\end{aligned}$$

Il faut remarquer que la quantité f' demeure indéterminée; de sorte qu'on pourra lui donner telle valeur qu'on voudra, sans déroger en rien à la généralité de la solution.

9. REMARQUE I. — Si l'on tire des trois équations (10) du numéro précédent les valeurs de $\frac{d\varphi}{dt}$, $\frac{d\psi}{dt}$, $\frac{d\varpi}{dt}$, on aura, en faisant, pour abrégér,

$$\Delta = LMN - 2FGH - F^2L - G^2M - H^2N,$$

ces expressions

$$\begin{aligned}\frac{d\varphi}{dt} &= \frac{(GH + FL)\lambda + (LN - G^2)\mu - (FG + HN)\nu}{\Delta}, \\ \frac{d\psi}{dt} &= \frac{-(FH + GM)\lambda - (FG + HN)\mu + (MN - F^2)\nu}{\Delta}, \\ \frac{d\varpi}{dt} &= \frac{(LM - H^2)\lambda + (GH + FL)\mu - (FH + GM)\nu}{\Delta},\end{aligned}$$

qui, étant substituées dans la seconde des équations (11), la réduiront à cette forme

$$\begin{aligned}\frac{LM - H^2}{\Delta}\lambda^2 + \frac{LN - G^2}{\Delta}\mu^2 + \frac{MN - F^2}{\Delta}\nu^2 \\ + 2\frac{GH + FL}{\Delta}\lambda\mu - 2\frac{FH + GM}{\Delta}\lambda\nu - 2\frac{FG + HN}{\Delta}\mu\nu = E^2;\end{aligned}$$

et cette équation, étant combinée avec cette autre

$$\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2 = h^2,$$

servira, comme nous l'avons déjà dit, à déterminer μ et ν en λ , ou, en général, à déterminer λ, μ et ν par une même indéterminée quelconque.

En effet, si l'on fait

$$u = s\lambda, \quad v = u\lambda,$$

et qu'on divise les deux équations l'une par l'autre, la quantité λ s'en ira, et l'on aura une équation du second degré entre s et u , par laquelle on pourra déterminer u en s ; ensuite on aura par la dernière équation

$$\lambda = \frac{h}{\sqrt{1 + s^2 + u^2}},$$

et de là on connaîtra les trois quantités λ, μ, ν en s , dont les valeurs étant substituées dans le premier membre de l'équation (13), on aura une équation séparée entre s et t , par laquelle on déterminera s en t et *vice versa*.

Mais, comme de cette manière on tombe dans une équation un peu compliquée à cause des doubles signes radicaux que les expressions de λ, μ, ν doivent renfermer, il est bon de voir comment on peut parvenir à des résultats plus simples, à l'aide de quelques substitutions convenables; d'autant plus que la méthode que nous allons exposer pourra aussi être utile dans d'autres occasions.

Il est visible que, si l'on prend de nouveau neuf quantités

$$f, g, h, f', g', h', f'', g'', h'',$$

qui soient assujetties aux mêmes conditions que les quantités

$$x, y, z, x', y', z', x'', y'', z''$$

du n° 2, en supposant

$$a = a' = a'' = 1 \quad \text{et} \quad b = b' = b'' = 0,$$

on aura

$$(f\lambda + f'\mu + f''\nu)^2 + (g\lambda + g'\mu + g''\nu)^2 + (h\lambda + h'\mu + h''\nu)^2 = \lambda^2 + \mu^2 + \nu^2 = h^2;$$

et comme parmi ces neuf quantités il en reste trois d'indéterminées, à cause qu'il n'y a que six conditions à remplir (numéro cité), on pourra encore, en introduisant trois nouvelles indéterminées α, β, γ , faire en

sorte qu'on ait aussi

$$\begin{aligned} & \alpha(f\lambda + f'\mu + f''\nu)^2 + \beta(g\lambda + g'\mu + g''\nu)^2 + \gamma(h\lambda + h'\mu + h''\nu)^2 \\ &= \frac{LM - H^2}{\Delta} \lambda^2 + \frac{LN - G^2}{\Delta} \mu^2 + \frac{MN - F^2}{\Delta} \nu^2 \\ &+ 2 \frac{GH + FL}{\Delta} \lambda\mu - 2 \frac{FH + GM}{\Delta} \lambda\nu - 2 \frac{FG + HN}{\Delta} \mu\nu = E^2; \end{aligned}$$

car pour cela il n'y aura qu'à supposer

$$\begin{aligned} \frac{LM - H^2}{\Delta} &= \alpha f^2 + \beta g^2 + \gamma h^2, \\ \frac{LN - G^2}{\Delta} &= \alpha f'^2 + \beta g'^2 + \gamma h'^2, \\ \frac{MN - F^2}{\Delta} &= \alpha f''^2 + \beta g''^2 + \gamma h''^2, \\ \frac{GH + FL}{\Delta} &= \alpha f f' + \beta g g' + \gamma h h', \\ -\frac{FH + GM}{\Delta} &= \alpha f f'' + \beta g g'' + \gamma h h'', \\ -\frac{FG + HN}{\Delta} &= \alpha f' f'' + \beta g' g'' + \gamma h' h''. \end{aligned}$$

Pour pouvoir maintenant résoudre ces équations, je remarque que les neuf quantités $f, g, h, f', g', h', \dots$ auront nécessairement entre elles des relations analogues à celles qu'on a trouvées dans le n° 7 entre $x, y, z, x', y', z', \dots$; d'où il s'ensuit que, si l'on fait, pour abrégér,

$$\begin{aligned} A &= \frac{LM - H^2}{\Delta}, & B &= \frac{LN - G^2}{\Delta}, & C &= \frac{MN - F^2}{\Delta}, \\ a &= \frac{GH + FL}{\Delta}, & b &= -\frac{FH + GM}{\Delta}, & c &= -\frac{FG + HN}{\Delta} \end{aligned}$$

(il ne faut pas confondre ces quantités A, B, C, a, b, c avec celles que nous avons dénotées ailleurs par les mêmes lettres), on trouvera les combinaisons suivantes

$$\begin{aligned} A f + a f' + b f'' &= \alpha f, & B f' + a f + c f'' &= \alpha f', & C f'' + b f + c f' &= \alpha f'', \\ A g + a g' + b g'' &= \beta g, & B g' + a g + c g'' &= \beta g', & C g'' + b g + c g' &= \beta g'', \\ A h + a h' + b h'' &= \gamma h, & B h' + a h + c h'' &= \gamma h', & C h'' + b h + c h' &= \gamma h''. \end{aligned}$$

Des deux premières de ces équations on tire

$$f' = \frac{(A - \alpha)c - ab}{(B - \alpha)b - ac} f, \quad f'' = \frac{(A - \alpha)(B - \alpha) - a^2}{(B - \alpha)b - ac} f,$$

et ces valeurs étant substituées dans la troisième on aura, après avoir divisé par f et fait disparaître les fractions, cette équation en α

$$(\alpha - A)(\alpha - B)(\alpha - C) - c^2(\alpha - A) - b^2(\alpha - B) - a^2(\alpha - C) - 2abc = 0.$$

Si l'on traite de même les équations suivantes, on en tire cette autre équation en β

$$(\beta - A)(\beta - B)(\beta - C) - c^2(\beta - A) - b^2(\beta - B) - a^2(\beta - C) - 2abc = 0.$$

Et les trois dernières équations donneront pareillement cette équation en γ

$$(\gamma - A)(\gamma - B)(\gamma - C) - c^2(\gamma - A) - b^2(\gamma - B) - a^2(\gamma - C) - 2abc = 0.$$

D'où il est facile de conclure que les trois quantités α, β, γ seront les racines de cette équation du troisième degré

$$(\rho - A)(\rho - B)(\rho - C) - c^2(\rho - A) - b^2(\rho - B) - a^2(\rho - C) - 2abc = 0,$$

savoir

$$\begin{aligned} \rho^3 - (A + B + C)\rho^2 + (AB + AC + BC - a^2 - b^2 - c^2)\rho \\ - ABC + c^2A + b^2B + a^2C - 2abc = 0. \end{aligned}$$

Or cette équation, étant d'un degré impair, aura nécessairement une racine réelle; mais je vais démontrer qu'elle les aura par cela même toutes trois réelles.

Pour cet effet je remarque que si l'on prend la racine réelle de l'équation dont il s'agit pour α , les deux quantités $\frac{f'}{f}$ et $\frac{f''}{f}$ seront nécessairement réelles, ce qui est évident par les valeurs ci-dessus de ces quantités; et je vais prouver qu'alors les quantités $\frac{g'}{g}, \frac{g''}{g}$, ainsi que $\frac{h'}{h}, \frac{h''}{h}$ seront réelles aussi; après quoi notre proposition sera démontrée, parce qu'on

a, par la quatrième des équations ci-dessus,

$$\beta = A + a \frac{f'}{g} + b \frac{g''}{g},$$

et par la septième

$$\gamma = A + a \frac{h'}{h} + b \frac{h''}{h}.$$

Qu'on multiplie la première des mêmes équations par la quatrième, la deuxième par la cinquième, la troisième par la sixième, et qu'on ajoute ces trois produits ensemble, on aura (à cause de $fg + f'g' + f''g'' = 0$ par les formules du n° 7) cette équation

$$\begin{aligned} & (Af + af' + bf'')(Ag + ag' + bg'') \\ & + (Bf'' + af' + cf'')(Bg' + ag + cg'') \\ & + (Cf'' + bf' + cf'')(Cg'' + bg + cg') = 0, \end{aligned}$$

c'est-à-dire en divisant par fg ,

$$\begin{aligned} & \left(A + a \frac{f'}{f} + b \frac{f''}{f} \right) \left(A + a \frac{g'}{g} + b \frac{g''}{g} \right) \\ & + \left(B \frac{f'}{f} + a + c \frac{f''}{f} \right) \left(B \frac{g'}{g} + a + c \frac{g''}{g} \right) \\ & + \left(C \frac{f''}{f} + b + c \frac{f'}{f} \right) \left(C \frac{g''}{g} + b + c \frac{g'}{g} \right) = 0. \end{aligned}$$

On trouvera de même, en ajoutant ensemble les produits de la première par la septième, de la deuxième par la huitième et de la troisième par la neuvième, et ayant attention que $fh + f'h' + f''h'' = 0$, on trouvera, dis-je, celle-ci

$$\begin{aligned} & (Af + af' + bf'')(Ah + ah' + bh'') \\ & + (Bf'' + af' + cf'')(Bh' + ah + ch'') \\ & + (Cf'' + bf' + cf'')(Ch'' + bh + ch') = 0, \end{aligned}$$

mais on aura par les formules du n° 7 appliquées au cas présent

$$h = f'g'' - g'f'', \quad h' = f''g - g''f, \quad h'' = fg' - gf';$$

donc si l'on substitue ces valeurs dans l'équation précédente, et qu'on la

divise par f^2g , elle deviendra

$$\begin{aligned} & \left(A + a \frac{f'}{f} + b \frac{f''}{f} \right) \left[A \left(\frac{f'g''}{fg} - \frac{f''g'}{fg} \right) + a \left(\frac{f''}{f} - \frac{g''}{g} \right) + b \left(\frac{g'}{g} - \frac{f'}{f} \right) \right] \\ & + \left(B \frac{f'}{f} + a + c \frac{f''}{f} \right) \left[B \left(\frac{f''}{f} - \frac{g''}{g} \right) + a \left(\frac{f'g''}{fg} - \frac{f''g'}{fg} \right) + c \left(\frac{g'}{g} - \frac{f'}{f} \right) \right] \\ & + \left(C \frac{f''}{f} + b + c \frac{f'}{f} \right) \left[C \left(\frac{g'}{g} - \frac{f'}{f} \right) + b \left(\frac{f'g''}{fg} - \frac{f''g'}{fg} \right) + c \left(\frac{f''}{f} - \frac{g''}{g} \right) \right] = 0. \end{aligned}$$

On a donc ainsi deux équations linéaires entre les deux inconnues $\frac{g'}{g}$, $\frac{g''}{g}$, de sorte que les valeurs qu'on trouvera pour ces inconnues seront nécessairement réelles.

Enfin on aura

$$\frac{h'}{h} = \frac{\frac{f''}{f} - \frac{g''}{g}}{\frac{f'g''}{fg} - \frac{f''g'}{fg}}, \quad \frac{h''}{h} = \frac{\frac{g'}{g} - \frac{f'}{f}}{\frac{f'g''}{fg} - \frac{f''g'}{fg}};$$

par conséquent les valeurs de $\frac{h'}{h}$ et de $\frac{h''}{h}$ seront aussi réelles.

Il s'ensuit de la démonstration précédente que :

Toute équation du troisième degré réductible à la forme

$$\begin{aligned} x^3 - (A + B + C)x^2 + (AB + AC + BC - a^2 - b^2 - c^2)x \\ - ABC + c^2A + b^2B + a^2C - 2abc = 0 \end{aligned}$$

a nécessairement trois racines réelles, quelles que soient les quantités A, B, C, a, b, c, pourvu seulement qu'elles soient réelles.

Comme ce Théorème est assez remarquable, il serait utile d'en chercher une démonstration directe; mais ce n'est pas ici le lieu de nous occuper de cet objet.

Quant aux valeurs de f, f', f'' , comme on doit avoir par les formules du n° 7

$$f^2 + f'^2 + f''^2 = 1,$$

il n'y aura qu'à substituer dans cette équation les valeurs de f' et de f''

606 NOUVELLE SOLUTION DU PROBLEME DU MOUVEMENT
trouvées ci-dessus, et l'on en tirera d'abord celle de f , qui sera

$$f = \frac{(B - \alpha)b - ac}{\sqrt{[(B - \alpha)b - ac]^2 + [(A - \alpha)c - ab]^2 + [(A - \alpha)(B - \alpha) - a^2]^2}},$$

ensuite on aura

$$f' = \frac{(A - \alpha)c - ab}{\sqrt{[(B - \alpha)b - ac]^2 + [(A - \alpha)c - ab]^2 + [(A - \alpha)(B - \alpha) - a^2]^2}},$$

$$f'' = \frac{a^2 - (A - \alpha)(B - \alpha)}{\sqrt{[(B - \alpha)b - ac]^2 + [(A - \alpha)c - ab]^2 + [(A - \alpha)(B - \alpha) - a^2]^2}}.$$

On trouvera de même les valeurs de g , g' , g'' et de h , h' , h'' ; et pour cela il n'y aura qu'à changer dans les expressions précédentes α en β pour celles de g , g' , g'' , et α en γ pour celles de h , h' , h'' .

Ainsi les douze quantités indéterminées f , g , h , f' , g' , h' , f'' , g'' , h'' , α , β , γ seront connues moyennant la résolution d'une seule équation du troisième degré, et elles seront nécessairement toutes réelles.

Maintenant, si l'on fait, pour abréger,

$$\begin{aligned}\Pi &= f\lambda + f'\mu + f''\nu, \\ \Psi &= g\lambda + g'\mu + g''\nu, \\ \Phi &= h\lambda + h'\mu + h''\nu,\end{aligned}$$

nos deux équations à résoudre seront réduites à cette forme

$$\begin{aligned}\Pi^2 + \Psi^2 + \Phi^2 &= h^2, \\ \alpha\Pi^2 + \beta\Psi^2 + \gamma\Phi^2 &= E^2,\end{aligned}$$

d'où l'on tire facilement

$$\begin{aligned}\Psi &= \sqrt{\frac{\gamma k^2 - E^2 - (\gamma - \alpha)\Pi^2}{\gamma - \beta}}, \\ \Phi &= \sqrt{\frac{\beta k^2 - E^2 - (\beta - \alpha)\Pi^2}{\beta - \gamma}}.\end{aligned}$$

Or les trois équations ci-dessus étant ajoutées ensemble, après avoir été multipliées respectivement par f , g , h , par f' , g' , h' et par f'' , g'' , h'' , donnent sur-le-champ, en vertu des formules du n° 2 (a , a' , a'' étant ici supposées égales à 1, et b , b' , b'' supposées égales à zéro, comme on l'a

DE ROTATION D'UN CORPS DE FIGURE QUELCONQUE. 607
dit plus haut),

$$\lambda = f\Pi + g\Psi + h\Phi, \quad \mu = f'\Pi + g'\Psi + h'\Phi, \quad \nu = f''\Pi + g''\Psi + h''\Phi.$$

De plus, si dans les expressions de $\frac{d\varphi}{dt}$, $\frac{d\psi}{dt}$, $\frac{d\omega}{dt}$ trouvées au commencement de cette Remarque, on substitue pour

$$\frac{GH + FL}{\Delta}, \quad \frac{LN - G^2}{\Delta}, \dots$$

leurs valeurs

$$\alpha f f' + \beta g g' + \gamma h h', \quad \alpha f'^2 + \beta g'^2 + \gamma h'^2, \dots,$$

et qu'on y introduise les quantités Π , Ψ , Φ , on trouvera

$$\frac{d\omega}{dt} = \alpha f\Pi + \beta g\Psi + \gamma h\Phi,$$

$$\frac{d\varphi}{dt} = \alpha f'\Pi + \beta g'\Psi + \gamma h'\Phi,$$

$$\frac{d\psi}{dt} = \alpha f''\Pi + \beta g''\Psi + \gamma h''\Phi.$$

De là on aura, après les substitutions,

$$\begin{aligned}\nu \frac{d\varphi}{dt} - \mu \frac{d\psi}{dt} &= (\alpha - \beta)(g''f' - g'f'')\Pi\Psi \\ &\quad + (\gamma - \alpha)(f''h' - f'h'')\Pi\Phi \\ &\quad + (\beta - \gamma)(h''g' - h'g'')\Psi\Phi;\end{aligned}$$

c'est-à-dire par les formules du n° 7

$$\nu \frac{d\varphi}{dt} - \mu \frac{d\psi}{dt} = (\alpha - \beta)h\Pi\Psi + (\gamma - \alpha)g\Pi\Phi + (\beta - \gamma)f\Psi\Phi;$$

de sorte que l'équation (13) de la solution ci-dessus deviendra

$$\frac{f d\Pi + g d\Psi + h d\Phi}{(\beta - \gamma)f\Psi\Phi + (\gamma - \alpha)g\Pi\Phi + (\alpha - \beta)h\Pi\Psi} = dt.$$

Substituons au lieu de $d\Psi$ et $d\Phi$ leurs valeurs tirées des équations

$$\Pi^2 + \Psi^2 + \Phi^2 = h^2, \quad \alpha\Pi^2 + \beta\Psi^2 + \gamma\Phi^2 = E^2,$$

lesquelles donnent

$$d\Psi = \frac{(\gamma - \alpha)\Pi d\Pi}{(\beta - \gamma)\Psi}, \quad d\Phi = \frac{(\alpha - \beta)\Pi d\Pi}{(\beta - \gamma)\Phi},$$

608 NOUVELLE SOLUTION DU PROBLÈME DU MOUVEMENT
et l'équation dont il s'agit deviendra après les réductions

$$\frac{d\Pi}{(\beta - \gamma)\Psi\Phi} = dt,$$

c'est-à-dire en mettant pour Ψ et Φ leurs valeurs en Π trouvées plus haut,

$$\frac{d\Pi}{\sqrt{\beta h^2 - E^2 - (\beta - \alpha)\Pi^2}[-\gamma h^2 + E^2 + (\gamma - \alpha)\Pi^2]} = dt,$$

équation dont le premier membre n'est intégrable, en général, que par la rectification des sections coniques.

10. REMARQUE II. — Nous avons trouvé dans la solution du Problème précédent que la valeur de

$$dx^2 + dy^2 + dz^2,$$

c'est-à-dire le carré du petit espace qu'une particule quelconque du corps parcourt dans l'instant dt , est exprimée par la formule

$$(pd\varphi + qd\psi)^2 + (rd\psi + pd\varpi)^2 + (qd\varpi - rd\varphi)^2,$$

p, q, r étant les coordonnées rectangles qui déterminent la position de cette particule dans l'intérieur du corps; donc toute particule ou point du corps dont les coordonnées seront telles, qu'on ait à la fois

$$pd\varphi + qd\psi = 0, \quad rd\psi + pd\varpi = 0, \quad qd\varpi - rd\varphi = 0,$$

sera en repos pendant un instant; or ces trois équations donnent

$$\frac{q}{p} = -\frac{d\varphi}{d\psi}, \quad \frac{r}{p} = -\frac{d\varpi}{d\psi};$$

d'où il est aisé de conclure qu'il y aura nécessairement dans le corps, non pas un seul point immobile à chaque instant, mais une suite de points formant une ligne droite, qui sera par conséquent l'axe de rotation instantanée du corps; et il est clair que cet axe fera avec les trois

DE ROTATION D'UN CORPS DE FIGURE QUELCONQUE. 609

axes des coordonnées p, q, r des angles ρ, σ, ω tels, que

$$\begin{aligned} \cos\rho &= \frac{p}{\sqrt{p^2 + q^2 + r^2}} = \frac{d\psi}{\sqrt{d\psi^2 + d\varphi^2 + d\varpi^2}}, \\ \cos\sigma &= \frac{q}{\sqrt{p^2 + q^2 + r^2}} = \frac{d\varphi}{\sqrt{d\psi^2 + d\varphi^2 + d\varpi^2}}, \\ \cos\omega &= \frac{r}{\sqrt{p^2 + q^2 + r^2}} = \frac{d\varpi}{\sqrt{d\psi^2 + d\varphi^2 + d\varpi^2}}, \end{aligned}$$

ou bien, en mettant pour $d\psi, d\varphi, d\varpi$ leurs valeurs en Π, Ψ, Φ , trouvées dans la solution ci-dessus,

$$\begin{aligned} \cos\rho &= \frac{f''\alpha\Pi + g''\beta\Psi + h''\gamma\Phi}{\sqrt{\alpha^2\Pi^2 + \beta^2\Psi^2 + \gamma^2\Phi^2}}, \\ \cos\sigma &= \frac{f'\alpha\Pi + g'\beta\Psi + h'\gamma\Phi}{\sqrt{\alpha^2\Pi^2 + \beta^2\Psi^2 + \gamma^2\Phi^2}}, \\ \cos\omega &= \frac{f\alpha\Pi + g\beta\Psi + h\gamma\Phi}{\sqrt{\alpha^2\Pi^2 + \beta^2\Psi^2 + \gamma^2\Phi^2}}. \end{aligned}$$

Maintenant il est clair que, comme les quantités Π, Ψ et Φ sont, en général, des fonctions du temps t , la position de l'axe de rotation dont il s'agit variera continuellement, à moins que ces trois quantités ne gardent entre elles des rapports constants; or comme on a (par la Remarque précédente)

$$\frac{\Psi}{\Pi} = \sqrt{\frac{\gamma h^2 - E^2}{\Pi^2} - \gamma + \alpha},$$

il est clair que cette quantité ne peut être constante à moins que la quantité Π ne soit elle-même constante; et dans ce cas les deux autres quantités Ψ et Φ seront aussi nécessairement constantes. Voyons donc les conditions qui peuvent rendre Π égale à une constante.

Si l'on considère l'équation entre Π et t , trouvée à la fin de la Remarque précédente, on verra aisément que la quantité Π sera constante, c'est-à-dire que la différentielle $d\Pi$ sera nulle si le dénominateur est nul en même temps; mais pour que le temps t puisse être quelconque, il faudra de plus, par les règles connues, que la différentielle de la quantité qui est sous le signe radical dans le dénominateur soit nulle aussi :

610 NOUVELLE SOLUTION DU PROBLÈME DU MOUVEMENT

c'est pourquoi on aura ces deux équations de condition

$$\begin{aligned} & [\beta h^2 - E^2 - (\beta - \alpha) \Pi^2] [-\gamma h^2 + E^2 + (\gamma - \alpha) \Pi^2] = 0, \\ & [\beta h^2 - E^2 - (\beta - \alpha) \Pi^2] (\gamma - \alpha) \Pi - [-\gamma h^2 + E^2 + (\gamma - \alpha) \Pi^2] (\beta - \alpha) \Pi = 0. \end{aligned}$$

La première donne : ou

$$\beta h^2 - E^2 - (\beta - \alpha) \Pi^2 = 0,$$

auquel cas la seconde donnera

$$\text{ou } \Pi = 0 \text{ ou } \gamma h^2 - E^2 - (\gamma - \alpha) \Pi^2 = 0;$$

ou bien

$$\gamma h^2 - E^2 - (\gamma - \alpha) \Pi^2 = 0,$$

auquel cas la seconde donnera

$$\text{ou } \Pi = 0 \text{ ou } \beta h^2 - E^2 - (\beta - \alpha) \Pi^2 = 0;$$

d'où l'on voit qu'il faut nécessairement que de ces trois quantités

$$\Pi, \quad \beta h^2 - E^2 - (\beta - \alpha) \Pi^2, \quad \gamma h^2 - E^2 - (\gamma - \alpha) \Pi^2,$$

deux soient nulles à la fois; ce qui donne trois combinaisons, et par conséquent trois cas différents où l'axe de rotation instantanée pourra être fixe dans le corps; et comme on a

$$\Psi = \frac{\gamma h^2 - E^2 - (\gamma - \alpha) \Pi^2}{\gamma - \beta}, \quad \Phi = \frac{\beta h^2 - E^2 - (\beta - \alpha) \Pi^2}{\beta - \gamma},$$

il est clair que ces trois cas seront ceux où l'on aura en même temps $\Psi = 0$ et $\Phi = 0$, ou $\Pi = 0$ et $\Phi = 0$, ou $\Pi = 0$ et $\Psi = 0$; dans le premier cas on aura par les formules ci-dessus

$$\cos \rho = f'', \quad \cos \sigma = f', \quad \cos \omega = f,$$

dans le second on aura

$$\cos \rho = g'', \quad \cos \sigma = g', \quad \cos \omega = g,$$

et enfin dans le troisième

$$\cos \rho = h'', \quad \cos \sigma = h', \quad \cos \omega = h.$$

DE ROTATION D'UN CORPS DE FIGURE QUELCONQUE. 611

On voit donc qu'il y a dans chaque corps trois lignes droites qui peuvent être des axes de rotation fixes, et qu'il n'y en a, généralement parlant, que trois; de plus, si l'on nomme $\varepsilon, \varepsilon', \varepsilon''$ les angles que ces trois axes font entre eux, il est facile de voir, d'après ce qu'on a dit dans le n° 5, qu'on aura, en général,

$$\begin{aligned} gh + g'h' + g''h'' &= \cos \varepsilon, \\ fh + f'h' + f''h'' &= \cos \varepsilon', \\ fg + f'g' + f''g'' &= \cos \varepsilon'', \end{aligned}$$

de sorte que (7) à cause de

$$\begin{aligned} fg + f'g' + f''g'' &= 0, \\ fh + f'h' + f''h'' &= 0, \\ gh + g'h' + g''h'' &= 0, \end{aligned}$$

on aura

$$\cos \varepsilon = 0, \quad \cos \varepsilon' = 0, \quad \cos \varepsilon'' = 0,$$

et par conséquent

$$\varepsilon = 90^\circ, \quad \varepsilon' = 90^\circ, \quad \varepsilon'' = 90^\circ;$$

d'où il s'ensuit que les trois axes dont il s'agit seront nécessairement perpendiculaires entre eux.

Enfin, comme

$$\frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{dt^2}$$

exprime le carré de la vitesse de chaque particule du corps, et que cette quantité est représentée, en général, par la formule

$$\left(\frac{p d\varphi + q d\psi}{dt} \right)^2 + \left(\frac{r d\psi + p d\varpi}{dt} \right)^2 + \left(\frac{q d\varpi - r d\varphi}{dt} \right)^2,$$

si l'on y substitue les valeurs de $\frac{d\varphi}{dt}, \frac{d\psi}{dt}, \frac{d\varpi}{dt}$ en Π, Ψ, Φ (Remarque précédente) on trouvera que la vitesse d'une particule quelconque, pour laquelle les coordonnées sont p, q, r , sera, dans le cas de $\Psi = 0$ et $\Phi = 0$,

$$\alpha \Pi \sqrt{(pf' + qf'')^2 + (rf'' + pf')^2 + (qf - rf'')^2};$$

dans le cas de $\Pi = 0$ et $\Phi = 0$,

$$\beta \Psi \sqrt{(pg' + qg'')^2 + (rg'' + pg')^2 + (qg - rg')^2};$$

et dans le cas de $\Pi = 0$ et $\Psi = 0$,

$$\gamma \Phi \sqrt{(ph' + qh'')^2 + (rh'' + ph')^2 + (qh - rh')^2}.$$

Ainsi ces vitesses seront constantes; par conséquent le mouvement de rotation du corps autour de chacun des trois axes dont il s'agit sera uniforme.

14. REMARQUE III. — Nous avons dit dans la Solution ci-dessus que l'équation (4), qui renferme le principe de la conservation des forces vives, pouvait se déduire des équations (1), (2), (3). Pour le démontrer, nous considérerons ces trois équations sous la forme (12) à laquelle nous les avons réduites dans le n° 8, et prenant les différentielles pour en faire disparaître les constantes A, B, C, nous aurons

$$\begin{aligned} \xi d\lambda + z' d\mu - z'' d\nu + \lambda d\xi + \mu dz' - \nu dz'' &= 0, \\ \eta d\lambda + y' d\mu - y'' d\nu + \lambda d\eta + \mu dy' - \nu dy'' &= 0, \\ \xi d\lambda + x' d\mu - x'' d\nu + \lambda d\xi + \mu dx' - \nu dx'' &= 0, \end{aligned}$$

mais par les formules du n° 4 on a, en faisant $a=1$, $a'=1$, $a''=1$, $b=0$,

$$\begin{aligned} d\xi &= -x'd\psi - x''d\varphi, & dx' &= \xi d\psi + x''d\omega, & dx'' &= \xi d\varphi - x'd\omega, \\ d\eta &= -y'd\psi - y''d\varphi, & dy' &= \eta d\psi + y''d\omega, & dy'' &= \eta d\varphi - y'd\omega, \\ d\xi &= -z'd\psi - z''d\varphi, & dz' &= \xi d\psi + z''d\omega, & dz'' &= \xi d\varphi - z'd\omega, \end{aligned}$$

done substituant ces valeurs, nos trois équations deviendront

$$\begin{aligned} \xi(d\lambda + \mu d\psi - \nu d\varphi) + z'(d\mu - \lambda d\psi + \nu d\omega) - z''(d\nu + \lambda d\varphi - \mu d\omega) &= 0, \\ \eta(d\lambda + \mu d\psi - \nu d\varphi) + y'(d\mu - \lambda d\psi + \nu d\omega) - y''(d\nu + \lambda d\varphi - \mu d\omega) &= 0, \\ \xi(d\lambda + \mu d\psi - \nu d\varphi) + x'(d\mu - \lambda d\psi + \nu d\omega) - x''(d\nu + \lambda d\varphi - \mu d\omega) &= 0, \end{aligned}$$

lesquelles étant ajoutées ensemble après avoir été multipliées respectivement par ξ , η , ξ , par z' , y' , x' et par z'' , y'' , x'' , donneront, en vertu des formules du n° 2, ces trois-ci

$$\begin{aligned} d\lambda + \mu d\psi - \nu d\varphi &= 0, \\ d\mu - \lambda d\psi + \nu d\omega &= 0, \\ d\nu + \lambda d\varphi - \mu d\omega &= 0. \end{aligned}$$

Et employant les transformations de la Remarque première, ces trois équations deviendront

$$\begin{aligned} f \left[\frac{d\Pi}{dt} - (\beta - \gamma) \Psi \Phi \right] + g \left[\frac{d\Psi}{dt} - (\gamma - \alpha) \Pi \Phi \right] + h \left[\frac{d\Phi}{dt} - (\alpha - \beta) \Pi \Psi \right] &= 0, \\ f' \left[\frac{d\Pi}{dt} - (\beta - \gamma) \Psi \Phi \right] + g' \left[\frac{d\Psi}{dt} - (\gamma - \alpha) \Pi \Phi \right] + h' \left[\frac{d\Phi}{dt} - (\alpha - \beta) \Pi \Psi \right] &= 0, \\ f'' \left[\frac{d\Pi}{dt} - (\beta - \gamma) \Psi \Phi \right] + g'' \left[\frac{d\Psi}{dt} - (\gamma - \alpha) \Pi \Phi \right] + h'' \left[\frac{d\Phi}{dt} - (\alpha - \beta) \Pi \Psi \right] &= 0, \end{aligned}$$

lesquelles étant encore ajoutées ensemble après avoir été multipliées respectivement par f , f' , f'' , par g , g' , g'' et par h , h' , h'' , donneront enfin ces trois-ci

$$\begin{aligned} \frac{d\Pi}{dt} - (\beta - \gamma) \Psi \Phi &= 0, \\ \frac{d\Psi}{dt} - (\gamma - \alpha) \Pi \Phi &= 0, \\ \frac{d\Phi}{dt} - (\alpha - \beta) \Pi \Psi &= 0, \end{aligned}$$

qui serviront à déterminer les trois variables Π , Ψ , Φ .

Or il est visible qu'en multipliant la première par Πdt , la seconde par Ψdt et la troisième par Φdt , et les ajoutant ensemble, on aura une équation intégrable dont l'intégrale sera

$$\Pi^2 + \Psi^2 + \Phi^2 = \text{const.};$$

et multipliant de même la première par $\alpha \Pi dt$, la seconde par $\beta \Psi dt$, et la troisième par $\gamma \Phi dt$, on aura, après les avoir ajoutées ensemble, une nouvelle équation intégrable, et dont l'intégrale sera

$$\alpha \Pi^2 + \beta \Psi^2 + \gamma \Phi^2 = \text{const.}$$

Ces deux équations sont les mêmes qu'on a trouvées dans la Remarque I, et les mêmes que les équations (11) de la Solution précédente, dont la seconde renferme le principe de la conservation des forces vives.

12. REMARQUE IV. — Si l'on supposait que chaque particule du corps δm fût sollicitée par des forces quelconques, il n'y aurait qu'à réduire ces

forces à trois, dirigées suivant les coordonnées x, y, z , et, les représentant par les quantités X, Y, Z , on aurait par les principes connus de la Mécanique, au lieu des équations (1), (2), (3) du n° 8, ces trois-ci

$$\sum \left(\frac{x d^2 y - y d^2 x}{dt^2} \right) \delta m = \sum (xY - yX) \delta m,$$

$$\sum \left(\frac{z d^2 x - x d^2 z}{dt^2} \right) \delta m = \sum (zX - xZ) \delta m,$$

$$\sum \left(\frac{y d^2 z - z d^2 y}{dt^2} \right) \delta m = \sum (yZ - zY) \delta m.$$

Or, comme

$$x d^2 y - y d^2 x = d(x dy - y dx),$$

$$z d^2 x - x d^2 z = d(z dx - x dz),$$

$$y d^2 z - z d^2 y = d(y dz - z dy),$$

il est clair qu'on aura des équations de la même forme que celles dont nous venons de parler, avec cette différence que les quantités A, B, C ne seront plus constantes, mais auront ces valeurs

$$\frac{dA}{dt} = \sum (xY - yX) \delta m,$$

$$\frac{dB}{dt} = \sum (zX - xZ) \delta m,$$

$$\frac{dC}{dt} = \sum (yZ - zY) \delta m.$$

De plus, le principe de la conservation des forces vives donnera aussi une équation semblable à l'équation (4) avec cette différence que la quantité D^2 devra être telle, que l'on ait

$$d(D^2) = \sum (X dx + Y dy + Z dz) \delta m.$$

Ainsi, quand les quantités X, Y, Z seront données en x, y, z , on pourra employer les substitutions et les transformations dont nous avons fait usage dans le Problème précédent.

En général, il est clair qu'il n'entrera dans les équations du Problème que les variables $x', y', z', x'', y'', z'', \xi, \eta, \zeta$ et $d\psi, d\pi, d\varphi$; mais les six dernières sont des fonctions données des six premières (2 et 4), et

l'on a de plus entre celles-ci trois équations (2) par lesquelles on peut en déterminer trois par les trois autres. En effet, l'équation

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = a$$

donne d'abord

$$z' = \sqrt{a - x'^2 - y'^2};$$

ensuite l'équation

$$x'x'' + y'y'' + z'z'' = b$$

donne

$$y'y'' + z'z'' = b - x'x'',$$

dont le carré, étant retranché de l'équation

$$y''^2 + z''^2 = a - x''^2$$

multipliée par $y'^2 + z'^2$, donne celle-ci

$$(y'z'' - z'y'')^2 = (a - x''^2)(y'^2 + z'^2) - (b - x'x'')^2;$$

ainsi, combinant ces deux équations

$$y'y'' - z'z'' = b - x'x'',$$

$$y'z'' - z'y'' = \sqrt{(a - x''^2)(y'^2 + z'^2) - (b - x'x'')^2},$$

on trouvera y'' et z'' : en sorte que les trois quantités z', y'' et z'' seront données par ces trois autres x', y' et x'' . Moyennant quoi il n'y aura, à proprement parler, que trois variables; et la difficulté se réduira à déterminer ces variables par le temps t .

13. REMARQUE V. — Puisqu'on a, en général, dans la Solution précédente

$$x = \xi r + x'q + x''p, \quad y = \eta r + y'q + y''p, \quad z = \zeta r + z'q + z''p,$$

il est clair qu'en faisant

$$p = 0, \quad q = 0, \quad r = 1,$$

on aura

$$x = \xi, \quad y = \eta, \quad z = \zeta;$$

que de même on aura

$$x = x', \quad y = y', \quad z = z',$$

en faisant

$$r = 0, \quad p = 0, \quad q = 1;$$

qu'enfin on aura

$$x = x'', \quad y = y'', \quad z = z'',$$

en faisant

$$r = 0, \quad q = 0, \quad p = 1;$$

done, si l'on fait ces suppositions dans les valeurs de ζ , Θ et n (ce qui donnera

$$n = 1, \quad \zeta = \lambda, \quad \Theta = -\mu \frac{d\varphi}{dt} - \nu \frac{d\psi}{dt},$$

dans le premier cas,

$$\zeta = \mu, \quad \Theta = -\lambda \frac{d\varpi}{dt} - \nu \frac{d\psi}{dt},$$

dans le second cas,

$$\zeta = -\nu, \quad \Theta = -\mu \frac{d\varphi}{dt} + \nu \frac{d\varpi}{dt},$$

dans le troisième cas), on aura les valeurs des quantités ξ , η , ζ , x' , y' , z' , x'' , y'' , z'' , lesquelles seront les mêmes pour tous les points du corps; et ces quantités étant connues en t , on aura par les expressions ci-dessus les coordonnées x , y , z pour chaque point du corps dont la position dans le corps même dépendra des coordonnées p , q , r .

14. REMARQUE VI. — Si le corps qu'on a supposé jusqu'ici fixement arrêté par un de ses points, était entièrement libre, alors il n'y aurait qu'à prendre, à la place de ce point supposé fixe, le centre de gravité de tout le corps, car on sait que les mouvements de rotation se font autour de ce centre comme s'il était fixe; et à l'égard du mouvement de ce centre, on le déterminera par la considération qu'il doit être le même que si toutes les forces qui agissent sur les différentes parties du corps y étaient appliquées: tout cela est trop connu pour que nous devions nous arrêter à en donner la démonstration.

SUR L'ATTRACTION

DES

SPHÉROÏDES ELLIPTIQUES.



SUR L'ATTRACTION
DES
SPHÉROÏDES ELLIPTIQUES.

(Nouveaux Mémoires de l'Académie royale des Sciences et Belles-Lettres
de Berlin, année 1773.)

Quelques avantages que l'Analyse algébrique ait sur la méthode géométrique des Anciens, qu'on appelle vulgairement, quoique fort improprement, *synthèse*, il est néanmoins des Problèmes où celle-ci paraît préférable, tant par la clarté lumineuse qui l'accompagne, que par l'élégance et la facilité des solutions qu'elle donne. Il en est même pour lesquels l'analyse algébrique paraît en quelque sorte insuffisante, et où il semble que la méthode synthétique soit seule capable d'atteindre.

Le Problème où il s'agit de déterminer l'attraction qu'un sphéroïde elliptique exerce sur un point quelconque placé sur sa surface, ou dans son intérieur, est de cette espèce. M. Maclaurin, qui a le premier résolu ce Problème dans son excellente Pièce *sur le flux et le reflux de la mer*, couronnée par l'Académie des Sciences de Paris en 1740, a suivi une méthode purement géométrique, et fondée uniquement sur quelques propriétés de l'ellipse et des sphéroïdes elliptiques; et il faut avouer que cette partie de l'Ouvrage de M. Maclaurin est un chef-d'œuvre de Géométrie, qu'on peut comparer à tout ce qu'Archimède nous a laissé de plus beau et de plus ingénieux. Comme M. Maclaurin avait une sorte de prédilection pour la méthode des Anciens, il n'est pas surprenant qu'il l'ait

employée dans la solution du Problème dont nous venons de parler; mais il l'est extrêmement, ce me semble, qu'un Problème aussi important que celui-là n'ait pas été résolu depuis d'une manière directe et analytique, surtout dans ces derniers temps où l'Analyse est devenue d'un usage si commun et si général. On ne peut, je crois, en attribuer la cause qu'aux difficultés de calculs que la solution de cette question doit renfermer lorsqu'on l'envisage sous un point de vue purement analytique. Ce n'est pas qu'il ne soit aisé de trouver, et que même différents Géomètres n'aient déjà donné des formules générales pour déterminer l'attraction qu'un corps de figure quelconque exerce sur un point placé où l'on voudra; mais la grande difficulté consiste dans l'intégration de ces formules, et il paraît qu'on n'a pu y réussir jusqu'à présent qu'en se bornant à l'hypothèse que le solide soit très-peu différent d'une sphère. On trouve à la vérité dans les Ouvrages de M. Thomas Simpson une solution purement analytique du Problème de M. Maclaurin, dans laquelle on ne suppose point que le sphéroïde elliptique soit à très-peu près sphérique; mais d'un autre côté cette solution a le défaut de procéder par le moyen des séries, ce qui la rend non-seulement longue et compliquée, mais encore peu directe et peu rigoureuse.

Je me propose dans ce Mémoire de faire voir que bien loin que le Problème dont il s'agit se refuse à l'Analyse, il peut être résolu par ce moyen d'une manière, sinon plus simple, du moins plus directe et plus générale que par la voie de la synthèse; ce qui servira à détruire un des principaux arguments que les détracteurs de l'Analyse puissent apporter pour la rabaisser et pour prouver la supériorité de la méthode synthétique des Anciens.

PROBLÈME I.

1. *Trouver l'expression générale de l'attraction qu'un corps de figure donnée exerce sur un point placé où l'on voudra, en supposant que chaque particule du corps attire le même point comme une fonction quelconque de la distance.*

Soient a, b, c les trois coordonnées rectangles qui déterminent la posi-

tion du point donné par rapport à trois axes fixes pris à volonté, et soient de même x, y, z les trois coordonnées rectangles qui déterminent la position d'une particule α du corps par rapport aux mêmes axes, il est clair que la distance entre cette particule et le point attiré étant nommée r , on aura

$$r = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2};$$

donc désignant, en général, par R la fonction de r à laquelle l'attraction est supposée proportionnelle, on aura αR pour l'attraction exercée par la particule α suivant la direction de la ligne r ; et il est facile de voir que pour décomposer cette attraction suivant les directions des lignes a, b, c perpendiculaires entre elles et parallèles aux trois axes fixes, il n'y aura qu'à la multiplier respectivement par

$$\frac{x-a}{r}, \quad \frac{y-b}{r}, \quad \frac{z-c}{r};$$

de plus il est visible que la particule α peut être représentée par le parallélépipède infiniment petit $dx dy dz$; ainsi l'on aura ces trois attractions élémentaires

$$\frac{R(x-a)}{r} dx dy dz, \quad \frac{R(y-b)}{r} dx dy dz, \quad \frac{R(z-c)}{r} dx dy dz,$$

et il ne s'agira plus que de les intégrer en sorte que l'intégration s'étende à tous les points du corps.

Pour cela on commencera par intégrer en faisant varier une seule des trois coordonnées x, y, z , comme z , et l'on étendra cette intégrale jusqu'aux valeurs extrêmes de z qui répondent à la surface du corps; or la figure du corps étant donnée on aura une équation entre x, y, z , pour exprimer la surface de ce corps, et par laquelle on pourra déterminer les valeurs extrêmes de z en x et y ; de sorte qu'après ces substitutions il n'y aura plus que deux variables x et y ; on intégrera donc une seconde fois en faisant varier une seule d'entre elles comme y , et il faudra de nouveau étendre l'intégrale jusqu'aux valeurs extrêmes de y qu'on trouvera en cherchant la plus grande et la plus petite valeur de y lorsque x

est constant et z variable dans l'équation à la surface; moyennant quoi ces valeurs de y seront données en x seul; et il n'y aura plus qu'à intégrer par rapport à cette dernière variable, et à étendre l'intégrale aux valeurs extrêmes de x , c'est-à-dire à la plus grande et à la plus petite valeur de x , lorsque y et z sont supposées variables à la fois dans l'équation donnée.

2. REMARQUE. — Quoique les formules que nous venons de trouver soient celles qui se présentent le plus naturellement, ce ne sont cependant pas celles qui sont les plus commodes pour le calcul.

Pour en donner un exemple, prenons le cas où le corps attirant serait une sphère, et où l'attraction se ferait en raison inverse des carrés des distances; on aura donc

$$R = \frac{1}{r^2},$$

ce qui donnera ces trois formules

$$\frac{(x-a) dx dy dz}{r^3}, \quad \frac{(y-b) dx dy dz}{r^3}, \quad \frac{(z-c) dx dy dz}{r^3},$$

qu'il faudra intégrer suivant les conditions énoncées dans le numéro précédent, et comme la surface du corps est supposée sphérique, si l'on prend, ce qui est permis, l'origine des coordonnées x, y, z dans le centre même de la sphère, et qu'on nomme f le rayon, on aura pour l'équation à la surface

$$x^2 + y^2 + z^2 = f^2,$$

par où l'on déterminera l'une des coordonnées par les deux autres.

Considérons d'abord l'expression de la force qui agit suivant l'ordonnée z , savoir

$$\frac{(z-c) dx dy dz}{r^3},$$

si on l'intègre en ne faisant varier que z on aura, à cause de

$$r = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2},$$

la quantité

$$\frac{dx dy}{r},$$

or l'équation

$$x^2 + y^2 + z^2 = f^2$$

donne

$$z = \pm \sqrt{f^2 - x^2 - y^2},$$

en sorte que les deux valeurs extrêmes de z sont

$$+\sqrt{f^2 - x^2 - y^2} \quad \text{et} \quad -\sqrt{f^2 - x^2 - y^2};$$

ainsi pour compléter l'intégrale $\frac{dx dy}{r}$ il faudra la prendre en sorte qu'elle soit nulle lorsque

$$z = -\sqrt{f^2 - x^2 - y^2},$$

et qu'elle finisse quand

$$z = +\sqrt{f^2 - x^2 - y^2},$$

ce qui donnera donc, en faisant, pour abrégér,

$$a^2 + b^2 + c^2 = g^2,$$

l'intégrale complète

$$\frac{dx dy}{\sqrt{f^2 + g^2 - 2ax - 2by - 2c\sqrt{f^2 - x^2 - y^2}}} - \frac{dx dy}{\sqrt{f^2 + g^2 - 2ax - 2by + 2c\sqrt{f^2 - x^2 - y^2}}}.$$

Il faudrait maintenant intégrer de nouveau ces quantités en faisant varier x ou y ; mais c'est ce qui ne paraît pas aisé à cause des deux signes radicaux qui y entrent.

On rencontrera les mêmes difficultés si l'on veut intégrer les deux autres formules qui donnent les forces parallèles aux coordonnées x et y ; de sorte qu'en s'y prenant de la manière ci-dessus il sera presque impossible de déterminer l'attraction d'une sphère sur un point placé dans un endroit quelconque; cependant on sait que ce Problème est très-facile à résoudre lorsqu'on suppose la sphère partagée en une infinité de petits cylindres ayant tous pour axe la ligne qui joint le point attiré et le centre

de la sphère, et qu'on cherche d'abord l'attraction exercée par chacun de ces petits cylindres, et ensuite la somme de toutes ces attractions, par l'intégration.

On voit donc par là combien il est important dans cette recherche d'employer à la place des trois coordonnées rectangles x, y, z , d'autres variables qui puissent faciliter les intégrations qu'elle demande. Nous allons donner dans le Problème suivant les principes nécessaires pour cet objet.

PROBLÈME II.

3. Supposons qu'on ait la différentielle $P dx dy dz$, où P soit une fonction donnée de x, y, z , et qui doive être intégrée trois fois en faisant varier successivement les changeantes x, y, z , et en observant les conditions énoncées dans le Problème I; on propose d'introduire à la place de ces changeantes trois autres changeantes p, q, r , qui soient des fonctions données de celles-là.

Puisque p, q, r sont supposées des fonctions de x, y, z , on aura aussi réciproquement x, y, z exprimées par des fonctions de p, q, r ; on fera donc d'abord ces substitutions dans la quantité P , ce qui la réduira à une fonction de p, q, r , et il n'y aura de difficulté que par rapport à la quantité $dx dy dz$.

Qu'on cherche par la différentiation les valeurs des différences dx, dy, dz , et l'on aura, en général,

$$dx = A dp + B dq + C dr,$$

$$dy = D dp + E dq + F dr,$$

$$dz = G dp + H dq + I dr,$$

$A, B, C, \dots$ étant des fonctions connues de p, q, r ; or il est facile de comprendre que pour avoir la valeur de $dx dy dz$, on ne doit pas multiplier ensemble les valeurs précédentes de dx, dy, dz ; car alors la différentielle $P dx dy dz$ contiendrait des termes où les différences dp, dq, dr se trouveraient élevées au carré ou au cube, en sorte que la triple intégration qui doit se faire relativement aux trois variables p, q, r ne pourrait

plus avoir lieu; d'ailleurs, comme $dx dy dz$ exprime l'élément de la solidité du corps, il est clair que quelles que soient les variables p, q, r qu'on introduira à la place des variables x, y, z , cet élément ne pourra être représenté que par le produit $dp dq dr$ des trois différences dp, dq, dr multiplié par une fonction quelconque de p, q, r . Je considère donc que dans l'expression du parallélépipède $dx dy dz$, la différence dz doit être prise tandis que x et y demeurent constants; qu'ensuite la différence dy doit être prise en regardant x et z comme constants, et qu'enfin la différence dx doit être prise en supposant dy et dz nuls; donc :

1° Pour avoir la valeur de dz , on fera $dx = 0$ et $dy = 0$, ce qui donnera

$$A dp + B dq + C dr = 0,$$

$$D dp + E dq + F dr = 0,$$

d'où l'on tirera dp et dq en dr , savoir

$$dp = \frac{BF - CE}{AE - BD} dr, \quad dq = \frac{CD - AF}{AE - BD} dr,$$

et substituant ces valeurs dans l'expression de dz , on aura

$$dz = \frac{G(BF - CE) + H(CD - AF) + I(AE - BD)}{AE - BD} dr.$$

2° Pour avoir la valeur de dy , on fera $dx = 0$ et $dz = 0$, ce qui donnera

$$dr = 0, \quad A dp + B dq = 0,$$

d'où l'on tire

$$dp = -\frac{B dq}{A},$$

et substituant ces valeurs dans l'expression de dy , on aura

$$dy = \frac{AE - BD}{A} dq.$$

3° Enfin pour avoir la valeur de dx , on fera $dy = 0$ et $dz = 0$, ce qui donne

$$dr = 0, \quad dq = 0,$$

en sorte qu'on aura

$$dx = \Lambda dp.$$

Maintenant, multipliant ensemble ces valeurs, on aura

$$dx dy dz = [G(BF - CE) + H(CD - AF) + I(AE - BD)] dp dq dr,$$

où l'on observera que la quantité

$$G(BF - CE) + H(CD - AF) + I(AE - BD)$$

ou bien

$$AEI + BFG + CDH - AFH - BDI - CEG$$

demeure la même, ou change tout au plus de signe, en échangeant respectivement entre eux les trois systèmes de quantités A, B, C; D, E, F; G, H, I; de sorte qu'on aura le même résultat si, au lieu de chercher d'abord comme nous l'avons fait la valeur de dz , ensuite celle de dy et de dx , on voulait commencer par chercher celle de dy ou de dx , et ensuite celle d'une quelconque des deux autres différentielles. Il ne pourra y avoir de différence que dans le signe, mais elle ne sera ici d'aucune conséquence, puisqu'il est indifférent de prendre l'élément $\alpha = dx dy dz$ en plus ou en moins; cependant, comme il est plus naturel de regarder cette quantité comme positive, on aura toujours soin de prendre la valeur de α positivement; c'est pourquoi nous supposons, en général,

$$\alpha = \pm (AEI + BFG + CDH - AFH - BDI - CEG) dp dq dr.$$

4. COROLLAIRE. — Une des transformations les plus utiles et les plus ordinaires est d'introduire à la place des coordonnées rectangles x, y, z un rayon vecteur r partant d'un point fixe qu'on nomme le centre des rayons, avec deux angles p et q qui déterminent la position de ce rayon; et dont l'un p soit celui que le même rayon fait avec un des axes des coordonnées comme avec l'axe des z , ou bien avec un axe parallèle à celui-ci, mais passant par le centre des rayons; et dont l'autre q soit l'angle que la projection du rayon r sur le plan des coordonnées x, y fait avec l'axe des x , ou, ce qui est la même chose, avec un axe parallèle à

celui-ci et passant par le centre des rayons. Si l'on dénote par a, b, c les coordonnées rectangles qui déterminent la position arbitraire du centre, il est visible qu'on aura d'abord

$$r = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2};$$

ensuite on trouvera facilement

$$\sin p = \frac{\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}}{r}, \quad \sin q = \frac{y-b}{\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}},$$

d'où l'on tire

$$x-a = r \sin p \cos q, \quad y-b = r \sin p \sin q, \quad z-c = r \cos p;$$

et différentiant

$$dx = r(\cos p \cos q dp - \sin p \sin q dq) + \sin p \cos q dr,$$

$$dy = r(\cos p \sin q dp - \sin p \cos q dq) + \sin p \sin q dr,$$

$$dz = -r \sin p dp + \cos p dr;$$

ce qui donne par la comparaison des termes

$$A = r \cos p \cos q, \quad B = -r \sin p \sin q, \quad C = \sin p \cos q,$$

$$D = r \cos p \sin q, \quad E = r \sin p \cos q, \quad F = \sin p \sin q,$$

$$G = -r \sin p, \quad H = 0, \quad I = \cos p;$$

d'où l'on tire d'abord

$$BF - CE = -r \sin^2 p, \quad AE - BD = r^2 \sin p \cos p;$$

de sorte qu'à cause de $H = 0$, on aura

$$\begin{aligned} AEI + BFG + CDH - AFH - BDI - CEG &= (BF - CE)G + (AE - BD)I \\ &= r^2 \sin^2 p + r^2 \sin p \cos^2 p = r^2 \sin p; \end{aligned}$$

par conséquent on aura, en prenant le signe +,

$$\alpha = dx dy dz = r^2 \sin p dp dq dr.$$

Cette expression de α qui est, comme on voit, assez simple, peut aussi se

trouver directement sans aucun calcul, mais nous avons préféré de la déduire de notre formule générale pour en faire voir l'usage.

5. REMARQUE. — Supposons maintenant qu'on ait un corps d'une figure finie et continue, dont la surface soit exprimée par une équation entre les coordonnées x, y, z qu'on transformera aisément en une autre entre le rayon r et les angles p et q , et qu'il s'agisse d'intégrer la différentielle Pz en sorte que l'intégrale s'étende à toute la masse du corps: il faudra faire varier successivement les quantités r, p, q , et intégrer par rapport à chacune d'elles en particulier; mais pour cela on doit distinguer deux cas suivant que le centre des rayons r est placé au dehors ou au dedans du corps.

1^o Lorsque le centre des rayons est hors du corps, il est clair que les angles p et q ne peuvent augmenter que jusqu'à un certain point; et l'on trouvera leurs limites en cherchant les points où le rayon r touche la surface du corps, c'est-à-dire où $\frac{dr}{dp} = \infty$ et $\frac{dr}{dq} = \infty$. En général, il est visible que puisque le rayon r traverse le corps entier, l'équation qui exprime la surface de ce corps doit donner, pour chaque valeur de p et q , deux valeurs de r , que nous dénoterons par r' et r'' , et qui répondent aux deux points de la surface, lesquels sont dans une même ligne droite avec le centre des rayons. On commencera donc par intégrer la différentielle Pz en faisant varier r seul, et l'on prendra l'intégrale en sorte qu'elle commence au point où $r = r'$ et finisse à celui où $r = r''$, c'est-à-dire qu'on prendra la différence des intégrales qui répondent à $r = r'$ et à $r = r''$; or il est clair que les points où le rayon r touche la surface du corps sans la couper sont nécessairement ceux où les deux racines r' et r'' deviennent égales; ainsi, faisant $r' = r''$ on aura une équation entre p et q , qui déterminera l'étendue qu'on peut donner à ces angles, et d'où l'on tirera aussi deux valeurs de p en q , que nous dénoterons de même par p' et p'' ; c'est pourquoi il faudra intégrer de nouveau l'intégrale précédente en y faisant varier p seul, et prendre la nouvelle intégrale en sorte qu'elle commence où $p = p'$ et qu'elle finisse où $p = p''$; enfin on fera $p' = p''$, ce qui donnera une équation en q seul, laquelle

aura aussi nécessairement deux racines q' et q'' ; ainsi l'on intégrera pour la troisième fois en faisant varier q , et l'on prendra l'intégrale en sorte qu'elle commence où $q = q'$ et qu'elle finisse où $q = q''$. On aura de cette manière l'intégrale complète de la différentielle proposée. Il faut seulement remarquer qu'il peut arriver que l'équation $p' = p''$, qui doit donner les deux valeurs extrêmes de q , soit impossible, ou qu'elle ne renferme point la variable q ; dans ce cas ce sera une marque que l'angle q peut recevoir toutes les valeurs possibles, et pour compléter l'intégrale il suffira alors de la prendre depuis $q = 0$ jusqu'à $q = 180^\circ$, c'est-à-dire qu'on prendra $q' = 0$ et $q'' = 180^\circ$. On remarquera encore que dans le cas où les valeurs de p' et p'' seront indépendantes de q , les intégrations relatives à p et q seront indépendantes l'une de l'autre, puisque les quantités p' et p'' auront, ainsi que les quantités q' et q'' , des valeurs absolues et données. D'où il suit qu'il sera indifférent dans ce cas de commencer par l'intégration relative à p ou par celle qui regarde q , et qu'il conviendra par conséquent de commencer par celle des deux qui rendra le calcul plus facile.

2^o Lorsque le centre des rayons r est au dedans du corps, il est visible que les angles p et q peuvent recevoir toutes les valeurs possibles, puisque dans quelque position que le rayon r se trouve il rencontre toujours nécessairement la surface du corps; de plus il est clair que le même rayon, étant prolongé de part et d'autre du centre, doit rencontrer la surface du corps des deux côtés; et l'on déterminera les deux valeurs de r , que nous désignerons par r' et r'' , par la résolution de l'équation à la surface entre les coordonnées r, p, q . Or il est facile de concevoir que, pour avoir dans ce cas l'intégrale complète de Pz , il suffira d'intégrer d'abord en faisant varier r seul et de manière que l'intégrale soit nulle lorsque $r = 0$, et de prendre la somme des valeurs de l'intégrale qui répondent à $r = r'$ et à $r = r''$; d'intégrer ensuite cette quantité en faisant varier successivement les angles p et q , et de prendre chacune de ces intégrales particulières en sorte qu'elle soit nulle, et complète lorsque p ou q est égal à 180 degrés. Et comme les intégrations qui regardent les variables p et q sont absolues et indépendantes l'une de l'autre,

il est visible qu'il sera indifférent de commencer par celle qu'on voudra. On voit par là qu'il y a une grande différence entre le cas où le centre des rayons r est supposé au dehors, et celui où il est au dedans du corps; que ce dernier est sans comparaison plus facile à résoudre que l'autre, et qu'ainsi il convient de ramener toujours la question à ce cas, ce qui est d'ailleurs toujours possible, puisque la position du centre des rayons est arbitraire, ne dépendant que des constantes indéterminées a, b, c .

3° Il y aurait, à la vérité, encore un cas qui paraîtrait mériter une discussion particulière, parce qu'il est comme intermédiaire entre les deux précédents, c'est celui où le centre des rayons serait placé sur la surface même du corps; mais on peut rapporter ce cas au précédent et le traiter de même, en remarquant qu'on aura une seule valeur de r , l'autre devenant nulle, et qu'ainsi après avoir intégré en faisant varier r , il n'y aura qu'à prendre l'intégrale en sorte qu'elle soit nulle lorsque $r=0$, et complète lorsque r aura la valeur résultante de l'équation entre r, p, q ; à l'égard des deux autres intégrations, on y observera les mêmes conditions que ci dessus.

PROBLÈME III.

6. Déterminer la valeur de l'attraction qu'un corps dont la surface est exprimée par une équation du second degré exerce sur un point placé au dedans du corps ou à sa surface, en supposant l'attraction réciproquement proportionnelle aux carrés des distances.

Conservant les dénominations du Problème I, on aura $R = \frac{1}{r^2}$, et l'élément de l'attraction sera égal à $\frac{x}{r^3}$, qui étant décomposé suivant les directions des coordonnées x, y, z donnera les trois attractions élémentaires

$$\frac{(x-a)x}{r^3}, \quad \frac{(y-b)y}{r^3}, \quad \frac{(z-c)z}{r^3}.$$

Introduisons maintenant à la place des coordonnées rectangulaires x, y, z le rayon même r avec les deux angles p et q , ainsi qu'on l'a fait dans le

n° 4, et l'on aura

$$z = r^2 \sin p \, dp \, dq \, dr, \\ x - a = r \sin p \cos q, \quad y - b = r \sin p \sin q, \quad z - c = r \cos p,$$

et les trois attractions élémentaires deviendront celles-ci

$$\sin^2 p \cos q \, dp \, dq \, dr \quad \text{suivant } a, \\ \sin^2 p \sin q \, dp \, dq \, dr \quad \text{suivant } b, \\ \sin p \cos p \, dp \, dq \, dr \quad \text{suivant } c.$$

Maintenant, comme le rayon est supposé mené du point attiré, il est clair que ce point sera ici le centre même des rayons; par conséquent il faudra procéder dans l'intégration d'une manière différente suivant que le point attiré sera hors du corps ou au dedans. Dans le Problème présent nous supposons que ce point est placé dans l'intérieur du corps, ainsi l'on suivra les règles données ci-dessus (5. 2°).

On commencera donc par intégrer par rapport à r , et nommant r' et r'' les deux valeurs de r qu'on trouvera par la résolution de l'équation à la surface donnée, on aura ces premières intégrales

$$(r' + r'') \sin^2 p \cos q \, dp \, dq, \\ (r' + r'') \sin^2 p \sin q \, dp \, dq, \\ (r' + r'') \sin p \cos p \, dp \, dq.$$

Maintenant on sait que les surfaces du second ordre qui sont renfermées dans un espace fini peuvent être représentées toutes par l'équation

$$z^2 + mx^2 + ny^2 = k,$$

m, n, k étant des coefficients quelconques positifs; et il est clair, par la nature de cette équation, que les axes des trois coordonnées rectangulaires x, y, z seront tels, que les plans passant par deux quelconques d'entre eux partageront la surface en deux parties parfaitement égales; de sorte que ces axes seront en même temps les axes de la surface, et leur intersection commune en sera le centre. Qu'on substitue donc dans cette équation à

la place de x, y, z leurs valeurs en r, p, q , savoir (4)

$$x = a + r \sin p \cos q, \quad y = b + r \sin p \sin q, \quad z = c + r \cos p,$$

on aura l'équation

$$(c + r \cos p)^2 + m(a + r \sin p \cos q)^2 + n(b + r \sin p \sin q)^2 = k,$$

et ordonnant les termes par rapport à r ,

$$(\cos^2 p + m \sin^2 p \cos^2 q + n \sin^2 p \sin^2 q) r^2 + 2(c \cos p + m a \sin p \cos q + n b \sin p \sin q) r + (c^2 + m a^2 + n b^2 - k) = 0,$$

c'est-à-dire

$$r^2 + \frac{2(c \cos p + m a \sin p \cos q + n b \sin p \sin q)}{\cos^2 p + m \sin^2 p \cos^2 q + n \sin^2 p \sin^2 q} r + \frac{c^2 + m a^2 + n b^2 - k}{\cos^2 p + m \sin^2 p \cos^2 q + n \sin^2 p \sin^2 q} = 0,$$

équation dont les racines seront r' et r'' ; mais nous n'aurons pas même besoin de la résoudre pour chercher ces racines; car comme il nous suffit d'avoir leur somme $r' + r''$, on la connaîtra immédiatement par le coefficient du second terme; en sorte qu'on aura

$$r' + r'' = - \frac{2(c \cos p + m a \sin p \cos q + n b \sin p \sin q)}{\cos^2 p + m \sin^2 p \cos^2 q + n \sin^2 p \sin^2 q};$$

ainsi, substituant cette valeur dans les expressions précédentes, elles deviendront

$$\begin{aligned} & - \frac{2(c \cos p + m a \sin p \cos q + n b \sin p \sin q) \sin^2 p \cos q dp dq}{\cos^2 p + m \sin^2 p \cos^2 q + n \sin^2 p \sin^2 q}, \\ & - \frac{2(c \cos p + m a \sin p \cos q + n b \sin p \sin q) \sin^2 p \sin q dp dq}{\cos^2 p + m \sin^2 p \cos^2 q + n \sin^2 p \sin^2 q}, \\ & - \frac{2(c \cos p + m a \sin p \cos q + n b \sin p \sin q) \sin p \cos p dp dq}{\cos^2 p + m \sin^2 p \cos^2 q + n \sin^2 p \sin^2 q}. \end{aligned}$$

Il ne s'agit donc plus que d'intégrer ces formules en faisant varier les angles p et q chacun en particulier, et prenant chaque intégrale en sorte qu'elle soit nulle lorsque la variable est nulle, et complète lorsque la variable est égale à 180 degrés (5, 2°).

Donc, si l'on fait, pour abrégér,

$$\cos^2 p + m \sin^2 p \cos^2 q + n \sin^2 p \sin^2 q = N,$$

et qu'on suppose

$$A = \int \frac{\sin^2 p \cos p \cos q dp dq}{N},$$

$$B = \int \frac{\sin^2 p \cos^2 q dp dq}{N},$$

$$C = \int \frac{\sin^2 p \sin q \cos q dp dq}{N},$$

$$D = \int \frac{\sin^2 p \cos p \sin q dp dq}{N},$$

$$E = \int \frac{\sin^2 p \sin q \cos q dp dq}{N},$$

$$F = \int \frac{\sin^2 p \sin^2 q dp dq}{N},$$

$$G = \int \frac{\sin p \cos^2 p dp dq}{N},$$

$$H = \int \frac{\sin^2 p \cos p \cos q dp dq}{N},$$

$$I = \int \frac{\sin^2 p \cos p \sin q dp dq}{N},$$

ces intégrales étant complétées de la manière qu'on vient de le dire, on aura les valeurs suivantes des attractions cherchées

attraction dans la direction de la ligne a , $-2cA - 2maB - 2nbC$;

attraction dans la direction de la ligne b , $-2cD - 2maE - 2nbF$;

attraction dans la direction de la ligne c , $-2cG - 2maH - 2nbI$.

7. COROLLAIRE I. — Il est clair que les valeurs des quantités $A, B, C, \dots$ sont indépendantes des quantités a, b, c , qui déterminent la position du point attiré, ainsi que de la constante k qui entre dans l'équation à la surface; d'où il suit :

1° Que si l'on a deux points, dont l'un soit déterminé par les coordonnées a, b, c , et l'autre par les coordonnées $\lambda a, \lambda b, \lambda c$, proportionnelles

III.

à celles-là, les attractions du même corps sur le premier point seront à celles sur le second point comme 1 est à λ , puisqu'en substituant $\lambda a, \lambda b, \lambda c$ à la place de a, b, c dans les formules précédentes, on ne fait autre chose que les multiplier par le coefficient λ . Or il est facile de voir que la position des deux points dont il s'agit sera sur une même ligne droite menée par le centre de la surface qui est l'origine des coordonnées x, y, z , ainsi que des coordonnées a, b, c , et que la distance du premier point au centre sera à celle du second point au même centre comme 1 est à λ . D'où l'on peut d'abord conclure que les attractions sur deux points placés dans une droite menée par le centre de la surface seront nécessairement proportionnelles aux distances de ces points au même centre, pourvu toutefois que ces points ne soient pas placés hors de la surface. Et comme cette proposition est vraie en particulier par rapport à l'attraction que le solide exerce suivant chacune des coordonnées rectangulaires a, b, c , il s'ensuit qu'elle sera vraie aussi par rapport à l'attraction qu'il exerce suivant une direction quelconque donnée.

2° Que l'attraction sur un point donné placé au dedans du corps ou à sa surface, c'est-à-dire sur un point quelconque du corps, sera la même tant que les constantes m et n de l'équation à la surface seront les mêmes, quelque valeur qu'on donne d'ailleurs à la constante k ; or il est facile de prouver, par la nature de l'équation

$$z^2 + mx^2 + ny^2 = k,$$

que les constantes m et n déterminent l'espèce de la surface, et la constante k sa grandeur, en sorte que toutes les surfaces dont l'équation ne diffère que par la valeur de k sont semblables entre elles, et semblablement situées; d'où il s'ensuit que tous les solides semblables, dont la surface sera représentée par une équation de la forme

$$z^2 + mx^2 + ny^2 = k,$$

exerceront nécessairement la même attraction sur un même point quelconque placé où l'on voudra dans l'intérieur ou à la surface de ces solides. Et de là on tire d'abord ce Théorème que, si l'on a un solide creux

dont les deux surfaces, l'extérieure et l'intérieure, soient semblables, son attraction sur un point quelconque de la surface intérieure sera nulle; car l'attraction du solide entier serait la même que celle de la partie qui occupe la cavité.

8. COROLLAIRE II. — Considérons maintenant de plus près les valeurs des attractions suivant les lignes a, b, c ; et, comme tout se réduit à avoir les valeurs des quantités $A, B, C, \dots$, voyons comment on pourra les trouver.

Pour faciliter beaucoup cette recherche, je commencerai par remarquer, en général, que si l'on a une fonction P de $\sin p$ et de $\cos^2 p$, et qu'on demande la valeur de l'intégrale de $P \cos p dp$ prise en sorte qu'elle soit nulle lorsque $p = 0$, et complète lorsque $p = 180^\circ$, cette valeur sera nécessairement nulle; car comme

$$\sin(180^\circ - p) = \sin p \quad \text{et} \quad \cos(180^\circ - p) = -\cos p,$$

il est visible que les valeurs de $P \cos p$ qui répondent à p et à $180^\circ - p$ seront égales et de signes contraires; d'où il s'ensuit que dans la suite des éléments $P \cos p dp$ qui répondent à toutes les valeurs de p depuis $p = 0$ jusqu'à $p = 180^\circ$, les mêmes termes se trouveront deux fois, mais avec des signes différents, en sorte que la somme totale sera toujours nulle.

De là on doit conclure que si P est une fonction de $\sin p, \cos^2 p$ et de $\sin q, \cos^2 q$, et qu'on demande l'intégrale complète de $P \cos p dp dq$ ou de $P \cos q dp dq$ ou de $P \cos p \cos q dp dq$, en faisant varier successivement les angles p et q , depuis 0 jusqu'à 180 degrés, chacune de ces intégrales sera nulle; car on aura, en faisant d'abord varier p ,

$$\int P \cos p dp = 0,$$

et faisant varier q , on aura de même

$$\int P \cos q dq = 0;$$

done, etc. Par le moyen de ce Théorème, on aura donc sans aucun calcul

$$A=0, \quad C=0, \quad D=0, \quad E=0, \quad H=0, \quad I=0;$$

par conséquent les valeurs des trois attractions suivant les lignes a, b, c se réduiront à celles-ci

$$-2maB, \quad -2nbF, \quad -2cG.$$

D'où l'on voit que ces trois attractions seront respectivement proportionnelles aux lignes a, b, c .

Or comme ces lignes sont parallèles aux trois axes du solide, il est clair qu'elles expriment en même temps les distances du point attiré à chacun des trois plans passant par ces axes. Donc l'attraction d'un point quelconque du solide, parallèlement à chacun de ses trois axes, sera proportionnelle à la distance de ce point au plan passant par les deux autres axes; par conséquent tous les points du solide qui seront à même distance de l'un quelconque de ces plans, c'est-à-dire tous les points placés dans un plan parallèle à l'un quelconque d'entre eux, seront attirés perpendiculairement à ce même plan par une force égale.

9. COROLLAIRE III. — Si dans l'équation

$$z^2 + mx^2 + ny^2 = k$$

on fait $n = m$, elle devient

$$z^2 + m(x^2 + y^2) = k,$$

laquelle représente un sphéroïde elliptique formé par la révolution d'une ellipse dont l'équation serait

$$z^2 + mu^2 = k,$$

autour de l'axe des abscisses z ; mais si m n'est pas égal à n , alors le solide sera un ellipsoïde dont toutes les coupes seront des ellipses. Dans l'un et dans l'autre cas l'attraction que le solide exerce sur un quelconque de ses points, parallèlement à l'un de ses trois axes, sera, par les Corollaires précédents, égale à celle qu'exercerait sur le point du même

axe sur lequel tomberait une perpendiculaire menée du point attiré, un ellipsoïde semblable et semblablement situé, c'est-à-dire ayant le même centre et les mêmes axes, et qui passerait par ce même point de l'axe. Et cette attraction sera toujours proportionnelle à la partie de l'axe comprise entre ce point et le centre du sphéroïde.

10. COROLLAIRE IV. — Il ne s'agit plus que de déterminer les valeurs des quantités B, F, G , c'est-à-dire des intégrales de ces formules

$$\frac{\sin^3 p \cos^3 q \, dp \, dq}{N}, \quad \frac{\sin^3 p \sin^2 q \, dp \, dq}{N}, \quad \frac{\sin p \cos^3 p \, dp \, dq}{N};$$

N étant (6) égal à

$$\cos^3 p + m \sin^3 p \cos^3 q + n \sin^3 p \sin^3 q.$$

Pour y parvenir il convient de distinguer deux cas, suivant que m est égal à n ou non.

Supposons :

1° Qu'on ait $m = n$, ce qui est le cas d'un sphéroïde elliptique de révolution (numéro précédent), on aura alors

$$N = \cos^3 p + m \sin^3 p,$$

en sorte que l'angle q disparaîtra du dénominateur.

Qu'on intègre donc en premier lieu suivant q , et l'on trouvera que l'intégrale des trois formules précédentes, prise en sorte qu'elle soit nulle lorsque $q = 0$, et complète lorsque $q = 180^\circ$, sera

$$\frac{\sin^3 p \, dp}{N} \times 90^\circ, \quad \frac{\sin^3 p \, dp}{N} \times 90^\circ, \quad \frac{\sin p \cos^3 p \, dp}{N} \times 180^\circ;$$

où l'on voit que les deux premières quantités sont les mêmes, en sorte qu'on aura nécessairement $B = F$.

Pour pouvoir intégrer une seconde fois en faisant varier p , on supposera $\cos p = u$, ce qui donne

$$N = m + (1 - m) u^3$$

et

$$\frac{\sin^3 p \, dp}{N} = -\frac{(1 - u^3) \, du}{m + (1 - m) u^3}, \quad \frac{\sin p \cos^3 p \, dp}{N} = -\frac{u^3 \, du}{m + (1 - m) u^3}.$$

Soit de plus

$$\frac{1-m}{m} = \mu^2 \quad \text{et} \quad u = \frac{t}{\mu},$$

on aura

$$\frac{(1-u^2)du}{m+(1-m)u^2} = \frac{(\mu^2-t^2)dt}{m\mu^2(1+t^2)} = \frac{1+\mu^2}{m\mu^2} \frac{dt}{1+t^2} - \frac{dt}{m\mu^2},$$

et

$$\frac{u^2 du}{m+(1-m)u^2} = \frac{t^2 dt}{m\mu^2(1+t^2)} = \frac{dt}{m\mu^2} - \frac{dt}{m\mu^2(1+t^2)}.$$

Or comme on doit intégrer ces formules en sorte que l'intégration commence lorsque $p = 0$ et finisse lorsque $p = 180^\circ$, il faudra, à cause de $t = \mu u = \mu \cos p$, faire en sorte que chaque intégrale soit nulle lorsque $t = \mu$, et complète lorsque $t = -\mu$; c'est pourquoi on aura

$$\int dt = t - \mu, \quad \int \frac{dt}{1+t^2} = \text{arc tang } t - \text{arc tang } \mu,$$

et faisant ensuite $t = -\mu$,

$$\int dt = -2\mu, \quad \int \frac{dt}{1+t^2} = -2 \text{ arc tang } \mu.$$

Donc l'intégrale complète de $\frac{\sin^2 p dp}{N}$ sera

$$\frac{2(1+\mu^2)}{m\mu^2} \text{arc tang } \mu - \frac{2}{m\mu^2},$$

et celle de $\frac{\sin p \cos^2 p dp}{N}$ sera

$$\frac{2}{m\mu^2} - \frac{2 \text{ arc tang } \mu}{m\mu^2};$$

donc enfin on aura

$$B = F = \left(\frac{1+\mu^2}{m\mu^2} \text{arc tang } \mu - \frac{1}{m\mu^2} \right) \times 180^\circ,$$

$$G = \left(\frac{1}{m\mu^2} - \frac{\text{arc tang } \mu}{m\mu^2} \right) \times 360^\circ.$$

2° Soit n différent de m , ce qui est le cas où le solide est un ellipsoïde dont toutes les coupes sont des ellipses; dans ce cas le dénominateur N

contiendra l'angle q , et l'on ne pourra guère exécuter qu'une seule intégration, savoir celle qui se rapporte à l'angle p . Pour cela on remarquera que, comme dans cette intégration l'angle q est supposé constant, on aura pour l'intégrale complète de $\frac{\sin^2 p dp}{N}$ et de $\frac{\sin p \cos^2 p dp}{N}$ les mêmes expressions que ci-dessus, en y substituant simplement, à la place de m , la quantité $m \cos^2 q + n \sin^2 q$, ou bien (en faisant $n = m + \nu$) celle-ci, $m + \nu \sin^2 q$. Dénnotant donc ces valeurs par Q et Q' , il n'y aura plus qu'à intégrer les différentielles

$$Q \cos^2 q dq, \quad Q \sin^2 q dq, \quad Q' dq,$$

en faisant varier q depuis $q = 0$ jusqu'à $q = 180^\circ$; et l'on aura les valeurs cherchées de B, F, G .

11. REMARQUE. — M. Maclaurin, dans son *Traité du flux et du reflux de la mer*, s'est contenté de chercher l'attraction d'un sphéroïde elliptique sur un point quelconque de ce sphéroïde, et les résultats de sa belle méthode synthétique s'accordent parfaitement avec ceux que nous venons de trouver par l'Analyse. M. d'Alembert vient d'étendre la solution de M. Maclaurin à des sphéroïdes où toutes les coupes seraient elliptiques, en faisant remarquer que les propositions qui servent de base à cette solution sont également vraies à l'égard de tous les sphéroïdes elliptiques, soit de révolution ou non : c'est ce que nous avons trouvé directement par notre Analyse dans les trois premiers Corollaires du Problème précédent. A l'égard de la valeur absolue de l'attraction des sphéroïdes qui ne sont pas de révolution, M. d'Alembert a essayé de la déterminer par différents moyens très-ingénieux, mais dont aucun ne lui a pleinement réussi. Un des plus simples paraît être celui que nous avons employé dans le Corollaire IV, 2°; mais il est facile de se convaincre que les intégrations qui restent à exécuter pour avoir les valeurs des constantes B, F, G échappent à toutes les méthodes connues jusqu'à présent.

Au reste, si le sphéroïde proposé différait peu d'un sphéroïde de révolution, en sorte que $\nu = m - n$ fût une quantité très-petite, on pourrait déterminer son attraction par approximation aussi exactement qu'on

voudrait. En effet, il n'y aura qu'à substituer $m + n \sin^2 q$ au lieu de m dans les valeurs de

$$Q = \frac{2(1+\mu^2)}{m\mu^3} \arctan \mu - \frac{2}{m\mu^3}$$

et de

$$Q' = \frac{2}{m\mu^2} - \frac{2 \arctan \mu}{m\mu^3}$$

(μ^2 étant $\frac{1-m}{m}$), et développer ensuite ces quantités suivant les puissances de ν ; ce qui changera la quantité Q en

$$Q + \frac{dQ}{dm} \nu \sin^2 q + \frac{1}{2} \frac{d^2 Q}{dm^2} \nu^2 \sin^4 q + \dots$$

et la quantité Q' en

$$Q' + \frac{dQ'}{dm} \nu \sin^2 q + \frac{1}{2} \frac{d^2 Q'}{dm^2} \nu^2 \sin^4 q + \dots$$

on multipliera maintenant la première de ces quantités par $\cos^2 q dq$ et par $\sin^2 q dq$, et la seconde par dq , et, prenant les intégrales en sorte qu'elles soient nulles lorsque $q = 0$ et complètes lorsque $q = 180^\circ$, on aura les valeurs cherchées des quantités B, F, G.

On aura donc de cette manière

$$B = \left(\frac{1}{2} Q + \frac{\nu}{8} \frac{dQ}{dm} + \frac{3\nu^2}{32} \frac{1}{2} \frac{d^2 Q}{dm^2} + \frac{5\nu^3}{128} \frac{1}{2.3} \frac{d^3 Q}{dm^3} + \frac{14\nu^4}{512} \frac{1}{2.3.4} \frac{d^4 Q}{dm^4} + \dots \right) 180^\circ,$$

$$F = \left(\frac{1}{2} Q + \frac{3\nu}{8} \frac{dQ}{dm} + \frac{10\nu^2}{32} \frac{1}{2} \frac{d^2 Q}{dm^2} + \frac{35\nu^3}{128} \frac{1}{2.3} \frac{d^3 Q}{dm^3} + \frac{126\nu^4}{512} \frac{1}{2.3.4} \frac{d^4 Q}{dm^4} + \dots \right) 180^\circ,$$

$$G = \left(Q + \frac{\nu}{2} \frac{dQ}{dm} + \frac{3\nu^2}{8} \frac{1}{2} \frac{d^2 Q}{dm^2} + \frac{10\nu^3}{32} \frac{1}{2.3} \frac{d^3 Q}{dm^3} + \frac{35\nu^4}{128} \frac{1}{2.3.4} \frac{d^4 Q}{dm^4} + \dots \right) 180^\circ.$$

PROBLÈME IV.

12. Les mêmes choses étant supposées que dans le Problème III, on demande l'attraction du sphéroïde sur un point placé au dehors.

On aura dans ce cas les mêmes formules différentielles que dans celui du Problème cité; toute la différence consistera dans la manière de com-

pléter chaque intégrale; on suivra pour cela les règles données dans le n° 5, 1°, et il est facile de voir qu'après la première intégration suivant la variabilité de r , on aura les mêmes formules que dans le Problème III, mais avec cette différence qu'au lieu de la somme $r' + r''$ des deux valeurs de r il faudra mettre leur différence $r' - r''$. Ainsi les premières intégrales des trois attractions suivant les trois axes du sphéroïde seront

$$(r' - r'') \sin^2 p \cos q dp dq,$$

$$(r' - r'') \sin^2 p \sin q dp dq,$$

$$(r' - r'') \sin p \cos p dp dq.$$

Maintenant, si l'on représente par

$$r^3 + 2\varpi r + \rho = 0$$

l'équation en r dont r' et r'' sont les racines, on aura, comme on sait,

$$(r' - r'')^2 = 4(\varpi^2 - \rho);$$

done

$$r' - r'' = 2\sqrt{\varpi^2 - \rho}.$$

Qu'on suppose, pour abréger,

$$c \cos p + m \sin p \cos q + n b \sin p \sin q = M,$$

$$\cos^2 p + m \sin^2 p \cos^2 q + n \sin^2 p \sin^2 q = N,$$

$$c^2 + m^2 + n^2 - k = h,$$

et l'on aura (Problème III)

$$\varpi = \frac{M}{N}, \quad \rho = \frac{h}{N};$$

done

$$r' - r'' = \frac{2\sqrt{M^2 - hN}}{N}.$$

Ainsi il n'y aura qu'à substituer cette valeur dans les formules précédentes et intégrer ensuite par rapport à la variable p ; pour compléter ces intégrales on fera $r' = r''$, c'est-à-dire $r' - r'' = 0$, et l'on aura

$$M^2 - hN = 0,$$

équation d'où l'on tirera les deux valeurs extrêmes de p , ou plutôt de $\sin p$ ou de $\cos p$, lesquelles détermineront l'étendue qu'il faudra donner aux intégrales dont il s'agit. On intégrera enfin relativement à q , et pour avoir les valeurs extrêmes de q il n'y aura qu'à chercher les conditions qui donnent des racines égales à l'équation

$$M^2 - hN = 0,$$

ordonnée relativement à $\sin p$ ou $\cos p$; connaissant ces valeurs, on s'en servira pour compléter les dernières intégrales.

13. COROLLAIRE I. — Considérons le cas d'un sphéroïde de révolution auquel on a $m = n$; on aura donc

$$M = c \cos p + m \sin p (a \cos q + b \sin q),$$

$$N = \cos^2 p + m \sin^2 p.$$

Supposons de plus qu'on cherche seulement l'attraction du sphéroïde pour un point quelconque de son axe de révolution; il faudra faire $a = 0$, $b = 0$, et l'on aura simplement

$$M = c \cos p;$$

d'où l'on voit que l'équation

$$M^2 - hN = 0$$

ne renfermera point l'angle q , et qu'ainsi les intégrations relatives à p et q seront indépendantes l'une de l'autre, en sorte qu'il sera libre de commencer par celle des deux qu'on voudra; de plus, l'intégration relative à q devra s'étendre ($5, 1^o$) depuis $q = 0$ jusqu'à $q = 180^o$.

Faisant pour plus de simplicité $\sin p = u$, on aura, à cause de $h = c^2 - k$,

$$\begin{aligned} M^2 - hN &= c^2(1 - u^2) - h(1 - u^2) - mh u^2 \\ &= c^2 - h - (c^2 - h + mh) u^2 \\ &= k - [k + m(c^2 - k)] u^2, \end{aligned}$$

et les trois formules différentielles deviendront

$$\frac{2\sqrt{k - (k - mk + mc^2)u^2}}{1 - (1 - m)u^2} u^2 \cos q dp dq,$$

$$\frac{2\sqrt{k - (k - mk + mc^2)u^2}}{1 - (1 - m)u^2} u^2 \sin q dp dq,$$

$$\frac{2\sqrt{k - (k - mk + mc^2)u^2}}{1 - (1 - m)u^2} u du dq (*).$$

Or comme l'équation

$$k - (k - mk + mc^2)u^2 = 0$$

donne

$$u = \pm \sqrt{\frac{k}{k - mk + mc^2}},$$

il s'ensuit que les intégrations relatives à l'angle p devront s'étendre depuis $p = \alpha$ jusqu'à $p = -\alpha$, en prenant

$$\alpha = \arcsin \sqrt{\frac{k}{k - mk + mc^2}}.$$

D'où il est facile de conclure d'abord que l'intégrale complète de la quantité

$$\frac{\sqrt{k - (k - mk + mc^2)u^2}}{1 - (1 - m)u^2} u^2 dp$$

sera nulle; car si l'on dénote par A l'intégrale de cette quantité prise depuis $p = 0$ jusqu'à $p = \alpha$, il est clair que l'intégrale de la même quantité depuis $p = 0$ jusqu'à $p = -\alpha$ sera égale à $-A$, puisque $u^2 = \sin^2 p$ conserve la même valeur en prenant p négatif; or il est visible que l'intégrale depuis $p = \alpha$ jusqu'à $p = -\alpha$ n'est autre chose que la somme des deux précédentes, c'est-à-dire $A - A = 0$.

Donc l'intégrale de chacune des deux premières formules différentielles sera nulle; par conséquent l'attraction perpendiculaire à l'axe de révolution dans lequel est prise l'ordonnée c sera nulle; ce qui est d'ailleurs évident de soi-même.

(*) Le facteur 2, qui figure dans ces formules et dans celles qui en résultent par l'intégration, est omis dans le texte primitif; nous avons cru devoir le rétablir ici.

(Note de l'Éditeur.)

Il ne reste donc qu'à chercher l'intégrale de la troisième formule différentielle, et comme on peut intégrer d'abord suivant q , on aura, en exécutant cette intégration, et complétant l'intégrale en sorte qu'elle commence au point où $q = 0$ et qu'elle finisse à celui où $q = 180^\circ$, on aura, dis-je, la formule

$$\frac{2\sqrt{k-(k-mk+mc^2)u^2} u du}{1-(1-m)u^2} \times 180^\circ.$$

Ainsi il ne s'agira plus que d'intégrer la quantité

$$\frac{2\sqrt{k-(k-mk+mc^2)u^2} u du}{1-(1-m)u^2},$$

et pour cela on fera

$$\sqrt{k-(k-mk+mc^2)u^2} u = t,$$

ce qui donne

$$u^2 = \frac{k-t^2}{k-mk+mc^2},$$

moyennant quoi la différentielle proposée se transforme en celle-ci

$$-\frac{2t dt}{mc^2 + (1-m)t^2} = -\frac{2}{1-m} \left(dt - \frac{\frac{mc^2}{1-m}}{\frac{mc^2}{1-m} + t^2} dt \right),$$

dont l'intégrale est évidemment

$$-\frac{2}{1-m} \left(t - \sqrt{\frac{mc^2}{1-m}} \times \text{arc tang} \frac{t}{\sqrt{\frac{mc^2}{1-m}}} \right);$$

pour compléter cette intégrale il faut se souvenir qu'elle doit s'étendre depuis $p = \alpha$ jusqu'à $p = -\alpha$; et pour éviter toute erreur il conviendra de chercher à part les deux portions qui s'étendent, l'une depuis $p = 0$ jusqu'à $p = \alpha$ et que nous dénoterons par A, l'autre depuis $p = 0$ jusqu'à $p = -\alpha$ et que nous dénoterons par B; et la somme A + B sera l'intégrale complète cherchée. Or en faisant $p = 0$ on a $u = 0$, donc

$t = \sqrt{k}$; par conséquent la constante à ajouter à l'intégrale ci-dessus sera

$$\frac{2}{1-m} \left(\sqrt{k} - \sqrt{\frac{mc^2}{1-m}} \times \text{arc tang} \frac{\sqrt{k}}{\sqrt{\frac{mc^2}{1-m}}} \right);$$

faisant ensuite $p = \alpha$ on aura $t = 0$, et faisant $p = -\alpha$ on aura de même $t = 0$; d'où il suit qu'on aura

$$A = B = \frac{2}{1-m} \left(\sqrt{k} - \sqrt{\frac{mc^2}{1-m}} \times \text{arc tang} \frac{\sqrt{k}}{\sqrt{\frac{mc^2}{1-m}}} \right);$$

donc l'intégrale cherchée sera égale à $2A$; et, multipliant par 180 degrés, on aura enfin la quantité

$$\frac{2}{1-m} \left(\sqrt{k} - \sqrt{\frac{mc^2}{1-m}} \times \text{arc tang} \frac{\sqrt{k}}{\sqrt{\frac{mc^2}{1-m}}} \right) \times 360^\circ.$$

pour la valeur de l'attraction du sphéroïde sur un point de l'axe placé à la distance c du centre.

Ce Problème a aussi été résolu synthétiquement par M. Maclaurin dans son *Traité des Fluxions*, et nos solutions s'accordent dans les résultats.

14. COROLLAIRE II. — Si l'on voulait résoudre la question du Corollaire précédent sans supposer $m = n$, c'est-à-dire en regardant le sphéroïde comme simplement elliptique sans qu'il soit de révolution, la quantité N serait (en faisant toujours $\sin p = u$)

$$1 - u^2 + (m \cos^2 q + n \sin^2 q) u^2,$$

au lieu d'être simplement

$$1 - u^2 + mu^2;$$

en sorte que pour appliquer les formules différentielles du n° 13 au cas présent il suffirait d'y mettre partout $m \cos^2 q + n \sin^2 q$ à la place de m .

De là on peut d'abord conclure que les intégrales relatives à p seront les

mêmes que ci-dessus, en y changeant seulement m en $m \cos^2 q + n \sin^2 q$. Donc les intégrales des deux premières formules seront aussi nulles, et celle de la troisième sera représentée par la quantité

$$\frac{4dq}{1-m} \left(\sqrt{k} - \sqrt{\frac{mc^2}{1-m}} \times \arctan \frac{\sqrt{k}}{\sqrt{\frac{mc^2}{1-m}}} \right),$$

laquelle devra donc encore être intégrée relativement à q , après y avoir substitué partout $m \cos^2 q + n \sin^2 q$ à la place de m . Or comme les deux valeurs extrêmes de p sont (13) $p = \alpha$ et $p = -\alpha$, il est visible qu'elles ne peuvent devenir égales qu'en faisant $\alpha = 0$, et par conséquent

$$\frac{k}{k - mk + mc^2} = 0 \quad \text{et} \quad k - mk + mc^2 = \infty,$$

ce qui ne se peut; ainsi, ne pouvant tirer de cette condition les valeurs de q nécessaires pour compléter l'intégrale de la quantité précédente, on prendra cette intégrale en sorte qu'elle commence où $q = 0$ et qu'elle finisse où $q = 180^\circ$; mais l'intégration de la différentielle dont il s'agit étant très-difficile, si même elle n'est pas impossible, nous ne nous y arrêterons pas; outre que cette matière n'est pas proprement de l'objet auquel ce Mémoire était destiné, elle a d'ailleurs été déjà savamment discutée dans le sixième volume des *Opuscules* de M. d'Alembert, auquel il nous suffira par conséquent de renvoyer.

15. REMARQUE. — On trouverait des difficultés beaucoup plus grandes si l'on voulait déterminer par les formules du Problème précédent l'attraction du sphéroïde sur un point placé hors de l'axe; car alors les quantités a , b n'étant point nulles, les expressions des attractions différentielles seraient trop compliquées pour qu'on pût les traiter par les méthodes connues. On peut cependant ramener en quelque manière tous les cas à celui où le point attiré est placé dans le prolongement de l'axe des coordonnées z , en changeant la position des coordonnées rectangulaires x , y , z de manière que l'axe des z passe par le point attiré; car

alors on aura également $a = 0$ et $b = 0$; ce qui pourra peut-être faciliter les intégrations relatives aux angles p et q .

Pour faire cette transformation des coordonnées de la manière la plus générale, on remarquera que nommant x' , y' , z' les nouvelles coordonnées rectangulaires, qu'on suppose avoir la même origine que les coordonnées x , y , z , les valeurs de celles-ci en celles-là seront exprimées de cette manière

$$x = \lambda x' + \mu y' + \nu z',$$

$$y = \lambda' x' + \mu' y' + \nu' z',$$

$$z = \lambda'' x' + \mu'' y' + \nu'' z',$$

les coefficients λ , μ , ν , λ' , μ' , ν' , λ'' , μ'' , ν'' dépendant uniquement de la position des coordonnées x' , y' , z' relativement à celle des coordonnées x , y , z .

Or comme on suppose que les coordonnées x' , y' , z' se rapportent aux mêmes points que les coordonnées x , y , z , on aura nécessairement

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = x^2 + y^2 + z^2 = r^2;$$

done il faudra qu'on ait

$$\begin{aligned} & (\lambda^2 + \lambda'^2 + \lambda''^2) x'^2 + (\mu^2 + \mu'^2 + \mu''^2) y'^2 + (\nu^2 + \nu'^2 + \nu''^2) z'^2 \\ & + 2(\lambda\mu + \lambda'\mu' + \lambda''\mu'') x'y' + 2(\lambda\nu + \lambda'\nu' + \lambda''\nu'') x'z' + 2(\mu\nu + \mu'\nu' + \mu''\nu'') y'z' \\ & = x'^2 + y'^2 + z'^2, \end{aligned}$$

équation qui doit avoir lieu indépendamment des valeurs de x' , y' , z' ; c'est pourquoi il faudra qu'on ait, en particulier, les conditions suivantes

$$\begin{aligned} \lambda^2 + \lambda'^2 + \lambda''^2 &= 1, & \mu^2 + \mu'^2 + \mu''^2 &= 1, & \nu^2 + \nu'^2 + \nu''^2 &= 1, \\ \lambda\mu + \lambda'\mu' + \lambda''\mu'' &= 0, & \lambda\nu + \lambda'\nu' + \lambda''\nu'' &= 0, & \mu\nu + \mu'\nu' + \mu''\nu'' &= 0, \end{aligned}$$

qui serviront à déterminer six des neuf quantités λ , μ , ν , λ' , μ' , ν' , λ'' , μ'' , ν'' .

Maintenant, comme a , b , c sont les coordonnées qui déterminent la position du point attiré, relativement aux axes des premières coordonnées x , y , z , si l'on nomme de même a' , b' , c' les coordonnées qui détermineront la position du même point relativement aux axes des nouvelles

coordonnées x', y', z' , on aura pareillement

$$\begin{aligned} a &= \lambda' a' + \mu' b' + \nu' c', \\ b &= \lambda' a' + \mu' b' + \nu' c', \\ c &= \lambda' a' + \mu' b' + \nu' c'; \end{aligned}$$

et ces équations serviront à déterminer les trois restantes des neuf quantités $\lambda, \mu, \dots$

Supposons maintenant que l'on ait $a' = 0$ et $b' = 0$, pour que le point attiré se trouve dans l'axe même des coordonnées c' ; et l'on aura

$$a = \nu c', \quad b = \nu' c', \quad c = \nu'' c',$$

d'où l'on tire

$$\nu = \frac{a}{c'}, \quad \nu' = \frac{b}{c'}, \quad \nu'' = \frac{c}{c'}.$$

Ensuite on déterminera les autres quantités $\lambda, \lambda', \lambda'', \mu, \mu', \mu''$ par les six équations ci-dessus.

On substituera donc à la place de x, y, z les expressions ci-dessus dans l'équation

$$z^2 + mx^2 + ny^2 = k;$$

ensuite il faudra mettre (6) à la place des nouvelles coordonnées x', y', z' les quantités $r \sin p \cos q, r \sin p \sin q, c' + r \cos p$; et l'on aura l'équation

$$\begin{aligned} & m[\lambda r \sin p \cos q + \mu r \sin p \sin q + \nu (c' + r \cos p)]^2 \\ & + n[\lambda' r \sin p \cos q + \mu' r \sin p \sin q + \nu' (c' + r \cos p)]^2 \\ & + [\lambda'' r \sin p \cos q + \mu'' r \sin p \sin q + \nu'' (c' + r \cos p)]^2 \end{aligned} = k,$$

laquelle, étant ordonnée par rapport à r , deviendra

$$\begin{aligned} & \left[\begin{aligned} & m(\lambda \sin p \cos q + \mu \sin p \sin q + \nu \cos p)^2 \\ & + n(\lambda' \sin p \cos q + \mu' \sin p \sin q + \nu' \cos p)^2 \\ & + (\lambda'' \sin p \cos q + \mu'' \sin p \sin q + \nu'' \cos p)^2 \end{aligned} \right] \times r^2 \\ & + \left[\begin{aligned} & m\nu(\lambda \sin p \cos q + \mu \sin p \sin q + \nu \cos p) \\ & + n\nu'(\lambda' \sin p \cos q + \mu' \sin p \sin q + \nu' \cos p) \\ & + \nu''(\lambda'' \sin p \cos q + \mu'' \sin p \sin q + \nu'' \cos p) \end{aligned} \right] \times 2c' r \\ & + (m\nu^2 + n\nu'^2 + \nu''^2)c'^2 - k = 0. \end{aligned}$$

Donc faisant

$$\begin{aligned} N &= \left[\begin{aligned} & m(\lambda \sin p \cos q + \mu \sin p \sin q + \nu \cos p)^2 \\ & + n(\lambda' \sin p \cos q + \mu' \sin p \sin q + \nu' \cos p)^2 \\ & + (\lambda'' \sin p \cos q + \mu'' \sin p \sin q + \nu'' \cos p)^2 \end{aligned} \right], \\ M &= \left[\begin{aligned} & (m\lambda\nu + n\lambda'\nu' + \lambda''\nu'') \sin p \cos q \\ & + (m\mu\nu + n\mu'\nu' + \mu''\nu'') \sin p \sin q \\ & + (m\nu^2 + n\nu'^2 + \nu''^2) \cos p \end{aligned} \right] \times c', \\ h &= (m\nu^2 + n\nu'^2 + \nu''^2)c'^2 - k = a^2 + mb^2 + nc^2 - k; \end{aligned}$$

on aura

$$Nr^2 + 2Mr + h = 0;$$

d'où l'on tire la différence des racines

$$r'' - r' = \frac{2\sqrt{M^2 - hN}}{N},$$

valeur qu'il faudra substituer dans les formules différentielles du Problème IV, après quoi on intégrera relativement à p et à q , en observant les règles données dans ce Problème. Mais comme les valeurs ci-dessus de M et de N sont presque encore plus compliquées que celles du n° 12, il s'ensuit que la méthode précédente ne saurait être d'une grande utilité dans la solution du Problème dont il s'agit.

EXTRAITS DE DEUX LETTRES DE D'ALEMBERT A LAGRANGE.

(Nouveaux Mémoires de l'Académie royale des Sciences et Belles-Lettres de Berlin, année 1774.)

LETRE DU 15 SEPTEMBRE 1775.

La lecture de votre excellent Mémoire sur l'attraction des sphéroïdes elliptiques, inséré dans le volume de 1773, m'a fait revenir un moment sur ce que j'avais donné dans le sixième volume de mes *Opuscules*, relativement à cette matière, et j'ai trouvé que le Théorème de M. Maclaurin, sur lequel j'avais formé quelques doutes, pages 242 et 243, Art. 54, et qu'il a

énoncé sans démonstration, est en effet très-vrai. Pour le faire voir, je reprends l'équation de la page 236 de mon sixième volume

$$c^2 - \frac{b^2}{1 + \sin^2 Z} \frac{b^2 - a^2}{a^2} = C^2 - \frac{B^2}{1 + \sin^2 Z'} \frac{B^2 - A^2}{A^2},$$

et j'ajoute au premier membre $b^2 - c^2$, et au second $B^2 - C^2$, qui lui est égal par l'hypothèse, ce qui donne

$$\frac{\sin^2 Z}{1 + \sin^2 Z} \frac{b^2 - a^2}{a^2}$$

en raison constante avec

$$\frac{\sin^2 Z'}{1 + \sin^2 Z'} \frac{B^2 - A^2}{A^2}.$$

De même ajoutant au premier membre $a^2 - c^2$, et au second $A^2 - C^2$, qui lui est égal (hypothèse), et mettant au numérateur $1 - \cos^2 Z$ pour $\sin^2 Z$, et $1 - \cos^2 Z'$ pour $\sin^2 Z'$, on verra facilement que

$$\frac{\cos^2 Z}{1 + \sin^2 Z} \frac{b^2 - a^2}{a^2}$$

sera en raison constante avec

$$\frac{\cos^2 Z'}{1 + \sin^2 Z'} \frac{B^2 - A^2}{A^2}.$$

d'où l'on tire aisément le reste de la démonstration, par la même méthode que dans les pages 236 et 237.

Il faut encore remarquer, pour la fin de la page 242, Art. 53, que l'équation

$$\frac{C^2}{B^2} = \frac{\delta^2}{\delta^2 - c^2 + b^2},$$

n'a lieu dans la supposition dont il s'agit, qu'en faisant $\delta = C$, parce que $C^2 - B^2$ est supposé égal à $c^2 - b^2$; et qu'ainsi il ne se trouve point, dans cette équation

$$C^2 - B^2 = c^2 - b^2,$$

de quantité δ qui soit différente de C .

Comme il me semble que vous n'avez pas traité dans votre excellent Mémoire le cas du Théorème dont il s'agit, j'ai cru cette remarque digne de vous être communiquée.

LETTRE DU 15 DÉCEMBRE 1775.

Je suis bien aise que vous ayez trouvé par votre théorie, comme vous me faites l'honneur de me le mander, une démonstration analytique du Théorème de Maclaurin, dont je vous envoyai il y a deux mois la démonstration synthétique. C'est aussi par une voie analytique, dont le détail aurait été trop long dans une lettre, que j'avais trouvé la démonstration de ce Thé-

rème. Je me contenterai de vous dire ici en peu de mots, que, si, en suivant les dénominations des pages 233 et suivantes du sixième volume de mes *Opuscles*, on suppose que $\frac{c^2 - b^2}{\delta^2}$ ou $\frac{C^2 - B^2}{\delta^2}$ soit le même dans les deux sphéroïdes, et qu'on fasse

$$\frac{c^2 - b^2}{\delta^2} = u^2 \quad \text{et} \quad \frac{b^2 - a^2}{a^2} = p^2,$$

je trouve que les attractions des deux sphéroïdes seront entre elles en raison donnée et connue, si la quantité

$$\frac{du}{\sqrt{u^2 + \frac{b^2 - c^2}{\delta^2}}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\frac{c^2 e^2 + c^2 - b^2}{\delta^2 \delta^2 + \delta^2} - u^2}}$$

est la même dans les deux sphéroïdes, c'est-à-dire si $\frac{b^2 - c^2}{\delta^2}$ est constant dans ces deux sphéroïdes, ainsi que $\frac{c^2 - b^2 + p^2 c^2}{(p^2 + 1)\delta^2}$. Or il est facile de tirer de cette double condition l'équation

$$A^2 = B^2 - b^2 + a^2 \quad \text{ou} \quad A^2 - B^2 = a^2 - b^2.$$

Il me semble encore que, pour trouver dans votre théorie l'attraction d'un sphéroïde de révolution en un point quelconque de l'équateur, dont je suppose le plan parallèle à celui des x et des y (ce qui donne, non plus $n = n$, mais $m = 1$, et n égal à tout ce qu'on voudra), il est nécessaire de changer les dénominations de z , x et y ; et qu'il faut supposer

$$y' = r \sin p, \quad x = r \cos p \sin q, \quad z = c - r \cos p \cos q,$$

c étant l'axe parallèle aux z , b égal à c l'axe parallèle aux x , et a l'axe parallèle aux y , suivant les dénominations que j'ai données à ces axes dans le sixième volume de mes *Opuscles*. Par cette transformation l'attraction du sphéroïde à l'équateur se trouvera aussi facilement que l'attraction au pôle; et vous pouvez remarquer que cette transformation est analogue à la solution de M. Maclaurin, qui consiste à chercher l'attraction des coupes elliptiques et semblables, perpendiculaires au plan de l'équateur, et ayant toutes une même commune section.

ADDITION AU MÉMOIRE PRÉCÉDENT (*).

(Nouveaux Mémoires de l'Académie royale des Sciences et Belles-Lettres de Berlin, année 1775.)

Les remarques contenues dans la lettre de M. d'Alembert, dont j'ai eu l'honneur de faire part à l'Académie il y a huit jours, m'ont donné occa-

(*) Lu le 9 novembre 1775.

sion de chercher si le Théorème de M. Maclaurin concernant l'attraction d'un ellipsoïde sur un point quelconque placé dans le prolongement de l'un de ses trois axes ne pourrait pas se déduire des formules que j'ai données dans ce Mémoire; et je crois que les Analystes verront avec plaisir avec combien de facilité on peut parvenir par ces formules à la démonstration du Théorème dont il s'agit.

1. Soit un sphéroïde elliptique représenté par l'équation

$$z^2 + mx^2 + ny^2 = k,$$

nous avons trouvé dans le n° 14 du Mémoire cité que l'attraction de ce sphéroïde sur un point placé hors de lui, dans le prolongement de l'axe des coordonnées z (qui est en même temps un des axes du sphéroïde), et à la distance c du centre, est exprimée par l'intégrale de la formule

$$\frac{4dq}{1-m} \left(\sqrt{k} - \sqrt{\frac{mc^2}{1-m}} \times \text{arc tang} \frac{\sqrt{k}}{\sqrt{\frac{mc^2}{1-m}}} \right),$$

en supposant qu'on mette dans cette formule $m \cos^2 q + n \sin^2 q$ à la place de m , et qu'ensuite on prenne l'intégrale depuis $q = 0$ jusqu'à $q = 180^\circ$; et comme les valeurs de $\sin^2 q$ et $\cos^2 q$ reviennent les mêmes dans le second quart de cercle, on pourra se contenter de prendre l'intégrale depuis $q = 0$ jusqu'à $q = 90^\circ$, et de la doubler.

Donc, si l'on fait pour plus de simplicité $\frac{\sqrt{k}}{c} = g$, et qu'on écrive m' à la place de m en sorte qu'on ait $m' = m \cos^2 q + n \sin^2 q$, l'attraction dont il s'agit sera exprimée par l'intégrale prise depuis $q = 0$ jusqu'à $q = 90^\circ$ de la formule

$$\frac{8dq\sqrt{k}}{1-m'} \left(1 - \frac{1}{g} \sqrt{\frac{m'}{1-m'}} \times \text{arc tang} \frac{g}{\sqrt{\frac{m'}{1-m'}}} \right).$$

Or

$$\cos^2 q = \frac{1 + \cos 2q}{2}, \quad \sin^2 q = \frac{1 - \cos 2q}{2};$$

donc

$$m' = \frac{m+n+(m-n)\cos 2q}{2}.$$

Soit maintenant

$$\text{tang } q = t,$$

on aura

$$\cos 2q = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad dq = \frac{dt}{1+t^2};$$

donc

$$m' = \frac{(m+n)(1+t^2) + (m-n)(1-t^2)}{2(1+t^2)} = \frac{m+nt}{1+t^2},$$

$$1-m' = \frac{1-m+(1-n)t^2}{1+t^2},$$

$$\frac{m'}{1-m'} = \frac{m+nt}{1-m+(1-n)t^2};$$

et la différentielle précédente deviendra par ces substitutions

$$\frac{8dt\sqrt{k}}{1-m+(1-n)t^2} \left[1 - \frac{1}{g} \sqrt{\frac{m+nt}{1-m+(1-n)t^2}} \times \text{arc tang} \frac{g}{\sqrt{\frac{m+nt}{1-m+(1-n)t^2}}} \right],$$

et comme $q = 0$ donne $t = 0$, et $q = 90^\circ$ donne $t = \infty$, il s'ensuit que pour avoir l'attraction entière il faudra prendre l'intégrale de cette quantité depuis $t = 0$ jusqu'à $t = \infty$.

2. On voit par l'équation générale du sphéroïde, laquelle donne $z^2 = k$ lorsque x et y sont nuls, que $\sqrt{k}$ est le demi-axe, en sorte que, faisant $c = \sqrt{k}$, le point attiré tombe sur la surface; or dans ce cas on a $g = 1$, ce qui simplifie un peu la formule précédente. Mais je vais faire voir que quelle que soit la valeur de g , on peut toujours ramener la formule à la même forme que dans le cas de $g = 1$.

Pour cela je suppose

$$\frac{m + n t^2}{1 - m + (1 - n) t^2} = g^2 \frac{\mu + \nu \theta^2}{1 - \mu + (1 - \nu) \theta^2},$$

μ et ν étant des coefficients indéterminés et θ une nouvelle variable; et je tire de là

$$t^2 = \frac{g^2(1-m)\mu - m(1-\mu) + [g^2(1-m)\nu - m(1-\nu)]\theta^2}{n(1-\mu) - g^2(1-n)\mu + [n(1-\nu) - g^2(1-n)\nu]\theta^2};$$

je suppose maintenant

$$g^2(1-m)\mu - m(1-\mu) = 0, \quad n(1-\nu) - g^2(1-n)\nu = 0,$$

ce qui me donne

$$\mu = \frac{m}{m + (1-m)g^2}, \quad \nu = \frac{n}{n + (1-n)g^2};$$

j'aurai ainsi

$$t^2 = \frac{g^2(1-m)\nu - m(1-\nu)\theta^2}{n(1-\mu) - g^2(1-n)\mu\theta^2},$$

savoir, en substituant les valeurs précédentes de μ et ν ,

$$t^2 = \frac{g^2(1-m) + m}{g^2(1-n) + n} \theta^2,$$

et de là

$$t = \theta \sqrt{\frac{g^2(1-m) + m}{g^2(1-n) + n}};$$

de plus, à cause de $t^2 = \frac{m\nu}{n\mu} \theta^2$, on aura

$$1 - m + (1 - n) t^2 = \frac{(1 - m) n \mu + (1 - n) m \nu \theta^2}{n \mu};$$

mais les deux équations ci-dessus donnent

$$(1 - m) \mu = \frac{m(1 - \mu)}{g^2}, \quad (1 - n) \nu = \frac{n(1 - \nu)}{g^2};$$

donc on aura

$$1 - m + (1 - n) t^2 = \frac{m}{g^2 \mu} [1 - \mu + (1 - \nu) \theta^2] = \frac{m + (1 - m) g^2}{g^2} [1 - \mu + (1 - \nu) \theta^2].$$

Faisant donc ces substitutions dans la formule différentielle du numéro précédent et supposant, pour abrégér,

$$\chi = \frac{g^4 k}{[g^2(1-m) + m][g^2(1-n) + n]},$$

elle deviendra

$$\frac{8d\theta\sqrt{\chi}}{1 - \mu + (1 - \nu) \theta^2} \left[1 - \sqrt{\frac{\mu + \nu \theta^2}{1 - \mu + (1 - \nu) \theta^2}} \times \text{arc tang} \sqrt{\frac{1}{1 - \mu + (1 - \nu) \theta^2}} \right],$$

et comme θ est égal à zéro lorsque $t = 0$, et égal à ∞ lorsque $t = \infty$, il s'ensuit qu'il faudra prendre aussi l'intégrale de cette formule depuis $\theta = 0$ jusqu'à $\theta = \infty$.

3. Cette transformée en θ est, comme on voit, entièrement semblable à la formule ci-dessus en t dans le cas de $g = 1$, les quantités μ, ν, χ répondant aux quantités m, n, k ; donc puisque les deux valeurs extrêmes des variables t et θ doivent être les mêmes, il s'ensuit que l'intégrale de la différentielle en t du n° 1, quelle que soit la valeur de g , sera exprimée par une fonction de μ, ν, χ semblable à la fonction de m, n, k par laquelle sera exprimée la même intégrale dans le cas de $g = 1$.

Donc l'attraction du sphéroïde représenté par l'équation

$$z^2 + mx^2 + ny^2 = k$$

sur un point placé hors de lui dans l'axe des z à la distance c du centre sera égale à l'attraction du sphéroïde représenté par l'équation

$$z^2 + \mu x^2 + \nu y^2 = \chi$$

sur un point de sa surface dans le même axe des z .

4. Les trois demi-axes du sphéroïde représenté par l'équation

$$z^2 + mx^2 + ny^2 = k,$$

auxquels les coordonnées x, y, z sont supposées parallèles, sont $\sqrt{\frac{k}{m}}, \sqrt{\frac{k}{n}}, \sqrt{k}$; nommant donc ces demi-axes a, b, c , on aura

$$k = c^2, \quad m = \frac{c^2}{a^2}, \quad n = \frac{c^2}{b^2};$$

et désignant par h la distance du point attiré au centre du sphéroïde, distance que nous avons nommée plus haut e , on aura (1)

$$g^2 = \frac{c^2}{h^2};$$

donc, substituant ces valeurs dans les formules du n° 2, on aura

$$\mu = \frac{h^2}{h^2 + a^2 - c^2}, \quad \nu = \frac{h^2}{h^2 + b^2 - c^2}, \quad \chi = \frac{a^2 b^2 c^2}{(h^2 + a^2 - c^2)(h^2 + b^2 - c^2)};$$

donc, si l'on nomme de même α, β, γ les trois demi-axes correspondants du sphéroïde représenté par l'équation

$$x^2 + \mu x^2 + \nu y^2 = \chi,$$

et qui sont $\sqrt{\frac{\chi}{\mu}}, \sqrt{\frac{\chi}{\nu}}, \sqrt{\chi}$, on aura, en substituant les valeurs précédentes de μ, ν, χ ,

$$\alpha = \frac{abc}{h \sqrt{h^2 + b^2 - c^2}},$$

$$\beta = \frac{abc}{h \sqrt{h^2 + a^2 - c^2}},$$

$$\gamma = \frac{abc}{\sqrt{h^2 + a^2 - c^2} \sqrt{h^2 + b^2 - c^2}}.$$

Donc, si l'on a un sphéroïde elliptique dont les trois demi-axes soient a, b, c , l'attraction de ce sphéroïde sur un point placé dans le prolongement d'un de ces axes comme c , à la distance h du centre, sera égale à l'attraction qu'un autre sphéroïde dont les trois demi-axes seraient α, β, γ exercerait sur un point placé à l'extrémité du demi-axe γ .

Si l'on fait $h = c$, on voit que les quantités α, β, γ deviennent a, b, c , et par conséquent les deux sphéroïdes reviennent au même; ce qui doit être pour l'exactitude de nos formules.

5. Imaginons un autre sphéroïde dont les trois demi-axes soient f, g, h , et qui soit entièrement semblable à celui dont les trois demi-axes sont α, β, γ ; il faudra donc que l'on ait

$$f = \frac{\alpha h}{\gamma}, \quad g = \frac{\beta h}{\gamma};$$

par conséquent, si l'on substitue pour α, β, γ les valeurs précédentes, on aura

$$f = \sqrt{h^2 + b^2 - c^2}, \quad g = \sqrt{h^2 + a^2 - c^2};$$

donc

$$f^2 - h^2 = b^2 - c^2, \quad g^2 - h^2 = a^2 - c^2;$$

et par conséquent aussi

$$f^2 - g^2 = b^2 - a^2.$$

Donc, si le sphéroïde donné dont les trois demi-axes sont a, b, c , et le sphéroïde dont les demi-axes sont f, g, h sont supposés décrits autour du même centre, et en sorte que leurs axes respectifs soient placés dans les mêmes lignes, les coupes elliptiques de l'un et de l'autre sphéroïde faites par un plan passant par deux axes auront le même centre et les mêmes foyers, par les propriétés connues des sections coniques.

6. Par les formules du n° 1 on voit que l'attraction sur un point placé à l'extrémité du demi-axe $\sqrt{k}$ (en faisant $c = \sqrt{k}$ ou $g = 1$) est proportionnelle à $\sqrt{k}$ tant que les quantités m et n demeurent les mêmes; donc (4) l'attraction de deux sphéroïdes semblables sur des points placés aux extrémités de leurs axes respectifs est proportionnelle à ces axes. Donc l'attraction du sphéroïde, dont les axes sont $2f, 2g, 2h$ sur un point placé à l'extrémité de l'axe $2h$, est à l'attraction du sphéroïde semblable, dont les axes sont $2\alpha, 2\beta, 2\gamma$ sur un point placé à l'extrémité

de l'axe 2γ , comme $2h$ est à 2γ ou comme 1 est à $\frac{\gamma}{h}$; mais (à cause de $f = \frac{\alpha h}{\gamma}$, $g = \frac{\beta h}{\gamma}$)

$$\frac{\gamma}{h} = \frac{\alpha\beta h}{\gamma f g},$$

et (4)

$$\frac{\alpha\beta}{\gamma} = \frac{abc}{h^2};$$

done

$$\frac{\gamma}{h} = \frac{abc}{fgh}.$$

Ainsi la proportion dont il s'agit sera égale à celle de 1 à $\frac{abc}{fgh}$, ou de fgh à abc .

De là et de ce qu'on a démontré plus haut il s'ensuit que l'attraction d'un sphéroïde elliptique sur un point placé dans le prolongement d'un de ses trois axes sera à l'attraction qu'exercerait sur le même point un autre sphéroïde qui aurait le même centre, la même position des axes, dont les coupes elliptiques faites par les mêmes plans passant par deux axes auraient les mêmes foyers, et dont la surface passerait par le point donné, en sorte que ce point se trouvât à l'extrémité d'un de ses axes, l'attraction, dis-je, du premier sphéroïde sera à celle du second comme le produit des trois axes du premier au produit des trois axes du second sphéroïde.

C'est le Théorème que M. Maclaurin a énoncé sans démonstration dans l'Art. 653 de son *Traité des fluxions*, et que nous nous étions proposé de déduire de nos formules.

SOLUTIONS ANALYTIQUES

DE QUELQUES

PROBLÈMES SUR LES PYRAMIDES TRIANGULAIRES.



SOLUTIONS ANALYTIQUES

DE QUELQUES

PROBLÈMES SUR LES PYRAMIDES TRIANGULAIRES.

(Nouveaux Mémoires de l'Académie royale des Sciences et Belles-Lettres
de Berlin, année 1773.)

Les pyramides triangulaires tiennent, par leur simplicité, parmi les corps solides le même rang que les triangles parmi les figures planes; car de même que toute figure plane rectiligne peut être regardée comme composée de triangles, de même aussi tout corps solide terminé par des plans peut être supposé formé de pyramides triangulaires; mais si les Géomètres se sont toujours beaucoup occupés de l'étude des triangles et n'ont cessé d'en approfondir les propriétés, ils n'ont fait, ce me semble, qu'effleurer celles des pyramides triangulaires; et des principaux Problèmes qu'on peut proposer sur ces sortes de solides il n'y en a encore qu'un très-petit nombre qui ait été résolu. Ceux qui vont faire la matière de ce Mémoire concernent la manière de trouver la surface, la solidité, les sphères circonscrites et inscrites, le centre de gravité, etc., de toute pyramide triangulaire dont on connaît les six côtés (*); et je me flatte que les solutions que j'en vais donner pourront intéresser les Géomètres tant par la méthode que par les résultats.

Ces solutions sont purement analytiques et peuvent même être entendues sans figures; j'y emploie des coordonnées rectangles pour déterminer la position des différents points que j'ai à considérer dans la pyra-

(*) Je nomme *côtés* les lignes formées par la rencontre des plans sous lesquels la pyramide est comprise, et je nommerai ces plans *faces* de la pyramide.

mide, et je n'ai pas même besoin de donner aux axes de ces coordonnées une position déterminée; je suppose seulement qu'ils se coupent au sommet de la pyramide, en sorte que pour ce point les coordonnées soient nulles, ce qui sert à simplifier les formules sans rien ôter à leur généralité. Par ce moyen tout se réduit à une affaire de pur calcul, et il est très-facile de déterminer la valeur des lignes qu'on veut connaître, puisqu'il ne faut que prendre la somme des carrés des différences des coordonnées qui répondent aux deux extrémités de chaque ligne proposée. Il ne s'agit plus ensuite que de rendre les résultats indépendants de la position arbitraire des coordonnées, en introduisant à leur place d'autres lignes relatives uniquement à la figure de la pyramide, comme les côtés de la pyramide, les perpendiculaires sur ses faces, etc.; c'est à quoi je parviens à l'aide de quelques réductions et transformations assez remarquables que j'expose au commencement de ce Mémoire, et qui pourront être aussi du plus grand usage dans beaucoup d'autres cas. Indépendamment de l'utilité directe que ces solutions pourront avoir dans plusieurs occasions, elles serviront principalement à montrer avec combien de facilité et de succès la méthode algébrique peut être employée dans les questions qui paraissent être le plus du ressort de la Géométrie proprement dite, et les moins propres à être traitées par le calcul.

1. Si l'on a neuf quantités quelconques

$$x, y, z, x', y', z', x'', y'', z'',$$

et qu'on en forme ces neuf autres-ci

$$\begin{aligned}\xi &= y'z'' - z'y'', & \eta &= z'x'' - x'z'', & \zeta &= x'y'' - y'x'', \\ \xi' &= y''z - z'y, & \eta' &= z''x - x'z, & \zeta' &= x''y - y'x, \\ \xi'' &= y'z' - z'y', & \eta'' &= z'x' - x'z', & \zeta'' &= x'y' - y'x',\end{aligned}$$

je dis qu'en supposant entre les neuf quantités données les six équations suivantes

$$\begin{aligned}x^2 + y^2 + z^2 &= a, & x'x'' + y'y'' + z'z'' &= b, \\ x'^2 + y'^2 + z'^2 &= a', & x'x' + y'y' + z'z' &= b', \\ x''^2 + y''^2 + z''^2 &= a'', & x'x' + y'y' + z'z' &= b'',\end{aligned}$$

et faisant, pour abrégé,

$$\begin{aligned}\alpha &= a'a'' - b^2, & \beta &= b'b'' - ab, \\ \alpha' &= aa'' - b'^2, & \beta' &= b'b' - a'b', \\ \alpha'' &= aa' - b''^2, & \beta'' &= b'b'' - a''b'',\end{aligned}$$

on aura de même

$$\begin{aligned}\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 &= \alpha, & \xi'\xi'' + \eta'\eta'' + \zeta'\zeta'' &= \beta, \\ \xi'^2 + \eta'^2 + \zeta'^2 &= \alpha', & \xi\xi'' + \eta\eta'' + \zeta\zeta'' &= \beta', \\ \xi''^2 + \eta''^2 + \zeta''^2 &= \alpha'', & \xi\xi' + \eta\eta' + \zeta\zeta' &= \beta''.\end{aligned}$$

C'est ce qu'il est aisé de vérifier par la substitution des valeurs de $\xi, \xi', \dots$, $\alpha, \alpha', \dots$ en $x, x', \dots$

2. Donc, si l'on fait pareillement

$$\begin{aligned}X &= \eta'\zeta'' - \zeta'\eta'', & Y &= \zeta'\xi'' - \xi'\zeta'', & Z &= \xi'\eta'' - \eta'\xi'', \\ X' &= \eta''\zeta - \zeta''\eta, & Y' &= \zeta''\xi - \xi''\zeta, & Z' &= \xi''\eta - \eta''\xi, \\ X'' &= \eta\zeta' - \zeta\eta', & Y'' &= \zeta\xi' - \xi\zeta', & Z'' &= \xi\eta' - \eta\xi',\end{aligned}$$

et ensuite

$$\begin{aligned}A &= \alpha'\alpha'' - \beta^2, & B &= \beta'\beta'' - \alpha\beta, \\ A' &= \alpha\alpha'' - \beta'^2, & B' &= \beta\beta'' - \alpha'\beta', \\ A'' &= \alpha\alpha' - \beta''^2, & B'' &= \beta\beta' - \alpha''\beta'',\end{aligned}$$

on aura aussi

$$\begin{aligned}X^2 + Y^2 + Z^2 &= A, & X'X'' + Y'Y'' + Z'Z'' &= B, \\ X'^2 + Y'^2 + Z'^2 &= A', & X'X' + Y'Y' + Z'Z' &= B', \\ X''^2 + Y''^2 + Z''^2 &= A'', & X'X' + Y'Y' + Z'Z' &= B''.\end{aligned}$$

3. Or en substituant les valeurs de $\xi, \xi', \dots$ en $x, x', \dots$ et faisant, pour abrégé,

$$\Delta = x'y'z'' + y'z'x'' + z'x'y'' - x'z'y'' - y'x'z'' - z'y'x'',$$

on trouve

$$\begin{aligned}X &= \Delta x, & Y &= \Delta y, & Z &= \Delta z, \\ X' &= \Delta x', & Y' &= \Delta y', & Z' &= \Delta z', \\ X'' &= \Delta x'', & Y'' &= \Delta y'', & Z'' &= \Delta z'';\end{aligned}$$

664 SOLUTIONS ANALYTIQUES DE QUELQUES PROBLÈMES

donc mettant ces valeurs dans les dernières équations ci-dessus, on aura, en vertu des six équations supposées dans le n° 1,

$$\begin{aligned} A &= \Delta^2 a, & B &= \Delta^2 b, \\ A' &= \Delta^2 a', & B' &= \Delta^2 b', \\ A'' &= \Delta^2 a'', & B'' &= \Delta^2 b'', \end{aligned}$$

et de là il est facile de tirer la valeur de Δ^2 en $a, a', a'', b, \dots$; car on aura d'abord

$$\Delta^2 = \frac{A}{a} = \frac{a'a'' - \beta^2}{a},$$

et, substituant les valeurs de a', a'', β en $a, a', \dots$ (1),

$$\Delta^2 = a a' a'' + 2 b b' b'' - a b^2 - a' b'^2 - a'' b''^2;$$

on trouvera la même valeur de Δ^2 par les autres équations. Si l'on remet dans cette équation les quantités $x, y, z, x', \dots$, on aura la même équation identique que nous avons donnée dans le Lemme ci-dessus (*).

4. Il est bon de remarquer que la valeur de Δ^2 peut aussi se mettre sous cette forme

$$\Delta^2 = \frac{\alpha a + \alpha' a' + \alpha'' a'' + 2(\beta b + \beta' b' + \beta'' b'')}{3};$$

or si l'on multiplie cette équation par Δ^2 et qu'on y substitue ensuite A à la place de $\Delta^2 a$, A' à la place de $\Delta^2 a'$, et ainsi de suite (numéro précédent), on aura

$$\Delta^4 = \frac{A \alpha + A' \alpha' + A'' \alpha'' + 2(B \beta + B' \beta' + B'' \beta'')}{3},$$

ou bien en mettant pour $A, A', \dots$ leurs valeurs en $a, a', \dots$ (2)

$$\Delta^4 = \alpha \alpha' \alpha'' + 2 \beta \beta' \beta'' - \alpha \beta^2 - \alpha' \beta'^2 - \alpha'' \beta''^2;$$

d'où l'on voit que la quantité Δ^2 et son carré Δ^4 sont des fonctions semblables, l'une de a, a', a'', b, b', b'' , l'autre de $\alpha, \alpha', \alpha'', \beta, \beta', \beta''$.

(*) Ce Lemme est la première des propositions du Mémoire relatif au mouvement de rotation d'un corps solide. Voir à la page 580 de ce volume. (Note de l'Éditeur.)

SUR LES PYRAMIDES TRIANGULAIRES.

665

5. De plus, comme on a (3)

$$\begin{aligned} x y' z'' + y' z' x'' + z x' y'' - x z' y'' - y' x' z'' - z y' x'' \\ = \sqrt{a a' a'' + 2 b b' b'' - a b^2 - a' b'^2 - a'' b''^2} = \Delta, \end{aligned}$$

et qu'il y a entre les quantités $x, y, z, x', a', a'', b, \dots$ les mêmes relations qu'entre les quantités $\xi, \eta, \zeta, \xi', \dots$ et $\alpha, \alpha', \alpha'', \beta, \dots$ (1), on aura donc aussi

$$\begin{aligned} \xi \eta' \zeta'' + \eta' \zeta' \xi'' + \zeta \xi' \eta'' - \xi \zeta' \eta'' - \eta' \zeta' \xi'' - \zeta \eta' \xi'' \\ = \sqrt{\alpha \alpha' \alpha'' + 2 \beta \beta' \beta'' - \alpha \beta^2 - \alpha' \beta'^2 - \alpha'' \beta''^2} = \Delta. \end{aligned}$$

Donc on aura cette équation identique et très-remarquable

$$\begin{aligned} \xi \eta' \zeta'' + \eta' \zeta' \xi'' + \zeta \xi' \eta'' - \xi \zeta' \eta'' - \eta' \zeta' \xi'' - \zeta \eta' \xi'' \\ = (x y' z'' + y' z' x'' + z x' y'' - x z' y'' - y' x' z'' - z y' x''). \end{aligned}$$

6. Si les six quantités $\alpha, \alpha', \alpha'', \beta, \beta', \beta''$ étaient données et qu'on voulût déterminer par leur moyen les six quantités a, a', a'', b, b', b'' , il serait peut-être très-difficile d'en venir à bout à l'aide des six équations du n° 1 entre ces quantités; mais on y parviendrait aisément par les formules des numéros suivants.

On formera pour cela les six quantités A, A', A'', B, B', B'' (2); ensuite on formera la quantité (4)

$$\Delta^2 = \sqrt{\alpha \alpha' \alpha'' + 2 \beta \beta' \beta'' - \alpha \beta^2 - \alpha' \beta'^2 - \alpha'' \beta''^2},$$

et l'on aura sur-le-champ (3)

$$\begin{aligned} a &= \frac{A}{\Delta^2}, & a' &= \frac{A'}{\Delta^2}, & a'' &= \frac{A''}{\Delta^2}, \\ b &= \frac{B}{\Delta^2}, & b' &= \frac{B'}{\Delta^2}, & b'' &= \frac{B''}{\Delta^2}. \end{aligned}$$

7. Si l'on multiplie les neuf premières équations du n° 1 respectivement par $x, x', x'', y, y', y'', z, z', z''$, et qu'on les ajoute ensemble trois

à trois, on trouvera ces neuf-ci, en mettant Δ à la place de la quantité $xy'z'' + y'z''x'' + \dots$ (3)

$$\begin{aligned} x\xi + x'\xi' + x''\xi'' &= \Delta, & y\xi + y'\xi' + y''\xi'' &= 0, & z\xi + z'\xi' + z''\xi'' &= 0, \\ x\eta + x'\eta' + x''\eta'' &= 0, & y\eta + y'\eta' + y''\eta'' &= \Delta, & z\eta + z'\eta' + z''\eta'' &= 0, \\ x\xi + x'\xi' + x''\xi'' &= 0, & y\xi + y'\xi' + y''\xi'' &= 0, & z\xi + z'\xi' + z''\xi'' &= \Delta; \end{aligned}$$

et l'on trouvera de même ces neuf autres-ci

$$\begin{aligned} x\xi + y'\eta + z'\xi &= \Delta, & x'\xi + y'\eta + z'\xi &= 0, & x''\xi + y''\eta + z''\xi &= 0, \\ x'\xi + y'\eta + z'\xi &= 0, & x'\xi + y'\eta + z'\xi &= \Delta, & x''\xi + y''\eta + z''\xi &= 0, \\ x''\xi + y''\eta + z''\xi &= 0, & x''\xi + y''\eta + z''\xi &= 0, & x''\xi + y''\eta + z''\xi &= \Delta. \end{aligned}$$

8. De plus, si l'on ajoute ensemble trois à trois les neuf premières équations du numéro précédent après les avoir multipliées respectivement par ξ, η, ζ , ensuite par ξ', η', ζ' , et enfin par ξ'', η'', ζ'' , on aura, en vertu des six dernières équations du n° 1,

$$\begin{aligned} \xi &= \frac{\alpha x + \beta' x' + \beta'' x''}{\Delta}, & \eta &= \frac{\alpha y + \beta' y' + \beta'' y''}{\Delta}, & \zeta &= \frac{\alpha z + \beta' z' + \beta'' z''}{\Delta}, \\ \xi' &= \frac{\beta'' x + \alpha' x' + \beta x''}{\Delta}, & \eta' &= \frac{\beta'' y + \alpha' y' + \beta y''}{\Delta}, & \zeta' &= \frac{\beta'' z + \alpha' z' + \beta z''}{\Delta}, \\ \xi'' &= \frac{\beta' x + \beta x' + \alpha'' x''}{\Delta}, & \eta'' &= \frac{\beta' y + \beta y' + \alpha'' y''}{\Delta}, & \zeta'' &= \frac{\beta' z + \beta z' + \alpha'' z''}{\Delta}. \end{aligned}$$

Et, si au lieu de multiplier les mêmes équations par $\xi, \eta, \zeta, \xi', \dots$, on les multiplie respectivement par $x, y, z, x', \dots$, et qu'on les ajoute de même trois à trois, on aura ces neuf autres-ci

$$\begin{aligned} x &= \frac{\alpha \xi + b'' \xi' + b' \xi''}{\Delta}, & y &= \frac{\alpha \eta + b'' \eta' + b' \eta''}{\Delta}, & z &= \frac{\alpha \zeta + b'' \zeta' + b' \zeta''}{\Delta}, \\ x' &= \frac{b'' \xi + \alpha' \xi' + b \xi''}{\Delta}, & y' &= \frac{b'' \eta + \alpha' \eta' + b \eta''}{\Delta}, & z' &= \frac{b'' \zeta + \alpha' \zeta' + b \zeta''}{\Delta}, \\ x'' &= \frac{b' \xi + b \xi' + \alpha'' \xi''}{\Delta}, & y'' &= \frac{b' \eta + b \eta' + \alpha'' \eta''}{\Delta}, & z'' &= \frac{b' \zeta + b \zeta' + \alpha'' \zeta''}{\Delta}. \end{aligned}$$

Ces relations entre les quantités $x, x', x'', y, y', y'', z, z', z''$ et leurs correspondantes $\xi, \xi', \xi'', \eta, \eta', \eta'', \zeta, \zeta', \zeta''$ sont très-remarquables et peuvent être utiles dans différentes occasions.

9. Regardons maintenant les trois quantités x, y, z comme les coordonnées rectangulaires d'un point M rapporté à trois axes fixes et perpendiculaires entre eux, et pareillement les quantités x', y', z' comme les coordonnées rectangulaires d'un autre point M' rapporté aux mêmes axes, et enfin les quantités x'', y'', z'' comme les coordonnées rectangulaires d'un troisième point M'' rapporté également à ces mêmes axes; on aura, en joignant ces trois points par des lignes droites, un triangle MM'M'' dont la figure et la position seront déterminées par les neuf coordonnées $x, y, z, x', y', z', x'', y'', z''$. Qu'on mène de plus des trois points M, M', M'' au point d'intersection des trois axes, point que nous désignerons par L, trois autres droites, et l'on aura trois autres triangles MLM', M'LM'', M''LM qui, avec le triangle précédent MM'M'', formeront une pyramide triangulaire dont les quatre angles seront aux points L, M, M', M''; ainsi la forme et la position de cette pyramide seront également déterminées par les mêmes coordonnées $x, x', x'', y, y', y'', z, z', z''$. C'est sur les propriétés de cette pyramide que doivent rouler les recherches qui composent ce Mémoire.

10. Et d'abord il est visible par les formules du n° 1 que les quantités a, a', a'' expriment les carrés des distances des points M, M', M'' au point L, et que les quantités

$$a + a' - 2b'', \quad a + a'' - 2b', \quad a' + a'' - 2b$$

expriment les carrés des distances entre les points M et M', entre les points M et M'', et entre les points M' et M''; de sorte que si l'on désigne les carrés de ces distances par c'', c', c , on aura

$$b = \frac{a' + a'' - c}{2}, \quad b' = \frac{a + a'' - c'}{2}, \quad b'' = \frac{a + a' - c''}{2}.$$

Ainsi les six côtés de la pyramide dont il s'agit seront

$$\sqrt{a}, \sqrt{a'}, \sqrt{a''}, \sqrt{c'}, \sqrt{c''}, \sqrt{c};$$

les trois premiers concourent au point L, qu'on peut regarder comme le sommet de la pyramide, et les trois derniers en forment la base; de ma-

nière que le côté $\sqrt{c''}$ joint les deux $\sqrt{a}$, $\sqrt{a'}$, le côté $\sqrt{c'}$ joint les deux $\sqrt{a}$, $\sqrt{a'}$, et le côté $\sqrt{c}$ joint les deux $\sqrt{a}$, $\sqrt{a''}$; ce qui forme par conséquent quatre triangles, qui sont les quatre faces de la pyramide, et dont les côtés sont $\sqrt{a}$, $\sqrt{a'}$, $\sqrt{c''}$ pour la première face latérale MLM'; $\sqrt{a}$, $\sqrt{a'}$, $\sqrt{c'}$ pour la seconde face latérale MLM''; $\sqrt{a}$, $\sqrt{a''}$, $\sqrt{c}$ pour la troisième face latérale MLM''', et $\sqrt{c}$, $\sqrt{c'}$, $\sqrt{c''}$ pour la face qui sert de base MMM''.

11. Si l'on voulait, à la place des côtés c , c' , c'' de la base, introduire les angles γ , γ' , γ'' qui leur sont opposés au sommet de la pyramide, il n'y aurait qu'à remarquer que dans le triangle MLM'', dont les côtés sont $\sqrt{a}$, $\sqrt{a'}$, $\sqrt{c}$, on a

$$c = a' + a'' - 2\sqrt{a'a''}\cos\gamma;$$

donc substituant cette valeur dans l'expression de b , on aura

$$b = \sqrt{a'a''}\cos\gamma;$$

on trouvera de même les valeurs de b' , b'' exprimées en $\cos\gamma'$ et $\cos\gamma''$; et l'on aura de cette manière

$$b = \sqrt{a'a''}\cos\gamma, \quad b' = \sqrt{a'a'''}\cos\gamma', \quad b'' = \sqrt{a'a''}\cos\gamma''.$$

12. On sait que si f , g , h sont les trois côtés d'un triangle rectiligne, son aire est exprimée par la formule

$$\frac{1}{4}\sqrt{2f^2g^2 + 2f^2h^2 + 2g^2h^2 - f^4 - g^4 - h^4} = \frac{1}{4}\sqrt{4f^2g^2 - (f^2 + g^2 - h^2)^2}.$$

Ainsi pour le triangle MLM', dont les côtés sont $\sqrt{a}$, $\sqrt{a'}$, $\sqrt{c''}$, on aura l'aire

$$\frac{1}{2}\sqrt{aa' - b'^2} = \frac{\sqrt{a'}}{2}.$$

Pour le triangle MLM'', dont les côtés sont $\sqrt{a}$, $\sqrt{a'}$, $\sqrt{c'}$, on aura l'aire

$$\frac{1}{2}\sqrt{aa' - b'^2} = \frac{\sqrt{a'}}{2};$$

et pour le triangle MLM'', dont les côtés sont $\sqrt{a}$, $\sqrt{a'}$, $\sqrt{c}$, on aura l'aire

$$\frac{1}{2}\sqrt{aa' - b'^2} = \frac{\sqrt{a'}}{2}.$$

Reste encore à considérer le triangle MMM'', dont les côtés sont $\sqrt{c}$, $\sqrt{c'}$, $\sqrt{c''}$; nommant E l'aire de ce triangle, on aura par la formule ci-dessus

$$16E^2 = 4cc' - (c + c' - c'')^2;$$

mettons pour c , c' , c'' leurs valeurs

$$a' + a'' - 2b, \quad a + a'' - 2b', \quad a + a' - 2b'',$$

on aura

$$\begin{aligned} 4E^2 &= (a' + a'' - 2b)(a + a'' - 2b') - (a'' - b - b' + b'')^2 \\ &= aa' + aa'' + a'a'' - 2ab - 2a'b' - 2a''b'' + 2bb' + 2bb'' + 2b'b'' - b^2 - b'^2 - b''^2 \\ &= a + a' + a'' + 2\beta + 2\beta' + 2\beta'', \end{aligned}$$

donc

$$E = \frac{\sqrt{a + a' + a'' + 2\beta + 2\beta' + 2\beta''}}{2}.$$

Ainsi les aires des quatre faces de la pyramide s'expriment d'une manière fort simple par les quantités α , α' , α'' , β , β' , β'' (1); on a pour celles des trois faces latérales les quantités

$$\frac{\sqrt{\alpha'}}{2}, \quad \frac{\sqrt{\alpha'}}{2}, \quad \frac{\sqrt{\alpha'}}{2},$$

et pour l'aire de la base la quantité

$$\frac{\sqrt{a + a' + a'' + 2\beta + 2\beta' + 2\beta''}}{2}.$$

13. Voyons maintenant comment doit être exprimée la solidité de la pyramide. On sait que toute pyramide est égale au tiers du produit de sa base par sa hauteur; or nous avons déjà trouvé la valeur de la base E; ainsi, nommant h la hauteur de notre pyramide, c'est-à-dire la valeur de

la perpendiculaire menée du sommet L sur le plan du triangle opposé MM'M'', on aura $\frac{Eh}{3}$ pour la solidité cherchée; mais la difficulté consiste à trouver la quantité h . Soient s, t, u les trois coordonnées rectangulaires qui déterminent la position d'un point quelconque N du plan dont nous venons de parler, on aura, comme on sait, l'équation

$$u = l + ms + nt,$$

les quantités l, m, n étant des constantes qui dépendent de la position du plan; et comme ce plan est supposé passer par les trois points M, M', M'', pour lesquels les coordonnées sont (9)

$$x, y, z, x', y', z', x'', y'', z'',$$

on aura, en substituant successivement ces valeurs à la place de s, t, u , les équations suivantes

$$z = l + mx + ny,$$

$$z' = l + mx' + ny',$$

$$z'' = l + mx'' + ny'',$$

par lesquelles on pourra déterminer les trois constantes l, m, n .

Retranchant d'abord ces équations l'une de l'autre, on a ces deux-ci

$$z' - z = m(x' - x) + n(y' - y),$$

$$z'' - z = m(x'' - x) + n(y'' - y),$$

d'où l'on tire sur-le-champ

$$m = \frac{(z' - z)(y'' - y) - (z'' - z)(y' - y)}{(x' - x)(y'' - y) - (x'' - x)(y' - y)},$$

$$n = \frac{(z' - z)(x'' - x) - (z'' - z)(x' - x)}{(x'' - x)(y' - y) - (x' - x)(y'' - y)},$$

c'est-à-dire en développant les termes et substituant les quantités $\xi, \xi', \dots$ du n° 1,

$$m = -\frac{\xi + \xi' + \xi''}{\xi + \xi' + \xi''}, \quad n = -\frac{\eta + \eta' + \eta''}{\xi + \xi' + \xi''}.$$

Ensuite la première équation donnera

$$l = z - mx - ny = \frac{z(\xi + \xi' + \xi'') + x(\xi + \xi' + \xi'') + y(\eta + \eta' + \eta'')}{\xi + \xi' + \xi''},$$

ce qui, en vertu des équations du n° 7, se réduit à cette expression fort simple

$$l = \frac{\Delta}{\xi + \xi' + \xi''}.$$

On a donc ainsi l'équation du plan de la base de la pyramide; nous l'avons cherchée d'autant plus volontiers qu'elle nous sera fort utile encore dans la suite.

14. Or la ligne menée du sommet L à un point quelconque N de ce plan, c'est-à-dire la distance des points L et N, est exprimée par

$$\sqrt{s^2 + t^2 + u^2},$$

et il est clair que la plus courte de toutes ces lignes sera la quantité cherchée h ; ainsi il n'y aura qu'à faire égale à zéro la différentielle de $\sqrt{s^2 + t^2 + u^2}$, ce qui donne

$$sds + tdt + udu = 0;$$

mais l'équation

$$u = l + ms + nt$$

donne

$$du = mds + ndt;$$

donc substituant cette valeur et égalant séparément à zéro les coefficients de ds et de dt , on aura

$$s + mu = 0, \quad t + nu = 0,$$

done

$$s = -mu, \quad t = -nu;$$

ce qui, étant substitué dans l'équation

$$u = l + ms + nt,$$

donne

$$u = l - m^2u - n^2u,$$

et de là

$$u = \frac{l}{1+m^2+n^2}, \quad t = -\frac{nl}{1+m^2+n^2}, \quad s = -\frac{ml}{1+m^2+n^2},$$

et, substituant ces valeurs dans l'expression $\sqrt{s^2+t^2+u^2}$, on aura la valeur cherchée de h , qui sera donc

$$\frac{l}{\sqrt{1+m^2+n^2}}.$$

Substituons à présent à la place de l, m, n leurs valeurs trouvées ci-dessus, on aura

$$h = \frac{\Delta}{\sqrt{(\xi+\xi'+\xi'')^2 + (\eta+\eta'+\eta'')^2 + (\zeta+\zeta'+\zeta'')^2}},$$

c'est-à-dire, en développant les termes qui sont sous le signe et faisant les substitutions du n° 1,

$$h = \frac{\Delta}{\sqrt{\alpha+\alpha'+\alpha''+2\beta+2\beta'+2\beta''}}.$$

Mais on a trouvé (12)

$$E = \frac{\sqrt{\alpha+\alpha'+\alpha''+2\beta+2\beta'+2\beta''}}{2};$$

donc on aura pour la solidité $\frac{Eh}{3}$ de notre pyramide la quantité $\frac{\Delta}{6}$. C'est ce que nous avons déjà démontré d'une autre manière ci-dessus, où nous avons nommé β la même quantité que nous désignons ici par Δ (*).

15. Il est bien remarquable que la quantité Δ exprime la solidité de la pyramide prise six fois; si donc on veut exprimer cette solidité par les six côtés $\sqrt{a}, \sqrt{a'}, \sqrt{a''}, \sqrt{b}, \sqrt{b'}, \sqrt{b''}$, il n'y aura qu'à mettre dans la valeur de Δ , à la place de b, b', b'' , les expressions du n° 10; mais il sera plus simple de conserver les quantités mêmes b, b', b'' , et l'on aura (3) la solidité cherchée égale à

$$\frac{\sqrt{aa'a''+2bb'b''-ab^2-ab'^2-a''b''^2}}{6}.$$

(*) *OEuvres de Lagrange*, t. III, p. 585.

Et comme nous avons trouvé plus haut que les aires des faces de la pyramide s'expriment d'une manière fort simple par les quantités $\alpha, \alpha', \dots$, on pourra aussi, si l'on veut, exprimer la solidité de la pyramide par ces mêmes quantités à l'aide des formules du n° 4; on aura de cette manière la solidité de la pyramide égale à

$$\frac{\sqrt{\alpha\alpha'\alpha''+2\beta\beta'\beta''-\alpha\beta^2-\alpha'\beta'^2-\alpha''\beta''^2}}{6}.$$

16. Comme il faut six éléments pour la détermination d'une pyramide triangulaire, il est clair que si l'on ne connaissait que la valeur de l'aire de chacune de ses quatre faces, avec celle de sa solidité, on n'aurait que cinq équations, et que par conséquent le Problème de trouver la pyramide qui satisferait à ces données serait indéterminé. En effet les aires des trois faces latérales donneraient les valeurs des trois quantités $\alpha, \alpha', \alpha''$, et celle de la base donnerait la valeur de $\beta+\beta'+\beta''$ (12); ensuite la considération de la solidité donnerait (numéro précédent) la valeur de la quantité

$$\alpha\alpha'\alpha''+2\beta\beta'\beta''-\alpha\beta^2-\alpha'\beta'^2-\alpha''\beta''^2,$$

de sorte qu'on n'aurait que deux équations entre les trois inconnues β, β', β'' . On pourrait donc prendre une de ces inconnues à volonté, et alors la solution du Problème se trouverait réduite à la résolution d'une équation du second degré.

17. Mais s'il n'y avait de donné que les quatre faces de la pyramide, et qu'il s'agit de trouver les dimensions de la pyramide dont la solidité serait la plus grande, on pourrait résoudre cette question par nos formules avec beaucoup de facilité.

Car il est d'abord clair que les trois quantités $\alpha, \alpha', \alpha''$ seraient données ainsi que la quantité $\beta+\beta'+\beta''$; ainsi il ne faudrait que rendre un *maximum* la quantité

$$\alpha\alpha'\alpha''+2\beta\beta'\beta''-\alpha\beta^2-\alpha'\beta'^2-\alpha''\beta''^2,$$

en y regardant $\alpha, \alpha', \alpha''$ comme constantes, et β, β', β'' comme variables.

mais de manière que leur somme demeure constante; on aurait donc ces deux équations différentielles

$$\begin{aligned} (\beta' \beta'' - \alpha \beta) d\beta + (\beta \beta'' - \alpha' \beta') d\beta' + (\beta \beta' - \alpha'' \beta'') d\beta'' &= 0, \\ d\beta + d\beta' + d\beta'' &= 0, \end{aligned}$$

d'où chassant $d\beta''$, et égalant à zéro les coefficients de $d\beta$ et $d\beta'$, on tire ces deux équations de condition

$$\beta' \beta'' - \alpha \beta = \beta \beta'' - \alpha' \beta' = \beta \beta' - \alpha'' \beta'',$$

qui renferment la solution du Problème. Ces deux équations se réduisent par les formules du n° 2 à

$$B = B' = B'',$$

et par celles du n° 3 à

$$b = b' = b'';$$

d'où l'on voit que les trois quantités b , b' , b'' doivent être égales entre elles. Ainsi, comme les quantités α , α' , α'' sont supposées données ainsi que la somme $\beta + \beta' + \beta''$, on aura ces quatre équations

$$\begin{aligned} \alpha' \alpha'' - b^2 &= \alpha, & \alpha \alpha'' - b^2 &= \alpha', & \alpha \alpha' - b^2 &= \alpha'', \\ 3b^2 - (\alpha + \alpha' + \alpha'') b &= \beta + \beta' + \beta'', \end{aligned}$$

d'où il faudra tirer α , α' , α'' et b .

Si l'on fait pour plus de simplicité

$$\beta + \beta' + \beta'' = \varepsilon,$$

on a, en divisant la dernière équation par b ,

$$\alpha + \alpha' + \alpha'' = 3b - \frac{\varepsilon}{b},$$

et prenant les carrés

$$\alpha^2 + \alpha'^2 + \alpha''^2 + 2(\alpha \alpha' + \alpha \alpha'' + \alpha' \alpha'') = 9b^2 - 6\varepsilon + \frac{\varepsilon^2}{b^2},$$

or les trois premières équations donnent

$$\alpha \alpha' = \alpha'' + b^2, \quad \alpha \alpha'' = \alpha' + b^2, \quad \alpha' \alpha'' = \alpha + b^2,$$

et de là on tire

$$\begin{aligned} \alpha^2 &= \frac{(\alpha' + b^2)(\alpha'' + b^2)}{\alpha + b^2}, \\ \alpha'^2 &= \frac{(\alpha + b^2)(\alpha'' + b^2)}{\alpha' + b^2}, \\ \alpha''^2 &= \frac{(\alpha + b^2)(\alpha' + b^2)}{\alpha'' + b^2}. \end{aligned}$$

Done substituant ces valeurs et faisant pour simplifier encore

$$2(\alpha + \alpha' + \alpha'') + 6\varepsilon = \delta \quad \text{et} \quad b^2 = u,$$

on aura, après avoir ôté les fractions,

$$\begin{aligned} u(\alpha' + u)^2(\alpha'' + u)^2 + u(\alpha + u)^2(\alpha' + u)^2 + u(\alpha + u)^2(\alpha'' + u)^2 \\ - (3u^2 - \delta u + \varepsilon^2)(\alpha + u)(\alpha' + u)(\alpha'' + u) = 0, \end{aligned}$$

équation qui, étant développée, ne montera qu'au quatrième degré par la destruction des termes qui contiendraient u^5 ; et l'on trouvera que le premier terme de cette équation sera

$$(\alpha + \alpha' + \alpha'' + \delta) u^4,$$

c'est-à-dire (en remettant la valeur de δ et de ε)

$$3(\alpha + \alpha' + \alpha'' + 2\beta + 2\beta' + 2\beta'') u^4,$$

et que le dernier sera $-\varepsilon^2 \alpha \alpha' \alpha''$; de sorte que comme les quantités α , α' , α'' sont nécessairement positives (12) ainsi que la quantité

$$\alpha + \alpha' + \alpha'' + 2(\beta + \beta' + \beta''),$$

ces deux termes seront de signes différents; par conséquent l'équation aura toujours au moins une racine réelle et positive.

Ayant trouvé une valeur positive de u , on aura $b = \sqrt{u}$, et de là on aura α , α' , α'' par les formules ci-dessus; ainsi l'on connaîtra les six côtés de la pyramide, à cause de $b' = b'' = b$.

18. Considérons un autre point P placé où l'on voudra, au dedans ou

au dehors de la pyramide, pour lequel les coordonnées rectangles soient p, q, r , et supposons que le carré de la distance de ce point au sommet L de la pyramide soit f , que les carrés des distances du même point aux points M, M', M'' de la base de la pyramide soient g, g', g'' ; il est facile de concevoir qu'on aura

$$\begin{aligned} p^2 + q^2 + r^2 &= f, \\ (p-x)^2 + (q-y)^2 + (r-z)^2 &= g, \\ (p-x')^2 + (q-y')^2 + (r-z')^2 &= g', \\ (p-x'')^2 + (q-y'')^2 + (r-z'')^2 &= g'', \end{aligned}$$

d'où, en faisant, pour abréger,

$$k = \frac{a+f-g}{2}, \quad k' = \frac{a'+f-g'}{2}, \quad k'' = \frac{a''+f-g''}{2},$$

on tire (1) ces trois équations

$$\begin{aligned} px + qy + rz &= k, \\ px' + qy' + rz' &= k', \\ px'' + qy'' + rz'' &= k'', \end{aligned}$$

par lesquelles on pourra déterminer les valeurs des coordonnées p, q, r ; et l'on trouvera par les règles connues de l'élimination, en mettant les quantités $\xi, \xi', \dots$ à la place de $y'z'' - z'y''$, $zy'' - yz''$, $\dots$ (1) et la quantité Δ à la place de $xy'z'' + yz'x'' + \dots$ (3),

$$\begin{aligned} p &= \frac{k\xi + k'\xi' + k''\xi''}{\Delta}, \\ q &= \frac{k\eta + k'\eta' + k''\eta''}{\Delta}, \\ r &= \frac{k\xi + k'\xi' + k''\xi''}{\Delta}. \end{aligned}$$

19. Or il faut que ces valeurs de p, q, r satisfassent à la première équation

$$p^2 + q^2 + r^2 = f;$$

les y substituant donc, et faisant les substitutions des dernières formules du n° 1, on aura, après avoir multiplié par Δ^2 ,

$$\Delta^2 f = \alpha k^2 + \alpha' k'^2 + \alpha'' k''^2 + 2(\beta' k k' + \beta'' k k'' + \beta''' k' k''),$$

équation qui servira à déterminer, si l'on veut, la quantité f par les quantités $g, g', g'', a, a', a'', b, b', b''$.

Ainsi l'on pourra par le moyen de cette équation résoudre le Problème suivant, qui paraît d'ailleurs assez difficile.

20. Étant donné un solide formé par deux pyramides triangulaires adossées l'une contre l'autre par leurs bases supposées égales; trouver la valeur de la diagonale, c'est-à-dire de la ligne droite qui joindrait les sommets opposés des deux pyramides, en supposant qu'on connaisse les neuf côtés de ce solide.

Il est visible que si l'on imagine que le point P soit le sommet de la seconde pyramide, dont la base soit le même triangle MM'M'' qui sert de base à la première pyramide, on aura f pour le carré de la diagonale cherchée, et $a, a', a'', c, c', c'', g, g', g''$ pour les carrés des neuf côtés donnés des deux pyramides; ainsi il n'y aura qu'à mettre dans l'équation du numéro précédent à la place de k, k', k'' leurs valeurs, et l'on aura

$$\begin{aligned} 4\Delta^2 f &= \alpha(a+f-g)^2 + \alpha'(a'+f-g')^2 + \alpha''(a''+f-g'')^2 \\ &\quad + 2\beta''(a+f-g)(a'+f-g') + 2\beta'(a+f-g)(a''+f-g'') \\ &\quad + 2\beta(a'+f-g')(a''+f-g''). \end{aligned}$$

Cette équation étant ordonnée par rapport à f montera au second degré et aura par conséquent deux racines qui seront nécessairement toutes deux réelles; en effet il est visible que le Problème admet deux solutions, parce que l'on peut concevoir que les deux pyramides qui ont leur base commune soient, ou des deux côtés opposés de cette base, ou bien du même côté; la plus grande des deux valeurs de f appartiendra au premier cas, et la moindre au second.

21. Supposons maintenant que le point P soit pris en sorte qu'il soit

également distant des quatre angles L, M, M', M'' de la pyramide du n° 9; il est clair que ce point deviendra le centre de la sphère qui serait circonscrite à cette pyramide. On aura donc dans ce cas

$$f = g = g' = g'',$$

et l'équation du numéro précédent deviendra

$$4\Delta^2 f = \alpha\alpha^3 + \alpha'\alpha'^3 + \alpha''\alpha''^3 + 2(\beta\alpha\alpha' + \beta'\alpha\alpha'' + \beta''\alpha'\alpha''),$$

d'où l'on tire

$$f = \frac{\alpha\alpha^3 + \alpha'\alpha'^3 + \alpha''\alpha''^3 + 2(\beta\alpha\alpha' + \beta'\alpha\alpha'' + \beta''\alpha'\alpha'')}{4\Delta^2};$$

et cette quantité f sera le carré du rayon de la sphère circonscrite à la pyramide.

Quant à la position du centre de cette sphère, elle sera déterminée par les coordonnées p, q, r , lesquelles, à cause de

$$h = \frac{a}{2}, \quad h' = \frac{a'}{2}, \quad h'' = \frac{a''}{2},$$

auront les valeurs suivantes (18)

$$p = \frac{a\xi + a'\xi' + a''\xi''}{2\Delta},$$

$$q = \frac{a\eta + a'\eta' + a''\eta''}{2\Delta},$$

$$r = \frac{a\xi + a'\xi' + a''\xi''}{2\Delta},$$

ou bien en substituant pour $\xi, \xi', \xi'', \eta, \eta', \eta''$ leurs valeurs en $x, x', \dots$ (8),

$$p = \frac{(a\alpha + a'\beta'' + a''\beta')x + (a\beta'' + a'\alpha' + a''\beta)x' + (a\beta' + a'\beta + a''\alpha'')x''}{2\Delta^2},$$

$$q = \frac{(a\alpha + a'\beta'' + a''\beta')y + (a\beta'' + a'\alpha' + a''\beta)y' + (a\beta' + a'\beta + a''\alpha'')y''}{2\Delta^2},$$

$$r = \frac{(a\alpha + a'\beta'' + a''\beta')z + (a\beta'' + a'\alpha' + a''\beta)z' + (a\beta' + a'\beta + a''\alpha'')z''}{2\Delta^2}.$$

22. Considérons encore le même point P déterminé par les coordon-

nées p, q, r du n° 18, sans supposer que ce point soit le centre de la sphère circonscrite, et voyons comment on peut déterminer la distance de ce point à la base MM'M'' de la pyramide, c'est-à-dire la ligne perpendiculaire menée du même point sur le plan de cette base.

Pour cela on suivra une méthode analogue à celle du n° 14, en remarquant seulement que la distance du point P au point quelconque N du plan MM'M'' sera exprimée par

$$\sqrt{(s-p)^2 + (t-q)^2 + (u-r)^2},$$

de sorte qu'on aura, en égalant la différentielle de cette quantité à zéro, l'équation

$$(s-p)ds + (t-q)dt + (u-r)du = 0,$$

laquelle, en substituant pour du sa valeur $mds + ndt$ (numéro cité) et faisant séparément égaux à zéro les coefficients de ds et de dt , donnera ces deux-ci

$$s-p+m(u-r)=0, \quad t-q+n(u-r)=0;$$

d'où

$$s=p+mr-mu, \quad t=q+nr-nu,$$

ce qui étant substitué dans l'équation

$$u=l+ms+nt,$$

on aura

$$u=l+mp+m^2r-m^2u+nq+n^2r-n^2u,$$

et de là

$$u = \frac{l+mp+nq+(m^2+n^2)r}{1+m^2+n^2};$$

done

$$u-r = \frac{l+mp+nq-r}{1+m^2+n^2};$$

mais en substituant, dans la quantité

$$\sqrt{(s-p)^2 + (t-q)^2 + (u-r)^2},$$

pour $s-p$ et $t-q$, leurs valeurs ci-dessus $-m(u-r)$, $-n(u-r)$,

elle devient

$$(u-r)\sqrt{1+m^2+n^2};$$

et mettant encore pour $u-r$ la valeur qu'on vient de trouver, elle se changera en celle-ci

$$\frac{l+mp+nq-r}{\sqrt{1+m^2+n^2}}.$$

Substituant enfin à la place des quantités l, m, n leurs valeurs du n° 13, on aura la quantité

$$\frac{\Delta - (\xi + \xi' + \xi'')p - (\eta + \eta' + \eta'')q - (\zeta + \zeta' + \zeta'')r}{\sqrt{(\xi + \xi' + \xi'')^2 + (\eta + \eta' + \eta'')^2 + (\zeta + \zeta' + \zeta'')^2}},$$

ou bien, par les formules du n° 1,

$$\frac{\Delta - (\xi + \xi' + \xi'')p - (\eta + \eta' + \eta'')q - (\zeta + \zeta' + \zeta'')r}{\sqrt{\alpha + \alpha' + \alpha'' + 2\beta + 2\beta' + 2\beta''}},$$

qui sera donc la valeur de la perpendiculaire menée du point P sur la base MM'' de la pyramide.

23. On peut déduire de cette même formule la valeur des trois autres perpendiculaires qu'on pourrait mener du même point P sur les trois faces latérales MLM', MLM'', M'LM'' de la pyramide. Pour cela il suffit de considérer qu'en faisant coïncider successivement les points M'', M', M avec le point L, le triangle MM'M'' prendra successivement la place des triangles MLM', MLM'', M'LM''; or il est clair que cela n'exige autre chose que de faire évanouir les coordonnées x'', y'', z'' , ou x', y', z' , ou x, y, z ; ainsi il n'y aura qu'à faire pour le premier cas $\xi, \xi', \eta, \eta', \zeta, \zeta'$ nulles et par conséquent aussi $\alpha, \alpha', \beta, \beta', \beta''$ et Δ égales à zéro, pour le second cas $\xi, \xi'', \eta, \eta'', \zeta, \zeta''$ nulles et par conséquent $\alpha, \alpha', \beta, \beta', \beta''$ et Δ égales à zéro (1 et 4); mais il faut observer que tandis que le triangle MM'M'' prend la place des triangles MLM', MLM'', M'LM'', le point P supposé au dedans de la pyramide traverse le plan de ce triangle et passe de l'autre côté de ce plan, ce qui doit faire

changer de signe à l'expression de la perpendiculaire menée du point P sur ce même plan; donc les trois perpendiculaires menées de ce point P sur les trois faces latérales MLM', MLM'', M'LM'' seront exprimées par les quantités suivantes

$$\frac{\xi''p + \eta''q + \zeta''r}{\sqrt{\alpha''}},$$

$$\frac{\xi'p + \eta'q + \zeta'r}{\sqrt{\alpha'}},$$

$$\frac{\xi p + \eta q + \zeta r}{\sqrt{\alpha}}.$$

24. Désignons par ϖ la perpendiculaire menée du point P, dont les coordonnées sont p, q, r , sur la base MM'' de la pyramide, et par ρ, ρ', ρ'' les perpendiculaires menées du même point P sur les faces latérales M'LM'', MLM'', MLM'; on aura par les deux numéros précédents les équations

$$\frac{\Delta - (\xi + \xi' + \xi'')p - (\eta + \eta' + \eta'')q - (\zeta + \zeta' + \zeta'')r}{\sqrt{\alpha + \alpha' + \alpha'' + 2\beta + 2\beta' + 2\beta''}} = \varpi,$$

$$\frac{\xi p + \eta q + \zeta r}{\sqrt{\alpha}} = \rho,$$

$$\frac{\xi'p + \eta'q + \zeta'r}{\sqrt{\alpha'}} = \rho',$$

$$\frac{\xi''p + \eta''q + \zeta''r}{\sqrt{\alpha''}} = \rho'',$$

lesquelles donnent d'abord celle-ci

$$\Delta = \varpi \sqrt{\alpha + \alpha' + \alpha'' + 2\beta + 2\beta' + 2\beta''} + \rho \sqrt{\alpha} + \rho' \sqrt{\alpha'} + \rho'' \sqrt{\alpha''},$$

qu'on aurait pu trouver immédiatement par cette considération que, si du point P on mène aux quatre coins L, M, M', M'' de la pyramide des droites, elles formeront quatre nouvelles pyramides, ayant toutes leurs sommets au point P, et ayant pour bases les quatre faces de la pyramide donnée, en sorte que celle-ci se trouvera par là partagée en quatre autres pyramides; et par conséquent sa solidité sera égale à la somme des solidités des pyramides partielles qui la composent. Or les aires des faces de la

pyramide donnée sont (12)

$$\frac{\sqrt{\alpha}}{2}, \frac{\sqrt{\alpha'}}{2}, \frac{\sqrt{\alpha''}}{2}, \frac{\sqrt{\alpha + \alpha' + \alpha'' + 2\beta + 2\beta' + 2\beta''}}{2};$$

donc, multipliant ces aires par le tiers des perpendiculaires ρ, ρ', ρ'' et ϖ , abaissées du point P sur ces mêmes faces, on aura les quantités

$$\frac{\rho\sqrt{\alpha}}{6}, \frac{\rho'\sqrt{\alpha'}}{6}, \frac{\rho''\sqrt{\alpha''}}{6}, \frac{\varpi\sqrt{\alpha + \alpha' + \alpha'' + 2\beta + 2\beta' + 2\beta''}}{6},$$

qui exprimeront les solidités des quatre pyramides partielles qui ont le point P pour sommet commun et les triangles $M'LM''$, MLM'' , MLM' , $MM'M$ pour bases; mais la somme de ces solidités doit être égale à la solidité totale de la pyramide donnée, laquelle étant exprimée (14) par $\frac{\Delta}{6}$, on aura par conséquent l'équation ci-dessus; ce qui pourrait servir, s'il était nécessaire, à prouver la bonté de nos calculs.

25. Si les trois perpendiculaires ρ, ρ', ρ'' étaient supposées données et qu'on voulût connaître la position du point P d'où elles sont menées, il n'y aurait qu'à tirer les valeurs des coordonnées p, q, r de ces trois équations

$$\xi p + \eta q + \zeta r = \rho\sqrt{\alpha},$$

$$\xi' p + \eta' q + \zeta' r = \rho'\sqrt{\alpha'},$$

$$\xi'' p + \eta'' q + \zeta'' r = \rho''\sqrt{\alpha''},$$

et l'on trouvera pour p, q, r des expressions analogues à celles du n° 18 en y changeant k, k', k'' en $\rho\sqrt{\alpha}, \rho'\sqrt{\alpha'}, \rho''\sqrt{\alpha''}$ et $x, y, z, x', y', \dots$ en $\xi, \eta, \zeta, \xi', \eta', \zeta', \dots$, ce qui change ces dernières en $X, Y, Z, X', Y', \dots$ (1 et 2), c'est-à-dire en $\Delta x, \Delta y, \Delta z, \Delta x', \Delta y', \dots$ (3), et la quantité Δ en Δ^2 (5).

De sorte qu'on aura

$$p = \frac{\rho\sqrt{\alpha}x + \rho'\sqrt{\alpha'}x' + \rho''\sqrt{\alpha''}x''}{\Delta},$$

$$q = \frac{\rho\sqrt{\alpha}y + \rho'\sqrt{\alpha'}y' + \rho''\sqrt{\alpha''}y''}{\Delta},$$

$$r = \frac{\rho\sqrt{\alpha}z + \rho'\sqrt{\alpha'}z' + \rho''\sqrt{\alpha''}z''}{\Delta}.$$

26. Par là on pourra connaître si l'on veut les distances de ce même point P aux angles L, M, M' de la pyramide donnée; car conservant les mêmes dénominations du n° 18, on aura par la substitution des valeurs précédentes de p, q, r , et d'après les formules du n° 1,

$$f = \frac{a\rho^2\alpha + a'\rho'^2\alpha' + a''\rho''^2\alpha'' + 2b\rho\rho'\sqrt{\alpha\alpha'} + 2b'\rho\rho''\sqrt{\alpha\alpha''} + 2b\rho\rho''\sqrt{\alpha'\alpha''}}{\Delta^2},$$

$$k = \frac{a\rho\sqrt{\alpha} + b\rho'\sqrt{\alpha'} + b'\rho''\sqrt{\alpha''}}{\Delta},$$

$$k' = \frac{b\rho\rho'\sqrt{\alpha} + a'\rho'\sqrt{\alpha'} + b\rho\rho''\sqrt{\alpha''}}{\Delta},$$

$$k'' = \frac{b\rho\rho'\sqrt{\alpha} + b\rho'\sqrt{\alpha'} + a''\rho''\sqrt{\alpha''}}{\Delta},$$

où

$$k = \frac{a + f - g}{2},$$

$$k' = \frac{a' + f - g'}{2},$$

$$k'' = \frac{a'' + f - g''}{2}.$$

f, g, g', g'' étant les carrés des distances cherchées.

27. Réciproquement, si ces distances étant données on voulait connaître les perpendiculaires ρ, ρ', ρ'' , il n'y aurait qu'à les tirer, par l'élimination, des trois dernières équations ci-dessus; et pour cela on remarquera que, si dans les trois équations du n° 18 on change p, q, r en $\frac{\rho\sqrt{\alpha}}{\Delta}, \frac{\rho'\sqrt{\alpha'}}{\Delta}, \frac{\rho''\sqrt{\alpha''}}{\Delta}$, et $x, y, z, x', y', z', x'', y'', z''$ en $a, b', b'', a', b, b', b'', a''$, elles deviennent les précédentes; d'où il s'ensuit qu'on aura pour $\frac{\rho\sqrt{\alpha}}{\Delta}, \frac{\rho'\sqrt{\alpha'}}{\Delta}, \frac{\rho''\sqrt{\alpha''}}{\Delta}$ les mêmes expressions qu'on a trouvées dans le numéro cité pour p, q, r , en y échangeant seulement $x, y, z, x', \dots$ en $a, b', b'', a', b, b', b'', a''$. Or par ces échanges les quantités $\xi, \xi', \xi'', \eta, \eta', \eta'', \zeta, \zeta', \zeta''$,

ζ'' deviennent (1) $\alpha, \beta'', \beta', \beta'', \alpha', \beta, \beta', \beta, \alpha''$, et la quantité

$$\Delta = x y' z'' + y' z' x'' + \dots$$

devient

$$a \alpha' \alpha'' + 2 b \beta' \beta'' - a b^2 - a' b'^2 - a'' b''^2 = \Delta^2;$$

c'est pourquoi on aura, après avoir multiplié par Δ ,

$$\rho \sqrt{\alpha} = \frac{\alpha k + \beta'' h' + \beta' h''}{\Delta},$$

$$\rho' \sqrt{\alpha'} = \frac{\beta'' h + \alpha' k' + \beta h''}{\Delta},$$

$$\rho'' \sqrt{\alpha''} = \frac{\beta' h + \beta h' + \alpha'' h''}{\Delta}.$$

28. Les formules qu'on vient de trouver dans les numéros précédents peuvent servir à résoudre avec beaucoup de facilité le Problème, où il s'agit de trouver dans l'intérieur d'une pyramide donnée un point tel, que menant de ce point aux quatre angles de la pyramide des lignes droites qui la partageassent en quatre autres pyramides ayant ce point pour sommet et les faces de la pyramide donnée pour bases, ces pyramides partielles fussent entre elles dans des rapports donnés.

Soient les rapports de ces quatre pyramides partielles à la pyramide totale donnés exprimés par les quantités μ, μ', μ'' et ν , en sorte que l'on ait

$$\mu + \mu' + \mu'' + \nu = 1;$$

donc, par ce que l'on a dit dans le n° 24, on aura

$$\rho \sqrt{\alpha} = \mu \Delta, \quad \rho' \sqrt{\alpha'} = \mu' \Delta, \quad \rho'' \sqrt{\alpha''} = \mu'' \Delta, \\ \omega \sqrt{\alpha + \alpha' + \alpha'' + 2\beta + 2\beta' + 2\beta''} = \nu \Delta;$$

donc, substituant ces valeurs dans les expressions des quantités p, q, r du n° 25, on aura sur-le-champ, pour la détermination du point cherché, ces trois coordonnées rectangles

$$p = \mu x + \mu' x' + \mu'' x'',$$

$$q = \mu y + \mu' y' + \mu'' y'',$$

$$r = \mu z + \mu' z' + \mu'' z'',$$

Et si l'on veut déterminer ce point par ses distances $\sqrt{f}, \sqrt{g}, \sqrt{g'}, \sqrt{g''}$ au sommet et aux trois angles de la base de la pyramide donnée, on aura, par les formules du n° 26,

$$f = a \mu^2 + a' \mu'^2 + a'' \mu''^2 + 2 b'' \mu \mu' + 2 b' \mu \mu'' + 2 b \mu' \mu'',$$

$$\frac{a + f - g}{2} = a \mu + b'' \mu' + b' \mu'',$$

$$\frac{a' + f - g'}{2} = b'' \mu + a' \mu' + b \mu'',$$

$$\frac{a'' + f - g''}{2} = b' \mu + b \mu' + a'' \mu''.$$

29. Si maintenant on suppose dans les formules du n° 24

$$\omega = \rho = \rho' = \rho'',$$

il est clair que le point P deviendra le centre de la sphère inscrite à la pyramide, et que ω en sera le rayon; ainsi l'équation de ce même numéro donnera sur-le-champ

$$\omega = \frac{\Delta}{\sqrt{\omega} + \sqrt{\alpha} + \sqrt{\alpha'} + \sqrt{\alpha''}},$$

en faisant, pour abréger,

$$\omega = \alpha + \alpha' + \alpha'' + 2\beta + 2\beta' + 2\beta''.$$

Ensuite on aura (25) pour la détermination du centre de la sphère les coordonnées

$$p = \frac{x \sqrt{\alpha} + x' \sqrt{\alpha'} + x'' \sqrt{\alpha''}}{\sqrt{\omega} + \sqrt{\alpha} + \sqrt{\alpha'} + \sqrt{\alpha''}},$$

$$q = \frac{y \sqrt{\alpha} + y' \sqrt{\alpha'} + y'' \sqrt{\alpha''}}{\sqrt{\omega} + \sqrt{\alpha} + \sqrt{\alpha'} + \sqrt{\alpha''}},$$

$$r = \frac{z \sqrt{\alpha} + z' \sqrt{\alpha'} + z'' \sqrt{\alpha''}}{\sqrt{\omega} + \sqrt{\alpha} + \sqrt{\alpha'} + \sqrt{\alpha''}}.$$

Et, si l'on veut déterminer ce point par les distances $\sqrt{f}, \sqrt{g}, \sqrt{g'}, \sqrt{g''}$

aux angles de la pyramide, on aura (26)

$$f = \frac{ax + a'x' + a''x'' + 2b\sqrt{xx''} + 2b'\sqrt{x'x''} + 2b''\sqrt{x'x'}}{(\sqrt{\omega} + \sqrt{x} + \sqrt{x'} + \sqrt{x''})^2},$$

$$\frac{a + f - g}{2} = \frac{a\sqrt{x} + b'\sqrt{x'} + b''\sqrt{x''}}{\sqrt{\omega} + \sqrt{x} + \sqrt{x'} + \sqrt{x''}},$$

$$\frac{a' + f - g'}{2} = \frac{b'\sqrt{x} + a'\sqrt{x'} + b''\sqrt{x''}}{\sqrt{\omega} + \sqrt{x} + \sqrt{x'} + \sqrt{x''}},$$

$$\frac{a'' + f - g''}{2} = \frac{b'\sqrt{x} + b''\sqrt{x'} + a''\sqrt{x''}}{\sqrt{\omega} + \sqrt{x} + \sqrt{x'} + \sqrt{x''}}.$$

30. Dans toutes ces formules il faut prendre les radicaux $\sqrt{\omega}$, $\sqrt{x}$, $\sqrt{x'}$, $\sqrt{x''}$ positifs, pour avoir véritablement le cas d'une sphère inscrite dans la pyramide; mais il est remarquable qu'en prenant l'un de ces mêmes radicaux négatif on aura le cas où la sphère tomberait hors de la pyramide, et toucherait en même temps une de ses faces en dehors, et les plans des trois autres faces prolongés; et en particulier la face touchée en dehors par la sphère sera celle dont l'aire sera représentée par la moitié du radical auquel on donnera le signe négatif (12). C'est de quoi on peut se convaincre en réfléchissant sur la nature de nos formules et de notre Analyse, sans qu'il soit nécessaire que nous entrions là-dessus dans aucun détail.

31. Venons maintenant à la considération du centre de gravité de notre pyramide, et pour en trouver la position nous remarquerons que si l'on fait passer par un quelconque des côtés de la pyramide un plan qui coupe le côté opposé en deux également, le centre de gravité de la pyramide se trouvera nécessairement dans ce plan; c'est ce qui se démontre facilement par les principes de Mécanique. Or comme trois plans différents ne peuvent se couper qu'en un seul point, il suffira donc de considérer trois des plans dont nous venons de parler et de chercher le point qui leur sera commun. Nous imaginerons pour cela qu'on mène par les trois côtés de la base de la pyramide trois plans qui coupent les côtés opposés des faces

latérales par le milieu; nous chercherons l'équation de chacun de ces plans et nous en déduirons ensuite aisément la position du point commun, qui sera par conséquent le centre de gravité cherché.

32. Considérons d'abord le plan qui passerait par le côté $M'M''$ de la base et qui couperait par le milieu le côté LM qui va du sommet L à l'autre angle M de la base; et, nommant, comme dans le n° 13, s , t , u les coordonnées rectangulaires des points de ce plan, on aura une équation de la forme

$$u = \lambda + \mu s + \nu t,$$

λ , μ , ν étant des constantes dépendantes de la position du plan.

Pour déterminer ces constantes on remarquera que, comme le plan est supposé passer par les points M' , M'' de la base de la pyramide, pour lesquels les coordonnées rectangulaires sont x' , y' , z' , x'' , y'' , z'' (9), on aura d'abord ces deux équations

$$z' = \lambda + \mu x' + \nu y',$$

$$z'' = \lambda + \mu x'' + \nu y''.$$

Ensuite, comme on veut que ce plan passe aussi par le milieu de la ligne LM menée du point L , qui est l'origine des coordonnées, au point M , pour lequel les coordonnées rectangulaires sont x , y , z , on considérera que ce point du milieu de la ligne LM sera nécessairement déterminé par les coordonnées rectangulaires $\frac{x}{2}$, $\frac{y}{2}$, $\frac{z}{2}$; de sorte qu'on aura cette troisième équation

$$\frac{z}{2} = \lambda + \frac{\mu x}{2} + \frac{\nu y}{2},$$

ou bien, en multipliant par 2,

$$z = 2\lambda + \mu x + \nu y.$$

Cette équation étant retranchée des deux précédentes multipliées par 2, on aura

$$2z' - z = \mu(2x' - x) + \nu(2y' - y),$$

$$2z'' - z = \mu(2x'' - x) + \nu(2y'' - y),$$

d'où l'on tire

$$\mu = \frac{(2z' - z)(2y'' - y) - (2z'' - z)(2y' - y)}{(2x' - x)(2y'' - y) - (2x'' - x)(2y' - y)},$$

$$\nu = \frac{(2z' - z)(2x'' - x) - (2z'' - z)(2x' - x)}{(2x'' - x)(2y' - y) - (2x' - x)(2y'' - y)},$$

et développant les termes (1)

$$\mu = -\frac{2\xi + \xi' + \xi''}{2\zeta + \zeta' + \zeta''}, \quad \nu = -\frac{2\eta + \eta' + \eta''}{2\zeta + \zeta' + \zeta''}.$$

Ensuite on aura (7)

$$\begin{aligned} 2\lambda &= z - \mu x - \nu y \\ &= \frac{z(2\zeta + \zeta' + \zeta'') + x(2\xi + \xi' + \xi'') + y(2\eta + \eta' + \eta'')}{2\zeta + \zeta' + \zeta''} = \frac{2\Delta}{2\zeta + \zeta' + \zeta''}, \end{aligned}$$

et par conséquent

$$\lambda = \frac{\Delta}{2\zeta + \zeta' + \zeta''}.$$

De sorte que l'équation du plan dont il s'agit sera, en multipliant par $2\zeta + \zeta' + \zeta''$, et transposant les termes,

$$\Delta = (2\xi + \xi' + \xi'')s + (2\eta + \eta' + \eta'')t + (2\zeta + \zeta' + \zeta'')u.$$

33. On trouvera de la même manière l'équation du plan qui passerait par le côté MM'' de la base et qui couperait le côté opposé LM' , ainsi que celle du plan qui, passant par le côté MM' de la base, couperait le côté LM'' ; mais sans faire pour cela un nouveau calcul il suffira de changer dans l'équation ci-dessus les coordonnées x, y, z en x', y', z' et *vice versa* pour le premier cas, et en x'', y'', z'' et *vice versa* pour le second cas. Or par le premier de ces changements les quantités ξ, ξ', ξ'' se changent en $-\xi', -\xi, -\xi''$; de même les quantités η, η', η'' se changent en $-\eta', -\eta, -\eta''$; $-\zeta', -\zeta, -\zeta''$, et la quantité Δ se change en $-\Delta$. Et par le second de ces changements les quantités $\xi, \xi', \xi'', \eta, \eta', \eta'', \zeta, \zeta', \zeta'', \Delta$ se changent en $-\xi'', -\xi', -\xi, -\eta'', -\eta', -\eta, -\zeta'', -\zeta', -\zeta, -\Delta$. C'est ce qu'on peut voir aisément par les formules des n° 1 et 3.

Ainsi l'on aura pour les équations des deux plans dont nous venons de

parler, après y avoir changé les signes,

$$\Delta = (\xi + 2\xi' + \xi'')s + (\eta + 2\eta' + \eta'')t + (\zeta + 2\zeta' + \zeta'')u,$$

$$\Delta = (\xi + \xi' + 2\xi'')s + (\eta + \eta' + 2\eta'')t + (\zeta + \zeta' + 2\zeta'')u.$$

34. Or, dans le point commun aux trois plans, les coordonnées s, t, u doivent être les mêmes; c'est pourquoi il n'y aura qu'à tirer les valeurs de ces trois quantités des trois équations que nous venons de trouver, et l'on aura les coordonnées qui déterminent le point d'intersection des trois plans en question. Pour cela je retranche d'abord des deux équations du numéro précédent celle du n° 32, et j'ai ces deux-ci

$$(\xi' - \xi)s + (\eta' - \eta)t + (\zeta' - \zeta)u = 0,$$

$$(\xi'' - \xi)s + (\eta'' - \eta)t + (\zeta'' - \zeta)u = 0,$$

d'où je tire facilement

$$\frac{s}{u} = -\frac{(\zeta' - \zeta)(\eta'' - \eta) - (\zeta'' - \zeta)(\eta' - \eta)}{(\xi' - \xi)(\eta'' - \eta) - (\xi'' - \xi)(\eta' - \eta)},$$

$$\frac{t}{u} = -\frac{(\zeta' - \zeta)(\xi'' - \xi) - (\zeta'' - \zeta)(\xi' - \xi)}{(\xi'' - \xi)(\eta'' - \eta) - (\xi' - \xi)(\eta' - \eta)},$$

c'est-à-dire, en développant les termes et employant les substitutions du n° 2,

$$\frac{s}{u} = \frac{X + X' + X''}{Z + Z' + Z''}, \quad \frac{t}{u} = \frac{Y + Y' + Y''}{Z + Z' + Z''},$$

ou bien (3)

$$\frac{s}{u} = \frac{x + x' + x''}{z + z' + z''}, \quad \frac{t}{u} = \frac{y + y' + y''}{z + z' + z''}.$$

Substituant les valeurs de s et de t tirées de ces équations dans celle du n° 32, on en déduira la valeur de u , laquelle sera

$$u = \frac{\Delta(z + z' + z'')}{(2\xi + \xi' + \xi'')(x + x' + x'') + (2\eta + \eta' + \eta'')(y + y' + y'') + (2\zeta + \zeta' + \zeta'')(z + z' + z'')},$$

mais le dénominateur de cette formule se réduit par les équations du n° 7 à 4Δ ; de sorte qu'on aura, pour les coordonnées s, t, u qui répondent au

centre de gravité de la pyramide, ces expressions fort simples

$$s = \frac{x + x' + x''}{4}, \quad t = \frac{y + y' + y''}{4}, \quad u = \frac{z + z' + z''}{4}.$$

35. Si l'on imagine qu'il y ait aux quatre coins de la pyramide des corps de masses quelconques égales entre elles, il est visible que le moment de ces corps, que je suppose égaux à Q , par rapport à un plan passant par le sommet de la pyramide et perpendiculaire à l'axe des x , sera

$$Q(x + x' + x''),$$

ce qui, étant divisé par la somme des masses $4Q$, donnera

$$\frac{x + x' + x''}{4},$$

pour la distance du centre de gravité de ces quatre corps au même plan. On trouvera de même que la distance du même centre au plan passant par le sommet et perpendiculaire à l'axe des y sera exprimée par

$$\frac{y + y' + y''}{4},$$

et qu'enfin la distance de ce même centre au plan passant par le sommet et perpendiculaire à l'axe des z sera

$$\frac{z + z' + z''}{4}.$$

Or ces distances ne sont autre chose que les coordonnées rectangles qui déterminent la position du centre dont il s'agit par rapport aux mêmes axes; donc les coordonnées du centre de gravité des quatre corps Q placés aux quatre coins de la pyramide sont (numéro précédent) les mêmes que celles du centre de gravité de toute la pyramide; par conséquent ces deux centres coïncident, ce qui fournit ce Théorème de Statique assez remarquable par sa simplicité : *Le centre de gravité de toute pyramide triangulaire est le même que celui de quatre corps égaux qu'on imaginerait placés aux quatre angles de la pyramide.*

36. Si l'on veut déterminer la position du centre de gravité par ses

distances aux quatre coins de la pyramide, nommant φ le carré de la distance de ce centre au sommet, et ψ , ψ' , ψ'' les carrés de ses distances aux trois angles M , M' , M'' de la base, on aura

$$\begin{aligned} \varphi &= s^2 + t^2 + u^2, \\ \psi &= (x - s)^2 + (y - t)^2 + (z - u)^2, \\ \psi' &= (x' - s)^2 + (y' - t)^2 + (z' - u)^2, \\ \psi'' &= (x'' - s)^2 + (y'' - t)^2 + (z'' - u)^2; \end{aligned}$$

donc, substituant pour s , t , u les valeurs ci-dessus, développant les termes et faisant les substitutions du n° 1, on aura

$$\begin{aligned} \varphi &= \frac{a + a' + a'' + 2(b + b' + b'')}{16}, \\ \psi &= \frac{9a + a' + a'' + 2(b - 3b' - 3b'')}{16}, \\ \psi' &= \frac{a + 9a' + a'' + 2(-3b + b' - 3b'')}{16}, \\ \psi'' &= \frac{a + a' + 9a'' + 2(-3b - 3b' + b'')}{16}. \end{aligned}$$

37. On pourrait chercher maintenant à déterminer la position mutuelle des trois points que nous venons de considérer dans la pyramide, c'est-à-dire le centre de la sphère circonscrite, le centre de la sphère inscrite et le centre de gravité de la pyramide même, et il est clair que si, pour distinguer les coordonnées des centres des deux sphères, on désigne par l , m , n celles du centre de la sphère circonscrite que nous avons désignées par p , q , r (21), et que l'on conserve ces dernières lettres pour marquer les coordonnées du centre de la sphère inscrite ainsi qu'on en a usé (29), il est clair, dis-je, qu'on aura

$$(l - p)^2 + (m - q)^2 + (n - r)^2$$

pour le carré de la distance entre les centres des deux sphères, l'une inscrite, l'autre circonscrite,

$$(l - s)^2 + (m - t)^2 + (n - u)^2$$

pour le carré de la distance entre le centre de la sphère circonscrite et le centre de gravité, et enfin

$$(p-s)^2 + (q-t)^2 + (r-u)^2$$

pour le carré de la distance entre le centre de la sphère incrite et le même centre de gravité. Or faisant dans ces expressions les substitutions des valeurs de $l, m, n, p, q, \dots$ (21, 29, 34), et développant ensuite les termes on trouvera, à l'aide des formules du n° 1, des quantités indépendantes des coordonnées $x, y, z, x', y', \dots$ et qui seront uniquement des fonctions de $a, a', a'', b, b', b'', c$, c'est-à-dire des côtés de la pyramide. Par le moyen de ces formules et de celles que nous avons trouvées précédemment on pourra résoudre différents Problèmes curieux et nouveaux sur les pyramides triangulaires; mais en voilà assez sur un sujet que je n'ai presque traité que pour donner un exemple de l'application de l'Analyse à ces sortes de recherches.

RECHERCHES D'ARITHMÉTIQUE.