

en effet, si l'on fait

$$z' = \varphi[(x', x'')(x', x'''),$$

$$z'' = \varphi[(x'', x''')(x', x'''),$$

et ensuite

$$u' = \varphi[(x', x''')(x', x'''),$$

$$u'' = \varphi[(x'', x''')(x', x'''),$$

il est facile de voir qu'en faisant telle permutation qu'on voudra entre les quatre racines x', x'', x''', x'''' , il n'en résultera jamais que ces trois fonctions différentes

$$f[(y', y'')], \quad f[(z', z'')], \quad f[(u', u'')];$$

de sorte qu'elles seront nécessairement racines d'une même équation du troisième degré.

On pourra donc par la résolution d'une équation du troisième degré déterminer la valeur de toute fonction telle que $f[(y', y'')]$. Ainsi, si l'on suppose que les quantités y' et y'' soient les racines de cette équation du second degré

$$y^2 - ay + b = 0,$$

chacun des coefficients a et b sera donné par une équation du troisième degré, puisqu'il sera de la forme $f[(y', y'')]$; de sorte que par là on connaîtra les deux quantités y' et y'' . Or si l'on suppose, ce qui est permis, que la fonction $\varphi[(x', x'')(x'', x''')]$ ne renferme que les deux racines x' et x'' , en sorte qu'elle soit simplement de la forme $\varphi[(x', x'')]$, on aura

$$y' = \varphi[(x', x'')] \quad \text{et} \quad y'' = \varphi[(x'', x''')];$$

donc, si l'on prend x' et x'' pour les racines de l'équation

$$x^2 - fx + g = 0,$$

et x'' , x''' pour celles de l'équation

$$x^2 - hx + l = 0,$$

les valeurs des coefficients f, g, h, l ne dépendront que d'équations du

troisième et du second degré; et ces valeurs étant connues on aura celles des quatre racines cherchées par la résolution des deux équations précédentes du second degré.

Tel est le principe général auquel se rapportent la plupart des méthodes pour la résolution des équations du quatrième degré, comme on peut le voir par l'analyse que nous en avons donnée dans la Section II.

En effet, si l'on fait

$$\varphi[(x', x'')] = x' + x'' \quad \text{et} \quad f[(y', y'')] = (y' - y'')^2,$$

il en résultera la solution du n° 32, et faisant

$$\varphi[(x', x'')] = x'x'' \quad \text{et} \quad f[(y', y'')] = y' + y'',$$

il en résultera celle du n° 31, et ainsi des autres.

108. On peut encore dériver la résolution des équations du quatrième degré d'un autre principe, en faisant une combinaison différente des vingt-quatre fonctions du n° 106. Car, si l'on suppose d'abord

$$f[(x')(x'')(x''')(x'')] = f[(x'')(x''')(x'')(x')],$$

c'est-à-dire que la fonction demeure la même en y changeant à la fois x' en x'' , x'' en x''' , x''' en x'''' et x'''' en x' , on trouvera ensuite

$$f[(x'')(x''')(x'')(x')] = f[(x''')(x'')(x'')(x'')],$$

et de là

$$f[(x''')(x'')(x'')(x'')] = f[(x'')(x'')(x'')(x'')],$$

et enfin

$$f[(x'')(x'')(x'')(x'')] = f[(x')(x'')(x'')(x'')];$$

de sorte que les fonctions

$$f[(x')(x'')(x'')(x'')], \quad f[(x'')(x'')(x'')(x')],$$

$$f[(x'')(x'')(x'')(x'')], \quad f[(x'')(x'')(x'')(x'')],$$

seront égales, et qu'il n'y aura que ces quatre qui le seront; d'où il s'ensuit que les quatre fonctions dont il s'agit seront égales quatre à quatre, ce qui conduira d'abord à une équation du sixième degré.

Maintenant, si l'on suppose encore cette égalité

$$f[(x')(x'')(x''')]=f[(x^{11})(x'')(x')(x')],$$

c'est-à-dire que la même fonction reste aussi invariable en y changeant à la fois x' en x^{11} et x'' en x'' , et *vice versa*, il en résultera encore quatre autres fonctions égales aux précédentes, savoir

$$\begin{aligned} f[(x^{11})(x'')(x')(x')], & f[(x'')(x')(x^{11})(x')], \\ f[(x'')(x')(x^{11})(x'')], & f[(x')(x^{11})(x'')(x')], \end{aligned}$$

moynnant quoi les vingt-quatre fonctions du numéro cité se trouveront égales huit à huit, et ne dépendront plus que d'une équation du troisième degré.

Or, en prenant une autre fonction quelconque des racines x', x'', x''' , x^{11} , qu'on désignera par la caractéristique φ , et désignant par y', y'', y''' , y^{11} , y^{12} , y^{13} , y^{14} les huit fonctions suivantes

$$\begin{aligned} \varphi[(x')(x'')(x''')(x^{11})], & \varphi[(x'')(x'')(x^{11})(x')], \\ \varphi[(x'')(x^{11})(x')(x'')], & \varphi[(x^{11})(x')(x'')(x'')], \\ \varphi[(x^{11})(x'')(x'')(x')], & \varphi[(x'')(x'')(x')(x^{11})], \\ \varphi[(x'')(x')(x^{11})(x'')], & \varphi[(x')(x^{11})(x'')(x')], \end{aligned}$$

qui répondent, comme on voit, aux huit fonctions égales ci-dessus, on pourra représenter toute fonction, qui doit demeurer la même soit en changeant x' en x'' , x'' en x''' , x''' en x^{11} et x^{11} en x' , soit en changeant x' en x^{11} et x'' en x'' , par celle-ci

$$f[(y', y'', y''', y^{11}, y^{12}, y^{13}, y^{14})];$$

car il est facile de voir que par ces échanges les quantités y', y'', y''' ,... ne feront que s'échanger les unes dans les autres.

Cette fonction aura donc la propriété de ne conduire qu'à une équation du troisième degré; en effet, si l'on désigne par z', z'', z''', z^{11} ,

z^{12}, z^{13}, z^{14} ces huit fonctions-ci

$$\begin{aligned} \varphi[(x'')(x')(x'')(x^{11})], & \varphi[(x'')(x'')(x^{11})(x')], \\ \varphi[(x^{11})(x'')(x')(x'')], & \varphi[(x')(x^{11})(x'')(x'')], \\ \varphi[(x'')(x^{11})(x'')(x')], & \varphi[(x'')(x'')(x')(x^{11})], \\ \varphi[(x')(x'')(x^{11})(x'')], & \varphi[(x^{11})(x')(x'')(x'')], \end{aligned}$$

et par $u', u'', u''', u^{11}, u^{12}, u^{13}, u^{14}$ ces huit autres-ci

$$\begin{aligned} \varphi[(x'')(x')(x^{11})(x'')], & \varphi[(x^{11})(x'')(x')(x'')], \\ \varphi[(x')(x'')(x'')(x^{11})], & \varphi[(x'')(x^{11})(x')(x'')], \\ \varphi[(x'')(x^{11})(x')(x'')], & \varphi[(x')(x'')(x'')(x^{11})], \\ \varphi[(x^{11})(x'')(x'')(x')], & \varphi[(x'')(x')(x^{11})(x'')], \end{aligned}$$

on verra aisément que, quelques permutations que l'on fasse entre les quatre racines x', x'', x''', x^{11} , on n'aura jamais que ces trois fonctions différentes

$$\begin{aligned} f[(y', y'', y''', y^{11}, y^{12}, y^{13}, y^{14})], \\ f[(z', z'', z''', z^{11}, z^{12}, z^{13}, z^{14})], \\ f[(u', u'', u''', u^{11}, u^{12}, u^{13}, u^{14})], \end{aligned}$$

qui seront par conséquent racines d'une équation du troisième degré.

Ainsi, la résolution générale de ce degré étant supposée, on pourra déterminer toutes les fonctions de la forme des précédentes; mais, comme les quantités $y', y'', y''', y^{11}, y^{12}, y^{13}, y^{14}$,... entrent de la même manière dans ces sortes de fonctions, il est clair que leur détermination dépendra encore de trois équations, chacune du huitième degré.

Il faudra donc tâcher de nouveau de rabaisser ces équations au-dessous du quatrième degré; c'est ce qu'on obtiendra en supposant que la fonction représentée par la caractéristique φ soit telle, qu'elle demeure la même en y changeant x' en x'' , x'' en x''' , x''' en x^{11} et x^{11} en x' ; car alors les quatre quantités y', y'', y''', y^{11} deviendront égales, et les quatre autres $y^{12}, y^{13}, y^{14}, y^{15}$ aussi égales; et il en sera de même des quantités correspondantes z', z'', z''', z^{11} ,... et u', u'', u''', u^{11} ,...

De cette manière les trois fonctions précédentes pourront s'exprimer simplement par les formules

$$f[(y', y''), f[(z', z''), f[(u', u'')],$$

et les quantités $y', y''; z', z''; u', u''$ seront les racines de trois équations du second degré telles que

$$y'^2 - ay' + b = 0,$$

$$z'^2 - cz' + d = 0,$$

$$u'^2 - fu' + g = 0,$$

où les coefficients a, c, f seront racines d'une équation du troisième degré, ainsi que les trois autres coefficients b, d, g .

Il ne reste donc qu'à trouver la forme que doit avoir la fonction φ pour que les conditions prescrites aient lieu. Pour y parvenir de la manière la plus générale, on prendra une autre fonction quelconque de x', x'', x''', x^{iv} , qu'on désignera par la caractéristique Φ : on formera, comme ci-dessus, les vingt-quatre fonctions qui répondent aux vingt-quatre permutations qu'on peut faire entre les racines x', x'', x''', x^{iv} ; et l'on désignera ces fonctions par les quantités $Y', Y'', \dots, Y^{xv}, Z', Z'', \dots, Z^{xv}, U', U'', \dots, U^{xv}$; c'est-à-dire qu'on changera dans les formules ci-dessus la caractéristique φ en Φ , et les petites lettres y, z, u dans les grandes lettres Y, Z, U . Ensuite, en prenant de nouveau la caractéristique φ pour désigner une fonction quelconque, il est facile de voir qu'on aura, en général,

$$y' = \varphi[(Y', Y'', Y^{xv})], \quad y'' = \varphi[(Y', Y'', Y^{xv}, Y^{xv})],$$

$$z' = \varphi[(Z', Z'', Z^{xv})], \quad z'' = \varphi[(Z', Z'', Z^{xv}, Z^{xv})],$$

$$u' = \varphi[(U', U'', U^{xv})], \quad u'' = \varphi[(U', U'', U^{xv}, U^{xv})].$$

De là il est aisé de conclure que la détermination des fonctions Y', Y'', Y''', Y^{xv} dépendra maintenant d'une équation du quatrième degré, ainsi que celle des fonctions Y', Y'', Y''', Y^{xv} , et il en sera de même des autres fonctions $Z', Z'', \dots, Z^{xv}$ et $U', U'', \dots, U^{xv}$, qui dépendront aussi quatre à quatre d'équations du quatrième degré.

Soit donc

$$Y^4 - AY^3 + BY^2 - CY + D = 0$$

l'équation dont les racines seraient Y', Y'', Y''', Y^{xv} ; il est clair qu'on pourra la résoudre de deux manières :

1° En faisant disparaître ses puissances impaires pour la réduire à la forme

$$Y^2 + BY^2 + D = 0.$$

qui est résoluble à la manière de celles du second degré; or pour cela il faudra que les racines Y', Y'', Y''', Y^{xv} soient deux à deux égales et de signes différents, c'est-à-dire que l'on ait

$$Y' = -Y'' \quad \text{et} \quad Y''' = -Y^{xv}.$$

Ainsi il faudra, dans ce cas, que la fonction Φ soit telle, que l'on ait

$$\Phi[(x')(x'')(x''')(x^{iv})] = -\Phi[(x'')(x''')(x^{iv})(x')],$$

et

$$\Phi[(x''')(x^{iv})(x')(x'')] = -\Phi[(x^{iv})(x')(x'')(x''')];$$

c'est-à-dire qu'elle ait la propriété de devenir négative en y changeant x' en x'' , x'' en x' , x''' en x^{iv} et x^{iv} en x''' ; auquel cas on aura aussi

$$\Phi[(x'')(x'')(x^{iv})(x')] = -\Phi[(x'')(x^{iv})(x')(x'')];$$

d'où l'on voit qu'on aura en même temps

$$Y' = -Y'', \quad Y''' = -Y^{xv}, \quad Y^{xv} = -Y''';$$

c'est-à-dire

$$Y' = Y'' = -Y''' = -Y^{xv};$$

ce qui rendra l'équation en Y de cette forme

$$(Y^2 - E)^2 = 0, \quad \text{c'est-à-dire} \quad Y^2 - E = 0.$$

Et il est facile de voir que les autres équations dont les racines seront les quantités Y', Y'', Y''', Y^{xv} , ou Z', Z'', Z''', Z^{xv} , ou, etc., se trouveront aussi par là réduites à la même forme, puisque ces racines ont entre elles

la même relation qu'ont les racines Y, Y', Y'', Y''' , laquelle consiste en ce que l'une dérive de l'autre par les échanges de x' en x'' , x'' en x''' , x''' en $x^{(4)}$ et $x^{(4)}$ en x' .

Les fonctions

$$x' + x'' - x''' - x^{(4)}, \quad x'x'' - x'''x^{(4)},$$

et d'autres semblables, auront la propriété dont il s'agit.

2° On peut aussi rendre résoluble l'équation générale

$$Y^4 - AY^3 + BY^2 - CY + D = 0,$$

en la réduisant à deux seuls termes

$$Y^4 + D = 0;$$

auquel cas les quatre racines Y, Y', Y'', Y''' seront exprimées ainsi

$$\sqrt[4]{-D}, \quad \alpha^2 \sqrt[4]{-D}, \quad \alpha^2 \sqrt[4]{-D}, \quad \alpha \sqrt[4]{-D},$$

en prenant $1, \alpha, \alpha^2, \alpha^3$ pour les quatre racines quatrièmes de l'unité; de sorte que la condition pour ce cas sera, à cause de $\alpha^4 = 1$,

$$Y' = \alpha Y'' = \alpha^2 Y''' = \alpha^3 Y^{(4)},$$

c'est-à-dire qu'il faudra que la fonction Φ soit telle, qu'on ait

$$\begin{aligned} \Phi[(x')(x'')(x''')(x^{(4)})] &= \alpha \Phi[(x'')(x''')(x^{(4)})(x')] \\ &= \alpha^2 \Phi[(x''')(x^{(4)})(x')(x'')] \\ &= \alpha^3 \Phi[(x^{(4)})(x')(x'')(x')]. \end{aligned}$$

Et alors toutes les équations du quatrième degré d'où dépendent les autres quantités $Y', Y'', Y''', Y^{(4)}, Z, Z', \dots$ se trouveront aussi réduites au même état, par la raison énoncée ci-dessus.

Il est facile de trouver que la fonction

$$x' + \alpha x'' + \alpha^2 x''' + \alpha^3 x^{(4)}$$

aura la propriété requise; d'où l'on peut conclure que l'analyse précédente contient le fondement de la méthode du n° 47.

109. Voilà, si je ne me trompe, les vrais principes de la résolution des équations et l'analyse la plus propre à y conduire; tout se réduit, comme on voit, à une espèce de calcul des combinaisons, par lequel on trouve *a priori* les résultats auxquels on doit s'attendre. Il serait à propos d'en faire l'application aux équations du cinquième degré et des degrés supérieurs, dont la résolution est jusqu'à présent inconnue; mais cette application demande un trop grand nombre de recherches et de combinaisons, dont le succès est encore d'ailleurs fort douteux, pour que nous puissions quant à présent nous livrer à ce travail; nous espérons cependant pouvoir y revenir dans un autre temps, et nous nous contenterons ici d'avoir posé les fondements d'une théorie qui nous paraît nouvelle et générale.

110. Avant de terminer cette Section, nous croyons devoir encore traiter en peu de mots de la réduction ou abaissement des équations à un moindre degré, qui a lieu lorsqu'il y a entre quelques-unes des racines de l'équation proposée quelque relation donnée. Car, quand toutes les racines d'une équation ont entre elles les mêmes rapports, l'équation est alors nécessairement et essentiellement d'un degré égal au nombre des racines, et il est impossible, généralement parlant, qu'elle puisse s'abaisser à un moindre degré. C'est ainsi, par exemple, que le Problème de la trisection de l'angle, considéré en général, est nécessairement du troisième degré, puisqu'il y a trois différentes manières d'y satisfaire, lesquelles conduisent toutes à une même équation, où les trois solutions sont également renfermées. Cependant il y a, comme on sait, des cas particuliers où l'on réussit à rabaisser ce Problème au second degré, parce qu'il y a alors un rapport particulier entre deux des racines de l'équation.

Il en est de même de tous les Problèmes et de toutes les équations. S'il y a une relation particulière entre quelques-unes des racines d'une équation quelconque, on est assuré qu'elle peut s'abaisser à un moindre degré; et si l'on connaît *a priori* cette relation, ou par la forme même de l'équation, ou par la nature du Problème qui y a conduit, on pourra toujours trouver la réduction dont elle est susceptible.

M. Hudde est, je crois, le premier qui ait traité cette matière dans la

Lettre *De reductione equationum* qui est imprimée à la suite de la *Géométrie* de Descartes. Il y fait voir comment une équation peut être abaissée à un moindre degré lorsqu'il y a entre quelques-unes de ses racines une relation telle, que leur somme, ou la somme des produits deux à deux, ou des produits trois à trois, ou, etc., est nulle ou égale à une quantité donnée; comme aussi lorsqu'elle renferme des racines égales ou des diviseurs commensurables quelconques. D'autres Géomètres se sont ensuite exercés sur cette matière et ont perfectionné et étendu plus loin les règles et les méthodes de M. Hudde (voyez surtout l'excellent Ouvrage de M. Waring cité ci-dessus); mais on peut encore envisager ce sujet d'une manière plus générale d'après les principes établis dans les nos 100 et suivants.

111. Si, dans l'équation du degré μ

$$x^\mu + mx^{\mu-1} + nx^{\mu-2} + px^{\mu-3} + \dots = 0,$$

dont les racines sont $x', x'', x''', \dots, x^{(\mu)}$, on suppose qu'il y ait une relation connue entre quelques-unes de ces racines, comme entre celles-ci $x', x'', x''', \dots, x^{(\lambda)}$, λ étant plus petit que μ ; il est d'abord clair que cette relation pourra toujours s'exprimer par une équation dont le premier membre sera une fonction algébrique de $x', x'', x''', \dots, x^{(\lambda)}$; de sorte qu'on connaîtra par ce moyen la valeur d'une fonction telle que

$$f[(x')(x'')(x''') \dots (x^{(\lambda)})].$$

Or :

1° Si l'équation dont nous parlons est telle, qu'elle n'ait lieu qu'entre les racines $x', x'', x''', \dots, x^{(\mu)}$, et même d'une seule manière, en sorte qu'elle cesse d'être vraie si l'on fait une permutation quelconque entre ces racines, alors on pourra, *généralement parlant*, déterminer la valeur de chacune des racines $x', x'', x''', \dots, x^{(\mu)}$ en particulier sans la résolution d'aucune équation, de sorte que dans ce cas ces racines seront nécessairement toutes commensurables (104).

2° Si l'équation qui renferme la relation donnée entre les racines $x', x'', x''', \dots, x^{(\mu)}$ n'a lieu à la vérité qu'entre ces racines, mais qu'elle sub-

siste cependant en y changeant, par exemple, x' en x'' , alors on verra par le numéro cité que les deux racines x', x'' dépendront nécessairement d'une équation du second degré, telle que

$$x^2 - ax + b = 0,$$

dont les coefficients a et b seront commensurables.

3° De même, si l'équation en question est telle, qu'elle soit vraie aussi lorsqu'on y change x' en x'' et en x''' , les trois racines x', x'', x''' dépendront alors d'une équation du troisième degré, telle que

$$x^3 - ax^2 + bx - c = 0,$$

où les coefficients a, b, c seront commensurables, et ainsi de suite.

4° Si l'équation qui n'a lieu que d'une seule manière entre les racines $x', x'', x''', \dots, x^{(\mu)}$, comme dans le premier cas, a lieu aussi en même temps entre les racines $x^{(\lambda+1)}, x^{(\lambda+2)}, x^{(\lambda+3)}, \dots, x^{(\mu)}$, alors, comme la fonction $f[(x')(x'')(x''') \dots (x^{(\lambda)})]$ demeure la même en y changeant x' en $x^{(\lambda+1)}$, x'' en $x^{(\lambda+2)}$, etc., il est clair que les racines $x', x^{(\lambda+1)}$ dépendront d'une équation du second degré, comme

$$x^2 - \alpha x + \beta = 0,$$

où α et β seront commensurables; et il en sera de même des racines $x'', x^{(\lambda+2)}$, des racines $x''', x^{(\lambda+3)}$, et ainsi des autres.

De même, si l'équation a lieu également entre les racines $x', x'', x''', \dots, x^{(\mu)}$, entre les racines $x^{(\lambda+1)}, x^{(\lambda+2)}, x^{(\lambda+3)}, \dots, x^{(\mu)}$ et entre les racines $x^{(2\lambda+1)}, x^{(2\lambda+2)}, x^{(2\lambda+3)}, \dots, x^{(\mu)}$, alors les racines $x', x^{(\lambda+1)}, x^{(2\lambda+1)}$ dépendront d'une équation du troisième degré, telle que

$$x^3 - \alpha x^2 + \beta x - \gamma = 0,$$

où α, β, γ seront commensurables; et il en sera de même des racines $x'', x^{(\lambda+2)}, x^{(2\lambda+2)}$, des racines $x''', x^{(\lambda+3)}, x^{(2\lambda+3)}$, et ainsi de suite.

5° Mais si l'équation qui, comme dans le deuxième cas, a lieu de deux manières différentes entre les racines $x', x'', x''', \dots, x^{(\mu)}$, avait lieu de

même entre les racines $x^{(\lambda+1)}, x^{(\lambda+2)}, x^{(\lambda+3)}, \dots, x^{(2\lambda)}$, alors on aurait pareillement pour les racines x', x'' l'équation du second degré

$$x^2 - a'x + b' = 0,$$

et de même pour les racines $x^{(\lambda+1)}, x^{(\lambda+2)}$ l'équation du second degré

$$x^2 - a''x + b'' = 0,$$

où les coefficients analogues a', a'' seraient racines d'une autre équation du second degré, telle que

$$a^2 - \alpha a + \beta = 0,$$

α et β étant commensurables; et il en serait de même des coefficients b' et b'' .

Et, si la même équation avait lieu aussi parmi les racines $x^{(2\lambda+1)}, x^{(2\lambda+2)}, \dots, x^{(3\lambda)}$, alors on aurait pour les racines x', x'' l'équation

$$x^2 - a'x + b' = 0,$$

pour les racines $x^{(\lambda+1)}, x^{(\lambda+2)}$ l'équation

$$x^2 - a''x + b'' = 0,$$

et pour les racines $x^{(2\lambda+1)}, x^{(2\lambda+2)}$ l'équation

$$x^2 - a'''x + b''' = 0,$$

où les coefficients a', a'', a''' seraient eux-mêmes racines de l'équation

$$a^3 - \alpha a^2 + \beta a - \gamma = 0,$$

α, β, γ étant commensurables; et il en serait de même des coefficients b', b'', b''' .

Et ainsi de suite.

6° On fera le même raisonnement sur le troisième cas, où l'on suppose que la même équation ait lieu entre les racines $x', x'', \dots, x^{(\lambda)}$ en y changeant x' en x'' , en x''' ; car, si cette équation subsiste également entre les racines $x^{(\lambda+1)}, x^{(\lambda+2)}, x^{(\lambda+3)}, \dots, x^{(2\lambda)}$, alors les racines x', x'', x'''

dépendront de l'équation du troisième degré

$$x^3 - a'x^2 + b'x - c' = 0,$$

et les racines $x^{(\lambda+1)}, x^{(\lambda+2)}, x^{(\lambda+3)}$ de l'équation analogue

$$x^3 - a''x^2 + b''x - c'' = 0,$$

où les coefficients a' et a'' seront donnés par l'équation du second degré

$$a^2 - \alpha a + \beta = 0,$$

α et β étant rationnels; et il en sera ainsi des coefficients b', b'' et c', c'' .

Par la même raison, si l'équation dont il s'agit subsistait aussi entre les racines $x^{(2\lambda+1)}, x^{(2\lambda+2)}, x^{(2\lambda+3)}, \dots, x^{(3\lambda)}$, on aurait de plus pour les trois racines $x^{(2\lambda+1)}, x^{(2\lambda+2)}, x^{(2\lambda+3)}$ l'équation

$$x^3 - a'''x^2 + b'''x - c''' = 0,$$

et les coefficients a', a'', a''' seraient dans ce cas les racines de l'équation du troisième degré

$$a^3 - \alpha a^2 + \beta a - \gamma = 0,$$

α, β, γ étant rationnels; il en serait de même des coefficients b', b'', b''' et c', c'', c''' .

On voit assez par là les conséquences analogues que l'on peut tirer pour les autres cas; on doit seulement se souvenir que ces conclusions peuvent souffrir quelques exceptions dans les cas particuliers des racines égales (104).

112. Pour éclaircir ce que nous venons de dire par quelques exemples, considérons d'abord les équations qu'on appelle *réciproques*, et qui sont telles, que les coefficients des termes équidistants des extrêmes sont égaux, de cette manière

$$x^n + mx^{n-1} + nx^{n-2} + \dots + nx^2 + mx + 1 = 0;$$

il est visible, par la forme de cette équation, qu'elle demeure la même

en y mettant $\frac{1}{x}$ à la place de x ; d'où il s'ensuit que si x' en est une racine, $\frac{1}{x'}$ en sera une aussi, de sorte qu'on aura $x'x'' = 1$, c'est-à-dire $x'x'' - 1 = 0$; par la même raison on aura $x''x''' - 1 = 0$, $x'''x^{iv} - 1 = 0$,

On a donc, dans ce cas, une équation entre les racines x' , x'' , qui subsiste aussi en changeant x' en x'' , et qui a lieu de même entre les racines x'' , x''' ; entre x''' , x^{iv} , Donc, ces racines seront renfermées deux à deux dans les équations suivantes, dont le nombre sera $\frac{\mu}{2}$ ou $\frac{\mu-1}{2}$,

$$x^2 - a'x + 1 = 0,$$

$$x^2 - a''x + 1 = 0,$$

$$x^2 - a'''x + 1 = 0,$$

$$\dots\dots\dots,$$

les coefficients a' , a'' , a''' , ... étant racines d'une même équation du degré $\frac{\mu}{2}$ ou $\frac{\mu-1}{2}$, suivant que μ sera pair ou impair, comme nous l'avons déjà démontré par une méthode particulière (22). Voyez aussi sur ce sujet, outre les *Miscellanea analytica* de M. Moivre, le tome I^{er} des *Commentaires de Bologne*, et le tome VI des anciens *Commentaires de Pétersbourg*.

Au reste on peut, par les principes établis ci-dessus, rendre raison pourquoi la substitution de $y = x + \frac{1}{x}$ que nous avons employée dans le numéro cité doit conduire à une réduite du degré $\frac{\mu}{2}$ lorsque μ est pair. Car il est clair que les valeurs de y , c'est-à-dire les racines de l'équation en y seront

$$x' + \frac{1}{x'}, \quad x'' + \frac{1}{x''}, \quad x''' + \frac{1}{x'''}, \quad x^{iv} + \frac{1}{x^{iv}}, \dots,$$

mais on a $x' = \frac{1}{x''}$, $x'' = \frac{1}{x'}$, ... donc ces racines seront

$$x' + \frac{1}{x'}, \quad \frac{1}{x'} + x', \quad x'' + \frac{1}{x''}, \quad \frac{1}{x''} + x'', \dots$$

et par conséquent égales deux à deux; de sorte que l'équation en y , qui devrait être naturellement du degré μ , s'abaissera d'elle-même au degré $\frac{\mu}{2}$.

On pourrait aussi employer une autre substitution qui abaisserait de même l'équation, mais en faisant disparaître toutes les puissances impaires de l'inconnue; c'est celle-ci $x = \frac{1-y}{1+y}$, laquelle donne $y = \frac{1-x}{1+x}$, car alors les racines de la transformée en y seraient

$$\frac{1-x'}{1+x'}, \quad \frac{1-x''}{1+x''}, \quad \frac{1-x'''}{1+x'''}, \quad \frac{1-x^{iv}}{1+x^{iv}}, \dots,$$

c'est-à-dire (à cause de $x' = \frac{1}{x''}$, $x'' = \frac{1}{x'}$, ...)

$$\frac{1-x'}{1+x'}, \quad \frac{x'-1}{x'+1}, \quad \frac{1-x''}{1+x''}, \quad \frac{x''-1}{x''+1}, \dots,$$

et par conséquent égales deux à deux, et de signes contraires.

113. Dans l'exemple précédent, c'est par la forme même de l'équation qu'on a reconnu la relation qu'il doit y avoir entre ses racines, et qui la rend susceptible de réduction; mais on peut aussi déduire cette connaissance de la nature même du Problème qu'on a à résoudre; c'est ce qu'il est bon de faire voir par quelques exemples.

Soit proposé de trouver quatre quantités en proportion continue, dont la somme soit donnée ainsi que celle de leurs carrés.

Nommant ces quantités inconnues x , y , z , u , on aura par les conditions du Problème ces quatre équations

$$xz = y^2, \quad yu = z^2,$$

$$x + y + z + u = a, \quad x^2 + y^2 + z^2 + u^2 = b,$$

a et b étant des quantités connues.

Pour éliminer plus facilement les trois inconnues y , z , u , et avoir une équation finale en x , je fais $y = rx$, et j'aurai, par les deux premières équations, $z = r^2x$, $u = r^3x$, valeurs qui, étant substituées dans les

deux dernières, donnent celles-ci

$$x(1+r+r^2+r^3)=a, \quad x^2(1+r+r^2+r^3)=b^2,$$

d'où il ne s'agira plus que d'éliminer r .

Pour faciliter cette élimination je multiplie la première par $1-r$, et la seconde par $1-r^2$, j'ai ainsi

$$x(1-r^4)=a(1-r), \quad x^2(1-r^4)=b^2(1-r^2),$$

et, divisant cette dernière par l'autre, j'aurai

$$x(1+r^4)=\frac{b^2(1+r)}{a};$$

de sorte qu'on aura maintenant ces deux-ci

$$x(1-r^4)=a(1-r), \quad x(1+r^4)=\frac{b^2}{a}(1+r),$$

d'où il est facile de tirer

$$r=\frac{a^2+b^2-2ax}{a^2-b^2},$$

$$r^4=\frac{2ab^2-(a^2+b^2)x}{(a^2-b^2)x}.$$

Si l'on substitue maintenant la valeur de r , que donne la première de ces équations, dans la seconde, on aura une équation finale en x qui, étant développée, montera au cinquième degré; mais si l'on substitue la même valeur de r dans l'équation primitive

$$x(1+r+r^2+r^3)=a,$$

on en aura une en x qui ne montera qu'au quatrième, et qui sera l'équation la plus simple qu'on puisse avoir pour la détermination de l'inconnue x .

Je vais prouver maintenant, sans connaître même la forme de cette équation, qu'elle doit être décomposable en deux équations du second degré, moyennant une autre équation du second degré aussi.

Pour cela, je remarque que si, au lieu de chercher l'inconnue x , on

eût cherché l'inconnue u , on serait tombé dans une équation semblable; car, faisant $z=su$, on aurait $y=s^2u$ et $x=s^3u$; de sorte que les équations en s et u seraient

$$u(1+s+s^2+s^3)=a, \quad u^2(1+s^2+s^4+s^6)=b^2,$$

c'est-à-dire entièrement semblables aux équations en x et r . D'où je conclus d'abord que la valeur de l'inconnue u sera nécessairement aussi une des racines de l'équation en x trouvée ci-dessus.

Or, on a $u=r^3x$, et, divisant la valeur de r^4 , trouvée ci-dessus, par celle de r , on a

$$r^3=\frac{2ab^2-(a^2+b^2)x}{x(a^2+b^2-2ax)};$$

par conséquent,

$$u=\frac{2ab^2-(a^2+b^2)x}{a^2+b^2-2ax}.$$

Ainsi, si l'on dénote par x' , x'' , x''' , x^{iv} les quatre racines de l'équation en x dont il s'agit, ces racines seront telles, qu'on aura

$$x''=\frac{2ab^2-(a^2+b^2)x'}{a^2+b^2-2ax'};$$

c'est-à-dire

$$2ax'x''-(a^2+b^2)(x'+x'')+2ab^2=0;$$

or, il n'y a pas plus de raison pour que cette équation subsiste entre les deux racines x' , x'' qu'entre les deux autres x'' , x^{iv} ; par conséquent on aura aussi

$$2ax''x^{iv}-(a^2+b^2)(x''+x^{iv})+2ab^2=0.$$

Voilà donc deux équations semblables qui ont lieu entre les racines x' , x'' et x'' , x^{iv} , et qui sont de plus telles, qu'elles ne changent point en changeant x' en x'' et x'' en x^{iv} ; donc, par le n° 111, on pourra sûrement décomposer l'équation en question du quatrième degré en deux autres du second degré, telles que

$$x^2-f'x+g'=0,$$

$$x^2-f''x+g''=0,$$

où les coefficients f' et f'' seront racines d'une équation du second degré ainsi que les coefficients g' et g'' .

Et comme ces deux équations doivent renfermer, l'une les deux racines x' , x'' , et l'autre les deux autres racines x''' , x^{iv} , on aura

$$f' = x' + x'', \quad g' = x'x'', \quad f'' = x''' + x^{iv}, \quad g'' = x'''x^{iv};$$

donc on aura

$$2ag' - (a^2 + b^2)f' + 2ab^2 = 0,$$

$$2ag'' - (a^2 + b^2)f'' + 2ab^2 = 0,$$

d'où

$$g' = \frac{(a^2 + b^2)f' - 2ab^2}{2a},$$

$$g'' = \frac{(a^2 + b^2)f'' - 2ab^2}{2a}.$$

De sorte que les deux facteurs de l'équation proposée seront

$$x^3 - fx + \frac{(a^2 + b^2)f' - 2ab^2}{2a} = 0,$$

$$x^3 - f''x + \frac{(a^2 + b^2)f'' - 2ab^2}{2a} = 0.$$

Pour le faire voir et trouver en même temps l'équation dont les racines seront f' et f'' , il faut chercher d'abord l'équation du Problème en x . Or faisant, pour abrégier,

$$c = \frac{a^2 + b^2}{a^2 - b^2}, \quad e = \frac{2a}{a^2 - b^2},$$

on aura $r = c - ex$, et cette valeur, étant substituée dans l'équation

$$x(1 + r + r^2 + r^3) = a,$$

donnera, en ordonnant les termes par rapport à x , celle-ci

$$x^4 - \frac{1+3c}{e}x^3 + \frac{1+2c+3c^2}{e^2}x^2 - \frac{1+c+c^2+c^3}{e^3}x + \frac{a}{e^3} = 0.$$

Maintenant, à cause de

$$\frac{a^2 + b^2}{2a} = \frac{c}{e} \quad \text{et} \quad b^2 = \frac{c^2 - 1}{e^2},$$

les deux facteurs de cette équation seront

$$x^2 - fx + \frac{cf'}{e} + \frac{1-c^2}{e^2} = 0,$$

$$x^2 - f''x + \frac{cf''}{e} + \frac{1-c^2}{e^2} = 0,$$

qui, étant multipliés l'un par l'autre, donnent

$$x^4 - (f' + f'')x^3 + \left[f'f'' + \frac{c}{e}(f' + f'') + \frac{2(1-c^2)}{e^2} \right]x^2 - \left[\frac{2c}{e}f'f'' + \frac{1-c^2}{e^2}(f' + f'') \right]x + \frac{c^2}{e^2}f'f'' + \frac{c(1-c^2)}{e^3}(f' + f'') + \frac{(1-c^2)^2}{e^4} = 0.$$

La comparaison des trois premiers termes de cette équation avec ceux de la précédente donne d'abord

$$f' + f'' = \frac{1+3c}{e},$$

$$f'f'' + \frac{c}{e}(f' + f'') + \frac{2(1-c^2)}{e^2} = \frac{1+2c+3c^2}{e^2},$$

et par conséquent

$$f'f'' = \frac{-1+c+2c^2}{e^2}.$$

Et l'on trouvera que ces valeurs de $f' + f''$ et de $f'f''$ satisferont aussi à la comparaison des autres termes.

Ainsi, les quantités f' et f'' seront les racines de cette équation

$$f^2 - \frac{1+3c}{e}f + \frac{-1+c+2c^2}{e^2} = 0.$$

J'avoue qu'on peut résoudre le Problème précédent d'une manière plus simple, comme Newton l'a fait dans son *Arithmétique universelle*, où, à l'aide d'un certain choix entre les inconnues, il parvient d'abord à deux équations du second degré; mais, d'un côté, il me semble que la

solution que je viens de donner est en quelque façon plus directe et plus lumineuse, puisqu'elle fait voir la raison pourquoi l'équation du quatrième degré, à laquelle on est naturellement conduit, doit être résoluble au moyen de deux du second; et, de l'autre, la règle que Newton établit pour le choix des inconnues n'a point été démontrée par cet Auteur et ne peut l'être, si je ne me trompe, que par les principes généraux que nous avons établis ci-dessus. Mais ce n'est pas ici le lieu de nous étendre sur ce sujet.

114. On pourrait aussi, par la méthode précédente, résoudre avec la même facilité le Problème où l'on demanderait un nombre quelconque μ de quantités en proportion continue, dont la somme et celle de leurs carrés seraient données.

Car, nommant x le premier terme de la progression, et rx le second, on aura d'abord ces deux équations

$$\begin{aligned} x(1+r+r^2+r^3+\dots+r^{\mu-1}) &= a, \\ x^2(1+r^2+r^4+r^6+\dots+r^{2(\mu-1)}) &= b^2, \end{aligned}$$

qui se changent en ces deux-ci

$$\begin{aligned} x(1-r^\mu) &= a(1-r), \\ x^2(1-r^{2\mu}) &= b^2(1-r^2); \end{aligned}$$

d'où l'on tire, comme plus haut,

$$\begin{aligned} r &= \frac{a^2 + b^2 - 2ax}{a^2 - b^2}, \\ r^2 &= \frac{2ab^2 + (a^2 + b^2)x}{(a^2 - b^2)x}. \end{aligned}$$

La valeur de r , qu'on peut mettre, comme ci-devant, sous la forme

$$r = c - ex,$$

étant substituée dans la première équation, donnera celle-ci

$$x[1 + (c - ex) + (c - ex)^2 + \dots + (c - ex)^{\mu-1}] - a = 0,$$

laquelle sera, comme on voit, du degré μ .

On prouvera maintenant, par un raisonnement semblable à celui qu'on a fait plus haut, que le premier terme x et le dernier $r^{\mu-1}x$ de la progression continue devront être également racines de l'équation précédente; mais en divisant la valeur de r^μ par celle de r , on a

$$r^{\mu-1} = \frac{2ab^2 - (a^2 + b^2)x}{x(a^2 + b^2 - 2ax)},$$

donc

$$r^{\mu-1}x = \frac{2ab^2 - (a^2 + b^2)x}{a^2 + b^2 - 2ax}.$$

De là, en nommant x' , x'' , x''' , ..., $x^{(\mu)}$ les racines de l'équation précédente, on aura cette condition, entre les deux racines x' , x'' ,

$$2ax'x'' - (a^2 + b^2)(x' + x'') + 2ab^2 = 0,$$

et comme il n'y a pas plus de raison pour qu'une telle relation ait lieu entre les racines x' , x'' qu'entre les racines x'' , x''' , ou x' , x''' , ou, etc., on aura de même

$$\begin{aligned} 2ax''x''' - (a^2 + b^2)(x'' + x''') + 2ab^2 &= 0, \\ 2ax'x''' - (a^2 + b^2)(x' + x''') + 2ab^2 &= 0, \\ &\dots\dots\dots \end{aligned}$$

le nombre des équations étant $\frac{\mu}{2}$ ou $\frac{\mu-1}{2}$, suivant que μ sera pair ou impair.

D'où, et de ce qu'on a démontré dans le n° 111, il s'ensuit que l'équation du $\mu^{\text{ième}}$ degré doit être décomposable en $\frac{\mu}{2}$ ou $\frac{\mu-1}{2}$ équations du second degré, telles que

$$\begin{aligned} x^2 - f'x + g' &= 0, \\ x^2 - f''x + g'' &= 0, \\ x^2 - f'''x + g''' &= 0, \\ &\dots\dots\dots \end{aligned}$$

dans lesquelles les coefficients f' , f'' , f''' , ... seront racines d'une même équation du degré $\frac{\mu}{2}$ ou $\frac{\mu-1}{2}$, ainsi que les coefficients g' , g'' , g''' , ...

Et comme, à cause de

$$f' = x' + x'', \quad f'' = x'' + x''', \dots, \quad g' = x'x'', \quad g'' = x''x''', \dots,$$

on a

$$\begin{aligned} 2ag' - (a^2 + b^2)f' + 2ab^2 &= 0, \\ 2ag'' - (a^2 + b^2)f'' + 2ab^2 &= 0, \\ &\dots \end{aligned}$$

on aura

$$\begin{aligned} g' &= \frac{(a^2 + b^2)f' - 2ab^2}{2a}, \\ g'' &= \frac{(a^2 + b^2)f'' - 2ab^2}{2a}, \\ &\dots \end{aligned}$$

de sorte que les $\frac{\mu}{2}$ ou $\frac{\mu-1}{2}$ facteurs de l'équation dont il s'agit seront

$$\begin{aligned} x^2 - f'x + \frac{(a^2 + b^2)f' - 2ab^2}{2a} &= 0, \\ x^2 - f''x + \frac{(a^2 + b^2)f'' - 2ab^2}{2a} &= 0, \\ x^2 - f'''x + \frac{(a^2 + b^2)f''' - 2ab^2}{2a} &= 0, \\ &\dots \end{aligned}$$

Dans le cas où μ est un nombre pair, le produit de toutes ces équations devra donner l'équation du degré μ trouvée ci-devant; mais, dans le cas où μ est un nombre impair, il faudra y ajouter encore un facteur simple, tel que $x - h = 0$.

La multiplication faite, il n'y aura plus qu'à comparer les premiers termes de l'équation résultante avec ceux de l'équation dont nous venons de parler, et cette comparaison donnera les valeurs des quantités

$$f' + f'' + f''' + \dots, \quad f'f'' + f'f''' + f''f''' + \dots, \quad \dots$$

qui seront les coefficients de l'équation en f ; et quant au coefficient h , dans le cas où μ est impair, il se trouvera donné par une équation linéaire.

De là il s'ensuit que le Problème proposé peut toujours se réduire à la résolution d'une équation du degré $\frac{\mu}{2}$ ou $\frac{\mu-1}{2}$.

Au reste si, au lieu de déterminer l'inconnue x , on voulait déterminer l'inconnue r , on parviendrait à une équation du genre des *réci-proques*; car les deux équations

$$x(1 - r^2) = a(1 - r), \quad x^2(1 - r^2) = b^2(1 - r^2)$$

donnant

$$x(1 + r^2) = \frac{b^2}{a}(1 + r),$$

on aura, en chassant x ,

$$\frac{1 - r^2}{1 + r^2} = \frac{a^2}{b^2} \frac{1 - r}{1 + r},$$

ou bien, en divisant par $1 - r$,

$$\frac{1 + r + r^2 + r^3 + \dots + r^{2-1}}{1 + r^2} = \frac{a^2}{b^2} \frac{1}{1 + r};$$

d'où, en multipliant en croix et faisant, pour plus de simplicité, $\frac{b^2}{a^2} = c^2$, on aura

$$(c^2 - 1)r^2 + 2c^2(r^{2-1} + r^{2-2} + \dots + r) + c^2 - 1 = 0,$$

c'est-à-dire

$$r^2 + \frac{2c^2}{c^2 - 1}(r^{2-1} + r^{2-2} + \dots + r) + 1 = 0,$$

équation réductible au degré $\frac{\mu}{2}$ ou $\frac{\mu-1}{2}$ par les méthodes connues.

Ce qu'il y aura de plus simple pour cela, ce sera d'employer la substitution de $r = \frac{1-y}{1+y}$, laquelle changera l'équation

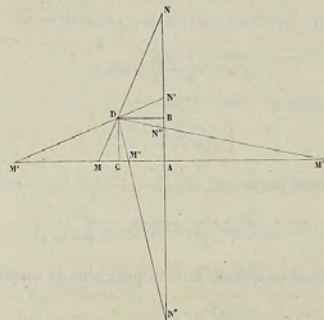
$$\frac{1 - r^2}{1 + r^2} = \frac{a^2}{b^2} \frac{1 - r}{1 + r}$$

en celle-ci

$$\frac{(1+y)^2 - (1-y)^2}{(1+y)^2 + (1-y)^2} = \frac{a^2 y}{b^2},$$

où toutes les puissances impaires de y disparaîtront d'elles-mêmes.

115. Ajoutons encore un Exemple tiré de la Géométrie. Proposons-nous ce Problème très-connu, où il s'agit de mener par le point D du carré ACDB une ligne droite MN telle, que la partie MN de cette ligne, qui sera comprise entre les deux côtés opposés AC, AB du carré, prolongés en M, N, soit d'une grandeur donnée.



Nommant a le côté du carré et b la longueur donnée de la ligne MN, prenons, pour déterminer la position de cette ligne, l'inconnue $CM = x$; on aura donc $MD = \sqrt{x^2 + a^2}$, et les deux triangles semblables MCD, MAN donneront sur-le-champ

$$x : \sqrt{a^2 + x^2} = (a + x) : MN = (a + x) : b;$$

d'où l'on tire l'équation

$$bx = (a + x) \sqrt{a^2 + x^2};$$

laquelle, étant dégagée du radical et ordonnée par rapport à x , deviendra

$$x^4 + 2ax^3 + (2a^2 - b^2)x^2 + 2a^3x + a^4 = 0,$$

qui est, comme on voit, du quatrième degré.

Voyons maintenant si, par la nature même du Problème, on ne pourra

pas trouver quelque relation entre les racines de cette équation, qui la rende décomposable en des équations d'un degré moindre.

Pour y parvenir je remarque qu'on peut en effet mener par le point D quatre lignes qui remplissent la condition du Problème; ce sont les lignes MN, M'N', M''N'' et M'''N'''; de sorte que les racines de l'équation précédente seront les lignes CM, CM', CM'', CM''', dont les deux dernières sont, comme on voit, négatives.

Dénotons donc ces lignes par x' , x'' , x''' , x^{iv} ; et, à cause des triangles semblables MDC, DNB, on aura

$$MC : CD = DB : BN;$$

mais, puisque M'N' doit être égal à MN, que $CD = DB$, il est facile de voir qu'on aura aussi $M'C = BN$; donc on aura cette proportion

$$x' : a = a : x',$$

c'est-à-dire

$$x'x' - a^2 = 0.$$

On pourrait d'abord conclure, par le principe de la raison suffisante, qu'une pareille relation doit aussi avoir lieu entre les deux autres racines x'' , x^{iv} ; mais, si l'on voulait s'en convaincre *à posteriori*, il n'y aurait qu'à considérer qu'à cause de $M'N' = N''M''$ on aura nécessairement aussi $CM'' = BN''$; et qu'ensuite, à cause des triangles semblables DCM'', DBN'', on aura $CM'' : CD = DB : BN'' = DB : CM''$, c'est-à-dire

$$x'' : a = a : x'',$$

et par conséquent

$$x''x'' - a^2 = 0.$$

Puis donc qu'on a deux équations semblables, l'une entre x' , x' , l'autre en x'' , x'' , et que ces équations subsistent également en changeant x' en x'' , x'' en x' , il s'ensuit des principes établis plus haut que l'équation du quatrième degré, trouvée ci-dessus, sera nécessairement décomposable en deux équations du second degré, telles que

$$x^2 - f'x + g' = 0,$$

$$x^2 - f''x + g'' = 0,$$

où f' et f'' seront racines d'une équation du second degré, ainsi que g' et g'' ; mais, puisque $g' = x'x''$ et $g'' = x'x''$, on aura $g' = g'' = a^2$; par conséquent les deux facteurs de l'équation dont il s'agit seront

$$x^2 - f'x + a^2 = 0,$$

$$x^2 - f''x + a^2 = 0.$$

Qu'on en fasse donc le produit, on aura

$$x^4 - (f' + f'')x^3 + (f'f'' + 2a^2)x^2 - a^2(f' + f'')x + a^4 = 0;$$

donc

$$f' + f'' = -2a, \quad f'f'' + 2a^2 = 2a^2 - b^2;$$

par conséquent

$$f'f'' = -b^2;$$

de sorte que l'équation qui aura pour racines les quantités f' et f'' sera

$$f^2 + 2af - b^2 = 0.$$

Au reste, il est clair que si, dans l'équation en x du quatrième degré, on fait $x = az$, on aura une équation en z du genre des *réciroques*, et dans laquelle on pourra, par conséquent, faire disparaître toutes les puissances impaires de l'inconnue en faisant $z = \frac{1-y}{1+y}$; de sorte que la substitution propre pour cet effet sera de faire d'abord $x = \frac{a(1-y)}{1+y}$.

Si l'on tire la valeur de y de cette équation, on a

$$y = \frac{a-x}{a+x} = 1 - \frac{2x}{a+x};$$

mais on a

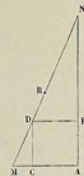
$$\frac{x}{a+x} = \frac{\sqrt{a^2+x^2}}{b} = \frac{MD}{MN};$$

donc on aura

$$y = 1 - \frac{2MD}{MN} = \frac{MN - 2MD}{MN} = \frac{2DR}{MN} = \frac{2DR}{b},$$

supposant que R soit le point du milieu de la ligne MN. De là on voit

qu'on serait parvenu d'abord à une équation du quatrième degré sans puissances impaires de l'inconnue, si l'on eût pris pour inconnue la ligne DR. C'est ce qu'a fait Newton dans la solution qu'il a donnée de ce



Problème dans son *Arithmétique universelle*; mais on doit avouer, ce me semble, qu'un tel choix de l'inconnue est assez peu naturel, et que ce n'est, pour ainsi dire, qu'après coup qu'on peut le faire; du moins il me paraît que le principe d'où Newton le fait dépendre n'a pas toute l'évidence qu'on est en droit d'exiger dans ces sortes de matières.



DÉMONSTRATION
D'UN THÉORÈME NOUVEAU
CONCERNANT LES NOMBRES PREMIERS.



DÉMONSTRATION

D'UN THÉORÈME NOUVEAU

CONCERNANT LES NOMBRES PREMIERS (*).

(Nouveaux Mémoires de l'Académie royale des Sciences et Belles-Lettres
de Berlin, année 1771.)

1. Je viens de trouver, dans un excellent Ouvrage de M. Waring que j'ai reçu depuis peu (**), un très-beau Théorème d'Arithmétique, que voici :

Si n est un nombre premier quelconque, le nombre

$$1.2.3.4.5... (n-1) + 1$$

sera toujours divisible par n ;

c'est-à-dire que le produit continué des nombres 1, 2, 3, ... jusqu'à $n-1$ inclusivement, étant augmenté de l'unité, sera divisible par n , ou bien, que si l'on divise ce même produit par le nombre premier n , on aura -1 , ou, ce qui est la même chose, $n-1$ pour reste.

(*) Lu à l'Académie le 13 juin 1771.

(**) *Meditationes algebrae ab Eduardo Waring, Matheseos Professore Lucasiano, etc.* Cantabrigiae, 1770; voyez page 218.

Par exemple,

soit $n=3$,	on aura $1.2+1=3$,
$n=5$,	$1.2.3.4+1=25$,
$n=7$,	$1.2.3.4.5.6+1=721=7.103$,
$n=11$,	$1.2.3...10+1=3628801=11.329891$,
$n=13$,	$1.2.3...12+1=479001601=13.36846277$,
.....	

M. Waring fait honneur de ce Théorème à M. Jean Wilson, mais il n'en donne point la démonstration, et il paraît même insinuer que personne ne l'a encore trouvée; du moins il semble qu'il la regarde comme extrêmement difficile; car, après avoir rapporté ce Théorème avec quelques autres qui en dépendent, il ajoute : *Demonstrationes vero hujusmodi propositionum eo magis difficiles erunt, quod nulla fingi potest notatio, quæ primum numerum exprimat.*

Cette raison, jointe à l'élégance et à l'utilité du Théorème dont il s'agit, m'a engagé à en chercher une démonstration, et celle que j'ai trouvée m'a paru mériter l'attention des Géomètres, tant par elle-même que parce qu'elle fait connaître en même temps quelques autres propriétés des nombres premiers, qui n'avaient pas encore, ce me semble, été remarquées.

LEMME.

2. Étant donné le produit continu

$$(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)\dots(x+n-1),$$

on propose de le développer suivant les puissances de x .

Il est visible qu'on aura

$$\begin{aligned} & (x+1)(x+2)(x+3)(x+4)\dots(x+n-1) \\ &= x^{n-1} + A'x^{n-2} + A''x^{n-3} + A'''x^{n-4} + \dots + A^{(n-1)}, \end{aligned}$$

et pour déterminer facilement les coefficients A' , A'' , A''' ,...., on remarquera que l'équation précédente devant être identique subsistera égale-

ment en y mettant $x+1$ à la place de x ; c'est pourquoi on aura aussi

$$\begin{aligned} & (x+2)(x+3)(x+4)(x+5)\dots(x+n) \\ &= (x+1)^{n-1} + A'(x+1)^{n-2} + A''(x+1)^{n-3} + A'''(x+1)^{n-4} + \dots + A^{(n-1)}; \end{aligned}$$

donc, multipliant toute cette équation par $x+1$, et la comparant ensuite à la précédente multipliée par $x+n$, on en tirera celle-ci

$$\begin{aligned} & (x+n)(x^{n-1} + A'x^{n-2} + A''x^{n-3} + A'''x^{n-4} + \dots + A^{(n-1)}) \\ &= (x+1)^n + A'(x+1)^{n-1} + A''(x+1)^{n-2} + A'''(x+1)^{n-3} + \dots + A^{(n-1)}(x+1), \end{aligned}$$

c'est-à-dire, en développant les termes et les ordonnant par rapport à x ,

$$\begin{aligned} & x^n + (n+A')x^{n-1} + (nA' + A'')x^{n-2} + (nA'' + A''')x^{n-3} + \dots \\ &= x^n + (n+A')x^{n-1} + \left[\frac{n(n-1)}{2} + (n-1)A' + A'' \right] x^{n-2} \\ &+ \left[\frac{n(n-1)(n-2)}{2.3} + \frac{(n-1)(n-2)}{2}A' + (n-2)A'' + A''' \right] x^{n-3} + \dots \end{aligned}$$

Donc, puisque cette équation est identique, on aura, en comparant terme à terme,

$$\begin{aligned} & n + A' = n + A', \\ & nA' + A'' = \frac{n(n-1)}{2} + (n-1)A' + A'', \\ & nA'' + A''' = \frac{n(n-1)(n-2)}{2.3} + \frac{(n-1)(n-2)}{2}A' + (n-2)A'' + A''', \\ & \dots \end{aligned}$$

d'où l'on tire

$$\begin{aligned} & A' = \frac{n(n-1)}{2}, \\ & 2A'' = \frac{n(n-1)(n-2)}{2.3} + \frac{(n-1)(n-2)}{2}A', \\ & 3A''' = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2.3.4} + \frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{2.3}A' + \frac{(n-2)(n-3)}{2}A'', \end{aligned}$$

et ainsi de suite.

COROLLAIRE.

3. Il est clair, par la théorie des équations, que les coefficients $A', A'', A''', \dots$ ne sont autre chose que les sommes des nombres naturels 1, 2, 3, ..., jusqu'à $n-1$ inclusivement, des produits de ces nombres multipliés deux à deux, trois à trois, etc.; en sorte que le dernier coefficient $A^{(n-1)}$ sera égal au produit $1.2.3.4 \dots (n-1)$; ainsi tous les nombres $A', A'', A''', \dots$ seront nécessairement entiers.

THÉOREME.

4. Les mêmes choses étant posées que dans le Lemme précédent, je dis que, si n est un nombre premier, les nombres $A', A'', A''', \dots$ jusqu'à $A^{(n-2)}$ inclusivement, sont tous divisibles par n , et que le dernier nombre $A^{(n-1)}$ sera divisible par n , étant augmenté de l'unité.

On sait que les expressions

$$\frac{n(n-1)}{2}, \frac{n(n-1)(n-2)}{2.3}, \dots, \frac{(n-1)(n-2)}{2}, \frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{2.3}, \dots$$

dénotent toujours des nombres entiers, tant que n est un nombre entier; puisque ce sont les coefficients du binôme élevé à la puissance n , ou $n-1$, ou, etc. De plus il est clair que, si n est un nombre premier, les nombres

$$\frac{n(n-1)}{1.2}, \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}, \dots$$

seront tous divisibles par n , à l'exception seulement du dernier nombre

$$\frac{n(n-1)(n-2) \dots 1}{1.2.3 \dots n}$$

qui est égal à l'unité; car il est visible que le numérateur de chacun de ces nombres est divisible par n , et que le dénominateur ne l'est pas, tant que n est premier; d'où il s'ensuit qu'après avoir divisé le numérateur

par le dénominateur, il restera nécessairement dans le quotient le facteur n .

De là et des formules du Lemme précédent il est facile de conclure :

1° Que A' sera divisible par n , que $2A''$ le sera aussi, et de même $3A'''$, $4A^{(4)}$, ..., jusqu'à $(n-2)A^{(n-2)}$; et que par conséquent les nombres $A', A'', A''', \dots, A^{(n-2)}$ que nous avons vu devoir être toujours entiers (3), seront eux-mêmes toujours divisibles par n , au moins tant que n sera premier;

2° Que le nombre $A^{(n-1)}$ étant augmenté de l'unité sera divisible par n ; car la formule qui servira à déterminer sa valeur sera

$$(n-1)A^{(n-1)} = \frac{n(n-1)(n-2) \dots 1}{1.2.3 \dots n} + \frac{(n-1)(n-2) \dots 1}{1.2 \dots (n-1)} A' + \frac{(n-2)(n-3) \dots 1}{1.2 \dots (n-2)} A'' + \dots$$

c'est-à-dire

$$(n-1)A^{(n-1)} = 1 + A' + A'' + A''' + \dots + A^{(n-2)};$$

done

$$A^{(n-1)} + 1 = nA^{(n-1)} - A' - A'' - A''' - \dots - A^{(n-2)};$$

donc, puisque $A', A'', A''', \dots, A^{(n-2)}$ sont tous divisibles par n , il s'ensuit que $A^{(n-1)} + 1$ sera toujours divisible par n .

COROLLAIRE I.

5. Donc (3) le nombre

$$1.2.3.4 \dots (n-1) + 1$$

sera toujours divisible par n , lorsque n sera un nombre premier, ce qui est le Théorème qu'il s'agissait de démontrer.

En général, il s'ensuit de la formule du n° 2 que, quel que soit le nombre entier x , on aura toujours

$$(x+1)(x+2)(x+3) \dots (x+n-1) - x^{n-1} + 1$$

divisible par n , tant que n sera un nombre premier.

Donc :

1° Si x^{n-1} est divisible par n , ce qui ne peut arriver que lorsque x est égal à zéro ou égal à un multiple de n , le nombre

$$(x+1)(x+2)(x+3)\dots(x+n-1)+1$$

sera toujours divisible par n ; ce qui donne le Théorème de M. Wilson en faisant $x=0$.

2° Si x n'est ni nul ni divisible par n , ce qui arrive lorsque $x=\mu n+\rho$, ρ étant un nombre quelconque entier moindre que n , il est clair que quelqu'un des nombres

$$x+1, x+2, x+3, \dots, x+n-1$$

sera nécessairement divisible par n , et que le produit

$$(x+1)(x+2)(x+3)\dots(x+n-1)$$

sera par conséquent toujours divisible par n ; donc $-x^{n-1}+1$, ou bien $x^{n-1}-1$ sera dans ce cas toujours divisible par n ; ce qui est le fameux Théorème de Fermat dont M. Euler a donné plusieurs démonstrations dans les *Commentaires de Pétersbourg*. La nôtre a, comme on voit, l'avantage de faire voir la liaison et la dépendance mutuelle des deux Théorèmes dont il s'agit.

COROLLAIRE II.

6. Puisque

$$n-1, n-2, n-3, \dots$$

étant divisés par n donnent pour restes

$$-1, -2, -3, \dots,$$

on pourra mettre ces restes à la place des nombres $n-1, n-2, \dots$ dans la formule

$$1.2.3\dots(n-1);$$

et l'on aura les formules suivantes

$$1.2.3\dots(n-1)+1,$$

$$1.2.3\dots(n-2)-1,$$

$$1.2^2.3\dots(n-3)+1,$$

$$1.2^2.3^2.4\dots(n-4)-1,$$

$$\dots\dots\dots,$$

qui seront toutes divisibles par n ; donc aussi

$$\left[1.2.3\dots\left(\frac{n-1}{2}\right)\right]^2 \pm 1$$

sera divisible par n , le signe supérieur ayant lieu lorsque $\frac{n-1}{2}$ est un nombre pair, et l'inférieur lorsque $\frac{n-1}{2}$ est impair.

1° Soit $\frac{n-1}{2} = 2m$, et par conséquent $n = 4m+1$; dans ce cas $(1.2.3\dots 2m)^2 + 1$ sera divisible par n .

Ainsi l'on aura une somme de deux carrés qui sera divisible par $4m+1$ lorsque ce nombre sera premier; c'est ce qu'on n'avait pu trouver jusqu'à présent d'une manière générale; seulement on avait pu prouver, d'une manière même assez indirecte, qu'il existait toujours une pareille somme divisible par n lorsque n était de la forme $4m+1$ (voyez le tome V des *Nouveaux Mémoires de Pétersbourg*).

2° Soit $\frac{n-1}{2} = 2m-1$, et par conséquent $n = 4m-1$; dans ce cas $[1.2.3\dots(2m-1)]^2 - 1$ sera divisible par n .

Mais

$$[1.2.3\dots(2m-1)]^2 - 1 = [1.2.3\dots(2m-1)+1][1.2.3\dots(2m-1)-1];$$

donc, puisque n est un nombre premier, il faudra que l'un ou l'autre des

deux facteurs

$$1.2.3\dots(2m-1)+1 \quad \text{ou} \quad 1.2.3\dots(2m-1)-1,$$

soit divisible par n ; donc

$$1.2.3\dots(2m-1) \pm 1$$

sera nécessairement divisible par n .

REMARQUE I.

7. Les propositions des Corollaires précédents sont d'autant plus remarquables que, si n n'était pas premier, les nombres que nous avons vu devoir être divisibles par n , dans l'hypothèse de n premier, ne le seraient plus. Car, si n n'est pas un nombre premier, il sera donc divisible par quelqu'un des nombres $2, 3, \dots, n-1$ moindres que n ; donc, si

$$1.2.3\dots(n-1)+1$$

était divisible par n , il faudrait qu'il le fût aussi par quelqu'un des nombres $2, 3, 4, \dots, n-1$; or c'est ce qui ne se peut; car le nombre $1.2.3\dots(n-1)$ étant divisible par chacun de ces nombres, il est clair qu'en divisant par un quelconque d'eux le nombre

$$1.2.3\dots(n-1)+1$$

ou aura toujours l'unité pour reste.

On peut donc tirer de là une méthode directe pour reconnaître si un nombre quelconque impair n est premier ou non; il n'y aura qu'à voir si le produit continu des nombres $2, 3, 4, \dots, n-2$, étant divisé par n , donne 1 pour reste, alors le nombre sera premier; sinon, il ne le sera pas. On peut encore simplifier cette règle en distinguant les deux cas où n est de la forme $4m+1$ ou de la forme $4m-1$; dans le premier cas, le nombre n sera premier, si le carré du produit continu des nombres $2, 3, 4, \dots, 2m$ étant divisé par n donne -1 ou $n-1$ pour reste; et dans le second, si le produit continu des nombres $2, 3, 4, \dots, 2m-1$ étant divisé par n donne 1 ou -1 pour reste; sinon, n ne sera pas premier.

J'avoue au reste que cette méthode devient extrêmement laborieuse, et presque impraticable, lorsque n est un très-grand nombre; mais il peut y avoir des moyens d'en simplifier la pratique, et c'est une recherche à laquelle nous invitons les Géomètres.

REMARQUE II.

8. On pourrait déduire du Théorème de M. Fermat une autre démonstration de celui de M. Wilson beaucoup plus simple que celle que nous en avons donnée ci-dessus.

Car, si l'on considère la suite des nombres naturels $1, 2, 3, \dots, n$, élevés à la puissance $(n-1)^{\text{ième}}$, et qu'on cherche la différence $(n-1)^{\text{ième}}$ des termes de cette suite, il est facile de voir, par la théorie des différences, qu'elle sera

$$\begin{aligned} n^{n-1} - (n-1)(n-1)^{n-1} + \frac{(n-1)(n-2)}{2}(n-2)^{n-1} \\ - \frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{2.3}(n-3)^{n-1} + \dots + 1; \end{aligned}$$

d'autre part, comme la série

$$1, 2^{n-1}, 3^{n-1}, \dots$$

est une série algébrique de l'ordre $(n-1)^{\text{ième}}$, on sait que la différence du même ordre sera exprimée par le produit continu des nombres $1, 2, 3, \dots, n-1$; ainsi l'on aura l'équation

$$\begin{aligned} 1.2.3.4\dots(n-1) = n^{n-1} - (n-1)(n-1)^{n-1} + \frac{(n-1)(n-2)}{2}(n-2)^{n-1} \\ - \frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{2.3}(n-3)^{n-1} + \dots + 1. \end{aligned}$$

Supposons maintenant qu'on divise le second membre de cette équation par n , et qu'on ne veuille tenir compte que du reste qui en proviendra; il est d'abord clair que le terme n^{n-1} donnera pour reste 0, et que les termes $(n-1)^{n-1}, (n-2)^{n-1}, \dots$ donneront tous l'unité pour reste, par le Théorème de M. Fermat; donc, mettant à la place de ces termes

leurs restes 0, 1, 1, ..., on aura le reste total

$$-(n-1) + \frac{(n-1)(n-2)}{2} - \frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{2 \cdot 3} + \dots$$

ou bien

$$(1-1)^{n-1} - 1, \text{ c'est-à-dire } -1;$$

ainsi le reste de la division de $1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (n-1)$ par n sera -1 , et par conséquent

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (n-1) + 1$$

sera toujours divisible par n , pourvu que n soit premier; condition nécessaire pour l'exactitude du Théorème de M. Fermat.

REMARQUE III.

9. Avant de quitter cette matière, nous croyons devoir démontrer encore quelques autres Théorèmes sur les nombres premiers, qu'on trouve aussi sans démonstration dans le même Ouvrage de M. Waring, et qui peuvent être de quelque utilité dans la construction des Tables des nombres premiers.

1° Si trois nombres premiers sont en progression arithmétique, leur différence doit être divisible par 6, à moins que l'un de ces trois nombres ne soit égal à 3.

Tout nombre entier quelconque peut être représenté par l'une de ces formules

$$6m, \quad 6m \pm 1, \quad 6m \pm 2, \quad 6m \pm 3;$$

les deux formules $6m$ et $6m \pm 2$ donnent tous les nombres pairs, et les deux autres $6m \pm 1$, $6m \pm 3$ donnent tous les nombres impairs; mais la dernière, étant divisible par 3, ne peut représenter d'autres nombres premiers que le seul nombre 3; donc tout nombre premier sera ou 3 ou $6m \pm 1$.

Cela posé, soient

$$p - a, \quad p, \quad p + a$$

les trois nombres en progression arithmétique qu'on suppose premiers; et en excluant d'abord le nombre 3 de la progression, il faudra que chacun de ces nombres soit de la forme $6m \pm 1$; d'autre part, il est clair que la différence a doit être un nombre pair, et par conséquent d'une de ces deux formes $6n$ ou $6n \pm 2$; soit donc, s'il est possible, $a = 6n \pm 2$, et prenons d'abord $p = 6m + 1$, on aura

$$p + a = 6(m + n) + 3 \text{ ou } 6(m + n) - 1$$

et

$$p - a = 6(m - n) - 1 \text{ ou } 6(m - n) + 3;$$

ainsi il est impossible que $p + a$ et $p - a$ soient à la fois de la forme $6\mu \pm 1$; prenons ensuite $p = 6m - 1$, on aura

$$p + a = 6(m + n) + 1 \text{ ou } 6(m + n) - 3$$

et

$$p - a = 6(m - n) - 3 \text{ ou } 6(m - n) + 1;$$

d'où l'on voit que $p + a$ et $p - a$ ne pourront pas être à la fois de la forme $6\mu \pm 1$; donc il est impossible que a soit de la forme $6n \pm 2$; par conséquent il faudra que a soit toujours de la forme $6n$, c'est-à-dire divisible par 6.

Si l'on voulait admettre le nombre 3 pour un des termes de la progression, alors la différence pourrait être de la forme $6n \pm 2$. Supposons d'abord que 3 soit le premier terme de la progression; le second se trouvera de la forme $6n \pm 2 + 3$ ou $6n \pm 1$, et le troisième de la forme $12n \pm 4 + 3$ ou $6n \pm 1$; ainsi ils pourront être tous les trois premiers; mais si l'on y en ajoutait un quatrième, celui-ci ne pourrait jamais être premier, car sa forme serait $18n \pm 6 + 3$, qui est divisible par 3. On pourra, par exemple, former ces progressions de trois termes 3, 5, 7, ou 3, 7, 11, ou 3, 11, 19, etc.; donc les différences ne seront pas divisibles par 6; mais ces progressions ne pourront jamais aller au delà de trois termes.

Si l'on prend 3 pour le second terme de la progression, alors le premier ne pourra être que 1, et le troisième sera 5; dans ce cas, on y pourra

ajouter un quatrième terme qui sera 7; mais on ne pourrait pas aller au delà, parce que le suivant 9 ne serait plus premier.

On ne pourrait pas prendre 3 pour le troisième terme, car les deux premiers ne pourraient être alors que 1 et 2; or celui-ci peut n'être pas regardé comme un nombre premier à cause qu'il est pair.

2° Si cinq nombres premiers sont en progression arithmétique, leur différence doit être divisible par 30, à moins que 5 ne soit l'un des termes de cette progression.

Nous avons déjà vu que tout nombre premier doit être 3 ou $6m \pm 1$; nous avons vu de plus que, si 3 est un des termes de la progression arithmétique, il est impossible qu'elle ait plus de quatre termes qui soient des nombres premiers; donc il faudra que les cinq termes de la progression proposée soient chacun de la forme $6m \pm 1$. Or, m pouvant être un nombre quelconque entier, il sera nécessairement d'une de ces formes

$$5\mu, \quad 5\mu \pm 1, \quad 5\mu \pm 2,$$

qui renferment évidemment tous les nombres possibles; donc, substituant ces formules à la place de m , on aura les suivantes

$$30\mu \pm 1, \quad 30\mu \pm 5, \quad 30\mu \pm 7, \quad 30\mu \pm 11, \quad 30\mu \pm 13,$$

dont la seconde ne peut donner d'autres nombres premiers que 5; de sorte qu'en faisant abstraction, suivant l'hypothèse, du nombre 5, il faudra que les cinq termes de la progression soient renfermés dans ces quatre formules

$$30\mu \pm 1, \quad 30\mu \pm 7, \quad 30\mu \pm 11, \quad 30\mu \pm 13.$$

Maintenant nous avons déjà vu que la différence de la progression ne peut être que de la forme $6n$; or n peut être aussi de ces formes

$$5\nu, \quad 5\nu \pm 1, \quad 5\nu \pm 2;$$

donc la forme $6n$ se réduira à celles-ci

$$30\nu, \quad 30\nu \pm 6, \quad 30\nu \pm 12.$$

Done, si l'on désigne par

$$p-2a, \quad p-a, \quad p, \quad p+a, \quad p+2a,$$

les cinq termes en progression arithmétique qu'on suppose être premiers entre eux, ces termes devront être tous de ces formes

$$30\mu \pm 1, \quad 30\mu \pm 7, \quad 30\mu \pm 11, \quad 30\mu \pm 13,$$

et la différence a ne pourra être que de celles-ci

$$30\nu, \quad 30\nu \pm 6, \quad 30\nu \pm 12.$$

Supposons d'abord p de la forme $30\mu + 1$, et soit, s'il est possible, a de la forme $30\nu \pm 6$, on aura

$$\begin{aligned} p+a &= 30(\mu+\nu)+7 & \text{ou} & \quad 30(\mu+\nu)-5, \\ p+2a &= 30(\mu+2\nu)+13 & \text{ou} & \quad 30(\mu+2\nu)-11, \\ p-a &= 30(\mu-\nu)-5 & \text{ou} & \quad 30(\mu-\nu)+7, \\ p-2a &= 30(\mu-2\nu)-11 & \text{ou} & \quad 30(\mu-2\nu)+13; \end{aligned}$$

d'où l'on voit qu'il est impossible que les cinq nombres

$$p, \quad p+a, \quad p+2a, \quad p-a, \quad p-2a$$

aient à la fois les formes requises.

On trouvera la même impossibilité en prenant les autres formes de p ; d'où l'on conclura d'abord que a ne saurait être de la forme $30\nu \pm 6$; on supposera ensuite $a = 30\nu \pm 12$, et, examinant successivement toutes les formes de p , on verra aussi qu'aucune d'elles ne pourra donner pour les autres nombres

$$p+a, \quad p+2a, \quad p-a, \quad p-2a,$$

les formes requises; d'où il s'ensuit que la différence a ne pourra jamais être ni de la forme $30\nu \pm 6$, ni de celle-ci $30\nu \pm 12$; par conséquent elle devra être nécessairement de la forme 30ν , c'est-à-dire divisible par 30.

Si l'on ne veut pas exclure le nombre 5 de la progression, il est d'abord clair que ce nombre ne pourra être pris que pour le premier terme, puis-

que la différence des termes devant être divisible par 6 ne pourra pas être moindre que 6; or, prenant 5 pour le premier terme, et faisant d'abord la différence égale à $30\gamma \pm 6$, on aura pour le second terme la forme $30\gamma \pm 6 + 5$, ou bien $30\gamma + 11$, ou $30\gamma - 1$; pour le troisième terme les formes $60\gamma \pm 12 + 5$, ou bien $30\gamma - 13$, ou $30\gamma - 7$; pour le quatrième, les formes $90\gamma \pm 18 + 5$, ou bien $30\gamma - 7$, ou $30\gamma - 13$; et pour le cinquième, $120\gamma \pm 24 + 5$, ou bien $30\gamma - 1$, ou $30\gamma + 11$. Ainsi tous les cinq termes auront les formes requises et pourront par conséquent être premiers; mais si l'on voulait y en joindre un sixième, alors on aurait la forme $150\gamma \pm 30 + 5$, qui, étant divisible par 5, ne peut pas donner des nombres premiers. On trouverait des résultats semblables en adoptant la forme $30\gamma \pm 12$ pour la différence de la progression: d'où l'on doit conclure que si 5 est le premier terme de la progression, alors il pourra y avoir cinq nombres premiers en progression arithmétique, et dont la différence ne soit pas divisible par 30, mais qu'il ne pourra jamais y en avoir plus de cinq.

On aura, par exemple, les nombres 5, 11, 17, 23, 29, ou 5, 17, 29, 41, 53, etc.; mais les sixièmes termes 35, 65, etc., ne seraient plus premiers.

3° On peut démontrer par une analyse semblable que, si sept nombres premiers sont en progression arithmétique, leur différence sera nécessairement divisible par 2.3.5.7, à moins que 7 ne soit le premier terme de la progression, auquel cas il ne pourra jamais y avoir plus de sept termes dans une progression dont la différence ne serait pas divisible par 2.3.5.7, et ainsi de suite.

SUR UNE

NOUVELLE ESPÈCE DE CALCUL

RELATIF

A LA DIFFÉRENTIATION ET A L'INTÉGRATION
DES QUANTITÉS VARIABLES.



SUR UNE

NOUVELLE ESPÈCE DE CALCUL

RELATIF

A LA DIFFÉRENTIATION ET A L'INTÉGRATION
DES QUANTITÉS VARIABLES.

(Nouveaux Mémoires de l'Académie royale des Sciences et Belles-Lettres
de Berlin, année 1772.)

Leibnitz a donné, dans le premier volume des *Miscellanea Berolinensia*, un Mémoire intitulé : *Symbolismus memorabilis calculi algebraici, et infinitesimalis in comparatione potentiarum et differentiarum, etc.*, dans lequel il fait voir l'analogie qui règne entre les différentielles de tous les ordres du produit de deux ou de plusieurs variables, et les puissances des mêmes ordres du binôme ou du polynôme composé de la somme de ces mêmes variables. Ce grand Géomètre a aussi remarqué ailleurs que la même analogie subsistait entre les puissances négatives et les intégrales (voyez le *Commercium epistolicum*, Epist. XVIII); mais ni lui ni aucun autre que je sache n'a poussé plus loin ces sortes de recherches, si l'on en excepte seulement M. Jean Bernoulli, qui, dans la Lettre XIV du *Commercium* cité, a montré comment on pouvait dans certains cas trouver l'intégrale d'une différentielle donnée en cherchant la troisième proportionnelle à la différence de la quantité donnée et à cette même quantité, et changeant ensuite les puissances positives en différences, et les négatives en sommes ou intégrales. Quoique le principe de cette analogie entre les

puissances positives et les différentielles, et les puissances négatives et les intégrales, ne soit pas évident par lui-même, cependant, comme les conclusions qu'on en tire n'en sont pas moins exactes, ainsi qu'on peut s'en convaincre *à posteriori*, je vais en faire usage dans ce Mémoire pour découvrir différents Théorèmes généraux concernant les différentiations et les intégrations des fonctions de plusieurs variables, Théorèmes dont la plupart sont nouveaux, et auxquels il serait d'ailleurs très-difficile de parvenir par d'autres voies.

C'est une espèce particulière de calcul qui me paraît mériter d'être cultivée et qui peut donner lieu à beaucoup de découvertes utiles et importantes dans l'Analyse; l'objet principal de ce Mémoire est de donner plusieurs ouvertures pour cela, en montrant les règles qu'on doit suivre dans ce calcul et la manière de l'appliquer à différentes recherches; mais je crois devoir commencer par établir quelques notions générales et préliminaires sur la nature des fonctions d'une ou de plusieurs variables, lesquelles pourraient servir d'introduction à une théorie générale des fonctions.

1. Si u est une fonction quelconque finie d'une variable x , qu'on y mette $x + \xi$ à la place de x , et que par la théorie connue des séries on dégage la nouvelle variable ξ de la fonction, on sait que u deviendra de cette forme

$$u + p\xi + p'\xi^2 + p''\xi^3 + p'''\xi^4 + \dots,$$

où $p, p', p'', \dots$ seront de nouvelles fonctions de x , dérivées d'une certaine manière de la fonction u .

2. Si u est une fonction de deux variables x, y , qu'on y mette $x + \xi$ à la place de x , $y + \psi$ à la place de y , qu'ensuite on dégage les quantités ξ, ψ par le moyen des séries, la fonction u deviendra de la forme

$$\begin{aligned} & u + p\xi + q\psi \\ & + p'\xi^2 + q'\xi\psi + r'\psi^2 \\ & + p''\xi^3 + q''\xi^2\psi + r''\xi\psi^2 + s''\psi^3 \\ & \dots \end{aligned}$$

où $p, q, p', q', r', p'', q'', \dots$ seront de nouvelles fonctions de x, y dérivées d'une certaine manière de la fonction u .

De même, si u était fonction de trois variables x, y, z , en mettant $x + \xi, y + \psi, z + \zeta$ à la place de x, y, z , et développant par les séries, cette fonction deviendrait de la forme

$$\begin{aligned} & u + p\xi + q\psi + r\zeta \\ & + p'\xi^2 + q'\xi\psi + r'\psi^2 + \alpha'\xi\zeta + \beta'\psi\zeta + \gamma'\zeta^2 \\ & + p''\xi^3 + q''\xi^2\psi + r''\xi\psi^2 + s''\psi^3 + \alpha''\xi\zeta^2 + \dots \\ & \dots \end{aligned}$$

et ainsi de suite, si la fonction u renfermait quatre variables, ou cinq, etc.

3. Le Calcul différentiel, considéré dans toute sa généralité, consiste à trouver directement, et par des procédés simples et faciles, les fonctions $p, p', p'', \dots, q, q', q'', \dots, r, r', r'', \dots$ dérivées de la fonction u ; et le Calcul intégral consiste à retrouver la fonction u par le moyen de ces dernières fonctions.

Cette notion des Calculs différentiel et intégral me paraît la plus claire et la plus simple qu'on ait encore donnée; elle est, comme on voit, indépendante de toute métaphysique et de toute théorie des quantités infiniment petites ou évanouissantes.

4. Considérons plus particulièrement le cas du n° 1, où u est supposé une fonction de x seul, et voyons comment les fonctions $u, p, p', p'', \dots$ dépendent les unes des autres.

Puisque la fonction u , en y mettant $x + \xi$ à la place de x , est devenue

$$u + p\xi + p'\xi^2 + p''\xi^3 + \dots,$$

si dans cette dernière fonction on met de nouveau $x + \omega$ à la place de x , il est clair qu'elle deviendra de la forme

$$\begin{aligned} & u + p\omega + p'\omega^2 + p''\omega^3 + p'''\omega^4 + \dots \\ & + (p + p'\omega + p''\omega^2 + p'''\omega^3 + \dots)\xi \\ & + (p' + p''\omega + p'''\omega^2 + p''''\omega^3 + \dots)\xi^2 \\ & + (p'' + p'''\omega + p''''\omega^2 + p'''''\omega^3 + \dots)\xi^3 \\ & \dots \end{aligned}$$

où $\varpi, \rho, \sigma, \dots$ seront des fonctions de x dérivées de la fonction p de la même manière que $p, p', p'', \dots$ le sont de la fonction u , et $\varpi', \rho', \sigma', \dots$ seront des fonctions dérivées de même de la fonction p' , et $\varpi'', \rho'', \sigma'', \dots$ des fonctions dérivées de p'' , et ainsi des autres.

D'un autre côté, il est facile de voir que l'expression précédente ne sera autre chose que ce que devient la fonction u en y mettant à la fois $x + \xi + \omega$ à la place de x , ou bien ce que devient l'expression

$$u + p\xi + p'\xi^2 + p''\xi^3 + p'''\xi^4 + \dots$$

en y mettant $\xi + \omega$ à la place de ξ , c'est-à-dire

$$u + p(\xi + \omega) + p'(\xi + \omega)^2 + p''(\xi + \omega)^3 + \dots$$

Or, en développant les puissances de $\xi + \omega$ et ordonnant les termes, on aura

$$\begin{aligned} & u + p\omega + p'\omega^2 + p''\omega^3 + p'''\omega^4 + \dots \\ & + (p + 2p'\omega + 3p''\omega^2 + 4p'''\omega^3 + \dots)\xi \\ & + (p' + 3p''\omega + 6p'''\omega^2 + 10p''''\omega^3 + \dots)\xi^2 \\ & + (p'' + 4p'''\omega + 10p''''\omega^2 + 20p'''''\omega^3 + \dots)\xi^3 \\ & \dots \dots \dots \end{aligned}$$

Donc, comme cette formule doit être identique avec la précédente, on aura

$$\begin{aligned} \varpi &= 2p', & \rho &= 3p'', & \sigma &= 4p''', \dots, \\ \varpi' &= 3p'', & \rho' &= 6p''', & \sigma' &= 10p''', \dots, \\ \varpi'' &= 4p''', & \rho'' &= 10p''', & \sigma'' &= 20p''', \dots, \\ & \dots, & \dots, & \dots, & \dots \end{aligned}$$

Donc

$$p' = \frac{\varpi}{2}, \quad p'' = \frac{\varpi'}{3}, \quad p''' = \frac{\varpi''}{4}, \dots$$

Or, de la même manière que p est dérivé de u , ϖ l'est de p , ϖ' l'est de p' , ϖ'' l'est de p'' , et ainsi de suite; donc, si l'on fait $p = u'$, et qu'on désigne de même par u'' une fonction dérivée de u' de la même manière que u' l'est de u , et par u''' une fonction dérivée de même de u'' , et ainsi de suite, on

aura

$$\begin{aligned} p &= u', & \varpi &= u'', & \text{donc } p' &= \frac{u''}{2}, \\ \text{donc } \varpi' &= \frac{u'''}{2}, & \text{donc } p'' &= \frac{u'''}{2.3}, \\ \text{donc } \varpi'' &= \frac{u''''}{2.3}, & \text{donc } p''' &= \frac{u''''}{2.3.4}, \\ & \dots, & & \dots \end{aligned}$$

Ainsi la fonction u deviendra, en mettant $x + \xi$ à la place de x ,

$$u + u'\xi + \frac{u''\xi^2}{2} + \frac{u'''\xi^3}{2.3} + \frac{u'''\xi^4}{2.3.4} + \dots$$

où les fonctions $u, u', u'', u''', u''', \dots$ dérivent l'une de l'autre par une même loi, de sorte qu'on pourra les trouver aisément par une même opération répétée.

5. Si maintenant on suppose que u soit une fonction de deux variables x et y , et qu'on cherche ce qu'elle devient en y mettant à la fois $x + \xi$ à la place de x et $y + \psi$ à la place de y , on fera d'abord la première de ces deux substitutions, ce qui réduira la fonction u à celle-ci (4)

$$u + u'\xi + \frac{u''\xi^2}{2} + \frac{u'''\xi^3}{2.3} + \dots$$

ensuite on fera la substitution de $y + \psi$ à la place de y dans les fonctions $u, u', u'', u''', \dots$, et elles se changeront, savoir

$$\begin{aligned} u & \text{ en } u + u'\psi + \frac{u''\psi^2}{2} + \frac{u'''\psi^3}{2.3} + \dots, \\ u' & \text{ en } u' + u''\psi + \frac{u'''\psi^2}{2} + \frac{u''''\psi^3}{2.3} + \dots, \\ u'' & \text{ en } u'' + u'''\psi + \frac{u''''\psi^2}{2} + \frac{u'''''\psi^3}{2.3} + \dots, \\ & \dots \end{aligned}$$

Ainsi la fonction u deviendra, après les deux substitutions dont il s'agit,

$$u + u' \xi + u'' \psi \\ + \frac{u'' \xi^2}{2} + \frac{u' \psi \xi}{1.1} + \frac{u'' \psi^2}{2} \\ + \frac{u''' \xi^3}{2.3} + \frac{u'' \psi \xi^2}{2.1} + \frac{u' \psi^2 \xi}{1.2} + \frac{u''' \psi^3}{2.3} \\ \dots\dots\dots$$

Les accents qui sont avant la virgule se rapportent au changement de x en $x + \xi$, et ceux qui sont après la virgule se rapportent au changement de y en $y + \psi$.

En général, si u est une fonction de $x, y, z, t, \dots$ et qu'on y mette, à la place de ces variables, $x + \xi, y + \psi, z + \zeta, t + \theta, \dots$, la fonction dont il s'agit deviendra u plus un nombre indéfini de termes, tels que

$$\frac{u^{(\mu)}(x), (y), (z), (t), \dots \xi^\mu \psi^\nu \zeta^\omega \theta^\rho \dots}{1.2.3 \dots \mu \times 1.2.3 \dots \nu \times 1.2.3 \dots \omega \times 1.2.3 \dots \rho \times \dots},$$

μ, ν, ω, ρ étant supposés successivement 0, 1, 2, 3,

6. Puisqu'en mettant $x + \xi$ à la place de x dans u , cette fonction devient

$$u + u' \xi + \frac{u'' \xi^2}{2} + \frac{u''' \xi^3}{2.3} + \dots,$$

si l'on regarde ξ comme infiniment petit et qu'on néglige les puissances $\xi^2, \xi^3, \dots$, on aura simplement $u' \xi$ pour l'accroissement de u ; de sorte que, désignant cet accroissement par du , et l'accroissement ξ de x par dx , on aura

$$du = u' dx \quad \text{et} \quad u' = \frac{du}{dx};$$

ainsi, pour avoir la fonction u' , il n'y aura qu'à chercher la différentielle du par les règles du calcul des infiniment petits, et la diviser ensuite par la différentielle dx .

Ayant $u' = \frac{du}{dx}$, on aura de même

$$u'' = \frac{d}{dx} \frac{du}{dx} = \frac{d^2 u}{dx^2}, \quad u''' = \frac{d}{dx} \frac{d^2 u}{dx^2} = \frac{d^3 u}{dx^3}, \dots;$$

de sorte que x devenant $x + \xi$, la fonction u deviendra

$$u + \frac{du}{dx} \xi + \frac{d^2 u}{dx^2} \frac{\xi^2}{2} + \frac{d^3 u}{dx^3} \frac{\xi^3}{2.3} + \dots,$$

où $du, d^2 u, d^3 u, \dots$ désignent les différences première, seconde, troisième, etc., de u prises en faisant varier x de la différence infiniment petite dx .

Ce Théorème est connu depuis longtemps, et M. Taylor en est, si je ne me trompe, le premier Auteur; on peut le démontrer de différentes manières; la précédente me paraît une des plus simples.

7. Si, au lieu de faire varier x , on fait varier y dans la supposition que u soit une fonction de x et de y , on aura de même

$$du = u' dy,$$

et de là

$$u' = \frac{du}{dy},$$

done

$$u'' = \frac{d^2 u}{dy^2}, \quad u''' = \frac{d^3 u}{dy^3}, \dots$$

Par le même principe on aura

$$u'' = \frac{du'}{dy} = \frac{d}{dy} \frac{du}{dx} = \frac{d^2 u}{dx dy},$$

où $d^2 u$ indique la différentielle seconde de u , en faisant varier d'abord x , ensuite y ; or, comme les variations de x et de y sont indépendantes l'une de l'autre, il est facile de comprendre qu'on aura également

$$u'' = \frac{du'}{dx} = \frac{d}{dx} \frac{du}{dy} = \frac{d^2 u}{dy dx},$$

où d^2u exprime maintenant la différentielle seconde de u prise en faisant varier d'abord y et ensuite x , de sorte qu'on aura

$$\frac{d^2u}{dx dy} = \frac{d^2u}{dy dx},$$

ce qui montre qu'il est indifférent dans quel ordre soient écrites les différences dx, dy . En général donc on aura

$$u^{(\mu), (\nu)} = \frac{d^{\mu+\nu}u}{dx^\mu dy^\nu},$$

où $d^{\mu+\nu}u$ indiquera la différentielle $(\mu+\nu)^{\text{ième}}$ de u prise en faisant varier μ fois x et ν fois y , quelque ordre qu'on suive d'ailleurs dans ces variations; de sorte qu'il y aura autant de manières différentes de trouver la valeur de $\frac{d^{\mu+\nu}u}{dx^\mu dy^\nu}$ qu'il y aura de permutations entre deux choses différentes répétées l'une μ fois, l'autre ν fois; or le nombre de ces permutations est, comme on sait, égal à

$$\frac{1.2.3\dots(\mu+\nu)}{1.2.3\dots\mu \times 1.2.3\dots\nu}.$$

Et si u est une fonction de plusieurs variables $x, y, z, t, \dots$, on aura

$$u^{(\mu), (\nu), (\pi), (\rho), \dots} = \frac{d^{\mu+\nu+\pi+\rho+\dots}u}{dx^\mu dy^\nu dz^\pi dt^\rho \dots},$$

et cette fonction pourra se produire d'autant de manières différentes qu'il y aura de permutations entre différentes choses dont l'une serait répétée μ fois, l'autre ν fois, la troisième π fois, la quatrième ρ fois, etc.; en sorte que par les règles connues le nombre dont il s'agit sera

$$\frac{1.2.3.4.5\dots(\mu+\nu+\pi+\rho+\dots)}{1.2.3\dots\mu \times 1.2.3\dots\nu \times 1.2.3\dots\pi \times 1.2.3\dots\rho \times \dots},$$

lequel est aussi le coefficient du terme $x^\mu y^\nu z^\pi t^\rho \dots$ dans la puissance

$$(x+y+z+t+\dots)^{\mu+\nu+\pi+\rho+\dots}$$

8. De là et de ce qu'on a dit dans le n° 5 il s'ensuit que, si dans une fonction u d'un nombre quelconque de variables $x, y, z, t, \dots$ on met $x+\xi, y+\psi, z+\zeta, t+\theta, \dots$ à la place de ces variables, la fonction proposée sera augmentée d'un nombre indéfini de termes représentés chacun par

$$\frac{\xi^\mu \psi^\nu \zeta^\pi \theta^\rho \dots}{1.2.3\dots\mu \times 1.2.3\dots\nu \times 1.2.3\dots\pi \times 1.2.3\dots\rho \times \dots} \times \frac{d^{\mu+\nu+\pi+\rho+\dots}u}{dx^\mu dy^\nu dz^\pi dt^\rho \dots},$$

ou, ce qui revient au même, par

$$\frac{M \xi^\mu \psi^\nu \zeta^\pi \theta^\rho \dots}{1.2.3\dots(\mu+\nu+\pi+\rho+\dots)} \times \frac{d^{\mu+\nu+\pi+\rho+\dots}u}{dx^\mu dy^\nu dz^\pi dt^\rho \dots},$$

M étant le coefficient du terme $x^\mu y^\nu z^\pi t^\rho \dots$ dans le polynôme

$$x+y+z+t+\dots$$

élevé à la puissance

$$\mu+\nu+\pi+\rho+\dots$$

Ainsi, pour avoir aisément les différents termes qui doivent composer l'accroissement de la valeur de la fonction u lorsque $x, y, z, t, \dots$ deviennent $x+\xi, y+\psi, z+\zeta, t+\theta, \dots$, il n'y aura qu'à considérer la série

$$\begin{aligned} & \frac{x+y+z+t+\dots}{1} \\ & + \frac{(x+y+z+t+\dots)^2}{1.2} \\ & + \frac{(x+y+z+t+\dots)^3}{1.2.3} \\ & \dots \dots \dots \end{aligned}$$

et, après avoir développé les puissances de $x+y+z+t+\dots$, on changera, dans chaque terme, x en $\frac{\xi}{dx}$, y en $\frac{\psi}{dy}$, z en $\frac{\zeta}{dz}$, t en $\frac{\theta}{dt}$, etc., et l'on multipliera le même terme par d^2u , l'exposant de la différentiation λ étant égal à la somme des exposants de $x, y, z, t, \dots$ dans le même terme.

Or on sait que

$$\begin{aligned} & \frac{x+y+z+t+\dots}{1} + \frac{(x+y+z+t+\dots)^2}{1.2} + \frac{(x+y+z+t+\dots)^3}{1.2.3} + \dots \\ &= e^{x+y+z+t+\dots} - 1 = e^x \times e^y \times e^z \times e^t \times \dots - 1 \\ &= \left(1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3}{1.2.3} + \dots\right) \times \left(1 + \frac{y}{1} + \frac{y^2}{1.2} + \frac{y^3}{1.2.3} + \dots\right) \\ &\times \left(1 + \frac{z}{1} + \frac{z^2}{1.2} + \frac{z^3}{1.2.3} + \dots\right) \times \left(1 + \frac{t}{1} + \frac{t^2}{1.2} + \frac{t^3}{1.2.3} + \dots\right) \dots - 1. \end{aligned}$$

Par conséquent il n'y aura qu'à faire le produit de ces différentes séries et changer ensuite chaque terme comme nous l'avons dit ci-dessus.

9. De là il est facile de conclure que si l'on considère l'expression

$$e^{\frac{du}{dx} + \frac{du}{dy} + \frac{du}{dz} + \dots} - 1$$

et qu'après l'avoir développée suivant les puissances de du , on applique les exposants de ces puissances à la caractéristique d pour indiquer des différences du même ordre que les puissances, c'est-à-dire qu'on change du^3 en d^3u , on aura l'accroissement cherché de la fonction u lorsque $x, y, z, \dots$ y deviennent $x + \xi, y + \psi, z + \zeta, \dots$

Ainsi dénotant cet accroissement par Δu , on aura la formule générale

$$\Delta u = e^{\frac{du}{dx} + \frac{du}{dy} + \frac{du}{dz} + \dots} - 1.$$

10. Maintenant, comme Δu exprime la différence première finie de u , si l'on dénote de même par $\Delta^2 u, \Delta^3 u, \dots$ les différences finies de u des ordres ultérieurs, on pourra trouver la valeur de chacune de ces différences en ne faisant qu'élever l'équation précédente au carré, au cube, etc., et y changeant ensuite les exposants des puissances en exposants des différences.

De cette manière on aura donc, en général,

$$\Delta^\lambda u = \left(e^{\frac{du}{dx} + \frac{du}{dy} + \frac{du}{dz} + \dots} - 1 \right)^\lambda,$$

et il ne s'agira plus que de développer le second membre de cette équation de la manière que nous l'avons dit à l'égard de celle du numéro précédent.

Mais il y a plus : on peut supposer que l'exposant λ devienne négatif, auquel cas l'équation subsistera également si ce n'est que les différences qui auront un exposant négatif devront être censées changées en sommes du même ordre. Ainsi désignant, comme à l'ordinaire, par $\int$ les sommes ou les intégrales ordinaires, qui répondent aux différences infiniment petites marquées par la caractéristique d , et par $\sum$ les sommes finies qui répondent aux différences finies marquées par la caractéristique Δ , on aura

$$d^{-1} = \int, \quad d^{-2} = \int^2, \dots,$$

et de même

$$\Delta^{-1} = \sum, \quad \Delta^{-2} = \sum^2, \dots,$$

et l'équation précédente deviendra, en faisant λ négatif, ou bien mettant $-\lambda$ à la place de λ , et par conséquent $\sum^\lambda$ à la place de Δ^λ ,

$$\sum^\lambda u = \frac{1}{\left(e^{\frac{du}{dx} + \frac{du}{dy} + \frac{du}{dz} + \dots} - 1 \right)^\lambda}.$$

On traitera le second membre de cette équation d'une manière semblable à celle que nous avons prescrite ci-dessus.

Quoique l'opération, par laquelle nous avons passé de la différence Δu à la différence $\Delta^\lambda u$ et à la somme $\sum^\lambda u$, ne soit pas fondée sur des principes clairs et rigoureux, elle n'en est cependant pas moins exacte, comme on peut s'en assurer *à posteriori*; mais il serait peut-être très-difficile d'en donner une démonstration directe et analytique; cela tient, en général, à l'analogie qu'il y a entre les puissances positives et les différen-

tations, aussi bien qu'entre les puissances négatives et les intégrations; analogie dont nous verrons encore d'autres exemples dans la suite de ce Mémoire.

11. Supposons que u soit une fonction de x seul, on aura dans ce cas

$$\frac{du}{dy} = 0, \quad \frac{du}{dz} = 0, \dots$$

par conséquent

$$\Delta^2 u = \left(\frac{du}{dx} - 1 \right)^2.$$

Considérons donc l'expression $(e^u - 1)^2$, et voyons comment elle peut se développer en une série réglée sur les puissances de ω . Il est d'abord clair que, si l'on fait ω très-petit, on aura $e^u - 1 = \omega$, d'où il s'ensuit que le premier terme de la série sera nécessairement ω^2 . Supposons donc

$$(e^u - 1)^2 = \omega^2 (1 + A\omega + B\omega^2 + C\omega^3 + D\omega^4 + \dots),$$

et, prenant les logarithmes de part et d'autre, on aura

$$2 \log(e^u - 1) - 2 \log \omega = \log(1 + A\omega + B\omega^2 + C\omega^3 + D\omega^4 + \dots),$$

et différentiant

$$2 \left(\frac{e^u}{e^u - 1} - \frac{1}{\omega} \right) = \frac{A + 2B\omega + 3C\omega^2 + 4D\omega^3 + \dots}{1 + A\omega + B\omega^2 + C\omega^3 + D\omega^4 + \dots};$$

or

$$\frac{e^u}{e^u - 1} = \frac{1}{1 - e^{-u}} = \frac{1}{\omega - \frac{\omega^2}{2} + \frac{\omega^3}{2 \cdot 3} - \frac{\omega^4}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \dots},$$

done, substituant cette valeur et multipliant en croix, on aura

$$\begin{aligned} & 2 \left(\frac{1}{\omega} - \frac{\omega}{2 \cdot 3} + \frac{\omega^2}{2 \cdot 3 \cdot 4} - \dots \right) (1 + A\omega + B\omega^2 + C\omega^3 + \dots) \\ &= \left(1 - \frac{\omega}{2} + \frac{\omega^2}{2 \cdot 3} - \frac{\omega^3}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \dots \right) (A + 2B\omega + 3C\omega^2 + \dots), \end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$\begin{aligned} & \frac{\lambda}{2} + \lambda \left(\frac{A}{2} - \frac{1}{2 \cdot 3} \right) \omega + \lambda \left(\frac{B}{2} - \frac{A}{2 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} \right) \omega^2 \\ &+ \lambda \left(\frac{C}{2} - \frac{B}{2 \cdot 3} + \frac{A}{2 \cdot 3 \cdot 4} - \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} \right) \omega^3 + \dots \\ &= A + \left(2B - \frac{A}{2} \right) \omega + \left(3C - \frac{2B}{2} + \frac{A}{2 \cdot 3} \right) \omega^2 \\ &+ \left(4D - \frac{3C}{2} + \frac{2B}{2 \cdot 3} - \frac{A}{2 \cdot 3 \cdot 4} \right) \omega^3 + \dots \end{aligned}$$

d'où, en comparant les termes, on aura

$$\begin{aligned} A &= \frac{\lambda}{2}, \\ 2B &= \frac{(\lambda + 1)A}{2} - \frac{\lambda}{2 \cdot 3}, \\ 3C &= \frac{(\lambda + 2)B}{2} - \frac{(\lambda + 1)A}{2 \cdot 3} + \frac{\lambda}{2 \cdot 3 \cdot 4}, \\ 4D &= \frac{(\lambda + 3)C}{2} - \frac{(\lambda + 2)B}{2 \cdot 3} + \frac{(\lambda + 1)A}{2 \cdot 3 \cdot 4} - \frac{\lambda}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}, \\ &\dots \end{aligned}$$

Ayant ainsi déterminé les coefficients $A, B, C, \dots$, on mettra $\frac{du}{dx} \xi$ à la place de ω , et changeant les puissances de du en des différentielles de u , on aura, en général,

$$\Delta^2 u = \frac{d^2 u}{dx^2} \xi^2 + A \frac{d^{2+\lambda} u}{dx^{2+\lambda}} \xi^{2+\lambda} + B \frac{d^{2+2\lambda} u}{dx^{2+2\lambda}} \xi^{2+2\lambda} + C \frac{d^{2+3\lambda} u}{dx^{2+3\lambda}} \xi^{2+3\lambda} + \dots$$

Cette formule servira donc à trouver immédiatement la différence d'un ordre quelconque d'une fonction quelconque de x lorsque x augmente successivement de $\xi, 2\xi, 3\xi, \dots$, et cela au moyen des différentielles ordinaires: ce qui peut être d'une grande utilité dans la théorie des séries.

Faisons maintenant λ négatif, c'est-à-dire mettons $-\lambda$ à la place de λ , pour changer les différences en sommes, et l'on aura dans ce cas

$$\sum^{\lambda} u = \int_{\xi^{\lambda}}^{\lambda} u dx^{\lambda} - \alpha \int_{\xi^{\lambda-1}}^{\lambda-1} u dx^{\lambda-1} + \beta \int_{\xi^{\lambda-2}}^{\lambda-2} u dx^{\lambda-2} - \gamma \int_{\xi^{\lambda-3}}^{\lambda-3} u dx^{\lambda-3} + \dots,$$

où

$$\begin{aligned}\alpha &= \frac{\lambda}{2}, \\ 2\beta &= \frac{(\lambda-1)\alpha}{2} + \frac{\lambda}{2.3}, \\ 3\gamma &= \frac{(\lambda-2)\beta}{2} + \frac{(\lambda-1)\alpha}{2.3} + \frac{\lambda}{2.3.4}, \\ 4\delta &= \frac{(\lambda-3)\gamma}{2} + \frac{(\lambda-2)\beta}{2.3} + \frac{(\lambda-1)\alpha}{2.3.4} + \frac{\lambda}{2.3.4.5}, \\ &\dots\end{aligned}$$

Si $\lambda = 1$, on aura donc

$$\sum u = \frac{\int u dx}{x} - \alpha u + \beta \frac{du}{dx} x - \gamma \frac{d^2 u}{dx^2} x^2 + \delta \frac{d^3 u}{dx^3} x^3 - \dots,$$

parce que

$$\int^{\infty-1} u dx^{n-1} = \frac{du}{dx}, \quad \int^{\infty-1} u dx^{n-2} = \frac{d^2 u}{dx^2}, \dots,$$

C'est la formule connue pour trouver la somme d'une série dont on connaît le terme général.

En effet soit $u = \varphi(x)$, on aura, par la nature des sommations,

$$\sum u = \varphi(x-\xi) + \varphi(x-2\xi) + \dots;$$

done, si suivant la notation reçue on fait

$$\int \varphi(x) dx = \psi(x), \quad \frac{d\varphi(x)}{dx} = \varphi'(x), \quad \frac{d^2 \varphi(x)}{dx^2} = \varphi''(x), \dots,$$

on aura

$$\begin{aligned}\varphi(x-\xi) + \varphi(x-2\xi) + \varphi(x-3\xi) + \dots \\ = \frac{\psi(x)}{\xi} - \alpha \varphi(x) + \beta \varphi'(x) \cdot \xi - \gamma \varphi''(x) \cdot \xi^2 + \dots\end{aligned}$$

Si maintenant dans cette formule on écrit $x - n\xi$ à la place de x , on

aura de même

$$\begin{aligned}\varphi[x - (n+1)\xi] + \varphi[x - (n+2)\xi] + \dots \\ = \frac{\psi(x - n\xi)}{\xi} - \alpha \varphi(x - n\xi) + \beta \varphi'(x - n\xi) \cdot \xi - \gamma \varphi''(x - n\xi) \cdot \xi^2 + \dots\end{aligned}$$

Donc, retranchant cette équation de la précédente, il viendra

$$\begin{aligned}\varphi(x-\xi) + \varphi(x-2\xi) + \varphi(x-3\xi) + \dots + \varphi(x-n\xi) \\ = \frac{\psi(x) - \psi(x-n\xi)}{\xi} - \alpha [\varphi(x) - \varphi(x-n\xi)] \\ + \beta \xi [\varphi'(x) - \varphi'(x-n\xi)] - \gamma \xi^2 [\varphi''(x) - \varphi''(x-n\xi)] + \dots\end{aligned}$$

Nous ne nous étendrons pas en détails sur cette matière parce qu'elle a déjà été traitée dans différents Ouvrages, et surtout dans le *Traité des Fluxions* de M. Maclaurin, et dans les *Institutions du Calcul différentiel* de M. Euler; on trouve dans ce dernier Ouvrage des Remarques curieuses et importantes sur la nature et les propriétés des nombres $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ dans le cas de $\lambda = 1$; mais personne que je sache n'avait encore donné l'expression générale de ces nombres pour les différences et les sommes d'un ordre quelconque.

12. Reprenons l'équation du n° 10, savoir

$$\Delta u = e^{\frac{du}{dx} + \frac{du}{dy} + \frac{du}{dz} + \dots} - 1;$$

elle donnera celle-ci

$$\frac{du}{dx} \xi + \frac{du}{dy} \psi + \frac{du}{dz} \zeta + \dots = \log(1 + \Delta u),$$

où il faudra, après avoir développé le logarithme $\log(1 + \Delta u)$ suivant les puissances de Δu , appliquer les exposants de ces puissances à la caractéristique Δ . De cette manière on aura donc

$$\frac{du}{dx} \xi + \frac{du}{dy} \psi + \frac{du}{dz} \zeta + \dots = \Delta u - \frac{\Delta^2 u}{2} + \frac{\Delta^3 u}{3} - \frac{\Delta^4 u}{4} + \dots,$$

ce qui donne un moyen de trouver les valeurs de $\frac{du}{dx}, \frac{du}{dy}, \dots$ à l'aide des différences finies de la fonction u .

Mais ce n'est pas tout : on peut également élever les deux membres de l'équation à une puissance quelconque λ , positive ou négative, en sorte qu'on ait

$$\left(\frac{du}{dx}z + \frac{du}{dy}\psi + \frac{du}{dz}\zeta + \dots\right)^\lambda = [\log(1 + \Delta u)]^\lambda,$$

et cette équation sera toujours vraie pourvu qu'après le développement des deux membres suivant les puissances de du et de Δu , on change les puissances positives en différences, et les négatives en sommes.

Pour cet effet, considérons la quantité $[\log(1 + \omega)]^\lambda$, et voyons comment elle peut se développer en une série qui procède suivant les puissances de ω . Il est d'abord clair que si ω était très-petit, on aurait $\log(1 + \omega) = \omega$, d'où il s'ensuit que le premier terme de la série dont il s'agit sera ω^λ , et qu'ainsi elle aura cette forme

$$\omega^\lambda(1 + M\omega + N\omega^2 + P\omega^3 + Q\omega^4 + \dots).$$

Supposons donc

$$[\log(1 + \omega)]^\lambda = \omega^\lambda(1 + M\omega + N\omega^2 + P\omega^3 + \dots),$$

et, prenant les logarithmes de part et d'autre, on aura

$$\lambda[\log.\log(1 + \omega) - \log\omega] = \log(1 + M\omega + N\omega^2 + P\omega^3 + \dots),$$

d'où l'on tirera par la différentiation

$$\lambda \left[\frac{1}{(1 + \omega)\log(1 + \omega)} - \frac{1}{\omega} \right] = \frac{M + 2N\omega + 3P\omega^2 + 4Q\omega^3 + \dots}{1 + M\omega + N\omega^2 + P\omega^3 + Q\omega^4 + \dots}.$$

Or

$$\log(1 + \omega) = \omega - \frac{\omega^2}{2} + \frac{\omega^3}{3} - \frac{\omega^4}{4} + \dots;$$

donc, multipliant cette série par $1 + \omega$, on aura

$$(1 + \omega)\log(1 + \omega) = \omega + \frac{\omega^2}{2} - \frac{\omega^3}{2.3} + \frac{\omega^4}{3.4} - \frac{\omega^5}{4.5} + \dots,$$

donc, substituant cette valeur et multipliant en croix, il viendra

$$\begin{aligned} & \lambda \left(-\frac{1}{2} + \frac{\omega}{2.3} - \frac{\omega^2}{3.4} + \dots \right) (1 + M\omega + N\omega^2 + P\omega^3 + \dots) \\ &= \left(1 + \frac{\omega}{2} - \frac{\omega^2}{2.3} + \frac{\omega^3}{3.4} - \dots \right) (M + 2N\omega + 3P\omega^2 + \dots), \end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$\begin{aligned} & -\frac{\lambda}{2} + \lambda \left(-\frac{M}{2} + \frac{1}{2.3} \right) \omega + \lambda \left(-\frac{N}{2} + \frac{M}{2.3} - \frac{1}{3.4} \right) \omega^2 \\ & + \lambda \left(-\frac{P}{2} + \frac{N}{2.3} - \frac{M}{3.4} + \frac{1}{4.5} \right) \omega^3 + \dots \\ &= M + \left(2N + \frac{M}{2} \right) \omega + \left(3P + \frac{2N}{2} - \frac{M}{2.3} \right) \omega^2 \\ & + \left(4Q + \frac{3P}{2} - \frac{2N}{2.3} + \frac{M}{3.4} \right) \omega^3 + \dots \end{aligned}$$

De sorte qu'en comparant les termes on aura

$$M = -\frac{\lambda}{2},$$

$$2N = -\frac{(\lambda + 1)M}{2} + \frac{\lambda}{2.3},$$

$$3P = -\frac{(\lambda + 2)N}{2} + \frac{(\lambda + 1)M}{2.3} - \frac{\lambda}{3.4},$$

$$4Q = -\frac{(\lambda + 3)P}{2} + \frac{(\lambda + 2)N}{2.3} - \frac{(\lambda + 1)M}{3.4} + \frac{\lambda}{4.5},$$

Connaissant de cette manière les coefficients numériques $M, N, P, \dots$, on aura donc

$$[\log(1 + \Delta u)]^\lambda = \Delta^\lambda u + M\Delta^{\lambda+1}u + N\Delta^{\lambda+2}u + \dots,$$

ce qu'il faudra substituer dans l'équation ci-dessus.

13. Soit, comme dans le n° 11, u une fonction de x seul : alors l'équation dont il s'agit deviendra

$$\left(\frac{du}{dx}z\right)^\lambda = [\log(1 + \Delta u)]^\lambda,$$

savoir

$$\frac{d^{\lambda} u}{dx^{\lambda}} \xi^{\lambda} = \Delta^{\lambda} u + M \Delta^{\lambda+1} u + N \Delta^{\lambda+2} u + P \Delta^{\lambda+3} u + \dots,$$

ce qui donne le moyen de trouver la valeur de la différentielle d'un ordre quelconque de la fonction u à l'aide des différences finies de la même fonction.

Or, si dans la même formule on fait λ négatif, c'est-à-dire si l'on y met $-\lambda$ à la place de λ , on aura, en changeant les différences en sommes,

$$\frac{\int u dx^{\lambda}}{\xi^{\lambda}} = \sum u + \mu \sum^{1-1} u + \nu \sum^{2-2} u + \varpi \sum^{3-3} u + \dots,$$

où les coefficients $\mu, \nu, \varpi, \dots$ seront déterminés par les formules suivantes

$$\begin{aligned} \mu &= \frac{\lambda}{2}, \\ 2\nu &= \frac{(\lambda-1)\mu}{2} - \frac{\lambda}{2 \cdot 3}, \\ 3\varpi &= \frac{(\lambda-2)\nu}{2} - \frac{(\lambda-1)\mu}{2 \cdot 3} + \frac{\lambda}{3 \cdot 4}, \\ 4\chi &= \frac{(\lambda-3)\varpi}{2} - \frac{(\lambda-2)\nu}{2 \cdot 3} + \frac{(\lambda-1)\mu}{3 \cdot 4} - \frac{\lambda}{4 \cdot 5}, \\ &\dots \end{aligned}$$

Si l'on fait $\lambda = 1$, on aura donc

$$\frac{\int u dx}{\xi} = \sum u + \mu u + \nu \Delta u + \varpi \Delta^2 u + \chi \Delta^3 u + \dots,$$

formule qui peut servir à calculer les aires des courbes par les sommes et les différences des coordonnées équidistantes. Cotes, Stirling et d'autres ont déjà donné des formules pour calculer l'aire d'une courbe dont on connaît un certain nombre de coordonnées équidistantes; mais la formule précédente est différente de celles de ces Auteurs, et me paraît préférable en ce qu'on y emploie les différences successives des coordonnées, lesquelles vont ordinairement en diminuant, et surtout en ce qu'on y voit aisément la loi des termes, de manière qu'on peut continuer la série aussi loin qu'on veut.

Pour donner un exemple de l'usage de cette formule, soit proposé de trouver l'intégrale de $\frac{dx}{x}$, qu'on sait d'ailleurs être égale à $\log x$; on aura donc dans ce cas $u = \frac{1}{x}$, et faisant, pour plus de simplicité, $\xi = 1$, on aura

$$\log x = \sum \frac{1}{x} + \mu \frac{1}{x} + \nu \Delta \frac{1}{x} + \varpi \Delta^2 \frac{1}{x} + \chi \Delta^3 \frac{1}{x} + \dots$$

Or puisque $\xi = 1$, on aura

$$\sum \frac{1}{x} = \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x-2} + \frac{1}{x-3} + \dots,$$

$$\Delta \frac{1}{x} = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x} = -\frac{1}{x(x+1)},$$

$$\Delta^2 \frac{1}{x} = -\frac{1}{(x+1)(x+2)} + \frac{1}{x(x+1)} = \frac{2}{x(x+1)(x+2)},$$

$$\Delta^3 \frac{1}{x} = \frac{2}{(x+1)(x+2)(x+3)} - \frac{2}{x(x+1)(x+2)} = -\frac{2 \cdot 3}{x(x+1)(x+2)(x+3)},$$

et, en général,

$$\Delta^{\lambda} \frac{1}{x} = \pm \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots \lambda}{x(x+1)(x+2) \dots (x+\lambda)},$$

le signe supérieur étant pour le cas où λ est pair, et l'inférieur pour le cas où λ est impair.

Done, substituant ces valeurs, on aura

$$\begin{aligned} \log x &= \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x-2} + \frac{1}{x-3} + \dots \\ &+ \frac{\mu}{x} - \frac{\nu}{x(x+1)} + \frac{2\varpi}{x(x+1)(x+2)} - \frac{2 \cdot 3 \chi}{x(x+1)(x+2)(x+3)} + \dots \end{aligned}$$

De même, si l'on met $x-n$ à la place de x , n étant un nombre entier quelconque, on aura

$$\begin{aligned} \log(x-n) &= \frac{1}{x-n-1} + \frac{1}{x-n-2} + \frac{1}{x-n-3} + \dots \\ &+ \frac{\mu}{x-n} - \frac{\nu}{(x-n)(x-n+1)} \\ &+ \frac{2\varpi}{(x-n)(x-n+1)(x-n+2)} - \dots \end{aligned}$$

par conséquent, en retranchant cette équation de la précédente, on aura

$$\begin{aligned} \log \frac{x}{x-n} &= \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x-2} + \frac{1}{x-3} + \dots + \frac{1}{x-n} \\ &+ \mu \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x-n} \right) - \nu \left[\frac{1}{x(x+1)} - \frac{1}{(x-n)(x-n+1)} \right] \\ &+ 2\omega \left[\frac{1}{x(x+1)(x+2)} - \frac{1}{(x-n)(x-n+1)(x-n+2)} \right] \\ &- 2.3.\gamma \left[\frac{1}{x(x+1)(x+2)(x+3)} - \frac{1}{(x-n)(x-n+1)(x-n+2)(x-n+3)} \right] \\ &\dots \dots \dots \end{aligned}$$

Si l'on fait $n=1$, on aura

$$\begin{aligned} \log \frac{x}{x-1} &= \frac{1}{x-1} - \frac{\mu}{(x-1)x} + \frac{2\nu}{(x-1)x(x+1)} \\ &- \frac{2.3.\omega}{(x-1)x(x+1)(x+2)} + \dots, \end{aligned}$$

ou bien, en mettant x à la place de $x-1$, et par conséquent $x+1$ à la place de x ,

$$\begin{aligned} \log \left(1 + \frac{1}{x} \right) &= \frac{1}{x} - \frac{\mu}{x(x+1)} + \frac{2\nu}{x(x+1)(x+2)} \\ &- \frac{2.3.\omega}{x(x+1)(x+2)(x+3)} + \frac{2.3.4.\gamma}{x(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)} - \dots \end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$\begin{aligned} \log \left(1 + \frac{1}{x} \right) &= \frac{1}{x} \left[1 - \frac{\mu}{1+x} + \frac{\nu}{(1+x) \left(1 + \frac{x}{2} \right)} - \frac{\omega}{(1+x) \left(1 + \frac{x}{2} \right) \left(1 + \frac{x}{3} \right)} \right. \\ &\left. + \frac{\gamma}{(1+x) \left(1 + \frac{x}{2} \right) \left(1 + \frac{x}{3} \right) \left(1 + \frac{x}{4} \right)} - \dots \right]. \end{aligned}$$

14. Nous avons vu que toute fonction u de plusieurs variables $x, y, z, \dots$ devient $u + \Delta u$ lorsque ces variables deviennent $x + \xi, y + \psi, z + \zeta, \dots$, où l'accroissement Δu est déterminé par la formule

$$\Delta u = e^{\frac{du}{dx}\xi + \frac{du}{dy}\psi + \frac{du}{dz}\zeta + \dots} - 1.$$

De même, si l'on suppose que les variables $x, y, z, \dots$ deviennent $x + \xi', y + \psi', z + \zeta', \dots, \xi', \psi', \zeta', \dots$ étant des quantités différentes de $\xi, \psi, \zeta, \dots$, et qu'on désigne par $\Delta' u$ l'accroissement correspondant de u , on aura

$$\Delta' u = e^{\frac{du}{dx}\xi' + \frac{du}{dy}\psi' + \frac{du}{dz}\zeta' + \dots} - 1.$$

Or la première équation donne, comme on l'a déjà vu plus haut,

$$\log(1 + \Delta u) = \frac{du}{dx}\xi + \frac{du}{dy}\psi + \frac{du}{dz}\zeta + \dots,$$

et comme les quantités $\xi, \psi, \zeta, \dots$ sont indépendantes les unes des autres, il est clair qu'en supposant d'abord $\psi = 0, \zeta = 0, \dots$, on aura

$$\frac{du}{dx}\xi = \log(1 + \Delta u),$$

où Δu désigne l'accroissement de u qui a lieu tandis que x seul croît de ξ ; de sorte qu'en désignant cet accroissement partiel de u par $\Delta_x u$, on aura

$$\frac{du}{dx}\xi = \log(1 + \Delta_x u).$$

De même, si l'on désigne par $\Delta_y u, \Delta_z u, \dots$ les accroissements partiels de u qui ont lieu lorsque $y, z, \dots$ deviennent chacun à part $y + \psi, z + \zeta, \dots$, on aura

$$\frac{du}{dy}\psi = \log(1 + \Delta_y u), \quad \frac{du}{dz}\zeta = \log(1 + \Delta_z u), \dots$$

Ainsi l'on aura

$$\begin{aligned} \frac{du}{dx}\xi + \frac{du}{dy}\psi + \frac{du}{dz}\zeta + \dots &= \frac{\xi'}{\xi} \log(1 + \Delta_x u) + \frac{\psi'}{\psi} \log(1 + \Delta_y u) + \frac{\zeta'}{\zeta} \log(1 + \Delta_z u) + \dots \\ &= \log(1 + \Delta_x u)^{\frac{\xi'}{\xi}} (1 + \Delta_y u)^{\frac{\psi'}{\psi}} (1 + \Delta_z u)^{\frac{\zeta'}{\zeta}} \dots \end{aligned}$$

Donc

$$\frac{du}{dx} = \frac{du}{dy} \frac{dy}{dx} + \frac{du}{dz} \frac{dz}{dx} + \dots = (1 + \Delta_1 u)^{\frac{x}{\xi}} (1 + \Delta_2 u)^{\frac{y}{\psi}} (1 + \Delta_3 u)^{\frac{z}{\zeta}} \dots$$

Et par conséquent

$$\Delta' u = (1 + \Delta_1 u)^{\frac{x}{\xi}} (1 + \Delta_2 u)^{\frac{y}{\psi}} (1 + \Delta_3 u)^{\frac{z}{\zeta}} \dots - 1,$$

équation par laquelle on pourra déterminer la valeur complète de la différence $\Delta' u$ de la fonction u lorsque les variables $x, y, z, \dots$ croissent en même temps de $\xi, \psi, \zeta, \dots$, au moyen des différences partielles $\Delta_1 u, \Delta_2 u, \dots$ de la même fonction, lesquelles résultent lorsque les variables $x, y, z, \dots$ croissent séparément des quantités $\xi, \psi, \zeta, \dots$.

Pour pouvoir faire usage de cette équation il faudra développer les puissances de $1 + \Delta_1 u, 1 + \Delta_2 u, \dots$ et le produit de ces puissances, suivant les puissances de Δu , ensuite on appliquera à la caractéristique Δ l'exposant de la puissance à laquelle la quantité Δu se trouvera élevée, et l'on multipliera ensemble les quantités qui se trouveront au-dessous de la lettre Δ ; ainsi par exemple $(\Delta_1 u)^2$ donnera $\Delta_1^2 u$, ce qui indiquera la différence seconde de u prise en faisant varier x seul successivement de ξ ; mais $\Delta_1 u \times \Delta_2 u$ donnera $\Delta_1^2 u$, ce qui indiquera de même la différence seconde de u , mais prise en faisant varier d'abord x de ξ , et ensuite y de ψ , et ainsi des autres. La raison de cette opération est facile à apercevoir par la nature de notre calcul.

On pourra aussi tirer de là la valeur de la différence d'un degré quelconque, et pour cela il n'y aura qu'à élever les deux membres de l'équation à une puissance dont l'exposant soit le même que celui du degré de la différence; de cette manière on aura, en général,

$$\Delta^{\lambda} u = \left[(1 + \Delta_1 u)^{\frac{x}{\xi}} (1 + \Delta_2 u)^{\frac{y}{\psi}} (1 + \Delta_3 u)^{\frac{z}{\zeta}} \dots - 1 \right]^{\lambda},$$

et, changeant λ en $-\lambda$, on aura aussi

$$\sum^{\lambda} u = \frac{1}{\left[(1 + \Delta_1 u)^{\frac{x}{\xi}} (1 + \Delta_2 u)^{\frac{y}{\psi}} (1 + \Delta_3 u)^{\frac{z}{\zeta}} \dots - 1 \right]^{\lambda}}.$$

où il faudra développer le second membre de la manière que nous l'avons dit ci-dessus.

15. Les formules précédentes renferment la théorie des interpolations prise dans toute la généralité possible; par exemple, supposons d'abord que l'on ait une fonction u de x seul, dont on connaisse les différentes valeurs lorsque x devient successivement $x + \xi, x + 2\xi, x + 3\xi, \dots$, et qu'on demande la valeur de la même fonction lorsque x devient $x + \xi'$, ξ' étant une quantité quelconque. On aura donc dans ce cas $\psi = 0, \zeta = 0, \dots$, et par conséquent

$$\Delta' u = (1 + \Delta_1 u)^{\frac{x}{\xi}} - 1.$$

Or la puissance $(1 + \Delta_1 u)^{\frac{x}{\xi}}$ étant développée suivant la méthode ordinaire donne

$$1 + \frac{x}{\xi} (\Delta_1 u) + \frac{x(x-1)}{2\xi^2} (\Delta_1 u)^2 + \frac{x(x-1)(x-2)}{2 \cdot 3 \cdot \xi^3} (\Delta_1 u)^3 + \dots$$

Donc, changeant $(\Delta_1 u)^2$ en $\Delta_1^2 u$, $(\Delta_1 u)^3$ en $\Delta_1^3 u$ et ainsi de suite, on aura

$$\Delta' u = \frac{x}{\xi} \Delta_1 u + \frac{x(x-1)}{2\xi^2} \Delta_1^2 u + \frac{x(x-1)(x-2)}{2 \cdot 3 \cdot \xi^3} \Delta_1^3 u + \dots;$$

c'est l'accroissement que doit prendre la fonction u lorsque x devient égal à $x + \xi'$; de sorte que la valeur de la fonction u répondante à $x + \xi'$ sera exprimée par la série

$$u + \frac{x}{\xi} \Delta_1 u + \frac{x(x-1)}{2\xi^2} \Delta_1^2 u + \frac{x(x-1)(x-2)}{2 \cdot 3 \cdot \xi^3} \Delta_1^3 u + \dots$$

Ainsi, si l'on a une série dont les termes successifs soient exprimés par une même fonction de $x, x + \xi, x + 2\xi, x + 3\xi, \dots$, la formule précédente donnera la valeur d'un terme quelconque intermédiaire répondant à $x + \xi'$, en prenant pour u le terme répondant à x , pour $\Delta_1 u$ la différence entre les deux termes répondants à $x + \xi$ et x , pour $\Delta_1^2 u$ la différence seconde entre les trois termes répondants à $x + 2\xi, x + \xi, x$, et ainsi de suite.

16. Supposons maintenant que u soit une fonction de deux variables x et y , on aura dans ce cas, en faisant $\xi' = 0, \dots$

$$\Delta' u = (1 + \Delta_x u)^{\xi} (1 + \Delta_y u)^{\psi} - 1.$$

La quantité $(1 + \Delta_x u)^{\xi}$ donne comme ci-dessus la série

$$1 + \frac{\xi}{\xi} \Delta_x u + \frac{\xi(\xi' - \xi)}{2\xi^2} \Delta_x^2 u + \frac{\xi(\xi' - \xi)(\xi' - 2\xi)}{2 \cdot 3 \cdot \xi^3} \Delta_x^3 u + \dots,$$

et de même la quantité $(1 + \Delta_y u)^{\psi}$ donnera la série

$$1 + \frac{\psi}{\psi} \Delta_y u + \frac{\psi(\psi' - \psi)}{2\psi^2} \Delta_y^2 u + \frac{\psi(\psi' - \psi)(\psi' - 2\psi)}{2 \cdot 3 \cdot \psi^3} \Delta_y^3 u + \dots$$

Donc, multipliant une série par l'autre et ayant égard aux remarques faites vers la fin du n° 13, on aura

$$\begin{aligned} & 1 + \frac{\xi}{\xi} \Delta_x u + \frac{\psi}{\psi} \Delta_y u \\ & + \frac{\xi(\xi' - \xi)}{2\xi^2} \Delta_x^2 u + \frac{\xi\psi}{\xi\psi} \Delta_x \Delta_y u + \frac{\psi(\psi' - \psi)}{2\psi^2} \Delta_y^2 u \\ & + \frac{\xi(\xi' - \xi)(\xi' - 2\xi)}{2 \cdot 3 \cdot \xi^3} \Delta_x^3 u + \frac{\xi(\xi' - \xi)\psi}{2\xi^2\psi} \Delta_x^2 \Delta_y u \\ & + \frac{\psi(\psi' - \psi)}{2\psi^2} \frac{\xi}{\xi} \Delta_x \Delta_y^2 u + \frac{\psi(\psi' - \psi)(\psi' - 2\psi)}{2 \cdot 3 \cdot \psi^3} \Delta_y^3 u \\ & \dots \dots \dots \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} \Delta' u &= \frac{\xi}{\xi} \Delta_x u + \frac{\psi}{\psi} \Delta_y u \\ & + \frac{\xi(\xi' - \xi)}{2\xi^2} \Delta_x^2 u + \frac{\xi\psi}{\xi\psi} \Delta_x \Delta_y u + \frac{\psi(\psi' - \psi)}{2\psi^2} \Delta_y^2 u \\ & + \frac{\xi(\xi' - \xi)(\xi' - 2\xi)}{2 \cdot 3 \cdot \xi^3} \Delta_x^3 u + \frac{\xi(\xi' - \xi)\psi}{2\xi^2\psi} \Delta_x^2 \Delta_y u \\ & + \frac{\psi(\psi' - \psi)}{2\psi^2} \frac{\xi}{\xi} \Delta_x \Delta_y^2 u + \frac{\psi(\psi' - \psi)(\psi' - 2\psi)}{2 \cdot 3 \cdot \psi^3} \Delta_y^3 u \\ & \dots \dots \dots \end{aligned}$$

c'est l'accroissement que doit prendre la fonction u lorsque x et y deviennent à la fois $x + \xi$, $y + \psi$.

Cette formule servira, comme on voit, pour l'interpolation des Tables à double entrée; et elle s'accorde avec celle que M. Lambert a donnée pour le même objet dans la troisième Partie de ses *Beyträge etc.*

On pourra déduire avec la même facilité, de notre équation générale, les formules pour l'interpolation des Tables à triple, quadruple, etc., entrée; c'est sur quoi il ne nous paraît pas nécessaire de nous étendre davantage.

17. Nous allons donner maintenant une méthode facile et générale de trouver immédiatement les différences d'un ordre quelconque d'une fonction quelconque de plusieurs variables, sans passer par les différences des ordres inférieurs. Pour cela on considérera que, puisque Δu désigne, en général, la différence première de u , $\Delta^2 u$ la différence première de Δu ou la différence seconde de u , et ainsi de suite, les valeurs successives de u seront

$$\begin{aligned} & u, \\ & u + \Delta u, \\ & u + 2\Delta u + \Delta^2 u, \\ & u + 3\Delta u + 3\Delta^2 u + \Delta^3 u, \\ & \dots \dots \dots \end{aligned}$$

et, en général,

$$u + m\Delta u + \frac{m(m-1)}{2} \Delta^2 u + \frac{m(m-1)(m-2)}{2 \cdot 3} \Delta^3 u + \dots$$

De même, en désignant par Δx , $\Delta^2 x, \dots$, Δy , $\Delta^2 y, \dots$, Δz , $\Delta^2 z, \dots$ les différences premières, secondes, etc., des variables x , y , $z, \dots$, on aura pour les valeurs successives de x ,

$$\begin{aligned} & x, \\ & x + \Delta x, \\ & x + 2\Delta x + \Delta^2 x, \\ & x + 3\Delta x + 3\Delta^2 x + \Delta^3 x, \\ & \dots \dots \dots \\ & x + m\Delta x + \frac{m(m-1)}{2} \Delta^2 x + \frac{m(m-1)(m-2)}{2 \cdot 3} \Delta^3 x + \dots, \end{aligned}$$

et ainsi de suite pour les valeurs successives de y , $z, \dots$

Donc, en général, si u est une fonction quelconque de $x, y, z, \dots$, il est clair que, tandis que u devient

$$u + m\Delta u + \frac{m(m-1)}{2}\Delta^2 u + \frac{m(m-1)(m-2)}{2.3}\Delta^3 u + \dots,$$

$x, y, z, \dots$ deviendront

$$x + m\Delta x + \frac{m(m-1)}{2}\Delta^2 x + \frac{m(m-1)(m-2)}{2.3}\Delta^3 x + \dots,$$

$$y + m\Delta y + \frac{m(m-1)}{2}\Delta^2 y + \frac{m(m-1)(m-2)}{2.3}\Delta^3 y + \dots,$$

$$z + m\Delta z + \frac{m(m-1)}{2}\Delta^2 z + \frac{m(m-1)(m-2)}{2.3}\Delta^3 z + \dots,$$

D'où il s'ensuit qu'en désignant par $\varphi(x, y, z, \dots)$ la valeur de u , en sorte que

$$u = \varphi(x, y, z, \dots),$$

on aura aussi

$$\begin{aligned} u + m\Delta u + \frac{m(m-1)}{2}\Delta^2 u + \dots \\ = \varphi \left[x + m\Delta x + \frac{m(m-1)}{2}\Delta^2 x + \dots, \right. \\ \left. y + m\Delta y + \frac{m(m-1)}{2}\Delta^2 y + \dots, \right. \\ \left. z + m\Delta z + \frac{m(m-1)}{2}\Delta^2 z + \dots, \right. \\ \left. \dots \dots \dots \right]. \end{aligned}$$

équation qui devra avoir lieu, quel que soit le nombre m ; de sorte qu'après le développement des termes il n'y aura qu'à comparer ceux qui seront affectés d'une même puissance de m , et l'on aura autant d'équations qu'il en faudra pour déterminer les valeurs de chacune des différences $\Delta u, \Delta^2 u, \dots$

18. Supposons que les différences deviennent infiniment petites et qu'en même temps le nombre m devienne infiniment grand, on aura dans cette hypothèse

$$m(m-1) = m^2, \quad m(m-1)(m-2) = m^3, \dots;$$

donc, changeant la caractéristique Δ en d , on aura l'équation

$$\begin{aligned} u + mdu + \frac{m^2 d^2 u}{2} + \frac{m^3 d^3 u}{2.3} + \dots \\ = \varphi \left(x + mdx + \frac{m^2 d^2 x}{2} + \frac{m^3 d^3 x}{2.3} + \dots, \right. \\ \left. y + mdy + \frac{m^2 d^2 y}{2} + \frac{m^3 d^3 y}{2.3} + \dots, \right. \\ \left. z + mdz + \frac{m^2 d^2 z}{2} + \frac{m^3 d^3 z}{2.3} + \dots, \right. \\ \left. \dots \dots \dots \right). \end{aligned}$$

Ainsi, si l'on développe la fonction $\varphi(\dots)$ suivant les puissances de m , en sorte qu'il en résulte une série de cette forme

$$P + mQ + m^2 R + m^3 S + \dots$$

on aura

$$u = P, \quad du = Q, \quad \frac{d^2 u}{2} = R, \quad \frac{d^3 u}{2.3} = S, \dots$$

Par où l'on voit comment on peut trouver sur-le-champ toutes les différentielles de u ; c'est ce que nous allons éclaircir par quelques Exemples.

19. Supposons que u soit une fonction de x seul, et que dx soit supposé constant, on aura donc dans ce cas l'équation $u = \varphi(x)$ et

$$u + mdu + \frac{m^2 d^2 u}{2} + \frac{m^3 d^3 u}{2.3} + \dots = \varphi(x + mdx),$$

de sorte qu'il ne s'agira que de développer la quantité $\varphi(x + mdx)$ suivant les puissances de m .

Soit, par exemple,

$$\varphi(x) = (a + bx)^r,$$

on aura

$$\begin{aligned} \varphi(x + mdx) &= (a + bx + mbdx)^r \\ &= (a + bx)^r + mrb(a + bx)^{r-1}dx + m^2 \frac{r(r-1)b^2}{2} (a + bx)^{r-2}dx^2 \\ &\quad + m^3 \frac{r(r-1)(r-2)b^3}{2.3} (a + bx)^{r-3}dx^3 + \dots; \end{aligned}$$

donc, comparant les termes affectés des mêmes puissances de m ,

$$\begin{aligned} u &= (a + bx)^r, \\ du &= rb(a + bx)^{r-1} dx, \\ d^2 u &= r(r-1)b^2(a + bx)^{r-2} dx^2, \\ &\dots \end{aligned}$$

et, en général,

$$d^\lambda u = r(r-1)(r-2)\dots(r-\lambda+1)b^\lambda(a + bx)^{r-\lambda} dx^\lambda.$$

On remarquera ici, et la même remarque aura toujours lieu dans les cas semblables, que puisque l'on a l'expression générale de la différentielle de l'ordre λ , on pourra, en faisant λ négatif, avoir celle de l'intégrale du même ordre λ ; ainsi l'on aura

$$\int^\lambda u = r(r-1)(r-2)\dots(r+\lambda+1) \frac{(a + bx)^{r+\lambda}}{b^\lambda dx^\lambda};$$

or comme les facteurs $r, r-1, r-2, \dots$ vont en diminuant, et que le dernier doit être $r+\lambda+1$ qui est au contraire plus grand que r , cela indique, qu'il faut continuer la série de ces facteurs du côté opposé, en employant les divisions au lieu des multiplications, de cette manière

$$\frac{1}{(r+1)(r+2)(r+3)\dots(r+\lambda)};$$

on aura donc en multipliant par dx^λ

$$\int^\lambda u dx^\lambda = \frac{(a + bx)^{r+\lambda}}{(r+1)(r+2)(r+3)\dots(r+\lambda)b^\lambda};$$

ce qui s'accorde avec ce que l'on sait d'ailleurs.

20. Dans le cas de l'Exemple précédent, il aurait été facile de trouver la valeur générale de $d^\lambda u$ par la méthode ordinaire des différentiations, mais il n'en serait pas de même si la fonction $\varphi(x)$ était tant soit peu plus compliquée.

Supposons en effet

$$\varphi(x) = (a + bx + cx^2)^r = u,$$

on verra aisément que les différentielles de $\varphi(x)$ seront exprimées par des séries dont il ne sera pas aisé de trouver la loi, pour avoir l'expression de $d^\lambda \varphi(x)$; suivant notre méthode il n'y aura qu'à mettre $x + m dx$ à la place de x , ce qui rendra $a + bx + cx^2$ égal à

$$a + bx + cx^2 + m(b + 2cx) dx + m^2 c dx^2;$$

de sorte que la difficulté ne consistera qu'à réduire l'expression

$$[a + bx + cx^2 + m(b + 2cx) dx + m^2 c dx^2]^r$$

en une série qui procède suivant les puissances de m .

Faisons pour plus de simplicité

$$\begin{aligned} a + bx + cx^2 &= p, \\ b + 2cx &= q, \end{aligned}$$

en sorte que la quantité proposée devienne

$$(p + mq dx + m^2 c dx^2)^r.$$

Je la développe d'abord ainsi

$$\begin{aligned} (p + mq dx)^r + r(p + mq dx)^{r-1} m^2 c dx^2 + \frac{r(r-1)}{2} (p + mq dx)^{r-2} m^4 c^2 dx^4 \\ + \frac{r(r-1)(r-2)}{2 \cdot 3} (p + mq dx)^{r-3} m^6 c^3 dx^6 + \dots \end{aligned}$$

et il ne s'agira plus que de développer de même les différentes puissances de $p + qm dx$.

Supposons qu'on veuille avoir, en général, le terme qui sera affecté de la puissance m^3 , il est clair que si l'on dénote par $A m^3 dx^3$ le terme affecté de m^3 dans la puissance $(p + mq dx)^r$, par $B m^{3-2} dx^{3-2}$ le terme affecté de m^{3-2} dans la puissance $(p + mq dx)^{r-1}$, par $C m^{3-4} dx^{3-4}$ le terme affecté de m^{3-4} dans la puissance $(p + mq dx)^{r-2}$, et ainsi de suite, il est clair, dis-je, que le terme affecté de m^3 dans la série précédente sera

représenté par

$$\left[A + rBe + \frac{r(r-1)}{2} Ce^2 + \frac{r(r-1)(r-2)}{2 \cdot 3} De^3 + \dots \right] m^2 dx^2;$$

or le terme affecté de m^2 dans la série

$$u + m du + \frac{m^2 d^2 u}{2} + \dots$$

est évidemment

$$\frac{m^2 d^2 u}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots \lambda};$$

ainsi, comparant ces deux termes, on aura

$$d^2 u = 1 \cdot 2 \cdot 3 \dots \lambda \left[A + rBe + \frac{r(r-1)}{2} Ce^2 + \dots \right] dx^2,$$

où $u = p'$.

Mais il est facile de voir que l'on aura

$$\begin{aligned} A &= \frac{r(r-1)(r-2) \dots (r-\lambda+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots \lambda} p^{r-\lambda} q^\lambda, \\ B &= \frac{(r-1)(r-2)(r-3) \dots (r-\lambda+2)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (\lambda-2)} p^{r-\lambda+1} q^{\lambda-2}, \\ C &= \frac{(r-2)(r-3)(r-4) \dots (r-\lambda+3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (\lambda-4)} p^{r-\lambda+2} q^{\lambda-4}, \\ D &= \frac{(r-3)(r-4)(r-5) \dots (r-\lambda+4)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (\lambda-6)} p^{r-\lambda+3} q^{\lambda-6}, \\ &\dots \end{aligned}$$

Donc, substituant ces valeurs, et faisant attention que

$$\begin{aligned} &\frac{(r-1)(r-2) \dots (r-\lambda+2)}{1 \cdot 2 \dots (\lambda-2)} \\ &= \frac{r(r-1)(r-2) \dots (r-\lambda+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots \lambda} \frac{\lambda(\lambda-1)}{r(r-\lambda+1)}, \\ &\frac{(r-2)(r-3) \dots (r-\lambda+3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (\lambda-4)} \\ &= \frac{r(r-1)(r-2) \dots (r-\lambda+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots \lambda} \frac{\lambda(\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-3)}{r(r-1)(r-\lambda+1)(r-\lambda+2)}, \end{aligned}$$

et ainsi de suite, on aura

$$\begin{aligned} d^2 p' &= r(r-1)(r-2) \dots (r-\lambda+1) p^{r-\lambda} q^\lambda dx^2 \\ &\times \left[1 + \frac{\lambda(\lambda-1)}{r-\lambda+1} \frac{cp}{q^2} + \frac{\lambda(\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-3)}{2(r-\lambda+1)(r-\lambda+2)} \frac{c^2 p^2}{q^4} \right. \\ &\quad \left. + \frac{\lambda(\lambda-1) \dots (\lambda-5)}{2 \cdot 3 \cdot (r-\lambda+1)(r-\lambda+2)(r-\lambda+3)} \frac{c^3 p^3}{q^6} + \dots \right], \end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned} p &= a + bx + cx^2, \\ q &= b + 2cx. \end{aligned}$$

De là on peut, en changeant λ en $-\lambda$, tirer la valeur de $\int^{\lambda} p' dx^2$, et l'on trouvera, d'après ce qui a été remarqué dans le numéro précédent,

$$\begin{aligned} \int^{\lambda} p' dx^2 &= \frac{p^{r+\lambda}}{(r+1)(r+2) \dots (r+\lambda) q^\lambda} \\ &\times \left[1 + \frac{\lambda(\lambda+1)}{r+\lambda+1} \frac{cp}{q^2} + \frac{\lambda(\lambda+1)(\lambda+2)(\lambda+3)}{2(r+\lambda+1)(r+\lambda+2)} \frac{c^2 p^2}{q^4} \right. \\ &\quad \left. + \frac{\lambda(\lambda+1) \dots (\lambda+5)}{2 \cdot 3 \cdot (r+\lambda+1)(r+\lambda+2)(r+\lambda+3)} \frac{c^3 p^3}{q^6} + \dots \right]. \end{aligned}$$

Ainsi, faisant $\lambda = 1$, on aura

$$\begin{aligned} \int p' dx &= \frac{p^{r+1}}{(r+1)q} \left[1 + \frac{2cp}{(r+2)q^2} + \frac{3 \cdot 4 \cdot c^2 p^2}{(r+2)(r+3)q^4} \right. \\ &\quad \left. + \frac{4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot c^3 p^3}{(r+2)(r+3)(r+4)q^6} + \dots \right], \end{aligned}$$

ce qu'on peut aisément vérifier par la différentiation.

Si dans l'expression précédente on fait $2c = k$, on aura plus simplement

$$\begin{aligned} \int p' dx &= \frac{p^{r+1}}{(r+1)q} + \frac{k p^{r+2}}{(r+1)(r+2)q^3} + \frac{1 \cdot 3 \cdot k^2 p^{r+3}}{(r+1)(r+2)(r+3)q^5} \\ &\quad + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot k^3 p^{r+4}}{(r+1)(r+2)(r+3)(r+4)q^7} + \dots \end{aligned}$$

et l'on reconnaîtra facilement la vérité de cette formule en remarquant que $dp = q dx$ et $dq = k dx$.

21. On peut encore trouver une autre expression de d^2u , laquelle reviendra au même pour le fond, mais qui pourra être regardée comme plus simple pour la forme.

Pour cela je reprends la quantité

$$(p + mq dx + m^2 edx^2)^r,$$

dont il s'agit de trouver le terme affecté de m^2 , et je fais pour un moment $dx = 2p dt$; elle deviendra

$$p^r (1 + 2mq dt + 4m^2 p edt^2)^r;$$

je considère maintenant que

$$4pc - q^2 = 4c(a + bx + cx^2) - (b + 2cx)^2 = 4ca - b^2;$$

d'où il s'ensuit que si l'on fait, pour abrégér,

$$4ca - b^2 = h,$$

on aura $4pc = h + q^2$, ce qui réduira l'expression précédente à celle-ci

$$p^r [(1 + mq dt)^2 + m^2 h dt^2]^r.$$

Or la quantité

$$[(1 + mq dt)^2 + m^2 h dt^2]^r$$

se développe d'abord en cette série

$$(1 + mq dt)^{2r} + r(1 + mq dt)^{2r-2} h m^2 dt^2 + \frac{r(r-1)}{2} (1 + mq dt)^{2r-4} h^2 m^4 dt^4 + \frac{r(r-1)(r-2)}{2.3} (1 + mq dt)^{2r-6} h^3 m^6 dt^6 + \dots;$$

ensuite, développant encore chaque puissance de $1 + mq dt$, on trouvera que le terme affecté de m^2 sera représenté par la série

$$\begin{aligned} & \frac{2r(2r-1)(2r-2)\dots(2r-\lambda+1)}{1.2.3\dots\lambda} m^2 q^\lambda dt^\lambda \\ & + r \frac{(2r-2)(2r-3)\dots(2r-\lambda+1)}{1.2.3\dots(\lambda-2)} m^2 q^{\lambda-1} h dt^\lambda \\ & + \frac{r(r-1)}{2} \frac{(2r-4)(2r-5)\dots(2r-\lambda+1)}{1.2.3\dots(\lambda-4)} m^2 q^{\lambda-2} h^2 dt^\lambda \\ & \dots\dots\dots \end{aligned}$$

Ainsi cette série, multipliée par p^r , sera égale au terme

$$\frac{m^2 d^2 u}{1.2.3\dots\lambda},$$

de sorte qu'on aura, en remettant $\frac{dx}{2p}$ à la place de dt et p^r à la place de u ,

$$\begin{aligned} d^2 p^r &= 2r(2r-1)(2r-2)\dots(2r-\lambda+1) \left(\frac{q}{2}\right)^\lambda p^{r-\lambda} dx^\lambda \\ &\times \left[1 + r \frac{\lambda(\lambda-1)}{2r(2r-1)} \frac{h}{q^2} + \frac{r(r-1)}{2} \frac{\lambda(\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-3)}{2r(2r-1)(2r-2)(2r-3)} \frac{h^2}{q^4} \right. \\ &\quad \left. + \frac{r(r-1)(r-2)}{2.3} \frac{\lambda(\lambda-1)\dots(\lambda-5)}{2r(2r-1)\dots(2r-5)} \frac{h^3}{q^6} + \dots \right]. \end{aligned}$$

Si dans cette formule on fait

$$r = -\frac{1}{2} \quad \text{et} \quad p = 1 - x^2,$$

par conséquent

$$a = 1, \quad b = 0, \quad c = -1, \quad q = -2x, \quad h = -4,$$

on aura

$$\begin{aligned} d^2 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} &= \frac{1.2.3\dots\lambda. x^\lambda dx^\lambda}{(1-x^2)^{\lambda+\frac{1}{2}}} \\ &\times \left[1 + \frac{1}{2} \frac{\lambda(\lambda-1)}{1.2.x^2} + \frac{1.3}{2.4} \frac{\lambda(\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-3)}{1.2.3.4.x^4} \right. \\ &\quad \left. + \frac{1.3.5}{2.4.6} \frac{\lambda(\lambda-1)\dots(\lambda-5)}{1.2\dots6.x^6} + \dots \right]. \end{aligned}$$

C'est la formule que M. Euler a trouvée par induction dans ses *Institutions du Calcul différentiel*.

On peut aussi, dans la formule générale ci-dessus, faire λ négatif, et l'on aura alors, comme dans le numéro précédent,

$$\begin{aligned} \int^x p^r dx^\lambda &= \frac{p^{r+\lambda}}{(2r+1)(2r+2)\dots(2r+\lambda)} \left(\frac{q}{2}\right)^\lambda \\ &\times \left[1 + r \frac{\lambda(\lambda+1)}{2r(2r+1)} \frac{h}{q^2} + \frac{r(r-1)}{2} \frac{\lambda(\lambda+1)(\lambda+2)(\lambda+3)}{2r(2r+1)(2r+2)(2r+3)} \frac{h^2}{q^4} \right. \\ &\quad \left. + \frac{r(r-1)(r-2)}{2.3} \frac{\lambda(\lambda+1)(\lambda+2)\dots(\lambda+5)}{2r(2r+1)(2r+2)\dots(2r+5)} \frac{h^3}{q^6} + \dots \right]. \end{aligned}$$

Ainsi, faisant $\lambda = r$, on aura

$$\int p' dx = \frac{2p^{r+1}}{(2r+1)q} \left[1 + \frac{h}{(2r-1)q^2} + \frac{3h^2}{(2r-1)(2r-3)q^4} + \frac{3.5.h^3}{(2r-1)(2r-3)(2r-5)q^6} + \dots \right].$$

Au reste, ces formules pour les intégrations sont en quelque sorte plus curieuses qu'utiles, parce qu'elles ont toujours l'inconvénient d'aller à l'infini, même quand l'intégrale peut être exprimée d'une manière finie; mais elles n'en sont pas moins remarquables, puisqu'elles servent à montrer de plus en plus l'analogie qu'il y a entre les différentiations et les intégrations.

22. Soit à présent u une fonction de x et y , et supposons par exemple $u = xy$, on aura donc (18)

$$\begin{aligned} u + m du + \frac{m^2 d^2 u}{2} + \frac{m^3 d^3 u}{2.3} + \dots \\ = \left(x + m dx + \frac{m^2 d^2 x}{2} + \frac{m^3 d^3 x}{2.3} + \dots \right) \left(y + m dy + \frac{m^2 d^2 y}{2} + \frac{m^3 d^3 y}{2.3} + \dots \right) \\ = xy + m(x dy + y dx) + m^2 \left(\frac{x d^2 y}{2} + dx dy + \frac{y d^2 x}{2} \right) \\ + m^3 \left(\frac{x d^3 y}{1.2.3} + \frac{dx d^2 y}{1 \times 1.2} + \frac{dy d^2 x}{1 \times 1.2} + \frac{y d^3 x}{1.2.3} \right) + \dots \end{aligned}$$

Donc, comparant les termes affectés des mêmes puissances de m , on aura

$$\begin{aligned} u &= xy, \\ du &= x dy + y dx, \\ d^2 u &= x d^2 y + 2 dx dy + y d^2 x, \\ d^3 u &= x d^3 y + 3 dx d^2 y + 3 dy d^2 x + y d^3 x, \\ &\dots \end{aligned}$$

et, en général,

$$\begin{aligned} d^{\lambda} u &= y d^{\lambda} x + \lambda dy d^{\lambda-1} x + \frac{\lambda(\lambda-1)}{2} d^2 y d^{\lambda-2} x \\ &+ \frac{\lambda(\lambda-1)(\lambda-2)}{2.3} d^3 y d^{\lambda-3} x + \dots \end{aligned}$$

c'est la série que Leibnitz a donnée dans le tome cité des *Miscellanea Berolinensia*.

Si dans cette série on fait λ négatif, c'est-à-dire qu'on y mette $-\lambda$ à la place de λ , et qu'on change en conséquence les différences dont l'exposant sera négatif en intégrales du même ordre, on aura

$$\begin{aligned} \int^{\lambda} u = y \int^{\lambda} x - \lambda dy \int^{\lambda+1} x + \frac{\lambda(\lambda+1)}{2} d^2 y \int^{\lambda+2} x \\ - \frac{\lambda(\lambda+1)(\lambda+2)}{2.3} d^3 y \int^{\lambda+3} x + \dots; \end{aligned}$$

or si l'on suppose, ce qui est permis, que la différentielle dx soit constante, on aura

$$\int x = \frac{x^2}{2 dx}, \quad \int^2 x = \frac{x^3}{2.3. dx^2},$$

et, en général,

$$\int^{\mu} x = \frac{x^{\mu+1}}{2.3.4 \dots (\mu+1) dx^{\mu}};$$

donc substituant ces valeurs dans l'équation précédente, et la multipliant toute par dx^{λ} , elle deviendra

$$\int^{\lambda} u dx^{\lambda} = \frac{x^{\lambda+1} y}{2.3 \dots (\lambda+1)} - \frac{\lambda x^{\lambda+2} dy}{2.3 \dots (\lambda+2) dx} + \frac{\lambda(\lambda+1) x^{\lambda+3} d^2 y}{2 \times 2.3 \dots (\lambda+3) dx^2} - \dots$$

Si dans la formule ci-dessus on met dx à la place de x , en sorte que $u = y dx$, il faudra mettre $\int^{\lambda} dx = \int^{\lambda-1} x$ à la place de $\int^{\lambda} x$, et ainsi des autres, et l'on aura

$$\int^{\lambda} y dx = y \int^{\lambda-1} x - \lambda dy \int^{\lambda} x + \frac{\lambda(\lambda+1)}{2} d^2 y \int^{\lambda+1} x - \dots,$$

ou bien, en substituant les valeurs de $\int^{\lambda-1} x$, $\int^{\lambda} x$, ..., et multipliant toute l'équation par $dx^{\lambda-1}$,

$$\int^{\lambda} y dx^{\lambda} = \frac{x^{\lambda} y}{2.3 \dots \lambda} - \frac{\lambda x^{\lambda+1} dy}{2.3 \dots (\lambda+1) dx} + \frac{\lambda(\lambda+1)}{2} \frac{x^{\lambda+2} d^2 y}{2.3 \dots (\lambda+2) dx^2} - \dots$$

Si $\lambda = 1$, on aura donc

$$\int y dx = xy - \frac{x^2 dy}{2 dx} + \frac{x^3 d^2 y}{2.3. dx^2} - \dots;$$

c'est la série que M. Jean Bernoulli a donnée dans les *Actes de Leipsick* de 1694.

SUR LA

FORME DES RACINES IMAGINAIRES

DES ÉQUATIONS.



SUR LA

FORME DES RACINES IMAGINAIRES

DES ÉQUATIONS.

(Nouveaux Mémoires de l'Académie royale des Sciences et Belles-Lettres
de Berlin, année 1772.)

Il semble que les Analystes aient toujours regardé comme vraie cette proposition, que toutes les racines imaginaires des équations peuvent se réduire à la forme

$$A + B\sqrt{-1}.$$

A et B étant des quantités réelles; mais ce n'est que dans ces derniers temps qu'on est parvenu à la démontrer d'une manière rigoureuse et générale.

La première démonstration qu'on ait donnée de ce beau Théorème est celle qui se trouve dans les *Mémoires* de cette Académie pour l'année 1746, et qui est due à M. d'Alembert. Cette démonstration est très-ingénieuse et ne laisse, ce me semble, rien à désirer du côté de l'exactitude; mais elle est indirecte, étant tirée de la considération des courbes et des suites infinies, et elle porte naturellement à croire qu'on peut arriver au même but par une analyse plus simple, fondée uniquement sur la théorie des équations. En effet, comme le radical imaginaire $\sqrt{-1}$ peut avoir indifféremment le signe + ou —, il est clair que s'il y a dans une équation quelque une racine qui soit représentée par $A + B\sqrt{-1}$, il devra y

en avoir en même temps une autre qui le soit par $A - B\sqrt{-1}$; ainsi chaque facteur imaginaire tel que $x - A - B\sqrt{-1}$ sera toujours accompagné du facteur correspondant $x - A + B\sqrt{-1}$, en sorte que le produit de ces facteurs sera

$$x^2 - 2Ax + A^2 + B^2,$$

qui est un facteur du second degré tout réel.

D'où il suit que toute équation pourra se décomposer en des facteurs réels du premier ou du second degré. Or cette proposition paraît de nature à pouvoir être démontrée par les seuls principes de la théorie des équations, et il est clair qu'il suffit pour cela de prouver que toute équation d'un degré plus haut que le second peut toujours se partager en deux autres équations dont les coefficients soient des quantités réelles. C'est l'objet que M. Euler s'est proposé dans les savantes recherches qu'il a données, dans les *Mémoires* de 1749, sur les racines imaginaires des équations. Il y considère séparément le cas où l'exposant de l'équation est une puissance de 2, et celui où cet exposant est une puissance de 2 multipliée par un nombre quelconque impair; et dans ce dernier cas il trouve que toute équation du degré 2^m (m étant un nombre impair) peut être divisée par une équation du degré 2^n dont le coefficient du second terme soit déterminé par une équation d'un degré impair, laquelle aura par conséquent toujours une racine réelle. De là M. Euler conclut d'abord que les coefficients des autres termes auront aussi des valeurs réelles, parce qu'il suppose qu'en éliminant successivement les puissances de ces coefficients plus hautes que la première, à l'aide des différentes équations de condition qu'on aura entre tous les coefficients, on puisse toujours parvenir à déterminer les coefficients dont il s'agit par des fonctions rationnelles de celui du second terme. Cette réduction paraît en effet toujours possible en général; il se trouve néanmoins des cas particuliers où elle ne saurait avoir lieu, et dans lesquels par conséquent la démonstration de M. Euler sera insuffisante; mais cette démonstration est surtout insuffisante à l'égard du premier cas, où le degré de l'équation proposée est supposé être une puissance de 2.

La résolution de ce cas paraît d'abord beaucoup plus difficile; car lorsqu'on cherche à diviser une équation du degré 2^n par une autre équation d'un degré inférieur quelconque, on parvient toujours à des équations de degrés pairs pour la détermination de ses coefficients; de sorte que pour pouvoir s'assurer que l'un de ces coefficients sera réel il faut que l'équation dont il dépend ait son dernier terme négatif. Quand on décompose une équation du quatrième degré, dont le second terme est évanoui, en deux autres du second degré suivant la méthode de Descartes, on trouve que les coefficients des seconds termes de ces diviseurs sont donnés par une équation du sixième degré, dont le dernier terme est essentiellement négatif, étant égal à un carré affecté du signe $-$. Cette observation a porté M. Euler à penser que la même chose pourrait avoir lieu dans toute équation dont le degré sera une puissance de 2, et où le second terme sera pareillement évanoui, lorsqu'on cherchera à la décomposer en deux autres d'un degré moindre de la moitié. M. Euler tâche de démontrer, par la nature même des racines de l'équation qui doit servir à déterminer les coefficients des seconds termes de ces diviseurs, que cette équation aura toujours pour dernier terme un carré avec le signe négatif; mais il faut avouer que son raisonnement est peu concluant, ainsi que M. le chevalier de Foncenex l'a déjà remarqué dans le premier volume des *Miscellanæ Taurinensia*, et comme nous le montrerons encore avec plus de détail dans ce Mémoire.

Cette raison a même engagé l'habile Géomètre dont nous venons de parler à prendre un autre chemin pour parvenir à une démonstration exacte du même Théorème, et l'on ne saurait disconvenir que celle qu'il a donnée dans le volume cité n'ait l'avantage de l'élégance et de la simplicité; mais, d'un autre côté, elle est aussi sujette à quelques-unes des difficultés qui ont lieu dans celle de M. Euler, et qui viennent de ce qu'on y suppose faussement que dès que l'un des coefficients d'un diviseur d'une équation quelconque est réel, tous les autres doivent l'être aussi.

Il paraît donc, par tout ce que nous venons de dire, que le Théorème dont il s'agit n'a pas encore été démontré d'une manière aussi directe et

aussi rigoureuse qu'on pourrait le désirer. Comme je me suis depuis quelque temps particulièrement appliqué à perfectionner la théorie des équations, j'ai cru devoir aussi m'attacher à la discussion d'un point si important de cette théorie : c'est l'objet que je me suis proposé dans ce Mémoire. En suppléant à ce qui manque à la démonstration de M. Euler, je tâcherai de faire en sorte qu'il ne reste plus de difficulté ni d'incertitude sur cette matière.

1. On sait que toute équation d'un degré impair a nécessairement une racine réelle positive si son dernier terme est négatif, ou une racine réelle négative si son dernier terme est positif, et de plus que toute équation d'un degré pair a nécessairement deux racines réelles, l'une positive et l'autre négative, lorsque son dernier terme est négatif.

Ces Théorèmes sont si connus, que nous ne croyons pas devoir nous arrêter à les démontrer; il est vrai que la démonstration qu'on en donne ordinairement est peu naturelle, étant tirée de la considération des lignes courbes; mais nous en avons donné ailleurs une plus directe, déduite des seuls principes de la composition des équations [voyez les *Mémoires* pour l'année 1767 (*)].

Hors les cas précédents on n'a point encore de caractère général par lequel on puisse reconnaître *à priori* si une équation a des racines réelles ou non. Nous nous proposons de donner dans une autre occasion nos recherches sur ce point, qu'on peut regarder comme un des plus importants de la théorie des équations.

2. Cela posé, il est d'abord clair que toute équation d'un degré impair telle que

$$x^{2m+1} - Ax^{2m} + Bx^{2m-1} - Cx^{2m-2} + \dots - K = 0$$

pourra s'abaisser à un degré moindre d'une unité, c'est-à-dire au degré pair immédiatement inférieur.

Car, comme on est assuré que cette équation doit avoir une racine

(*) *Oeuvres de Lagrange*, t. II, p. 541.

réelle, si l'on dénote cette racine par α , on aura

$$\alpha^{2m+1} - A\alpha^{2m} + B\alpha^{2m-1} - C\alpha^{2m-2} + \dots - K = 0,$$

donc

$$K = \alpha^{2m+1} - A\alpha^{2m} + B\alpha^{2m-1} - C\alpha^{2m-2} + \dots,$$

ce qui étant substitué dans l'équation précédente, on aura celle-ci

$$(x^{2m+1} - \alpha^{2m+1}) - A(x^{2m} - \alpha^{2m}) + B(x^{2m-1} - \alpha^{2m-1}) - C(x^{2m-2} - \alpha^{2m-2}) + \dots = 0,$$

laquelle se décompose naturellement en ces deux-ci

$$x - \alpha = 0,$$

$$x^{2m} + (a - A)x^{2m-1} + (a^2 - Aa + B)x^{2m-2} + (a^3 - Aa^2 + Ba - C)x^{2m-3} + \dots = 0.$$

Ainsi il suffira de considérer les équations de degrés pairs.

3. Soit donc proposée l'équation générale

$$x^m - Ax^{m-1} + Bx^{m-2} - Cx^{m-3} + \dots + K = 0;$$

il s'agit de prouver que cette équation, lorsque m est un nombre pair plus grand que 2, peut toujours se décomposer en deux autres équations dont les coefficients soient des quantités réelles.

Supposons que

$$x^m - Mx^{m-1} + Nx^{m-2} - Px^{m-3} + \dots + V = 0$$

soit un des facteurs de l'équation dont il s'agit; l'autre facteur sera de la forme

$$x^m - M'x^{m-1} + N'x^{m-2} - P'x^{m-3} + \dots = 0,$$

et pour déterminer les coefficients $M, N, P, \dots, M', N', P', \dots$, qui sont au nombre de m , il n'y aura qu'à multiplier ces deux facteurs ensemble, et égaliser ensuite chaque terme du produit au terme de l'équation proposée dans lequel x aura le même exposant; on aura par là m équations qui serviront à déterminer tous les coefficients inconnus des facteurs supposés.

On peut aussi considérer simplement le facteur

$$x^m - Mx^{m-1} + Nx^{m-2} - Px^{m-3} + \dots,$$

et remarquer que, comme il doit diviser exactement l'équation proposée, si l'on fait la division à la manière ordinaire et qu'on la pousse jusqu'à ce qu'on parvienne à un reste où l'inconnue x monte à des puissances moindres que x^n , et qui par conséquent ne puisse plus donner des puissances entières de x dans le quotient, ce reste devra être nul de lui-même, et indépendamment de la valeur de x ; de sorte que, désignant ce reste par

$$\mu x^{n-1} + \nu x^{n-2} + \varpi x^{n-3} + \dots + \upsilon,$$

il faudra qu'on ait à la fois les équations

$$\mu = 0, \nu = 0, \varpi = 0, \dots, \upsilon = 0,$$

lesquelles, étant au nombre de n , serviront à déterminer les n coefficients indéterminés $M, N, P, \dots, V$ du facteur proposé.

4. Telles sont les méthodes qui se présentent naturellement pour décomposer une équation quelconque en deux autres de degrés inférieurs; mais pour notre objet il n'est pas nécessaire d'exécuter cette décomposition, il suffit de faire voir qu'elle est possible sans tomber dans des quantités imaginaires.

Or si l'on suppose que dans les équations qui renferment les indéterminées $M, N, P, \dots$ on élimine toutes ces indéterminées hors une quelconque, par exemple M , on aura une équation finale en M qui montera à un degré d'autant plus élevé que le nombre de ces équations sera plus grand, et la question se réduira à savoir : 1^o si cette équation aura au moins une racine réelle; 2^o si les valeurs des autres indéterminées $N, P, \dots$ correspondantes à cette racine seront réelles aussi.

5. Quant à la première condition, on ne peut être assuré de son existence que lorsque l'équation finale sera d'un degré impair, ou d'un degré pair, mais avec le dernier terme négatif (1). A l'égard de la seconde, elle paraît d'abord une suite nécessaire de la première; car, comme on a entre les indéterminées $M, N, P, Q, \dots$ autant d'équations qu'il y a de ces indéterminées, il semble qu'on puisse toujours par les méthodes ordinaires

de l'élimination parvenir à exprimer, par des fonctions rationnelles d'une quelconque de ces indéterminées, les valeurs de toutes les autres; auquel cas il est clair que les valeurs de celles-ci seront nécessairement réelles dès que la valeur de celle-là sera réelle.

C'est en effet ce que la plupart des Analystes ont toujours supposé, et sur quoi M. Euler et M. le chevalier de Foncenex ont fondé principalement leurs démonstrations du Théorème dont il s'agit. Mais quoique cette proposition soit vraie, en général, il se trouve cependant des cas où elle devient absolument fautive, comme nous l'avons déjà fait voir dans le n^o 102 de nos *Reflexions sur la résolution algébrique des équations* (*).

Supposons en effet qu'on soit parvenu par des éliminations répétées à une équation entre les indéterminées M et N de la forme

$$PN - Q = 0,$$

P et Q étant des fonctions rationnelles de M ; on aura donc par là $N = \frac{Q}{P}$, en sorte que N sera toujours réelle dès que M le sera; mais s'il arrive que la valeur réelle de M soit telle, que les quantités P et Q s'évanouissent à la fois, on aura $N = \frac{0}{0}$, ce qui ne fera rien connaître; dans ce cas il sera donc douteux si à la valeur réelle de M répond une valeur réelle de N ou non; en effet, l'expression indéterminée qu'on trouve pour N est une marque que cette quantité ne peut pas être donnée simplement par une équation du premier degré, mais qu'elle doit dépendre d'une équation d'un degré supérieur, en sorte qu'à la même valeur de M puissent répondre différentes valeurs de N .

6. Pour éclaircir ceci par un Exemple, je suppose qu'on ait l'équation du quatrième degré

$$x^4 - Ax^3 + Bx^2 - Cx + D = 0,$$

et qu'on veuille la décomposer en deux du second degré, représentées par

$$x^2 - Mx + N = 0,$$

$$x^2 - M'x + N' = 0;$$

(*) *Oeuvres de Lagrange*, t. III, p. 381.

on trouvera, en comparant le produit de ces deux-ci terme à terme avec celle-là, ces quatre équations

$$\begin{aligned}M + M' &= A, \\MM' + N + N' &= B, \\MN' + NM' &= C, \\NN' &= D.\end{aligned}$$

La première et la dernière donnent d'abord

$$\begin{aligned}M' &= A - M, \\N' &= \frac{D}{N},\end{aligned}$$

et ces valeurs étant substituées dans les deux autres, on aura

$$\begin{aligned}M(A - M) + N + \frac{D}{N} &= B, \\ \frac{MD}{N} + N(A - M) &= C,\end{aligned}$$

lesquelles serviront à déterminer M et N.

Supposons qu'on veuille exprimer N par M, on multipliera la première par M, et on en retranchera la seconde, ce qui donnera

$$M^2(A - M) + 2MN - AN = BM - C,$$

d'où l'on tire

$$N = \frac{C - BM + AM^2 - M^3}{A - 2M},$$

et cette valeur de N, étant substituée dans l'une quelconque des deux équations précédentes, donnera une équation finale en M qui montera au sixième degré.

Maintenant je remarque que si l'une des racines de cette équation se trouve égale à $\frac{A}{2}$, et qu'on ait en même temps $C = \frac{AB}{2} - \frac{A^3}{8}$, cette valeur de M donnera $N = \frac{0}{0}$; et pour trouver la véritable valeur de N dans ce cas il faudra reprendre les équations où N montait au second degré,

lesquelles, en y faisant

$$M = \frac{A}{2} \text{ et } C = \frac{AB}{2} - \frac{A^3}{8},$$

se réduiront à cette équation unique

$$N + \frac{D}{N} = B - \frac{A^2}{4},$$

savoir

$$N^2 + \left(\frac{A^2}{4} - B\right)N + D = 0,$$

laquelle est, comme on voit, du second degré, et donnera par conséquent deux valeurs différentes de N répondantes à la même valeur de $M = \frac{A}{2}$.

D'où l'on voit qu'il ne suffit pas d'être assuré que l'équation en M a nécessairement une racine réelle, pour pouvoir l'être aussi que le facteur

$$x^2 - Mx + N = 0$$

sera réel, puisqu'il peut arriver que le coefficient N soit imaginaire, ce qui aura lieu dans le cas que nous venons d'examiner si

$$\left(\frac{A^2}{4} - B\right)^2 - 4D < 0.$$

7. Au reste, il est bon de remarquer que la valeur $\frac{A}{2}$ de M sera nécessairement une racine double de l'équation en M; c'est de quoi on peut se convaincre *a priori* par cette considération que, comme les deux facteurs

$$x^2 - Mx + N = 0, \quad x^2 - M'x + N' = 0$$

sont semblables, les coefficients correspondants M et M' doivent être les racines d'une même équation, ainsi que les coefficients N et N'; ce qui est d'ailleurs évident par les équations mêmes qui servent à déterminer ces quatre quantités, et qui sont telles, qu'elles demeurent les mêmes en y changeant M en M' et N en N'. Ainsi, comme on a trouvé $M' = A - M$, il s'ensuit que l'équation en M devra être telle, que si M est une de ses

racines, $A - M$ en soit une aussi; donc lorsque $M = \frac{A}{2}$, les deux racines M et $A - M$ deviendront égales.

On peut encore prouver la même chose par la nature même de l'équation en M ; car pour avoir cette équation il n'y aura, comme nous l'avons dit, qu'à substituer l'expression générale de N trouvée ci-dessus, et que nous désignerons, pour plus de simplicité, par $\frac{Q}{P}$, dans l'équation

$$M(A - M) + N + \frac{D}{N} = B,$$

ce qui donnera, en ôtant les fractions,

$$Q^2 - (B - AM + MP)QP + DP^2 = 0,$$

où

$$P = A - 2M \quad \text{et} \quad Q = C - BM + AM^2 - M^3.$$

Maintenant il est clair que si l'on a en même temps $P = 0$ et $Q = 0$, non-seulement l'équation précédente aura lieu elle-même, mais aussi sa différentielle, qui sera

$$2QdQ + (A - 2M)QPdM - (B - AM + MP)(QdP + PdQ) + 2DPdP = 0;$$

d'où il s'ensuit que la racine $M = \frac{A}{2}$ sera nécessairement une racine double.

8. Comme la voie de l'élimination est très-longue, et que d'ailleurs elle ne pourrait jamais conduire qu'à des résultats particuliers, il faudra tâcher de découvrir *à priori* le degré et la nature de l'équation par laquelle la quantité M devra être déterminée, ainsi que la nature des fonctions qui exprimeront les valeurs des autres quantités $N, P, Q, \dots$ en M .

Pour cela on considérera que, puisque l'équation

$$x^n - Mx^{n-1} + Nx^{n-2} - \dots = 0$$

est supposée être un facteur de l'équation proposée

$$x^m - Ax^{m-1} + Bx^{m-2} - Cx^{m-3} + \dots = 0,$$

il faudra qu'elle soit formée du produit de n facteurs simples pris parmi les m facteurs simples de celle-ci; de sorte que comme le nombre des manières différentes de prendre n choses parmi un nombre de choses égal à m est exprimé, suivant la théorie des combinaisons, par la formule

$$\frac{m(m-1)(m-2)\dots(m-n+1)}{1.2.3\dots n},$$

il s'ensuit que l'équation proposée admettra un pareil nombre de diviseurs de la forme

$$x^n - Mx^{n-1} + Nx^{n-2} - \dots = 0,$$

et qu'ainsi chaque coefficient $M, N, \dots$ sera susceptible d'autant de valeurs différentes, et par conséquent devra être déterminé par une équation d'un degré marqué par la même formule.

9. Cette proposition est connue depuis longtemps des Géomètres, et l'on a coutume de la prouver par un raisonnement semblable à celui que nous venons de faire; mais il est facile de voir que cette preuve est sujette à quelques difficultés. Car, quoiqu'il soit démontré qu'une équation du degré m peut avoir autant de différents diviseurs du degré n qu'il y a de manières de combiner m choses n à n , et qu'en même temps il paraisse hors de doute que les coefficients analogues de ces différents diviseurs doivent être donnés par une même équation dont ils seront les racines, cependant il n'est pas évident que cette équation ne pourra avoir d'autres racines, puisqu'il arrive le plus souvent que les équations qu'on trouve pour la solution des Problèmes tant algébriques que géométriques renferment bien des racines inutiles, outre celles qui servent à la résolution cherchée.

C'est pourquoi il semble qu'on ne saurait, à proprement parler, conclure autre chose du raisonnement ci-dessus, sinon que l'équation qui doit donner la valeur de chaque coefficient du diviseur cherché ne peut être d'un degré moindre que celui qu'on a assigné, sans qu'on soit en droit de prononcer qu'elle ne peut pas être non plus d'un degré plus haut.

Si l'on joint cette objection à celles que M. d'Alembert a déjà proposées dans le premier volume de ses *Opuscules*, page 227, on conviendra aisément que la proposition dont il s'agit, sur le degré de l'équation par laquelle chaque coefficient $M, N, \dots$ doit être déterminé, ne peut être admise sans une démonstration rigoureuse; mais nous nous contenterons ici de renvoyer pour cet objet à la Section IV de nos *Réflexions sur la résolution des équations* citées ci-dessus, où nous avons démontré cette proposition d'une manière qui ne laisse rien à désirer du côté de l'exactitude et de la généralité.

10. La question se réduit donc maintenant à voir si, en supposant que m soit un nombre quelconque pair donné, on peut toujours prendre le nombre n moindre que m , et tel, que le nombre

$$\frac{m(m-1)(m-2)\dots(m-n+1)}{1.2.3\dots n},$$

qu'on sait devoir être toujours entier, soit en même temps un nombre impair.

Il est d'abord visible que si m est un nombre impairement pair en sorte que $m = 2i$, i étant un nombre impair autre que l'unité, il n'y aura qu'à prendre $n = 2$, ce qui donnera la formule

$$\frac{2i(2i-1)}{1.2} = i(2i-1),$$

laquelle, à cause de i et de $2i-1$ impairs, représentera nécessairement un nombre impair. Si $m = 4i$, en supposant toujours i impair, on fera $n = 4$, ce qui donnera la formule

$$\frac{4i(4i-1)(4i-2)(4i-3)}{1.2.3.4} = \frac{i(4i-1)(2i-1)(4i-3)}{1.3},$$

laquelle représentera nécessairement un nombre impair, à cause que i , $4i-1$, $2i-1$ et $4i-3$ sont tous impairs.

On prouvera de même que, si $m = 8i$ et qu'on prenne $n = 8$, on aura une formule qui ne donnera que des nombres impairs, et ainsi de suite

d'où l'on conclura, en général, que si $m = 2^r i$, i étant un nombre impair autre que l'unité, et qu'on prenne $n = 2^r$, la formule

$$\frac{m(m-1)(m-2)\dots(m-n+1)}{1.2.3.4\dots n}$$

représentera nécessairement des nombres impairs.

En effet il est clair qu'elle deviendra dans ce cas, en écrivant le dénominateur à rebours,

$$\frac{2^r i (2^r i - 1) (2^r i - 2) (2^r i - 3) (2^r i - 4) \dots (2^r i - 2^r + 1)}{2^r (2^r - 1) (2^r - 2) (2^r - 3) (2^r - 4) \dots 1},$$

c'est-à-dire, en divisant les facteurs correspondants du numérateur et du dénominateur autant de fois par 2 qu'il est possible,

$$\frac{i (2^{r-1} i - 1) (2^{r-1} i - 2) (2^{r-1} i - 3) (2^{r-1} i - 4) \dots (2^{r-1} i - 2^{r-1} + 1)}{(2^{r-1} - 1) (2^{r-1} - 2) (2^{r-1} - 3) (2^{r-1} - 4) \dots 1},$$

où l'on voit que le numérateur et le dénominateur ne renferment plus que des facteurs impairs; de sorte que, la division faite, on aura nécessairement un quotient qui sera un nombre impair.

11. Il est donc démontré que toute équation d'un degré pair $2^r i$ (i étant un nombre quelconque impair autre que l'unité) peut être divisée par une équation du degré inférieur 2^r , dont chaque coefficient sera déterminé par une équation d'un degré impair; de sorte qu'on sera d'abord assuré qu'un quelconque de ces coefficients aura une valeur réelle, et qu'il ne restera plus qu'à prouver que les autres devront aussi avoir des valeurs réelles; car quoique chaque coefficient en particulier puisse avoir une valeur réelle, étant donné par une équation de degré impair, cependant on n'en saurait conclure que tous les coefficients auront à la fois des valeurs réelles, puisqu'il n'est pas démontré que les valeurs réelles que ces coefficients doivent avoir soient précisément celles qui se correspondent et qui peuvent avoir lieu en même temps.

Or nous avons déjà fait voir plus haut que, dès que l'un des coefficients est supposé connu, on peut toujours exprimer tous les autres par

des fonctions rationnelles de celui-là, à l'exception de quelques cas particuliers où il arrive que la détermination de ces coefficients demande encore la résolution d'une équation de deux ou de plusieurs dimensions; ainsi tout se réduit à déterminer *a priori* quels sont ces cas, et quel est le degré de l'équation qu'on a alors à résoudre.

12. Cette question dépend de celle dont nous avons donné la solution ailleurs [*Reflexions sur la résolution des équations*, Section IV, n° 100 (*)], et qui consiste à trouver la valeur d'une fonction quelconque des racines d'une équation donnée, lorsqu'on connaît déjà celle d'une autre fonction quelconque des mêmes racines. Car il est visible que les coefficients M, N, ... du diviseur

$$x^n - Mx^{n-1} + Nx^{n-2} - Px^{n-3} + \dots = 0$$

sont des fonctions des racines de l'équation proposée

$$x^n - Ax^{n-1} + Bx^{n-2} - Cx^{n-3} + \dots = 0,$$

et il est facile de conclure de ce que nous avons dit dans le n° 7, que le coefficient M en particulier sera égal à la somme de n quelconques des m racines de la proposée, que le coefficient N sera égal à la somme des produits deux à deux de ces n racines, que le coefficient P sera égal à la somme de leurs produits trois à trois, et ainsi de suite.

13. En appliquant donc à ce cas notre solution générale, on verra qu'on peut toujours exprimer par des fonctions rationnelles d'un quelconque des coefficients M, N, P, ... la valeur de chacun des autres, excepté les seuls cas où, l'équation par laquelle ce coefficient-là doit être déterminé ayant des racines égales, on voudra prendre précisément une de ces racines pour sa valeur.

Alors chacun des autres coefficients devra nécessairement être déterminé par une équation dont le degré sera égal au nombre de ces racines égales, et dont les coefficients seront des fonctions rationnelles du même coefficient, qu'on suppose connu.

(*) *Oeuvres de Lagrange*, t. III, p. 374.

De là il s'ensuit :

1° Que si la valeur réelle que doit avoir nécessairement un quelconque des coefficients M, N, P, ..., dans le cas du n° 10, est une racine inégale de l'équation par laquelle ce coefficient doit être déterminé, on sera assuré que tous les autres coefficients auront aussi nécessairement des valeurs réelles;

2° Que si cette valeur est une racine égale de la même équation, alors pourvu que l'exposant de l'égalité soit impair, c'est-à-dire que ce soit une racine triple, ou quintuple, ou, etc., on sera aussi assuré que les autres coefficients auront des valeurs réelles, puisqu'ils dépendront d'équations de degrés impairs; mais il n'en serait pas de même si le degré de la multiplicité était pair.

14. Considérons, en général, une équation quelconque du degré μ , laquelle ait ν racines inégales, π racines inégales entre elles, mais dont chacune en ait $p-1$ autres égales, ρ racines inégales entre elles, et dont chacune en ait $r-1$ autres égales, et ainsi de suite, en sorte que l'on ait

$$\mu = \nu + \pi p + \rho r + \dots$$

On sait par la théorie des racines égales que l'équation proposée pourra toujours se décomposer, sans aucune extraction de racines, en différentes équations dont chacune renferme toutes les racines inégales du même ordre; c'est-à-dire en une équation du degré ν qui ne renferme que les racines simples et inégales, en une équation du degré π qui ne renferme que les racines inégales dont chacune se trouve p fois dans la proposée, en une équation du degré ρ qui ne renferme que les racines inégales dont chacune se trouve r fois dans la proposée, et ainsi de suite.

Maintenant, si l'on suppose que l'exposant μ soit un nombre quelconque impair, il faudra que la somme des nombres $\nu, \pi p, \rho r, \dots$ soit un nombre impair, et par conséquent il faudra qu'un quelconque de ces nombres soit impair; si ν est impair, l'équation du degré ν aura nécessairement une racine réelle, laquelle sera une racine inégale de l'équation proposée; si πp est impair il faudra que π et p soient l'un et l'autre

impairs; donc l'équation du degré π aura nécessairement une racine réelle qui sera une racine égale de la proposée, dont l'exposant d'égalité sera p , et par conséquent aussi impair; il en sera de même si pr est impair, et ainsi de suite.

15. De là et de ce qu'on a démontré plus haut, il s'ensuit donc que toute équation du degré 2^i (i étant un nombre impair) pourra toujours avoir pour diviseur une équation du degré 2^i dont les coefficients seront nécessairement des quantités réelles (11 et 13); de sorte qu'en divisant l'équation proposée par cette dernière on aura pour quotient une autre équation du degré $2^i(i-1)$, laquelle aura aussi tous ses coefficients réels.

Or, comme i est supposé un nombre impair, $i-1$ sera un nombre pair qu'on pourra représenter, en général, par 2^k (k étant un nombre impair); donc l'exposant $2^i(i-1)$ deviendra 2^{i+k} , et l'on pourra prouver de même que l'équation de ce degré pourra se décomposer de nouveau en deux autres équations réelles, l'une du degré 2^{i+k} et l'autre du degré $2^{i+k}(k-1)$; et faisant $k-1=2^l$ (l étant un nombre impair) cette dernière équation aura pour exposant le nombre 2^{i+k+l} , et pourra par conséquent se partager de nouveau en deux équations, l'une du degré 2^{i+k+l} , l'autre du degré $2^{i+k+l}(l-1)$, et ainsi de suite.

De sorte que par cette méthode on pourra toujours décomposer toute équation d'un degré pair quelconque en autant d'équations réelles, dont les degrés soient marqués par des puissances de 2, qu'il y aura de paires de puissances dans le degré de l'équation proposée. Ainsi une équation du sixième degré pourra se décomposer en deux, l'une du second degré, l'autre du quatrième; une équation du douzième degré pourra se décomposer en deux, l'une du quatrième degré, l'autre du huitième, et ainsi du reste.

16. Il ne reste donc plus qu'à considérer les équations des degrés marqués par des puissances de 2. Il est facile de voir que dans ce cas la formule du n° 10 donnera toujours des nombres pairs, quelque nombre qu'on prenne pour n , au moins tant que n sera moindre que m , comme

il le faut; de sorte que la détermination des coefficients $M, N, P, \dots$ des diviseurs de ces sortes d'équations dépendra toujours nécessairement d'une équation de degré pair, dans laquelle on ne pourra par conséquent s'assurer de l'existence d'une racine réelle, à moins que le dernier terme ne soit négatif (1).

Désignons, en général, l'exposant m de l'équation proposée par 2^r , et supposons que l'exposant n du diviseur soit la moitié de celui-là, c'est-à-dire égal à 2^{r-1} ; en ce cas la formule du numéro cité deviendra, en disposant le dénominateur au rebours,

$$\frac{2^r(2^r-1)(2^r-2)(2^r-3)\dots(2^r-2^{r-1}+1)}{2^{r-1}(2^{r-1}-1)(2^{r-1}-2)(2^{r-1}-3)\dots 1},$$

c'est-à-dire, en divisant les facteurs correspondants du numérateur et du dénominateur autant de fois par 2 qu'il est possible,

$$\frac{2(2^r-1)(2^{r-1}-1)(2^r-3)(2^{r-2}-1)\dots(2^r-2^{r-1}+1)}{1(2^{r-1}-1)(2^{r-2}-1)(2^{r-3}-1)\dots 1},$$

où l'on voit que tous les facteurs du numérateur sont impairs à l'exception du premier qui est 2, et que tous ceux du dénominateur sont aussi impairs; d'où il s'ensuit que cette formule représentera toujours des nombres impairement pairs.

17. Cela posé, considérons l'équation par laquelle doit se déterminer le coefficient M ; elle sera, comme on vient de le voir, d'un degré impairement pair, et aura pour racines toutes les différentes sommes possibles qu'on peut faire des racines de l'équation proposée en ne prenant à la fois qu'un nombre de ces racines qui soit la moitié du nombre total (12).

Qu'on fasse maintenant dans cette équation $M = \frac{A-u}{2}$, A étant le coefficient du second terme de l'équation proposée et u une nouvelle inconnue, on aura une transformée en u du même degré, dont les racines seront exprimées par $A - 2M$, c'est-à-dire qu'elles seront égales aux différents résidus qu'on aura en retranchant successivement de la somme totale des racines de la proposée, somme qui est égale à A , le double des

différentes sommes particulières qu'on peut faire de ces racines en ne les prenant qu'au nombre de la moitié; de sorte que les racines dont il s'agit ne seront autre chose que les différences entre la somme de la moitié du nombre des racines de la proposée et la somme de l'autre moitié, en prenant ces sommes de toutes les différentes manières possibles.

Par exemple, si l'équation proposée est du quatrième degré et a , par conséquent, quatre racines a, b, c, d , on aura

$$A = a + b + c + d,$$

et les valeurs de M seront

$$a + b, \quad a + c, \quad a + d, \quad b + c, \quad b + d, \quad c + d,$$

done les valeurs de

$$u = A - 2M$$

seront

$$c + d - a - b, \quad b + d - a - c, \quad b + c - a - d, \\ a + d - b - c, \quad a + c - b - d, \quad a + b - c - d,$$

et ainsi des autres équations des degrés supérieurs.

18. De là il est d'abord facile de conclure que l'équation en u manquera de toutes les puissances impaires, puisqu'il est évident que chaque racine positive doit avoir nécessairement une racine négative égale; ce qu'on voit clairement dans l'Exemple précédent, où les quantités

$$c + d - a - b, \quad b + d - a - c, \quad b + c - a - d,$$

sont les négatives des quantités

$$a + b - c - d, \quad a + c - b - d, \quad a + d - b - c.$$

Donc, si l'on fait $u^2 = t$, l'équation en u s'abaissera à un degré moindre de la moitié, et comme on a prouvé que le degré de l'équation en u est pairément impair, il s'ensuit que le degré de l'équation en t sera nécessairement impair; de sorte que cette équation aura nécessairement une racine réelle, laquelle sera positive si son dernier terme est négatif, et négative s'il est positif (1). Or, pour que u , et par conséquent M , ait

une valeur réelle, il faut que celle de t soit réelle et positive; par conséquent la question est réduite à voir si le dernier terme de l'équation en t sera négatif; et comme le dernier terme de toute équation d'un degré impair pris avec un signe contraire est égal au produit de toutes les racines, tout consistera à voir si le produit de toutes les différentes valeurs de t est une quantité positive ou non.

19. Pour parvenir à ce but avec plus de facilité, considérons d'abord le cas où l'équation proposée est du quatrième degré, et dans lequel nous avons déjà vu que les différentes valeurs de u sont

$$a + b - c - d, \quad a + c - b - d, \quad a + d - b - c, \\ c + d - a - b, \quad b + d - a - c, \quad b + c - a - d;$$

il est clair que, comme les trois dernières quantités sont égales aux trois premières prises négativement, les différentes valeurs de u^2 ou t seront seulement ces trois-ci

$$(a + b - c - d)^2, \quad (a + c - b - d)^2, \quad (a + d - b - c)^2;$$

de sorte que le produit de ces trois valeurs sera égal au carré de la quantité

$$(a + b - c - d)(a + c - b - d)(a + d - b - c),$$

et il ne s'agira plus que de voir si ce carré est toujours une quantité positive, quelles que soient les racines a, b, c, d . Il est d'abord clair que, si ces racines sont toutes réelles, la quantité précédente sera aussi toute réelle, en sorte que son carré sera nécessairement une quantité réelle positive; mais il peut n'en être pas de même s'il y a des racines imaginaires, d'autant que la forme des racines imaginaires est encore regardée comme inconnue.

20. M. Euler, ayant supposé pour plus de facilité le coefficient A du second terme de la proposée nul, a trouvé, à la place de la quantité précédente, celle-ci

$$(a + b)(a + c)(a + d),$$

qui, à cause de $a + b + c + d = 0$, est égale à celle-là divisée par 8; et

il se contente ensuite de dire que ce produit est déterminable, comme on sait, par les quantités B, C, D, et qu'il sera par conséquent réel; mais, pour que cette conséquence soit légitime, il faut prouver qu'on peut déterminer ce produit par une expression rationnelle des mêmes quantités: c'est ce que M. Euler n'a point fait, du moins d'une manière directe et *à priori*.

Il est vrai que le carré

$$(a+b)^2(a+c)^2(a+d)^2$$

sera toujours une fonction rationnelle des coefficients B, C, D; mais la difficulté consiste précisément à démontrer que sa racine en sera une aussi.

Pour sentir davantage la force de cette objection, il n'y a qu'à considérer, par exemple, la quantité

$$(a-b)(a-c)(a-d)(b-c)(b-d)(c-d),$$

il est certain que le carré de cette quantité peut s'exprimer par une fonction rationnelle des coefficients B, C, D; mais il n'en est pas ainsi de la quantité elle-même: en effet, on trouve pour la valeur du carré dont il s'agit l'expression

$$4^4D^3 - 2^3.4^2B^2D^2 + 4^2.3^2C^2BD + 4^2B^2D - 4^2C^2B^2 - 3^2C^2,$$

laquelle n'est pas un carré en général; de sorte qu'on ne saurait en conclure que sa racine sera toujours une quantité réelle.

21. Le caractère, auquel on peut reconnaître *à priori* si une fonction proposée des racines d'une équation quelconque peut se déterminer par une expression rationnelle des coefficients de cette équation, consiste, comme nous l'avons démontré dans notre *Mémoire sur les équations*, en ce que cette fonction doit être telle, qu'elle ne change point de valeur, quelque permutation qu'on y fasse entre les racines dont elle est composée; ainsi il n'y a qu'à voir si cette condition a lieu ou non dans la fonction

$$(a+b-c-d)(a+c-b-d)(a+d-b-c);$$

comme les trois racines b, c, d y entrent également, il est d'abord visible que les permutations qu'on pourrait faire entre ces racines ne produiraient aucun changement dans la fonction; mais on ne peut pas dire tout à fait la même chose par rapport à la racine a , puisqu'elle n'est pas disposée à l'égard des autres comme celles-ci le sont entre elles. Voyons donc ce que donneront les échanges de a en b , en c , en d .

En changeant a en b , les trois facteurs

$$a+b-c-d, \quad a+c-b-d, \quad a+d-b-c$$

se changent en ces trois-ci

$$b+a-c-d, \quad b+c-a-d, \quad b+d-a-c;$$

par où l'on voit que le premier demeure le même, que le second devient le troisième avec un signe contraire, et que le troisième devient le second avec un signe contraire. On trouvera pareillement que, en changeant a en c ou en d , il y aura toujours un des trois facteurs qui demeurera le même, tandis que les deux autres se changeront l'un dans l'autre en changeant en même temps de signes; d'où il est facile de conclure que le produit des trois facteurs demeurera toujours le même.

La circonstance qui fait que ce produit ne varie point, c'est que les facteurs qui se changent l'un dans l'autre, en changeant en même temps de signes, sont en nombre pair; car si les facteurs qui changent de signes étaient en nombre impair, alors il est facile de voir que le produit dont il s'agit conserverait à la vérité la même valeur absolue, mais en changeant de signe: c'est là la raison pourquoi la fonction dont on a parlé ci-dessus (20)

$$(a-b)(a-c)(a-d)(b-c)(b-d)(c-d)$$

ne saurait être exprimée par les coefficients A, B, C, D d'une manière rationnelle; car en changeant, par exemple, a en b , le facteur $a-b$ devient simplement négatif, les facteurs $a-c, a-d$ se changent dans les facteurs $b-c, b-d$, et le dernier facteur $c-d$ demeure le même; de

sorte que, puisqu'il y en a un qui change simplement de signe, un qui demeure tout à fait le même, et quatre dont deux se changent dans les deux autres, il s'ensuit que le produit total devra devenir négatif.

22. Il est facile maintenant d'appliquer le même raisonnement au cas où il y aura plus de quatre racines, et de s'assurer *à priori* que le dernier terme de la réduite en t sera toujours un carré avec le signe $-$. Supposons, par exemple, que les racines de l'équation proposée soient au nombre de six, savoir a, b, c, d, e, f (quoique à proprement parler nous n'ayons besoin de considérer ici que les équations dont les degrés sont des puissances de 2, cependant nous prendrons le cas d'une équation du sixième degré, parce qu'il est plus simple que celui d'une équation du huitième, et qu'il peut servir à faire voir que la proposition est générale pour toutes les équations des degrés pairs), on verra aisément, par ce qui a été démontré plus haut, que le dernier terme de la réduite en t sera égal au carré du produit de ces dix quantités

$$\begin{aligned} & a + b + c - d - e - f, \\ & a + b + d - c - e - f, \\ & a + b + e - c - d - f, \\ & a + b + f - c - d - e, \\ & a + c + d - b - e - f, \\ & a + c + e - b - d - f, \\ & a + c + f - b - d - e, \\ & a + d + e - b - c - f, \\ & a + d + f - b - c - e, \\ & a + e + f - b - c - d, \end{aligned}$$

pris avec un signe contraire; de sorte qu'il ne s'agira que de voir si ce produit demeure le même en faisant toutes les permutations possibles entre les six racines $a, b, c, \dots$; auquel cas on sera assuré qu'il pourra être exprimé par une fonction rationnelle des coefficients $A, B, C, \dots$ de l'équation proposée.

Pour cela, je remarque d'abord que les dix quantités précédentes sont

telles, qu'elles renferment toutes les permutations possibles entre les cinq racines b, c, d, e, f , puisqu'elles ne sont autre chose que les différentes valeurs de la quantité

$$a + b + c - d - e - f,$$

qui résultent de toutes les échanges possibles entre les cinq lettres b, c, d, e, f , la lettre a étant regardée comme fixe; d'où il s'ensuit qu'en faisant le produit de ces dix quantités on aura une fonction des racines $a, b, c, \dots$ qui sera telle, qu'elle ne recevra aucun changement par les permutations des cinq racines b, c, d, e, f entre elles; de sorte qu'il suffira de considérer les résultats des échanges de la racine a dans les cinq autres; et comme les échanges de celles-ci entre elles ne produisent aucun changement dans la fonction dont il s'agit, il est clair qu'on aura le même résultat, soit qu'on change a en b , ou a en c , ou a en d , ou, etc.; par conséquent, il suffira de considérer une seule échange comme celle de a en b , et si elle ne fait point varier le produit des dix quantités ci-dessus, on sera assuré que ce produit sera déterminable par une fonction rationnelle des coefficients $A, B, C, \dots$ de l'équation proposée.

Or, en changeant a en b , il est visible que les quatre premières quantités, où les lettres a et b se trouvent jointes avec le signe $+$, demeureront les mêmes, puisque $a + b$ est la même chose que $b + a$, et que les six dernières, où les lettres a et b ont des signes différents, se changeront l'une dans l'autre en changeant en même temps de signes; d'où l'on conclura que le produit de toutes ces quantités demeurera nécessairement le même, puisque les facteurs qui changent de signes sont en nombre pair.

23. On considérera maintenant que, pour avoir les dix quantités qui sont les facteurs du produit en question, il n'y a qu'à ajouter successivement à la racine a les sommes des autres cinq racines prises deux à deux, et en retrancher en même temps les racines restantes; d'où il est d'abord facile de conclure que, si le nombre de toutes les racines était $2n$, il faudrait, pour avoir les facteurs dont il s'agit, ajouter successivement à la racine a les sommes des autres $2n - 1$ racines prises $n - 1$ à $n - 1$, et

en retrancher en même temps les racines restantes; moyennant quoi le nombre de ces facteurs sera exprimé, comme il résulte de la théorie des combinaisons, par

$$\frac{(2n-1)(2n-2)(2n-3)\dots(n+1)}{1.2.3\dots(n-1)}.$$

Ensuite on considérera que, en changeant a en b , quelques-uns de ces facteurs demeurent les mêmes, tandis que les autres se changent entre eux en changeant en même temps de signes; de sorte que pour savoir le nombre de ces derniers il suffira de retrancher du nombre total celui des facteurs qui demeurent les mêmes en changeant a en b . Or il est visible que ces facteurs-ci se trouveront en ajoutant successivement à la somme $a+b$ les différentes sommes des autres $2n-2$ racines prises $n-2$ à $n-2$, et retranchant en même temps les racines restantes; de sorte que le nombre de ces facteurs invariables sera exprimé par

$$\frac{(2n-2)(2n-3)\dots(n+1)}{1.2\dots(n-2)};$$

donc, retranchant cette quantité de la précédente, on aura

$$\frac{(2n-1)(2n-2)(2n-3)\dots(n+1)}{1.2.3\dots(n-1)} - \frac{(2n-2)(2n-3)\dots(n+1)}{1.2\dots(n-2)},$$

ou bien, en réduisant au même dénominateur,

$$\frac{(2n-2)(2n-3)(2n-4)\dots n}{1.2.3\dots(n-1)}.$$

pour l'expression du nombre des facteurs qui s'échangent entre eux en changeant en même temps de signes.

Ainsi la question est de voir si ce nombre sera toujours pair; or c'est ce qui est évident, car si l'on divise le haut et le bas de la fraction par $n-1$, elle deviendra

$$2 \cdot \frac{(2n-3)(2n-4)(2n-5)\dots n}{1.2.3\dots(n-2)};$$

mais la quantité

$$\frac{(2n-3)(2n-4)(2n-5)\dots n}{1.2.3\dots(n-2)}$$

est toujours un nombre entier, puisque c'est le coefficient du $(n-1)^{\text{ième}}$ terme d'un binôme élevé à la puissance $2n-3$; donc le double de ce nombre sera toujours nécessairement un nombre pair.

24. Nous venons donc de démontrer rigoureusement que, en considérant une équation du degré 2^r comme exactement divisible par une autre équation du degré 2^{r-1} , le coefficient M du second terme de celle-ci sera nécessairement déterminé par une équation telle, qu'en y faisant

$$M = \frac{A-u}{2}$$

(A étant le coefficient du second terme de la proposée), et ensuite

$$u^2 = t,$$

il viendra une transformée en t d'un degré impair, et qui aura son dernier terme négatif en sorte que l'inconnue t aura toujours une valeur réelle positive; moyennant quoi la valeur de u sera aussi réelle.

Donc, puisque M a nécessairement une valeur réelle, il s'ensuit (13) que tous les autres coefficients $N, P, Q, \dots$ du diviseur en question auront aussi chacun une valeur réelle, à moins que la valeur réelle de M ne soit une racine multiple de l'équation en M ; auquel cas il peut arriver que les valeurs des autres coefficients soient imaginaires, comme nous l'avons déjà remarqué plus haut.

Il est donc nécessaire d'examiner ce cas, et de voir comment il faudrait s'y prendre pour trouver alors un diviseur tout rationnel de l'équation proposée.

Je commence d'abord par remarquer que comme $u = \sqrt{t}$, on aura $M = \frac{A \pm \sqrt{t}}{2}$; d'où l'on voit que chaque valeur de t donnera deux valeurs de M , qui ne seront jamais égales, à moins que l'on n'ait $t = 0$; de plus

il est clair que si toutes ces valeurs de t sont inégales, celles de M le seront aussi; de sorte que l'équation en M n'aura proprement de racines égales que dans deux cas, l'un où l'équation en t en aura elle-même d'égales, l'autre où l'équation en t aura une ou plusieurs racines égales à zéro.

Supposons d'abord que l'équation en t n'ait aucune racine égale à zéro, mais qu'elle en ait plusieurs égales entre elles; comme cette équation est d'un degré impair, on prouvera par un raisonnement semblable à celui du n° 14 qu'elle aura nécessairement une racine réelle inégale, ou égale d'un ordre d'égalité marqué par un nombre impair; d'où il est facile de conclure que l'équation en M aura aussi nécessairement une pareille racine, et même deux, en sorte que chacun des autres coefficients $N, P, Q, \dots$ aura nécessairement une valeur réelle (13).

Ainsi, quelles que soient les racines de l'équation en t , pourvu qu'aucune d'elles ne soit nulle, on sera assuré que les coefficients du diviseur auront tous des valeurs réelles.

25. Il n'en est pas de même lorsque l'équation en t a une racine nulle, ce qui arrive quand son dernier terme se trouve égal à zéro. Dans ce cas il est clair que la racine $t = 0$ donnera dans l'équation en M deux racines égales à $\frac{A}{2}$; de sorte que chacun des autres coefficients $N, P, \dots$ dépendra nécessairement d'une équation du second degré qui pourra n'avoir aucune racine réelle; il est vrai que l'équation en t pourra avoir encore d'autres racines réelles, mais la difficulté consiste à prouver qu'elle en aura toujours de telles. En effet cette équation, étant divisée par t , ne montera plus qu'à un degré pair; de sorte qu'il faudrait démontrer, en général, que le dernier terme sera toujours négatif, ce qui d'ailleurs n'est pas vrai.

Pour donner un exemple de l'insuffisance de la méthode précédente dans le cas dont il s'agit, nous reprendrons celui du n° 6 où l'on propose de trouver un diviseur du second degré

$$x^2 - Mx + N = 0$$

de l'équation générale du quatrième degré

$$x^4 - Ax^3 + Bx^2 - Cx + D = 0.$$

En substituant l'expression de N en M , et faisant ensuite

$$M = \frac{A + u}{2} = \frac{A + \sqrt{t}}{2},$$

on trouve cette réduite en t

$$P - (3A^2 - 8B)P + (3A^4 - 16A^2B + 16B^2 + 16AC - 64D)t - (A^3 - 4AB + 8C)^2 = 0,$$

laquelle a, comme on voit, son dernier terme toujours négatif.

Maintenant, si l'on a

$$A^3 - 4AB + 8C = 0,$$

il est clair que l'équation précédente aura d'abord la racine $t = 0$, laquelle donnant $M = \frac{A}{2}$ on tombera dans le cas que l'on a déjà examiné dans le numéro cité, et où l'autre coefficient N du diviseur

$$x^2 - Mx + N = 0$$

dépendra d'une équation du second degré qui n'aura de racines réelles que tant que $4D$ ne surpassera pas $\left(\frac{A^2}{4} - B\right)^2$; de sorte que dans le cas où

$$D > \left(\frac{A^2}{8} - \frac{B}{2}\right)^2$$

le coefficient N sera imaginaire, et l'équation proposée du quatrième degré se trouvera par ce moyen décomposée en deux équations imaginaires du second degré, lesquelles seront

$$x^2 - \frac{A}{2}x + N' = 0, \quad x^2 - \frac{A}{2}x + N'' = 0,$$

N' et N'' étant les racines de l'équation

$$N^2 + \left(\frac{A^2}{4} - B\right)N + D = 0.$$

Pour avoir donc des facteurs tout réels il faudra dans ce cas chercher une autre valeur de t ; or l'équation en t étant toute divisée par t devient

$$t^2 - (3A^2 - 8B)t + 3A^4 - 16A^2B + 16B^3 + 16AC - 64D = 0,$$

ou bien, en substituant à la place de C sa valeur $-\frac{A^3 + 4AB}{8}$,

$$t^2 - (3A^2 - 8B)t + (A^2 - 4B)^2 - 64D = 0,$$

dans laquelle on voit que le dernier terme sera positif si

$$(A^2 - 4B)^2 > 64D;$$

de sorte qu'on ne peut pas être assuré, en général, que cette équation aura des racines réelles, à moins que l'on ne considère la condition qui est particulière aux équations du second degré.

26. Cependant si l'on observe que la condition

$$(A^2 - 4B)^2 > 64D$$

est celle qui rend réelles les racines de l'équation en N ci-dessus, et que la condition opposée

$$(A^2 - 4B)^2 < 64D$$

est celle qui rend le dernier terme de l'équation précédente en t , négatif, on en pourra conclure d'abord qu'il est toujours possible d'avoir pour les coefficients M et N des valeurs réelles.

En effet :

1° Soit

$$(A^2 - 4B)^2 - 64D = p$$

(p désignant une quantité positive), on prendra dans ce cas la racine $t = 0$, laquelle donnera

$$M = \frac{A}{2} \quad \text{et} \quad N = -\frac{A^2}{8} + \frac{B}{2} \pm \frac{\sqrt{p}}{8}.$$

2° Soit

$$64D - (A^2 - 4B)^2 = p,$$

on prendra, dans ce cas, pour t la racine positive de l'équation

$$t^2 - (3A^2 - 8B)t - p = 0,$$

et l'on aura (6)

$$M = \frac{A \pm \sqrt{t}}{2} \quad \text{et} \quad N = \frac{C - BM + AM^2 - M^3}{A - 2M}.$$

27. Mais, pour pouvoir résoudre la difficulté dont il s'agit d'une manière générale et applicable aux équations de tous les degrés, il faut employer d'autres principes.

Reprenons pour cet effet l'équation proposée

$$x^m - Ax^{m-1} + Bx^{m-2} - Cx^{m-3} + \dots = 0,$$

où $m = 2^n$, et considérons les deux facteurs

$$x^n - Mx^{n-1} + Nx^{n-2} - Px^{n-3} + \dots = 0,$$

$$x^n - M'x^{n-1} + N'x^{n-2} - P'x^{n-3} + \dots = 0,$$

dont on suppose qu'elle soit formée, n étant égal à $2^{n-1} = \frac{m}{2}$; qu'on fasse, ce qui est permis,

$$M = \frac{\alpha + \mu}{2}, \quad M' = \frac{\alpha - \mu}{2},$$

$$N = \frac{\beta + \nu}{2}, \quad N' = \frac{\beta - \nu}{2},$$

$$P = \frac{\gamma + \varpi}{2}, \quad P' = \frac{\gamma - \varpi}{2},$$

$$\dots, \dots$$

c'est-à-dire qu'on introduise à la place des coefficients indéterminés M , M' , N , N' , P , P' , ..., leurs sommes

$$M + M' = \alpha, \quad N + N' = \beta, \quad P + P' = \gamma, \dots$$

et leurs différences

$$M - M' = \mu, \quad N - N' = \nu, \quad P - P' = \varpi, \dots,$$

et l'on trouvera (3) m , ou $2n$ équations entre les m indéterminés $\alpha, \beta, \gamma, \dots, \mu, \nu, \varpi, \dots$, par lesquelles on pourra déterminer chacune de ces inconnues.

Qu'on suppose maintenant

$$u = a\mu + b\nu + c\varpi + \dots,$$

$a, b, c, \dots$ étant des coefficients quelconques arbitraires, et qu'on introduise partout l'indéterminée u à la place d'une quelconque des indéterminées $\mu, \nu, \varpi, \dots$, par exemple à la place de μ , en substituant $\frac{u - b\nu - c\varpi - \dots}{a}$ au lieu de μ , on aura $2n$ équations entre les $2n$ inconnues $\alpha, \beta, \gamma, \dots, u, \nu, \varpi, \dots$, d'où, éliminant les $2n - 1$ inconnues $\alpha, \beta, \gamma, \dots, \nu, \varpi, \dots$, il viendra une équation en u , qui sera du même degré et assujettie aux mêmes conditions que celle du n° 17, comme je vais le démontrer.

28. Dénotons les $2n$ racines de l'équation proposée par

$$x', x'', x''', \dots, x^{(2n)},$$

et comme on suppose que cette équation soit le produit de ces deux-ci

$$x^n - Mx^{n-1} + Nx^{n-2} - Px^{n-3} + \dots = 0,$$

$$x^n - M'x^{n-1} + N'x^{n-2} - P'x^{n-3} + \dots = 0,$$

il est visible, par la théorie des équations, que l'une de ces équations aura pour racines n quelconques des $2n$ racines $x', x'', x''', \dots, x^{(2n)}$, et que l'autre aura pour racines les n racines restantes; ainsi prenant $x', x'', x''', \dots, x^{(n)}$ pour les racines de

$$x^n - Mx^{n-1} + Nx^{n-2} - Px^{n-3} + \dots = 0,$$

et $x^{(n+1)}, x^{(n+2)}, x^{(n+3)}, \dots, x^{(2n)}$ pour les racines de

$$x^n - M'x^{n-1} + N'x^{n-2} - P'x^{n-3} + \dots = 0,$$

on aura, comme on sait,

$$M = x' + x'' + x''' + \dots + x^{(n)},$$

$$N = x'x'' + x'x''' + x''x''' + \dots + x^{(n-1)}x^{(n)},$$

$$P = x'x''x''' + x'x''x^{(4)} + x'x''x^{(5)} + \dots + x^{(n-2)}x^{(n-1)}x^{(n)},$$

$$\dots$$

$$M' = x^{(n+1)} + x^{(n+2)} + x^{(n+3)} + \dots + x^{(2n)},$$

$$N' = x^{(n+1)}x^{(n+2)} + x^{(n+1)}x^{(n+3)} + x^{(n+2)}x^{(n+3)} + \dots + x^{(2n-1)}x^{(2n)},$$

$$P' = x^{(n+1)}x^{(n+2)}x^{(n+3)} + x^{(n+1)}x^{(n+3)}x^{(n+4)} + x^{(n+2)}x^{(n+3)}x^{(n+4)} + \dots + x^{(2n-2)}x^{(2n-1)}x^{(2n)},$$

$$\dots$$

Donc

$$\alpha = x' + x'' + x''' + \dots + x^{(n)} + x^{(n+1)} + x^{(n+2)} + x^{(n+3)} + \dots + x^{(2n)} = A,$$

$$\beta = x'x'' + x'x''' + x''x''' + \dots + x^{(n-1)}x^{(n)} + x^{(n-1)}x^{(n+1)} + x^{(n-1)}x^{(n+2)} + \dots + x^{(2n-1)}x^{(2n)},$$

$$\gamma = x'x''x''' + x'x''x^{(4)} + x'x''x^{(5)} + \dots + x^{(n-2)}x^{(n-1)}x^{(n)} + x^{(n-1)}x^{(n+1)}x^{(n+2)} + x^{(n-1)}x^{(n+2)}x^{(n+3)} + \dots + x^{(2n-2)}x^{(2n-1)}x^{(2n)},$$

et ainsi de suite.

$$\mu = x' + x'' + x''' + \dots + x^{(n)} - x^{(n+1)} - x^{(n+2)} - x^{(n+3)} - \dots - x^{(2n)},$$

$$\nu = x'x'' + x'x''' + x''x''' + \dots + x^{(n-1)}x^{(n)} - x^{(n-1)}x^{(n+1)} - x^{(n-1)}x^{(n+2)} - x^{(n-1)}x^{(n+3)} - \dots - x^{(2n-1)}x^{(2n)},$$

$$\varpi = x'x''x''' + x'x''x^{(4)} + x'x''x^{(5)} + \dots + x^{(n-2)}x^{(n-1)}x^{(n)} - x^{(n-1)}x^{(n+1)}x^{(n+2)} - x^{(n-1)}x^{(n+2)}x^{(n+3)} - \dots - x^{(2n-2)}x^{(2n-1)}x^{(2n)},$$

et ainsi de suite.

Donc, puisque

$$u = a\mu + b\nu + c\varpi + \dots$$

on connaîtra quelle fonction des racines $x', x'', x''', \dots, x^{(2n)}$ doit être la quantité u ; et de là on pourra déterminer *à priori* le degré et la forme de l'équation en u par la considération de ses racines, lesquelles ne seront autre chose que les différentes valeurs que la fonction dont il s'agit pourra recevoir, en faisant entre les racines $x', x'', x''', \dots, x^{(2n)}$ toutes les permutations possibles, comme nous l'avons expliqué suffisamment ailleurs.

29. Donc :

1° Comme le nombre des quantités $x', x'', x''', \dots, x^{(2n)}$ est $2n$, on sait

que le nombre de toutes les permutations possibles sera représenté par

$$1.2.3.4...2n;$$

mais il est visible que les fonctions $\mu, \nu, \varpi, \dots$ ne changent point de forme en faisant toutes les permutations possibles entre les n quantités $x', x'', x''', \dots, x^{(n)}$, permutations dont le nombre est exprimé par $1.2.3...n$, et qu'il en est de même à l'égard des permutations entre les autres n quantités $x^{(n+1)}, x^{(n+2)}, x^{(n+3)}, \dots, x^{(2n)}$; donc, puisque chacune de ces permutations se combine avec toutes les autres dans le nombre total des combinaisons $1.2.3...2n$, il s'ensuit que pour avoir le nombre des combinaisons utiles, c'est-à-dire qui donnent des expressions différentes de u , il faudra diviser deux fois le nombre $1.2.3...2n$ par le nombre $1.2.3...n$, ce qui donnera celui-ci

$$\frac{1.2.3...2n}{(1.2.3...n)^2} \text{ ou bien } \frac{2n(2n-1)(2n-2)...(n+1)}{n(n-1)(n-2)...1},$$

nombre qui, en supposant $m=2^r$ et par conséquent $n=2^{r-1}$, sera impairément pair, comme nous l'avons vu dans le n° 16.

2° Il est clair que si l'on échange à la fois les quantités $x', x'', x''', \dots, x^{(n)}$ en $x^{(n+1)}, x^{(n+2)}, x^{(n+3)}, \dots, x^{(2n)}$, dans les expressions de $\mu, \nu, \varpi, \dots$, ces expressions changeront simplement de signes sans changer de valeur; donc toutes les valeurs particulières de la fonction u seront deux à deux égales et de signes contraires; de sorte que l'équation en u , dont le degré doit être impairément pair, manquera de toutes les puissances impaires, et pourra se transformer par la supposition de $u^2=t$ en une équation en t d'un degré impair.

3° On peut démontrer, par un raisonnement analogue à celui des nos 22 et 23, que le dernier terme de la transformée en t dont nous parlons sera toujours négatif, étant nécessairement égal au carré d'une fonction rationnelle des coefficients $A, B, C, \dots$ de l'équation proposée, affecté du signe $-$. Car il est d'abord clair que si l'on supposait simplement $u=\mu$, on aurait le cas des numéros cités, puisque les lettres $a, b, c, d, \dots$ dans les formules de ces numéros désignent les mêmes quantités

que nous avons représentées ci-dessus par $x', x'', x''', \dots, x^{(2n)}$, c'est-à-dire les racines de l'équation proposée.

De plus, en examinant les raisonnements des mêmes numéros, il n'est pas difficile de voir qu'ils ne tiennent pas à la forme particulière de la fonction μ , mais seulement à la propriété qu'a cette fonction de demeurer la même, tandis qu'on échange entre elles les racines $x', x'', x''', \dots, x^{(n)}$, ou les racines $x^{(n+1)}, x^{(n+2)}, x^{(n+3)}, \dots, x^{(2n)}$, et de devenir négative quand on échange les premières racines dans les dernières; or cette propriété a lieu également dans les autres fonctions $\nu, \varpi, \dots$, et dans la fonction générale $a\mu + b\nu + c\varpi + \dots$, comme nous l'avons déjà observé plus haut; de sorte qu'on peut hardiment appliquer à l'équation ci-dessus en u ou en t les mêmes conclusions qu'on a trouvées dans les numéros cités.

30. On est donc assuré que l'équation en t aura toujours une racine réelle positive, et que par conséquent la quantité $u=\sqrt{t}$ aura toujours au moins une valeur réelle. Or, dès qu'on connaîtra la valeur de la quantité u , on pourra déterminer par son moyen les valeurs des autres quantités $\alpha, \beta, \gamma, \dots, \mu, \nu, \varpi, \dots$, lesquelles sont, ainsi que la quantité u , représentées par des fonctions des mêmes racines $x', x'', x''', \dots$; et de ce que nous avons démontré ailleurs [*Nouveaux Mémoires de l'Académie royale des Sciences et Belles-Lettres de Berlin*, année 1771 (*)], il s'ensuit que chacune de ces quantités $\alpha, \beta, \gamma, \dots, \mu, \nu, \varpi, \dots$ sera donnée par une équation du premier degré seulement, si la valeur de u est une racine inégale de l'équation en u ; mais si cette valeur est une racine égale, alors chacune des quantités $\alpha, \beta, \gamma, \dots, \mu, \nu, \varpi, \dots$ sera donnée par une équation dont le degré aura un exposant égal à celui de l'égalité de la racine u ; or comme $u=\pm\sqrt{t}$, on voit d'abord que l'équation en u n'aura de racines égales qu'autant que la transformée en t en aura de telles, ou qu'elle aura des racines nulles; car il est visible que $t=0$ donne deux valeurs égales à u .

(*) *Oeuvres de Lagrange*, t. III, p. 374.

Dans le premier cas, puisque l'équation en t est d'un degré impair (29, 2°), on pourra démontrer, comme on l'a fait plus haut (24), que cette équation ne pourra avoir que des racines égales d'un degré d'égalité marqué par des nombres impairs; d'où l'on conclura sur-le-champ que, quelles que soient les racines de l'équation en t , pourvu qu'aucune ne soit nulle, on aura toujours, non-seulement pour u , mais aussi pour α , β , γ , ..., μ , ν , ϖ , ..., des valeurs réelles; de sorte que les coefficients M , N , P , ..., M' , N' , P' , ... des deux facteurs de l'équation proposée auront sûrement des valeurs réelles (27).

Le second cas, c'est-à-dire celui où l'équation en t aurait quelque racine nulle, présente d'abord les mêmes difficultés qu'on a déjà considérées dans le n° 25; mais je remarque qu'à cause de

$$u = a\mu + b\nu + c\varpi + \dots,$$

où les coefficients a , b , c , ... sont à volonté, on peut toujours prendre ces coefficients tels, que le cas dont il s'agit n'ait pas lieu, à moins que parmi les valeurs correspondantes de μ , ν , ϖ , ... il ne s'en trouve qui soient nulles à la fois. Car supposons que les valeurs de μ , ν , ϖ , ... ne soient jamais nulles en même temps, en ce cas il est visible que si la quantité $t = u^2$ a des valeurs nulles, ce ne pourra être qu'en vertu de la relation qui se trouvera entre les coefficients a , b , c , ...; par conséquent ces valeurs cesseront d'être nulles dès qu'on donnera d'autres valeurs aux mêmes coefficients: ainsi l'on sera toujours le maître de faire en sorte que l'équation en t n'ait aucune racine nulle.

Il ne reste donc plus de difficulté que pour le cas où l'on aurait à la fois

$$\mu = 0, \quad \nu = 0, \quad \varpi = 0, \dots;$$

mais il est visible (27) qu'on aura alors

$$M' = M, \quad N' = N, \quad P' = P, \dots,$$

de sorte que dans ce cas l'équation proposée ne sera autre chose que celle-ci

$$x^n - Mx^{n-1} + Nx^{n-2} - Px^{n-3} + \dots = 0$$

élevée au carré: par conséquent la proposée s'abaissera d'elle-même à un degré moindre de la moitié, et il est visible que les valeurs des coefficients M , N , P , ... devront être toutes rationnelles, et par conséquent réelles, autrement il serait impossible que l'équation

$$x^n - Mx^{n-1} + Nx^{n-2} - Px^{n-3} + \dots = 0,$$

étant élevée au carré, devint rationnelle et comparable à la proposée

$$x^{2n} - Ax^{2n-1} + Bx^{2n-2} - Cx^{2n-3} + \dots = 0.$$

D'ailleurs il est facile de prouver que les conditions

$$\mu = 0, \quad \nu = 0, \quad \varpi = 0, \dots$$

emportent nécessairement l'égalité entre les racines x' , x'' , x''' , ..., $x^{(n)}$ et les racines $x^{(n+1)}$, $x^{(n+2)}$, $x^{(n+3)}$, ..., $x^{(2n)}$, en sorte que la proposée du degré $m = 2n$ aura toutes ses racines égales deux à deux, et pourra par conséquent s'abaisser à une équation du degré n qui aura les mêmes racines, mais simples et inégales.

Ainsi toutes les difficultés sont résolues, et il ne reste plus rien à désirer pour la démonstration complète du Théorème qui fait l'objet de ce Mémoire. Nous allons le terminer par donner un Exemple de l'application de la méthode qu'on vient d'expliquer.

31. Soit, comme dans le n° 6, l'équation générale du quatrième degré

$$x^4 - Ax^3 + Bx^2 - Cx + D = 0$$

qu'on se propose de décomposer en ces deux-ci

$$x^2 - Mx + N = 0, \quad x^2 - M'x + N' = 0;$$

en comparant terme à terme le produit de ces dernières avec celle-là, on aura d'abord

$$M + M' = A, \quad MM' + N + N' = B, \quad MN' + M'N = C, \quad NN' = D;$$

III.

et faisant

$$M = \frac{\alpha + \mu}{2}, \quad N = \frac{\beta + \nu}{2},$$

$$M' = \frac{\alpha - \mu}{2}, \quad N' = \frac{\beta - \nu}{2},$$

on aura

$$\alpha = A, \quad \alpha^2 - \mu^2 + 4\beta = 4B, \\ \alpha\beta - \mu\nu = 2C, \quad \beta^2 - \nu^2 = 4D,$$

d'où l'on tire d'abord

$$\alpha = A, \quad \beta = \frac{4B - A^2 + \mu^2}{4},$$

substituant ensuite ces valeurs dans les deux dernières équations, on aura

$$A\mu^2 - 4\mu\nu - A^3 + 4AB - 8C = 0, \\ \mu^4 + 2(4B - A^2)\mu^2 - 16\nu^2 + (4B - A^2)^2 - 64D = 0.$$

On fera maintenant

$$u = a\mu + b\nu,$$

et substituant, par exemple, $\frac{u - a\mu}{b}$ à la place de ν , on aura ces deux équations-ci

$$\left(A - \frac{4a}{b}\right)\mu^2 - \frac{4au}{b} - A^3 + 4AB - 8C = 0, \\ \mu^4 + \left(8B - 2A^2 - \frac{16a^2}{b^2}\right)\mu^2 + \frac{32a\mu u}{b^2} - \frac{16u^2}{b^2} + (4B - A^2)^2 - 64D = 0;$$

d'où l'on chassera μ pour avoir une réduite en u .

Supposons, pour abrégé,

$$(A^3 - 4AB + 8C) = F, \\ (4B - A^2)^2 - 64D = G, \\ bA - 4a = f, \\ 8b^2B - 2b^2A^2 - 16a^2 = g,$$

on aura

$$f\mu^2 - 4\mu u - bF = 0, \\ b^2\mu^4 + g\mu^2 + 32a\mu u - 16u^2 + b^2G = 0;$$

donc

$$\mu^2 = \frac{4\mu u + bF}{f},$$

$$\mu^4 = \frac{64\mu^2 u^2}{f^2} + \frac{16bF\mu^2}{f^2} + \frac{8bF\mu u}{f^2} + \frac{b^2F^2}{f^2};$$

donc

$$64b^2\mu^2 u^2 + 16b^2F\mu^2 + 8f b^2F\mu u + f b^2F^2 \\ + 4f^2g\mu u + f^2gbF + 32f^2a\mu u - 16f^2u^2 + f^2b^2G = 0,$$

d'où l'on tire

$$\mu = -\frac{16(b^2F - f^2)u^2 + f b^2F^2 + f^2gbF + f^2b^2G}{64b^2u^2 + 4fu(2b^2F + gf + 8af^2)};$$

ainsi il n'y aura plus qu'à substituer cette valeur dans la première équation

$$f\mu^2 - 4\mu u - bF = 0,$$

et l'on aura cette équation finale

$$f[16(b^2F - f^2)u^2 + b f(b^2F^2 + f g F + f^2 b G)]^2 \\ + 16[16(b^2F - f^2)u^2 + b f(b^2F^2 + f g F + f^2 b G)] \\ \times [16b^2u^2 + f(2b^2F + gf + 8af^2)]u^2 \\ - 16b^2F[16b^2u^2 + f(2b^2F + gf + 8af^2)]^2u^2 = 0,$$

laquelle, étant ordonnée par rapport à u , montera au sixième degré et ne contiendra que des puissances paires de u ; de sorte qu'en faisant $u^2 = t$, on aura celle-ci du troisième degré

$$t^3 + \dots - \left(\frac{b^2F^2 + f g F + f^2 b G}{16}\right)^2 = 0,$$

où l'on voit que le dernier terme est un carré avec le signe $-$, de sorte que la quantité t aura toujours une valeur réelle positive; on voit de plus qu'à moins qu'on n'ait à la fois $F = 0$ et $G = 0$, on pourra toujours faire en sorte que t n'ait aucune valeur nulle; car il n'y aura qu'à prendre a et b de manière qu'on ait

$$b^2F^2 + f g F + f^2 b G > \text{ ou } < 0;$$

je dis à moins que F et G ne soient nuls à la fois, car il est visible qu'alors la quantité dont il s'agit sera toujours nulle, quelque valeur qu'on donne à a et b ; mais alors on aura

$$C = \frac{AB}{2} - \frac{A^2}{8}, \quad D = \left(\frac{B}{2} - \frac{A^2}{4}\right)^2,$$

et l'équation proposée deviendra

$$x^4 - Ax^3 + Bx^2 - \left(\frac{AB}{2} - \frac{A^2}{8}\right)x + \left(\frac{B}{2} - \frac{A^2}{4}\right)^2 = 0,$$

laquelle est évidemment le carré de celle-ci

$$x^2 - \frac{A}{2}x + \frac{B}{2} - \frac{A^2}{4} = 0.$$

SUR LES

RÉFRACTIONS ASTRONOMIQUES.



SUR LES

RÉFRACTIONS ASTRONOMIQUES.

(Nouveaux Mémoires de l'Académie royale des Sciences et Belles-Lettres
de Berlin, année 1772.)

1. On sait que les rayons qui traversent obliquement notre atmosphère se détournent de la ligne droite et décrivent des courbes concaves vers la surface de la Terre, en sorte qu'ils nous parviennent toujours dans une direction moins inclinée à l'horizon que celle suivant laquelle ils sont entrés dans l'atmosphère.

Le changement qui en résulte dans la hauteur apparente des astres est ce qu'on nomme en Astronomie *réfraction céleste*, parce qu'en effet il n'est dû qu'à la réfraction continuelle que souffrent les rayons en pénétrant dans les couches successives de l'atmosphère, lesquelles augmentent toujours de densité à mesure qu'elles s'approchent de la Terre. Ce phénomène n'a pas été tout à fait inconnu aux anciens Astronomes, mais les modernes sont les seuls qui l'aient examiné avec assez d'exactitude pour pouvoir en tenir compte dans leurs observations.

Nous ne ferons point ici l'histoire des travaux des différents Astronomes qui, depuis Tycho-Brahé jusqu'à présent, se sont appliqués à la détermination de cet élément : notre objet est uniquement d'examiner cette matière par la théorie et d'après les données que les nouvelles expériences de M. de Luc (*) peuvent fournir relativement à la loi de la dilatation de l'air dans les différentes couches de l'atmosphère.

(*) *Recherches sur les modifications de l'atmosphère, etc.* Genève, 1772.

2. Si la surface de la Terre était plane et que, par conséquent, les différentes couches de l'atmosphère dont la densité est uniforme le fussent aussi, il n'y aurait aucune difficulté à déterminer l'effet de la réfraction d'un rayon qui traverserait l'atmosphère sous un angle quelconque; car il est démontré que la réfraction serait la même, dans ce cas, que si le rayon entrait immédiatement dans la couche la plus basse, et par conséquent la plus dense de l'atmosphère, sans passer par toutes les autres couches intermédiaires; de sorte que, comme on connaît par expérience la puissance réfractive de l'air pour une densité quelconque, et qu'on peut avoir à chaque instant, par l'observation du baromètre et du thermomètre, la densité actuelle de l'air dans le lieu de l'observation, on serait assuré de pouvoir toujours déterminer exactement la quantité de la réfraction astronomique pour telle hauteur des astres qu'on voudrait. Mais il n'en sera pas de même si l'on a égard, comme on doit, à la rondeur de la surface de la Terre, et par conséquent aussi à celle des différentes couches de l'atmosphère. Dans ce cas, l'effet total de la réfraction dépend de la réfraction particulière de chaque couche, et l'on ne peut le déterminer sans connaître la nature de la courbe même que décrivent les rayons de la lumière en traversant toute l'atmosphère; mais pour cela il faut connaître auparavant la proportion selon laquelle l'air est différemment comprimé à différentes hauteurs, parce que la vertu réfractive de l'air varie toujours avec sa densité.

3. Voyons donc d'abord ce que l'expérience et la théorie peuvent nous donner de lumières sur ce sujet.

M. Mariotte, et après lui MM. Amontons et Hawksbee, ont trouvé, par des expériences répétées et aussi exactes qu'il est possible, que l'air se comprime à proportion des poids dont il est chargé, en sorte que l'élasticité de l'air, qui est nécessairement proportionnelle au poids comprimant, l'est aussi à sa densité; mais cette proportion ne subsiste que tant que la chaleur de l'air est la même, car les deux derniers Physiciens ont trouvé ensuite que quand la chaleur de l'air augmente, la densité restant la même, son élasticité augmente aussi dans la même proportion : d'où

il s'ensuit qu'en général, l'élasticité de l'air est en raison composée de sa densité et de la chaleur qui y règne.

Or, comme le ressort de l'air dans un lieu quelconque est toujours nécessairement proportionnel à la hauteur du baromètre dans ce même lieu, on pourra prendre cette hauteur, que nous désignerons par y , pour la mesure de l'élasticité de l'air; par conséquent, si l'on désigne de plus par δ la densité de ce même air, et par φ sa chaleur, on aura

$$y = m\delta\varphi,$$

m étant un coefficient constant qui doit être déterminé par l'expérience.

Maintenant si l'on nomme x la hauteur du lieu au-dessus du niveau de la mer, où la hauteur du baromètre est y , il est clair qu'en considérant une colonne verticale d'air dont la hauteur soit infiniment petite dx , on aura $-dy$ pour la hauteur de la petite colonne de mercure qui y fera équilibre (je donne le signe $-$ à la différentielle dy , parce que y diminue pendant que x augmente); par conséquent, $-\frac{dy}{dx}$ sera le rapport de deux volumes également pesants de mercure et d'air, c'est-à-dire le rapport des gravités spécifiques ou des densités de l'air et du mercure; en sorte que, prenant la densité du mercure pour l'unité, on aura celle de l'air

$$\delta = -\frac{dy}{dx}.$$

Donc, substituant cette valeur dans l'équation $y = m\delta\varphi$, on aura celle-ci

$$-\frac{dy}{y} = \frac{dx}{m\varphi},$$

par laquelle on pourra connaître la relation entre les hauteurs y du baromètre, pourvu qu'on connaisse quelle fonction la quantité φ est de x ou de y ; mais cette dernière connaissance nous manque encore, et M. de Luc, qui a fait beaucoup de recherches savantes et utiles sur cet objet, avoue qu'il n'a rien trouvé là-dessus qui ait pu le satisfaire.

Cependant cet habile Physicien a découvert *à posteriori* une règle assez simple pour corriger les hauteurs des lieux déduites des observations du

baromètre, suivant les variations de la chaleur de l'air; et cette règle même pourrait servir à découvrir la loi de ces variations à différentes hauteurs : c'est ce qu'il est bon de développer.

4. M. de Luc trouve d'abord que lorsque la chaleur de l'air est telle, que le thermomètre vulgairement dit de Réaumur est à $16^{\circ}\frac{3}{4}$, la différence des logarithmes tabulaires des hauteurs du baromètre exprimées en lignes (ces logarithmes étant regardés comme des nombres entiers) donne assez exactement en millièmes de toises la différence de hauteur des lieux où le baromètre a été observé; de sorte qu'à proprement parler, la différence des logarithmes multipliée par 10 000 000, c'est-à-dire par dix millions, est égale à la différence des hauteurs des stations exprimées en millièmes de toises, ou, ce qui revient au même, la différence des logarithmes des hauteurs du baromètre exprimées en lignes donne la différence même des hauteurs des lieux exprimées en dizaines de mille toises.

Ensuite M. de Luc trouve que, lorsque le thermomètre est au-dessus ou au-dessous de $16^{\circ}\frac{3}{4}$, la correction à faire à la différence de hauteur trouvée par le calcul précédent pour chaque degré du thermomètre est à cette différence même dans la raison constante de 1 à 215 (voyez t. II, nos 588 et 607).

Ces données vont nous servir pour déterminer la constante m dans l'équation

$$-\frac{dy}{y} = \frac{dx}{m\varphi}$$

trouvée ci-dessus, ainsi que l'expression de la chaleur φ en degrés du thermomètre.

Car, en supposant la quantité φ constante, l'intégration donnera

$$\log b - \log y = \frac{x-a}{m\varphi},$$

en dénotant par b la hauteur du baromètre qui répond à la hauteur $x=a$; d'où l'on voit que la différence des logarithmes des hauteurs b

et y du baromètre est proportionnelle à la différence $x-a$ de hauteur des deux stations.

Or, si l'on suppose que la chaleur φ soit celle qui répond à $16^{\circ}\frac{3}{4}$ du thermomètre, et qu'on prenne cette chaleur pour l'unité; qu'on exprime de plus les hauteurs b et y du baromètre en lignes, et les hauteurs a et x des lieux en dizaines de mille toises; qu'enfin on réduise les logarithmes hyperboliques $\log b$ et $\log y$ en tabulaires, en les divisant par le logarithme hyperbolique de 10, et désignant ceux-ci par la caractéristique L , on aura l'équation

$$Lb - Ly = \frac{x-a}{m \log 10},$$

laquelle devra se réduire, suivant M. de Luc, à celle-ci

$$Lb - Ly = x - a;$$

en sorte qu'on aura $m \log 10 = 1$, c'est-à-dire

$$m = \frac{1}{\log 10} = 0,4342945.$$

Dénotons maintenant par t le nombre des degrés du thermomètre au-dessus de $16^{\circ}\frac{3}{4}$, auxquels répondra une chaleur quelconque φ , et il est facile de voir qu'on aura, suivant M. de Luc, l'équation

$$(Lb - Ly) \left(1 + \frac{t}{215}\right) = x - a,$$

savoir

$$Lb - Ly = \frac{x-a}{1 + \frac{t}{215}};$$

et par conséquent

$$\varphi = 1 + \frac{t}{215}.$$

Ainsi l'équation différentielle entre x et y deviendra

$$-\frac{dy}{y} = \frac{dx \log 10}{1 + \frac{t}{215}},$$

où il ne s'agira plus que d'avoir la valeur de t en x ou en y ; mais c'est ce qui n'est pas aisé : car, quoiqu'il soit constant que la chaleur va en diminuant dans l'atmosphère à mesure qu'on s'élève au-dessus de la surface de la Terre, on n'a pu découvrir encore ni par la théorie ni par l'expérience la loi de cette diminution.

5. Ne pouvant donc nous flatter de connaître la vraie valeur de t en x , nous sommes réduits à employer des hypothèses et des approximations.

Et premièrement il est clair que le terme $\frac{t}{215}$ ne saurait varier beaucoup dans toute l'étendue de l'atmosphère; car, comme t exprime des degrés du thermomètre de Réaumur, au-dessus ou au-dessous du terme de $16^{\circ}\frac{3}{4}$, quand on donnerait à t une variation de 65 degrés, depuis le bas jusqu'au haut de l'atmosphère, ce qui serait sûrement excessif, parce qu'en supposant la chaleur au bas de l'atmosphère de 25 degrés, on aurait pour le haut de l'atmosphère un froid de 40 degrés au-dessous du terme de la congélation, on n'aurait pourtant qu'environ $\frac{1}{27}$ pour la plus grande valeur positive de $\frac{t}{215}$, et environ $-\frac{1}{4}$ pour la plus grande valeur négative de la même quantité. A plus forte raison la variation du terme $\frac{t}{215}$ sera fort petite dans l'étendue de l'atmosphère qui répond à la hauteur de nos plus hautes montagnes; en sorte que, quand il ne sera question que de mesurer l'élévation des montagnes par le moyen du baromètre, on pourra, sans erreur sensible, regarder la quantité t comme constante, et pour plus d'exactitude on pourra prendre pour t le degré moyen entre ceux qu'on aura observés aux deux extrémités de la hauteur qu'il s'agit de mesurer.

Ainsi, nommant c et t les degrés observés aux deux stations, où les hauteurs du baromètre sont b et y , on aura, pour la distance perpendiculaire $x - a$ d'une station à l'autre, la quantité

$$(Lb - Ly) \left(1 + \frac{c+t}{2.215} \right),$$

en prenant $\frac{c+t}{2}$ pour la valeur moyenne de t .

Cette règle est la même que celle que M. de Luc a trouvée *à posteriori*, et qui s'accorde très-bien avec les observations, comme on peut le voir par le tableau qu'il en a donné dans le Chapitre V de la quatrième Partie de son Ouvrage.

6. Si l'on pouvait regarder cette règle comme tout à fait exacte, il ne serait pas difficile d'en déduire la véritable loi de la diminution de la chaleur de bas en haut. M. de Luc paraît croire que cette règle suppose que la chaleur diminue en progression arithmétique (Article 658 de son Ouvrage); mais on va voir que cette conclusion n'est pas exacte.

L'équation donnée par la règle précédente est celle-ci

$$(Lb - Ly) \left(1 + \frac{c+t}{2.215} \right) = x - a,$$

ou bien, en réduisant les logarithmes tabulaires Lb , Ly aux logarithmes hyperboliques $\log b$, $\log y$, en multipliant ceux-là par $\log 10$,

$$(\log b - \log y) \left(1 + \frac{c+t}{2.215} \right) = (x - a) \log 10;$$

d'où l'on tire

$$\log b - \log y = \frac{(x - a) \log 10}{1 + \frac{c+t}{2.215}},$$

et différentiant

$$-\frac{dy}{y} = d \frac{(x - a) \log 10}{1 + \frac{c+t}{2.215}};$$

mais on a par l'équation fondamentale

$$-\frac{dy}{y} = \frac{dx \log 10}{1 + \frac{t}{215}};$$

donc il viendra l'équation

$$d \frac{x - a}{1 + \frac{c+t}{2.215}} = \frac{dx}{1 + \frac{t}{215}},$$

par laquelle on pourra déterminer t en x , en observant que $t = c$ lors-

que $x = a$; cette équation donne

$$\frac{dx}{x-a} = \frac{\left(1 + \frac{t}{215}\right) dt}{(t-c) \left(1 + \frac{c+t}{2.215}\right)} = \frac{dt}{t-c} + \frac{1}{2.215} \frac{dt}{1 + \frac{c+t}{2.215}},$$

dont l'intégrale est

$$\log(x-a) = \log(t-c) + \log\left(1 + \frac{c+t}{2.215}\right) + \log k,$$

k étant une constante arbitraire; d'où l'on tire

$$x-a = k(t-c) \left(1 + \frac{c+t}{2.215}\right),$$

et comme en faisant $t=c$ on a déjà $x=a$, il est clair que la constante c demeure à volonté.

Si l'on néglige le terme $\frac{c+t}{2.215}$ vis-à-vis de l'unité, on a

$$t-c = \frac{x-a}{k},$$

c'est-à-dire que les différences de chaleur sont proportionnelles aux différences de hauteur, en sorte que les hauteurs étant prises en progression arithmétique, les degrés de chaleur le seront aussi; mais on voit par notre formule que cette loi, qui est celle de M. de Luc, n'est vraie que par approximation.

7. Si l'on voulait trouver une relation entre t et y , il n'y aurait qu'à faire pour plus de simplicité $\log y = z$ et $\log b = f$ pour avoir d'un côté

$$f-z = \frac{(x-a) \log 10}{1 + \frac{c+t}{2.215}},$$

et de l'autre

$$-dz = \frac{dx \log 10}{1 + \frac{t}{215}},$$

et l'on trouverait

$$dx \log 10 = d \left[(f-z) \left(1 + \frac{c+t}{2.215}\right) \right] = -dz \left(1 + \frac{t}{215}\right);$$

d'où l'on tirerait l'équation

$$\frac{dz}{f-z} = \frac{dt}{c-t},$$

laquelle donne par l'intégration

$$c-t = k(f-z) = k(\log b - \log y);$$

de sorte que les différences de chaleur seraient proportionnelles aux différences des logarithmes des hauteurs barométriques.

Il est remarquable que cette loi est celle que M. de Luc a trouvée pour la chaleur de l'eau bouillante à différentes hauteurs (Chapitre VI du *Supplément*); mais comme cet Auteur a observé qu'il n'y a aucune relation fixe entre la chaleur de l'eau bouillante et celle de l'air, on est en droit d'en conclure que la formule précédente n'est nullement exacte; et qu'ainsi la règle que donne M. de Luc, pour la correction des hauteurs déterminées par les observations du baromètre en conséquence de la variation de la chaleur, n'est pas tout à fait rigoureuse, mais seulement approchée.

8. Comme la chaleur de l'air diminue toujours à mesure qu'on s'élève au-dessus de la surface de la Terre, il est visible que l'hypothèse la plus simple qu'on puisse faire relativement à cette diminution est celle où l'on suppose que la chaleur décroisse en progression arithmétique; ainsi il est bon de voir aussi les résultats que cette hypothèse doit donner.

Supposons donc, en général,

$$t = p - qx,$$

et si l'on nomme c et γ les degrés de chaleur qui ont lieu aux hauteurs a et z , on aura les deux équations

$$c = p - qa \quad \text{et} \quad \gamma = p - qz,$$

lesquelles serviront à déterminer les deux constantes p et q .

Substituant donc cette valeur de t dans l'équation différentielle

$$-\frac{dy}{y} = \frac{dx \log 10}{1 + \frac{t}{215}}$$

du n° 4, elle deviendra celle-ci

$$-\frac{dy}{y} = \frac{dx \log 10}{1 + \frac{p - qx}{215}},$$

dont l'intégrale est

$$\log \frac{b}{y} = \frac{215 \log 10}{q} \log \frac{k}{1 + \frac{p - qx}{215}},$$

k étant une constante qu'il faut déterminer en sorte que lorsque $y = b$ on ait $x = a$, ce qui donnera

$$\log \frac{b}{y} = \frac{215 \log 10}{q} \log \frac{1 + \frac{p - qa}{215}}{1 + \frac{p - qx}{215}};$$

et de là

$$\frac{y}{b} = \left(\frac{1 + \frac{p - qx}{215}}{1 + \frac{p - qa}{215}} \right)^{\frac{215 \log 10}{q}} = \left(1 - \frac{q}{215} \frac{x - a}{1 + \frac{c}{215}} \right)^{\frac{215 \log 10}{q}};$$

d'où l'on tire

$$x - a = \left(1 + \frac{c}{215} \right) \frac{1 - \left(\frac{y}{b} \right)^{\frac{q}{215 \log 10}}}{\frac{q}{215}}.$$

Si la quantité $\frac{q}{215 \log 10}$ était infiniment petite, on aurait

$$1 - \left(\frac{y}{b} \right)^{\frac{q}{215 \log 10}} = -\frac{q}{215 \log 10} \log \frac{y}{b} = \frac{q}{215} L \frac{b}{y},$$

done

$$x - a = \left(1 + \frac{c}{215} \right) L \frac{b}{y}.$$

C'est le cas où la chaleur t serait constante et égale à c ; ce qui s'accorde avec ce qu'on a trouvé plus haut.

Ainsi cette formule approchera d'autant plus d'être exacte que la quantité $\frac{q}{215 \log 10}$ sera plus petite. Or on a

$$q = \frac{c - \gamma}{\alpha - a},$$

où $c - \gamma$ est la différence de chaleur qui répond à la différence de hauteur $\alpha - a$; donc si l'on prend pour l'un des termes de la chaleur la température des caves de l'observatoire qui est d'environ 10 degrés, et pour l'autre le froid de la glace qui est à zéro du thermomètre, on aura

$$c - \gamma = 10^{\circ};$$

et si l'on suppose que la hauteur à laquelle règne naturellement ce froid soit de 2000 toises, ce qui est peut-être trop fort, on aura

$$\alpha - a = \frac{10\,000}{2\,000} = \frac{1}{5};$$

done

$$q = 50,$$

et

$$\frac{q}{215 \log 10} = \frac{1}{10} \text{ à peu près.}$$

Si l'on veut juger combien la quantité $1 - \left(\frac{y}{b} \right)^{\frac{q}{215 \log 10}}$ s'éloigne de $\frac{-q}{215 \log 10} \log \frac{y}{b}$ pour une valeur donnée de $\frac{q}{215 \log 10}$, il n'y aura qu'à supposer

$$1 - \left(\frac{y}{b} \right)^{\frac{q}{215 \log 10}} = z,$$

et l'on aura

$$\left(\frac{y}{b} \right)^{\frac{q}{215 \log 10}} = 1 - z,$$

et prenant les logarithmes

$$\frac{-q}{215 \log 10} \log \frac{y}{b} = -\log(1 - z);$$

en sorte que la différence cherchée sera

$$-\log(1-z) - z = \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} + \frac{z^4}{4} + \dots < \frac{z^2}{2\left(1-\frac{z}{2}\right)}, \text{ lorsque } z \text{ est } < 1.$$

Cette différence sera donc d'autant plus petite que z sera plus petite, et par conséquent que $\frac{y}{b}$ sera plus grande. Donc le rapport de cette différence à la quantité $\frac{-q}{215 \log 10} \log \frac{y}{b}$ sera plus petit que $\frac{z}{2-z}$ à cause de

$$-\log(1-z) > \frac{z}{1-\frac{z}{2}}.$$

D'où il s'ensuit qu'en employant la formule qui résulte de notre hypothèse pour calculer la hauteur des montagnes, l'écart sera d'autant plus grand que la quantité $\frac{y}{b}$ sera plus petite, mais sa plus grande valeur sera toujours moindre que

$$\frac{z}{2-z} \quad \text{ou} \quad \frac{1 - \left(\frac{y}{b}\right)^{\frac{q}{215 \log 10}}}{1 + \left(\frac{y}{b}\right)^{\frac{q}{215 \log 10}}}$$

du total. Or comme la plus grande hauteur où l'on ait monté est, suivant M. de la Condamine, celle du Coraçon, montagne de la Cordelière qui est élevée au-dessus du niveau de la mer de 2470 toises, et qu'à cette hauteur le mercure se tenait à 15 pouces 10 lignes, il s'ensuit que la plus petite valeur de $\frac{y}{b}$ que l'on puisse jamais avoir à calculer sera toujours plus grande que $\frac{1}{2}$. Or prenant $\frac{y}{b} = \frac{1}{2}$, et faisant comme ci-dessus

$$q = 50 \quad \text{et} \quad \frac{q}{215 \log 10} = \frac{1}{10},$$

on trouve $z = 0,067$; donc

$$\frac{z}{2-z} = \frac{67}{1933} = \frac{1}{29},$$

de sorte que sur une hauteur de 2470 toises on aura une erreur moindre que 85 toises.

Si l'on fait $\frac{y}{b} = \frac{3}{4}$, ce qui est à peu près le cas des plus hautes montagnes de l'Europe, on trouve $z = 0,03$, et

$$\frac{z}{2-z} = \frac{3}{197} = \frac{1}{66},$$

ainsi sur une hauteur de 1000 toises, telle que celle du Mont-d'Or en Auvergne, où le mercure s'est soutenu à environ 22 pouces, l'erreur sera moindre que 15 toises.

D'où l'on voit que la formule résultante de notre hypothèse de la diminution de la chaleur en progression arithmétique donnera pour la hauteur des montagnes des résultats peu différents de ceux qui viennent de la formule reçue des Physiciens, où la chaleur est regardée comme constante.

9. M. Euler, dans ses *Recherches sur la réfraction*, imprimées dans le volume de cette Académie pour l'année 1754, suppose que la chaleur décroisse de bas en haut suivant une progression harmonique. Suivant cette hypothèse la valeur de t serait de la forme $\frac{p+qx}{1+mx}$, et l'on aurait trois coefficients p, q, m à déterminer, en sorte qu'on pourrait faire quadrer cette formule avec trois observations données. On pourrait même supposer plus généralement

$$t = \frac{a+bx+cx^2+\dots}{p+qx+rx^2+\dots}$$

en y admettant autant de termes qu'on voudrait; mais il serait inutile de s'étendre dans ces détails parce qu'il n'en pourrait jamais résulter que des conclusions hypothétiques.

10. Je viens maintenant à l'objet principal de ce Mémoire, à la recherche de la loi de la réfraction de la lumière dans l'atmosphère; et je remarque d'abord que par des expériences très-exactes faites par la

Société Royale de Londres en 1699, et répétées plusieurs années après par M. Hawksbee qui en donne le détail dans le Chapitre IV de ses *Expériences physico-mécaniques*, on a trouvé que l'angle dont la lumière se détourne par la réfraction en passant du vide dans l'air, ou d'un air d'une densité donnée dans un autre air d'une autre densité, est toujours proportionnel à la différence de la densité des deux milieux à travers lesquels la lumière passe; en sorte que, si z est l'angle d'incidence et $z - \zeta$ l'angle de réfraction, on aura toujours ζ proportionnel à l'excès de la densité du second milieu sur celle du premier; par conséquent, nommant cette différence de densité D , on aura $\zeta = mD$, m étant un coefficient constant à l'égard de D , toutes les autres circonstances demeurant les mêmes.

Or, par la loi générale de la réfraction, on a, lorsque l'angle d'incidence z varie, les milieux restant les mêmes, $\frac{\sin(z - \zeta)}{\sin z}$ égal à une quantité constante qu'on appelle la *raison de réfraction*, et qui dans l'air est très-peu différente de l'unité; en sorte que supposant cette raison égale à $1 - n$, n étant une très-petite quantité, on aura

$$\sin(z - \zeta) = (1 - n) \sin z;$$

d'où l'on voit que l'angle ζ est nécessairement très-petit de l'ordre de n , et qu'ainsi l'on pourra mettre, sans erreur sensible, $\sin z - \zeta \cos z$ à la place de $\sin(z - \zeta)$; ce qui donnera l'équation

$$\zeta \cos z = n \sin z,$$

savoir

$$\zeta = n \tan z.$$

Donc, puisque l'angle très-petit ζ est proportionnel à D tant que z est constant, et que le même angle ζ est proportionnel à $\tan z$ lorsque D est constant, il s'ensuit qu'on aura, en général, ζ dans la raison composée de D et de $\tan z$; c'est-à-dire

$$\zeta = \lambda D \tan z,$$

λ étant un coefficient constant et indépendant de D et de z .

Or, dans une des expériences de M. Hawksbee dans laquelle le baromètre était à 29 pouces $7\frac{1}{2}$ lignes et le thermomètre à 60 degrés, on a trouvé que l'angle d'incidence z étant 32 degrés, l'angle de réfraction $z - \zeta$, en passant du vide dans l'air naturel, était de $31^{\circ} 59' 24''$, ce qui donne par conséquent $\zeta = 36''$. Donc, puisque dans ce cas D doit être égale à la densité naturelle de l'air qui est proportionnelle (3) à $-\frac{dy}{dx}$, ou (5) à $\frac{y \log 10}{1 + \frac{t}{215}}$, on aura dans l'expérience de M. Hawksbee l'équation

$$36'' = \frac{\lambda y \log 10}{1 + \frac{t}{215}} \tan 32^{\circ},$$

où y dénote la hauteur du baromètre en lignes, et t les degrés du thermomètre de Réaumur au-dessus de $16^{\circ} \frac{3}{4}$ (4).

Comme M. Hawksbee se servait d'un thermomètre particulier différent de celui de Réaumur, il faut, pour avoir la valeur de t qui convient à cette expérience, réduire les 60 degrés de son thermomètre à des degrés de Réaumur, ce qu'on peut faire aisément d'après les éclaircissements donnés par le traducteur de l'Ouvrage de M. Hawksbee; et l'on voit d'abord, par la Table de la page 172 de l'édition française, que 60 degrés de M. Hawksbee répondent à 47 degrés du thermomètre de la Société Royale, dans lequel le point de la congélation est à 77 degrés, et dont 5 degrés sont équivalents à 2 degrés de Réaumur (page 176), en sorte que les 60 degrés dont il s'agit doivent répondre à 12 degrés de Réaumur; or $12 = 16\frac{3}{4} - 4\frac{1}{4}$; donc on aura dans le cas présent

$$t = -4\frac{1}{4} = -\frac{19}{4}.$$

A l'égard de la valeur de y qui indique la hauteur du baromètre, il semblerait qu'il n'y aurait qu'à prendre 29 pouces $7\frac{1}{2}$ lignes, réduits en lignes; mais comme le pied anglais diffère un peu du pied de roi, la proportion du premier au second étant de 1351 à 1440, il faudra faire

$$y = (29 \times 12 + 7\frac{1}{2}) \frac{1351}{1440} = 287.$$

Ainsi l'on aura

$$36'' = \frac{\lambda \times 287 \times \log 10}{1 - \frac{19}{4 \times 215}} \tan 32'',$$

et de là

$$\lambda = \frac{841 \times 36''}{860 \times 287 \times \log 10 \times \tan 32''},$$

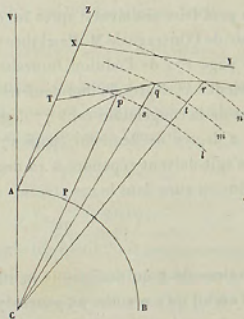
ou plutôt

$$\lambda = \frac{841 \sin 36''}{860 \times 287 \times \log 10 \times \tan 32''} = 0,0000041332$$

et

$$L.\lambda = 3,6162853.$$

11. Maintenant soit C le centre de la Terre, AB sa surface, CAV la verticale au point A, *Apqr* la courbe décrite par un rayon de lumière qui traverse l'atmosphère, *plqm* et *qmra* deux couches infiniment minces et concentriques à la Terre, dans chacune desquelles la densité de l'air est uniforme; nommons $AC = CP = r$, $Pp = x$, en sorte que $Cp = r + x$.



$ACp = \varphi$, et l'amplitude de la courbe $Ap = \rho$; et il est clair que l'angle pqt (Tq étant tangente en q) sera égal à $d\rho$, qu'en même temps cet angle sera celui qu'on a nommé ci-dessus ζ ; de sorte qu'on aura

$\zeta = d\rho$; de plus il est clair que l'angle qrt sera l'angle d'incidence du rayon rq sur la couche qt , lequel a été nommé plus haut z , en sorte qu'on aura ici

$$\tan z = \frac{ps}{qs} = \frac{(r+x)d\varphi}{dx},$$

et de là

$$d\varphi = \frac{dx}{r+x} \tan z.$$

Enfin, comme la réfraction n'est due qu'à la différence de densité des deux couches contiguës pt et qr , il faudra prendre pour D , non la quantité $-\frac{dy}{dx}$ qui est proportionnelle à la densité même en pq , mais sa différentielle, à laquelle il faudra donner le signe $-$, à cause que la densité est supposée diminuer à mesure que la hauteur x augmente; ainsi l'on aura

$$D = d\frac{dy}{dx} = -d\frac{y \log 10}{1 + \frac{t}{215}};$$

de sorte qu'en faisant ces substitutions dans l'équation $\zeta = \lambda D \tan z$, on aura celle-ci

$$d\rho = -\lambda d\frac{y \log 10}{1 + \frac{t}{215}} \times \tan z;$$

or il est visible que

$$\begin{aligned} dz &= \text{angle } Crq - \text{angle } Cqp = \text{angle } Cqt - \text{angle } qCr - \text{angle } Cqp \\ &= \text{angle } pqt - \text{angle } qCr = d\rho - d\varphi; \end{aligned}$$

donc substituant pour $d\rho$ et $d\varphi$ les valeurs trouvées ci-dessus, et divisant l'équation par $\tan z$, on aura

$$\frac{dz}{\tan z} = -\lambda d\frac{y \log 10}{1 + \frac{t}{215}} - \frac{dx}{r+x},$$

équation intégrable, laquelle étant intégrée en sorte que Z soit la valeur

de z , et b , c celles de y , t lorsque $x = 0$, on aura

$$\log \frac{\sin z}{\sin Z} = \lambda \left(\frac{b \log 10}{1 + \frac{c}{215}} - \frac{y \log 10}{1 + \frac{t}{215}} \right) + \log \frac{r}{r+x},$$

d'où l'on tire

$$\sin z = \frac{\sin Z}{1 + \frac{x}{r}} \times \frac{e^{\frac{\lambda b \log 10}{1 + \frac{c}{215}}}}{e^{\frac{\lambda y \log 10}{1 + \frac{t}{215}}}},$$

ou bien, à cause de $e^{\log 10} = 10$,

$$\sin z = \frac{\sin Z}{1 + \frac{x}{r}} \times \frac{10^{\frac{\lambda b}{1 + \frac{c}{215}}}}{10^{\frac{\lambda y}{1 + \frac{t}{215}}}.$$

Or il est visible que Z est égal à l'angle VAT que fait avec la verticale VA la tangente AT de la courbe décrite par le rayon en traversant l'atmosphère; par conséquent Z sera la distance apparente de l'astre au zénith. De plus si l'on suppose que XY soit la tangente à la même courbe dans le point où le rayon entre dans l'atmosphère, il est clair que l'angle ZXY sera l'effet total de la réfraction, en sorte que la véritable hauteur de l'astre sera

$$90^\circ - Z - \text{angle ZXY};$$

et il est clair en même temps que cet angle ZXY, formé par les deux tangentes AX et YX, sera l'amplitude totale de la courbe $Apqr$; c'est-à-dire la valeur de ρ qui répond à toute l'étendue de la même courbe depuis le point A jusqu'au haut de l'atmosphère. D'où l'on voit que le Problème de la réfraction consiste à déterminer la valeur totale de ρ en Z .

Ainsi Z étant la distance apparente au zénith, ρ sera la réfraction, et la difficulté consistera à déterminer ρ en Z .

12. Pour cela je fais

$$u = \frac{c}{e^{\frac{\lambda y \log 10}{1 + \frac{t}{215}}}}$$

en sorte que l'on ait

$$\sin z = \frac{u \sin Z}{1 + \frac{x}{r}},$$

ce qui donnera

$$\tan z = \frac{u \sin Z}{1 + \frac{x}{r}} : \sqrt{1 - \frac{u^2 \sin^2 Z}{\left(1 + \frac{x}{r}\right)^2}};$$

de plus, on a par la différentiation

$$\frac{du}{u} = -\lambda d \frac{y \log 10}{1 + \frac{t}{215}};$$

donc, substituant ces valeurs dans l'expression de $d\rho$ trouvée ci-dessus, il viendra

$$d\rho = \frac{\sin Z du}{1 + \frac{x}{r}} : \sqrt{1 - \frac{u^2 \sin^2 Z}{\left(1 + \frac{x}{r}\right)^2}},$$

d'où l'on tirera par l'intégration la valeur de ρ , en observant que ρ doit être égal à zéro lorsque $x = 0$, auquel cas on a $u = 1$.

Je remarque d'abord que le terme $\frac{x}{r}$ est nécessairement fort petit vis-à-vis de 1; car r étant le rayon de la Terre, et la plus grande valeur de x devant être la hauteur de l'atmosphère, la plus grande valeur de $\frac{x}{r}$ sera le rapport de la hauteur de l'atmosphère au rayon de la Terre, rapport qui, par l'observation des crépuscules, est

$$\sec. 9^\circ - 1 = 0,0124625 < \frac{1}{80}.$$

Quand on voudrait même supposer que ce rapport est trop faible de moitié, et qu'il doit être porté à $\frac{1}{40}$, il resterait toujours assez petit pour pouvoir être négligé vis-à-vis de 1 sans qu'il y ait d'erreur sensible à craindre.

Mais comme dans l'intégration la valeur de $\frac{x}{r}$ doit augmenter depuis

zéro jusqu'à la valeur du rapport dont il s'agit, il est clair qu'on s'écartera encore moins de la vérité si, au lieu de négliger tout à fait cette quantité, on lui donne une valeur constante et moyenne entre la plus grande et la plus petite; et l'on aura d'autant moins d'erreur à craindre de cette hypothèse que l'on n'a besoin que d'avoir la valeur totale de l'intégrale. Soit donc α cette valeur moyenne de $\frac{x}{r}$ que nous traiterons comme constante, et l'on aura

$$d\rho = \frac{\sin Z du}{1 + \alpha} : \sqrt{1 - \frac{u^2 \sin^2 Z}{(1 + \alpha)^2}},$$

dont l'intégrale est

$$\rho + k = \arcsin \frac{u \sin Z}{1 + \alpha},$$

k étant une constante arbitraire; c'est-à-dire

$$\sin(\rho + k) = \frac{u \sin Z}{1 + \alpha} = \frac{\sin Z}{1 + \alpha} e^{\frac{\lambda b \log 10}{1 + \frac{c}{215}}};$$

or, comme en faisant $\rho = 0$ on doit avoir $u = 1$, on aura

$$\sin k = \frac{\sin Z}{1 + \alpha};$$

de plus il est clair que pour avoir la valeur totale de la réfraction ρ il faut faire $y = 0$, puisqu'au haut de l'atmosphère la hauteur du baromètre doit être nulle; ainsi l'on aura

$$\sin(\rho + k) = \frac{\sin Z}{1 + \alpha} e^{\frac{\lambda b \log 10}{1 + \frac{c}{215}}} = \frac{\sin Z}{1 + \alpha} \frac{10^{\frac{\lambda b}{1 + \frac{c}{215}}}}{10^{\frac{\lambda b}{1 + \frac{c}{215}}}},$$

et de là

$$\rho = \arcsin \left(\frac{\sin Z}{1 + \alpha} \frac{10^{\frac{\lambda b}{1 + \frac{c}{215}}}}{10^{\frac{\lambda b}{1 + \frac{c}{215}}}} \right) - \arcsin \frac{\sin Z}{1 + \alpha},$$

où ρ exprime donc la réfraction qui a lieu pour un astre dont la distance apparente au zénith est Z , b étant la hauteur du baromètre en lignes,

et c le degré du thermomètre de Réaumur au-dessus de $16^{\circ} \frac{3}{4}$ dans le lieu de l'observation. A l'égard de la fraction très-petite α , on pourra la déterminer *a posteriori*, d'après les observations.

Pour faire usage de cette formule, on remarquera que $10^{\frac{\lambda b}{1 + \frac{c}{215}}}$ est le nombre qui répond au logarithme tabulaire $\frac{\lambda b}{1 + \frac{c}{215}}$; en sorte qu'on pourra la représenter plus commodément de cette manière

$$\rho = \arcsin \left(\frac{\sin Z}{1 + \alpha} \times N.L. \frac{\lambda b}{1 + \frac{c}{215}} \right) - \arcsin \frac{\sin Z}{1 + \alpha}.$$

13. Supposons le baromètre à 28 pouces et le thermomètre à 10 degrés, on aura dans ce cas

$$b = 12 \times 28 = 336, \quad c = 10 - 16 \frac{3}{4} = -6 \frac{1}{4},$$

et l'on trouvera

$$\frac{\lambda b}{1 + \frac{c}{215}} = \frac{336 \times 860 \lambda}{833} = 0,000 143 38;$$

et le nombre qui répondra à celui-ci comme logarithme sera

$$1,000 330 201;$$

c'est la valeur de $N.L. \frac{\lambda b}{1 + \frac{c}{215}}$, et son logarithme sera 0,000 143 4.

Maintenant soit, pour cette constitution de l'air, la réfraction horizontale égale à ω , on aura, en faisant dans la formule précédente $Z = 90^{\circ}$ et $\rho = \omega$, l'équation

$$\omega = \arcsin \frac{1,000 330 2}{1 + \alpha} - \arcsin \frac{1}{1 + \alpha};$$

d'où l'on tirera la valeur de α . Pour cela, on mettra cette équation sous la forme

$$\frac{1,000 330 2}{1 + \alpha} = \sin \left(\omega + \arcsin \frac{1}{1 + \alpha} \right) = \sin \omega \sqrt{1 - \frac{1}{(1 + \alpha)^2}} + \frac{\cos \omega}{1 + \alpha};$$

d'où, en multipliant par $1 + \alpha$ et divisant par $\sin \omega$, on tire

$$\sqrt{(1 + \alpha)^2 - 1} = \frac{1,000\,330\,2 - \cos \omega}{\sin \omega}.$$

Faisons, pour abrégé,

$$\Omega = \left(\frac{1,000\,330\,2 - \cos \omega}{\sin \omega} \right)^2,$$

et l'on aura

$$\alpha = \frac{\Omega}{2} - \frac{\Omega^2}{8} + \dots$$

Si l'on fait avec M. Bradley

$$\omega = 33',$$

on trouve

$$\Omega = 0,001\,536\,8, \quad \Omega^2 = 0,000\,002\,4;$$

donc

$$\alpha = 0,000\,768\,1;$$

et de là

$$1 + \alpha = 1,000\,768\,1, \quad L(1 + \alpha) = 0,000\,333\,5.$$

M. Mayer, dans sa *Table des Réfractions*, suppose la réfraction horizontale de $30' 50''$, 8 seulement pour la même constitution de l'air que ci-dessus; suivant cette hypothèse on trouvera

$$\Omega = 0,001\,703\,7, \quad \Omega^2 = 0,000\,002\,9,$$

et de là

$$\alpha = 0,000\,851\,4, \quad 1 + \alpha = 1,000\,851\,4.$$

La valeur de α étant connue, on pourra construire par notre formule une Table des réfractions pour toutes les hauteurs apparentes $90^\circ - Z$ et pour telle hauteur du baromètre et tel degré du thermomètre qu'on voudra; et cette Table aura l'avantage d'être fondée sur des données plus exactes et sur une théorie moins précaire qu'on ne l'a fait jusqu'à présent.

14. Comme le nombre $\frac{\lambda b}{1 + \frac{c}{215}}$ est toujours extrêmement petit, il est

clair qu'on aura à très-peu près

$$N.L. \frac{\lambda b}{1 + \frac{c}{215}} = e^{\frac{\lambda b \log 10}{1 + \frac{c}{215}}} = 1 + \frac{\lambda b \log 10}{1 + \frac{c}{215}};$$

ainsi la valeur de ρ sera

$$\rho = \arcsin \left[\frac{\sin Z}{1 + \alpha} \left(1 + \frac{\lambda b \log 10}{1 + \frac{c}{215}} \right) \right] - \arcsin \frac{\sin Z}{1 + \alpha},$$

c'est-à-dire à très-peu près

$$\rho = \frac{\lambda b \log 10}{1 + \frac{c}{215}} \times \frac{\sin Z}{1 + \alpha} \times \sqrt{1 - \frac{\sin^2 Z}{(1 + \alpha)^2}},$$

ou bien

$$\rho = \frac{\lambda b \log 10}{1 + \frac{c}{215}} \times \frac{\tan Z}{\sqrt{1 + \frac{2\alpha + \alpha^2}{\cos^2 Z}}};$$

ce qui fait voir que la réfraction est généralement proportionnelle à la hauteur du baromètre et à la tangente de la distance apparente de l'astre au zénith, lorsque cette distance est assez différente de 90 degrés pour que $\frac{2\alpha}{\cos Z}$ soit une quantité très-petite vis-à-vis de l'unité.

15. Si l'on voulait intégrer rigoureusement l'équation

$$d\rho = \frac{\sin Z \, du}{1 + \frac{x}{r}} \cdot \sqrt{1 - \frac{u^2 \sin^2 Z}{\left(1 + \frac{x}{r}\right)^2}}$$

du n° 12, il faudrait connaître la valeur de x en u ou de u en x , et par conséquent celle de y et t en x , laquelle dépend de la loi de la diminution de la chaleur, qui est encore inconnue.

La supposition la plus simple serait de faire

$$1 + \frac{x}{r} = h u^n,$$

et comme $u=1$ lorsque $x=0$, on aurait d'abord $k=1$; en sorte que

$$1 + \frac{x}{r} = u^m,$$

m étant un nombre qu'on pourrait déterminer par les observations. Cette valeur de $1 + \frac{x}{r}$ étant substituée dans l'équation précédente, il en résulterait celle-ci

$$d\rho = \frac{du^{1-m} \sin Z}{(1-m) \sqrt{1-u^{2-2m} \sin^2 Z}},$$

dont l'intégrale est

$$\rho + H = \frac{\arcsin(u^{1-m} \sin Z)}{1-m}.$$

Or ρ doit être nul lorsque $u=1$; donc

$$H = \frac{Z}{1-m},$$

et par conséquent

$$\rho = \frac{\arcsin(u^{1-m} \sin Z) - Z}{1-m},$$

et faisant maintenant $y=0$ pour avoir la valeur totale de ρ , ce qui donne

$$u = e^{\frac{\lambda b \log 10}{1 + \frac{c}{215}}}$$

et

$$u^{1-m} = e^{\frac{(1-m)\lambda b \log 10}{1 + \frac{c}{215}}} = N.L. \frac{(1-m)\lambda b}{1 + \frac{c}{215}},$$

on aura

$$\rho = \frac{\arcsin \left[\sin Z \times N.L. \frac{(1-m)\lambda b}{1 + \frac{c}{215}} \right] - Z}{1-m},$$

équation qu'on peut, si l'on veut, changer en celle-ci

$$\frac{\sin [Z + (1-m)\rho]}{\sin Z} = N.L. \frac{(1-m)\lambda b}{1 + \frac{c}{215}},$$

16. Cette formule s'accorde avec celle que M. Simpson a trouvée d'après l'hypothèse que la densité de l'air diminue à très-peu près en progression arithmétique; en effet, la supposition que nous avons faite de

$$1 + \frac{x}{r} = u^m = \frac{e^{\frac{m\lambda b \log 10}{1 + \frac{c}{215}}}}{e^{\frac{m\lambda y \log 10}{1 + \frac{c}{215}}}},$$

donne, en prenant les logarithmes,

$$\frac{m\lambda b \log 10}{1 + \frac{c}{215}} - \frac{m\lambda y \log 10}{1 + \frac{c}{215}} = \log \left(1 + \frac{x}{r} \right);$$

ou la quantité $\frac{y \log 10}{1 + \frac{c}{215}}$ est (3 et 4) proportionnelle à la densité de l'air à

la hauteur x ; d'où l'on voit que la différence des densités de l'air à la surface de la Terre et à une hauteur quelconque x sera proportionnelle à $\log \left(1 + \frac{x}{r} \right)$ ou, à très-peu près, à $\frac{x}{r}$; mais cette hypothèse me paraît trop contraire aux observations pour pouvoir être admise.

M. Simpson détermine les coefficients de sa formule en sorte que $Z=90^\circ$ donne $\rho=33'$, et $Z=60^\circ$ donne $\rho=1'30''$, et il trouve

$$m-1 = \frac{11}{2}, \quad N.L. \frac{(1-m)\lambda b}{1 + \frac{c}{215}} = \sin 86^\circ 58' = 0,9986 \dots$$

On aurait donc

$$-\frac{11\lambda b}{2 \left(1 + \frac{c}{215} \right)} = \log \sin 86^\circ 58' 30'' = -1 + 0,999\,394\,4;$$

donc

$$\frac{11\lambda b}{2 \left(1 + \frac{c}{215} \right)} = 1 - 0,999\,394\,4 = 0,000\,603\,6,$$

et de là on trouvera

$$\frac{b}{1 + \frac{c}{215}} = 266,40.$$

Ainsi, supposant le thermomètre à $16^{\circ}\frac{3}{4}$, ce qui donnera $c = 0$, on aurait pour la hauteur du baromètre 266 lignes, c'est-à-dire $22^{\circ} 2'$, ce qui est impossible; et si le thermomètre était plus bas, ce qui rendrait c négatif, la valeur de b serait encore moindre.

On voit par là que la règle de M. Simpson ne peut subsister avec les données tirées des expériences de M. de Luc.

17. M. Bradley a trouvé que les réfractions étaient, généralement parlant, proportionnelles aux tangentes de la distance au zénith diminuée d'une partie aliquote constante de la réfraction elle-même; de sorte que suivant cette règle on a

$$\rho = \delta \tan(Z - \mu\rho),$$

δ et μ étant deux coefficients constants que M. Bradley détermine par les observations. Comme l'arc ρ est toujours nécessairement très-petit, on peut changer sans erreur sensible ρ en $\frac{\tan \mu\rho}{\mu}$, ce qui réduit la formule précédente à celle-ci

$$\tan \mu\rho = \mu\delta \tan(Z - \mu\rho),$$

savoir

$$\frac{\sin \mu\rho}{\cos \mu\rho} = \frac{\mu\delta \sin(Z - \mu\rho)}{\cos(Z - \mu\rho)},$$

et multipliant en croix,

$$\sin \mu\rho \times \cos(Z - \mu\rho) = \mu\delta \sin(Z - \mu\rho) \times \cos \mu\rho,$$

savoir

$$\sin Z - \sin(Z - 2\mu\rho) = \mu\delta \sin Z + \mu\delta \sin(Z - 2\mu\rho);$$

d'où

$$\frac{\sin(Z - 2\mu\rho)}{\sin Z} = \frac{1 - \mu\delta}{1 + \mu\delta},$$

ce qui se réduit, comme on voit, à la formule trouvée ci-dessus en faisant

$$2\mu = m - 1 \quad \text{et} \quad \frac{1 - \mu\delta}{1 + \mu\delta} = N.L. \frac{(1 - m)\lambda b}{1 + \frac{c}{215}}.$$

Ainsi la règle de M. Bradley est nécessairement sujette aux mêmes difficultés que celle de M. Simpson, à laquelle elle revient dans le fond.

18. M. Mayer donne dans ses Tables une formule différente des précédentes, et qui, en gardant nos dénominations, se réduit à

$$\rho = \frac{70'', 71 b \sin Z \tan \frac{1}{2} \omega}{[1 + 0,0046(c - 16\frac{1}{4})]^3},$$

en prenant l'angle ω tel que

$$\tan \omega = \frac{\sqrt{1 + 0,0046(c - 16\frac{1}{4})}}{16\frac{1}{4} \times \cos Z};$$

mais comme M. Mayer ne nous a point appris le chemin qui l'y a conduit, on ne peut juger *à priori* de l'exactitude de cette règle; nous remarquerons seulement qu'elle s'éloigne assez de la règle générale suivant laquelle la réfraction est sensiblement proportionnelle à la tangente de la distance apparente au zénith, lorsque cette distance est moindre que 70 degrés.



SUR L'INTÉGRATION
DES
ÉQUATIONS A DIFFÉRENCES PARTIELLES
DU PREMIER ORDRE.



SUR L'INTÉGRATION
DES
ÉQUATIONS A DIFFÉRENCES PARTIELLES
DU PREMIER ORDRE.

(Nouveaux Mémoires de l'Académie royale des Sciences et Belles-Lettres
de Berlin, année 1772.)

1. Lorsqu'on a une fonction u de plusieurs variables $x, y, z, \dots$, on appelle différences partielles de u celles qui résultent de la différentiation de u en y faisant varier chacune des quantités $x, y, z, \dots$ à part; ainsi, supposant que la valeur complète de du soit représentée par

$$pdx + qdy + rdz + \dots,$$

les différents termes

$$pdx, qdy, rdz, \dots$$

de cette différentielle seront les différences partielles du premier ordre de u . On a coutume de représenter les coefficients $p, q, r, \dots$ des différences $dx, dy, dz, \dots$, dans la différentielle de u , par $\frac{du}{dx}, \frac{du}{dy}, \frac{du}{dz}, \dots$, de sorte que la valeur complète de du sera représentée par

$$\frac{du}{dx}dx + \frac{du}{dy}dy + \frac{du}{dz}dz + \dots$$

Ainsi, si l'on a une équation entre $u, x, y, z, \dots$ et $\frac{du}{dx}, \frac{du}{dy}, \frac{du}{dz}, \dots$, ce

sera une équation à différences partielles du premier ordre; et c'est sur l'intégration de ce genre d'équations que je me propose ici de donner quelques nouveaux principes.

2. Supposons que u soit une fonction de x et de y seulement, et que l'on ait pour la détermination de cette fonction une équation en u, x, y , $\frac{du}{dx}, \frac{du}{dy}$; si l'on fait pour plus de commodité $\frac{du}{dx} = p, \frac{du}{dy} = q$, on aura

$$du = p dx + q dy,$$

et l'équation donnée sera entre les cinq variables u, x, y, p, q ; en sorte qu'on pourra par cette équation déterminer, par exemple, q en u, x, y, p ; la quantité p sera donc encore indéterminée, et la question se réduira à la déterminer de façon que l'équation

$$du = p dx + q dy, \text{ ou bien } du - p dx - q dy = 0$$

soit intégrable, ou d'elle-même, ou étant multipliée par un facteur quelconque.

Soit, en général, M le facteur que la différentiation aura pu faire disparaître, en sorte que la quantité

$$M(du - p dx - q dy)$$

soit une différentielle exacte d'une fonction de u, x, y que nous désignerons par N ; on aura donc

$$dN = \frac{dN}{du} du + \frac{dN}{dx} dx + \frac{dN}{dy} dy = M du - M p dx - M q dy,$$

et de là

$$\frac{dN}{du} = M, \quad \frac{dN}{dx} = -M p, \quad \frac{dN}{dy} = -M q;$$

d'où l'on tire les conditions suivantes

$$\frac{dM}{dx} = -\frac{d(Mp)}{du}, \quad \frac{dM}{dy} = -\frac{d(Mq)}{du}, \quad -\frac{d(Mp)}{dy} = -\frac{d(Mq)}{dx},$$

par lesquelles il faudrait déterminer M et p . La dernière de ces équations

donne celle-ci

$$M \left(\frac{dp}{dy} - \frac{dq}{dx} \right) + p \frac{dM}{dy} - q \frac{dM}{dx} = 0,$$

laquelle, en substituant pour $\frac{dM}{dx}$ et $\frac{dM}{dy}$ leurs valeurs données par les deux premières, devient

$$M \left(\frac{dp}{dy} - \frac{dq}{dx} \right) - p \frac{d(Mq)}{du} + q \frac{d(Mp)}{du} = 0,$$

c'est-à-dire, en effaçant ce qui se détruit et divisant le reste par M ,

$$\frac{dp}{dy} - \frac{dq}{dx} - p \frac{dq}{du} + q \frac{dp}{du} = 0;$$

or, comme q est (hypothèse) une fonction donnée de x, y, u et p , cette équation ne contiendra plus que l'inconnue p ; et la difficulté sera réduite à déterminer par son moyen la valeur de p en u, x, y .

3. Quoique de cette manière on ait trouvé l'équation qui doit servir à déterminer p , il paraît qu'on n'a guère avancé dans la solution du Problème proposé; car au lieu qu'on avait une équation entre $x, y, u, \frac{du}{dx}$, $\frac{du}{dy}$ pour la détermination de u , on en a maintenant une entre $x, y, u, p, \frac{dp}{dx}, \frac{dp}{dy}, \frac{dp}{du}$ pour la détermination de p , laquelle, à la considérer, en général, doit être au moins aussi difficile à résoudre que celle-là, si même elle ne l'est pas davantage à cause qu'elle contient une variable de plus. Il y a cependant une circonstance qui doit la faire regarder comme plus simple que la proposée, c'est que les différentielles dp et dq n'y paraissent que sous une forme linéaire; d'ailleurs nous remarquerons qu'il ne sera pas nécessaire de résoudre cette équation d'une manière complète, mais qu'il suffira de trouver une valeur quelconque de p qui y satisfasse, pourvu qu'elle contienne une constante arbitraire; car nous ferons voir bientôt comment, à l'aide d'une telle valeur de p , on pourra néanmoins parvenir à la solution générale et complète de l'équation proposée.

4. Pour faire voir d'une manière encore plus directe comment l'équation que nous venons de trouver pour la détermination de p peut servir à résoudre le Problème dont il s'agit, reprenons l'équation

$$du - p dx - q dy = 0,$$

dans laquelle q est une fonction donnée de p, u, x, y , et où p est supposé une fonction de u, x, y telle, que l'équation soit intégrable, soit d'elle-même, soit à l'aide d'un multiplicateur quelconque. Qu'on suppose que l'une des trois variables u, x, y devienne constante, par exemple u , en sorte qu'on ait l'équation à deux variables

$$p dx + q dy = 0;$$

soit L le facteur qui rendra la différentielle $p dx + q dy$ intégrable (facteur qu'on peut toujours trouver *à posteriori* dès qu'on aura intégré l'équation $p dx + q dy = 0$); on aura donc

$$L(p dx + q dy) = dt,$$

t étant une fonction de x et de y , dans laquelle u entrera aussi comme constante; par conséquent on aura

$$Lp = \frac{dt}{dx}, \quad Lq = \frac{dt}{dy};$$

mais en regardant x, y et u comme variables à la fois, on a, pour la valeur complète de la différentielle dt ,

$$\frac{dt}{dx} dx + \frac{dt}{dy} dy + \frac{dt}{du} du;$$

donc on aura

$$dt = Lp dx + Lq dy + \frac{dt}{du} du;$$

ainsi l'équation

$$du - p dx - q dy = 0,$$

étant multipliée par L , deviendra celle-ci

$$\left(1 + \frac{dt}{du}\right) du - dt = 0,$$

qui devra donc être intégrable. Or comme t est une fonction connue de u, x, y , on aura réciproquement x égale à une fonction connue de t, u, y , de sorte qu'on pourra introduire la variable t à la place de la variable x ; qu'on fasse donc cette substitution dans la quantité $L + \frac{dt}{du}$, et comme l'équation ne contient que les deux différentielles du et dt , il est clair qu'elle ne pourra être intégrable à moins que la variable y ne disparaisse entièrement de la quantité $L + \frac{dt}{du}$. Supposons, pour abréger, cette quantité égale à P , et il faudra qu'en substituant dans P , à la place de x , sa valeur en y, u et t , la variable y s'en aille en même temps que x ; donc aussi si, dans la différentielle

$$dP = \frac{dP}{dx} dx + \frac{dP}{dy} dy + \frac{dP}{du} du,$$

on substitue pour dx sa valeur tirée de l'équation

$$dt = Lp dx + Lq dy + \frac{dt}{du} du,$$

il faudra que la différentielle dy disparaisse; mais, la substitution faite, on a

$$dP = \frac{dP}{dx} \frac{dt - Lq dy - \frac{dt}{du} du}{Lp} + \frac{dP}{dy} dy + \frac{dP}{du} du;$$

savoir

$$dP = \frac{dP}{dx} \frac{dt}{Lp} + \left(\frac{dP}{dy} - \frac{q}{p} \frac{dP}{dx}\right) dy + \left(\frac{dP}{du} - \frac{dt}{du} \frac{dP}{dx} \frac{1}{Lp}\right) du;$$

done il faudra qu'on ait

$$\frac{dP}{dy} - \frac{q}{p} \frac{dP}{dx} = 0.$$

Or

$$P = L + \frac{dt}{du};$$

done on aura cette équation de condition

$$\frac{dL}{dy} + \frac{d^2 t}{du dy} - \frac{q}{p} \left(\frac{dL}{dx} + \frac{d^2 t}{du dx}\right) = 0;$$

mais on a déjà

$$\frac{dt}{dx} = Lp, \quad \frac{dt}{dy} = Lq;$$

donc on aura

$$\frac{d^2t}{dx du} = \frac{d(Lp)}{du} = L \frac{dp}{du} + p \frac{dL}{du}, \quad \frac{d^2t}{dy du} = \frac{d(Lq)}{du} = L \frac{dq}{du} + q \frac{dL}{du};$$

donc l'équation précédente deviendra

$$\frac{dL}{dy} + L \frac{dq}{du} + q \frac{dL}{du} - \frac{q}{p} \left(\frac{dL}{dx} + L \frac{dp}{du} + p \frac{dL}{du} \right) = 0,$$

savoir, en ôtant ce qui se détruit,

$$\frac{dL}{dy} + L \frac{dq}{du} - \frac{q}{p} \left(\frac{dL}{dx} + L \frac{dp}{du} \right) = 0.$$

De plus les mêmes équations

$$\frac{dt}{dx} = Lp, \quad \frac{dt}{dy} = Lq$$

donnent

$$\frac{d(Lp)}{dy} = \frac{d(Lq)}{dx},$$

savoir

$$p \frac{dL}{dy} + L \frac{dp}{dy} - q \frac{dL}{dx} - L \frac{dq}{dx} = 0;$$

donc, retranchant de cette équation la précédente multipliée par p , et divisant le reste par L , on aura celle-ci

$$\frac{dp}{dy} - \frac{dq}{dx} - p \frac{dq}{du} + q \frac{dp}{du} = 0,$$

qui est, comme on voit, la même qu'on a trouvée plus haut.

5. Ainsi, dès qu'on aura satisfait à l'équation précédente par le moyen de la valeur de p , on sera assuré qu'en chassant x de la quantité

$$P = L + \frac{dt}{du},$$

par l'introduction de la variable t , la quantité y s'en ira en même temps, de sorte qu'on aura alors l'équation à deux variables

$$P du - dt = 0.$$

Soit donc L' la fonction de u et de t par laquelle il faudra multiplier maintenant la différentielle

$$P du - dt$$

pour la rendre intégrable (fonction qu'on pourra toujours trouver par l'intégration de l'équation $P du - dt = 0$), et comme

$$L'(P du - dt)$$

sera une différentielle exacte d'une fonction de u et t , si l'on remet à la place de t sa valeur en u , x et y , ce qui, à cause de

$$dt = Lp dx + Lq dy + \frac{dt}{du} du, \quad P = L + \frac{dt}{du},$$

transforme la différentielle dont il s'agit en celle-ci

$$L'(L du - Lp dx - Lq dy),$$

il est évident que cette dernière différentielle sera pareillement une différentielle exacte d'une fonction de u , x et y ; d'où il s'ensuit que L'/L sera le facteur propre à rendre intégrable la différentielle

$$du - p dx - q dy,$$

et qu'ainsi l'on aura (2)

$$M = L'L;$$

de sorte que connaissant L et L' , on connaîtra sur-le-champ le facteur M , et de là par l'intégration on pourra connaître la valeur de la fonction finie

$$\int M (du - p dx - q dy).$$

6. On voit donc clairement par l'analyse précédente que la solution du Problème ne dépend que de la recherche de la quantité p à l'aide de

l'équation de condition

$$\frac{dp}{dy} - \frac{dq}{dx} - p \frac{dq}{du} + q \frac{dp}{du} = 0,$$

laquelle est connue depuis longtemps; car, dès que cette condition sera remplie, on pourra toujours trouver le multiplicateur M , qui rendra intégrable l'équation

$$du - p dx - q dy = 0,$$

et l'intégration donnera ensuite la valeur cherchée de u en x et y .

Si la valeur de p , qui satisfait à l'équation de condition, a toute la généralité que cette équation comporte, on aura par son moyen la valeur complète de u ; mais si la valeur de p n'est que particulière, on ne trouvera d'abord qu'une valeur particulière et incomplète de la fonction cherchée u ; cependant si la valeur particulière de p est telle, qu'elle renferme une constante arbitraire, on pourra compléter la valeur de u de la manière suivante. On cherchera d'abord, d'après cette valeur particulière de p , le multiplicateur M , qui rendra intégrable la différentielle

$$du - p dx - q dy,$$

et l'on aura, en intégrant, l'équation

$$\int M (du - p dx - q dy) = \text{une const.}$$

Désignons, pour plus de simplicité, par N la quantité

$$\int M (du - p dx - q dy),$$

qui sera nécessairement une fonction finie de u , x et y ; soit de plus α la constante arbitraire qui entre dans la valeur de p , et il est clair que cette constante entrera aussi comme telle dans l'expression de N ; supposons maintenant que cette même quantité α , au lieu d'être constante, soit aussi une fonction variable, et il est visible que dans ce cas la différentielle

complète de N ne sera plus simplement

$$M (du - p dx - q dy),$$

mais

$$M (du - p dx - q dy) + \frac{dN}{d\alpha} d\alpha;$$

de sorte qu'on aura, dans l'hypothèse de la variabilité de α ,

$$N = \int M (du - p dx - q dy) + \int \frac{dN}{d\alpha} d\alpha,$$

et par conséquent

$$\int M (du - p dx - q dy) = N - \int \frac{dN}{d\alpha} d\alpha.$$

Donc, si pour satisfaire aux conditions du Problème on veut que la différentielle

$$M (du - p dx - q dy)$$

soit intégrable d'elle-même, il faudra que la différentielle $\frac{dN}{d\alpha} d\alpha$ le soit aussi en particulier; ce qui ne saurait évidemment avoir lieu, à moins que $\frac{dN}{d\alpha}$ ne soit une fonction quelconque de α .

Que $f(\alpha)$ dénote donc une fonction quelconque de α , et supposant $f'(\alpha) = \frac{df(\alpha)}{d\alpha}$, on fera

$$\frac{dN}{d\alpha} = f'(\alpha),$$

équation par laquelle on pourra déterminer α . Ensuite on aura

$$\int \frac{dN}{d\alpha} d\alpha = f(\alpha);$$

donc

$$\int M (du - p dx - q dy) = N - f(\alpha);$$

de là on aura l'équation intégrale

$$N - f(\alpha) = \text{une const.},$$

ou bien simplement

$$N - f(z) = 0$$

[à cause que la constante peut être censée renfermée dans la fonction $f(z)$], laquelle servira à trouver la valeur de la fonction u ; et il est clair que cette valeur de u sera complète, puisqu'elle contiendra une fonction arbitraire.

7. On voit donc aussi par là que toute équation de la forme

$$\frac{dp}{dy} - \frac{dq}{dx} - p \frac{dq}{du} + q \frac{dp}{du} = 0,$$

où q est supposée une fonction quelconque donnée de u, x, y, p , est telle, que si l'on connaît seulement une valeur particulière de p , mais qui renferme une constante arbitraire z , on pourra toujours trouver la valeur complète de p ; car il n'y aura qu'à tirer la valeur de z de l'équation

$$\frac{dN}{dz} = f'(z)$$

et la substituer ensuite dans la valeur particulière et connue de p .

8. Pour montrer maintenant l'application du Théorème précédent, nous allons parcourir les principaux cas dans lesquels l'équation de condition est facile à remplir par le moyen d'une valeur particulière de p qui se présente naturellement, et nous en verrons naître les solutions de la plupart des Problèmes de ce genre qui n'ont été résolus jusqu'ici que par des méthodes particulières.

PREMIER CAS. — *Lorsque q est une fonction de p seul.*

Soit P une fonction quelconque de p , et supposons qu'on ait

$$q = P,$$

L'équation de condition (6) deviendra, en faisant $dP = P' dp$,

$$\frac{dp}{dy} - P' \frac{dp}{dx} - P' p \frac{dp}{du} + P \frac{dp}{du} = 0,$$

à laquelle il est visible que satisfait cette valeur

$$p = \text{une const.}$$

On aura donc ainsi

$$p = \alpha \quad \text{et} \quad q = A$$

(A étant ce que devient P lorsque $P = \alpha$), d'où l'on voit que la différentielle

$$du - p dx - q dy$$

deviendra

$$du - \alpha dx - A dy,$$

laquelle est évidemment intégrable d'elle-même. Intégrant donc on aura

$$u - \alpha x - A y = N;$$

de là, en faisant varier z , on aura

$$\frac{dN}{dz} = -\alpha - A' y$$

(A' étant égal à $\frac{dA}{dz}$); donc

$$-\alpha - A' y = f'(z),$$

équation d'où l'on tirera la valeur de z , qui étant ensuite substituée dans l'équation

$$N - f(z) = 0,$$

ou bien

$$u - \alpha x - A y - f(z) = 0,$$

donnera la valeur complète de u .

DEUXIÈME CAS. — *Lorsque q est une fonction de p et de y .*

Soit P une fonction de p et de y , en sorte que

$$dP = P' dp + Q dy,$$

et supposons

$$q = P;$$

l'équation de condition deviendra la même que ci-dessus, à cause que

$$\frac{dq}{dx} = p' \frac{dp}{dx}, \quad \frac{dq}{du} = p' \frac{dp}{du};$$

ainsi l'on y pourra satisfaire en prenant de même

$$p = z,$$

ce qui rendra P égal à une fonction de y seul; de sorte que la quantité

$$du - p dx - q dy,$$

savoir

$$du - z dx - P dy,$$

sera intégrable d'elle-même, et l'on aura

$$N = u - zx - \int P dy.$$

De là on tirera

$$\frac{dN}{dz} = -x - \int \frac{dP}{dz} dy,$$

par conséquent on aura l'équation

$$f'(z) = -x - \int \frac{dP}{dz} dy,$$

laquelle servira à déterminer z; ensuite de quoi on aura u par l'équation

$$N - f(z) = 0,$$

ou bien

$$u - zx - \int P dy - f(z) = 0.$$

TROISIÈME CAS. — Lorsque q est une fonction de p et de x.

Dans ce cas il est clair que la valeur de p sera réciproquement exprimée par une fonction de q et x; donc regardant q comme l'inconnue, et supposant Q une fonction de q et x, on aura

$$p = Q,$$

et l'équation de condition deviendra, en supposant $\frac{dQ}{dq} = Q'$,

$$Q' \frac{dq}{dy} - \frac{dq}{dx} - Q \frac{dq}{du} + Q' q \frac{dq}{du} = 0,$$

à laquelle on peut satisfaire en prenant q égal à une constante z, ce qui rendra Q égal à une fonction de x seul, en sorte que la quantité

$$du - p dx - q dy,$$

ou bien

$$du - Q dx - z dy$$

sera intégrable d'elle-même. Ainsi l'on aura

$$N = u - \int Q dx - zy,$$

et de là

$$\frac{dN}{dz} = - \int \frac{dQ}{dz} dx - y = f'(z),$$

d'où l'on tirera z, qu'on substituera dans l'équation

$$N - f(z) = 0.$$

QUATRIÈME CAS. — Lorsque une fonction de p et x est égale à une fonction de q et y.

Soit P une fonction de p et x, et Q une fonction de q et y, en sorte qu'on ait

$$P = Q,$$

il est clair que si l'on prend une constante z et qu'on fasse

$$P = z, \quad Q = z,$$

on aura, par la première de ces équations, p exprimé par une fonction de x seul, et par la seconde on aura q exprimé par y seul; en sorte que les différentielles $\frac{dp}{dy}$, $\frac{dp}{du}$, $\frac{dq}{dx}$, $\frac{dq}{du}$ seront nulles d'elles-mêmes; ainsi l'équation de condition se trouvera remplie, et il est visible que la quantité

$$du - p dx - q dy$$

sera intégrable sans aucune préparation; on aura donc

$$N = u - \int p dx - \int q dy,$$

et de là

$$\frac{dN}{dz} = - \int \frac{dp}{dz} dx - \int \frac{dq}{dz} dy = f'(z);$$

d'où l'on tirera la valeur de z pour la substituer dans l'équation $N - f(z) = 0$, laquelle deviendra donc

$$u - \int p dx - \int q dy - f(z) = 0.$$

CINQUIÈME CAS. — *Lorsqu'il y a entre p , q , x et y une équation dans laquelle p et q ne montent qu'à la première dimension.*

Soient X et Y des fonctions quelconques de x et y , et supposons qu'on ait

$$q = pX + Y;$$

substituant donc cette valeur dans l'équation de condition, elle deviendra

$$\frac{dp}{dy} - X \frac{dp}{dx} - p \frac{dX}{dx} - \frac{dY}{dx} - pX \frac{dp}{du} + (pX + Y) \frac{dp}{du} = 0.$$

Il est d'abord clair que si l'on suppose que p ne contienne point u , cette équation se simplifiera beaucoup, car elle deviendra, en faisant pour plus de simplicité $\frac{dX}{dx} = X'$ et $\frac{dY}{dx} = Y'$,

$$\frac{dp}{dy} - X \frac{dp}{dx} - X'p - Y' = 0.$$

Mais cette équation est encore trop compliquée pour qu'on puisse trouver facilement une valeur particulière de p qui y satisfasse. Considérons donc plutôt la quantité même

$$du - p dx - q dy,$$

ou bien, en mettant $pX + Y$ à la place de q ,

$$du - p(dx + X dy) - Y dy,$$

laquelle doit être une différentielle exacte, ou d'elle-même, ou étant multipliée par un facteur convenable M ; et il est d'abord clair que, comme X est une fonction donnée de x et y , si l'on cherche le facteur m qui rendra intégrable la quantité $dx + X dy$, et qu'on suppose ensuite

$$m(dx + X dy) = dz,$$

on aura à rendre intégrable cette quantité plus simple

$$du - \frac{p}{m} dz - Y dy,$$

où $\frac{p}{m}$ est une fonction inconnue, et Y une fonction connue de x et de y , ou bien de z et de y , en substituant à la place de x sa valeur en y et z tirée de l'équation

$$\int m(dx + X dy) = z;$$

or on sait que la quantité dont il s'agit sera intégrable si l'on a

$$\frac{d \frac{p}{m}}{dy} = \frac{dY}{dz};$$

ce qui donne, en intégrant suivant y ,

$$\frac{p}{m} = \int \frac{dY}{dz} dy + z,$$

z étant une constante arbitraire; ainsi l'on a une valeur particulière de p , laquelle donne

$$N = u - \alpha z - \int Y dy;$$

done

$$\frac{dN}{dz} = -\alpha = f'(z),$$

ce qui servira à déterminer z ; ensuite de quoi on aura l'équation

$$N - f(z) = u - \alpha z - \int Y dy - f(z) = 0.$$

Or comme on a

$$-z = f'(z),$$

il est clair que z sera une fonction quelconque de z ; de sorte que l'équation qui sert à déterminer u pourra être représentée plus simplement ainsi

$$u - \int Y dy - f(z) = 0.$$

Au reste on aurait pu voir d'abord par l'équation

$$\frac{p}{m} = \int \frac{dY}{dz} dy + z$$

que la constante z pouvait être une fonction quelconque de z , puisque l'intégrale $\int \frac{dY}{dz} dy$ est censée prise en faisant varier y seul, et z demeurant constante; de sorte que la valeur de p étant complète, on aurait eu sur-le-champ par son moyen la valeur complète de u ; mais nous avons cru qu'il n'était pas inutile de faire voir comment on y pouvait parvenir aussi par le secours de notre méthode, en supposant que la quantité z ne fût regardée d'abord que comme une constante indéterminée.

SIXIÈME CAS. — Lorsqu'il y a entre p, q, x, y une équation telle, que x et y ne remplissent ensemble aucune dimension.

Faisant $x = zy$, on aura donc une équation entre p, q, z , d'où l'on tirera

$$q = P,$$

P étant une fonction de p et z seulement. Or en considérant immédiatement l'équation

$$du - p dx - q dy,$$

ainsi qu'on l'a fait dans le cas précédent, elle deviendra, par les substitutions,

$$du - p(z dy + y dz) - P dy = 0,$$

savoir

$$du - y p dz - (pz + P) dy = 0;$$

et l'on voit que cette équation peut devenir intégrable en supposant p une fonction de z seul (ce qui rendra pareillement P une fonction de z), pourvu qu'on ait

$$pz + P = \int p dz,$$

savoir

$$p dz = p dz + z dp + dP,$$

ou bien

$$z dp + dP = 0;$$

équation différentielle entre p et z , d'où l'on pourra, par l'intégration, tirer la valeur de p en z , laquelle contiendra une constante arbitraire z . De cette manière on aura, par l'intégration,

$$N = u - y \int p dz,$$

et ensuite

$$\frac{dN}{dz} = -y \int \frac{dp}{dz} dz = f'(z),$$

d'où l'on tirera z , qu'on substituera ensuite dans l'équation

$$N - f(z) = u - y \int p dz - f(z) = 0.$$

Au reste, comme on doit avoir dans ce cas $y = Qx$, Q étant une fonction de p et q , on pourra le résoudre aussi plus simplement par la Remarque suivante, à l'aide de laquelle on peut le réduire au cinquième Cas ci-dessus.

REMARQUE. — Tels sont les principaux cas résolubles, en général, lorsqu'il y a une équation entre p, q, x et y sans u , et où par conséquent p et q peuvent être des fonctions de x et y seuls; il faut cependant y ajouter encore ceux dans lesquels il y aura entre ces quatre quantités mêmes équations, mais en échangeant x, y en p, q , et réciproquement;

car, à cause de $\frac{dp}{du} = 0$ et $\frac{dq}{du} = 0$, l'équation de condition est

$$\frac{dp}{dy} - \frac{dq}{dx} = 0,$$

laquelle, en regardant maintenant x et y comme des fonctions de p et q , peut se mettre également sous la forme

$$\frac{dx}{dq} - \frac{dy}{dp} = 0,$$

où p et q ont pris la place de x et y , et *vice versa*. Ainsi il n'y aura qu'à traiter ces cas de la même manière que les cas analogues résolus ci-dessus, en supposant qu'au lieu de chercher p et q en x et y , on cherche au contraire x et y en p et q .

SEPTIÈME CAS. — Lorsque q est une fonction de p et u .

Soit P une fonction de p et u , en sorte que

$$dP = P' dp + Q du,$$

et soit

$$q = P,$$

l'équation de condition deviendra

$$\frac{dp}{dy} - P' \frac{dp}{dx} - pP' \frac{dp}{du} - pQ + P \frac{dp}{du} = 0;$$

il est clair qu'on peut supposer que p soit une fonction de u seul, sans x ni y , ce qui réduira l'équation à celle-ci

$$P'p \frac{dp}{du} + pQ - P \frac{dp}{du} = 0;$$

or comme P , P' et Q sont des fonctions données de p et u , il est clair que l'équation précédente ne sera qu'entre ces deux variables, en sorte qu'elle pourra s'intégrer par les méthodes ordinaires; ainsi l'on aura p en u , et comme l'intégration introduira une constante arbitraire z dans la valeur de p , on pourra en déduire la valeur générale et complète de u .

En effet, l'équation

$$du - p dx - q dy = 0,$$

ou bien

$$du - p dx - P dy = 0$$

donnera celle-ci

$$dy = \frac{du - p dx}{P},$$

où le second nombre étant une fonction de x et u seuls, sera nécessairement intégrable; de sorte qu'on aura

$$N = y - \int \frac{du - p dx}{P};$$

et de là on tirera la valeur de $\frac{dN}{dx}$, qui étant supposée égale à $f'(x)$ servira à déterminer celle de x , qu'on substituera ensuite dans l'équation intégrale

$$N - f(x) = 0.$$

HUITIÈME CAS. — Lorsque $q = pX + V$, X étant une fonction de x et y , et V une fonction de x , y et u .

Au lieu de considérer l'équation de condition par laquelle on doit déterminer p , je considérerai d'abord, ainsi que j'en ai déjà usé plus haut, dans un cas analogue à celui-ci (cinquième Cas), la quantité

$$du - p dx - q dy,$$

qui doit être une différentielle complète, ou dans l'état où elle est, ou après la multiplication par un facteur quelconque M . Or, mettant $pX + V$ à la place de q , elle devient

$$du - p(dx + Xdy) - Vdy;$$

et cherchant le multiplicateur m qui rendra $dx + Xdy$ égale à une différentielle exacte dz , on aura

$$du - \frac{p}{m} dz - Vdy,$$

quantité où $\frac{p}{m}$ est une fonction inconnue, et où V est une fonction

connue de x, y, u , ou bien de u, y, z , en mettant à la place de x sa valeur tirée de l'équation

$$\int m(dx + Xdy) = z.$$

Supposons donc que cette quantité, étant multipliée par M , devienne une différentielle exacte; il faudra que

$$M\left(du - Vdy - \frac{p}{m}dz\right)$$

soit la différentielle d'une fonction de u, y, z ; donc, en regardant d'abord z comme constante, il faudra que

$$M(du - Vdy)$$

soit la différentielle d'une fonction de u et y ; ainsi il n'y aura d'abord qu'à chercher le multiplicateur M qui rendra intégrable la quantité $M(du - Vdy)$ considérée comme fonction de u et y seuls. Soit donc

$$\int M(du - Vdy) = Z,$$

il est clair que Z contiendra aussi z comme constante; de sorte que si l'on veut maintenant traiter z comme variable, on aura, pour la différentielle complète de Z , la quantité

$$M(du - Vdy) + \frac{dZ}{dz}dz;$$

donc

$$M(du - Vdy) = dZ - \frac{dZ}{dz}dz;$$

de sorte que la quantité qui doit être une différentielle exacte deviendra

$$dZ - \left(\frac{Mp}{m} + \frac{dZ}{dz}\right)dz.$$

Or il est visible que pour que cette condition ait lieu il n'y aura qu'à supposer

$$\frac{Mp}{m} + \frac{dZ}{dz} = z;$$

ce qui donnera une valeur particulière de p qui, contenant la constante arbitraire z , conduira, à l'aide de notre méthode, à la solution générale du Problème. On aura en effet

$$N = Z - \alpha z,$$

d'où

$$\frac{dN}{d\alpha} = -z = f'(\alpha),$$

et de là

$$N - f(\alpha) = Z - \alpha z - f(\alpha) = 0.$$

D'où l'on voit que α sera une fonction quelconque de z ; en sorte que l'équation, qui donnera la valeur complète de u , pourra se mettre sous cette forme plus simple

$$Z - f(z) = 0.$$

Au reste on peut faire ici une remarque analogue à celle qu'on a faite ci-dessus dans la solution du cinquième Cas, dont celui-ci n'est qu'une généralisation.

NEUVIÈME CAS. — Lorsque $q = p^m XYU$, X étant une fonction de x , Y une fonction de y et U une fonction de u .

Je considère encore immédiatement la quantité

$$du - p dx - q dy,$$

laquelle, par la substitution de la valeur de q , devient

$$du - p dx - p^m XYU dy;$$

je fais

$$p = rv,$$

v étant une fonction de u , et j'ai

$$du - rv dx - r^m v^m XYU dy;$$

je suppose maintenant $v = v^m U$, ce qui donne

$$v = \sqrt[m]{\frac{1}{U}};$$

et divisant ensuite toute la quantité précédente par v , j'ai

$$\frac{du}{v} - r dx - r^m XY dy;$$

maintenant il est clair que cette quantité sera intégrable si l'on fait

$$r^m X = z,$$

z étant une constante, car elle deviendra

$$\frac{du}{v} - \sqrt[m]{\frac{z}{X}} dx - z Y dy,$$

dont l'intégrale sera

$$N = \int \frac{du}{v} - \sqrt[m]{\frac{z}{X}} \int \frac{dx}{\sqrt[m]{X}} - z \int Y dy;$$

de là on tirera donc la valeur de $\frac{dN}{dz}$, qu'on fera égal à $f'(z)$, et il n'y aura plus qu'à substituer la valeur de z , qui résultera de cette dernière équation, dans celle-ci

$$N - f(z) = 0.$$

REMARQUE. — Si l'on a une équation entre p , q , u et x , on pourra regarder p et q comme des fonctions de u et x seuls, et le Problème rentrera dans le cas où l'équation est entre p , q , x , y , en prenant y à la place de u , $-\frac{p}{q}$ à la place de p , et $\frac{1}{q}$ à la place de q ; car il est visible que l'équation

$$du - p dx - q dy = 0$$

peut se mettre aussi sous la forme

$$dy + \frac{p dx}{q} - \frac{du}{q} = 0,$$

qui résulte de la précédente, en changeant u en y , p en $-\frac{p}{q}$, q en $\frac{1}{q}$. Il en sera de même, *mutatis mutandis*, du cas où l'on aura une équation entre p , q , u et y .

9. Les cas que nous venons d'examiner renferment d'une manière générale à peu près tout ce qu'on sait sur l'intégration des équations du

premier ordre entre trois variables; d'où l'on voit combien peu on est encore avancé dans cette matière. Le principe que nous avons donné, pour trouver l'intégrale complète d'après une intégrale particulière, est, comme on voit, très-fécond, et suffit seul pour résoudre la plupart des cas où l'intégration réussit. Nous remarquerons cependant sur ce sujet que si, au lieu d'avoir une valeur particulière de p , laquelle renferme une constante arbitraire, on avait une valeur particulière de u renfermant de même une constante arbitraire, on ne pourrait cependant pas trouver par son moyen l'intégrale complète; mais on pourrait y parvenir si la valeur particulière de u renfermait à la fois deux constantes arbitraires.

10. Pour démontrer cette proposition et donner en même temps le moyen de déduire la valeur complète de u d'une valeur particulière renfermant deux constantes arbitraires, supposons que cette valeur soit déterminée par une équation entre u , x et y , laquelle renferme outre cela deux constantes α et β qui ne se trouvent pas dans l'équation différentielle; il est visible que, si l'on différentie cette équation en sorte que l'une des constantes comme β disparaisse, on aura une équation différentielle qui sera nécessairement comparable à la proposée

$$du - p dx - q dy = 0,$$

et d'où l'on pourra tirer par la comparaison une valeur de p , laquelle renfermera encore une constante arbitraire z ; en sorte qu'on pourra ensuite en déduire la valeur complète de u . Mais si l'équation en u , x et y ne renfermait qu'une constante arbitraire β , alors il est visible qu'en faisant évanouir cette arbitraire par la différentiation, l'équation différentielle qui en résultera ne renfermera plus de constantes arbitraires; ainsi l'on ne trouvera qu'une valeur particulière de p qui n'aura point de constante arbitraire, et qui sera par conséquent inutile pour la recherche de la valeur complète de u .

11. Il ne doit point au reste être étonnant qu'une solution particulière, qui renferme deux constantes arbitraires, soit suffisante pour en déduire

la solution complète; car en y regardant de plus près on voit que cette solution remplit presque en entier les conditions de l'équation différentielle, puisqu'on ne peut faire évanouir les deux constantes arbitraires sans tomber dans une équation qui renferme à la fois les différences partielles $\frac{du}{dx}$ et $\frac{du}{dy}$; en effet, comme il y a deux quantités à éliminer, il faudra avoir trois équations; ainsi il en faudra encore deux outre la proposée, et ces deux ne peuvent venir que de deux différentiations différentes, l'une en faisant varier x et l'autre en faisant varier y .

On peut prouver de la même manière que, si l'on a une fonction u de trois variables x, y, z , laquelle dépende d'une équation différentielle du premier ordre entre u, x, y, z , et $\frac{du}{dx}, \frac{du}{dy}, \frac{du}{dz}$, et qu'on ait une valeur particulière de u , laquelle renferme trois constantes arbitraires α, β, γ , cette valeur remplira presque en entier les conditions du Problème; car on ne pourra éliminer les trois constantes qu'au moyen de trois différentiations, l'une relative à x , l'autre à y et la troisième à z .

Et ainsi de suite.

12. En général, soit u une fonction de plusieurs variables $x, y, z, \dots$, et soit donnée une équation entre

$$u, x, y, z, \dots, \frac{du}{dx}, \frac{du}{dy}, \frac{du}{dz}, \dots$$

par laquelle il faille déterminer la valeur de u . Supposons que l'on ait une valeur particulière de u , laquelle renferme les constantes arbitraires $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ dont le nombre soit égal à celui des variables $x, y, z, \dots$; qu'on en tire la valeur d'une de ces constantes comme z , en sorte que l'on ait

$$V = z,$$

V étant une fonction de $u, x, y, z, \dots$ et de $\beta, \gamma, \dots$; qu'on différentie cette équation, et supposant

$$dV = Mdu + Pdx + Qdy + Rdz + \dots,$$

on aura, en divisant par M , l'équation

$$du + \frac{Pdx}{M} + \frac{Qdy}{M} + \frac{Rdz}{M} + \dots = 0;$$

en sorte que

$$\frac{du}{dx} = -\frac{P}{M}, \quad \frac{du}{dy} = -\frac{Q}{M}, \quad \frac{du}{dz} = -\frac{R}{M}, \dots,$$

et ces valeurs seront telles, qu'elles satisferront par l'hypothèse à l'équation donnée. Maintenant, comme la solution du Problème dépend uniquement de ce que l'équation précédente devient intégrable étant multipliée par le facteur M , c'est-à-dire de ce que

$$Mdu + Pdx + Qdy + Rdz + \dots$$

est une différentielle complète de $u, x, y, z, \dots$ il est clair que la solution aura lieu de même si les quantités $\beta, \gamma, \dots$ au lieu d'être constantes, sont variables, pourvu que la même différentielle continue à être complète; or l'intégrale de cette différentielle, tant que $\beta, \gamma, \dots$ sont constantes, est V ; en sorte qu'on a dans cette hypothèse

$$Mdu + Pdx + Qdy + Rdz + \dots = dV;$$

mais si l'on regarde β comme variable, alors on aura

$$Mdu + Pdx + Qdy + Rdz + \dots + \frac{dV}{d\beta} d\beta = dV;$$

donc

$$Mdu + Pdx + Qdy + Rdz + \dots = dV - \frac{dV}{d\beta} d\beta;$$

donc comme dV est par elle-même une différentielle complète, il faudra que $\frac{dV}{d\beta} d\beta$ soit aussi une quantité intégrable d'elle-même, ce qui ne peut avoir lieu à moins que $\frac{dV}{d\beta}$ ne soit égal à une fonction quelconque de β . Ainsi supposant

$$\frac{dV}{d\beta} = f(\beta),$$

et tirant de cette équation la valeur de β , on pourra la substituer à la place de β , et l'on aura, au lieu de l'équation $V = z$, celle-ci

$$V - B = z,$$

B étant égal à $\int f(\beta) d\beta$, où il faut remarquer que les quantités $\gamma, \dots$ peuvent entrer d'une manière quelconque en qualité de constantes dans la fonction $f(\beta)$, et par conséquent aussi dans la fonction B. Maintenant on pourra rendre de même variable la quantité γ contenue dans V et B, en prenant

$$\frac{d(V-B)}{d\gamma} = f(\gamma),$$

ce qui détermine γ ; et substituant ensuite cette valeur de γ , on aura l'équation

$$V - B - C = \alpha,$$

où $C = \int f(\gamma) d\gamma$, et ainsi de suite.

Par ce moyen l'intégrale incomplète

$$V = \alpha$$

deviendra de la forme

$$V - B - C - \dots = \alpha,$$

et sera nécessairement complète, puisqu'elle contiendra autant de fonctions arbitraires qu'il y a de variables $x, y, z, \dots$ moins une (*).

13. Pour faire voir l'usage de cette méthode par un exemple très-général, supposons que X soit une fonction de $\frac{du}{dx}$ et x , que Y en soit une de $\frac{du}{dy}$ et y , que Z en soit une de $\frac{du}{dz}$ et z , et ainsi de suite, et que l'on ait une équation donnée entre X, Y, Z, ..., d'où il faille tirer la va-

(*) L'analyse qui vient d'être développée conduit assurément à l'intégrale générale de l'équation proposée, mais cette intégrale ne contient pas, comme le dit ici par inadvertance l'illustre Auteur, autant de fonctions arbitraires moins une qu'il y a de variables indépendantes. Dans la formule obtenue par Lagrange, il n'y a en réalité qu'une seule fonction arbitraire, $B + C + \dots + \alpha$, laquelle dépend des quantités $\beta, \gamma, \dots$. Si l'on représente cette fonction par $f(\beta, \gamma, \dots)$, l'intégrale générale de l'équation proposée sera le résultat de l'élimination de $\beta, \gamma, \dots$ entre l'équation

$$V = f(\beta, \gamma, \dots)$$

et les suivantes

$$\frac{dV}{d\beta} = \frac{df}{d\beta}, \quad \frac{dV}{d\gamma} = \frac{df}{d\gamma}, \dots$$

(Note de l'Éditeur.)

leur de u ; comme le Problème consiste à faire en sorte que la quantité

$$du - p dx - q dy - r dz - \dots$$

soit intégrable ou par elle-même ou étant multipliée par un facteur quelconque, en supposant

$$p = \frac{du}{dx}, \quad q = \frac{du}{dy}, \quad r = \frac{du}{dz}, \dots,$$

il est clair que la condition du Problème sera remplie si p est une fonction de x seul, q de y seul, r de z seul, etc.; or c'est ce qui aura lieu si l'on fait X, Y, Z, ... égales à des quantités constantes; car alors l'équation donnée servira à déterminer une de ces constantes par toutes les autres, en sorte qu'il restera autant de constantes arbitraires $\beta, \gamma, \dots$ qu'il y aura de variables $x, y, z, \dots$ moins une. De cette manière on aura

$$V = u - \int p dx - \int q dy - \int r dz - \dots = \alpha$$

pour l'équation qui détermine la valeur particulière de u ; et, comme cette valeur de u contient les constantes arbitraires $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ on pourra compléter la solution par la méthode exposée ci-dessus.

14. Il est clair qu'on peut généraliser encore le cas précédent, en supposant que W soit une fonction quelconque de u , et que l'on ait X égal à une fonction de $W \frac{du}{dx}$ et x , Y une fonction de $W \frac{du}{dy}$ et y , Z une fonction de $W \frac{du}{dz}$ et $z, \dots$; car en faisant X, Y, ... constantes, on aura p égal à une fonction de x seul divisée par W, q égal à une fonction de y seul divisée de même par W, ..., de sorte que la quantité

$$du - p dx - q dy - r dz - \dots$$

étant multipliée par W deviendra intégrable.