



DÉMONSTRATION

D'UN

THÉORÈME D'ARITHMÉTIQUE.

(Nouveaux Mémoires de l'Académie royale des Sciences
et Belles-Lettres de Berlin, année 1770.)

C'est un Théorème connu depuis longtemps que tout nombre entier non carré peut toujours se décomposer en deux, ou trois, ou quatre carrés entiers; mais personne, que je sache, n'en a encore donné la démonstration. M. Bachet de Méziriac est le premier qui ait fait mention de ce Théorème; il paraît qu'il y a été conduit par la question 31^e du IV^e Livre de Diophante, où le Théorème dont nous parlons est en quelque sorte tacitement supposé; mais M. Bachet s'est contenté de s'assurer de la vérité de ce Théorème par induction, en examinant successivement tous les nombres entiers depuis 1 jusqu'à 325; et quant à la démonstration générale, il avoue qu'il n'avait pas encore pu y parvenir. « *Mihi sane* (dit-il dans son Commentaire à la question citée) *perfecta id demonstratione assequi nondum licuit, quam qui proferet maximas ei habeo gratias, præsertim cum non solum in hac questione sed et in nonnullis libri quinti hoc supponere videatur Diophantus.* » Je ne connais, jusqu'à présent, que deux Auteurs qui se soient appliqués à cette recherche, savoir M. Fermat et M. Euler. Dans les Notes que le premier a ajoutées au Commentaire de Bachet sur Diophante, il annonce un grand Ouvrage qu'il avait dessein de composer sur la théorie des nombres, et il promet

d'y démontrer cette proposition générale : que tout nombre est, ou triangulaire, ou composé de deux ou de trois nombres triangulaires; qu'il est, ou carré, ou composé de deux, ou de trois, ou de quatre carrés, et ainsi de suite; mais cet Ouvrage n'a jamais paru, et dans tout ce qui nous reste des écrits de ce grand Géomètre, on ne trouve absolument rien qui puisse fournir la moindre lumière pour la démonstration dont il s'agit. A l'égard de M. Euler, si son travail sur ce sujet n'a pas eu tout le succès qu'on pourrait désirer, on lui a du moins l'obligation d'avoir ouvert la route qu'il faut suivre dans ces sortes de recherches. On peut voir dans le tome V des *Nouveaux Commentaires de Pétersbourg* le résultat des tentatives ingénieuses que ce grand Géomètre a faites pour parvenir à démontrer le Théorème de M. Bachet.

M. Euler fait voir que le produit de deux, ou de plusieurs nombres, dont chacun serait composé de quatre carrés entiers, sera aussi toujours composé de quatre, ou d'un moindre nombre de carrés entiers; d'où il suit d'abord que si le Théorème proposé peut être démontré pour tous les nombres premiers, il le sera aussi pour tous les autres nombres. M. Euler démontre, de plus, qu'un nombre premier quelconque étant proposé, on peut toujours trouver deux ou trois nombres carrés dont la somme soit divisible par ce nombre sans que chacun des carrés en particulier le soit, et que ces nombres carrés peuvent toujours être supposés tels que le quotient de la division de leur somme par le nombre premier donné soit moindre que ce même nombre. De là M. Euler conclut, avec raison, que le Théorème en question serait démontré pour tous les nombres premiers si l'on pouvait seulement démontrer cette autre proposition, savoir, que lorsque le produit de deux nombres est la somme de quatre ou d'un moindre nombre de carrés, et que l'un des nombres produisant est pareillement la somme de quatre ou d'un moindre nombre de carrés, l'autre produisant le sera de même. « *Si summa quatuor quadratorum* (dit-il, page 55 du volume cité) *$a^2 + b^2 + c^2 + d^2$ fuerit divisibilis per summam quatuor quadratorum $p^2 + q^2 + r^2 + s^2$, tum quotum non solum in fractis sed etiam in integris esse summam quatuor quadratorum, est Theorema elegantissimum Fermatii, cujus demonstratio cum ipso nobis*

est erepta; fateor me adhuc hanc demonstrationem invenire non potuisse, etc. »

C'est donc cette dernière proposition seule qu'il s'agit de démontrer. Or pour cela nous n'aurons pas besoin de supposer que le diviseur soit aussi représenté par la somme de quatre carrés, et nous démontrerons, en général, que tout nombre premier qui est diviseur d'un nombre quelconque composé de quatre ou d'un moindre nombre de carrés, sans l'être de chacun des carrés en particulier, est nécessairement aussi composé de quatre ou d'un moindre nombre de carrés; après quoi il n'y aura plus rien à désirer pour la démonstration complète du Théorème général de Bachet, que nous nous sommes proposé de donner dans ce Mémoire.

LEMME.

Les nombres qui sont la somme de deux carrés premiers entre eux n'admettent d'autres diviseurs que ceux qui sont pareillement la somme de deux carrés.

Cette proposition, qui est de M. Fermat, a été démontrée par M. Euler dans un Mémoire imprimé dans le tome IV des *Nouveaux Commentaires de Pétersbourg*.

COROLLAIRE I. — *Si deux nombres égaux chacun à la somme de deux carrés, tels que $p^2 + q^2$ et $r^2 + s^2$, sont divisibles par un même nombre ρ , et que les quatre carrés p^2 , q^2 , r^2 , s^2 n'aient aucun diviseur commun, je dis que les deux quotients $\frac{p^2 + q^2}{\rho}$ et $\frac{r^2 + s^2}{\rho}$ seront aussi chacun égaux à la somme de deux carrés.*

Car soit m la plus grande commune mesure de p et q , et n la plus grande commune mesure de r et s , de sorte qu'en faisant

$$p = mp', \quad q = mq', \quad r = nr', \quad s = ns'$$

les nombres p' et q' soient premiers entre eux, comme aussi les nombres r' et s' entre eux; on aura donc les deux nombres $m^2(p'^2 + q'^2)$ et $n^2(r'^2 + s'^2)$ qui seront divisibles à la fois par ρ . Or je remarque d'abord

que m et n seront premiers entre eux; autrement les quatre nombres p, q, r et s auraient une commune mesure, ce qui est contre l'hypothèse. Maintenant soit μ la plus grande commune mesure entre m^2 et ρ , en sorte que l'on ait $\rho = \mu\rho'$, et que ρ' soit premier à $\frac{m^2}{\mu}$; donc m^2 sera divisible par μ , et il faudra que $p^2 + q^2$ le soit par ρ' , de sorte qu'on aura

$$\frac{p^2 + q^2}{\rho} = \frac{m^2}{\mu} \frac{p'^2 + q'^2}{\rho'};$$

or p' et q' étant premiers entre eux, il suit du Lemme précédent que tant le diviseur ρ' que le quotient seront la somme de deux carrés; ainsi l'on aura

$$\frac{p'^2 + q'^2}{\rho'} = \alpha^2 + \beta^2.$$

Soit de plus ν^2 le plus grand facteur carré du nombre μ , en sorte que $\mu = \nu^2\mu'$, μ' étant un nombre qui ne soit divisible par aucun carré, et il est clair que m^2 ne pourra être divisible par μ à moins que m ne le soit par $\nu\mu'$; soit donc $m = K\nu\mu'$, et l'on aura

$$\frac{m^2}{\mu} = K^2\mu'.$$

Or $n^2(r'^2 + s'^2)$ doit être aussi divisible par $\rho = \mu\rho'$; donc μ divisera $n^2(r'^2 + s'^2)$; mais μ divise déjà m^2 ; donc, puisque m^2 et n^2 sont premiers entre eux, il s'ensuit que μ sera aussi premier à n^2 ; par conséquent il faudra que μ divise $r'^2 + s'^2$; et comme $\mu = \nu^2\mu'$, μ' sera aussi un diviseur de $r'^2 + s'^2$; donc, puisque r' et s' sont premiers entre eux, le diviseur μ' sera égal à la somme de deux carrés par le Lemme. Faisant donc $\mu' = \gamma^2 + \delta^2$, on aura

$$\frac{m^2}{\mu} = K^2(\gamma^2 + \delta^2);$$

et de là

$$\frac{p^2 + q^2}{\rho} = K^2(\gamma^2 + \delta^2)(\alpha^2 + \beta^2) = K^2(\gamma\alpha + \delta\beta)^2 + K^2(\gamma\beta - \delta\alpha)^2,$$

c'est-à-dire égal à la somme de deux carrés. On démontrera de la même manière que le quotient $\frac{r^2 + s^2}{\rho}$ sera aussi égal à la somme de deux carrés.

COROLLAIRE II. — Si la somme de deux carrés est divisible par une autre somme de deux carrés, le quotient sera toujours égal à la somme de deux carrés.

Car soit $a^2 + b^2$ divisible par $c^2 + d^2$, et si les nombres a, b, c, d ont une commune mesure, dénotons-la par l , en sorte que l'on ait

$$a = lp, \quad b = lq, \quad c = lr, \quad d = ls,$$

et que p, q, r, s n'aient aucun commun diviseur; donc on aura

$$\frac{a^2 + b^2}{c^2 + d^2} = \frac{p^2 + q^2}{r^2 + s^2},$$

de sorte que $p^2 + q^2$ sera divisible par $r^2 + s^2$; or, faisant $r^2 + s^2 = \rho$, on aura par le Corollaire précédent $\frac{p^2 + q^2}{\rho}$ égal à la somme de deux carrés; donc, etc.

THÉORÈME I.

Si la somme de quatre carrés est divisible par un nombre premier plus grand que la racine carrée de la même somme, ce nombre sera nécessairement égal à la somme de quatre carrés.

Car soit $p^2 + q^2 + r^2 + s^2$ divisible par A , A étant un nombre premier, en sorte que l'on ait

$$Aa = p^2 + q^2 + r^2 + s^2,$$

et comme on suppose que le diviseur A est plus grand que

$$\sqrt{p^2 + q^2 + r^2 + s^2},$$

il est clair que le quotient a sera plus petit que la même racine, de sorte qu'on aura $a < A$.

Cela posé, si les nombres p, q, r et s ont un diviseur commun d , il est clair que la somme de leurs carrés sera divisible par d^2 , et qu'ainsi il faudra que Aa le soit aussi; or d^2 étant plus petit que Aa , d sera plus petit que $\sqrt{Aa} < A$, à cause de $A < a$; donc, puisque A est premier (hypo-

thèse), il est clair que A et d seront premiers entre eux; d'où il s'ensuit que Aa ne pourra être divisible par d^2 à moins que a ne le soit; ainsi, divisant tant le nombre a que chacun des carrés $p^2, q^2, \dots$ par d^2 , on aura une équation de la même forme que la précédente, où le coefficient a sera toujours plus petit que A et où les quatre carrés p^2, q^2, r^2, s^2 n'auront plus de commun diviseur.

Considérons donc l'équation

$$Aa = p^2 + q^2 + r^2 + s^2$$

comme déjà réduite à cet état, et si le nombre $p^2 + q^2$ n'est pas premier à a , soit ρ leur plus grande commune mesure, en sorte que l'on ait

$$a = b\rho \quad \text{et} \quad p^2 + q^2 = t\rho,$$

b et t étant premiers entre eux; on aura donc

$$Ab\rho = t\rho + r^2 + s^2,$$

d'où l'on voit que $r^2 + s^2$ doit être aussi divisible par ρ , de sorte que, nommant le quotient u , l'équation deviendra

$$Ab = t + u;$$

or, puisque ρ divise tant $p^2 + q^2$ que $r^2 + s^2$, et que p, q, r et s n'ont aucun diviseur commun, il s'ensuit du Corollaire I du Lemme précédent que les quotients $\frac{p^2 + q^2}{\rho} = t$ et $\frac{r^2 + s^2}{\rho} = u$ seront l'un et l'autre la somme de deux carrés; ainsi l'on aura

$$t = m^2 + n^2 \quad \text{et} \quad u = h^2 + l^2;$$

donc, multipliant toute l'équation par t , on aura

$$Abt = t^2 + ta,$$

ou bien, en faisant $x = mh + nl$ et $y = ml - nh$, en sorte que $tu = x^2 + y^2$, on aura cette équation-ci

$$Abt = t^2 + x^2 + y^2.$$

Maintenant, comme b et t sont premiers entre eux, on peut toujours trouver deux multiples de b et t tels que leur somme ou leur différence soit égale à un nombre quelconque donné, et de plus on peut supposer que l'un de ces multiples soit moindre que $\frac{bt}{2}$ [voyez le Lemme I du Mémoire sur les Problèmes indéterminés, qui est imprimé dans le tome XXIV des *Mémoires de l'Académie royale des Sciences et Belles-Lettres de Berlin*, pour l'année 1768 (*)]; ainsi l'on peut faire

$$x = \alpha t + \gamma b \quad \text{et} \quad y = \beta t + \delta b,$$

α, β, γ et δ étant des nombres entiers positifs ou négatifs, et l'on peut supposer en même temps que α et β , pris positivement, soient l'un et l'autre plus petits que $\frac{b}{2}$. Qu'on fasse donc cette substitution dans l'équation précédente, elle deviendra

$$Abt = t^2(1 + \alpha^2 + \beta^2) + 2\alpha\gamma tb + 2\beta\delta tb + \gamma^2 b^2 + \delta^2 b^2,$$

où l'on voit que tous les termes sont multipliés par b , à l'exception de ceux-ci

$$t^2(1 + \alpha^2 + \beta^2);$$

ainsi, pour que cette équation puisse subsister en nombres entiers comme il le faut, il est nécessaire que $t^2(1 + \alpha^2 + \beta^2)$ soit aussi divisible par b ; mais b et t sont premiers entre eux, donc il faudra que b divise $1 + \alpha^2 + \beta^2$, de sorte qu'en nommant le quotient a' on aura

$$a'b = 1 + \alpha^2 + \beta^2;$$

et comme α et β sont chacun plus petits que $\frac{b}{2}$, $1 + \alpha^2 + \beta^2$ sera plus petit que $\frac{b^2}{2} + 1$; par conséquent a' sera plus petit que $\frac{b}{2} + \frac{1}{b}$.

Or, mettant dans l'équation ci-dessus $a'b$ à la place de $1 + \alpha^2 + \beta^2$, et divisant ensuite par b , on aura

$$At = a't^2 + 2\alpha\gamma t + 2\beta\delta t + (\gamma^2 + \delta^2)b,$$

(*) *Oeuvres de Lagrange*, t. II, p. 659.

où je remarque encore que tous les termes étant multipliés par t , excepté ceux-ci

$$(\gamma^2 + \delta^2) b,$$

il faudra que le nombre $(\gamma^2 + \delta^2) b$ soit divisible par t , et comme b et t sont premiers entre eux, il faudra que $\gamma^2 + \delta^2$ soit divisible par t .

Si l'on multiplie l'équation que nous venons de trouver par a' , elle pourra se mettre sous cette forme

$$Aa't = (a't + \alpha\gamma + \beta\delta)^2 + (\gamma^2 + \delta^2)a'b - (\alpha\gamma + \beta\delta)^2,$$

ou bien sous celle-ci

$$Aa't = (a't + \alpha\gamma + \beta\delta)^2 + \gamma^2(a'b - \alpha^2) + \delta^2(a'b - \beta^2) - 2\alpha\beta\gamma\delta;$$

mais on a

$$a'b = 1 + \alpha^2 + \beta^2,$$

donc l'équation précédente deviendra

$$Aa't = (a't + \alpha\gamma + \beta\delta)^2 + \gamma^2(1 + \beta^2) + \delta^2(1 + \alpha^2) - 2\alpha\beta\gamma\delta.$$

c'est-à-dire

$$Aa't = (a't + \alpha\gamma + \beta\delta)^2 + (\beta\gamma - \alpha\delta)^2 + \gamma^2 + \delta^2.$$

Or nous avons dit ci-dessus que $\gamma^2 + \delta^2$ doit être divisible par t , donc il faudra aussi que le nombre

$$(a't + \alpha\gamma + \beta\delta)^2 + (\beta\gamma - \alpha\delta)^2$$

le soit; mais on a

$$t = m^2 + n^2,$$

done, par le Corollaire II du Lemme, chacun des deux quotients sera nécessairement la somme de deux carrés; de sorte qu'on aura

$$\gamma^2 + \delta^2 = t(p'^2 + q'^2) \quad \text{et} \quad (a't + \alpha\gamma + \beta\delta)^2 + (\beta\gamma - \alpha\delta)^2 = t(r'^2 + s'^2).$$

Donc on aura, après avoir divisé toute l'équation par t ,

$$Aa' = p'^2 + q'^2 + r'^2 + s'^2.$$

Il s'ensuit de là que si Aa est la somme de quatre carrés, Aa' sera aussi la somme de quatre carrés, a' étant plus petit que $\frac{b}{2} + \frac{1}{b}$ et $a = b\rho$; ainsi si a est plus grand que 1, a' sera nécessairement plus petit que a ; et, si a' est encore plus grand que 1, on prouvera de la même manière que Aa'' sera aussi la somme de quatre carrés, a'' étant plus petit que a' ; et ainsi de suite: donc comme les nombres $a, a', a'', \dots$ sont des nombres entiers, dont aucun ne peut être égal à zéro (à cause que ces nombres sont des diviseurs des nombres $1 + \alpha^2 + \beta^2, 1 + \alpha'^2 + \beta'^2, \dots$ qui, comme on voit, ne peuvent jamais devenir nuls), et que ces nombres vont en diminuant, il est clair qu'on parviendra nécessairement à un de ces nombres qui sera égal à l'unité, et alors on aura A égal à la somme de quatre carrés entiers.

COROLLAIRE. — Si un nombre premier quelconque est un diviseur de la somme de quatre carrés qui n'aient point de commun diviseur, ce nombre sera aussi la somme de quatre carrés.

Car nommant, comme ci-dessus, A le nombre premier donné et $p^2 + q^2 + r^2 + s^2$ le nombre composé de quatre carrés qui est divisible par A , il est clair que, si chacune des racines p, q, r, s était moindre que $\frac{A}{2}$, on aurait

$$p^2 + q^2 + r^2 + s^2 < 4 \left(\frac{A}{2} \right)^2 < A^2;$$

de sorte que A serait plus grand que $\sqrt{p^2 + q^2 + r^2 + s^2}$ comme on l'a supposé dans le Théorème précédent; donc, etc.

Or je dis que quels que soient les nombres $p, q, \dots$, on peut toujours les réduire à être moindres que $\frac{A}{2}$; car soit, par exemple, $p > \frac{A}{2}$, il est visible que si $p^2 + q^2 + r^2 + s^2$ est divisible par A , $(p - mA)^2 + q^2 + r^2 + s^2$ le sera aussi, de même que $(mA - p)^2 + q^2 + r^2 + s^2$, quel que soit le nombre m ; or on peut toujours prendre m tel que $p - mA$ ou $mA - p$ soit moindre que $\frac{A}{2}$; donc il n'y aura qu'à mettre au lieu de p le nombre

$p - mA$ ou $mA - p$; et l'on fera la même chose par rapport aux autres nombres s'ils se trouvent plus grands que $\frac{A}{2}$.

Si p était divisible par A on aurait

$$p - mA = 0;$$

de sorte que dans ce cas il faudrait mettre 0 à la place de p ; il en serait de même à l'égard de q s'il était aussi divisible par A , et ainsi des autres; mais comme on suppose que p , q , r et s n'ont aucun diviseur commun, ils ne peuvent pas être tous divisibles à la fois par A , et même il ne pourra pas y en avoir plus de deux qui le soient; autrement il faudrait que tous quatre le fussent; de sorte qu'il n'y a pas à craindre que, par ces réductions, le dividende $p^2 + q^2 + r^2 + s^2$ devienne nul.

REMARQUE. — Au reste il est clair que la démonstration du Théorème précédent n'en subsistera pas moins si l'on suppose qu'un ou deux des quatre carrés qui composent le dividende soient nuls; d'ailleurs il peut aussi arriver qu'un ou deux des quatre carrés qu'on trouvera pour le diviseur A soient nuls; donc, en général, tout nombre premier qui divisera la somme de quatre ou d'un moindre nombre de carrés entiers, pourvu qu'ils n'aient entre eux aucun diviseur commun, sera nécessairement égal à la somme de quatre ou d'un moindre nombre de carrés entiers.

THÉORÈME II.

Si A est un nombre premier et que B et C soient des nombres quelconques positifs ou négatifs non divisibles par A , je dis qu'on pourra toujours trouver deux nombres p et q tels que le nombre $p^2 - Bq^2 - C$ soit divisible par A .

Car: 1° Si l'on peut trouver un nombre q tel que $Bq^2 + C$ soit divisible par A , il n'y aura alors qu'à prendre p divisible par A , ou bien $p = 0$;

2° S'il n'y a aucun nombre qui étant pris pour q puisse rendre $Bq^2 + C$ divisible par A , faisons, pour abrégér, $Bq^2 + C = b$, et supposant

$$P = p^{A-2} + bp^{A-4} + b^2p^{A-6} + \dots + b^{\frac{A-1}{2}},$$

on aura

$$(p^2 - Bq^2 - C)P = p^{A-1} - b^{\frac{A-1}{2}} = p^{A-1} - 1 - \left(b^{\frac{A-1}{2}} - 1\right);$$

multiplions cette équation par $b^{\frac{A-1}{2}} + 1$ que nous supposons égal à Q , et l'on aura

$$(p^2 - Bq^2 - C)PQ = Q(p^{A-1} - 1) - (b^{A-1} - 1).$$

Or, par le Théorème connu de Fermat, que M. Euler a démontré dans les *Commentaires de Pétersbourg*, on sait que si A est un nombre premier quelconque et a un autre nombre quelconque non divisible par A , $a^{A-1} - 1$ sera toujours divisible par A . Donc, si l'on suppose que p ne soit pas divisible par A , on aura les deux nombres $p^{A-1} - 1$ et $b^{A-1} - 1$ divisibles à la fois par A , à cause que b n'est jamais divisible par A , quel que soit q (hypothèse). Donc le nombre $(p^2 - Bq^2 - C)PQ$ sera divisible par A , de sorte que, si ni P ni Q n'étaient divisibles par A , il faudrait que $p^2 - Bq^2 - C$ le fût, à cause que A est un nombre premier par l'hypothèse. Ainsi la difficulté se réduit à prouver que l'on peut toujours prendre p et q tels que ni P ni Q ne soient pas divisibles par A , p ne l'étant pas non plus.

Pour cela je remarque d'abord que, quelle que soit la valeur de q , on peut toujours trouver une valeur de p plus petite que A et par conséquent non divisible par A , telle que P ne soit pas divisible par A . Car si l'on substitue successivement dans l'expression de P les nombres 1, 2, 3, ... jusqu'à $A - 2$ inclusivement à la place de p , et qu'on nomme P' , P'' , ..., $P^{(A-2)}$ les valeurs résultantes de P , on aura, par la théorie connue des différences,

$$P' = (A-3)P'' + \frac{(A-3)(A-4)}{2}P''' - \dots + P^{(A-2)} = 1, 2, 3, 4, \dots, (A-3).$$

Or, si tous les nombres P' , P'' , ..., jusqu'à $P^{(A-2)}$ étaient divisibles par A , il faudrait que le nombre 1, 2, 3, ..., $(A-3)$ le fût aussi; ce qui ne pouvant être à cause que A est premier, il s'ensuit que parmi les nombres P' , P'' , ..., $P^{(A-2)}$ il s'en trouvera nécessairement quelqu'un qui ne sera pas divisible par A ; donc, etc.

Ainsi il ne reste plus qu'à prouver que l'on peut toujours prendre q tel que Q ou $(Bq^2 + C) \frac{A-1}{2} + 1$ ne soit pas divisible par A .

Soit, pour plus de simplicité, $\frac{A-1}{2} = m$, et l'on aura

$$Q = B^m q^{A-1} + m B^{m-1} q^{A-3} C + \frac{m(m-1)}{2} B^{m-2} q^{A-5} C^2 + \dots + m B q^2 C^{m-1} + C^m + 1.$$

Or si $C^m + 1$ n'est pas divisible par A , il est clair qu'il n'y aura qu'à prendre q divisible par A , ou bien $q = 0$; car alors Q ne sera pas divisible par A .

Mais si $C^m + 1$ est divisible par A , alors pour que Q ne le soit pas, il faudra que q ne le soit pas, et que la quantité

$$B^m q^{A-3} + m B^{m-1} q^{A-5} C + \frac{m(m-1)}{2} B^{m-2} q^{A-7} C^2 + \dots + m B C^{m-1}$$

ne le soit pas non plus; or on peut démontrer, comme plus haut, qu'il doit nécessairement exister une valeur de q plus petite que A et par conséquent non divisible par A , telle que la quantité dont il s'agit ne le soit pas. Car nommant R cette quantité, et désignant par $R', R'', R''', \dots, R^{A-2}$ les valeurs de R qui résulteraient de la substitution des nombres $1, 2, 3, \dots, A-2$ à la place de q , on aura

$$R' = (A-3)R'' + \frac{(A-3)(A-4)}{2} R''', \dots, R^{A-2} = 1, 2, 3, \dots, (A-3)B^m.$$

Or comme A est premier et que B n'est pas divisible par A , il est clair que le nombre $1, 2, 3, \dots, (A-3)B^m$ ne le sera pas non plus; donc, etc.

COROLLAIRE I. — Si l'on fait $B = -1$ et $C = -1$, on aura le nombre $p^2 + q^2 + 1$ qui sera divisible par A ; d'où il s'ensuit qu'étant donné un nombre premier quelconque on peut toujours trouver un nombre égal à la somme de trois carrés entiers dont l'un soit même l'unité, lequel soit divisible par le nombre premier donné.

Ce Théorème a déjà été démontré par M. Euler d'une autre manière, dans le tome V des *Nouveaux Commentaires de Pétersbourg*; mais pour

ne rien laisser à désirer à nos lecteurs nous avons cru devoir le démontrer de nouveau, d'autant plus que notre démonstration a l'avantage d'avoir une très-grande généralité.

COROLLAIRE II. — Combinant donc le Théorème précédent avec celui de la Remarque qui est après le Théorème I, on en déduira celle-ci : que tout nombre premier est nécessairement égal à la somme de quatre ou d'un moindre nombre de carrés entiers. D'où il est aisé de conclure que tout nombre entier est aussi égal à la somme de quatre ou d'un moindre nombre de carrés entiers; car on sait que le produit de deux, ou de plusieurs nombres égaux chacun à la somme de quatre, ou d'un moindre nombre de carrés, est aussi nécessairement égal à la somme de quatre, ou d'un moindre nombre de carrés; en effet on a

$$\begin{aligned} & (p^2 + q^2 + r^2 + s^2)(p'^2 + q'^2 + r'^2 + s'^2) \\ &= (pp' - qq' - rr' - ss')^2 + (pq' + qp' - rs' - sr')^2 \\ &+ (pr' + q's + rp' + sq')^2 + (qr' - ps' + sp' - rq')^2, \end{aligned}$$

et même plus généralement

$$\begin{aligned} & (p^2 - Bq^2 - Cr^2 + BCs^2)(p'^2 - Bq'^2 - Cr'^2 + BCs'^2) \\ &= [pp' + Bqq' \pm C(rr' + Bss')]^2 - B[pq' + qp' \pm C(rs' + sr')]^2 \\ &- C[pr' - Bqs' \pm (rp' - Bsq')]^2 + BC[qr' - ps' \pm (sp' - rq')]^2. \end{aligned}$$



RÉFLEXIONS

SUR LA

RÉSOLUTION ALGÈBRE DES ÉQUATIONS.



RÉFLEXIONS

SUR LA

RÉSOLUTION ALGÈBRIQUE DES ÉQUATIONS^(*).

[*Nouveaux Mémoires de l'Académie royale des Sciences et Belles-Lettres
de Berlin, années 1770 et 1771* (**).]

La théorie des équations est de toutes les parties de l'Analyse celle qu'on eût cru devoir acquérir les plus grands degrés de perfection et par son importance et par la rapidité des progrès que les premiers inventeurs y ont faits; mais quoique les Géomètres qui sont venus depuis n'aient cessé de s'y appliquer, il s'en faut beaucoup que leurs efforts aient eu le succès qu'on pouvait désirer. On a à la vérité épuisé presque tout ce qui concerne la nature des équations, leur transformation, les conditions nécessaires pour que deux ou plusieurs racines deviennent égales, ou aient entre elles une relation donnée, et la manière de trouver ces racines, la forme des racines imaginaires, et la méthode de trouver la valeur de celles qui, quoique réelles, se présentent sous une forme imaginaire, etc. On a aussi découvert des règles générales pour reconnaître si toutes les racines d'une équation sont réelles ou non, et pour savoir dans le premier cas combien il doit y en avoir de positives et de négatives; mais on n'a jusqu'à présent aucune règle générale pour connaître

(*) Ce Mémoire a été lu à l'Académie dans le courant de l'année 1771.

(**) Les deux premières Sections de ce Mémoire ont été insérées dans le volume de 1770, les suivantes dans le volume de 1771.
(Note de l'Éditeur.)

le nombre des racines imaginaires dans les équations qui doivent en contenir, et moins encore pour savoir combien il doit y en avoir de réelles positives et de réelles négatives, lorsqu'on connaît d'ailleurs le nombre des réelles et des imaginaires; on n'a pas même une règle pour pouvoir s'assurer si une équation quelconque proposée doit contenir quelques racines réelles ou non, à moins que l'équation ne soit d'un degré impair, ou que son dernier terme ne soit négatif.

Ce n'est pas qu'on ne puisse toujours trouver le nombre des racines imaginaires et des racines réelles positives, ou négatives, lorsqu'on connaît la valeur numérique des coefficients de l'équation proposée; les méthodes que j'ai données ailleurs, tant pour cet objet que pour approcher autant que l'on veut de la valeur de chaque racine, ne laissent, ce me semble, rien à désirer; mais il s'agit ici des équations littérales, et la question est de trouver les conditions qui doivent avoir lieu entre les différents coefficients d'une équation d'un degré donné, suivant la qualité de ses racines.

A l'égard de la résolution des équations littérales, on n'est guère plus avancé qu'on ne l'était du temps de Cardan, qui le premier a publié celle des équations du troisième et du quatrième degré. Les premiers succès des Analystes italiens dans cette matière paraissent avoir été le terme des découvertes qu'on y pouvait faire; du moins est-il certain que toutes les tentatives qu'on a faites jusqu'à présent pour reculer les limites de cette partie de l'Algèbre n'ont encore servi qu'à trouver de nouvelles méthodes pour les équations du troisième et du quatrième degré, dont aucune ne paraît applicable, en général, aux équations d'un degré plus élevé.

Je me propose dans ce Mémoire d'examiner les différentes méthodes que l'on a trouvées jusqu'à présent pour la résolution algébrique des équations, de les réduire à des principes généraux, et de faire voir *à priori* pourquoi ces méthodes réussissent pour le troisième et le quatrième degré, et sont en défaut pour les degrés ultérieurs.

Cet examen aura un double avantage: d'un côté il servira à répandre une plus grande lumière sur les résolutions connues du troisième et du

quatrième degré; de l'autre il sera utile à ceux qui voudront s'occuper de la résolution des degrés supérieurs, en leur fournissant différentes vues pour cet objet et en leur épargnant surtout un grand nombre de pas et de tentatives inutiles.

SECTION PREMIÈRE.

DE LA RÉOLUTION DES ÉQUATIONS DU TROISIÈME DEGRÉ.

1. Comme la résolution des équations du second degré est très-facile, et n'est d'ailleurs remarquable que par son extrême simplicité, j'entrerai d'abord en matière par les équations du troisième degré, lesquelles demandent pour être résolues des artifices particuliers qui ne se présentent pas naturellement.

Soit donc l'équation générale du troisième degré

$$x^3 + mx^2 + nx + p = 0,$$

et comme on sait qu'on peut toujours faire disparaître le second terme de toute équation en augmentant ses racines du coefficient du second terme divisé par l'exposant du premier, on pourra supposer d'abord, pour plus de simplicité, $m = 0$, ce qui réduira la proposée à la forme

$$x^3 + nx + p = 0.$$

C'est dans cet état que les équations du troisième degré ont été d'abord traitées par Scipio Ferro et par Tartalea, à qui l'on doit leur résolution; mais on ignore le chemin qui les y a conduits. La méthode la plus naturelle pour y parvenir me paraît celle que Hudde a imaginée, et qui consiste à représenter la racine par la somme de deux indéterminées qui permettent de partager l'équation en deux parties propres à faire en sorte que les deux indéterminées ne dépendent que d'une équation résoluble à la manière de celles du second degré.

Suivant cette méthode on fera donc $x = y + z$, ce qui étant substitué

dans la proposée la réduira à celle-ci

$$y^3 + 3y^2z + 3yz^2 + z^3 + n(y+z) + p = 0,$$

qu'on peut mettre sous cette forme plus simple

$$y^3 + z^3 + p + (y+z)(3yz+n) = 0.$$

Qu'on fasse maintenant ces deux équations séparées

$$y^3 + z^3 + p = 0,$$

$$3yz + n = 0,$$

on aura

$$z = -\frac{n}{3y},$$

et, substituant dans la première,

$$y^3 - \frac{n^3}{27y^3} + p = 0,$$

c'est-à-dire

$$y^6 + py^3 - \frac{n^3}{27} = 0.$$

Cette équation est à la vérité du sixième degré, mais comme elle ne renferme que deux différentes puissances de l'inconnue, dont l'une a un exposant double de celui de l'autre, il est clair qu'elle peut se résoudre comme celles du second degré. En effet, on aura d'abord

$$y^3 = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} + \frac{n^3}{27}},$$

et de là

$$y = \sqrt[3]{-\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} + \frac{n^3}{27}}}.$$

Ainsi l'on connaîtra y et z , et de là on aura

$$x = y + z = y - \frac{n}{3y}.$$

2. Il se présente différentes remarques à faire sur cette solution. D'abord il est clair que la quantité y doit avoir six valeurs, puisqu'elle dépend d'une équation du sixième degré; de sorte que la quantité x aura aussi six valeurs; mais comme x est la racine d'une équation du troisième degré, on sait qu'elle ne peut avoir que trois valeurs différentes;

donc il faudra que les six valeurs dont il s'agit se réduisent à trois, dont chacune soit double. C'est aussi de quoi on peut se convaincre par le calcul, en éliminant y des deux équations

$$y^6 + py^3 - \frac{n^3}{27} = 0, \quad x = y - \frac{n}{3y}.$$

Supposons, pour plus de généralité,

$$x = y - \frac{k}{y} \quad \text{ou bien} \quad y^2 - xy - k = 0,$$

on aura donc

$$y^2 = xy + k,$$

et de là

$$y^3 = xy^2 + ky = y(x^2 + k) + kx,$$

$$\begin{aligned} y^4 &= y^2(x^2 + k) + 2kx(x^2 + k)y + k^2x^2 \\ &= yx(x^2 + k)(x^2 + 3k) + kx^4 + 3k^2x^2 + k^3. \end{aligned}$$

Substituant donc ces valeurs de y^3 et y^6 , on aura

$$y(x^2 + k)(x^2 + 3kx + p) + kx(x^2 + 3kx + p) + k^3 - \frac{n^3}{27} = 0.$$

Soit, pour abrégier,

$$\frac{n^3}{27} - k^3 = h \quad \text{et} \quad x^3 + 3kx + p = X,$$

on aura

$$[y(x^2 + k) + kx]X - h = 0,$$

d'où

$$y = \frac{\frac{h}{X} - kx}{x^2 + k},$$

de sorte qu'en substituant maintenant cette valeur de y dans l'équation

$$y^2 - xy - k = 0,$$

on aura

$$\left(\frac{h}{X} - kx\right)^2 - x\left(\frac{h}{X} - kx\right)(x^2 + k) - k(x^2 + k)^2 = 0,$$

III.

ce qui se réduit à

$$h^2 X^2 + hXx(x^2 + 3h) - h^2 = 0,$$

ou bien, à cause de $x(x^2 + 3h) = X - p$, à

$$\frac{n^3}{27} X^2 - hpX - h^2 = 0,$$

c'est-à-dire à

$$\left(X - \frac{27hp}{2n^3}\right)^2 - \frac{27h^2}{n^3} \left(1 + \frac{27p^2}{4n^3}\right) = 0.$$

Maintenant il est clair qu'en faisant $k = \frac{n}{3}$ pour avoir $x = y - \frac{n}{3y}$ on aura $h = 0$, ce qui réduira l'équation précédente à

$$X^2 = 0,$$

savoir

$$(x^3 + nx + p)^2 = 0,$$

équation qui aura les mêmes racines que la proposée, mais dont chacune sera double.

De là il s'ensuit que la résolution d'une équation du troisième degré est, à proprement parler, la résolution d'une équation du sixième degré, inconvénient qui n'a pas lieu dans le second degré, dont la résolution est tout à fait propre à ce degré, mais qui devient encore plus considérable pour les équations des degrés supérieurs, comme on le verra plus bas.

3. Puis donc que parmi les six valeurs de y il n'y en a que trois qui donnent des valeurs différentes de x , il s'agit maintenant de distinguer ces valeurs. Pour cela il faut trouver l'expression particulière de chacune des six valeurs de y ; et si l'on nomme α , β et γ les trois racines cubiques de l'unité, c'est-à-dire les trois racines de l'équation $x^3 - 1 = 0$, il est facile de voir que les six valeurs de y seront, en faisant, pour abrégé,

$$\frac{p^2}{4} + \frac{n^3}{27} = q,$$

$$\sqrt[3]{-\frac{p}{2} \pm \sqrt{q}}, \quad \alpha \sqrt[3]{-\frac{p}{2} \pm \sqrt{q}}, \quad \beta \sqrt[3]{-\frac{p}{2} \pm \sqrt{q}};$$

de là les valeurs correspondantes de $z = -\frac{n}{3y}$ seront, à cause de

$$\sqrt[3]{-\frac{p}{2} \pm \sqrt{q}} \sqrt[3]{-\frac{p}{2} \mp \sqrt{q}} = \sqrt[3]{\frac{p^2}{4} - q} = -\frac{n}{3},$$

et par conséquent

$$\sqrt[3]{-\frac{p}{2} \mp \sqrt{q}} = -\frac{n}{3 \sqrt[3]{-\frac{p}{2} \pm \sqrt{q}}},$$

ces valeurs seront, dis-je,

$$\sqrt[3]{-\frac{p}{2} \mp \sqrt{q}}, \quad \frac{1}{\alpha} \sqrt[3]{-\frac{p}{2} \mp \sqrt{q}}, \quad \frac{1}{\beta} \sqrt[3]{-\frac{p}{2} \mp \sqrt{q}}.$$

Or, sans connaître même les valeurs de α et de β , il est facile de s'assurer que $\alpha\beta$ doit être égal à 1; car puisque α , β et γ sont les trois racines de l'équation $x^3 - 1 = 0$, on aura donc leur produit $\alpha.\beta$ égal au dernier terme 1; donc $\alpha\beta = 1$; donc $\frac{1}{\alpha} = \beta$ et $\frac{1}{\beta} = \alpha$; de sorte que les trois valeurs ci-dessus deviendront

$$\sqrt[3]{-\frac{p}{2} \mp \sqrt{q}}, \quad \beta \sqrt[3]{-\frac{p}{2} \mp \sqrt{q}}, \quad \alpha \sqrt[3]{-\frac{p}{2} \mp \sqrt{q}}.$$

Donc, puisque $x = y + z$, on aura, en ajoutant ensemble les valeurs correspondantes de y et de z ,

$$\begin{aligned} & \sqrt[3]{-\frac{p}{2} \pm \sqrt{q}} + \sqrt[3]{-\frac{p}{2} \mp \sqrt{q}}, \\ & \alpha \sqrt[3]{-\frac{p}{2} \pm \sqrt{q}} + \beta \sqrt[3]{-\frac{p}{2} \mp \sqrt{q}}, \\ & \beta \sqrt[3]{-\frac{p}{2} \pm \sqrt{q}} + \alpha \sqrt[3]{-\frac{p}{2} \mp \sqrt{q}}, \end{aligned}$$

où il est facile de voir que, des signes ambigus de $\sqrt{q}$ soit qu'on prenne le supérieur ou l'inférieur, on aura toujours les trois mêmes valeurs de x .

De là il s'ensuit donc que l'on peut prendre indifféremment le radi-

cal $\sqrt{q}$ en plus ou en moins, et que les trois racines de l'équation proposée résulteront immédiatement des trois valeurs du radical cubique $\sqrt[3]{-\frac{p}{2} \pm \sqrt{q}}$.

4. Nous avons fait voir (2) que la résolution de toute équation du troisième degré appartient essentiellement à une équation du sixième degré; cependant si l'on voulait délivrer l'équation

$$x = \sqrt[3]{-\frac{p}{2} + \sqrt{q}} + \sqrt[3]{-\frac{p}{2} - \sqrt{q}}$$

des radicaux, on tomberait dans une équation du neuvième degré; car en prenant d'abord les cubes on aurait

$$x^3 = -p + 3x\sqrt[3]{\frac{p^2}{4} - q},$$

et prenant de nouveau les cubes, après avoir fait passer dans le premier membre le terme $-p$, on aurait

$$(x^3 + p)^3 = 27\left(\frac{p^2}{4} - q\right)x^3,$$

c'est-à-dire, à cause de $\frac{p^2}{4} - q = -\frac{n^3}{27}$,

$$x^9 + 3px^6 + (3p^2 + n^3)x^3 + p^3 = 0.$$

Mais il faut remarquer que cette équation renferme, outre les trois racines de la proposée $x^3 + nx + p = 0$, encore six autres étrangères; en effet elle peut se décomposer en ces trois-ci

$$x^3 + nx + p = 0,$$

$$x^3 + \alpha nx + p = 0,$$

$$x^3 + \beta nx + p = 0,$$

dont les deux dernières sont, comme on voit, différentes de la proposée; ainsi l'on ne peut rien conclure de cette équation pour le degré auquel

doit se rapporter la résolution des équations du troisième degré, comme nous l'avons fait plus haut (2), d'après l'équation $X^2 = 0$, laquelle renferme toutes les mêmes racines que la proposée.

5. L'équation du sixième degré

$$y^6 + py^3 - \frac{n^3}{27} = 0$$

s'appelle la *réduite* du troisième degré, parce que c'est à sa résolution que se réduit celle de la proposée

$$x^3 + nx + p = 0.$$

Or nous avons déjà vu plus haut comment les racines de cette dernière équation dépendent des racines de celle-là; voyons réciproquement comment les racines de la *réduite* dépendent de celles de la proposée; mais pour rendre cette recherche plus générale et plus lumineuse il sera bon de considérer une équation qui ait tous ses termes telle que

$$x^3 + mx^3 + nx + p = 0,$$

et dont les racines soient représentées généralement par a, b, c . On commencera donc par faire évanouir le second terme en supposant $x = x' - \frac{m}{3}$, et, faisant, pour abrégier,

$$n' = n - \frac{m^2}{3}, \quad p' = p - \frac{mn}{3} + \frac{2m^3}{27},$$

on aura la transformée

$$x'^3 + n'x' + p' = 0,$$

qui a la forme requise. Faisant maintenant $x' = y - \frac{n'}{3y}$, on aura la réduite

$$y^6 + p'y^3 - \frac{n'^3}{27} = 0;$$

d'où, en nommant r la racine cubique de

$$-\frac{p'}{2} + \sqrt{\frac{p'^2}{4} + \frac{n'^3}{27}},$$

on aura ces trois valeurs de y , savoir

$$y = r, \quad y = \alpha r, \quad y = \beta r,$$

lesquelles donneront les trois racines

$$x' = r - \frac{n'}{3r}, \quad x' = \alpha r - \frac{n'}{3\alpha r}, \quad x' = \beta r - \frac{n'}{3\beta r};$$

d'où, à cause de $x = x' - \frac{m}{3}$, on aura, en faisant, pour abrégér, $\frac{n'}{3r} = s$, ces trois valeurs de x , savoir

$$-\frac{m}{3} + r - s, \quad -\frac{m}{3} + \alpha r - \frac{s}{\alpha}, \quad -\frac{m}{3} + \beta r - \frac{s}{\beta};$$

donc

$$a = -\frac{m}{3} + r - s,$$

$$b = -\frac{m}{3} + \alpha r - \frac{s}{\alpha},$$

$$c = -\frac{m}{3} + \beta r - \frac{s}{\beta}.$$

Retranchant successivement la seconde et la troisième de ces équations de la première, on aura

$$a - b = (1 - \alpha) \left(r + \frac{s}{\alpha} \right),$$

$$a - c = (1 - \beta) \left(r + \frac{s}{\beta} \right),$$

d'où l'on tire

$$\frac{\alpha(a-b)}{1-\alpha} = \alpha r + s,$$

$$\frac{\beta(a-c)}{1-\beta} = \beta r + s;$$

et retranchant de nouveau l'une de l'autre, ensuite divisant par $\alpha - \beta$, il viendra

$$r = \frac{\frac{\alpha(a-b)}{1-\alpha} - \frac{\beta(a-c)}{1-\beta}}{\alpha - \beta},$$

c'est-à-dire

$$r = \frac{a}{(1-\alpha)(1-\beta)} + \frac{\alpha b}{(\alpha-1)(\alpha-\beta)} + \frac{\beta c}{(\beta-1)(\beta-\alpha)}.$$

Or, $1, \alpha$ et β étant (hypothèse) les trois racines de l'équation $x^3 - 1 = 0$, on aura

$$x^3 - 1 = (x-1)(x-\alpha)(x-\beta),$$

et différentiant

$$3x^2 = (x-\alpha)(x-\beta) + (x-1)(x-\beta) + (x-1)(x-\alpha);$$

de sorte qu'en faisant successivement $x = 1, \alpha, \beta$, on aura

$$3 = (1-\alpha)(1-\beta),$$

$$3\alpha = (\alpha-1)(\alpha-\beta),$$

$$3\beta = (\beta-1)(\beta-\alpha);$$

donc, substituant ces valeurs dans l'expression précédente de r , on aura

$$r = \frac{a}{3} + \frac{b}{3\alpha} + \frac{c}{3\beta},$$

ou bien, à cause de $\alpha\beta = 1$,

$$r = \frac{a + \beta b + \alpha c}{3}.$$

Telle est donc la valeur de r , et par conséquent aussi de y ; de sorte qu'on aura en changeant, ce qui est permis, α en β et *vice versa*

$$y = \frac{a + \alpha b + \beta c}{3}.$$

6. On voit d'abord par cette expression de y pourquoi la *réduite* est nécessairement du sixième degré; car comme cette réduite ne dépend pas immédiatement des racines a, b, c de la proposée, mais seulement des coefficients m, n, p , où les trois racines entrent également, il est clair que dans l'expression de y on doit pouvoir échanger à volonté les quantités a, b, c entre elles; par conséquent la quantité y devra avoir autant de valeurs différentes que l'on en pourra former par toutes les

permutations possibles dont les trois racines a, b, c sont susceptibles; or on sait par la théorie des combinaisons que le nombre des permutations, c'est-à-dire des arrangements différents de trois choses, est 3.2.1; donc la réduite en y doit être aussi du degré 3.2.1, c'est-à-dire du sixième.

Il y a plus: la même expression de y montre aussi pourquoi la réduite est résoluble à la manière des équations du second degré; car il est clair que cela vient de ce que cette équation ne renferme que les puissances y^3 et y^6 , c'est-à-dire des puissances dont les exposants sont multiples de 3; en sorte que, si r est une des valeurs de y , il faut que αr et βr en soient aussi à cause de $\alpha^3 = 1$ et $\beta^3 = 1$; or c'est ce qui a lieu dans l'expression de y trouvée ci-dessus. Pour le faire voir plus aisément nous remarquerons que $\beta = \alpha^2$, car, puisqu'on a $\alpha\beta = 1$ et $\alpha^3 - 1 = 0$, on aura aussi $\alpha\beta = \alpha^3$, et de là $\beta = \alpha^2$; de sorte que l'expression de y pourra se mettre sous cette forme

$$y = \frac{a + \alpha b + \alpha^2 c}{3},$$

d'où, en faisant toutes les permutations possibles des quantités a, b, c , on tire les six valeurs suivantes

$$\frac{a + \alpha b + \alpha^2 c}{3},$$

$$\frac{a + \alpha c + \alpha^2 b}{3},$$

$$\frac{b + \alpha a + \alpha^2 c}{3},$$

$$\frac{b + \alpha c + \alpha^2 a}{3},$$

$$\frac{c + \alpha b + \alpha^2 a}{3},$$

$$\frac{c + \alpha a + \alpha^2 b}{3},$$

qui seront donc les six racines de la réduite. Maintenant si l'on multiplie la première par α , et ensuite par β ou par α^2 , on aura, à cause de $\alpha^3 = 1$,

ces deux-ci

$$\frac{c + \alpha a + \alpha^2 b}{3} \quad \text{et} \quad \frac{b + \alpha c + \alpha^2 a}{3},$$

qui sont la sixième et la quatrième; et si l'on multiplie de même la seconde par α et par α^2 , on aura

$$\frac{b + \alpha a + \alpha^2 c}{3} \quad \text{et} \quad \frac{c + \alpha b + \alpha^2 a}{3},$$

qui sont la troisième et la cinquième. Il en sera de même si l'on multiplie la troisième et la quatrième, ou la cinquième et la sixième par α et par α^2 , car on aura par là également toutes les autres.

7. Cela nous conduit à une méthode directe pour trouver la réduite d'où dépend la résolution des équations du troisième degré; car soit

$$x^3 + mx^2 + nx + p = 0$$

l'équation proposée dont les racines soient a, b, c , et supposons que les racines de la réduite soient représentées généralement par une fonction du premier degré des racines a, b, c , telle que

$$Aa + Bb + Cc,$$

A, B, C étant des coefficients indépendants des quantités a, b, c ; en faisant toutes les permutations possibles des quantités a, b, c , on aura ces quantités

$$Aa + Bb + Cc,$$

$$Aa + Bc + Cb,$$

$$Ab + Ba + Cc,$$

$$Ab + Bc + Ca,$$

$$Ac + Bb + Ca,$$

$$Ac + Ba + Cb,$$

qui seront les six racines de la réduite. Or, pour que cette équation n'ait que des puissances dont les exposants soient multiples de 3, il faut, comme nous l'avons vu plus haut, que, nommant r une de ses racines,

αr et βr ou $\alpha^2 r$ en soient aussi; donc, prenant la quantité

$$Aa + Bb + Cc$$

pour r , il faudra que la quantité

$$\alpha Aa + \alpha Bb + \alpha Cc$$

soit égale à une des cinq autres quantités ci-dessus; or elle ne saurait devenir égale à

$$Aa + Bb + Cc$$

ni à

$$Ab + Ba + Cc$$

qu'en faisant $\alpha = 1$, car dans le premier cas on aurait

$$\alpha A = A,$$

et dans le second

$$\alpha C = C;$$

mais en la comparant à la quantité

$$Ab + Bc + Ca,$$

on aura

$$\alpha A = C, \quad \alpha B = A \quad \text{et} \quad \alpha C = B,$$

d'où l'on tire

$$C = \alpha A, \quad B = \alpha^2 A \quad \text{et} \quad \alpha^2 A = A,$$

c'est-à-dire

$$\alpha^2 = 1;$$

ce qui montre que α doit être en effet une des racines de l'équation

$$x^2 - 1 = 0;$$

ainsi en faisant, pour plus de simplicité, $A = 1$, on aura

$$A = 1, \quad B = \alpha \quad \text{et} \quad C = \alpha^2,$$

ce qui donne les mêmes formules qu'on a trouvées plus haut en faisant abstraction du dénominateur 3.

Faisant donc, pour abrégér,

$$r = a + \alpha b + \alpha^2 c,$$

$$s = a + \alpha c + \alpha^2 b,$$

on aura $r, \alpha r, \alpha^2 r$ et $s, \alpha s, \alpha^2 s$ pour les six racines de la transformée; or, nommant y l'inconnue de cette équation, on trouvera d'abord que le produit des trois facteurs $y - r, y - \alpha r, y - \alpha^2 r$ sera $y^3 - r^3$, et que de même le produit des trois autres sera $y^3 - s^3$, de sorte que le produit total, c'est-à-dire la réduite elle-même, sera représentée par

$$y^6 - (r^3 + s^3)y^3 + r^3 s^3 = 0,$$

qui a la forme demandée. Il ne s'agit donc plus maintenant que de trouver les valeurs de $r^3 + s^3$ et de $r^3 s^3$: or, en élevant au cube la quantité r et faisant attention que $\alpha^3 = 1$, on trouve

$$r^3 = a^3 + b^3 + c^3 + 6abc + 3\alpha(a^2b + b^2c + c^2a) + 3\alpha^2(ab^2 + bc^2 + ca^2),$$

et par conséquent, en changeant b en c , on aura de même

$$s^3 = a^3 + b^3 + c^3 + 6abc + 3\alpha(a^2c + c^2b + b^2a) + 3\alpha^2(c^2a + b^2c + a^2b).$$

Soit, pour plus de simplicité,

$$a^3 + b^3 + c^3 + 6abc = L,$$

$$a^2b + b^2c + c^2a = M,$$

$$a^2c + b^2a + c^2b = N,$$

on aura donc

$$r^3 = L + 3\alpha M + 3\alpha^2 N,$$

$$s^3 = L + 3\alpha N + 3\alpha^2 M,$$

done

$$r^3 + s^3 = 2L + 3(\alpha + \alpha^2)(M + N);$$

mais comme 1, α et α^2 sont les trois racines de l'équation $x^3 - 1 = 0$ qui manque du second terme, on doit avoir

$$1 + \alpha + \alpha^2 = 0;$$

done

$$r^3 + s^3 = 2L - 3(M + N).$$

Multipliant ensuite les valeurs de r^3 et s^3 ensemble, on aura

$$r^3 s^3 = L^2 + 9(M^2 + N^2) + 3(\alpha + \alpha^2)[L(M + N) + 3MN],$$

ou bien, à cause de $\alpha + \alpha^2 = -1$,

$$r^3 s^3 = L[L - 3(M + N)] + 9[(M + N)^2 - 3MN];$$

or il est facile de voir que les quantités L , $M + N$ et MN doivent être données par les coefficients m , n , p de la proposée, et cela sans extraction de racines, ce qui suit de ce que ces quantités ne changent point, quelques permutations des quantités a , b , c qu'on y fasse, de sorte qu'elles ne peuvent avoir chacune qu'une valeur unique.

8. En effet, ayant

$$-m = a + b + c, \quad n = ab + ac + bc, \quad -p = abc,$$

on aura d'abord par les règles connues

$$a^2 + b^2 + c^2 = m^2 - 2n, \quad a^2 + b^2 + c^2 = -m^2 + 3mn - 3p,$$

et l'on trouvera de là

$$a^2 b^2 + a^2 c^2 + b^2 c^2 = n^2 - 3mnp + 3p^2;$$

donc

$$L = -m^2 + 3mn - 9p,$$

$$M + N = 3p - mn,$$

$$MN = n^2 + p(m^2 - 6mn) + 9p^2;$$

d'où l'on trouvera

$$r^3 + s^3 = -2m^3 + 9mn - 27p,$$

$$r^3 s^3 = m^3 - 9m^2 n + 27m^2 n^2 - 27n^3 = (m^2 - 3n)^3,$$

de sorte que notre réduite sera

$$y^6 + (2m^3 - 9mn + 27p)y^3 + (m^2 - 3n)^3 = 0,$$

qui revient au même que celle qu'on a trouvée plus haut (5), en faisant seulement attention que l'inconnue y de celle-ci est triple de l'inconnue y

de celle-là. Résolvant donc cette équation à la manière de celles du second degré, ou bien faisant, pour abréger, $y^3 = z$, en sorte que l'on ait

$$z^2 + (2m^3 - 9mn + 27p)z + (m^2 - 3n)^3 = 0,$$

et nommant z' et z'' les racines de cette équation du second degré, on aura

$$y^3 = z', \quad y^3 = z'',$$

done

$$y = \sqrt[3]{z'} \quad \text{ou} \quad y = \sqrt[3]{z''};$$

par conséquent, puisqu'on a supposé que r et s étaient deux valeurs de y , on aura

$$r = a + \alpha b + \alpha^2 c = \sqrt[3]{z'},$$

$$s = a + \alpha c + \alpha^2 b = \sqrt[3]{z''},$$

équations qui étant combinées avec l'équation

$$a + b + c = -m$$

serviront à trouver les trois racines a , b , c ; en effet on aura, à cause de $\alpha^3 = 1$ et de $1 + \alpha + \alpha^2 = 0$,

$$a = \frac{-m + \sqrt[3]{z'} + \sqrt[3]{z''}}{3},$$

$$b = \frac{-m + \alpha^2 \sqrt[3]{z'} + \alpha \sqrt[3]{z''}}{3},$$

$$c = \frac{-m + \alpha \sqrt[3]{z'} + \alpha^2 \sqrt[3]{z''}}{3},$$

ce qui s'accorde avec ce qu'on a trouvé plus haut.

9. Il est à propos de remarquer encore, pour éclaircir davantage cette matière, que les quantités M et N du n° 7 sont telles que l'une devient toujours l'autre en y faisant une permutation quelconque entre les trois racines a , b , c , de sorte que ces quantités M et N ne peuvent être que les racines d'une équation du second degré. En effet, nommant t l'inconnue de cette équation, il est clair qu'elle aura nécessairement cette forme

$$t^2 - (M + N)t + MN = 0;$$

donc, substituant pour $M + N$ et MN leurs valeurs trouvées ci-dessus (8), on aura

$$t^3 - (3p - mn)t + n^3 + (m^3 - 6mn)p + 9p^2 = 0.$$

Ainsi l'on aura, par la résolution de cette équation, les valeurs de M et N ; et comme d'ailleurs la quantité L est déjà donnée, puisqu'on a

$$L = -m^3 + 3mn - 9p,$$

on aura les valeurs de r^3 et de s^3 (7), ou bien celles de z' et z'' (8), lesquelles seront donc

$$z' = L + 3zM + 3z^2N,$$

$$z'' = L + 3zN + 3z^2M,$$

et moyennant ces valeurs on aura celles des racines a, b, c , comme on l'a vu tantôt.

Au reste cette propriété des fonctions M et N fait voir clairement pourquoi la quantité

$$z = y^3 = (a + xb + xc)^3$$

ne dépend que d'une équation du second degré, de sorte que l'équation en y ne peut renfermer que les puissances y^3 et y^6 .

10. La résolution des équations du troisième degré que nous venons d'examiner est appelée communément la *Règle de Cardan*, et elle est la seule que les Analystes connaissent. Mais il y a encore une autre méthode qui est due à M. Tschirnaus, et qui, quoique moins simple que celle de Cardan, a cependant l'avantage d'être plus directe et plus générale. Cette méthode est exposée dans les *Acta Eruditorum* de l'année 1683, et elle consiste à faire disparaître autant de termes intermédiaires que l'on veut d'une équation quelconque; l'Auteur la propose comme générale pour cet objet, et nous verrons qu'elle l'est en effet, mais qu'elle demande souvent la résolution d'équations d'un degré supérieur à celui de la proposée, ce qui empêche qu'elle ne réussisse au delà du quatrième degré.

M. Tschirnaus remarque que comme on peut faire évanouir un terme

quelconque d'une équation dont x est l'inconnue, par la supposition de

$$x = y + a,$$

y étant une nouvelle inconnue et a une quantité indéterminée, de même on pourra en faire évanouir deux quelconques en supposant

$$x^2 = bx + a + y,$$

ou trois en supposant

$$x^3 = cx^2 + bx + a + y,$$

et ainsi de suite, $a, b, c, \dots$ étant tous des coefficients indéterminés dont le nombre doit être égal à celui des termes qu'on veut faire évanouir, afin que l'on ait autant d'inconnues que de conditions à remplir.

Ainsi il n'y aura qu'à éliminer l'inconnue x de l'équation proposée par le moyen de la nouvelle équation qu'on a supposée, et l'on aura une équation en y qui sera toujours du même degré que la proposée, et dans laquelle on pourra supposer autant de termes égaux à zéro qu'il y a d'indéterminées $a, b, c, \dots$

Prenons donc l'équation du troisième degré

$$x^3 + mx^2 + nx + p = 0,$$

et supposons

$$x^2 = bx + a + y,$$

pour qu'on soit en état d'éliminer dans la transformée les deux termes intermédiaires; on aura donc

$$x^3 = bx^2 + ax + yx,$$

et, en substituant la valeur de x^2 ,

$$x^3 = (b^2 + a + y)x + b(a + y);$$

donc, substituant ces valeurs dans la proposée, on aura

$$(A) \quad (b^2 + mb + n + a + y)x + (b + m)(a + y) + p = 0,$$

d'où l'on tire

$$x = -\frac{(b + m)(a + y) + p}{b^2 + mb + n + a + y},$$

valeur qui étant substituée dans l'équation

$$x^2 = bx + a + y$$

donnera celle-ci, où je fais, pour plus de simplicité, $b + m = c$, $b^2 + mb + n = d$,

$$[c(a+y)+p]^2 + b[c(a+y)+p](d+a+y) - (a+y)(d+a+y)^2 = 0,$$

c'est-à-dire, en ordonnant les termes par rapport aux puissances de $a+y$, et remettant les valeurs de c et d ,

$$(B) \begin{cases} (y+a)^2 - (mb+m^2-2n)(y+a)^2 \\ + [nb^2 + (mn-3p)b + n^2 - 2mp](y+a) - p(b^2 + mb^2 + nb + p) = 0, \end{cases}$$

de sorte qu'en développant les puissances de $y+a$, on aura l'équation

$$y^2 + Ay^2 + By + C = 0,$$

dans laquelle

$$A = 3a - mb - m^2 + 2n,$$

$$B = 3a^2 - 2a(mb + m^2 - 2n) + nb^2 + (mn - 3p)b + n^2 - 2mp,$$

$$C = a^3 - (mb + m^2 - 2n)a^2 + [nb^2 + (mn - 3p)b + n^2 - 2mp]a - p(b^2 + mb^2 + nb + p).$$

Maintenant on peut faire évanouir le second et le troisième terme en supposant $A = 0$ et $B = 0$, ce qui donnera ces deux équations

$$3a - mb - m^2 + 2n = 0,$$

$$3a^2 - 2a(mb + m^2 - 2n) + nb^2 + (mn - 3p)b + n^2 - 2mp = 0,$$

par lesquelles on pourra déterminer a et b ; et l'équation en y sera réduite à la forme

$$y^2 + C = 0,$$

laquelle donne sur-le-champ ces trois racines

$$y = -\sqrt[3]{C}, \quad y = -\alpha\sqrt[3]{C}, \quad y = -\alpha^2\sqrt[3]{C},$$

1 , α et α^2 étant les racines de l'équation $x^3 - 1 = 0$. Ainsi mettant

d'abord dans l'expression de x trouvée ci-dessus les valeurs de a et b qui résultent des équations précédentes, et ensuite pour y les trois racines de l'équation $y^2 + C = 0$, on aura tout d'un coup les trois racines x de l'équation proposée.

Or, comme des deux équations qui doivent donner a et b la première est du premier degré et la seconde du second, il est visible que la détermination de ces quantités ne dépendra que d'une équation du degré 1. 2. c'est-à-dire du second degré; en effet, on aura d'abord

$$a = \frac{mb + m^2 - 2n}{3},$$

et, substituant cette valeur dans la seconde équation, on aura

$$(m^2 - 3n)b^2 + (2m^2 - 7mn + 9p)b + m^4 - 4m^2n + 6mp + n^2 = 0,$$

d'où l'on tirera deux valeurs de b qui pourront être employées indifféremment, parce qu'elles donneront toujours les mêmes valeurs de x .

Cette méthode a donc l'avantage de conduire immédiatement à une réduite du second degré, au lieu que par la méthode ordinaire on tombe dans une réduite du sixième; mais la résolution qu'elle donne n'est pas pour cela exempte de l'inconvénient que nous avons remarqué dans la résolution de Cardan, et qui consiste en ce que cette résolution est plutôt celle d'une équation du sixième degré que d'une équation du troisième (2). En effet, puisque la quantité y a trois valeurs, et que les quantités b et a en ont chacune deux, il est visible qu'il doit résulter six valeurs de x , lesquelles ne peuvent être par conséquent que les racines d'une équation du sixième degré; il est vrai que ces six valeurs se réduisent à trois, dont chacune sera double, comme il est facile de le démontrer, et comme nous l'avons déjà fait voir à l'égard de la formule de Cardan.

11. Il y a une remarque importante à faire touchant cette méthode de M. Tschirnaus, c'est que, dès qu'on a trouvé les valeurs de a , de b et de y , on ne doit pas prendre indifféremment pour x une des racines de l'équation supposée

$$x^2 - bx - a - y = 0,$$

ainsi que l'Auteur le fait; car, pour que cela fût permis, il faudrait que cette équation renfermât deux des racines de la proposée, et par conséquent que b fût la somme de ces deux racines; or, comme il n'y a pas plus de raison pour que b soit la somme de deux quelconques des trois racines de la proposée que de deux autres quelconques, il s'ensuit que b devrait avoir autant de valeurs différentes qu'il y a de manières de prendre les trois racines deux à deux, c'est-à-dire trois valeurs, à cause que le nombre des combinaisons de trois choses prises deux à deux est $\frac{3.2}{2} = 3$; au lieu que nous avons vu que la quantité b n'a que deux valeurs, puisqu'elle ne dépend que d'une équation du second degré.

L'esprit de la méthode que nous examinons consiste à faire en sorte que l'équation supposée ait une racine commune avec la proposée; ainsi, quand on a déterminé les valeurs de a , b et y en sorte que cette condition ait lieu, il faut prendre pour la valeur de x celle des racines de l'équation

$$x^2 - bx - a - y = 0,$$

qui sera commune à l'équation proposée

$$x^3 + mx^2 + nx + p = 0;$$

pour cela il n'y aura qu'à chercher le plus grand diviseur commun de ces deux équations, et ce diviseur, où x sera nécessairement linéaire, donnera une valeur de x qui sera aussi une des racines de la proposée; or il est facile de comprendre que cette valeur de x ne peut être que celle que nous avons trouvée en éliminant successivement les puissances plus hautes de x des deux équations données.

En effet, la méthode ordinaire d'élimination, suivant laquelle on fait disparaître successivement les plus hautes puissances de l'inconnue en déduisant, des deux équations données où la même inconnue se trouve élevée à des puissances quelconques, une suite d'autres équations où le plus haut degré de l'inconnue est successivement moindre, jusqu'à ce qu'on arrive à une équation où l'inconnue ne se trouve plus, et qui est le résultat de l'élimination; cette méthode, dis-je, revient dans le fond à la

même que celle qui sert à trouver le plus grand commun diviseur des deux quantités qui forment les premiers membres des deux équations données; les restes que l'on aura par les divisions successives qu'il faudra faire donneront, étant égaux à zéro, les mêmes équations que celles qui proviennent de l'élimination; le dernier reste où l'inconnue ne se trouve plus devra être égal à zéro pour que les deux quantités proposées aient un diviseur commun du premier degré, lequel sera par conséquent l'avant-dernier reste où l'inconnue ne sera que linéaire; de sorte qu'en égalant aussi à zéro cet avant-dernier reste on aura une valeur de l'inconnue qui sera la racine commune des deux équations.

Dans l'Exemple du n° 10 les équations (A) et (B) sont celles que l'on aurait en faisant égal à zéro l'avant-dernier et le dernier reste; par conséquent la valeur de x tirée de l'équation (A) est la seule qui puisse donner en même temps une racine de l'équation proposée.

12. A l'occasion de cette remarque, nous croyons devoir encore en faire une autre touchant la manière de faire en sorte que deux équations aient plus d'une racine commune; il est évident que si l'on veut qu'elles aient deux racines communes il faudra qu'elles soient divisibles exactement par un facteur du second degré; par conséquent, en cherchant le plus grand commun diviseur des deux quantités qui forment les premiers membres des équations proposées, dès qu'on sera parvenu à un reste où l'inconnue se trouvera au second degré, il faudra, pour que ce reste soit un diviseur commun des deux équations, que le reste suivant soit nul de lui-même; or ce dernier reste ne renfermera que deux termes, l'un où l'inconnue ne se trouvera pas, et l'autre où elle se trouvera à la première dimension; c'est pourquoi il faudra faire chacun de ces termes en particulier égal à zéro, ce qui donnera deux équations contenant les conditions nécessaires pour qu'il y ait dans les proposées deux racines communes. Ce serait la même chose si l'on voulait employer la voie de l'élimination; alors il faudrait s'arrêter à l'équation où l'inconnue serait au premier degré, et vérifier cette équation indépendamment de l'inconnue, en égalant à zéro l'un et l'autre des deux termes dont elle serait compo-

sée; moyennant quoi l'équation précédente du second degré renfermerait les deux racines communes aux deux équations proposées.

On voit par là comment il faudrait s'y prendre pour trouver les conditions qui donnent trois racines communes, ou davantage, à deux équations données; mais dès qu'on aura trouvé la condition nécessaire pour que ces deux équations aient une racine commune, on pourra aisément en déduire celles qui rendront deux ou plusieurs racines communes.

Pour cela, supposons que les deux équations données qui renferment une même inconnue x soient représentées, en général, par

$$P=0 \text{ et } Q=0;$$

si, au lieu de prendre $P=0$, je prends $P=y$, et que j'élimine ensuite x des deux équations, j'en aurai une en y que je représenterai par

$$y^m + ay^{m-1} + \dots + py^2 + qy + r = 0;$$

or, pour que les deux équations $P=0$ et $Q=0$ aient une racine commune en sorte qu'elles puissent subsister à la fois, il faut que y ait une valeur égale à zéro; donc

$$r=0$$

sera la condition nécessaire pour l'existence d'une racine commune à ces deux équations; mais si l'on veut qu'elles aient deux racines communes, alors il faudra que y ait deux valeurs égales à zéro; par conséquent on aura les deux conditions

$$r=0 \text{ et } q=0;$$

de même, s'il devait y avoir trois racines communes, il faudrait que y eût trois valeurs égales à zéro, ce qui donnerait les trois conditions

$$r=0, \quad q=0 \text{ et } p=0,$$

et ainsi de suite.

Je remarque maintenant que pour changer l'équation $P=0$ en $P=y$, ou $P-y=0$, il n'y a qu'à diminuer le dernier terme de l'équation $P=0$ de la quantité y ; de sorte que si l'on suppose

$$P = x^n + ax^{n-1} + \dots + p,$$

il n'y aura qu'à écrire $\rho - y$ à la place de ρ ; or l'équation

$$y^m + ay^{m-1} + \dots + py^2 + qy + r = 0$$

est celle qui résulte de l'élimination de x dans les deux équations $P=y$ et $Q=0$ (hypothèse); par conséquent, en y faisant $y=0$, l'équation $r=0$ sera celle qui résultera de l'élimination de x dans les équations $P=0$ et $Q=0$; donc, ayant l'équation $r=0$, il n'y aura qu'à y substituer $\rho - y$ à la place de ρ pour avoir immédiatement l'équation

$$y^m + ay^{m-1} + \dots + py^2 + qy + r = 0;$$

mais on sait que si r est une fonction de ρ et qu'on veuille y substituer $\rho - y$ à la place de ρ , on aura, en employant les différentiations, la transformée

$$r - \frac{dr}{d\rho}y + \frac{1}{2}\frac{d^2r}{d\rho^2}y^2 - \frac{1}{2.3}\frac{d^3r}{d\rho^3}y^3 + \dots;$$

donc on aura, par la comparaison des termes,

$$q = -\frac{dr}{d\rho}, \quad p = \frac{1}{2}\frac{d^2r}{d\rho^2}, \dots,$$

d'où je tire cette conclusion, que si

$$r=0$$

est la condition nécessaire pour que les équations $P=0$ et $Q=0$ aient une racine commune, on aura, pour les conditions de deux racines communes,

$$r=0 \text{ et } \frac{dr}{d\rho}=0;$$

pour trois racines communes,

$$r=0, \quad \frac{dr}{d\rho}=0 \text{ et } \frac{d^2r}{d\rho^2}=0,$$

et ainsi de suite, ρ étant le dernier terme de l'une des équations proposées.

13. Il est clair au reste que les racines de l'équation en y ne sont autre chose que les valeurs de P qui résultent en substituant à la place de x chacune des racines de l'autre équation $Q = 0$, que nous désignerons par $x', x'', x''', \dots$; donc, si l'on suppose que $P', P'', P''', \dots$ soient les valeurs de P qui viendraient de ces substitutions, c'est-à-dire où l'on aurait mis $x', x'', x''', \dots$ à la place de x , on aura

$$\pm r = P' P'' P''' \dots;$$

d'où l'on voit que l'équation $r = 0$, résultante de l'élimination de l'inconnue x des deux équations $P = 0$ et $Q = 0$, n'est autre chose que le produit de toutes les équations particulières

$$P' = 0, P'' = 0, P''' = 0, \dots;$$

or ce produit $P' P'' P''' \dots$ peut toujours se trouver sans connaître les racines de l'équation $Q = 0$, comme il est facile de s'en convaincre en considérant que le produit en question demeurera toujours le même, quelque permutation qu'on y fasse entre les racines $x', x'', x''', \dots$, c'est-à-dire entre les quantités $P', P'', P''', \dots$ qui sont des fonctions semblables de ces racines; de sorte qu'il doit être donné par une équation linéaire et sans extraction de racines. En effet, les multiplications des quantités $P', P'', P''', \dots$ étant faites, on trouvera toujours que les différentes fonctions de $x', x'', x''', \dots$ qui entreront dans le produit total seront exprimables par les seuls coefficients de l'équation $Q = 0$, dont $x', x'', x''', \dots$ sont les racines. On peut consulter là-dessus l'*Introduction à l'Analyse des lignes courbes* de M. Cramer, où l'on trouvera des règles pour calculer toutes les fonctions dont il s'agit, et avoir par conséquent la valeur du produit $P' P'' P''' \dots$; nous avons aussi traité ce sujet dans un Mémoire particulier, où nous avons donné des formules générales pour trouver immédiatement la valeur du même produit, sans passer par les différentes opérations que la méthode de M. Cramer exige (*); ainsi nous ne nous arrêtons pas davantage là-dessus. Nous nous contenterons seulement de re-

(*) *Oeuvres de Lagrange*, t. III, p. 141.

marquer que, de ce que l'équation résultante de l'élimination de x par le moyen des équations $P = 0$ et $Q = 0$ peut être représentée par

$$P' P'' P''' \dots = 0,$$

il s'ensuit que cette équation doit être telle, que les coefficients de l'équation $P = 0$ y forment partout des produits d'autant de dimensions qu'il y a de quantités $P', P'', P''', \dots$ ou de racines $x', x'', x''', \dots$ dans l'équation $Q = 0$, c'est-à-dire autant qu'il y a d'unités dans le degré de cette dernière équation; il en sera de même des coefficients de l'équation $Q = 0$, qui devront former partout dans la même équation résultante de l'élimination des produits d'autant de dimensions qu'il y a d'unités dans l'exposant du degré de l'autre équation $P = 0$.

14. D'où l'on peut conclure, en général, que, suivant la méthode de M. Tschirnaus, on aura toujours une transformée en y du même degré que l'équation proposée, et que dans cette transformée les quantités $y, a, b, c, \dots$ (y compris l'unité, coefficient de la plus haute puissance de x dans l'équation supposée) formeront partout des produits du même nombre de dimensions, c'est-à-dire d'autant de dimensions qu'il y a d'unités dans le degré de la proposée.

Ainsi, supposant que l'équation proposée dont x est l'inconnue soit du degré m , et qu'on prenne une équation *subsidiare* telle que

$$y + a + bx + cx^2 + \dots = x^m,$$

on aura une transformée en y du degré m qui, étant représentée par

$$y^m + A y^{m-1} + B y^{m-2} + C y^{m-3} + \dots = 0,$$

sera telle que le coefficient A sera une fonction linéaire de $a, b, c, \dots$, que le coefficient B sera une fonction de deux dimensions des mêmes quantités, que le coefficient C en sera une de trois dimensions, et ainsi de suite.

Et en général le coefficient du terme $n^{\text{ième}}$ sera toujours une fonction rationnelle et entière de $a, b, c, \dots$ de $n - 1$ dimensions. Ainsi, prenant

autant d'indéterminées $a, b, c, \dots$ qu'il y a de termes à faire disparaître, il est clair que pour faire disparaître le second terme on n'aura qu'à résoudre une équation du premier degré à une seule inconnue; pour faire disparaître le second terme et le troisième il faudra résoudre deux équations à deux inconnues, l'une du premier degré et l'autre du second, ce qui donnera toujours une équation finale du second, comme nous l'avons vu plus haut; pour faire disparaître le second terme, le troisième et le quatrième, on aura à résoudre trois équations à autant d'inconnues, dont l'une sera du premier degré, la seconde du second degré et la troisième du troisième degré, en sorte que l'équation finale sera, en général, du degré $1.2.3 = 6$.

En général, pour faire disparaître à la fois les termes $p^{\text{ième}}, q^{\text{ième}}, r^{\text{ième}}, \dots$ on aura à résoudre autant d'équations qu'il y aura de ces termes, avec un même nombre d'inconnues, et ces équations seront des degrés $p-1, q-1, r-1, \dots$ en sorte que l'équation finale montera, en général, au degré $(p-1)(q-1)(r-1) \dots$. Donc, pour chasser par cette méthode tous les termes intermédiaires de la transformée

$$y^m + A y^{m-1} + B y^{m-2} + \dots + M = 0,$$

en sorte qu'elle se réduise à la forme $y^m + M = 0$ qui est toujours résoluble, on tombera, en général, dans une équation du degré $1.2.3 \dots (m-1)$, qui sera par conséquent toujours plus haut que le degré m de la proposée, excepté le seul cas où $m = 3$.

15. Revenons maintenant à la résolution du troisième degré trouvée d'après la méthode de M. Tschirnaus, et voyons *à priori*, et indépendamment de la théorie de l'élimination que nous venons d'expliquer, la raison pourquoi cette méthode conduit directement à une réduite du second degré, tandis que la méthode ordinaire mène à une réduite du sixième. Pour cela je considère l'équation subsidiaire

$$x^3 = bx + a + y,$$

dans laquelle y doit être déterminé par une équation du troisième degré

à deux termes telle que

$$y^3 + C = 0,$$

dont les racines sont

$$y = -\sqrt[3]{C}, \quad y = -\alpha \sqrt[3]{C}, \quad y = -\alpha^2 \sqrt[3]{C};$$

et je remarque que ces trois racines devant répondre aux trois valeurs de x qui sont les racines de la proposée

$$x^3 + mx^2 + nx + p = 0,$$

on aura donc, en désignant ces dernières racines par x', x'', x''' , les trois équations suivantes

$$(C) \quad \begin{cases} x'^3 = bx' + a - \sqrt[3]{C}, \\ x''^3 = bx'' + a - \alpha \sqrt[3]{C}, \\ x'''^3 = bx''' + a - \alpha^2 \sqrt[3]{C}, \end{cases}$$

d'où l'on pourra tirer les valeurs de a et b , après avoir chassé $\sqrt[3]{C}$; pour cet effet, il n'y a qu'à ajouter ensemble les trois équations dont il s'agit, après avoir multiplié la seconde par α et la troisième par α^2 ; car on aura, à cause de $\alpha^3 = \alpha$ et de $1 + \alpha + \alpha^2 = 0$, comme on l'a déjà vu plus haut, on aura, dis-je,

$$x'^3 + \alpha x''^3 + \alpha^2 x'''^3 = b(x' + \alpha x'' + \alpha^2 x''') + 3a,$$

d'où l'on tire

$$b = \frac{x'^3 + \alpha x''^3 + \alpha^2 x'''^3}{x' + \alpha x'' + \alpha^2 x'''},$$

Cette expression de b doit nous faire juger immédiatement du degré de l'équation par laquelle la quantité b doit être déterminée; en effet, il est clair que cette équation doit avoir autant de racines qu'il peut y avoir de valeurs de b ; or les différentes valeurs de b ne peuvent venir que des permutations qu'on peut faire entre les racines x', x'', x''' ; et ces permutations sont au nombre de six; comme nous l'avons déjà remarqué plus haut (voyez les nos 6 et suivants, où les lettres a, b, c désignent les mêmes quantités qui sont nommées ici x', x'', x'''); ainsi la quantité b

pourra avoir en tout six valeurs, qui seront

$$\frac{x'^3 + \alpha x''^3 + \alpha^2 x'''^3}{x' + \alpha x'' + \alpha^2 x'''},$$

$$\frac{x'^3 + \alpha x''^3 + \alpha^2 x'''^3}{x' + \alpha x'' + \alpha^2 x'''},$$

$$\frac{x'^3 + \alpha x''^3 + \alpha^2 x'''^3}{x' + \alpha x'' + \alpha^2 x'''},$$

$$\frac{x'^3 + \alpha x''^3 + \alpha^2 x'''^3}{x' + \alpha x'' + \alpha^2 x'''},$$

$$\frac{x'^3 + \alpha x''^3 + \alpha^2 x'''^3}{x' + \alpha x'' + \alpha^2 x'''},$$

$$\frac{x'^3 + \alpha x''^3 + \alpha^2 x'''^3}{x' + \alpha x'' + \alpha^2 x'''},$$

de sorte que, généralement parlant, l'équation en b devrait être du sixième degré; mais j'observe que des six valeurs précédentes la première, la troisième et la cinquième sont égales, ainsi que la seconde, la quatrième et la sixième. En effet, en multipliant le numérateur et le dénominateur de la première par α , ce qui ne la change pas, elle devient la troisième; à cause de $\alpha^3 = 1$ et de $\alpha^4 = \alpha$; et multipliant par α^2 , elle devient la troisième; de même, en multipliant le haut et le bas de la seconde par α , on aura la quatrième, et en multipliant par α^2 , on aura la sixième. Donc l'équation en b du sixième degré aura nécessairement trois racines égales entre elles et trois autres aussi égales entre elles; ce qui l'abaissera au second degré, puisqu'elle ne pourra être que le cube d'une équation du second degré; et voilà pourquoi la quantité b est donnée simplement par une équation du second degré, comme nous l'avons vu ci-dessus (10). A l'égard de la quantité a , si l'on ajoute ensemble les trois équations (C), on aura, à cause de $1 + \alpha + \alpha^2 = 0$,

$$x'^3 + x''^3 + x'''^3 = b(x' + x'' + x''') + 3a;$$

mais on a

$$x' + x'' + x''' = -m \quad \text{et} \quad x'^3 + x''^3 + x'''^3 = m^3 - 3n;$$

donc

$$m^3 - 3n = -bm + 3a,$$

et de là

$$a = \frac{bm + m^3 - 3n}{3};$$

de sorte qu'en connaissant la valeur de b on connaîtra aussitôt celle de a .

16. La formule

$$\frac{x'^3 + \alpha x''^3 + \alpha^2 x'''^3}{x' + \alpha x'' + \alpha^2 x'''},$$

qui exprime la valeur de b , est donc très-remarquable en ce que, quelques permutations qu'on y fasse entre les quantités x' , x'' , x''' , elle ne peut que demeurer la même, ou se changer en cette autre-ci

$$\frac{x'^3 + \alpha x''^3 + \alpha^2 x'''^3}{x' + \alpha x'' + \alpha^2 x'''},$$

de sorte que ces deux quantités ne peuvent être que les racines d'une équation du second degré; on pourrait trouver *a priori* cette équation en cherchant la somme et le produit des deux quantités dont il s'agit, et il en résulterait après le calcul achevé une équation telle que l'équation en b qu'on a trouvée plus haut (10).

On peut encore remarquer que si l'on multiplie ensemble les deux dénominateurs

$$x' + \alpha x'' + \alpha^2 x''' \quad \text{et} \quad x' + \alpha x'' + \alpha^2 x''',$$

on aura pour produit

$$x'^3 + x''^3 + x'''^3 + (\alpha + \alpha^2)(x'x'' + x'x''' + x''x''');$$

mais

$$x'^3 + x''^3 + x'''^3 = m^3 - 3n, \quad x'x'' + x'x''' + x''x''' = n \quad \text{et} \quad \alpha + \alpha^2 = -1;$$

de sorte que ce produit deviendra $m^3 - 3n$. De plus, si l'on multiplie le numérateur

$$x'^3 + \alpha x''^3 + \alpha^2 x'''^3$$

par le dénominateur

$$x' + \alpha x'' + \alpha^2 x''',$$

on aura pour produit la quantité

$$x'^3 + x''^3 + x'''^3 + \alpha(x'^2x'' + x'^2x''' + x''^2x''') + \alpha^2(x'x''x''') + \alpha^3(x'^2x'' + x'^2x''' + x''^2x'''),$$

laquelle (à cause que x' , x'' , x''' sont les mêmes racines que nous avons nommées ailleurs a , b , c) se réduit (7) à

$$L - 6x'x''x''' + \alpha M + \alpha^2 N,$$

ou bien à

$$L + 6p + \alpha M + \alpha^2 N,$$

puisque $x'x''x''' = -p$; de sorte que la fraction

$$\frac{x'^2 + \alpha x''^2 + \alpha^2 x'''^2}{x' + \alpha x'' + \alpha^2 x'''}$$

deviendra, en multipliant le haut et le bas par $x' + \alpha x'' + \alpha^2 x'''$, celle-ci

$$\frac{L + 6p + \alpha M + \alpha^2 N}{m^2 - 3n};$$

et de même l'autre fraction

$$\frac{x'^2 + \alpha x''^2 + \alpha^2 x'''^2}{x' + \alpha x'' + \alpha^2 x'''}$$

deviendra, en multipliant le haut et le bas par $x' + \alpha x'' + \alpha^2 x'''$,

$$\frac{L + 6p + \alpha N + \alpha^2 M}{m^2 - 3n}.$$

Mais dans le numéro cité on avait

$$r^3 = L + 3\alpha M + 3\alpha^2 N \quad \text{et} \quad s^3 = L + 3\alpha N + 3\alpha^2 M;$$

donc

$$\alpha M + \alpha^2 N = \frac{r^3 - L}{3} \quad \text{et} \quad \alpha N + \alpha^2 M = \frac{s^3 - L}{3};$$

par conséquent les deux fractions dont il s'agit seront

$$\frac{r^3 + 2L + 18p}{3(m^2 - 3n)} \quad \text{et} \quad \frac{s^3 + 2L + 18p}{3(m^2 - 3n)},$$

ou bien (8)

$$\frac{z' + 2L + 18p}{3(m^2 - 3n)} \quad \text{et} \quad \frac{z'' + 2L + 18p}{3(m^2 - 3n)},$$

z' et z'' étant les racines de l'équation

$$z^3 + (2m^3 - 9mn + 27p)z + (m^3 - 3n)^3 = 0$$

qui est la réduite que donne la méthode de Cardan.

Ce qui fait voir clairement la liaison et l'analogie de cette méthode avec celle de Tschirnaus.

17. L'expression de x trouvée (10) d'après la méthode de Tschirnaus peut se mettre évidemment sous cette forme

$$x = \frac{f + gy}{h + y},$$

f , g et h étant des indéterminées et y la racine d'une équation du troisième degré à deux termes telle que

$$y^3 + h = 0.$$

Ainsi il n'y aurait qu'à éliminer y par le moyen de ces deux équations, dont la première donne

$$y = \frac{f - hx}{x - g},$$

ce qui étant substitué dans la seconde, il vient

$$h + \left(\frac{f - hx}{x - g} \right)^3 = 0,$$

équation du troisième degré qu'on pourra comparer avec la proposée; et cette comparaison servira à déterminer les quantités f , g , h , dont une restera arbitraire et pourra être prise à volonté.

Cette méthode de résoudre les équations du troisième degré a déjà été employée par M. Bezout dans un excellent Mémoire qu'il a donné sur cette matière dans le volume des *Mémoires de l'Académie des Sciences* de

Paris, pour l'année 1762, et dans lequel l'Auteur a fait un usage utile et heureux de ces substitutions pour résoudre une classe très-étendue d'équations de tous les degrés. Nous nous contenterons de remarquer ici que si l'on voulait savoir d'avance ce que l'on peut se promettre des substitutions dont il s'agit pour la résolution des équations du troisième degré, il n'y aurait qu'à chercher *à priori* le degré et la forme de l'équation qui donnera l'un des coefficients f , ou g , etc. : pour cela on considérera que, puisque $y^3 + h = 0$, on aura ces trois valeurs de y , savoir $-\sqrt[3]{h}$, $-\alpha\sqrt[3]{h}$, $-\alpha^2\sqrt[3]{h}$, lesquelles étant substituées dans l'expression de

$$x = \frac{f+gy}{h+y^3}$$

donneront les trois valeurs de x , savoir x' , x'' , x''' .

Ainsi prenant l'équation

$$x(h+y) = f+gy,$$

ou bien

$$hx - f + (x-g)y = 0,$$

on en déduira ces trois-ci

$$hx' - f - (x' - g)\sqrt[3]{h} = 0,$$

$$hx'' - f - \alpha(x'' - g)\sqrt[3]{h} = 0,$$

$$hx''' - f - \alpha^2(x''' - g)\sqrt[3]{h} = 0,$$

qui étant d'abord ajoutées ensemble donnent, à cause de $x' + x'' + x''' = -m$ et $1 + \alpha + \alpha^2 = 0$,

$$mh + 3f + (x' + \alpha x'' + \alpha^2 x''')\sqrt[3]{h} = 0;$$

de plus, multipliant la seconde par α et la troisième par α^2 , et les ajoutant ensuite toutes trois ensemble, on aura

$$h(x' + \alpha x'' + \alpha^2 x''') - (x' + \alpha^2 x'' + \alpha x''')\sqrt[3]{h} = 0.$$

Celle-ci donne

$$\sqrt[3]{h} = \frac{h(x' + \alpha x'' + \alpha^2 x''')}{x' + \alpha x'' + \alpha^2 x'''}.$$

et, cette valeur étant substituée dans la première, on aura en divisant par h

$$m + \frac{3f}{h} + \frac{(x' + \alpha x'' + \alpha^2 x''')^3}{x' + \alpha x'' + \alpha^2 x'''} = 0,$$

d'où l'on tire

$$\frac{f}{h} = -\frac{m}{3} - \frac{(x' + \alpha x'' + \alpha^2 x''')^3}{3(x' + \alpha x'' + \alpha^2 x''')}.$$

Il est d'abord facile de voir par cette expression que la quantité $\frac{f}{h}$ ne peut avoir que deux valeurs différentes, et que par conséquent elle ne pourra être donnée que par une équation du second degré; car la fraction

$$\frac{(x' + \alpha x'' + \alpha^2 x''')^3}{x' + \alpha x'' + \alpha^2 x'''}$$

ne peut que demeurer la même, ou se changer dans la fraction

$$\frac{(x' + \alpha x'' + \alpha^2 x''')^3}{x' + \alpha x'' + \alpha^2 x'''}.$$

en faisant telle permutation que l'on voudra entre les trois racines x' , x'' , x''' . C'est ce qu'on comprendra encore plus aisément en multipliant le haut et le bas de la première fraction par

$$x' + \alpha x'' + \alpha^2 x''',$$

et le haut et le bas de la seconde par

$$x' + \alpha x'' + \alpha^2 x''';$$

car alors elles deviendront (16)

$$\frac{(x' + \alpha x'' + \alpha^2 x''')^3}{m^3 - 3n} \quad \text{et} \quad \frac{(x' + \alpha x'' + \alpha^2 x''')^3}{m^3 - 3n},$$

c'est-à-dire (7)

$$\frac{r^3}{m^3 - 3n} \quad \text{et} \quad \frac{s^3}{m^3 - 3n},$$

ou bien

$$\frac{z'}{m^3 - 3n} \quad \text{et} \quad \frac{z''}{m^3 - 3n},$$

de sorte que les deux valeurs de $\frac{f}{h}$ seront

$$-\frac{m}{3} - \frac{z'}{3(m^2 - 3n)} \quad \text{et} \quad -\frac{m}{3} - \frac{z''}{3(m^2 - 3n)},$$

z' et z'' étant les racines de l'équation en z donnée ci-dessus.

18. Reprenons l'expression de x

$$\frac{f + gy}{h + y},$$

et comme y est un radical donné par l'équation $y^3 + h = 0$, faisons évanouir ce radical du dénominateur $h + y$ en multipliant le haut et le bas de la fraction par $k^2 - ky + y^2$, ce qui la changera en celle-ci

$$\frac{k^2 f + (k^2 g - hf)y + (f - hg)y^2 + gy^3}{h^2 + y^3},$$

c'est-à-dire, en substituant $-h$ à la place de y^3 ,

$$\frac{k^2 f - hg + (k^2 g - hf)y + (f - hg)y^2}{h^2 - h},$$

quantité qu'on peut réduire à cette forme plus simple

$$a + by + cy^2,$$

de sorte que l'on aura, en général,

$$x = a + by + cy^2,$$

a, b, c étant des coefficients indéterminés et y la racine d'une équation du troisième degré à deux termes telle que $y^3 + h = 0$.

Cette expression de x est la même que MM. Euler et Bezout ont adoptée pour exprimer les racines des équations du troisième degré, et que ces Auteurs croient pouvoir étendre, en général, aux équations de tous les degrés. Voyez les *Nouveaux Commentaires de Pétersbourg*, tome IX, et les *Mémoires de l'Académie des Sciences de Paris*, pour l'année 1765.

Pour résoudre donc les équations du troisième degré d'après cette mé-

thode, il n'y a qu'à éliminer y par le moyen des deux équations

$$x = a + by + cy^2 \quad \text{et} \quad y^3 + h = 0,$$

ce qui donnera nécessairement une équation en x du troisième degré, comme on peut s'en assurer par la théorie de l'élimination que nous avons donnée plus haut; cette équation étant ensuite comparée terme à terme avec la proposée donnera trois équations par lesquelles on pourra déterminer trois des quatre indéterminées a, b, c, h , la quatrième pouvant être prise à volonté. M. Bezout fait d'abord, pour plus de simplicité, $h = -1$; mais M. Euler conserve dans le calcul toutes les indéterminées, et il prend ensuite égale à l'unité celle qui lui paraît devoir donner un résultat plus simple; c'est toute la différence qui se trouve entre les procédés de ces deux Auteurs.

19. Pour apprécier cette méthode *à priori*, nous allons chercher d'après nos principes la forme et le degré des équations finales qui serviront à la détermination des coefficients $a, b, \dots$; et comme l'équation $y^3 + h = 0$ donne les trois racines $-\sqrt[3]{h}$, $-\alpha\sqrt[3]{h}$, $-\alpha^2\sqrt[3]{h}$, il est clair qu'on aura sur-le-champ les trois équations

$$x' = a - b\sqrt[3]{h} + c\sqrt[3]{h}^2,$$

$$x'' = a - \alpha b\sqrt[3]{h} + \alpha^2 c\sqrt[3]{h}^2,$$

$$x''' = a - \alpha^2 b\sqrt[3]{h} + \alpha c\sqrt[3]{h}^2,$$

qui étant ajoutées ensemble donneront d'abord

$$a = x' + x'' + x''' = -m;$$

ensuite, multipliant la seconde par α^2 , la troisième par α et les ajoutant toutes trois, on aura

$$x' + \alpha^2 x'' + \alpha x''' = -3b\sqrt[3]{h};$$

enfin, multipliant la seconde par α , la troisième par α^2 et les ajoutant de même, on aura

$$x' + \alpha x'' + \alpha^2 x''' = 3c\sqrt[3]{h}.$$

Si l'on fait $h = -1$, on aura

$$b = \frac{x' + \alpha x'' + \alpha^2 x'''}{3},$$

$$c = \frac{x' + \alpha x'' + \alpha^2 x'''}{3}.$$

Or ces expressions sont les mêmes que celles que nous avons trouvées plus haut pour les racines de la réduite du troisième degré d'après la règle de Cardan; de sorte qu'on peut conclure d'abord que les quantités b et c seront données par une même équation du sixième degré résoluble à la manière de celles du second, et qui sera (5)

$$y^6 + \left(p - \frac{mn}{3} + \frac{2m^3}{27}\right)y^3 - \frac{1}{27}\left(n - \frac{m^2}{3}\right)^3 = 0;$$

c'est aussi ce que M. Bezout a trouvé d'après son calcul.

Mais si, au lieu de supposer avec M. Bezout $h = -1$, on fait avec M. Euler $b = 1$, on aura

$$x' + \alpha x'' + \alpha^2 x''' = -3\sqrt[3]{h} \quad \text{et} \quad x' + \alpha x'' + \alpha^2 x''' = 3c\sqrt[3]{h};$$

la première étant élevée au cube donnera

$$-h = \frac{1}{27}(x' + \alpha x'' + \alpha^2 x''')^3,$$

ou bien, en adoptant les dénominations du n° 8,

$$-h = \frac{s^3}{27} = \frac{z''}{27},$$

d'où l'on voit d'abord que la quantité $-h$ sera donnée par une simple équation du second degré, dont les racines seront $\frac{z'}{27}$ et $\frac{z''}{27}$. Ayant trouvé h , il n'y aura qu'à multiplier la première équation par la seconde pour avoir

$$-9ch = (x' + \alpha x'' + \alpha^2 x''')(x' + \alpha x'' + \alpha^2 x'''),$$

ce qui se réduit (16) à

$$-9ch = m^2 - 3n,$$

d'où

$$c = \frac{3n - m^2}{9h}.$$

20. Telles sont les principales méthodes qu'on a trouvées jusqu'à présent pour résoudre les équations du troisième degré. Par l'analyse que nous venons d'en faire il est visible que ces méthodes reviennent toutes au même pour le fond, puisqu'elles consistent à trouver des réduites dont les racines soient représentées en général par $x' + \alpha x'' + \alpha^2 x'''$, ou par $(x' + \alpha x'' + \alpha^2 x''')^3$, ou bien, ce qui est la même chose, par des quantités proportionnelles à celles-ci. Dans le cas où la racine de la réduite est $x' + \alpha x'' + \alpha^2 x'''$, cette réduite est du sixième degré, résoluble à la manière du second parce qu'elle ne renferme que la troisième et la sixième puissance de l'inconnue. Nous en avons donné la raison dans le n° 6. Dans l'autre cas, où la racine de la réduite est $(x' + \alpha x'' + \alpha^2 x''')^3$, cette réduite ne peut être que du second degré, ce qui suit nécessairement du cas précédent, et que nous avons aussi démontré d'une manière directe (9).

21. Avant de terminer cette Section nous dirons un mot de la résolution de l'équation

$$x^3 - 1 = 0,$$

dont nous avons supposé les racines 1 , α et β ; et nous ferons en même temps quelques remarques sur la résolution générale de l'équation

$$x^3 - 1 = 0,$$

lesquelles pourront nous être utiles dans la suite.

Il est d'abord clair que l'unité est une des racines de l'équation $x^3 - 1 = 0$, de sorte que pour trouver les deux autres il n'y aura qu'à diviser d'abord cette équation par $x - 1$, ce qui donnera celle-ci

$$x^2 - x + 1 = 0,$$

d'où l'on tire

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2}.$$

Ainsi l'on aura

$$\alpha = \frac{-1 + \sqrt{-3}}{2} \quad \text{et} \quad \beta = \frac{-1 - \sqrt{-3}}{2},$$

et il est facile de se convaincre que β est en effet égal à α^2 , comme nous l'avons déjà trouvé *a priori*; car faisant le carré de α on a

$$\frac{1 - 2\sqrt{-3} - 3}{4} = \frac{-1 - \sqrt{-3}}{2} = \beta.$$

En général, soit l'équation à deux termes

$$x^n - 1 = 0;$$

on remarquera d'abord que si n est un nombre composé, en sorte que $n = pq$, la résolution de cette équation se réduira toujours à celle de deux équations semblables, l'une du degré p et l'autre du degré q . Car, faisant $x^q = y$, on aura $x^n = y^p$, et par conséquent

$$y^p - 1 = 0.$$

Supposons donc qu'on ait résolu cette équation du degré p et que z soit une des racines, on aura ensuite

$$x^q - z = 0,$$

ou bien, faisant $x = t \sqrt[q]{z}$,

$$t^q - 1 = 0;$$

et cette nouvelle équation étant résolue, on aura la valeur de t et par conséquent celle de x .

De là on voit que la difficulté de résoudre l'équation $x^n - 1 = 0$, lorsque n est un nombre composé, se réduit à résoudre autant de pareilles équations que n a de facteurs simples, et dont les degrés soient ces mêmes facteurs de n .

Ainsi toute la difficulté consiste à résoudre l'équation $x^n - 1 = 0$ lorsque n est un nombre premier.

Considérons, en général, le cas où n est impair, en sorte que l'équation à résoudre soit

$$x^{2p+1} - 1 = 0;$$

puisque l'unité est toujours une des valeurs de x , on pourra diviser par $x - 1$, et le quotient sera

$$x^{2p} + x^{2p-1} + x^{2p-2} + \dots + x^2 + x + 1 = 0.$$

Or cette équation qui est du degré $2p$ peut toujours s'abaisser au degré p , car, en la divisant par x^p et mettant ensemble les termes qui sont également éloignés de celui du milieu, on aura

$$x^p + \frac{1}{x^p} + x^{p-1} + \frac{1}{x^{p-1}} + \dots + x^2 + \frac{1}{x^2} + x + \frac{1}{x} + 1 = 0.$$

Qu'on fasse $x + \frac{1}{x} = y$ et élevant y au carré, au cube, etc., on trouvera

$$y^2 = x^2 + \frac{1}{x^2} + 2, \quad y^3 = x^3 + \frac{1}{x^3} + 3\left(x + \frac{1}{x}\right), \dots;$$

donc

$$x^2 + \frac{1}{x^2} = y^2 - 2, \quad x^3 + \frac{1}{x^3} = y^3 - 3y,$$

et, en général,

$$x^r + \frac{1}{x^r} = y^r - r y^{r-2} + \frac{r(r-3)}{2} y^{r-4} - \frac{r(r-4)(r-5)}{2 \cdot 3} y^{r-6} + \dots,$$

en ne continuant la série que tant que l'on aura des puissances positives de y .

Faisant donc ces substitutions dans l'équation ci-dessus, on aura une transformée en y où toutes les puissances de y seront positives et où la plus haute sera y^p , de sorte que l'équation ne sera plus que du degré $p^{\text{ième}}$.

Donc, si l'on peut résoudre cette dernière équation, on aura p valeurs de y , dont chacune donnera ensuite deux valeurs de x par la résolution de l'équation quadratique

$$x^2 - xy + 1 = 0;$$

moyennant quoi on aura $2p$ valeurs de x , auxquelles joignant la première racine $x = 1$, on aura toutes les racines de l'équation

$$x^{2p+1} - 1 = 0.$$

Ainsi l'on pourra avoir par l'extraction de la seule racine carrée les

racines des équations

$$x^2 - 1 = 0, \quad x^3 - 1 = 0 \quad \text{et} \quad x^5 - 1 = 0;$$

par conséquent on pourra résoudre de même toute équation

$$x^n - 1 = 0,$$

lorsque n ne contiendra d'autres facteurs simples que 2, 3 et 5, c'est-à-dire lorsque n sera de la forme $2^x 3^y 5^z$. En admettant la résolution des équations du troisième degré, on pourra résoudre encore l'équation

$$x^9 - 1 = 0,$$

et par conséquent toute équation

$$x^n - 1 = 0,$$

lorsque n sera de la forme $2^{\lambda}.3^{\mu}.5^{\nu}.7^{\omega}$.

Mais on ne saurait aller plus loin, puisque, le nombre premier qui suit 7 étant 11, il faudrait pouvoir résoudre l'équation

$$x^{11} - 1 \equiv 0,$$

ce qui demanderait la résolution d'une équation du cinquième degré.

Cependant on peut toujours exprimer les racines de toute équation $x^n - 1 = 0$, quel que soit n , par la division de la circonférence du cercle en n parties, comme on le verra ci-après.

22. La méthode que nous avons employée pour abaisser l'équation

$$x^{2p} + x^{2p-1} + \dots + x + 1 = 0$$

au degré p peut s'appliquer, en général, à toute équation d'un degré pair, et où les coefficients des termes équidistants de celui du milieu sont les mêmes; car prenant l'équation

$$x^{2p} + ax^{2p-1} + bx^{2p-2} + \dots + bx^2 + ax + 1 = 0,$$

et la divisant par x^p , elle pourra se mettre sous la forme

$$x^p + \frac{1}{x^p} + a \left(x^{p-1} + \frac{1}{x^{p-1}} \right) + b \left(x^{p-2} + \frac{1}{x^{p-2}} \right) + \dots = 0,$$

de sorte qu'on y pourra faire usage des substitutions

$$x + \frac{1}{x} = y, \quad x^2 + \frac{1}{x^2} = y^2 - 2, \dots,$$

au moyen desquelles la transformée en y ne sera que du degré $p^{\text{ième}}$.

Si l'on avait l'équation du degré impair $2p + 1$,

$$x^{2p+1} + ax^{2p} + bx^{2p-1} + \dots + hx^{p+1} + hx^p + \dots + bx^2 + ax + 1 = 0.$$

on la disposerait d'abord ainsi

$$x^{2^p+1} + 1 + ax(x^{2^{p-1}} + 1) + bx^2(x^{2^{p-2}} + 1) + \dots + hx^p(x + 1) \equiv 0.$$

où l'on voit que chaque terme est divisible par $x + 1$, et, la division faite, on aura

$$\left. \begin{aligned} & x^{2p} + x^{2p-1} + x^{2p-2} + x^{2p-3} + \dots + 1 \\ &+ ax(x^{2p-2} + x^{2p-3} + \dots + 1) \\ &+ bx^2(x^{2p-4} + x^{2p-5} + \dots + 1) \\ &\dots\dots\dots \\ &+ hx^p \end{aligned} \right\} = 0,$$

équation qui, étant ordonnée par rapport aux puissances de x , se trouvera dans le cas de l'équation ci-dessus et pourra par conséquent s'abaisser par la même méthode au degré p .

M. de Moivre est, je crois, le premier qui ait remarqué cette propriété des équations dont nous parlons, et il a donné dans ses *Miscellanea analytica* la formule générale de la transformée dont le degré n'est que la moitié de celui de la proposée. Nous donnerons plus bas la raison à priori pourquoi ces sortes d'équations sont susceptibles d'une pareille réduction.

23. Reprenons la formule trouvée dans le n° 21, savoir

$$x^r + \frac{1}{x^r} = y^r - ry^{r-2} + \frac{r(r-3)}{2}y^{r-4} - \dots,$$

et remarquons que, par les théorèmes connus de la multisection angulaire, la quantité

$$y^n - ry^{n-1} + \frac{r(r-3)}{2}y^{n-2} - \dots$$

représente, dans un cercle dont le rayon est égal à 1, la corde du complément à 180° d'un arc r^{up} de celui dont la corde du complément serait y ; de sorte qu'en nommant ce dernier arc 2φ on aura

$$y = 2 \cos \varphi \quad \text{et} \quad y^n - ry^{n-1} + \frac{r(r-3)}{2}y^{n-2} - \dots = 2 \cos n\varphi,$$

les cordes des compléments étant, comme on sait, égales aux doubles des cosinus de la moitié des angles.

Ainsi faisant $x + \frac{1}{x} = 2 \cos \varphi$, on aura, en général, $x^n + \frac{1}{x^n} = 2 \cos n\varphi$; par conséquent les deux équations

$$\begin{aligned} x^2 - 2x \cos \varphi + 1 &= 0, \\ x^{2n} - 2x^n \cos n\varphi + 1 &= 0 \end{aligned}$$

subsisteront à la fois, quel que soit le nombre n , en sorte que la première sera nécessairement un diviseur de la seconde; c'est le fondement du fameux théorème de M. Cotes.

Maintenant, si l'on résout ces deux équations à la manière des équations quadratiques, on aura ces deux-ci

$$\begin{aligned} x &= \cos \varphi \pm \sin \varphi \sqrt{-1}, \\ x^n &= \cos n\varphi \pm \sin n\varphi \sqrt{-1}, \end{aligned}$$

où il est facile de prouver que les signes ambigus doivent être les mêmes dans l'une et l'autre; car supposant φ très-petit, on aura, aux infiniment petits du second ordre près,

$$\cos \varphi = 1, \quad \sin \varphi = \varphi, \quad \text{et de même} \quad \cos n\varphi = 1, \quad \sin n\varphi = n\varphi,$$

de sorte que les deux équations deviendront

$$\begin{aligned} x &= 1 \pm \varphi \sqrt{-1}, \\ x^n &= 1 \pm n\varphi \sqrt{-1}; \end{aligned}$$

or, en élevant la première à la puissance n , et négligeant le carré et les puissances plus hautes de φ , on aurait

$$x^n = 1 \pm n\varphi \sqrt{-1},$$

valeur qui devant être la même que celle qui est donnée par la seconde équation, on en conclura l'identité des signes ambigus $+$ ou $-$ dans les deux équations. Faisant donc abstraction de l'ambiguïté des signes, il est clair que

$$x = \cos \varphi + \sin \varphi \sqrt{-1}$$

sera la résolution de l'équation

$$x^n - \cos n\varphi - \sin n\varphi \sqrt{-1} = 0.$$

Donc, si l'on suppose $\sin n\varphi = 0$ et $\cos n\varphi = 1$, ce qui donne $n\varphi = 360^\circ$ ou $= 720^\circ$, ou, en général, égal à $m \times 360^\circ$, m étant un nombre entier quelconque, on aura l'équation

$$x^n - 1 = 0,$$

dont la résolution sera, à cause de $\varphi = \frac{m}{n} \times 360^\circ$,

$$x = \cos \left(\frac{m}{n} \times 360^\circ \right) + \sin \left(\frac{m}{n} \times 360^\circ \right) \sqrt{-1}.$$

Cette expression est générale pour chacune des racines de l'équation proposée $x^n - 1 = 0$, et on les aura toutes en faisant successivement $m = 1, 2, 3, \dots$ jusqu'à n inclusivement; il serait inutile de faire $m > n$, puisqu'il en résulterait de nouveau les mêmes valeurs que lorsque $m < n$.

24. Nous remarquerons d'abord sur cette solution que toutes les racines de l'équation $x^n - 1 = 0$ doivent être différentes entre elles, puisque dans la circonférence il n'y a pas deux arcs différents qui aient un même sinus et un même cosinus à la fois. De plus il est facile de voir que toutes les racines seront imaginaires, à l'exception de la dernière qui répond à $m = n$ et qui sera toujours égale à 1, et de celle qui répon-

dra à $m = \frac{n}{2}$, lorsque n sera pair, laquelle sera égale à -1 ; car pour que la partie imaginaire de l'expression de x disparaisse, il faut que l'on ait

$$\sin\left(\frac{m}{n} \times 360^\circ\right) = 0,$$

ce qui n'arrive que lorsque l'arc est égal à 360° ou à 180° ; de sorte qu'on aura ou $\frac{m}{n} = 1$ ou $= \frac{1}{2}$, et par conséquent ou $m = n$ ou $m = \frac{n}{2}$; dans

le premier cas la partie réelle $\cos\left(\frac{m}{n} \times 360^\circ\right)$ deviendra $\cos 360^\circ = 1$; et dans le second elle deviendra $\cos 180^\circ = -1$.

Maintenant, si l'on fait

$$x = \cos \frac{360^\circ}{n} + \sin \frac{360^\circ}{n} \sqrt{-1},$$

on aura par les formules ci-dessus

$$x^m = \cos\left(\frac{m}{n} \times 360^\circ\right) + \sin\left(\frac{m}{n} \times 360^\circ\right) \sqrt{-1};$$

de sorte que les différentes racines de $x^n - 1 = 0$ seront toutes exprimées par les puissances de la quantité x ; et qu'ainsi ces racines seront $x, x^2, x^3, \dots, x^n$, dont la dernière x^n sera toujours égale à 1 , ce qui est évident par l'équation même $x^n - 1 = 0$, laquelle doit donner $x^n - 1 = 0$, et dont

celle qui sera représentée par $x^{\frac{n}{2}}$, lorsque n est pair, sera égale à -1 , comme on l'a vu plus haut.

Il est bon d'observer ici que si n est un nombre premier, on pourra toujours représenter toutes les racines de $x^n - 1 = 0$ par les puissances successives d'une quelconque de ces mêmes racines, la dernière seule exceptée; car soit, par exemple, $n = 3$, les racines seront x, x^2, x^3 ; si l'on prend à la place de x la racine suivante x^2 , on aura les trois racines x^2, x^4, x^6 ; mais, à cause de $x^3 = 1$, il est clair que $x^4 = x$ et que $x^6 = x^3$; de sorte que ces racines seront x^2, x, x^3 , les mêmes qu'auparavant; de même, si $n = 5$, les racines seront x, x^2, x^3, x^4, x^5 ; et si l'on

prend la racine x^2 au lieu de la racine x , on aura celles-ci x^2, x^4, x^8, x^{16} , lesquelles, à cause de $x^5 = 1$, deviennent x^2, x^4, x, x^3, x^2 ; que si l'on prend à la place de x la racine x^3 , on trouvera de même, en rabattant des exposants de x qui surpassent 5 le nombre 5 autant de fois que l'on peut, on trouvera, dis-je, les racines x^3, x, x^4, x^2, x^3 ; enfin, prenant pour x la racine x^4 , on trouvera celles-ci x^4, x^2, x, x^3, x^4 ; de sorte qu'on aura toujours les mêmes racines, mais dans un ordre différent.

En général, soit x^m une quelconque des n racines $x, x^2, x^3, \dots, x^n$, m étant plus petit que n , et n étant un nombre premier; prenant cette racine à la place de x , on aura celles-ci $x^m, x^{2m}, x^{3m}, \dots, x^{nm}$; or, si l'on retranche des exposants $2m, 3m, 4m, \dots$, lorsqu'ils surpassent n , le plus grand multiple de n qu'ils contiennent, et qu'on dénote les restes par $p, q, r, \dots$, on aura les racines $x^m, x^p, x^q, \dots, x^r$; et je dis que les nombres $m, p, q, r, \dots, n$, dont aucun n'est plus grand que n , seront nécessairement tous différents entre eux; car si deux quelconques comme p et r étaient égaux, comme ces nombres ne sont que les restes des nombres $2m, 4m$, après en avoir retranché les plus grands multiples de n , il est clair qu'il faudrait que la différence de ces derniers $2m, 4m$, fût divisible par n ; ce qui ne se peut tant que n est premier et $m < n$. Donc, puisque les nombres $m, p, q, r, \dots$, dont le nombre est $n - 1$, sont tous différents entre eux et tous moindres que n , il est clair qu'ils ne peuvent être autre chose que les nombres $1, 2, 3, \dots, n - 1$; par conséquent les racines $x^m, x^p, x^q, \dots, x^n$ seront les mêmes que les racines $x, x^2, x^3, \dots, x^n$. Il est facile de voir que la démonstration précédente n'en subsistera pas moins lorsque n ne sera pas premier, pourvu que l'on prenne m premier à n ; mais si m n'est pas premier à n , et que leur plus grande mesure soit l , on verra aisément que tous les nombres $m, p, q, r, \dots$ seront mesurés par l ; de sorte que ces nombres ne pourront être que des multiples de l moindres que n .

De là il est aisé de conclure, en général, que l'on peut représenter toutes les racines $x, x^2, x^3, \dots, x^n$ de l'équation $x^n - 1 = 0$ par les puissances $1^{\text{re}}, 2^{\text{e}}, 3^{\text{e}}, \dots, n^{\text{ième}}$ d'une quelconque de ces racines comme x^m , pourvu que m soit premier à n ; mais que si m n'est pas premier à n , en

sorte que leur plus grande mesure soit l , on n'aura de cette manière que les seules racines $\alpha^l, \alpha^{2l}, \alpha^{3l}, \dots, \alpha^n$, donc chacune se trouvera répétée autant de fois qu'il y a d'unités dans $\frac{n}{l}$; et il est facile de voir par les formules ci-dessus que ces dernières racines seront aussi celles de l'équation $x^f - 1 = 0$, en supposant $lf = n$.

Or, comme les racines de l'équation $x^n - 1 = 0$ sont représentées par

$$\alpha, \alpha^2, \alpha^3, \dots, \alpha^n,$$

et que $\alpha^n = 1$, il est clair qu'on pourra les représenter aussi, si l'on veut, par

$$\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\alpha^2}, \frac{1}{\alpha^3}, \dots, \frac{1}{\alpha^n},$$

puisqu'on aura $\frac{1}{\alpha} = \alpha^{n-1}, \frac{1}{\alpha^2} = \alpha^{n-2}, \dots$

De plus, à cause que l'équation $x^n - 1 = 0$ manque du second terme, il est clair qu'on aura toujours, en général,

$$\alpha + \alpha^2 + \alpha^3 + \dots + \alpha^n = 0,$$

et de même

$$\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{\alpha^3} + \dots + \frac{1}{\alpha^n} = 0.$$

Et lorsque n est un nombre composé comme lf , on aura en particulier

$$\alpha^l + \alpha^{2l} + \alpha^{3l} + \dots + \alpha^n = 0,$$

$$\frac{1}{\alpha^l} + \frac{1}{\alpha^{2l}} + \frac{1}{\alpha^{3l}} + \dots + \frac{1}{\alpha^n} = 0,$$

et de même

$$\alpha^f + \alpha^{2f} + \alpha^{3f} + \dots + \alpha^n = 0,$$

$$\frac{1}{\alpha^f} + \frac{1}{\alpha^{2f}} + \frac{1}{\alpha^{3f}} + \dots + \frac{1}{\alpha^n} = 0;$$

c'est-à-dire que les sommes des puissances tant positives que négatives de α dont les exposants sont divisibles par l ou par f seront égales à zéro: par conséquent aussi la somme des puissances dont les exposants ne seront point divisibles par l sera nulle, comme aussi la somme de celles dont les exposants ne seront point divisibles par f . Ces différentes remarques pourront nous être utiles dans la suite.

25. Maintenant voici les valeurs de α pour les équations $x^n - 1 = 0$ depuis $n = 1$ jusqu'à $n = 6$:

$$n = 2 \begin{cases} \alpha = -1, \\ \alpha^2 = 1; \end{cases}$$

$$n = 3 \begin{cases} \alpha = \frac{-1 + \sqrt{-3}}{2}, \\ \alpha^2 = \frac{-1 - \sqrt{-3}}{2}, \\ \alpha^3 = 1; \end{cases}$$

$$n = 4 \begin{cases} \alpha = \sqrt{-1}, \\ \alpha^2 = -1, \\ \alpha^3 = -\sqrt{-1}, \\ \alpha^4 = 1; \end{cases}$$

$$n = 5 \begin{cases} \alpha = \frac{\sqrt{5}-1}{4} + \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4} \sqrt{-1}, \\ \alpha^2 = -\frac{\sqrt{5}+1}{4} + \frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4} \sqrt{-1}, \\ \alpha^3 = -\frac{\sqrt{5}+1}{4} - \frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4} \sqrt{-1}, \\ \alpha^4 = \frac{\sqrt{5}-1}{4} - \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4} \sqrt{-1}, \\ \alpha^5 = 1; \end{cases}$$

$$n = 6 \begin{cases} \alpha = \frac{1 + \sqrt{-3}}{2}, \\ \alpha^2 = \frac{-1 + \sqrt{-3}}{2}, \\ \alpha^3 = -1, \\ \alpha^4 = \frac{-1 - \sqrt{-3}}{2}, \\ \alpha^5 = \frac{1 - \sqrt{-3}}{2}, \\ \alpha^6 = 1. \end{cases}$$

Si l'on voulait avoir la valeur de α pour l'équation

$$x^3 - 1 = 0,$$

il faudrait, comme on l'a dit plus haut, résoudre une équation du troisième degré. En effet, en faisant $p = 3$ dans les formules du n° 21, on trouvera cette transformée en y

$$y^3 + y^2 - 2y - 1 = 0,$$

qui, étant du troisième degré, aura toujours une racine réelle; et cette racine étant substituée dans l'équation

$$x^3 - xy + 1 = 0,$$

on en tirera x , ou

$$\alpha = \frac{y + \sqrt{y^2 - 4}}{2}.$$

Quant aux équations

$$x^3 - 1 = 0, \quad x^5 - 1 = 0 \quad \text{et} \quad x^{13} - 1 = 0,$$

on en pourra aussi exprimer la racine α par de simples radicaux carrés; mais l'équation

$$x^{11} - 1 = 0$$

exigerait la résolution de l'équation du cinquième degré

$$y^5 + y^4 - 4y^3 - 3y^2 + 3y + 1 = 0,$$

laquelle étant supposée, on aura pour α la même expression en y que ci-dessus.

SECTION SECONDE.

DE LA RÉOLUTION DES ÉQUATIONS DU QUATRIÈME DEGRÉ.

26. On sait que Louis Ferrari, contemporain et même disciple de Cardan, est le premier qui ait trouvé une règle générale pour la résolution des équations du quatrième degré. Sa méthode consiste à partager

l'équation proposée en deux membres, et à ajouter à l'un et à l'autre une même quantité telle, qu'on puisse extraire séparément la racine carrée des deux membres de l'équation, en sorte qu'elle soit par là abaissée au second degré. Cette méthode, qu'on peut regarder comme la plus ingénieuse de toutes celles qui ont été inventées depuis pour le même objet, a été adoptée par tous les Analystes qui ont précédé Descartes; mais cet illustre Géomètre a cru devoir lui en substituer une autre moins simple à la vérité et moins directe, mais à quelques égards plus conforme à la nature des équations: c'est celle que la plupart des Auteurs suivent aujourd'hui. Nous commencerons donc par examiner ces deux méthodes l'une après l'autre; ensuite nous viendrons aux méthodes connues pour la résolution de ces sortes d'équations, parmi lesquelles on doit surtout distinguer celles de M. Tschirnaus et de MM. Euler et Bezout.

Je suppose d'abord avec Ferrari que l'équation du quatrième degré qu'il s'agit de résoudre soit privée de son second terme, ce qu'on sait d'ailleurs être toujours possible, en sorte que cette équation soit représentée ainsi

$$x^4 + nx^2 + px + q = 0.$$

Qu'on fasse passer dans le second membre tous les termes excepté le premier, et qu'ensuite on ajoute à l'un et l'autre membre la quantité $2yx^2 + y^2$, y étant une indéterminée, on aura

$$x^4 + 2yx^2 + y^2 = (2y - n)x^2 - px + y^2 - q,$$

équation où le premier membre est évidemment le carré de $x^2 + y$, de sorte qu'il ne s'agira plus que de rendre aussi carré le second; or pour cela il faut, comme on sait, que le carré de la moitié du coefficient du second terme $-px$ soit égal au produit des coefficients des deux autres, ce qui donne cette condition

$$\frac{p^2}{4} = (2y - n)(y^2 - q),$$

laquelle produit l'équation cubique

$$y^3 - \frac{n}{2}y^2 - qy + \frac{4nq - p^2}{8} = 0.$$

Supposant donc la résolution de cette équation en sorte qu'on connaisse une valeur de y , le second membre de la proposée deviendra

$$(2y - n) \left[x - \frac{p}{2(2y - n)} \right]^2;$$

donc, tirant la racine carrée des deux membres, on aura

$$x^2 + y = \left[x - \frac{p}{2(2y - n)} \right] \sqrt{2y - n},$$

équation où l'inconnue x ne monte qu'au second degré, et qui n'a par conséquent plus de difficulté. Faisons, pour plus de simplicité,

$$z = \sqrt{2y - n},$$

on aura

$$x^2 - zx + y + \frac{p}{2z} = 0,$$

d'où l'on tire sur-le-champ

$$x = \frac{z + \sqrt{z^2 - \frac{2p}{z} - 4y}}{2},$$

ou bien, en remettant la valeur de z ,

$$x = \frac{\sqrt{2y - n} + \sqrt{-2y - n - \frac{2p}{\sqrt{2y - n}}}}{2},$$

et cette expression donnera à la fois les quatre racines de la proposée en prenant successivement les deux radicaux carrés en plus et en moins.

27. Nous remarquerons d'abord que cette méthode ne demande pas absolument l'évanouissement du second terme dans l'équation proposée, et qu'elle peut tout aussi bien s'appliquer aux équations complètes telles que

$$x^3 + mx^2 + nx^2 + px + q = 0,$$

en supposant que le premier membre ne soit pas simplement le carré

de $x^2 + y$, mais celui de $x^2 + \frac{mx}{2} + y$; en effet, en faisant passer comme ci-devant les trois derniers termes dans le second membre et ajoutant de part et d'autre la quantité

$$\left(2y + \frac{m^2}{4} \right) x^2 + myx + y^2,$$

on aura l'équation

$$\left(x^2 + \frac{mx}{2} + y \right)^2 = \left(2y + \frac{m^2}{4} - n \right) x^2 + (my - p)x + y^2 - q.$$

On fera donc, pour rendre aussi le second membre carré,

$$\left(\frac{my - p}{2} \right)^2 = \left(2y + \frac{m^2}{4} - n \right) (y^2 - q),$$

d'où l'on tire l'équation cubique

$$y^3 - \frac{n}{2}y^2 + \frac{mp - 4q}{4}y + \frac{(4n - m^2)q - p^2}{8} = 0.$$

La valeur de y étant déterminée par cette équation, que nous appellerons dorénavant la *réduite*, si l'on fait, pour plus de simplicité,

$$z = \sqrt{2y + \frac{m^2}{4} - n},$$

on aura

$$\left(x^2 + \frac{mx}{2} + y \right)^2 = z^2 \left(x + \frac{my - p}{2z^2} \right)^2,$$

et, tirant la racine carrée des deux membres,

$$x^2 + \frac{mx}{2} + y = zx + \frac{my - p}{2z},$$

ou bien

$$x^2 + \left(\frac{m}{2} - z \right) x + y - \frac{my - p}{2z} = 0,$$

d'où enfin

$$x = \frac{1}{2} \left[z - \frac{m}{2} + \sqrt{z^2 - mz + \frac{m^2}{4} - 4y + \frac{2(my - p)}{z}} \right],$$

III.

et, remettant la valeur de z ,

$$x = \frac{1}{2} \left(-\frac{m}{2} + \sqrt{2y + \frac{m^2}{4} - n} + \sqrt{-2y + \frac{m^2}{4} - n - \frac{1}{4} \frac{m^3 - mn + 2p}{2y + \frac{m^2}{4} - n}} \right),$$

expression qui donnera pareillement les quatre racines de la proposée, en prenant successivement chacun des deux radicaux carrés qui y entrent en plus et en moins.

28. Puisque la réduite en y est du troisième degré, elle aura nécessairement trois racines, dont chacune pourra être également substituée dans l'expression de x , de sorte qu'à cause de l'ambiguïté des deux signes radicaux que cette expression contient, il en résultera douze valeurs de x ; d'où il est aisé de conclure que la résolution précédente est essentiellement celle d'une équation du douzième degré.

Pour trouver cette équation, il faudra éliminer y de l'expression de x et en faire disparaître ensuite tous les radicaux, ou bien on pourra remonter d'abord à l'équation rationnelle

$$\left(x^2 + \frac{mx}{2} + y\right)^2 = z^2 \left(x + \frac{my - p}{2z^2}\right)^2,$$

et il n'y aura plus qu'à en éliminer x après y avoir substitué pour z^2 sa valeur

$$2y + \frac{m^2}{4} - n.$$

Supposons pour plus de généralité que la valeur de z^2 , au lieu d'être simplement $2y + \frac{m^2}{4} - n$, soit

$$k \left(2y + \frac{m^2}{4} - n\right);$$

il est évident que le coefficient k ne peut aucunement changer le degré auquel doit monter l'équation en x après l'élimination de y ; on aura de

cette manière l'équation

$$\left(x^2 + \frac{mx}{2} + y\right)^2 = k \left(2y + \frac{m^2}{4} - n\right) x^2 + (my - p)x + \frac{(my - p)^2}{4k \left(2y + \frac{m^2}{4} - n\right)},$$

ou bien, à cause de

$$\frac{(my - p)^2}{4} = \left(2y + \frac{m^2}{4} - n\right) (y^2 - q),$$

en vertu de l'équation en y ,

$$\left(x^2 + \frac{mx}{2} + y\right)^2 = k \left(2y + \frac{m^2}{4} - n\right) x^2 + (my - p)x + \frac{y^2 - q}{k},$$

c'est-à-dire

$$x^4 + mx^3 + \left[kn + (1 - k) \left(2y + \frac{m^2}{4}\right)\right] x^2 + px + \frac{q + (k - 1)y^2}{k} = 0.$$

Soit, pour abréger,

$$x^4 + mx^3 + nx^2 + px + q = X,$$

et, faisant $k - 1 = h$, l'équation précédente deviendra celle-ci

$$X + h \left[\left(n - \frac{m^2}{4} - 2y\right) x^2 + \frac{y^2 - q}{k} \right] = 0,$$

d'où il ne s'agira plus que d'éliminer y par le moyen de l'équation

$$y^3 - \frac{n}{2} y^2 + \frac{mp - 4q}{4} y + \frac{(4n - m^2)q - p^2}{8} = 0.$$

Nommons y' , y'' , y''' les trois racines de cette dernière équation, et l'équation en x résultant de l'élimination de l'inconnue y pourra être représentée (13) par le produit des trois quantités

$$X + h \left[\left(n - \frac{m^2}{4} - 2y'\right) x^2 + \frac{y'^2 - q}{k} \right],$$

$$X + h \left[\left(n - \frac{m^2}{4} - 2y''\right) x^2 + \frac{y''^2 - q}{k} \right],$$

$$X + h \left[\left(n - \frac{m^2}{4} - 2y'''\right) x^2 + \frac{y'''^2 - q}{k} \right],$$

ce produit étant égalé à zéro. Faisons, pour abrégé,

$$A = X + h \left[\left(n - \frac{m^2}{4} \right) x^2 - \frac{q}{k} \right],$$

$$B = -2hx^2,$$

$$C = \frac{h}{k},$$

et, supposant

$$\alpha = y' + y'' + y''',$$

$$\beta = y'y'' + y'y''' + y''y''',$$

$$\gamma = y'^2 + y''^2 + y'''^2,$$

$$\delta = y'y''y''',$$

$$\varepsilon = y'^2y''^2 + y'^2y''^2 + y''^2y'''^2,$$

on trouvera, pour le produit dont il s'agit,

$$A^3 + A^2B\alpha + A^2C\gamma + AB^2\beta + ABC(\alpha\beta - 3\delta) + AC^2\varepsilon + B^2\delta + B^2C\alpha\delta + BC^2\beta\delta + C^2\delta^2.$$

Mais faisant encore, pour abrégé,

$$a = \frac{n}{2}, \quad b = \frac{mp - 4q}{4}, \quad c = \frac{p^2 - (4n - m^2)q}{8},$$

en sorte que l'équation en y soit représentée par

$$y^3 - ay^2 + by - c = 0,$$

on aura, comme on sait, par la nature des équations,

$$\alpha = a, \quad \beta = b, \quad \delta = c,$$

et de là

$$\gamma = a^2 - 2b, \quad \varepsilon = b^2 - 2ac.$$

Donc l'équation cherchée, résultant de l'élimination de y dans ces deux-ci

$$A + By + Cy^2 = 0,$$

$$y^3 - ay^2 + by - c = 0,$$

sera

$$A^3 + aA^2B + (a^2 - 2b)A^2C + bAB^2 + (ab - 3c)ABC \\ + (b^2 - 2ac)AC^2 + cB^2 + acB^2C + bcBC^2 + c^2C^2 = 0.$$

Si l'on remet maintenant dans cette équation les valeurs de A, B, C et de a, b, c , on aura une équation en x qui montera au douzième degré, puisque A contient toutes les puissances de x jusqu'à la quatrième inclusivement, que B contient simplement x^2 , et que les autres quantités ne renferment point x .

Ainsi la résolution de cette équation du douzième degré sera comme ci-dessus

$$x = \frac{1}{2} \left(z - \frac{m}{2} \pm \sqrt{z^2 - mz + \frac{m^2}{4} - 4y' + \frac{2my' - p}{z}} \right),$$

en supposant

$$z = \pm \sqrt{2y' + \frac{m^2}{4} - nk};$$

et il n'y aura point ici de racines superflues, puisque les trois valeurs de y , combinées avec les signes ambigus des deux radicaux, donneront précisément les douze racines de l'équation dont il s'agit.

Faisons à présent $k = 1$ pour avoir le cas du n° 27; donc $h = 0$, et par conséquent

$$A = X = x^4 + mx^3 + nx^2 + px + q, \quad B = 0, \quad C = 0;$$

ainsi l'équation dont il s'agit se réduira à $A^3 = 0$, c'est-à-dire à celle-ci

$$(x^4 + mx^3 + nx^2 + px + q)^3 = 0,$$

qui n'est autre chose, comme on voit, que l'équation proposée élevée au cube, de sorte qu'elle doit avoir les mêmes racines que cette dernière, mais chacune triple.

On voit par là bien clairement la raison pourquoi l'expression trouvée pour la racine d'une équation du quatrième degré renferme réellement douze racines, qui se réduisent cependant à quatre, puisque chacune d'elles en a deux autres qui lui sont égales. De plus la démonstration précédente fait voir que les racines égales ne viennent que de l'élimination de y , et nullement de l'ambiguïté des radicaux, puisque c'est l'élimination de y qui fait monter dans l'équation résultante la quantité X

au cube; d'où l'on peut conclure d'abord que, quelque valeur de y que l'on emploie dans l'expression de x , on aura toujours les mêmes quatre racines.

29. Mais, pour éclaircir encore davantage cette matière, on remarquera que, dès que la réduite en y a lieu, ce qui peut arriver de trois manières différentes à cause qu'elle a trois racines, on peut donner à la proposée la forme

$$\left(x^2 + \frac{mn}{2} + y\right)^2 - z^2 \left(x + \frac{my - p}{2z}\right)^2 = 0,$$

comme on l'a fait au n° 27; par où l'on voit qu'elle n'est autre chose que le produit de ces deux-ci

$$x^2 + \frac{mx}{2} + y + z \left(x + \frac{my - p}{2z}\right) = 0,$$

$$x^2 + \frac{mx}{2} + y - z \left(x + \frac{my - p}{2z}\right) = 0,$$

c'est-à-dire

$$x^2 + \left(\frac{m}{2} + z\right)x + y + \frac{my - p}{2z} = 0,$$

$$x^2 + \left(\frac{m}{2} - z\right)x + y - \frac{my - p}{2z} = 0,$$

de sorte que leur résolution donnera toujours les mêmes quatre racines de la proposée, quelle que soit la racine qu'on substituera à y .

Nommons maintenant a, b, c, d les quatre racines de la proposée; et il faudra que deux de ces racines soient renfermées dans l'une des deux équations précédentes, et que les deux autres le soient dans l'autre; de sorte qu'on aura, par la nature des équations,

$$a + b = -\frac{m}{2} - z, \quad ab = y + \frac{my - p}{2z},$$

$$c + d = -\frac{m}{2} + z, \quad cd = y - \frac{my - p}{2z},$$

d'où l'on tire

$$z = \frac{c + d - a - b}{2}, \quad y = \frac{ab + cd}{2}.$$

Cette valeur de y nous fait voir d'abord pourquoi la réduite en y est du troisième degré. En effet il est visible que la quantité y doit avoir autant de valeurs différentes qu'on en pourra former par toutes les permutations possibles des racines a, b, c, d dans l'expression $\frac{ab + cd}{2}$; on ne peut avoir de cette manière que les trois quantités suivantes

$$\frac{ab + cd}{2}, \quad \frac{ac + bd}{2}, \quad \frac{ad + cb}{2},$$

de sorte que l'équation dont y sera la racine, devra donner chacune de ces trois quantités et, par conséquent, devra être du troisième degré.

30. On peut donc déduire de cette remarque une manière directe de parvenir à la réduite du quatrième degré, et par son moyen à la résolution générale de ce degré. Car, puisque la combinaison $ab + cd$ des quatre racines a, b, c, d est telle qu'elle n'admet que trois variations, savoir

$$ab + cd, \quad ac + bd, \quad ad + cb,$$

il s'ensuit d'abord que si l'on fait

$$ab + cd = u,$$

on aura une équation en u du troisième degré, dont les racines seront

$$ab + cd, \quad ac + bd, \quad ad + bc,$$

qui sera par conséquent de cette forme

$$u^3 - Au^2 + Bu - C = 0,$$

où l'on aura, par la nature des équations,

$$A = ab + cd + ac + bd + ad + cb,$$

$$B = (ab + cd)(ac + bd) + (ab + cd)(ad + cb) + (ac + bd)(ad + cb),$$

$$C = (ab + cd)(ac + bd)(ad + cb),$$

c'est-à-dire

$$A = ab + ac + ad + bc + bd + cd,$$

$$B = a^2(bc + bd + cd) + b^2(ac + ad + cd) + c^2(ab + ad + bd) + d^2(ab + ac + bc),$$

$$C = abcd(a^2 + b^2 + c^2 + d^2) + a^2b^2c^2 + a^2b^2d^2 + a^2c^2d^2 + b^2c^2d^2.$$

Or il est facile de voir que ces valeurs de A, B, C doivent être données par les coefficients m, n, p, q de la proposée, et cela sans aucune extraction de racines, puisqu'elles demeurent les mêmes, quelque permutation qu'on fasse entre les racines a, b, c, d de cette équation; d'où il suit que chacune d'elles ne peut avoir qu'une seule et même valeur. En effet, ayant

$$\begin{aligned} -m &= a + b + c + d, \\ n &= ab + ac + ad + bc + bd + cd, \\ -p &= abc + abd + acd + bcd, \\ q &= abcd, \end{aligned}$$

on aura d'abord

$$A = n;$$

ensuite, pour trouver B, on observera que

$$a(bc + bd + cd) = -p - bcd,$$

et de même

$$b(ac + ad + cd) = -p - acd,$$

et ainsi des autres, de sorte qu'on aura

$$B = (a + b + c + d)(-p) - 4abcd,$$

c'est-à-dire

$$B = mp - 4q.$$

Enfin, pour avoir C, on remarquera que

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = m^2 - 2n;$$

en sorte que la partie $abcd(a^2 + b^2 + c^2 + d^2)$ deviendra $(m^2 - 2n)q$; et, pour avoir l'autre partie, on fera le carré de p et l'on en déduira

$$\begin{aligned} a^2b^2c^2 + a^2b^2d^2 + a^2c^2d^2 + b^2c^2d^2 &= p^2 - 2abcd(ab + ac + bc + ad + bd + cd) \\ &= p^2 - 2nq, \end{aligned}$$

de sorte que l'on aura

$$C = (m^2 - 4n)q + p^2.$$

Moyennant quoi notre réduite sera

$$u^2 - nu^2 + (mp - 4q)u - (m^2 - 4n)q - p^2 = 0,$$

qui est la même que celle en y du n° 27, en supposant $u = 2y$.

31. Voyons maintenant comment, en connaissant une des valeurs de u , on pourra trouver les quatre racines a, b, c, d . Puisque

$$u = ab + cd \quad \text{et} \quad abcd = q,$$

il est clair que les deux quantités ab et cd seront les racines de cette équation du second degré

$$t^2 - ut + q = 0,$$

de sorte qu'en nommant t' et t'' ces deux racines on connaîtra les deux produits

$$ab = t' \quad \text{et} \quad cd = t'';$$

de plus on a

$$-p = ab(c + d) + cd(a + b) = t'(c + d) + t''(a + b),$$

et comme

$$a + b + c + d = -m,$$

on aura

$$a + b = \frac{p - mt'}{t' - t''}, \quad c + d = \frac{p - mt''}{t'' - t'};$$

donc, puisque

$$ab = t' \quad \text{et} \quad cd = t'',$$

il est clair que a et b seront les racines de cette équation du second degré

$$x^2 - \frac{p - mt'}{t' - t''}x + t' = 0,$$

et que c et d seront celles de l'équation

$$x^2 - \frac{p - mt''}{t'' - t'}x + t'' = 0.$$

On voit par là qu'il suffit de connaître une des racines de la réduite en u pour avoir les quatre racines a, b, c, d de la proposée, et que chacune des racines de cette réduite donnera toujours les mêmes quatre racines a, b, c, d ; car si, au lieu de prendre $u = ab + cd$, on eût pris $u = ac + bd$ ou $u = ad + bc$, il n'y eût eu d'autre changement dans nos formules sinon que b eût été changé en c ou en d , et *vice versa*.

32. On pourrait résoudre encore l'équation du quatrième degré d'une manière plus simple à l'aide de la réduite dont la racine serait (29)

$$z = \frac{c+d-a-b}{2} \quad \text{ou bien} \quad s = c+d-a-b,$$

en faisant, pour plus de simplicité, $s = 2z$. Pour savoir d'abord de quel degré et de quelle forme doit être cette équation, il n'y a qu'à faire dans la quantité $c+d-a-b$ toutes les permutations possibles entre les lettres a, b, c, d , et il en résultera les six suivantes

$$a+b-c-d,$$

$$a+c-b-d,$$

$$a+d-c-b,$$

$$c+d-a-b,$$

$$b+d-a-c,$$

$$b+c-a-d,$$

qui seront donc les racines de la réduite en s , de sorte que cette réduite sera nécessairement du sixième degré; mais, comme les six quantités précédentes sont deux à deux égales et de signes contraires, il s'ensuit que la réduite ne pourra contenir que des puissances paires de l'inconnue s , en sorte qu'elle sera résoluble à la manière des équations du troisième degré.

Donc, si l'on fait $s^2 = t$, on aura une réduite en t du troisième degré et dont les trois racines seront

$$(a+b-c-d)^2, (a+c-b-d)^2, (a+d-b-c)^2.$$

Ainsi l'on pourra trouver cette équation en cherchant la valeur de ses coefficients, comme nous l'avons fait plus haut à l'égard de la réduite en u (30); mais, sans entreprendre un nouveau calcul pour cet objet, il suffira de remarquer que le carré de $a+b-c-d$ est

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + 2ab + 2cd - 2ac - 2ad - 2bc - 2bd;$$

mais on a

$$ab + ac + ad + bc + bd + cd = n,$$

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = m^2 - 2n;$$

donc, puisque

$$(a+b-c-d)^2 = s^2 = t,$$

on aura

$$t = m^2 - 4n + 4(ab + cd),$$

c'est-à-dire

$$t = m^2 - 4n + 4u;$$

de sorte que, pour avoir la réduite cherchée en t , il n'y aura qu'à substituer, dans celle en u du n° 30, $\frac{t-m^2+4n}{4}$ à la place de u ; et l'on aura celle-ci

$$t^3 - (3m^2 - 8n)t^2 + (3m^4 - 16m^2n + 16n^2 + 16mp - 64q)t - (m^2 - 4mn + 8p)^2 = 0.$$

Maintenant, si l'on suppose que t' , t'' et t''' soient les trois racines de cette équation, on aura (hypothèse)

$$(a+b-c-d)^2 = t', (a+c-b-d)^2 = t'', (a+d-b-c)^2 = t''';$$

d'où, en tirant la racine carrée, on aura

$$a+b-c-d = \sqrt{t'}, \quad a+c-b-d = \sqrt{t''}, \quad a+d-b-c = \sqrt{t''};$$

combinant ces trois équations avec l'équation

$$a+b+c+d = -m,$$

on en tirera les valeurs de chacune des quatre racines a, b, c, d ; on aura donc

$$a = \frac{-m + \sqrt{t'} + \sqrt{t''} + \sqrt{t''}}{4},$$

$$b = \frac{-m + \sqrt{t'} - \sqrt{t''} - \sqrt{t''}}{4},$$

$$c = \frac{-m - \sqrt{t'} + \sqrt{t''} - \sqrt{t''}}{4},$$

$$d = \frac{-m - \sqrt{t'} - \sqrt{t''} + \sqrt{t''}}{4}.$$



De cette manière on aura donc les quatre racines de la proposée, sans être obligé de résoudre aucune autre équation que la réduite en t . Mais il se présente ici une difficulté, c'est que, comme chaque radical $\sqrt{t'}$, $\sqrt{t''}$, $\sqrt{t'''}$ peut être pris également en plus et en moins, les expressions précédentes renfermeront encore ces quatre quantités-ci

$$\begin{aligned} & \frac{-m + \sqrt{t'} + \sqrt{t''} - \sqrt{t'''}}{4}, \\ & \frac{-m + \sqrt{t'} - \sqrt{t''} + \sqrt{t'''}}{4}, \\ & \frac{-m - \sqrt{t'} + \sqrt{t''} + \sqrt{t'''}}{4}, \\ & \frac{-m - \sqrt{t'} - \sqrt{t''} - \sqrt{t'''}}{4}, \end{aligned}$$

qui ne sont pas les valeurs des racines a, b, c, d , mais celles de leurs compléments à la somme

$$a + b + c + d = -m.$$

Pour résoudre cette difficulté, je remarque qu'il n'est pas nécessaire de savoir précisément quel signe on doit donner à la valeur de chacun des radicaux dont il s'agit, mais qu'il suffit de savoir si ces valeurs doivent être prises, l'une positive et les deux autres positives ou négatives, ou bien l'une négative et les deux autres positives ou négatives; car il est facile de voir que les expressions des racines a, b, c, d , trouvées ci-dessus, donneront toujours les mêmes quatre racines en changeant à la fois les signes de deux quelconques des radicaux $\sqrt{t'}$, $\sqrt{t''}$, $\sqrt{t'''}$, et conservant celui du troisième. De sorte que tout se réduit à connaître le signe que doit avoir le produit des trois valeurs de $\sqrt{t'}$, $\sqrt{t''}$, $\sqrt{t'''}$. Or, par l'équation en t , on aura

$$t't''t''' = (m^2 - 4mn + 8p)^3,$$

d'où l'on tire

$$m^2 - 4mn + 8p = \sqrt{t'}\sqrt{t''}\sqrt{t'''} (*).$$

Donc, si l'on dénote par $\theta', \theta'', \theta'''$ les valeurs des radicaux $\sqrt{t'}$, $\sqrt{t''}$, $\sqrt{t'''}$ prises positivement, en sorte que l'on ait

$$\sqrt{t'} = \pm \theta', \quad \sqrt{t''} = \pm \theta'', \quad \sqrt{t'''} = \pm \theta''',$$

il faudra, lorsque $m^2 - 4mn + 8p$ est une quantité positive, prendre, ou

$$\sqrt{t'} = \theta' \quad \text{et} \quad \sqrt{t''} = \pm \theta'', \quad \sqrt{t'''} = \pm \theta''',$$

ou

$$\sqrt{t''} = \theta'' \quad \text{et} \quad \sqrt{t'} = \pm \theta', \quad \sqrt{t'''} = \pm \theta''',$$

ou

$$\sqrt{t'''} = \theta''' \quad \text{et} \quad \sqrt{t'} = \pm \theta', \quad \sqrt{t''} = \pm \theta''.$$

les signes ambigus devant être les mêmes pour les quantités θ'', θ''' , ou θ' , θ'' , ou θ', θ''' , et l'on aura dans ce cas pour les quatre racines de la proposée les valeurs suivantes

$$\begin{aligned} & \frac{-m + \theta' + \theta'' + \theta'''}{4}, \\ & \frac{-m + \theta' - \theta'' - \theta'''}{4}, \\ & \frac{-m - \theta' + \theta'' - \theta'''}{4}, \\ & \frac{-m - \theta' - \theta'' + \theta'''}{4}. \end{aligned}$$

(*) Cette formule a été obtenue en extrayant la racine carrée des deux membres de la précédente, et celle-ci indique seulement que le produit des radicaux $\sqrt{t'}$, $\sqrt{t''}$, $\sqrt{t'''}$ est égal à $\pm (m^2 - 4mn + 8p)$. Lagrange remplace le signe ambigu $\pm$ par $+$, mais c'est le signe $-$ qu'il fallait prendre; en effet, les radicaux $\sqrt{t'}$, $\sqrt{t''}$, $\sqrt{t'''}$ représentent les valeurs des quantités

$$a + b - c - d, \quad a + c - b - d, \quad a + d - b - c,$$

qui ont pour produit la fonction symétrique

$$(a + b + c + d)^3 - 4(a + b + c + d)(ab + ac + ad + bc + bd + cd) + 8(abc + abd + acd + bcd),$$

dont la valeur est $-m^2 + 4mn - 8p$. On a donc

$$\sqrt{t'}\sqrt{t''}\sqrt{t'''} = -m^2 + 4mn - 8p,$$

quels que soient les coefficients m, n, p , réels ou imaginaires. Cette relation détermine complètement dans tous les cas l'un des radicaux $\sqrt{t'}$, $\sqrt{t''}$, $\sqrt{t'''}$ quand les valeurs des deux autres ont été fixées. (Note de l'Éditeur.)

Au contraire, si $m^3 - 4mn + 8p$ est une quantité négative, il faudra alors prendre, ou

$$\sqrt{t'} = -\theta' \text{ et } \sqrt{t''} = \pm \theta'', \quad \sqrt{t'''} = \pm \theta''',$$

ou

$$\sqrt{t''} = -\theta'' \text{ et } \sqrt{t'} = \pm \theta', \quad \sqrt{t'''} = \pm \theta''',$$

ou

$$\sqrt{t'''} = -\theta''' \text{ et } \sqrt{t'} = \pm \theta', \quad \sqrt{t''} = \pm \theta'';$$

ce qui donnera, pour les quatre racines cherchées, ces valeurs

$$\begin{aligned} & \frac{-m + \theta' + \theta'' + \theta'''}{4}, \\ & \frac{-m + \theta' - \theta'' + \theta'''}{4}, \\ & \frac{-m - \theta' + \theta'' + \theta'''}{4}, \\ & \frac{-m - \theta' - \theta'' + \theta'''}{4}. \end{aligned}$$

33. La méthode de Ferrari, que nous venons d'examiner, nous a conduits à décomposer l'équation du quatrième degré

$$x^4 + mx^3 + nx^2 + px + q = 0$$

en ces deux-ci du second degré (29)

$$\begin{aligned} x^2 + \left(\frac{m}{2} + z\right)x + y + \frac{my - p}{2z} &= 0, \\ x^2 + \left(\frac{m}{2} - z\right)x + y - \frac{my - p}{2z} &= 0, \end{aligned}$$

de la résolution desquelles on peut tirer les quatre racines de la proposée, comme on l'a vu plus haut; on pourrait aussi obtenir cette décomposition d'une manière plus simple et plus directe, en supposant d'abord que l'équation proposée soit le produit de deux équations du second degré telles que

$$x^2 + fx + g = 0, \quad x^2 + hx + k = 0,$$

et déterminant ensuite les coefficients f, g, h, k par la comparaison des termes homologues; c'est ce qu'a fait Descartes, et ce qui a donné naissance à la méthode des indéterminées dont il est regardé comme l'auteur. Multipliant donc les deux équations précédentes l'une par l'autre, on aura celle-ci

$$x^4 + (f+h)x^3 + (fh+g+h)x^2 + (fk+gh)x + gk = 0,$$

laquelle étant comparée terme à terme avec la proposée

$$x^4 + mx^3 + nx^2 + px + q = 0$$

donnera les quatre équations

$$f+h=m, \quad fh+g+h=n, \quad fk+gh=p, \quad gk=q,$$

lesquelles serviront à déterminer les quatre inconnues f, g, h, k .

34. Supposons d'abord, avec Descartes, que le second terme de la proposée soit évanoui, c'est-à-dire que l'on ait $m=0$; on aura donc $f+h=0$ et par conséquent $h=-f$, de sorte que dans ce cas la proposée ne pourra venir que de la multiplication de deux équations telles que

$$x^2 + fx + g = 0, \quad x^2 - fx + k = 0,$$

et l'on aura alors pour la détermination des trois coefficients f, g, k les équations

$$g+k-f^2=n, \quad (k-g)f=p, \quad gk=q;$$

les deux premières donnent

$$g = \frac{n+f^2 - \frac{p}{f}}{2}, \quad k = \frac{n+f^2 + \frac{p}{f}}{2};$$

et, ces valeurs étant substituées dans la dernière, on aura

$$(n+f^2)^2 - \frac{p^2}{f^2} = 4q,$$

ou bien, en multipliant par f^2 et ordonnant les termes par rapport à f ,

$$f^3 + 2nf^2 + (n^2 - 4q)f^2 - p^2 = 0,$$

équation du sixième degré, mais qui est résoluble à la manière de celles du troisième, à cause qu'elle ne renferme que des puissances paires de l'inconnue.

Telle est la méthode de Descartes pour les équations du quatrième degré. Il est vrai que cet Auteur suppose d'abord que les équations composantes soient représentées par

$$x^2 + fx + \frac{f^2}{2} + \frac{n}{2} - \frac{p}{2f} = 0, \quad x^2 - fx + \frac{f^2}{2} + \frac{n}{2} + \frac{p}{2f} = 0,$$

ainsi qu'il résulte de la substitution des valeurs de g et de k trouvées ci-dessus; mais il est naturel de croire qu'il n'a trouvé ces formules que par une analyse semblable à celle que nous venons de donner, comme on peut le voir dans le *Commentaire* de Schooten et dans la Lettre de Hudde sur la réduction des équations.

35. Il est visible que la Solution précédente revient au même que celle des n° 26 et suivants, et que les inconnues f et z expriment la même quantité dans les deux Solutions lorsque $m = 0$. Ainsi les principales remarques qu'on a faites sur la Solution de Ferrari pourront s'appliquer aussi à celle de Descartes, sans qu'il soit nécessaire d'entrer là-dessus dans un nouveau détail; mais il est bon, de plus, d'examiner en particulier le principe de cette dernière Solution et de chercher *a priori* les conséquences qui peuvent en résulter.

Ce principe consiste, comme nous venons de le voir, à supposer que l'équation proposée soit divisible par une équation du second degré telle que

$$x^2 + fx + g = 0,$$

c'est-à-dire qu'elle ait deux racines communes avec cette dernière. Ainsi l'on pourra trouver les conditions nécessaires pour cela par la méthode du n° 12. En effet, en divisant le trinôme

$$x^3 + mx^2 + nx + p \text{ par } x^2 + fx + g$$

par le trinôme

$$x^2 + fx + g,$$

on trouvera le quotient

$$x^2 + (m-f)x + n - g - f(m-f),$$

et le reste

$$[p - g(m-f) - f(n - g - f(m-f))]x + q - g(n - g - f(m-f)),$$

de sorte que, pour que la division puisse se faire exactement, il faudra que le reste soit nul indépendamment de x , ce qui donnera ces deux équations

$$p - g(m-f) - f(n - g - f(m-f)) = 0,$$

$$q - g(n - g - f(m-f)) = 0,$$

au moyen desquelles on pourra déterminer f et g . La première de ces équations donnera d'abord

$$g = \frac{p - nf + mf^2 - f^3}{m - 2f},$$

et, cette valeur étant substituée dans la seconde, on aura

$$q - (n - mf + f^2) \frac{p - nf + mf^2 - f^3}{m - 2f} + \frac{(p - nf + mf^2 - f^3)^2}{(m - 2f)^2} = 0,$$

ou bien

$$(f^3 - mf^2 + nf - p)^2 - (f^3 - mf^2 + nf - p)(f^3 - mf + n)(2f - m) + q(2f - m)^2 = 0,$$

qui, étant ordonnée par rapport à f , sera en changeant les signes

$$f^3 - 3mf^2 + (3m^2 + 2n)f^2 - m(m^2 + 4n)f^3 + (2m^2n + mp + n^2 - 4q)f^2 - m(mp + n^2 - 4q)f + mnp - m^3q - p^2 = 0,$$

la même que celle qu'on tirerait des quatre équations de condition du n° 33.

Cette équation est, comme on voit, du sixième degré, ayant tous ses termes; mais en faisant $m = 0$ tous les termes qui renferment des puissances impaires de l'inconnue s'évanouissent, de sorte que l'équation devient résoluble à la manière de celles du troisième degré; c'est le cas

que nous avons déjà considéré dans le n° 34. Mais il n'est pas même nécessaire de supposer $m=0$ pour anéantir tous les termes où l'inconnue se trouve élevée à des puissances impaires; il suffit pour cela de faire disparaître le second terme en supposant, suivant la méthode connue,

$$f = l + \frac{3m}{6} = l + \frac{m}{2},$$

et l'on verra que tous les autres termes s'évanouiront en même temps, de sorte qu'on aura une équation en l qui ne renfermera que des puissances de l^2 , laquelle sera

$$l^4 - \left(\frac{3m^2}{4} - 2n\right)l^2 + \left(\frac{3m^4}{16} - m^2n + mp + n^2 - 4q\right)l^2 - \left(\frac{m^4}{8} - \frac{mn}{2} + p\right)^2 = 0.$$

équation qui est la même que la réduite en t du n° 32, en y faisant $t = 4l^2$, de sorte que, comme on a supposé dans le même numéro $t = s^2$ et $s = 2z$, on aura $l = z$; d'où l'on voit que la quantité $l = f - \frac{m}{2}$ dans les formules précédentes sera la même que la quantité z des n°s 27 et suivants, et cela sans supposer $m=0$, ce qui sert à montrer d'autant mieux la liaison des solutions que nous venons d'examiner.

36. Voyons maintenant la raison pourquoi la méthode de Descartes conduit à une réduite du sixième degré telle que, en y faisant évanouir le second terme, tous ceux qui renferment des puissances impaires de l'inconnue s'évanouissent aussi, comme nous venons de le trouver; pour cela on considérera que, puisque l'équation du second degré $x^2 + fx + g = 0$ doit être un diviseur exact de la proposée dont les racines sont a, b, c, d , il faut nécessairement que la même équation renferme deux quelconques de ces quatre racines. Ainsi l'on aura

$$-f = a + b, \quad g = ab,$$

ou

$$-f = a + c, \quad g = ac,$$

ou

$$-f = a + d, \quad g = ad,$$

ou

$$-f = b + c, \quad g = bc,$$

ou

$$-f = b + d, \quad g = bd,$$

ou enfin

$$-f = c + d, \quad g = cd;$$

d'où l'on voit que l'équation en f doit être du sixième degré aussi bien que l'équation en g , c'est-à-dire du degré dont l'exposant sera égal au nombre des combinaisons de quatre choses prises deux à deux, nombre qu'on sait être $\frac{4 \cdot 3}{2} = 6$. On pourrait donc par ce moyen trouver directement tant l'équation en f que celle en g en cherchant la valeur de chacun de leurs coefficients, comme nous l'avons déjà pratiqué dans plusieurs occasions. Pour cela on représenterait d'abord l'équation en f par la forme générale

$$f^6 + Af^5 + Bf^4 + Cf^3 + Df^2 + Ef + F = 0,$$

et comme les racines de cette équation doivent être

$$-a - b, \quad -a - c, \quad -a - d, \quad -b - c, \quad -b - d, \quad -c - d,$$

on aurait

$$A = a + b + a + c + a + d + b + c + b + d + c + d \\ = 3(a + b + c + d) = -3m,$$

$$B = (a + b)(a + c + a + d + b + c + b + d + c + d) \\ + (a + c)(a + d + b + c + b + d + c + d) \\ + (a + d)(b + c + b + d + c + d) \\ + (b + c)(b + d + c + d) \\ + (b + d)(c + d) \\ = 3(a^2 + b^2 + c^2 + d^2) + 8(ab + ac + ad + bc + bd + cd), \\ = 3(m^2 - 2n) + 8n = 3m^2 + 2n,$$

et ainsi de suite.

Maintenant, si l'on voulait faire évanouir le second terme de cette

équation en f , il faudrait, suivant la règle connue, augmenter toutes les racines de $\frac{A}{6}$, c'est-à-dire mettre, à la place de f , $f + \frac{A}{6}$, ce qui donnerait une transformée en l où

$$l = f + \frac{A}{6} = f + \frac{a+b+c+d}{2},$$

puisque

$$A = 3(a+b+c+d),$$

de sorte que les racines de cette transformée seraient

$$\frac{a+b+c+d}{2} - a - b,$$

$$\frac{a+b+c+d}{2} - a - c,$$

$$\dots\dots\dots,$$

c'est-à-dire

$$\frac{a+b-c-d}{2},$$

$$\frac{a+c-b-d}{2},$$

$$\frac{a+d-b-c}{2},$$

$$\frac{b+c-a-d}{2},$$

$$\frac{b+d-a-c}{2},$$

$$\frac{c+d-a-b}{2},$$

où l'on voit que chaque racine a sa compagne négative; en sorte que, si l'on en prend les carrés et qu'on regarde l^2 comme l'inconnue, elle ne pourra avoir que trois valeurs différentes, savoir

$$\left(\frac{a+b-c-d}{2}\right)^2,$$

$$\left(\frac{a+c-b-d}{2}\right)^2,$$

$$\left(\frac{a+d-b-c}{2}\right)^2,$$

d'où il s'ensuit que l'équation en l , étant ordonnée par rapport à l^2 , montera au troisième degré, c'est-à-dire qu'elle sera du sixième, ayant toutes les puissances de l'inconnue paires, comme nous l'avons trouvé plus haut par une autre voie : c'est à cette circonstance heureuse qu'on doit la résolution des équations du quatrième degré. On voit aussi par là la raison pourquoi, dans le numéro précédent, l'équation en l est la même que celle en z , car il est clair (32) que les valeurs de z sont les mêmes que celles que nous venons de trouver pour l .

37. On peut encore remarquer que, puisque l'on a

$$-m = a + b + c + d,$$

et que les valeurs de f sont

$$-a - b, \quad -a - c, \quad -a - d, \quad -b - c, \quad -b - d, \quad -c - d,$$

on aura les mêmes valeurs pour la quantité $m - f$; d'où il s'ensuit que l'équation en f doit être telle, qu'elle demeure la même en y substituant $m - f$ à la place de f ; donc, si l'on fait $f = \frac{m}{2} + l$, ce qui donne $m - f = \frac{m}{2} - l$, il faudra que la transformée en l soit telle, qu'elle demeure la même en y changeant l en $-l$; par conséquent elle ne devra renfermer que des puissances paires de l .

Or, si l'on substitue cette valeur de f dans l'expression de g du n° 35, on a

$$g = \frac{l^3}{2} + \frac{ml}{4} + \frac{4n - m^2}{8} + \frac{4nm - m^3 - 8p}{16l};$$

et les deux facteurs

$$x^2 + fx + g = 0, \quad x^2 + (m - f)x + n - g - f(m - f) = 0,$$

dans lesquels a été décomposée l'équation

$$x^4 + mx^2 + nx^2 + px + q = 0,$$

deviendront

$$x^2 + \left(\frac{m}{2} + l\right)x + \frac{l^2}{2} + \frac{ml}{4} + \frac{4n - m^2}{8} + \frac{4nm - m^2 - 8p}{16l} = 0,$$

$$x^2 + \left(\frac{m}{2} - l\right)x + \frac{l^2}{2} - \frac{ml}{4} + \frac{4n - m^2}{8} - \frac{4nm - m^2 - 8p}{16l} = 0,$$

équations qui sont les mêmes que celles du n° 29 en faisant $l = z$ et en substituant dans ces dernières à la place de y sa valeur en z , laquelle est (28)

$$y = \frac{4z^2 + 4n - m^2}{8}.$$

Les méthodes que nous venons d'analyser renferment, si je ne me trompe, toutes les méthodes connues pour la résolution des équations du quatrième degré; il en faut seulement excepter celles de MM. Tschirnaus, Euler et Bezout, lesquelles méritent un examen particulier; c'est l'objet qu'il nous reste à remplir dans cette Section.

38. Et d'abord il est clair que pour pouvoir résoudre l'équation du quatrième degré, suivant la méthode de M. Tschirnaus, il n'est pas nécessaire de faire disparaître tous les termes intermédiaires, comme dans celles du troisième, mais qu'il suffit d'y faire disparaître le second et le quatrième terme où l'inconnue se trouve élevée à des puissances impaires; car alors on aura une équation résoluble à la manière de celles du second degré. Pour cela on prendra donc, comme on a fait pour le troisième degré (10), l'équation subsidiaire

$$x^2 = bx + a + y,$$

qui contient deux indéterminées a et b ; et éliminant par son moyen l'inconnue x de l'équation proposée

$$x^4 + mx^2 + nx^2 + px + q = 0,$$

on aura (14) une transformée en y du quatrième degré, dans laquelle le coefficient de y^3 sera une fonction de a et b de la première dimension, celui de y^2 une fonction de a et b de la seconde dimension, celui de y

une fonction de a et b de la troisième dimension, etc. De sorte que, pour faire disparaître à la fois le second et le quatrième terme, il faudra déterminer les quantités a et b en sorte qu'elles satisfassent à deux équations, l'une du premier degré et l'autre du troisième, ce qui donnera une réduite en a ou en b du troisième degré; d'où l'on peut conclure que la méthode de M. Tschirnaus doit aussi réussir pour le quatrième degré: c'est ce qu'on va voir maintenant par le calcul.

39. Comme nous avons jusqu'ici fait usage des lettres a, b, c, d pour représenter les quatre racines de l'équation proposée, pour éviter toute confusion nous prendrons d'autres lettres pour les coefficients de l'équation subsidiaire, et nous représenterons cette équation ainsi

$$x^2 + fx + g + y = 0.$$

Or, puisqu'il faut, par la nature de la méthode dont il s'agit (11), que cette équation ait une racine commune avec la proposée, il n'y aura qu'à faire en sorte qu'elles aient un diviseur commun où x se trouve à la première dimension. On divisera donc d'abord le trinôme

$$x^4 + mx^2 + nx^2 + px + q$$

par le trinôme

$$x^2 + fx + g + y,$$

et faisant pour un moment $g + y = g'$, on trouvera, comme ci-dessus (35), le reste

$$[p - g'(m - 2f) - nf + mf^2 - f^3]x + q - g'(n - mf + f^2) + g'^2,$$

lequel, ne contenant que la première dimension de x , devra par conséquent être le diviseur commun des deux polynômes; ainsi il faudra que ce reste divise exactement le diviseur précédent $x^2 + fx + g'$, c'est-à-dire que la valeur de x tirée de l'équation

$$[p - g'(m - 2f) - nf + mf^2 - f^3]x + q - g'(n - mf + f^2) + g'^2 = 0$$

satisfasse aussi à l'équation

$$x^2 + fx + g' = 0.$$

On aura donc

$$x = \frac{q - g'(n - mf + f^2) + g'^2}{f^2 - mf^2 + nf - p + (m - 2f)g'},$$

et substituant cette valeur dans $x^2 + fx + g' = 0$, on aura

$$\begin{aligned} & [q - g'(n - mf + f^2) + g'^2]^2 \\ & + f[q - g'(n - mf + f^2) + g'^2][f^2 - mf^2 + nf - p + (m - 2f)g'] \\ & + g' [f^2 - mf^2 + nf - p + (m - 2f)g']^2 = 0, \end{aligned}$$

où il ne s'agira plus que de remettre $g + y$ à la place de g' et de développer les termes en les ordonnant par rapport à y .

Soient, pour abréger,

$$F = f^2 - mf^2 + nf - p,$$

$$G = f^2 - mf^2 + n,$$

$$H = 2f - m,$$

et l'équation précédente deviendra

$$(q - Gg' + g'^2)^2 + f(q - Gg' + g'^2)(F - Hg') + g'(F - Hg')^2 = 0,$$

laquelle étant d'abord ordonnée par rapport à g' devient

$$\begin{aligned} g'^4 - (2G + fH - H^2)g'^3 + (G^2 + 2q + fF + fGH - 2FH)g'^2 \\ - (2qG + fG^2 + fFG - F^2)g' + q^2 + qfF = 0, \end{aligned}$$

et en remettant les valeurs de F, G, H ,

$$\begin{aligned} g'^4 - (mf^2 + 2n - m^2)g'^3 + [nf^2 - (mn - 3p)f + n^2 - 2mp + 2q]g'^2 \\ - [pf^2 - (mp - 4q)f^2 + (np - 3mq)f - p^2 + 2nq]g' \\ + q(f^2 - mf^2 + nf^2 - pf + q) = 0. \end{aligned}$$

Faisons maintenant

$$A = mf^2 + 2n - m^2,$$

$$B = nf^2 - (mn - 3p)f + n^2 - 2mp + 2q,$$

$$C = pf^2 - (mp - 4q)f^2 + (np - 3mq)f - p^2 + 2nq,$$

$$D = q(f^2 - mf^2 + nf^2 - pf + q).$$

pour avoir l'équation

$$g'^4 - Ag'^3 + Bg'^2 - Cg' + D = 0,$$

et remettant maintenant $g + y$ à la place de g' , on aura, après avoir ordonné les termes par rapport à y , cette transformée

$$\begin{aligned} y^4 + (4g - A)y^3 + (6g^2 - 3gA + B)y^2 \\ + (4g^3 - 3Ag^2 + 2Bg - C)y + g^4 - Ag^3 + Bg^2 - Cg + D = 0, \end{aligned}$$

dans laquelle on est maître de faire évanouir deux termes à volonté en déterminant convenablement les quantités f et g .

Faisons donc évanouir, comme nous nous le sommes proposé, le second et le quatrième terme; on aura pour cet effet les équations

$$4g - A = 0,$$

$$4g^3 - 3Ag^2 + 2Bg - C = 0,$$

dont la première donne

$$g = \frac{A}{4},$$

ce qui étant substitué dans la seconde, on aura, en ôtant les fractions,

$$A^3 - 4AB + 8C = 0,$$

équation qui, en remettant pour A, B, C leurs valeurs en f , montera au troisième degré, et deviendra, après avoir ordonné les termes,

$$\begin{aligned} (m^3 - 4mn + 8p)f^3 - (3m^4 - 14m^2n + 8n^2 + 2mp - 32q)f^2 \\ + [m^5 - 16m^3n + 20m^2p + 16m(n^2 - 2q) - 16np]f \\ - m^6 + 6m^4n - 8m^3np - 8m^2(n^2 - q) + 8mn^2p - 8p^2 = 0. \end{aligned}$$

Ayant donc déterminé f par cette équation, l'équation en y deviendra, à cause de $g = \frac{A}{4}$,

$$y^4 - \left(\frac{3A^2}{8} - B\right)y^2 - \frac{3A^3}{256} + \frac{A^2B}{16} - \frac{AC}{4} + D = 0,$$

ou bien, en mettant à la place de C sa valeur $\frac{AB}{2} - \frac{A^3}{8}$,

$$y^4 - \left(\frac{3A^2}{8} - B\right)y^2 + \frac{5A^3}{256} - \frac{A^2B}{16} + D = 0,$$

laquelle est, comme on voit, résoluble à la manière de celles du second degré. Ainsi l'on connaîtra f et y ; après quoi on aura sur-le-champ

$$x = \frac{q - (n - mf + f^2) \left(\frac{A}{4} + y \right) + \left(\frac{A}{4} + y \right)^2}{f^2 - mf^2 + nf - p + (m - 2f) \left(\frac{A}{4} + y \right)},$$

et les quatre valeurs de y tirées de l'équation précédente donneront toujours les quatre mêmes racines de la proposée, quelle que soit la racine f qu'on emploie; ce qu'on pourrait démontrer, s'il en était besoin, d'une manière analogue à celle du n° 28.

40. Si l'on voulait savoir *à priori* pourquoi la réduite en f que nous venons de trouver ci-dessus est nécessairement du troisième degré, il faudrait chercher quelle fonction des racines a, b, c, d doit être la valeur de f . Pour cela on reprendra l'équation subsidiaire

$$x^2 + fx + g + y = 0,$$

et l'on y substituera successivement a, b, c, d à la place de x , et à la place de y les quatre racines de l'équation en y ci-dessus; mais il n'est pas nécessaire de connaître la valeur de ces dernières racines, il suffit de considérer que, comme l'équation ne contient aucune puissance impaire de y , ses racines doivent être deux à deux égales et de signes contraires; en sorte qu'on pourra les représenter par $y', -y', y'', -y''$. Faisant donc ces substitutions dans l'équation $x^2 + fx + g + y = 0$, on aura ces quatre-ci

$$a^2 + fa + g + y' = 0,$$

$$b^2 + fb + g - y' = 0,$$

$$c^2 + fc + g + y'' = 0,$$

$$d^2 + fd + g - y'' = 0;$$

d'où, chassant d'abord y' et y'' , on tire

$$a^2 + b^2 + f(a + b) + 2g = 0,$$

$$c^2 + d^2 + f(c + d) + 2g = 0,$$

et chassant ensuite g , on aura

$$f = -\frac{a^2 + b^2 - c^2 - d^2}{a + b - c - d}.$$

Or, pour avoir toutes les valeurs de f , il n'y aura qu'à faire entre les quatre racines a, b, c, d toutes les permutations possibles, et l'on n'obtiendra que ces trois valeurs différentes

$$\frac{a^2 + b^2 - c^2 - d^2}{a + b - c - d},$$

$$\frac{a^2 + c^2 - b^2 - d^2}{a + c - b - d},$$

$$\frac{a^2 + d^2 - b^2 - c^2}{a + d - b - c},$$

qui seront les racines de la réduite en y , laquelle ne pourra être par conséquent que du troisième degré. On pourrait même remonter de là à l'équation en y , comme nous l'avons déjà pratiqué plusieurs fois; et l'on trouverait la même équation qu'on a vue ci-dessus.

Au reste, pour pouvoir mieux comparer la réduite en f dont nous parlons, avec celles que nous avons trouvées plus haut d'après les solutions de Ferrari et de Descartes, on remarquera que

$$a^2 + b^2 - c^2 - d^2 = \frac{(a + b)^2 - (c + d)^2 + (a - b)^2 - (c - d)^2}{2};$$

or

$$(a + b)^2 - (c + d)^2 = (a + b + c + d)(a + b - c - d) \\ = -m(a + b - c - d),$$

et

$$(a - b)^2 - (c - d)^2 = (a + c - b - d)(a + d - b - c);$$

mais on trouve par le calcul

$$(a + b - c - d)(a + c - b - d)(a + d - b - c) = -m^2 + 4mn - 8p,$$

donc on aura

$$a^2 + b^2 - c^2 - d^2 = \frac{1}{2} \left[-m(a + b - c - d) - \frac{m^2 - 4mn + 8p}{a + b - c - d} \right];$$

par conséquent

$$f = -\frac{a^2 + b^2 - c^2 - d^2}{a + b - c - d} = \frac{m}{2} + \frac{m^2 - 4mn + 8p}{2(a + b - c - d)^2}.$$

Or nous avons trouvé (32) que la réduite en t a pour racines les différentes valeurs de $(a + b - c - d)^2$; donc on aura, en général,

$$f = \frac{m}{2} + \frac{m^2 - 4mn + 8p}{2t},$$

d'où l'on voit que la réduite en f n'est autre chose qu'une transformation de la réduite en t du numéro cité.

41. Après avoir vu comment la méthode de Tschirnaus peut s'appliquer aux équations du quatrième degré en faisant évanouir deux termes de la proposée, il ne sera pas inutile de voir encore ce qui en résulterait si l'on voulait faire évanouir à la fois tous les termes intermédiaires, comme on a fait pour le troisième degré.

On aurait donc trois termes à faire disparaître, savoir le second, le troisième et le quatrième, ce qui exigerait une équation subsidiaire qui contiendrait trois indéterminées, et qui fût de cette forme

$$x^3 + fx^2 + gx + h + y = 0.$$

On éliminerait donc x par le moyen de cette équation et de la proposée

$$x^4 + mx^3 + nx^2 + px + q = 0,$$

et l'on aurait une transformée en y du quatrième degré, telle que

$$y^4 + Ay^3 + By^2 + Cy + D = 0,$$

dans laquelle il faudrait supposer $A = 0$, $B = 0$, $C = 0$, pour avoir l'équation à deux termes

$$y^4 + D = 0.$$

Or, de ce que nous avons démontré, en général, dans le n° 14, il s'ensuit que A sera une fonction d'une dimension des trois indéterminées f , g , h , que B sera une fonction de deux dimensions, et C une fonction de

trois dimensions des mêmes quantités; de sorte que l'on aura, pour la détermination des inconnues f , g , h , ces trois équations

$$A = 0, \quad B = 0, \quad C = 0,$$

dont la première sera du premier degré, la seconde du second, et la troisième du troisième degré; d'où il est facile de voir qu'on aura par l'élimination une équation finale en f , ou g , ou h , qui sera du degré 1. 2. 3. c'est-à-dire du sixième. Il paraît donc par là que la méthode dont il s'agit ne saurait réussir, puisqu'elle conduit à une réduite d'un degré supérieur à la proposée; mais il pourrait se faire que cette réduite du sixième degré pût s'abaisser à un degré inférieur; c'est ce qu'il est bon d'examiner *à priori* avant d'entreprendre le calcul que nous venons d'indiquer.

42. Pour cet effet il faut chercher quelle fonction des racines a , b , c , d devra être l'indéterminée f , par exemple, pour que la transformée en y se réduise à la forme

$$y^4 + D = 0.$$

Or cette équation en y donne ces quatre racines (25)

$$y = \pm \sqrt[4]{-D}, \\ y = \pm \sqrt{-1} \sqrt[4]{-D};$$

ainsi, en faisant pour plus de simplicité $\sqrt[4]{-D} = k$, il n'y aura qu'à mettre successivement dans l'équation subsidiaire

$$x^3 + fx^2 + gx + h + y = 0,$$

a , b , c , d à la place de x , et k , $-k$, $k\sqrt{-1}$, $-k\sqrt{-1}$ à la place de y , et l'on aura ces quatre-ci

$$\begin{aligned} a^3 + a^2f + ag + h + k &= 0, \\ b^3 + b^2f + bg + h - k &= 0, \\ c^3 + c^2f + cg + h + k\sqrt{-1} &= 0, \\ d^3 + d^2f + dg + h - k\sqrt{-1} &= 0, \end{aligned}$$

d'où l'on pourra tirer les valeurs de f , g , h et k .

Si l'on ajoute ensemble les deux premières et les deux dernières, on aura ces deux-ci

$$\begin{aligned} a^3 + b^3 + (a^2 + b^2)f + (a + b)g + 2h &= 0, \\ c^3 + d^3 + (c^2 + d^2)f + (c + d)g + 2h &= 0, \end{aligned}$$

qui, étant retranchées l'une de l'autre, donnent

$$a^3 + b^3 - c^3 - d^3 + (a^2 + b^2 - c^2 - d^2)f + (a + b - c - d)g = 0,$$

où il n'y a plus que deux inconnues f et g .

Qu'on retranche maintenant les deux premières l'une de l'autre, comme aussi les deux dernières, on aura ces deux-ci

$$\begin{aligned} a^3 - b^3 + (a^2 - b^2)f + (a - b)g + 2h &= 0, \\ c^3 - d^3 + (c^2 - d^2)f + (c - d)g + 2h\sqrt{-1} &= 0, \end{aligned}$$

dont la seconde étant multipliée par $\sqrt{-1}$, et ensuite ajoutée à la première, on aura

$$a^3 - b^3 + (c^3 - d^3)\sqrt{-1} + [a^2 - b^2 + (c^2 - d^2)\sqrt{-1}]f + [a - b + (c - d)\sqrt{-1}]g = 0,$$

équation qui, étant combinée avec celle qu'on a trouvée ci-dessus, servira à déterminer f et g .

Chassant g , on aura une équation en f qui donnera

$$f = -\frac{(a^3 + b^3 - c^3 - d^3)[a - b + (c - d)\sqrt{-1}] - [a^2 - b^2 + (c^2 - d^2)\sqrt{-1}](a + b - c - d)}{(a^3 + b^3 - c^3 - d^3)[a - b + (c - d)\sqrt{-1}] - [a^2 - b^2 + (c^2 - d^2)\sqrt{-1}](a + b - c - d)},$$

d'où l'on pourra déduire facilement toutes les différentes valeurs dont la quantité f est susceptible, en faisant toutes les permutations possibles entre les quatre racines a, b, c, d . De cette manière, si l'on fait, pour abrégé,

$$\begin{aligned} M &= (a^3 + b^3 - c^3 - d^3)(a - b) - (a^2 - b^2)(a + b - c - d), \\ N &= (a^3 + b^3 - c^3 - d^3)(c - d) - (c^2 - d^2)(a + b - c - d), \\ P &= (a^3 + b^3 - c^3 - d^3)(a - b) - (a^2 - b^2)(a + b - c - d), \\ Q &= (a^3 + b^3 - c^3 - d^3)(c - d) - (c^2 - d^2)(a + b - c - d), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M' &= (a^3 + c^3 - b^3 - d^3)(a - c) - (a^2 - c^2)(a + c - b - d), \\ N' &= (a^3 + c^3 - b^3 - d^3)(b - d) - (b^2 - d^2)(a + c - b - d), \\ P' &= (a^3 + c^3 - b^3 - d^3)(a - c) - (a^2 - c^2)(a + c - b - d), \\ Q' &= (a^3 + c^3 - b^3 - d^3)(b - d) - (b^2 - d^2)(a + c - b - d), \\ M'' &= (a^3 + d^3 - b^3 - c^3)(a - d) - (a^2 - d^2)(a + d - b - c), \\ N'' &= (a^3 + d^3 - b^3 - c^3)(b - c) - (b^2 - c^2)(a + d - b - c), \\ P'' &= (a^3 + d^3 - b^3 - c^3)(a - d) - (a^2 - d^2)(a + d - b - c), \\ Q'' &= (a^3 + d^3 - b^3 - c^3)(b - c) - (b^2 - c^2)(a + d - b - c), \end{aligned}$$

on trouvera les six valeurs suivantes

$$\begin{aligned} -\frac{M + N\sqrt{-1}}{P + Q\sqrt{-1}}, & -\frac{M - N\sqrt{-1}}{P - Q\sqrt{-1}}, \\ -\frac{M' + N'\sqrt{-1}}{P' + Q'\sqrt{-1}}, & -\frac{M' - N'\sqrt{-1}}{P' - Q'\sqrt{-1}}, \\ -\frac{M'' + N''\sqrt{-1}}{P'' + Q''\sqrt{-1}}, & -\frac{M'' - N''\sqrt{-1}}{P'' - Q''\sqrt{-1}}, \end{aligned}$$

qui seront donc les racines de l'équation en f ; d'où l'on voit que cette équation montera en effet au sixième degré, comme nous l'avons déjà conclu par une autre voie.

43. Il s'agit maintenant de voir si cette équation du sixième degré peut s'abaisser à un degré inférieur; or c'est ce qui doit avoir lieu en effet, comme je vais le prouver, d'après la forme que je viens de trouver pour les six racines de l'équation en question. Car supposons que les deux racines

$$-\frac{M + N\sqrt{-1}}{P + Q\sqrt{-1}} \quad \text{et} \quad -\frac{M - N\sqrt{-1}}{P - Q\sqrt{-1}}$$

soient représentées par l'équation du second degré

$$f^2 + tf + u = 0,$$

on aura donc par la nature des équations

$$t = \frac{M + N\sqrt{-1}}{P + Q\sqrt{-1}} + \frac{M - N\sqrt{-1}}{P - Q\sqrt{-1}} \quad \text{et} \quad u = \frac{M + N\sqrt{-1}}{P + Q\sqrt{-1}} \times \frac{M - N\sqrt{-1}}{P - Q\sqrt{-1}},$$

c'est-à-dire

$$t = \frac{2(MP + NQ)}{P^2 + Q^2} \quad \text{et} \quad u = \frac{M^2 + N^2}{P^2 + Q^2}$$

Or je dis que les quantités t et u ne peuvent dépendre que d'équations du troisième degré telles que

$$t^3 - Et^2 + Ft - G = 0,$$

$$u^3 - Hu^2 + Ku - L = 0,$$

les coefficients E, F, G, H, K, L étant des fonctions rationnelles des coefficients m, n, p, q de la proposée. De sorte que, nommant t', t'', t''' les trois racines de la première équation, et u', u'', u''' les racines correspondantes de la seconde, on aura ces trois équations en f

$$f^3 + t'f + u' = 0,$$

$$f^3 + t''f + u'' = 0,$$

$$f^3 + t'''f + u''' = 0,$$

dans lesquelles pourra se décomposer l'équation du sixième degré en f dont nous venons de parler.

Pour démontrer cette proposition, il n'y a qu'à chercher de combien de valeurs différentes sont susceptibles les quantités t et u , c'est-à-dire les fonctions

$$\frac{MP + NQ}{P^2 + Q^2} \quad \text{et} \quad \frac{M^2 + N^2}{P^2 + Q^2}$$

des racines a, b, c, d de la proposée, en supposant que l'on fasse entre ces racines toutes les permutations possibles; car il est clair que les valeurs qui en résulteront seront les racines des équations en t et en u . Pour cela je remarque d'abord que le nombre total des permutations des quatre quantités a, b, c, d , doit être, suivant les règles connues, $4.3.2.1 = 24$; de sorte que, généralement parlant, les équations en t et en u devraient monter au vingt-quatrième degré. Mais il arrive ici que parmi les permutations dont il s'agit il y en a plusieurs qui redonnent les mêmes valeurs de t et u , et qui, par conséquent, doivent être rejetées.

En effet :

1^o Lorsqu'on échange a en b , il est visible que les quantités N et Q demeurent les mêmes, et que les quantités M et P changent simplement de signes, de sorte que les quantités t et u doivent demeurer les mêmes; d'où il est facile de conclure que parmi les vingt-quatre valeurs de t et de u répondant aux vingt-quatre permutations des lettres a, b, c, d , il doit y en avoir douze égales à douze autres, ce qui réduit déjà le nombre des valeurs utiles de t et u à la moitié.

2^o Lorsqu'on échange c en d , les quantités M et P demeurent les mêmes, et les quantités N et Q changent simplement de signe, ce qui ne produit aucun changement dans les valeurs de t et u ; donc, comme ces permutations sont indépendantes des précédentes, il s'ensuit, par une raison semblable, que les douze valeurs de t et u se réduiront à six.

3^o Enfin, si l'on échange a en c et b en d à la fois, on verra aisément que les quantités M et N se changeront l'une dans l'autre en changeant de signe, et qu'il en sera de même des quantités P et Q ; mais il est clair que ces changements ne feront point varier les quantités t et u . Ainsi, comme ces nouvelles permutations sont aussi indépendantes des précédentes, on en conclura que les six valeurs de t et u se réduiront à trois, en sorte que, parmi les vingt-quatre valeurs de t et u , il ne s'en trouvera effectivement que trois différentes entre elles, dont chacune sera répétée huit fois.

Il y a encore, à la vérité, un échange qui ne produit aucune variation dans les quantités t et u : c'est celui de a en d et b en c à la fois; mais il ne doit pas entrer en ligne de compte, parce qu'il est déjà renfermé dans les précédents.

De là on peut conclure que les équations en t et u du vingt-quatrième degré ne pourront renfermer que trois racines différentes, dont chacune en aura sept autres d'égales, de sorte que ces équations ne seront autre chose que des équations du troisième degré élevées à la huitième puissance.

44. Nous venons donc de voir *à priori* que les valeurs différentes de t ne peuvent être qu'au nombre de trois, ainsi que celles de u ; or il est

facile de trouver que ces valeurs seront, pour la quantité t ,

$$\frac{2(MP+NQ)}{P^2+Q^2}, \quad \frac{2(M'P'+N'Q')}{P'^2+Q'^2}, \quad \frac{2(M''P''+N''Q'')}{P''^2+Q''^2},$$

et pour la quantité u ,

$$\frac{M^2+N^2}{P^2+Q^2}, \quad \frac{M'^2+N'^2}{P'^2+Q'^2}, \quad \frac{M''^2+N''^2}{P''^2+Q''^2},$$

de sorte qu'on aura (43)

$$t' = \frac{2(MP+NQ)}{P^2+Q^2}, \quad t'' = \frac{2(M'P'+N'Q')}{P'^2+Q'^2}, \quad t''' = \frac{2(M''P''+N''Q'')}{P''^2+Q''^2},$$

et

$$u' = \frac{M^2+N^2}{P^2+Q^2}, \quad u'' = \frac{M'^2+N'^2}{P'^2+Q'^2}, \quad u''' = \frac{M''^2+N''^2}{P''^2+Q''^2}.$$

Effectivement, si l'on met ces valeurs dans les coefficients E, F, ... des équations en t et en u , lesquels doivent être, comme on sait, exprimés ainsi

$$E = t' + t'' + t''', \quad F = t't'' + t't''' + t''t''', \quad G = t't''t''',$$

$$H = u' + u'' + u''', \quad K = u'u'' + u'u''' + u''u''', \quad L = u'u''u''',$$

on aura des fonctions de a, b, c, d , qui demeureront les mêmes, quelque permutation qu'on fasse entre les quantités a, b, c, d , et qui pourront par conséquent s'exprimer par des fonctions rationnelles des coefficients m, n, p, q de la proposée dont les quantités a, b, c, d sont les racines. De sorte qu'on pourra par ce moyen trouver directement les valeurs des coefficients dont il s'agit, comme nous l'avons déjà pratiqué plusieurs fois dans le cours de ces recherches.

Au reste, dès qu'on connaîtra les trois racines t', t'', t''' de l'équation en t , on pourra par leur moyen trouver les racines correspondantes u', u'', u''' de l'équation en u , sans être obligé de résoudre aucune équation. Car si l'on prend ces trois expressions

$$u' + u'' + u''',$$

$$t'u' + t''u'' + t'''u''',$$

$$t'^2u' + t''^2u'' + t'''^2u''',$$

et qu'on y mette à la place de t', t'', t''' et u', u'', u''' leurs valeurs ci-dessus en a, b, c, d , on verra aisément que les fonctions résultant de a, b, c, d seront telles, qu'elles ne changeront point de forme, quelque permutation qu'on y fasse entre les quantités a, b, c, d , de sorte qu'elles seront toujours exprimables par des fonctions rationnelles des coefficients m, n, p, q de l'équation proposée. Ainsi l'on pourra trouver les valeurs des expressions dont il s'agit, moyennant quoi on aura trois équations par lesquelles on déterminera aisément les trois inconnues u', u'', u''' . (Voyez la Section quatrième.)

45. Nous étant donc assurés *a priori* que la réduite du sixième degré, à laquelle doit conduire la méthode en question, pourra toujours s'abaisser au troisième, voyons maintenant le procédé du calcul que cette méthode exige. On reprendra donc l'équation subsidiaire (40)

$$x^3 + fx^2 + gx + h + y = 0,$$

et l'on cherchera par la méthode ordinaire (11) les conditions nécessaires pour que cette équation ait une racine commune avec la proposée

$$x^3 + mx^2 + nx^2 + px + q = 0.$$

On divisera donc d'abord le polynôme

$$x^3 + mx^2 + nx^2 + px + q$$

par le polynôme

$$x^3 + fx^2 + gx + h,$$

en faisant pour plus de simplicité $h' = h + y$, et, abstraction faite du quotient, on aura ce reste

$$Mx^2 + N'x + P',$$

en supposant

$$M = n - g - f(m - f),$$

$$N' = p - h' - g(m - f),$$

$$P' = q - h'(m - f).$$

On divisera maintenant le quaternôme $x^3 + fx^2 + gx + h'$ par le trinôme

$Mx^2 + N'x + P'$, et l'on aura ce nouveau reste

$$\left(g - \frac{P' + N'f}{M} + \frac{N'^2}{M^2}\right)x + h' - \frac{P'f}{M} + \frac{N'P'}{M^2} = 0,$$

qui, ne renfermant que la première puissance de x , devra par conséquent être le diviseur commun cherché. Faisant donc ce diviseur égal à zéro, on en tirera

$$x = -\frac{M^2h' - MP'f + N'P'}{M^2g - M(P' + N'f) + N'^2},$$

valeur qui, étant substituée dans l'équation

$$Mx^2 + N'x + P' = 0,$$

donnera les conditions cherchées.

Faisons maintenant

$$\begin{aligned} N &= p - h - g(m - f), \\ P &= q - h(m - f), \end{aligned}$$

et, à cause de $h' = h + y$, on aura

$$\begin{aligned} N' &= N - y, \\ P' &= P - (m - f)y; \end{aligned}$$

donc, substituant ces valeurs dans l'expression de x , et supposant de plus

$$\begin{aligned} Q &= M'h - MP'f + NP, \\ R &= M^2 + (Mf - N)f - P, \\ S &= M^2g - M(P + Nf) + N^2, \\ T &= Mm - 2N, \end{aligned}$$

on aura

$$x = -\frac{Q + Ry + (m - f)y^2}{S + Ty + y^2},$$

et l'équation de condition sera

$$\begin{aligned} M[Q + Ry + (m - f)y^2]^2 + (y - N)[Q + Ry + (m - f)y^2](S + Ty + y^2) \\ + [P - (m - f)y](S + Ty + y^2) = 0, \end{aligned}$$

laquelle, étant développée et ordonnée par rapport aux puissances de y , se trouvera, après les réductions, de la forme

$$y^4 + Ay^2 + By^2 + Cy + D = 0,$$

comme nous l'avons déjà montré plus haut.

Dans cette équation en y les coefficients A, B, C, D seront des fonctions rationnelles et entières des trois indéterminées f, g, h , et les dimensions de ces indéterminées ne passeront pas le premier degré dans le coefficient A , le second degré dans le coefficient B , et ainsi de suite, conformément à ce qu'on a déjà prouvé *à priori*. Ainsi, pour réduire l'équation précédente à deux termes, on fera

$$A = 0, \quad B = 0, \quad C = 0,$$

équations d'où l'on tirera d'abord les valeurs de g et h en f , et ensuite une équation finale en f qui sera du sixième degré, mais qui sera réductible au troisième, comme on l'a démontré ci-dessus; car, en divisant cette équation par une équation du second degré telle que

$$f^2 + tf + u = 0,$$

on trouvera, pour que la division puisse se faire exactement, deux équations de condition entre t et u , à l'aide desquelles on pourra d'abord déterminer u en t , et ensuite on aura une équation finale en t qui ne sera que du troisième degré. Résolvant donc cette équation du troisième degré, on connaîtra t et de là u ; après quoi on aura f par la résolution de l'équation ci-dessus du second degré, et de là g et h par des équations linéaires. Ainsi l'on connaîtra la valeur de tous les coefficients D, Q, R, S, T .

Or l'équation en y , étant réduite à celle-ci

$$y^4 + D = 0$$

par l'évanouissement des termes intermédiaires, donnera les quatre valeurs de y

$$\pm\sqrt[4]{-D} \quad \text{et} \quad \pm\sqrt[4]{-D}\sqrt{-1},$$

lesquelles, étant substituées successivement dans l'expression de x ci-

dessus, donneront les quatre racines de la proposée. Au reste, comme ce calcul conduit à des formules assez compliquées, nous nous contentons de l'indiquer, et nous allons plutôt chercher des moyens de le simplifier.

46. Puisque la racine x est de la forme

$$x = -\frac{Q + Ry + (m-f)y^2}{S + Ty + y^2},$$

la quantité y devant être déterminée par l'équation à deux termes

$$y^4 + D = 0,$$

il est facile de voir qu'on peut réduire l'expression de x à cette forme plus simple

$$x = a + by + cy^2 + dy^3,$$

a, b, c, d étant des coefficients dépendants de $Q, R, \dots$. Car si l'on multiplie d'abord le haut et le bas de la fraction

$$\frac{Q + Ry + (m-f)y^2}{S + Ty + y^2}$$

par $S - Ty + y^2$, le dénominateur de la nouvelle fraction deviendra

$$(S + y^2)^2 - Ty^2, \text{ c'est-à-dire } S^2 + (2S - T^2)y^2 + y^4,$$

et, en mettant $-D$ à la place de y^4 ,

$$S^2 - D + (2S - T^2)y^2;$$

donc, multipliant encore tant le numérateur que le dénominateur par $S^2 - D - (2S - T^2)y^2$, le nouveau dénominateur sera

$$(S^2 - D)^2 - (2S - T^2)^2 y^4,$$

ou bien, à cause de $y^4 = -D$,

$$(S^2 - D)^2 + D(2S - T^2)^2,$$

où il n'y aura plus de y . Ainsi l'on pourra faire évanouir y du dénominateur de l'expression de x en le multipliant, aussi bien que le numérateur, par

$$(S - Ty + y^2)[S^2 - D - (2S - T^2)y^2];$$

or par ce moyen le numérateur deviendra un polynôme où y montera au sixième degré; donc, en y substituant $-D$ à la place de y^4 , $-Dy$ à la place de y^5 et $-Dy^2$ à celle de y^6 , il ne s'y trouvera plus que les puissances y, y^2 et y^3 , en sorte que l'expression de x sera de la forme

$$a + by + cy^2 + dy^3.$$

Maintenant, comme la substitution des valeurs de y tirées de l'équation $y^4 + D = 0$ doit donner les quatre racines x de la proposée

$$x^4 + mx^2 + nx + q = 0,$$

on pourra regarder cette équation comme résultant de l'élimination de y dans ces deux-ci

$$x = a + by + cy^2 + dy^3 \quad \text{et} \quad y^4 + D = 0,$$

et la comparaison des termes homologues donnera quatre équations par lesquelles on pourra déterminer quatre quelconques des cinq coefficients a, b, c, d et D , le cinquième pouvant toujours être pris à volonté.

C'est la méthode que MM. Euler et Bezout ont proposée pour la résolution des équations du quatrième degré dans les Mémoires cités ci-dessus (18).

M. Euler fait $c = 1$, et il trouve par l'élimination des trois autres indéterminées a, b, d une réduite en D du troisième degré. M. Bezout, au contraire, fait d'abord $D = -1$, et il trouve une réduite en c du sixième degré résoluble à la manière des équations du troisième, parce qu'elle ne contient aucune puissance impaire de l'inconnue. M. Bezout fait voir en même temps que, si au lieu de chercher c on cherchait b ou d , on tomberait dans une réduite du vingt-quatrième degré, avec des exposants multiples de 4, et par conséquent résoluble à la manière des équations du sixième degré. Il fait voir de plus que si l'on cherche une réduite

dont bd soit la racine, elle ne sera que du troisième degré; et par là il démontre que la réduite en b ou en d ne renfermera que les difficultés du troisième degré, puisqu'elle pourra, à l'aide de l'équation en bd , se décomposer en trois équations du huitième degré avec des exposants multiples de 4, lesquelles seront par conséquent résolubles à la manière de celles du second.

Nous nous contentons d'indiquer ici ces résultats, puisque le lecteur peut aisément les trouver de lui-même s'il n'est pas à portée de consulter les Mémoires cités; mais nous allons chercher *à priori* la raison de ces résultats, comme nous l'avons pratiqué jusqu'ici.

47. Nommons x', x'', x''', x^{iv} les quatre valeurs de x , c'est-à-dire les racines de la proposée, et les quatre valeurs de y tirées de l'équation $y^4 + D = 0$ étant $\pm \sqrt[4]{-D}$, $\pm \sqrt[4]{-D} \sqrt{-1}$, on aura, par la substitution successive de ces valeurs dans l'équation

$$x = a + by + cy^2 + dy^3,$$

ces quatre-ci

$$x' = a + b\sqrt[4]{-D} + c\sqrt[4]{D} + d\sqrt[4]{-D},$$

$$x'' = a - b\sqrt[4]{-D} + c\sqrt[4]{D} - d\sqrt[4]{-D},$$

$$x''' = a + b\sqrt[4]{-D} \sqrt{-1} - c\sqrt[4]{D} - d\sqrt[4]{-D} \sqrt{-1},$$

$$x^{iv} = a - b\sqrt[4]{-D} \sqrt{-1} - c\sqrt[4]{D} + d\sqrt[4]{-D} \sqrt{-1}.$$

Si l'on ajoute d'abord ensemble ces quatre équations on aura

$$x' + x'' + x''' + x^{iv} = 4a = -m,$$

d'où

$$a = -\frac{m}{4}.$$

Ensuite, si l'on fait deux sommes à part des deux premières et des deux dernières, on aura

$$x' + x'' = 2a + 2c\sqrt[4]{D},$$

$$x''' + x^{iv} = 2a - 2c\sqrt[4]{D},$$

d'où l'on tire

$$c\sqrt[4]{D} = c\sqrt{-D} = \frac{x' + x'' - x''' - x^{iv}}{4}.$$

Done, faisant avec M. Euler $c = 1$, on aura

$$-D = \frac{(x' + x'' - x''' - x^{iv})^2}{16}.$$

Et il est facile de conclure de cette expression de D que l'équation en D sera effectivement du troisième degré, comme M. Euler l'a trouvé, car elle ne sera autre chose que la réduite en t trouvée plus haut (32), dans laquelle on mettrait $-16D$ à la place de t , puisqu'on a fait

$$t = s^2 = (a + b - c - d)^2,$$

a, b, c, d désignant dans ce numéro-là les quantités que nous dénotons maintenant par x', x'', x''', x^{iv} , c'est-à-dire les quatre racines de la proposée.

Mais si M. Euler, au lieu de supposer $c = 1$, avait supposé $b = 1$, sa réduite en D n'aurait plus été du troisième degré, mais elle serait montée au sixième.

Car, si des quatre équations ci-dessus on prend la différence des deux premières et la différence des deux dernières, on a ces deux-ci

$$x' - x'' = 2b\sqrt[4]{-D} + 2d\sqrt[4]{-D},$$

$$x''' - x^{iv} = [2b\sqrt[4]{-D} - 2d\sqrt[4]{-D}] \sqrt{-1},$$

d'où l'on tire

$$b\sqrt[4]{-D} = \frac{x' - x'' - (x''' - x^{iv})\sqrt{-1}}{4},$$

$$d\sqrt[4]{-D} = \frac{x' - x'' + (x''' - x^{iv})\sqrt{-1}}{4}.$$

De sorte qu'en faisant $b = 1$ et prenant les quatrièmes puissances on aura

$$-D = \left[\frac{x' - x'' - (x''' - x^{iv})\sqrt{-1}}{4} \right]^4,$$

quantité qui doit dépendre d'une équation du sixième degré, comme on le verra dans un moment.

48. Si l'on fait avec M. Bezout $D = -1$, on aura par les formules

précédentes

$$c = \frac{x' - x'' + x''' - x^{iv}}{4},$$

d'où l'on peut conclure d'abord que la réduite en c sera du sixième degré avec tous les exposants pairs, ainsi que cet Auteur l'a trouvé; car il est évident que la valeur de $-D$, dans l'hypothèse de M. Euler, est la même que celle de c^2 dans l'hypothèse présente, de sorte qu'en mettant $-c^2$ à la place de D dans la réduite de M. Euler on aura la réduite de M. Bezout en c , laquelle sera par conséquent du sixième degré, résoluble à la manière des équations du troisième. Au reste, cette réduite en c sera la même que celle en z du n° 29, en y substituant $-2c$ à la place de z .

Voyons maintenant quelle devra être la forme des réduites en b et en d , en faisant toujours avec M. Bezout $D = -1$. On aura dans cette hypothèse, par les formules du numéro précédent,

$$b = \frac{x' - x'' - (x''' - x^{iv})\sqrt{-1}}{4},$$

$$d = \frac{x' - x'' + (x''' - x^{iv})\sqrt{-1}}{4},$$

d'où l'on tirera toutes les valeurs de b et de d en faisant toutes les permutations possibles entre les quatre racines x' , x'' , x''' , x^{iv} , et l'on pourra juger, par le nombre et la forme de ces valeurs, du degré et de la nature des équations par lesquelles les quantités b et d doivent être déterminées.

Donc :

1° L'équation en b sera la même que l'équation en d , puisque la valeur de d résulte de celle de b en échangeant entre elles les deux racines x''' , x^{iv} , de sorte que les valeurs de b et de d seront les racines d'une même équation;

2° Cette équation sera en général du degré 4.3.2.1, c'est-à-dire du vingt-quatrième, puisqu'il y a autant de permutations possibles entre les quatre quantités x' , x'' , x''' , x^{iv} ;

3° Cette équation du vingt-quatrième degré aura tous les exposants multiples de 4, car il est facile de voir que, b étant une de ses racines,

$-b$, $b\sqrt{-1}$, et $-b\sqrt{-1}$ en seront aussi. En effet, prenant comme plus haut

$$b = \frac{x' - x'' - (x''' - x^{iv})\sqrt{-1}}{4},$$

il est visible que la quantité b deviendra $-b$ en échangeant x' en x'' et x'' en x' , qu'elle deviendra $b\sqrt{-1}$ en échangeant x' en x''' et x''' en x' , et qu'enfin elle deviendra $-b\sqrt{-1}$ en échangeant x' en x^{iv} et x^{iv} en x' . Donc il faudra que l'équation en b demeure la même en y prenant b négatif et en y mettant $\pm b\sqrt{-1}$ à la place de b , ce qui exige qu'elle ne contienne aucune puissance impaire de b ni aucune puissance pairement impaire. D'où il s'ensuit qu'en faisant $b^4 = v$ on aura une réduite en v du sixième degré. Et l'on remarquera que cette réduite en v sera la même que celle en $-D$ dans l'hypothèse de $b = 1$ (numéro précédent); car il est visible que la valeur de $-D$ est la même que celle de b^4 ci-dessus.

On pourrait démontrer ici, par une méthode semblable à celle dont nous avons fait usage dans le n° 42, que cette équation en v pourra se décomposer en trois équations du second degré au moyen d'une réduite du troisième; mais on peut le prouver d'une manière plus simple que voici.

Je fais le produit des quantités b et d , j'ai

$$bd = \frac{(x' - x'')^2 + (x''' - x^{iv})^2}{16},$$

or

$$\begin{aligned} (x' - x'')^2 + (x''' - x^{iv})^2 &= x'^2 + x''^2 + x'''^2 + x^{iv^2} - 2(x'x'' + x'''x^{iv}) \\ &= m^2 - 2n - 2(x'x'' + x'''x^{iv}), \end{aligned}$$

et il est clair que la quantité $x'x'' + x'''x^{iv}$ est la même que la quantité u du n° 30 que nous avons vu dépendre d'une équation du troisième degré; d'où il s'ensuit que l'équation en bd sera aussi du troisième degré. Et comme

$$bd = \frac{m^2 - 2n - 2u}{16},$$

on aura cette équation en bd , en substituant, dans l'équation en u du numéro cité, $\frac{m^2-2n-16bd}{2}$ à la place de u .

Supposons maintenant que ρ' , ρ'' , ρ''' soient les racines de cette équation en bd , on aura (numéro cité)

$$\rho' = \frac{m^2-2n}{16} - \frac{x'x''+x''x'''}{8} = bd,$$

$$\rho'' = \frac{m^2-2n}{16} - \frac{x'x'''+x''x'''}{8},$$

$$\rho''' = \frac{m^2-2n}{16} - \frac{x'x''+x''x'''}{8};$$

or, si l'on multiplie ensemble les deux équations

$$x' - x'' = 2(b+d), \quad x'' - x''' = 2(b-d)\sqrt{-1}$$

du n° 48, on a

$$x'x'' + x''x''' - x'x''' - x'x'' = 4(b^2-d^2)\sqrt{-1};$$

donc

$$4(b^2-d^2)\sqrt{-1} = 8(\rho'' - \rho'''),$$

et, prenant les carrés,

$$b^4 - 2b^2d^2 + d^4 = -4(\rho'' - \rho''')^2;$$

mais on a déjà $bd = \rho'$; donc

$$b^4 + d^4 = 2\rho'^2 - 4(\rho'' - \rho''')^2,$$

et, à cause de $d = \frac{\rho'}{b}$,

$$b^4 + \frac{\rho'^4}{b^4} = 2\rho'^2 - 4(\rho'' - \rho''')^2;$$

donc

$$b^4 - 2[\rho'^2 - 2(\rho'' - \rho''')^2]b^4 + \rho'^4 = 0,$$

équation du huitième degré, résoluble à la manière de celles du deuxième, ce qui s'accorde avec le résultat de M. Bezout.

Au reste, il est à propos de remarquer, touchant la réduite en b , qu'en

représentant (25) par $1, \alpha, \alpha^2, \alpha^3$ les quatre racines de l'équation $x^4 - 1 = 0$, on aura

$$b = \frac{x' + \alpha x^{15} + \alpha^2 x'' + \alpha^3 x'''}{4},$$

ou bien, ce qui revient au même, en échangeant x^{15} en x'' , x'' en x''' et x''' en x^{15} ,

$$b = \frac{x' + \alpha x'' + \alpha^2 x''' + \alpha^3 x^{15}}{4},$$

expression analogue à celle qu'on a trouvée pour la réduite du troisième degré (n° 6 et 19), ce qui sert à faire voir l'analogie entre la résolution du quatrième degré déduite de cette dernière méthode et celle de la résolution des équations du troisième degré.

49. Si l'on reprend les équations du n° 46,

$$x = a + by + cy^2 + dy^3,$$

$$y^4 + D = 0,$$

et qu'on y suppose $y^2 = z$, on aura ces deux-ci

$$x = (a + cz) + (b + dz)\sqrt{z},$$

$$z^2 + D = 0,$$

dont la première, étant délivrée de l'irrationalité, devient

$$(x - a - cz)^2 - (b + dz)^2 z = 0,$$

laquelle, à cause de $z^2 = -D$, se réduira à cette forme

$$x^2 + (f + gz)x + h + kz = 0.$$

De cette manière on aura donc les deux équations

$$z^2 + D = 0,$$

$$x^2 + (f + gz)x + h + kz = 0,$$

qui, par l'élimination de z , donneront une équation du quatrième degré comparable à la proposée

$$x^4 + mx^3 + nx^2 + px + q = 0;$$

de sorte que, par la comparaison des termes analogues, on pourra déterminer quatre des cinq coefficients f, g, h, k et D , le cinquième demeurant à volonté.

Cette méthode revient à la même que celle que M. Bezout a donnée à la fin de son Mémoire de 1762 sur les équations, et qu'il a redonnée dans le Mémoire de 1765, page 548, comme un exemple d'une méthode générale qui s'étend à toutes les équations dont le degré est marqué par un nombre composé. Dans le premier de ces endroits l'Auteur suppose d'abord $g = -1$, et il trouve une équation finale en k du troisième degré. Dans le second il fait $D = -1$, et il parvient à une équation finale en g du sixième degré avec des exposants pairs, et par conséquent résoluble à la manière des équations du troisième degré.

Pour voir la raison de ces résultats, il n'y a qu'à remarquer que, puisque $z = \pm \sqrt{-D}$, on aura ces deux équations

$$x^3 + (f + g\sqrt{-D})x + h + k\sqrt{-D} = 0,$$

$$x^3 + (f - g\sqrt{-D})x + h - k\sqrt{-D} = 0,$$

dont le produit doit donner l'équation proposée; de sorte qu'il faudra que l'une de ces équations renferme deux des racines de la proposée, et que l'autre en renferme les deux autres. Ainsi l'on aura, par la nature des équations,

$$-f - g\sqrt{-D} = x' + x'', \quad h + k\sqrt{-D} = x'x'',$$

$$-f + g\sqrt{-D} = x''' + x^{iv}, \quad h - k\sqrt{-D} = x'''x^{iv};$$

donc

$$-2g\sqrt{-D} = x' + x'' - x''' - x^{iv},$$

$$2k\sqrt{-D} = x'x'' - x'''x^{iv}.$$

Si l'on fait d'abord $g = -1$, et qu'on substitue la valeur de $\sqrt{-D}$ tirée de la première équation dans la seconde, on aura

$$k = \frac{x'x'' - x'''x^{iv}}{x' + x'' - x''' - x^{iv}};$$

et de là on peut conclure que l'équation en k ne sera que du troisième

degré; car, quelque permutation qu'on fasse entre les quatre racines x', x'', x''', x^{iv} , on n'aura jamais que ces trois valeurs différentes de k ,

$$\frac{x'x'' - x'''x^{iv}}{x' + x'' - x''' - x^{iv}},$$

$$\frac{x'x''' - x''x^{iv}}{x' + x''' - x'' - x^{iv}},$$

$$\frac{x'x^{iv} - x''x'''}{x' + x^{iv} - x'' - x'''}.$$

d'après lesquelles valeurs on pourrait, si l'on voulait, trouver directement l'équation même en k .

Si l'on fait $D = -1$, on aura

$$g = \frac{x^{iv} + x'' - x' - x'''}{2},$$

en sorte que la quantité g sera la même que la quantité z du n° 29, et qu'on y pourra appliquer les conséquences trouvées au n° 32. Si, dans cette hypothèse de $D = -1$, on cherchait k au lieu de g , on aurait

$$k = \frac{x'x'' - x'''x^{iv}}{2},$$

et l'équation en k serait aussi du sixième degré avec tous ses exposants pairs, ses racines étant

$$\frac{x'x'' - x'''x^{iv}}{2}, \quad \frac{x'x''' - x''x^{iv}}{2}, \quad \frac{x'x^{iv} - x''x'''}{2},$$

$$\frac{x''x''' - x'x^{iv}}{2}, \quad \frac{x''x^{iv} - x'x'''}{2}, \quad \frac{x'''x^{iv} - x'x''}{2}.$$

Au reste, cette équation en k pourrait se dériver aisément de l'équation en u du n° 30; car puisque

$$k = \frac{x'x'' - x'''x^{iv}}{2} \quad \text{et} \quad u = x'x'' + x'''x^{iv}$$

(il faut se souvenir que x', x'', x''', x^{iv} désignent ici les mêmes quantités

que a, b, c, d dans le numéro cité, c'est-à-dire les racines de la proposée), on aura

$$u^2 - 4k^2 = 4x'x''x'''x^{iv} = 4q;$$

donc

$$u = 2\sqrt{q + k^2}.$$

Ainsi, si dans l'équation en u on substitue cette valeur, et qu'on fasse ensuite disparaître l'irrationalité, on aura une équation en k du sixième degré, dont tous les exposants seront multiples de 2.

50. Nous terminerons ici notre analyse des méthodes qui concernent la résolution des équations du quatrième degré. Non-seulement nous avons rapproché ces méthodes les unes des autres, et montré leur liaison et leur dépendance mutuelle; nous avons encore, ce qui était le point principal, donné la raison *à priori* pourquoi elles conduisent, les unes à des *réduites* du troisième degré, les autres à des *réduites* du sixième, mais qui peuvent s'abaisser au troisième; et l'on a dû voir que cela vient en général de ce que les racines de ces *réduites* sont des fonctions des quantités x', x'', x''', x^{iv} , telles, qu'en faisant toutes les permutations possibles entre ces quatre quantités, elles ne peuvent recevoir que trois valeurs différentes comme la fonction $x'x'' + x''x'''$, ou six valeurs, mais deux à deux égales et de signes contraires, comme la fonction $x' + x'' - x''' - x^{iv}$, ou bien six valeurs telles, qu'en les partageant en trois couples et prenant la somme ou le produit des valeurs de chaque couple, ces trois sommes ou ces trois produits soient toujours les mêmes, quelque permutation qu'on fasse entre les quantités x', x'', x''', x^{iv} , comme la fonction trouvée au n° 42. C'est uniquement de l'existence de telles fonctions que dépend la résolution générale des équations du quatrième degré (*).

(*) La longueur déjà trop grande de ce Mémoire nous oblige d'en réserver la suite pour le volume de 1771, auquel il appartient naturellement. On y trouvera une Analyse générale des méthodes de MM. Tschirnaus, Euler et Bezout, faite par des principes analogues à ceux que nous avons suivis jusqu'ici, et d'après laquelle on sera en état de connaître *à priori* les résultats qu'on doit attendre de l'application de ces méthodes aux équations qui passent le quatrième degré. On y trouvera aussi des remarques générales sur la résolution et la réduction des équations, lesquelles serviront à jeter un nouveau jour sur cette partie de l'Algèbre.

SECTION TROISIÈME.

DE LA RÉSOLUTION DES ÉQUATIONS DU CINQUIÈME DEGRÉ ET DES DEGRÉS ULTÉRIEURS.

Le Problème de la résolution des équations des degrés supérieurs au quatrième est un de ceux dont on n'a pas encore pu venir à bout, quoique d'ailleurs rien n'en démontre l'impossibilité. Je ne connais jusqu'à présent que deux méthodes qui paraissent donner quelque espérance de succès. Ce sont, l'une celle de M. Tschirnaus, publiée dans les *Actes de Leipzig* de 1683, et l'autre celle que MM. Euler et Bezout ont proposée presque en même temps, le premier dans les *Nouveaux Commentaires de Pétersbourg*, tome IX, et le second dans les *Mémoires de l'Académie des Sciences de Paris* pour l'année 1765. Ces méthodes ont l'avantage de donner la résolution des équations du troisième et du quatrième degré d'une manière générale et uniforme, comme on l'a vu dans les Sections précédentes, avantage qui leur est particulier, et qui peut par conséquent être un préjugé pour leur succès dans les degrés plus élevés; mais les calculs qu'elles demandent dans les équations du cinquième degré et des degrés ultérieurs sont si longs et si compliqués, que le plus intrépide calculateur peut en être rebuté. En effet, pour appliquer, par exemple, la méthode de M. Tschirnaus au cinquième degré, il faudra résoudre quatre équations qui renferment quatre inconnues, et dont la première est du premier degré, la seconde du second, et ainsi de suite; de sorte que l'équation finale résultante de l'élimination de trois de ces inconnues doit monter, en général, au degré dont l'exposant sera 1.2.3.4, c'est-à-dire au vingt-quatrième degré. Or, indépendamment du travail immense qui sera nécessaire pour parvenir à cette équation, il est clair que quand on l'aura trouvée on n'en sera guère plus avancé, à moins qu'on ne puisse la réduire à un degré moindre que le cinquième, réduction qui, si elle est possible, ne pourra être que le fruit d'un nouveau travail plus considérable que le premier.

Suivant la méthode de M. Euler, on parviendra aussi nécessairement à



une réduite du vingt-quatrième degré; car quoique cette méthode paraisse promettre une réduite du quatrième degré seulement, par la raison qu'elle ne donne pour le troisième degré qu'une réduite du second, et pour le quatrième degré qu'une réduite du troisième; cependant M. Bezout remarque avec raison que c'est une simplification accidentelle qui, dans le quatrième degré, rabaisse la réduite de M. Euler au troisième degré, laquelle doit être, en général, du degré 2.3. c'est-à-dire du sixième, et que cette simplification n'a lieu que parce que l'exposant 4 est un nombre composé. Nous en avons donné la raison *à priori* dans la Section précédente, et nous y avons aussi fait voir que M. Euler serait nécessairement tombé dans une réduite du sixième degré s'il avait cherché à déterminer par l'élimination une des deux autres inconnues qui entrent dans ses formules. Ainsi l'on n'a d'avance aucun fondement d'attendre, pour le cinquième degré, une réduite d'un degré moindre que le vingt-quatrième, par la méthode de M. Euler; et si cette équation est susceptible de quelque réduction, ce ne sera qu'à l'aide d'un grand nombre de tentatives et de calculs très-laborieux qu'on pourra s'en assurer.

Ces inconvénients doivent avoir lieu de même dans la méthode de M. Bezout, qui ne diffère point de celle de M. Euler, si ce n'est qu'elle donne des réduites plus élevées en apparence, les exposants y étant tous des multiples de l'exposant du degré de l'équation proposée. Ainsi, dans le cinquième degré, on a, d'après la méthode de M. Bezout, une réduite du cent vingtième degré avec des exposants multiples de 5; de sorte qu'elle équivaut à une équation du vingt-quatrième degré.

Ce savant Auteur pense à la vérité que cette réduite du cent vingtième degré, regardée comme une équation du vingt-quatrième degré, ne doit renfermer que les difficultés des degrés inférieurs au cinquième, et ses raisons sont : 1^o que l'expression des racines des équations du cinquième degré ne peut renfermer d'autres radicaux que ceux de ce degré et des degrés inférieurs; 2^o que par conséquent les racines de la réduite de ce degré ne doivent renfermer que les mêmes espèces de radicaux, c'est-à-dire des radicaux cinquièmes, quatrièmes, etc.; 3^o que comme les racines de la réduite du cent vingtième degré doivent être les racines cin-

quièmes de celles d'une équation du vingt-quatrième degré, les radicaux cinquièmes seront mis en évidence par là, en sorte que les racines de cette équation du vingt-quatrième degré ne pourront plus renfermer que des radicaux inférieurs, et qu'ainsi sa résolution ne devra dépendre que des degrés inférieurs au cinquième. Mais cette conclusion, si j'ose le dire, me paraît un peu forcée, car j'avoue que je ne vois pas bien clairement ce qui pourrait empêcher que l'expression des racines de l'équation du vingt-quatrième degré dont il s'agit ne contint encore des radicaux cinquièmes; du moins il n'est pas démontré que cela ne puisse absolument avoir lieu; ainsi il pourrait bien arriver que cette équation du vingt-quatrième degré renfermât encore toutes les difficultés de l'équation proposée du cinquième degré; auquel cas, après avoir trouvé cette équation par des calculs très-pénibles, on n'en serait plus éloigné de la résolution de l'équation proposée.

Il résulte de ces réflexions qu'il est très-douteux que les méthodes dont nous venons de parler puissent donner la résolution complète des équations du cinquième degré, et à plus forte raison celle des degrés supérieurs; et cette incertitude, jointe à la longueur des calculs que ces méthodes exigent, doit rebuter d'avance tous ceux qui pourraient être tentés d'en faire usage pour résoudre un des Problèmes les plus célèbres et les plus importants de l'Algèbre. Aussi voyons-nous que les Auteurs mêmes de ces méthodes se sont contentés d'en faire l'application au troisième et au quatrième degré, et que personne n'a encore entrepris de pousser leur travail plus loin.

Il serait donc fort à souhaiter que l'on pût juger *à priori* du succès que l'on peut se promettre dans l'application de ces méthodes aux degrés supérieurs au quatrième; nous allons tâcher d'en donner les moyens par une analyse semblable à celle dont nous nous sommes servis jusqu'ici à l'égard des méthodes connues pour la résolution des équations du troisième et du quatrième degré.

51. Considérons en général l'équation du $\mu^{\text{ième}}$ degré

$$(a) \quad x^\mu + mx^{\mu-1} + nx^{\mu-2} + px^{\mu-3} + \dots = 0,$$

Suivant la méthode de M. Tschirnaus on prendra une équation subsidiaire, telle que

$$(b) \quad x^\mu + fx^{\mu-1} + gx^{\mu-2} + \dots + y = 0,$$

qui contient ρ indéterminées $f, g, \dots$ avec une nouvelle inconnue y ; on éliminera par le moyen de ces deux équations l'inconnue x , et l'on aura une transformée en y qui sera du même degré μ que la proposée, et qui aura cette forme

$$(c) \quad y^\mu + Ay^{\mu-1} + By^{\mu-2} + Cy^{\mu-3} + \dots = 0,$$

où les coefficients $A, B, C, \dots$ seront des fonctions rationnelles et entières des coefficients indéterminés $f, g, \dots$, et où l'on aura, en particulier, A égal à une fonction de la première dimension, B égal à une fonction de la seconde dimension, et ainsi de suite (14).

Or, ayant ρ indéterminées, on pourra par leur moyen faire évanouir, dans la transformée en y , ρ termes à volonté, ou bien établir entre ces termes telles relations qu'on voudra, dépendantes de ρ équations, et par là rendre l'équation en y résoluble, ou au moins réductible à une équation de degré inférieur. La résolution de cette équation en y donnera sur-le-champ celle de l'équation proposée en x , car nous avons démontré (11) que l'équation en y renferme les conditions nécessaires pour que les deux équations d'où l'on a éliminé x aient une racine commune; de sorte que la valeur de x ne pourra être que la racine commune aux deux équations (a) et (b), qu'on trouvera en cherchant leur plus grand commun diviseur et l'égalant à zéro.

On fera pour cela l'opération ordinaire, qu'on continuera jusqu'à ce qu'on parvienne à un reste où x ne soit plus que linéaire: ce reste sera le diviseur cherché; ou bien, ce qui revient au même, on éliminera successivement des deux équations précédentes les puissances de x , jusqu'à ce qu'on arrive à une équation qui ne renferme que la première puis-

sance de x , et il est aisé de prouver que cette équation sera de la forme

$$F + Gy + Hy^2 + \dots + Ky^\lambda + (L + My + Ny^2 + \dots + Ry^\lambda)x = 0;$$

d'où l'on aura

$$(d) \quad x = -\frac{F + Gy + Hy^2 + \dots + Ky^\lambda}{L + My + Ny^2 + \dots + Ry^\lambda},$$

λ étant égal à $\frac{\mu}{2}$ si μ est pair, et égal à $\frac{\mu-1}{2}$ si μ est impair.

De cette manière on aura donc x exprimé par une fonction rationnelle de y , de sorte que si l'on connaît toutes les μ valeurs de y , on aura par leur substitution successive les μ valeurs correspondantes de x qui seront les racines de la proposée.

52. Cette méthode est, comme on voit, très-simple et très-générale; mais la difficulté est de pouvoir déterminer les indéterminées $f, g, h, \dots$, en sorte que la transformée en y soit résoluble.

La supposition la plus naturelle et en même temps la plus générale qu'on puisse faire pour cet objet, c'est d'égaliser à zéro les coefficients $A, B, \dots$ de tous les termes intermédiaires; en sorte que l'équation en y se réduise à cette forme

$$y^\mu + V = 0,$$

dont on peut toujours avoir immédiatement une ou deux racines suivant que μ est impair, ou pair, et dont les autres racines ne dépendent plus que d'une équation du degré $\frac{\mu-1}{2}$ ou $\frac{\mu-2}{2}$ (21), outre qu'on peut aussi les déterminer toutes directement par la division de la circonférence du cercle (23).

Il faudra donc prendre dans ce cas $\rho = \mu - 1$ pour avoir autant d'indéterminées que d'équations à remplir, et l'on tombera, en général, dans une équation finale du degré $1.2.3 \dots (\mu-1)$, comme on l'a prouvé dans le n° 14.

Si l'exposant μ est un nombre composé, en sorte que l'on ait $\mu = \nu\pi$, il est clair qu'on pourra, en faisant $y^\pi = z$ et faisant disparaître tous les termes de l'équation en y dont l'exposant ne sera pas divisible par π , réduire cette équation en une équation en z du degré inférieur ν . On aura

donc, dans ce cas, $\nu(\varpi-1)$ termes à faire disparaître; par conséquent il faudra prendre $\rho = \nu(\varpi-1)$ pour avoir autant d'indéterminées, et de ce qu'on a démontré dans le n° 14 il est facile de conclure que l'équation finale qu'on aura dans ce cas sera, en général, du degré marqué par le nombre

$$1.2.3...(\varpi-1)(\varpi+1)(\varpi+2)...(2\varpi-1)(2\varpi+1)...(3\varpi-1)...(\nu\varpi-1),$$

c'est-à-dire du degré

$$\frac{1.2.3.4...(\mu-1)}{\varpi.2\varpi.3\varpi...(\nu-1)\varpi},$$

ou bien de celui-ci

$$\frac{\nu(\nu+1)(\nu+2)...(\mu-1)}{\varpi^{\nu-1}}.$$

Tels seront donc les degrés auxquels pourront monter les réduites qu'il faudra résoudre lorsqu'on voudra faire usage de la méthode de M. Tschirnaus; mais il peut se faire que ces réduites soient telles qu'elles puissent s'abaisser à des degrés moindres: c'est ce qu'il serait comme impossible de reconnaître *à posteriori*, c'est-à-dire par la forme même de ces réduites, mais on pourra s'en assurer *à priori* par la considération de leurs racines, regardées comme des fonctions de celles de l'équation proposée, et de l'équation transformée en y , ainsi qu'on va le voir.

53. Désignons, en général, par $x', x'', x''', \dots$ les μ racines de l'équation proposée

$$x^{\mu} + m x^{\mu-1} + n x^{\mu-2} + \dots = 0,$$

et par $y', y'', y''', \dots$ les μ racines de la transformée

$$y^{\mu} + A y^{\mu-1} + B y^{\mu-2} + \dots + V = 0;$$

substituant successivement ces racines dans l'équation subsidiaire

$$x^{\nu} + f x^{\nu-1} + g x^{\nu-2} + h x^{\nu-3} + \dots + l + y = 0,$$

on aura μ équations particulières par lesquelles on pourra déterminer les coefficients indéterminés $f, g, h, \dots$; et comme chacune des racines $y', y'', y''', \dots$ peut répondre également à chacune des racines $x', x'', x''', \dots$,

il s'ensuit que les inconnues $f, g, h, \dots$ seront susceptibles de différentes valeurs, qu'on trouvera toutes en faisant toutes les combinaisons possibles des racines $x', x'', x''', \dots$ avec les racines $y', y'', y''', \dots$. C'est par le nombre et la forme de ces différentes valeurs d'une même inconnue qu'on pourra juger du degré et de la nature de l'équation par laquelle elle doit être déterminée.

54. Supposons d'abord que tous les termes intermédiaires de la transformée en y doivent disparaître, en sorte qu'elle se réduise à la forme

$$y^{\mu} + V = 0;$$

pour cela il faudra faire dans l'équation subsidiaire $\rho = \mu - 1$ pour avoir $\mu - 1$ indéterminées (52), et comme l'équation $y^{\mu} + V = 0$ donne [en supposant pour plus de simplicité

$$u = \sqrt[\mu]{-V}$$

et désignant par $1, \alpha, \alpha^2, \dots, \alpha^{\mu-1}$ les racines de l'équation $y^{\mu} - 1 = 0$ (24)], les racines $u, \alpha u, \alpha^2 u, \dots, \alpha^{\mu-1} u$, on aura, en prenant ces racines pour $y', y'', y''', \dots$ et les substituant, ainsi que les racines $x', x'', x''', \dots$, dans l'équation subsidiaire, on aura, dis-je, ces μ équations

$$(e) \quad \begin{cases} x'^{\mu-1} + f x'^{\mu-2} + g x'^{\mu-3} + \dots + l + u = 0, \\ x''^{\mu-1} + f x''^{\mu-2} + g x''^{\mu-3} + \dots + l + \alpha u = 0, \\ x'''^{\mu-1} + f x'''^{\mu-2} + g x'''^{\mu-3} + \dots + l + \alpha^2 u = 0, \\ \dots \dots \dots \end{cases}$$

par lesquelles on pourra déterminer tant la quantité u que les $\mu - 1$ quantités $f, g, \dots, l$.

Comme ces inconnues ne sont qu'au premier degré dans les équations précédentes, il est clair que le système de toutes ces équations ne donnera qu'une seule valeur déterminée pour chacune de ces inconnues. Or, supposons que l'on ait trouvé, par la méthode ordinaire d'élimination, la valeur de l'inconnue f (on fera les mêmes raisonnements pour chacune des autres indéterminées $g, h, \dots, l$), il est visible que cette valeur sera exprimée par une fonction des μ racines $x', x'', x''', \dots$ et de la racine α . Donc, si l'on y fait toutes les permutations possibles entre les μ racines x' ,

$x'', x''', \dots$, on aura toutes les valeurs particulières de f qui devront être les racines de l'équation en f .

Comme le nombre des permutations qui peuvent avoir lieu entre μ choses est exprimé en général par $1.2.3 \dots \mu$, il s'ensuit qu'on aura, généralement parlant, $1.2.3 \dots \mu$ valeurs particulières de f ; mais, si parmi ces valeurs il s'en trouve d'égales entre elles, il est clair qu'on pourra les réduire à un plus petit nombre en faisant abstraction des valeurs égales, et nous allons faire voir qu'il n'y aura en effet que $1.2.3 \dots (\mu-1)$ valeurs différentes de f .

55. Pour cela il n'est pas nécessaire de chercher l'expression de f par le moyen des équations (e); il suffit d'examiner les variations dont le système de ces équations est susceptible par les permutations des racines $x', x'', x''', \dots$ entre elles. Pour connaître ces variations, on commencera par supposer que la racine x' demeure à sa place, c'est-à-dire que la première équation reste la même, et l'on échangera successivement entre elles, dans les autres équations, les $\mu-1$ racines $x'', x''', x^{(4)}, \dots$, ce qui donnera $1.2.3 \dots (\mu-1)$ variations; ensuite on fera prendre à x' la place de x'' et *vice versa*, ou, ce qui revient au même, on mettra dans la première équation xu à la place de u , et dans la seconde u à la place de xu , et l'on fera ensuite les mêmes échanges entre les $\mu-1$ racines $x'', x''', x^{(4)}, \dots$, ce qui donnera $1.2.3 \dots (\mu-1)$ nouvelles variations; on mettra encore x' à la place de x'' , et *vice versa*, ou bien on substituera x^2u à la place de u dans la première équation, et u à la place de x^2u dans la troisième, et l'on fera ensuite les mêmes échanges entre les racines $x'', x''', \dots$, ce qui donnera aussi $1.2.3 \dots (\mu-1)$ variations, et ainsi de suite. Par ce moyen on aura μ fois $1.2.3 \dots (\mu-1)$ variations, ce qui fait le nombre total $1.2.3 \dots \mu$ de toutes les variations possibles du système des équations (e).

Maintenant je remarque que dès qu'on aura trouvé les $1.2.3 \dots (\mu-1)$ variations qui ont lieu tant que x' demeure à sa place, on pourra en déduire sur-le-champ toutes les autres en ne faisant que substituer successivement dans toutes les équations (e), à la place de u , les quantités

$xu, x^2u, x^3u, \dots, x^{\mu-1}u$; c'est de quoi il est facile de se convaincre avec un peu d'attention en observant que

$$x^0 = 1, \quad x^{0+1} = x, \quad x^{0+2} = x^2, \dots$$

Or il est visible que ces substitutions de $xu, x^2u, \dots$ à la place de u ne peuvent produire aucun changement dans la valeur de f ; car, dès qu'on élimine u , il est indifférent quelle valeur on donne à cette quantité, et les résultats de l'élimination sont nécessairement indépendants de la valeur de u .

Donc il n'y aura proprement que les $1.2.3 \dots (\mu-1)$ variations, qui résultent des permutations entre les $\mu-1$ racines $x'', x''', \dots$, qui pourront donner des valeurs différentes pour f ; de sorte que l'équation en f ne devra être que du degré $1.2.3 \dots (\mu-1)$, ce qui s'accorde avec ce que l'on a dit plus haut (52).

Mais voyons encore si cette équation ne sera pas susceptible de quelque réduction. Pour cela il faut distinguer le cas où l'exposant μ de la proposée est un nombre premier, et celui où cet exposant est un nombre composé.

56. Supposons que μ soit un nombre quelconque premier, et faisant abstraction, dans le système des équations (e), de la première équation, à cause qu'on peut regarder la quantité x' comme fixe, voyons quelles sont les variations dont ce système est susceptible en vertu des permutations entre les autres racines $x'', x''', \dots$.

Pour cela on suivra une méthode semblable à celle du numéro précédent. On regardera d'abord la quantité x'' comme fixe et on cherchera les variations résultantes des $1.2.3 \dots (\mu-2)$ permutations entre les $\mu-2$ autres racines $x''', x^{(4)}, \dots$; on mettra ensuite x'' à la place de x''' et réciproquement, ce qui revient au même que de mettre x^2u à la place de xu dans la seconde équation, et xu à la place de x^2u dans la troisième, et l'on cherchera de nouveau les $1.2.3 \dots (\mu-2)$ variations provenant des permutations des autres racines $x''', x^{(4)}, \dots$; on mettra x'' à la place de $x^{(4)}$ et *vice versa*, ou, ce qui revient au même, on substituera x^3u à la place

de zu dans la seconde équation, et zu à la place de z^2u dans la quatrième, et l'on cherchera comme auparavant les $1.2.3...(\mu-2)$ variations provenant des permutations entre les $\mu-2$ racines $x'', x''', \dots$ et ainsi de suite. Ce procédé donnera $\mu-1$ fois $1.2.3...(\mu-2)$ variations, ce qui fera le nombre total des $1.2.3...(\mu-1)$ variations cherchées.

Or je dis que dès qu'on aura trouvé les $1.2.3...(\mu-2)$ variations, qui ont lieu tant que x'' demeure à sa place, et qu'on change celles des autres racines $x'', x''', \dots$, on pourra en déduire immédiatement toutes les variations résultantes des permutations entre les $\mu-1$ racines $x'', x''', x''', \dots$ en substituant successivement $z^2, z^3, \dots, z^{\mu-1}$ à la place de z dans toutes les équations (e); car par ce moyen le terme zu de la seconde équation se changera successivement en $z^2u, z^3u, \dots$, et les termes $z^2u, z^3u, \dots$ des autres équations ne feront que s'échanger entre eux (à cause que μ est un nombre premier, comme on peut s'en convaincre par ce qui a été démontré dans le n° 24), échanges qui équivalent évidemment à ceux des racines $x'', x''', \dots$ entre elles.

D'où je conclus que quand on aura trouvé par le moyen des équations (e) l'expression de f en $x', x'', x''', \dots$ et z , et qu'on voudra connaître les $1.2.3...(\mu-1)$ valeurs de f qui résultent des permutations des racines $x'', x''', x''', \dots$ entre elles, et qui doivent être les racines de l'équation en f du degré $1.2.3...(\mu-1)$ (numéro précédent), il suffira de chercher les $1.2.3...(\mu-2)$ valeurs de f provenant des seules permutations entre les racines $x'', x''', \dots$ et d'y échanger ensuite successivement z en $z^2, z^3, z^4, \dots, z^{\mu-1}$; ou bien, ce qui revient au même, on échangera d'abord dans l'expression de f la racine z en $z^2, z^3, \dots, z^{\mu-1}$, et ensuite on fera dans chacune de ces $\mu-1$ valeurs de f les $1.2.3...(\mu-2)$ permutations qui ont lieu entre les $\mu-2$ racines $x'', x''', \dots$; on aura par là les $1.2.3...(\mu-1)$ racines de l'équation en f .

57. Imaginons maintenant que les $\mu-1$ valeurs de f qui viennent de la substitution successive de $z^2, z^3, \dots, z^{\mu-1}$ à la place de z soient les racines de l'équation du $(\mu-1)^{\text{ième}}$ degré

$$(f) \quad f^{\mu-1} + Ff^{\mu-2} + Gf^{\mu-3} + \dots = 0,$$

et comme $1, z, z^2, z^3, \dots$ sont les racines de l'équation $y^{\mu} - 1 = 0$ (hypothèse), il est clair que $z, z^2, z^3, \dots$ seront les $\mu-1$ racines de l'équation $\frac{y^{\mu}-1}{y-1} = 0$, savoir

$$(g) \quad y^{\mu-1} + y^{\mu-2} + y^{\mu-3} + \dots + 1 = 0.$$

Done, si dans l'expression de f tirée des équations (e) on met, en général, y à la place de z , et qu'ensuite on élimine y par le moyen de l'équation (g), on aura nécessairement l'équation (f); d'où l'on voit que cette équation ne contiendra plus z , de sorte que les coefficients $F, G, \dots$ ne seront que des fonctions de $x', x'', x''', \dots$.

Or, ayant trouvé l'équation (f), il n'y aura plus qu'à faire dans les expressions des coefficients $F, G, \dots$ toutes les permutations possibles entre les $\mu-2$ racines $x'', x''', \dots$, et l'on aura par là $1.2.3...(\mu-2)$ équations en f dont chacune sera du $(\mu-1)^{\text{ième}}$ degré, et qui renfermeront par conséquent les $1.2.3...(\mu-1)$ racines de l'équation générale en f .

De là il est facile de conclure que chacun des coefficients $F, G, \dots$ ne pourra dépendre que d'une équation du degré $1.2.3...(\mu-2)$. En effet, comme ces coefficients sont des fonctions des racines $x', x'', x''', \dots$, il est clair que chacun d'eux, par exemple F , devra être déterminé par une équation qui ait autant de racines que ce coefficient aura de différentes valeurs en faisant toutes les permutations possibles entre les racines $x', x'', x''', \dots$; mais on a démontré plus haut (55) que les permutations de la racine x' en chacune des autres ne changent point les valeurs de f ; par conséquent elles ne changeront pas non plus celles de $F, G, \dots$ qui sont des fonctions des racines de (f); de plus on a vu (56) qu'on peut suppléer aux permutations de la racine x'' en échangeant la racine z en $z^2, z^3, \dots$, de sorte que comme les valeurs de $F, G, \dots$ sont indépendantes de z , elles ne recevront aucun changement par les permutations de x'' . Ainsi il n'y aura que les permutations des $\mu-2$ racines $x'', x''', \dots$ entre elles, qui donneront des valeurs différentes de F , ainsi que de $G, H, \dots$; d'où il s'ensuit que le nombre de ces valeurs différentes sera simplement $1.2.3...(\mu-2)$; par conséquent chacun des coefficients

F, G, H, ... sera donné par une équation d'un degré marqué par ce même nombre.

58. Donc la réduite en f , qu'on trouvera par la méthode de M. Tschirnaus, et que nous avons vu devoir être, en général, du degré $1.2.3...(\mu-1)$, sera toujours décomposable, lorsque μ est un nombre premier, en $1.2.3...(\mu-2)$ équations du degré $\mu-1$, telles que l'équation (f) ci-dessus, et cela par le moyen d'une équation du degré $1.2.3...(\mu-2)$; car, quoique les coefficients F, G, ... dépendent chacun d'une équation de ce dernier degré, cependant il suffira d'avoir l'équation en F, ou en G, etc., parce que les autres coefficients pourront toujours s'exprimer par des fonctions rationnelles de celui-là.

En effet, si l'on regarde l'équation (f) du degré $\mu-1$ comme un diviseur de la réduite en f du degré $1.2.3...(\mu-1)$, on trouvera pour cela $\mu-1$ conditions par lesquelles on pourra déterminer, en général, les $\mu-2$ coefficients G, H, ... en F, sans aucune extraction de racines, et ces valeurs étant ensuite substituées dans l'une des équations de condition, on aura l'équation même en F, laquelle ne devra pas passer le degré $1.2.3...(\mu-2)$. Je dis qu'on peut déterminer, en général, les valeurs de G, H, ... en F sans extraction de racines; cela est vrai tant qu'on ne donne à F aucune valeur particulière; mais lorsqu'on voudra substituer à la place de F les racines de l'équation en F pour avoir les valeurs correspondantes de G, H, ..., s'il arrive que la racine substituée soit double, ou triple, ou, etc., les expressions rationnelles de G, H, ... se trouveront en défaut, et ces quantités dépendront alors de la résolution d'une équation du second, ou du troisième, ou, etc., degré, comme nous le démontrerons plus bas (102).

On pourrait au reste trouver directement l'équation en F par le moyen de ses racines regardées comme des fonctions de $x', x'', x''', \dots$; on a vu différents exemples de cette méthode dans les Sections précédentes. Et, supposant cette équation en F connue, on pourra, par son moyen, déterminer directement les valeurs de G, H, ... par la méthode qu'on trouvera dans la Section quatrième (100).

Maintenant il est visible que l'équation en F sera toujours d'un degré plus haut que la proposée, excepté le seul cas de $\mu=3$; car, faisant $\mu=3$, on a

$$1.2...(\mu-2)=1,$$

faisant $\mu=5$, on a

$$1.2...(\mu-2)=1.2.3=6,$$

faisant $\mu=7$, on a

$$1.2...(\mu-2)=1.2.3.4.5=120,$$

et ainsi de suite; donc, à moins que cette équation ne puisse encore s'abaisser à un degré moindre que μ , la solution de M. Tschirnaus ne sera d'aucun usage; or c'est ce qui me paraît presque impossible, en général. Il est vrai que, quoique le degré $1.2...(\mu-2)$ de l'équation dont nous parlons soit plus élevé que le degré μ de la proposée, cette équation ne renfermera pas cependant des difficultés supérieures à celles des équations du degré μ ; car, puisque ses $1.2.3...(\mu-2)$ racines sont des fonctions connues des μ racines $x', x'', x''', \dots$, il est clair qu'elles ne seront pas indépendantes les unes des autres, mais qu'il y aura entre elles des relations exprimées par un nombre d'équations égal à la différence des exposants $1.2.3...(\mu-2)$ et μ ; de sorte que, supposant que l'on connaisse un nombre μ de ces racines, on connaîtra aussi par leur moyen toutes les autres.

D'où il s'ensuit que l'équation en F ne pourra renfermer dans le fond que les difficultés du degré μ ; mais, par la même raison, il paraît aussi qu'elle devra toujours renfermer toutes les difficultés de ce degré, de sorte qu'on se trouvera ramené aux mêmes difficultés auxquelles la résolution générale de l'équation proposée est sujette.

59. Supposons présentement que l'exposant μ de la proposée soit un nombre composé: dans ce cas il faudra apporter quelque modification au raisonnement du n° 56, car, si dans les termes de la progression géométrique $\alpha, \alpha^2, \alpha^3, \dots, \alpha^{\mu-1}$ on substituait indifféremment à la place de α les puissances $\alpha^2, \alpha^3, \dots, \alpha^{\mu-1}$, on ne retrouverait pas toujours les mêmes termes comme lorsque μ est un nombre premier; nous en avons donné



la raison dans le n° 24, et nous y avons démontré aussi qu'il n'y a que les puissances de α dont l'exposant est un nombre premier à μ qui, étant substituées à la place de α dans les termes $\alpha, \alpha^2, \alpha^3, \dots, \alpha^{\mu-1}$, puissent redonner les mêmes termes, de sorte qu'il faudra restreindre à ces seules puissances de α les résultats du n° 56.

Donc, si l'on désigne, en général, par $\nu, \varpi, \rho, \dots$ tous les nombres moindres que μ et premiers à μ , dont nous supposons que le nombre soit $\lambda - 1$, on pourra, par les substitutions de $\alpha^\nu, \alpha^\varpi, \alpha^\rho, \dots$ à la place de α dans l'expression de f , suppléer aux permutations de la racine α dans les racines $\alpha^{(\nu+1)}, \alpha^{(\varpi+1)}, \alpha^{(\rho+1)}, \dots$; par conséquent, si l'on suppose que les λ valeurs de f qui viennent de la substitution $\alpha^\nu, \alpha^\varpi, \alpha^\rho, \dots$ à la place de α soient les racines de l'équation

$$(h) \quad f^\lambda + Ff^{\lambda-1} + Gf^{\lambda-2} + \dots = 0,$$

cette équation sera un diviseur de la réduite en f , et les coefficients $F, G, \dots$ seront donnés chacun par une équation du degré $\frac{1.2.3 \dots (\mu-1)}{\lambda}$; de sorte que dans ce cas la réduite en f , trouvée par la méthode de M. Tschirnaus, et qui est du degré $1.2.3 \dots (\mu-1)$, sera résoluble en $\frac{1.2.3 \dots (\mu-1)}{\lambda}$ équations, chacune du degré λ , et cela moyennant une équation du degré

$$\frac{1.2.3 \dots (\mu-1)}{\lambda}.$$

Pour trouver l'équation (h) *à priori*, il n'y aura qu'à mettre y à la place de α dans l'expression de f , et ensuite éliminer y par le moyen de l'équation dont les racines seraient $\alpha, \alpha^\nu, \alpha^\varpi, \alpha^\rho, \dots$; or voici comment on pourra avoir cette équation.

60. Considérons, en général, l'équation

$$y^\mu - 1 = 0,$$

dont les racines sont $1, \alpha, \alpha^2, \alpha^3, \dots, \alpha^{\mu-1}$, et supposons que le nombre μ soit résolu dans les facteurs premiers $r, s, t, \dots$, dont chacun soit contenu

une ou plusieurs fois dans le nombre μ , il est facile de voir que les puissances de α , qu'il faudra exclure, pour avoir uniquement les puissances $\alpha, \alpha^\nu, \alpha^\varpi, \alpha^\rho, \dots$ dont les exposants sont premiers à μ , il est facile de voir, dis-je, que ces puissances seront celles dont les exposants seront des multiples des nombres $r, s, t, \dots$; de plus il est clair, par ce qu'on a démontré dans le n° 24, que ces mêmes puissances de α seront les racines des équations

$$y^r - 1 = 0, \quad y^s - 1 = 0, \quad y^t - 1 = 0, \dots;$$

donc, si l'on fait pour plus de simplicité

$$\frac{\mu}{r} = \mu', \quad \frac{\mu}{s} = \mu'', \quad \frac{\mu}{t} = \mu''', \dots,$$

et qu'on divise l'équation $y^\mu - 1 = 0$ successivement par celles-ci

$$y^r - 1 = 0, \quad y^s - 1 = 0, \quad y^t - 1 = 0, \dots,$$

on aura les équations suivantes

$$\begin{aligned} y^{\mu-\mu'} + y^{\mu-2\mu'} + y^{\mu-3\mu'} + \dots + 1 &= 0, \\ y^{\mu-\mu''} + y^{\mu-2\mu''} + y^{\mu-3\mu''} + \dots + 1 &= 0, \\ y^{\mu-\mu'''} + y^{\mu-2\mu'''} + y^{\mu-3\mu'''} + \dots + 1 &= 0, \\ &\dots \end{aligned}$$

dont la première aura pour racines toutes les puissances de α jusqu'à $\alpha^{\mu-1}$, à l'exception de celles dont les exposants seront des multiples de r ; la seconde, toutes les puissances de α , à l'exception de celles dont les exposants seront des multiples de s ; la troisième, etc.; d'où l'on peut conclure que, si l'on cherche le plus grand commun diviseur de toutes ces équations, on aura l'équation cherchée, dont les racines seront les puissances $\alpha, \alpha^\nu, \alpha^\varpi, \alpha^\rho, \dots$, et qui sera par conséquent de la forme

$$(i) \quad y^\lambda + \beta y^{\lambda-1} + \gamma y^{\lambda-2} + \dots + \gamma y^2 + \beta y + 1 = 0.$$

Ainsi, par exemple, si $\mu = 4$, on aura $r = 2, \mu' = 2$, et l'on aura cette

seule équation

$$y^2 + 1 = 0,$$

dont les racines seront α et α^3 .

Si $\mu = 6$, on aura $r = 2$, $s = 3$; donc $\mu' = 3$, $\mu'' = 2$, ce qui donnera ces deux équations

$$y^3 + 1 = 0,$$

$$y^4 + y^2 + 1 = 0,$$

dont le plus grand commun diviseur est

$$y^2 - y + 1 = 0,$$

équation dont les racines seront par conséquent α et α^5 .

Si $\mu = 8$, on aura $r = 2$; donc $\mu' = 4$, et l'on aura cette seule équation

$$y^4 + 1 = 0,$$

dont les racines seront α , α^3 , α^5 , α^7 , et ainsi de suite.

Quant à l'exposant λ , on peut le déterminer *a priori* d'après les facteurs du nombre μ , car on aura toujours

$$\lambda = \frac{\mu}{rst\dots} (r-1)(s-1)(t-1)\dots,$$

comme on peut le démontrer aisément en cherchant combien, parmi les nombres moindres que μ , il y en aura de premiers à μ . (Voyez les *Nouveaux Commentaires de Pétersbourg*, tome VIII.)

61. Ayant donc trouvé ainsi l'équation (i), on s'en servira pour éliminer y de l'expression de f , et il en résultera l'équation (h), dont tous les coefficients F, G, ... seront des fonctions des racines α' , α'' , ..., sans α , telles qu'elles ne seront susceptibles que de $\frac{1.2.3\dots(\mu-1)}{\lambda}$ variations, par toutes les permutations possibles des racines α' , α'' , ... entre elles: de sorte que chacune de ces fonctions sera donnée simplement par une équation du degré

$$\frac{1.2.3\dots(\mu-1)}{\lambda},$$

comme on l'a déjà dit plus haut.

Il se peut au reste que ces équations en F, ou en G, etc., soient encore susceptibles de quelques réductions: c'est ce qui dépendra de la forme des fonctions de α' , α'' , ... par lesquelles les quantités F, G, ... seront exprimées; mais nous n'entrerons pas dans cette recherche, d'autant que dans le cas où l'exposant μ est un nombre composé on peut simplifier la Solution de M. Tschirnaus en ne faisant évanouir que quelques-uns des termes intermédiaires de la transformée (52).

62. Nous allons donc chercher *a priori* les résultats qu'on doit avoir dans ce cas, et nous supposerons, comme dans le numéro cité, que μ étant égal à $\nu\pi$, tous les termes de la transformée en y dont les exposants ne seront pas divisibles par π disparaissent, en sorte que, faisant $y^\pi = z$, l'équation (e) devienne

$$z^\pi + Dz^{\pi-1} + Kz^{\pi-2} + \dots + V = 0,$$

laquelle aura par conséquent ν racines que nous dénoterons par z' , z'' , z''' , ..., $z^{(\nu)}$; et comme l'équation $y^\pi = z$ donne

$$y = \sqrt[\pi]{z},$$

ou bien, en dénotant par α , α^2 , ..., $\alpha^{\pi-1}$ les π racines de $y^\pi - 1 = 0$,

$$y = \sqrt[\pi]{z}, \alpha\sqrt[\pi]{z}, \alpha^2\sqrt[\pi]{z}, \dots, \alpha^{\pi-1}\sqrt[\pi]{z},$$

on aura, en substituant successivement à la place de z les ν racines z' , z'' , z''' , ..., et faisant pour plus de simplicité

$$z' = \sqrt[\pi]{z'}, \quad z'' = \sqrt[\pi]{z''}, \quad z''' = \sqrt[\pi]{z'''}, \dots,$$

on aura, dis-je, ces μ valeurs de y

$$\begin{array}{ccccccc} z', & \alpha z', & \alpha^2 z', & \alpha^3 z', & \dots, & \alpha^{\pi-1} z', \\ z'', & \alpha z'', & \alpha^2 z'', & \alpha^3 z'', & \dots, & \alpha^{\pi-1} z'', \\ z''', & \alpha z''', & \alpha^2 z''', & \alpha^3 z''', & \dots, & \alpha^{\pi-1} z''', \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ z^{(\nu)}, & \alpha z^{(\nu)}, & \alpha^2 z^{(\nu)}, & \alpha^3 z^{(\nu)}, & \dots, & \alpha^{\pi-1} z^{(\nu)}, \end{array}$$

qui seront celles des racines y' , y'' , y''' , ..., $y^{(\mu)}$.

Donc le nombre des valeurs différentes de f ne pourra être plus grand que

$$\frac{1.2.3 \dots \mu}{1.2.3 \dots \nu} \text{ divisé par } \varpi.$$

On tirera des conclusions semblables de la considération des ϖ racines $x^{(\varpi+1)}, x^{(\varpi+2)}, x^{(\varpi+3)}, \dots, x^{(2\varpi)},$ comme aussi des racines $x^{(2\varpi+1)}, x^{(2\varpi+2)}, x^{(2\varpi+3)}, \dots, x^{(3\varpi)},$ et ainsi des autres; et comme les combinaisons de ces racines entre elles sont totalement indépendantes, il s'ensuit qu'il faudra diviser le nombre $\frac{1.2.3 \dots \mu}{1.2.3 \dots \nu}$ autant de fois par ϖ qu'il y a de ces systèmes de ϖ racines chacun, c'est-à-dire ν fois, nombre des quantités $\zeta', \zeta'', \dots, \zeta^{(\nu)}.$

Donc le nombre des valeurs différentes de f ne pourra être que

$$\frac{1.2.3 \dots \mu}{1.2.3 \dots \nu \varpi^{\nu}},$$

par conséquent l'équation en f ne devra monter qu'au degré marqué par ce même nombre.

C'est aussi ce qui s'accorde avec ce que l'on a trouvé à la fin du n° 52: en effet, il est clair que le nombre

$$\frac{1.2.3 \dots \mu}{1.2.3 \dots \nu \varpi^{\nu}}$$

se réduit d'abord à celui-ci

$$\frac{\nu(\nu+1)(\nu+2) \dots \mu}{\nu \varpi^{\nu}},$$

et ensuite, à cause de $\mu = \nu \varpi$, à celui-ci

$$\frac{\nu(\nu+1)(\nu+2) \dots (\mu-1)}{\varpi^{\nu-1}}.$$

64. La réduite en f sera donc, généralement parlant, du degré

$$\frac{\nu(\nu+1)(\nu+2) \dots (\mu-1)}{\varpi^{\nu-1}};$$

mais cette équation pourra toujours s'abaisser à un degré inférieur par des considérations semblables à celles des n°s 57 et 59. En effet, si ϖ est

un nombre premier, il est facile de prouver par des raisonnements analogues à celui du n° 56, que l'on pourra suppléer aux permutations des racines $x', x^{(\varpi+1)}, x^{(2\varpi+1)}, \dots$ en $x'', x^{(\varpi+2)}, x^{(2\varpi+2)}, \dots$ en $x''', x^{(\varpi+3)}, x^{(2\varpi+3)}, \dots$ en, etc., en substituant successivement dans l'expression de f les puissances $\alpha^2, \alpha^3, \dots, \alpha^{\varpi-1}$ à la place de α ; de sorte que si l'on met y au lieu de α dans l'expression de f , et qu'ensuite on élimine y par le moyen de l'équation

$$\frac{y^{\varpi}-1}{y-1}=0,$$

ou bien

$$y^{\varpi-1} + y^{\varpi-2} + y^{\varpi-3} + \dots + 1 = 0,$$

on aura une équation en f telle que

$$f^{\varpi-1} + Ff^{\varpi-2} + Gf^{\varpi-3} + \dots = 0,$$

laquelle sera un diviseur de la réduite en f ; et les coefficients $F, G, \dots$ seront déterminés chacun par une équation du degré

$$\frac{\nu(\nu+1)(\nu+2) \dots (\mu-1)}{(\varpi-1)\varpi^{\nu-1}};$$

ce qui donnera autant de diviseurs de la même réduite, dont chacun sera du degré $\varpi - 1$.

Si ν n'est pas un nombre premier, alors il faudra chercher, comme dans le n° 60, l'équation dont les racines seront les puissances de α qui auront pour exposant des nombres premiers à ν en y comprenant l'unité, et, désignant cette équation par

$$y^{\lambda} + \beta y^{\lambda-1} + \dots + \beta y + 1 = 0,$$

on éliminera, par son moyen, y de l'expression de f ; on aura une équation en f telle que

$$f^{\lambda} + Ff^{\lambda-1} + Gf^{\lambda-2} + \dots = 0,$$

où chaque coefficient $F, G, \dots$ ne dépendra que d'une équation du degré

$$\frac{\nu(\nu+1)(\nu+2) \dots (\mu-1)}{\lambda \varpi^{\nu-1}};$$

de sorte que l'on aura par là autant de valeurs de $F, G, \dots$, et par consé-

quent autant d'équations en f du degré λ , lesquelles seront les diviseurs de la réduite en f .

Soit, par exemple, $\mu = 6$:

1° On pourra faire $\nu = 3$, $\varpi = 2$, et la réduite en f sera du degré $\frac{3 \cdot 4 \cdot 5}{2^2} = 15$; et, à cause de $\varpi - 1 = 1$, elle ne pourra plus s'abaisser par la méthode précédente.

2° On pourra faire $\nu = 2$, $\varpi = 3$, on aura $\frac{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}{3} = 40$ pour le degré de la réduite en f ; et comme $\varpi - 1 = 2$, on pourra résoudre cette réduite en vingt équations du second degré chacune, moyennant une équation du vingtième degré.

65. Revenons maintenant aux formules du n° 51; et il est clair que l'équation proposée (a) pourra être regardée à son tour comme le résultat de l'élimination de y faite par le moyen des équations (c) et (d). Ainsi, si l'on regarde les coefficients A, B, C, ... de l'équation en y comme donnés et les coefficients F, G, ... de l'expression de x en y comme indéterminés, on pourra, par la comparaison des termes de l'équation résultante de l'élimination de y avec ceux de la proposée, déterminer ces derniers coefficients, pourvu que leur nombre ne soit pas moindre que μ ; ce qui ne sera point à craindre tant qu'on prendra $\lambda = \frac{\mu}{2}$ ou $\frac{\mu-1}{2}$; et si l'équation en y est prise telle qu'elle soit résoluble, ce qui peut avoir lieu d'une infinité de manières différentes, on aura la résolution complète de la proposée; mais la difficulté consistera dans la détermination des coefficients indéterminés F, G, ...

On facilitera cependant beaucoup cette détermination ainsi que l'élimination de y , si l'on change l'expression de x , donnée par l'équation (d), en une autre où l'inconnue y ne se trouve qu'au numérateur; c'est ce qui est toujours possible en multipliant le haut et le bas de la fraction

$$\frac{F + G y + H y^2 + \dots + K y^\mu}{L + M y + N y^2 + \dots + R y^\mu}$$

par un polynôme convenable en y , qu'on pourra trouver de la manière suivante.

On supposera

$$z = L + M y + N y^2 + \dots + R y^\mu,$$

et comme y est déterminé par l'équation

$$y^\nu + A y^{\nu-1} + B y^{\nu-2} + \dots = 0,$$

on éliminera y par le moyen de cette équation, ce qui donnera une équation en z du degré μ qu'on pourra représenter ainsi

$$z^\mu + \alpha z^{\mu-1} + \beta z^{\mu-2} + \gamma z^{\mu-3} + \dots + \omega = 0,$$

où les coefficients $\alpha, \beta, \gamma, \dots, \omega$ seront par conséquent des fonctions connues des A, B, C, ... et L, M, N, ...

Ainsi l'on aura

$$z(z^{\mu-1} + \alpha z^{\mu-2} + \beta z^{\mu-3} + \dots) = \omega,$$

d'où l'on voit que la quantité z deviendra égale à ω , et par conséquent indépendante de y , étant multipliée par le polynôme

$$z^{\mu-1} + \alpha z^{\mu-2} + \beta z^{\mu-3} + \dots$$

De sorte que si l'on remet dans ce polynôme, à la place de z , sa valeur en y , on aura le polynôme cherché, dans lequel on pourra, si l'on veut, n'admettre que des puissances de y moindres que y^μ , parce qu'au moyen de l'équation

$$y^\nu + A y^{\nu-1} + \dots = 0$$

on pourra toujours faire rentrer les puissances de y supérieures à y^μ dans la classe des inférieures.

De cette manière on pourra donc ramener l'équation (d) à la forme

$$(k) \quad x = a + b y + c y^2 + \dots + k y^{\mu-1},$$

de sorte qu'on pourra toujours regarder l'équation proposée (a)

$$x^\nu + m x^{\nu-1} + n x^{\nu-2} + \dots = 0,$$

comme la résultante de l'élimination de y , faite par le moyen de l'équation (c)

$$y^{\mu} + Ay^{\mu-1} + By^{\mu-2} + \dots + V = 0,$$

et de l'équation (k). On supposera donc les coefficients $a, b, c, \dots, k$, dont le nombre est μ , indéterminés, et l'équation provenant de l'élimination de y étant comparée terme à terme avec la proposée donnera μ conditions qui serviront à déterminer les quantités $a, b, c, \dots$

Si l'on réduit l'équation en y à deux termes tels que

$$y^{\mu} + V = 0,$$

la méthode précédente reviendra à celle de MM. Euler et Bezout, dont nous avons déjà fait mention plusieurs fois dans le cours de ce Mémoire.

Le détail où nous venons d'entrer sert à rapprocher cette méthode de celle de M. Tschirnaus, et à montrer leur analogie et dépendance mutuelle.

66. Comme tout se réduit à déterminer les inconnues $a, b, c, \dots, k$ dont le nombre est μ , par la comparaison des termes de la proposée avec ceux de la résultante de l'élimination de y , nous remarquerons d'abord à l'égard de cette dernière, qu'elle sera nécessairement exprimée par une fonction rationnelle et entière des quantités $a, b, c, \dots, k$ et x , où ces quantités rempliront partout le même nombre de dimensions μ , comme on peut aisément le conclure de la théorie d'élimination donnée dans le n° 13; d'où il s'ensuit qu'en ordonnant cette équation par rapport à x les coefficients de tous ces termes se trouveront être des fonctions rationnelles, entières et homogènes des quantités $a, b, c, \dots, k$, et dont les dimensions seront 0, 1, 2, 3, ... pour les puissances $x^{\mu}, x^{\mu-1}, x^{\mu-2}, \dots$

Ainsi le premier terme x^{μ} n'aura d'autre coefficient que l'unité, le second terme $x^{\mu-1}$ aura pour coefficient une quantité de la forme

$$\alpha a + \beta b + \gamma c + \dots,$$

α, β, γ étant des coefficients numériques, le troisième terme $x^{\mu-2}$ aura

pour coefficient une quantité de la forme

$$\alpha a^2 + \beta ab + \gamma b^2 + \delta ac + \dots,$$

et ainsi des autres.

Égalant donc le coefficient du second terme à m , celui du troisième terme à n , et ainsi de suite, on aura μ équations entre les μ inconnues $a, b, c, \dots, k$; dont la première sera du premier degré seulement, la seconde, du second degré, la troisième, du troisième, et ainsi des autres; de sorte qu'en éliminant ces inconnues à l'exception d'une seule quelconque, on aura, en général, pour la détermination de celle-ci une équation finale du degré marqué par 1.2.3... μ ; ce qui est contraire au sentiment de M. Euler, mais ce qui s'accorde avec ce que M. Bezout a trouvé par induction.

67. Pour confirmer davantage cette conclusion sur le degré des équations en a , ou b , ou $c, \dots$, et pour voir en même temps dans quel cas ces équations sont susceptibles de simplification, nous allons chercher *a priori* l'expression des quantités $a, b, c, \dots$ en $x', x'', x''', \dots$, racines de la proposée.

Faisons, comme dans le n° 54, $\sqrt[\mu]{-V} = u$, et désignant par 1, $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ les μ racines de l'équation

$$y^{\mu} - 1 = 0,$$

on aura $u, \alpha u, \beta u, \gamma u, \dots$ pour les μ racines de l'équation

$$y^{\mu} + V = 0;$$

done, substituant successivement ces racines dans l'équation (k) du n° 65 à la place de y , et mettant en même temps les racines $x', x'', x''', \dots$ à la place de x , on aura les μ équations suivantes

$$\begin{aligned} x' &= a + bu + cu^2 + du^3 + \dots + ku^{\mu-1}, \\ x'' &= a + \alpha bu + \alpha^2 cu^2 + \alpha^3 du^3 + \dots + \alpha^{\mu-1} ku^{\mu-1}, \\ x''' &= a + \beta bu + \beta^2 cu^2 + \beta^3 du^3 + \dots + \beta^{\mu-1} ku^{\mu-1}, \\ x'''' &= a + \gamma bu + \gamma^2 cu^2 + \gamma^3 du^3 + \dots + \gamma^{\mu-1} ku^{\mu-1}, \\ &\dots \dots \dots \end{aligned}$$

par lesquelles on pourra déterminer les μ racines inconnues $a, b, c, \dots$

Cette détermination n'a aucune difficulté; car puisque $1, \alpha, \beta, \gamma, \dots$ sont les racines de l'équation $y^\mu - 1 = 0$, laquelle manque de tous ses termes intermédiaires, on aura, comme on sait,

$$\begin{aligned} 1 + \alpha + \beta + \gamma + \dots &= 0, \\ 1 + \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \dots &= 0, \\ 1 + \alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 + \dots &= 0, \\ &\dots \end{aligned}$$

c'est-à-dire que la somme de toutes les racines élevées chacune à une même puissance quelconque sera toujours nulle lorsque l'exposant de la puissance ne sera pas divisible par μ ; et à l'égard des puissances dont l'exposant sera multiple de μ , il est visible, par l'équation même $y^\mu - 1 = 0$, qu'on aura $\alpha^\mu = 1, \alpha^{2\mu} = 1, \dots$, et ainsi des autres racines.

Donc, si l'on ajoute ensemble les μ équations du numéro précédent, après les avoir multipliées respectivement par les μ racines correspondantes $1, \alpha, \beta, \dots$ élevées successivement aux puissances $\mu^{1^{\text{ème}}}, (\mu-1)^{\text{ème}}, (\mu-2)^{\text{ème}}, \dots$, jusqu'à la première inclusivement, on aura sur-le-champ

$$\begin{aligned} \mu a &= x' + x'' + x''' + x^{iv} + \dots, \\ \mu ab &= x' + \alpha^{\mu-1} x'' + \beta^{\mu-1} x''' + \gamma^{\mu-1} x^{iv} + \dots, \\ \mu a^2 c &= x' + \alpha^{\mu-2} x'' + \beta^{\mu-2} x''' + \gamma^{\mu-2} x^{iv} + \dots, \\ \mu a^3 d &= x' + \alpha^{\mu-3} x'' + \beta^{\mu-3} x''' + \gamma^{\mu-3} x^{iv} + \dots, \\ &\dots \end{aligned}$$

On voit d'abord que la quantité a doit être donnée par une équation linéaire, puisqu'elle conserve la même valeur, quelque permutation qu'on fasse entre les racines $x', x'', \dots$; en effet, à cause de

$$x' + x'' + x''' + \dots = -m,$$

on aura $a = -\frac{m}{\mu}$.

Quant aux autres quantités $ab, a^2 c, a^3 d, \dots$, chacune d'elles dépendra, en général, d'une équation d'un degré égal au nombre de toutes les permutations possibles entre les μ racines $x', x'', x''', \dots$, nombre qui est, comme on sait, marqué par $1.2.3 \dots \mu$; car à chacune de ces permuta-

tions il répondra une valeur différente des quantités $ab, a^2 c, a^3 d, \dots$; mais ces valeurs peuvent avoir entre elles des relations telles, que l'équation dont elles seront les racines puisse s'abaisser à un degré inférieur; c'est ce que nous allons examiner.

68. Pour cela nous remarquerons d'abord que, comme la quantité u demeure indéterminée, on pourra lui donner telle valeur qu'on voudra; la supposition la plus simple est de faire, avec M. Bezout, $u = 1$, et par conséquent

$$V = -u^\mu = -1;$$

nous adopterons donc cette hypothèse et nous supposerons en même temps

$$h = \frac{a'}{\mu}, \quad h = \frac{a''}{\mu}, \dots, \quad b = \frac{a^{(\mu-1)}}{\mu},$$

ce qui donnera ces formules plus simples

$$\begin{aligned} a' &= x' + \alpha x'' + \beta x''' + \gamma x^{iv} + \dots, \\ a'' &= x' + \alpha^2 x'' + \beta^2 x''' + \gamma^2 x^{iv} + \dots, \\ a''' &= x' + \alpha^3 x'' + \beta^3 x''' + \gamma^3 x^{iv} + \dots, \\ &\dots \dots \dots \\ a^{(\mu-1)} &= x' + \alpha^{\mu-1} x'' + \beta^{\mu-1} x''' + \gamma^{\mu-1} x^{iv} + \dots \end{aligned}$$

Considérons l'expression de la quantité a' , et comme les racines de l'équation $y^\mu - 1 = 0$, que nous avons désignées par $1, \alpha, \beta, \gamma, \dots$ peuvent s'exprimer (24) par $1, \alpha, \alpha^2, \alpha^3, \dots$, on aura $\beta = \alpha^2, \gamma = \alpha^3, \dots$; de sorte que l'on aura

$$a' = x' + \alpha x'' + \alpha^2 x''' + \alpha^3 x^{iv} + \dots + \alpha^{\mu-1} x^{(\mu)},$$

et pour avoir les valeurs des autres quantités $a'', a''', \dots$ il n'y aura qu'à mettre, dans cette expression de a' , à la place de α , ses puissances $\alpha^2, \alpha^3, \dots$. D'où, et de ce qui a été démontré plus haut (56), on peut d'abord conclure que, lorsque l'exposant μ de l'équation proposée est un nombre premier, les quantités $a', a'', a''', \dots$ seront les racines d'une même équation

tion; mais il n'en sera pas ainsi lorsque μ sera un nombre composé; c'est pourquoi il faudra, dans la suite, distinguer les deux cas, où μ est un nombre premier et où il n'est pas premier.

69. Supposons, en général,

$$t = x' + \alpha x'' + \alpha^2 x''' + \alpha^3 x^{(4)} + \dots + \alpha^{\mu-1} x^{(\mu)},$$

et voyons quelle doit être la nature de l'équation en t . Pour cela on cherchera toutes les valeurs particulières de t qui résultent des $1.2.3\dots\mu$ permutations dont les μ racines $x', x'', \dots$ sont susceptibles; et dans cette recherche on suivra une méthode analogue à celle du n° 55; ainsi l'on regardera d'abord la quantité x' comme fixe, et l'on fera varier la position des $\mu - 1$ autres quantités, lesquelles étant susceptibles de $1.2.3\dots(\mu - 1)$ permutations donneront autant de valeurs particulières de t , que nous dénoterons par $t', t'', t''', \dots$; maintenant on fera varier, dans l'expression de chacune de ces valeurs, la position de la quantité x' en la mettant successivement à la place de $x'', x''', \dots$, ce qui donnera les $1.2.3\dots\mu$ valeurs cherchées qui devront être les racines de l'équation en t .

Or on verra aisément que pour avoir toutes ces valeurs il n'y aura qu'à multiplier successivement chacune des valeurs $t', t'', t''', \dots$ par $\alpha, \alpha^2, \alpha^3, \dots, \alpha^{\mu-1}$; de sorte que les racines de l'équation en t seront exprimées ainsi

$$\begin{array}{l} t', \quad \alpha t', \quad \alpha^2 t', \quad \alpha^3 t', \dots, \quad \alpha^{\mu-1} t', \\ t'', \quad \alpha t'', \quad \alpha^2 t'', \quad \alpha^3 t'', \dots, \quad \alpha^{\mu-1} t'', \\ t''', \quad \alpha t''', \quad \alpha^2 t''', \quad \alpha^3 t''', \dots, \quad \alpha^{\mu-1} t''', \\ \dots\dots\dots \end{array}$$

d'où il est facile de conclure que l'équation en t ne renfermera que des puissances de t dont les exposants seront multiples de μ .

De là il s'ensuit donc qu'en faisant $t^\mu = \theta$, en sorte que l'on ait

$$\theta = (x' + \alpha x'' + \alpha^2 x''' + \alpha^3 x^{(4)} + \dots)^\mu,$$

on aura une équation en θ du degré $1.2.3\dots(\mu - 1)$, dont les racines

seront les valeurs de θ qui viennent des permutations des $\mu - 1$ racines $x'', x''', \dots$ en faisant abstraction de la racine x' .

Cette conclusion a lieu quel que soit le nombre μ . Examinons maintenant à part les deux cas où μ est un nombre premier ou non.

70. Supposons d'abord que l'exposant μ soit un nombre premier, et nous remarquerons que pour trouver toutes les valeurs de θ il suffira de chercher celles qui viennent des permutations des $\mu - 2$ racines $x'', x''', \dots$ entre elles, et dont le nombre est par conséquent $1.2.3\dots(\mu - 2)$, et de substituer successivement, dans l'expression de chacune de ces valeurs, $\alpha^2, \alpha^3, \dots, \alpha^{\mu-1}$ à la place de α ; c'est de quoi on peut se convaincre par un raisonnement analogue à celui du n° 56.

D'où il s'ensuit (57) que, si l'on suppose que les $\mu - 1$ valeurs de θ qui répondent aux substitutions de $\alpha^2, \alpha^3, \dots, \alpha^{\mu-1}$ à la place de α dans l'expression précédente de θ soient les racines de cette équation du $(\mu - 1)^{\text{ième}}$ degré

$$\theta^{\mu-1} - T\theta^{\mu-2} + U\theta^{\mu-3} - X\theta^{\mu-4} + \dots = 0,$$

les coefficients $T, U, X, \dots$ seront donnés chacun par une équation du degré $1.2.3\dots(\mu - 2)$; de sorte que l'équation en θ du degré $1.2.3\dots(\mu - 1)$ sera décomposable en $1.2.3\dots(\mu - 2)$ équations du $(\mu - 1)^{\text{ième}}$ degré chacune, au moyen d'une équation du degré $1.2.3\dots(\mu - 2)$, car, ayant trouvé l'un des coefficients $T, U, X, \dots$ par la résolution d'une équation de ce degré, il sera aisé d'avoir tous les autres.

71. Puisque les $\mu - 1$ racines de l'équation

$$\theta^{\mu-1} - T\theta^{\mu-2} + U\theta^{\mu-3} - X\theta^{\mu-4} + \dots = 0$$

sont les valeurs de θ , c'est-à-dire de

$$(x' + \alpha x'' + \alpha^2 x''' + \dots)^\mu,$$

que l'on aurait en supposant que α devint successivement $\alpha^2, \alpha^3, \dots, \alpha^{\mu-1}$, il s'ensuit de ce qui a été dit dans le n° 68 que les racines de cette équation

tion exprimeront justement les valeurs des quantités $a', a'', a''', \dots$ élevées à la puissance μ .

Done, si l'on dénote ces racines par $\theta', \theta'', \theta''', \dots, \theta^{(\mu-1)}$, on aura

$$b = \frac{\sqrt[\mu]{\theta'}}{\mu}, \quad c = \frac{\sqrt[\mu]{\theta''}}{\mu}, \quad d = \frac{\sqrt[\mu]{\theta'''}}{\mu}, \dots$$

Maintenant, pour trouver avec facilité l'équation dont il s'agit, on élèvera le polynôme

$$x' + ax'' + a^2x''' + a^3x^{(4)} + \dots$$

à la puissance μ , et, faisant attention que $\alpha^\mu = 1$, $\alpha^{\mu-1} = \alpha, \dots$, on aura pour θ une expression de cette forme

$$\theta = \xi + \alpha\xi' + \alpha^2\xi'' + \alpha^3\xi''' + \dots + \alpha^{\mu-1}\xi^{(\mu-1)},$$

où $\xi, \xi', \xi'', \dots$ seront des fonctions des racines $\alpha', \alpha'', \alpha''', \dots$ sans α ; on changera α en γ et ensuite on éliminera γ par le moyen de l'équation (g) du n° 57; mais, si l'on ne veut pas employer la voie ordinaire de l'élimination, on s'y prendra de la manière suivante.

72. Puisque $\beta = \alpha^2, \gamma = \alpha^3, \dots$ (68), on aura

$$\begin{aligned} \theta' &= \xi + \alpha\xi' + \alpha^2\xi'' + \alpha^3\xi''' + \dots + \alpha^{\mu-1}\xi^{(\mu-1)}, \\ \theta'' &= \xi + \beta\xi' + \beta^2\xi'' + \beta^3\xi''' + \dots + \beta^{\mu-1}\xi^{(\mu-1)}, \\ \theta''' &= \xi + \gamma\xi' + \gamma^2\xi'' + \gamma^3\xi''' + \dots + \gamma^{\mu-1}\xi^{(\mu-1)}, \\ &\dots \end{aligned}$$

$\alpha, \beta, \gamma, \dots$ étant avec 1 les racines de l'équation $y^\mu - 1 = 0$.

Connaissant donc ainsi les racines de l'équation en θ , on pourra déterminer par leur moyen les valeurs des coefficients T, U, X, ...; car on aura, comme on sait,

$$\begin{aligned} T &= \theta' + \theta'' + \theta''' + \dots, \\ U &= \theta'\theta'' + \theta'\theta''' + \dots, \\ &\dots \end{aligned}$$

On facilitera beaucoup cette détermination si l'on cherche la somme

des puissances premières, secondes, troisièmes, etc., jusqu'aux $\mu^{\text{ièmes}}$, des racines $\theta', \theta'', \theta''', \dots$, et pour cela il sera utile de faire entrer dans le calcul la quantité

$$\theta^\mu = \xi + \xi' + \xi'' + \xi''' + \dots + \xi^{(\mu-1)};$$

en sorte que les quantités $\theta', \theta'', \dots$ répondent aux racines 1, $\alpha, \beta, \dots$ de l'équation $y^\mu - 1 = 0$.

Or, si l'on élève successivement le polynôme

$$\xi + \alpha\xi' + \alpha^2\xi'' + \alpha^3\xi''' + \dots + \alpha^{\mu-1}\xi^{(\mu-1)}$$

aux puissances seconde, troisième, etc., et qu'on dénote par $\xi_2, \xi_3, \xi_4, \dots$, les termes de ces puissances qui ne seront point affectés de α , après avoir substitué partout 1 à la place de α^μ , α à la place de $\alpha^{\mu+1}$ et ainsi de suite; il est facile de voir, par les propriétés des quantités 1, $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ (67), que les sommes des puissances premières, secondes, troisièmes, etc., des quantités $\theta', \theta'', \dots$ se réduiront à $\mu\xi, \mu\xi_2, \mu\xi_3, \dots$. Or

$$\theta^\mu = \xi + \xi' + \xi'' + \xi''' + \dots + \xi^{(\mu-1)} = [x' + x'' + x''' + \dots + x^{(\mu-1)}]^\mu = (-m)^\mu;$$

donc, si l'on retranche respectivement des quantités $\mu\xi, \mu\xi_2, \mu\xi_3, \dots$ les puissances première, seconde, troisième, etc., de $(-m)^\mu$, les restes

$$\mu\xi - (-m)^\mu, \quad \mu\xi_2 - (-m)^{\mu^2}, \quad \mu\xi_3 - (-m)^{\mu^3}, \dots$$

seront les sommes des $\mu - 1$ racines $\theta', \theta'', \theta''', \dots$ de leurs carrés, de leurs cubes, etc., de sorte qu'on aura, par les formules connues,

$$\begin{aligned} T &= \mu\xi - (-m)^\mu, \\ U &= \frac{T[\mu\xi - (-m)^\mu]}{2} - \frac{\mu\xi_2 - (-m)^{\mu^2}}{2}, \\ X &= \frac{U[\mu\xi - (-m)^\mu]}{3} - \frac{T[\mu\xi_2 - (-m)^{\mu^2}]}{3} + \frac{\mu\xi_3 - (-m)^{\mu^3}}{3}, \\ &\dots \end{aligned}$$

73. Maintenant, si l'on fait dans les expressions des quantités T, U, X, ... toutes les permutations possibles entre les racines $\alpha', \alpha'', \alpha''', \dots$,

on ne trouvera pour chacune de ces quantités que $1.2.3...(\mu-2)$ valeurs différentes, lesquelles viendront uniquement des permutations entre les $\mu-2$ racines $x'', x''', \dots$; ainsi l'on aura autant d'équations en $\mathcal{G}$, telles que

$$\mathcal{G}^{\mu-1} - T\mathcal{G}^{\mu-2} + U\mathcal{G}^{\mu-3} - \dots = 0,$$

lesquelles étant multipliées ensemble donneront une équation en $\mathcal{G}$ du degré $1.2.3...(\mu-1)$, et dont tous les coefficients seront déterminables par des fonctions rationnelles des coefficients $m, n, p, \dots$ de l'équation proposée.

Cette équation en $\mathcal{G}$ étant ainsi trouvée, si on la divise par une équation du degré $\mu-1$ telle que la précédente, on aura $\mu-1$ équations de condition entre les quantités $T, U, X, \dots$ par lesquelles on pourra déterminer, par exemple, les valeurs de $U, X, \dots$ en T , et l'on parviendra ensuite à une équation finale en T qui ne pourra monter qu'au degré $1.2.3...(\mu-2)$.

En effet, puisque la quantité T n'est susceptible que de $1.2.3...(\mu-2)$ valeurs différentes, si l'on appelle ces valeurs $T', T'', T''', \dots, T^{(\nu)}$, en supposant, pour abréger,

$$\nu = 1.2.3...(\mu-2),$$

on aura une équation en T , telle que

$$T^{\nu} - \pi T^{\nu-1} + \rho T^{\nu-2} - \sigma T^{\nu-3} + \dots = 0,$$

dont les racines seront $T', T'', T''', \dots$, en sorte qu'on pourra, si l'on veut, déterminer *à priori* les valeurs des coefficients $\pi, \rho, \sigma, \dots$ d'après celles des racines $T', T'', \dots$.

De cette manière on aura donc l'équation en T directement et sans recourir à l'équation en $\mathcal{G}$ du degré $\nu(\mu-1)$; et l'on pourra trouver aussi, indépendamment de cette dernière équation, les valeurs des autres coefficients $U, X, \dots$ en T , comme nous le démontrerons plus bas dans la Section quatrième.

Concluons de tout ce qui précède que la méthode de MM. Euler et Bezout conduit nécessairement à une réduite du degré $1.2.3...(\mu-1)$,

laquelle, quand l'exposant μ de la proposée est un nombre premier, doit être décomposable en $1.2.3...(\mu-2)$ facteurs du $(\mu-1)^{\text{ième}}$ degré chacun.

Ce résultat s'accorde, comme on voit, avec celui que l'on aurait par la méthode de M. Tschirnaus; ainsi l'on y pourra appliquer des remarques semblables à celles que nous avons faites dans le n° 58.

74. Pour éclaircir la théorie précédente par un exemple, prenons l'équation du cinquième degré

$$x^5 + mx^4 + nx^3 + px^2 + qx + r = 0,$$

dont les racines soient désignées par $x', x'', x''', x^{(4)}, x^{(5)}$.

On supposera donc

$$x = a + by + cy^2 + dy^3 + ey^4,$$

et l'on regardera l'équation proposée comme le résultat de celle-ci et de l'équation à deux termes

$$y^5 + V = 0,$$

ou bien, en faisant, comme dans le n° 68, $V = -1$,

$$y^5 - 1 = 0.$$

MM. Euler et Bezout ont donné dans leurs Mémoires sur ce sujet l'équation finale, qui doit résulter de l'élimination de y dans le cas de $m=0$ et de $a=0$, et dont la comparaison avec la proposée fournit les quatre équations nécessaires pour la détermination des coefficients b, c, d, e ; mais ces savants Auteurs n'ont point donné le résultat qui doit provenir de ces quatre équations par l'élimination de trois quelconques des quatre inconnues qu'elles renferment, et cela à cause du travail immense que cette élimination demande. La méthode précédente fournit les moyens de trouver ce résultat *à priori*, et nous allons en donner un essai.

On aura d'abord (67)

$$a = -\frac{m}{5},$$

et ensuite (71)

$$b = \frac{\sqrt[3]{\theta'}}{5}, \quad c = \frac{\sqrt[3]{\theta''}}{5}, \quad d = \frac{\sqrt[3]{\theta'''}}{5}, \quad e = \frac{\sqrt[3]{\theta^{IV}}}{5},$$

$\theta', \theta'', \theta''', \theta^{IV}$ étant les quatre racines de l'équation

$$\theta^4 - T\theta^3 + U\theta^2 - X\theta + Y = 0,$$

laquelle sera un diviseur de l'équation du vingt-quatrième degré qu'on doit trouver pour la valeur de θ .

Maintenant, pour avoir la valeur des coefficients $T, U, \dots$, il faudra élever le polynôme

$$x' + \alpha x'' + \alpha^2 x''' + \alpha^3 x^{IV} + \alpha^4 x^V$$

à la cinquième puissance, ce qui donnera, à cause de $\alpha^5 = 1$, cet autre polynôme

$$\xi + \alpha \xi' + \alpha^2 \xi'' + \alpha^3 \xi''' + \alpha^4 \xi^{IV},$$

où

$$\begin{aligned} \xi = & x'^5 + x''^5 + x'''^5 + x^{IV5} + x^{V5} + 120 x' x'' x''' x^{IV} x^V \\ & + 20 [x'^3 (x'' x' + x''' x^{IV}) + x''^3 (x' x'' + x^{IV} x^V) + x'''^3 (x' x' + x'' x^{IV}) \\ & + x^{IV3} (x' x'' + x''' x^V) + x^{V3} (x' x' + x'' x^{IV})] \\ & + 30 [x' (x''^3 x^{IV} + x'''^3 x^{IV}) + x'' (x'^3 x^{IV} + x^{IV3} x^{IV}) + x''' (x'^3 x^{IV} + x''^3 x^{IV}) \\ & + x^{IV} (x'^3 x^{IV} + x''^3 x^{IV}) + x^V (x'^3 x^{IV} + x''^3 x^{IV})], \end{aligned}$$

$$\xi' = 5 (x'^4 x'' + x''^4 x''' + x'''^4 x^{IV} + x^{IV4} x^V + x^{V4} x') + \dots,$$

Et l'on aura d'abord

$$T = 5\xi + m^5.$$

Or, en considérant l'expression de ξ , on voit que les termes

$$x'^5 + x''^5 + x'''^5 + x^{IV5} + x^{V5} + 120 x' x'' x''' x^{IV} x^V$$

peuvent s'exprimer immédiatement par les coefficients $m, n, \dots$ de l'équation proposée; et il est facile de trouver que la valeur de ces termes sera

$$-m^5 + 5m^3n - 5m^2p + 5m(q-n^2) + 5np - 125r.$$

Donc, si l'on fait pour plus de simplicité

$$\begin{aligned} z = & 2 [x'^3 (x'' x' + x''' x^{IV}) + x''^3 (x' x'' + x^{IV} x^V) + x^{IV3} (x' x' + x'' x^{IV}) \\ & + x^{V3} (x' x'' + x''' x^V) + x^V (x'^3 x^{IV} + x''^3 x^{IV})] \\ & + 3 [x' (x''^3 x^{IV} + x'''^3 x^{IV}) + x'' (x'^3 x^{IV} + x^{IV3} x^{IV}) + x''' (x'^3 x^{IV} + x''^3 x^{IV}) \\ & + x^{IV} (x'^3 x^{IV} + x''^3 x^{IV}) + x^V (x'^3 x^{IV} + x''^3 x^{IV})], \end{aligned}$$

on aura

$$T = 50z - 4m^5 + 25[m^3n - m^2p + m(q-n^2) + np - 25r],$$

et l'on trouvera que la quantité z ne sera susceptible que des six valeurs suivantes, que nous désignerons par $z', z'', z''', z^{IV}, z^V, z^V$:

$$\begin{aligned} z' = & 2 [x'^3 (x'' x' + x''' x^{IV}) + x''^3 (x' x'' + x^{IV} x^V) + x^{IV3} (x' x' + x'' x^{IV}) \\ & + x^{V3} (x' x'' + x''' x^V) + x^V (x'^3 x^{IV} + x''^3 x^{IV})] \\ & + 3 [x' (x''^3 x^{IV} + x'''^3 x^{IV}) + x'' (x'^3 x^{IV} + x^{IV3} x^{IV}) + x''' (x'^3 x^{IV} + x''^3 x^{IV}) \\ & + x^{IV} (x'^3 x^{IV} + x''^3 x^{IV}) + x^V (x'^3 x^{IV} + x''^3 x^{IV})], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z'' = & 2 [x'^3 (x'' x' + x''' x^{IV}) + x''^3 (x' x'' + x^{IV} x^V) + x^{IV3} (x' x' + x'' x^{IV}) \\ & + x^{V3} (x' x'' + x''' x^V) + x^V (x'^3 x^{IV} + x''^3 x^{IV})] \\ & + 3 [x' (x''^3 x^{IV} + x'''^3 x^{IV}) + x'' (x'^3 x^{IV} + x^{IV3} x^{IV}) + x''' (x'^3 x^{IV} + x''^3 x^{IV}) \\ & + x^{IV} (x'^3 x^{IV} + x''^3 x^{IV}) + x^V (x'^3 x^{IV} + x''^3 x^{IV})], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z''' = & 2 [x'^3 (x'' x' + x''' x^{IV}) + x''^3 (x' x'' + x^{IV} x^V) + x^{IV3} (x' x' + x'' x^{IV}) \\ & + x^{V3} (x' x'' + x''' x^V) + x^V (x'^3 x^{IV} + x''^3 x^{IV})] \\ & + 3 [x' (x''^3 x^{IV} + x'''^3 x^{IV}) + x'' (x'^3 x^{IV} + x^{IV3} x^{IV}) + x''' (x'^3 x^{IV} + x''^3 x^{IV}) \\ & + x^{IV} (x'^3 x^{IV} + x''^3 x^{IV}) + x^V (x'^3 x^{IV} + x''^3 x^{IV})], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z^{IV} = & 2 [x'^3 (x'' x' + x''' x^{IV}) + x''^3 (x' x'' + x^{IV} x^V) + x^{IV3} (x' x' + x'' x^{IV}) \\ & + x^{V3} (x' x'' + x''' x^V) + x^V (x'^3 x^{IV} + x''^3 x^{IV})] \\ & + 3 [x' (x''^3 x^{IV} + x'''^3 x^{IV}) + x'' (x'^3 x^{IV} + x^{IV3} x^{IV}) + x''' (x'^3 x^{IV} + x''^3 x^{IV}) \\ & + x^{IV} (x'^3 x^{IV} + x''^3 x^{IV}) + x^V (x'^3 x^{IV} + x''^3 x^{IV})], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z^V = & 2 [x'^3 (x'' x' + x''' x^{IV}) + x''^3 (x' x'' + x^{IV} x^V) + x^{IV3} (x' x' + x'' x^{IV}) \\ & + x^{V3} (x' x'' + x''' x^V) + x^V (x'^3 x^{IV} + x''^3 x^{IV})] \\ & + 3 [x' (x''^3 x^{IV} + x'''^3 x^{IV}) + x'' (x'^3 x^{IV} + x^{IV3} x^{IV}) + x''' (x'^3 x^{IV} + x''^3 x^{IV}) \\ & + x^{IV} (x'^3 x^{IV} + x''^3 x^{IV}) + x^V (x'^3 x^{IV} + x''^3 x^{IV})], \end{aligned}$$

$$z^{11} = 2 [x'^3 (x'' x^{11} + x'' x^9) + x''^3 (x' x^9 + x'' x^{11}) + x''^3 (x' x^{11} + x' x^9) \\ + x''^3 (x^{11} x^9 + x' x^9) + x^{11} (x' x'' + x'' x^9)] \\ + 3 [x' (x''^3 x^{11} + x''^3 x^9) + x'' (x'^3 x^{11} + x'^3 x^9) + x'' (x'^3 x^{11} + x'^3 x^9) \\ + x'' (x^{11} x^9 + x'^3 x^9) + x^{11} (x'^3 x^{11} + x'^3 x^9)].$$

En effet, si l'on fait dans ces formules telles permutations que l'on voudra entre les racines $x', x'', x''', \dots$, on verra toujours renaître les mêmes formules; d'où il s'ensuit que les six quantités $z', z'', z''', \dots$ seront nécessairement les racines d'une équation du sixième degré, telle que

$$z^6 - Az^5 + Bz^4 - Cz^3 + Dz^2 - Ez + F = 0,$$

dont les coefficients A, B, ... pourront par conséquent se déterminer par les règles connues.

On aura, par exemple,

$$A = z' + z'' + z''' + z^{(4)} + z^{(5)} + z^{(6)};$$

c'est-à-dire

$$A = 4x'^3 (x'' x^{11} + x'' x^9 + x'' x^7 + x'' x^5 + x'' x^3 + x'' x) \\ + 4x''^3 (x' x^{11} + x' x^9 + x' x^7 + x' x^5 + x' x^3 + x' x) \\ + 4x'''^3 (x' x'' + x' x'' + x' x'' + x' x'' + x' x'' + x' x'') \\ + 4x^{(4)} (x' x'' + x' x'' + x' x'' + x' x'' + x' x'' + x' x'') \\ + 6x' [(x'' x^{11})^2 + (x'' x^9)^2 + (x'' x^7)^2 + (x'' x^5)^2 + (x'' x^3)^2 + (x'' x)^2] \\ + 6x'' [(x' x^{11})^2 + (x' x^9)^2 + (x' x^7)^2 + (x' x^5)^2 + (x' x^3)^2 + (x' x)^2] \\ + 6x''' [(x' x'')^2 + (x' x'')^2 + (x' x'')^2 + (x' x'')^2 + (x' x'')^2 + (x' x'')^2] \\ + 6x^{(4)} [(x' x'')^2 + (x' x'')^2 + (x' x'')^2 + (x' x'')^2 + (x' x'')^2 + (x' x'')^2] \\ + 6x^{(5)} [(x' x'')^2 + (x' x'')^2 + (x' x'')^2 + (x' x'')^2 + (x' x'')^2 + (x' x'')^2].$$

Or on a dans l'équation proposée

$$-m = x' + x'' + x''' + x^{(4)} + x^{(5)} + x^{(6)},$$

$$n = x' x'' + x' x''' + x' x^{(4)} + x' x^{(5)} + x' x^{(6)} + x'' x' + x'' x''' + x'' x^{(4)} + x'' x^{(5)} + x'' x^{(6)} + x''' x' + x''' x'' + x''' x^{(4)} + x''' x^{(5)} + x''' x^{(6)} + x^{(4)} x' + x^{(4)} x'' + x^{(4)} x''' + x^{(4)} x^{(5)} + x^{(4)} x^{(6)} + x^{(5)} x' + x^{(5)} x'' + x^{(5)} x''' + x^{(5)} x^{(4)} + x^{(5)} x^{(6)} + x^{(6)} x' + x^{(6)} x'' + x^{(6)} x''' + x^{(6)} x^{(4)} + x^{(6)} x^{(5)} + x^{(6)} x^{(6)}.$$

done les cinq premiers membres de la valeur de A deviendront

$$4n (x'^3 + x''^3 + x'''^3 + x^{(4)3} + x^{(5)3}) \\ + 4m (x'^4 + x''^4 + x'''^4 + x^{(4)4} + x^{(5)4}) + 4 (x'^5 + x''^5 + x'''^5 + x^{(4)5} + x^{(5)5}) \\ = 4n (-m^2 + 3mn - 3p) + 4m (m^4 - 4m^2n + 4mp - 4q + 2n^2) \\ + 4 [-m^5 + 5m^3n - 5m^2p + 5m(q - n^2) - 5r + 5np].$$

Pour trouver la valeur des cinq derniers membres de la quantité A, il faudra commencer par chercher celle de la quantité

$$(x' x'')^2 + (x' x''')^2 + (x' x^{(4)})^2 + (x' x^{(5)})^2 + (x' x^{(6)})^2 \\ + (x'' x'')^2 + (x'' x''')^2 + (x'' x^{(4)})^2 + (x'' x^{(5)})^2 + (x'' x^{(6)})^2,$$

que nous désignerons, pour abréger, par l ; or, si l'on carre la valeur de n , on aura

$$n^2 = l + 2n (x'^3 + x''^3 + x'''^3 + x^{(4)3} + x^{(5)3}) \\ + 2m (x'^2 + x''^2 + x'''^2 + x^{(4)2} + x^{(5)2}) \\ + 2 (x'^4 + x''^4 + x'''^4 + x^{(4)4} + x^{(5)4}) \\ = l + 2n (m^2 - 2n) + 2m (-m^2 + 3mn - 3p) \\ + 2 (m^4 - 4m^2n + 4mp - 4q + 2n^2),$$

d'où

$$l = n^2 - 2n (m^2 - 2n) - 2m (-m^2 + 3mn - 3p) \\ - 2 (m^4 - 4m^2n + 4mp - 4q + 2n^2);$$

maintenant il est facile de trouver que la valeur des cinq derniers membres de A sera exprimée par

$$6l (x' + x'' + x''' + x^{(4)} + x^{(5)} + x^{(6)}) \\ - 6(m^2 - 2n) (x'^2 + x''^2 + x'''^2 + x^{(4)2} + x^{(5)2}) + 6 (x'^3 + x''^3 + x'''^3 + x^{(4)3} + x^{(5)3}) \\ = -6lm - 6(m^2 - 2n) (-m^2 + 3mn - 3p) \\ + 6 [-m^5 + 5m^3n - 5m^2p + 5m(q - n^2) - 5r + 5np];$$

de sorte qu'en rassemblant toutes ces quantités on aura enfin

$$\begin{aligned} A = & -6mn(3n-2m^2) + 2(8n+3m^2)(-m^3+3mn-3p) \\ & + 16m(m^4-4m^2n+4mp-4q+2n^2) \\ & + 10[-m^5+5m^3n-5m^2p+5m(q-n^2)-5r+5np]. \end{aligned}$$

On pourra trouver d'une manière semblable la valeur de chacun des autres coefficients B, C, ... de l'équation z , et l'on en abrégera beaucoup le calcul si l'on fait usage des règles données par M. Cramer à la fin de son *Introduction à l'Analyse des lignes courbes*, pour calculer la somme des produits des racines d'une équation quelconque, prises deux à deux, ou trois à trois, ou, etc., et élevées chacune à une puissance quelconque donnée; mais nous n'entrerons point ici dans ce détail qui, outre qu'il exigerait des calculs très-longes, ne saurait d'ailleurs jeter aucune lumière sur la résolution des équations du cinquième degré; car comme la réduite en z est du sixième degré, elle ne sera pas résoluble à moins qu'elle ne puisse s'abaisser à un degré inférieur au cinquième; or c'est ce qui ne me paraît guère possible d'après la forme des racines z' , z'' , ... de cette équation.

75. Nous avons supposé depuis le n° 70 jusqu'ici, que l'exposant μ de l'équation proposée était un nombre premier; voyons maintenant ce qui doit arriver lorsque μ sera un nombre composé.

Dans ce cas il est facile de prouver par des raisonnements analogues à ceux du n° 59 que les conclusions du numéro cité et des numéros suivants n'auront lieu que tant qu'on ne substituera à la place de z que les puissances z^v , z^w , z^p , ... dont les exposants v , w , p , ... sont des nombres premiers à μ ; d'où il s'ensuit :

1° Qu'en désignant par $\lambda - 1$ le nombre des exposants v , w , p , ... dont il s'agit, l'équation en θ , qui est généralement du degré $1.2.3...(\mu-1)$, sera décomposable en $\frac{1.2.3...(\mu-1)}{\lambda}$ équations, chacune du degré λ , et telle que

$$\theta^\lambda - T\theta^{\lambda-1} + U\theta^{\lambda-2} - X\theta^{\lambda-3} + \dots = 0,$$

les coefficients T, U, X, ... étant donnés chacun par une équation du degré $\frac{1.2.3...(\mu-1)}{\lambda}$.

2° Que les λ racines de cette équation en θ étant désignées par θ' , θ'' , θ''' , ..., les quantités $\frac{\theta'^v}{\mu}$, $\frac{\theta''^v}{\mu}$, $\frac{\theta'''^v}{\mu}$, ... exprimeront les valeurs de ceux des coefficients k , h , g , ..., c , b dont le rang, à commencer par k , sera marqué par les nombres 1, v , w , p , ... premiers à μ ; de sorte que tous ces coefficients seront donnés par une même équation.

3° Que pour appliquer la méthode du n° 71 à la recherche des coefficients T, V, X, ..., il ne faudra pas se servir de l'équation (g) du n° 57 pour éliminer y , mais de l'équation (i) qu'on trouvera par la méthode du n° 60, et dont les racines seront α , α^v , α^w , α^p , ...; que, par conséquent, si l'on veut faire usage de la méthode du n° 72 pour trouver les coefficients dont il s'agit, il faudra d'abord chercher d'après l'équation (i) les sommes des racines α , α^v , α^w , α^p , ... de leurs carrés, de leurs cubes, etc., qu'on dénotera par S' , S'' , S''' , ...; ensuite ayant élevé successivement le polynôme

$$\xi + \alpha\xi^v + \alpha^2\xi^w + \alpha^3\xi^p + \dots + \alpha^{\mu-1}\xi^{(\mu-1)}$$

aux puissances deuxième, troisième, etc., et représentant ces puissances par

$$\begin{aligned} \xi_1 + \alpha\xi_1^v + \alpha^2\xi_1^w + \alpha^3\xi_1^p + \dots, \\ \xi_2 + \alpha\xi_2^v + \alpha^2\xi_2^w + \alpha^3\xi_2^p + \dots, \\ \dots \dots \dots \end{aligned}$$

on aura les quantités

$$\begin{aligned} \lambda\xi + S'\xi^v + S''\xi^w + S'''\xi^p + \dots, \\ \lambda\xi_1 + S'\xi_1^v + S''\xi_1^w + S'''\xi_1^p + \dots, \\ \lambda\xi_2 + S'\xi_2^v + S''\xi_2^w + S'''\xi_2^p + \dots, \\ \dots \dots \dots \end{aligned}$$

pour les sommes des racines θ' , θ'' , θ''' , ... élevées aux puissances première, deuxième, troisième, etc., d'où il s'ensuit qu'on aura enfin par

les formules connues

$$T = \lambda \xi + S' \xi' + S'' \xi'' + S''' \xi''' + \dots$$

$$U = \frac{1}{2} T (\lambda \xi + S' \xi' + S'' \xi'' + \dots) - \frac{1}{2} (\lambda \xi_0 + S' \xi'_0 + S'' \xi''_0 + \dots),$$

$$X = \frac{1}{3} U (\lambda \xi + S' \xi' + S'' \xi'' + \dots) - \frac{1}{3} T (\lambda \xi_0 + S' \xi'_0 + S'' \xi''_0 + \dots) \\ + \frac{1}{3} (\lambda \xi_0 + S' \xi'_0 + S'' \xi''_0 + \dots),$$

76. Pour trouver maintenant les valeurs des autres coefficients qui, dans la série $k, h, g, \dots, c, b$ occupent des places marquées par des nombres commensurables à μ , supposons, en général, $\mu = \nu \varpi$, et que l'on cherche ceux des coefficients dont il s'agit dont l'exposant du rang sera multiple de ν ; il est facile de voir par ce qui a été dit dans le n° 68, que si l'on exprime, pour plus de simplicité, ces coefficients par

$$\frac{a^{(\nu)}}{\mu}, \frac{a^{(2\nu)}}{\mu}, \frac{a^{(3\nu)}}{\mu}, \dots,$$

et qu'on fasse $\alpha' = \omega$, on aura

$$a^{(\nu)} = x' + \omega x'' + \omega^2 x''' + \omega^3 x^{(4)} + \dots + \omega^{\nu-1} x^{(\nu)};$$

et, pour avoir les autres quantités $a^{(2\nu)}, a^{(3\nu)}, \dots$, il n'y aura qu'à changer successivement ω en $\omega^2, \omega^3, \dots$.

Soit, à l'imitation de ce qui a été fait dans le n° 69,

$$t = x' + \omega x'' + \omega^2 x''' + \omega^3 x^{(4)} + \dots + \omega^{\nu-1} x^{(\nu)},$$

et cherchons de même quelle doit être la nature de l'équation en t .

Pour cet effet on remarquera d'abord que, puisque $\omega = \alpha'$, on aura

$$\omega^\mu = \alpha'^\mu = \alpha'^\nu = 1;$$

et de là

$$\omega^{\mu+1} = \omega, \quad \omega^{\mu+2} = \omega^2, \dots$$

En général, puisque $1, \alpha, \alpha^2, \alpha^3, \dots, \alpha^{\mu-1}$ sont les racines de l'équation

$y^\mu - 1 = 0$, les puissances $1, \omega, \omega^2, \omega^3, \dots, \omega^{\mu-1}$ seront les racines de l'équation $y^\mu - 1 = 0$ (24).

Faisant donc rentrer les puissances de ω plus hautes que $\omega^{\mu-1}$ dans la classe des inférieures, l'expression de t deviendra de cette forme

$$t = x' + \omega x'' + \omega^2 x''' + \omega^3 x^{(4)} + \dots + \omega^{\mu-1} x^{(\mu)},$$

en supposant

$$x' = x' + x^{(\mu+1)} + x^{(2\mu+1)} + \dots + x^{(n-\mu+1)},$$

$$x'' = x'' + x^{(\mu+2)} + x^{(2\mu+2)} + \dots + x^{(n-\mu+2)},$$

$$x''' = x''' + x^{(\mu+3)} + x^{(2\mu+3)} + \dots + x^{(n-\mu+3)},$$

$$\dots \dots \dots$$

$$x^{(\mu)} = x^{(\mu)} + x^{(2\mu)} + x^{(3\mu)} + \dots + x^{(n)}.$$

77. En considérant maintenant l'équation en t dans toute sa généralité, il est clair qu'elle devrait être du degré $1.2.3 \dots \mu$, puisqu'il y a autant de permutations possibles entre les μ racines $x', x'', x''', \dots$, et dont chacune doit donner une valeur particulière de t ; mais si parmi ces valeurs il y en a d'égales, on pourra en faire abstraction et abaisser par là l'équation en t à un moindre degré; or c'est précisément ce qui a lieu dans le cas présent.

En effet, il est visible que la quantité x' demeurera toujours la même, quelque permutation qu'on fasse entre les ν racines $x', x^{(\varpi+1)}, x^{(2\varpi+1)}, \dots$; donc, puisque ν choses admettent $1.2.3 \dots \nu$ permutations, il s'ensuit d'abord que les $1.2.3 \dots \mu$ valeurs de t seront telles que chacune se trouvera répétée $1.2.3 \dots \nu$ fois; en sorte que parmi ces valeurs il ne pourra y en avoir que $\frac{1.2.3 \dots \mu}{1.2.3 \dots \nu}$ de différentes entre elles.

Considérons ensuite la quantité x'' , on prouvera de la même manière que chacune de ces dernières valeurs devra aussi se trouver répétée $1.2.3 \dots \nu$ fois, ce qui réduira le nombre des valeurs différentes de t à $\frac{1.2.3 \dots \mu}{(1.2.3 \dots \nu)^2}$.

En continuant le même raisonnement à l'égard des autres quantités $x''', x^{(4)}, \dots, x^{(\mu)}$, on en conclura enfin que le nombre des valeurs différentes

de t ne sera que $\frac{1.2.3\dots\mu}{(1.2.3\dots\nu)^\mu}$; de sorte que l'équation en t ne montera qu'au degré $\frac{1.2.3\dots\mu}{(1.2.3\dots\nu)^\mu}$.

78. Cela posé, si l'on compare maintenant l'expression précédente de t avec celle du n° 69, on verra aisément qu'elle est susceptible de remarques semblables, relativement aux permutations des quantités $z', z'', z''', \dots$ entre elles; d'où l'on conclura :

1° Qu'en supposant π égal à un nombre premier, l'équation en t ne renfermera que des puissances de t dont les exposants soient multiples de π ; de sorte qu'en faisant $t^\pi = \theta$, on aura une équation en θ du degré

$$\frac{1.2.3\dots\mu}{\pi(1.2.3\dots\nu)^\pi};$$

2° Que cette équation sera toujours décomposable en $\frac{1.2.3\dots\mu}{(\pi-1)\pi(1.2.3\dots\nu)^\pi}$ équations de la forme

$$\theta^{\pi-1} - T\theta^{\pi-2} + U\theta^{\pi-3} - X\theta^{\pi-4} + \dots = 0,$$

où les coefficients $T, U, \dots$ ne dépendront que d'une équation du degré

$$\frac{1.2.3\dots\mu}{(\pi-1)\pi(1.2.3\dots\nu)^\pi};$$

3° Que, si l'on désigne par $\theta', \theta'', \theta''', \dots$ les $\pi-1$ racines de l'équation précédente, les quantités

$$\frac{\sqrt[\pi]{\theta'}}{\mu}, \frac{\sqrt[\pi]{\theta''}}{\mu}, \frac{\sqrt[\pi]{\theta'''}}{\mu}, \dots, \frac{\sqrt[\pi]{\theta^{(\pi-1)}}}{\mu}$$

seront les valeurs de ceux des coefficients $k, h, g, \dots, c, b$ qui occupent dans cette série les places $\nu^{\text{ième}}, (2\nu)^{\text{ième}}, (3\nu)^{\text{ième}}, \dots$ jusqu'à la $(\mu-\nu)^{\text{ième}}$ inclusivement, ou, ce qui revient au même (à cause que le nombre de tous les coefficients $a, b, c, \dots, k$ est μ), des coefficients qui occupent les mêmes places dans la série $a, b, c, \dots, k$;

4° Que, pour trouver les valeurs des coefficients $T, U, X, \dots$, on pourra se servir pareillement des méthodes des nos 71 et 72, en ayant seulement attention de mettre partout l'exposant π à la place de l'exposant μ ;

5° Que, si π n'est pas un nombre premier, il faudra apporter aux conclusions précédentes des modifications relatives à la nature du nombre π et qu'on trouvera aisément par des considérations semblables à celles qui ont fait l'objet du n° 75.

79. On voit donc, d'après ce qui précède, que, lorsque l'exposant μ de l'équation proposée est un nombre composé, les coefficients $b, c, d, \dots$ ne peuvent pas être les racines d'une même équation, comme cela a lieu dans le cas où l'exposant μ est un nombre premier, mais que ces coefficients dépendent alors d'équations différentes suivant que leurs places dans la série $a, b, c, d, \dots$ sont marquées par des nombres dont les plus grandes mesures avec le nombre μ sont différentes.

Cependant il ne sera pas nécessaire de chercher et de résoudre toutes ces différentes équations; car les coefficients dont il s'agit dépendent mutuellement les uns des autres, en sorte que dès que l'on aura trouvé la valeur d'un de ces coefficients on pourra en déduire aisément celles de tous les autres. En effet, si l'on suppose que l'on élimine y de l'équation (k) du n° 65 par le moyen de l'équation $y^\mu - 1 = 0$, et qu'on compare ensuite l'équation résultante terme à terme avec la proposée, on aura autant d'équations qu'il y a de coefficients indéterminés $a, b, c, \dots$, par lesquelles on pourra déterminer chacun de ces coefficients: or, à l'exception du premier coefficient a qui se trouvera donné par une équation où il n'y aura point d'autres inconnues, tous les autres coefficients inconnus $b, c, \dots$ se trouveront mêlés entre eux, de manière que par la méthode ordinaire d'élimination on pourra déterminer la valeur de chacune de ces inconnues par une autre quelconque d'entre elles; sur quoi on fera des remarques semblables à celles du n° 58.

80. M. Bezout, dans le dessein de simplifier et de faciliter l'usage de sa méthode lorsque l'exposant de l'équation proposée est un nombre composé, a donné une seconde méthode qui paraît en quelque manière plus générale que la première, mais qui revient cependant à la même dans le fond, comme nous l'allons faire voir.

Suivant cette méthode, si l'exposant μ de l'équation proposée est re-

présenté par le produit $\nu\pi$ des deux nombres ν et π , on prendra deux équations de cette forme

$$(I) \begin{cases} x^\nu - (a + by + cy^2 + dy^3 + \dots + ky^{\pi-1}) x^{\nu-1} \\ + (a' + b'y + c'y^2 + d'y^3 + \dots + k'y^{\pi-1}) x^{\nu-2} \\ - (a'' + b''y + c''y^2 + d''y^3 + \dots + k''y^{\pi-1}) x^{\nu-3} \\ \dots \dots \dots \\ \pm [a^{(\nu-1)} + b^{(\nu-1)}y + c^{(\nu-1)}y^2 + d^{(\nu-1)}y^3 + \dots + k^{(\nu-1)}y^{\pi-1}] = 0, \\ y^\pi - 1 = 0. \end{cases}$$

Et éliminant y on aura une équation finale en x du degré $\nu\pi$ qu'on comparera terme à terme avec la proposée; ce qui donnera $\nu\pi$ équations particulières entre les coefficients $a, b, c, \dots, a', b', c', \dots$ dont le nombre est aussi $\nu\pi$; de sorte qu'on pourra par là déterminer chacun de ces coefficients.

Or, comme l'équation $y^\pi - 1 = 0$ donne π valeurs de y , on aura, par la substitution successive de ces valeurs, autant d'équations en x , chacune du degré ν ; d'où l'on tirera $\nu\pi$ valeurs de x , qui seront les racines de l'équation proposée.

Il est clair, par la théorie de l'élimination exposée dans le n° 13, que l'équation résultante de l'élimination de y dans les deux équations ci-dessus ne sera autre chose que le produit de toutes les équations (I) que l'on aurait en y mettant à la place de y les π racines de l'équation $y^\pi - 1 = 0$; d'où l'on voit que l'esprit de cette méthode consiste à décomposer l'équation proposée du degré $\nu\pi$ en π équations, chacune du $\nu^{\text{ième}}$ degré, et cela moyennant une équation du degré π , de la forme $y^\pi - 1 = 0$.

Toute la difficulté consiste dans la détermination des coefficients inconnus $a, b, c, \dots, a', b', c', \dots$; c'est pourquoi il est bon de rechercher *a priori* quelle doit être la nature des équations par lesquelles ces quantités doivent se déterminer.

81. Supposons donc que l'équation proposée du degré $\mu = \nu\pi$, et

dont les racines sont $x', x'', x''', \dots$, soit le produit de π équations telles que

$$\begin{aligned} x^\nu - z' x^{\nu-1} + u' x^{\nu-2} - v' x^{\nu-3} + \dots &= 0, \\ x^\nu - z'' x^{\nu-1} + u'' x^{\nu-2} - v'' x^{\nu-3} + \dots &= 0, \\ x^\nu - z''' x^{\nu-1} + u''' x^{\nu-2} - v''' x^{\nu-3} + \dots &= 0, \\ \dots \dots \dots \\ x^\nu - z^{(\pi)} x^{\nu-1} + u^{(\pi)} x^{\nu-2} - v^{(\pi)} x^{\nu-3} + \dots &= 0; \end{aligned}$$

il faudra que chacune de ces équations renferme ν racines de la proposée; de sorte qu'en partageant la totalité des μ racines $x', x'', x''', \dots, x^{(\pi)}$ en π systèmes de ν racines chacun, et tels par exemple que

$$\begin{aligned} x', & x^{(\pi+1)}, & x^{(2\pi+1)}, & \dots, & x^{(\pi-1)}, \\ x'', & x^{(\pi+2)}, & x^{(2\pi+2)}, & \dots, & x^{(\pi-2)}, \\ x''', & x^{(\pi+3)}, & x^{(2\pi+3)}, & \dots, & x^{(\pi-3)}, \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x^{(\pi)}, & x^{(2\pi)}, & x^{(3\pi)}, & \dots, & x^{(\pi)}, \end{aligned}$$

on aura par la nature des équations z' égal à la somme, u' égal à la somme des produits deux à deux, v' égal à la somme des produits trois à trois, etc., des racines $x', x^{(\pi+1)}, x^{(2\pi+1)}, \dots, x^{(\pi-1)}$; de même on aura z'' égal à la somme, u'' égal à la somme des produits deux à deux, v'' égal à la somme des produits trois à trois, etc., des racines $x'', x^{(\pi+2)}, x^{(2\pi+2)}, \dots, x^{(\pi-2)}$, et ainsi de suite.

Or, si l'on désigne par $\omega, \varphi, \psi, \dots$ les π racines de l'équation $y^\pi - 1 = 0$, on aura (numéro précédent)

$$\begin{aligned} a + b + c + d + \dots + k &= z', \\ a + b\omega + c\omega^2 + d\omega^3 + \dots + k\omega^{\pi-1} &= z'', \\ a + b\varphi + c\varphi^2 + d\varphi^3 + \dots + k\varphi^{\pi-1} &= z''', \\ \dots \dots \dots \end{aligned}$$

et de même

$$\begin{aligned} a' + b' + c' + d' + \dots + k' &= u', \\ a' + b'\omega + c'\omega^2 + d'\omega^3 + \dots + k'\omega^{\pi-1} &= u'', \\ a' + b'\varphi + c'\varphi^2 + d'\varphi^3 + \dots + k'\varphi^{\pi-1} &= u''', \\ \dots \dots \dots \end{aligned}$$

et ainsi de suite.

Donc, puisque par la nature de l'équation $y^m - 1 = 0$ qui manque de tous les termes intermédiaires on a

$$1 + \omega + \varphi + \psi + \dots = 0,$$

$$1 + \omega^2 + \varphi^2 + \psi^2 + \dots = 0,$$

$$1 + \omega^3 + \varphi^3 + \psi^3 + \dots = 0,$$

on pourra déterminer les valeurs des quantités $a, b, c, \dots, k, a', b', c', \dots, k', a'', b'', c'', \dots, k'', \dots$ par une méthode semblable à celle du n° 67; et il viendra

$$\omega a = z' + z'' + z''' + \dots + z^{(m)},$$

$$\omega b = z' + \omega^{m-1} z'' + \varphi^{m-1} z''' + \dots,$$

$$\omega c = z' + \omega^{m-2} z'' + \varphi^{m-2} z''' + \dots,$$

ensuite

$$\omega a' = u' + u'' + u''' + \dots + u^{(m)},$$

$$\omega b' = u' + \omega^{m-1} u'' + \varphi^{m-1} u''' + \dots,$$

$$\omega c' = u' + \omega^{m-2} u'' + \varphi^{m-2} u''' + \dots,$$

et ainsi de suite.

82. Examinons les valeurs des quantités $a, b, c, \dots, k$, et il est d'abord clair que la valeur de ωa sera égale à la somme de toutes les racines $x', x'', \dots, x^{(m)}$; de sorte que l'on aura $\omega a = -m$; et par conséquent

$$a = -\frac{m}{\omega}.$$

Ensuite, si l'on met $\omega^2, \omega^3, \dots$ à la place de $\varphi, \psi, \dots$, en sorte que les racines de l'équation $y^m - 1 = 0$ soient représentées par $1, \omega, \omega^2, \omega^3, \dots, \omega^{m-1}$ (24), on aura

$$\omega k = z' + \omega z'' + \omega^2 z''' + \omega^3 z^{(4)} + \dots + \omega^{m-1} z^{(m)},$$

et pour avoir les valeurs des quantités $\omega h, \omega g, \dots$ il n'y aura qu'à changer successivement, dans cette expression, la racine ω en $\omega^2, \omega^3, \dots$

Or l'expression précédente de ωk est la même que celle de la quan-

tité $a^{(v)}$ ou t du n° 76; par conséquent celles de $\omega h, \omega g, \dots$ seront aussi les mêmes que celles des quantités $a^{(2v)}, a^{(3v)}, \dots$ du même numéro; d'où il est facile de conclure que les coefficients $a, b, c, d, \dots$ de l'équation (l) du n° 80, étant multipliés par ω , seront respectivement égaux à ceux des coefficients $a, b, c, \dots$ de l'équation (k) du n° 65, qui occuperont dans la série $a, b, c, \dots$ les places marquées par les nombres $1, v, 2v, 3v, \dots, \mu - v$, chacun de ces coefficients étant multiplié par μ .

Ainsi l'on pourra appliquer sur-le-champ aux coefficients $a, b, c, \dots$ de la formule ci-dessus les mêmes conclusions des n° 76 et suivants.

83. Quant aux autres coefficients $a', b', c', \dots, a'', b'', c'', \dots$ de la même formule (l) on pourra, si l'on veut, les faire dépendre des précédents, ou simplement d'un quelconque d'entre eux, par des considérations semblables à celles du n° 79; on peut aussi déterminer *a priori*, d'après les formules du n° 81, le degré et la forme de l'équation d'où chacun de ces coefficients doit dépendre immédiatement.

Pour cet effet il suffira de remarquer que les quantités $u', u'', u''', \dots$ sont analogues aux quantités correspondantes $z', z'', z''', \dots$ en ce que ces quantités sont des fonctions des mêmes racines, lesquelles ont la propriété de demeurer les mêmes, quelques permutations qu'on fasse entre ces racines; il en est de même des quantités $v', v'', v''', \dots$; d'où il s'ensuit que l'on pourra appliquer aux coefficients $b', c', d', \dots, b'', c'', d'', \dots$ des raisonnements et des conclusions semblables à celles qui ont lieu pour les coefficients $b, c, d, \dots$.

Mais à l'égard des coefficients $a', a'', \dots$ il faudra les considérer à part, et après avoir prouvé par des raisonnements analogues à ceux du n° 77 que chacune de ces quantités ne pourra avoir que $\frac{1.2.3 \dots \mu}{(1.2.3 \dots v)^w}$ valeurs différentes, on remarquera que ces quantités ne souffrant aucun changement par les permutations des quantités $u', u'', u''', \dots, u^{(v)}$, ou $v', v'', v''', \dots, v^{(v)}$, ou, etc., entre elles, il faudra encore diviser le nombre $\frac{1.2.3 \dots \mu}{(1.2.3 \dots v)^w}$ par $1.2.3 \dots \omega$ pour avoir celui des valeurs différentes de chacun des coefficients $a', a'', \dots$; d'où il s'ensuit que chacun de ces mêmes

coefficients devra être déterminé par une équation particulière du degré

$$\frac{1.2.3\dots p}{1.2.3\dots p(1.2.3\dots p)^p}$$

84. Supposons que l'équation proposée soit d'un degré pair, et prenons $p=2$, en sorte que l'on ait $p=2v$; dans ce cas l'équation $y^p-1=0$ deviendra

$$y^2-1=0,$$

laquelle donne les deux racines

$$y=1 \quad \text{et} \quad y=-1;$$

et il faudra, suivant la méthode précédente, que l'équation proposée

$$x^{2v} + mx^{2v-1} + nx^{2v-2} + px^{2v-3} + \dots = 0$$

soit formée du produit de ces deux-ci

$$x^v - (a+b)x^{v-1} + (a'+b')x^{v-2} - (a''+b'')x^{v-3} + \dots = 0,$$

$$x^v - (a-b)x^{v-1} + (a'-b')x^{v-2} - (a''-b'')x^{v-3} + \dots = 0.$$

Ainsi l'on aura

$$a = -\frac{m}{2} \quad \text{et} \quad b = \frac{z' - z''}{2},$$

où

$$z' = x' + x'' + x''' + \dots + x^{(2v-1)},$$

$$z'' = x'' + x''' + x^{(4)} + \dots + x^{(2v)}.$$

Et l'on trouvera que l'équation en b sera du degré

$$\frac{1.2.3\dots 2v}{(1.2.3\dots v)^2}, \quad \text{c'est-à-dire} \quad \frac{(v+1)(v+2)(v+3)\dots 2v}{1.2.3\dots v},$$

avec tous les exposants pairs.

Donc, si l'on suppose que l'équation proposée ait un diviseur du degré v et tel que

$$x^v + m'x^{v-1} + n'x^{v-2} + p'x^{v-3} + \dots = 0,$$

on trouvera pour m' une équation du degré

$$\frac{(v+1)(v+2)(v+3)\dots(2v)}{1.2.3\dots v},$$

ce qui s'accorde avec ce que l'on sait d'ailleurs, puisque ce nombre exprime celui des combinaisons de $2v$ choses prises v à v .

Et comme en faisant

$$-m' = a + b = -\frac{m}{2} + b$$

on doit avoir une équation en b qui n'ait que des puissances paires, il s'ensuit que l'équation en m' sera telle que, si l'on y fait disparaître le second terme, tous les termes alternatifs disparaîtront en même temps, comme nous l'avons vu par rapport aux équations du quatrième degré (35).

85. Si l'équation proposée est du sixième degré, en sorte que $v=3$, et qu'on fasse $4b^2 = \vartheta$, on aura une équation en ϑ du degré

$$\frac{4.5.6}{2 \times 1.2.3} = 10.$$

M. Bezout pense que cette équation pourra se décomposer en deux équations, au moyen d'une équation du second degré : c'est de quoi je doute fort; en effet, les racines de l'équation en ϑ seront représentées par ces dix quantités, lesquelles renferment toutes les valeurs de $(z' - z'')^2$ qui peuvent résulter des permutations entre les six racines $x', x'', \dots$

$$(x' + x'' + x''' - x^{(4)} - x^{(5)} - x^{(6)})^2,$$

$$(x' + x'' + x^{(4)} - x''' - x^{(5)} - x^{(6)})^2,$$

$$(x' + x'' + x^{(5)} - x^{(4)} - x^{(6)} - x^{(3)})^2,$$

$$(x' + x'' + x^{(6)} - x^{(4)} - x^{(5)} - x^{(3)})^2,$$

$$(x' + x^{(4)} + x^{(5)} - x''' - x^{(6)} - x^{(3)})^2,$$

$$(x' + x^{(4)} + x^{(6)} - x''' - x^{(5)} - x^{(3)})^2,$$

$$(x' + x^{(5)} + x^{(6)} - x^{(4)} - x^{(3)} - x^{(2)})^2,$$

$$(x' + x^{(6)} + x^{(3)} - x^{(4)} - x^{(5)} - x^{(2)})^2,$$

$$(x' + x^{(3)} + x^{(4)} - x^{(5)} - x^{(6)} - x^{(2)})^2,$$

$$(x' + x^{(3)} + x^{(5)} - x^{(4)} - x^{(6)} - x^{(2)})^2.$$

Or, si l'on suppose que les deux facteurs de l'équation dont il s'agit soient représentés par

$$\begin{aligned}\theta^2 - f\theta^4 + g\theta^2 - h\theta^2 + i\theta - k &= 0, \\ \theta^2 - f'\theta^4 + g'\theta^2 - h'\theta^2 + i'\theta - k' &= 0,\end{aligned}$$

il faudra que f soit égale à la somme de cinq des dix quantités précédentes, et que f' soit égale à la somme des cinq autres; et pour que les coefficients f et f' ne soient affectés que de radicaux du second degré, il faudra que ces deux coefficients soient les racines d'une équation du second degré telle que

$$y^2 - My + N = 0,$$

M et N étant des fonctions rationnelles des coefficients $m, n, p, \dots$ de l'équation proposée; on aura donc

$$M = f + f' \quad \text{et} \quad N = ff';$$

de sorte que tant la somme que le produit des deux quantités f et f' devront être des fonctions rationnelles de $m, n, p, \dots$ et par conséquent des fonctions des racines $x', x'', x''', \dots$ telles, qu'elles ne changent point de valeur, quelque permutation qu'on fasse entre ces racines; or cette condition a bien lieu à l'égard de la somme $f + f'$, qui est égale à la somme de toutes les dix quantités ci-dessus; mais il n'en est pas de même à l'égard du produit ff' ; car on peut s'assurer facilement que, de quelque manière qu'on partage la somme des dix racines précédentes en deux sommes partielles de cinq racines chacune, le produit de ces deux sommes partielles n'aura jamais la propriété de demeurer invariable dans toutes les permutations qu'on pourra faire des racines $x', x'', x''', \dots$ entre elles.

On pourrait dire qu'il ne serait peut-être pas nécessaire que les deux quantités f et f' fussent les racines d'une même équation du second degré, et que l'une de ces quantités pourrait dépendre d'une équation et l'autre d'une autre; mais pour détruire cette exception il suffit de considérer que, supposant f déterminée par une équation du second degré

telle que

$$f^2 - Mf + N = 0,$$

les deux racines de cette équation seront nécessairement égales chacune à la somme de cinq quelconques des dix quantités précédentes; et il faudra que ces deux sommes ajoutées ensemble produisent une quantité M qui ait la propriété de demeurer la même, quelque permutation qu'on fasse entre les racines $x', x'', x''', \dots$; ce qui ne saurait avoir lieu à moins que les deux sommes dont nous parlons ne renferment toutes les dix quantités en question; par conséquent, l'une étant la somme de cinq de ces quantités, l'autre devra être nécessairement celle des cinq autres.

SECTION QUATRIÈME.

CONCLUSION DES RÉFLEXIONS PRÉCÉDENTES, AVEC QUELQUES REMARQUES GÉNÉRALES SUR LA TRANSFORMATION DES ÉQUATIONS, ET SUR LEUR RÉDUCTION OU ABATTEMENT À UN MOINDRE DEGRÉ.

86. On a dû voir par l'analyse que nous venons de donner des principales méthodes connues pour la résolution des équations, que ces méthodes se réduisent toutes à un même principe général, savoir à trouver des fonctions des racines de l'équation proposée, lesquelles soient telles : 1^{re} que l'équation ou les équations par lesquelles elles seront données, c'est-à-dire dont elles seront les racines (équations qu'on nomme communément les *réduites*), se trouvent d'un degré moindre que celui de la proposée, ou soient au moins décomposables en d'autres équations d'un degré moindre que celui-là; 2^{de} que l'on puisse en déduire aisément les valeurs des racines cherchées.

L'art de résoudre les équations consiste donc à découvrir des fonctions des racines, qui aient les propriétés que nous venons d'énoncer; mais est-il toujours possible de trouver de telles fonctions, pour les équations d'un degré quelconque, c'est-à-dire pour tel nombre de racines qu'on voudra? C'est sur quoi il paraît très-difficile de pouvoir prononcer en général.

A l'égard des équations qui ne passent pas le quatrième degré, les fonctions les plus simples qui donnent leur résolution peuvent être représentées par la formule générale

$$x' + yx'' + y^2x''' + \dots + y^{p-1}x^{(p)},$$

$x', x'', x''', \dots, x^{(p)}$ étant les racines de l'équation proposée, qu'on suppose être du degré μ , et y étant une racine quelconque autre que l'unité de l'équation

$$y^\mu - 1 = 0,$$

c'est-à-dire une racine quelconque de l'équation

$$y^{\mu-1} + y^{\mu-2} + y^{\mu-3} + \dots + 1 = 0,$$

comme il résulte de tout ce qu'on a exposé dans les deux premières Sections, touchant la résolution des équations du troisième et du quatrième degré.

Quant à celle des équations du second degré dont nous avons jusqu'à présent fait abstraction, il est visible qu'elle se rapporte aussi au même principe; car en faisant $\mu = 2$, on aura la fonction $x' + yx''$; et l'équation $y + 1 = 0$ donnant $y = -1$, cette fonction deviendra $x' - x''$, c'est-à-dire la différence des deux racines; or l'art de résoudre les équations du second degré consiste uniquement à faire évanouir le second terme pour avoir une réduite qui, ne contenant que le carré de l'inconnue, soit résoluble par la simple extraction de la racine carrée; et comme l'évanouissement du second terme dans une équation quelconque exige qu'on diminue les racines du coefficient de ce terme pris avec un signe contraire, et divisé par l'exposant du degré de l'équation, c'est-à-dire de la somme de toutes les racines divisée par le nombre de ces racines, il s'ensuit que la réduite du second degré aura pour racines les différences entre les racines de la proposée, divisées par 2, ou bien ces différences mêmes, en supposant qu'on augmente les racines de la réduite dans la raison de 1 à 2, ce qui ne change rien à la nature de cette équation.

Il semble donc qu'on pourrait conclure de là par induction que toute

équation, de quelque degré qu'elle soit, sera aussi résoluble à l'aide d'une réduite dont les racines soient représentées par la même formule

$$x' + yx'' + y^2x''' + y^3x^{(4)} + \dots$$

Mais, d'après ce que nous avons démontré dans la Section précédente à l'occasion des méthodes de MM. Euler et Bezout, lesquelles conduisent directement à de pareilles réduites, on a, ce semble, lieu de se convaincre d'avance que cette conclusion se trouvera en défaut dès le cinquième degré; d'où il s'ensuit que, si la résolution algébrique des équations des degrés supérieurs au quatrième n'est pas impossible, elle doit dépendre de quelques fonctions des racines, différentes de la précédente.

87. Comme jusqu'ici nous n'avons fait que chercher ces sortes de fonctions *à posteriori* et d'après les méthodes connues pour la résolution des équations, il est nécessaire de faire voir maintenant comment il faudrait s'y prendre pour les trouver *à priori* et sans supposer d'autres principes que ceux qui suivent immédiatement de la nature même des équations: c'est l'objet que je me propose principalement dans cette Section.

Je donnerai d'abord des règles directes et générales pour déterminer le degré et la nature de l'équation d'où une fonction quelconque proposée des racines d'une équation de degré donné devra dépendre; quoique cette matière ait déjà été traitée par d'habiles Géomètres, je crois qu'elle peut l'être encore d'une manière plus directe et plus générale, surtout dans le point de vue où nous l'envisageons ici, relativement à la résolution générale des équations.

Je ferai voir ensuite quelles sont les conditions nécessaires pour que l'équation dont il s'agit puisse admettre la résolution en supposant uniquement celle des équations des degrés inférieurs à celui de l'équation proposée; et je donnerai à cette occasion les vrais principes et, pour ainsi dire, la métaphysique de la résolution des équations du troisième et du quatrième degré.

Je traiterai enfin en peu de mots de la réduction des équations qui peuvent se décomposer en d'autres plus simples à cause de quelque rela-

tion particulière qu'il y a entre leurs racines, et je montrerai par quelques exemples comment on peut découvrir ces relations, et abaisser par là les équations proposées à des degrés moindres.

88. Nous ne considérerons ici que des fonctions rationnelles, et nous désignerons ces fonctions en général par la caractéristique f .

Ainsi $f[(x)]$ signifiera une fonction quelconque rationnelle de x ; $f[(x)(y)]$ signifiera une fonction quelconque rationnelle de x et y ; $f[(x)(y)(z)]$, une fonction quelconque rationnelle de x , y , z , et ainsi des autres.

Si dans une fonction donnée $f[(x)(y)]$ on a $y = x$, en sorte qu'il en résulte une simple fonction de x , au lieu de dénoter cette fonction par $f[(x)(x)]$, nous la désignerons pour plus de simplicité par $f[(x)^2]$; pareillement, si dans la fonction donnée $f[(x)(y)(z)]$ on fait $y = x$, on dénotera la fonction résultante de x et z par $f[(x)^2(z)]$, et, si l'on fait en même temps $x = y = z$, on aura une simple fonction de x qu'on désignera par $f[(x)^3]$, et ainsi des autres.

De plus, lorsqu'on voudra représenter une fonction de x et y , par exemple, telle qu'elle demeure la même en échangeant x en y , c'est-à-dire une fonction $f[(x)(y)]$ telle, que l'on ait $f[(x)(y)] = f[(y)(x)]$, nous la désignerons simplement par $f[(x, y)]$. De même on désignera par $f[(x, y, z)]$ toute fonction de x , y et z telle, qu'elle ne change point en échangeant les quantités x , y , z entre elles d'une manière quelconque. Ainsi $f[(x, y)(z)]$ dénotera une fonction rationnelle de x , y , z telle, qu'elle demeure la même en échangeant x en y sans toucher à la quantité z , et ainsi de suite.

Mais si l'on avait une fonction de x , y , z et u telle, qu'elle demeurât la même en échangeant à la fois x en z et y en u , on la dénoterait par $f[(x)(y)(z)(u)]$; et si cette fonction demeurait aussi la même en échangeant simplement x en y , ou z en u , on la désignerait alors par $f[(x, y)(z, u)]$.

Enfin, si l'on a plusieurs fonctions des mêmes quantités, on appellera fonctions *semblables* celles qui varient en même temps ou demeurent les

mêmes lorsqu'on y fait les mêmes permutations entre les quantités dont elles sont composées, de manière qu'elles puissent être désignées d'une manière analogue. Ainsi prenant les caractéristiques f et φ pour désigner des fonctions différentes, les fonctions $f[(x)(y)]$ et $\varphi[(x)(y)]$ seront semblables, ainsi que les fonctions $f[(x, y)]$, $\varphi[(x, y)]$, et ainsi des autres.

89. Nous supposerons, comme dans la Section précédente, que l'équation proposée soit représentée généralement par

$$x^{\mu} + mx^{\mu-1} + nx^{\mu-2} + px^{\mu-3} + \dots = 0,$$

et que ses racines, qui doivent être au nombre de μ , soient désignées par $x', x'', x''', x^{(4)}, \dots, x^{(\mu)}$.

Ainsi l'on aura, par la nature des équations,

$$\begin{aligned} -m &= x' + x'' + x''' + x^{(4)} + \dots, \\ n &= x'x'' + x'x''' + x'x^{(4)} + x''x''' + x''x^{(4)} + x'''x^{(4)} + \dots, \\ -p &= x'x''x''' + x'x''x^{(4)} + x'x'''x^{(4)} + x''x'''x^{(4)} + \dots, \\ &\dots\dots\dots \end{aligned}$$

Et il est clair que ces fonctions de $x', x'', x''', x^{(4)}, \dots$, par lesquelles sont exprimées les quantités $m, n, p, \dots$, seront nécessairement toutes de la forme $f[(x', x'', x''', \dots)]$, et que par conséquent ces fonctions seront toutes semblables, ce qui est une propriété fondamentale des équations.

90. Cela posé, pour commencer par les cas les plus simples, supposons que l'équation proposée ne soit que du second degré, et qu'on demande l'équation par laquelle devra être déterminée la fonction $f[(x')(x'')]$.

Je fais $t = f[(x')(x'')]$ en sorte que t soit l'inconnue de l'équation cherchée, et comme x' et x'' sont déterminées l'une et l'autre par la même équation

$$x^2 + mx + n = 0,$$

je mets, pour plus de généralité, x à la place de x' et y à la place de x'' :

j'aurai ainsi l'équation

$$t - f[(x')(y)] = 0,$$

d'où il s'agira de chasser x et y par le moyen des deux équations

$$x^2 + mx + n = 0,$$

$$y^2 + my + n = 0.$$

Soit

$$t - f[(x)(y)] = X;$$

on chassera d'abord x de l'équation $X = 0$ par le moyen de l'équation $x^2 + mx + n = 0$, ce qui donnera une équation que je désignerai par $Y = 0$, et dans laquelle Y sera une fonction rationnelle des quantités t, m, n et y . On chassera ensuite y de cette dernière équation par le moyen de l'autre équation $y^2 + my + n = 0$, et l'on aura l'équation finale $T = 0$, où T sera une fonction rationnelle de t, m et n .

Je remarque maintenant que puisque les racines de l'équation

$$x^2 + mx + n = 0$$

sont x' et x'' , si l'on désigne par X' et X'' les valeurs de X qui viennent de la substitution de ces racines à la place de x , on aura (par ce qui a été démontré dans le n° 13 de la Section I)

$$Y = X'X''.$$

Et de même, à cause que x' et x'' sont aussi les racines de l'équation $y^2 + my + n = 0$, si l'on désigne par Y' et Y'' les valeurs de Y qui résulteront de la substitution de x' et x'' à la place de y , on aura

$$T = Y'Y''.$$

Or on a

$$X' = t - f[(x')(y)],$$

$$X'' = t - f[(x'')(y)];$$

donc

$$Y = [t - f[(x')(y)]] \times [t - f[(x'')(y)]],$$

et de là

$$Y' = [t - f[(x')(x')]] \times [t - f[(x'')(x')]],$$

$$Y'' = [t - f[(x')(x'')]] \times [t - f[(x'')(x'')]].$$

done on aura

$$T = [t - f[(x')(x')]] \times [t - f[(x')(x'')]] \times [t - f[(x'')(x')]] \times [t - f[(x'')(x'')]].$$

Or, si l'on considère la fonction $f[(x)^2]$ et qu'on fasse $t - f[(x)^2] = \xi$; qu'on élimine ensuite x de l'équation $\xi = 0$, par le moyen de l'équation $x^2 + mx + n = 0$, on aura l'équation $\theta = 0$, où θ sera une fonction rationnelle de t et de m, n . Et désignant par ξ' et ξ'' les valeurs de ξ qui résultent de la substitution de x', x'' à la place de x , on aura

$$\theta = \xi'\xi''.$$

Mais on a

$$\xi' = t - f[(x')^2],$$

$$\xi'' = t - f[(x'')^2];$$

done

$$\theta = [t - f[(x')^2]] \times [t - f[(x'')^2]].$$

Faisons

$$\Theta = [t - f[(x')(x')]] \times [t - f[(x'')(x')]],$$

et l'on aura $T = \Theta\theta$, et par conséquent $\Theta = \frac{T}{\theta}$; de sorte que, comme T et θ sont des fonctions rationnelles de t, m et n , il est clair que Θ sera aussi une fonction rationnelle de t, m, n .

Ainsi l'équation $T = 0$ pourra se décomposer en ces deux-ci $\theta = 0$ et $\Theta = 0$; et comme la première est celle qui donne la valeur de $f[(x)^2]$, il s'ensuit que la détermination de la fonction proposée $f[(x')(x'')]$ dépendra uniquement de l'autre équation $\Theta = 0$.

Donc, pour trouver cette équation $\Theta = 0$ qui résout le Problème, il n'y aura qu'à éliminer des équations

$$t - f[(x)(y)] = 0,$$

$$t - f[(x)^2] = 0,$$

les inconnues x et y par le moyen des équations

$$x^2 + mx + n = 0,$$

$$y^2 + my + n = 0,$$

et désignant par $T=0$ et $\theta=0$ les équations résultantes on aura sur-le-champ $\Theta = \frac{T}{\theta}$.

91. On voit par l'expression de Θ que l'équation $\Theta=0$, qui doit servir à déterminer la valeur de la fonction $f[(x')(x'')]$, est du second degré, et que ses deux racines sont $f[(x')(x'')]$ et $f[(x'')(x')]$. En effet, comme les racines x' et x'' sont déterminées de la même manière par l'équation $x^2+mx+n=0$, il est clair que les deux fonctions $f[(x')(x'')]$ et $f[(x'')(x')]$, qui ne diffèrent entre elles que par l'échange mutuel des racines x' , x'' , devront être aussi déterminées par une même équation.

Si la fonction $f[(x')(x'')]$ était de la forme $f[(x', x'')]$, en sorte que l'on eût (88)

$$f[(x')(x'')] = f[(x')(x')],$$

alors on aurait

$$\Theta = [t - f[(x', x'')]]^2;$$

par conséquent l'équation $\Theta=0$ deviendra simplement

$$t - f[(x', x'')] = 0;$$

d'où l'on voit que la fonction dont il s'agit sera déterminée dans ce cas par une équation linéaire; par conséquent elle sera donnée par une expression rationnelle en m et n .

92. Qu'on demande maintenant l'équation par laquelle devra être déterminée la fonction $f[(x')(x'')(x''')]$, en supposant que x' , x'' , x''' soient les racines de l'équation du troisième degré

$$x^3 + mx^2 + nx + p = 0.$$

Prenant, comme ci-dessus, t pour l'inconnue de cette équation, et mettant x , y , z à la place de x' , x'' , x''' , j'aurai l'équation

$$t - f[(x)(y)(z)] = 0,$$

d'où il s'agira d'éliminer successivement x , y , z par le moyen des trois

équations

$$x^3 + mx^2 + nx + p = 0,$$

$$y^3 + my^2 + ny + p = 0,$$

$$z^3 + mz^2 + nz + p = 0.$$

Soit

$$t - f[(x)(y)(z)] = X;$$

qu'on élimine d'abord de l'équation $X=0$ la quantité x par le moyen de l'équation en x , on aura une seconde équation que je désignerai par $Y=0$, et où Y sera une fonction rationnelle de t , y , z , et des coefficients m , n , p . Qu'on élimine ensuite y de l'équation $Y=0$ par le moyen de l'équation en y , on aura une troisième équation, que je désignerai par $Z=0$, et où Z sera une fonction rationnelle de t , z et des coefficients m , n , p . Qu'on élimine enfin de cette équation $Z=0$ la quantité z , par le moyen de l'équation en z , on aura une équation finale, qu'on pourra désigner par $T=0$, et où T sera une fonction rationnelle de t , m , n , p .

Or, puisque les racines de l'équation en x sont x' , x'' , x''' , si l'on désigne par X' , X'' , X''' les valeurs de X qui résultent des substitutions de ces racines à la place de x , on aura, par le n° 13.

$$Y = X'X''X'''.$$

De même, puisque les racines de l'équation en y sont aussi x' , x'' , x''' , si l'on dénote par Y' , Y'' , Y''' les valeurs de Y qui résultent des substitutions de ces racines à la place de y , on aura par la même raison

$$Z = Y'Y''Y'''.$$

Enfin, comme l'équation en z a aussi les mêmes racines x' , x'' , x''' , dénotant par Z' , Z'' , Z''' les valeurs de Z qui résultent de leurs substitutions à la place de z , on aura

$$T = Z'Z''Z'''.$$

Mais il est clair qu'on aura

$$X' = t - f[(x')(y)(z)],$$

$$X'' = t - f[(x'')(y)(z)],$$

$$X''' = t - f[(x''')(y)(z)].$$

Donc

$$Y = [t - f[(x') (y) (z)]] \times [t - f[(x'') (y) (z)]] \times [t - f[(x''') (y) (z)]].$$

De là on aura

$$Y' = [t - f[(x') (x'') (z)]] \times [t - f[(x'') (x'') (z)]] \times [t - f[(x''') (x'') (z)]].$$

$$Y'' = [t - f[(x') (x'') (z)]] \times [t - f[(x'') (x'') (z)]] \times [t - f[(x''') (x'') (z)]].$$

$$Y''' = [t - f[(x') (x'') (z)]] \times [t - f[(x'') (x'') (z)]] \times [t - f[(x''') (x'') (z)]].$$

Donc

$$\begin{aligned} Z &= [t - f[(x') (x'') (z)]] \times [t - f[(x') (x'') (z)]] \times [t - f[(x'') (x'') (z)]] \\ &\times [t - f[(x'') (x'') (z)]] \times [t - f[(x'') (x'') (z)]] \times [t - f[(x'') (x'') (z)]] \\ &\times [t - f[(x'')^2 (z)]] \times [t - f[(x'')^2 (z)]] \times [t - f[(x'')^2 (z)]]. \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} Z' &= [t - f[(x') (x'') (x'')]] \times [t - f[(x') (x'') (x'')]] \times [t - f[(x'') (x'') (x'')]] \\ &\times [t - f[(x'') (x'') (x'')]] \times [t - f[(x'') (x'')^2]] \times [t - f[(x'') (x'')^2]] \\ &\times [t - f[(x'')^2]] \times [t - f[(x'')^2 (x'')]] \times [t - f[(x'')^2 (x'')]]. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Z'' &= [t - f[(x') (x'') (x'')]] \times [t - f[(x') (x'') (x'')]] \times [t - f[(x'') (x'') (x'')]] \\ &\times [t - f[(x'') (x'') (x'')]] \times [t - f[(x'') (x'') (x'')]] \times [t - f[(x'') (x'')^2]] \\ &\times [t - f[(x'')^2 (x'')]] \times [t - f[(x'')^2 (x'')]] \times [t - f[(x'')^2 (x'')]]. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Z''' &= [t - f[(x') (x'') (x'')]] \times [t - f[(x') (x'') (x'')]] \times [t - f[(x'') (x'') (x'')]] \\ &\times [t - f[(x'') (x'') (x'')]] \times [t - f[(x'') (x'') (x'')]] \times [t - f[(x'') (x'') (x'')]] \\ &\times [t - f[(x'')^2 (x'')]] \times [t - f[(x'')^2 (x'')]] \times [t - f[(x'')^2 (x'')]]. \end{aligned}$$

Donc enfin, si l'on multiplie ces trois quantités ensemble, et qu'on fasse,

pour abréger,

$$\Theta = [t - f[(x') (x'') (x'')]] \times [t - f[(x'') (x'') (x'')]] \times [t - f[(x'') (x'') (x'')]] \\ \times [t - f[(x'') (x'') (x'')]] \times [t - f[(x'') (x'') (x'')]] \times [t - f[(x'') (x'') (x'')]].$$

$$\theta = [t - f[(x')^2]] \times [t - f[(x'')^2]] \times [t - f[(x'')^2]],$$

$$\begin{aligned} \theta_1 &= [t - f[(x')^2 (x'')]] \times [t - f[(x'')^2 (x'')]] \times [t - f[(x'')^2 (x'')]] \\ &\times [t - f[(x')^2 (x'')]] \times [t - f[(x'')^2 (x'')]] \times [t - f[(x'')^2 (x'')]]. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \theta_2 &= [t - f[(x') (x'')^2]] \times [t - f[(x'') (x'')^2]] \times [t - f[(x'') (x'')^2]] \\ &\times [t - f[(x') (x'')^2]] \times [t - f[(x'') (x'')^2]] \times [t - f[(x'') (x'')^2]]. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \theta_3 &= [t - f[(x') (x'') (x'')]] \times [t - f[(x'') (x'') (x'')]] \times [t - f[(x'') (x'') (x'')]] \\ &\times [t - f[(x') (x'') (x'')]] \times [t - f[(x'') (x'') (x'')]] \times [t - f[(x'') (x'') (x'')]]. \end{aligned}$$

on aura

$$T = \Theta \theta \theta_1 \theta_2 \theta_3.$$

Maintenant je remarque que, si l'on suppose

$$t - f[(x')^2] = 0,$$

et qu'on élimine x par le moyen de l'équation en x ,

$$x^2 + mx + nx + p = 0,$$

on trouvera, comme dans le numéro précédent, l'équation finale $\theta = 0$, de sorte que θ sera nécessairement une fonction rationnelle de t et des coefficients m, n, p .

On trouvera, par les mêmes principes, que si l'on fait

$$t - f[(x')^2 (y)] = 0,$$

et qu'on élimine successivement x et y par le moyen des deux équations en x et en y , savoir

$$x^2 + mx + nx + p = 0,$$

$$y^2 + my + ny + p = 0,$$

on aura, pour équation finale, $\theta \theta_1 = 0$, où la quantité $\theta \theta_1$ sera par conséquent une fonction rationnelle de t, m, n, p ; et comme θ en est une aussi, il s'ensuit que θ_1 sera de même une fonction rationnelle de t et de m, n, p .

Pareillement, si l'on fait

$$t - f[(x)(y)^2] = 0$$

et qu'on élimine x et y par les mêmes équations, on trouvera cette équation finale $\theta \theta_2 = 0$, dans laquelle la quantité $\theta \theta_2$ sera donc une fonction rationnelle de t, m, n, p ; de sorte que la quantité θ_2 en sera une aussi.

Enfin, si l'on fait

$$t - f[(x)(y)(x)] = 0,$$

et qu'on élimine de même x et y , on trouvera pour équation finale $\theta \theta_3 = 0$; de sorte que la quantité $\theta \theta_3$ sera une fonction rationnelle de t, m, n, p , et par conséquent la quantité θ_3 en sera aussi une.

Donc, puisque les quantités $\theta, \theta_1, \theta_2, \theta_3$ sont chacune des fonctions rationnelles de t et des coefficients m, n, p , il s'ensuit que l'équation

$$T = 0, \text{ savoir } \theta \theta_1 \theta_2 \theta_3 = 0,$$

pourra se décomposer en celles-ci

$$\theta = 0, \theta_1 = 0, \theta_2 = 0, \theta_3 = 0 \text{ et } \theta = 0;$$

de sorte que la quantité θ sera aussi une fonction rationnelle de t, m, n, p .

Or il est facile de voir que les équations

$$\theta = 0, \theta_1 = 0, \theta_2 = 0, \theta_3 = 0$$

sont toutes étrangères à la question proposée, c'est-à-dire à la détermination de la fonction $f[(x')(x'')(x'')]$; car ces équations, comme il paraît par les expressions des quantités $\theta, \theta_1, \theta_2, \theta_3$, ont pour racines des fonctions de x', x'', x''' d'une forme différente de la proposée; ainsi il ne restera que l'équation $\theta = 0$, qui renfermera par conséquent toutes les racines utiles à la solution du Problème.

93. Pour trouver donc cette équation $\theta = 0$, il n'y aura qu'à éliminer des cinq équations

$$t - f[(x)(y)(z)] = 0,$$

$$t - f[(x)^2(y)] = 0,$$

$$t - f[(x)(y)^2] = 0,$$

$$t - f[(x)(y)(x)] = 0,$$

$$t - f[(x)^3] = 0,$$

les inconnues x, y, z par le moyen des équations

$$x^3 + mx^2 + nx + p = 0,$$

$$y^3 + my^2 + ny + p = 0,$$

$$z^3 + mz^2 + nz + p = 0;$$

et, désignant les équations finales résultantes par

$$T = 0, T_1 = 0, T_2 = 0, T_3 = 0, \theta = 0,$$

on aura

$$T_1 = \theta \theta_1, T_2 = \theta \theta_2, T_3 = \theta \theta_3, T = \theta \theta_1 \theta_2 \theta_3;$$

par conséquent

$$\theta = \frac{T \theta_1}{T_1 T_2 T_3}.$$

Cette méthode au reste serait extrêmement longue et pénible dans la pratique, et elle le deviendrait de plus en plus, à mesure que l'équation proposée serait d'un degré plus haut; aussi ne l'ai-je donnée ici que parce qu'elle sert à faire connaître, d'une manière directe et indépendante de toute considération étrangère, la nature de l'équation cherchée $\theta = 0$.

94. En effet il est visible, par l'expression de θ donnée ci-dessus (92), que la réduite $\theta = 0$ sera du sixième degré, ayant pour racines les fonctions

$$f[(x')(x'')(x''')], f[(x')(x')(x'')], f[(x'')(x'')(x')],$$

$$f[(x')(x'')(x'')], f[(x'')(x')(x')], f[(x'')(x'')(x')],$$

lesquelles sont toutes semblables, et dérivent l'une de l'autre par de

simples permutations entre les quantités x', x'', x''' ; il est clair en effet que, comme ces quantités sont toutes déterminées de la même manière par l'équation

$$x^3 + mx^2 + nx + p = 0,$$

dont elles sont les racines, l'équation qui donnera la valeur d'une fonction quelconque des mêmes quantités devra donner également les autres fonctions qui viendront de toutes les permutations possibles entre elles. Cette proposition paraît même assez évidente par elle-même pour n'avoir pas besoin de démonstration; mais on ne voit pas aussi évidemment, ce me semble, que l'équation dont il s'agit ne devra contenir d'autres racines que les différentes fonctions qui viendront des permutations entre les racines de la proposée; c'est-à-dire qu'en supposant cette équation formée du produit des facteurs simples

$$t - f[(x')(x'')(x''')], \quad t - f[(x'')(x')(x''')], \dots,$$

chacun des coefficients pourra toujours s'exprimer par une fonction rationnelle des coefficients $m, n, \dots$ de l'équation proposée; or c'est sur quoi notre démonstration ne laisse aucun doute, puisque l'on a vu que la quantité Θ , qui est égale à ce produit, est toujours nécessairement une fonction rationnelle de $t, m, n, \dots$.

95. Si l'équation proposée était d'un degré plus haut, en sorte qu'elle eût quatre ou un plus grand nombre de racines $x', x'', x''', x^{iv}, \dots$, on pourrait trouver de même l'équation $\Theta = 0$, qui servirait à déterminer la fonction $f[(x')(x'')(x''')(x^{iv})]$; et l'on verrait que la quantité Θ serait le produit d'autant de facteurs simples tels que

$$\begin{aligned} t - f[(x')(x'')(x''')(x^{iv})], \\ t - f[(x'')(x')(x''')(x^{iv})], \\ t - f[(x''')(x')(x'')(x^{iv})], \\ t - f[(x'')(x'')(x')(x^{iv})], \\ \dots \end{aligned}$$

qu'il y a de permutations possibles entre les racines $x', x'', x''', x^{iv}, \dots$; de sorte que, si l'équation proposée est du degré μ , le nombre des fac-

teurs simples de la quantité Θ , et par conséquent le nombre des racines de l'équation $\Theta = 0$ sera marqué par $1.2.3\dots\mu$, puisque ce nombre est celui de toutes les permutations dont μ choses sont susceptibles; et les racines de cette équation seront les différentes fonctions dans lesquelles la fonction proposée $f[(x')(x'')(x''')]$ pourra se changer par les permutations des racines $x', x'', x''', \dots$ entre elles.

96. Or, pour trouver toutes ces différentes fonctions par ordre et sans en omettre aucune, on échangera d'abord, dans la fonction proposée, x'' en x' et *vice versa*; on aura ainsi deux fonctions; ensuite on échangera successivement dans ces deux-ci x''' en x' , en x'' , et l'on aura six fonctions; puis dans ces six on échangera successivement x^{iv} en x' , en x'' , en x''' et l'on aura vingt-quatre fonctions, et ainsi de suite, jusqu'à ce que l'on ait épuisé toutes les racines $x', x'', x''', \dots$.

D'où l'on voit clairement que le nombre des fonctions différentes doit croître suivant les produits des nombres naturels

$$1, \quad 1.2, \quad 1.2.3, \quad 1.2.3.4, \quad \dots, \quad 1.2.3.4.5\dots\mu.$$

Ayant toutes ces fonctions on aura donc les racines de l'équation $\Theta = 0$; de sorte que, si on la représente par

$$t^{\pi} - Mt^{\pi-1} + Nt^{\pi-2} - Pt^{\pi-3} + \dots = 0,$$

on aura $\pi = 1.2.3.4\dots\mu$; et le coefficient M sera égal à la somme de toutes les fonctions trouvées, le coefficient N égal à la somme de tous les produits de ces fonctions multipliées deux à deux, le coefficient P égal à la somme de tous les produits des mêmes fonctions multipliées trois à trois, et ainsi de suite.

Et comme nous avons démontré ci-dessus que l'expression de Θ doit être nécessairement une fonction rationnelle de t et des coefficients $m, n, p, \dots$ de l'équation proposée, il s'ensuit que les quantités $M, N, P, \dots$ seront nécessairement des fonctions rationnelles de $m, n, p, \dots$ qu'on pourra trouver directement, comme nous l'avons pratiqué dans les Sections précédentes. Voyez là-dessus, outre l'Ouvrage de M. Cramer que nous avons déjà cité, encore celui de M. Waring, qui a pour titre *Medi-*

tationes algebraice, Ouvrage rempli d'excellentes recherches sur les équations.

97. Quoique l'équation $\Theta = 0$ doive être, en général, du degré $1.2.3 \dots \mu = \pi$, qui est égal au nombre des permutations dont les μ racines $x', x'', x''', \dots$ sont susceptibles, cependant s'il arrive que la fonction soit telle, qu'elle ne reçoive aucun changement par quelqu'une ou quelques-unes de ces permutations, alors l'équation dont il s'agit s'abaissera nécessairement à un degré moindre.

Car supposons, par exemple, que la fonction $f[(x')(x'')(x''')(x^{(iv)} \dots)]$ soit telle, qu'elle conserve la même valeur en échangeant x' en x'' , x'' en x' , et x''' en x''' , en sorte que l'on ait

$$f[(x')(x'')(x''')(x^{(iv)} \dots)] = f[(x'')(x')(x''')(x^{(iv)} \dots)],$$

il est clair que l'équation $\Theta = 0$ aura déjà deux racines égales; mais je vais prouver que dans cette hypothèse toutes les autres racines seront aussi égales deux à deux. En effet, considérons une racine quelconque de la même équation, laquelle soit représentée par la fonction

$$f[(x^{(iv)})(x^{(v)})(x')(x'')(x''') \dots],$$

comme celle-ci dérive de la fonction

$$f[(x')(x'')(x''')(x^{(iv)})(x^{(v)} \dots)],$$

en échangeant x' en $x^{(iv)}$, x'' en $x^{(v)}$, x''' en x' , $x^{(iv)}$ en x'' , il s'ensuit qu'elle devra garder aussi la même valeur en y changeant $x^{(iv)}$ en x'' , $x^{(v)}$ en x' et x' en $x^{(iv)}$; de sorte qu'on aura aussi

$$f[(x^{(iv)})(x^{(v)})(x')(x'')(x''') \dots] = f[(x'')(x')(x^{(iv)})(x^{(v)})(x''') \dots].$$

Donc, dans ce cas, la quantité Θ sera égale à un carré ϑ^2 , et par conséquent l'équation $\Theta = 0$ se réduira à celle-ci $\vartheta = 0$, dont la dimension sera $\frac{\pi}{2}$.

On démontrera de la même manière que, si la fonction

$$f[(x')(x'')(x''')(x^{(iv)})(x^{(v)})(x^{(vi)} \dots)]$$

est de sa propre nature telle, qu'elle conserve la même valeur en faisant deux, ou trois, ou un plus grand nombre de permutations différentes entre les racines $x', x'', x''', x^{(iv)}, \dots$, les racines de l'équation $\Theta = 0$ seront égales trois à trois, ou quatre à quatre, ou, etc.; en sorte que la quantité Θ sera égale à un cube ϑ^3 , ou à un carré-carré ϑ^4 , ou, etc., et que par conséquent l'équation $\Theta = 0$ se réduira à celle-ci $\vartheta = 0$, dont le degré sera égal à $\frac{\pi}{3}$, ou égal à $\frac{\pi}{4}$, ou, etc.

98. Donc, si la fonction proposée est de la forme

$$f[(x')(x'')(x''')(x^{(iv)} \dots)]$$

qui a la propriété de demeurer la même en échangeant x' en x'' (88), toutes les racines de l'équation $\Theta = 0$ seront égales deux à deux; de sorte que cette équation s'abaissera au degré $\frac{1.2.3 \dots \mu}{2}$.

De même la fonction

$$f[(x', x'')(x''')(x^{(iv)})(x^{(v)} \dots)]$$

devant demeurer la même, quelque permutation qu'on y fasse entre les trois racines x', x'', x''' , il s'ensuit que l'équation $\Theta = 0$ aura toutes ses racines égales 1.2.3 à 1.2.3; de sorte qu'elle s'abaissera au degré $\frac{1.2.3 \dots \mu}{1.2.3}$.

Et la fonction

$$f[(x', x'')(x''')(x^{(iv)})(x^{(v)})(x^{(vi)} \dots)],$$

qui doit demeurer la même, quelque permutation qu'on fasse entre les deux racines x', x'' , ainsi qu'entre les deux $x''', x^{(iv)}$, donnera une équation $\Theta = 0$ où les racines seront toutes égales 1.2 à 1.2 à 1.2 à 1.2; de sorte qu'elle s'abaissera au degré $\frac{1.2.3 \dots \mu}{1.2 \times 1.2}$.

En général, la fonction

$$f[(x', x'', x''', \dots, x^{(n)}) (x^{(n+1)}, x^{(n+2)}, x^{(n+3)}, \dots, x^{(n+p+1)}) (x^{(n+p+2)}, \dots)]$$

donnera une équation $\Theta = 0$, où la quantité Θ sera une puissance qui

aura pour exposant le nombre $1.2.3\dots\alpha \times 1.2.3\dots\beta \times 1.2.3\dots$, de manière que cette équation s'abaissera au degré $\frac{1.2.3.4\dots\mu}{1.2.3\dots\alpha \times 1.2.3\dots\beta \times 1.2.3\dots}$.

On voit par là que toute fonction de la forme

$$f[(x', x'', x''', \dots, x^{(p)})],$$

qui aura la propriété de demeurer la même, quelque permutation qu'on fasse entre les racines $x', x'', x''', \dots, x^{(p)}$ de l'équation proposée, devra dépendre seulement d'une équation du degré $\frac{1.2.3.4\dots\mu}{1.2.3\dots\mu} = 1$, c'est-à-dire du premier degré; de sorte qu'elle devra être déterminable algébriquement et rationnellement par les coefficients $m, n, p, \dots$ de la proposée; théorème que nous avons déjà supposé dans les Sections précédentes comme évident par soi-même, mais dont la démonstration rigoureuse dépend des principes établis ci-dessus.

On peut aussi conclure de ce qui précède que, si l'on a une fonction quelconque qui ne contienne qu'un nombre λ des μ racines $x', x'', x''', \dots$, en sorte qu'elle soit représentée par

$$f[(x')(x'')(x''')\dots(x^{(\lambda)})],$$

elle conduira simplement à une équation du degré $\frac{1.2.3.4\dots\mu}{1.2.3\dots(\mu-\lambda)}$; car il est clair qu'on peut regarder la fonction proposée comme étant de la forme

$$f[(x')(x'')(x''')\dots(x^{(\lambda)})(x^{(\lambda+1)})(x^{(\lambda+2)}), \dots, x^{(p)}],$$

en supposant, ce qui est permis, que les racines $x^{(\lambda+1)}, x^{(\lambda+2)}, \dots, x^{(p)}$ y soient multipliées par des coefficients égaux à zéro ou élevées à des exposants égaux à zéro.

Donc la fonction

$$f[(x', x'')(x''', x^{(4)}, x^{(5)}, \dots, x^{(\lambda)})]$$

conduira à une équation du degré $\frac{1.2.3\dots\mu}{1.2 \times 1.2.3\dots(\mu-\lambda)}$, et ainsi des autres.

Et la fonction

$$f[(x', x'', x''', \dots, x^{(\lambda)})]$$

conduira à une équation du degré

$$\frac{1.2.3\dots\mu}{1.2.3\dots\lambda \times 1.2.3\dots(\mu-\lambda)} = \frac{\mu(\mu-1)(\mu-2)\dots(\mu-\lambda+1)}{1.2.3\dots\lambda}.$$

Ainsi, si l'on voulait abaisser, en général, l'équation proposée du degré μ à une équation d'un degré inférieur λ , telle que

$$x^\lambda + ax^{\lambda-1} + bx^{\lambda-2} + \dots = 0,$$

laquelle eût toutes ses racines communes avec la proposée, c'est-à-dire dont les racines fussent $x', x'', x''', \dots, x^{(\lambda)}$, on tomberait nécessairement dans une équation du degré

$$\frac{\mu(\mu-1)(\mu-2)\dots(\mu-\lambda+1)}{1.2.3\dots\lambda}$$

pour la détermination de chaque coefficient $a, b, c, \dots$; car ces coefficients seraient nécessairement des fonctions de la forme

$$f[(x', x'', x''', \dots, x^{(\lambda)})],$$

comme on l'a fait remarquer dans le n° 89. C'est aussi une proposition connue depuis longtemps, mais qu'on n'avait pas encore, ce me semble, démontrée en toute rigueur.

Or, comme en prenant λ moindre que μ le nombre

$$\frac{\mu(\mu-1)(\mu-2)\dots(\mu-\lambda+1)}{1.2.3\dots\lambda}$$

ne peut jamais être plus petit que μ , il s'ensuit que l'on ne peut rien se promettre de ces sortes de réductions pour la résolution générale des équations.

99. De tout ce que nous venons de démontrer il s'ensuit donc, en général : 1° que toutes les fonctions *semblables* des racines $x', x'', x''', \dots$ d'une même équation sont nécessairement données par des équations du même degré; 2° que ce degré sera toujours égal au nombre $1.2.3\dots\mu$ (μ étant le degré de l'équation donnée), ou à un sous-multiple de ce

où les termes $M, M_1, M_2, \dots, M_{(m-1)}$ seront des quantités connues en $m, n, p, \dots$

Il s'agit maintenant de tirer de ces π équations, par la voie de l'élimination, les valeurs des π inconnues $y', y'', y''', \dots, y^{(\pi)}$; or, si l'on suivait pour cela la méthode ordinaire, on tomberait dans des expressions fort compliquées et qui auraient d'ailleurs l'inconvénient de renfermer à la fois toutes les quantités $t', t'', t''', \dots$; il faudra donc employer une autre méthode, et voici celle qui m'a paru la plus propre.

Je prends un nombre $\pi - 1$ de quantités indéterminées que je désigne par $N_1, N_2, N_3, \dots, N_{(\pi-1)}$, et je multiplie respectivement par ces quantités toutes les équations précédentes, excepté la première; après quoi je les ajoute ensemble, ce qui me donne cette équation unique

$$\begin{aligned} & M + M_1 N_1 + M_2 N_2 + M_3 N_3 + \dots + M_{(\pi-1)} N_{(\pi-1)} \\ &= (1 + N_1 t' + N_2 t'^2 + N_3 t'^3 + \dots + N_{(\pi-1)} t'^{(\pi-1)}) y' \\ &+ (1 + N_1 t'' + N_2 t''^2 + N_3 t''^3 + \dots + N_{(\pi-1)} t''^{(\pi-1)}) y'' \\ &+ (1 + N_1 t''' + N_2 t'''^2 + N_3 t'''^3 + \dots + N_{(\pi-1)} t'''^{(\pi-1)}) y''' \\ &\dots \dots \dots \\ &+ (1 + N_1 t^{(\pi)} + N_2 t^{(\pi)2} + N_3 t^{(\pi)3} + \dots + N_{(\pi-1)} t^{(\pi)(\pi-1)}) y^{(\pi)}. \end{aligned}$$

Supposons, en général,

$$T = 1 + N_1 t + N_2 t^2 + N_3 t^3 + \dots + N_{(\pi-1)} t^{(\pi-1)},$$

et désignons par $T', T'', \dots, T^{(\pi)}$ les valeurs particulières de T , que l'on aura en faisant successivement $t = t', t'', \dots, t^{(\pi)}$; il est clair que l'équation précédente se réduira à cette forme très-simple

$$\begin{aligned} & T' y' + T'' y'' + T''' y''' + \dots + T^{(\pi)} y^{(\pi)} \\ &= M + M_1 N_1 + M_2 N_2 + M_3 N_3 + \dots + M_{(\pi-1)} N_{(\pi-1)}. \end{aligned}$$

Maintenant, pour trouver la valeur d'une quelconque des inconnues $y', y'', y''', \dots$, comme de $y^{(\pi)}$, il est clair qu'il n'y aura qu'à faire évanouir les coefficients de toutes les autres inconnues, à l'exception de celle-ci, et l'on aura sur-le-champ

$$y^{(\pi)} = \frac{M + M_1 N_1 + M_2 N_2 + M_3 N_3 + \dots + M_{(\pi-1)} N_{(\pi-1)}}{T^{(\pi)}}.$$

Et les équations

$$T' = 0, \quad T'' = 0, \quad T''' = 0, \dots, \quad T^{(\pi)} = 0,$$

à l'exception de $T^{(\pi)} = 0$, serviront à déterminer les $\pi - 1$ indéterminées $N_1, N_2, N_3, \dots, N_{(\pi-1)}$.

En effet, pour que toutes ces équations particulières aient lieu à la fois, il est visible qu'il faudra que l'équation générale $T = 0$ ait pour racines les quantités $t', t'', t''', \dots, t^{(\pi)}$, à l'exception seulement de $t^{(\pi)}$; donc, si l'on multiplie le polynôme T , dont le terme tout connu est l'unité, par le facteur $1 - \frac{t}{t^{(\pi)}}$, on aura le polynôme $T \left(1 - \frac{t}{t^{(\pi)}}\right)$, qui étant égal à zéro aura pour racines toutes les quantités $t', t'', t''', \dots, t^{(\pi)}$; mais ces racines sont déjà celles de l'équation $\theta = 0$; donc, puisque le terme tout connu, tant du polynôme $T \left(1 - \frac{t}{t^{(\pi)}}\right)$ que du polynôme θ , est égal à l'unité, il s'ensuit qu'on aura l'équation

$$T \left(1 - \frac{t}{t^{(\pi)}}\right) = \theta,$$

ou bien

$$1 + \left(N_1 - \frac{1}{t^{(\pi)}}\right) t + \left(N_2 - \frac{N_1}{t^{(\pi)}}\right) t^2 + \left(N_3 - \frac{N_2}{t^{(\pi)}}\right) t^3 + \dots = 1 + A t + B t^2 + C t^3 + \dots$$

d'où, à cause que cette équation doit être identique, on tire

$$N_1 - \frac{1}{t^{(\pi)}} = A, \quad N_2 - \frac{N_1}{t^{(\pi)}} = B, \quad N_3 - \frac{N_2}{t^{(\pi)}} = C, \dots,$$

et de là

$$\begin{aligned} N_1 &= A + \frac{1}{t^{(\pi)}}, \\ N_2 &= B + \frac{A}{t^{(\pi)}} + \frac{1}{t^{(\pi)2}}, \\ N_3 &= C + \frac{B}{t^{(\pi)}} + \frac{A}{t^{(\pi)2}} + \frac{1}{t^{(\pi)3}}, \\ &\dots \dots \dots \end{aligned}$$

Maintenant, pour trouver la valeur de la quantité $T^{(\pi)}$, on remarquera

III.

que l'on a, en général,

$$T = \frac{\theta}{1 - \frac{t}{t^{(p)}}},$$

de sorte qu'il n'y aura qu'à faire dans cette expression $t = t^{(p)}$; mais, comme cette supposition fait évanouir en même temps le numérateur θ , parce que $t^{(p)}$ est une des racines de l'équation $\theta = 0$, et le dénominateur $1 - \frac{t}{t^{(p)}}$, il faudra, suivant la règle connue, prendre à la place de ces quantités leurs différences; ainsi l'on aura, en faisant varier t , la fraction $-\frac{d\theta}{dt} : \frac{1}{t^{(p)}}$; ainsi, la valeur de $T^{(p)}$ sera égale à ce que devient la quantité $-\frac{d\theta}{dt}$ lorsqu'on y met $t^{(p)}$ à la place de t , ce qu'on peut désigner ainsi

$$T^{(p)} = \left(-t \frac{d\theta}{dt} \right)^{(p)},$$

ou bien, en substituant la valeur de θ et changeant, après la différentiation, t en $t^{(p)}$,

$$T^{(p)} = -A t^{(p)} - 2B t^{(p)^2} - 3C t^{(p)^3} - \dots$$

Il n'y aura donc plus qu'à substituer cette valeur de $T^{(p)}$, ainsi que celles de $N_1, N_2, N_3, \dots$, trouvées ci-dessus, dans l'expression générale de $y^{(p)}$, donnée plus haut, et l'on aura la valeur de la fonction $y^{(p)}$ exprimée uniquement par celle de la fonction correspondante donnée $t^{(p)}$ et par les coefficients $m, n, p, \dots$ de l'équation proposée.

Toute la difficulté se réduit donc à trouver tant les coefficients $A, B, C, \dots$ de l'équation en t

$$1 + At + Bt^2 + Ct^3 + \dots = 0,$$

que les quantités $M, M_1, M_2, M_3, \dots$; c'est à quoi l'on peut parvenir par différentes méthodes, comme on l'a vu plus haut; l'essentiel consiste à remarquer que toutes ces quantités seront toujours exprimables algébriquement par les seuls coefficients $m, n, p, \dots$ de l'équation proposée; ce que nous avons démontré *à priori* avec toute la rigueur possible.

Ces quantités étant donc trouvées, si l'on fait, pour plus de simplicité,

$$\begin{aligned} P &= M + AM_1 + BM_2 + CM_3 + \dots, \\ Q &= M_1 + AM_2 + BM_3 + \dots, \\ R &= M_2 + AM_3 + \dots, \\ &\dots \dots \dots \end{aligned}$$

on aura, pour la valeur d'une y quelconque,

$$y = -\frac{\frac{P}{t} + \frac{Q}{t^2} + \frac{R}{t^3} + \dots}{A + 2Bt + 3Ct^2 + 4Dt^3 + \dots},$$

en prenant pour t la fonction correspondante à la fonction y .

101. Il est évident que cette solution servira toujours, quelle que soit la valeur donnée de t , pourvu qu'elle ne rende pas nul le dénominateur

$$A + 2Bt + 3Ct^2 + \dots = \frac{d\theta}{dt};$$

or, comme la valeur de t doit déjà être une racine de l'équation $\theta = 0$, il s'ensuit que le cas de $\frac{d\theta}{dt} = 0$ n'aura lieu que lorsque cette valeur sera une racine multiple de la même équation $\theta = 0$.

Pour trouver ce qui doit arriver dans ce cas-là, supposons que t' soit la valeur donnée de t , laquelle répond à la valeur cherchée y' de y , et que dans la suite des valeurs $t', t'', t''', \dots, t^{(n)}$, il s'en trouve une autre comme t'' qui soit égale à t' , en sorte que la valeur donnée t' soit une racine double de l'équation $\theta = 0$; considérant d'abord les valeurs t' et t'' comme inégales, on aura

$$y' = -\frac{\frac{P}{t'} + \frac{Q}{t'^2} + \frac{R}{t'^3} + \dots}{A + 2Bt' + 3Ct'^2 + 4Dt'^3 + \dots},$$

$$y'' = -\frac{\frac{P}{t''} + \frac{Q}{t''^2} + \frac{R}{t''^3} + \dots}{A + 2Bt'' + 3Ct''^2 + 4Dt''^3 + \dots};$$

et, comme

$$1 + At + Bt^2 + Ct^3 + \dots = \theta = \left(1 - \frac{t}{t'}\right) \left(1 - \frac{t}{t''}\right) \left(1 - \frac{t}{t'''}\right) \dots,$$

on aura, en différenciant et faisant successivement $t = t'$, $t = t''$,

$$A + 2Bt' + 3Ct'^2 + \dots = -\frac{1}{t'} \left(1 - \frac{t'}{t'}\right) \left(1 - \frac{t'}{t''}\right) \left(1 - \frac{t'}{t'''}\right) \dots,$$

$$A + 2Bt'' + 3Ct''^2 + \dots = -\frac{1}{t''} \left(1 - \frac{t''}{t'}\right) \left(1 - \frac{t''}{t''}\right) \left(1 - \frac{t''}{t'''}\right) \dots,$$

où l'on voit que dans le cas de $t' = t''$ ces deux quantités seront nulles.

Supposons pour un moment que $t'' = t' + \omega$, ω étant une quantité infiniment petite, on aura, en négligeant les infiniment petits du second ordre,

$$A + 2Bt' + 3Ct'^2 + \dots = -\frac{\omega}{t'^3} \left(1 - \frac{t'}{t'}\right) \left(1 - \frac{t'}{t''}\right) \dots,$$

$$A + 2Bt'' + 3Ct''^2 + \dots = +\frac{\omega}{t'^3} \left(1 - \frac{t'}{t'}\right) \left(1 - \frac{t'}{t''}\right) \dots$$

Donc faisant, pour abréger,

$$\Pi = \frac{1}{t'^3} \left(1 - \frac{t'}{t''}\right) \left(1 - \frac{t'}{t'''}\right) \dots,$$

on aura

$$y' = \frac{\frac{P}{t'} + \frac{Q}{t'^2} + \frac{R}{t'^3} + \dots}{\omega \Pi}, \quad y'' = -\frac{\frac{P}{t'} + \frac{Q}{t'^2} + \frac{R}{t'^3} + \dots}{\omega \Pi};$$

mais

$$\begin{aligned} \frac{P}{t'} + \frac{Q}{t'^2} + \frac{R}{t'^3} + \dots &= \frac{P}{t'} + \frac{Q}{t'^2} + \frac{R}{t'^3} + \dots + \omega \frac{d\left(\frac{P}{t'} + \frac{Q}{t'^2} + \frac{R}{t'^3} + \dots\right)}{dt'} \\ &= \frac{P}{t'} + \frac{Q}{t'^2} + \frac{R}{t'^3} + \dots - \omega \left(\frac{P}{t'^2} + \frac{2Q}{t'^3} + \frac{3R}{t'^4} + \dots\right); \end{aligned}$$

donc on aura

$$y'' = -y' + \frac{\frac{P}{t'^2} + \frac{2Q}{t'^3} + \frac{3R}{t'^4} + \dots}{\Pi},$$

et de là

$$y' + y'' = \frac{\frac{P}{t'^2} + \frac{2Q}{t'^3} + \frac{3R}{t'^4} + \dots}{\Pi}.$$

Mais, puisque

$$\theta = \left(1 - \frac{t}{t'}\right) \left(1 - \frac{t}{t''}\right) \left(1 - \frac{t}{t'''}\right) \dots = \left(1 - \frac{t}{t'}\right)^2 \left(1 - \frac{t}{t''}\right) \left(1 - \frac{t}{t'''}\right) \dots,$$

il est facile de voir qu'on aura, lorsque $t = t'$,

$$\frac{1}{2} \frac{d^2 \theta}{dt^2} = \frac{1}{t'^2} \left(1 - \frac{t'}{t''}\right) \left(1 - \frac{t'}{t'''}\right) \dots = \Pi;$$

par conséquent

$$\Pi = \frac{2B + 2.3Ct' + 3.4Dt'^2 + \dots}{2}.$$

Donc

$$\frac{y' + y''}{2} = \frac{\frac{P}{t'^2} + \frac{2Q}{t'^3} + \frac{3R}{t'^4} + \dots}{2B + 2.3Ct' + 3.4Dt'^2 + \dots}.$$

Ainsi, dans ce cas, la formule ne donnera pas la valeur de chacune des inconnues y' , y'' , qui répondent aux racines égales t' , t'' , mais seulement celle de leur somme $y' + y''$, et l'on voit, tant par l'expression précédente que par l'analyse d'où elle résulte, que la valeur de la moitié de cette somme résultera de l'expression générale de y du numéro précédent, en prenant, à la place du numérateur et du dénominateur, leurs différentielles divisées par dt .

On trouvera de la même manière que, lorsque la valeur donnée de t sera une racine triple de l'équation $\theta = 0$, en sorte que l'on ait, par exemple, $t' = t'' = t'''$, alors on ne pourra pas avoir en particulier chacune des fonctions correspondantes y' , y'' , y''' , mais seulement leur somme $y' + y'' + y'''$; et l'expression générale de y donnera le tiers de cette somme en prenant, à la place du numérateur et du dénominateur de cette expression, leurs différentielles secondes divisées par dt^2 , et ainsi de suite.

102. En général, si en substituant la valeur connue de t dans le dénominateur de l'expression générale de y du n° 101, on trouve que ce dénominateur devient nul, alors on le différenciera autant de fois de suite qu'il sera nécessaire pour qu'il ne devienne plus zéro par la même sub-

stitution, en traitant toujours les différences premières dt comme constantes; on différenciera ensuite un pareil nombre de fois le numérateur, et la nouvelle fraction qu'on aura de cette manière exprimera la somme d'autant de valeurs particulières de y qu'il y aura d'unités dans le nombre des différentiations augmenté de l'unité, cette somme étant divisée par le nombre des valeurs de y ; et ces valeurs seront celles qui répondent aux valeurs égales de t , dont le nombre, comme on sait, est toujours égal à celui des différentielles successives de t qui s'évanouissent en même temps, augmenté de l'unité.

On connaîtra donc ainsi la somme de ces différentes valeurs de y ; or, on pourra trouver de même la somme de leurs carrés, de leurs cubes, etc., car il n'y aura pour cela qu'à faire un nouveau calcul en prenant, à la place de la fonction y , son carré y^2 , et ensuite le cube y^3 , etc.; de là on tirera, par les formules connues, les valeurs des produits deux à deux, trois à trois, etc., des valeurs de y ; de sorte qu'on connaîtra tous les coefficients de l'équation dont ces valeurs seront les racines; et il faudra ensuite résoudre cette équation pour avoir chacune des valeurs cherchées en particulier.

D'où il s'ensuit que lorsque, parmi les valeurs $t', t'', \dots$ de la fonction t , il s'en trouve deux ou plusieurs qui sont égales entre elles, celles des valeurs $y', y'', y''', \dots$ qui répondent aux valeurs égales de t ne pourront pas être données simplement par une fonction rationnelle de t et des coefficients $m, n, p, \dots$ de l'équation proposée; mais elles le seront par une équation d'un degré égal au nombre de ces valeurs égales, et dont tous les coefficients seront eux-mêmes exprimés rationnellement en t et en $m, n, p, \dots$.

C'est ce qui est d'ailleurs bien naturel et conforme aux principes de l'Analyse. Car, puisqu'il y a différentes valeurs de y qui répondent à une même valeur de t , il est clair que chacune de ces valeurs de y dépendra de la même manière de la valeur correspondante de t , et qu'ainsi ces valeurs ne pourront être que les racines d'une même équation, dont les coefficients seront donnés en t par des expressions rationnelles.

Supposons, par exemple, qu'ayant une équation d'un degré quel-

conque μ , telle que

$$x^\mu + mx^{\mu-1} + nx^{\mu-2} + px^{\mu-3} + \dots = 0,$$

on veuille en trouver une autre d'un degré moindre λ , telle que

$$x^\lambda + ax^{\lambda-1} + bx^{\lambda-2} + cx^{\lambda-3} + \dots = 0,$$

qui ait toutes ses racines communes avec celle-là, c'est-à-dire qui en soit un diviseur; on sait que les coefficients $a, b, c, \dots$ seront tous des fonctions *semblables* des racines de la proposée, et qui seront susceptibles d'un nombre

$$\frac{\mu(\mu-1)(\mu-2)\dots(\mu-\lambda+1)}{1, 2, 3, \dots, \lambda}$$

de variations, en sorte que chacun de ces coefficients sera nécessairement donné en $m, n, p, \dots$ par une équation d'un degré égal à ce même nombre (nos 89 et 98). Or, dès qu'on connaîtra la valeur d'un quelconque de ces coefficients, on pourra, à l'aide du Problème que nous venons de résoudre, trouver la valeur de chacun des autres coefficients; et il s'ensuit de notre solution que si la valeur du coefficient supposé connu est une racine simple de l'équation d'où dépend la détermination de ce coefficient, tous les autres pourront être exprimés rationnellement par celui-là; mais si la valeur du coefficient connu est une racine double, ou triple, ou, etc., de la même équation, alors chacun des autres coefficients ne pourra être donné par celui-là que par le moyen d'une équation du second, ou du troisième, ou, etc., degré.

Pour confirmer *à posteriori* ce que nous venons de trouver *à priori*, prenons l'équation du quatrième degré

$$x^4 + mx^3 + nx^2 + px + q = 0,$$

et supposons, comme dans le n° 35 (Section II), qu'elle soit divisible par celle-ci du second degré

$$x^2 + fx + g = 0;$$

on parviendra, ainsi qu'on l'a déjà vu, aux deux équations de conditions

$$\begin{aligned} p - g(m-f) - f[n - g - f(m-f)] &= 0, \\ q - g[n - g - f(m-f)] &= 0, \end{aligned}$$

dont la première donne d'abord

$$g = \frac{p - nf + mf^2 - f^3}{m - 2f};$$

ainsi, ayant g exprimé rationnellement en f , il suffira de trouver la valeur de f pour avoir celle de g sans aucune extraction de racines. Cependant, s'il arrive que la valeur de f soit égale à $\frac{m}{2}$ et qu'on ait en même temps $p = \frac{mn}{2} - \frac{m^3}{8}$, cette valeur de f donnera $g = 0$; et il faudra alors, pour connaître la valeur de g , avoir recours à l'autre équation où g monte au second degré, et qui est

$$g^2 - (n - mf + f^2)g + q = 0;$$

de sorte qu'en mettant $\frac{m}{2}$ à la place de f on aura celle-ci

$$g^2 - \left(n - \frac{m^2}{4}\right)g + q = 0,$$

par la résolution de laquelle il faudra donc déterminer g . Or je dis que le cas dont il s'agit est celui où la valeur $\frac{m}{2}$ de f sera une racine double de l'équation en f .

Pour le prouver nous remarquerons que cette équation en f doit venir de la substitution de la valeur de g tirée de la première équation, dans la seconde; ainsi faisant, pour abrégér,

$$p - nf + mf^2 - f^3 = P, \quad m - 2f = Q,$$

en sorte que $g = \frac{P}{Q}$, on aura, pour l'équation en f , celle-ci

$$P^2 - (n - mf + f^2)PQ + qQ^2 = 0,$$

laquelle étant développée montera au sixième degré et se trouvera la même que celle du numéro cité 35; or il est visible que, lorsque $p = \frac{mn}{2} - \frac{m^3}{8}$, une des racines de cette équation sera égale à $\frac{m}{2}$, parce qu'en faisant $f = \frac{m}{2}$ on aura en même temps $P = 0$ et $Q = 0$; et comme ces deux conditions détruisent, non-seulement tous les termes de l'équation dont il s'agit, mais aussi ceux de sa différentielle qui sera

$$2PdP - (2fdf - mdf)PQ - (n - mf + f^2)(PdQ + QdP) + 2qQdQ = 0,$$

il s'ensuit que la racine $f = \frac{m}{2}$ sera une racine double de la même équation.

103. Nous avons supposé jusqu'ici que les deux fonctions t et y étaient semblables; considérons maintenant le Problème dans toute sa généralité en supposant que ces fonctions soient d'une forme quelconque.

Qu'on fasse successivement dans l'une et l'autre fonction toutes les permutations possibles entre les racines $x', x'', x''', \dots$ dont elles sont composées, en n'ayant cependant aucun égard à celles de ces permutations qui redonneraient à la fois les mêmes valeurs de t et de y , et il en résultera un égal nombre π de valeurs correspondantes de t et de y , que l'on désignera, comme dans le n° 100, par $t', t'', t''', \dots, t^{(\pi)}$, et par $y', y'', y''', \dots, y^{(\pi)}$. Dans le cas où les deux fonctions t et y sont semblables, les valeurs $t', t'', \dots, t^{(\pi)}$ seront toutes exprimées d'une manière différente, et seront les racines de l'équation la plus simple $\phi = 0$ qui servira à déterminer la fonction t en $m, n, p, \dots$ et il en sera de même des valeurs $y', y'', \dots, y^{(\pi)}$; ce qui n'empêche cependant pas que quelques-unes des valeurs de t ou de y ne puissent être égales entre elles, comme dans le cas que nous avons examiné dans le n° 102; il s'agit ici uniquement de la forme de ces valeurs et non de leur quantité absolue. Au contraire, lorsque les fonctions t et y ne seront pas semblables, il arrivera nécessairement que parmi les valeurs $t', t'', \dots, t^{(\pi)}$, ou $y', y'', \dots, y^{(\pi)}$ il y en aura qui seront les mêmes, en sorte que le nombre des valeurs différentes de t ou de y sera moindre que π , et il est facile de conclure de ce que nous avons démontré dans le n° 97 que ce nombre

ne pourra être qu'un sous-multiple de π . Or il y a ici deux cas à considérer, suivant que le nombre des valeurs différentes de la fonction donnée t sera égal à π ou à un sous-multiple de π .

1° Supposons que les valeurs $t', t'', \dots, t^{(\pi)}$ de la fonction t soient toutes différentes, c'est-à-dire représentées d'une manière différente; en ce cas il est clair que l'équation $\phi = 0$ aura nécessairement pour racines toutes ces différentes valeurs, en sorte qu'elle sera essentiellement du degré π , quelles que soient d'ailleurs les valeurs de la fonction cherchée y ; ainsi la solution du n° 100 s'appliquera également à ce cas.

2° Supposons que parmi les valeurs $t', t'', \dots, t^{(\pi)}$ il n'y en ait qu'un nombre ρ de différentes, ρ étant un facteur de π , en sorte que $\pi = \rho\sigma$; en ce cas, si $\phi = 0$ est l'équation dont ces différentes valeurs sont les racines, il s'ensuit de ce qu'on a démontré dans le n° 97 que l'équation qui aura toutes les valeurs $t', t'', \dots, t^{(\pi)}$ pour racines sera $\phi^\sigma = 0$; en sorte que chacune de ses racines en aura $\sigma - 1$ autres qui lui seront égales. On pourra donc encore appliquer à ce cas la solution générale du n° 100, pourvu qu'on prenne $\phi^\sigma = 0$ pour l'équation en t , c'est-à-dire qu'on fasse

$$1 + At + Bt^2 + Ct^3 + \dots = \phi^\sigma;$$

mais, à cause que chaque racine de cette équation est une racine égale, il faudra modifier la solution par les règles données dans le n° 102 pour le cas des racines égales; et au lieu de trouver la valeur de chaque y répondante à chaque t , on ne trouvera plus que la valeur de la somme de toutes les y qui répondront aux valeurs égales de t ; or, comme chacune des valeurs différentes de t se trouve répétée σ fois dans la série $t', t'', \dots, t^{(\pi)}$, et que d'ailleurs à chacune des valeurs de cette série il répond une valeur de la série $y', y'', \dots, y^{(\pi)}$, en sorte que les mêmes valeurs de t et de y ne se trouvent pas deux fois dans les mêmes séries à des places correspondantes, il s'ensuit qu'à chaque valeur différente de t il répondra σ valeurs différentes y , et qu'ainsi en connaissant une valeur de t on ne pourra connaître que la somme des σ valeurs différentes de y qui y répondent.

De là et du n° 103 on conclura donc que, dans ce cas, chaque valeur de y ne pourra être donnée en t qu'au moyen d'une équation du degré σ laquelle renfermera à la fois toutes les valeurs de y répondantes à une même valeur de t .

Au reste on peut simplifier beaucoup la solution du cas dont il s'agit en le ramenant à celui des fonctions semblables; car il est visible que si à la valeur t' , par exemple, répondent les valeurs $y', y'', \dots, y^{(\sigma)}$, toute fonction de la forme $f[(y', y'', \dots, y^{(\sigma)})]$ sera telle, qu'elle n'admettra plus que ρ valeurs différentes comme la fonction t' , et qu'ainsi ces deux fonctions seront des fonctions semblables des racines $x', x'', \dots$. Par conséquent, en prenant à la place de la fonction y une fonction quelconque de la forme $f[(y', y'', \dots, y^{(\sigma)})]$, on trouvera directement la valeur de cette fonction en t par la solution du n° 100, en employant simplement l'équation $\phi = 0$, qui n'aura pour racines que les ρ différentes valeurs de t . Ainsi l'on pourra connaître par ce moyen tous les coefficients de l'équation dont les valeurs $y', y'', \dots, y^{(\sigma)}$ seront les racines, puisque chacun de ces coefficients est nécessairement une fonction de la même forme $f[(y', y'', \dots, y^{(\sigma)})]$ (89).

104. Donc :

1° Si l'on a deux fonctions quelconques t et y des racines $x', x'', \dots$ de l'équation

$$x^n + mx^{n-1} + nx^{n-2} + \dots = 0,$$

et que ces fonctions soient telles, que toutes les permutations entre les racines $x', x'', \dots$, qui feront varier la fonction y , fassent varier aussi en même temps la fonction t , on pourra, généralement parlant, avoir la valeur de y en t et en $m, n, p, \dots$, par une expression rationnelle, de manière que connaissant une valeur de t on connaîtra aussi immédiatement la valeur correspondante de y ; nous disons *généralement parlant*, car s'il arrive que la valeur connue de t soit une racine double, ou triple, etc., de l'équation en t , alors la valeur correspondante de y dépendra d'une équation carrée, ou cubique, etc., dont tous les coefficients seront des fonctions rationnelles de t et de $m, n, p, \dots$.

2° Si les fonctions t et y sont telles, que la fonction t conserve la même valeur par des permutations qui font varier la fonction y , alors on ne pourra trouver la valeur de y en t et en $m, n, p, \dots$ qu'au moyen d'une équation du second degré, si à une même valeur de t répondent deux valeurs différentes de y , ou du troisième degré, si à une même valeur de t répondent trois valeurs différentes de y , et ainsi de suite. Les coefficients de ces équations en y seront, généralement parlant, des fonctions rationnelles de t et de $m, n, p, \dots$, en sorte qu'étant donnée une valeur de t , on aura y par la simple résolution d'une équation du second ou du troisième degré, etc.; mais s'il arrive que la valeur connue de t soit une racine double ou triple, etc., de l'équation en t , alors les coefficients des équations dont il s'agit dépendront encore eux-mêmes d'une équation du second ou du troisième degré, etc.

De là on peut déduire les conditions nécessaires pour pouvoir déterminer les valeurs mêmes des racines $x', x'', x''', \dots$, au moyen de celles d'une fonction quelconque de ces racines; car il n'y aura pour cela qu'à prendre la simple racine x à la place de la fonction y , et appliquer à ce cas les conclusions précédentes.

105. Voyons maintenant l'application qu'on peut faire des principes établis jusqu'ici, à la résolution générale des équations; nous commencerons par examiner le cas où il n'y a que trois racines x', x'', x''' , c'est-à-dire où l'équation proposée est du troisième degré.

Dans ce cas, si l'on considère la fonction générale $f[(x')(x'')(x''')]$, on trouvera qu'elle doit dépendre d'une équation du degré 1.2.3, dont les six racines seront

$$\begin{aligned} f[(x')(x'')(x''')], & f[(x'')(x')(x''')], \\ f[(x'')(x''')(x')], & f[(x''')(x')(x'')], \\ f[(x')(x''')(x'')], & f[(x''')(x'')(x')]. \end{aligned}$$

Maintenant, pour pouvoir abaisser cette équation à un degré moindre que celui de la proposée, il est clair qu'il n'y a d'autre moyen que de faire en sorte que ses racines soient égales, trois à trois; auquel cas elle

se réduira au second degré. Pour cela on supposera que la fonction proposée soit telle, que l'on ait

$$f[(x')(x'')(x''')] = f[(x'')(x')(x''')],$$

indépendamment de toute relation entre les racines x', x'', x''' , c'est-à-dire que cette fonction demeure la même en y changeant x' en x'' , x'' en x''' , et x''' en x' ; et l'on aura par la même raison

$$f[(x'')(x'')(x')] = f[(x'')(x')(x'')],$$

et ensuite

$$f[(x''')(x')(x'')] = f[(x')(x'')(x''')];$$

d'où l'on voit que ces trois fonctions

$$f[(x')(x'')(x''')], f[(x'')(x')(x''')], f[(x'')(x'')(x')]$$

seront nécessairement égales, et qu'il n'y aura que ces trois-ci qui puissent l'être en vertu de la condition supposée; par conséquent les trois autres fonctions

$$f[(x'')(x')(x'')], f[(x')(x'')(x'')], f[(x'')(x'')(x')]$$

seront aussi égales; de sorte que (98) l'équation dont il s'agit s'abaissera au degré $\frac{1.2.3}{3} = 2$.

Or, pour trouver, en général, la forme de la fonction proposée, qu'on prenne une autre fonction quelconque représentée par $\varphi[(x')(x'')(x''')]$; qu'on désigne, pour abrégé, par y', y'', y''' les trois fonctions

$$\varphi[(x')(x'')(x''')], \varphi[(x'')(x')(x''')], \varphi[(x'')(x'')(x')],$$

qui répondent aux trois premières fonctions égales ci-dessus, et par z', z'', z''' , les trois fonctions

$$\varphi[(x'')(x')(x'')], \varphi[(x')(x'')(x'')], \varphi[(x'')(x'')(x')],$$

qui répondent aux trois autres fonctions égales: il est clair qu'on pourra exprimer toute fonction de x', x'', x''' par une fonction quelconque de y', y'', y''' , ou de z', z'', z''' , puisque la caractéristique φ dénote une fonction indéterminée quelconque. Ainsi l'on pourra représenter, en général, la

fonction $f[(x')(x'')(x''')] par celle-ci $f[(y')(y'')(y''')]$; or il faut, par les conditions du Problème, que cette fonction demeure la même en y échangeant x' en x'' , x'' en x''' et x''' en x' ; donc, puisque par ces échanges les trois quantités y' , y'' , y''' ne font que se changer l'une dans l'autre, il s'ensuit que la fonction $f[(y')(y'')(y''')]$ doit être telle qu'elle demeure la même, quelque permutation qu'on y fasse entre les trois quantités y' , y'' , y''' , et par conséquent qu'elle soit de la forme $f[(y', y'', y''')]$.$

Toute fonction donc de la forme

$$f[(y', y'', y''')]$$

aura les propriétés requises, et ne dépendra par conséquent que d'une équation du second degré. En effet, il est facile de voir que, quelques permutations qu'on fasse entre les trois racines x' , x'' , x''' , les trois quantités y' , y'' , y''' ne peuvent que s'échanger entre elles, ou dans les trois quantités analogues z' , z'' , z''' ; d'où il s'ensuit que la fonction

$$f[(y', y'', y''')]$$

ne peut que demeurer la même ou se changer dans la fonction

$$f[(z', z'', z''')].$$

et qu'ainsi ces deux fonctions ne peuvent qu'être les racines d'une même équation du second degré.

Regardons maintenant ces fonctions comme connues, et la difficulté se réduira à trouver par leur moyen les valeurs de chacune des quantités y' , y'' , y''' et z' , z'' , z''' . Or, comme les fonctions dont il s'agit sont de nature à demeurer les mêmes, quelque échange qu'on fasse entre les quantités y' , y'' , y''' , ainsi qu'entre les quantités z' , z'' , z''' , il s'ensuit de ce qui a été démontré ci-dessus, que les trois quantités y' , y'' , y''' seront les racines d'une équation du troisième degré, et les trois quantités z' , z'' , z''' les racines d'une autre équation du troisième degré. Qu'on représente ces équations par celles-ci

$$\begin{aligned} y^3 - ay^2 + by - c &= 0, \\ z^3 - fz^2 + gz - h &= 0, \end{aligned}$$

et, comme les coefficients a , b , c sont des fonctions de la forme $f[(y', y'', y''')]$, et les coefficients f , g , h des fonctions analogues de la forme $f[(z', z'', z''')]$, il résulte de ce qui précède que les coefficients correspondants a et f seront les racines d'une même équation du second degré, dont les coefficients seront donnés en m , n , p , et il en sera de même des coefficients b , g et c , h ; sur quoi il est bon de remarquer que dès qu'on aura trouvé les valeurs de a et f , on pourra, par leur moyen, trouver immédiatement celles de b , g et c , h , par la méthode du n° 100.

Puis donc que les équations en y et z sont l'une et l'autre du troisième degré, il faut tâcher de les ramener à une forme qui en permette la résolution; car, d'un côté, on ne saurait les résoudre, en général, au moins on est censé ne savoir pas les résoudre, puisque la résolution des équations de ce degré est précisément ce qui fait l'objet de cette recherche; de l'autre, on ne peut pas employer la méthode du n° 99 pour abaisser ces équations à un degré inférieur, à cause que l'exposant 3 est un nombre premier qui n'a point de diviseur.

Or, comme la résolution des équations à deux termes est toujours possible, il conviendra de réduire les équations dont il s'agit à cet état; ainsi nous supposons que l'équation en y devienne

$$y^3 - c = 0;$$

ou, plus généralement, de la forme

$$(y + k)^3 - l = 0,$$

et, pour trouver les conditions nécessaires pour cela, il n'y aura qu'à remarquer qu'en prenant 1, α , α^2 pour dénoter les racines cubiques de l'unité, on aura

$$y' + k = \sqrt[3]{l}, \quad y'' + k = \alpha \sqrt[3]{l}, \quad y''' + k = \alpha^2 \sqrt[3]{l},$$

d'où l'on tire, à cause de $\alpha^3 = 1$,

$$y' + k = \alpha^2 (y'' + k) = \alpha (y''' + k).$$

Ainsi, il faudra que la fonction de x' , x'' , x''' , qu'on a désignée par la

caractéristique φ , soit telle qu'on ait, indépendamment de toute relation entre les racines x' , x'' , x''' ,

$$\varphi[(x')(x'')(x''')] + k = \alpha^2 [\varphi[(x'')(x''')(x')] + k] = \alpha [\varphi[(x''')(x')(x'')] + k].$$

Et alors on aura aussi, en échangeant x' en x'' ,

$$\varphi[(x'')(x')(x''')] + k = \alpha^2 [\varphi[(x')(x'')(x''')] + k] = \alpha [\varphi[(x''')(x'')(x')] + k];$$

c'est-à-dire

$$z' + k = \alpha^2 (z'' + k) = \alpha (z''' + k),$$

moyennant quoi l'équation en z se réduira aussi à la forme

$$(z + k)^3 - l' = 0.$$

Or, en comparant l'équation

$$(y + k)^3 - l = 0$$

avec l'équation

$$y^3 - ay^2 + by - c = 0,$$

on a

$$c = l - k^3;$$

et par conséquent, à cause de

$$l = (y' + k)^3 = (y'' + k)^3$$

(puisque l'on est maître de substituer, à la place de y , une quelconque de ses racines),

$$c = (y' + k)^3 - k^3;$$

on trouvera de même

$$h = (z' + k)^3 - k^3.$$

De sorte que ces deux quantités

$$[\varphi[(x')(x'')(x''')] + k]^3 - h^3 \quad \text{et} \quad [\varphi[(x'')(x''')(x')] + k]^3 - h^3$$

seront les racines d'une équation du second degré, qu'on pourra par conséquent regarder comme la *réduite* générale du troisième degré.

Par la résolution de cette équation on connaîtra donc les valeurs des

deux fonctions $\varphi[(x')(x'')(x''')] + k$ et $\varphi[(x'')(x''')(x')] + k$, et l'on aura celles des quatre autres fonctions dérivées de celles-ci, par le moyen des équations de condition ci-dessus. Or, ces fonctions étant connues, on pourra en déduire les valeurs de chacune des trois racines x' , x'' , x''' (104).

106. Voilà donc le principe de la résolution des équations du troisième degré présenté de la manière la plus directe et la plus générale; il est facile d'en faire des applications particulières et d'en déduire les différentes théories que nous avons données dans la Section I.

La forme la plus simple qu'on puisse donner à la fonction

$$\varphi[(x')(x'')(x''')]$$

est celle-ci

$$Ax' + Bx'' + Cx''' + D,$$

A, B, C, D étant des constantes; ainsi l'équation de condition sera

$$\begin{aligned} Ax' + Bx'' + Cx''' + D + k &= \alpha^2 (Ax'' + Bx''' + Cx' + D + k) \\ &= \alpha (Ax''' + Bx' + Cx'' + D + k); \end{aligned}$$

d'où l'on tire ces équations

$$A = \alpha^2 C = \alpha B,$$

$$B = \alpha^2 A = \alpha C,$$

$$C = \alpha^2 B = \alpha A,$$

$$D + k = \alpha^2 (D + k) = \alpha (D + k).$$

La seconde donne

$$B = \alpha^2 A, \quad C = \alpha A,$$

et ces valeurs satisfont aussi en même temps à la première et à la troisième, à cause de $\alpha^3 = 1$; quant à la quatrième, elle donnera

$$D + k = 0, \quad \text{et par conséquent} \quad D = -k;$$

ainsi la fonction proposée sera de la forme

$$A(x' + \alpha^2 x'' + \alpha x''') - k,$$

qui, en faisant $k = 0$, est précisément la même à laquelle nous avons été conduits *à posteriori* dans la Section citée (5).