
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 1 2 3 4 5 6 7 8 9 20


叢木文庫
洋書

物理
08
L
1.3

九州帝國大學理學部
8426
物理學教室

桑木文庫
洋書
0565

理学部 洋 遡及
022232002008810
九州大学蔵書

601893

ŒUVRES

DE LAGRANGE.

PARIS. — IMPRIMERIE DE GAUTHIER-VILLARS, SUCCESSEUR DE MALLET-BACHELIER,
Rue de Seine-Saint-Germain, 10, près l'Institut.

ŒUVRES
DE LAGRANGE,

PUBLIÉES PAR LES SOINS

DE M. J.-A. SERRET,

SOUS LES AUSPICES

DE SON EXCELLENCE
LE MINISTRE DE L'INSTRUCTION PUBLIQUE.

TOME TROISIÈME.



PARIS,
GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE
DE L'ÉCOLE IMPÉRIALE POLYTECHNIQUE, DU BUREAU DES LONGITUDES,
SUCCESSEUR DE MALLET-BACHELIER,
Quai des Augustins, 55.

M DCCC LXIX

臺灣大學圖書館

臺灣大學圖書館

臺灣大學圖書館
19.4.25
130099

DEUXIÈME SECTION.

(SUITE.)

MÉMOIRES

EXTRAITS DES

RECUEILS DE L'ACADÉMIE ROYALE

DES SCIENCES ET BELLES-LETTRES

DE BERLIN.

NOUVELLE MÉTHODE

POUR

RÉSOUDRE LES ÉQUATIONS LITTÉRALES

PAR LE MOYEN DES SÉRIES.

NOUVELLE MÉTHODE

POUR

RÉSOUDRE LES ÉQUATIONS LITTÉRALES

PAR LE MOYEN DES SÉRIES (*).

(*Mémoires de l'Académie royale des Sciences et Belles-Lettres de Berlin*, t. XXIV, 1770.)

Je vais donner dans ce Mémoire une méthode très-simple et très-générale pour réduire les racines des équations littérales en suites infinies, matière sur laquelle plusieurs Géomètres se sont déjà exercés.

Ma méthode a, si je ne me trompe, de grands avantages sur toutes les méthodes connues pour le même objet :

1° Elle donne l'expression de chaque racine de l'équation proposée, au lieu que les autres méthodes ne donnent ordinairement que l'expression d'une seule racine;

2° Elle donne les racines cherchées par des séries régulières, c'est-à-dire telles, que leurs termes suivent une loi générale et connue, de sorte qu'il est très-facile de les continuer autant que l'on veut;

3° Ces séries sont de plus telles, qu'on peut aisément trouver la forme de leurs derniers termes, et en déduire les conditions qui les rendent convergentes ou divergentes;

4° On peut aussi par la même méthode avoir l'expression d'une puis-

(*) Lu à l'Académie le 18 janvier et le 5 avril 1770.

sance quelconque de la racine cherchée, et même d'une fonction quelconque de cette racine;

5° Enfin cette méthode s'applique également aux équations transcendantes qui renferment des logarithmes et des arcs de cercle, et peut servir à résoudre différents Problèmes importants de cette espèce d'une manière plus simple et plus exacte qu'on ne pouvait le faire jusqu'à présent.

§ I. — *De la manière d'avoir la somme des puissances d'un degré quelconque de toutes les racines d'une équation donnée.*

Quoique la solution de ce Problème soit assez connue, je crois pouvoir la donner ici, tant à cause du rapport qu'elle a avec le sujet de ce Mémoire, que parce que la méthode dont je me sers est en quelque façon plus simple et plus générale que celles qu'on emploie ordinairement.

1. Soit une équation d'un degré quelconque

$$(A) \qquad 0 = a - bx + cx^2 - dx^3 + \dots,$$

dont les racines soient p, q, r,...; on aura, par la théorie connue des équations,

$$(B) \qquad a - bx + cx^2 - dx^3 + \dots = a\left(1 - \frac{x}{p}\right)\left(1 - \frac{x}{q}\right)\left(1 - \frac{x}{r}\right)\cdots.$$

Donc, en divisant par a, on aura

$$1 - \frac{bx - cx^2 + dx^3 - \dots}{a} = \left(1 - \frac{x}{p}\right)\left(1 - \frac{x}{q}\right)\left(1 - \frac{x}{r}\right)\cdots,$$

et, prenant les logarithmes de part et d'autre,

$$\log\left(1 - \frac{bx - cx^2 + dx^3 - \dots}{a}\right) = \log\left(1 - \frac{x}{p}\right) + \log\left(1 - \frac{x}{q}\right) + \log\left(1 - \frac{x}{r}\right) + \dots.$$

Or, on a, en général,

$$\log(1 - u) = -u - \frac{u^2}{2} - \frac{u^3}{3} - \dots;$$

donc

$$\begin{aligned}
&\log\left(1 - \frac{x}{p}\right) + \log\left(1 - \frac{x}{q}\right) + \log\left(1 - \frac{x}{r}\right) + \dots \\
&= -x\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} + \dots\right) \\
&\quad - \frac{x^2}{2}\left(\frac{1}{p^2} + \frac{1}{q^2} + \frac{1}{r^2} + \dots\right) \\
&\quad - \frac{x^3}{3}\left(\frac{1}{p^3} + \frac{1}{q^3} + \frac{1}{r^3} + \dots\right) \\
&\quad \dots\dots\dots\dots\dots\dots
\end{aligned}$$

Donc, si l'on développe la quantité

$$-\log\left(1 - \frac{bx - cx^2 + dx^3 - \dots}{a}\right)$$

en une série de cette forme

$$Ax + Bx^2 + Cx^3 + \dots,$$

on aura

$$\begin{aligned}
A &= \frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} + \dots, \\
2B &= \frac{1}{p^2} + \frac{1}{q^2} + \frac{1}{r^2} + \dots, \\
3C &= \frac{1}{p^3} + \frac{1}{q^3} + \frac{1}{r^3} + \dots, \\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots
\end{aligned}$$

2. Puisqu'on suppose

$$-\log\left(1 - \frac{bx - cx^2 + dx^3 - \dots}{a}\right) = Ax + Bx^2 + Cx^3 + \dots,$$

on aura, en prenant les différentielles de part et d'autre et divisant par dx,

$$\frac{b - 2cx + 3dx^2 - \dots}{a - bx + cx^2 - dx^3 + \dots} = A + 2Bx + 3Cx^2 + \dots,$$

d'où, en multipliant en croix et comparant les termes, on tire

$$A = \frac{b}{a},$$
$$2B = \frac{Ab - 2c}{a},$$
$$3C = \frac{2Bb - Ac + 3d}{a},$$

et ainsi de suite; ce qui donne les formules connues de Newton.

De cette manière on ne peut déterminer chaque coefficient qu'à l'aide de tous les coefficients précédents; mais si l'on voulait avoir tout de suite l'expression du coefficient d'une puissance quelconque x^m, coefficient que nous appellerons M, et qui sera par conséquent égal à

$$\frac{\frac{1}{p^m} + \frac{1}{q^m} + \frac{1}{r^m} + \dots}{m},$$

on pourra s'y prendre de la manière suivante.

3. On considérera que

$$\log\left(1 - \frac{bx - cx^2 + dx^3 - \dots}{a}\right) = \log\left(1 - \frac{bx}{a}\right) + \log\left[1 - \frac{-cx^2 + dx^3 - \dots}{a\left(1 - \frac{bx}{a}\right)}\right].$$

Soit, pour abréger,

$$\frac{-cx^2 + dx^3 - \dots}{a} = X,$$

en sorte que l'on ait

$$\log\left(1 - \frac{bx - cx^2 + dx^3 - \dots}{a}\right) = \log\left(1 - \frac{bx}{a}\right) + \log\left(1 - \frac{X}{1 - \frac{bx}{a}}\right).$$

Donc, réduisant ces deux derniers logarithmes en série, on aura

$$-\log\left(1 - \frac{bx - cx^2 + dx^3 - \dots}{a}\right)$$
$$= \frac{bx}{a} + \frac{b^2x^2}{2a^2} + \frac{b^3x^3}{3a^3} + \dots + \frac{X}{1 - \frac{bx}{a}} + \frac{X^2}{2\left(1 - \frac{bx}{a}\right)^2} + \frac{X^3}{3\left(1 - \frac{bx}{a}\right)^3} + \dots$$
$$= A + Bx + Cx^2 + \dots + Mx^m + \dots.$$

Or, on sait que

$$\frac{1}{1 - \frac{bx}{a}} = 1 + \frac{bx}{a} + \frac{b^2x^2}{a^2} + \frac{b^3x^3}{a^3} + \dots,$$
$$\frac{1}{\left(1 - \frac{bx}{a}\right)^2} = 1 + \frac{2bx}{a} + \frac{3b^2x^2}{a^2} + \frac{4b^3x^3}{a^3} + \dots,$$
$$\frac{1}{\left(1 - \frac{bx}{a}\right)^3} = \frac{1}{2}\left(1.2 + \frac{2.3.bx}{a} + \frac{3.4.b^2x^2}{a^2} + \frac{4.5.b^3x^3}{a^3} + \dots\right),$$
$$\frac{1}{\left(1 - \frac{bx}{a}\right)^4} = \frac{1}{2.3}\left(1.2.3 + \frac{2.3.4.bx}{a} + \frac{3.4.5.b^2x^2}{a^2} + \frac{4.5.6.b^3x^3}{a^3} + \dots\right),$$

et ainsi de suite.

Donc, si l'on suppose, pour plus de simplicité,

$$X = \alpha x^2 + \alpha_1 x^3 + \alpha_2 x^4 + \dots,$$
$$X^2 = \beta x^4 + \beta_1 x^5 + \beta_2 x^6 + \dots,$$
$$X^3 = \gamma x^6 + \gamma_1 x^7 + \gamma_2 x^8 + \dots,$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots,$$

il est facile de voir que le coefficient de la puissance x^m dans la quantité $\frac{X}{1 - \frac{bx}{a}}$, développée suivant les puissances de x, sera représenté par

$$\alpha\left(\frac{b}{a}\right)^{m-2} + \alpha_1\left(\frac{b}{a}\right)^{m-3} + \dots + \alpha_{m-2};$$

que celui de la même puissance x^m dans la quantité $\frac{X^2}{2\left(1 - \frac{bx}{a}\right)^2}$ sera

$$\frac{1}{2}\left[(m-3)\beta\left(\frac{b}{a}\right)^{m-4} + (m-4)\beta_1\left(\frac{b}{a}\right)^{m-5} + \dots + \beta_{m-4}\right],$$

et que, dans la quantité $\frac{X^3}{3\left(1 - \frac{bx}{a}\right)^3}$, il sera

$$\frac{1}{2.3}\left[(m-4)(m-5)\gamma\left(\frac{b}{a}\right)^{m-6} + (m-5)(m-6)\gamma_1\left(\frac{b}{a}\right)^{m-7} + \dots + 1.2.\gamma_{m-6}\right],$$

et ainsi des autres.

De là il s'ensuit qu'on aura

$$\begin{aligned}
M = {} & \frac{1}{m}\left(\frac{b}{a}\right)^m \\
& + \alpha\left(\frac{b}{a}\right)^{m-2} + \alpha_1\left(\frac{b}{a}\right)^{m-3} + \ldots + \alpha_{m-2} \\
& + \frac{1}{2}\left[(m-3)\beta\left(\frac{b}{a}\right)^{m-4} + (m-4)\beta_1\left(\frac{b}{a}\right)^{m-5} + \ldots + \beta_{m-4}\right] \\
& + \frac{1}{2.3}\left[(m-4)(m-5)\gamma\left(\frac{b}{a}\right)^{m-6} + (m-5)(m-6)\gamma_1\left(\frac{b}{a}\right)^{m-7} + \ldots + 1.2.\gamma_{m-6}\right] \\
& \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

Donc, puisque

$$Mm = \frac{1}{p^m} + \frac{1}{q^m} + \frac{1}{r^m} + \ldots,$$

on aura, en général,

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{p^m} + \frac{1}{q^m} + \frac{1}{r^m} + \ldots \\
& = \left(\frac{b}{a}\right)^m + m\alpha\left(\frac{b}{a}\right)^{m-2} + m\alpha_1\left(\frac{b}{a}\right)^{m-3} + \ldots + m\alpha_{m-2} \\
& + \frac{m(m-3)}{2}\beta\left(\frac{b}{a}\right)^{m-4} + \frac{m(m-4)}{2}\beta_1\left(\frac{b}{a}\right)^{m-5} + \ldots + \frac{m}{2}\beta_{m-4} \\
& + \frac{m(m-4)(m-5)}{2.3}\gamma\left(\frac{b}{a}\right)^{m-6} + \frac{m(m-5)(m-6)}{2.3}\gamma_1\left(\frac{b}{a}\right)^{m-7} + \ldots + \frac{m}{3}\gamma_{m-6} \\
& + \frac{m(m-5)(m-6)(m-7)}{2.3.4}\delta\left(\frac{b}{a}\right)^{m-8} + \frac{m(m-6)(m-7)(m-8)}{2.3.4}\delta_1\left(\frac{b}{a}\right)^{m-9} + \ldots + \frac{m}{4}\delta_{m-8} \\
& \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

4. Exemple I. — Soit l'équation du second degré

$$a - bx + cx^2 = 0 :$$

on aura, dans ce cas,

$$X = -\frac{cx^2}{a};$$

donc

$$X^2 = \frac{c^2x^4}{a^2}, \quad X^3 = -\frac{c^3x^6}{a^3}, \ldots,$$

donc

$$\alpha = -\frac{c}{a}, \quad \beta = \frac{c^2}{a^2}, \quad \gamma = -\frac{c^3}{a^3}, \ldots,$$

et toutes les autres quantités α_1, β_1,.... nulles; donc, si p et q sont les racines de cette équation, on aura, en général,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{p^m} + \frac{1}{q^m} = {} & \left(\frac{b}{a}\right)^m - \frac{mc}{a}\left(\frac{b}{a}\right)^{m-2} + \frac{m(m-3)c^2}{2a^2}\left(\frac{b}{a}\right)^{m-4} \\
& - \frac{m(m-4)(m-5)c^3}{2.3.a^3}\left(\frac{b}{a}\right)^{m-6} + \ldots,
\end{aligned}$$

en continuant cette série jusqu'à ce qu'on arrive à des puissances négatives de $\frac{b}{a}$.

5. Exemple II. — Soit encore l'équation générale du troisième degré

$$a - bx + cx^2 - dx^3 = 0 :$$

on aura, dans ce cas,

$$X = \frac{-cx^2 + dx^3}{a} = -\frac{x^2}{a}(c - dx),$$

et, par conséquent,

$$X^2 = \frac{x^4}{a^2}(c^2 - 2cdx + d^2x^2),$$

$$X^3 = \frac{x^6}{a^3}(c^3 - 3c^2dx + 3cd^2x^2 - d^3x^3),$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Donc

$$\alpha = -\frac{c}{a}, \quad \alpha_1 = \frac{d}{a}, \quad \beta = \frac{c^2}{a^2}, \quad \beta_1 = -\frac{2cd}{a^2}, \quad \beta_2 = \frac{d^2}{a^2},$$

$$\gamma = -\frac{c^3}{a^3}, \quad \gamma_1 = \frac{3c^2d}{a^3}, \ldots$$

Donc, nommant p, q, r les trois racines de l'équation proposée, on aura,

en général,

$$\frac{1}{p^m}+\frac{1}{q^m}+\frac{1}{r^m}$$
$$=\left(\frac{b}{a}\right)^m-\frac{mc}{a}\left(\frac{b}{a}\right)^{m-2}+\frac{md}{a}\left(\frac{b}{a}\right)^{m-3}$$
$$+\frac{m(m-3)}{2a^2}c^2\left(\frac{b}{a}\right)^{m-4}-\frac{m(m-4)}{2a^2}2cd\left(\frac{b}{a}\right)^{m-5}+\frac{m(m-5)}{2a^2}d^2\left(\frac{b}{a}\right)^{m-6}$$
$$-\frac{m(m-4)(m-5)}{2.3.a^3}c^3\left(\frac{b}{a}\right)^{m-6}+\frac{m(m-5)(m-6)}{2.3.a^3}3c^2d\left(\frac{b}{a}\right)^{m-7}$$
$$-\frac{m(m-6)(m-7)}{2.3.a^3}3cd^2\left(\frac{b}{a}\right)^{m-8}+\frac{m(m-7)(m-8)}{2.3.a^3}d^3\left(\frac{b}{a}\right)^{m-9}-\ldots,$$

cette série étant continuée jusqu'à ce qu'on parvienne à des puissances négatives de $\frac{b}{a}$.

6. Exemple III. — Soit l'équation

$$a-bx-x^n=0;$$

on aura

$$X=\frac{x^n}{a},$$

donc

$$X^2=\frac{x^{2n}}{a^2},\quad X^3=\frac{x^{3n}}{a^3},\ldots,$$

donc

$$\alpha_{n-1}=\frac{1}{a},\quad \beta_{2n-1}=\frac{1}{a^2},\ldots,$$

et toutes les autres quantités nulles; donc

$$\frac{1}{p^m}+\frac{1}{q^m}+\frac{1}{r^m}+\ldots=\left(\frac{b}{a}\right)^m$$
$$+\frac{m}{a}\left(\frac{b}{a}\right)^{m-n}+\frac{m(m-2n+1)}{2a^2}\left(\frac{b}{a}\right)^{m-2n}$$
$$+\frac{m(m-3n+2)(m-3n+1)}{2.3.a^3}\left(\frac{b}{a}\right)^{m-3n}$$
$$+\frac{m(m-4n+3)(m-4n+2)(m-4n+1)}{2.3.4.a^4}\left(\frac{b}{a}\right)^{m-4n}+\ldots,$$

jusqu'à ce qu'on arrive à des puissances négatives de $\frac{b}{a}$.

7. Au reste, quoique nous n'ayons donné que la formule qui exprime la somme des puissances $n^{ièmes}$ des quantités $\frac{1}{p}, \frac{1}{q}, \frac{1}{r}, \ldots$ ($p, q, r, \ldots$ étant les racines d'une équation quelconque donnée), il est facile d'avoir aussi l'expression de la somme des puissances $n^{ièmes}$ des racines mêmes $p, q, r, \ldots$; pour cela il n'y aura qu'à changer les racines de l'équation proposée en leurs réciproques, en écrivant $\frac{1}{x}$ à la place de x; car, nommant $p', q', r', \ldots$ les racines de l'équation transformée, on aura

$$\frac{1}{p'^m}+\frac{1}{q'^m}+\frac{1}{r'^m}+\ldots=p^m+q^m+r^m+\ldots.$$

Puisque (3)

$$X=\alpha x^2+\alpha_1 x^3+\ldots,$$
$$X^2=\beta x^4+\beta_1 x^5+\ldots,$$
$$X^3=\gamma x^6+\gamma_1 x^7+\ldots,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

il est clair que si l'on fait $x=\frac{1}{y}$, et qu'on nomme Y la fonction de y dans laquelle X se changera, on aura

$$Yy^m=\alpha y^{m-2}+\alpha_1 y^{m-3}+\ldots,$$
$$\frac{d(Y^2y^{m+1})}{dy}=(m-3)\beta y^{m-4}+(m-4)\beta_1 y^{m-5}+\ldots,$$
$$\frac{d^2(Y^3y^{m+2})}{dy^2}=(m-4)(m-5)\gamma y^{m-6}+(m-5)(m-6)\gamma_1 y^{m-7}+\ldots.$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

D'où il s'ensuit qu'on peut mettre la formule du numéro cité sous cette forme

$$\frac{1}{m}\left(\frac{1}{p^m}+\frac{1}{q^m}+\frac{1}{r^m}+\ldots\right)=\frac{y^m}{m}+Yy^m+\frac{1}{2}\frac{d(Y^2y^{m+1})}{dy}+\frac{1}{2.3}\frac{d^2(Y^3y^{m+2})}{dy^2}+\ldots,$$

pourvu qu'on y substitue, après les différentiations, $\frac{b}{a}$ à la place de y, et qu'on ait soin de rejeter tous les termes qui contiendraient des puissances négatives de y ou de $\frac{b}{a}$, comme nous l'avons pratiqué dans les

Exemples précédents. De cette manière on pourra très-facilement trouver la somme des racines d'une équation quelconque élevées à telle puissance qu'on voudra.

§ II. — *De la manière de trouver par les séries la racine d'une équation quelconque.*

8. Reprenons l'équation générale

$$(A) \qquad 0 = a - bx + cx^2 - dx^3 + \dots,$$

dont on suppose que les racines soient p, q, r,..., et voyons comment on pourra trouver la valeur d'une de ces racines en particulier.

On aura d'abord, comme nous l'avons vu dans le § I,

$$(B) \qquad a - bx + cx^2 - dx^3 + ex^4 - \dots = a\left(1 - \frac{x}{p}\right)\left(1 - \frac{x}{q}\right)\left(1 - \frac{x}{r}\right)\cdots.$$

Qu'on divise cette équation par bx, et, en y changeant les signes, on aura

$$1 - \frac{a}{bx} - \frac{cx - dx^2 + \dots}{b} = -\frac{a}{bx}\left(1 - \frac{x}{p}\right)\left(1 - \frac{x}{q}\right)\left(1 - \frac{x}{r}\right)\cdots$$
$$= \frac{a}{bp}\left(1 - \frac{p}{x}\right)\left(1 - \frac{x}{q}\right)\left(1 - \frac{x}{r}\right)\cdots.$$

Donc, prenant les logarithmes de part et d'autre,

$$(C) \quad \begin{cases} \log\left(1 - \dfrac{a}{bx} - \dfrac{cx - dx^2 + \dots}{b}\right) \\ \quad = \log\dfrac{a}{bp} + \log\left(1 - \dfrac{p}{x}\right) + \log\left(1 - \dfrac{x}{q}\right) + \log\left(1 - \dfrac{x}{r}\right) + \dots. \end{cases}$$

Donc faisant, pour abréger,

$$X = \frac{a}{x} + cx - dx^2 + ex^3 - \dots,$$

et réduisant en série les logarithmes de $1 - \frac{X}{b}$, $1 - \frac{p}{x}$, $1 - \frac{x}{q}$,..., on

aura, après avoir changé les signes,

$$(D) \quad \begin{cases} \dfrac{X}{b} + \dfrac{X^2}{2b^2} + \dfrac{X^3}{3b^3} + \dots = \log\dfrac{bp}{a} + \dfrac{p}{x} + \dfrac{p^2}{2x^2} + \dfrac{p^3}{3x^3} + \dots \\ \qquad + x\left(\dfrac{1}{q} + \dfrac{1}{r} + \dots\right) \\ \qquad + \dfrac{x^2}{2}\left(\dfrac{1}{q^2} + \dfrac{1}{r^2} + \dots\right) \\ \qquad + \dfrac{x^3}{3}\left(\dfrac{1}{q^3} + \dfrac{1}{r^3} + \dots\right) + \dots. \end{cases}$$

Or cette équation doit être identique, puisqu'elle vient de l'équation identique (B); donc, si l'on remet à la place de X sa valeur

$$\frac{a}{x} + cx - dx^2 + ex^3 - \dots,$$

et qu'on suppose

$$\frac{X}{b} + \frac{X^2}{2b^2} + \frac{X^3}{3b^3} + \dots$$
$$= \left(\alpha + \frac{\beta}{x} + \frac{\gamma}{x^2} + \frac{\delta}{x^3} + \dots\right) + \left(Ax + Bx^2 + Cx^3 + \dots\right),$$

on aura, par la comparaison des termes,

$$\alpha = \log\frac{bp}{a}, \quad \beta = p, \quad \gamma = \frac{p^2}{2}, \quad \delta = \frac{p^3}{3}, \dots.$$

Ainsi l'on connaîtra non-seulement la valeur de la racine p, mais aussi celle de son carré, de son cube, etc., comme aussi celle de son logarithme, qui sera

$$\log p = \alpha - \log\frac{b}{a} = \alpha + \log\frac{a}{b}.$$

9. Exemple I. — Soit l'équation du second degré

$$a - bx + cx^2 = 0;$$

on aura donc

$$X = \frac{a}{x} + cx;$$

donc

$$X^2 = \frac{a^2}{x^2} + 2ac + c^2x^2,$$

$$X^3 = \frac{a^3}{x^3} + \frac{3a^2c}{x} + 3ac^2x + c^3x^3,$$

$$X^4 = \frac{a^4}{x^4} + \frac{4a^3c}{x^2} + 6a^2c^2 + 4ac^3x^2 + c^4x^4,$$

et ainsi de suite; donc

$$\alpha = \frac{2ac}{2b^2} + \frac{4.3.a^2c^2}{2.4.b^4} + \frac{6.5.4.a^3c^3}{2.3.6.b^6} + \ldots,$$

$$\beta = \frac{a}{b} + \frac{3a^2c}{3b^3} + \frac{5.4.a^3c^2}{2.5.b^5} + \frac{7.6.5.a^4c^3}{2.3.7.b^7} + \ldots,$$

$$\gamma = \frac{a^2}{2b^3} + \frac{4a^3c}{4b^4} + \frac{6.5.a^4c^2}{2.6.b^6} + \frac{8.7.6.a^5c^3}{2.3.8.b^8} + \ldots,$$

$$\ldots\ldots\ldots

on aura

$$\frac{X}{b}+\frac{X^2}{2b^2}+\frac{X^3}{3b^3}+\ldots=-\log\left(1-\frac{a}{bx}-\xi\right)$$
$$=-\log\left(1-\frac{a}{bx}\right)-\log\left(1-\frac{\xi}{1-\frac{a}{bx}}\right);$$

de sorte qu'en réduisant ces deux logarithmes en série on aura

$$\frac{X}{b}+\frac{X^2}{2b^2}+\frac{X^3}{3b^3}+\ldots=\frac{a}{bx}+\frac{a^2}{2b^2x^2}+\frac{a^3}{3b^3x^3}+\ldots$$
$$+\frac{\xi}{1-\frac{a}{bx}}+\frac{\xi^2}{2\left(1-\frac{a}{bx}\right)^2}+\frac{\xi^3}{3\left(1-\frac{a}{bx}\right)^3}+\ldots,$$

et, par conséquent (8),

$$(E)\quad\left\{\begin{array}{l}\dfrac{a}{bx}+\dfrac{a^2}{2b^2x^2}+\ldots+\dfrac{\xi}{1-\frac{a}{bx}}+\ldots=\log\dfrac{bp}{a}+\dfrac{p}{x}+\dfrac{p^2}{2x^2}+\dfrac{p^3}{3x^3}+\ldots\\ \qquad\qquad+x\left(\dfrac{1}{q}+\dfrac{1}{r}+\ldots\right)+\dfrac{x^2}{2}\left(\dfrac{1}{q^2}+\dfrac{1}{r^2}+\ldots\right)\\ \qquad\qquad+\dfrac{x^3}{3}\left(\dfrac{1}{q^3}+\dfrac{1}{r^3}+\ldots\right)+\ldots.\end{array}\right.$$

Or, nous avons déjà vu plus haut (3) qu'on a, en réduisant en série,

$$\frac{1}{1-\frac{a}{bx}}=1+\frac{a}{bx}+\frac{a^2}{b^2x^2}+\frac{a^3}{b^3x^3}+\ldots,$$
$$\frac{1}{\left(1-\frac{a}{bx}\right)^2}=1+\frac{2a}{bx}+\frac{3a^2}{b^2x^2}+\frac{4a^3}{b^3x^3}+\ldots,$$
$$\frac{1}{\left(1-\frac{a}{bx}\right)^3}=\frac{1}{2}\left(1.2+\frac{2.3.a}{bx}+\frac{3.4.a^2}{b^2x^2}+\ldots\right),$$

et ainsi de suite.

Donc, si l'on suppose, en général,

$$\xi=\varpi+\varpi_1x+\varpi_2x^2+\varpi_3x^3+\ldots,$$
$$\xi^2=\rho+\rho_1x+\rho_2x^2+\rho_3x^3+\ldots,$$
$$\xi^3=\sigma+\sigma_1x+\sigma_2x^2+\sigma_3x^3+\ldots,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

on trouvera, en faisant abstraction des termes qui renfermeraient des puissances positives de x,

$$\frac{\xi}{1-\frac{a}{bx}}=\varpi+\varpi_1\frac{a}{b}+\varpi_2\frac{a^2}{b^2}+\varpi_3\frac{a^3}{b^3}+\ldots$$
$$+\frac{1}{x}\left(\varpi\frac{a}{b}+\varpi_1\frac{a^2}{b^2}+\varpi_2\frac{a^3}{b^3}+\ldots\right)$$
$$+\frac{1}{x^2}\left(\varpi\frac{a^2}{b^2}+\varpi_1\frac{a^3}{b^3}+\varpi_2\frac{a^4}{b^4}+\ldots\right)$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$\frac{\xi^2}{2\left(1-\frac{a}{bx}\right)^2}=\frac{1}{2}\left(\rho+2\rho_1\frac{a}{b}+3\rho_2\frac{a^2}{b^2}+4\rho_3\frac{a^3}{b^3}+\ldots\right)$$
$$+\frac{1}{2x}\left(2\rho\frac{a}{b}+3\rho_1\frac{a^2}{b^2}+4\rho_2\frac{a^3}{b^3}+\ldots\right)$$
$$+\frac{1}{2x^2}\left(3\rho\frac{a^2}{b^2}+4\rho_1\frac{a^3}{b^3}+5\rho_2\frac{a^4}{b^4}+\ldots\right)$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$\frac{\xi^3}{3\left(1-\frac{a}{bx}\right)^3}=\frac{1}{2.3}\left(1.2.\sigma+2.3.\sigma_1\frac{a}{b}+3.4.\sigma_2\frac{a^2}{b^2}+\ldots\right)$$
$$+\frac{1}{2.3.x}\left(2.3.\sigma\frac{a}{b}+3.4.\sigma_1\frac{a^2}{b^2}+4.5.\sigma_2\frac{a^3}{b^3}+\ldots\right)$$
$$+\frac{1}{2.3.x^2}\left(3.4.\sigma\frac{a^2}{b^2}+4.5.\sigma_1\frac{a^3}{b^3}+5.6.\sigma_2\frac{a^4}{b^4}+\ldots\right)$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

et ainsi de suite.

Donc enfin, substituant ces valeurs dans l'équation (E) et comparant les termes affectés de x^0, x^{-1}, x^{-2},..., à cause de $\log\frac{bp}{a}=\log p-\log\frac{a}{b}$, on trouvera

$$\log p=\log\frac{a}{b}+\varpi+\varpi_1\frac{a}{b}+\varpi_2\frac{a^2}{b^2}+\varpi_3\frac{a^3}{b^3}+\ldots\Big)$$
$$+\frac{1}{2}\left(\rho+2\rho_1\frac{a}{b}+3\rho_2\frac{a^2}{b^2}+4\rho_3\frac{a^3}{b^3}+\ldots\right)$$

$$+\frac{1}{2.3}\left(1.2.\sigma+2.3.\sigma_1\frac{a}{b}+3.4.\sigma_2\frac{a^2}{b^2}+\ldots\right)$$

$$+\frac{1}{2.3.4}\left(1.2.3.\tau+2.3.4.\tau_1\frac{a}{b}+3.4.5.\tau_2\frac{a^2}{b^2}+\ldots\right)$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$p=\frac{a}{b}+\varpi\frac{a}{b}+\varpi_1\frac{a^2}{b^2}+\varpi_2\frac{a^3}{b^3}+\ldots$$

$$+\frac{1}{2}\left(2\rho\frac{a}{b}+3\rho_1\frac{a^2}{b^2}+4\rho_2\frac{a^3}{b^3}+\ldots\right)$$

$$+\frac{1}{2.3}\left(2.3.\sigma\frac{a}{b}+3.4.\sigma_1\frac{a^2}{b^2}+4.5.\sigma_2\frac{a^3}{b^3}+\ldots\right)$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$p^2=\frac{a^2}{b^2}+2\left(\varpi\frac{a^2}{b^2}+\varpi_1\frac{a^3}{b^3}+\varpi_2\frac{a^4}{b^4}+\ldots\right)$$

$$+\frac{2}{2}\left(3\rho\frac{a^2}{b^2}+4\rho_1\frac{a^3}{b^3}+5\rho_2\frac{a^4}{b^4}+\ldots\right)$$

$$+\frac{2}{2.3}\left(3.4.\sigma\frac{a^2}{b^2}+4.5.\sigma_1\frac{a^3}{b^3}+5.6.\sigma_2\frac{a^4}{b^4}+\ldots\right)$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$p^3=\frac{a^3}{b^3}+3\left(\varpi\frac{a^3}{b^3}+\varpi_1\frac{a^4}{b^4}+\varpi_2\frac{a^5}{b^5}+\ldots\right)$$

$$+\frac{3}{2}\left(4\rho\frac{a^3}{b^3}+5\rho_1\frac{a^4}{b^4}+6\rho_2\frac{a^5}{b^5}+\ldots\right)$$

$$+\frac{3}{2.3}\left(4.5.\sigma\frac{a^3}{b^3}+5.6.\sigma_1\frac{a^4}{b^4}+6.7.\sigma_2\frac{a^5}{b^5}+\ldots\right)$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

et ainsi de suite.

11. Maintenant, puisqu'on a supposé

$$\xi=\varpi+\varpi_1 x+\varpi_2 x^2+\ldots,$$

$$\xi^2=\rho+\rho_1 x+\rho_2 x^2+\ldots,$$

$$\xi^3=\sigma+\sigma_1 x+\sigma_2 x^2+\ldots,$$

et ainsi de suite, il est facile de voir qu'on aura, en faisant $x=\frac{a}{b}$,

$$\log p=\log x+\xi+\frac{1}{2}\frac{d(\xi^2 x)}{dx}+\frac{1}{2.3}\frac{d^2(\xi^3 x^2)}{dx^2}+\ldots,$$

$$p=x+\xi x+\frac{1}{2}\frac{d(\xi^2 x^2)}{dx}+\frac{1}{2.3}\frac{d^2(\xi^3 x^3)}{dx^2}+\ldots,$$

$$p^2=x^2+2\left[\xi x^2+\frac{1}{2}\frac{d(\xi^2 x^3)}{dx}+\frac{1}{2.3}\frac{d^2(\xi^3 x^4)}{dx^2}+\ldots\right],$$

$$p^3=x^3+3\left[\xi x^3+\frac{1}{2}\frac{d(\xi^2 x^4)}{dx}+\frac{1}{2.3}\frac{d^2(\xi^3 x^5)}{dx^2}+\ldots\right],$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

et, en général,

$$(F)\qquad p^m=x^m+m\left[\xi x^m+\frac{1}{2}\frac{d(\xi^2 x^{m+1})}{dx}+\frac{1}{2.3}\frac{d^2(\xi^3 x^{m+2})}{dx^2}+\ldots\right].$$

Ainsi, p sera une des racines de l'équation

$$o=a-bx+cx^2-dx^3+\ldots,$$

ou bien, à cause de

$$\xi=\frac{cx-dx^2+\ldots}{b},$$

de l'équation

$$(G)\qquad a-bx+bx\xi=o,$$

ξ étant une fonction de x.

12. Exemple II. — Soit, par exemple, l'équation

$$a-bx+cx^n=o;$$

on aura, dans ce cas,

$$bx\xi=cx^n,$$

et, par conséquent,

$$\xi=\frac{cx^{n-1}}{b};$$

donc, en nommant p une des racines de cette équation, on aura, en général,

$$p^m=x^m+m\left(\frac{c}{b}x^{m+n-1}+\frac{c^2}{2b^2}\frac{dx^{m+2n-1}}{dx}+\frac{c^3}{2.3.b^3}\frac{d^2x^{m+3n-1}}{dx^2}+\ldots\right)$$

en mettant, après les différentiations, $\frac{a}{b}$ à la place de x; ainsi l'on aura (en changeant p en x)

$$x^m = \frac{a^m}{b^m} + m\left[\frac{ca^{m+n-1}}{b^{m+n}} + \frac{(m+2n-1)c^2a^{m+2n-2}}{2b^{m+2n}} + \frac{(m+3n-1)(m+3n-2)c^3a^{m+3n-3}}{2.3.b^{m+3n}} + \frac{(m+4n-1)(m+4n-2)(m+4n-3)c^4a^{m+4n-4}}{2.3.4.b^{m+4n}} + \ldots\right].$$

Si l'on fait $x = \frac{1}{y}$, en sorte qu'on ait l'équation

$$ay^n - by^{n-1} + c = 0,$$

on aura $y^m = x^{-m}$; ainsi il n'y aura qu'à faire m négatif dans la formule précédente pour avoir

$$y^m = \frac{b^m}{a^m} - m\left[\frac{cb^{m-n}}{a^{m-n+1}} - \frac{(m-2n+1)c^2b^{m-2n}}{2a^{m-2n+2}} + \frac{(m-3n+1)(m-3n+2)c^3b^{m-3n}}{2.3.a^{m-3n+3}} - \ldots\right].$$

Je dois remarquer, à l'égard de cette dernière formule, qu'elle a déjà été trouvée par M. Lambert, qui me l'a communiquée il y a quelque temps sans démonstration.

13. Exemple III. — Soit l'équation à quatre termes

$$a - bx + cx^n - x^r = 0;$$

on fera

$$bx\xi = cx^n - x^r,$$

et, par conséquent,

$$\xi = \frac{cx^{n-1} - x^{r-1}}{b};$$

donc

$$\xi^2 = \frac{c^2x^{2n-2} - 2cx^{n+r-1} + x^{2r-2}}{b^2},$$

$$\xi^3 = \frac{c^3x^{3n-3} - 3c^2x^{2n+r-2} + 3cx^{n+2r-2} - x^{3r-3}}{b^3},$$

et ainsi de suite.

Donc, en mettant x à la place de p,

$$x^m = \frac{a^m}{b^m} + m\left(\frac{ca^{m+n-1}}{b^{m+n}} - \frac{a^{m+r-1}}{b^{m+r}}\right) + \frac{m}{2}\left[\frac{(m+2n-1)c^2a^{m+2n-2}}{b^{m+2n}} - 2\frac{(m+n+r-1)ca^{m+n+r-2}}{b^{m+n+r}} + \frac{(m+2r-1)a^{m+2r-2}}{b^{m+2r}}\right] + \frac{m}{2.3}\left[\frac{(m+3n-1)(m+3n-2)c^3a^{m+3n-3}}{b^{m+3n}} - 3\frac{(m+2n+r-1)(m+2n+r-2)c^2a^{m+2n+r-3}}{b^{m+2n+r}} + 3\frac{(m+n+2r-1)(m+n+2r-2)ca^{m+n+2r-3}}{b^{m+n+2r}} - \frac{(m+3r-1)(m+2r-2)a^{m+3r-3}}{b^{m+3r}}\right]$$

.....

14. Exemple IV. — Soit l'équation générale

$$a - bx + cx^2 - dx^3 + ex^4 - fx^5 + \ldots = 0;$$

on aura

$$bx\xi = cx^2 - dx^3 + ex^4 - fx^5 + \ldots,$$

et, par conséquent,

$$\xi = \frac{cx - dx^2 + ex^3 - fx^4 + \ldots}{b},$$

$$\xi^2 = \frac{c^2x^2 - 2cdx^3 + (d^2 + 2ce)x^4 - \ldots}{b^2},$$

$$\xi^3 = \frac{c^3x^3 - 3cdx^4 + \ldots}{b^3},$$

$$\xi^4 = \frac{c^4x^4 - \ldots}{b^4},$$

.....

Donc

$$x^m = \frac{a^m}{b^m} + m\left(\frac{a^{m+1}c}{b^{m+2}} - \frac{a^{m+2}d}{b^{m+3}} + \frac{a^{m+3}e}{b^{m+4}} - \frac{a^{m+4}f}{b^{m+5}} + \ldots\right) + \frac{m}{2}\left[\frac{(m+3)a^{m+3}c^2}{b^{m+4}} - \frac{(m+4)a^{m+3}.2cd}{b^{m+5}} + \frac{(m+5)a^{m+4}(d^2+2ce)}{b^{m+6}} - \ldots\right]$$

$$+\frac{m}{2.3}\left[\frac{(m+5)(m+4)a^{m+3}c^3}{b^{m+6}}-\frac{(m+6)(m+5)a^{m+4}.3cd}{b^{m+5}}+\dots\right]$$
$$+\frac{m}{2.3.4}\left[\frac{(m+7)(m+6)(m+5)a^{m+4}c^4}{b^{m+8}}-\dots\right],$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

Si m est égal à 1, on aura

$$x=\frac{a}{b}+\frac{a^2c}{b^3}-\frac{a^3d}{b^4}+\frac{a^4e}{b^5}-\frac{a^5f}{b^6}+\dots$$
$$+\frac{2a^3c^2}{b^5}-\frac{5a^4cd}{b^6}+\frac{3a^5(d^2+2ce)}{b^7}-\dots$$
$$+\frac{5a^4c^3}{b^7}-\frac{21a^5cd}{b^8}+\dots$$
$$+\frac{14a^5c^4}{b^9}+\dots$$
$$\dots\dots\dots\dots;$$

c'est la formule connue de Newton pour le retour des suites.

15. Considérons maintenant l'équation générale

$$\alpha-x+\varphi(x)=0,$$

$\varphi(x)$ étant une fonction quelconque de x; comparant cette équation avec l'équation

$$a-bx+bx\xi=0$$

du n° **11**, ou bien

$$\frac{a}{b}-x+x\xi=0,$$

on aura

$$\alpha=\frac{a}{b}\quad\text{et}\quad\xi=\frac{\varphi(x)}{x};$$

donc, si l'on dénote par p une des racines de l'équation proposée, on aura, par la formule (F) du numéro cité,

$$p^m=x^m+m\left[x^{m-1}\varphi(x)+\frac{1}{2}\frac{dx^{m-1}[\varphi(x)]^2}{dx}+\frac{1}{2.3}\frac{d^2x^{m-1}[\varphi(x)]^3}{dx^2}+\dots\right],$$

en faisant, après les différentiations, $x=\alpha$.

Or, puisque $mx^{m-1}=\frac{d(x^m)}{dx}$, il est visible que la formule précédente peut se mettre sous cette forme

$$p^m=x^m+\frac{d(x^m)}{dx}\varphi(x)+\frac{1}{2}\frac{d\frac{d(x^m)}{dx}[\varphi(x)]^2}{dx}+\frac{1}{2.3}\frac{d^2\frac{d(x^m)}{dx}[\varphi(x)]^3}{dx}+\dots.$$

D'où il est facile de conclure qu'une fonction quelconque de p, comme $\psi(p)$, sera exprimée de la manière suivante

$$\psi(p)=\psi(x)+\frac{d\psi(x)}{dx}\varphi(x)+\frac{1}{2}\frac{d\frac{d\psi(x)}{dx}[\varphi(x)]^2}{dx}+\frac{1}{2.3}\frac{d^2\frac{d\psi(x)}{dx}[\varphi(x)]^3}{dx^2}+\dots,$$

pourvu qu'on change, comme nous l'avons dit, x en α après avoir exécuté les différentiations indiquées, ce qui fournit le théorème suivant, qui est très-remarquable par sa simplicité et par sa généralité.

16. Théorème. — *Soit l'équation*

$$\text{(H)}\qquad \alpha-x+\varphi(x)=0,$$

$\varphi(x)$ étant une fonction quelconque de x. Que p soit une des racines de cette équation, c'est-à-dire une des valeurs de x, et qu'on demande la valeur d'une fonction quelconque de p comme $\psi(p)$. Qu'on dénote, pour plus de simplicité, la quantité $\frac{d\psi(x)}{dx}$ par $\psi'(x)$, et je dis qu'on aura, en général,

$$\text{(I)}\quad\begin{cases}\psi(p)=\psi(x)+\varphi(x)\psi'(x)+\frac{1}{2}\frac{d[\varphi(x)]^2\psi'(x)}{dx}\\ \qquad+\frac{1}{2.3}\frac{d^2[\varphi(x)]^3\psi'(x)}{dx^2}+\frac{1}{2.3.4}\frac{d^3[\varphi(x)]^4\psi'(x)}{dx^3}+\dots,\end{cases}$$

où il faudra changer x en α après les différentiations.

17. Si l'on fait $x=\alpha y$, en sorte que l'équation (H) devienne

$$1-y+\frac{\varphi(\alpha y)}{\alpha}=0,$$

et que q soit la valeur de y, on aura l'expression d'une fonction quelconque $\psi(q)$, en mettant dans la formule (I) q à la place de p, y à la place de x, $\frac{\varphi(\alpha y)}{\alpha}$ à la place de $\varphi(y)$, et faisant ensuite $y = 1$ après les différentiations.

Donc, puisque $q = y = \frac{x}{\alpha}$, on aura

$$(K)\quad \begin{cases} \psi\left(\frac{x}{\alpha}\right) = \psi(y) + \frac{\varphi(\alpha y)\psi'(y)}{\alpha} + \frac{1}{2\alpha^2}\frac{d\varphi(\alpha y)^2\psi'(y)}{dy} \\ \qquad + \frac{1}{2.3.\alpha^3}\frac{d^2\varphi(\alpha y)^3\psi'(y)}{dy^2} + \frac{1}{2.3.4.\alpha^4}\frac{d^3\varphi(\alpha y)^4\psi'(y)}{dy^3} + \ldots, \end{cases}$$

où la variable y doit être supposée égale à 1 après toutes les différentiations.

18. Donc, comme $\psi(y) = \int \psi'(y)\,dy$, si l'on prend la fraction

$$\frac{\psi'(y)}{z\left[1 - z\frac{\varphi(\alpha y)}{\alpha}\right]}$$

et qu'on la développe suivant les puissances de z, ce qui donnera

$$\frac{\psi'(y)}{z} + \frac{\varphi(\alpha y)\psi'(y)}{\alpha} + z\frac{[\varphi(\alpha y)]^2\psi'(y)}{\alpha^2} + z^2\frac{[\varphi(\alpha y)]^3\psi'(y)}{\alpha^3} + \ldots,$$

qu'ensuite on y change $\frac{1}{z}$ en $\int dy$, z en $\frac{1}{2}\frac{d}{dy}$, z^2 en $\frac{1}{2.3}\frac{d^2}{dy^2}$, z^3 en $\frac{1}{2.3.4}\frac{d^3}{dy^3}$, et ainsi des autres puissances de z; et qu'après avoir exécuté les différentiations indiquées de cette manière on fasse $y = 1$, on aura la valeur de $\psi\left(\frac{x}{\alpha}\right)$, x étant une des racines de l'équation (H),

$$\alpha - x + \varphi x = 0.$$

Ainsi l'on pourra faire en sorte que la série qui représente la valeur de $\psi\left(\frac{x}{\alpha}\right)$ soit ordonnée par rapport à telle lettre qu'on voudra; car pour cela il n'y aura qu'à ordonner, par rapport à cette même lettre, la série

résultante de la fraction $\frac{1}{1 - z\frac{\varphi(\alpha x)}{\alpha}}$, comme on va le voir dans les Exemples suivants.

19. Exemple V. — Reprenons l'équation générale de l'Exemple IV, savoir

$$0 = a - bx + cx^2 - dx^3 + ex^4 - fx^5 + \ldots,$$

et comparant avec l'équation (H), on aura, après avoir divisé par b,

$$\alpha = \frac{a}{b}, \quad \varphi(x) = \frac{cx^2 - dx^3 + ex^4 - fx^5 + \ldots}{b}.$$

Donc

$$\frac{\varphi(\alpha y)}{\alpha} = \frac{ca}{b^2}y^2 - \frac{da^2}{b^3}y^3 + \frac{ea^3}{b^4}y^4 - \frac{fa^4}{b^5}y^5 + \ldots,$$

de sorte que la fraction

$$\frac{1}{1 - z\frac{\varphi(\alpha y)}{\alpha}}$$

sera

$$\frac{1}{1 - z\frac{ca}{b^2}y^2 + z\frac{da^2}{b^3}y^3 - z\frac{ea^3}{b^4}y^4 + \ldots}.$$

Réduisons cette fraction en série, et supposons d'abord que la série soit ordonnée par rapport à la lettre b, il est clair qu'à cause que les dimensions de y et $\frac{1}{b}$ sont partout les mêmes, cette série sera de la forme suivante

$$1 + \frac{Py^2}{b^2} - \frac{Qy^3}{b^3} + \frac{Ry^4}{b^4} - \frac{Sy^5}{b^5} + \ldots,$$

de sorte qu'en multipliant en croix et comparant les termes, on trouvera

$$\begin{aligned} P &= acz, \\ Q &= a^2dz, \\ R &= a^3ez + aczP, \\ S &= a^4fz + a^2dzP + aczQ, \\ T &= a^5gz + a^3ezP + a^2dzQ + aczR, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

Or, si l'on développe ces valeurs en les ordonnant par rapport aux puis-

sances de z, il est facile de voir qu'elles seront exprimées de cette manière

$$\begin{aligned} P &= Az, \\ Q &= Bz, \\ R &= Cz + C_1 z^2, \\ S &= Dz + D_1 z^2, \\ T &= Ez + E_1 z^2 + E_2 z^3, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots, \end{aligned}$$

et l'on trouvera

$$\begin{aligned} A &= ac, \\ B &= a^2 d, \\ C &= a^3 e, \quad C_1 = acA, \\ D &= a^4 f, \quad D_1 = a^2 dA + acB, \\ E &= a^5 g, \quad E_1 = a^3 eA + a^2 dB + acC, \quad E_2 = acC_1, \\ &\cdots\cdots, \quad \cdots\cdots\cdots\cdots, \quad \cdots\cdots\cdots \end{aligned}$$

Donc, on aura,

$$\frac{\psi'(y)}{z\left[1 - \frac{z\varphi(\alpha y)}{\alpha}\right]} = \frac{\psi'(y)}{z} + \frac{A}{b^2} y^2 \psi'(y) - \frac{B}{b^3} y^3 \psi'(y) + \frac{C + C_1 z}{b^4} y^4 \psi'(y) - \frac{D + D_1 z}{b^5} y^5 \psi'(y) + \frac{E + E_1 z + E_2 z^2}{b^6} y^6 \psi'(y) - \cdots.$$

Donc, changeant $\frac{1}{z}$ en $\int dy$, z en $\frac{1}{2}\frac{d}{dy}$, $\cdots$ (18), on aura

$$\begin{aligned} \psi\left(\frac{bx}{a}\right) = \psi(y) &+ \frac{A}{b^2} y^2 \psi'(y) \\ &- \frac{B}{b^3} y^3 \psi'(y) \\ &+ \frac{C}{b^4} y^4 \psi'(y) + \frac{C_1}{b^4} \cdot \frac{1}{2} \frac{d[y^4 \psi'(y)]}{dy} \\ &- \frac{D}{b^5} y^5 \psi'(y) + \frac{D_1}{b^5} \cdot \frac{1}{2} \frac{d[y^5 \psi'(y)]}{dy} \\ &+ \frac{E}{b^6} y^6 \psi'(y) + \frac{E_1}{b^6} \cdot \frac{1}{2} \frac{d[y^6 \psi'(y)]}{dy} + \frac{E_2}{b^6} \cdot \frac{1}{2.3} \frac{d^2[y^6 \psi'(y)]}{dy^2} \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots, \end{aligned}$$

où il n'y aura plus qu'à faire $y = 1$, après avoir exécuté les différentiations qui ne sont qu'indiquées.

Or, comme les coefficients A, B, C,... ne renferment point la lettre b, il est clair que cette série sera ordonnée relativement aux puissances négatives de b.

Si l'on fait $\psi(y) = y^m$, ce qui donne $\psi'(y) = my^{m-1}$, on aura

$$\frac{b^m x^m}{a^m} = 1 + \frac{mA}{b^2} - \frac{mB}{b^3} + \frac{mC + \frac{m(m+3)}{2} C_1}{b^4} - \frac{mD + \frac{m(m+4)}{2} D_1}{b^5} + \frac{mE + \frac{m(m+5)}{2} E_1 + \frac{m(m+4)(m+5)}{2.3} E_2}{b^6} - \cdots.$$

Et si l'on fait $\psi(y) = \log y$, d'où $\psi'(y) = \frac{1}{y}$, on aura

$$\log \frac{bx}{a} = 1 + \frac{A}{b^2} - \frac{B}{b^3} + \frac{C + \frac{3}{2} C_1}{b^4} - \frac{D + \frac{4}{2} D_1}{b^5} + \frac{E + \frac{5}{2} E_1 + \frac{4.5}{2.3} E_2}{b^6} - \cdots.$$

20. Les séries que nous venons de trouver sont ordonnées relativement aux puissances de b; si l'on voulait qu'elles le fussent relativement à celles de a, il n'y aura qu'à ordonner de cette manière la série résultante de la fraction

$$\frac{1}{1 - z\frac{cay^2}{b^2} + z\frac{da^2y^3}{b^3} - z\frac{ea^3y^4}{b^4} + \cdots}.$$

Or, comme chaque puissance de a y est toujours multipliée par une pareille puissance de $\frac{y}{b}$, il est clair que la série aura cette forme

$$1 + P\frac{ay}{b} + Q\frac{a^2y^2}{b^2} + R\frac{a^3y^3}{b^3} + S\frac{a^4y^4}{b^4} + \cdots;$$

on trouvera

$$\begin{aligned} P &= \frac{czy}{b}, \\ Q &= P\frac{czy}{b} - \frac{dzy}{b}, \\ R &= Q\frac{czy}{b} - P\frac{dzy}{b} + \frac{ezy}{b}, \\ S &= R\frac{czy}{b} - Q\frac{dzy}{b} + P\frac{ezy}{b} - \frac{fzy}{b}, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned}$$

Or, en développant ces valeurs suivant les dimensions de $\frac{zy}{b}$, elles se trouveront exprimées de cette manière

$$P = A\frac{zy}{b},$$

$$Q = B\frac{zy}{b} + B_1\left(\frac{zy}{b}\right)^2,$$

$$R = C\frac{zy}{b} + C_1\left(\frac{zy}{b}\right)^2 + C_2\left(\frac{zy}{b}\right)^3,$$

$$S = D\frac{zy}{b} + D_1\left(\frac{zy}{b}\right)^2 + D_2\left(\frac{zy}{b}\right)^3 + D_3\left(\frac{zy}{b}\right)^4,$$

.....

De sorte que l'on aura

$$A = e,$$
$$B = -d,$$
$$C = e,$$
$$D = -f,$$
.....,
$$B_1 = eA,$$
$$C_1 = -dA + eB,$$
$$D_1 = eA - dB + eC,$$
.....,
$$C_2 = eB_1,$$
$$D_2 = -dB_1 + eC_1,$$
.....,
$$D_3 = eC_2,$$
.....

Donc, on aura,

$$\frac{\psi'(y)}{z\left[1 - \frac{z\varphi(\alpha y)}{\alpha}\right]} = \frac{\psi'(y)}{z} + a\frac{Ay^2}{b^2}\psi'(y) + a^2\left(\frac{By^3}{b^3} + \frac{B_1 zy^4}{b^4}\right)\psi'(y) + a^3\left(\frac{Cy^4}{b^4} + \frac{C_1 zy^5}{b^5} + \frac{C_2 z^2 y^6}{b^6}\right)\psi'(y) + a^4\left(\frac{Dy^5}{b^5} + \frac{D_1 zy^6}{b^6} + \frac{D_2 z^2 y^7}{b^7} + \frac{D_3 z^3 y^8}{b^8}\right)\psi'(y)$$
.....

D'où l'on déduira (18) la formule générale

$$\psi\left(\frac{bx}{a}\right) = \psi(y) + a\frac{A}{b^2}y^2\psi'(y) + a^2\left[\frac{B}{b^3}y^3\psi'(y) + \frac{B_1}{b^4}\cdot\frac{1}{2}\frac{d[y^4\psi'(y)]}{dy}\right] + a^3\left[\frac{C}{b^4}y^4\psi'(y) + \frac{C_1}{b^5}\cdot\frac{1}{2}\frac{d[y^5\psi'(y)]}{dy} + \frac{C_2}{b^6}\cdot\frac{1}{2.3}\frac{d^2[y^6\psi'(y)]}{dy^2}\right] + a^4\left[\frac{D}{b^5}y^5\psi'(y) + \frac{D_1}{b^6}\cdot\frac{1}{2}\frac{d[y^6\psi'(y)]}{dy} + \frac{D_2}{b^7}\cdot\frac{1}{2.3}\frac{d^2[y^7\psi'(y)]}{dy^2} + \frac{D_3}{b^8}\cdot\frac{1}{2.3.4}\frac{d^3[y^8\psi'(y)]}{dy^3}\right]$$
.....,

où il faudra faire $y = 1$.

Soient, par exemple,

$$\psi(y) = y^m \quad \text{et} \quad \psi'(y) = my^{m-1},$$

on trouvera

$$\frac{b^m x^m}{a^m} = 1 + \frac{mA}{b}\frac{a}{b} + \left[\frac{mB}{b} + \frac{m(m+3)B_1}{2b^2}\right]\frac{a^2}{b^2} + \left[\frac{mC}{b} + \frac{m(m+4)C_1}{2b^3} + \frac{m(m+4)(m+5)C_2}{2.3.b^3}\right]\frac{a^3}{b^3} + \left[\frac{mD}{b} + \frac{m(m+5)D_1}{2b^2} + \frac{m(m+5)(m+6)D_2}{2.3.b^3} + \frac{m(m+5)(m+6)(m+7)D_3}{2.3.4.b^4}\right]\frac{a^4}{b^4}$$
.....

Donc, si $m = 1$, on aura, en multipliant par $\frac{a}{b}$,

$$\begin{aligned} x = {} & \frac{a}{b} \\ & + \frac{A}{b}\frac{a^2}{b^2} \\ & + \left[\frac{B}{b} + \frac{4B_1}{2b^2}\right]\frac{a^3}{b^3} \\ & + \left[\frac{C}{b} + \frac{5C_1}{2b^2} + \frac{5.6.C_2}{2.3.b^3}\right]\frac{a^4}{b^4} \\ & + \left[\frac{D}{b} + \frac{6D_1}{2b^2} + \frac{6.7.D_2}{2.3.b^3} + \frac{6.7.8.D_3}{2.3.4.b^4}\right]\frac{a^5}{b^5} \\ & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned}$$

Et si l'on fait $\psi(y) = \log y$, on trouvera, à cause de $\log y = 0$ lorsque $y = 1$,

$$\begin{aligned} \log\frac{bx}{a} = {} & \frac{A}{b}\frac{a}{b} \\ & + \left(\frac{B}{b} + \frac{3B_1}{2b^2}\right)\frac{a^2}{b^2} \\ & + \left(\frac{C}{b} + \frac{4C_1}{2b^2} + \frac{4.5.C_2}{2.3.b^3}\right)\frac{a^3}{b^3} \\ & + \left(\frac{D}{b} + \frac{5D_1}{2b^2} + \frac{5.6.D_2}{2.3.b^3} + \frac{5.6.7.D_3}{2.3.4.b^4}\right)\frac{a^4}{b^4} \\ & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned}$$

Au reste, les valeurs de x^m que nous venons de trouver dans ce numéro et dans le précédent sont les mêmes pour le fond que celle que nous avons déjà trouvée plus haut dans l'Exemple IV; mais ces valeurs, et surtout la dernière, sont mises ici sous une forme plus simple et plus commode, par laquelle on voit clairement la loi de la série, en sorte qu'il est très-aisé d'en calculer les différents termes et de la continuer autant qu'on voudra.

21. Exemple VI. — Soit proposée l'équation

$$0 = \alpha - x + \beta x^p + \gamma x^{p+q} + \delta x^{p+2q} + \varepsilon x^{p+3q} + \ldots;$$

en la comparant avec l'équation (H) du n° 16, on aura

$$\varphi(x) = \beta x^p + \gamma x^{p+q} + \delta x^{p+2q} + \varepsilon x^{p+3q} + \ldots,$$

donc

$$\frac{\varphi(\alpha y)}{\alpha} = \beta\alpha^{p-1}y^p + \gamma\alpha^{p+q-1}y^{p+q} + \delta\alpha^{p+2q-1}y^{p+2q} + \ldots$$

et

$$\frac{1}{1 - z\dfrac{\varphi(\alpha y)}{\alpha}} = \frac{1}{1 - \beta\alpha^{p-1}y^p z - \gamma\alpha^{p+q-1}y^{p+q}z - \ldots}.$$

Faisons, pour plus de simplicité,

$$\alpha^{p-q-1}y^{p-q}z = u,$$

et l'on aura la fraction

$$\frac{1}{1 - \beta u(\alpha y)^q - \gamma u(\alpha y)^{2q} - \delta u(\alpha y)^{3q} - \ldots},$$

laquelle, étant développée suivant les puissances de αy, deviendra

$$1 + P(\alpha y)^q + Q(\alpha y)^{2q} + R(\alpha y)^{3q} + S(\alpha y)^{4q} + \ldots,$$

où l'on aura

$$\begin{aligned} P &= \beta u, \\ Q &= P\beta u + \gamma u, \\ R &= Q\beta u + P\gamma u + \delta u, \\ S &= R\beta u + Q\gamma u + P\delta u + \varepsilon u, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots, \end{aligned}$$

et, développant de nouveau ces valeurs suivant les puissances de u,

$$\begin{aligned} P &= Au, \\ Q &= Bu + B_1u^2, \\ R &= Cu + C_1u^2 + C_2u^3, \\ S &= Du + D_1u^2 + D_2u^3 + D_3u^4, \\ T &= Eu + E_1u^2 + E_2u^3 + E_3u^4 + E_4u^5, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots, \end{aligned}$$

les coefficients A, B,... étant déterminés de la manière suivante

$$A = \frac{\beta}{\iota},$$

$$B = \gamma, \quad B_1 = \beta A,$$

$$C = \delta, \quad C_1 = \gamma A + \beta B, \quad C_2 = \beta B_1,$$

$$D = \varepsilon, \quad D_1 = \delta A + \gamma B + \beta C, \quad D_2 = \gamma B_1 + \beta C_1, \quad D_3 = \beta C_2,$$

$$E = \zeta, \quad E_1 = \varepsilon A + \delta B + \gamma C + \beta D, \quad E_2 = \delta B_1 + \gamma C_1 + \beta D_1, \quad E_2 = \gamma C_2 + \beta D_2, \quad E_4 = \beta D_3,$$

$$\ldots, \quad \ldots, \quad \ldots, \quad \ldots, \quad \ldots$$

Ainsi, remettant à la place de u sa valeur $\alpha^{p-q-1} y^{p-q} z$, on aura

$$\frac{\psi'(y)}{z\left[1 - z\frac{\varphi(\alpha y)}{\alpha}\right]}$$

$$= \frac{\psi'(y)}{z} + A\alpha^{p-1} y^{p} \psi'(y)$$

$$+ B\alpha^{p+q-1} y^{p+q} \psi'(y) + B_1 \alpha^{2p-2} z\, y^{2p} \psi'(y)$$

$$+ C\alpha^{p+2q-1} y^{p+2q} \psi'(y) + C_1 \alpha^{2p+q-2} z\, y^{2p+q} \psi'(y) + C_2 \alpha^{3p-3} z^2 y^{3p} \psi'(y)$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Donc, pratiquant les transformations enseignées dans le n° 18, on aura la valeur de $\psi\left(\frac{x}{\alpha}\right)$ exprimée par la série suivante, dans laquelle il faudra se souvenir de faire $y = 1$ après toutes les différentiations,

$$\psi\left(\frac{x}{\alpha}\right) = \psi(y)$$

$$+ A\alpha^{p-1} y^{p} \psi'(y)$$

$$+ B\alpha^{p+q-1} y^{p+q} \psi'(y) + B_1 \alpha^{2p-2} \cdot \frac{1}{2} \frac{d[y^{2p}\psi'(y)]}{dy}$$

$$+ C\alpha^{p+2q-1} y^{p+2q} \psi'(y) + C_1 \alpha^{2p+q-2} \cdot \frac{1}{2} \frac{d[y^{2p+q}\psi'(y)]}{dy}$$

$$+ C_2 \alpha^{3p-3} \cdot \frac{1}{2.3} \frac{d^2[y^{3p}\psi'(y)]}{dy^2}$$

$$+ D\alpha^{p+3q-1} y^{p+3q} \psi'(y) + D_1 \alpha^{2p+2q-2} \cdot \frac{1}{2} \frac{d[y^{2p+3q}\psi'(y)]}{dy}$$

$$+ D_2 \alpha^{3p+q-3} \cdot \frac{1}{2.3} \frac{d^2[y^{3p+q}\psi'(y)]}{dy^2} + D_3 \alpha^{4p-4} \cdot \frac{1}{2.3.4} \frac{d^3[y^{4p}\psi'(y)]}{dy^3}$$

$$+ E\alpha^{p+4q-1} y^{p+4q} \psi'(y) + E_1 \alpha^{2p+3q-2} \cdot \frac{1}{2} \frac{d[y^{2p+3q}\psi'(y)]}{dy}$$

$$+ E_2 \alpha^{3p+2q-3} \cdot \frac{1}{2.3} \frac{d^2[y^{3p+2q}\psi'(y)]}{dy^2} + E_3 \alpha^{4p+q-4} \cdot \frac{1}{2.3.4} \frac{d^3[y^{4p+q}\psi'(y)]}{dy^3}$$

$$+ E_4 \alpha^{5p-5} \cdot \frac{1}{2.3.4.5} \frac{d^4[y^{5p}\psi'(y)]}{dy^4}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Si l'on fait $\psi(y) = y^m$, et par conséquent $\psi'(y) = m y^{m-1}$, on trouvera, en faisant $y = 1$,

$$\frac{x^m}{\alpha^m} = 1$$

$$+ mA\alpha^{p-1}$$

$$+ mB\alpha^{p+q-1} + \frac{m(m+2p-1)}{2} B_1 \alpha^{2p-2}$$

$$+ mC\alpha^{p+2q-1} + \frac{m(m+2p+q-1)}{2} C_1 \alpha^{2p+q-2} + \frac{m(m+3p-1)(m+3p-2)}{2.3} C_2 \alpha^{3p-3}$$

$$+ mD\alpha^{p+3q-1} + \frac{m(m+2p+2q-1)}{2} D_1 \alpha^{2p+2q-2}$$

$$+ \frac{m(m+3p+q-1)(m+3p+q-2)}{2.3} D_2 \alpha^{3p+q-3}$$

$$+ \frac{m(m+4p-1)(m+4p-2)(m+4p-3)}{2.3.4} D_3 \alpha^{4p-4}$$

$$+ mE\alpha^{p+4q-1} + \frac{m(m+2p+3q-1)}{2} E_1 \alpha^{2p+3q-2}$$

$$+ \frac{m(m+3p+2q-1)(m+3p+2q-2)}{2.3} E_2 \alpha^{3p+2q-3}$$

$$+ \frac{m(m+4p+q-1)(m+4p+q-2)(m+4p+q-3)}{2.3.4} E_3 \alpha^{4p+q-4}$$

$$+ \frac{m(m+5p-1)(m+5p-2)(m+5p-3)(m+5p-4)}{2.3.4.5} E_4 \alpha^{5p-5}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Et si l'on fait $\psi(y) = \log y$, on aura, à cause de $\log y = 0$,

$$\begin{aligned}\log\frac{x}{\alpha} = {} & A\alpha^{p-1} \\ & + B\alpha^{p+q-1} + \frac{2p-1}{2} B_1 \alpha^{2p-2} \\ & + C\alpha^{p+2q-1} + \frac{2p+q-1}{2} C_1 \alpha^{2p+q-2} + \frac{(3p-1)(3p-2)}{2.3} C_2 \alpha^{3p-3} \\ & + D\alpha^{p+3q-1} + \frac{2p+2q-1}{2} D_1 \alpha^{2p+2q-2} + \frac{(3p+q-1)(3p+q-2)}{2.3} D_2 \alpha^{3p+q-3} \\ & + \frac{(4p-1)(4p-2)(4p-3)}{2.3.4} D_3 \alpha^{4p-4} \\ & + E\alpha^{p+4q-1} + \frac{2p+3q-1}{2} E_1 \alpha^{2p+3q-2} \\ & + \frac{(3p+2q-1)(3p+2q-2)}{2.3} E_2 \alpha^{3p+2q-3} \\ & + \frac{(4p+q-1)(4p+q-2)(4p+q-3)}{2.3.4} E_3 \alpha^{4p+q-4} \\ & + \frac{(5p-1)(5p-2)(5p-3)(5p-4)}{2.3.4.5} E_4 \alpha^{5p-5} \\ & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\end{aligned}$$

22. Exemple VII. — Si l'on avait l'équation

$$o = \alpha - x^r + \beta x^p + \gamma x^{p+q} + \delta x^{p+2q} + \varepsilon x^{p+3q} + \ldots,$$

on pourrait la ramener à celle de l'Exemple précédent en faisant $x^r = t$, ce qui la changerait en celle-ci

$$o = \alpha - t + \beta t^{\frac{p}{r}} + \gamma t^{\frac{p+q}{r}} + \delta t^{\frac{p+2q}{r}} + \varepsilon t^{\frac{p+3q}{r}} + \ldots,$$

laquelle est, comme on voit, dans le cas dont nous parlons; de sorte qu'il n'y aura qu'à changer dans les formules précédentes x en t, p en $\frac{p}{r}$ et q en $\frac{q}{r}$ pour les appliquer à l'équation dont il s'agit ici.

Supposons, pour plus de simplicité, $\alpha = \rho^r$, et l'on aura, en mettant x^r à la place de t et conservant les mêmes valeurs des coefficients A, B, B′, ...,

$$\begin{aligned}\psi\left(\frac{x^r}{\rho^r}\right) = {} & \psi(y) \\ & + A\rho^{p-r} y^{\frac{p}{r}} \psi'(y) \\ & + B\rho^{p+q-r} y^{\frac{p+q}{r}} \psi'(y) + B'\rho^{2p-2r} \cdot \frac{1}{2} \frac{dy^{\frac{2p}{r}} \psi'(y)}{dy} \\ & + C\rho^{p+2q-r} y^{\frac{p+2q}{r}} \psi'(y) + C_1 \rho^{2p+q-2r} \cdot \frac{1}{2} \frac{d\left[y^{\frac{2p+q}{r}} \psi'(y)\right]}{dy} \\ & + C_2 \rho^{3p-3r} \cdot \frac{1}{2.3} \frac{d^2\left[y^{\frac{3p}{r}} \psi'(y)\right]}{dy^2} \\ & + D\rho^{p+3q-r} y^{\frac{p+3q}{r}} \psi'(y) + D_1 \rho^{2p+3q-2r} \cdot \frac{1}{2} \frac{d\left[y^{\frac{2p+3q}{r}} \psi'(y)\right]}{dy} \\ & + D_2 \rho^{3p+q-3r} \cdot \frac{1}{2.3} \frac{d^2\left[y^{\frac{3p+q}{r}} \psi'(y)\right]}{dy^2} + D_3 \rho^{4p-4r} \cdot \frac{1}{2.3.4} \frac{d^3\left[y^{\frac{3p}{r}} \psi'(y)\right]}{dy^3} \\ & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,\end{aligned}$$

où il faudra faire $y = 1$ après les différentiations.

Si l'on suppose $\psi(y) = y^{\frac{m}{r}}$, on aura

$$\psi\left(\frac{x^r}{\rho^r}\right) = \frac{x^m}{\rho^m};$$

donc on trouvera

$$\begin{aligned}\left(\frac{x}{\rho}\right)^m = {} & 1 \\ & + \frac{m}{r} A\rho^{p-r} \\ & + \frac{m}{r} B\rho^{p+q-r} + \frac{m(m+2p-r)}{2r^2} B_1 \rho^{2p-2r} \\ & + \frac{m}{r} C\rho^{p+2q-r} + \frac{m(m+2p+q-r)}{2r^2} C_1 \rho^{2p+q-2r} \\ & + \frac{m(m+3p-r)(m+3p-2r)}{2.3.r^3} C_2 \rho^{3p-3r}\end{aligned}$$

$$+\frac{m}{r}\,D\rho^{p+2q-r}+\frac{m(m+2p+2q-r)}{2r^2}\,D_1\rho^{2p+2q-2r}$$
$$+\frac{m(m+3p+q-r)(m+3p+q-2r)}{2.3.r^3}\,D_2\rho^{3p+q-3r}$$
$$+\frac{m(m+4p-r)(m+4p-2r)(m+4p-3r)}{2.3.4.r^4}\,D_3\rho^{4p-4r}$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Et si l'on suppose $\psi(y)=\log y$, ce qui donne

$$\psi\left(\frac{x^r}{\rho^r}\right)=\log\frac{x^r}{\rho^r}=r\log\frac{x}{\rho},$$

on aura, en divisant par r,

$$\log\frac{x}{\rho}=\frac{1}{r}A\rho^{p-r}$$
$$+\frac{1}{r}B\rho^{p+q-r}+\frac{2p-r}{2r^2}B_1\rho^{2p-2r}$$
$$+\frac{1}{r}C\rho^{p+2q-r}+\frac{2p+q-r}{2r^2}C_1\rho^{2p+q-2r}+\frac{(3p-r)(3p-2r)}{2.3.r^3}C_2\rho^{3p-3r}$$
$$+\frac{1}{r}D\rho^{p+3q-r}+\frac{2p+2q-r}{2r^2}D_1\rho^{2p+2q-2r}$$
$$+\frac{(3p+q-r)(3p+q-2r)}{2.3.r^3}D_2\rho^{3p+q-3r}$$
$$+\frac{(4p-r)(4p-2r)(4p-3r)}{2.3.4.r^4}D_3\rho^{4p-4r}$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

23. Les formules que nous venons de trouver dans les deux derniers Exemples doivent être bien remarquées, tant à cause de leur généralité que parce qu'elles peuvent être très-utiles dans la recherche des différentes racines des équations; ce qui fera l'objet du § III.

Mais, avant d'y passer, nous croyons devoir encore faire une observation touchant les coefficients A, B, B_1,...; c'est que ces coefficients ne dépendent nullement de la quantité α, mais seulement des autres quantités β, γ, δ,...; de sorte que nos séries seront toujours d'elles-mêmes

ordonnées relativement à la lettre α, quelle que soit la fonction de $\frac{x}{\alpha}$ qu'elles expriment, puisque la variable y doit toujours être supposée égale à l'unité.

De plus, ces coefficients, une fois trouvés, serviront pour toutes les fonctions possibles de $\frac{x}{\alpha}$, et, comme leur loi est assez simple, il sera facile de les calculer aussi loin qu'on voudra; on trouvera, par exemple,

$$A=\beta,$$
$$B=\gamma,\quad B_1=\beta^2,$$
$$C=\delta,\quad C_1=2\beta\gamma,\quad C_2=\beta^3,$$
$$D=\varepsilon,\quad D_1=2\beta\delta+\gamma^2,\quad D_2=3\beta^2\gamma,\quad D_3=\beta^4,$$
$$E=\zeta,\quad E_1=2\beta\varepsilon+2\delta\gamma,\quad E_2=3\beta^2\delta+3\beta\gamma^2,\quad E_3=4\beta^3\gamma,\quad E_4=\beta^5.$$
$$\ldots\ldots,\quad \ldots\ldots\ldots\ldots,\quad \ldots\ldots\ldots\ldots,\quad \ldots\ldots\ldots\ldots$$

§ III. — *Manière de trouver par les séries toutes les racines d'une équation quelconque.*

24. Nous avons vu, dans le § II, comment on peut trouver, par les séries, l'expression d'une des racines d'une équation de degré quelconque; nous allons voir, dans celui-ci, de quelle manière on peut parvenir à trouver toutes les autres racines que la même équation peut renfermer. Pour cela, il est nécessaire de faire quelques observations générales sur la nature des différentes racines d'une même équation et sur la manière de les distinguer l'une de l'autre.

Considérons l'équation générale

$$0=a-bx+cx^2-dx^3+ex^4-\ldots,$$

laquelle soit d'un degré quelconque m, et qui ait tous ses termes, en sorte qu'aucun des coefficients a, b, c,... ne soit nul; supposons que l'on ait trouvé l'expression de chacune des racines de cette équation, dont le nombre sera m; il est clair que ces expressions seront des fonctions de a,

$b, c, \ldots$; mais il faut voir à quel caractère on pourra distinguer ces différentes fonctions l'une de l'autre.

Je remarque d'abord que, si l'on suppose $a = 0$ dans l'équation proposée, elle devient

$$0 = -bx + cx^2 - dx^3 + ex^4 - \ldots,$$

de sorte qu'elle se décompose en ces deux-ci

$$0 = x,$$
$$0 = -b + cx - dx^2 + ex^3 - \ldots,$$

d'où l'on voit que la supposition de $a = 0$ doit rendre nulle une des racines de l'équation; par conséquent, parmi les fonctions qui expriment ces racines il doit y en avoir une qui s'évanouisse en faisant $a = 0$; et il est clair qu'il ne doit y en avoir qu'une seule qui ait cette propriété, puisque l'évanouissement de a ne réduit à zéro qu'une seule racine.

En conservant la supposition de $a = 0$, et faisant maintenant abstraction de la racine $x = 0$ que nous avons déjà trouvée, les autres racines seront déterminées par l'équation

$$0 = -b + cx - dx^2 + ex^3 - \ldots.$$

Supposons de plus $b = 0$, et l'équation précédente se décomposera de nouveau en ces deux-ci

$$0 = x,$$
$$0 = c - dx + ex^2 - \ldots,$$

ainsi cette supposition fera évanouir une nouvelle racine; de sorte que parmi les fonctions qui représentent ces racines, il faudra qu'il y en ait une qui s'évanouisse en faisant $a = 0$ et $b = 0$.

En continuant le même raisonnement, on verra que parmi les fonctions dont il s'agit il y en aura aussi une qui s'évanouira par la supposition de

$$a = 0, \quad b = 0, \quad c = 0,$$

une qui s'évanouira par la supposition de

$$a = 0, \quad b = 0, \quad c = 0, \quad d = 0,$$

et ainsi de suite.

25. Comme il est indifférent dans quel ordre les termes d'une équation soient disposés, nous supposerons toujours dans la suite qu'ils le soient de manière que les exposants de l'inconnue forment une progression arithmétique ascendante; ainsi, par premier terme d'une équation il faudra entendre celui où l'inconnue ne se trouve pas, par second terme celui où l'inconnue se trouve au premier degré, et ainsi de suite; cela posé, nous appellerons en général première racine d'une équation celle qui devient nulle lorsque le premier terme de cette équation est supposé nul; seconde racine celle qui devient nulle lorsqu'on suppose nuls à la fois les deux premiers termes à la fois; troisième racine celle qui devient nulle lorsqu'on suppose nuls à la fois les trois premiers termes; et ainsi de suite.

De cette manière, on pourra toujours distinguer les différentes racines d'une équation entre elles; et si l'on a plusieurs expressions des racines d'une même équation, on pourra reconnaître si ces expressions représentent la même racine ou des racines différentes.

26. Nous venons de voir que la supposition de $a = 0$ et de $b = 0$ doit rendre nulles deux des racines de l'équation proposée, lesquelles seront déjà par cette condition même distinguées de toutes les autres; donc, si l'on suppose d'abord $b = 0$, il est visible qu'en faisant ensuite $a = 0$, les deux racines dont il s'agit s'évanouiront toutes deux en même temps; or, voici comment on pourra, dans ce cas, distinguer ces mêmes racines l'une de l'autre. En faisant $b = 0$, l'équation proposée devient

$$0 = a + cx^2 - dx^3 + ex^4 - \ldots;$$

maintenant, au lieu de supposer a nul, supposons-le seulement infiniment petit, il est clair que les deux racines dont il s'agit devront aussi devenir infiniment petites (autrement elles ne s'évanouiraient pas lors-

que $a = 0$); ainsi, en faisant x infiniment petit et négligeant ce qu'il faut négliger en vertu de cette supposition, l'équation précédente deviendra

$$a + cx^2 = 0,$$

laquelle donne les deux racines

$$+\sqrt{-\frac{a}{c}} \quad \text{et} \quad -\sqrt{-\frac{a}{c}};$$

ce qui fournit un nouveau caractère pour distinguer les deux premières racines de l'équation proposée, tant entre elles que de toutes les autres. Ainsi, il faudra que les fonctions qui représentent ces deux racines soient telles, qu'en y faisant $b = 0$ et a infiniment petit, elles deviennent les deux racines de l'équation $a + cx^2 = 0$.

On démontrera de même que les fonctions qui représentent les trois premières racines doivent être telles, qu'en y supposant à la fois $b = 0$, $c = 0$ et a infiniment petit, elles deviennent les trois racines de l'équation $a - dx^3 = 0$, et ainsi de suite.

De plus, comme la seconde et la troisième racine deviennent nulles en faisant $b = 0$ et $c = 0$, après avoir déjà supposé $a = 0$ (numéro précédent), si l'on fait d'abord $c = 0$, il est visible que la supposition de $b = 0$ rendra nulles ces deux racines en même temps; par conséquent, si l'on suppose seulement b infiniment petit, ces mêmes racines deviendront aussi infiniment petites; mais si dans l'équation

$$0 = -b + cx - dx^2 + ex^3 - \ldots,$$

dont on a déjà séparé la première racine par la supposition de $a = 0$ (numéro précédent), on fait $c = 0$, et b et x infiniment petits, elle se réduit à celle-ci

$$-b - dx^2 = 0;$$

ainsi, il faudra que les fonctions qui représentent la seconde et la troisième racine de l'équation proposée soient telles, qu'en y faisant $a = 0$, $c = 0$ et b infiniment petit, elles deviennent les racines de l'équation

$$-b - dx^2 = 0;$$

ce qui peut servir encore à reconnaître ces racines et à les distinguer de toutes les autres.

Pareillement, si l'on fait $c = 0$, $d = 0$ et b infiniment petit (a étant toujours supposé nul), on verra que les fonctions qui représentent la seconde, la troisième et la quatrième racine de l'équation proposée doivent devenir les racines de l'équation

$$-b + ex^3 = 0,$$

et ainsi de suite.

En procédant de la même manière, on prouvera aussi que la troisième et la quatrième racine de l'équation proposée doivent être exprimées par des fonctions telles, qu'en y supposant d'abord $a = 0$, $b = 0$, et ensuite $d = 0$ et c infiniment petit, elles deviennent les racines de l'équation

$$c + ex^2 = 0,$$

et ainsi des autres.

Cette méthode de distinguer les racines d'une équation est plus générale que celle du n° 24, laquelle ne saurait être employée dans bien des cas, surtout lorsqu'il manque dans l'équation quelqu'un des termes intermédiaires, parce qu'alors l'évanouissement d'une seule lettre fait évanouir plusieurs racines à la fois, comme nous venons de le voir.

Après ces réflexions sur la manière de distinguer les différentes racines d'une équation, voyons la méthode qu'on peut employer pour les trouver; pour la faire mieux comprendre, nous l'appliquerons d'abord aux équations que nous avons déjà examinées dans le § III.

Problème I.

27. *On demande les deux racines de l'équation*

$$a - bx + cx^2 = 0.$$

Première Solution. — Nous avons déjà trouvé, dans le n° 9, que l'une des valeurs de x peut s'exprimer par cette série

$$\frac{a}{b} + \frac{a^2 c}{b^3} + \frac{4\,a^3 c^2}{2\,b^5} + \ldots;$$

or, avant de chercher l'autre valeur, il est bon d'examiner quelle est la

racine qui est représentée par cette série; pour cet effet, je suppose d'abord, suivant la méthode du n° 24, $a = 0$, et comme je vois que cette supposition détruit tous les termes de la série dont il s'agit, j'en conclus que cette série exprime la première racine de l'équation proposée; de sorte que c'est la seconde qui reste encore à trouver.

Pour y parvenir, je donne à la proposée cette forme

$$b - cx - \frac{a}{x} = 0,$$

qui peut se rapporter, comme on voit, à l'équation du n° 12; en y faisant $n = -1$, et changeant a en b, b en c et c en $-a$. De cette manière, on aura, par la formule du même numéro (en y faisant $m = 1$), x égal à la série

$$\frac{b}{c} - \frac{a}{b} - \frac{a^2c}{b^3} - \frac{4a^3c^2}{b^5} - \frac{5.6.a^4c^3}{2.3.b^7} - \ldots.$$

Or, en faisant d'abord $a = 0$, cette suite se réduit à son premier terme $\frac{b}{c}$, lequel s'évanouit ensuite lorsqu'on suppose $b = 0$; donc (25), cette série exprimera nécessairement la seconde racine de l'équation proposée; c'est ce qui s'accorde avec ce que nous avons trouvé dans le n° 9 par la résolution même de l'équation proposée.

Donc, en général, si l'on nomme x_1 et x_2 la première et la seconde racine de l'équation

$$a - bx + cx^2 = 0,$$

on aura, par les articles cités,

$$x_1^m = \frac{a^m}{b^m} + \frac{ma^{m+1}c}{b^{m+2}} + \frac{m(m+3)a^{m+2}c^2}{2b^{m+4}} + \frac{m(m+4)(m+5)a^{m+3}c^3}{2.3.b^{m+6}} + \ldots,$$

$$x_2^m = \frac{b^m}{c^m} - \frac{mb^{m-2}a}{c^{m-1}} + \frac{m(m-3)b^{m-4}a^2}{2c^{m-2}} - \frac{m(m-4)(m-5)b^{m-6}c^3}{2.3.c^{m-3}} + \ldots,$$

et si l'on veut avoir les logarithmes de x_1 et x_2, on aura

$$\log x_1 = \log\frac{a}{b} + \frac{ac}{b^2} + \frac{3a^2c^2}{2b^4} + \frac{4.5.a^3c^3}{2.3.b^6} + \frac{5.6.7.a^4c^4}{2.3.4.b^8} + \ldots,$$

$$\log x_2 = \log\frac{b}{c} - \frac{ac}{b^2} - \frac{3a^2c^2}{2b^4} - \frac{4.5.a^3c^3}{2.3.b^6} - \frac{5.6.7.a^4c^4}{2.3.4.b^8} - \ldots,$$

Seconde Solution. — Je fais $x^2 = t$, et par conséquent $x = \sqrt{t}$, ce qui réduit l'équation proposée à celle-ci

$$a + ct - b\sqrt{t} = 0,$$

laquelle peut se comparer de nouveau avec celle du n° 12, en y changeant b en $-c$, c en $-b$, x en t, et faisant $n = \frac{1}{2}$; ainsi, faisant pour plus de simplicité $\sqrt{\frac{-a}{c}} = \rho$, on aura

$$t^m = \rho^{2m} - 2m\rho^{2m+1}\left(\frac{b}{2a}\right) + \frac{2m.2m}{2}\rho^{2m+2}\left(\frac{b}{2a}\right)^2$$
$$- \frac{2m(2m-1)(2m+1)}{2.3}\rho^{2m+3}\left(\frac{b}{2a}\right)^3$$
$$+ \frac{2m(2m-2)(2m)(2m+2)}{2.3.4}\rho^{2m+4}\left(\frac{b}{2a}\right)^4$$
$$- \frac{2m(2m-3)(2m-1)(2m+1)(2m+3)}{2.3.4.5}\rho^{2m+5}\left(\frac{b}{2a}\right)^5$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Or, x étant égal à $\sqrt{t}$, il n'y aura qu'à faire $m = \frac{1}{2}$ pour avoir

$$x = \rho - \rho^3\left(\frac{b}{2a}\right) + \frac{1}{2}\rho^5\left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{1.1.3}{2.3.4}\rho^5\left(\frac{b}{2a}\right)^4 + \frac{1.1.3.3.5}{2.3.4.5.6}\rho^{7}\left(\frac{b}{2a}\right)^6 - \ldots.$$

Mais, puisque $\rho = \sqrt{\frac{-a}{c}}$, il est clair que la valeur de ρ sera également positive et négative; de sorte qu'en substituant cette valeur on aura pour x la double série

$$\frac{b}{c} \pm \left(1 - \frac{1}{2}\frac{b^2}{4ac} - \frac{1.1.3}{2.3.4}\frac{b^4}{2^4a^2c^2} - \frac{1.1.3.3.5}{2.3.4.5.6}\frac{b^6}{2^6a^3c^3} - \ldots\right)\sqrt{\frac{-a}{c}},$$

laquelle représentera par conséquent les deux racines de l'équation

$$a - bx + cx^2 = 0.$$

En effet, en faisant $b = 0$, les deux séries se réduisent à

$$\pm\sqrt{\frac{-a}{c}};$$

ce qui montre (26) que ces séries représentent effectivement la première et la seconde racine de l'équation dont il s'agit. C'est aussi de quoi on peut se convaincre facilement *à posteriori* en résolvant en série le radical $\sqrt{b^2-4ac}$ qui entre dans l'expression de x (9), mais en prenant $-4ac$ pour le premier terme du binôme et b^2 pour le second.

Donc, faisant

$$\rho=\pm\sqrt{\frac{-a}{c}},$$

on aura, en général, dans l'équation

$$a-bx+cx^2=0$$

cette double valeur de x^m, savoir

$$x^m=\rho^m\left[1-\frac{m^2}{2}\frac{b^2}{4ac}+\frac{m^2(m^2-4)}{2.3.4}\frac{b^4}{2^4a^2c^2}-\frac{m^2(m^2-4)(m^2-16)}{2.3.4.5.6}\frac{b^6}{2^6a^3c^3}+\ldots\right]$$

$$-m\rho^{m+1}\frac{b}{2a}\left[1-\frac{m^2-1}{2.3}\frac{b^2}{4ac}+\frac{(m^2-1)(m^2-9)}{2.3.4.5}\frac{b^4}{2^4a^2c^2}-\frac{(m^2-1)(m^2-9)(m^2-25)}{2.3.4.5.6.7}\frac{b^6}{2^6a^3c^3}+\ldots\right].$$

Et si l'on veut avoir le logarithme de x, on trouvera

$$\log x=\log\rho-\rho\frac{b}{2a}\left(1+\frac{1.1}{2.3}\frac{b^2}{4ac}+\frac{1.1.3.3}{2.3.4.5}\frac{b^4}{2^4a^2c^2}+\frac{1.1.3.3.5.5}{2.3.4.5.6.7}\frac{b^6}{2^6a^3c^3}+\ldots\right).$$

Remarque. — Les séries trouvées dans la première solution ont l'avantage de ne renfermer que des quantités rationnelles, au lieu que celles de la seconde solution renferment la quantité irrationnelle

$$\sqrt{-\frac{a}{c}},$$

laquelle devient même imaginaire lorsque a et c sont de même signe,

quoique d'ailleurs les racines de l'équation puissent être réelles; de sorte qu'à cet égard les séries de la première solution paraissent préférables, puisqu'elles se présentent toujours sous une forme réelle; cependant ni les unes ni les autres ne peuvent être regardées comme bonnes, à moins qu'elles ne soient convergentes; c'est ce que nous examinerons plus bas, § IV.

28. Pour peu qu'on ait fait d'attention à la manière dont nous avons résolu le Problème précédent, on verra qu'en général, quelle que soit l'équation proposée, on pourra toujours trouver autant de différentes séries pour exprimer les racines de cette équation, que l'on pourra faire de combinaisons deux à deux des termes de la même équation; et que de plus chacune de ces séries sera simple, ou double, ou triple, etc., suivant qu'elle répondra à une combinaison où les exposants de x dans les deux termes différeront l'un de l'autre de l'unité, ou de deux unités, ou de trois, etc.

En effet, il est évident qu'on peut trouver autant de séries pour la valeur de x qu'il y a de manières de comparer l'équation proposée à la formule générale

$$\alpha-x+\varphi(x)=0$$

du n° 16; or, comme on peut prendre pour $\varphi(x)$ une fonction quelconque de x, il s'ensuit qu'on pourra prendre, pour les deux premiers termes $\alpha-x$ de cette formule, deux quelconques des termes de la proposée à volonté; et qu'ainsi la comparaison pourra se faire d'autant de manières différentes qu'il y aura de combinaisons possibles des termes de cette équation pris deux à deux.

29. Soient en général

$$Mx^\mu-Nx^{\mu+\nu}$$

deux termes quelconques de l'équation proposée; et soit désignée par X la totalité des autres termes, en sorte que l'équation soit mise sous cette forme

$$Mx^\mu-Nx^{\mu+\nu}+X=0.$$

On divisera d'abord par Nx^{μ}, ce qui la réduira à celle-ci

$$\frac{M}{N} - x^{\nu} + \frac{Xx^{-\mu}}{N} = 0;$$

ensuite on fera $x^{\nu} = t$, et par conséquent

$$x = \sqrt[\nu]{t},$$

et désignant par T la fonction de t, dans laquelle se changera la quantité X par la substitution de $\sqrt[\nu]{t}$ à la place de x, on aura la transformée

$$\frac{M}{N} - t + \frac{Tt^{-\frac{\mu}{\nu}}}{N} = 0,$$

laquelle rentre évidemment dans la formule générale

$$\alpha - x + \varphi(x) = 0,$$

en faisant

$$\alpha = \frac{M}{N}, \quad x = t, \quad \varphi(x) = \varphi(t) = \frac{Tt^{-\frac{\mu}{\nu}}}{N}.$$

On aura donc (16), en mettant t ou x^{ν} à la place de p,

$$\psi(x^{\nu}) = \psi(t) + \frac{Tt^{-\frac{\mu}{\nu}}\psi'(t)}{N} + \frac{1}{2N^2}\frac{d\left[T^2 t^{-\frac{2\mu}{\nu}}\psi'(t)\right]}{dt}$$

$$+ \frac{1}{2.3.N^3}\frac{d^2\left[T^3 t^{-\frac{3\mu}{\nu}}\psi'(t)\right]}{dt^2} + \ldots,$$

où il faudra faire $t = \frac{M}{N}$, après avoir exécuté les différentiations indiquées.

Donc, faisant $\psi(t) = t^{\frac{1}{\nu}}$, et par conséquent

$$\psi'(t) = \frac{t^{\frac{1-\nu}{\nu}}}{\nu},$$

pour avoir $\psi(x^{\nu}) = x$, on aura

$$(L)\quad x = t^{\frac{1}{\nu}} + \frac{1}{\nu N}Tt^{\frac{1-\mu-\nu}{\nu}} + \frac{1}{\nu N^2}\frac{d\left(T^2 t^{\frac{1-2\mu-\nu}{\nu}}\right)}{dt} + \frac{1}{\nu N^3}\frac{d^2\left(T^3 t^{\frac{1-3\mu-\nu}{\nu}}\right)}{dt^2} + \ldots.$$

C'est l'expression de la racine x qui résultera de la combinaison des termes $Mx^{\mu} - Nx^{\mu+\nu}$ de l'équation proposée.

30. Maintenant il est visible que l'expression de x que nous venons de trouver contiendra nécessairement le radical $\sqrt[\nu]{\frac{M}{N}}$ qui proviendra de la substitution de $\frac{M}{N}$ à la place de t, et il est facile de se convaincre que cette expression ne contiendra point d'autre radical; car, puisque X est une fonction rationnelle de x, T sera aussi une fonction rationnelle de $\sqrt[\nu]{t}$, et par conséquent toute la série qui exprime la valeur de x sera une fonction rationnelle de $\sqrt[\nu]{t}$, c'est-à-dire de $\sqrt[\nu]{\frac{M}{N}}$.

Or, on sait que le radical $\sqrt[\nu]{\frac{M}{N}}$ a ν valeurs différentes qui sont les racines de l'équation

$$M - Nx^{\nu} = 0,$$

et qui (par le théorème connu de Cotes), peuvent se représenter, en général, par la formule

$$\left(\cos\frac{\lambda \times 360^{\circ}}{\nu} + \sqrt{-1}\sin\frac{\lambda \times 360^{\circ}}{\nu}\right)\sqrt[\nu]{\frac{M}{N}},$$

λ étant successivement égal à 1, 2, 3,..., jusqu'à ν.

Donc, si l'on substitue cette quantité à la place de $\sqrt[\nu]{\frac{M}{N}}$, la série qui représentera la valeur de x se transformera en ν séries qui donneront autant de différentes expressions de x.

31. Je dis présentement que les ν séries ou expressions de x qui résultent de la considération des termes $Mx^{\mu} - Nx^{\mu+\nu}$ de l'équation proposée, c'est-à-dire celles qu'on trouve en prenant ces deux termes pour

les premiers de la formule générale (H), représentent nécessairement ν racines différentes de cette équation, et qu'en particulier (25) elles représentent les racines $\mu^{ième}$, $(\mu+1)^{ième}$, $(\mu+2)^{ième}$,..., jusqu'à la $(\mu+\nu-1)^{ième}$ de la même équation.

Pour le prouver, il suffit de faire voir, suivant la méthode du n° 26, qu'en supposant dans l'expression générale de x de la formule (L) les coefficients des termes de l'équation proposée où les exposants de x seraient moindres que μ, chacun égal à zéro, comme aussi chacun des coefficients des termes intermédiaires entre les deux Mx^{μ} et $Nx^{\mu+\nu}$, et faisant en même temps M infiniment petit, cette expression se réduira à celle-ci $\sqrt[\nu]{\frac{M}{N}}$, qui est la racine générale de l'équation

$$M - Nx^{\nu} = 0.$$

Or, après la destruction des termes dont nous venons de parler, il est clair que la quantité X ne renfermera plus que des puissances de x plus grandes que $x^{\mu+\nu}$, et qu'ainsi la quantité T ne renfermera que des puissances de t plus grandes que $t^{\frac{\mu+\nu}{\nu}}$; d'où il est facile de voir que les fonctions

$$Tt^{\frac{1-\mu-\nu}{\nu}}, \quad \frac{d\left(Tt^{\frac{1-2\mu-\nu}{\nu}}\right)}{dt}, \ldots$$

de la formule (L) ne seront plus composées que des puissances de t plus grandes que $t^{\frac{1}{\nu}}$; donc, faisant $t=\frac{M}{N}$, et supposant ensuite M infiniment petit, c'est-à-dire t infiniment petit, il est évident que toutes ces puissances de t s'évanouiront vis-à-vis du premier terme $t^{\frac{1}{\nu}}$ de l'expression de x, laquelle se réduira par conséquent à $t^{\frac{1}{\nu}}$ ou à $\left(\frac{M}{N}\right)^{\frac{1}{\nu}}$, à cause de $t=\frac{M}{N}$.

32. De là il est aisé de conclure que, pour trouver toutes les racines d'une équation donnée, par le moyen de nos séries, il n'y aura qu'à combiner le premier terme de cette équation avec le dernier, ou immédiatement ce qui donnera une série qui renfermera toutes les racines, ou moyennant les termes intermédiaires, c'est-à-dire en combinant d'abord le premier terme avec quelqu'un des suivants, ensuite celui-ci avec le dernier, ou avec quelqu'un de ceux qui le précèdent, et ainsi de suite jusqu'à ce qu'on arrive au dernier terme [par cette expression *de combiner deux termes de l'équation proposée*, nous entendons qu'il faut prendre ces deux termes pour les deux premiers de notre formule générale (H); nous nous servirons aussi dans la suite de cette même expression abrégée]. Chacune de ces combinaisons donnera une série simple, ou double, ou triple, etc., qui représentera par conséquent une, ou deux, ou trois, etc., racines, suivant l'intervalle qu'il y aura entre les deux termes; de sorte que, quels que soient les termes que l'on comparera successivement ensemble, on obtiendra toujours autant de racines ni plus ni moins que l'équation en doit avoir.

33. Il est bon de remarquer que les séries qu'on trouvera en combinant deux termes quelconques de l'équation proposée auront autant de valeurs réelles et autant d'imaginaires qu'il y aura de racines réelles et d'imaginaires dans l'équation qu'on pourra faire en égalant ces deux termes à zéro (30); de plus, il est clair que l'on ne trouvera de séries toutes rationnelles que lorsqu'on combinera des termes tels que

$$Mx^{\mu} - Nx^{\mu+1};$$

ainsi, si l'équation a tous ses termes, on pourra, en combinant chaque terme avec celui qui le suit immédiatement, trouver des séries toutes rationnelles pour l'expression de chacune de ses racines; mais s'il manque quelque terme dans l'équation, comme si l'on suppose que le terme Mx^{μ} soit suivi immédiatement du terme $-Nx^{\mu+\nu}$, en sorte qu'il manque $\nu-1$ termes intermédiaires, alors la combinaison de ces deux termes consécutifs donnera une série qui renfermera le radical

$$\sqrt[\nu]{\frac{M}{N}},$$

et qui représentera par conséquent les différentes racines qu'on aurait trouvées par la considération de tous les termes intermédiaires si ces termes n'avaient pas manqué.

Donc on aura dans ce cas autant de séries imaginaires que le radical

$$\sqrt[\nu]{\frac{M}{N}}$$

aura de valeurs imaginaires, c'est-à-dire qu'il y aura de racines imaginaires dans l'équation

$$x^\nu - \frac{M}{N} = 0.$$

Or, on sait que dans une équation qui manque de quelques-uns de ses termes, il y a nécessairement autant de racines imaginaires qu'il y en aurait dans l'équation qu'on pourrait faire, en égalant à zéro la somme des deux termes de cette équation entre lesquels devraient se trouver les termes manquants; de sorte qu'en supposant, comme plus haut, que le terme Mx^μ soit suivi immédiatement du terme $-Nx^{\mu+\nu}$, il y aura nécessairement dans l'équation autant de racines imaginaires qu'il y en a dans l'équation

$$Mx^\mu - Nx^{\mu+\nu} = 0,$$

ou bien

$$\frac{M}{N} - x^\nu = 0.$$

De là il s'ensuit qu'en combinant deux à deux tous les termes consécutifs d'une équation quelconque, on ne trouvera jamais d'expressions imaginaires pour les racines que lorsqu'il y aura réellement des racines imaginaires dans l'équation. Il n'en est pas de même lorsqu'on combine des termes qui ne sont pas immédiatement consécutifs; dans ce cas, il arrivera souvent que les racines se présenteront sous une forme imaginaire, quoiqu'elles soient d'ailleurs réelles, comme nous l'avons déjà vu dans la Remarque qui est à la fin du Problème précédent.

34. Enfin, il résulte de ce que nous avons dit dans le n° 31, que les

séries trouvées dans les différents Exemples du § II ne représentent que les premières racines des équations proposées, puisque toutes ces séries ont été trouvées par la combinaison des deux premiers termes des mêmes équations; ainsi, pour trouver les autres racines, il n'y aura qu'à combiner le second terme, ou immédiatement avec le dernier, ou avec quelqu'un des intermédiaires, et ensuite celui-ci avec le dernier, comme nous l'avons expliqué dans le numéro cité.

Problème II.

35. *On demande toutes les racines de l'équation*

$$a - bx + cx^n = 0,$$

n étant un nombre entier positif.

Première Solution. — En combinant d'abord les deux premiers termes de cette équation,

$$a - bx,$$

on trouvera pour x la même série que nous avons déjà trouvée dans l'Exemple II du n° 12; cette valeur de x sera donc la première racine de l'équation proposée (numéro précédent) que nous nommerons x_1; ainsi l'on aura, en général,

$$x_1^m = \frac{a^m}{b^m}\left[1 + \frac{mca^{n-1}}{b^n} + \frac{m(m+2n-1)c^2a^{2n-2}}{2b^{2n}} + \frac{m(m+3n-1)(m+3n-2)c^3a^{3n-3}}{2.3.b^{3n}} + \ldots\right].$$

Pour trouver maintenant les autres $n-1$ racines de la même équation, il faudra combiner les deux termes $-bx + cx^n$; c'est pourquoi nous mettrons d'abord (29) l'équation sous cette forme

$$\frac{b}{c} - x^{n-1} - \frac{ax^{-1}}{c} = 0;$$

et ensuite sous celle-ci

$$\frac{b}{c} - t - \frac{at^{\frac{1}{1-n}}}{c} = 0,$$

en faisant $t = x^{n-1}$, et par conséquent $x = t^{\frac{1}{n-1}}$.

Or, cette équation étant de la même forme que la précédente en x, on pourra faire usage de la même formule pour en tirer la valeur de t; on mettra donc b à la place de a, c à la place de b, $-a$ à la place de c, et changeant x en t, et n en $\frac{1}{1-n}$, on aura, en général,

$$t^m = \frac{b^m}{c^m}\left[1 - \frac{mab^{\frac{n}{1-n}}}{c^{\frac{1}{1-n}}} + \frac{m\left(m+\frac{1+n}{1-n}\right)a^2 b^{\frac{2n}{1-n}}}{2c^{\frac{2}{1-n}}} - \frac{m\left(m+\frac{2+n}{1-n}\right)\left(m+\frac{1+2n}{1-n}\right)a^3 b^{\frac{3n}{1-n}}}{2.3.c^{\frac{3}{1-n}}} + \ldots\right].$$

Or, puisque $t = x^{n-1}$, mettons $\frac{m}{n-1}$ à la place de m, et faisant, pour plus de simplicité,

$$\left(\frac{b}{c}\right)^{\frac{1}{n-1}} = \rho,$$

nous aurons

$$x^m = \rho^m\left[1 - \frac{ma}{(n-1)b\rho} + \frac{m(m-n-1)a^2}{2(n-1)^2b^2\rho^2} - \frac{m(m-n-2)(m-2n-1)}{2.3.(n-1)^3b^3\rho^3} + \ldots\right].$$

Or, puisque la quantité ρ est égale à la racine $(n-1)^{ième}$ de $\frac{b}{c}$, elle aura $n-1$ valeurs différentes, qui pourront s'exprimer en général de cette manière

$$\rho = \left(\cos\frac{\lambda \times 360^\circ}{n-1} + \sin\frac{\lambda \times 360^\circ}{n-1}\sqrt{-1}\right)\sqrt[n-1]{\frac{b}{c}},$$

λ étant égal à 1, ou 2, ou 3, ou..., jusqu'à $n-1$.

Donc, substituant cette expression de ρ dans la formule précédente,

on aura $n-1$ valeurs différentes de x^m; ce seront les valeurs de x_2^m, $x_3^m, \ldots, x_n^m$, et désignant par $x_2, x_3, \ldots, x_n$ la seconde, la troisième, etc., jusqu'à la $n^{ième}$ racine de l'équation proposée.

Ainsi l'on aura chacune des n racines de cette équation, et même une puissance quelconque de ces racines. On pourra trouver aussi par nos formules une fonction quelconque de ces racines; c'est sur quoi il ne paraît pas nécessaire d'entrer ici dans un plus grand détail.

Seconde Solution. — Prenons maintenant les deux termes extrêmes $a + cx^n$, et cette combinaison nous donnera immédiatement toutes les n racines de l'équation proposée.

Pour cela, on mettra l'équation sous cette forme

$$\frac{a}{c} + x^n - \frac{bx}{c} = 0,$$

et l'on fera ensuite $x^n = t$, et par conséquent $x = t^{\frac{1}{n}}$, pour avoir celle-ci

$$\frac{a}{c} + t - \frac{bt^{\frac{1}{n}}}{c} = 0.$$

Cette équation pouvant se rapporter à l'équation primitive

$$a - bx + cx^n = 0,$$

on pourra déduire aisément la valeur de t^m de celle de x_1^m trouvée ci-dessus, en changeant seulement x_1 en t, b en $-c$, c en $-b$, et n en $\frac{1}{n}$. Ainsi l'on aura sur-le-champ

$$t^m = \frac{a^m}{(-c)^m}\left[1 - \frac{mba^{\frac{1-n}{n}}}{(-c)^{\frac{1}{n}}} + \frac{m\left(m+\frac{2-n}{n}\right)b^2 a^{\frac{2-2n}{n}}}{2(-c)^{\frac{2}{n}}} - \frac{m\left(m+\frac{3-n}{n}\right)\left(m+\frac{3-2n}{n}\right)b^3 a^{\frac{3-3n}{n}}}{2.3.(-c)^{\frac{3}{n}}} + \ldots\right].$$

Or, $t = x^m$; donc, si l'on met $\frac{m}{n}$ à la place de m, et qu'on fasse, pour abréger,

$$\left(\frac{a}{-c}\right)^{\frac{1}{n}} = \rho,$$

on aura

$$x^m = \rho^m\left[1 - \frac{mb\rho}{na} + \frac{m(m+2-n)b^2\rho^2}{2n^2a^2} - \frac{m(m+3-n)(m+3-2n)b^3\rho^3}{2.3.n^3a^3} + \ldots\right].$$

Mais on a, en général,

$$\rho = \left(\cos\frac{\lambda \times 360^\circ}{n} + \sin\frac{\lambda \times 360^\circ}{n}\sqrt{-1}\right)\sqrt[n]{\frac{a}{-c}},$$

λ étant égal à 1, ou 2, ou 3, ou..., jusqu'à n; donc, substituant cette valeur de ρ dans l'expression précédente, on aura n valeurs différentes de x^m, qui seront celles de x_1^m, x_2^m, x_3^m,..., x_n^m.

Problème III.

36. *On demande toutes les racines de l'équation*

$$a - bx + cx^n - ex^s = 0,$$

n et s étant des nombres entiers positifs, et $s > n$.

Première Solution. — 1° Puisque cette équation peut se rapporter à celle de l'Exemple VI du n° 21, en faisant

$$\alpha = \frac{a}{b}, \quad \beta = \frac{c}{b}, \quad \gamma = -\frac{e}{b}, \quad \delta = 0, \ldots,$$

$$p = n, \quad q = s - n,$$

il n'y aura qu'à faire ces substitutions dans les formules de cet Exemple, et l'on aura sur-le-champ l'expression d'une fonction quelconque de $\frac{x}{\alpha}$, où x sera nécessairement la première racine de l'équation proposée (34).

2° Pour trouver maintenant les autres racines, on prendra les deux termes $-bx + cx^n$ pour les premiers de la formule générale, en donnant à l'équation cette forme

$$b - cx^{n-1} - ax^{-1} + ex^{s-1} = 0.$$

On fera ensuite $x^{n-1} = t$, ce qui la ramènera à la même forme que celle de l'Exemple cité; ou bien, ce qui revient au même, on comparera cette équation à celle de l'Exemple VII, en faisant

$$\alpha = \frac{b}{c}, \quad \beta = \frac{-a}{c}, \quad \gamma = \frac{e}{c}, \quad \delta = 0, \ldots,$$

$$r = n - 1, \quad p = -1, \quad q = s;$$

et l'on aura sur-le-champ la valeur d'une fonction quelconque de $\frac{x}{\rho}$,

$$\rho \text{ étant } = \sqrt[n-1]{\alpha} = \left(\frac{b}{c}\right)^{\frac{1}{n-1}};$$

ainsi, donnant à ρ les r valeurs que cette quantité peut avoir, et qui s'expriment, en général, de cette manière

$$\rho = \left(\cos\frac{\lambda \times 360^\circ}{r} + \sin\frac{\lambda \times 360^\circ}{r}\sqrt{-1}\right)\sqrt[r]{\alpha},$$

λ étant égal à 1, ou 2, ou 3, etc., jusqu'à r, on aura r ou $n-1$ formules différentes qui se rapporteront à la seconde, ou à la troisième, etc., jusqu'à la $n^{ième}$ racine inclusivement de l'équation dont il s'agit.

3° On prendra enfin les deux derniers termes $cx^n - ex^s$ pour les premiers, en écrivant l'équation ainsi

$$c - ex^{s-n} - bx^{1-n} + ax^{-n} = 0;$$

laquelle étant comparée de même à l'équation de l'Exemple VII, on aura

$$\alpha = \frac{c}{e}, \quad \beta = -\frac{b}{e}, \quad \gamma = \frac{a}{e}, \quad \delta = 0, \ldots,$$

$$s - n = r, \quad 1 - n = p, \quad q = 1;$$

et l'on trouvera l'expression d'une fonction quelconque de $\frac{x}{\rho}$,

$$\rho \text{ étant toujours } = \sqrt[r]{\alpha} = \left(\frac{c}{e}\right)^{\frac{1}{s-n}},$$

dans laquelle mettant successivement les r ou $s-n$ valeurs différentes de ρ, on aura autant d'expressions différentes qui se rapporteront aux $s-n$ dernières racines de l'équation.

Ainsi l'on aura trois formules dont la première se rapportera à la première racine, la seconde comprendra les $n-1$ racines suivantes, et la troisième renfermera les $s-n$ dernières racines; de sorte qu'on connaîtra par ce moyen, non-seulement la valeur de chacune des s racines de l'équation proposée, mais aussi une fonction quelconque de chacune de ces racines.

Seconde Solution. — Dans la Solution précédente nous avons considéré deux à deux les termes consécutifs de l'équation proposée; or, la combinaison des termes qui ne sont pas immédiatement voisins nous donnera encore d'autres Solutions.

Et d'abord il est clair qu'après avoir combiné les deux premiers termes $a-bx$, comme nous l'avons fait ci-dessus pour avoir la première racine de l'équation, on peut combiner immédiatement le terme $-bx$ avec le dernier $-ex^s$ pour avoir les autres racines. Pour cela on regardera donc ces deux termes comme les premiers, en écrivant l'équation ainsi

$$b + ex^{s-1} - ax^{-1} - cx^{n-1} = 0,$$

laquelle, étant comparée à celle de l'Exemple VII, donnera

$$\alpha = \frac{b}{e}, \quad \beta = -\frac{a}{e}, \quad \gamma = -\frac{c}{e}, \quad \delta = 0, \ldots,$$
$$r = s-1, \quad p = -1, \quad q = n-s+1;$$

de sorte qu'en substituant ces valeurs, on aura l'expression générale d'une fonction quelconque de $\frac{x}{\rho}$,

$$\rho \text{ étant } = \alpha^{\frac{1}{r}} = \left(\frac{b}{e}\right)^{\frac{1}{s-1}};$$

donc, mettant pour ρ chacune de ses valeurs particulières, qui sont au nombre de $s-1$, on aura autant d'expressions différentes qui se rapporteront aux $s-1$ racines cherchées.

Ainsi, en combinant la formule du 1° de la Solution précédente avec celle dont nous venons de parler, on trouvera la valeur d'une fonction quelconque de chacune des s racines de l'équation proposée.

Troisième Solution. — Combinons maintenant le premier terme a de l'équation avec le terme cx^n, c'est-à-dire, prenons ces deux termes pour les deux premiers de notre formule générale, et rapportant l'équation sous ce point de vue à la formule de l'Exemple VII, on aura

$$\alpha = \frac{a}{c}, \quad \beta = -\frac{b}{c}, \quad \gamma = -\frac{e}{c}, \quad \delta = 0, \ldots,$$
$$r = n, \quad p = 1, \quad q = s-1,$$

ce qui, étant substitué, donnera une formule qui exprimera, en général, une fonction quelconque de $\frac{x}{\rho}$,

$$\rho \text{ étant } = \sqrt[n]{\alpha} = \left(\frac{a}{c}\right)^{\frac{1}{n}};$$

donc, introduisant à la place de ρ chacune des n valeurs différentes que cette quantité peut avoir, on aura autant de formules particulières qui se rapporteront aux n premières racines de l'équation proposée.

Pour trouver les $s-n$ racines restantes, il faudra combiner le terme cx^n avec le dernier terme $-ex^s$; or, cette combinaison ayant déjà été faite dans le 3° de la première Solution, il n'y aura qu'à emprunter ici la formule trouvée dans cet endroit.

Donc on n'aura en tout que deux formules générales comme dans la Solution précédente; et l'on pourra, par le moyen de ces formules, trouver non-seulement chaque racine en particulier, mais aussi une fonction quelconque de chaque racine.

Quatrième Solution. — Il reste encore une combinaison à faire, c'est

celle des deux termes extrêmes a et $-ex^s$, laquelle donnera immédiatement toutes les s racines de l'équation.

En rapportant donc sous ce point de vue l'équation proposée à celle de l'Exemple VII, on aura

$$\alpha=\frac{a}{e},\quad \beta=-\frac{b}{e},\quad \gamma=\frac{c}{e},\quad \delta=0,\ldots,$$
$$r=s,\quad p=1,\quad q=n-1,$$

et l'on trouvera une formule générale pour l'expression d'une fonction quelconque de $\frac{x}{\rho}$, où

$$\rho=\sqrt[r]{\alpha}=\left(\frac{a}{e}\right)^{\frac{1}{r}};$$

de sorte qu'en y substituant successivement les s valeurs de ρ, on aura autant de formules particulières, dont chacune se rapportera à une des racines de l'équation dont il s'agit. Ainsi une seule formule générale suffira dans ce cas pour trouver la valeur d'une fonction quelconque de chacune de ces racines.

Comme nous avons épuisé toutes les combinaisons possibles des termes de l'équation proposée, pris deux à deux, on ne pourra pas trouver d'autres solutions que celles que nous venons de donner, au moins par nos formules; ainsi nous ne nous arrêterons pas davantage sur cette matière, les Exemples donnés ci-dessus nous paraissant suffisants pour faire voir clairement l'application de notre méthode.

§ IV. — *Sur la convergence ou divergence des séries qui représentent des fonctions quelconques des racines des équations.*

37. Il ne suffit pas de pouvoir exprimer les racines des équations, ou leurs fonctions quelconques, par des séries régulières, et dont la loi soit bien développée; il faut surtout pouvoir reconnaître par la loi même de ces séries si elles sont convergentes à l'infini ou non; car il est clair que

pour qu'une série puisse être regardée comme représentant réellement la valeur d'une quantité cherchée, il faut qu'elle soit convergente à son extrémité, c'est-à-dire que ses derniers termes soient infiniment petits, de sorte que l'erreur puisse devenir moindre qu'aucune quantité donnée. Voyons donc comment on pourra reconnaître si cette condition a lieu ou non dans les séries des paragraphes précédents.

Pour rendre notre recherche aussi générale qu'il est possible, nous considérerons l'équation générale (H) du n° **16**, savoir

$$\alpha-x+\varphi(x)=0,$$

laquelle donne en général (n° **17**, formule K)

$$\psi\left(\frac{x}{\alpha}\right)=\psi(y)+\frac{\varphi(\alpha y)\psi'(y)}{\alpha}+\frac{1}{2\alpha^2}\frac{d[\varphi(\alpha y)^2\psi'(y)]}{dy}$$
$$+\frac{1}{2.3.\alpha^3}\frac{d^2[\varphi(\alpha y)^3\psi'(y)]}{dy^2}+\ldots,$$

la variable y devant être faite égale à 1 après les différentiations.

Soit donc

$$\frac{1}{1.2.3\ldots i.\alpha^i}\frac{d^{i-1}[\varphi(\alpha y)^i\psi'(y)]}{dy^{i-1}}$$

un terme quelconque de cette série, dont le quantième soit $i+1$; et supposons que la fonction $\varphi(x)$ soit représentée par une suite quelconque de puissances de x, en sorte que l'on ait

$$\varphi(x)=Ax^a+Bx^b+Cx^c+\ldots,$$

A, B, C,... étant des coefficients quelconques, et a, b, c,... des exposants aussi quelconques; on aura donc de même

$$\varphi(\alpha y)=A\alpha^a y^a+B\alpha^b y^b+C\alpha^c y^c+\ldots,$$

par conséquent un terme quelconque de la puissance $i^{ième}$ de cette quantité, c'est-à-dire de la valeur de $\varphi(\alpha y)^i$ sera, comme on sait,

$$\frac{1.2.3\ldots i}{1.2.3\ldots m\times 1.2.3\ldots n\times 1.2.3\ldots p\times\ldots}A^mB^nC^p\ldots(\alpha y)^{am+bn+cp+\ldots},$$

$m, n, p, \ldots$ étant des nombres entiers positifs, tels que

$$m+n+p+\ldots=i.$$

Supposons de plus que la fonction $\psi'(y)$ soit aussi représentée par une suite de termes tels que Fy^f; et multipliant la quantité précédente par Fy^f, on aura pour un terme quelconque de la valeur de $\varphi(\alpha y)^i\psi'(y)$, l'expression

$$\frac{1.2.3\ldots i\times F.A^m B^n C^p\ldots\alpha^u}{1.2.3\ldots m\times 1.2.3\ldots n\times 1.2.3\ldots p\times\ldots}\,y^{u+f},$$

en faisant pour plus de simplicité

$$ma+nb+pc+\ldots=u.$$

Donc, différentiant cette quantité $i-1$ fois, en faisant y variable et dy constant, et divisant ensuite par $1.2.3\ldots i.\alpha^i dy^{i-1}$, on aura pour la valeur d'un terme quelconque de

$$\frac{1}{1.2.3\ldots i.\alpha^i}\,\frac{d^{i-1}[\varphi(\alpha y)^i\psi'(y)]}{dy^{i-1}},$$

après y avoir fait $y=1$, la quantité

$$\frac{(u+f)(u+f-1)(u+f-2)\ldots(u+f-i+2)}{1.2.3\ldots m\times 1.2.3\ldots n\times 1.2.3\ldots p\times\ldots}\,F.A^m B^n C^p\ldots\alpha^{u-i}.$$

Ainsi la difficulté se réduit maintenant à voir ce que cette quantité devient lorsqu'on suppose i infiniment grand.

38. Pour cet effet, je remarque que l'on a, en prenant ϖ pour le rapport de la circonférence au rayon,

$$\log 1+\log 2+\log 3+\log 4+\ldots+\log x$$
$$=\left(x+\frac{1}{2}\right)\log x-x+\frac{1}{2}\log\varpi+\frac{1}{12x}-\frac{1}{360x^3}+\ldots,$$

comme MM. Stirling, Moivre et d'autres Géomètres l'ont démontré (*voyez* surtout le *Calcul différentiel* de M. Euler); de sorte que, lorsque x est

infiniment grand, on a, sans erreur sensible,

$$\log 1+\log 2+\log 3+\ldots+\log x=\left(x+\frac{1}{2}\right)\log x-x+\frac{1}{2}\log\varpi$$
$$=\left(x+\frac{1}{2}\right)\log x-\log e^x+\frac{1}{2}\log\varpi,$$

d'où, en passant des logarithmes aux nombres, on tire dans la même hypothèse

$$1.2.3\ldots x=\frac{\sqrt{\varpi}\,x^{x+\frac{1}{2}}}{e^x}.$$

On a de plus, en général, quels que soient x et y,

$$\log x+\log(x-1)+\log(x-2)+\ldots+\log(x-y+1)$$
$$=\left(x+\frac{1}{2}\right)\log x-x+\frac{1}{12x}-\frac{1}{360x^3}+\ldots$$
$$-\left(x-y+\frac{1}{2}\right)\log(x-y)+x-y-\frac{1}{12(x-y)}+\frac{1}{360(x-y)^3}+\ldots,$$

de sorte qu'en supposant x et y infiniment grands, on aura

$$\log x+\log(x-1)+\log(x-2)+\ldots+\log(x-y+1)$$
$$=\left(x+\frac{1}{2}\right)\log x-\left(x-y+\frac{1}{2}\right)\log(x-y)-y,$$

et par conséquent, en passant des logarithmes aux nombres,

$$x(x-1)(x-2)\ldots(x-y+1)=\frac{x^{x+\frac{1}{2}}e^{-y}}{(x-y)^{x-y+\frac{1}{2}}}.$$

De là il s'ensuit, pour le dire en passant, que le coefficient du $(y+1)^{ième}$ terme du binôme élevé à la puissance x sera, lorsque x et y sont très-grands,

$$\frac{x^{x+\frac{1}{2}}}{\sqrt{\varpi}\times(x-y)^{x-y+\frac{1}{2}}\times y^{y+\frac{1}{2}}};$$

de sorte qu'en faisant $y=px$ ce coefficient deviendra, en divisant le

haut et le bas par $x^{x+\frac{1}{2}}$,

$$\frac{1}{\sqrt{\varpi}(1-p)^{x+\frac{1}{2}}\left(\frac{p}{1-p}\right)^{y}\sqrt{y}}.$$

39. Cela posé, puisque

$$m+n+p+\ldots=i,$$

et

$$am+bn+cp+\ldots=u,$$

il est clair qu'en supposant i infiniment grand, m, n, p,..., u le seront aussi, de sorte qu'on aura

$$1.2.3\ldots m=\frac{\sqrt{\varpi}\,m^{m+\frac{1}{2}}}{e^{m}},$$

et ainsi des autres.

De plus en faisant, pour abréger, $g=f+1$, on aura

$$\begin{aligned}&(u+f)(u+f-1)(u+f-2)\ldots(u+f-i+2)\\&=\frac{(u+g)(u+g-1)(u+g-2)\ldots(u+g-i+1)}{u+g}\\&=\frac{(u+g)^{u+g-\frac{1}{2}}}{(u+g-i)^{u+g-i+\frac{1}{2}}e^{i}}.\end{aligned}$$

De sorte qu'on aura, lorsque $i=\infty$,

$$\begin{aligned}&\frac{(u+f)(u+f-1)(u+f-2)\ldots(u+f-i+2)}{1.2.3\ldots m\times 1.2.3\ldots n\times 1.2.3\ldots p\times\ldots}\\&=\frac{(u+g)^{u+g-\frac{1}{2}}}{\varpi^{\frac{\lambda}{2}}(u+g-i)^{u+g-i+\frac{1}{2}}m^{m+\frac{1}{2}}n^{n+\frac{1}{2}}p^{p+\frac{1}{2}}\ldots},\end{aligned}$$

λ étant le nombre des quantités m, n, p,..., c'est-à-dire le nombre des termes de la fonction $\varphi(x)$.

Donc, faisant, pour abréger,

$$V=\frac{(u+g)^{\lambda g-1}}{\varpi^{\frac{\lambda}{2}}(u+g-i)^{\lambda g+1}mnp\ldots},$$

la quantité proposée

$$\frac{(u+f)(u+f-1)(u+f-2)\ldots(u+f-i+2)}{1.2.3\ldots m\times 1.2.3\ldots n\times 1.2.3\ldots p\times\ldots}\,FA^{m}B^{n}C^{p}\ldots\alpha^{u-i}$$

deviendra, lorsque $i=\infty$,

$$F\sqrt{V}\times\frac{(u+g)^{u}A^{m}B^{n}C^{p}\ldots\alpha^{u-i}}{(u+g-i)^{u-i}m^{m}n^{n}p^{p}\ldots}.$$

40. Supposons maintenant

$$\frac{m}{i}=\mu,\quad\frac{n}{i}=\nu,\quad\frac{p}{i}=\pi,\ldots,\quad\frac{u}{i}=\upsilon,$$

et l'on aura, à cause de $m+n+p+\ldots=i$ et $am+bn+cp+\ldots=u$,

$$\begin{aligned}&\mu+\nu+\pi+\ldots=1,\\&\mu a+\nu b+\pi c+\ldots=\upsilon,\end{aligned}$$

d'où l'on voit que les nombres μ, ν, π,... seront des fractions plus petites que l'unité; donc, faisant ces substitutions dans l'expression

$$\frac{(u+g)^{u}A^{m}B^{n}C^{p}\ldots\alpha^{u-i}}{(u-i+g)^{u-i}m^{m}n^{n}p^{p}\ldots},$$

elle deviendra, en divisant le haut et le bas par i^{u},

$$\left[\frac{\left(\upsilon+\frac{g}{i}\right)^{\upsilon}A^{\mu}B^{\nu}C^{\pi}\ldots\alpha^{\upsilon-1}}{\left(\upsilon-1+\frac{g}{i}\right)^{\upsilon-1}\mu^{\mu}\nu^{\nu}\pi^{\pi}\ldots}\right]^{i},$$

ou bien, en négligeant le terme $\frac{g}{i}$ qui devient nul lorsque $i=\infty$,

$$\left[\frac{\upsilon^{\upsilon}\alpha^{\upsilon-1}A^{\mu}B^{\nu}C^{\pi}\ldots}{(\upsilon-1)^{\upsilon-1}\mu^{\mu}\nu^{\nu}\pi^{\pi}\ldots}\right]^{i}.$$

Par les mêmes substitutions la quantité V deviendra, en divisant le haut et le bas par $i^{\lambda g-1}$,

$$\frac{\left(\upsilon+\frac{g}{i}\right)^{\lambda g-1}}{i^{\frac{\lambda}{2}+1}\varpi^{\frac{\lambda}{2}}\left(\upsilon-1+\frac{g}{i}\right)^{\lambda g+1}\mu\nu\pi\ldots},$$

ou bien, en négligeant le terme infiniment petit $\frac{g}{i}$, et remettant pour g sa valeur $f+1$,

$$\frac{\upsilon^{2f+1}}{i^{\lambda+2}\varpi^{f}(\upsilon-1)^{2f+3}\mu\nu\pi\ldots}.$$

41. Donc, si l'on fait

$$M=\frac{\upsilon^{2f+1}}{\varpi^{f}(\upsilon-1)^{2f+3}\mu\nu\pi\ldots},$$

$$N=\upsilon\left(\frac{\upsilon\alpha}{\upsilon-1}\right)^{\upsilon-1}\left(\frac{A}{\mu}\right)^{\mu}\left(\frac{B}{\nu}\right)^{\nu}\left(\frac{C}{\pi}\right)^{\pi}\ldots,$$

on aura, pour un terme quelconque de la valeur de

$$\frac{1}{1.2.3\ldots i.\alpha^{i}}\frac{d^{i-1}[\varphi(\alpha y)^{i}\psi'(y)]}{dy^{i-1}}$$

lorsque i est infiniment grand, cette expression fort simple

$$\frac{F\sqrt{M}.N^{i}}{i^{\frac{\lambda+2}{2}}}$$

dans laquelle λ est le nombre des termes de la fonction $\varphi(x)$, et où μ, ν, π,... sont des nombres quelconques positifs, tels que

$$\mu+\nu+\pi+\ldots=1$$

et

$$a\mu+b\nu+c\pi+\ldots=\upsilon.$$

Ainsi cette quantité sera infinie ou nulle, suivant que N aura une valeur, soit positive ou négative, plus grande que l'unité, ou non.

D'où il est aisé de conclure que la série qui représentera la valeur de $\psi\left(\frac{x}{\alpha}\right)$ (37), sera convergente si l'on a, abstraction faite du signe,

$$N=\text{ ou }<1;$$

autrement elle sera divergente.

Or, comme la quantité N dépend seulement des coefficients A, B, C,... et des exposants a, b, c,... qui entrent dans l'expression de la fonction

$\varphi(x)$, et nullement de ceux qui appartiennent à la fonction $\psi(x)$, et qui sont F, f,..., il s'ensuit que si la série qui exprime la valeur d'une fonction quelconque de $\frac{x}{\alpha}$ est convergente, elle le sera aussi pour toute autre fonction de $\frac{x}{\alpha}$.

42. Au reste, il est bon de remarquer que, quoique les coefficients A, B, C,... puissent être positifs ou négatifs, ainsi que la quantité α; cependant, comme il ne s'agit ici que de la valeur absolue de la quantité (37)

$$\frac{(u+f)\ldots(u+f-i+2)}{1.2\ldots m\times 1.2\ldots n\times\ldots}FA^{m}B^{n}C^{p}\ldots\alpha^{u-i},$$

il est indifférent de les prendre positivement ou négativement; ainsi, pour éviter les imaginaires dans la valeur de N, nous supposerons que les coefficients A, B, C,... soient pris positivement, à cause que μ, ν, π,... doivent être positifs par leur nature, et à l'égard de α nous supposerons qu'il soit pris en sorte que $\frac{\upsilon\alpha}{\upsilon-1}$ soit positif; par ce moyen, quels que soient les nombres μ, ν, π,..., υ, la valeur de N sera toujours sous une forme réelle.

43. Supposons que la fonction $\varphi(x)$ ne renferme qu'un seul terme Ax^{a}, en sorte que l'équation soit

$$\alpha-x+Ax^{a}=0,$$

dans ce cas on aura

$$N=\upsilon\left(\frac{\upsilon\alpha}{\upsilon-1}\right)^{\upsilon-1}\left(\frac{A}{\mu}\right)^{\mu}$$

et

$$\mu=1,\quad a\mu=\upsilon;$$

donc

$$\mu=1,\quad \upsilon=a;$$

donc

$$N=a\left(\frac{\alpha a}{a-1}\right)^{a-1}A;$$

donc la série sera convergente si l'on a

$$A=\text{ ou }<\frac{1}{a}\left(\frac{a-1}{\alpha a}\right)^{a-1}.$$

Ce cas est celui du Problème II, § III; or, dans la première Solution, on a d'abord

$$\alpha = \frac{a}{b}, \quad A = \frac{c}{b}, \quad a = n;$$

donc la première série de cette Solution, c'est-à-dire celle qui se rapporte à la première racine, sera convergente si l'on a

$$\frac{c}{b} = \text{ou} < \frac{1}{n}\left[\frac{(n-1)b}{an}\right]^{n-1},$$

c'est-à-dire (abstraction faite des signes)

$$\frac{a^{n-1}c}{b^n} = \text{ou} < \frac{(n-1)^{n-1}}{n^n},$$

en prenant a, b et c positivement.

Soit $n = 2$, on aura cette condition

$$\frac{ac}{b^2} = \text{ou} < \frac{1}{2^2},$$

c'est-à-dire $b^2 = \text{ou} > 4ac$; or, c'est précisément la condition qui rend convergente la série provenant du développement du radical $\sqrt{b^2 - 4ac}$, et qui est la même que celle que nous avons trouvée par notre méthode (9).

Dans la seconde série de la même Solution, on a, en comparant l'équation

$$\frac{b}{c} - t - \frac{a}{c}t^{\frac{1}{1-n}} = 0$$

à la formule générale ci-dessus,

$$\alpha = \frac{b}{c}, \quad A = -\frac{a}{c}, \quad a = \frac{1}{1-n};$$

donc la condition de la convergence de cette série sera (abstraction faite des signes)

$$\frac{a}{c} = \text{ou} < (1-n)\left(\frac{nc}{b}\right)^{\frac{n}{1-n}},$$

ou bien

$$\frac{ca^{n-1}}{b^n} = \text{ou} < \frac{(n-1)^{n-1}}{n^n},$$

qui est la même condition que la précédente.

Dans la seconde Solution on aura, en comparant l'équation

$$\frac{a}{c} + t - \frac{bt^{\frac{1}{n}}}{c} = 0$$

à la même formule générale,

$$\alpha = -\frac{a}{c}, \quad A = \frac{b}{c} \quad \text{et} \quad a = \frac{1}{n};$$

d'où la condition de la convergence des séries de cette Solution sera, abstraction faite des signes,

$$\frac{b}{c} = \text{ou} < n\left[\frac{(n-1)c}{a}\right]^{\frac{1-n}{n}},$$

laquelle se réduit à celle-ci

$$\frac{ca^{n-1}}{b^n} = \text{ou} > \frac{(n-1)^{n-1}}{n^n},$$

qui est l'opposée de celle que nous avons trouvée pour la première Solution.

Donc :

1° Si dans l'équation

$$a - bx + cx^n = 0,$$

on a (abstraction faite des signes de a, b, c)

$$\frac{a^{n-1}c}{b^n} = \text{ou} < \frac{(n-1)^{n-1}}{n^n},$$

il faudra employer la première Solution du Problème II, laquelle donnera toujours des séries convergentes, et par conséquent vraies pour toutes

les racines; de sorte que ces racines seront réelles ou imaginaires, suivant que les séries qui les représentent le seront.

Donc (33) l'équation proposée aura dans ce cas autant de racines réelles et autant d'imaginaires qu'il y en aura de telles dans les équations qu'on pourra faire en combinant ensemble deux termes consécutifs de cette équation, et les égalant à zéro; c'est-à-dire dans les équations

$$a - bx = 0 \quad \text{et} \quad b - cx^{n-1} = o,$$

d'où l'on voit qu'il y en aura toujours au moins une de réelle.

2° Si l'on a

$$\frac{a^{n-1}c}{b^n} = \text{ou} > \frac{(n-1)^{n-1}}{n^n},$$

alors il faudra employer la seconde Solution dont les séries seront nécessairement convergentes; de sorte que dans ce cas l'équation aura autant de racines réelles et autant d'imaginaires qu'il y en aura de telles dans l'équation qu'on fera en égalant à zéro le premier et le dernier terme de la proposée, c'est-à-dire dans l'équation

$$a + cx^n = 0.$$

44. Si l'on avait l'équation

$$a - bx^m + cx^{m+n} = 0,$$

il n'y aurait qu'à faire, comme dans le n° 22, $x^m = t$, ce qui la changerait en celle-ci

$$a - bt + ct^{\frac{m+n}{m}} = 0,$$

qui est dans le cas de l'équation du numéro précédent. Ainsi, mettant $\frac{m+n}{m}$ à la place de n, on trouvera que la première Solution sera bonne lorsqu'on aura

$$\frac{a^{\frac{n}{m}}c}{b^{\frac{m+n}{m}}} = \text{ou} < \frac{\left(\frac{n}{m}\right)^{\frac{n}{m}}}{\left(\frac{m+n}{m}\right)^{\frac{m+n}{m}}},$$

savoir, en élevant les deux membres à la puissance m,

$$\frac{a^n c^m}{b^{m+n}} = \text{ou} < \frac{m^m n^n}{(m+n)^{m+n}},$$

et que la seconde sera bonne lorsqu'on aura

$$\frac{a^n c^m}{b^{m+n}} = \text{ou} > \frac{m^m n^n}{(m+n)^{m+n}},$$

de sorte que, dans le premier cas, l'équation aura autant de racines réelles et autant d'imaginaires qu'il y en aura de telles dans les deux équations

$$a - bx^m = 0 \quad \text{et} \quad b - cx^n = 0,$$

et que, dans le second, le nombre des racines réelles et des imaginaires sera le même (33) que dans l'équation

$$a + cx^{m+n} = 0.$$

45. Si l'on avait

$$\frac{a^n c^m}{b^{m+n}} = \frac{m^m n^n}{(m+n)^{m+n}},$$

alors les deux conditions seraient les mêmes; de sorte qu'il faudrait dire que l'équation aurait dans ce cas autant de racines réelles et autant d'imaginaires qu'il y en aurait de telles dans les équations

$$a - bx^m = 0 \quad \text{et} \quad b - cx^n = 0,$$

et dans l'équation

$$a + cx^{m+n} = 0;$$

donc, s'il arrive que le nombre des racines imaginaires de ces deux équations-là soit différent de celui de cette équation-ci, il s'ensuivra qu'il y aura dans la proposée autant de racines égales qu'il y aura plus de racines imaginaires d'un côté que de l'autre; car les racines égales étant les limites entre les racines réelles et les imaginaires, peuvent être regardées en quelque sorte comme appartenant aux unes ou aux autres.

46. Nous avons vu (41) que, pour que la série soit convergente, il faut que N ne soit pas > 1; on cherchera donc dans chaque cas la plus grande valeur de N, en regardant les quantités μ, ν, π,... comme variables, et si elle ne se trouve pas plus grande que l'unité, on en conclura que la série est convergente; sinon elle sera divergente.

Faisons varier seulement μ et ν, et l'on aura

$$\frac{dN}{N} = d\upsilon \log \frac{\alpha\upsilon}{\upsilon - 1} + d\mu \left(\log \frac{A}{\mu} - 1 \right) + d\nu \left(\log \frac{B}{\nu} - 1 \right);$$

mais il faut que

$$\mu + \nu + \pi + \ldots = 1 \quad \text{et} \quad a\mu + b\nu + c\pi + \ldots = \upsilon;$$

donc

$$d\mu + d\nu = 0, \quad a\,d\mu + b\,d\nu = d\upsilon;$$

d'où

$$d\mu = \frac{d\upsilon}{a-b}, \quad d\nu = \frac{d\upsilon}{b-a};$$

donc, substituant ces valeurs, et égalant la différentielle dN à zéro, on aura

$$\log \frac{\alpha\upsilon}{\upsilon - 1} + \frac{\log \frac{A}{\mu} - \log \frac{B}{\nu}}{a-b} = 0,$$

d'où l'on tire

$$\left(\frac{\alpha\upsilon}{\upsilon - 1} \right)^a \frac{A}{\mu} = \left(\frac{\alpha\upsilon}{\upsilon - 1} \right)^b \frac{B}{\nu}.$$

On trouverait de même, en faisant varier μ et π,

$$\left(\frac{\alpha\upsilon}{\upsilon - 1} \right)^a \frac{A}{\mu} = \left(\frac{\alpha\upsilon}{\upsilon - 1} \right)^c \frac{C}{\pi},$$

et ainsi de suite; de sorte que les conditions du maximum ou minimum seront renfermées dans ces équations

$$\left(\frac{\alpha\upsilon}{\upsilon - 1} \right)^a \frac{A}{\mu} = \left(\frac{\alpha\upsilon}{\upsilon - 1} \right)^b \frac{B}{\nu} = \left(\frac{\alpha\upsilon}{\upsilon - 1} \right)^c \frac{C}{\pi} = \ldots.$$

On aura donc, en prenant un coefficient quelconque λ,

$$\mu = \lambda A \left(\frac{\alpha\upsilon}{\upsilon - 1} \right)^a,$$
$$\nu = \lambda B \left(\frac{\alpha\upsilon}{\upsilon - 1} \right)^b,$$
$$\pi = \lambda C \left(\frac{\alpha\upsilon}{\upsilon - 1} \right)^c,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

donc, substituant ces valeurs dans les équations

$$\mu + \nu + \pi + \ldots = 1, \quad \mu a + \nu b + \pi c + \ldots = \upsilon,$$

on aura

$$\lambda \left[A \left(\frac{\alpha\upsilon}{\upsilon - 1} \right)^a + B \left(\frac{\alpha\upsilon}{\upsilon - 1} \right)^b + C \left(\frac{\alpha\upsilon}{\upsilon - 1} \right)^c + \ldots \right] = 1,$$
$$\lambda \left[Aa \left(\frac{\alpha\upsilon}{\upsilon - 1} \right)^a + Bb \left(\frac{\alpha\upsilon}{\upsilon - 1} \right)^b + Cc \left(\frac{\alpha\upsilon}{\upsilon - 1} \right)^c + \ldots \right] = \upsilon,$$

d'où l'on tire, en chassant λ,

$$A(a-\upsilon) \left(\frac{\alpha\upsilon}{\upsilon - 1} \right)^a + B(b-\upsilon) \left(\frac{\alpha\upsilon}{\upsilon - 1} \right)^b + C(c-\upsilon) \left(\frac{\alpha\upsilon}{\upsilon - 1} \right)^c + \ldots = 0,$$

équation par laquelle on déterminera υ, après quoi on aura

$$\lambda = \frac{1}{A \left(\frac{\alpha\upsilon}{\upsilon - 1} \right)^a + B \left(\frac{\alpha\upsilon}{\upsilon - 1} \right)^b + C \left(\frac{\alpha\upsilon}{\upsilon - 1} \right)^c + \ldots},$$

et ensuite μ, ν, π,... par les formules précédentes.

Ainsi l'on pourra toujours, par ce moyen, juger de la convergence ou de la divergence de chaque série.

SUR LA

FORCE DES RESSORTS PLIÉS.

SUR LA

FORCE DES RESSORTS PLIÉS (*).

(*Mémoires de l'Académie royale des Sciences et Belles-Lettres de Berlin*, t. XXV, 1771.)

On sait que la force d'un ressort plié s'affaiblit toujours à mesure que le ressort se débande, mais on ignore la loi suivant laquelle se fait cet affaiblissement : or, c'est de cette loi que dépend la figure des fusées que l'on applique aux montres et à la plupart des horloges à ressort, et dont la propriété est de maintenir l'action du ressort dans l'égalité au moyen de la différente grandeur des rayons qui forment la rainure spirale; car, selon que la corde qui se désentortille se trouve appliquée à une plus grande distance de l'axe de la fusée, l'action du ressort devient aussi plus grande, et il faut que cette augmentation compense exactement la diminution de force que le ressort souffre en se déroulant. Dans les ressorts qui agissent en s'allongeant ou en se raccourcissant, il paraît que la force est proportionnelle à la quantité dont ils se dilatent ou se contractent, ou du moins à une fonction donnée de cette quantité; mais ce principe n'a pas lieu dans les lames élastiques inextensibles et pliées en spirale telles que celles qu'on applique aux horloges : le seul principe qu'on puisse employer pour ces sortes de ressorts est que la force avec laquelle le ressort résiste à être courbé est toujours proportionnelle à l'angle même de courbure; et c'est d'après ce principe que de très-grands Géomètres ont déterminé la courbe qu'une lame élastique doit former

(*) Lu le 20 septembre 1770.

lorsqu'elle est bandée par des forces quelconques données. Or, voici le Problème qu'il faut résoudre pour pouvoir connaître la loi de la force des ressorts pliés :

Une lame à ressort de longueur donnée et fixe par une de ses extrémités étant bandée par des forces quelconques qui agissent sur l'autre extrémité, et qui la retiennent dans une position donnée, déterminer la quantité et la direction de ces forces.

Ce Problème n'a encore été résolu, que je sache, par aucun Géomètre; c'est ce qui m'a déterminé à en faire l'objet de ce Mémoire. La seule restriction que j'y mettrai, c'est que la lame soit uniformément épaisse, et que sa figure primitive et naturelle soit la ligne droite. Ce n'est pas que le calcul ne puisse s'appliquer à des ressorts de figure et d'épaisseur quelconques, mais les équations qu'on aurait seraient trop compliquées pour qu'on en pût tirer quelque lumière.

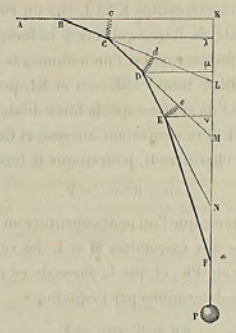
§ I.

Le principe ordinaire d'après lequel on résout le Problème de la courbe élastique est, que la force du ressort à chaque point doit être proportionnelle à la somme des moments de toutes les puissances tendantes. Or, quoique ce principe paraisse n'avoir pas besoin de démonstration, cependant, comme un très-grand Géomètre a cru pouvoir le révoquer en doute par cette considération qu'un ressort ne devant être regardé ni comme un corps parfaitement flexible, ni comme un corps absolument inflexible, on ne saurait se former une idée nette des moments des forces tendantes, moments qui, selon lui, ne peuvent avoir lieu que dans des corps absolument inflexibles. Je vais tâcher d'abord d'établir la vérité de ce principe d'une manière aussi simple que rigoureuse.

Imaginons plusieurs verges droites et inflexibles AB, BC, CD, DE,... (*fig.* 1), lesquelles soient jointes l'une à l'autre par des charnières à ressort aux points B, C, D,...., et dont la première BA soit fixée horizontalement au point A, et la dernière EF soit chargée au point F d'un poids quelconque P; on propose de trouver la figure du polygone ABCDEF.

Pour cela, je remarque que, quelle que soit la manière dont le ressort en B agit sur les deux verges AB, BC pour les étendre en ligne droite, on peut toujours substituer à l'action de ce ressort celle d'un autre ressort Cc, qui serait attaché d'un côté au point C de la verge BC et de l'autre au

Fig. 1.



point c de la verge AB prolongée en c en sorte que BC = Bc, et qui aurait une force de contraction équivalente à la force du ressort de la charnière B. On pourra de même substituer aux ressorts des autres charnières C, D,... des ressorts Dd, Ee,... qui agissent sur les points D, E,... des verges CD, DE,... et sur les points d, e,... des verges BC, CD,... prolongées en d, e,..., de manière que CD = Cd, DE = De,..... Cela posé, soit AB = BC = Bc = CD = Cd... = 1, et soit F la force du ressort en B, F′ en C, F″ en D,...; soit R la force du ressort Cc, R′ celle du ressort Dd, R″ celle du ressort Ee,...; enfin, soit l'angle CBc = φ, l'angle DCd = φ', l'angle EDe = φ'',..., et a la distance BK du point fixe B à la verticale KP suivant laquelle agit le poids tendant, a' la distance Cλ du point C à la même verticale, a'' la distance Dμ,.... Il est évident que le ressort Cc agissant obliquement sur les lignes BC, Bc, ne fait sur chacune de ces lignes qu'un effort égal à R cosφ pour les rapprocher l'une de l'autre, et

comme cet effort doit être égal à celui du ressort placé en B, on aura $R\cos\varphi = F$; on prouvera de la même manière qu'on aura $R'\cos\varphi' = F'$, $R''\cos\varphi'' = F''$,.... Considérons maintenant les deux verges BC, Bc comme mobiles en B et tirées l'une vers l'autre par le ressort Cc placé entre deux; qu'on prolonge ces deux verges jusqu'à la ligne verticale PK, et qu'on joigne les deux extrémités K et L par un ressort KL qui ait une force dilatative-capable de faire équilibre à la force contractive du ressort Cc, il est aisé de prouver que si l'on nomme ρ la force du ressort KL, on aura (à cause de BC = Bc = 1, BK = a et KL perpendiculaire à BK) $\rho a = R\cos\varphi$; donc, si l'on suppose que la force dilatative ρ devienne contractive, le ressort KL sera équivalent au ressort Cc, et par conséquent aussi au ressort de la charnière B, pourvu que la force ρ soit telle que

$$\rho a = R\cos\varphi = F.$$

On peut prouver de même que l'on peut substituer au ressort Dd un autre ressort ML qui agisse aux extrémités M et L des verges BC, CD prolongées jusqu'à la verticale PK, et que la force de ce ressort que je dénoterai par ρ' devra être déterminée par l'équation

$$\rho' a' = R'\cos\varphi' = F'.$$

Nommant pareillement ρ'' la force d'un ressort qu'on imaginerait placé aux extrémités M et N des verges prolongées CD, DE, et qui serait équivalent au ressort Ee, on trouverait l'équation

$$\rho'' a'' = R''\cos\varphi'' = F'',$$

et ainsi de suite. On aura donc par ce moyen un assemblage de verges AK, BL, CM, DN,... dont la première est fixe en A, et dont les autres sont mobiles autour des points B, C, D,..., et dont les extrémités K, L, M, N,... sont unies par des ressorts KL, LM, MN,... disposés en ligne droite, et qui sont en équilibre tant entre eux qu'avec le poids P. Or il est visible que cet équilibre ne saurait subsister à moins que les forces ρ, ρ', ρ'',.... des ressorts ne soient égales entre elles et égales aussi à la force du poids P; c'est pourquoi on aura nécessairement

$$\rho = P, \quad \rho' = P, \quad \rho'' = P, \ldots,$$

donc

$$F = aP, \quad F' = a'P, \quad F'' = a''P, \ldots,$$

c'est-à-dire que les forces des ressorts qui agissent à chacun des angles du polygone ABCD... doivent être proportionnelles aux moments du poids tendant par rapport à chacun de ces angles.

S'il y avait plusieurs puissances tendantes, alors on démontrerait par un raisonnement semblable que le ressort à chaque angle du polygone devrait être proportionnel à la somme des moments de toutes les puissances. Supposons maintenant que les verges qui forment le polygone élastique deviennent infiniment petites et que leur nombre augmente à l'infini, il est clair que le polygone se changera en une courbe continue, et que l'on aura le cas d'une lame élastique pliée, dans laquelle il faudra par conséquent que l'action du ressort à chaque point soit proportionnelle à la somme des moments des forces tendantes par rapport à ce point, comme on l'a toujours supposé.

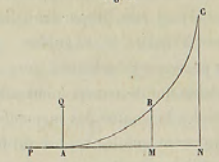
A l'égard de l'action du ressort, c'est-à-dire de la force avec laquelle il tend à se débander, on convient généralement qu'elle est en raison de l'angle de courbure, c'est-à-dire en raison inverse du rayon osculateur; ainsi il faudra que la somme des moments des forces tendantes par rapport à chaque point de la courbe élastique soit réciproquement proportionnelle au rayon osculateur lorsque l'élasticité absolue est partout la même, et lorsque l'élasticité est variable, il faudra que la somme des moments dont il s'agit soit en raison directe de l'élasticité absolue et en raison inverse du rayon osculateur.

§ II.

Soit donc ABC (*fig.* 2) une lame élastique fixée par une de ses extrémités C, et courbée par des puissances quelconques qui agissent sur l'autre extrémité A. Ayant tiré par ce point A la tangente PAN, et par un point quelconque B de la courbe l'ordonnée BM, perpendiculaire à la droite AN, que nous prendrons pour l'axe des abscisses, on fera AM = x, MB = y, l'arc AB égal à s, le rayon de courbure en B égal à ρ, l'angle que

la tangente en B fait avec la tangente AN, c'est-à-dire l'amplitude de l'arc AB, égal à φ, l'abscisse AN égale à a, l'ordonnée CN égale à b,

Fig. 2.



l'arc AC, c'est-à-dire la longueur de la lame, égal à l, et l'angle que la tangente en C fait avec AN, c'est-à-dire l'amplitude totale de l'arc AC, égal à m; on aura

$$dy = \sin\varphi\, ds, \quad dx = \cos\varphi\, ds, \quad \frac{ds}{\rho} = d\varphi;$$

par conséquent

$$\rho = \frac{ds}{d\varphi}, \quad y = \int \sin\varphi\, ds, \quad x = \int \cos\varphi\, ds,$$

ces intégrales étant prises de manière qu'elles soient nulles lorsque $\varphi = 0$.

Cela posé, on peut réduire, en général, toutes les forces qui agissent au point A à deux forces uniques dont l'une, que j'appellerai P, agisse suivant la direction AP, et l'autre, que j'appellerai Q, agisse suivant AQ perpendiculaire à AP; or, il est clair que la force P donne, par rapport au point B, le moment Py, et que la force Q donne, par rapport au même point, le moment Qx; donc on aura, par la nature de la courbe élastique (paragraphe précédent), l'équation

$$Py + Qx = \frac{2K^2}{\rho},$$

$2K^2$ étant un coefficient constant qui dépend de l'élasticité absolue de la lame.

Substituons dans cette équation à la place de x, y et ρ leurs valeurs en φ, nous aurons

$$P\int \sin\varphi\, ds + Q\int \cos\varphi\, ds = \frac{2K^2 d\varphi}{ds},$$

où l'on remarquera qu'en faisant $\varphi = 0$, on aura

$$\int \sin\varphi\, ds = 0, \quad \int \cos\varphi\, ds = 0,$$

et par conséquent aussi

$$\frac{d\varphi}{ds} = 0.$$

Différentions maintenant cette équation en prenant ds constant, et l'on aura celle-ci

$$P\sin\varphi + Q\cos\varphi = \frac{2K^2 d^2\varphi}{ds^2},$$

laquelle, étant multipliée par $d\varphi$ et ensuite intégrée, donnera

$$C - P\cos\varphi + Q\sin\varphi = \frac{K^2 d\varphi^2}{ds^2},$$

C étant une constante arbitraire qu'on déterminera par la condition qu'en faisant $\varphi = 0$, on ait $\frac{d\varphi}{ds} = 0$; c'est pourquoi on aura

$$C = P.$$

On aura donc

$$ds = \frac{K\, d\varphi}{\sqrt{P - P\cos\varphi + Q\sin\varphi}},$$

et de là

$$dy = \frac{K\sin\varphi\, d\varphi}{\sqrt{P - P\cos\varphi + Q\sin\varphi}},$$

$$dx = \frac{K\cos\varphi\, d\varphi}{\sqrt{P - P\cos\varphi + Q\sin\varphi}}.$$

Maintenant, si l'on pouvait intégrer ces trois équations, il est évident qu'en faisant, après l'intégration, $s = l$, $x = a$, $y = b$ et $\varphi = m$, on aurait trois équations par lesquelles on pourrait déterminer les forces P, Q et l'amplitude m, les quantités l, a et b étant données, et le Problème serait résolu; mais il est aisé de voir que l'intégration dont il s'agit dépend en général de la rectification des sections coniques, et qu'ainsi elle échappe à toutes les méthodes connues.

Il y a cependant un cas où l'intégration réussit, c'est celui où $Q = 0$; nous allons l'examiner dans le paragraphe suivant.

§ III.

Supposons $Q = 0$, en sorte que la lame AC ne soit tirée au point A que par la force P, suivant la direction de la tangente AP; on aura, dans ce cas,

$$ds = \frac{K}{\sqrt{P}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-\cos\varphi}},$$
$$dy = \frac{K}{\sqrt{P}} \frac{\sin\varphi\, d\varphi}{\sqrt{1-\cos\varphi}},$$
$$dx = \frac{K}{\sqrt{P}} \frac{\cos\varphi\, d\varphi}{\sqrt{1-\cos\varphi}}.$$

Faisons, pour plus de simplicité, $\frac{K\sqrt{2}}{\sqrt{P}} = f$, et mettons $2z$ à la place de φ; on aura, à cause de $\cos 2z = 1 - 2\sin^2 z$, $\sin 2z = 2\sin z \cos z$, on aura, dis-je,

$$ds = \frac{f\,dz}{\sin z},$$
$$dy = 2f\cos z\, dz,$$
$$dx = \frac{f\,dz}{\sin z} - 2f\sin z\, dz,$$

d'où l'on tire par l'intégration

$$s = f\log\sqrt{\frac{1-\cos z}{1+\cos z}} + A,$$
$$y = 2f\sin z + B,$$
$$x = s + 2f\cos z + C,$$

A, B, C étant des constantes qui doivent être déterminées en sorte que s, x et y soient nuls lorsque $z = 0$; ce qui donnera $B = 0$, $C = -2f$ et $A = -f\log 0$, c'est-à-dire $A = \infty$.

D'où l'on voit que ce cas ne saurait avoir lieu à moins que l'angle z ne soit infiniment petit, pour que l'arc s puisse être fini; de sorte que la courbure de la lame sera infiniment petite.

Or, puisque $Q = 0$ donne $\varphi = 0$, il est clair que Q très-petit donnera aussi φ très-petit; donc, faisant $\varphi = Qu$ et supposant Q très-petit, les équations du paragraphe précédent deviendront, à cause de $\sin\varphi = Qu$ et $\cos\varphi = 1 - \frac{Q^2u^2}{2}$, à très-peu près,

$$ds = \frac{K\,du}{\sqrt{u + \frac{P}{2}u^2}},$$
$$dy = \frac{QK\,u\,du}{\sqrt{u + \frac{P}{2}u^2}},$$
$$dx = ds - \frac{KQ^2u^3\,du}{2\sqrt{u + \frac{P}{2}u^2}},$$

équations intégrables par les logarithmes lorsque P est positif, et par les arcs de cercle lorsque P est négatif.

Considérons ce dernier cas, et faisons, pour plus de simplicité, $u = \frac{\cos z - 1}{P}$, on trouvera

$$ds = \frac{K\sqrt{2}}{\sqrt{-P}}\,dz,$$
$$dy = \frac{QK\sqrt{2}}{P\sqrt{-P}}(\cos z - 1)\,dz,$$
$$dx = ds + \frac{Q^2K\sqrt{2}}{2P^2\sqrt{-P}}\left(\frac{\cos 2z}{2} - 2\cos z + \frac{3}{2}\right)dz,$$

d'où, en intégrant en sorte que s, x et y soient nuls lorsque $z = 0$, on aura

$$s = \frac{K\sqrt{2}}{\sqrt{-P}}\,z,$$
$$y = \frac{QK\sqrt{2}}{P\sqrt{-P}}(\sin z - z),$$
$$x = s + \frac{Q^2K\sqrt{2}}{2P^2\sqrt{-P}}\left(\frac{\sin 2z}{4} - 2\sin z + \frac{3z}{2}\right),$$

où il faudra faire maintenant $s=l$, $y=b$, $x=a$, et z tel que $\cos z = \frac{Pm}{Q}+1$; de sorte qu'on aura

$$1+\frac{Pm}{Q}=\cos\frac{l\sqrt{-P}}{K\sqrt{2}},$$

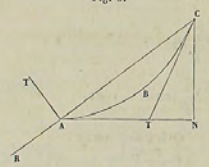
$$b=\frac{QK\sqrt{2}}{P\sqrt{-P}}\left(\sin\frac{l\sqrt{-P}}{K\sqrt{2}}-\frac{l\sqrt{-P}}{K\sqrt{2}}\right),$$

$$a=l+\frac{Q^2K\sqrt{2}}{2P^2\sqrt{-P}}\left(\frac{1}{4}\sin\frac{2l\sqrt{-P}}{K\sqrt{2}}-2\sin\frac{l\sqrt{-P}}{K\sqrt{2}}+\frac{3l\sqrt{-P}}{2K\sqrt{2}}\right).$$

§ IV.

Comme la position des coordonnées $AN=a$ et $NC=b$ (*fig.* 2) dépend de celle de la tangente AN au point A de la courbe élastique ABC, il sera bon d'introduire à leur place la corde AC et l'angle ACT qu'elle fait avec la tangente CT au point C où la lame élastique est supposée fixe. Soient donc (*fig.* 3) $AC=r$ et $ACT=\alpha$, l'angle CTN sera égal à la valeur

Fig. 3.



de φ au point C, c'est-à-dire égal à m; de sorte qu'on aura

$$\text{angle CAN}=m-\alpha,$$

et de là

$$a=r\cos(m-\alpha),\quad b=r\sin(m-\alpha).$$

Changeons aussi les deux forces P et Q, qui agissent suivant AP et AQ, en deux autres qui agissent suivant AR, c'est-à-dire dans la direction de la corde CA prolongée et suivant AT perpendiculaire à AR; et nommant

la première de ces forces R et la seconde T, on aura

$$P=R\cos(m-\alpha)+T\sin(m-\alpha),$$
$$Q=-R\sin(m-\alpha)+T\cos(m-\alpha);$$

ou bien, en faisant pour plus de simplicité

$$R=p\cos q,\quad T=p\sin q,$$

en sorte que

$$p=\sqrt{R^2+T^2},\quad \text{tang}\,q=\frac{T}{R},$$

on aura

$$P=p\cos(q+\alpha-m),$$
$$Q=p\sin(q+\alpha-m).$$

Ainsi il n'y aura qu'à faire ces substitutions dans les équations trouvées ci-dessus, et chassant ensuite m, on aura deux équations par lesquelles on pourra déterminer p et q, c'est-à-dire R et T par l, r et α.

§ V.

Pour rendre le calcul plus simple, nous remarquerons d'abord que Q devant être, par l'hypothèse une quantité très-petite, il faudra aussi que b soit très-petite; donc on aura tant $\sin(m-\alpha)$ que $\sin(q+\alpha-m)$ très-petits: mais m est aussi un angle très-petit du même ordre que Q; donc les angles α, m et q seront tous très-petits du même ordre, de sorte qu'on aura à très-peu près

$$a=r\left[1-\frac{(m-\alpha)^2}{2}\right],$$
$$b=r(m-\alpha),$$
$$P=p\left[1-\frac{(q+\alpha-m)^2}{2}\right],$$
$$Q=p(q+\alpha-m);$$

par conséquent, si l'on substitue ces valeurs dans les équations du § III et qu'on fasse, pour abréger,

$$\omega=\frac{l\sqrt{-P}}{K\sqrt{2}},$$

on aura, en négligeant ce qu'on doit négliger,

$$1+\frac{m}{q+\alpha-m}=\cos\omega,$$

$$\frac{r}{l}(m-\alpha)=(q+\alpha-m)\left(\frac{\sin\omega}{\omega}-1\right),$$

$$\frac{r}{l}\left[1-\frac{(m-\alpha)^2}{2}\right]=1+\frac{(q+\alpha-m)^2}{2}\left(\frac{\sin 2\omega}{4\omega}-\frac{2\sin\omega}{\omega}+\frac{3}{2}\right).$$

Or, cette dernière équation donne, en négligeant les quantités très-petites au-dessus du second ordre,

$$\frac{r}{l}=1+\frac{(m-\alpha)^2}{2}+\frac{(q+\alpha-m)^2}{2}\left(\frac{\sin 2\omega}{4\omega}-\frac{2\sin\omega}{\omega}+\frac{3}{2}\right),$$

de sorte que la seconde équation deviendra celle-ci

$$m-\alpha=(q+\alpha-m)\left(\frac{\sin\omega}{\omega}-1\right);$$

or la première donne

$$m=(q+\alpha)\left(1-\frac{1}{\cos\omega}\right),$$

et cette valeur étant substituée dans l'équation précédente, on aura

$$\frac{q}{\alpha}=\frac{\sin\omega}{\omega\cos\omega-\sin\omega},$$

$$\frac{m}{\alpha}=\frac{\omega(\cos\omega-1)}{\omega\cos\omega-\sin\omega};$$

donc, faisant ces substitutions dans l'équation qui donne la valeur de $\frac{l}{r}$, on aura

$$\frac{\frac{l}{r}-1}{\alpha^2}=\frac{(\sin\omega-\omega)^2+\frac{\omega\sin 2\omega}{4}-2\omega\sin\omega+\frac{3\omega^2}{2}}{2(\omega\cos\omega-\sin\omega)^2}.$$

Ainsi, en supposant l et r donnés, la dernière équation donnera d'abord ω en α, d'où l'on connaîtra aussi p en α à cause de $p=-\frac{2K^2\omega^2}{l^2}$; ensuite les deux autres équations donneront m et q.

§ VI.

Puisque nous avons supposé q très-petit, les deux forces R et T (§ IV) deviendront $R=p$ et $T=pq$, c'est-à-dire

$$R=-\frac{2K^2\omega^2}{l^2} \quad \text{et} \quad T=-\frac{2K^2\omega^2}{l^2}q;$$

ainsi l'on connaîtra les deux forces T et R pour chaque angle α.

Supposons que la force perpendiculaire T soit nulle; il faudra donc que $q=0$; donc aussi $\sin\omega=0$, pourvu que ω ne soit pas égal à zéro; autrement le dénominateur $\omega\cos\omega-\sin\omega$ le deviendrait aussi; donc on aura $\omega=\mu\pi$, π étant l'angle de 180 degrés et μ un nombre quelconque entier positif ou négatif excepté zéro. Donc on aura, dans ce cas,

$$R=-\frac{2K^2\mu^2\pi^2}{l^2};$$

d'où il s'ensuit que si le ressort n'est tendu que par une seule force AR qui agisse dans la direction de la corde AC, il faudra que cette force soit dirigée de A vers C, et qu'elle ne soit pas moindre que $\frac{2K^2\mu^2\pi^2}{l^2}$, c'est-à-dire moindre que $\frac{2K^2\pi^2}{l^2}$, pour qu'elle puisse produire dans le ressort une très-petite courbure quelconque; et toute force qui sera moindre que $\frac{2K^2\pi^2}{l^2}$ ne produira absolument aucun effet dans la lame élastique. M. Euler a déjà fait cette curieuse remarque, et il en déduit des conséquences relatives à la force des colonnes dans un excellent Mémoire sur ce sujet, auquel nous nous contenterons ici de renvoyer. (*Mémoires de l'Académie Royale des Sciences et Belles-Lettres de Berlin*, t. XIII, année 1757.)

Or, puisqu'en faisant $\omega=\pi$ la force T disparaît, supposons $\omega=\pi-t$, t étant un angle fort petit, et l'on aura

$$\sin\omega=\sin t=t, \quad \cos\omega=-\cos t=-1+\frac{t^2}{2};$$

donc, en négligeant ce qu'on doit négliger dans les équations du § V, on aura

$$\frac{q}{\alpha}=\frac{l}{\pi},\quad \frac{\frac{l}{r}-1}{\alpha^2}=\frac{5}{4}+\frac{3l}{4\pi};$$

d'où l'on aura

$$\frac{\frac{l}{r}-1}{\alpha^2}=\frac{5}{4}+\frac{3q}{4\alpha},$$

et de là

$$q=\frac{4\left(\frac{l}{r}-1\right)}{3\alpha}-\frac{5\alpha}{3};$$

donc

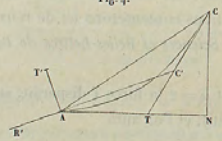
$$T=\frac{2K^2\pi^2}{3l^2}\left[5\alpha-\frac{4\left(\frac{l}{r}-1\right)}{\alpha}\right].$$

Ainsi, tant que l'angle α sera égal à $2\sqrt{\frac{\frac{l}{r}-1}{5}}$, la force perpendiculaire T (*fig.* 3, p. 86) sera nulle; mais lorsqu'on augmentera ou diminuera cet angle α, c'est-à-dire l'angle ACT, le ressort exercera perpendiculairement à la corde AC une force T qu'on pourra déterminer par la formule précédente, pourvu que α soit fort petit.

§ VII.

Prenons maintenant dans la tangente CT un point quelconque C′ (*fig.* 4) et, ayant tiré la ligne C′AR′, réduisons les forces P et Q, qui

Fig. 4.



agissent au point A (§ II), à deux autres R′ et T′, dont l'une R′ tire suivant la direction AR′ et l'autre T′ suivant la direction AT′ perpendiculaire à AR′; il est facile de trouver par une méthode semblable à celle du § IV que, si l'on nomme α' l'angle AC′T, et qu'on fasse

$$R'=p'\cos q',\quad T'=p'\sin q',$$

on aura

$$P=p'\cos(q'+\alpha'-m),$$
$$Q=p'\sin(q'+\alpha'-m).$$

Soient, de plus, la ligne $AC'=r'$ et la ligne donnée $CC'=h$, on aura d'abord

$$AC=r=\sqrt{h^2+r'^2+2hr'\cos\alpha'}$$

et

$$\sin\alpha:\sin\alpha'=r':r,\quad \text{d'où}\quad \sin\alpha=\frac{r'\sin\alpha'}{r};$$

ainsi, ayant r et α en r' et α', on aura aussi a et b en r' et α', en substituant les valeurs de r et α dans les formules du § IV,

$$a=r\cos(m-\alpha),\quad b=r\sin(m-\alpha).$$

Or, comme les angles α et m sont supposés très-petits de l'ordre de la force Q, il est clair que les trois angles α', q' et m seront tous très-petits du même ordre; ainsi l'on aura à très-peu près

$$P=p'\left[1-\frac{(q'+\alpha'-m)^2}{2}\right],\quad Q=p'(q'+\alpha'-m),$$

$$r=h+r'-\frac{hr'\alpha'^2}{2(h+r')},\qquad \alpha=\frac{r'\alpha'}{r}=\frac{r'\alpha'}{h+r'},$$

et de là

$$a=h+r'-\frac{hr'\alpha'^2}{2(h+r')}-\frac{(h+r')}{2}\left(m-\frac{r'\alpha'}{h+r'}\right)^2,$$

$$b=(h+r')\left(m-\frac{r'\alpha'}{h+r'}\right).$$

De sorte qu'en faisant ces substitutions dans les équations du § III, et supposant, comme plus haut,

$$\omega'=\frac{l\sqrt{-p'}}{K\sqrt{2}},$$

on aura

$$1+\frac{m}{q'+\alpha'-m}=\cos\omega',$$

$$\frac{(h+r')m-r'\alpha'}{l}=(q'+\alpha'-m)\left(\frac{\sin\omega'}{\omega'}-1\right),$$

$$\frac{h+r'}{l}\left[1-\frac{hr'\alpha'^2+[m(h+r')-r'\alpha']^2}{2(h+r')^3}\right]$$
$$=1+\frac{(q'+\alpha'-m)^2}{2}\left(\frac{\sin 2\omega'}{4\omega'}-\frac{2\sin\omega'}{\omega'}+\frac{3}{2}\right).$$

Supposons maintenant $h+r'=l$, et les équations précédentes deviendront celles-ci

$$1+\frac{m}{q'+\alpha'-m}=\cos\omega',$$

$$\frac{lm-r'\alpha'}{l}=(q'+\alpha'-m)\left(\frac{\sin\omega'}{\omega'}-1\right),$$

$$-\frac{hr'\alpha'^2+(ml-r'\alpha')^2}{l^2}=(q'+\alpha'-m)^2\left(\frac{\sin 2\omega'}{4\omega'}-\frac{2\sin\omega'}{\omega'}+\frac{3}{2}\right).$$

Les deux premières donnent d'abord

$$\frac{m}{\alpha'}=\frac{r'}{l}\frac{\omega'(\cos\omega'-1)}{\omega'\cos\omega'-\sin\omega'},$$

$$\frac{q'}{\alpha'}=\frac{\left(\frac{r'}{l}-1\right)\omega'\cos\omega'+\sin\omega'}{\omega'\cos\omega'-\sin\omega'},$$

et ces valeurs étant substituées dans la troisième, on aura, à cause de $h=l-r'$,

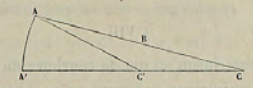
$$\frac{r'}{l}=\frac{(\omega'\cos\omega'-\sin\omega')^2+\frac{\omega'\sin 2\omega'}{4}-2\omega'\sin\omega'+\frac{3\omega'^2}{2}}{(\omega'\cos\omega'-\sin\omega')^2-(\sin\omega'-\omega')^2}.$$

Ainsi, dans ce cas, l'angle ω' sera donné par la seule quantité $\frac{r'}{l}$, et par conséquent la quantité $\frac{q'}{\alpha'}$ deviendra aussi une fonction de $\frac{r'}{l}$; et comme $p'=-\frac{2K^2\omega'^2}{l^2}$, il s'ensuit que la force T', qui est à très-peu près

égale à $p'q'$, sera toujours exprimée par une fonction donnée de $\frac{r'}{l}$ multipliée par $\frac{\alpha'}{l^2}$.

Donc, si l'on a une lame élastique ABC, fixée en C (*fig.* 5), et dont la position naturelle et libre soit la droite CA', et que l'extrémité A' de cette

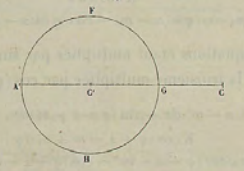
Fig. 5.



lame soit forcée de décrire autour du point C', pris dans la droite CA', l'arc très-petit A'A, en sorte qu'elle vienne dans la situation ABC, on fera $CA'=l$, $A'C=r'$, $A'C'A=\alpha$, et l'on trouvera par les formules précédentes les deux forces p' et $p'q'$ que la lame, dans l'état forcé ABC, exercera à l'extrémité A, la première de ces forces agissant suivant la direction du rayon AC', et la seconde suivant celle de la tangente en A. Et comme on a ici l et r' constants pendant que α varie, il s'ensuit que ω sera constant aussi, et qu'ainsi la force tangentielle T sera toujours proportionnelle à l'arc AA'; d'où il s'ensuit que si un corps était attaché à l'extrémité A, ce corps ferait autour du point A' des oscillations isochrones, dont on pourra déterminer la durée par les équations ci-dessus.

On pourrait se servir utilement de cette propriété des lames élastiques dans les balanciers des montres si l'on voulait se contenter de leur faire

Fig. 6.



faire des oscillations très-petites; car, supposant (*fig.* 6) que A'FGH

soit le balancier dont C′ soit le centre, il n'y aura qu'à fixer une lame élastique d'une longueur quelconque A′C, d'un côté à un point fixe C et de l'autre au point A′ de la circonférence du balancier, et l'on sera assuré que ses vibrations seront isochrones, au moins tant qu'elles seront très-petites, ce que personne, que je sache, n'avait encore démontré en toute rigueur. (*Voyez* le XXXVI^e^ Mémoire des *Opuscules* de M. d'Alembert.)

§ VIII.

Nous avons supposé jusqu'ici que la courbure du ressort devait être très-petite; voyons maintenant comment on peut résoudre le Problème, en général, quelle que puisse être la figure de la lame élastique. Or, comme les équations trouvées dans le § II sont absolument inintégrables, il est impossible de déterminer les forces P et Q en l, a et b, ou bien les forces R et T en l, r et α (§ IV) par des équations finies; mais peut-être pourrait-on les déterminer par des équations différentielles qui donneraient les variations de T et de R répondantes à celles de r et α; c'est ce qu'il est bon d'examiner.

Reprenons donc les trois équations du § II, et, mettant d'abord à la place de P et Q les valeurs trouvées dans le § IV, elles se changeront en celles-ci

$$ds = \frac{\mathrm{K}\,d\varphi}{\sqrt{p}\sqrt{\cos(q+\alpha-m)-\cos(q+\alpha-m+\varphi)}},$$

$$dy = \frac{\mathrm{K}\sin\varphi\,d\varphi}{\sqrt{p}\sqrt{\cos(q+\alpha-m)-\cos(q+\alpha-m+\varphi)}},$$

$$dx = \frac{\mathrm{K}\cos\varphi\,d\varphi}{\sqrt{p}\sqrt{\cos(q+\alpha-m)-\cos(q+\alpha-m+\varphi)}}.$$

La seconde de ces équations étant multipliée par $\sin(q+\alpha-m)$ et ensuite retranchée de la troisième multipliée par $\cos(q+\alpha-m)$, on aura

$$\cos(q+\alpha-m)\,dx-\sin(q+\alpha-m)\,dy = \frac{\mathrm{K}\cos(q+\alpha-m+\varphi)\,d\varphi}{\sqrt{p}\sqrt{\cos(q+\alpha-m)-\cos(q+\alpha-m+\varphi)}}.$$

De même, en multipliant la seconde par $\cos(q+\alpha-m)$ et l'ajoutant à

la troisième multipliée par $\sin(q+\alpha-m)$, on aura

$$\cos(q+\alpha-m)\,dy+\sin(q+\alpha-m)\,dx = \frac{\mathrm{K}\sin(q+\alpha-m+\varphi)\,d\varphi}{\sqrt{p}\sqrt{\cos(q+\alpha-m)-\cos(q+\alpha-m+\varphi)}},$$

équation qui est absolument intégrable et dont l'intégrale, prise en sorte que x et y s'évanouissent lorsque $\varphi=0$, est celle-ci

$$y\cos(q+\alpha-m)+x\sin(q+\alpha-m) = 2\frac{\mathrm{K}\sqrt{\cos(q+\alpha-m)-\cos(q+\alpha-m+\varphi)}}{\sqrt{p}} \quad (*).$$

Ainsi il faudra combiner cette équation avec ces deux-ci

$$s = \frac{\mathrm{K}}{\sqrt{p}}\int\frac{d\varphi}{\sqrt{\cos(q+\alpha-m)-\cos(q+\alpha-m+\varphi)}},$$

$$x\cos(q+\alpha-m)-y\sin(q+\alpha-m) = \frac{\mathrm{K}}{\sqrt{p}}\int\frac{\cos(q+\alpha-m+\varphi)\,d\varphi}{\sqrt{\cos(q+\alpha-m)-\cos(q+\alpha-m+\varphi)}}.$$

Soit, pour abréger, $q+\alpha-m=n$, et supposons que les intégrales

$$\int\frac{d\varphi}{\sqrt{\cos n-\cos(n+\varphi)}} \quad \text{et} \quad \int\frac{\cos(n+\varphi)\,d\varphi}{\sqrt{\cos n-\cos(n+\varphi)}},$$

prises en sorte qu'elles soient nulles lorsque $\varphi=0$, deviennent A et B lorsque $\varphi=m$, et l'on aura, en faisant $x=a$, $y=b$, $s=l$ et $\varphi=m$, ces trois équations

$$\frac{\sqrt{p}}{2\mathrm{K}}\left[b\cos(q+\alpha-m)+a\sin(q+\alpha-m)\right]=\sqrt{\cos(q+\alpha-m)-\cos(q+\alpha)},$$

$$\frac{l\sqrt{p}}{\mathrm{K}}=\mathrm{A},$$

$$\frac{\sqrt{p}}{\mathrm{K}}\left[a\cos(q+\alpha-m)-b\sin(q+\alpha-m)\right]=\mathrm{B},$$

(*) Dans le texte primitif, le facteur α se trouve placé au dénominateur de cette formule; l'inadvertance commise ici par l'illustre Auteur a pour effet d'altérer les résultats qui suivent. Nous avons cru devoir faire les rectifications nécessaires pour l'exactitude des formules.
(*Note de l'Éditeur.*)

ou bien, en substituant pour a et b les valeurs du § IV,

$$\frac{l\sqrt{p}}{K} = A,$$

$$\frac{r\sqrt{p}}{K}\cos q = B,$$

$$\frac{r\sqrt{p}}{2K}\sin q = \sqrt{\cos(q+\alpha-m)-\cos(q+\alpha)}.$$

Maintenant, puisque l'on a

$$A = \int \frac{d\varphi}{\sqrt{\cos n - \cos(n+\varphi)}},$$

$$B = \int \frac{\cos(n+\varphi)\,d\varphi}{\sqrt{\cos n - \cos(n+\varphi)}},$$

si l'on fait varier dans ces expressions tant φ que n, on aura

$$dA = \frac{d\varphi}{\sqrt{\cos n - \cos(n+\varphi)}} + \frac{\sin n\,dn}{2}\int \frac{d\varphi}{[\cos n - \cos(n+\varphi)]^{\frac{3}{2}}} - \frac{dn}{2}\int \frac{\sin(n+\varphi)\,d\varphi}{[\cos n - \cos(n+\varphi)]^{\frac{3}{2}}},$$

$$dB = \frac{\cos(n+\varphi)\,d\varphi}{\sqrt{\cos n - \cos(n+\varphi)}} + \frac{\sin n\,dn}{2}\int \frac{\cos(n+\varphi)\,d\varphi}{[\cos n - \cos(n+\varphi)]^{\frac{3}{2}}} - dn\int \frac{\sin(n+\varphi)\,d\varphi}{\sqrt{\cos n - \cos(n+\varphi)}} - \frac{dn}{2}\int \frac{\sin(n+\varphi)\cos(n+\varphi)\,d\varphi}{[\cos n - \cos(n+\varphi)]^{\frac{3}{2}}}.$$

Or

$$\frac{1}{2}\int \frac{\sin(n+\varphi)\,d\varphi}{[\cos n - \cos(n+\varphi)]^{\frac{3}{2}}} = \frac{-1}{\sqrt{\cos n - \cos(n+\varphi)}},$$

$$\int \frac{\sin(n+\varphi)\,d\varphi}{\sqrt{\cos n - \cos(n+\varphi)}} + \frac{1}{2}\int \frac{\sin(n+\varphi)\cos(n+\varphi)\,d\varphi}{[\cos n - \cos(n+\varphi)]^{\frac{3}{2}}} = -\frac{\cos(n+\varphi)}{\sqrt{\cos n - \cos(n+\varphi)}}.$$

Donc on aura

$$dA = \frac{dn+d\varphi}{\sqrt{\cos n - \cos(n+\varphi)}} + \frac{\sin n\,dn}{2}\int \frac{d\varphi}{[\cos n - \cos(n+\varphi)]^{\frac{3}{2}}},$$

$$dB = \frac{\cos(n+\varphi)(dn+d\varphi)}{\sqrt{\cos n - \cos(n+\varphi)}} + \frac{\sin n\,dn}{2}\int \frac{\cos(n+\varphi)\,d\varphi}{[\cos n - \cos(n+\varphi)]^{\frac{3}{2}}}.$$

Supposons, pour plus de simplicité,

$$F = \int \frac{d\varphi}{[\cos n - \cos(n+\varphi)]^{\frac{3}{2}}}, \quad G = \int \frac{\cos(n+\varphi)\,d\varphi}{[\cos n - \cos(n+\varphi)]^{\frac{3}{2}}},$$

et comme on ne peut pas trouver les valeurs de F et G par l'intégration, il faut tâcher de les déterminer par le moyen des quantités A, B.

Pour cela, je remarque que l'on a :

1° $$\frac{d\varphi}{\sqrt{\cos n - \cos(n+\varphi)}} = \frac{\cos n\,d\varphi}{[\cos n - \cos(n+\varphi)]^{\frac{3}{2}}} - \frac{\cos(n+\varphi)\,d\varphi}{[\cos n - \cos(n+\varphi)]^{\frac{3}{2}}};$$

d'où, en intégrant, on aura

$$A = F\cos n - G.$$

2° $$\frac{\cos(n+\varphi)\,d\varphi}{\sqrt{\cos n - \cos(n+\varphi)}} = \frac{\cos n\cos(n+\varphi)\,d\varphi}{[\cos n - \cos(n+\varphi)]^{\frac{3}{2}}} - \frac{\cos^2(n+\varphi)\,d\varphi}{[\cos n - \cos(n+\varphi)]^{\frac{3}{2}}},$$

et

$$d\frac{\sin(n+\varphi)}{\sqrt{\cos n - \cos(n+\varphi)}} = \frac{\cos(n+\varphi)\,d\varphi}{\sqrt{\cos n - \cos(n+\varphi)}} - \frac{\sin^2(n+\varphi)\,d\varphi}{2[\cos n - \cos(n+\varphi)]^{\frac{3}{2}}};$$

par conséquent

$$2d\frac{\sin(n+\varphi)}{\sqrt{\cos n - \cos(n+\varphi)}} = \frac{\cos n\cos(n+\varphi)\,d\varphi}{[\cos n - \cos(n+\varphi)]^{\frac{3}{2}}} + \frac{\cos(n+\varphi)\,d\varphi}{\sqrt{\cos n - \cos(n+\varphi)}} - \frac{d\varphi}{[\cos n - \cos(n+\varphi)]^{\frac{3}{2}}}.$$

Donc, en intégrant, on aura

$$\frac{2\sin(n+\varphi)}{\sqrt{\cos n - \cos(n+\varphi)}} = G\cos n + B - F.$$

Ainsi, combinant cette équation avec la précédente

$$A = F\cos n - G,$$

on tirera

$$F = \frac{B - A\cos n - \dfrac{2\sin(n+\varphi)}{\sqrt{\cos n - \cos(n+\varphi)}}}{\sin^2 n},$$

$$G = \frac{B\cos n - A - \dfrac{2\cos n\sin(n+\varphi)}{\sqrt{\cos n - \cos(n+\varphi)}}}{\sin^2 n}.$$

Donc, substituant ces valeurs dans les expressions de dA et de dB trouvées ci-dessus, on aura

$$dA = \frac{dn + d\varphi}{\sqrt{\cos n - \cos(n+\varphi)}} - \frac{\sin(n+\varphi)\,dn}{\sin n\sqrt{\cos n - \cos(n+\varphi)}} + \frac{(B - A\cos n)\,dn}{2\sin n},$$

$$dB = \frac{\cos(n+\varphi)\,(dn + d\varphi)}{\sqrt{\cos n - \cos(n+\varphi)}} - \frac{\cos n\sin(n+\varphi)\,dn}{\sin n\sqrt{\cos n - \cos(n+\varphi)}} + \frac{(B\cos n - A)\,dn}{2\sin n}.$$

Donc, remettant à la place de n sa valeur $q + \alpha - m$, et faisant $\varphi = m$, on aura

$$dA = \frac{dq + d\alpha}{\sqrt{\cos(q+\alpha-m) - \cos(q+\alpha)}} - \frac{\sin(q+\alpha)\,(dq + d\alpha - dm)}{\sin(q+\alpha-m)\sqrt{\cos(q+\alpha-m) - \cos(q+\alpha)}} + \frac{B - A\cos(q+\alpha-m)}{2\sin(q+\alpha-m)}\,(dq + d\alpha - dm),$$

$$dB = \frac{\cos(q+\alpha)\,(dq + d\alpha)}{\sqrt{\cos(q+\alpha-m) - \cos(q+\alpha)}} - \frac{\cos(q+\alpha-m)\sin(q+\alpha)\,(dq + d\alpha - dm)}{\sin(q+\alpha-m)\sqrt{\cos(q+\alpha-m) - \cos(q+\alpha)}} + \frac{B\cos(q+\alpha-m) - A}{2\sin(q+\alpha-m)}\,(dq + d\alpha - dm).$$

Donc, faisant pour plus de simplicité $\alpha - m = \beta$, on aura enfin ces trois

équations

$$\frac{r\sqrt{p}}{2K}\sin q = \sqrt{\cos(q+\beta) - \cos(q+\alpha)},$$

$$d\left(\frac{l\sqrt{p}}{K}\right) = \frac{dq + d\alpha}{\sqrt{\cos(q+\beta) - \cos(q+\alpha)}} - \frac{\sin(q+\alpha)\,(dq + d\beta)}{\sin(q+\beta)\sqrt{\cos(q+\beta) - \cos(q+\alpha)}} + \frac{r\cos q - l\cos(q+\beta)}{2K\sin(q+\beta)}\sqrt{p}\,(dq + d\beta),$$

$$d\left(\frac{r\sqrt{p}}{K}\cos q\right) = \frac{\cos(q+\alpha)\,(dq + d\alpha)}{\sqrt{\cos(q+\beta) - \cos(q+\alpha)}} - \frac{\cos(q+\beta)\sin(q+\alpha)\,(dq + d\beta)}{\sin(q+\beta)\sqrt{\cos(q+\beta) - \cos(q+\alpha)}} + \frac{r\cos q\cos(q+\beta) - l}{2K\sin(q+\beta)}\sqrt{p}\,(dq + d\beta).$$

§ IX.

Telles sont les équations par lesquelles on doit déterminer les forces $R = p\cos q$ et $T = p\sin q$, que la lame élastique ABC, fixe en C (*fig.* 3, p. 86), exerce à l'extrémité A, en supposant donnés la longueur l de la lame ABC, la corde $AC = r$ et l'angle $TCA = \alpha$. Pour faciliter le calcul, on prendra la valeur de $\cos(q+\beta)$ de la première équation et on la substituera dans les deux autres, lesquelles deviendront par là

$$d\left(\frac{l\sqrt{p}}{K}\right) = \frac{2K\,(dq + d\alpha)}{r\sqrt{p}\sin q} + \left\{\frac{2K\sin(q+\alpha)}{r\sqrt{p}\sin q} - \frac{r\sqrt{p}\cos q}{2K} + \frac{l\sqrt{p}}{2K}\left[\frac{r^2 p\sin^2 q}{4K^2} + \cos(q+\alpha)\right]\right\} \times \frac{8K^2 r\sqrt{p}\sin q\,d(r\sqrt{p}\sin q) + 16K^4 d\cos(q+\alpha)}{16K^4 - [r^2 p\sin^2 q + 4K^2\cos(q+\alpha)]^2},$$

$$d\left(\frac{r\sqrt{p}}{K}\cos q\right)=\frac{2K\cos(q+\alpha)(dq+d\alpha)}{r\sqrt{p}\sin q}$$

$$+\left\{\frac{l\sqrt{p}}{2K}+\left[\frac{2K\sin(q+\alpha)}{r\sqrt{p}\sin q}-\frac{r\sqrt{p}\cos q}{2K}\right]\left[\frac{r^2p\sin^2 q}{4K^2}+\cos(q+\alpha)\right]\right\}$$

$$\times\frac{8K^2r\sqrt{p}\sin q\,d(r\sqrt{p}\sin q)+16K^4d\cos(q+\alpha)}{16K^4-[r^2p\sin^2 q+4K^2\cos(q+\alpha)]^2}.$$

Ces équations sont, comme on voit, trop compliquées pour qu'on puisse en tirer quelque lumière sur la loi des forces tendantes R et T; cependant elles pourraient servir à déterminer la vraie figure de la fusée au moins par une équation différentielle.

Pour cela on supposera que C (*fig.* 3, p. 86) soit le centre du barillet ou tambour, où le ressort est renfermé, et à la circonférence duquel l'extrémité mobile A est attachée; de cette manière r sera le rayon du tambour qui est constant, et α sera l'angle que le tambour aura parcouru en tournant autour de son axe pour bander le ressort; de sorte que $r\alpha$ sera égal à la longueur de la corde désentortillée d'autour du tambour et entortillée autour de la fusée; donc, si l'on considère la courbe qui, par sa révolution autour de son axe, produirait le solide dont on doit faire la fusée, et qu'on nomme y l'ordonnée de cette courbe et ds l'élément de l'arc, on aura $\int y\,ds$ pour la portion de surface de la fusée qui sera couverte par la corde et qui devra par conséquent être égale à la longueur αr de la corde entortillée à la fusée, cette longueur étant divisée par le diamètre même de la corde; ainsi, nommant e le diamètre ou l'épaisseur de la corde, on aura d'abord

$$\alpha=\frac{\int y\,ds}{er}.$$

Maintenant il est clair que la corde ne sera tendue par le ressort qu'avec une force égale à $T=p\sin q$, l'autre force R ne faisant que presser la surface du tambour au point où l'extrémité du ressort est attachée; donc le moment de la force du ressort pour faire tourner la fusée sera

$Ty=yp\sin q$, lequel devant être constant, on aura l'équation

$$yp\sin q=g;$$

ainsi, il n'y aura qu'à substituer dans les deux équations précédentes $\frac{g}{y\sin q}$ à la place de p et $\frac{\int y\,ds}{er}$ à la place de α, et chassant ensuite la variable q, on aura une équation entre y et ds, qui déterminera la nature de la courbe de la fusée.

§ X.

Dans les recherches précédentes nous avons supposé que le ressort étant fixe par une de ses extrémités, l'autre était retenue dans une position donnée par deux forces appliquées à cette extrémité, et nous avons cherché la valeur de ces forces; mais si l'on voulait que la tangente à cette même extrémité fût aussi donnée, alors il faudrait qu'une troisième force agit sur la lame, et qu'elle fût appliquée à quelque distance de l'extrémité dont il s'agit pour qu'elle pût avoir quelque moment par rapport à cette extrémité.

Ainsi l'on imaginera qu'une verge inflexible AP (*fig.* 2, p. 82) soit jointe à la lame élastique en A, et que cette verge soit tirée au point P par une nouvelle force M, dont la direction soit perpendiculaire à AP, c'est-à-dire parallèle à la force Q qui agit suivant AQ (§ II); et il résultera de ces deux forces M et Q une force unique M + Q agissant perpendiculairement à la verge AP, et à une distance du point A égale à $\frac{M}{M+Q}$AP. Or la force P donne, comme nous l'avons vu dans le paragraphe cité, le moment Py par rapport au point B, et la force M + Q donnera par rapport au même point le moment $(M+Q)\left(\frac{M}{M+Q}AP+x\right)$, c'est-à-dire, en faisant AP = c et M + Q = N, le moment $Mc+Nx$; d'où il s'ensuit qu'on aura pour l'équation de la lame élastique

$$Mc+Nx+Py=\frac{2K^2}{\rho}.$$

Donc, faisant les mêmes substitutions que dans le § II, on aura

$$Mc + N\int \cos\varphi\, ds + P\int \sin\varphi\, ds = \frac{2K^2 d\varphi}{ds},$$

de sorte que lorsque $\varphi = 0$, on aura ici

$$\frac{2K^2 d\varphi}{ds} = Mc.$$

Cette équation étant différentiée, et ensuite multipliée par $\frac{d\varphi}{ds}$ et intégrée de nouveau, donnera

$$C - P\cos\varphi + N\sin\varphi = \frac{K^2 d\varphi^2}{ds^2},$$

où la constante C doit être déterminée par la condition qu'en faisant $\varphi = 0$ on ait $\frac{d\varphi}{ds} = \frac{Mc}{2K^2}$; ainsi l'on aura

$$C = P + \frac{M^2c^2}{4K^2};$$

donc

$$ds = \frac{K\,d\varphi}{\sqrt{\frac{M^2c^2}{4K^2} + P(1-\cos\varphi) + N\sin\varphi}},$$

$$dy = \frac{K\sin\varphi\, d\varphi}{\sqrt{\frac{M^2c^2}{4K^2} + P(1-\cos\varphi) + N\sin\varphi}},$$

$$dx = \frac{K\cos\varphi\, d\varphi}{\sqrt{\frac{M^2c^2}{4K^2} + P(1-\cos\varphi) + N\sin\varphi}},$$

équations qui ne diffèrent de celles du § II que par le terme constant $\frac{Mc^2}{4K^2}$.

§ XI.

Si les quantités P et N étaient nulles, c'est-à-dire si la force tangentielle s'évanouissait et que les deux forces perpendiculaires fussent égales entre elles et de direction contraire, alors la lame élastique prendrait la

figure d'un cercle, car on aurait, dans ce cas,

$$ds = \frac{2K^2 d\varphi}{Mc}, \quad dy = \frac{2K^2\sin\varphi\, d\varphi}{Mc}, \quad dx = \frac{2K^2\cos\varphi\, d\varphi}{Mc};$$

d'où l'on tirerait par l'intégration

$$s = \frac{2K^2}{Mc}\varphi, \quad y = \frac{2K^2}{Mc}(1-\cos\varphi), \quad x = \frac{2K^2}{Mc}\sin\varphi,$$

ce qui montre que la courbe est un cercle dont le rayon est $\frac{2K^2}{Mc}$.

Donc, si les quantités P et N, au lieu d'être nulles, étaient seulement très-petites vis-à-vis de la quantité $\frac{2K^2}{Mc}$, la courbe serait à très-peu près circulaire, et elle ne serait autre chose qu'une espèce de spirale fort peu différente d'un cercle.

Comme ce cas mérite d'être examiné en détail, nous allons en faire l'objet du paragraphe suivant.

§ XII.

Supposons donc P et N très-petites vis-à-vis de $\frac{M^2c^2}{4K^2}$, et la quantité radicale

$$\frac{K}{\sqrt{\frac{M^2c^2}{4K^2} + P(1-\cos\varphi) + N\sin\varphi}}$$

deviendra à très-peu près

$$\frac{2K^2}{Mc}\left[1 - \frac{2K^2P}{M^2c^2}(1-\cos\varphi) - \frac{2K^2N}{M^2c^2}\sin\varphi\right].$$

Soit, pour abréger,

$$\frac{2K^2}{Mc} = R, \quad \frac{2K^2P}{M^2c^2} = T, \quad \frac{2K^2N}{M^2c^2} = V,$$

et les équations du § X deviendront celles-ci

$$ds = R[1 - T(1-\cos\varphi) - V\sin\varphi]\,d\varphi,$$
$$dy = R[1 - T(1-\cos\varphi) - V\sin\varphi]\sin\varphi\, d\varphi,$$
$$dx = R[1 - T(1-\cos\varphi) - V\sin\varphi]\cos\varphi\, d\varphi,$$

lesquelles étant intégrées en sorte que x, y et s soient nuls lorsque $\varphi = 0$, on aura

$$s = R[\varphi - T(\varphi - \sin\varphi) - V(1 - \cos\varphi)],$$

$$y = R\left[1 - \cos\varphi - T\left(\frac{3}{4} - \cos\varphi + \frac{1}{4}\cos 2\varphi\right) - V\left(\frac{\varphi}{2} - \frac{1}{4}\sin 2\varphi\right)\right],$$

$$x = R\left[\sin\varphi + T\left(\frac{\varphi}{2} - \sin\varphi + \frac{1}{4}\sin 2\varphi\right) - V\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{4}\cos 2\varphi\right)\right].$$

De sorte qu'en faisant $s = l$, $y = b$, $x = a$ et $\varphi = m$ (§ II), on aura ces trois équations

$$l = R[(m - T(m - \sin m) - V(1 - \cos m)],$$

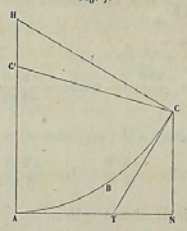
$$b = R\left[1 - \cos m - T\left(\frac{3}{4} - \cos m + \frac{1}{4}\cos 2m\right) - V\left(\frac{m}{2} - \frac{1}{4}\sin 2m\right)\right],$$

$$a = R\left[\sin m + T\left(\frac{m}{2} - \sin m + \frac{1}{4}\sin 2m\right) - V\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{4}\cos 2m\right)\right].$$

§ XIII.

Maintenant, si l'on tire par les extrémités A et C (*fig.* 7) de la lame élastique les perpendiculaires AH et CH aux tangentes AN, CT, il est clair

Fig. 7.



que l'angle AHC sera égal à m; de sorte que si l'on fait $AH = p$, $CH = q$, on aura

$$AN = a = q\sin m \quad \text{et} \quad NC = b = p - q\cos m,$$

et les équations du paragraphe précédent donneront celles-ci

$$R = \frac{l}{m - T(m - \sin m) - V(1 - \cos m)},$$

$$\frac{p - q\cos m}{l} = \frac{1 - \cos m - T\left(\frac{3}{4} - \cos m + \frac{1}{4}\cos 2m\right) - V\left(\frac{m}{2} - \frac{1}{4}\sin 2m\right)}{m - T(m - \sin m) - V(1 - \cos m)},$$

$$\frac{q\sin m}{l} = \frac{\sin m + T\left(\frac{m}{2} - \sin m + \frac{1}{4}\sin 2m\right) - V\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{4}\cos 2m\right)}{m - T(m - \sin m) - V(1 - \cos m)}.$$

Si l'on fait $T = 0$ et $V = 0$, on a

$$\frac{p - q\cos m}{l} = \frac{1 - \cos m}{m}, \quad \frac{q\sin m}{l} = \frac{\sin m}{m},$$

d'où l'on tire

$$p = q = \frac{l}{m}.$$

Donc, tant que V et T seront très-petits, on aura

$$p = \frac{l(1 + t)}{m}, \quad q = \frac{l(1 + u)}{m},$$

t et u étant des quantités très-petites de l'ordre V et T. Donc, si l'on substitue ces valeurs dans la seconde et la troisième des équations précédentes, et qu'après avoir multiplié en croix, en négligeant les quantités très-petites du second ordre, on fasse, pour abréger,

$$\lambda = \sin m\left(\frac{m\sin m}{2} - 1 + \cos m\right),$$

$$\mu = (1 - \cos m)^2 - \frac{m}{2}(m - \sin m\cos m),$$

$$\nu = \frac{m}{2}(m + \sin m\cos m) - \sin^2 m,$$

$$\rho = (1 - \cos m)\sin m - \frac{m}{2}(m + 1 - 2\sin^2 m),$$

on aura

$$(l - u\cos m)\, m = \lambda T + \mu V,$$

$$um\sin m = \nu T + \rho V,$$

d'où, en faisant encore

$$\sigma = \frac{\sin^3 m\,(1-\cos m)}{2} - \frac{\sin m}{4}(m+1-2\sin^2 m)\left(\frac{m\sin m}{2} - 1 + \cos m\right)$$
$$-(1-\cos m)^2(\sin m\cos m + m)$$
$$+\frac{m}{4}(m^2 - \sin^2 m\cos^2 m) - \frac{\sin^2 m}{2}(m - \sin m\cos m),$$

on aura

$$T = \frac{\rho(t-u\cos m) - \mu u\sin m}{\sigma},$$

$$V = \frac{\lambda u\sin m - \nu(t-u\cos m)}{\sigma},$$

et de là on trouvera aussi R par la première équation.

Ainsi, connaissant R, T et V, on aura

$$Mc = \frac{2K^2}{R}, \quad P = \frac{2K^2 T}{R^2}, \quad N = M + Q = \frac{2K^2 V}{R^2}.$$

§ XIV.

Donc, si l'on suppose que C′ (*fig.* 7, p. 104) soit le centre du tambour ou barillet dont le rayon soit C′A, et que le ressort CA soit fixé par l'extrémité C d'une manière quelconque à l'axe du barillet, et que par l'autre extrémité A il soit fixement appliqué à la circonférence du barillet, en sorte que la courbe du ressort touche la circonférence du barillet au point A; nommant α l'angle parcouru par le barillet en tournant autour de son axe depuis la ligne fixe CC′, c'est-à-dire l'angle AC′C, et faisant le rayon du barillet AC′ égal à r, la ligne CC′ égale à ρ et l'angle C′CH égal à A, on aura

$$m = \alpha - A, \quad q = \frac{\rho\sin\alpha}{\sin(\alpha - A)}, \quad p = r + \frac{\rho\sin A}{\sin(\alpha - A)}.$$

Ainsi, substituant ces valeurs dans les formules du paragraphe précédent, on trouvera la valeur de la force tangentielle P en α, et de là on pourra déduire la figure de la fusée comme dans le § IX en faisant $\alpha = \frac{\int y\,ds}{ar}$ et $y = \frac{g}{T}$.

Il faut cependant observer que, comme nous avons vu dans le paragraphe cité que p et q doivent être à très-peu près égaux à $\frac{l}{m}$, il faudra que l'angle A soit très-petit et que r et ρ soient à très-peu près égaux à $\frac{l}{m}$; d'où l'on voit que pour que ce cas ait lieu il faut que l'extrémité fixe C du ressort soit fort près de la circonférence du barillet et que la tangente en C soit presque perpendiculaire au rayon CC′.

§ XV.

Au reste, la condition que p et q soient presque égaux à $\frac{l}{m}$ ne serait pas nécessaire si l'on supposait que les quantités l et m fussent très-grandes du même ordre; car alors les quantités T et V pourraient être supposées très-petites de l'ordre de $\frac{1}{m}$, et l'on aurait dans cette hypothèse (§ XIII) les équations

$$R = \frac{l}{m}, \quad \frac{p - q\cos m}{l} = \frac{1-\cos m - \frac{Vm}{2}}{m}, \quad \frac{q\sin m}{l} = \frac{\sin m + \frac{Tm}{2}}{m}.$$

d'où l'on tire

$$T = \frac{2\left(\frac{m}{l}q - 1\right)\sin m}{m},$$

$$V = -\frac{2\left(\frac{m}{l}p - 1\right) - \left(\frac{m}{l}q - 1\right)\cos m}{m},$$

de sorte que $P = \frac{2K^2 T}{R^2}$ et $N = \frac{2K^2 V}{R^2}$ seront des quantités fort petites, comme on l'a supposé dans les calculs du § XII.

Ce cas aura donc lieu lorsque le ressort sera fort long et qu'il fera un très-grand nombre de tours en forme de spirale. Ainsi, si l'on suppose qu'un pareil ressort soit appliqué à un balancier dont le centre soit C′ (*fig.* 7, p. 104), et que l'une des extrémités du ressort étant arrêtée en C, l'autre soit fixée perpendiculairement au rayon C′A du balancier,

on nommera ρ et r, comme dans le § XIV, les distances données CC′ et AC′, A l'angle donné C′CH et α l'angle variable AC′C, et l'on aura

$$p = r + \frac{\rho \sin A}{\sin(\alpha - A)}, \quad q = \frac{-\rho \sin\alpha}{\sin(\alpha - A)} \quad \text{et} \quad m = \mu\varpi + \alpha - A,$$

ϖ étant la circonférence du cercle et μ dénotant le nombre des tours que le ressort fait autour de C′ et qui doit être fort grand.

Donc la force tangentielle P, qui tend à faire tourner le balancier, sera à très-peu près, en faisant $\lambda = \frac{\mu\varpi}{l}$,

$$P = \frac{K^2[\lambda^2\rho \sin\alpha - \lambda^2 \sin(\alpha - A)]}{\mu\varpi},$$

d'où l'on voit que cette force sera nulle lorsque

$$\lambda\rho \sin\alpha = \sin(\alpha - A);$$

ainsi, dénotant par ω la valeur de α qui répond à cette équation, en sorte que l'on ait

$$\text{tang}\,\omega = \frac{\sin A}{\cos A - \lambda\rho},$$

et supposant en général $\alpha = \omega + \psi$, on aura

$$P = \frac{K^2\lambda^2[\lambda\rho\cos\omega - \cos(\omega - A)]\sin\psi}{\mu\varpi},$$

et le moment pour faire tourner le balancier sera Pr.

Donc, si l'on nomme H le moment d'inertie du balancier, et qu'on fasse, pour abréger,

$$\frac{K^2\lambda^2 r[\lambda\rho\cos\omega - \cos(\omega - A)]}{\mu\varpi H} = H,$$

on aura, pour le mouvement du balancier, l'équation

$$\frac{d^2\psi}{dt^2} = -H\sin\psi,$$

qui est la même que celle du mouvement d'un pendule simple dont la longueur serait $\frac{g}{H}$, g étant la force de la gravité; de sorte que le balancier fera des oscillations semblables à celles d'un tel pendule, et le point de repos sera où $\psi = 0$, c'est-à-dire où l'angle α sera égal à ω.

Ainsi, plus la longueur du ressort et le nombre de ses tours augmenteront, plus le mouvement du balancier approchera de celui d'un pendule simple circulaire, de sorte que le mouvement du pendule peut être regardé comme la limite, et l'asymptote de celui d'un balancier mû par un ressort spiral, pourvu que le ressort soit d'une épaisseur uniforme et que son état libre soit la ligne droite.

§ XVI.

Si l'on voulait que l'extrémité A (*fig.* 7, p. 104) du ressort fût attachée à l'axe même du balancier, comme on le pratique ordinairement, alors les forces P et Q (§ X) seraient détruites, et la force M serait celle qui agirait sur le balancier pour le faire tourner avec un moment égal à $Mc = \frac{2K^2}{R}$.

Ainsi, dans le cas du paragraphe précédent, ce moment serait $2K^2\frac{m}{l}$; par conséquent il serait presque constant, de sorte qu'il n'en résulterait point de mouvement oscillatoire. Cette manière de faire agir le ressort conviendrait donc beaucoup au ressort moteur qui fait tourner le barillet; car son action étant par ce moyen presque constante, la fusée ne serait plus nécessaire.

Au reste, il faut toujours se souvenir que ces conclusions sont fondées sur l'hypothèse que la lame du ressort soit naturellement droite et que sa longueur soit très-grande; c'est ce qui fait qu'elles n'ont pas lieu dans les ressorts ordinaires qu'on applique aux horloges, mais il n'est pas impossible qu'elles puissent être d'usage dans quelques occasions.

§ XVII.

Si l'on ne voulait pas adopter l'hypothèse que nous avons faite ci-dessus, que les forces P et N soient très-petites, il faudrait revenir aux équations générales du § X et en déduire des équations différentielles entre les forces M, N et P par une méthode analogue à celle du § VIII.

Pour cela on fera

$$P = p\cos q, \quad N = p\sin q, \quad \frac{M^2c^2}{4k^2} + P = pr,$$

et, supposant ensuite

$$(x\sin q + y\cos q)\frac{\sqrt{p}}{k} = X, \quad (x\cos q - y\sin q)\frac{\sqrt{p}}{k} = Y, \quad \frac{s\sqrt{p}}{k} = Z,$$

on trouvera, en ayant soin d'ajouter les constantes nécessaires pour que x, y et z s'évanouissent lorsque $\varphi = 0$, et faisant, pour plus de simplicité, $q + \varphi = u$, on trouvera, dis-je, ces trois équations

$$\frac{X}{2} = \sqrt{r - \cos u} - \sqrt{r - \cos q},$$

$$dY = \frac{\cos u\, du}{\sqrt{r-\cos u}} - \frac{\cos q\, dq}{\sqrt{r-\cos q}} - \frac{dr}{1-r^2}\left(\frac{rY-Z}{2} - \frac{r\sin u}{\sqrt{r-\cos u}} + \frac{r\sin q}{\sqrt{r-\cos q}}\right),$$

$$dZ = \frac{du}{\sqrt{r-\cos u}} - \frac{dq}{\sqrt{r-\cos q}} - \frac{dr}{1-r^2}\left(\frac{Y-rZ}{2} - \frac{\sin u}{\sqrt{r-\cos u}} + \frac{\sin q}{\sqrt{r-\cos q}}\right),$$

dans lesquelles on pourra faire $x = a$, $y = b$, $s = l$ et $\varphi = m$, comme dans le paragraphe cité.

SUR LE

PROBLÈME DE KÉPLER.

SUR LE

PROBLÈME DE KÉPLER (*).

(*Mémoires de l'Académie royale des Sciences et Belles-Lettres de Berlin*, t. XXV, 1771.)

Ce Problème consiste, comme on sait, à couper l'aire elliptique en raison donnée, et sert principalement à déterminer l'anomalie vraie des planètes par leur anomalie moyenne. Depuis Képler, qui a le premier essayé de le résoudre, plusieurs savants Géomètres s'y sont appliqués et en ont donné différentes solutions qu'on peut ranger dans trois classes. Les unes sont simplement arithmétiques et sont fondées sur la règle de fausse position : ce sont celles dont les Astronomes se servent ordinairement dans le calcul des éléments des planètes; les autres sont géométriques ou mécaniques, et dépendent de l'intersection des courbes : celles-ci sont plutôt de simple curiosité que d'usage dans l'Astronomie; la troisième classe enfin comprend les solutions algébriques, qui donnent l'expression analytique de l'anomalie vraie par l'anomalie moyenne, aussi bien que celle du rayon vecteur de l'orbite, expressions qui sont d'un usage continuel et indispensable dans la théorie des perturbations des corps célestes.

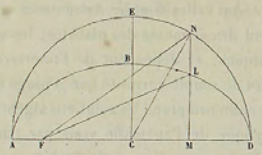
L'équation, par laquelle on doit déterminer la relation qui a lieu entre l'anomalie moyenne et l'anomalie vraie, est transcendante et ne peut par conséquent être résolue que par approximation, de sorte qu'on est obligé d'avoir recours aux suites infinies : or on ne peut déterminer di-

(*) Lu à l'Académie le 1er novembre 1770.

rectement que l'anomalie moyenne par l'anomalie vraie; et pour avoir l'expression de celle-ci par le moyen de celle-là, il faut employer la méthode du retour des suites, qui est non-seulement longue et pénible, mais qui a aussi l'inconvénient de donner des séries irrégulières où l'on ne saurait connaître la loi des termes. J'ai donné, dans un Mémoire imprimé dans le volume de l'année 1768 (*), une méthode particulière pour résoudre, par le moyen des séries, toutes les équations, soit algébriques ou transcendantes; comme cette méthode joint à l'avantage de la facilité et de la simplicité du calcul celui de donner toujours des séries régulières et dont le terme général soit connu, j'ai cru qu'il ne serait pas inutile d'en faire l'application au fameux Problème de Képler, et de fournir par là aux Astronomes des formules plus générales que celles qu'ils ont eues jusqu'à présent pour la solution de ce Problème : c'est là l'objet du présent Mémoire

I.

Soit ABD une demi-ellipse dont le grand axe AD est égal à $2a$, le demi-petit axe CB égal à ma, la demi-excentricité CF égale à $na = a\sqrt{1-m^2}$,



en sorte que $n = \sqrt{1-m^2}$; soit de plus le rayon vecteur FL égal à ar, l'angle de l'anomalie vraie DFL égal à u, le rapport de l'aire entière de l'ellipse à l'aire DFL comme l'angle de quatre droits, que je nomme ϖ, à l'angle t qui sera par conséquent l'angle de l'anomalie moyenne; il s'agit de déterminer tant r que u par t.

Pour cela on décrira sur le grand axe AD le demi-cercle AED, et ayant

(*) *Œuvres de Lagrange*, t. III, p. 5.

mené par le point L la droite NLM perpendiculaire à AD, et tiré par N les droites NF et NC, on considérera que par la nature de l'ellipse l'aire elliptique DFL a à l'aire DFN la même proportion que l'aire entière de l'ellipse a à l'aire entière du cercle, laquelle est $\frac{a^2\varpi}{2}$, de sorte qu'on aura aussi

$$\varpi : t = \frac{a^2\varpi}{2} : \text{DFN},$$

et par conséquent

$$t = \frac{2\,\text{DFN}}{a^2}.$$

Or, nommant x l'angle DCN qu'on appelle, d'après Képler, l'*anomalie de l'excentrique*, on aura

$$\text{CM} = a\cos x, \quad \text{MN} = a\sin x \quad \text{et} \quad \text{ML} = ma\sin x;$$

donc

$$\text{DFN} = \text{DCN} + \text{FCN} = \text{DCN} + \frac{\text{FC}\times\text{MN}}{2} = \frac{a^2x}{2} + \frac{na^2\sin x}{2},$$

donc

$$t = x + n\sin x.$$

Maintenant on aura

$$\text{FL} = ar = \sqrt{\overline{\text{FM}}^2 + \overline{\text{ML}}^2} = a\sqrt{(n+\cos x)^2 + m^2\sin^2 x},$$

et, à cause de $m^2 = 1 - n^2$,

$$ar = a\sqrt{1 + 2n\cos x + n^2\cos^2 x} = a(1 + n\cos x);$$

donc

$$r = 1 + n\cos x.$$

De là on aura

$$\sin u = \frac{\text{ML}}{\text{LF}} = \frac{m\sin x}{1+n\cos x},$$

$$\cos u = \frac{\text{FM}}{\text{LF}} = \frac{n+\cos x}{1+n\cos x};$$

donc

$$\frac{\sin u}{1+\cos u} = \frac{m}{1+n}\,\frac{\sin x}{1+\cos x},$$

ou bien

$$\operatorname{tang}\frac{1}{2}u = \frac{m}{1+n}\operatorname{tang}\frac{1}{2}x.$$

Si l'on voulait avoir l'expression de l'angle u, on différentierait cette équation, ce qui donnerait

$$\frac{du}{\cos^2\frac{1}{2}u} = \frac{m}{1+n}\,\frac{dx}{\cos^2\frac{1}{2}x},$$

ou bien

$$\frac{du}{1+\cos u} = \frac{m}{1+n}\,\frac{dx}{1+\cos x},$$

et, substituant pour $1+\cos u$ sa valeur $(1+n)\,\frac{1+\cos x}{1+n\cos x}$, on aurait

$$du = \frac{m\,dx}{1+n\cos x}.$$

Ainsi l'on aura d'abord x en t, et ensuite r et u en x.

II.

Il faut donc commencer par tirer la valeur de x de l'équation

$$t = x + n\sin x,$$

ce qui ne peut se faire que par approximation; or, de toutes les méthodes connues d'approximation, je crois que la plus simple et la plus générale est celle que j'ai exposée dans mon Mémoire sur la résolution des équations littérales. J'ai prouvé dans ce Mémoire que si l'on a une équation quelconque, telle que

$$\alpha - x + \varphi(x) = 0$$

[$\varphi(x)$ dénotant une fonction quelconque de x], et qu'on veuille avoir la valeur d'une autre fonction quelconque de x, telle que $\psi(x)$, faisant $\frac{d\psi(x)}{dx} = \psi'(x)$, la série

$$\psi(x) + \varphi(x)\,\psi'(x) + \frac{1}{2}\,\frac{d[\varphi(x)]^2\psi'(x)}{dx} + \frac{1}{2.3}\,\frac{d^2[\varphi(x)]^3\psi'(x)}{dx^2} + \ldots$$

exprimera la fonction cherchée, en y mettant après les différentiations α à la place de x. D'où il suit qu'ayant l'équation

$$t = x + \varphi(x),$$

on trouvera

$$\psi(x) = \psi(t) - \varphi(t)\,\psi'(t) + \frac{1}{2}\,\frac{d[\varphi(t)]^2\psi'(t)}{dt} - \frac{1}{2.3}\,\frac{d^2[\varphi(t)]^3\psi'(t)}{dt^2} + \ldots.$$

Ainsi, faisant $\varphi(x) = n\sin x$, notre équation

$$t = x + n\sin x$$

donnera sur-le-champ

$$\psi(x) = \psi(t) - n\sin t\,\psi'(t) + \frac{n^2}{2}\,\frac{d\sin^2 t\,\psi'(t)}{dt} - \frac{n^3}{2.3}\,\frac{d^2\sin^3 t\,\psi'(t)}{dt^2} + \ldots,$$

de sorte qu'il n'y aura plus qu'à exécuter les différentiations indiquées en prenant dt constant.

III.

Supposons premièrement $\psi(x) = x$ pour avoir la valeur de x en t, et l'on aura $\psi(t) = t$, $\psi'(t) = 1$, et par conséquent

$$x = t - n\sin t + \frac{n^2}{2}\,\frac{d\sin^2 t}{dt} - \frac{n^3}{2.3}\,\frac{d^2\sin^3 t}{dt^2} + \ldots.$$

Pour pouvoir trouver facilement les valeurs des différentielles des puissances de $\sin t$, il sera à propos de réduire ces puissances en simples sinus ou cosinus d'angles multiples de t. Or on sait que

$$2\sin^2 t = \frac{2}{2} - \cos 2t,$$

$$4\sin^3 t = 3\sin t - \sin 3t,$$

$$8\sin^4 t = \frac{4.3}{2.2} - 4\cos 2t + \cos 4t,$$

$$16\sin^5 t = \frac{5.4}{2}\sin t - 5\sin 3t + \sin 5t,$$

$$32\sin^6 t = \frac{6.5.4}{2.2.3} - \frac{6.5}{2}\cos 2t + 6\cos 4t - \cos 6t,$$

.....

Donc, substituant ces valeurs dans la formule précédente et faisant les

différentiations indiquées, on aura

$$x = t - n\sin t + \frac{n^2}{2\times 2}\,2\sin 2t$$
$$+ \frac{n^3}{4\times 2.3}\,(3\sin t - 3^2\sin 3t)$$
$$- \frac{n^4}{8\times 2.3.4}\,(4.2^3.\sin 2t - 4^3\sin 4t)$$
$$- \frac{n^5}{16\times 2.3.4.5}\left(\frac{5.4}{2}\sin t - 5.3^4.\sin 3t + 5^4\sin 5t\right)$$
$$+ \frac{n^6}{32\times 2.3.4.5.6}\left(\frac{6.5}{2}\,2^5\sin 2t - 6.4^5.\sin 4t + 6^5\sin 6t\right)$$
$$+ \frac{n^7}{64\times 2.3\ldots 7}\left(\frac{7.6.5}{2.3}\sin t - \frac{7.6}{2}\,3^6\sin 3t + 7.5^6.\sin 5t - 7^6\sin 7t\right)$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Ainsi l'on connaîtra l'anomalie de l'excentrique x par l'anomalie moyenne t, ensuite de quoi on pourra trouver le rayon vecteur r et l'anomalie vraie u par les formules

$$r = 1 + n\cos x \quad \text{et} \quad \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}u = \frac{m}{1+n}\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}x;$$

mais on peut aussi trouver les valeurs de r et de $\operatorname{tang}\frac{1}{2}u$ directement de la manière suivante.

IV.

Il est clair que pour avoir la valeur de

$$r = 1 + n\cos x,$$

il n'y aura qu'à faire dans la formule générale de l'Article II $\psi(x) = n\cos x$, ce qui donnera $\psi(t) = n\cos t$ et $\psi'(t) = -n\sin t$, de sorte qu'on aura sur-le-champ

$$r = 1 + n\cos t + n^2\sin^2 t - \frac{n^3}{2}\frac{d\sin^3 t}{dt} + \frac{n^4}{2.3}\frac{d^2\sin^4 t}{dt^2} - \ldots.$$

Donc, substituant les valeurs de $\sin^2 t$, $\sin^3 t$, ... en sinus et cosinus

d'angles multiples de t, et exécutant les différentiations indiquées, on aura

$$r = 1 + n\cos t - \frac{n^2}{2}(-1 + \cos 2t)$$
$$- \frac{n^3}{4\times 2}(3\cos t - 3\cos 3t)$$
$$+ \frac{n^4}{8\times 2.3}(4.2^3.\cos 2t - 4^2\cos 4t)$$
$$+ \frac{n^5}{16\times 2.3.4}\left(\frac{5.4}{2}\cos t - 5.3^3.\cos 3t + 5^3\cos 5t\right)$$
$$- \frac{n^6}{32\times 2.3.4.5}\left(\frac{6.5}{2}\,2^4\cos 2t - 6.4^4.\cos 4t + 6^4\cos 6t\right)$$
$$- \frac{n^7}{64\times 2.3\ldots 7}\left(\frac{7.6.5}{2.3}\cos t - \frac{7.6}{2}\,3^5\cos 3t + 7.5^5.\cos 5t - 7^5\cos 7t\right)$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

V.

De même, pour avoir la valeur de $\operatorname{tang}\frac{1}{2}u$, on fera

$$\psi(x) = \frac{m}{1+n}\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}x = \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}u;$$

par conséquent aussi

$$\psi(t) = \frac{m}{1+n}\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}t,$$

ce qui donnera

$$\psi'(t) = \frac{m}{1+n}\,\frac{1}{2\cos^2\frac{1}{2}t} = \frac{m}{1+n}\,\frac{1}{1+\cos t} = \frac{m}{1+n}\,\frac{1-\cos t}{\sin^2 t}.$$

Donc, substituant ces valeurs dans la formule de l'Article II, on aura

$$\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}u = \frac{m}{1+n}\left[\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}t - n\,\frac{1-\cos t}{\sin t} + \frac{n^2}{2}\,\frac{d(1-\cos t)}{dt}\right.$$
$$- \frac{n^3}{2.3}\,\frac{d^2(1-\cos t)\sin t}{dt^2} + \frac{n^4}{2.3.4}\,\frac{d^3(1-\cos t)\sin^2 t}{dt^3}$$
$$\left. - \frac{n^5}{2.3.4.5}\,\frac{d^4(1-\cos t)\sin^3 t}{dt^4} + \ldots\right];$$

or

$$\frac{1-\cos t}{\sin t}=\operatorname{tang}\frac{1}{2}t,\qquad \cos t=\frac{d\sin t}{dt},$$

$$\sin t\cos t=\frac{1}{2}\frac{d\sin^2 t}{dt},\qquad \sin^2 t\cos t=\frac{1}{3}\frac{d\sin^3 t}{dt},\ldots,$$

de sorte que l'équation précédente deviendra

$$\operatorname{tang}\frac{1}{2}u=\frac{m}{1+n}\left[(1-n)\operatorname{tang}\frac{1}{2}t\right.$$
$$-\left(\frac{n^2}{2}+\frac{n^3}{2.3}\right)\frac{d^2\sin t}{dt^2}+\left(\frac{n^3}{2\times 2.3}+\frac{n^4}{2.3.4}\right)\frac{d^3\sin^2 t}{dt^3}$$
$$\left.-\left(\frac{n^4}{3\times 2.3.4}+\frac{n^5}{2.3.4.5}\right)\frac{d^4\sin^3 t}{dt^4}+\ldots\right],$$

d'où l'on aura

$$\operatorname{tang}\frac{1}{2}u=\frac{m}{1+n}\left[(1-n)\operatorname{tang}\frac{1}{2}t\right.$$
$$+\frac{n^2}{2}\left(1+\frac{n}{3}\right)\sin t-\frac{n^2}{2\times 2.3}\left(\frac{1}{2}+\frac{n}{4}\right)2^3\sin 2t$$
$$-\frac{n^4}{4\times 2.3.4}\left(\frac{1}{3}+\frac{n}{5}\right)(3\sin t-3^4\sin 3t)$$
$$+\frac{n^5}{8\times 2.3.4.5}\left(\frac{1}{4}+\frac{n}{6}\right)(4.2^3.\sin 2t-4^5\sin 4t)$$
$$+\frac{n^6}{16\times 2.3\ldots 6}\left(\frac{1}{5}+\frac{n}{7}\right)\left(\frac{5.4}{2}\sin t-5.3^6.\sin 3t+5^6\sin 5t\right)$$
$$\left.\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\right].$$

VI.

Si l'on voulait avoir la valeur de l'angle même u, il faudrait faire (Article II)

$$\psi(x)=m\int\frac{dx}{1+n\cos x}=u;$$

donc

$$\psi(t)=m\int\frac{dt}{1+n\cos t}\quad\text{et}\quad\psi'(t)=\frac{m}{1+n\cos t};$$

or

$$\frac{1}{1+n\cos t}=1-n\cos t+n^2\cos^2 t-n^3\cos^3 t+n^4\cos^4 t-\ldots;$$

donc, substituant ces valeurs dans la formule de l'Article II, et ordonnant les termes par rapport à n, on aura

$$u=m\left\{t-n\left(\int\cos t\,dt+\sin t\right)\right.$$
$$+n^2\left(\int\cos^2 t\,dt+\cos t\sin t+\frac{1}{2}\frac{d\sin^2 t}{dt}\right)$$
$$-n^3\left[\int\cos^2 t\,dt+\cos^2 t\sin t+\frac{1}{2}\frac{d(\cos t\sin^2 t)}{dt}+\frac{1}{2.3}\frac{d^2\sin^3 t}{dt^2}\right]$$
$$+n^4\left[\int\cos^4 t\,dt+\cos^3 t\sin t+\frac{1}{2}\frac{d(\cos^2 t\sin^2 t)}{dt}\right.$$
$$\left.\left.+\frac{1}{2.3}\frac{d^2(\cos t\sin^3 t)}{dt^2}+\frac{1}{2.3.4}\frac{d^3\sin^4 t}{dt^3}\right]+\ldots\right\},$$

et il ne s'agira plus que d'exécuter les intégrations et les différentiations indiquées, ce qui sera facile dès qu'on aura réduit les produits des sinus et cosinus de t à des sinus et cosinus d'angles multiples de t.

Mais, pour rendre le calcul plus simple, il est bon de faire en sorte que l'expression de u ne contienne que des puissances de $\sin t$; c'est pourquoi on changera la quantité $\frac{1}{1+n\cos t}$ en celle-ci (Article I)

$$\frac{1-n\cos t}{1-n^2\cos^2 t}=\frac{1-n\cos t}{1-n^2+n^2\sin^2 t}=\frac{1-n\cos t}{m^2+n^2\sin^2 t},$$

laquelle, étant ensuite réduite en série, donnera

$$\frac{1}{1+n\cos t}=\frac{1}{m^2}-\frac{n\cos t}{m^2}-\frac{n^2\sin^2 t}{m^4}+\frac{n^3\sin^2 t\cos t}{m^4}$$
$$+\frac{n^4\sin^4 t}{m^6}-\frac{n^5\sin^4 t\cos t}{m^6}-\frac{n^6\sin^6 t}{m^8}+\ldots,$$

de sorte qu'on trouvera, après quelques réductions fort simples,

$$
\begin{aligned}
u = {} & \frac{t}{m} - \frac{2n}{m}\sin t \\
& - \frac{n^2}{2}\left(\frac{2}{m^3}\int \sin^2 t\,dt - \frac{4}{2m}\frac{d\sin^2 t}{dt}\right) \\
& + \frac{n^3}{3}\left(\frac{4}{m^3}\sin^3 t - \frac{6}{2.3.m}\frac{d^2\sin^3 t}{dt^2}\right) \\
& + \frac{n^4}{4}\left(\frac{4}{m^3}\int \sin^4 t\,dt - \frac{6}{2m^3}\frac{d\sin^4 t}{dt} + \frac{8}{2.3.4.m}\frac{d^3\sin^4 t}{dt^3}\right) \\
& - \frac{n^5}{5}\left(\frac{6}{m^5}\sin^5 t - \frac{8}{2.3.m^3}\frac{d^2\sin^5 t}{dt^2} + \frac{10}{2.3.4.5.m}\frac{d^4\sin^5 t}{dt^4}\right) \\
& - \frac{n^6}{6}\left(\frac{6}{m^5}\int \sin^6 t\,dt - \frac{8}{2m^5}\frac{d\sin^6 t}{dt} + \frac{10}{2.3.4.m^2}\frac{d^3\sin^6 t}{dt^3} - \frac{12}{2.3.4.5.6.m}\frac{d^5\sin^6 t}{dt^5}\right) \\
& + \frac{n^7}{7}\left(\frac{8}{m^7}\sin^7 t - \frac{10}{2.3.m^5}\frac{d^2\sin^7 t}{dt^2} + \frac{12}{2.3.4.5.m^3}\frac{d^4\sin^7 t}{dt^4}\right. \\
& \qquad \left. - \frac{14}{2.3.4.5.6.7.m}\frac{d^6\sin^7 t}{dt^6}\right)
\end{aligned}
$$

.....

Réduisant maintenant les puissances de $\sin t$ en sinus et cosinus de multiples de t par les formules de l'Article III, et exécutant les intégrations et les différentiations indiquées, on aura

$$
\begin{aligned}
u = {} & \frac{t}{m} - \frac{2n}{m}\sin t \\
& - \frac{n^2}{2.2}\left[\frac{2.2}{2m^3}t - \left(\frac{2}{2m^3} + \frac{4.2}{2m}\right)\sin 2t\right] \\
& + \frac{n^3}{4.3}\left[3\left(\frac{4}{m^3} + \frac{6}{2.3.m}\right)\sin t - \left(\frac{4}{m^3} + \frac{6.3^2}{2.3.m}\right)\sin 3t\right] \\
& + \frac{n^4}{8.4}\left[\frac{4.4.3}{2.2.m^3}t - 4\left(\frac{4}{2m^3} + \frac{6.2}{2m^2} + \frac{8.2^3}{2.3.4.m}\right)\sin 2t\right. \\
& \qquad \left. + \left(\frac{4}{4m^3} + \frac{6.4}{2m^2} + \frac{8.4^3}{2.3.4.m}\right)\sin 4t\right]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
& - \frac{n^5}{16.5}\left[\frac{5.4}{2}\left(\frac{6}{m^5} + \frac{8}{2.3.m^3} + \frac{10}{2.3.4.5.m}\right)\sin t\right. \\
& \qquad - 5\left(\frac{6}{m^5} + \frac{8.3^2}{2.3.m^3} + \frac{10.3^4}{2.3.4.5.m}\right)\sin 3t \\
& \qquad \left. + \left(\frac{6}{m^5} + \frac{8.5^2}{2.3.m^3} + \frac{10.5^4}{2.3.4.5.m}\right)\sin 5t\right] \\
& - \frac{n^6}{32.6}\left[\frac{6.6.5.4}{2.2.3.m^3}t - \frac{6.5}{2}\left(\frac{6}{2m^3} + \frac{8.2}{2m^2} + \frac{10.2^3}{2.3.4.m^3} + \frac{12.2^5}{2.3\ldots6.m}\right)\sin 2t\right. \\
& \qquad + 6\left(\frac{6}{4m^3} + \frac{8.4}{2m^3} + \frac{10.4^3}{2.3.4.m^3} + \frac{12.4^5}{2.3\ldots6.m}\right)\sin 4t \\
& \qquad \left. - \left(\frac{6}{6m^3} + \frac{8.6}{2m^3} + \frac{10.6^3}{2.3.4.m^3} + \frac{12.6^5}{2.3\ldots6.m}\right)\sin 6t\right]
\end{aligned}
$$

.....

VII.

Nous avons donné plus haut (Article V) la valeur de $\operatorname{tang}\frac{1}{2}u$; si l'on voulait aussi avoir celle du logarithme de la même tangente, on la trouverait avec la même facilité en faisant

$$\psi(x) = \log\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}u = \log\left(\frac{m}{1+n}\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}x\right),$$

et par conséquent

$$\psi(t) = \log\frac{m}{1+n} + \log\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}t \quad \text{et} \quad \psi'(t) = \frac{1}{\sin t};$$

ce qui étant substitué dans la formule de l'Article II, on aurait

$$
\begin{aligned}
\log\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}u = {} & \log\frac{m}{1+n} + \log\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}t - n + \frac{n^2}{2}\frac{d\sin t}{dt} \\
& - \frac{n^3}{2.3}\frac{d^2\sin^2 t}{dt^2} + \frac{n^4}{2.3.4}\frac{d^3\sin^3 t}{dt^3} - \ldots,
\end{aligned}
$$

c'est-à-dire, en réduisant les puissances de $\sin t$ en sinus et cosinus de

multiples de t, et exécutant les différentiations indiquées,

$$\begin{aligned}\log\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}u = \log\frac{m}{1+n} &+ \log\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}t - n\\ &+ \frac{n^2}{2}\cos t\\ &- \frac{n^3}{2\times 2.3}\,2^2\cos 2t\\ &- \frac{n^4}{4\times 2.3.4}\,(3\cos t - 3^3\cos 3t)\\ &+ \frac{n^5}{8\times 2.3.4.5}\,(4.2^4.\cos 2t - 4^4\cos 4t)\\ &+ \frac{n^6}{16\times 2.3.4.5.6}\left(\frac{5.4}{2}\cos t - 5.3^5.\cos 3t + 5^5\cos 5t\right)\\ &- \frac{n^7}{32\times 2.3\ldots 7}\left(\frac{6.5}{2}\,2^6\cos 2t - 6.4^6.\cos 4t + 6^6\cos 6t\right)\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\end{aligned}$$

VIII.

Les séries que nous venons de trouver dans les Articles précédents sont ordonnées par rapport aux puissances de l'excentricité n; or, comme leur loi est assez claire, il ne serait pas difficile de les ordonner par rapport aux sinus ou cosinus des angles multiples de t, ainsi qu'on le pratique communément; cependant, pour ne rien laisser à désirer sur ce sujet, je vais donner ici d'autres séries équivalentes à celles-là, et disposées de cette dernière manière.

Pour y parvenir je remarque (comme je l'ai déjà fait dans le Mémoire cité, n° 17) que, si l'on prend la fraction

$$\frac{\psi'(t)}{z\,[1+z\varphi(t)]},$$

qu'on la développe suivant les puissances de z, ce qui donne

$$\frac{\psi'(t)}{z} - \varphi(t)\,\psi'(t) + z\,[\varphi(t)]^2\psi'(t) - z^2\,[\varphi(t)]^3\psi'(t) + \ldots,$$

et qu'ensuite on change $\frac{1}{z}$ en $\int dt$, z en $\frac{1}{2}\frac{d}{dt}$, z^2 en $\frac{1}{2.3}\frac{d^2}{dt^2}$, ..., et ainsi des autres puissances de z, on aura la valeur de la fonction $\psi(x)$ (Article II).

Supposons que les fonctions $\varphi(t)$ et $\psi(t)$ soient exprimées par des sinus et des cosinus de t, il est facile de voir qu'en employant les exponentielles imaginaires, on pourra toujours développer la fraction $\frac{\psi'(t)}{z\,[1+z\varphi(t)]}$ en une série de cette forme

$$\begin{aligned}&\mathrm{M} + \mathrm{M}'e^{t\sqrt{-1}} + \mathrm{M}''e^{2t\sqrt{-1}} + \mathrm{M}'''e^{3t\sqrt{-1}} + \ldots\\ &+ \mathrm{N}'e^{-t\sqrt{-1}} + \mathrm{N}''e^{-2t\sqrt{-1}} + \mathrm{N}'''e^{-3t\sqrt{-1}} + \ldots,\end{aligned}$$

où les coefficients M, M′, M″, ..., N′, N″, ... seront des fonctions de z. Donc, dès qu'on aura développé ces coefficients suivant les puissances de z, il n'y aura qu'à mettre, dans M, t à la place de $\frac{1}{z}$, et zéro à la place de z, z^2, ...; dans M′, $\frac{1}{\sqrt{-1}}$ à la place de $\frac{1}{z}$, $\frac{\sqrt{-1}}{2}$ à la place de z, $\frac{(\sqrt{-1})^2}{2.3}$ à la place de z^2, $\frac{(\sqrt{-1})^3}{2.3.4}$ à la place de z^3, ...; dans M″, $\frac{1}{2\sqrt{-1}}$ à la place de $\frac{1}{z}$, $\frac{2\sqrt{-1}}{2}$ à la place de z, $\frac{(2\sqrt{-1})^2}{2.3}$ à la place de z^2, ...; et en général dans $\mathrm{M}^{(r)}$, $\frac{1}{r\sqrt{-1}}$ à la place de $\frac{1}{z}$, $\frac{r\sqrt{-1}}{2}$ à la place de z, $\frac{(r\sqrt{-1})^2}{2.3}$ à la place de z^2, ...: on fera les mêmes substitutions dans N′, N″, ..., $\mathrm{N}^{(r)}$, mais en prenant $\sqrt{-1}$ avec le signe —; et nommant P, P′, P″, P‴, ... les quantités dans lesquelles se changeront les coefficients M, M′, M″, ..., et Q′, Q″, Q‴, ... celles dans lesquelles se changeront les coefficients N′, N″, N‴, ..., on aura pour la valeur de $\psi(x)$ cette expression

$$\begin{aligned}\psi(x) = \mathrm{P} &+ \mathrm{P}'e^{t\sqrt{-1}} + \mathrm{P}''e^{2t\sqrt{-1}} + \mathrm{P}'''e^{3t\sqrt{-1}} + \ldots\\ &+ \mathrm{Q}'e^{-t\sqrt{-1}} + \mathrm{Q}''e^{-2t\sqrt{-1}} + \mathrm{Q}'''e^{-3t\sqrt{-1}} + \ldots,\end{aligned}$$

laquelle se réduira facilement à une série de sinus ou cosinus d'angles multiples de t.

IX.

Soit, comme plus haut, $\varphi(t) = n\sin t$, et la fraction qu'il s'agira de développer, pour avoir la valeur de $\psi(x)$, sera

$$\frac{\psi'(t)}{z\,(1+nz\sin t)}.$$

Or, comme

$$\sin t = \frac{e^{t\sqrt{-1}} - e^{-t\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}},$$

on aura

$$\frac{1}{1+nz\sin t} = \frac{1}{1+\frac{nz}{2\sqrt{-1}}\left(e^{t\sqrt{-1}} - e^{-t\sqrt{-1}}\right)};$$

cette fraction peut se partager en celles-ci

$$\alpha + \beta\left(\frac{1}{p+qe^{t\sqrt{-1}}} + \frac{1}{p-qe^{-t\sqrt{-1}}}\right),$$

en faisant

$$p^2 - q^2 = 1, \quad pq = \frac{nz}{2\sqrt{-1}}, \quad \alpha(p^2-q^2) + 2p\beta = 1, \quad \alpha pq + \beta q = 0;$$

d'où l'on tire

$$\alpha = -\frac{1}{p^2+q^2}, \quad \beta = \frac{p}{p^2+q^2},$$

$$p + q\sqrt{-1} = \sqrt{1+nz},$$

$$p - q\sqrt{-1} = \sqrt{1-nz},$$

et par conséquent

$$p = \frac{\sqrt{1+nz} + \sqrt{1-nz}}{2},$$

$$q = \frac{\sqrt{1+nz} - \sqrt{1-nz}}{2\sqrt{-1}}.$$

Maintenant on aura

$$\frac{1}{p+qe^{t\sqrt{-1}}} = \frac{1}{p} - \frac{qe^{t\sqrt{-1}}}{p^2} + \frac{q^2e^{2t\sqrt{-1}}}{p^3} - \frac{q^3e^{3t\sqrt{-1}}}{p^4} + \ldots,$$

et de même

$$\frac{1}{p-qe^{-t\sqrt{-1}}} = \frac{1}{p} + \frac{qe^{-t\sqrt{-1}}}{p^2} + \frac{q^2e^{-2t\sqrt{-1}}}{p^3} + \frac{q^3e^{-3t\sqrt{-1}}}{p^4} + \ldots;$$

donc la fraction $\frac{1}{1+nz\sin t}$ deviendra

$$\frac{1}{p^2+q^2}\left(1 - \frac{q}{p}e^{t\sqrt{-1}} + \frac{q^2}{p^2}e^{2t\sqrt{-1}} - \frac{q^3}{p^3}e^{3t\sqrt{-1}} + \ldots + \frac{q}{p}e^{-t\sqrt{-1}} + \frac{q^2}{p^2}e^{-2t\sqrt{-1}} + \frac{q^3}{p^3}e^{-3t\sqrt{-1}} + \ldots\right),$$

où l'on aura

$$p^2 + q^2 = \sqrt{1-n^2z^2},$$

$$\frac{q}{p} = \frac{\sqrt{1+nz} - \sqrt{1-nz}}{\left(\sqrt{1+nz} + \sqrt{1-nz}\right)\sqrt{-1}} = \frac{nz}{1+\sqrt{1-n^2z^2}}\frac{1}{\sqrt{-1}}.$$

De sorte que si l'on fait, pour abréger,

$$Z = \frac{z}{1+\sqrt{1-n^2z^2}},$$

et qu'on remarque que

$$\frac{1}{Z}\frac{dZ}{dz} = \frac{1}{z\sqrt{1-n^2z^2}},$$

on aura

$$\frac{1}{z(1+nz\sin t)} = \frac{dZ}{dz}\left(\frac{1}{Z} - \frac{n}{\sqrt{-1}}e^{t\sqrt{-1}} + \frac{n^2Z}{(\sqrt{-1})^2}e^{2t\sqrt{-1}} - \frac{n^3Z^2}{(\sqrt{-1})^3}e^{3t\sqrt{-1}} + \ldots + \frac{n}{\sqrt{-1}}e^{-t\sqrt{-1}} + \frac{n^2Z}{(\sqrt{-1})^2}e^{-2t\sqrt{-1}} + \frac{n^3Z^2}{(\sqrt{-1})^3}e^{-3t\sqrt{-1}} + \ldots\right),$$

et il ne s'agira plus que de développer, suivant les puissances de z, les quantités $\frac{1}{Z}\frac{dZ}{dz}$, $\frac{dZ}{dz}$, $Z\frac{dZ}{dz}$, ...

Considérons, en général, la quantité

$$Z^{r-1}\frac{dZ}{dz} = \frac{1}{r}\frac{d(Z^r)}{dz},$$

et faisant $Z^r = y$, en sorte que

$$Z^{r-1}\frac{dZ}{dz} = \frac{1}{r}\frac{dy}{dz},$$

j'aurai

$$\frac{dy}{y} = \frac{r\,dZ}{Z} = \frac{r\,dz}{z\sqrt{1-n^2z^2}};$$

d'où je tire, en multipliant les deux membres de cette équation en croix et différentiant après les avoir carrés,

$$r^2y\,dz^2 - (1-2n^2z^2)\,z\,dy\,dz - (1-n^2z^2)\,z^2d^2y = 0,$$

équation par laquelle on pourra déterminer commodément y en z. Or il est facile de voir, par la nature de la quantité Z, que la valeur de $y = Z^r$, développée suivant les puissances de z, sera de cette forme

$$y = Az^r + n^2 Bz^{r+2} + n^4 Cz^{r+4} + \ldots,$$

où le premier coefficient A sera $\frac{1}{2^r}$. Substituant donc cette série à la place de y, et égalant à zéro les termes homogènes, on aura

$$\begin{aligned} r(r+1)A + [r^2 - (r+2)^2]B &= 0, \\ (r+2)(r+3)B + [r^2 - (r+4)^2]C &= 0, \\ (r+4)(r+5)C + [r^2 - (r+6)^2]D &= 0, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{aligned}$$

d'où l'on tire

$$\begin{aligned} B &= \frac{r(r+1)A}{4(r+1)}, \\ C &= \frac{(r+2)(r+3)B}{4.2.(r+2)}, \\ D &= \frac{(r+4)(r+5)C}{4.3.(r+3)}, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{aligned}$$

et par conséquent, à cause de $A = \frac{1}{2^r}$,

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{2^r}, \\ B &= \frac{r}{2^{r+2}}, \\ C &= \frac{r(r+3)}{2.2^{r+4}}, \\ D &= \frac{r(r+4)(r+5)}{2.3.2^{r+6}}, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

Donc

$$Z^r = \frac{1}{2^r}\left[z^r + r\left(\frac{n}{2}\right)^2 z^{r+2} + \frac{r(r+3)}{2}\left(\frac{n}{2}\right)^4 z^{r+4} + \frac{r(r+4)(r+5)}{2.3}\left(\frac{n}{2}\right)^6 z^{r+6} + \ldots\right],$$

et de là

$$Z^{r-1}\frac{dZ}{dz} = \frac{1}{2^r}\left[z^{r-1} + (r+2)\left(\frac{n}{2}\right)^2 z^{r+1} + \frac{(r+3)(r+4)}{2}\left(\frac{n}{2}\right)^4 z^{r+3} + \frac{(r+4)(r+5)(r+6)}{2.3}\left(\frac{n}{2}\right)^6 z^{r+5} + \ldots\right];$$

de sorte qu'en faisant successivement $r = 0, 1, 2, \ldots$, on aura

$$\begin{aligned} \frac{1}{Z}\frac{dZ}{dz} &= \frac{1}{z} + 2\left(\frac{n}{2}\right)^2 z + \frac{3.4}{2}\left(\frac{n}{2}\right)^4 z^3 + \frac{4.5.6}{2.3}\left(\frac{n}{2}\right)^6 z^5 + \ldots, \\ \frac{dZ}{dz} &= \frac{1}{2}\left[1 + 3\left(\frac{n}{2}\right)^2 z^2 + \frac{4.5}{2}\left(\frac{n}{2}\right)^4 z^4 + \frac{5.6.7}{2.3}\left(\frac{n}{2}\right)^6 z^6 + \ldots\right], \\ Z\frac{dZ}{dz} &= \frac{1}{2^2}\left[z + 4\left(\frac{n}{2}\right)^2 z^3 + \frac{5.6}{2}\left(\frac{n}{2}\right)^4 z^5 + \frac{6.7.8}{2.3}\left(\frac{n}{2}\right)^6 z^7 + \ldots\right], \\ Z^2\frac{dZ}{dz} &= \frac{1}{2^3}\left[z^2 + 5\left(\frac{n}{2}\right)^2 z^4 + \frac{6.7}{2}\left(\frac{n}{2}\right)^4 z^6 + \frac{7.8.9}{2.3}\left(\frac{n}{2}\right)^6 z^8 + \ldots\right], \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

X.

Reprenons le cas de l'Article III, où l'on demande l'anomalie de l'excentrique x par l'anomalie moyenne t. On fera donc $\psi(x) = x$ et $\psi(t) = t$, $\psi'(t) = 1$, ce qui donnera la fraction

$$\frac{1}{z(1 + nz\sin t)},$$

qui peut se développer en une série de cette forme

$$\begin{aligned} &M + M'e^{t\sqrt{-1}} + M''e^{2t\sqrt{-1}} + M'''e^{3t\sqrt{-1}} + \ldots \\ &+ N'e^{-t\sqrt{-1}} + N''e^{-2t\sqrt{-1}} + N'''e^{-3t\sqrt{-1}} + \ldots, \end{aligned}$$

où l'on aura (Article précédent)

$$\begin{aligned} M &= \frac{1}{Z}\frac{dZ}{dz}, \quad M' = -\frac{n}{\sqrt{-1}}\frac{dZ}{dz}, \quad M'' = \frac{n^2}{(\sqrt{-1})^2}Z\frac{dZ}{dz}, \ldots, \\ N' &= \frac{n}{\sqrt{-1}}\frac{dZ}{dz}, \quad N'' = \frac{n^2}{(\sqrt{-1})^2}Z\frac{dZ}{dz}, \ldots \end{aligned}$$

Donc, substituant pour $\frac{1}{Z}\frac{dZ}{dz}$, $\frac{dZ}{dz}$, $Z\frac{dZ}{dz}$, ... les valeurs trouvées dans le même Article, et faisant les réductions enseignées dans l'Article VIII, on aura

$$x = t - \frac{nA'}{2\sqrt{-1}}(e^{t\sqrt{-1}} - e^{-t\sqrt{-1}}) + \frac{n^2A''}{2^2\sqrt{-1}}(e^{2t\sqrt{-1}} - e^{-2t\sqrt{-1}})$$
$$- \frac{n^3A'''}{2^3\sqrt{-1}}(e^{3t\sqrt{-1}} - e^{-3t\sqrt{-1}}) + \ldots,$$

ou bien

$$x = t - 2\left(\frac{n}{2}\right)A'\sin t + 2\left(\frac{n}{2}\right)^2A''\sin 2t - 2\left(\frac{n}{2}\right)^3A'''\sin 3t + 2\left(\frac{n}{2}\right)^4A^{IV}\sin 4t - \ldots,$$

où les coefficients A', A'', ... seront déterminés ainsi

$$A' = 1 - 3\left(\frac{n}{2}\right)^2\frac{1}{2.3} + \frac{4.5}{2}\left(\frac{n}{2}\right)^4\frac{1}{2.3.4.5} - \ldots,$$

$$A'' = \frac{2}{2} - 4\left(\frac{n}{2}\right)^2\frac{2^2}{2.3.4} + \frac{5.6}{2}\left(\frac{n}{2}\right)^4\frac{2^3}{2.3\ldots6} - \ldots,$$

$$A''' = \frac{3^2}{2.3} - 5\left(\frac{n}{2}\right)^2\frac{3^4}{2.3.4.5} + \frac{6.7}{2}\left(\frac{n}{2}\right)^4\frac{3^6}{2.3\ldots7} - \ldots,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

c'est-à-dire, en faisant $\frac{n}{2} = \nu$,

$$A' = 1 - \frac{\nu^2}{2} + \frac{\nu^4}{2^2.3} - \frac{\nu^6}{2^2.3^2.4} + \ldots,$$

$$A'' = \frac{2}{2} - \frac{2^2\nu^2}{2.3} + \frac{2^2\nu^4}{2^2.3.4} - \frac{2^2\nu^6}{2^2.3^2.4.5} + \ldots,$$

$$A''' = \frac{3^2}{2.3} - \frac{3^4\nu^2}{2.3.4} + \frac{3^4\nu^4}{2^2.3.4.5} - \frac{3^4\nu^6}{2^2.3^2.4.5.6} + \ldots,$$

$$A^{IV} = \frac{4^3}{2.3.4} - \frac{4^4\nu^2}{2.3.4.5} + \frac{4^4\nu^4}{2^2.3.4.5.6} - \frac{4^6\nu^6}{2^2.3^2.4.5.6.7} + \ldots,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

XI.

Pour avoir de la même manière la valeur du rayon vecteur

$$ar = a(1 + n\cos x),$$

on fera, comme dans l'Article IV,

$$\psi(t) = n\cos t \quad \text{et} \quad \psi'(t) = -n\sin t,$$

d'où l'on aura la fraction

$$\frac{-n\sin t}{z(1 + nz\sin t)},$$

laquelle peut se réduire à ces deux-ci

$$-\frac{1}{z^2} + \frac{1}{z^2(1 + nz\sin t)},$$

de sorte qu'on aura (Article IX) une série de cette forme

$$M + M'e^{t\sqrt{-1}} + M''e^{2t\sqrt{-1}} + M'''e^{3t\sqrt{-1}} + \ldots$$
$$+ N'e^{-t\sqrt{-1}} + N''e^{-2t\sqrt{-1}} + N'''e^{-3t\sqrt{-1}} + \ldots,$$

dans laquelle

$$M = \frac{1}{Zz}\frac{dZ}{dz} - \frac{1}{z^2}, \quad M' = -\frac{n}{z\sqrt{-1}}\frac{dZ}{dz}, \quad M'' = \frac{n^2Z}{z(\sqrt{-1})^2}\frac{dZ}{dz}, \ldots,$$
$$N' = \frac{n}{z\sqrt{-1}}\frac{dZ}{dz}, \qquad N'' = \frac{n^2Z}{z(\sqrt{-1})^2}\frac{dZ}{dz}, \ldots$$

Donc, substituant les valeurs de $\frac{1}{Zz}\frac{dZ}{dz}$, $\frac{1}{z}\frac{dZ}{dz}$, ... en z et faisant les réductions convenables (Article VIII), on aura, pour la valeur de r, la série

$$r = B + \frac{nB'}{2}(e^{t\sqrt{-1}} + e^{-t\sqrt{-1}}) - \frac{n^2B''}{2^2}(e^{2t\sqrt{-1}} + e^{-2t\sqrt{-1}})$$
$$+ \frac{n^3B'''}{2^3}(e^{3t\sqrt{-1}} + e^{-3t\sqrt{-1}}) - \ldots,$$

ou bien

$$r = \mathrm{B} + 2\left(\frac{n}{2}\right)\mathrm{B}'\cos t - 2\left(\frac{n}{2}\right)^2\mathrm{B}''\cos 2t + 2\left(\frac{n}{2}\right)^3\mathrm{B}'''\cos 3t - 2\left(\frac{n}{2}\right)^4\mathrm{B}^{\mathrm{IV}}\cos 4t + \ldots,$$

dans laquelle on aura les valeurs suivantes des coefficients

$$\mathrm{B} = 1 + 2\left(\frac{n}{2}\right)^2,$$

$$\mathrm{B}' = 1 - 3\left(\frac{n}{2}\right)^2\frac{1}{2} + \frac{4.5}{2}\left(\frac{n}{2}\right)^4\frac{1}{2.3.4} - \ldots,$$

$$\mathrm{B}'' = 1 - 4\left(\frac{n}{2}\right)^2\frac{2^2}{2.3} + \frac{5.6}{2}\left(\frac{n}{2}\right)^4\frac{2^4}{2.3.4.5} - \ldots,$$

$$\mathrm{B}''' = \frac{3}{2} - 5\left(\frac{n}{2}\right)^2\frac{3^2}{2.3.4} + \frac{6.7}{2}\left(\frac{n}{2}\right)^4\frac{3^4}{2.3.4.5.6} - \ldots,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

ou bien, en faisant $\frac{n}{2} = \nu$,

$$\mathrm{B} = 1 + 2\nu^2,$$

$$\mathrm{B}' = 1 - \frac{3\nu^2}{2} + \frac{5\nu^4}{2^2.3} - \frac{7\nu^6}{2^2.3^2.4} + \ldots,$$

$$\mathrm{B}'' = 1 - \frac{4.2^2.\nu^2}{2.3} + \frac{6.2^4.\nu^4}{2^2.3.4} - \frac{8.2^6.\nu^6}{2^2.3^2.4.5} + \ldots,$$

$$\mathrm{B}''' = \frac{3}{2} - \frac{5.3^2.\nu^2}{2.3.4} + \frac{7.3^4.\nu^4}{2^2.3.4.5} - \frac{9.3^6.\nu^6}{2^2.3^2.4.5.6} + \ldots,$$

$$\mathrm{B}^{\mathrm{IV}} = \frac{4^2}{2.3} - \frac{6.4^4.\nu^2}{2.3.4.5} + \frac{8.4^6.\nu^4}{2^2.3.4.5.6} - \frac{10.4^8.\nu^6}{2^2.3^2.4.5.6.7} + \ldots,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

XII.

Voyons maintenant comment on pourra trouver, par la même méthode, la valeur de l'angle u de l'anomalie vraie; pour cela il faudra faire, comme dans l'Article VI,

$$\psi(t) = m\int\frac{dt}{1 + n\cos t} \quad \text{et} \quad \psi'(t) = \frac{m}{1 + n\cos t},$$

ce qui donnera (Article VIII) la fraction suivante

$$\frac{m}{z(1 + nz\sin t)(1 + n\cos t)}.$$

Or on a déjà trouvé (Article IX)

$$\frac{1}{z(1 + nz\sin t)} = \frac{dZ}{dz}\left[\frac{1}{Z} - \frac{n}{\sqrt{-1}}e^{t\sqrt{-1}} + \frac{n^2Z}{(\sqrt{-1})^2}e^{2t\sqrt{-1}} - \ldots + \frac{n}{\sqrt{-1}}e^{-t\sqrt{-1}} + \frac{n^2Z}{(\sqrt{-1})^2}e^{-2t\sqrt{-1}} + \ldots\right],$$

et l'on trouvera, de la même manière, en mettant m à la place de $\sqrt{1 - n^2}$,

$$\frac{1}{1 + n\cos t} = \frac{1}{m}\left[1 - \frac{n}{1 + m}e^{t\sqrt{-1}} + \frac{n^2}{(1 + m)^2}e^{2t\sqrt{-1}} - \ldots - \frac{n}{1 + m}e^{-t\sqrt{-1}} + \frac{n^2}{(1 + m)^2}e^{-2t\sqrt{-1}} - \ldots\right].$$

Donc, multipliant ces deux séries l'une par l'autre, on aura la valeur de la fraction

$$\frac{m}{z(1 + nz\sin t)(1 + n\cos t)},$$

laquelle sera exprimée de cette manière

$$\mathrm{M} + \mathrm{M}'e^{t\sqrt{-1}} + \mathrm{M}''e^{2t\sqrt{-1}} + \mathrm{M}'''e^{3t\sqrt{-1}} + \ldots + \mathrm{N}'e^{-t\sqrt{-1}} + \mathrm{N}''e^{-2t\sqrt{-1}} + \mathrm{N}'''e^{-3t\sqrt{-1}} + \ldots,$$

en supposant, pour abréger,

$$\mathrm{M} = \frac{1}{Z}\frac{dZ}{dz}\left[1 + \frac{n^2Z^2}{(1 + m)^2(\sqrt{-1})^2} + \frac{n^4Z^4}{(1 + m)^4(\sqrt{-1})^4} + \ldots\right],$$

$$\mathrm{M}' = \frac{n}{Z}\frac{dZ}{dz}\left[-\frac{1}{1 + m} - \frac{Z}{\sqrt{-1}} - \frac{n^2Z^2}{(1 + m)(\sqrt{-1})^2} - \frac{n^4Z^3}{(1 + m)^3(\sqrt{-1})^3} - \ldots + \frac{n^2Z}{(1 + m)^2\sqrt{-1}} - \frac{n^4Z^2}{(1 + m)^3(\sqrt{-1})^3} + \frac{n^6Z^3}{(1 + m)^4(\sqrt{-1})^4} - \ldots\right],$$

$$M'=\frac{n^2}{Z}\frac{dZ}{dz}\left[\frac{1}{(1+m)^2}+\frac{Z}{(1+m)\sqrt{-1}}+\frac{Z^2}{(\sqrt{-1})^2}\right.$$
$$+\frac{n^2Z^3}{(1+m)(\sqrt{-1})^3}+\frac{n^4Z^4}{(1+m)^2(\sqrt{-1})^4}+\frac{n^6Z^5}{(1+m)^3(\sqrt{-1})^5}+\dots$$
$$\left.-\frac{n^2Z}{(1+m)^3\sqrt{-1}}+\frac{n^4Z^2}{(1+m)^4(\sqrt{-1})^2}-\frac{n^6Z^3}{(1+m)^5(\sqrt{-1})^3}+\dots\right],$$

$$M''=\frac{n^2}{Z}\frac{dZ}{dz}\left[-\frac{1}{(1+m)^2}-\frac{Z}{(1+m)^3\sqrt{-1}}-\frac{Z^2}{(1+m)(\sqrt{-1})^2}-\frac{Z^3}{(\sqrt{-1})^3}\right.$$
$$-\frac{n^2Z^4}{(1+m)(\sqrt{-1})^4}-\frac{n^4Z^5}{(1+m)^3(\sqrt{-1})^5}-\frac{n^6Z^6}{(1+m)^5(\sqrt{-1})^6}-\dots$$
$$\left.+\frac{n^2Z}{(1+m)^4\sqrt{-1}}-\frac{n^4Z^2}{(1+m)^5(\sqrt{-1})^2}+\frac{n^6Z^3}{(1+m)^6(\sqrt{-1})^3}-\dots\right],$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$N'=\frac{n}{Z}\frac{dZ}{dz}\left[-\frac{1}{1+m}+\frac{Z}{\sqrt{-1}}-\frac{n^2Z^2}{(1+m)(\sqrt{-1})^2}+\frac{n^4Z^3}{(1+m)^2(\sqrt{-1})^3}-\dots\right.$$
$$\left.-\frac{n^2Z}{(1+m)^3\sqrt{-1}}-\frac{n^4Z^2}{(1+m)^3(\sqrt{-1})^2}-\frac{n^6Z^3}{(1+m)^4(\sqrt{-1})^3}-\dots\right],$$

$$N''=\frac{n^2}{Z}\frac{dZ}{dz}\left[\frac{1}{(1+m)^2}-\frac{Z}{(1+m)\sqrt{-1}}+\frac{Z^2}{(\sqrt{-1})^2}\right.$$
$$-\frac{n^2Z^3}{(1+m)(\sqrt{-1})^3}+\frac{n^4Z^4}{(1+m)^2(\sqrt{-1})^4}-\frac{n^6Z^5}{(1+m)^3(\sqrt{-1})^5}+\dots$$
$$\left.+\frac{n^2Z}{(1+m)^3\sqrt{-1}}+\frac{n^4Z^2}{(1+m)^4(\sqrt{-1})^2}+\frac{n^6Z^3}{(1+m)^5(\sqrt{-1})^3}+\dots\right];$$

$$N'''=\frac{n^3}{Z}\frac{dZ}{dz}\left[-\frac{1}{(1+m)^3}+\frac{Z}{(1+m)^2\sqrt{-1}}-\frac{Z^2}{(1+m)(\sqrt{-1})^2}+\frac{Z^3}{(\sqrt{-1})^3}\right.$$
$$-\frac{n^2Z^4}{(1+m)(\sqrt{-1})^4}+\frac{n^4Z^5}{(1+m)^3(\sqrt{-1})^5}-\frac{n^6Z^6}{(1+m)^5(\sqrt{-1})^6}+\dots$$
$$\left.-\frac{n^2Z}{(1+m)^4\sqrt{-1}}-\frac{n^4Z^2}{(1+m)^5(\sqrt{-1})^2}-\frac{n^6Z^3}{(1+m)^6(\sqrt{-1})^3}-\dots\right],$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

Faisant les substitutions et les réductions convenables (Article VIII), on trouvera, pour la valeur de l'anomalie vraie u, une expression de cette forme

$$u=t-\frac{nK'}{\sqrt{-1}}(e^{t\sqrt{-1}}-e^{-t\sqrt{-1}})+\frac{n^2K''}{\sqrt{-1}}(e^{2t\sqrt{-1}}-e^{-2t\sqrt{-1}})$$
$$-\frac{n^3K'''}{\sqrt{-1}}(e^{3t\sqrt{-1}}-e^{-3t\sqrt{-1}})+\dots,$$

c'est-à-dire,

$$u=t-2nK'\sin t+2n^2K''\sin 2t-2n^3K'''\sin 3t+2n^4K^{IV}\sin 4t-\dots,$$

dans laquelle les coefficients K', K'', K''',... seront tels, que si l'on fait, en général,

$$P=\frac{1}{\rho}-\rho\left(\frac{n}{2}\right)^2+\frac{\rho^3}{2^2}\left(\frac{n}{2}\right)^4-\frac{\rho^5}{2^2.3^2}\left(\frac{n}{2}\right)^6+\dots,$$
$$Q=1-\frac{\rho^2}{2}\left(\frac{n}{2}\right)^2+\frac{\rho^4}{2^2.3}\left(\frac{n}{2}\right)^4-\frac{\rho^6}{2^2.3^2.4}\left(\frac{n}{2}\right)^6+\dots,$$
$$R=\rho-\frac{\rho^3}{2.3}\left(\frac{n}{2}\right)^2+\frac{\rho^5}{2^2.3.4}\left(\frac{n}{2}\right)^4-\frac{\rho^7}{2^2.3^2.4.5}\left(\frac{n}{2}\right)^6+\dots,$$
$$S=\rho^2-\frac{\rho^4}{2.3.4}\left(\frac{n}{2}\right)^2+\frac{\rho^6}{2^2.3.4.5}\left(\frac{n}{2}\right)^4-\frac{\rho^8}{2^2.3^2.4.5.6}\left(\frac{n}{2}\right)^6+\dots,$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots,$$

et qu'on dénote par P', P'', P''',..., Q', Q'', Q''',..., R', R'', R''',... les valeurs de P, Q, R,... qui répondent à $\rho=1, 2, 3,\dots$, on aura

$$K'=\frac{P'}{1+m}+\left[1-\frac{n^2}{(1+m)^2}\right]\frac{Q'}{2}+n^2\left[1+\frac{n^2}{(1+m)^2}\right]\frac{R'}{2^2(1+m)}$$
$$+n^4\left[1-\frac{n^2}{(1+m)^2}\right]\frac{S'}{2^3(1+m)^2}+n^6\left[1+\frac{n^2}{(1+m)^2}\right]\frac{T'}{2^4(1+m)^3}+\dots,$$

$$K''=\frac{P''}{(1+m)^2}+\left[1-\frac{n^2}{(1+m)^3}\right]\frac{Q''}{2(1+m)}+\left[1+\frac{n^4}{(1+m)^4}\right]\frac{R''}{2^2}$$
$$+n^2\left[1-\frac{n^4}{(1+m)^4}\right]\frac{S''}{2^3(1+m)}+n^4\left[1+\frac{n^4}{(1+m)^4}\right]\frac{T''}{2^4(1+m)^2}$$
$$+n^6\left[1-\frac{n^4}{(1+m)^4}\right]\frac{V''}{2^5(1+m)^3}+\dots,$$

$$K''=\frac{P''}{(1+m)^3}+\left[1-\frac{n^2}{(1+m)^2}\right]\frac{Q''}{2(1+m)^2}+\left[1+\frac{n^4}{(1+m)^4}\right]\frac{R''}{2^2(1+m)}$$
$$+\left[1-\frac{n^6}{(1+m)^6}\right]\frac{S''}{2^3}+n^2\left[1+\frac{n^6}{(1+m)^6}\right]\frac{T''}{2^4(1+m)}$$
$$+n^4\left[1-\frac{n^6}{(1+m)^6}\right]\frac{V''}{2^3(1+m)^2}+n^6\left[1+\frac{n^6}{(1+m)^6}\right]\frac{X''}{2^6(1+m)^3}+\ldots,$$

.....

XIII.

Les valeurs des coefficients K', K'', K''',... dépendent, comme on voit, de l'excentricité n et du rapport $1:m$ du grand axe au petit axe de l'ellipse; or, si l'on suppose l'excentricité fort petite, ce qui est nécessaire pour que les séries soient convergentes, et qu'on veuille que les valeurs des coefficients soient exprimées par des séries ordonnées suivant les puissances de n, il faudra mettre à la place de m sa valeur $\sqrt{1-n^2}$ et développer ensuite ce radical suivant les méthodes ordinaires; donc, comme les expressions des coefficients dont il s'agit ne renferment d'autres fonctions de m que les puissances de $\frac{1}{1+m}$, il est bon de voir comment il faut s'y prendre pour réduire facilement en série chacune des puissances de

$$\frac{1}{1+m}=\frac{1}{1+\sqrt{1-n^2}}.$$

Qu'on demande donc, en général, la valeur de $\frac{1}{(1+m)^r}$; il est facile de voir que cette valeur sera la même que celle de Z^r que nous avons donnée dans l'Article IX, en y faisant seulement $z=1$, ce qui rend

$$Z=\frac{1}{1+\sqrt{1-n^2}}=\frac{1}{1+m};$$

ainsi l'on aura sur-le-champ

$$\frac{1}{(1+m)^r}=\frac{1}{2^r}\left[1+r\left(\frac{n}{2}\right)^2+\frac{r(r+3)}{2}\left(\frac{n}{2}\right)^4+\frac{r(r+4)(r+5)}{2.3}\left(\frac{n}{2}\right)^6\right.$$
$$\left.+\frac{r(r+5)(r+6)(r+7)}{2.3.4}\left(\frac{n}{2}\right)^8+\ldots\right];$$

de sorte qu'en faisant successivement $r=1, 2, 3,\ldots$, et supposant, pour plus de simplicité, $\frac{n}{2}=\nu$, on aura

$$\frac{1}{1+m}=\frac{1}{2}\left(1+\nu^2+\frac{4\nu^4}{2}+\frac{5.6.\nu^6}{2.3}+\frac{6.7.8.\nu^8}{2.3.4}+\ldots\right),$$
$$\frac{1}{(1+m)^2}=\frac{1}{4}\left(1+2\nu^2+\frac{2.5.\nu^4}{2}+\frac{2.6.7.\nu^6}{2.3}+\frac{2.7.8.9.\nu^8}{2.3.4}+\ldots\right),$$
$$\frac{1}{(1+m)^3}=\frac{1}{8}\left(1+3\nu^2+\frac{3.6.\nu^4}{2}+\frac{3.7.8.\nu^6}{2.3}+\frac{3.8.9.10.\nu^8}{2.3.4}+\ldots\right),$$
$$\frac{1}{(1+m)^4}=\frac{1}{16}\left(1+4\nu^2+\frac{4.7.\nu^4}{2}+\frac{4.8.9.\nu^6}{2.3}+\frac{4.9.10.11.\nu^8}{2.3.4}+\ldots\right),$$

.....

Ainsi il n'y aura qu'à substituer ces valeurs dans les expressions de K', K'', K''',..., et après avoir fait les multiplications nécessaires, on pourra facilement ordonner les termes par rapport aux puissances de n.

XIV.

Il est clair que la méthode employée dans ce Mémoire peut servir aussi à résoudre avec facilité les équations de la forme

$$t=x+a\sin mx+b\cos mx+c\sin nx+f\cos nx+\ldots,$$

ou de celle-ci

$$t=x+ae^{mx}+be^{nx}+ce^{px}+\ldots$$

(lorsque les coefficients a, b, c,... sont fort petits), et d'autres équations semblables qu'on ne pourrait résoudre par les méthodes connues que d'une manière indirecte et très-laborieuse.

Supposons, par exemple, qu'on demande la valeur de x en t par l'équation

$$t=x+ae^{mx},$$

on fera, dans la formule générale de l'Article II,

$$\varphi(x)=ae^{mx} \quad \text{et} \quad \psi(x)=x,\ \ \psi(t)=t,\ \ \psi'(t)=1,$$

et l'on aura

$$x = t - ae^{mt} + \frac{a^2}{2}\frac{de^{2mt}}{dt} - \frac{a^3}{2.3}\frac{d^2e^{3mt}}{dt^2} + \ldots,$$

c'est-à-dire,

$$x = t - ae^{mt} + \frac{2ma^2}{2}e^{2mt} - \frac{3^2m^2a^3}{2.3}e^{3mt} + \frac{4^3m^3a^4}{2.3.4}e^{4mt} - \ldots;$$

donc, si l'on fait $t = 0$, en sorte qu'il s'agisse de déterminer x par l'équation

$$x + ae^{mx} = 0,$$

on aura

$$x = -a\left(1 - \frac{2ma}{2} + \frac{(3ma)^2}{2.3} - \frac{(4ma)^3}{2.3.4} + \ldots\right).$$

Ainsi, si l'on avait la série

$$1 + \frac{2\alpha}{2} + \frac{(3\alpha)^2}{2.3} + \frac{(4\alpha)^3}{2.3.4} + \ldots,$$

et qu'on en demandât la somme, il faudrait tirer la valeur de x de l'équation $x - e^{\alpha x} = 0$, et ce serait la somme cherchée.

SUR

L'ÉLIMINATION DES INCONNUES

DANS LES ÉQUATIONS.

SUR

L'ÉLIMINATION DES INCONNUES

DANS LES ÉQUATIONS (*).

(*Mémoires de l'Académie royale des Sciences et Belles-Lettres de Berlin*, t. XXV, 1771.)

Lorsqu'on a deux équations qui renferment la même inconnue élevée à des degrés quelconques, on peut toujours, par les règles ordinaires de l'Algèbre, éliminer cette inconnue; mais on risque de tomber dans un inconvénient : c'est que l'équation résultante de l'élimination monte à un degré plus élevé qu'elle ne doit. Plusieurs habiles Géomètres ont senti cet inconvénient et ont donné des moyens de l'éviter; c'est ce que MM. Euler, Cramer, Bezout et d'autres ont fait par des méthodes qui leur sont propres, et qu'on peut voir dans les *Mémoires* de cette Académie pour les années 1748 et 1764, dans ceux de l'Académie des Sciences de Paris pour l'année 1764, dans l'Ouvrage de M. Cramer qui a pour titre : *Introduction à l'analyse des lignes courbes*, et ailleurs.

La méthode que je vais exposer ici a l'avantage de réduire l'élimination des inconnues à des formules générales et très-simples dont les Analystes pourront faire usage au besoin.

(*) Lu à l'Académie le 29 octobre 1767.

I.

Soient

$$(A) \qquad 1 + Ax + Bx^2 + Cx^3 + Dx^4 + \ldots = 0,$$

$$(B) \qquad 1 + \frac{a}{x} + \frac{b}{x^2} + \frac{c}{x^3} + \frac{d}{x^4} + \ldots = 0,$$

les deux équations proposées, dont la première soit d'un degré quelconque m, et la seconde aussi d'un degré quelconque n. Il est évident que quelles que soient les équations données elles peuvent toujours se mettre sous les deux formes précédentes; car pour cela il n'y a qu'à les diviser, l'une par le coefficient tout connu du dernier terme, et l'autre par la plus haute puissance de l'inconnue.

Je suppose que $1 - \alpha x$, $1 - \beta x$, $1 - \gamma x$, $1 - \delta x$,... soient les facteurs de l'équation (A), en sorte que $\frac{1}{\alpha}$, $\frac{1}{\beta}$, $\frac{1}{\gamma}$, $\frac{1}{\delta}$,... soient les racines de cette équation; j'aurai donc

$$1 + Ax + Bx^2 + Cx^3 + Dx^4 + \ldots = (1 - \alpha x)(1 - \beta x)(1 - \gamma x)(1 - \delta x)\ldots,$$

et, prenant les logarithmes de part et d'autre,

$$\log(1 + Ax + Bx^2 + Cx^3 + Dx^4 + \ldots) = \log(1 - \alpha x) + \log(1 - \beta x) + \log(1 - \gamma x) + \log(1 - \delta x) + \ldots$$

Or on sait que

$$\log(1 + z) = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \frac{z^4}{4} + \ldots,$$

donc on aura aussi

$$\left.\begin{array}{l} x\,(A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + \ldots) \\ -\frac{x^2}{2}(A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + \ldots)^2 \\ +\frac{x^3}{3}(A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + \ldots)^3 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{l} -x\,(\alpha + \beta + \gamma + \delta + \ldots) \\ -\frac{x^2}{2}(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2 + \ldots) \\ -\frac{x^3}{3}(\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 + \delta^3 + \ldots) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right.$$

On sait de plus que le carré, le cube, etc., de tout polynôme, tel que $A + Bx + Cx^2 + \ldots$, est aussi un polynôme de la même forme, mais dont le nombre des termes est double, triple, etc., de sorte qu'on peut supposer

$$(A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + \ldots)^2 = A' + B'x + C'x^2 + D'x^3 + \ldots,$$
$$(A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + \ldots)^3 = A'' + B''x + C''x^2 + D''x^3 + \ldots.$$

et ainsi de suite, les coefficients A', B', C',..., A'', B'', C'',... étant aisés à trouver par la formation actuelle de ces puissances ou par d'autres moyens que nous indiquerons dans la suite.

Donc, si l'on substitue ces valeurs et qu'on fasse, pour abréger,

$$\alpha + \beta + \gamma + \delta + \ldots = -P,$$
$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2 + \ldots = -2Q,$$
$$\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 + \delta^3 + \ldots = -3R,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

on aura, en ordonnant les termes par rapport aux dimensions de x,

$$Ax + \left(B - \frac{A'}{2}\right)x^2 + \left(C - \frac{B'}{2} + \frac{A''}{3}\right)x^3 + \left(D - \frac{C'}{2} + \frac{B''}{3} - \frac{A'''}{4}\right)x^4 + \ldots = Px + Qx^2 + Rx^3 + Sx^4 + \ldots,$$

d'où l'on tire, à cause que l'équation doit être identique,

$$P = A,$$
$$Q = B - \frac{A'}{2},$$
$$R = C - \frac{B'}{2} + \frac{A''}{3},$$
$$S = D - \frac{C'}{2} + \frac{B''}{3} - \frac{A'''}{4},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Cela posé, je substitue successivement dans l'équation (B) les valeurs de x résultant de l'équation (A), savoir $\frac{1}{\alpha}$, $\frac{1}{\beta}$, $\frac{1}{\gamma}$,..., dont le nombre

est m; j'aurai les m équations suivantes

$$(C)\quad \begin{cases} 1+a\alpha+b\alpha^2+c\alpha^3+d\alpha^4+\ldots=0, \\ 1+a\beta+b\beta^2+c\beta^3+d\beta^4+\ldots=0, \\ 1+a\gamma+b\gamma^2+c\gamma^3+d\gamma^4+\ldots=0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

Or il est clair que, pour que les deux équations (A) et (B) aient lieu en même temps, il faut nécessairement qu'une quelconque des m équations (C) ait lieu; donc, comme il n'y a pas de raison pour que l'une de ces équations doive plutôt avoir lieu que l'autre, il faudra que l'on ait une équation qui renferme toutes les équations (C) et qui ne puisse être vraie qu'en supposant que l'une quelconque de ces dernières équations le soit; d'où il s'ensuit que l'équation dont il s'agit ne saurait être que le produit de toutes les équations (C), et cette équation sera par conséquent celle qui doit résulter de l'élimination de l'inconnue x dans les deux équations proposées (A) et (B).

Donc, si l'on représente l'équation dont nous parlons par $\Pi=0$, on aura

$$\begin{aligned} \Pi=&(1+a\alpha+b\alpha^2+c\alpha^3+d\alpha^4+\ldots) \\ &\times(1+a\beta+b\beta^2+c\beta^3+d\beta^4+\ldots) \\ &\times(1+a\gamma+b\gamma^2+c\gamma^3+d\gamma^4+\ldots) \\ &\times(1+a\delta+b\delta^2+c\delta^3+d\delta^4+\ldots) \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{aligned}$$

le nombre des facteurs étant m. Ainsi la difficulté se réduit à trouver la valeur de Π sans connaître les racines α, β, γ,....

Prenons les logarithmes des deux membres, et nous aurons

$$\begin{aligned} \log\Pi=&\log(1+a\alpha+b\alpha^2+c\alpha^3+d\alpha^4+\ldots) \\ &+\log(1+a\beta+b\beta^2+c\beta^3+d\beta^4+\ldots) \\ &+\log(1+a\gamma+b\gamma^2+c\gamma^3+d\gamma^4+\ldots) \\ &+\log(1+a\delta+b\delta^2+c\delta^3+d\delta^4+\ldots) \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

Mais on a

$$\begin{aligned} &\log(1+a\alpha+b\alpha^2+c\alpha^3+d\alpha^4+\ldots) \\ &=\alpha\,(a+b\alpha+c\alpha^2+d\alpha^3+\ldots) \\ &-\frac{\alpha^2}{2}(a+b\alpha+c\alpha^2+d\alpha^3+\ldots) \\ &+\frac{\alpha^3}{3}(a+b\alpha+c\alpha^2+d\alpha^3+\ldots) \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

Donc, si l'on suppose que a', b', c',..., a'', b'', c'',... soient des quantités formées de a, b, c,..., comme les quantités A', B', C',..., A'', B'', C'',... le sont de A, B, C,..., on aura

$$\begin{aligned} &\log(1+a\alpha+b\alpha^2+c\alpha^3+\ldots) \\ &=\alpha\,(a+b\alpha+c\alpha^2+d\alpha^3+\ldots) \\ &-\frac{\alpha^2}{2}(a'+b'\alpha+c'\alpha^2+d'\alpha^3+\ldots) \\ &+\frac{\alpha^3}{3}(a''+b''\alpha+c''\alpha^2+d''\alpha^3+\ldots) \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{aligned}$$

ou bien en faisant, pour abréger,

$$\begin{aligned} p&=a, \\ q&=b-\frac{a'}{2}, \\ r&=c-\frac{b'}{2}+\frac{a''}{3}, \\ s&=d-\frac{c'}{2}+\frac{b''}{3}-\frac{a'''}{4}, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{aligned}$$

on aura

$$\log(1+a\alpha+b\alpha^2+c\alpha^3+d\alpha^4+\ldots)=p\alpha+q\alpha^2+r\alpha^3+s\alpha^4+\ldots.$$

On trouvera de la même manière

$$\log(1+a\beta+b\beta^2+c\beta^3+d\beta^4+\ldots)=p\beta+q\beta^2+r\beta^3+s\beta^4+\ldots,$$
$$\log(1+a\gamma+b\gamma^2+c\gamma^3+d\gamma^4+\ldots)=p\gamma+q\gamma^2+r\gamma^3+s\gamma^4+\ldots,$$

et ainsi des autres.

Donc, ajoutant ensemble toutes ces quantités, et mettant à la place de $\alpha+\beta+\gamma+\ldots$, $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\ldots$, $\alpha^3+\beta^3+\gamma^3+\ldots$, les quantités $-P$, $-2Q$, $-3R,\ldots$, on aura

$$\log\Pi = -pP - 2qQ - 3rR - \ldots.$$

Soit encore, pour abréger,

$$\varphi = pP + 2qQ + 3rR + \ldots,$$

et l'on aura

$$\log\Pi = -\varphi, \quad \text{d'où} \quad \Pi = e^{-\varphi},$$

et résolvant en série la quantité exponentielle $e^{-\varphi}$, il viendra enfin

$$\Pi = 1 - \varphi + \frac{\varphi^2}{2} - \frac{\varphi^3}{2.3} + \ldots.$$

Ainsi le Problème est résolu.

II.

Comme la quantité Π est le produit de m facteurs tels que

$$1+a\alpha+b\alpha^2+c\alpha^3+\ldots, \quad 1+a\beta+b\beta^2+c\beta^3+\ldots, \quad 1+a\gamma+b\gamma^2+c\gamma^3+\ldots,$$

il est visible qu'elle ne peut contenir d'autres produits des quantités a, b, c,... que ceux dont les dimensions ne passent pas le nombre m; d'où il s'ensuit :

1° Que l'équation $\Pi = 0$, ou bien

$$(D) \qquad 1 - \varphi + \frac{\varphi^2}{2} - \frac{\varphi^3}{2.3} + \ldots = 0,$$

ne doit contenir aucun terme dans lequel les quantités a, b, c,... forment ensemble des produits de plus de m dimensions.

Or, si l'on met $\frac{1}{x}$ au lieu de x dans les équations (B) et (A), elles deviennent celles ci

$$1 + ax + bx^2 + cx^3 + dx^4 + \ldots = 0,$$

$$1 + \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x^3} + \frac{D}{x^4} + \ldots = 0,$$

lesquelles ne diffèrent des équations (A) et (B) qu'en ce que les coefficients A, B, C,... sont changés en a, b, c,... et l'exposant m en n, et *vice versâ*; donc, si l'on fait sur ces équations les mêmes raisonnements et les mêmes opérations que nous avons faites sur les équations (A) et (B), on parviendra à une équation finale qui sera la même que l'équation (D) ci-dessus, à la seule différence près que a, b, c,... seront au lieu de A, B, C,..., et réciproquement; et l'on prouvera de même, à l'égard de cette équation, que les quantités A, B, C,... ne sauraient former ensemble des produits de plus de n dimensions.

Or, en changeant A, B, C,... en a, b, c,..., on ne fait que changer P, Q, R,... en p, q, r,..., et *vice versâ*, comme on le voit par les expressions de ces quantités : donc, comme

$$\varphi = pP + 2qQ + 3rR + \ldots,$$

il s'ensuit que l'équation finale dont il s'agit sera exactement la même que l'équation (D); d'où je conclus :

2° Que l'équation

$$1 - \varphi + \frac{\varphi^2}{2} - \frac{\varphi^3}{2.3} + \ldots = 0,$$

ne doit pas non plus contenir aucun terme où les quantités A, B, C,... se trouvent formant ensemble des produits de plus de n dimensions.

III.

Voici donc à quoi se réduit notre méthode d'élimination. Étant proposées les équations

$$1 + Ax + Bx^2 + Cx^3 + Dx^4 + \ldots = 0,$$

$$1 + \frac{a}{x} + \frac{b}{x^2} + \frac{c}{x^3} + \frac{d}{x^4} + \ldots = 0,$$

dont la première soit du degré m, et la seconde du degré n, on commencera par former les quantités A′, B′, C′, D′,..., A″, B″, C″, D″,..., A‴, B‴, C‴, D‴,..., lesquelles sont les coefficients des séries qui expriment le

carré, le cube, la quatrième puissance, etc., de la série

$$A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + \ldots,$$

et l'on poussera cette opération jusqu'à la $n^{ième}$ puissance. On formera ensuite de la même manière les quantités a', b', c', d',..., a'', b'', c'', d'',..., a''', b''', c''', d''',... jusqu'à la puissance m; et pour cela il suffira de changer, dans les valeurs correspondantes de A′, B′, C′,..., A″, B″, C″,..., les quantités A, B, C, D,... en a, b, c, d,....

Ayant ainsi toutes ces quantités, on les substituera dans la quantité

$$\begin{aligned}\varphi = {} & Aa + 2\left(B - \frac{A'}{2}\right)\left(b - \frac{a'}{2}\right) \\ & + 3\left(C - \frac{B'}{2} + \frac{A''}{3}\right)\left(c - \frac{b'}{2} + \frac{a''}{3}\right) \\ & + 4\left(D - \frac{C'}{2} + \frac{B''}{3} - \frac{A'''}{4}\right)\left(d - \frac{c'}{2} + \frac{b''}{3} - \frac{a'''}{4}\right) \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\end{aligned}$$

et l'on fera ensuite l'équation

$$1 - \varphi + \frac{\varphi^2}{2} - \frac{\varphi^3}{2.3} + \frac{\varphi^4}{2.3.4} - \ldots = 0,$$

en observant de rejeter tous les termes qui contiendraient des produits de A, B, C,... de plus de n dimensions, ou des produits de a, b, c,... de plus de m dimensions; on aura, par ce moyen, l'équation qui résulte de l'élimination de l'inconnue x dans les deux équations proposées.

IV.

A l'égard des coefficients A′, B′, C′,..., A″, B″, C″,..., on doit les déterminer à l'ordinaire par la formation des différentes puissances de $A + Bx + Cx^2 + \ldots$; mais, comme le calcul des puissances fort hautes serait assez laborieux, on peut l'abréger par la formule suivante, dont la démonstration se tire du calcul différentiel.

Soit, en général,

$$(A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4 + \ldots)^n = P + Qx + Rx^2 + Sx^3 + Tx^4 + \ldots,$$

on aura

$$\begin{aligned} P &= A^n, \\ Q &= \frac{nBP}{A}, \\ R &= \frac{(n-1)BQ + 2nCP}{2A}, \\ S &= \frac{(n-2)BR + (2n-1)CQ + 3nDP}{3A}, \\ T &= \frac{(n-3)BS + (2n-2)CR + (3n-1)DQ + 4nEP}{4A}, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots; \end{aligned}$$

et il est très-aisé de voir la loi de cette série, et de la continuer autant qu'on voudra.

Si l'on ne voulait pas faire dépendre les coefficients P, Q, R,... les uns des autres, on pourrait les déterminer immédiatement de la manière suivante.

Qu'on cherche, par exemple, le coefficient de x^m dans la puissance n du polynôme

$$A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + \ldots,$$

je dis :

1° Que ce coefficient sera formé de tous les termes qui peuvent être représentés par $A^pB^qC^rD^s\ldots$, p, q, r, s,... étant des nombres entiers positifs, et tels que

$$p + q + r + s + \ldots = n \quad \text{et} \quad q + 2r + 3s + \ldots = m;$$

2° Que chacun de ses termes aura pour coefficient numérique

$$\frac{1.2.3.4.5\ldots n}{(1.2.3\ldots p)(1.2.3\ldots q)(1.2.3\ldots r)\ldots}.$$

La démonstration de ce théorème est aisée à tirer de la théorie des combinaisons, et nous ne croyons pas devoir nous y arrêter.

V.

Exemple I. — Que l'on ait à éliminer x des deux équations

$$1 + Ax + Bx^2 = 0,$$
$$1 + \frac{a}{x} + \frac{b}{x^2} = 0,$$

on trouvera, en faisant le carré de $A + Bx$,

$$A' = A^2, \quad B' = 2AB, \quad C' = B^2,$$

et de même

$$a' = a^2, \quad b' = 2ab, \quad c' = b^2,$$

donc

$$\varphi = Aa + 2\left(B - \frac{A^2}{2}\right)\left(b - \frac{a^2}{2}\right) + 3ABab + B^2b^2,$$

$$= Aa + 2Bb - A^2b - Ba^2 + \frac{A^2a^2}{2} + 3ABab + B^2b^2.$$

Donc, en négligeant les produits de A et B, aussi bien que ceux de a et b, qui seraient de plus de deux dimensions, on aura

$$\varphi^2 = A^2a^2 + 4ABab + 4B^2b^2,$$
$$\varphi^3 = 0,$$
$$\varphi^4 = 0,$$
$$\ldots\ldots$$

Substituant donc ces valeurs dans l'équation

$$1 - \varphi + \frac{\varphi^2}{2} - \ldots = 0,$$

on aura

$$1 - Aa - 2Bb + A^2b + Ba^2 - ABab + B^2b^2 = 0.$$

VI.

Au reste, on peut encore trouver la valeur de φ d'une manière plus simple sans être obligé de calculer les quantités $A', B', C', \ldots, A'', B'', C'', \ldots$.

Pour cela, on remarquera que

$$\varphi = Pp + 2Qq + 3Rr + 4Ss + \ldots,$$

de sorte que la difficulté se réduit à trouver les quantités P, Q, R, ... et $p, q, r, \ldots$.

Or il est facile de voir par l'Article I que

$$\log(1 + Ax + Bx^2 + Cx^3 + \ldots) = Px + Qx^2 + Rx^3 + Sx^4 + \ldots.$$

Qu'on différentie cette équation en faisant varier x, et l'on aura, après avoir divisé par dx,

$$\frac{A + 2Bx + 3Cx^2 + \ldots}{1 + Ax + Bx^2 + Cx^3 + \ldots} = P + 2Qx + 3Rx^2 + 4Sx^3 + \ldots.$$

Donc, multipliant en croix et comparant les termes, on aura

$$A = P,$$
$$2B = 2Q + AP,$$
$$3C = 3R + 2AQ + BP,$$
$$4D = 4S + 3AR + 2BQ + CP,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

d'où l'on tire

$$P = A,$$
$$Q = \frac{2B - AP}{2},$$
$$R = \frac{3C - 2AQ - BP}{3},$$
$$S = \frac{4D - 3AR - 2BQ - CP}{4},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Ayant déterminé ainsi les quantités P, Q, R, ... par les quantités A, B, C, ..., on changera ces dernières en $a, b, c, \ldots$, et l'on aura les valeurs des quantités $p, q, r, \ldots$.

On se souviendra seulement de rejeter dans les expressions de P, Q, R, ... les termes où A, B, C, ... formeraient des produits de plus de n dimensions, et dans celles de $p, q, r, \ldots$ les termes où $a, b, c, \ldots$ formeraient des produits de plus de m dimensions.

VII.

Si l'on met, pour plus de simplicité, $2Q$, $3R$, $4S$,... au lieu de Q, R, S,..., et de même $2q$, $3r$, $4s$,... à la place de q, r, s,..., la valeur de φ deviendra

$$\varphi = Pp + \frac{Qq}{2} + \frac{Rr}{3} + \frac{Ss}{4} + \dots,$$

et l'on aura pour la détermination de P, Q, R,... les formules suivantes

$$\begin{aligned} P &= A, \\ Q &= 2B - AP, \\ R &= 3C - BP - AQ, \\ S &= 4D - CP - BQ - AR, \\ T &= 5E - DP - CQ - BR - AS, \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{aligned}$$

Il en sera de même pour les quantités p, q, r,..., en changeant seulement A en a, B en b, C en c,..., et l'équation sera, comme ci-dessus,

$$1 - \varphi + \frac{\varphi^2}{2} - \frac{\varphi^3}{2.3} + \dots = 0,$$

dans laquelle il ne faudra conserver que les termes où les dimensions des produits de A, B, C,... seront égales ou plus petites que n, et ceux où les dimensions des produits de a, b, c,... seront égales ou plus petites que m.

VIII.

Exemple II. — On propose d'éliminer x des équations

$$1 + Ax + Bx^2 + Cx^3 = 0,$$

$$1 + \frac{a}{x} + \frac{b}{x^2} + \frac{c}{x^3} = 0.$$

On trouvera d'abord

$$\begin{aligned} P &= A, \\ Q &= 2B - A^2, \\ R &= 3C - 3AB + A^3, \\ S &= -4AC - 2B^2 + 4A^2B, \\ T &= -5BC + 5A^2C + 5AB^2, \\ U &= -3C^2 + 12ABC + 2B^3, \\ V &= 7AC^2 + 7B^2C, \\ W &= 8BC^2; \end{aligned}$$

donc on aura

$$\begin{aligned} \varphi = {} & Aa + \frac{1}{2}(2B - A^2)(2b - a^2) \\ & + \frac{1}{3}(3C - 3AB + A^3)(3c - 3ab + a^3) \\ & + \frac{1}{4}(-4AC - 2B^2 + 4A^2B)(-4ac - 2b^2 + 4a^2b) \\ & + \frac{1}{5}(-5BC + 5A^2C + 5AB^2)(-5bc + 5a^2c + 5ab^2) \\ & + \frac{1}{6}(-3C^2 + 12ABC + 2B^3)(-3c^2 + 12abc + 2b^3) \\ & + \frac{1}{7}(7AC^2 + 7B^2C)(7ac^2 + 7b^2c) \\ & + \frac{1}{8}8BC^2 \times 8bc^3. \end{aligned}$$

Or, en rejetant les termes où A, B, C et a, b, c sont des produits de plus de deux dimensions, et ordonnant les autres par rapport aux dimensions de ces mêmes quantités, on aurait

$$\begin{aligned} \varphi = {} & Aa + 2Bb + 3Cc \\ & - Ba^2 - 3Cab - bA^2 - 3cAB \\ & + \frac{A^2a^2}{2} + 3ABab + (2AC + B^2)(2ac + b^2) + 5BCbc + \frac{3}{2}C^2c^2, \end{aligned}$$

d'où je tire, en ne conservant que les produits de trois ou d'un moindre

nombre de dimensions,

$$\varphi^2=(Aa+2Bb+3Cc)^2$$
$$+2(Aa+2Bb+3Cc)\left[-Ba^2-3Cab-bA^2-3cAB+\frac{A^2a^2}{2}+3ABab\right.$$
$$\left.+(2AC+B^2)(2ac+b^2)+5BCbc+\frac{3}{2}C^2c^2\right]$$
$$+2(Ba^2+3Cab)(bA^2+3cAB),$$

et

$$\varphi^3=(Aa+2Bb+3Cc)^3,$$
$$\varphi^4=0,$$

de sorte que l'équation sera

$$1-Aa-\frac{1}{2}(2B-A^2)(2b-a^2)$$
$$-\frac{1}{3}(3C-3AB+A^3)(3c-3ab+a^3)$$
$$-\frac{1}{4}(-4AC-2B^2+4A^2B)(-4ac-2b^2+4a^2b)$$
$$-\frac{1}{5}(-5BC+5A^2C+5AB^2)(-5bc+5a^2c+5ab^2)$$
$$-\frac{1}{6}(-3C^2+12ABC+2B^3)(-3c^2+12abc+2b^3)$$
$$-\frac{1}{7}(7AC^2+7B^2C)(7ac^2+7b^2c)-8BC^2bc^2$$
$$+(Aa+2Bb+3Cc)\left[\frac{Aa+2Bb+3Cc}{2}-Ba^2-3Cab-bA^2-3cAB+\frac{A^2a^2}{2}\right.$$
$$\left.+3ABab+(2AC+B^2)(2ac+b^2)+5BCbc+\frac{3}{2}C^2c^2\right]$$
$$+(Ba^2+3Cab)(bA^2+3cAB)-\frac{1}{2.3}(Aa+2Bb+3Cc)^3=0.$$

NOUVELLES RÉFLEXIONS

SUR

LES TAUTOCHRONES.

NOUVELLES RÉFLEXIONS

SUR

LES TAUTOCHRONES.

(*Nouveaux Mémoires de l'Académie royale des Sciences et Belles-Lettres de Berlin*, année 1770.)

Depuis Huyghens, qui le premier a trouvé que la cycloïde était la courbe *tautochrone* pour les corps pesants dans le vide, les Géomètres se sont appliqués à chercher des méthodes directes et générales pour déterminer les courbes qui jouissent de la même propriété dans des hypothèses quelconques de pesanteur et de résistance.

Les premières solutions analytiques qui aient paru de ce Problème sont, je crois, celles que MM. Jean Bernoulli et Euler ont données : le premier, dans les *Mémoires de l'Académie des Sciences de Paris*, pour l'année 1730, et le second, dans le tome IV des anciens *Commentaires de Pétersbourg*. Ces solutions sont fondées sur la considération des fonctions de dimension nulle de deux variables, et il faut avouer qu'elles sont aussi simples et aussi directes qu'on peut le désirer; mais comme ces solutions exigent qu'on ait l'expression de la vitesse, elles ont l'inconvénient de ne pouvoir être applicables qu'aux cas où l'équation différentielle de la vitesse est intégrable. Pour suppléer à ce défaut, il fallait trouver une méthode qui fût indépendante de l'intégration de l'équation qui donne la vitesse, et c'est à quoi M. Fontaine est parvenu par le moyen d'un calcul particulier qui consiste à faire varier les mêmes quantités de

deux manières différentes, et qui a quelque rapport à celui dont les Géomètres du siècle passé se sont servis pour résoudre les Problèmes des *trajectoires* et quelques autres du même genre.

La solution de M. Fontaine parut d'abord si satisfaisante, *qu'on ne parla plus de tautochrones*, comme cet Auteur le dit lui-même dans ses *OEuvres* imprimées en 1764, page 15; mais le Mémoire que je lus à l'Académie sur ce sujet, en 1767 (*), réveilla l'attention des Géomètres, et fit voir que la matière n'était pas encore si épuisée qu'on l'avait cru. Ayant envisagé la question des *tautochrones* sous un point de vue un peu différent de celui sous lequel on l'avait toujours considérée avant moi, je suis parvenu à une formule générale et très-simple, qui donne l'expression de la force nécessaire pour produire le tautochronisme, et qui renferme non-seulement tous les cas déjà connus, mais encore une infinité d'autres dans lesquels on ignorait que le Problème fût résoluble. Un grand Géomètre, à qui je communiquai cette formule, mais en supprimant l'analyse qui m'y avait conduit, la trouva assez importante pour mériter qu'il en cherchât la démonstration; et c'est ce qui a occasionné les savantes et ingénieuses recherches qu'il a faites sur la même matière et qui se trouvent dans nos *Mémoires* pour l'année 1765; mais mon travail n'a pas été jugé si favorablement par M. Fontaine, qui vient de m'attaquer dans un Mémoire imprimé dans le volume de l'Académie des Sciences de Paris, pour l'année 1768. Je m'attendais, avec raison, à trouver dans ce Mémoire des objections solides et dignes du nom de cet illustre adversaire; mais j'ai été bien surpris de n'y trouver que quelques expressions peu obligeantes, sans aucune raison bonne ou mauvaise. Comme la simple lecture de son Mémoire et du mien peut suffire pour me mettre à couvert de ses critiques, je les passerai entièrement sous silence, et je me contenterai d'exposer dans ce Mémoire quelques réflexions que j'ai faites à cette occasion, tant sur ma solution de 1767 que sur la nouvelle solution de M. Fontaine de 1768. Je commencerai par donner la solution d'un Problème qui n'a pas encore été résolu, et qui sert à jeter un grand

(*) *OEuvres de Lagrange*, t. II, p. 317.

jour sur celui des *tautochrones;* je résoudrai ensuite ce dernier Problème dans toute sa généralité; du moins je donnerai les formules les plus générales qu'on puisse désirer sur cet objet; de là je passerai à examiner la solution que M. Fontaine donne pour générale, et je ferai voir qu'elle est incomplète, et même illusoire à certains égards.

Problème I.

Soit a l'espace total que peut parcourir un corps qui part d'un point donné avec une certaine vitesse, et qui est continuellement retardé dans sa marche par une force variable p; soient de plus x un espace quelconque parcouru pendant le temps t, u la vitesse du corps au bout de ce temps, et L *une fonction quelconque donnée de x et de a : on demande par quelle fonction de u et de x doit être exprimée la force p, pour que le temps t soit égal à une fonction quelconque de* L.

1. On aura d'abord, par les principes de mécanique, l'équation

$$(A) \qquad u\,du + p\,dx = 0$$

qui est, comme on voit, une équation différentielle du premier ordre à deux variables x et u, p étant par l'hypothèse du Problème une fonction de x et u. Ainsi il y aura une fonction de x et u, que nous désignerons par R, par laquelle cette équation étant multipliée deviendra intégrable; de sorte qu'on aura l'équation finie

$$\int \mathrm{R}(u\,du + p\,dx) = \text{const.}$$

Pour déterminer cette constante, on remarquera que par l'hypothèse du Problème il faut que la vitesse u soit nulle au bout de l'espace a; d'où il s'ensuit que si l'on nomme A ce que devient la quantité $\int \mathrm{R}(u\,du + p\,dx)$ lorsqu'on y fait $x = a$ et $u = 0$, on aura

$$(B) \qquad \int \mathrm{R}(u\,du + p\,dx) = \mathrm{A}.$$

Maintenant, comme le premier membre de cette équation est une fonc-

tion finie de u et x sans a, et que le second est une fonction finie de a seul, il est clair que si l'on y fait varier à la fois les trois quantités x, u et a, et qu'on suppose $dA = B\,da$, on aura cette équation différentielle à trois variables

$$R(u\,du + p\,dx) = B\,da, \tag{C}$$

de sorte qu'en regardant u comme une fonction de x et a donnée par l'équation (B), on aura

$$\frac{du}{dx} = -\frac{p}{u}, \quad \frac{du}{da} = \frac{B}{Ru}.$$

2. Cela posé, considérons le temps t que le corps met à parcourir l'espace x; on aura, comme on sait,

$$t = \int \frac{dx}{u},$$

où il faudra mettre à la place de u sa valeur en x et a donnée par l'équation (B), après quoi on intégrera en regardant a comme constante, ce qui donnera pour t une fonction de x et a.

Supposons maintenant qu'on différentie cette valeur de t en y faisant varier à la fois x et a, et l'on aura, en regardant u comme une fonction de x et a,

$$dt = \frac{dx}{u} - da \int \frac{1}{u^2}\frac{du}{da}\,dx,$$

ou bien, en substituant pour $\frac{du}{da}$ sa valeur $\frac{B}{Ru}$, et mettant la quantité B qui est une fonction de a seul hors du signe $\int$;

$$dt = \frac{dx}{u} - B\,da \int \frac{dx}{Ru^2}. \tag{D}$$

3. Or, L étant (hypothèse) une fonction donnée de x et a, on aura

$$dL = M\,dx + N\,da,$$

et comme t doit être une fonction quelconque de L, on aura donc aussi L égale à une fonction quelconque de t, que nous désignerons par T;

donc, différentiant et supposant $dT = S\,dt$, on aura

$$S\,dt = M\,dx + N\,da;$$

or, cette équation doit être identique avec l'équation (D); donc on aura, par la comparaison des termes affectés de dx et de da,

$$\frac{M}{S} = \frac{1}{u}, \quad \frac{N}{S} = -B\int \frac{dx}{Ru^2},$$

et par conséquent

$$\frac{N}{M} = -Bu\int \frac{dx}{Ru^2}.$$

Soit, pour abréger, $\frac{N}{M} = X$, et l'on aura, en divisant par u,

$$\frac{X}{u} = -B\int \frac{dx}{Ru^2},$$

et différentiant, dans l'hypothèse de x et u seuls variables et de a constante,

$$\frac{u\,dX - X\,du}{u^2} = -B\,\frac{dx}{Ru^2};$$

d'où l'on tire

$$R = \frac{B}{Xu\frac{du}{dx} - u^2\frac{dX}{dx}};$$

mais on a $\frac{du}{dx} = -\frac{p}{u}$ (1), donc

$$R = -\frac{B}{pX + u^2\frac{dX}{dx}}.$$

Cette quantité R est, comme on voit, une fonction de u, x et a, parce que B est une fonction de a, X une fonction de a et x, et p une fonction de x et u; or, a étant donné en x et u par l'équation (B), on pourra réduire la quantité R à n'être qu'une fonction de x et u, et dans cet état ce sera le multiplicateur qui doit rendre intégrable la différentielle $u\,du + p\,dx$ (1); on pourra donc substituer cette valeur de R dans l'équation (C), et, comme cette équation n'est autre chose que la différentielle de l'équation finie (B), il est clair qu'on pourra remettre dans R la quantité a à la place de sa valeur en u et x; d'où il s'ensuit qu'on peut

mettre immédiatement dans l'équation (C) l'expression de R trouvée ci-dessus, dans laquelle les trois quantités u, x et a entrent à la fois, ce qui donnera, en divisant les deux membres par B, cette équation différentielle à trois variables

$$\frac{u\,du + p\,dx}{pX + u^2\frac{dX}{dx}} + da = 0,$$

par laquelle on pourra déterminer l'une de ces variables par les deux autres.

4. Soit, pour plus de simplicité,

$$r = pX + u^2\frac{dX}{dx},$$

en sorte que l'équation précédente devienne

$$\text{(E)} \qquad \frac{u}{r}\,du + \frac{p}{r}\,dx + da = 0.$$

Or, pour que cette équation soit possible, il faut, comme on sait, qu'on ait cette condition

$$\frac{u}{r}\frac{d\frac{p}{r}}{da} - \frac{p}{r}\frac{d\frac{u}{r}}{da} + \frac{d\frac{u}{r}}{dx} - \frac{d\frac{p}{r}}{du} = 0.$$

Mais a ne peut être contenu que dans r, parce qu'on suppose que p soit une fonction de x et u seulement; donc on aura

$$\frac{d\frac{p}{r}}{da} = -\frac{p}{r^2}\frac{dr}{da}, \qquad \frac{d\frac{u}{r}}{da} = -\frac{u}{r^2}\frac{dr}{da},$$

donc

$$\frac{u}{r}\frac{d\frac{p}{r}}{da} - \frac{p}{r}\frac{d\frac{u}{r}}{da} = 0;$$

de sorte que l'équation de condition se réduira à celle-ci

$$\text{(F)} \qquad \frac{d\frac{u}{r}}{dx} - \frac{d\frac{p}{r}}{du} = 0.$$

Il faudra donc que cette équation ait lieu en même temps que l'équation (E), sans cependant qu'il en résulte aucune nouvelle détermination entre les trois variables x, u et a. Or, c'est ce qui ne peut arriver que dans ces deux cas : 1° si l'équation (F) est absolument identique; 2° si la même équation (F) est renfermée dans l'équation (E). Nous allons examiner ces cas l'un après l'autre.

5. *Premier cas, où l'équation de condition est identique.* — Dans ce cas, il faudra qu'en regardant a comme constante, la quantité $\frac{u}{r}\,du + \frac{p}{r}\,dx$ soit une différentielle exacte d'une fonction de u et x, car la condition de l'intégrabilité de la différentielle $\frac{u}{r}\,du + \frac{p}{r}\,dx$ est

$$\frac{d\frac{u}{r}}{dx} = \frac{d\frac{p}{r}}{du},$$

qui est précisément la même que l'équation (F); donc, mettant au lieu de p sa valeur en r, laquelle est $\frac{r}{X} - \frac{u^2}{X}\frac{dX}{dx}$, il faudra que la différentielle

$$\frac{u\,du}{r} + \left(\frac{1}{X} - \frac{u^2}{rX}\frac{dX}{dx}\right)dx,$$

c'est-à-dire,

$$\frac{u^2}{r}\left(\frac{du}{u} - \frac{dX}{X}\right) + \frac{dx}{X},$$

soit intégrable; or, à cause que X est une fonction de x et a sans u, et que a est regardé ici comme constante, il est clair que le terme $\frac{dx}{X}$ sera intégrable de lui-même, de sorte qu'il faudra aussi que les termes restant $\frac{u^2}{r}\left(\frac{du}{u} - \frac{dX}{X}\right)$ le soient; ce qui ne saurait être à moins que $\frac{u^2}{r}$ ne soit une fonction de $\log u - \log X$ ou bien de $\frac{u}{X}$.

On aura donc aussi $\frac{r}{u^2}$ égal à une fonction de $\frac{u}{X}$, qu'on pourra dési-

gner par $\varphi\left(\frac{u}{X}\right)$; donc

$$r = u^2 \varphi\left(\frac{u}{X}\right),$$

et par conséquent

$$p = u^2\left[\frac{\varphi\left(\frac{u}{X}\right)}{X} - \frac{1}{X}\frac{dX}{dx}\right].$$

Or, comme la quantité a est traitée comme constante, elle pourra entrer comme telle dans la fonction indéterminée $\varphi\left(\frac{u}{X}\right)$; mais, à cause que p ne doit être qu'une fonction de u et de x, il faudra que a disparaisse de l'expression de p. Nous verrons plus bas comment on peut satisfaire à cette condition.

6. *Second cas, où l'équation de condition n'est pas identique.* — Ce cas aura lieu lorsque les deux équations (E) et (F) seront identiques l'une avec l'autre; donc, comme l'équation (F) est finie et que l'équation (E) contient les différentielles premières dx, du, da, il faudra que celle-là soit l'intégrale de celle-ci.

Or l'équation de condition (F) se réduit à celle-ci

$$\text{(F)} \qquad \frac{dr}{dx} - \frac{p}{u}\frac{dr}{du} + \frac{r}{u}\frac{dp}{du} = 0.$$

Donc si l'on fait, pour abréger,

$$q = \frac{dr}{dx} - \frac{p}{u}\frac{dr}{du} + \frac{r}{u}\frac{dp}{du},$$

en sorte qu'on ait $q = 0$, et qu'on différentie cette équation dans l'hypothèse de u, x et a variables, on aura

$$\frac{dq}{dx}dx + \frac{dq}{du}du + \frac{dq}{da}da = 0,$$

qui devra être identique avec l'équation (E); or celle-ci donne

$$du = -\frac{p\,dx}{u} - \frac{r\,da}{u};$$

donc, substituant cette valeur, on aura

$$\left(\frac{dq}{dx} - \frac{p}{u}\frac{dq}{du}\right)dx + \left(\frac{dq}{da} - \frac{r}{u}\frac{dq}{du}\right)da = 0,$$

équation qui devra être identique; de sorte qu'il faudra que les coefficients de dx et de du soient chacun égal à zéro en particulier, ce qui donnera ces deux équations-ci

$$\text{(G)} \qquad \frac{dq}{dx} - \frac{p}{u}\frac{dq}{du} = 0,$$

$$\text{(H)} \qquad \frac{dq}{da} - \frac{r}{u}\frac{dq}{du} = 0,$$

qui devront avoir lieu en même temps que l'équation (F).

Donc, supposant la fonction X connue en x et a, on pourra, par le moyen de ces trois équations, éliminer a, et il en restera deux qui ne contiendront que les variables finies x et u, avec la quantité p et ses différentielles

$$\frac{dp}{dx},\ \frac{dp}{du},\ \frac{d^2p}{dx^2},\ \frac{d^2p}{dx\,du},\ \frac{d^2p}{du^2}.$$

Ces deux équations devront donc être identiques chacune en particulier, de sorte qu'on pourra les différentier à volonté en prenant x ou u constante, comme on voudra. On pourra donc, par leur moyen, chasser la quantité p et ses différentielles, et il restera une équation finie entre u et x qui devra aussi être identique. Ainsi, ayant trouvé cette dernière équation en x et en u, on verra si elle est identique, auquel cas le Problème sera résoluble, et l'on pourra avoir facilement la valeur de p en x et en u; mais si elle ne l'est pas, ce sera une marque que les deux équations (E) et (F) ne sauraient être identiques entre elles, et qu'ainsi le Problème ne pourra pas se résoudre dans cette hypothèse.

7. Corollaire I. — Considérons l'expression générale de p que nous avons trouvée dans le premier cas, et supposons que le terme tout constant de la fonction $\varphi\left(\frac{u}{X}\right)$ soit une fonction quelconque de a que je dé-

signerai par $\frac{1}{\alpha}$, en sorte que les autres termes de la même fonction renferment chacun une puissance de u; il est clair que la valeur de p contiendra le terme

$$u^2\left(\frac{1}{\alpha X}-\frac{1}{X}\frac{dX}{dx}\right),$$

et qu'il n'y aura aucun autre terme que celui-ci qui renferme le carré u^2. Donc, pour que l'expression de p ne renferme point la quantité a, il faudra que le coefficient

$$\frac{1}{\alpha X}-\frac{1}{X}\frac{dX}{dx}$$

ne la renferme pas non plus, et par conséquent qu'il soit une fonction de x sans a. Soit donc ω cette fonction, en sorte que l'on ait

$$\frac{1}{\alpha X}-\frac{1}{X}\frac{dX}{dx}=\omega,$$

et intégrant dans l'hypothèse de a constante et de x variable, on aura

$$X=\frac{e^{-\int\omega dx}\int e^{\int\omega dx}dx}{\alpha},$$

mais

$$e^{-\int\omega dx}\int e^{\int\omega dx}dx$$

est une fonction de x seulement; donc, dénotant par ξ cette fonction, on aura

$$X=\frac{\xi}{\alpha}.$$

Substituant donc cette valeur dans l'expression de p, elle deviendra

$$p=u^2\left[\frac{\varphi\left(\frac{\alpha u}{\xi}\right)}{\xi}\alpha-\frac{1}{\xi}\frac{d\xi}{dx}\right].$$

Donc, il faudra que la fonction $\varphi\left(\frac{\alpha u}{\xi}\right)$ soit telle, que $\alpha\varphi\left(\frac{\alpha u}{\xi}\right)$ ne contienne point a, mais qu'elle contienne seulement $\frac{u}{\xi}$. Prenant donc une

fonction quelconque de $\frac{u}{\xi}$ telle que $\varphi\left(\frac{u}{\xi}\right)$, et la mettant à la place de $\alpha\varphi\left(\frac{\alpha u}{\xi}\right)$, on aura, en général,

$$p=u^2\left[\frac{\varphi\left(\frac{u}{\xi}\right)}{\xi}-\frac{1}{\xi}\frac{d\xi}{dx}\right].$$

8. Corollaire II. — Substituons maintenant cette valeur de p dans l'équation (E) du n° 4, et l'on aura, à cause de $X=\frac{\xi}{\alpha}$, l'équation

$$\frac{\frac{du}{u}-\frac{d\xi}{\xi}}{\varphi\left(\frac{u}{\xi}\right)}+\frac{dx}{\xi}+\frac{da}{\alpha}=0,$$

dont l'intégrale est

$$\Phi\left(\frac{u}{\xi}\right)+\int\frac{dx}{\xi}+\int\frac{da}{\alpha}=0.$$

Or, il faut qu'en faisant $x=a$ on ait $u=0$; donc, si l'on nomme K la valeur de $\Phi\left(\frac{u}{\xi}\right)$ lorsque $u=0$, valeur qui sera constante et indépendante de a, parce que $\Phi\left(\frac{u}{\xi}\right)$ est censée ne pas contenir a, on aura, en faisant $x=a$,

$$K+\int\frac{dx}{\xi}+\int\frac{da}{\alpha}=0,$$

d'où, à cause de $da=dx$, il s'ensuit qu'on aura aussi

$$\frac{1}{\xi}+\frac{1}{\alpha}=0 \quad \text{et} \quad \alpha=-\xi;$$

c'est-à-dire que α devra être une fonction de a semblable à la fonction ξ de x, mais prise négativement.

9. Corollaire III. — Donc, si l'on prend pour α une fonction de a semblable à la fonction de x qui est dénotée par ξ, on aura

$$X=-\frac{\xi}{\alpha};$$

donc (3)

$$\frac{N}{M} = -\frac{\xi}{\alpha},$$

et par conséquent

$$N = -\frac{M\xi}{\alpha};$$

donc

$$dL = M\left(dx - \frac{\xi\, da}{\alpha}\right) = M\xi\left(\frac{dx}{\xi} - \frac{da}{\alpha}\right),$$

de sorte que $M\xi$ devra être une fonction de

$$\int\frac{dx}{\xi} - \int\frac{da}{\alpha},$$

et par conséquent L sera aussi une fonction de

$$\int\frac{dx}{\xi} - \int\frac{da}{\alpha},$$

ou bien une fonction de

$$\frac{e^{\int\frac{dx}{\xi}}}{e^{\int\frac{da}{\alpha}}},$$

et comme t est supposé une fonction quelconque de L, il s'ensuit que le temps t sera aussi une fonction quelconque de

$$\frac{e^{\int\frac{dx}{\xi}}}{e^{\int\frac{da}{\alpha}}},$$

d'où je conclus que le premier cas de la solution précédente ne peut avoir lieu que lorsque le temps t est supposé une fonction quelconque de dimension nulle de deux fonctions semblables, l'une de x et l'autre de a.

10. Corollaire IV. — Si le temps t n'est pas une fonction de x et de a telle que nous venons de le dire, alors l'équation de condition $q = 0$ ne pourra pas être identique, et le Problème ne sera résoluble que lorsque

cette équation sera renfermée dans l'équation différentielle (E), ce qui donnera, comme nous l'avons vu (6), les deux équations finies

$$\frac{dq}{dx} - \frac{p}{u}\frac{dq}{du} = 0, \quad \frac{dq}{da} - \frac{r}{u}\frac{dq}{du} = 0.$$

Substituons au lieu de r sa valeur $pX + u^2\frac{dX}{dx}$ (4), et comme X est une fonction de x et de a sans u, et que p en est une de x et de u sans a, on aura d'abord

$$\frac{dr}{dx} = X\frac{dp}{dx} + \frac{dX}{dx}p + \frac{d^2X}{dx^2}u^2,$$

$$\frac{dr}{du} = X\frac{dp}{du} + 2\frac{dX}{dx}u,$$

d'où l'on trouvera

$$q = X\frac{dp}{dx} - \frac{dX}{dx}\left(p - u\frac{dp}{du}\right) + \frac{d^2X}{dx^2}u^2,$$

ensuite

$$\frac{dq}{dx} = X\frac{d^2p}{dx^2} + \frac{dX}{dx}u\frac{d^2p}{dx\,du} - \frac{d^2X}{dx^2}\left(p - u\frac{dp}{du}\right) + \frac{d^3X}{dx^3}u^2,$$

$$\frac{dq}{du} = X\frac{d^2p}{dx\,du} + \frac{dX}{dx}u\frac{d^2p}{du^2} + 2\frac{d^2X}{dx^2}u,$$

$$\frac{dq}{da} = \frac{dX}{da}\frac{dp}{dx} - \frac{d^2X}{da\,dx}\left(p - u\frac{dp}{du}\right) + \frac{d^2X}{dx^2\,da}u^2.$$

Ainsi l'on aura les trois équations

(F) $$X\frac{dp}{dx} + \frac{dX}{dx}\left(u\frac{dp}{du} - p\right) + \frac{d^2X}{dx^2}u^2 = 0,$$

(G) $$\begin{cases} X\dfrac{d^2p}{dx^2} + \dfrac{dX}{dx}u\dfrac{d^2p}{dx\,du} - \dfrac{d^2X}{dx^2}\left(p - u\dfrac{dp}{du}\right) + \dfrac{d^3X}{dx^3}u^2 \\ \qquad - p\left(\dfrac{X}{u}\dfrac{d^2p}{dx\,du} + \dfrac{dX}{dx}\dfrac{d^2p}{du^2} + 2\dfrac{d^2X}{dx^2}\right) = 0, \end{cases}$$

(H) $$\begin{cases} \dfrac{dX}{da}\dfrac{dp}{dx} + \dfrac{d^2X}{dx\,da}\left(u\dfrac{dp}{du} - p\right) + \dfrac{d^3X}{dx^2\,da}u^2 \\ \quad - \left(Xp + \dfrac{dX}{dx}u^2\right)\left(\dfrac{X}{u}\dfrac{d^2p}{dx\,du} + \dfrac{dX}{dx}\dfrac{d^2p}{du^2} + 2\dfrac{d^2X}{dx^2}\right) = 0, \end{cases}$$

qui devront être identiques entre elles. On traitera donc ces trois équations comme nous l'avons dit (6); mais il arrivera bien souvent qu'elles ne pourront pas avoir lieu à la fois, et alors la solution du Problème sera impossible.

11. Scolie. — On a supposé dans le Problème précédent que le temps t, employé à parcourir l'espace x, devait être exprimé par une fonction quelconque de la quantité L, qui est une fonction donnée de a et de x; d'où il s'ensuit que le temps t sera constant lorsqu'il y aura entre x et a la relation donnée par l'équation $L = \text{const.}$

Ainsi l'on pourra résoudre le Problème suivant :

Trouver la loi de la force accélératrice nécessaire pour que le corps mette toujours le même temps à parcourir un espace quelconque qui ait une relation donnée avec l'espace total.

Problème II.

On demande l'expression générale de la force accélératrice nécessaire pour le tautochronisme.

12. En conservant les dénominations du Problème I, la question se réduit à trouver quelle fonction de u et de x on doit prendre pour p, pour que l'expression de t soit telle qu'en y faisant $x = a$ elle devienne indépendante de a. Donc, en regardant (comme on l'a fait dans le Problème précédent) t comme une fonction quelconque d'une fonction donnée L de x et a, il est clair que le Problème sera résolu dans toute sa généralité si l'on fait en sorte que L soit une fonction quelconque de x et de a telle que a disparaisse lorsqu'on fait $x = a$. Ainsi la quantité L ne sera pas donnée tout à fait; mais il faudra seulement qu'elle soit assujettie à la condition dont nous venons de parler. Or nous avons supposé (3)

$$dL = M\,dx + N\,da;$$

donc, faisant $x = a$, on aura

$$dL = (M + N)\,da,$$

et comme dans cette supposition on veut que la quantité L devienne indépendante de a, il faudra que l'on ait

$$M + N = 0;$$

donc on aura, en faisant $x = a$,

$$M = -N \quad \text{et} \quad \frac{N}{M} = X = -1.$$

De sorte qu'on pourra prendre pour X toute fonction de x et de a telle qu'elle devienne égale à -1 lorsqu'on y fait $x = a$.

Mais il faut remarquer que t doit être égal à zéro lorsque $x = 0$ (hypothèse); donc si, en faisant $t = 0$, on a $T = K$ (3), il faudra aussi que L devienne égal à K lorsque $x = 0$, de sorte qu'en supposant seulement x infiniment petit on aura nécessairement

$$L = K + Cx^m,$$

K étant une constante indépendante de a, C étant une fonction de a et m un nombre quelconque positif; donc on aura aussi, en différentiant,

$$dL = mCx^{m-1}dx + x^m\frac{dC}{da}da,$$

et par conséquent

$$M = mCx^{m-1}, \quad N = x^m\frac{dC}{da} \quad \text{et} \quad X = \frac{x}{mC}\frac{dC}{da};$$

d'où l'on voit que la quantité X doit être telle qu'elle devienne égale à xD lorsque x est infiniment petit, D étant une constante quelconque. Donc il faudra que X soit égal à zéro lorsque $x = 0$, et que $\frac{dX}{dx}$ soit en même temps une quantité finie quelconque.

Voilà les seules conditions auxquelles la fonction L doive être assujettie dans le cas du tautochronisme; à ces limitations près, la fonction L pourra donc être regardée comme indéterminée, et la solution du Problème sera renfermée dans celle du Problème précédent. Or nous avons vu que ce dernier Problème est résoluble dans deux cas, lorsque l'équa-

tion de condition (F) est identique et lorsqu'elle est renfermée dans l'équation différentielle (E); il en sera de même du Problème des tautochrones, de sorte qu'on aura ces deux solutions :

13. Première Solution. — En supposant l'équation de condition identique, nous avons trouvé pour p l'expression générale (5 et 7)

$$p = u^2\left[\frac{\varphi\left(\frac{u}{\xi}\right)}{\xi} - \frac{1}{\xi}\frac{d\xi}{dx}\right],$$

et comme on a dans ce cas (9)

$$X = -\frac{\xi}{\alpha},$$

α étant une fonction de a semblable à la fonction ξ de x, il est clair qu'en faisant $x = a$ on aura $\xi = \alpha$ et par conséquent $X = -1$. Donc l'expression précédente de p sera toujours propre à produire le tautochronisme, quelle que soit la fonction de $\frac{u}{\xi}$ désignée par $\varphi\left(\frac{u}{\xi}\right)$, et quelle que soit aussi la fonction ξ de x, pourvu que celle-ci soit telle qu'on ait $\xi = 0$ et $\frac{d\xi}{dx}$ égal à une quantité quelconque finie lorsque $x = 0$ (12). Cette solution est la même que celle que j'ai donnée dans mon Mémoire de 1767 (*), en la déduisant de la supposition que l'expression du temps soit une fonction quelconque de dimension nulle de deux fonctions semblables, l'une de a et l'autre de x. Cette supposition pouvait paraître alors trop limitée; mais, après ce que nous venons de démontrer, on voit qu'elle est aussi générale que la question le permet, au moins tant que l'équation de condition doit être identique, ce qui est le cas le plus naturel et en même temps le plus général.

14. Seconde Solution. — Si l'équation de condition n'est pas identique il faut voir si elle peut être renfermée dans l'équation différentielle même, auquel cas le Problème sera encore résoluble, autrement il ne le

(*) *Œuvres de Lagrange*, t. II, p. 317.

sera pas. On aura donc, dans ce cas (6), les trois équations

$$q = 0,$$

$$\frac{dq}{dx} - \frac{p}{u}\frac{dq}{du} = 0,$$

$$\frac{dq}{da} - \frac{r}{u}\frac{dq}{du} = 0,$$

c'est-à-dire (10)

$$X\frac{dp}{dx} + \frac{dX}{dx}\left(u\frac{dp}{du} - p\right) + \frac{d^2X}{dx^2}u^2 = 0,$$

$$X\frac{d^2p}{dx^2} + \frac{dX}{dx}u\frac{d^2p}{dx\,du} + \frac{d^2X}{dx^2}\left(u\frac{dp}{du} - p\right) + \frac{d^3X}{dx^3}u^2 - p\left(\frac{X}{u}\frac{d^2p}{du\,dx} + \frac{dX}{dx}\frac{d^2p}{du^2} + \frac{d^2X}{dx^2}\right) = 0,$$

$$\frac{dX}{da}\frac{dp}{dx} + \frac{d^2X}{dx\,da}\left(u\frac{dp}{du} - p\right) + \frac{d^3X}{dx^2\,da}u^2 - \left(Xp + \frac{dX}{dx}u^2\right)\left(\frac{X}{u}\frac{d^2p}{du\,dx} + \frac{dX}{dx}\frac{d^2p}{du^2} + 2\frac{d^2X}{dx^2}\right) = 0.$$

De sorte qu'il faudra que la valeur de p en x et u soit telle qu'elle satisfasse à la fois à ces trois équations, en prenant pour X une fonction quelconque de x et de a telle que $X = -1$ lorsque $x = a$, et que $X = 0$, et $\frac{dX}{dx}$ soit égal à une *quantité finie* lorsque $x = 0$.

Or, il est clair que la recherche de la valeur de p par le moyen de ces trois équations sera très-difficile, et qu'ainsi la solution précédente peut être regardée comme plus curieuse qu'utile; mais elle peut être beaucoup simplifiée par la considération suivante.

15. Troisième Solution. — La Solution précédente est fondée sur la supposition que l'équation de condition $q = 0$ soit identique avec l'équation différentielle (E); or, pour que cette identité ait lieu, il faut que l'équation $q = 0$ exprime la même relation entre les trois quantités u, x et a, qui est exprimée par l'équation différentielle (E). Donc, si l'on imagine qu'on tire de cette dernière équation la valeur de a en u et x, et qu'on la substitue dans celle-ci, $q = 0$, il faudra que l'équation qui en

résultera soit identique. Or on a (10)

$$q = X\frac{dp}{dx} + \frac{dX}{dx}\left(u\frac{dp}{du} - p\right) + \frac{d^2X}{dx^2}u^2,$$

où p est supposé une fonction de x et u sans a, et X une fonction de x et a sans u; ainsi il ne s'agira que de substituer dans la quantité X, et dans ses différentielles $\frac{dX}{dx}$, $\frac{d^2X}{dx^2}$ à la place de a sa valeur en u et x qui est supposée donnée par l'équation (E); or, la quantité X étant indéterminée, on pourra la regarder d'abord comme une fonction de x et u sans a, et alors l'équation $q = 0$ devra être identique.

16. Il faudra seulement observer :

1° Que la quantité X devra être égale à -1 lorsque $u = 0$, quel que soit x; car il faut que X soit égal à -1 lorsque $x = a$; mais on a (hypothèse) $u = 0$ lorsque $x = a$; donc il faudra que X soit égal à -1 en y faisant $x = a$ et $u = 0$; et comme la quantité X regardée comme une fonction de u et x est supposée ne pas contenir a, il est clair que cette quantité ne pourra pas devenir égale à -1 en faisant $u = 0$ et $x = a$, à moins qu'elle ne le devienne aussi quel que soit x.

2° Qu'en faisant $x = 0$ et u tout ce qu'on voudra, la quantité X devra devenir nulle, et la quantité $\frac{dX}{dx} - \frac{p}{u}\frac{dX}{du}$ finie; car la quantité X regardée comme une fonction de x et de a doit être de la forme Dx lorsque x est très-petit (12), D étant une fonction de a; donc, mettant à la place de a sa valeur en u et x, et faisant x nul, la quantité D deviendra une fonction de u; on aura donc, lorsque x est infiniment petit,

$$X = Dx,$$

et différentiant

$$\frac{dX}{dx}dx + \frac{dX}{du}du = D + x\frac{dD}{du}du,$$

et mettant à la place de du sa valeur $-\frac{p\,dx}{u}$,

$$\frac{dX}{dx} - \frac{p}{u}\frac{dX}{du} = D - \frac{xp}{u}\frac{dD}{du};$$

donc, faisant maintenant $x = 0$, on aura

$$X = 0 \quad \text{et} \quad \frac{dX}{dx} - \frac{p}{u}\frac{dX}{du} = D.$$

17. Cela posé, si l'on considère X comme une fonction de x et a et qu'on suppose

$$dX = P\,dx + Q\,da, \quad dP = R\,dx + S\,da,$$

on aura

$$\frac{dX}{dx} = P \quad \text{et} \quad \frac{d^2X}{dx^2} = R,$$

de sorte que la quantité q deviendra

$$q = X\frac{dp}{dx} + P\left(u\frac{dp}{du} - p\right) + Ru^2.$$

Regardons maintenant la quantité X comme une fonction de x et u, et l'on aura aussi

$$dX = T\,dx + V\,du,$$
$$dT = W\,dx + Y\,du,$$
$$dV = Y\,dx + Z\,du;$$

or on a, par l'équation (E),

$$du = -\frac{p\,dx}{u} - \frac{r\,da}{u},$$

donc

$$dX = \left(T - \frac{pV}{u}\right)dx - \frac{rV}{u}du;$$

donc

$$P = T - \frac{pV}{u};$$

différentions maintenant cette valeur de P, et l'on aura

$$dP = W\,dx + Y\,du - V\,d\frac{p}{u} - \frac{p}{u}(Y\,dx + Z\,du),$$

c'est-à-dire

$$dP = \left(W - \frac{V}{u}\frac{dp}{dx} - Y\frac{p}{u}\right)dx + \left(Y - \frac{V}{u}\frac{dp}{du} + \frac{Vp}{u^2} - \frac{pZ}{u}\right)du,$$

à cause de

$$d\frac{p}{u}=\frac{1}{u}\left(\frac{dp}{dx}\,dx+\frac{dp}{du}\,du\right)-\frac{p\,du}{u^2},$$

et mettant pour du sa valeur $-\frac{p\,dx}{u}-\frac{r\,da}{u}$,

$$dP=\left(W-\frac{V}{u}\frac{dp}{dx}-\frac{2X}{u}p+\frac{Vp}{u^2}\frac{dp}{du}-\frac{Vp^2}{u^4}+\frac{Zp^2}{u^2}\right)dx$$
$$-\frac{r}{u}\left(Y-\frac{V}{u}\frac{dp}{du}+\frac{Vp}{u^3}-\frac{pZ}{u}\right)da,$$

de sorte qu'on aura

$$R=W-\frac{V}{u}\left(\frac{dp}{dx}-\frac{p}{u}\frac{dp}{du}+\frac{p^2}{u^2}\right)+\frac{Zp^2}{u^2}-\frac{2Xp}{u}.$$

Substituant donc dans q les valeurs de P et de R que nous venons de trouver, on aura

$$q=X\frac{dp}{dx}+\left(T-\frac{pV}{u}\right)\left(u\frac{dp}{du}-p\right)+Wu^2$$
$$-\frac{V}{u}\left(u^2\frac{dp}{dx}-up\frac{dp}{du}+\frac{p^3}{u^2}\right)+Zp^2-2Yup,$$

c'est-à-dire

$$q=X\frac{dp}{dx}+T\left(u\frac{dp}{du}-p\right)-Vu\frac{dp}{dx}+Wu^2+Zp^2-2Yup.$$

Or, puisque X est regardé maintenant comme une fonction de x et u, on aura

$$T=\frac{dX}{dx},\quad V=\frac{dX}{du},\quad W=\frac{d^2X}{dx^2},\quad Y=\frac{d^2X}{dx\,du},\quad Z=\frac{d^2X}{du^2},$$

donc, substituant ces valeurs, on aura pour l'équation de condition

$$(I)\quad X\frac{dp}{dx}+\frac{dX}{dx}\left(u\frac{dp}{du}-p\right)-\frac{dX}{du}u\frac{dp}{dx}+\frac{d^2X}{dx^2}u^2+\frac{dX}{du^2}p^2-2\frac{d^2X}{dx\,du}pu=0,$$

et cette équation suffira pour la solution du Problème.

18. Donc, si l'on veut que p soit exprimé par $\xi+V$, V étant une fonction donnée de u, et ξ une fonction inconnue de x, on substituera dans l'équation précédente cette valeur de p, ce qui donnera

$$X\frac{d\xi}{dx}+\frac{dX}{dx}\left(u\frac{dV}{du}-V-\xi\right)+\frac{dX}{du}u\frac{d\xi}{dx}$$
$$+\frac{d^2X}{dx^2}u^2+\frac{d^2X}{du^2}(\xi+V)^2-2\frac{d^2X}{du\,dx}(\xi+V)u=0.$$

Et l'on tâchera de déterminer par cette équation les quantités ξ et X, en sorte que ξ soit une fonction quelconque de x seul, et que X soit une fonction de x et de u assujettie aux conditions énoncées dans le n° 16.

19. Corollaire. — Si l'on suppose que la quantité X soit donnée dans l'équation (I), on pourra en tirer la valeur de p. Pour cela, je remarque que cette équation peut se réduire à celle-ci

$$d\frac{\frac{u}{Xp-\frac{dX}{du}pu+\frac{dX}{dx}u^2}}{dx}-\frac{\frac{p}{Xp-\frac{dX}{du}pu+\frac{dX}{dx}u^2}}{du}=0,$$

ce qui est aisé à vérifier par la différentiation, de sorte qu'il faudra que la quantité

$$\frac{u\,du+p\,dx}{p\left(X-u\frac{dX}{du}\right)+u^2\frac{dX}{dx}}$$

soit une différentielle complète d'une fonction de x et de u.

En effet, pour que l'équation (E) du n° 4 soit possible en regardant p et X comme des fonctions de x et de u, il est clair qu'il faut que $\frac{u\,du+p\,dx}{r}$ soit une différentielle complète. Or on a, en mettant P à la place de $\frac{dX}{dx}$ (17),

$$r=pX+Pu^2;$$

mais on a, par le même numéro,

$$P=T-\frac{pV}{u}=\frac{dX}{dx}-\frac{p}{u}\frac{dX}{du};$$

donc

$$r = p\left(\mathrm{X} - u\frac{d\mathrm{X}}{du}\right) + u^2\frac{d\mathrm{X}}{dx}.$$

Maintenant, si l'on tire la valeur de p de cette équation, on aura

$$p = \frac{r - u^2\frac{d\mathrm{X}}{dx}}{\mathrm{X} - u\frac{d\mathrm{X}}{du}},$$

et cette valeur étant substituée dans la quantité $\frac{u\,du + p\,dx}{r}$, on aura celle-ci

$$\frac{u\,du}{r} + \frac{dx - \frac{u^2}{r}\frac{d\mathrm{X}}{dx}\,dx}{\mathrm{X} - u\frac{d\mathrm{X}}{du}},$$

ou bien

$$\frac{dx}{\mathrm{X} - u\frac{d\mathrm{X}}{dx}} + \frac{\mathrm{X}u\,du - u^2\left(\frac{d\mathrm{X}}{du}\,du + \frac{d\mathrm{X}}{dx}\,dx\right)}{r\left(\mathrm{X} - u\frac{d\mathrm{X}}{du}\right)},$$

c'est-à-dire, à cause de $d\mathrm{X} = \frac{d\mathrm{X}}{du}\,du + \frac{d\mathrm{X}}{dx}\,dx$,

$$\frac{dx}{\mathrm{X} - u\frac{d\mathrm{X}}{dx}} + \frac{u\mathrm{X}^2}{r\left(\mathrm{X} - u\frac{d\mathrm{X}}{du}\right)}\,d\frac{u}{\mathrm{X}},$$

laquelle devra donc être une différentielle complète.

Soit

$$\frac{u}{\mathrm{X}} = y;$$

tirant de cette équation la valeur de u, elle sera exprimée en x et y, de sorte que, substituant cette valeur dans la quantité précédente, on aura une quantité de la forme

$$\mathrm{Y}\,dx + \frac{\mathrm{Z}}{r}\,dy,$$

où Y et Z seront des fonctions données de x et y, et où r sera une fonction

inconnue des mêmes variables, laquelle devra être telle, que la quantité dont il s'agit soit une différentielle complète. D'où il s'ensuit qu'on aura

$$\frac{\mathrm{Z}}{r} = \int\frac{d\mathrm{Y}}{dy}\,dx + \varphi(y),$$

$\varphi(y)$ étant une fonction quelconque de y, et par conséquent

$$r = \frac{\mathrm{Z}}{\varphi(y) + \int\frac{d\mathrm{Y}}{dy}\,dx}.$$

Ayant r, on aura p par la formule ci-dessus, de sorte qu'en remettant $\frac{u}{\mathrm{X}}$ à la place de y, on aura p en x et u.

20. Scolie. — Au reste, puisque l'on a

$$dt = \frac{dx}{u} \quad \text{et} \quad u\,du + p\,dx = 0,$$

on aura aussi

$$dt = \frac{dx}{u} + \mathrm{X}(u\,du + p\,dx),$$

X étant une quantité quelconque; donc on pourra déterminer X en sorte que la quantité dt ou

$$\left(\frac{1}{u} + p\mathrm{X}\right)dx + \mathrm{X}u\,du$$

soit intégrable; alors le temps t deviendra une fonction de x et de u; or t doit être égal à zéro lorsque $x = 0$, et pour avoir le temps total il faudra faire $u = 0$; donc si l'on veut que le tautochronisme ait lieu, il faudra que l'intégrale de

$$\left(\frac{1}{u} + p\mathrm{X}\right)dx + \mathrm{X}u\,du$$

soit une telle fonction de x et de u, qu'elle s'évanouisse lorsque $x = 0$ et qu'elle devienne constante, c'est-à-dire indépendante de x lorsque $u = 0$.

Or c'est ce qui aura lieu si l'on a $uX = 0$ lorsque $x = 0$, et $\frac{1}{u} + pX = 0$ lorsque $u = 0$. Maintenant, pour que

$$\left(\frac{1}{u} + pX\right) dx + X u\, du$$

soit intégrable, il faut que l'on ait

$$\frac{1}{u} + pX = \int \frac{d(Xu)}{dx}\, du = \int \frac{dX}{dx}\, u\, du;$$

donc on aura, en général,

$$p = \frac{\int \frac{dX}{dx}\, u\, du - \frac{1}{u}}{X},$$

X étant une fonction quelconque de x et de u telle que l'on ait $X = 0$ lorsque $x = 0$, et $\int \frac{dX}{dx}\, u\, du = 0$ lorsque $u = 0$.

Soit, par exemple,

$$X = \xi V,$$

ξ étant une fonction de x telle qu'elle soit égale à zéro lorsque $x = 0$, et V une fonction de u; on aura donc

$$\frac{dX}{dx} = V\frac{d\xi}{dx} \quad \text{et} \quad \int \frac{dX}{dx}\, u\, du = \frac{d\xi}{dx} \int V u\, du,$$

de sorte que V devra être tel que $\int V u\, du$ soit nul lorsque $u = 0$; de cette manière on aura, en général,

$$p = \frac{1}{\xi}\frac{d\xi}{dx}\frac{\int V u\, du}{V} - \frac{1}{\xi V u}.$$

Supposons $V = u^m$, on aura

$$\int V u\, du = \frac{u^{m+2}}{m+2};$$

d'où l'on voit que $m + 2$ doit être plus grand que zéro, c'est-à-dire $m > -2$. Faisons donc $m + 2 = n$, n étant un nombre quelconque

positif, on aura

$$V = u^{n-2}, \quad \int V u\, du = \frac{u^n}{n},$$

et l'expression de p sera

$$p = \frac{1}{n\xi}\frac{d\xi}{dx}u^2 - \frac{1}{\xi u^{n-1}}.$$

Si l'on fait $n = 1$, on aura

$$p = \frac{1}{\xi}\frac{d\xi}{dx}u^2 - \frac{1}{\xi}.$$

Ce qui pourrait servir, ce semble, à déterminer les tautochrones dans les milieux résistants comme les carrés des vitesses; mais il faut remarquer que le coefficient de u^2 dans l'expression de p que nous venons de trouver ne peut jamais être constant; car supposant $\frac{1}{\xi}\frac{d\xi}{dx} = K$, on aurait $\xi = he^{Kx}$, ce qui n'est pas nul lorsque $x = 0$, contre l'hypothèse; donc la formule précédente ne pourra avoir lieu que lorsqu'on supposera la densité du milieu variable.

La solution que nous venons de donner est analogue à celle que nous avons déjà donnée à la fin de notre Mémoire de 1767. M. d'Alembert en a donné de son côté une pareille, qu'il a accompagnée d'un grand nombre de remarques très-intéressantes, et qui lui sont propres; c'est pourquoi nous ne nous arrêterons pas davantage sur ce sujet.

Remarques sur la solution du Problème des tautochrones, donnée par M. Fontaine dans les Mémoires de l'Académie des Sciences de Paris, *pour l'année* 1768.

21. M. Fontaine réduit la solution de ce Problème à deux équations qui, en faisant $S = 0$, pour avoir le cas du tautochronisme, se réduisent à celles-ci (p. 468) :

$$\alpha\frac{dp}{dx} - p\frac{d\alpha}{dx} + \frac{d\alpha}{dx}\frac{dp}{du}u + \frac{d^2\alpha}{dx^2}u^2 = 0,$$

$$\frac{d\alpha}{dx}\frac{d^2p}{du^2} + 2\frac{d^2\alpha}{dx^2} = 0,$$

où p est la force retardatrice le long de l'arc x, force qu'il suppose être la somme de deux fonctions, l'une de x et l'autre de u, en sorte que l'on ait $\frac{d^2p}{dx\,du} = 0$, et α est une fonction de dimension nulle de x et de a, laquelle doit être égale à zéro lorsque $x = 0$, et égale à 1 lorsque $x = a$ (p. 466).

22. Je remarquerai d'abord que la supposition que α soit une fonction de dimension nulle de x et a est trop limitée; aussi M. Fontaine s'en écarte-t-il dans le premier exemple qu'il donne et où il trouve

$$\alpha = \frac{e^{-kx} - 1}{e^{-ka} - 1},$$

qui n'est pas, comme on voit, une fonction de dimension nulle de x et de a. Cette méprise n'influe à la vérité en rien sur sa solution, mais elle peut servir, ce me semble, à inspirer au lecteur quelque défiance sur l'exactitude de ses calculs.

23. Considérons maintenant les deux équations de M. Fontaine. Il est clair que la première est la même que l'équation que nous avons désignée par (F) dans le n° 9, en y mettant α à la place de X, de sorte que cette équation de M. Fontaine n'est autre chose que l'équation de condition nécessaire pour que l'équation différentielle

$$\frac{u\,du + p\,dx}{p\alpha + u^2\frac{d\alpha}{dx}} + da = 0$$

soit possible; et c'est ce qu'on peut aisément vérifier par le calcul (n^{os} 4 et suivants).

Or nous avons vu dans le Problème II que la condition du tautochronisme n'exige autre chose sinon que l'équation dont il s'agit soit possible en prenant pour X ou α une fonction quelconque de x et de a telle qu'elle soit nulle lorsque $x = 0$, et égale à -1 lorsque $x = a$. Ainsi la première équation de M. Fontaine suffit pour la solution du Problème, et il n'est nullement nécessaire, comme cet Auteur le prétend (p. 467), d'en chercher encore une autre.

Quant aux conditions auxquelles notre théorie exige que la quantité X soit soumise, elles s'accordent aussi avec celles que M. Fontaine exige dans la fonction α, à cela près que nous avons trouvé que la quantité X devait être égale à -1 lorsque $x = a$, et que M. Fontaine suppose que la fonction α soit égale à 1 lorsque $x = a$; mais il faut observer que, comme l'équation de M. Fontaine dont nous venons de parler contient la quantité α ou ses différentielles dans tous les termes, on y peut supposer également α positif ou négatif; ainsi, si l'on met dans notre équation (F) $-\alpha$ à la place de X, on aura également l'équation de M. Fontaine, et alors les conditions de α et de X seront les mêmes chez lui et chez nous.

24. Si donc M. Fontaine s'en était tenu à sa première équation, il aurait pu en tirer une solution générale du Problème des tautochrones; mais il aurait dû, pour cela, distinguer les deux cas où cette équation est identique et où elle ne l'est pas, comme nous l'avons fait dans les Problèmes précédents. Or nous avons vu que le premier cas ne peut avoir lieu que lorsque la force p est exprimée ainsi

$$p = u^2\left[\frac{\varphi\left(\frac{u}{\xi}\right)}{\xi} - \frac{1}{\xi}\frac{d\xi}{dx}\right],$$

ce qui revient à notre Solution de 1767, où nous étions parti de la supposition que le temps devait être une fonction de dimension nulle de deux fonctions pareilles, l'une de x et l'autre de a (13).

Ainsi, en supposant que l'équation de M. Fontaine doive être identique, il est clair que sa Solution ne saurait être plus générale que la mienne de 1767; mais ma Solution a sur la sienne l'avantage de présenter dans une seule formule générale tous les cas dans lesquels le Problème est résoluble, et c'est en quoi consiste principalement le mérite de cette Solution, si elle en a quelqu'un.

Mais si l'on veut que l'équation de M. Fontaine ne soit pas identique, alors on aura encore deux autres équations analogues à celles que nous avons données dans le n° 14, de sorte que dans ce cas on aura nécessai-

rement trois équations qui seront les mêmes que celles du numéro cité, en y mettant simplement α à la place de X.

En général, soit la première équation de M. Fontaine représentée par

$$q = 0,$$

on aura nécessairement, dans le cas où cette équation n'est pas identique, les deux équations

$$\frac{dq}{dx} - \frac{p}{u}\frac{dq}{du} = 0, \quad \frac{dq}{da} - \frac{r}{u}\frac{dq}{du} = 0,$$

où (4)

$$r = p\alpha + u^2\frac{d\alpha}{dx};$$

et ces deux équations devront être identiques avec l'équation $q = 0$; autrement, le cas dont il s'agit ne pourra pas avoir lieu.

25. Voyons maintenant ce que donne la seconde équation de M. Fontaine. Il est facile de voir que cette équation se réduit à celle-ci

$$\frac{dq}{du} = 0,$$

à cause que M. Fontaine suppose $\frac{d^2p}{dx\,du} = 0$ et que α ne doit point contenir u; de sorte qu'on aura, suivant M. Fontaine,

$$q = 0 \quad \text{et} \quad \frac{dq}{du} = 0.$$

Or je dis que cela ne saurait avoir lieu que lorsque l'équation $q = 0$ est identique; car si cette équation n'est pas identique, il faudra que l'on ait en même temps, comme nous venons de le dire ci-dessus,

$$\frac{dq}{dx} - \frac{p}{u}\frac{dq}{du} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{dq}{da} - \frac{r}{u}\frac{dq}{du} = 0;$$

donc si l'on fait $\frac{dq}{du} = 0$, il faudra faire aussi $\frac{dq}{dx} = 0$ et $\frac{dq}{da} = 0$, ce qui exige que l'équation $q = 0$ soit identique, c'est-à-dire qu'elle n'exprime aucune relation entre les trois variables x, u et a.

De là, et de ce que nous avons dit plus haut, il s'ensuit que les deux équations que M. Fontaine donne pour la solution générale du Problème des tautochrones ne sauraient jamais fournir une solution plus générale que celle qui est renfermée dans ma formule de 1767, que M. Fontaine accuse d'être trop particulière. Aussi l'application que M. Fontaine prétend faire de ses équations au cas où la force p serait exprimée par

$$\sigma + gu + hu^2 + ku^3,$$

g, h et k étant des constantes et σ une fonction de x, est illusoire et fautive, comme il est facile de s'en convaincre, avec un peu de réflexion, d'après les remarques que nous venons de faire sur ce sujet.

26. Je dois remarquer encore, quoique ceci n'ait aucun rapport au Problème des tautochrones, que M. Fontaine ne s'exprime pas exactement quand il dit qu'il a *appris aux Géomètres* les conditions qui rendent possibles les équations différentielles du premier degré à trois variables. Il me semble que les Géomètres les connaissaient longtemps avant que M. Fontaine fût en état de les leur enseigner. Car on trouve dans un Mémoire de M. Nicolas Bernoulli *sur les Trajectoires*, imprimé en partie dans les *Actes de Leipsic* de l'année 1720, en partie dans le tome VII des Suppléments, qui a paru en 1721, et réimprimé ensuite dans le second volume des *Œuvres* de M. Jean Bernoulli, on trouve, dis-je, dans ce Mémoire, le Théorème suivant :

Si l'on a l'équation $dx = p\,dy + q\,da$, *p et q étant des fonctions de x, y et a, et qu'on suppose, en général,* $dp = \mathrm{T}\,dx + \mathrm{S}\,dy + \mathrm{R}\,da$, *on aura nécessairement, en regardant a comme constante, l'équation*

$$dq = \mathrm{R}\,dy + \mathrm{T}q\,dy,$$

laquelle servira à déterminer q. (*Voyez* les pages 311 et 312 des Suppléments cités à la page 443 du tome II des *Œuvres* de M. Jean Bernoulli.)

Or si l'on suppose qu'en regardant a comme constante on ait, en général,

$$dq = \mathrm{P}\,dx + \mathrm{Q}\,dy,$$

et qu'on mette au lieu de dx sa valeur $p\,dy$, on aura

$$dq = (\mathrm{P}p + \mathrm{Q})\,dy,$$

ce qui, étant substitué dans l'équation de M. Bernoulli, donnera celle-ci

$$\mathrm{P}p + \mathrm{Q} = \mathrm{R} + \mathrm{T}q,$$

qui est l'équation de condition de M. Fontaine.

On voit par là que ce Théorème n'était pas nouveau le 19 novembre 1738, lorsque M. Fontaine le publia à Paris, comme il le dit à la page 28 du Recueil de ses Œuvres. On doit dire la même chose du Théorème de M. Fontaine qui concerne les fonctions où les variables remplissent partout le même nombre de dimensions; car on voit que M. Euler avait déjà fait usage de ce Théorème dans le second volume de sa *Mécanique* imprimée en 1736, pages 49, 252 et 224. Je ne nie pas, au reste, que M. Fontaine n'ait trouvé ces Théorèmes de lui-même : du moins je suis persuadé qu'il était aussi en état que personne de les trouver; mais on ne saurait disconvenir, ce me semble, qu'il n'ait été prévenu là-dessus par MM. Bernoulli et Euler.

DÉMONSTRATION

D'UN

THÉORÈME D'ARITHMÉTIQUE.