



MÉMOIRE

sur

L'UTILITÉ DE LA MÉTHODE DE PRENDRE LE MILIEU

entre

LES RÉSULTATS DE PLUSIEURS OBSERVATIONS,

DANS LEQUEL ON EXAMINE LES AVANTAGES DE CETTE MÉTHODE PAR LE CALCUL
DES PROBABILITÉS,
ET OÙ L'ON RÉSOUT DIFFÉRENTS PROBLÈMES RELATIFS A CETTE MATIÈRE.

(*Miscellanea Taurinensia*, t. V, 1770-1773.)

Quand on a plusieurs observations d'un même phénomène dont les résultats ne sont pas tout à fait d'accord, on est sûr que ces observations sont toutes, ou au moins en partie, peu exactes, de quelque source que l'erreur puisse provenir; alors on a coutume de prendre le milieu entre tous les résultats, parce que de cette manière, les différentes erreurs se répartissant également dans toutes les observations, l'erreur qui peut se trouver dans le résultat moyen devient aussi moyenne entre toutes les erreurs. Or, quoique tout le monde reconnaisse l'utilité de cette pratique pour diminuer, autant qu'il est possible, l'incertitude qui naît de l'imperfection des instruments et des erreurs inévitables des observations, j'ai cru cependant qu'il serait bon d'examiner et d'apprécier par le calcul les avantages qu'on peut espérer de retirer d'une semblable méthode; c'est l'objet que je me suis proposé dans ce Mémoire. Je commencerai par supposer que les erreurs qui peuvent se glisser dans

chaque observation soient données, et qu'on connaisse aussi le nombre des cas qui peuvent donner ces erreurs, c'est-à-dire la facilité de chaque erreur: je supposerai ensuite que l'on connaisse seulement les limites entre lesquelles toutes les erreurs possibles doivent être renfermées avec la loi de leur facilité, et je chercherai dans l'une et dans l'autre de ces hypothèses quelle est la probabilité que l'erreur du résultat moyen soit nulle, ou égale à une quantité donnée, ou seulement comprise entre des limites données. Je ferai voir en même temps comment on peut déterminer, *a posteriori*, la loi même de la facilité des erreurs, et quelle est la probabilité que dans cette détermination on ne se trompera pas d'une quantité donnée: d'où je déduirai des règles assez simples pour la correction des instruments par des vérifications répétées.

Au reste, je suivrai dans toutes ces recherches la règle ordinaire du calcul des probabilités, suivant laquelle on estime la probabilité d'un événement par le nombre des cas favorables, divisé par le nombre de tous les cas possibles. La difficulté ne consiste que dans l'énumération de ces cas; mais cette énumération demande souvent des calculs assez compliqués, et dont on ne peut venir à bout que par des artifices particuliers: c'est ce qui a lieu surtout dans la matière que je vais traiter.

PROBLÈME I.

1. On suppose que dans chaque observation on peut se tromper d'une unité, tant en plus qu'en moins, mais que le nombre des cas qui peuvent donner un résultat exact est au nombre des cas qui peuvent donner une erreur d'une unité comme $a:2b$; on demande quelle est la probabilité d'avoir un résultat exact en prenant le milieu entre les résultats particuliers d'un nombre n d'observations.

Puisqu'il y a a cas qui donnent zéro d'erreur, et $2b$ cas qui donnent $+1$ et -1 , c'est-à-dire b cas qui donnent $+1$, et b cas qui donnent -1 d'erreur, il est clair par les règles ordinaires des probabilités que la probabilité que l'erreur soit nulle dans chaque observation particulière sera

exprimée par $\frac{a}{a+2b}$: voyons donc quelle sera la probabilité que l'erreur soit aussi nulle en prenant le milieu entre n observations. Il est facile de voir que cette question se réduit à celle-ci:

Ayant n dés dont chacun ait a faces marquées d'un zéro, b faces marquées d'une unité positive, et b faces marquées d'une unité négative, en sorte que le nombre total des faces soit $a+2b$, trouver la probabilité qu'il y a d'amener zéro en jetant tous ces dés au hasard.

Or on sait, par la théorie des combinaisons, que si on élève le trinôme $a+b(x+x^{-1})$ à la puissance n , le coefficient du terme absolu, c'est-à-dire de celui où la puissance de x sera zéro, dénotera le nombre des cas où des hasards où la somme des points marqués par tous les dés sera égale à zéro: donc, nommant ce coefficient A , on aura, à cause que le nombre de toutes les combinaisons possibles est $(a+2b)^n$, on aura, dis-je, $\frac{A}{(a+2b)^n}$ pour la probabilité cherchée.

Tout se réduit donc à trouver le coefficient de A ; or, c'est à quoi l'on peut parvenir de plusieurs manières différentes.

1° Si on développe la puissance $[a+b(x+x^{-1})]^n$ suivant le théorème de Newton, on aura, comme on sait,

$$a^n + na^{n-1}b(x+x^{-1}) + \frac{n(n-1)}{2}a^{n-2}b^2(x+x^{-1})^2 + \dots;$$

or, il est facile de voir que les puissances impaires de $x+x^{-1}$ ne renferment aucun terme sans x , et que, dans les puissances paires, il y a toujours un terme sans x , qui est celui du milieu, dans lequel les exposants de x et x^{-1} sont les mêmes. Ainsi, le terme sans x de $(x+x^{-1})^2$ sera 2, celui de $(x+x^{-1})^4$ sera $\frac{4.3}{1.2}$, celui de $(x+x^{-1})^6$ sera $\frac{6.5.4}{1.2.3}$, et ainsi des autres; donc on aura en général

$$A = a^n + \frac{2}{1} \frac{n(n-1)}{1.2} a^{n-2} b^2 + \frac{4.3}{1.2} \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2.3.4} a^{n-4} b^4 \\ + \frac{6.5.4}{1.2.3} \frac{n(n-1)(n-2) \dots (n-5)}{1.2.3.4.5.6} a^{n-6} b^6 + \dots,$$

c'est-à-dire

$$A = a^n + n(n-1)a^{n-2}b^2 + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2 \cdot 2} a^{n-4}b^4 + \frac{n(n-1)(n-2) \dots (n-5)}{2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 3} a^{n-6}b^6 + \dots$$

2° Il est visible que le trinôme $a + b(x + x^{-1})$ peut se décomposer en ces deux binômes $\alpha + \beta x$, $\alpha + \beta x^{-1}$, ce qui donne, par la comparaison des termes, $\alpha^2 + \beta^2 = a$ et $\alpha\beta = b$; d'où l'on tire $\alpha \pm \beta = \sqrt{a \pm 2b}$, et de là

$$\alpha = \frac{\sqrt{a+2b} + \sqrt{a-2b}}{2},$$

$$\beta = \frac{\sqrt{a+2b} - \sqrt{a-2b}}{2}.$$

Cela posé, on aura donc

$$\begin{aligned} [a + b(x + x^{-1})]^n &= (\alpha + \beta x)^n \left(\alpha + \frac{\beta}{x} \right)^n \\ &= \left[\alpha^n + n\alpha^{n-1}\beta x + \frac{n(n-1)}{2} \alpha^{n-2}\beta^2 x^2 + \dots \right] \\ &\quad \times \left[\alpha^n + \frac{n\alpha^{n-1}\beta}{x} + \frac{n(n-1)}{2} \frac{\alpha^{n-2}\beta^2}{x^2} + \dots \right], \end{aligned}$$

d'où il est facile de conclure que l'on aura

$$A = \alpha^{2n} + (n\alpha^{n-1}\beta)^2 + \left[\frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} \alpha^{n-2}\beta^2 \right]^2 + \left[\frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \alpha^{n-3}\beta^3 \right]^2 + \dots$$

2. COROLLAIRE I. — Soit $a = b$, c'est-à-dire qu'il y ait un nombre égal de cas qui donnent 0, ou +1, ou -1 d'erreur; la probabilité d'avoir un résultat exact dans chaque observation particulière sera $\frac{a}{a+2b} = \frac{1}{3}$, et celle d'avoir un résultat exact, en prenant le terme moyen entre les résultats de n observations, sera, suivant la première formule

[en divisant le haut et le bas de la fraction $\frac{A}{(a+2b)^n}$ par a^n],

$$1 + n(n-1) + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2} + \frac{n(n-1) \dots (n-5)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3} + \dots$$

3^n

Donc, en faisant successivement n égal à 1, 2, 3, ..., on aura

n	1,	2,	3,	4,	5,	6,...
Probabilité....	$\frac{1}{3}$,	$\frac{1}{3}$,	$\frac{7}{27}$,	$\frac{19}{81}$,	$\frac{51}{243}$,	$\frac{141}{729}$,...

On voit par cette table que la probabilité que l'erreur soit nulle diminue à mesure que l'on prend un plus grand nombre d'observations, de sorte que si l'on voulait estimer l'avantage qu'il peut y avoir à prendre le milieu entre plusieurs observations, par l'excès de la probabilité que l'erreur soit nulle dans le résultat moyen, sur celle que l'erreur soit aussi nulle dans chaque résultat particulier, on trouverait, dans le cas dont il s'agit ici, que l'avantage serait toujours négatif, c'est-à-dire qu'il se changerait en désavantage, lequel irait même en augmentant plus il y aurait d'observations; d'où il semble que l'on pourrait conclure que, dans ce cas, il vaudrait mieux s'en tenir à une observation unique, que de prendre le milieu entre plusieurs observations; mais il y a une considération essentielle à faire sur cette matière, de laquelle il résulte qu'il est toujours plus avantageux dans la pratique de multiplier des observations autant que l'on peut : c'est ce que nous discuterons plus bas.

3. COROLLAIRE II. — Soit maintenant $a = 2b$, en sorte que le nombre des cas qui donnent un résultat exact soit égal au nombre de ceux qui peuvent donner une erreur de +1 ou -1. Dans ce cas, il vaudra mieux se servir de la seconde formule, car on aura $\alpha = \sqrt{b}$, $\beta = \sqrt{b}$, de sorte qu'à cause de $a + 2b = 4b$, on aura, en divisant le haut et le bas de la fraction $\frac{A}{(a+2b)^n}$ par b^n ,

$$1 + n^2 + \left[\frac{n(n-1)}{2} \right]^2 + \left[\frac{n(n-1)(n-2)}{2 \cdot 3} \right]^2 + \dots$$

4^n

pour la probabilité que l'erreur soit nulle en prenant le milieu entre n observations.

Donc, faisant successivement n égal à 1, 2, 3, ..., on aura les résultats suivants

n	1,	2,	3,	4,....
Probabilité....	$\frac{1}{2}$,	$\frac{3}{8}$,	$\frac{5}{16}$,	$\frac{35}{128}$,....

où l'on voit que la probabilité diminue à mesure que n augmente, comme dans le cas du Corollaire précédent.

4. COROLLAIRE III. — Soit $b = 2a$, de manière que le nombre des cas qui peuvent donner une erreur d'une unité tant en plus qu'en moins soit double de celui où l'on aurait un résultat exact, on aura ici, pour la probabilité que l'erreur soit nulle en prenant le milieu entre n observations,

$$1 + \frac{4n(n-1)}{2 \cdot 2} + \frac{16n(n-1)(n-2)(n-3)}{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2} + \frac{26n(n-1) \dots (n-5)}{2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 3} + \dots$$

Donc, faisant successivement n égal à 1, 2, 3, ..., on aura

n	1,	2,	3,	4,....
Probabilité....	$\frac{1}{5}$,	$\frac{9}{25}$,	$\frac{1}{5}$,	$\frac{29}{125}$,....

Ainsi, pour deux observations, l'avantage sera de $\frac{9}{25} - \frac{1}{5} = \frac{4}{25}$, pour trois il sera de $\frac{1}{5} - \frac{1}{5} = 0$, pour quatre égal à $\frac{29}{125} - \frac{1}{5} = \frac{4}{125}$, etc.; d'où il paraît que le plus grand avantage a lieu en prenant le milieu entre deux observations seulement.

5. REMARQUE I. — Pour faciliter davantage la solution du Problème précédent, il est bon de chercher la loi que suivent les termes de la série qui représentent les probabilités qui répondent à 1, 2, 3, ..., observations; or, si l'on prend la fraction $\frac{1}{1-z[a+b(x+x^{-1})]}$, et qu'on la dé-

ENTRE LES RÉSULTATS DE PLUSIEURS OBSERVATIONS. 179
veloppe en série suivant les puissances de z , on aura, comme on sait,

$$1 + z[a+b(x+x^{-1})] + z^2[a+b(x+x^{-1})]^2 + \dots$$

de sorte que dans cette série le coefficient de z^n sera la puissance $n^{\text{ième}}$ de $a+b(x+x^{-1})$; donc, si l'on nomme A' , A'' , A''' , les valeurs de A qui répondent à $n=1, 2, 3, \dots$, c'est-à-dire les termes sans x des puissances $a+b(x+x^{-1})$, $[a+b(x+x^{-1})]^2$, ..., il est clair que la série $1 + A'z + A''z^2 + A'''z^3 + \dots$ sera égale à la somme des termes sans x de la fraction $\frac{1}{1-z[a+b(x+x^{-1})]}$ développée suivant les puissances de x et de x^{-1} ; de sorte que si l'on représente par

$$Z + Z'(x + \frac{1}{x}) + Z''(x^2 + \frac{1}{x^2}) + \dots$$

la série qui résulte du développement de cette fraction suivant les puissances de x et de $\frac{1}{x}$ (car il est facile de voir que la série dont il s'agit doit avoir nécessairement cette forme), on aura

$$Z = 1 + A'z + A''z^2 + \dots$$

ainsi, connaissant la fonction Z , il n'y aura plus qu'à la réduire en série suivant les puissances de z , pour avoir les quantités A , A' , A'' , Pour cela, je réduis d'abord le trinôme

$$1 - az - bz(x+x^{-1}) \text{ en } (p-qx)(p-qx^{-1}),$$

ce qui me donne

$$p^2 + q^2 = 1 - az \quad \text{et} \quad pq = bz;$$

ensuite, je réduis la fraction

$$\frac{1}{(p-qx)(p-qx^{-1})} \text{ en } \alpha + \frac{\beta}{p-qx} + \frac{\beta}{p-qx^{-1}},$$

et je trouve

$$\alpha = \frac{1}{q^2 - p^2}, \quad \beta = \frac{p}{p^2 - q^2};$$

maintenant,

$$\frac{1}{p-qx} = \frac{1}{p} + \frac{qx}{p^2} + \frac{q^2x^2}{p^3} + \dots,$$

et, de même,

$$\frac{1}{p-qx^{-1}} = \frac{1}{p} + \frac{q}{p^2x} + \frac{q^2}{p^3x^2} + \dots;$$

done on aura

$$Z = \alpha + \frac{2\beta}{p}, \quad Z' = \frac{\beta q}{p^2}, \quad Z'' = \frac{\beta q^2}{p^3}, \quad Z''' = \frac{\beta q^3}{p^4}, \dots;$$

done

$$Z = \frac{1}{q^2 - p^2} + \frac{2}{p^2 - q^2} = \frac{1}{p^2 - q^2} = \frac{1}{(p+q)(p-q)};$$

mais puisque $p^2 + q^2 = 1 - az$, et $pq = bz$, on aura

$$p+q = \sqrt{1-az+2bz}, \quad p-q = \sqrt{1-az-2bz};$$

done

$$(p+q)(p-q) = \sqrt{(1-az)^2 - 4b^2z^2};$$

done enfin

$$Z = \frac{1}{\sqrt{1-2az+(a^2-4b^2)z^2}} = 1 + A'z + A''z^2 + A'''z^3 + \dots,$$

de sorte que l'on aura, pour les fonctions connues,

$$A' = a,$$

$$A'' = \frac{3aA' + 4b^2 - a^2}{2},$$

$$A''' = \frac{5aA'' + 2(4b^2 - a^2)A'}{3},$$

$$A^{(4)} = \frac{7aA''' + 3(4b^2 - a^2)A''}{4},$$

$$\dots\dots\dots$$

Dénotons par P' , P'' , P''' les probabilités que l'erreur soit nulle en prenant le milieu entre 1, 2, 3, ..., observations, et l'on aura

$$P' = \frac{A'}{a+2b}, \quad P'' = \frac{A''}{(a+2b)^2}, \quad P''' = \frac{A'''}{(a+2b)^3}, \dots,$$

d'où

$$A' = (a+2b)P', \quad A'' = (a+2b)^2P'', \quad A''' = (a+2b)^3P''', \dots;$$

done, substituant ces valeurs dans les formules précédentes et faisant,

pour plus de simplicité, $\frac{2b}{a} = r$, on aura

$$P' = \frac{1}{1+r},$$

$$P'' = \frac{3P' + r - 1}{2(1+r)},$$

$$P''' = \frac{5P'' + 2(r-1)P'}{3(1+r)},$$

$$P^{(4)} = \frac{7P''' + 3(r-1)P''}{4(1+r)},$$

$$P^{(5)} = \frac{9P^{(4)} + 4(r-1)P'''}{5(1+r)},$$

$$\dots\dots\dots$$

6. REMARQUE II. — Si l'on fait $r=1$, on aura le cas du Corollaire II, où $a=2b$, et l'on trouvera

$$P' = \frac{1}{2}, \quad P'' = \frac{1.3}{2.4}, \quad P''' = \frac{1.3.5}{2.4.6}, \dots,$$

et, en général,

$$P^{(n)} = \frac{1.3.5 \dots (2n-1)}{2.4.6 \dots 2n}.$$

De là on voit que la probabilité diminue toujours à mesure que n augmente, ce que nous avons déjà observé dans le Corollaire cité; de sorte qu'en prenant $n=\infty$, la probabilité deviendra infiniment petite ou nulle; en effet, par la quadrature de Wallis on a (π étant l'arc de 180 degrés)

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2.2.4.4.6.6 \dots}{1.3.3.5.5.7 \dots}$$

c'est-à-dire, en prenant $n=\infty$,

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2.2.4.4.6.6 \dots 2n.2n}{1.3.3.5.5 \dots (2n-1)(2n-1)(2n+1)};$$

donc, multipliant par $2n+1$ et tirant la racine carrée, on aura

$$\sqrt{\frac{2n+1}{2}} \pi = \frac{2.4.6 \dots 2n}{1.3.5 \dots (2n-1)},$$

donc, lorsque $n = \infty$, on aura

$$P^{(n)} = \frac{1}{\sqrt{n\pi}} = 0.$$

Il est bon de remarquer que, puisque nous avons trouvé dans le Corollaire cité pour la probabilité P^n l'expression

$$1 + n^2 + \left[\frac{n(n-1)}{2} \right]^2 + \left[\frac{n(n-1)(n-2)}{2.3} \right]^2 + \dots,$$

on aura, en comparant cette expression avec la précédente, l'équation

$$1 + n^2 + \left[\frac{n(n-1)}{2} \right]^2 + \left[\frac{n(n-1)(n-2)}{2.3} \right]^2 + \dots = \frac{1.3.5 \dots (2n-1)}{1.2.3 \dots n} 2^n,$$

laquelle est d'autant plus remarquable qu'elle ne paraît pas aisée à démontrer *à priori*.

7. REMARQUE III. — Par les formules de la Remarque I, on aura en général

$$\begin{aligned} P^{(n)} &= \frac{(2n-1)P^{(n-1)} + (n-1)(r-1)P^{(n-2)}}{n(r+1)}, \\ P^{(n+1)} &= \frac{(2n+1)P^{(n)} + n(r-1)P^{(n-1)}}{(n+1)(r+1)}, \\ P^{(n+2)} &= \frac{(2n+3)P^{(n+1)} + (n+1)(r-1)P^{(n)}}{(n+2)(r+1)}, \\ &\dots \end{aligned}$$

où les exposants $n-2$, $n-1$, n , etc., de P ne dénotent pas des puissances, mais seulement le quantième du rang. Or, si n est un nombre assez grand, il est clair que les fractions $\frac{2n-1}{n}$, $\frac{2n+1}{n+1}$, $\frac{2n+3}{n+2}$, etc., seront à très-peu près égales à 2, et que les fractions $\frac{n-1}{n}$, $\frac{n}{n+1}$, $\frac{n+1}{n+2}$

seront aussi à très-peu près égales à 1; de sorte qu'on aura, dans cette hypothèse,

$$\begin{aligned} P^{(n)} &= \frac{P^{(n-1)} + (r-1)P^{(n-2)}}{r+1}, \\ P^{(n+1)} &= \frac{P^{(n)} + (r-1)P^{(n-1)}}{r+1}, \\ &\dots \end{aligned}$$

d'où l'on voit que les quantités $P^{(0)}$, $P^{(n+1)}$, etc., forment une suite récurrente dont le dénominateur de la fraction génératrice serait

$$x^2 - \frac{x}{r+1} - \frac{r-1}{r+1},$$

ainsi, on aura en général

$$P^{(n+r)} = A \left[\frac{1 + \sqrt{4r^2 - 3}}{2(1+r)} \right]^r + B \left[\frac{1 - \sqrt{4r^2 - 3}}{2(1+r)} \right]^r,$$

et, pour déterminer les coefficients A et B , on supposera que les termes $P^{(0)}$ et $P^{(n+1)}$ soient connus, ce qui donnera

$$P^{(0)} = A + B$$

et

$$P^{(n+1)} = A \frac{1 + \sqrt{4r^2 - 3}}{2(1+r)} + B \frac{1 - \sqrt{4r^2 - 3}}{2(1+r)},$$

d'où

$$\begin{aligned} A &= \frac{2(1+r)P^{(n+1)} - (1 - \sqrt{4r^2 - 3})P^{(0)}}{2\sqrt{4r^2 - 3}}, \\ B &= \frac{(1 + \sqrt{4r^2 - 3})P^{(0)} - 2(1+r)P^{(n+1)}}{2\sqrt{4r^2 - 3}}, \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} P^{(n+r)} &= \left[\frac{P^{(0)}}{2} + \frac{2(1+r)P^{(n+1)} - P^{(0)}}{2\sqrt{4r^2 - 3}} \right] \left[\frac{1 + \sqrt{4r^2 - 3}}{2(1+r)} \right]^r \\ &+ \left[\frac{P^{(0)}}{2} - \frac{2(1+r)P^{(n+1)} - P^{(0)}}{2\sqrt{4r^2 - 3}} \right] \left[\frac{1 - \sqrt{4r^2 - 3}}{2(1+r)} \right]^r, \end{aligned}$$

et cette formule sera d'autant plus exacte qu'on prendra le nombre n plus grand.

Ainsi, après avoir calculé les termes $P^{(n)}$ et $P^{(n+1)}$, soit par les formules du n° 1, soit par celles de la Remarque 1, on pourra trouver à très-peu près tous les termes suivants par la formule précédente.

Au reste, il est facile de voir par cette formule que la probabilité sera nulle à l'infini, c'est-à-dire lorsque $s = \infty$; en effet, il est clair que quel que soit r , pourvu que ce soit un nombre positif, les quantités $\frac{1 \pm \sqrt{4r^2 - 3}}{2(1+r)}$ seront toujours plus petites que 1; car supposons, s'il est possible, $\frac{1 \pm \sqrt{4r^2 - 3}}{2(1+r)} > 1$, on aura donc

$$4r^2 - 2 \pm 2\sqrt{4r^2 - 3} > 4(1 + 2r + r^2),$$

savoir

$$\pm \sqrt{4r^2 - 3} > 3 + 4r,$$

et

$$4r^2 - 3 > 16r^2 + 24r + 9,$$

savoir

$$0 > 12r^2 + 24r + 12,$$

ce qui ne se peut; donc, en faisant $s = \infty$, les quantités

$$\left[\frac{1 + \sqrt{4r^2 - 3}}{2(1+r)} \right]^s \quad \text{et} \quad \left[\frac{1 - \sqrt{4r^2 - 3}}{2(1+r)} \right]^s$$

deviendront nulles, et par conséquent $P^{(n+\infty)}$ aussi.

8. SCOLIE. — Soit ρ le résultat que chaque observation devrait donner si elle était exacte: puisqu'on suppose que l'on puisse se tromper d'une unité tant en plus qu'en moins, on aura dans chaque observation un de ces trois résultats: ρ , $\rho - 1$, $\rho + 1$; donc, si l'on a deux observations et qu'on prenne le milieu entre leurs résultats, c'est-à-dire la demi-somme de ces résultats, on aura un de ces cinq résultats

$$\frac{2\rho}{2}, \quad \frac{2\rho-1}{2}, \quad \frac{2\rho+1}{2}, \quad \frac{2\rho-2}{2}, \quad \frac{2\rho+2}{2},$$

savoir

$$\rho, \quad \rho - \frac{1}{2}, \quad \rho + \frac{1}{2}, \quad \rho - 1, \quad \rho + 1;$$

ainsi, dans ce cas, l'erreur pourra être 1 ou $\frac{1}{2}$, tant en plus qu'en moins; on verra de même qu'en prenant le milieu entre trois observations, l'erreur pourra être 1, ou $\frac{2}{3}$, ou $\frac{1}{3}$, tant en plus qu'en moins, et ainsi de suite. Ainsi, quoique la probabilité que l'erreur soit nulle puisse être plus petite lorsqu'on prend le résultat moyen de plusieurs observations que lorsqu'on prend le résultat de chaque observation en particulier, cependant, si on cherche la probabilité que l'erreur ne surpasse pas $\frac{1}{2}$, ou $\frac{1}{3}$, ..., on trouvera que cette probabilité sera plus grande dans le premier cas que dans le second. En effet, dans le premier cas, il n'y a d'autres cas favorables que ceux où l'erreur est absolument nulle; mais, dans le second, les cas favorables seront non-seulement ceux où l'erreur est nulle, mais aussi ceux où l'erreur est $\frac{1}{2}$, ou $\frac{1}{3}$, ...; et c'est par cette considération qu'il est toujours plus avantageux de prendre le milieu entre les résultats de plusieurs observations que de s'en tenir au résultat de chaque observation en particulier. Nous allons examiner la question sous ce point de vue dans le Problème suivant.

PROBLÈME II.

9. Les mêmes choses étant supposées que dans le Problème précédent, trouver la probabilité qu'en prenant le milieu entre les résultats de n observations, l'erreur ne surpassera pas la fraction $\frac{m}{n}$, m étant $< n$.

En prenant le milieu entre les résultats de n observations, il est clair que l'erreur peut être: ou 0, ou $\pm \frac{1}{n}$, ou $\pm \frac{2}{n}$, ou $\pm \frac{3}{n}$, ..., jusqu'à $\pm \frac{n}{n}$, savoir ± 1 . Ainsi, la probabilité que l'erreur ne soit pas plus grande que $\pm \frac{m}{n}$ sera la somme des probabilités que l'erreur sera nulle, ou $\pm \frac{1}{n}$, ou $\pm \frac{2}{n}$, ..., jusqu'à $\pm \frac{m}{n}$. Voyons donc d'abord quelle est la probabilité que l'erreur sera $\pm \frac{\mu}{n}$.

En ramenant cette question aux dés, comme nous l'avons pratiqué dans le Problème I, il est clair qu'elle se réduit à chercher la probabilité d'amener $+\mu$ ou $-\mu$ points, avec n dés dont chacun ait a faces marquées 0, b faces marquées $+1$ et b faces marquées -1 . Pour cela, il n'y a qu'à élever le trinôme $a + b(x + x^{-1})$ à la puissance n , et le coefficient de x^μ dénotera le nombre des cas où la somme des points de tous les dés sera μ , de même que celui de $x^{-\mu}$ dénotera le nombre des cas où la somme des points sera $-\mu$; ainsi, la somme de ces deux coefficients divisée par $(a + 2b)^n$, qui est le nombre de tous les cas, donnera la probabilité cherchée.

Or, on a

$$[a + b(x + x^{-1})]^n = a^n + na^{n-1}b(x + x^{-1}) + \frac{n(n-1)}{2}a^{n-2}b^2(x + x^{-1})^2 + \dots,$$

et, de plus,

$$\begin{aligned}(x + x^{-1})^2 &= (x^2 + x^{-2}) + 2, \\(x + x^{-1})^3 &= (x^3 + x^{-3}) + 3(x + x^{-1}), \\(x + x^{-1})^4 &= (x^4 + x^{-4}) + 4(x^2 + x^{-2}) + \frac{4 \cdot 3}{2}, \\(x + x^{-1})^5 &= (x^5 + x^{-5}) + 5(x^3 + x^{-3}) + \frac{5 \cdot 4}{2}(x + x^{-1}), \\&\dots\end{aligned}$$

Donc, si l'on suppose

$$[a + b(x + x^{-1})]^n = A + B(x + x^{-1}) + C(x^2 + x^{-2}) + D(x^3 + x^{-3}) + \dots,$$

on aura

$$\begin{aligned}A &= a^n + \frac{2}{1} \frac{n(n-1)}{2} a^{n-2} b^2 \\&+ \frac{4 \cdot 3}{1 \cdot 2} \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2 \cdot 3 \cdot 4} a^{n-4} b^4 \\&+ \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{1 \cdot 2 \cdot 3} \frac{n(n-1) \dots (n-5)}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} a^{n-6} b^6 + \dots,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}B &= na^{n-1}b + \frac{3}{1} \frac{n(n-1)(n-2)}{2 \cdot 3} a^{n-3} b^3 \\&+ \frac{5 \cdot 4}{1 \cdot 2} \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} a^{n-5} b^5 \\&+ \frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot 3} \frac{n(n-1) \dots (n-6)}{2 \cdot 3 \dots 7} a^{n-7} b^7 + \dots, \\C &= \frac{n(n-1)}{2} a^{n-2} b^2 + \frac{4}{1} \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2 \cdot 3 \cdot 4} a^{n-4} b^4 \\&+ \frac{6 \cdot 5}{1 \cdot 2} \frac{n(n-1) \dots (n-5)}{2 \cdot 3 \dots 6} a^{n-6} b^6 \\&+ \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{1 \cdot 2 \cdot 3} \frac{n(n-1) \dots (n-7)}{1 \cdot 2 \dots 8} a^{n-8} b^8 + \dots,\end{aligned}$$

Donc, si on appelle M le terme de la série $A, B, C, \dots$, dont le quantième sera $\mu + 1$, il est facile de voir qu'on aura

$$\begin{aligned}M &= \frac{n(n-1) \dots (n-\mu+1)}{1 \cdot 2 \dots \mu} a^{n-\mu} b^\mu \\&+ \frac{\mu+2}{1} \frac{n(n-1) \dots (n-\mu-1)}{1 \cdot 2 \dots (\mu+2)} a^{n-\mu+2} b^{\mu+2} \\&+ \frac{(\mu+4)(\mu+3)}{1 \cdot 2} \frac{n(n-1) \dots (n-\mu-3)}{1 \cdot 2 \dots (\mu+4)} a^{n-\mu+4} b^{\mu+4}, \\&\dots\end{aligned}$$

Or, ce terme M est le coefficient des puissances x^μ et $x^{-\mu}$, de sorte qu'on aura $\frac{2M}{(a+2b)^\mu}$ pour la probabilité que l'erreur soit $\pm \frac{\mu}{n}$. Ainsi, la probabilité que l'erreur ne surpassera pas $\pm \frac{\mu}{n}$ sera représentée par la série

$$\frac{A + 2B + 2C + 2D + \dots + 2M}{(a + 2b)^\mu}.$$

Pour faciliter la recherche des valeurs de $A, B, C, \dots$, il est bon de faire voir comment ces quantités dépendent les unes des autres; pour cela, on reprendra l'équation

$$[a + b(x + x^{-1})]^n = A + B(x + x^{-1}) + C(x^2 + x^{-2}) + D(x^3 + x^{-3}) + \dots,$$

et, prenant les différentielles logarithmiques, on aura, après avoir divisé par $\frac{dx}{x}$,

$$\frac{nb(x-x^{-1})}{a+b(x+x^{-1})} = \frac{B(x-x^{-1})+2C(x^2-x^{-2})+\dots}{A+B(x+x^{-1})+C(x^2+x^{-2})+\dots};$$

done, multipliant en croix, il viendra

$$\begin{aligned} nbA(x-x^{-1}) + nbB(x^2-x^{-2}) + nbC(x^3-x^{-3}-x+x^{-1}) \\ + nbD(x^4-x^{-4}-x^2+x^{-2}) + \dots \\ = aB(x-x^{-1}) + 2aC(x^2-x^{-2}) + 3aD(x^3-x^{-3}) + \dots \\ + bB(x^2-x^{-2}) + 2bC(x^3-x^{-3}+x-x^{-1}) \\ + 3bD(x^4-x^{-4}+x^2+x^{-2}) + \dots; \end{aligned}$$

de sorte qu'en comparant les termes, on aura

$$\begin{aligned} nb(A-C) &= aB + 2bC, \\ nb(B-D) &= 2aC + b(B+3D), \\ nb(C-E) &= 3aD + b(2C+4E), \\ &\dots \end{aligned}$$

d'où, en faisant pour plus de simplicité $\frac{a}{b} = K$, on aura

$$\begin{aligned} C &= \frac{nA - KB}{n+2}, \\ D &= \frac{(n-1)B - 2KC}{n+3}, \\ E &= \frac{(n-2)C - 3KD}{n+4}, \\ &\dots \end{aligned}$$

Ainsi, en connaissant les deux premiers termes A et B, on pourra trouver successivement tous les autres.

10. COROLLAIRE. — Supposons, comme dans le n° 2, $a=b$, en sorte que l'on ait $K=1$, et, faisant successivement n égal à 1, 2, 3, ..., et

$a=1$, ce qui est permis, on trouvera les valeurs suivantes

n	A	B	C	D	E	F	G...
1	1	1	0	0	0	0	0...
2	3	2	1	0	0	0	0...
3	7	6	3	1	0	0	0...
4	19	16	10	4	1	0	0...
5	51	45	30	15	5	1	0...
6	141	126	90	50	21	6	1...

De là on formera la table suivante des probabilités :

VALEURS du nombre n des observations.	PROBABILITÉS QUE L'ERREUR NE SURPASSERA PAS LES FRACTIONS					
	$\pm \frac{0}{n}$	$\pm \frac{1}{n}$	$\pm \frac{2}{n}$	$\pm \frac{3}{n}$	$\pm \frac{4}{n}$	$\pm \frac{5}{n}$
1	$\frac{1}{3}$	...	...	...	...	...
2	$\frac{3}{9}$	$\frac{2}{9}$	...	...	...	...
3	$\frac{7}{27}$	$\frac{19}{27}$	$\frac{25}{27}$	...	...	...
4	$\frac{19}{81}$	$\frac{51}{81}$	$\frac{71}{81}$	$\frac{79}{81}$	...	...
5	$\frac{51}{243}$	$\frac{141}{243}$	$\frac{201}{243}$	$\frac{231}{243}$	$\frac{241}{243}$	...
6	$\frac{141}{729}$	$\frac{393}{729}$	$\frac{573}{729}$	$\frac{673}{729}$	$\frac{715}{729}$	$\frac{727}{729}$
...	...	...	...	...	...	...

On voit, par cette table, qu'en prenant le milieu entre deux observations, la probabilité que l'erreur soit nulle sera $\frac{3}{9} = \frac{1}{3}$, et celle que l'erreur ne surpassera pas $\frac{1}{2}$ tant en plus qu'en moins sera $\frac{7}{9}$; or, dans chaque

observation particulière, il y a $\frac{1}{3}$ de probabilité que l'erreur sera 0, et comme, par hypothèse, l'erreur ne peut être que 0 ou ± 1 , il est clair que la probabilité que l'erreur ne surpassera pas $\frac{1}{2}$ sera de même $\frac{1}{3}$. Ainsi, quoique la probabilité que l'erreur sera nulle soit la même, soit qu'on prenne le résultat moyen entre deux observations, ou qu'on prenne le résultat particulier d'une observation unique, cependant la probabilité que l'erreur ne surpassera pas $\frac{1}{2}$ sera plus grande dans le premier cas que dans le second, ces deux probabilités étant comme $\frac{2}{9} : \frac{1}{3}$, c'est-à-dire dans la raison de 7:3.

De même, en prenant le milieu entre trois observations, on aura $\frac{7}{27}$ pour la probabilité que l'erreur sera nulle, $\frac{19}{27}$ pour la probabilité que l'erreur ne sera pas plus grande que $\pm \frac{1}{3}$, et $\frac{25}{27}$ pour celle que l'erreur ne sera pas plus grande que $\pm \frac{2}{3}$; mais dans chaque observation particulière la probabilité que l'erreur soit nulle est $\frac{1}{3}$, et celle que l'erreur ne surpasse pas $\frac{1}{3}$ ou $\frac{2}{3}$, est de même $\frac{1}{3}$, parce que par hypothèse l'erreur ne peut être que nulle ou ± 1 ; donc la probabilité que l'erreur soit nulle sera à la vérité plus grande dans le résultat particulier d'une observation unique que dans le résultat moyen de trois observations, et cela dans la raison de 9:7; mais en revanche la probabilité que l'erreur ne surpassera pas $\pm \frac{1}{3}$ sera plus grande dans le second cas que dans le premier en raison de 19:9, et celle que l'erreur ne surpassera pas $\pm \frac{2}{3}$ le sera encore davantage, cette probabilité étant, dans le second cas, plus grande que dans le premier en raison de 25:9.

Voilà donc en quoi consiste principalement l'avantage qu'il y a à prendre le milieu entre les résultats de plusieurs observations. Pour

rendre la chose encore plus sensible, nous allons rechercher les probabilités que l'erreur ne surpassera pas la fraction $\frac{1}{2}$, en supposant successivement n égal à 1, 2, 3, ..., c'est-à-dire pour une observation unique, pour deux, pour trois, ..., et nous aurons

n	1,	2,	3,	4,	5,	6,...
Probabilités...	$\frac{1}{3}$,	$\frac{7}{9}$,	$\frac{19}{27}$,	$\frac{71}{81}$,	$\frac{201}{243}$,	$\frac{673}{729}$,...

ou bien, en réduisant au même dénominateur 729,

n	1,	2,	3,	4,	5,	6,...
Probabilités...	$\frac{243}{729}$,	$\frac{567}{729}$,	$\frac{513}{729}$,	$\frac{639}{729}$,	$\frac{603}{729}$,	$\frac{673}{729}$,...

On voit par là que la probabilité que l'erreur ne surpassera pas $\frac{1}{2}$ va en augmentant, à mesure que l'on prend un plus grand nombre d'observations, mais avec cette différence que la probabilité est plus grande pour deux observations que pour trois, pour quatre que pour cinq, et en général pour un nombre pair quelconque que pour le nombre impair qui le suit immédiatement; de sorte que, dans l'hypothèse dont il s'agit, il est plus avantageux de ne prendre le milieu qu'entre un nombre quelconque pair d'observations.

11. REMARQUE. — Nous avons vu dans le n° 5 que si l'on développe la fraction $1 - z \left[a + b \left(x + \frac{1}{x} \right) \right]$ en une série de cette forme,

$$Z + Z' \left(x + \frac{1}{x} \right) + Z'' \left(x^2 + \frac{1}{x^2} \right) + \dots,$$

$Z, Z', Z'', \dots$ étant des fonctions de z , on aura

$$Z = \frac{1}{p^2 - q^2}, \quad Z' = \frac{2q}{p^2} = \frac{q}{p} Z, \quad Z'' = \frac{2q^2}{p^2} = \frac{q}{p} Z', \dots,$$

p et q étant telles que

$$p^2 + q^2 = 1 - az \quad \text{et} \quad pq = bz.$$

ce qui donne

$$p^2 - q^2 = \sqrt{1 - 2az + (a^2 - 4b^2)z^2},$$

et, de là,

$$\frac{q}{p} = \frac{1 - az - \sqrt{1 - 2az + (a^2 - 4b^2)z^2}}{2bz};$$

de sorte qu'en faisant, pour plus de simplicité,

$$\zeta = \sqrt{1 - 2az + (a^2 - 4b^2)z^2},$$

on aura

$$Z = \frac{1}{\zeta}, \quad Z' = \frac{1 - az - \zeta}{2bz\zeta}, \quad Z'' = \left(\frac{1 - az - \zeta}{2bz\zeta} \right)^2 \frac{1}{\zeta},$$

et en général

$$Z^{(\mu)} = \left(\frac{1 - az - \zeta}{2bz\zeta} \right)^{\mu-1} \frac{1}{\zeta}.$$

Or, si l'on développe cette quantité en une série de puissances rationnelles et entières de z , on verra aisément, par ce que nous avons dit plus haut, que le coefficient d'une puissance quelconque, comme z^n , dénotera le nombre des cas où la somme des erreurs de n observations pourra être $+ \mu$ ou $- \mu$, de sorte que le double de ce coefficient exprimera le nombre de tous les cas où l'erreur moyenne sera $\pm \frac{\mu}{n}$. De là il est facile de conclure que la quantité

$$1 + 2 \frac{1 - az - \zeta}{2bz} + 2 \left(\frac{1 - az - \zeta}{2bz} \right)^2 + \dots + 2 \left(\frac{1 - az - \zeta}{2bz} \right)^{\mu},$$

étant regardée comme une fonction de z et développée suivant les puissances de cette variable, donnera une série de telle nature que le coefficient d'une puissance quelconque z^n exprimera justement le nombre de cas où l'erreur moyenne pourra être renfermée dans ces limites $-\frac{\mu}{n}$, $+\frac{\mu}{n}$; de sorte que, ce coefficient étant divisé par le nombre total de cas $(a + 2b)^n$, on aura la valeur de la probabilité que l'erreur moyenne

ne surpassera pas la fraction $\frac{\mu}{n}$, soit en plus ou en moins. Or, la quantité dont il s'agit n'étant autre chose qu'une série géométrique, elle peut se mettre sous cette forme plus simple

$$1 + 2 \frac{\left(\frac{1 - az - \zeta}{2bz} \right)^{\mu+1}}{\left(1 - \frac{1 - az - \zeta}{2bz} \right)} = \frac{1}{\zeta}.$$

Ainsi, toute la difficulté consistera à réduire cette même quantité en série infinie qui procède suivant les puissances de z . Pour en venir plus facilement à bout, on la supposera égale à une indéterminée y , et l'on aura une équation entre y et z , qu'on pourra par des différentiations délivrer, tant de la puissance $\mu+1$ que de l'irrationalité de ζ : par ce moyen, on aura une équation différentielle du second degré entre y et z , et il n'y aura plus qu'à supposer $y = 1 + Az + Bz^2 + \dots$, et déterminer les coefficients $A, B, \dots$ par la comparaison des termes.

Au reste, comme ce calcul est un peu long, nous nous contenterons de l'indiquer ici, pour mettre sur la voie ceux qui voudront pousser cette théorie plus loin.

12. SCOLIE. — Nous avons supposé dans les deux Problèmes précédents qu'il y avait un nombre égal de cas pour avoir une erreur positive et pour en avoir une négative; si cela n'était pas ainsi, et que le nombre des cas qui donneraient 0, +1 et -1 d'erreur fussent a, b et c , alors on pourrait résoudre les Problèmes avec la même facilité en considérant le trinôme $a + bx + cx^{-1}$, à la place de $a + b(x + x^{-1})$, pour avoir le nombre des cas où l'on aurait une erreur moyenne donnée, et en prenant ensuite $(a + b + c)^n$ pour avoir le nombre total des cas à la place de $(a + 2b)^n$. On pourrait même, sans faire un nouveau calcul, adapter à ce cas-ci les formules que nous avons déjà trouvées; car si dans le trinôme $a + bx + \frac{c}{x}$ on met $x\sqrt{\frac{c}{b}}$ à la place de x , il deviendra $a + \sqrt{bc}\left(x + \frac{1}{x}\right)$; ainsi, il n'y aura qu'à mettre dans le trinôme $a + b\left(x + \frac{1}{x}\right)$ des Pro-

blèmes précédents $\sqrt{bc}$ à la place de b , et ensuite $x\sqrt{\frac{b}{c}}$ à la place de x . Du reste, nous allons traiter ce cas d'une manière beaucoup plus générale dans le Problème suivant.

PROBLÈME III.

13. Supposant que chaque observation soit sujette à une erreur d'une unité en moins et à une erreur de r unités en plus, et que le nombre des cas qui peuvent donner 0, -1, + r d'erreur soit respectivement a , b , c , on demande quelle est la probabilité que l'erreur moyenne de plusieurs observations sera renfermée dans des limites données.

Soit n le nombre des observations dont on veut prendre le milieu : on formera la puissance $n^{\text{ième}}$ du trinôme $a + \frac{b}{x} + cx^r$, et le coefficient d'une puissance quelconque x^μ dénotera le nombre des cas où la somme des erreurs sera μ , et par conséquent où l'erreur moyenne sera $\frac{\mu}{n}$. Considérons donc la quantité

$$\left(a + \frac{b}{x} + cx^r\right)^n,$$

laquelle se réduit à

$$\frac{[b + x(a + cx^r)]^n}{x^n},$$

et l'on aura, comme on sait,

$$[b + x(a + cx^r)]^n = b^n + nb^{n-1}x(a + cx^r) + \frac{n(n-1)}{2}b^{n-2}x^2(a + cx^r)^2 + \dots,$$

d'où il est facile de voir que le coefficient d'une puissance quelconque x^s sera

$$\begin{aligned} & \frac{n(n-1)\dots(n-s+1)}{2\cdot 3\cdot\dots s} b^{n-s} a^s \\ & + \frac{n(n-1)\dots(n-s+r)}{2\cdot 3\cdot\dots(s-r)} \frac{s-2r}{1} b^{n-s+r} a^{s-r} c \\ & + \frac{n(n-1)\dots(n-s+2r)}{2\cdot 3\cdot\dots(s-2r)} \frac{(s-2r)(s-2r-1)}{1\cdot 2} b^{n-s+2r} a^{s-2r} c^2 \\ & \dots\dots\dots \end{aligned}$$

cette série étant continuée jusqu'à ce que l'on parvienne à des termes négatifs; donc ce coefficient sera celui de la puissance $x^{\mu-n}$ dans la quantité $\left(a + \frac{b}{x} + cx^r\right)^n$; donc, si l'on désigne en général par (μ) le coefficient de la puissance x^μ de cette dernière quantité, on aura

$$\begin{aligned} (\mu) = & \frac{n(n-1)\dots(n-\mu)}{2\cdot 3\cdot\dots(\mu+n)} b^{-\mu} a^{n+\mu} \\ & + \frac{n(n-1)\dots(n-\mu)}{2\cdot 3\cdot\dots(\mu+n-r-1)} b^{r-\mu} a^{n+\mu-r} c \\ & + \frac{n(n-1)\dots(n-\mu)}{2\times 2\cdot 3\cdot\dots(\mu+n-2r-2)} b^{2r-\mu} a^{n+\mu-2r} c^2 \\ & \dots\dots\dots \end{aligned}$$

où il faudra toujours omettre les termes qui contiendraient des puissances négatives de a ou b .

Donc, puisque pour n observations la somme de tous les cas est $(a+b+c)^n$, on aura pour la probabilité que l'erreur moyenne soit $\frac{\mu}{n}$ la quantité $\frac{(\mu)}{(a+b+c)^n}$; et de là la probabilité que l'erreur moyenne sera renfermée entre ces limites $-\frac{p}{n}$ et $\frac{q}{n}$ sera exprimée par la série

$$\frac{(-p+1) + \dots + (-1) + (0) + (1) + \dots + (q-1)}{(a+b+c)^n}.$$

PROBLÈME IV.

14. Supposant tout, comme dans le Problème précédent, on demande quelle est l'erreur moyenne pour laquelle la probabilité est la plus grande.

Nous avons vu que la probabilité que l'erreur moyenne soit $\frac{\mu}{n}$ est $\frac{(\mu)}{(a+b+c)^n}$ (μ) étant le coefficient de la puissance x^μ du trinôme $\left(a + \frac{b}{x} + cx^r\right)^n$; ainsi il ne s'agit que de savoir quel est le terme de la puissance $n^{\text{ième}}$ de $a + \frac{b}{x} + cx^r$ qui aura le plus grand coefficient; pour

cela il est clair qu'il n'y a qu'à chercher le plus grand terme du trinôme $a + b + c$ élevé à la puissance n ; car supposant que ce terme soit $\pi a^\alpha b^\beta c^\gamma$, α, β, γ étant les exposants de a, b, c , dont la somme doit être égale à n , et π le coefficient de ce terme, il n'y aura qu'à mettre $\frac{b}{x}$ à la place de b , et cx^r à la place de c ; et l'on aura

$$\pi a^\alpha b^\beta c^\gamma x^{-\beta+r\gamma}$$

pour le terme cherché de la puissance $n^{\text{ième}}$ du trinôme $a + \frac{b}{x} + cx^r$; ainsi on fera $-\beta + r\gamma = \mu$, et l'on aura

$$\frac{r\gamma - \beta}{n}$$

pour l'erreur moyenne dont la probabilité sera la plus grande.

Or, par les règles des combinaisons, on sait que le coefficient π du terme $\pi a^\alpha b^\beta c^\gamma$ doit être

$$\frac{1.2.3...n}{1.2.3... \alpha \times 1.2.3... \beta \times 1.2.3... \gamma};$$

dénotons ce terme par M , en sorte que l'on ait

$$\frac{1.2.3...n \times a^\alpha b^\beta c^\gamma}{1.2.3... \alpha \times 1.2.3... \beta \times 1.2.3... \gamma} = M,$$

et il faudra qu'en faisant varier les exposants α, β, γ , la valeur de M diminue; faisons donc varier α d'une unité, en sorte que α devienne $\alpha + 1$, et comme $\alpha + \beta + \gamma = n$, il faudra que β ou γ diminue en même temps d'une unité; or, il est facile de voir que si dans la valeur de M on met $\alpha + 1$ pour α et $\beta - 1$ pour β , cette valeur deviendra

$$\frac{\beta}{\alpha + 1} \frac{aM}{b},$$

donc

$$\frac{\beta}{\alpha + 1} \frac{aM}{b} < M,$$

et, par conséquent,

$$\frac{\beta}{\alpha + 1} \frac{a}{b} < 1;$$

réciiproquement, si l'on augmente β d'une unité, et qu'on diminue α aussi d'une unité, on trouvera la condition

$$\frac{\alpha}{\beta + 1} \frac{b}{a} < 1;$$

ainsi il faudra que l'on ait en même temps

$$\frac{\alpha}{\beta + 1} < \frac{a}{b} \quad \text{et} \quad \frac{\alpha + 1}{\beta} > \frac{a}{b}.$$

Or, c'est ce qui aura lieu si $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{a}{b}$.

On trouvera de la même manière $\frac{\alpha}{\gamma} = \frac{a}{c}$; de sorte qu'en prenant un coefficient indéterminé p , on aura, dans le cas du maximum,

$$\alpha = pa, \quad \beta = pb, \quad \gamma = pc;$$

mais $\alpha + \beta + \gamma = n$; donc $p = \frac{n}{a + b + c}$; donc enfin

$$\alpha = \frac{na}{a + b + c}, \quad \beta = \frac{nb}{a + b + c}, \quad \gamma = \frac{nc}{a + b + c}.$$

Si les quantités $\frac{na}{a + b + c}, \frac{nb}{a + b + c}, \frac{nc}{a + b + c}$ sont des nombres entiers, on aura exactement

$$\alpha = \frac{na}{a + b + c}, \quad \beta = \frac{nb}{a + b + c}, \quad \gamma = \frac{nc}{a + b + c},$$

comme nous venons de le trouver; mais si ces quantités ne sont pas des nombres entiers, alors il faudra prendre pour α, β, γ les nombres entiers qui en seront les plus proches. On peut prendre cependant, pour plus de simplicité, ces mêmes quantités pour les valeurs de α, β, γ , car l'erreur, s'il y en a, ne pourra jamais être que très-petite; de cette manière nous aurons pour l'erreur moyenne qui a la plus grande probabilité, l'expression

$$\frac{r\gamma - \beta}{n} = \frac{rc - b}{a + b + c}.$$

15. COROLLAIRE. — De là il s'ensuit qu'on peut toujours regarder la quantité $\frac{rc-b}{a+b+c}$ comme l'erreur du résultat moyen, et qu'ainsi on peut prendre la même quantité pour la correction de ce résultat.

Lorsque $r=1$ et $c=b$, comme dans l'hypothèse du Problème I, la correction du résultat moyen devient nulle; elle le serait aussi, si l'on avait $b=rc$; mais dans tous les autres cas elle sera d'autant plus grande que rc différera davantage de b .

PROBLÈME V.

16. On suppose que chaque observation soit sujette à des erreurs quelconques données, et qu'on connaisse en même temps le nombre des cas où chaque erreur peut avoir lieu; on demande la correction qu'il faudra faire au résultat moyen de plusieurs observations.

Soient $p, q, r, s, \dots$ les erreurs auxquelles chaque observation est sujette, et $a, b, c, d, \dots$ les cas qui peuvent donner ces erreurs, savoir a le nombre des cas qui donneraient l'erreur p , b le nombre des cas qui donneraient l'erreur q , et ainsi des autres; il est clair, par ce que nous avons démontré dans les Problèmes précédents, que si l'on élève le polynôme

$$ax^p + bx^q + cx^r + \dots$$

à la puissance n , et qu'on dénote par M le coefficient de la puissance x^0 , on aura

$$\frac{M}{(a+b+c+\dots)^n}$$

pour la probabilité que l'erreur du résultat moyen de n observations soit $\frac{p}{n}$. Or on sait, par la théorie des combinaisons, que le coefficient M sera de cette forme

$$\frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \dots \cdot n \times a^\alpha b^\beta c^\gamma \dots}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot \alpha \times 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot \beta \times 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot \gamma \times \dots}$$

où les exposants $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ doivent être tels que

$$\alpha + \beta + \gamma + \dots = n, \text{ et } \alpha p + \beta q + \gamma r + \dots = p.$$

De plus, il est facile de démontrer, par une méthode semblable à celle du Problème précédent, que le coefficient M sera le plus grand, lorsqu'on aura

$$\alpha = \frac{na}{a+b+c+\dots},$$

$$\beta = \frac{nb}{a+b+c+\dots},$$

$$\gamma = \frac{nc}{a+b+c+\dots}.$$

d'où il s'ensuit que l'erreur moyenne, pour laquelle la probabilité sera la plus grande, sera exprimée par

$$\frac{p}{n} = \frac{ap + bq + cr + \dots}{a + b + c + \dots}.$$

Ainsi cette quantité représentera la correction qu'il faudra faire au résultat moyen de plusieurs observations.

17. COROLLAIRE I. — Si l'on regarde les quantités $a, b, c, \dots$ comme des poids appliqués à une droite indéfinie, à des distances égales à $p, q, r, \dots$ d'un point fixe pris dans cette droite, et qu'on cherche le centre de gravité de ces poids, la distance de ce centre au point fixe sera la correction qu'il faudra faire au résultat moyen de plusieurs observations; cela suit évidemment de la formule que nous avons trouvée plus haut pour la valeur de cette correction.

18. COROLLAIRE II. — Donc, si l'on suppose que chaque observation soit sujette à toutes les erreurs possibles qui peuvent être comprises entre des limites données, et qu'on connaisse la courbe de la facilité des erreurs dans laquelle, les abscisses étant supposées représenter les erreurs, les ordonnées représentent les facilités de ces erreurs, il n'y aura qu'à chercher le centre de gravité de l'aire totale de cette courbe, et l'abscisse répondant à ce centre exprimera la correction du résultat moyen. De là on voit que si la courbe dont il s'agit est égale, est semblable de côté et d'autre de l'ordonnée qui passe par l'origine des abscisses, en

sorte que cette ordonnée soit un diamètre de la courbe dont il s'agit, alors la correction sera nulle, le centre de gravité tombant nécessairement dans le diamètre. Ce cas a lieu toutes les fois que les erreurs peuvent être également positives et négatives.

PROBLÈME VI.

19. Je suppose qu'on ait vérifié un instrument quelconque, et qu'ayant réitéré plusieurs fois la même vérification on ait trouvé différentes erreurs, dont chacune se trouve répétée un certain nombre de fois; on demande quelle est l'erreur qu'il faudra prendre pour la correction de l'instrument.

Soient $p, q, r, \dots$ les erreurs trouvées, et soient $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ les nombres qui marquent combien de fois chaque erreur s'est trouvée répétée en faisant n vérifications; supposons que le nombre des cas qui peuvent donner l'erreur p , ou q , ou $r, \dots$ soit désigné respectivement par $a, b, c, \dots$; qu'on élève le polynôme

$$ax^\alpha + bx^\beta + cx^\gamma + \dots$$

à la puissance n , et soit

$$N(ax^\alpha)^\alpha (bx^\beta)^\beta (cx^\gamma)^\gamma \dots$$

un terme quelconque de ce polynôme: le coefficient $Na^\alpha b^\beta c^\gamma \dots$ de la puissance $p\alpha + q\beta + r\gamma + \dots$ de x divisé par $(a + b + c + \dots)^n$ dénotera la probabilité que les erreurs $p, q, r, \dots$ se trouvent combinées ensemble, de manière que p soit répété α fois, q β fois, r γ fois, et ainsi des autres. Ainsi cette probabilité sera la plus grande dans la combinaison où la valeur de $Na^\alpha b^\beta c^\gamma \dots$ sera la plus grande; mais on a

$$N = \frac{1, 2, 3, \dots, n}{1, 2, 3, \dots, \alpha \times 1, 2, 3, \dots, \beta \times 1, 2, 3, \dots, \gamma \times \dots},$$

comme nous l'avons déjà vu dans le Problème précédent; donc, par le

même Problème, la plus grande valeur de $Na^\alpha b^\beta c^\gamma \dots$ aura lieu lorsque

$$\alpha = \frac{na}{a + b + c + \dots},$$

$$\beta = \frac{nb}{a + b + c + \dots},$$

$$\gamma = \frac{nc}{a + b + c + \dots},$$

équations par lesquelles on pourra déterminer les inconnues $a, b, c, \dots$; et l'on aura, en faisant $a + b + c + \dots = s$,

$$a = \frac{s\alpha}{n}, \quad b = \frac{s\beta}{n}, \quad c = \frac{s\gamma}{n}, \dots$$

Or nous avons démontré, dans le Problème cité, que la correction qu'il faut faire au résultat moyen d'un nombre quelconque d'observations est exprimée par

$$\frac{ap + bq + cr + \dots}{a + b + c + \dots};$$

done, mettant dans cette expression les valeurs de $a, b, c, \dots$ que nous venons de trouver, la correction dont il s'agit deviendra

$$\frac{\alpha p + \beta q + \gamma r + \dots}{n},$$

c'est-à-dire égale à l'erreur moyenne entre toutes les erreurs particulières que les n vérifications ont données.

20. COROLLAIRE. — Si l'on voulait tenir compte aussi, au moins d'une manière approchée, des erreurs intermédiaires auxquelles l'instrument pourrait être sujet, il n'y aurait qu'à prendre dans une ligne droite indéfinie des abscisses proportionnelles aux erreurs trouvées $p, q, r, \dots$, comme au n° 17; et y ayant appliqué des ordonnées proportionnelles aux quantités $a, b, c, \dots$, on ferait passer par les extrémités $p, q, r, \dots$ une ligne parabolique; on chercherait ensuite le centre de gravité de l'aire de toute la courbe, et la perpendiculaire abaissée de ce centre sur l'axe y couperait une abscisse qui serait la correction de l'instrument.

On voit par là comment on peut connaître à *posteriori* la loi de la facilité de chacune des erreurs auxquelles un instrument peut être sujet.

21. REMARQUE I. — On a trouvé ci-dessus que la plus grande probabilité a lieu lorsque

$$a = \frac{s\alpha}{n}, \quad b = \frac{s\beta}{n}, \quad c = \frac{s\gamma}{n}, \dots$$

de sorte que les valeurs de $a, b, c, \dots$ sont les plus probables qu'on puisse supposer. Si on voulait savoir de plus quelle est la probabilité que ces mêmes valeurs ne s'écarteront pas de la vérité d'une quantité quelconque $\pm \frac{rs}{n}$, il n'y aurait qu'à mettre, dans l'expression générale de la probabilité (Problème précédent)

$$\frac{Na^x b^y c^z \dots}{s^n},$$

au lieu de a, b, c , les quantités $\frac{s(\alpha+x)}{n}, \frac{s(\beta+y)}{n}, \frac{s(\gamma+z)}{n}, \dots$, et, faisant successivement $x, y, z, \dots$ égaux à $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots, \pm r$, en sorte cependant que l'on ait toujours $x+y+z+\dots=0$, à cause que (par hypothèse) $a+b+c+\dots=s$ et $\alpha+\beta+\gamma+\dots=n$, on aura autant de probabilités particulières, dont la somme sera la probabilité cherchée.

Soit P la probabilité que l'on ait

$$a = \frac{s\alpha}{n}, \quad b = \frac{s\beta}{n}, \quad c = \frac{s\gamma}{n}, \dots;$$

mettant ces valeurs dans l'expression précédente, on aura

$$P = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n}{n^n} \frac{\alpha^n}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot \alpha} \frac{\beta^n}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot \beta} \dots$$

Soit de plus Q la probabilité que l'on ait

$$a = \frac{s(\alpha+x)}{n}, \quad b = \frac{s(\beta+y)}{n}, \quad c = \frac{s(\gamma+z)}{n}, \dots,$$

on aura la valeur de Q en mettant ces valeurs dans la même expression, et il est facile de voir qu'on aura

$$Q = P \left(1 + \frac{x}{\alpha}\right)^{\alpha} \left(1 + \frac{y}{\beta}\right)^{\beta} \left(1 + \frac{z}{\gamma}\right)^{\gamma} \dots$$

Donc, si l'on fait en général

$$V = \left(1 + \frac{x}{\alpha}\right)^{\alpha} \left(1 + \frac{y}{\beta}\right)^{\beta} \left(1 + \frac{z}{\gamma}\right)^{\gamma} \dots,$$

et que $\int V$ dénote la somme de toutes les valeurs particulières de V , en faisant varier $x, y, z, \dots$ depuis 0 jusqu'à $\pm r$, et ayant soin que l'on ait toujours $x+y+z+\dots=0$, la probabilité cherchée sera égale à $P \int V$.

Comme il n'est pas facile de trouver l'intégrale $\int V$, surtout lorsqu'il y a plus de deux variables, on pourra se contenter de l'avoir d'une manière approchée; pour cela, il n'y aura qu'à prendre une valeur moyenne de V et la multiplier par le nombre de toutes les valeurs particulières de V qui doivent entrer dans l'intégrale $\int V$, et la difficulté ne consistera qu'à trouver ce nombre. Or, si l'on désigne par m le nombre des quantités $\alpha, \beta, \gamma, \dots$, il est facile de concevoir que le nombre dont il s'agit ne sera autre chose que le coefficient de u^0 , c'est-à-dire le terme tout connu de la série qui représente la puissance m du polynôme

$$u^{-r} + u^{-r+1} + \dots + u^{-1} + 1 + u + \dots + u^{r-1} + u^r.$$

Qu'on dénote ce terme par T , et l'on aura, comme nous le démontrerons plus bas,

$$T = \frac{(mr+1)(mr+2)(mr+3)\dots(mr+m-1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots (m-1)} \\ - m \frac{[(m-2)r][(m-2)r+1][(m-2)r+2]\dots[(m-2)r+m-2]}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots (m-1)} \\ + \frac{m(m-1)}{2} \frac{[(m-4)r-1][(m-4)r+1]\dots[(m-4)r+m-3]}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots (m-1)} - \dots,$$

en continuant cette série seulement jusqu'à ce que quelqu'un des facteurs $mr+1$, $(m-2)r$, $(m-4)r-1$,... devienne négatif.

Donc, si W est la valeur moyenne de V , on aura pour la valeur approchée de $\int V$ la quantité TW , et la probabilité cherchée sera à peu près égale à PTW .

Si, au lieu de prendre pour W la valeur moyenne de V , on prend la plus petite, il est clair que TW sera nécessairement moindre que la véritable valeur de $\int V$, et par conséquent la probabilité cherchée sera nécessairement plus grande que PTW ; ainsi, on pourra parier avec avantage PTW contre $1-PTW$ qu'en faisant

$$\frac{a}{s} = \frac{\alpha}{n}, \quad \frac{b}{s} = \frac{\beta}{n}, \quad \frac{c}{s} = \frac{\gamma}{n}, \dots,$$

on ne se trompera pas d'une quantité plus grande que $\frac{r}{n}$ tant en plus qu'en moins.

22. REMARQUE II. — Supposons que n soit un nombre très-grand, et que par conséquent les nombres $\alpha, \beta, \gamma, \dots$, dont la somme est n , soient aussi très-grands; pour trouver dans ce cas les valeurs de P et de V , on remarquera :

1° Que lorsque u est un très-grand nombre, on a, à très-peu près,

$$\log 1 + \log 2 + \log 3 + \dots + \log u = \frac{1}{2} \log \pi + \left(u + \frac{1}{2}\right) \log u - u,$$

π étant le rapport de la périmétrie du cercle au rayon; d'où il suit que l'on aura

$$\log \frac{1.2.3\dots u}{u^u} = \frac{1}{2} \log \pi + \frac{1}{2} \log u - u,$$

et par conséquent

$$\frac{1.2.3\dots u}{u^u} = \frac{\sqrt{\pi u}}{e^u};$$

donc, à cause de $\alpha + \beta + \gamma + \dots = n$, on aura

$$P = \sqrt{\frac{\pi n}{\pi \alpha \times \pi \beta \times \pi \gamma \times \dots}}$$

2° Si on prend le logarithme de V , on aura

$$\log V = \alpha \log \left(1 + \frac{x}{\alpha}\right) + \beta \log \left(1 + \frac{y}{\beta}\right) + \gamma \log \left(1 + \frac{z}{\gamma}\right) + \dots,$$

mais

$$\log \left(1 + \frac{x}{\alpha}\right) = \frac{x}{\alpha} - \frac{x^2}{2\alpha^2} + \dots;$$

donc, à cause de $x + y + z + \dots = 0$, on aura à très-peu près

$$\log V = -\frac{1}{2} \left(\frac{x^2}{\alpha} + \frac{y^2}{\beta} + \frac{z^2}{\gamma} + \dots \right),$$

et de là

$$V = e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{x^2}{\alpha} + \frac{y^2}{\beta} + \frac{z^2}{\gamma} + \dots \right)}.$$

Soient maintenant

$$x = \xi \sqrt{n}, \quad y = \psi \sqrt{n}, \quad z = \zeta \sqrt{n}, \dots,$$

et

$$\frac{\alpha}{n} = A, \quad \frac{\beta}{n} = B, \quad \frac{\gamma}{n} = C, \dots,$$

on aura

$$\xi + \psi + \zeta + \dots = 0 \quad \text{et} \quad A + B + C + \dots = 1;$$

done

$$P = \frac{1}{(\pi n)^{\frac{m-1}{2}} \sqrt{ABC\dots}},$$

$$V = e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{\xi^2}{A} + \frac{\psi^2}{B} + \frac{\zeta^2}{C} + \dots \right)}.$$

Or, comme l'incrément ou la différence des quantités $x, y, z, \dots$, est 1, la différence des variables $\xi, \psi, \zeta, \dots$ sera $\frac{1}{\sqrt{n}}$, et par conséquent infiniment petite; de sorte que, si l'on appelle cette différence $d\xi$, on aura

$$P = \frac{d\xi^{m-1}}{\sqrt{\pi^{m-1} ABC\dots}}.$$

Donc

$$PV = \frac{e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{\xi^2}{A} + \frac{\psi^2}{B} + \frac{\zeta^2}{C} + \dots \right)} d\xi^{m-1}}{\sqrt{\pi^{m-1} ABC\dots}}.$$

Donc, si l'on intègre la différentielle

$$\frac{d\xi^{m-1}}{e^{\frac{1}{2}\left(\frac{\xi^2}{A} + \frac{\psi^2}{B} + \frac{\zeta^2}{C} + \dots\right)}}$$

$m-1$ fois, en mettant d'abord à la place de ξ sa valeur $-\psi - \zeta - \dots$, et faisant varier ensuite successivement les variables $\psi, \zeta, \dots$, de la même différentielle $d\xi$, et qu'on complète l'intégrale en sorte que les valeurs de $\xi, \psi, \zeta, \dots$ s'étendent depuis $-\rho$ jusqu'à ρ (en faisant $r = \rho\sqrt{n}$), on aura, en nommant cette intégrale R, la quantité

$$\frac{R}{\sqrt{\pi^{m-1}} ABC \dots}$$

pour la probabilité que les valeurs de $a, b, c, \dots$ seront exactes à $\frac{\rho^2}{\sqrt{n}}$ près.

Soit, par exemple, $m=2$, en sorte que l'on n'ait trouvé que deux erreurs différentes, dont l'une ait été répétée α fois et l'autre β fois, dans un nombre très-grand n de vérifications de l'instrument; en ce cas il n'y aura qu'une seule intégration à faire, et la différentielle à intégrer sera, en mettant $-\psi$ à la place de ξ , et faisant $d\xi = d\psi$,

$$\frac{d\psi}{e^{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{A} + \frac{1}{B}\right)\psi^2}},$$

laquelle n'est intégrable par aucune des méthodes connues, à moins qu'on ne réduise en série la quantité exponentielle $e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{A} + \frac{1}{B}\right)\psi^2}$. De cette manière on aura la différentielle

$$d\psi \left(1 - K\psi^2 + \frac{K^2\psi^4}{2} - \frac{K^3\psi^6}{2.3} + \dots \right),$$

en faisant, pour abrégér, $K = \frac{A+B}{2AB}$; de sorte que l'intégrale sera

$$\psi - \frac{K\psi^3}{3} + \frac{K^2\psi^5}{2.5} - \frac{K^3\psi^7}{2.3.7} + \dots$$

Donc

$$R = 2 \left(\rho - \frac{K\rho^3}{3} + \frac{K^2\rho^5}{2 \times 5} - \frac{K^3\rho^7}{2.3 \times 7} + \dots \right);$$

donc

$$\frac{R}{\sqrt{\pi} AB}$$

exprimera la probabilité que les valeurs de a et b soient renfermées entre ces limites

$$s\left(A \pm \frac{\rho}{\sqrt{n}}\right) \text{ et } s\left(B \pm \frac{\rho}{\sqrt{n}}\right),$$

c'est-à-dire que les facilités des erreurs qui se sont trouvées répétées α et β fois, lesquelles sont proportionnelles à $\frac{a}{s}$ et $\frac{b}{s}$, ne s'écartent pas des quantités A et B, données par les observations, d'une quantité plus grande que $\frac{\rho}{\sqrt{n}}$.

Si l'on fait, pour plus de simplicité, $\rho = \mu\sqrt{AB}$, on aura $K = \frac{\mu^2}{2\rho^2}$, à cause de $A+B=1$, et la probabilité dont il s'agit sera exprimée de cette manière

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}} \left(\mu - \frac{\mu^3}{2 \times 3} + \frac{\mu^5}{2.4 \times 5} - \frac{\mu^7}{2.4.6 \times 7} + \dots \right).$$

Donc, si l'on suppose $\mu=1$, on aura la série

$$1 - \frac{1}{2 \times 3} + \frac{1}{2.4 \times 5} - \frac{1}{2.4.6 \times 7} + \dots$$

dont la somme est à très-peu près 0,855624; de sorte que la probabilité cherchée sera à peu près

$$\frac{1,611248}{\sqrt{\pi}} = 0,682688.$$

Ainsi, on pourra dans ce cas parier avec avantage que, en supposant les facilités des erreurs respectivement égales à A et B, on ne se trom-

pera pas de la quantité $\mu \sqrt{\frac{AB}{n}}$, qui, à cause de n très-grand, est nécessairement infiniment petite.

Il serait beaucoup plus difficile de trouver la valeur de R si les variables $\xi, \psi, \zeta, \dots$ étaient plus de deux, surtout à cause que l'intégration doit être telle, qu'elle n'embrace que les valeurs de ces mêmes variables qui sont comprises entre les limites $-\rho$ et $+\rho$; mais on pourra, dans ces cas, se servir de l'approximation que nous avons donnée dans le numéro précédent.

Pour cela, on remarquera que puisque nous avons fait $r = \rho \sqrt{n}$, et que n est supposé fort grand, le nombre r devra être fort grand aussi; de sorte qu'on aura, à très-peu près,

$$T = \frac{r^{m-1}}{1.2.3 \dots (m-1)} \left[m^{m-1} - m(m-2)^{m-1} + \frac{m(m-1)}{2} (m-4)^{m-1} - \dots \right],$$

en continuant cette série jusqu'à ce que quelqu'un des nombres $m-2, m-4, \dots$ devienne négatif: donc on aura

$$PT = \left(\frac{\rho}{\sqrt{\pi}} \right)^{m-1} \frac{m^{m-1} - m(m-2)^{m-1} + \frac{m(m-1)}{2} (m-4)^{m-1} - \dots}{1.2.3 \dots (m-1) \sqrt{ABC \dots}},$$

et il n'y aura plus qu'à multiplier cette quantité par W , c'est-à-dire par la valeur moyenne, ou si l'on veut par la plus petite valeur de V . Or, comme on a

$$V = \frac{1}{e^{\frac{1}{2} \left(\frac{\xi^2}{A} + \frac{\psi^2}{B} + \frac{\zeta^2}{C} + \dots \right)}},$$

il est clair que la plus petite valeur de V sera celle où la quantité $\frac{\xi^2}{A} + \frac{\psi^2}{B} + \frac{\zeta^2}{C} + \dots$ sera la plus grande; et il est facile de voir que cela arrivera en prenant $\xi = \rho, \psi = -\rho, \zeta = 0, \dots$, à cause de $\xi + \psi + \zeta + \dots = 0$, et supposant que A et B soient les plus petites de toutes les quantités $A, B, C, \dots$; ainsi, on aura

$$W = \frac{1}{e^{\frac{1}{2} \left(\frac{1}{A} + \frac{1}{B} \right) \rho^2}}.$$

Donc faisant, pour abrégér,

$$M = \frac{m^{m-1} - m(m-2)^{m-1} + \frac{m(m-1)}{2} (m-4)^{m-1} - \dots}{1.2.3 \dots (m-1)},$$

on aura la quantité

$$M \left(\frac{\rho}{\sqrt{\pi}} \right)^{m-1} e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{1}{A} + \frac{1}{B} \right) \rho^2},$$

laquelle sera nécessairement moindre que la probabilité cherchée; de sorte qu'en nommant H cette quantité, on pourra toujours parier avec avantage H contre $1-H$ qu'en supposant les facilités des erreurs égales respectivement à $A, B, C, \dots$, on ne se trompera pas de la quantité très-petite $\frac{\rho}{\sqrt{n}}$.

LEMME I.

23. Soit X une fonction, rationnelle et sans diviseur, de x : on demande le coefficient de la puissance x^a dans la série résultante du développement de la fraction $\frac{X}{(a-x)^n}$.

On a, comme on sait,

$$\begin{aligned} \frac{1}{(a-x)^n} &= \frac{1}{a^n} + \frac{nx}{a^{n+1}} + \frac{n(n+1)x^2}{2a^{n+2}} + \dots \\ &= \frac{1.2.3 \dots (n-1)}{a^n} + \frac{2.3 \dots nx}{a^{n+1}} + \frac{3.4 \dots (n+1)x^2}{2a^{n+2}} + \dots \\ &= \frac{1.2.3 \dots (n-1)}{1.2.3 \dots (n-1)}; \end{aligned}$$

donc, si l'on ordonne la quantité X par rapport aux puissances de x , en commençant par la plus haute, de manière que l'on ait en général

$$X = Ax^n + Bx^{n-1} + Cx^{n-2} + \dots + Mx^n + Nx^{n-1} + \dots,$$

et qu'on multiplie cette série par celle qui exprime la valeur de $\frac{1}{(a-x)^n}$,

il est facile de voir que le terme qui contiendra la puissance x^a sera

$$\frac{1.2.3 \dots (n-1)}{a^n} M + \frac{2.3 \dots n}{a^{n+1}} N + \frac{3.4 \dots (n+1)}{2a^{n+2}} P + \dots x^a,$$

de sorte que le coefficient cherché sera représenté par la série

$$\frac{1.2.3\dots(n-1)}{a^n} M + \frac{2.3\dots n}{a^{n+1}} N + \frac{3.4\dots(n+1)}{a^{n+2}} P + \dots$$

Dénotons par X' la somme de tous les termes de la valeur de X , où les puissances de x ne sont pas plus hautes que x^n , en sorte que l'on ait

$$X' = Mx^n + Nx^{n-1} + Px^{n-2} + \dots;$$

divisant par x^{n+1} , on aura

$$\frac{X'}{x^{n+1}} = \frac{M}{x} + \frac{N}{x^2} + \frac{P}{x^3} + \dots,$$

done, différentiant $n-1$ fois et faisant ensuite $x=a$, on aura

$$\pm \frac{d^{n-1} \left(\frac{X'}{x^{n+1}} \right)}{dx^{n-1}} = \frac{1.2.3\dots(n-1)}{a^n} M + \frac{2.3\dots n}{a^{n+1}} N + \dots,$$

le signe supérieur étant pour le cas où n est impair, et l'inférieur pour celui où n est pair.

Donc, le coefficient cherché de la puissance x^n sera égal à ce que devient la quantité

$$\frac{(-1)^{n-1}}{1.2.3\dots(n-1)} \frac{d^{n-1} \left(\frac{X'}{x^{n+1}} \right)}{dx^{n-1}},$$

lorsqu'on y fait $x=a$.

24. REMARQUE. — Si l'on divise la quantité X par x^{n+1} , et qu'on en rejette ensuite tous les termes où il y aura des puissances positives de x , il est visible qu'on aura la valeur de $\frac{X'}{x^{n+1}}$; donc, à la place de la quantité X' on peut prendre la quantité même X , en ayant soin de rejeter les termes dont nous venons de parler; de cette manière on aura, pour

l'expression du coefficient cherché de x^n , la quantité

$$\frac{(-1)^{n-1}}{1.2.3\dots(n-1)} \frac{d^{n-1} \left(\frac{X}{x^{n+1}} \right)}{dx^{n-1}},$$

en rejetant dans cette quantité, avant ou après les différentiations, toutes les puissances positives de x , et faisant ensuite $x=a$.

25. COROLLAIRE. — Supposons qu'on demande le coefficient de x^n dans la série

$$x^{-\alpha} + \dots + x^{-2} + x^{-1} + x^0 + x^1 + x^2 + \dots + x^\beta$$

élevée à la puissance n .

Suivant les règles ordinaires de la sommation des progressions géométriques, on trouve que la somme de cette série est représentée par

$$\frac{x^{-\alpha}(1-x^{\alpha+\beta+1})}{1-x},$$

de sorte que la puissance $n^{\text{ième}}$ de la même série sera égale à

$$\frac{x^{-n\alpha}(1-x^{\alpha+\beta+1})^n}{(1-x)^n}.$$

Comparant donc cette formule avec celle du Lemme précédent, on aura

$$\begin{aligned} X &= x^{-n\alpha}(1-x^{\alpha+\beta+1})^n \\ &= x^{-n\alpha} - nx^{-(n-1)\alpha+\beta+1} + \frac{n(n-1)}{2} x^{-(n-2)\alpha+2(\beta+1)} \\ &\quad - \frac{n(n-1)(n-2)}{2.3} x^{-(n-3)\alpha+3(\beta+1)} + \dots; \end{aligned}$$

done, divisant par x^{n+1} et faisant, pour abrégé,

$$n\alpha + \mu = \pi, \quad \alpha + \beta + 1 = \rho,$$

on aura

$$\begin{aligned} \frac{X}{x^{n+1}} &= x^{-(\pi+1)} - nx^{-(\pi+1-\rho)} + \frac{n(n-1)}{2} x^{-(\pi+1-2\rho)} \\ &\quad - \frac{n(n-1)(n-2)}{2.3} x^{-(\pi+1-3\rho)} + \dots, \end{aligned}$$

et par conséquent, en différenciant $n-1$ fois,

$$\begin{aligned} & (-1)^{n-1} \frac{d^{n-1} \left(\frac{X}{x^{n+1}} \right)}{dx^{n-1}} \\ &= (\pi+1)(\pi+2)\dots(\pi+n-1)x^{-(\pi+n)} \\ &\quad - n(\pi+1-\rho)(\pi+2-\rho)\dots(\pi+n-1-\rho)x^{-(\pi+n-\rho)} \\ &\quad + \frac{n(n-1)}{2}(\pi+1-2\rho)(\pi+2-2\rho)\dots(\pi+n-1-2\rho)x^{-(\pi+n-2\rho)} \\ &\quad \dots \end{aligned}$$

On rejettera donc de cette série les termes où les exposants de x se trouveront positifs, c'est-à-dire que si s est le nombre entier qui est égal ou immédiatement plus grand que $\frac{\pi+n}{\rho}$, on continuera la série seulement jusqu'au terme $s^{\text{ième}}$; ou bien il suffira de la continuer jusqu'à ce que quelqu'un des premiers facteurs $\pi+1, \pi+1-\rho, \dots$ devienne négatif; ensuite on fera $x=1$ et on divisera le tout par $1.2.3\dots(n-1)$; on aura ainsi la valeur du coefficient cherché, laquelle sera par conséquent

$$\begin{aligned} & \frac{1}{1.2.3\dots(n-1)} \left[(\pi+1)(\pi+2)\dots(\pi+n-1) \right. \\ & \quad - n(\pi+1-\rho)(\pi+2-\rho)\dots(\pi+n-1-\rho) \\ & \quad + \frac{n(n-1)}{2}(\pi+1-2\rho)(\pi+2-2\rho)\dots(\pi+n-1-2\rho) \\ & \quad - \frac{n(n-1)(n-2)}{2.3}(\pi+1-3\rho)(\pi+2-3\rho)\dots(\pi+n-1-3\rho) \\ & \quad \dots \left. \right]. \end{aligned}$$

De là on tire la solution du Problème suivant.

PROBLÈME VII.

26. On a plusieurs observations dans chacune desquelles on suppose qu'on ait pu se tromper également d'une quelconque de ces quantités $-\alpha, \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots, \beta$; on demande quelle est la probabilité

que l'erreur du résultat moyen de n observations sera $\frac{\mu}{n}$, ou qu'elle sera renfermée entre ces limites $\frac{-P}{n}$ et $\frac{+Q}{n}$.

Pour trouver la probabilité que le résultat moyen soit $\frac{\mu}{n}$, il faut chercher le coefficient de la puissance x^μ du polynôme

$$x^{-\alpha} + \dots + x^{-2} + x^{-1} + x^0 + x^1 + x^2 + \dots + x^\beta$$

élevé à la puissance n , et diviser ensuite ce coefficient par la valeur du même polynôme élevé à la puissance n , qui répond à $x=1$, c'est-à-dire par $(\alpha+\beta+1)^n$; c'est ce qui suit évidemment de ce que nous avons démontré dans les Problèmes précédents.

Done, par le Corollaire précédent, on trouvera que la probabilité cherchée sera, en faisant $\pi = n\alpha + \mu$, $\rho = \alpha + \beta + 1$,

$$\begin{aligned} & \frac{1}{1.2.3\dots(n-1)\rho^n} \left[(\pi+1)(\pi+2)\dots(\pi+n-1) \right. \\ & \quad - n(\pi+1-\rho)(\pi+2-\rho)\dots(\pi+n-1-\rho) \\ & \quad + \frac{n(n-1)}{2}(\pi+1-2\rho)(\pi+2-2\rho)\dots(\pi+n-1-2\rho) \\ & \quad \dots \left. \right], \end{aligned}$$

en continuant cette série jusqu'à ce que quelqu'un des facteurs $\pi+1, \pi+1-\rho, \dots$ devienne négatif.

Telle est l'expression générale de la probabilité que l'erreur moyenne de n observations soit $\frac{\mu}{n}$; ainsi, pour avoir la probabilité que l'erreur soit contenue entre les limites $\frac{-P}{n}$ et $\frac{+Q}{n}$, il n'y aura qu'à faire varier μ dans la quantité précédente, et prendre la somme de toutes les quantités particulières qui répondront à

$$\mu = -P, \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots, Q.$$

Or, puisque la quantité μ n'entre que dans la valeur de π , il n'y aura donc que cette quantité de variable; de sorte que la difficulté se réduira à sommer des suites dont le terme général sera de cette forme

$$(s+1)(s+2)(s+3)\dots(s+k).$$

Pour cela, soit la somme de cette série représentée par

$$u(s+1)(s+2)\dots(s+k),$$

u étant une fonction inconnue de s , et mettant $s-1$ à la place de s et u' à la place de u , on aura

$$u's(s+1)(s+2)\dots(s+k-1);$$

cette quantité étant retranchée de la précédente, on aura la différence

$$[u(s+k) - u's](s+1)(s+2)\dots(s+k-1);$$

mais il faut que cette différence soit égale au terme général de la série dont on cherche la somme, donc on aura l'équation

$$u(s+k) - u's = s+k,$$

à laquelle on satisfera en faisant

$$u = \frac{s+k+1}{k+1};$$

de sorte que la somme générale de la série dont le terme général est $(s+1)(s+2)\dots(s+k)$ sera représentée par

$$\frac{(s+1)(s+2)\dots(s+k)(s+k+1)}{k+1},$$

et par conséquent la somme de tous les termes compris entre ces deux-ci

$$(s'+1)(s'+2)\dots(s'+k) \quad \text{et} \quad (s''+1)(s''+2)\dots(s''+k)$$

sera égale à

$$\frac{s''(s''+1)(s''+2)\dots(s''+k) - (s'+1)(s'+2)\dots(s'+k+1)}{k+1}.$$

Appliquant donc ceci à la formule trouvée plus haut, on aura, pour la probabilité que l'erreur moyenne tombe entre $\frac{p}{n}$ et $\frac{q}{n}$, l'expression suivante, dans laquelle j'ai fait, pour abrégier, $na-p=\delta$ et $na+q=\gamma$.

$$\frac{1}{1.2.3\dots n\rho^n} \left[\gamma(\gamma+1)\dots(\gamma+n-1) - (\delta+1)(\delta+2)\dots(\delta+n) \right. \\ \left. - n[(\gamma-\rho)\dots(\gamma-\rho+n-1) - (\delta-\rho+1)\dots(\delta-\rho+n)] \right. \\ \left. + \frac{n(n-1)}{2}[(\gamma-2\rho)\dots(\gamma-2\rho+n-1) - (\delta-2\rho+1)\dots(\delta-2\rho+n)] \right. \\ \left. \dots \dots \dots \right].$$

Cette série doit être continuée jusqu'à ce que quelqu'un des facteurs $\gamma-\rho, \gamma-2\rho, \dots$ devienne négatif; et quant aux autres facteurs $\delta-\rho+1, \delta-2\rho+1, \dots$, si quelqu'un d'entre eux se trouve négatif, alors il faudra augmenter le nombre δ d'autant d'unités qu'il faudra pour le rendre positif; cela suit évidemment de ce que la série, dont la précédente est la somme, ne doit être continuée que jusqu'à ce que quelqu'un des premiers facteurs $\pi+1-\rho, \pi+1-2\rho, \dots$ devienne négatif, comme nous l'avons vu dans le numéro précédent.

27. COROLLAIRE. — Supposons que les nombres α et β deviennent infinis, aussi bien que p et q , mais de façon qu'ils aient entre eux des rapports finis; et soient

$$\frac{\beta}{\alpha} = l, \quad \frac{p}{\alpha} = r, \quad \frac{q}{\alpha} = s,$$

en sorte que l'on ait

$$\beta = \alpha l, \quad p = \alpha r, \quad q = \alpha s,$$

l, r, s étant des nombres finis; dans ce cas on aura

$$\rho = \alpha + \beta = (1+l)\alpha, \quad \delta = na - p = (n-r)\alpha, \quad \gamma = na + q = (n+s)\alpha;$$

de sorte qu'en substituant ces valeurs dans la formule précédente, et négligeant ce qu'on doit négliger à cause de $\alpha = \infty$, on aura celle-ci, où $f = 1 + l$,

$$\frac{1}{1.2.3 \dots n f^n} \left[(n+s)^n - n(n+s-f)^n + \frac{n(n-1)}{2} (n+s-2f)^n - \dots \right. \\ \left. - (n-r)^n + n(n-r-f)^n - \frac{n(n-1)}{2} (n-r-2f)^n + \dots \right],$$

chacune de ces deux séries devant être continuée seulement jusqu'à ce que quelqu'une des quantités $n+s-f$, $n+s-2f, \dots$ et $n-r-f$, $n-r-2f, \dots$ devienne négative.

Le cas de ce Corollaire a lieu lorsqu'on suppose que chaque observation est également sujette à toutes les erreurs possibles comprises entre des limites données; car si on prend la plus grande erreur négative pour l'unité, et qu'on désigne la plus grande erreur positive par l , la formule précédente dénotera la probabilité que l'erreur du résultat moyen de n observations soit renfermée entre ces deux limites $-\frac{r}{n}$ et $+\frac{s}{n}$.

Au reste, nous donnerons plus bas une méthode beaucoup plus simple pour résoudre ces sortes de questions.

PROBLÈME VIII.

28. Supposant que les erreurs qu'on peut commettre dans chaque observation soient $-\omega, \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots, \omega$, et que le nombre des cas qui répondent à chacune de ces erreurs soit respectivement proportionnel à $1, 2, 3, \dots, \alpha+1, \dots, 3, 2, 1$, on demande quelle est la probabilité que l'erreur du résultat moyen de m observations soit comprise entre les limites $-\frac{p}{m}$ et $+\frac{q}{m}$.

Commençons par chercher la probabilité que l'erreur moyenne soit $\frac{p}{m}$; cette probabilité sera égale au coefficient de la puissance $x^{\frac{p}{m}}$ du polynôme

$$x^{-\omega} + 2x^{-\omega+1} + \dots + \omega x^{-1} + (\omega+1)x^0 + \omega x^1 + \dots + 2x^{\omega-1} + x^{\omega}$$

élevé à la puissance m , ce coefficient étant ensuite divisé par la valeur du même polynôme élevé à la puissance n , qui répond à $x = 1$.

Or on a

$$1 + 2x + \dots (\omega+1)x^{\omega} + \dots 2x^{\omega-1} + x^{\omega} = (1+x+\dots+x^{\omega})^2 = \left(\frac{1-x^{\omega+1}}{1-x}\right)^2;$$

donc le polynôme dont il s'agit sera égal à

$$x^{-\omega} \left(\frac{1-x^{\omega+1}}{1-x}\right)^2,$$

et par conséquent la puissance n de ce polynôme sera représentée par

$$\frac{x^{-m\omega} (1-x^{\omega+1})^{2m}}{(1-x)^{2m}}.$$

Cette formule étant comparée à celle du n° 25, on aura

$$n = 2m, \quad n\alpha = m\omega, \quad \alpha + \beta + 1 = \omega + 1,$$

d'où l'on tire

$$n = 2m, \quad \alpha = \frac{m\omega}{n} = \frac{\omega}{2}, \quad \text{et} \quad \beta = \frac{\omega}{2};$$

donc (Problème précédent) la probabilité cherchée sera

$$\frac{1}{1.2.3 \dots 2m \rho^{2m}} \left[(\pi+1)(\pi+2) \dots (\pi+2m-1) \right. \\ \left. - 2m(\pi+1-\rho)(\pi+2-\rho) \dots (\pi+2m-1-\rho) \right. \\ \left. + \frac{2m(2m-1)}{2} (\pi+1-2\rho)(\pi+2-2\rho) \dots (\pi+2m-1-2\rho) \right. \\ \left. \dots \dots \dots \right],$$

en supposant $\pi = m\omega + \mu$ et $\rho = \omega + 1$, et continuant la série jusqu'à ce que quelqu'un des facteurs $\pi+1-\rho$, $\pi+2-\rho, \dots$ devienne négatif.

De là on trouvera, comme dans le Problème précédent, que la probabilité que l'erreur moyenne se trouve entre les limites $-\frac{p}{n}$ et $+\frac{q}{n}$ sera

exprimée par

$$\frac{1}{1.2.3\dots 2m} \left[\gamma(\gamma+1)\dots(\gamma+2m-1) - (\delta+1)(\delta+2)\dots(\delta+2m) \right. \\ \left. - 2m[(\gamma-\rho)\dots(\gamma+2m-1-\rho) - (\delta+1-\rho)\dots(\delta+2m-\rho)] \right. \\ \left. + \frac{2m(2m-1)}{2}[(\gamma-2\rho)\dots(\gamma+2m-1-2\rho) - (\delta+1-2\rho)\dots(\delta+2m-2\rho)] \right] \\ \dots\dots\dots$$

γ étant $= m\omega + q$ et $\delta = m\omega - p$. A l'égard de la continuation de ces deux séries, il faudra suivre les règles prescrites plus haut (24).

29. COROLLAIRE. — Supposons maintenant que les nombres ω , p et q deviennent infinis, mais en sorte que l'on ait $\frac{p}{\omega} = r$, $\frac{q}{\omega} = s$, r et s étant des nombres finis, et la formule précédente deviendra (25)

$$\frac{(2m+s)^{2m} - 2m[2(m-1)+s]^{2m} + \frac{2m(2m-1)}{2}[2(m-2)+s]^{2m} - \dots}{1.2.3\dots 2m.2^{2m}}, \\ \frac{(2m-r)^{2m} - 2m[2(m-1)-r]^{2m} + \frac{2m(2m-1)}{2}[2(m-2)-r]^{2m} - \dots}{1.2.3\dots 2m.2^{2m}},$$

ces deux séries étant continuées jusqu'à ce que quelqu'une des quantités qui sont élevées à la puissance $2n$ devienne négative.

Cette formule exprimera donc la probabilité que l'erreur moyenne de n observations soit comprise entre les limites $\frac{-r}{n}$ et $\frac{s}{n}$, dans l'hypothèse que chaque observation soit sujette à toutes les erreurs possibles contenues entre ces deux limites -1 et $+1$, et que la facilité de chaque erreur soit proportionnelle à la différence qu'il y a entre cette erreur et la plus grande erreur possible dans le même sens; cette hypothèse est plus conforme à la nature que celle du n° 27; la courbe des erreurs (20) serait ici un triangle isocèle quelconque.

30. SCOLIE. — En général, on pourra trouver, à l'aide du Lemme précédent, la probabilité que l'erreur moyenne soit égale à une quantité

donnée dans l'hypothèse que les erreurs, auxquelles chaque observation est sujette, forment une progression arithmétique, et que les facilités de ces erreurs forment une progression algébrique quelconque, dont les différences d'un ordre quelconque deviennent nulles; car soit

$$Ax^{-\alpha} + Bx^{-\alpha+1} + \dots + Px^{-1} + Qx^0 + Rx^1 + \dots + Vx^{\beta}$$

le polynôme dont les exposants de x représentent les erreurs, et les coefficients, les facilités de ces erreurs; qu'on dénote par ΔA , $\Delta^2 A$, ... les différences premières, secondes, ... de la série

$$A, B, C, \dots$$

en sorte que

$$\Delta A = B - A, \quad \Delta^2 A = C - 2B + A, \dots$$

et qu'on dénote de même par ΔV , $\Delta^2 V$, ... les différences de la série

$$V, X, Y, \dots$$

supposée continuée au delà de V , on aura, comme on sait, pour la valeur du polynôme proposé, la série

$$x^{-\alpha} \left[\frac{A - Vx^{\alpha+\beta+1}}{1-x} + x \frac{\Delta A - \Delta Vx^{\alpha+\beta+1}}{(1-x)^2} + \dots \right].$$

Or, si la série

$$A, B, C, \dots, V, X, \dots$$

est telle que ses différences d'un ordre quelconque m , par exemple, deviennent nulles, on aura

$$\Delta^m A = 0, \quad \Delta^m V = 0,$$

et toutes les différences ultérieures seront aussi zéro; de sorte que l'expression précédente deviendra finie quand même le polynôme proposé contiendrait un nombre infini de termes; de plus cette expression pourra se réduire à cette forme $\frac{\Xi}{(1-x)^m}$, Ξ étant une fonction rationnelle et entière de x ; de sorte qu'en élevant cette quantité à une puissance quelconque, on aura toujours une expression qui sera dans le cas de celle du Lemme.

LEMME II.

31. On demande le coefficient de la puissance x^s dans la série qui résultera du développement de la fraction

$$\frac{X}{(a-x)^n(b-x)^s},$$

X étant, comme dans le Lemme I, une fonction, rationnelle et sans diviseur, de x .

On sait que la fraction $\frac{1}{(a-x)^n(b-x)^s}$ peut se décomposer en différentes fractions telles que celles-ci

$$\begin{aligned} & \frac{A}{(a-x)^n} + \frac{A'}{(a-x)^{n-1}} + \frac{A''}{(a-x)^{n-2}} + \dots + \frac{A^{(n-1)}}{a-x} \\ & + \frac{B}{(b-x)^s} + \frac{B'}{(b-x)^{s-1}} + \frac{B''}{(b-x)^{s-2}} + \dots + \frac{B^{(s-1)}}{b-x}, \end{aligned}$$

les coefficients $A, A', A'', \dots$ étant égaux à ce que deviennent les quantités

$$+ \frac{1}{(b-x)^s}, - \frac{d}{dx} \frac{1}{(b-x)^s}, + \frac{d^2}{2dx^2} \frac{1}{(b-x)^s}, \dots,$$

lorsque $x=a$, et les coefficients $B, B', B'', \dots$ étant égaux à ce que deviennent les quantités

$$+ \frac{1}{(a-x)^n}, - \frac{d}{dx} \frac{1}{(a-x)^n}, + \frac{d^2}{2dx^2} \frac{1}{(a-x)^n}, \dots,$$

lorsque $x=b$. Donc la fraction proposée se changera dans ces deux suites de fractions

$$\begin{aligned} & \frac{AX}{(a-x)^n} + \frac{A'X}{(a-x)^{n-1}} + \dots + \frac{A^{(n-1)}X}{a-x} \\ & + \frac{BX}{(b-x)^s} + \frac{B'X}{(b-x)^{s-1}} + \dots + \frac{B^{(s-1)}X}{b-x}. \end{aligned}$$

Mais, par le Lemme I, le coefficient de la puissance x^s dans la

série résultante d'une fraction telle que $\frac{X}{(a-x)^n}$ peut s'exprimer par

$$\frac{(-1)^{n-s-1}}{1.2.3\dots(m-s-1)} \frac{d^{n-s-1}}{dx^{n-s-1}} \frac{X}{x^{s+1}},$$

en y faisant, après les différentiations, $x=a$.

Done, en général, la fraction $\frac{A'X}{(a-x)^{n-1}}$ donnera pour le coefficient de x^s la quantité

$$\frac{(-1)^s}{1.2.3\dots s} \frac{d^s}{dx^s} \frac{1}{(b-x)^s} \times \frac{(-1)^{n-s-1}}{1.2.3\dots(m-s-1)} \frac{d^{n-s-1}}{dx^{n-s-1}} \frac{X}{x^{s+1}},$$

où il faut faire $x=a$. Donc, puisque

$$d^{n-1}y^s = y d^{n-1}z + (m-1)dy d^{n-2}z + \frac{(m-1)(m-2)}{2} d^2y d^{n-3}z + \dots + z d^{n-1}y,$$

il est facile de voir que les fractions

$$\frac{AX}{(a-x)^n} + \frac{A'X}{(a-x)^{n-1}} + \dots + \frac{A^{(n-1)}X}{a-x},$$

prises toutes ensemble, donneront pour le coefficient de x^s la quantité

$$\frac{(-1)^{n-s-1}}{1.2.3\dots(m-1)} \frac{d^{n-s-1}}{dx^{n-s-1}} \frac{X}{x^{s+1}(a-x)^n},$$

x étant fait égal à a .

De même les fractions

$$\frac{BX}{(a-x)^n} + \frac{B'X}{(b-x)^{s-1}} + \dots + \frac{B^{(s-1)}X}{b-x}$$

donneront pour le coefficient de x^s la quantité

$$\frac{(-1)^{n-s-1}}{1.2.3\dots(n-1)} \frac{d^{n-s-1}}{dx^{n-s-1}} \frac{X}{x^{s+1}(a-x)^n},$$

x étant fait égal à b .

Donc, en réunissant ces deux quantités, on aura pour le coefficient de x^s dans la série résultante de la fraction $\frac{X}{(a-x)^m(b-x)^n}$ l'expression

$$\frac{(-1)^{m-1}}{1.2.3\dots(m-1)} \frac{d^{m-1}}{dx^{m-1}} \frac{X}{x^{n+1}(b-x)^n} \quad (x=a)$$

$$+ \frac{(-1)^{n-1}}{1.2.3\dots(n-1)} \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} \frac{X}{x^{m+1}(a-x)^m} \quad (x=b)$$

en ayant soin de rejeter dans la valeur de $\frac{X}{x^{s+1}}$ toutes les puissances positives de x .

32. COROLLAIRE. — Il est facile de conclure de là que si l'on développe en série la fraction

$$\frac{X}{(a-x)^m(b-x)^n(c-x)^p\dots},$$

on aurait pour le coefficient de x^s l'expression suivante

$$\frac{(-1)^{m-1}}{1.2.3\dots(m-1)} \frac{d^{m-1}}{dx^{m-1}} \left[\frac{X}{x^{n+1}(b-x)^n(c-x)^p\dots} \right] \quad (x=a)$$

$$+ \frac{(-1)^{n-1}}{1.2.3\dots(n-1)} \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} \left[\frac{X}{x^{m+1}(a-x)^m(c-x)^p\dots} \right] \quad (x=b)$$

$$+ \frac{(-1)^{p-1}}{1.2.3\dots(p-1)} \frac{d^{p-1}}{dx^{p-1}} \left[\frac{X}{x^{m+1}(a-x)^m(b-x)^n\dots} \right] \quad (x=c)$$

.....

en ne prenant dans la valeur de $\frac{X}{x^{s+1}}$ que les puissances négatives de x , et rejetant toutes les positives.

33. REMARQUE. — Par le moyen du Lemme précédent, on pourra donc déterminer aisément la probabilité que l'erreur moyenne, résultant

de tant d'observations qu'on voudra, soit nulle ou égale à une quantité donnée, lorsque le polynôme (30)

$$Ax^{-\alpha} + Bx^{-\alpha+1} + \dots + Px^{-1} + Qx^0 + Rx^1 + \dots + Vx^\beta$$

forme une série récurrente quelconque; car alors la somme de cette série pourra s'exprimer, comme on sait, par une fraction rationnelle telle que

$$\frac{\Xi}{(a-x)^s(b-x)^r(c-x)^p\dots},$$

Ξ étant une fonction, rationnelle et sans diviseur, de x ; de sorte qu'en élevant cette quantité à une puissance quelconque, on aura toujours une expression qui pourra se rapporter à celles du Lemme ci-dessus.

Au reste, l'hypothèse la plus conforme à la nature est celle où l'on suppose que chaque observation soit sujette à toutes les erreurs comprises entre des limites données, en sorte que le nombre de toutes les erreurs possibles soit infini, comme dans les nos 27 et 29; or, pour trouver en ce cas la probabilité que l'erreur moyenne d'un nombre quelconque d'observations soit aussi renfermée entre des limites données, il n'est pas nécessaire de considérer d'abord un nombre fini d'erreurs et de supposer ensuite que ce nombre devienne infini, comme nous l'avons pratiqué dans les numéros cités; mais on peut y parvenir directement par une méthode beaucoup plus simple et plus générale, laquelle est fondée sur le Lemme suivant.

LEMME III.

34. Si y dénote une fonction quelconque de x , telle que $\frac{d^n y}{dx^n}$ soit une quantité constante, on aura

$$\int y a^x dx = a^x \left[\frac{y}{\log a} - \frac{dy}{dx (\log a)^2} + \frac{d^2 y}{dx^2 (\log a)^3} - \dots \pm \frac{d^n y}{dx^n (\log a)^{n+1}} \right] + \text{const.};$$

c'est ce qui est aisé à vérifier par la différentiation.

35. COROLLAIRE I. — Si l'on fait $y = x^m$, m étant un nombre entier

et positif, on aura donc

$$\int x^m a^x dx = a^x \left[\frac{x^m}{\log a} - \frac{mx^{m-1}}{(\log a)^2} + \frac{m(m-1)x^{m-2}}{(\log a)^3} - \dots \right. \\ \left. \pm \frac{m(m-1)(m-2)\dots 2.1}{(\log a)^{m+1}} \right] + \text{const.}$$

Qu'on prenne l'intégrale $\int x^m a^x dx$ en sorte qu'elle soit nulle lorsque $x = 0$, et l'on aura

$$\int x^m a^x dx = a^x \left[\frac{x^m}{\log a} - \frac{mx^{m-1}}{(\log a)^2} + \dots + (-1)^m \frac{1.2.3\dots m}{(\log a)^{m+1}} \right].$$

Or, si l'on suppose que a soit une fraction moindre que l'unité, en sorte que $\frac{1}{a}$ soit un nombre plus grand que l'unité, et qu'on fasse $x = \infty$, il est facile de voir que $\left(\frac{1}{a}\right)^x$ sera une quantité infinie d'un ordre infiniment plus grand que x^m et qu'aucune puissance finie de x ; donc $\frac{x^m}{\left(\frac{1}{a}\right)^x}$ ou bien $a^x x^m$ sera nulle, et, à plus forte raison aussi, toutes les autres quantités $a^x x^{m-1}$, $a^x x^{m-2}$, ... seront nulles, de sorte qu'on aura dans ces cas

$$\int x^m a^x dx = \frac{1.2.3\dots m}{(-\log a)^{m+1}}.$$

D'où je conclus que la quantité $\frac{1}{(-\log a)^m}$ est égale à l'intégrale de $x^{m-1} a^x dx$ prise depuis $x=0$ jusqu'à $x=\infty$, et divisée par $1.2.3\dots(m-1)$, pourvu que a soit un nombre positif moindre que l'unité.

Si a était un nombre positif plus grand que l'unité, il n'y aurait qu'à mettre $\frac{1}{a}$ à la place de x dans la formule précédente, et l'on en conclurait que la quantité $\frac{1}{(\log a)^m}$ serait égale à l'intégrale de $\frac{x^{m-1} dx}{a^x}$ prise de même depuis $x=0$ jusqu'à $x=\infty$, et divisée par $1.2.3\dots(m-1)$; on voit par là comment on peut réduire les puissances quelconques de $\frac{1}{\log a}$ en des séries infinies qui précèdent suivant les puissances de a .

36. COROLLAIRE II. — Donc, si l'on a une fonction quelconque, rationnelle et sans diviseur, de a telle que

$$\Lambda = Pa^p + Qa^{p-1} + Ra^{p-2} + \dots,$$

et qu'on demande le coefficient de la puissance a^{p-x} dans la fonction $\frac{\Lambda}{(\log a)^m}$, il n'y aura qu'à mettre, à la place de $\frac{1}{(\log a)^m}$, la somme des valeurs de $\frac{x^{m-1} dx}{a^x}$ depuis $x=0$ jusqu'à $x=\infty$, divisée par $1.2.3\dots(m-1)$ (Corollaire précédent), et rassemblant tous les termes où a se trouvera élevé à la puissance donnée, on aura pour le coefficient de cette puissance la série

$$\frac{Px^{p-1} + Q(x-1)^{p-1} + R(x-2)^{p-1} + \dots}{1.2.3\dots(m-1)} dx,$$

laquelle ne devra être continuée que jusqu'à ce que quelqu'un des termes $x-1$, $x-2$, ... devienne négatif; et comme ce coefficient ne dépend point de la valeur de a , il est clair que la formule que nous venons de trouver aura toujours lieu, soit que a soit plus grand ou moindre que l'unité.

Si, au lieu de la fonction $\frac{\Lambda}{(\log a)^m}$, on avait celle-ci

$$\frac{\Lambda}{(\log a - \alpha)^m},$$

comme $\log a - \alpha = \log \frac{a}{e^\alpha}$, il faudrait substituer à la place de $\frac{1}{(\log a - \alpha)^m}$

la somme des valeurs de $\frac{e^{\alpha x} x^{m-1} dx}{a^x}$ depuis $x=0$ jusqu'à $x=\infty$, divisée par $1.2.3\dots(m-1)$, et l'on aurait pour le coefficient de a^{p-x} la série

$$\frac{Pe^{\alpha x} x^{p-1} + Qe^{\alpha(x-1)}(x-1)^{p-1} + Re^{\alpha(x-2)}(x-2)^{p-1} + \dots}{1.2.3\dots(m-1)} dx.$$

Enfin, si l'on avait la fonction

$$\frac{\Lambda}{(\log a - \alpha)^m (\log a - \beta)^n \dots},$$

on décomposerait d'abord, par les méthodes connues, la fraction

$$\frac{1}{(\log a - \alpha)^n (\log a - \beta)^n \dots}$$

en celles-ci

$$\begin{aligned} & \frac{F}{(\log a - \alpha)^n} + \frac{F'}{(\log a - \alpha)^{n-1}} + \dots + \frac{F^{(n-1)}}{\log a - \alpha} \\ & + \frac{G}{(\log a - \beta)^n} + \frac{G'}{(\log a - \beta)^{n-1}} + \dots + \frac{G^{(n-1)}}{\log a - \beta} \\ & \dots \dots \dots \end{aligned}$$

ensuite, multipliant chacune de ces fractions par Λ , on aurait autant de fonctions de a , dans lesquelles on pourrait trouver le coefficient de la puissance a^x par la formule ci-dessus.

37. REMARQUE. — Par le moyen du Lemme précédent, on peut trouver l'intégrale

$$\int y a^x dx,$$

lorsque $y = X e^{-ax}$, X étant une fonction, rationnelle et sans diviseur, de x , telle que sa différentielle d'un ordre quelconque soit constante; car pour cela il n'y aura qu'à mettre, dans la formule du Lemme, X à la place de y et $a e^{-a}$ à la place de a ; moyennant quoi on aura

$$\int \frac{X a^x}{e^{ax}} dx = \frac{a^x}{e^{ax}} \left[\frac{X}{\log a - a} - \frac{dX}{dx (\log a - a)^2} + \frac{d^2 X}{dx^2 (\log a - a)^3} - \dots \right] + \text{const.}$$

Et l'on trouvera de même l'intégrale de $y a^x dx$, lorsque y sera composée de différentes fonctions de même espèce que $\frac{X}{e^{ax}}$.

D'où il s'ensuit que l'on pourra aussi trouver l'intégrale de $y a^x dx$ lorsque y sera de cette forme : $X \cos ax$ ou $X \sin ax$, ou composée de plusieurs fonctions d'une forme semblable; car il n'y aura qu'à mettre à la place des sinus et cosinus les expressions exponentielles imaginaires qui leur sont équivalentes, et, le calcul achevé, on remettra à la place de ces expressions les sinus ou cosinus qui y répondent.

Ce sont là les seuls cas où la formule $y a^x dx$ soit intégrable, au moins par les méthodes connues jusqu'ici; dans tous les autres cas l'intégration ne peut s'exécuter que par approximation.

PROBLÈME X.

38. On suppose que chaque observation soit sujette à toutes les erreurs possibles comprises entre ces deux limites, p et $-q$, et que la facilité de chaque erreur x , c'est-à-dire le nombre des cas où elle peut avoir lieu divisé par le nombre total des cas, soit représentée par une fonction quelconque de x désignée par y ; on demande la probabilité que l'erreur moyenne de n observations soit comprise entre les limites r et $-s$.

On commencera d'abord par chercher la probabilité que l'erreur moyenne soit z , et cette probabilité étant représentée par une fonction de z , il n'y aura qu'à en prendre l'intégrale depuis $z = r$ jusqu'à $z = s$; ce sera la probabilité cherchée.

Maintenant, pour avoir la probabilité que l'erreur moyenne de n observations soit z , il faudra considérer le polynôme qui est représenté par l'intégrale de $y a^x dx$, en supposant cette intégrale prise de manière qu'elle s'étende depuis $x = p$ jusqu'à $x = -q$; on élèvera ce polynôme à la puissance n , et l'on cherchera le coefficient de puissance z de a , par les règles données dans les Corollaires du Lemme précédent; ce coefficient, qui sera une fonction de z , exprimera la probabilité que l'erreur moyenne soit z , comme il est facile de le voir d'après ce qui a été démontré plus haut.

39. EXEMPLE I. — Supposons d'abord que y soit une quantité constante K , en sorte que toutes les erreurs soient également probables, et l'intégrale de $y a^x dx$ sera $\frac{K a^x}{\log a}$, de sorte qu'en prenant cette intégrale depuis $x = p$ jusqu'à $x = -q$, on aura pour sa valeur complète $\frac{K(a^p - a^{-q})}{\log a}$; qu'on élève donc cette quantité à la puissance n , et l'on

aura une quantité de la forme $\frac{\Lambda}{(\log a)^p}$, où (faisant $p+q=t$)

$$\Lambda = K^n \left[a^{pn} - n a^{p(n-1)} + \frac{n(n-1)}{2} a^{p(n-2)} - \dots \right].$$

Donc, par le Corollaire II du Lemme (36), le coefficient de puissance a^{pn-x} sera

$$\frac{K^n}{1.2.3 \dots (n-1)} \left[x^{n-1} - n(x-t)^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2} (x-2t)^{n-1} - \frac{n(n-1)(n-2)}{2.3} (x-3t)^{n-1} + \dots \right] dx,$$

en ayant soin de ne continuer la série que jusqu'à ce qu'on parvienne à des termes $x - mt$ qui soient négatifs. Faisant donc $pn - x = z$, c'est-à-dire $x = pn - z$, on aura la probabilité que l'erreur moyenne de n observations soit z . On intégrera maintenant la formule précédente en y faisant varier x , et l'on prendra l'intégrale en sorte qu'elle soit nulle lorsque $x = pn - r$, et complète lorsque $x = pn + s$; on aura de cette manière la quantité

$$\frac{K^n}{1.2.3 \dots n} \left[(pn+s)^n - n(pn+s-t)^n + \frac{n(n-1)}{2} (pn+s-2t)^n - \dots - (pn-r)^n + n(pn-r-t)^n - \frac{n(n-1)}{2} (pn-r-2t)^n + \dots \right],$$

laquelle exprimera la probabilité que l'erreur moyenne de n observations soit contenue entre les limites r et $-s$ au reste cette formule revient à la même que celle du n° 27.

40. EXEMPLE II. — On suppose que la quantité y soit $K(p^2 - x^2)$, et que les deux limites des erreurs soient p et $-p$, il faudra intégrer la différentielle $Ka^x(p^2 - x^2) dx$, et prendre l'intégrale en sorte qu'elle s'étende depuis $x = -p$ jusqu'à $x = p$. Or, puisque la seconde différentielle de $p^2 - x^2$ est constante, on aura par le Lemme cette intégrale

$$Ka^x \left[\frac{p^2 - x^2}{\log a} + \frac{2x}{(\log a)^2} - \frac{2}{(\log a)^3} \right],$$

laquelle étant complétée, comme on vient de le dire, donnera

$$\frac{2Kp(a^p + a^{-p})}{(\log a)^2} - \frac{2K(a^p - a^{-p})}{(\log a)^3};$$

on élèvera donc cette quantité à la puissance n , et l'on aura

$$\frac{(2Kp)^n (a^p + a^{-p})^n}{(\log a)^{2n}} - n \frac{(2K)^n p^{n-1} (a^p + a^{-p})^{n-1} (a^p - a^{-p})}{(\log a)^{2n+1}} + \frac{n(n-1)}{2} \frac{(2K)^n p^{n-2} (a^p + a^{-p})^{n-2} (a^p - a^{-p})^2}{(\log a)^{2n+2}} + \dots;$$

on développera les puissances de $a^p + a^{-p}$ et de $a^p - a^{-p}$, et l'on cherchera ensuite par les règles du n° 36 le coefficient de la puissance a^z . Pour faciliter ces opérations nous supposons

$$\begin{aligned} (a^p + a^{-p})^n &= a^{pn} + P a^{p(n-2p)} + Q a^{p(n-4p)} + \dots \\ (a^p + a^{-p})^{n-1} (a^p - a^{-p}) &= a^{p(n-1)} + P' a^{p(n-3p-1)} + Q' a^{p(n-5p-1)} + \dots \\ (a^p + a^{-p})^{n-2} (a^p - a^{-p})^2 &= a^{p(n-2)} + P'' a^{p(n-4p-2)} + Q'' a^{p(n-6p-2)} + \dots \end{aligned}$$

et l'on trouvera, pour le coefficient de la puissance $np - x$, la série

$$\begin{aligned} &\frac{(2Kp)^n}{1.2.3 \dots (2n-1)} [x^{2n-1} + P(x-2p)^{2n-1} + Q(x-4p)^{2n-1} + \dots] dx \\ &- n \frac{(2K)^n p^{n-1}}{1.2.3 \dots 2n} [x^{2n} + P'(x-2p)^{2n} + Q'(x-4p)^{2n} + \dots] dx \\ &+ \frac{n(n-1)}{2} \frac{(2K)^n p^{n-2}}{1.2.3 \dots (2n+1)} [x^{2n+1} + P''(x-2p)^{2n+1} + Q''(x-4p)^{2n+1} + \dots] dx \\ &\dots \dots \dots \end{aligned}$$

On fera donc $z = np - x$, c'est-à-dire $x = np - z$, et l'on intégrera de manière que l'intégrale soit nulle lorsque $z = r$ et complète lorsque $z = -s$, c'est-à-dire nulle quand $x = np - r$ et complète quand

$x = np + s$; on aura la quantité

$$\begin{aligned} & \frac{(2Kp)^n}{1.2.3\dots 2n} \left[(np+s)^{2n} + P[(n-2)p+s]^{2n} + Q[(n-4)p+s]^{2n} + \dots \right. \\ & \quad \left. - (np-r)^{2n} + P[(n-2)p-r]^{2n} - Q[(n-4)p-r]^{2n} + \dots \right] \\ & - n \frac{(2K)^n p^{n-1}}{1.2.3\dots (2n+1)} \left[(np+s)^{2n+1} + P'[(n-2)p+s]^{2n+1} + Q'[(n-4)p+s]^{2n+1} + \dots \right. \\ & \quad \left. - (np-r)^{2n+1} - P'[(n-2)p-r]^{2n+1} - Q'[(n-4)p-r]^{2n+1} + \dots \right] \\ & + \frac{n(n-1)}{2} \frac{(2K)^n p^{n-2}}{1.2.3\dots (2n+2)} \left[(np+s)^{2n+2} + P''[(n-2)p+s]^{2n+2} + Q''[(n-4)p+s]^{2n+2} + \dots \right. \\ & \quad \left. - (np-r)^{2n+2} - P''[(n-2)p-r]^{2n+2} - Q''[(n-4)p-r]^{2n+2} + \dots \right] \end{aligned}$$

laquelle exprimera la probabilité que l'erreur moyenne de n observations soit comprise entre les limites r et $-s$; au reste il faudra toujours se souvenir que les séries précédentes ne doivent être continuées que jusqu'à ce que quelques-unes des quantités qui sont élevées aux puissances $2n, 2n+1, \dots$ deviennent négatives.

41. REMARQUE. — L'hypothèse du dernier exemple paraît la plus simple et la plus naturelle qu'on puisse imaginer; il est vrai que celle du Problème VIII paraît encore plus simple, puisqu'on y suppose que la facilité des erreurs x et $-x$ soit représentée par $p-x$, p étant la plus grande valeur possible de x , c'est-à-dire la limite des erreurs, tant positives que négatives; mais cette hypothèse a l'inconvénient que la loi de continuité n'y est pas observée en passant des erreurs positives aux négatives; c'est pourquoi, si l'on voulait y appliquer la méthode du Problème précédent, il faudrait, en faisant $y = K(p-x)$, prendre d'abord l'intégrale $\int y a^x dx$ depuis $x = 0$ jusqu'à $x = p$, laquelle serait

$$K \left[\frac{a^p - 1}{(\log a)^2} - \frac{p}{\log a} \right];$$

ensuite, en faisant x négatif et conservant la même valeur de y , il fau-

draît prendre de même l'intégrale $\int y a^{-x} dx$ depuis $x = 0$ jusqu'à $x = p$, laquelle serait (en ne faisant que mettre $\frac{1}{a}$ à la place de a dans l'expression précédente)

$$K \left[\frac{a^{-p} - 1}{(\log a)^2} + \frac{p}{\log a} \right],$$

et la somme de ces deux intégrales particulières serait l'intégrale complète de $\int y a^x dx$ depuis $x = p$ jusqu'à $x = -p$ dans l'hypothèse dont il s'agit; on aura donc la quantité

$$K \left[\frac{a^p + a^{-p} - 2}{(\log a)^2} \right] \quad \text{ou bien} \quad K \left(\frac{\frac{p}{2} - a^{\frac{p}{2}} - \frac{p}{2}}{\log a} \right)^2,$$

qu'il faudra élever à la puissance n , et sur laquelle on pourra ensuite opérer, comme dans l'Exemple I; on pourra même, sans faire un nouveau calcul, appliquer ici les formules de cet Exemple en y mettant $2n$ à la place de n , $\frac{p}{2}$ à la place de p et de q , et par conséquent p à la place de $t = p + q$; de cette manière on aura sur-le-champ l'expression de la probabilité que l'erreur moyenne de n observations soit renfermée entre les limites r et $-s$, laquelle sera

$$\begin{aligned} & \frac{K^n}{1.2.3\dots 2n} \left[(pn+s)^{2n} - 2n[(n-1)p+s]^{2n-1} + \frac{2n(2n-1)}{2} [(n-2)p+s]^{2n-2} - \dots \right. \\ & \quad \left. - (pn-r)^{2n} + 2n[(n-1)p-r]^{2n-1} - \frac{2n(2n-1)}{2} [(n-2)p-r]^{2n-2} + \dots \right], \end{aligned}$$

ce qui s'accorde avec la formule du n° 29.

PROBLÈME XI.

42. Supposant que chaque observation soit sujette à toutes les erreurs possibles comprises entre les limites p et $-p$ (p étant l'arc de 90 degrés), et que la facilité de chaque erreur x soit proportionnelle à $\cos x$, on demande la probabilité que l'erreur moyenne de n observations sera renfermée entre les limites r et $-s$.

On aura donc ici $y = K \cos x$, et il s'agira d'abord d'intégrer la différentielle $Ka^x \cos x dx$, dont l'intégrale (en mettant $\frac{e^{x\sqrt{-1}} + e^{-x\sqrt{-1}}}{2}$ à la place de $\cos x$) se trouvera par le n° 37,

$$\frac{Ka^x}{2} \left(\frac{e^{x\sqrt{-1}}}{\log a + \sqrt{-1}} + \frac{e^{-x\sqrt{-1}}}{\log a - \sqrt{-1}} \right),$$

c'est-à-dire, en repassant des exponentielles imaginaires aux sinus et cosinus,

$$Ka^x \frac{\log a \cos x + \sin x}{(\log a)^2 + 1};$$

cette intégrale doit maintenant être prise en sorte qu'elle s'étende depuis $x = -p$, auquel cas $\cos x = 0$ et $\sin x = 1$, jusqu'à $x = p$, où $\cos x = 0$ et $\sin x = 1$; ainsi l'on aura pour l'intégrale complète

$$\frac{K(a^p + a^{-p})}{(\log a)^2 + 1}.$$

Qu'on élève donc cette quantité à la puissance n , et faisant, pour abréger,

$$\Lambda = K^n \left[a^{pn} + n a^{p(n-1)} + \frac{n(n-1)}{2} a^{p(n-2)} + \dots \right],$$

on aura la quantité

$$\frac{\Lambda}{[(\log a)^2 + 1]^n},$$

dans laquelle il s'agira maintenant de chercher le coefficient de la puissance a^x .

Pour cela il faudra (36) décomposer la fraction

$$\frac{1}{[(\log a)^2 + 1]^n}, \quad \text{c'est-à-dire} \quad \frac{1}{(\log a + \sqrt{-1})^n (\log a - \sqrt{-1})^n},$$

en ces fractions simples

$$\frac{F}{(\log a + \sqrt{-1})^n} + \frac{F'}{(\log a + \sqrt{-1})^{n-1}} + \frac{F''}{(\log a + \sqrt{-1})^{n-2}} + \dots$$

$$+ \frac{G}{(\log a - \sqrt{-1})^n} + \frac{G'}{(\log a - \sqrt{-1})^{n-1}} + \frac{G''}{(\log a - \sqrt{-1})^{n-2}} + \dots,$$

et l'on aura par les méthodes connues (31)

$$F = \frac{1}{(-2\sqrt{-1})^n}, \quad F' = -\frac{n}{(-2\sqrt{-1})^{n+1}}, \quad F'' = \frac{n(n+1)}{2(-2\sqrt{-1})^{n+2}} + \dots,$$

$$G = \frac{1}{(2\sqrt{-1})^n}, \quad G' = -\frac{n}{(2\sqrt{-1})^{n+1}}, \quad G'' = \frac{n(n+1)}{2(2\sqrt{-1})^{n+2}} + \dots;$$

multipliant ensuite par Λ chacune de ces fractions, on trouvera, par la méthode du n° 36, que le coefficient de la puissance $a^{p(n-x)}$ sera exprimé de cette manière :

$$\frac{K^n dx}{1.2.3 \dots (n-1)} \left[(F e^{-x\sqrt{-1}} + G e^{x\sqrt{-1}}) x^{n-1} \right. \\ \left. + n [F e^{-(x-2p)\sqrt{-1}} + G e^{(x-2p)\sqrt{-1}}] (x-2p)^{n-1} \right. \\ \left. + \frac{n(n-1)}{2} [F e^{-(x-4p)\sqrt{-1}} + G e^{(x-4p)\sqrt{-1}}] (x-4p)^{n-2} + \dots \right]$$

$$+ \frac{K^n dx}{1.2.3 \dots (n-2)} \left[(F' e^{-x\sqrt{-1}} + G' e^{x\sqrt{-1}}) x^{n-2} \right. \\ \left. + n [F' e^{-(x-2p)\sqrt{-1}} + G' e^{(x-2p)\sqrt{-1}}] (x-2p)^{n-2} \right. \\ \left. + \frac{n(n-1)}{2} [F' e^{-(x-4p)\sqrt{-1}} + G' e^{(x-4p)\sqrt{-1}}] (x-4p)^{n-3} + \dots \right]$$

$$+ \frac{K^n dx}{1.2.3 \dots (n-3)} \left[(F'' e^{-x\sqrt{-1}} + G'' e^{x\sqrt{-1}}) x^{n-3} \right. \\ \left. + n [F'' e^{-(x-2p)\sqrt{-1}} + G'' e^{(x-2p)\sqrt{-1}}] (x-2p)^{n-3} \right. \\ \left. + \frac{n(n-1)}{2} [F'' e^{-(x-4p)\sqrt{-1}} + G'' e^{(x-4p)\sqrt{-1}}] (x-4p)^{n-4} + \dots \right]$$

Or on a $e^{\pm x\sqrt{-1}} = \cos x \pm \sqrt{-1} \sin x$, et ainsi des autres; donc, substituant ces valeurs, et faisant, pour abréger,

$$G + F = f, \quad G - F = \frac{g}{\sqrt{-1}},$$

$$G' + F' = f', \quad G' - F' = \frac{g'}{\sqrt{-1}},$$

$$G'' + F'' = f'', \quad G'' - F'' = \frac{g''}{\sqrt{-1}},$$

$$\dots \dots \dots$$

où les quantités $f, g, f', g', \dots$ seront nécessairement réelles, la formule précédente deviendra

$$\begin{aligned} & \frac{K^x dx}{1.2.3\dots(n-1)} \left[(f \cos x + g \sin x) x^{n-1} \right. \\ & \quad + n [f \cos(x-2p) + g \sin(x-2p)] (x-2p)^{n-1} \\ & \quad \left. + \frac{n(n-1)}{2} [f \cos(x-4p) + g \sin(x-4p)] (x-4p)^{n-1} + \dots \right] \\ & + \frac{K^x dx}{1.2.3\dots(n-2)} \left[(f' \cos x + g' \sin x) x^{n-2} \right. \\ & \quad + n [f' \cos(x-2p) + g' \sin(x-2p)] (x-2p)^{n-2} \\ & \quad \left. + \frac{n(n-1)}{2} [f' \cos(x-4p) + g' \sin(x-4p)] (x-4p)^{n-2} + \dots \right] \\ & + \frac{K^x dx}{1.2.3\dots(n-3)} \left[(f'' \cos x + g'' \sin x) x^{n-3} \right. \\ & \quad + n [f'' \cos(x-2p) + g'' \sin(x-2p)] (x-2p)^{n-3} \\ & \quad \left. + \frac{n(n-1)}{2} [f'' \cos(x-4p) + g'' \sin(x-4p)] (x-4p)^{n-3} + \dots \right] \end{aligned}$$

où il faudra continuer les différentes séries jusqu'à ce que les quantités $x, x-2p, x-4p, \dots$ ou leurs exposants deviennent négatifs; cette quantité exprimera donc la probabilité que l'erreur moyenne de n observations soit $pn-x$; par conséquent il n'y aura plus qu'à l'intégrer de manière que l'intégrale soit nulle lorsque $x=pn-r$ et complète lorsque $x=pn+s$ pour avoir l'expression cherchée de la probabilité que l'erreur moyenne soit renfermée entre les limites données r et $-s$; mais comme cette intégration est facile par les méthodes connues, nous n'entrerons pas dans un plus grand détail là-dessus; et nous terminerons même ici nos recherches, par lesquelles on doit voir qu'il ne reste plus de difficulté dans la solution des questions qu'on peut proposer sur ce sujet.

SUR LA

PERCUSSION DES FLUIDES.



SUR LA

PERCUSSION DES FLUIDES.

(Mémoires de l'Académie royale des Sciences de Turin, t. I, 1784-1785.)

Parmi un grand nombre de questions que la science des fluides offre à résoudre, celle de la mesure de la force de percussion, qu'une veine d'eau sortant d'un vase ou d'un réservoir quelconque exerce contre un plan, est une des plus importantes, soit par sa difficulté, soit par ses différentes applications. On a eu recours pour la résoudre à la théorie et à l'expérience. La première a donné des résultats divers selon la différence des hypothèses sur lesquelles on l'a appuyée; car la théorie rigoureuse du mouvement des fluides n'est encore et ne sera de longtemps qu'un objet de pure spéculation, et ce n'est qu'en limitant sa grande généralité par des suppositions plus ou moins conformes à la nature qu'on peut la rendre susceptible de fournir des résultats précis et applicables à la pratique.

M. Daniel Bernoulli paraît être le premier qui ait entrepris de résoudre de cette manière la question dont il s'agit. Sa solution se trouve dans le tome VIII des anciens *Commentaires de Pétersbourg*, et elle donne, pour le choc perpendiculaire d'une veine d'eau, une force égale au poids d'une colonne d'eau qui aurait pour base la largeur de la veine, et pour hauteur le double de celle dont il faudrait qu'un corps tombât pour acquérir la vitesse de l'eau, c'est-à-dire deux fois la hauteur due à cette vitesse. L'Auteur y confirme ce résultat par quelques expériences; mais,

par d'autres faites par M. Krafft et rapportées dans le même volume, on voit que la force du choc est toujours moindre que la théorie de M. Bernoulli ne la donne.

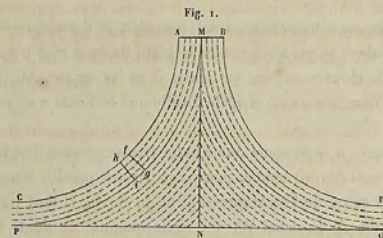
Depuis, M. d'Alembert a attaqué cette théorie dans ses principes, et a fait voir comment, en envisageant la question sous un point de vue plus exact, on devait parvenir à une formule différente de celle de M. Bernoulli et moins éloignée des expériences de M. Krafft (*Théorie de la Résistance des fluides*, Chap. VIII).

Enfin M. l'abbé Bossut, à qui nous devons un des meilleurs Traités d'Hydrodynamique théorique et pratique, a cherché de nouveau à décider la question dont il s'agit par des expériences faites avec beaucoup de soin et de scrupule. Elles lui ont donné à peu près, pour la hauteur de la colonne, qui mesure la force du choc direct d'une veine d'eau, le double de la hauteur due à la vitesse, ce qui s'accorde avec le résultat de la solution de M. Bernoulli, quoiqu'on ne puisse disconvenir de l'insuffisance de cette solution, par la manière vague dont l'Auteur considère et calcule l'effet de la percussion d'une veine de fluide contre un plan.

Voici maintenant une nouvelle manière de déterminer cet effet, aussi directe et conforme à la nature des fluides que peut le permettre le peu de connaissance que l'on a encore des lois de leur mouvement. Cette méthode a de plus l'avantage de s'appliquer également à la percussion directe et à la percussion oblique, et pourra servir non-seulement à fixer sur ce point d'Hydrodynamique l'accord de la théorie avec l'expérience, mais encore à expliquer les anomalies de celle-ci et à rendre ses résultats plus décisifs.

1. Soit AB (fig. 1) l'orifice du vase ou réservoir quelconque d'où le fluide (l'eau par exemple) s'écoule avec une vitesse uniforme donnée, pour venir frapper perpendiculairement le plan PQ, en sorte que l'axe de la veine MN soit perpendiculaire à la droite PQ et la coupe en deux également au point N. Comme tout est égal de part et d'autre de cet axe, il est visible que les particules du fluide auront la même disposition et le même mouvement des deux côtés; de sorte que les deux courbes AC, BD,

formées par les filets extérieurs de la veine, seront égales et semblablement placées autour de l'axe MN. Lorsque le fluide est parvenu à un état permanent, ces courbes demeurent invariables et peuvent, par consé-



quent, être regardées comme des canaux dans lesquels le fluide se meut. Il se forme de semblables canaux dans l'intérieur de la veine, et l'effet de la percussion du fluide contre le plan consiste dans la pression qu'il exerce contre ce plan en vertu de la courbure des canaux et du changement de direction des particules du fluide, lesquelles, sortant du vase dans une direction perpendiculaire au plan, sont forcées par sa rencontre d'en prendre une parallèle ou presque parallèle à ce même plan. Pour pouvoir calculer rigoureusement cette pression, il faudrait donc connaître la figure de tous ces canaux et la loi du mouvement des particules qui les parcourent. Mais, dans la nécessité où l'on est de simplifier cette recherche par quelque supposition ou abstraction, on peut se contenter de considérer les deux canaux extérieurs AMPC, BMQD, et de supposer tout le fluide intérieur MPQ comme étant en repos et stagnant. Si cette supposition n'est pas exactement conforme à la nature, elle en approche du moins beaucoup; car puisque la veine est forcée par la rencontre du plan de se partager en deux branches égales et qui suivent des directions opposées, il est clair qu'il doit nécessairement y avoir dans l'endroit où les deux branches se séparent une portion de fluide qui n'aura aucun mouvement; or, plus cette portion sera grande, plus notre

hypothèse approchera de la vérité, et dans tous les cas elle pourra toujours être regardée comme la limite et l'asymptote de ce qui a réellement lieu dans la nature.

2. D'après cette hypothèse, voici comment je détermine le mouvement du fluide et sa pression contre le plan. Puisque rien n'accélère ni ne retarde le mouvement des particules dans les canaux AC, BD, leur vitesse sera donc constante et égale à celle que le fluide a en sortant du vase.

Je nommerai a la hauteur due à cette vitesse, c'est-à-dire celle d'où un corps pesant devrait tomber pour acquérir une pareille vitesse.

Comme, à cause de l'incompressibilité du fluide, il doit passer dans chaque section fg du canal PA une égale quantité de fluide à chaque instant, la largeur fg du canal doit être partout en raison inverse de la vitesse du fluide; cette largeur sera donc constante dans tout le canal et égale à AM, moitié de celle de l'orifice que nous nommerons b . Or, la tranche infiniment petite et rectangulaire $fgih$, par la force centrifuge due à sa vitesse, exerce contre la partie gi de la paroi concave une pression égale au poids de cette particule multipliée par $\frac{2a}{r}$, en nommant r le rayon osculateur de la courbe en g ; c'est ce qui est connu par la théorie des forces centrifuges. Donc, puisque le poids est ici proportionnel au volume $fhgi = fg \times gi$, on aura $fg \times gi \times \frac{2a}{r}$ pour la pression sur gi , et par conséquent, en divisant par gi et mettant $\frac{b}{2}$ pour fg , on aura $\frac{ab}{r}$ pour la pression sur chaque point g .

Cette pression s'exerçant sur la portion du fluide PMQ que nous supposons stagnante, elle doit être égale partout, suivant les lois connues de l'équilibre des fluides; ainsi, la quantité $\frac{ab}{r}$ est constante dans toute la courbe PM; par conséquent, le rayon osculateur r est aussi constant, et la courbe est nécessairement un cercle dont r est le rayon. Il en est de même de la courbe MQ de l'autre canal semblable.

Maintenant il est clair, par les principes de l'Hydrostatique, que le fluide PMQ étant pressé dans tous les points de la surface curviligne PMQ par une force égale à $\frac{ab}{r}$, il en doit résulter une pression égale sur chaque point du plan PQ sur lequel le fluide est appuyé: de sorte que la pression totale que souffrira ce plan sera exprimée par $\frac{abp}{r}$, en nommant p la largeur PQ du plan. C'est dans cette pression que consiste l'action du fluide contre le plan, ou la force de sa percussion, force qui est donc mesurée par $\frac{abp}{r}$.

3. Dans cette formule, les trois quantités a , b , p sont données, puisque a est la hauteur due à la vitesse du fluide, b la largeur de l'orifice ou de la veine, et p la largeur du plan. Il n'y a d'inconnue que r , c'est-à-dire le rayon du cercle qui forme la courbure des canaux. Or si l'on suppose, ce qui est le cas le plus naturel, que les particules de fluide ne puissent quitter le plan contre lequel elles frappent que dans une direction parallèle à ce plan, alors la ligne PQ sera tangente en P et Q des arcs de cercle PM et QM; et comme la perpendiculaire MN est déjà, par l'hypothèse, tangente des mêmes arcs en M, puisque la direction du fluide en M est supposée suivant cette perpendiculaire, on voit que PM et MQ seront deux quarts de cercle, et qu'ainsi on aura $r = PN = \frac{PQ}{2} = \frac{p}{2}$. Donc la force de la percussion de la veine contre le plan aura pour mesure un poids égal à $2ab$, c'est-à-dire à une colonne de fluide dont la base serait b largeur de la veine, et la hauteur serait $2a$, double de celle due à la vitesse du fluide. C'est ce qui s'accorde avec les expériences de M. Bernoulli et de M. l'abbé Bossut.

4. Mais il peut arriver, surtout lorsque le plan n'est pas beaucoup plus grand que la largeur de la veine, qu'une partie des particules s'échappe du plan dans une direction oblique à celui-ci. Dans ce cas donc, il faudra supposer que la tangente du cercle en P et Q fasse un angle donné avec la droite PQ. Soit φ cet angle, il est facile de voir que

PN sera le sinus verse de son complément dans le cercle PM; ainsi l'on aura

$$\frac{P}{2} = r \sin \text{verse}(90^\circ - \varphi), \quad \text{ou} \quad p = 2r(1 - \sin \varphi),$$

et l'expression générale $\frac{abp}{r}$ de la force de la percussion deviendra

$$2ab(1 - \sin \varphi),$$

laquelle est moindre que la précédente dans le rapport de $1 - \sin \varphi$ à 1.

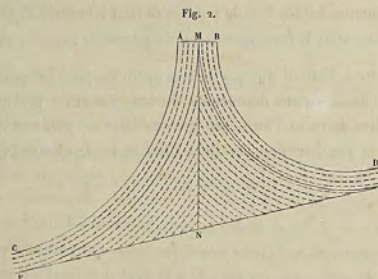
Cette formule peut expliquer pourquoi, dans les expériences de M. Krafft, la hauteur de la colonne dont le poids exprime la force de percussion s'est toujours trouvée moindre que le double de la hauteur due à la vitesse. En général, elle fait voir que cette dernière mesure est le maximum de la force de percussion, parce que l'angle φ ne saurait devenir négatif, et que pour atteindre ce maximum, ou du moins en approcher le plus qu'il est possible, il faut diminuer autant que l'on peut l'angle φ , et faire en sorte que la dernière direction des particules ou des filets du fluide soit parallèle ou presque parallèle au plan, ce qu'on obtiendra en augmentant la largeur du plan jusqu'à ce que toutes les particules soient contraintes de couler le long de ce plan avant de s'en échapper.

5. Considérons maintenant la percussion oblique, et supposons de nouveau que la veine dont la largeur est AB et la direction MN se partage, par la rencontre du plan PQ incliné à MN, en deux branches AMPC et BMQD, en sorte que l'espace intermédiaire PMQ soit rempli d'un fluide stagnant et en équilibre (fig. 2).

Il est d'abord clair que lorsque le mouvement du fluide est parvenu à un état permanent, comme nous le supposons ici, il doit être uniforme dans l'un et dans l'autre canal, parce qu'il n'y a extérieurement aucune force qui puisse l'accélérer ou la retarder. Ainsi, comme par l'incompressibilité et la continuité de fluide il en doit passer toujours la même quantité dans chaque section du même canal, il faudra aussi que toutes

ces sections soient égales, comme dans le cas précédent, mais la largeur des deux canaux pourra être ici différente.

Soit a la hauteur due à la vitesse de la veine, laquelle se maintient la même dans les deux canaux. Soient de plus $AM = m$ l'amplitude du canal



AP, et $BM = n$ l'amplitude du canal BQ, en sorte que $m + n = b$ largeur donnée de la veine ou de l'orifice du vase d'où elle sort.

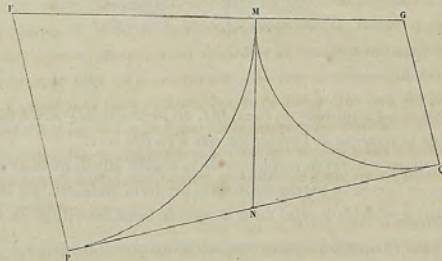
Enfin, soient r le rayon osculateur de la courbe MP du premier canal, et ρ celui de la courbe MQ du second. On prouvera aisément, par un raisonnement semblable à celui du n° 2, que la force centrifuge du fluide produira sur chaque point de la courbe PM une pression égale à $\frac{2am}{r}$, et

sur chaque point de l'autre courbe QM une pression égale à $\frac{2an}{\rho}$. Ces pressions agissant sur le fluide stagnant PMQ doivent être partout égales. D'où il suit : 1° que les rayons r et ρ sont constants, et que par conséquent les courbes MP, NQ des deux canaux sont circulaires; 2° que l'on aura $\frac{m}{r} = \frac{n}{\rho}$, en sorte que la courbure des canaux sera en raison inverse de leur largeur. Donc, puisque $m + n = b$ et $\frac{m}{r} = \frac{n}{\rho}$, on aura $m = \frac{rb}{r + \rho}$, $n = \frac{\rho b}{r + \rho}$; et la pression sur le fluide stagnant sera exprimée par $\frac{2ab}{r + \rho}$.

Or, ce fluide étant soutenu en même temps par le plan PQ, il doit exercer sur chaque point de ce plan une pression perpendiculaire et égale aussi à $\frac{2ab}{r+\rho}$. Donc la pression totale sur le plan sera $\frac{2abp}{r+\rho}$, en nommant p la largeur PQ de ce plan; et cette quantité exprimera le volume d'une quantité du même fluide, dont le poids sera égal à la force de percussion contre le plan; mais il reste encore à déterminer les rayons r et ρ .

6. Supposons d'abord que par la rencontre du plan les particules de la veine de fluide soient détournées de leur direction primitive MN, autant qu'elles peuvent l'être, en sorte qu'elles ne puissent quitter ce plan que dans une direction parallèle à la sienne. La droite PQ (fig. 3)

Fig. 3.



sera donc tangente en P et Q aux cercles PM et QM; par conséquent, les centres de ces cercles se trouveront sur les droites PF, QG menées perpendiculairement à PQ. D'un autre côté, la droite MN, qui représente la direction primitive de la veine, est aussi tangente en M aux mêmes cercles; donc les centres de ces cercles se trouveront aussi sur la droite FG perpendiculaire à MN. Donc ces centres seront en F et G, où cette droite rencontre les deux droites PF, QG. On aura ainsi $PF = FM = r$, $QG = GM = \rho$, et par conséquent $FG = r + \rho$. Or, puisque FP et GQ sont parallèles entre elles et perpendiculaires à PQ, il est visible que FG

sera à PQ dans la raison du sinus total au cosinus de l'inclinaison de FG à PQ, ou au sinus de l'inclinaison de MN à PQ. Cette inclinaison est celle de l'obliquité du choc du fluide contre le plan. Nommant donc ω l'angle de cette obliquité, ou l'angle d'incidence de la veine sur le plan, on aura

$$FG = \frac{PQ}{\sin \omega}, \text{ donc } r + \rho = \frac{p}{\sin \omega};$$

et l'expression de la force du choc trouvée ci-dessus deviendra

$$2ab \sin \omega,$$

laquelle est, comme on voit, à celle du choc direct $2ab$ (3), dans la raison du sinus de l'angle d'incidence au sinus total.

7. Cette loi est celle qui est reçue communément, d'après la théorie ordinaire du choc des corps solides et isolés, quoique cette théorie ne soit point applicable aux fluides. La théorie précédente l'établit d'une manière directe, et l'expérience ne s'en éloigne pas sensiblement. Il est vrai que M. l'abbé Bossut a toujours trouvé dans les chocs obliques des résultats moindres que la loi des sinus d'incidence ne les donne; mais on peut rendre raison de ce déchet, comme nous l'avons fait pour les expériences de M. Kraft sur le choc direct, en supposant que la dernière direction des canaux n'était pas tout à fait parallèle au plan; ce qui est d'autant plus probable que, dans les expériences de M. l'abbé Bossut, le plan était le même pour le choc direct et pour le choc oblique, tandis que dans le cas de ce dernier il paraît que les branches dans lesquelles la veine se partage doivent diverger davantage pour pouvoir prendre la direction du plan. Dans cette supposition, il est clair que les droites PF et QG ne seront plus parallèles, mais deviendront divergentes, en sorte que la proportion de FG à PQ, c'est-à-dire de $r + \rho$ à p , sera toujours plus grande que celle de 1 à $\sin \omega$; par conséquent, l'expression de la force du choc sera toujours aussi plus grande que $2ab \sin \omega$. Mais, pour déterminer la proportion dont il s'agit, il ne suffirait pas de connaître les angles FPQ et GQP; il faudrait de plus connaître la distance

MN du plan au point de la veine où elle commence à se diviser en deux branches, distance qui peut varier selon les circonstances de l'expérience, et qui peut contribuer aussi à en faire varier les résultats. Au reste, comme cette détermination géométrique n'a point de difficulté, et qu'elle ne peut d'ailleurs jeter aucune lumière sur la question présente, nous ne nous y arrêtons pas.

8. Jusqu'ici nous n'avons considéré qu'une veine de fluide plane ou plutôt rectangulaire; imaginons maintenant une veine cylindrique qui vienne frapper directement un plan circulaire dont le centre passe par l'axe de la veine. On peut dans ce cas regarder la *fig. 1*, page 239, comme une coupe faite par l'axe du cylindre, et comme les circonstances sont les mêmes pour chaque coupe, il s'ensuit qu'elles doivent être toutes égales et semblables, en sorte que la figure que prendra la veine par la rencontre du plan sera celle d'un solide de révolution engendré par la rotation de la courbe CA autour de l'axe MN. La veine formera ainsi une espèce d'entonnoir conoidal dont l'intérieur, formé par la révolution de la courbe PM, pourra être regardé comme stagnant, suivant l'hypothèse adoptée jusqu'ici, et il suffira de considérer le mouvement du fluide dans un canal AMPC compris entre deux plans infiniment proches passant par l'axe AN.

D'abord il est visible que la vitesse du fluide doit être uniforme dans chacun de ces canaux, puisqu'il n'y a aucune cause d'accélération ni de retardation. Ensuite, si l'on nomme dx le petit angle formé par les deux plans du canal, x et y l'abscisse et l'ordonnée d'un point quelconque g de la courbe du canal PM rapportée à l'axe MN, et z la largeur ou l'amplitude du canal dans cet endroit, il est clair qu'on aura $zydx$ pour l'aire de la section du canal, et par conséquent $zy \times 360^\circ$ sera l'aire entière de la section du conoïde. Cette aire doit être constante, puisque à cause de la continuité et de l'incompressibilité du fluide, ainsi que de l'uniformité de sa vitesse, il doit passer à chaque instant une quantité de fluide égale à celle qui sort en même temps par l'orifice du vase. De sorte qu'en nommant B l'aire de cet orifice ou de la section de la veine cylin-

drique, on aura

$$zy \times 360^\circ = B, \text{ et de là } z = \frac{B}{y \times 360^\circ}.$$

Il est clair de plus que $zydzds$ sera le volume de l'élément du fluide qui répond à la portion infiniment petite ds de la courbe MgP, et cet élément exercera sur la paroi du canal sur laquelle il appuie, et dont l'aire est $yzds$, une pression représentée par $\frac{2azydzds}{r}$, en nommant comme ci-dessus a la hauteur due à la vitesse constante du fluide, et r le rayon osculateur de la courbe du canal. Donc la pression sur chaque point de la surface du fluide intérieur qui est supposé stagnant sera $\frac{2az}{r}$, laquelle doit être partout la même par les lois connues de l'Hydrostatique.

Soit donc Π cette pression constante, on aura

$$\Pi = \frac{2az}{r},$$

mais

$$z = \frac{B}{360^\circ y}, \text{ et } r = -\frac{dy}{d\frac{dx}{ds}},$$

donc on aura

$$\Pi = -\frac{2aB}{360^\circ} \frac{d\frac{dx}{ds}}{ydy},$$

multipliant par ydy et intégrant, il viendra

$$\frac{\Pi y^2}{2} = \frac{2aB}{360^\circ} \left(\text{const.} - \frac{dx}{ds} \right).$$

Au point M, où la veine commence à diverger, sa direction est suivant l'axe MN; on a donc $y=0$ et $\frac{dx}{ds}=1$; donc la constante arbitraire sera aussi égale à 1; par conséquent, l'équation complète sera

$$\frac{\Pi y^2}{2} = \frac{2aB}{360^\circ} \left(1 - \frac{dx}{ds} \right).$$

Au point P où le canal touche le plan, on a $y = NP$ et $\frac{dx}{ds}$ égal au sinus de l'angle que la direction du canal dans ce point fait avec le même plan. Si donc on nomme φ cet angle, qui est évidemment celui que les particules du fluide font avec le plan en le quittant, on aura

$$\Pi \frac{PN^2}{2} = \frac{2\alpha B}{360^\circ} (1 - \sin \varphi).$$

Or la pression Π agissant sur tous les points du plan circulaire, dont PN est le rayon, il en résultera une pression totale égale à $\Pi \frac{PN^2}{2} \cdot 360^\circ$, puisque $\frac{PN^2}{2} \cdot 360^\circ$ est l'aire de ce plan; donc cette pression totale sera exprimée par

$$2\alpha B(1 - \sin \varphi).$$

C'est la valeur de la force de percussion que le fluide exerce contre le plan, laquelle sera donc la plus grande lorsque $\varphi = 0$, c'est-à-dire lorsque la dernière direction du fluide est parallèle au plan; et elle sera dans ce cas $2\alpha B$, égale par conséquent au poids d'une colonne du même fluide dont la base serait B largeur de la veine, et dont la hauteur serait 2α double de la hauteur due à la vitesse du fluide; ce qui s'accorde avec ce que nous avons trouvé dans le n° 3, en considérant une veine plane.

Dans les autres cas où φ n'est pas nul, et où par conséquent le fluide quitte le plan dans une direction oblique, la valeur de la force de percussion contre le plan sera moindre dans le rapport de $1 - \sin \varphi$ à 1, ce qui s'accorde encore avec la formule du n° 4 relative à ces derniers cas.

9. Le Problème que nous venons de résoudre sur l'action d'une veine cylindrique contre un plan perpendiculaire à sa direction deviendrait beaucoup plus difficile si l'on supposait le plan exposé obliquement à cette direction. Car alors l'entonnoir conoidal formé par la veine ne serait plus de révolution, et il faudrait, pour en déterminer la figure, avoir égard non-seulement à la pression de chaque filet de fluide sur le fluide intérieur stagnant, mais encore à la pression mutuelle et latérale

des filets contigus, ce qui engagerait dans des formules assez compliquées et n'offrirait qu'un exercice d'Analyse inutile à l'objet de ce Mémoire.

Il nous suffira donc pour le présent d'avoir confirmé *à priori*, par une théorie aussi simple que satisfaisante, ce que quelques Auteurs avaient trouvé *à posteriori* sur la mesure de la force de percussion d'une veine de fluide contre un plan, et d'avoir par cette confirmation fixé d'une manière incontestable un point si essentiel de l'Hydraulique.

On peut donc prendre désormais pour règle générale et constante que dans le choc direct, et lorsque son effet est le plus grand, ce qui a lieu quand le plan est assez large pour que toutes les particules du fluide soient contraintes d'en suivre la direction en le quittant, l'action contre le plan est égale au poids d'une colonne du fluide de la même grosseur que la veine et d'une longueur double de celle d'où un corps pesant devrait tomber pour acquérir la vitesse du fluide. Il n'en est pas de même lorsque le plan est exposé à l'impulsion d'un courant dans lequel il est entièrement plongé. Dans ce cas on n'a pu encore déterminer *à priori* la valeur de cette impulsion, et tous les efforts qu'on a faits jusqu'ici pour y parvenir n'ont servi qu'à produire des recherches analytiques plus ou moins profondes, mais toujours insuffisantes pour donner des résultats simples et applicables à la pratique. Cependant les expériences répétées qu'on a faites surtout dans ces derniers temps tendent toutes à prouver qu'ici l'impulsion est simplement égale au poids d'une colonne du fluide, laquelle aurait pour base le plan choqué, et pour hauteur celle qui serait due à la vitesse du fluide. Ainsi, tant qu'on n'aura pas démontré cette règle *à priori*, on ne pourra pas la regarder comme aussi sûre que celle qui concerne l'impulsion d'une veine contre un plan; mais on pourra toujours l'employer dans la pratique comme une règle d'approximation fournie par l'expérience.



NOUVELLE MÉTHODE DE CALCUL INTÉGRAL

SUR UNE

NOUVELLE MÉTHODE DE CALCUL INTÉGRAL

POUR LES DIFFÉRENTIELLES AFFECTÉES D'UN RADICAL CARRÉ
SOUS LEQUEL LA VARIABLE NE PASSE PAS
LE QUATRIÈME DEGRÉ.



SUR UNE

NOUVELLE MÉTHODE DE CALCUL INTÉGRAL

POUR LES DIFFÉRENTIELLES AFFECTÉES D'UN RADICAL CARRÉ
SOUS LEQUEL LA VARIABLE NE PASSE PAS
LE QUATRIÈME DEGRÉ.

(Mémoires de l'Académie royale des Sciences de Turin, t. II, 1784-1785.)

On sait que toute formule différentielle qui contient un radical carré, où la variable n'a pas plus de deux dimensions, est intégrable par les logarithmes ou par les arcs circulaires; car il est toujours possible de la réduire à une forme rationnelle, en faisant disparaître le radical par une substitution convenable. Mais cette réduction ne réussit plus en général, lorsque le radical contient des puissances de la variable plus hautes que la seconde, et l'intégration échappe alors aux méthodes connues. Si la plus haute de ces puissances ne monte pas au delà du quatrième degré, on peut dans plusieurs cas construire l'intégrale par les arcs des sections coniques. La recherche de ces cas a beaucoup occupé les Géomètres; leur travail est avantageux aux progrès du Calcul intégral, parce qu'il sert à ramener à des classes déterminées un grand nombre de différentielles de formes différentes; mais il n'est d'aucune utilité pour l'intégration effective de ces différentielles, car la rectification des sections coniques n'est encore connue que très-imparfaitement, attendu le peu de convergence des séries qu'on a trouvés jusqu'ici pour cet objet. Les séries sont à la vérité le seul moyen de résoudre ce Problème, et en général de rappeler à l'intégration toutes les formules différentielles d'une forme

essentiellement irrationnelle; mais ce moyen n'est vraiment utile qu'autant qu'on peut rendre les séries toujours convergentes, et diminuer même à volonté l'erreur qui doit résulter des termes qu'on y néglige.

La méthode que je donne dans ce Mémoire joint à cet avantage celui d'être générale pour toutes les formules différentielles qui contiennent un radical carré, dans lequel la variable ne forme pas plus de quatre dimensions. Je commence par exposer la méthode dans toute son étendue; j'en fais ensuite l'application à la rectification de l'ellipse et de l'hyperbole.

Exposition de la méthode.

1. Soit proposée la formule différentielle Pdx , dans laquelle P soit une fonction quelconque rationnelle de x et d'un radical de la forme

$$\sqrt{a + bx + cx^2 + ex^3 + fx^4},$$

que nous dénoterons, pour abrégé, par R . Puisque R^2 est une fonction rationnelle de x , il est clair que P ne peut être que de la forme

$$\frac{A + BR}{C + DR},$$

où A, B, C, D sont des fonctions rationnelles de x . Multipliant le haut et le bas par $C - DR$, et faisant

$$M = \frac{AC - BDR}{C^2 - DR^2}, \quad N = \frac{(BC - AD)R}{C^2 - DR^2},$$

on aura donc

$$P = M + \frac{N}{R},$$

où M et N sont des fonctions rationnelles de x . De sorte que la différentielle proposée Pdx se trouvera partagée en deux parties, l'une toute rationnelle Mdx , et qui s'intégrera par les logarithmes ou les arcs de cercle; l'autre irrationnelle $\frac{Ndx}{R}$, dans laquelle il n'y aura d'autre irra-

tionnalité que celle du radical R ; et c'est à l'intégration de celle-ci que se réduit la difficulté d'intégrer la proposée.

2. Notre méthode demande que la formule différentielle $\frac{Ndx}{R}$ ne contienne aucune puissance impaire de x ; ainsi il faut commencer par les faire disparaître, s'il y en a.

Supposons d'abord que les termes bx et ex^3 ne se trouvent point dans le radical R ; il ne s'agira que de faire disparaître les puissances impaires de x de la fonction rationnelle N . Or il est clair qu'elle peut se mettre sous la forme

$$\frac{F + Gx}{H + Lx^2},$$

où F, G, H, L sont des fonctions rationnelles et entières de x^2 , c'est-à-dire des polynômes en x , sans puissances impaires. Multipliant donc le haut et le bas par $H - Lx^2$, et faisant, pour abrégé,

$$\frac{HF - LGx^2}{H^2 - L^2x^4} = T, \quad \frac{HG - FL}{H^2 - L^2x^4} = V,$$

on aura

$$N = T + Vx,$$

où T et V seront des fonctions rationnelles de x^2 . De sorte que la différentielle $\frac{Ndx}{R}$ se trouvera de nouveau partagée en deux, l'une $\frac{Tdx}{R}$ qui a la condition demandée, l'autre $\frac{Vx dx}{R}$ qui est intégrable par les logarithmes ou les arcs de cercle, puisqu'en faisant $x^2 = y$ elle devient

$$\frac{V dy}{2\sqrt{a + cy + fy^2}},$$

V étant une fonction rationnelle de y .

3. Supposons à présent que le radical R contienne tous ses termes. Je remarque que le quinôme

$$a + bx + cx^2 + ex^3 + fx^4$$

peut toujours se mettre sous la forme

$$f(m + nx + x^2)(m' + n'x + x^2),$$

les deux trinômes $m + nx + x^2$ et $m' + n'x + x^2$ étant réels; c'est ce qui est connu par la théorie des équations; et l'on a pour la détermination des coefficients, en supposant $f=1$,

$$n = \frac{e + \sqrt{t}}{2}, \quad n' = \frac{e - \sqrt{t}}{2},$$

$$m = \frac{b - cn + en^2 - n^3}{e - 2n}, \quad m' = \frac{b - cn' + en'^2 - n'^3}{e - 2n'},$$

$$t^3 - (3e^2 - 8c)t^2 + (3e^4 - 16ce^2 + 16c^3 + 16be - 64a)t - (8b - 4ce + e^3)t = 0.$$

L'équation en t , étant du troisième degré avec le dernier terme négatif, a nécessairement une racine réelle positive qu'on prendra pour t dans le radical $\sqrt{t}$; il n'y a de difficulté que dans le cas de

$$8b - 4ce + e^3 = 0,$$

où cette racine devient nulle; alors on a

$$\text{ou } t = 0, \text{ ou } t^3 - (3e^2 - 8c)t + (4c - e^3)t - 64a = 0.$$

Si $64a > (4c - e^3)^2$, l'équation ayant son dernier terme négatif a nécessairement une racine réelle positive qu'on pourra prendre pour t ; mais si $(4c - e^3)^2 - 64a = h^2$, alors on prendra la racine $t = 0$, et l'on aura

$$n = \frac{e}{2}, \quad n' = \frac{e}{2}, \\ m = -\frac{e^3}{8} + \frac{c}{2} + \frac{h}{8}, \quad m' = -\frac{e^3}{8} + \frac{c}{2} - \frac{h}{8} \quad (*).$$

Si f n'était pas égal à 1, on diviserait par f les coefficients a, b, c, e . Cela posé, je fais

$$\frac{f(m' + n'x + x^2)}{m + nx + x^2} = y^2,$$

(*) Voyez les *Mémoires de Berlin* pour 1772, page 247.

On trouvera, dans le tome III des *Ouvrages de Lagrange*, le Mémoire auquel se rapporte ce renvoi.

(Note de l'Éditeur.)

ce qui rend

$$R = (m + nx + x^2)y,$$

et la différentielle à intégrer sera

$$\frac{Ndx}{(m + nx + x^2)y^3},$$

N étant une fonction rationnelle de x . Or l'équation entre x et y , étant multipliée en croix et ensuite différenciée, donne

$$2(m + nx + x^2)ydy = [f(2x + n') - y^2(2x + n)]dx,$$

d'où l'on tire

$$\frac{dx}{(m + nx + x^2)y} = \frac{2dy}{2x(f - y^2) + n'f - ny^2}.$$

Mais la même équation, ordonnée par rapport à x , donne par la résolution

$$2x(f - y^2) + n'f - ny^2 = \sqrt{(n'f - ny^2)^2 - 4(m'f - my^2)(f - y^2)} \\ = \sqrt{\alpha + \beta y^2 + \gamma y^4},$$

en faisant

$$\alpha = f^2(n'^2 - 4m'), \\ \beta = -2f(nn' - 2m - 2m'), \\ \gamma = n^2 - 4m.$$

Ainsi la proposée $\frac{Ndx}{R}$ se trouvera d'abord transformée en

$$\frac{2Ndy}{\sqrt{\alpha + \beta y^2 + \gamma y^4}},$$

ensuite, substituant dans N , pour x , sa valeur

$$\frac{ny^2 - n'f + \sqrt{\alpha + \beta y^2 + \gamma y^4}}{2(f - y^2)},$$

et employant la réduction du n° 1 pour faire disparaître le radical dans le dénominateur de N , il est visible que la différentielle dont il s'agit se décomposera naturellement en deux parties : l'une toute rationnelle, et

dont l'intégration n'a aucune difficulté, l'autre irrationnelle et de la forme

$$\frac{Qdy}{\sqrt{\alpha + \beta y^2 + \gamma y^4}},$$

dans laquelle Q sera une fonction rationnelle de y^2 , et qui sera par conséquent dans l'état demandé.

Il est bon de remarquer que, puisque la substitution employée donne

$$y = \frac{R}{m + nx + x^2},$$

on est assuré que la nouvelle variable y sera nécessairement réelle, tant que x et R seront réels. Cette condition de la réalité des variables introduites par des substitutions n'est pas nécessaire lorsqu'il s'agit d'intégrales exactes et absolues, parce qu'on a des moyens de faire disparaître ensuite les imaginaires; mais elle devient indispensable dans les intégrations approchées, car on ne peut bien juger de la convergence d'une série, à moins que tous ses termes ne soient réels et évalués en nombres. Sans cette considération j'aurais pu résoudre le Problème précédent d'une manière plus simple, en substituant immédiatement $\frac{p+qy}{1+y}$ à la place de x , et égalant ensuite à zéro les coefficients de y et de y^2 dans le trinôme sous le signe radical; on trouve de cette manière que p et q sont les racines d'une équation du second degré dont les deux coefficients dépendent eux-mêmes d'une équation du troisième; mais, quoique celle-ci ait toujours une racine réelle, on n'est pas assuré que celle-là ait les siennes réelles aussi, ce qui est néanmoins nécessaire pour que la nouvelle variable y ne soit point imaginaire.

4. La différentielle à intégrer ne sera donc que de la forme

$$\frac{Ndx}{\sqrt{a + bx^2 + cx^4}},$$

N étant une fonction rationnelle de x^2 . Or, notre méthode demande de plus que le trinôme

$$a + bx^2 + cx^4$$

soit résoluble en deux binômes réels de la forme

$$x + \beta x^2, \quad \gamma + \delta x^2,$$

ce qui exige que l'équation

$$a + by + cy^2 = 0$$

ait ses deux racines réelles, et que par conséquent

$$b^2 = \text{ ou } > 4ac.$$

Il faut donc résoudre encore le cas où

$$b^2 < 4ac.$$

Pour cet effet j'emploie la substitution

$$y = \frac{x}{\sqrt{a + bx^2 + cx^4}},$$

laquelle donne

$$(a + bx^2 + cx^4)y^2 = x^2,$$

et, différentiant,

$$(a + bx^2 + cx^4)ydy = (1 - by^2 - 2cx^2y^2)xdx,$$

d'où l'on tire

$$\frac{dy}{1 - by^2 - 2cx^2y^2} = \frac{xdx}{y(a + bx^2 + cx^4)} = \frac{dx}{\sqrt{a + bx^2 + cx^4}};$$

mais la même équation étant ordonnée par rapport à x , et résolue à la manière des équations du second degré, donne

$$2cx^2y^2 + by^2 - 1 = \sqrt{(by^2 - 1)^2 - 4acy^4} = \sqrt{1 - 2by^2 + (b^2 - 4ac)y^4};$$

de sorte que la différentielle proposée se changera d'abord en

$$\frac{-Ndy}{\sqrt{1 - 2by^2 + (b^2 - 4ac)y^4}};$$

ensuite, substituant dans N à la place de x^2 sa valeur

$$\frac{1 - by^2 + \sqrt{1 - 2by^2 + (b^2 - 4ac)y^4}}{2cy^2},$$

et faisant disparaître le radical du dénominateur de N , il est clair que la transformée en y contiendra deux parties, une toute rationnelle et dont l'intégration n'aura aucune difficulté, et l'autre de la forme

$$\frac{Ldy}{\sqrt{1-2by^2+(b^2-4ac)y^4}},$$

où L sera une fonction rationnelle de y^2 .

Or, puisque $b^2 < 4ac$, il est clair que le trinôme

$$1-2by^2+(b^2-4ac)y^4$$

est toujours résoluble en deux binômes réels, qui seront

$$1-(b+2\sqrt{ac})y^2 \quad \text{et} \quad 1-(b-2\sqrt{ac})y^2,$$

le radical $\sqrt{ac}$ étant nécessairement réel à cause de $ac > 0$. Ainsi la différentielle

$$\frac{Ldy}{\sqrt{1-2by^2+(b^2-4ac)y^4}},$$

à laquelle nous avons réduit la proposée, aura la condition demandée qui manquait à celle-ci.

Il est clair aussi que la substitution employée ne rendra jamais la variable y imaginaire tant que x et le radical $\sqrt{a+bx^2+cx^3}$ seront réels.

Au reste, la condition à laquelle nous venons de satisfaire se trouvera remplie d'elle-même par la transformation du n° 3, toutes les fois que le trinôme sous le radical sera résoluble en deux facteurs simples réels et en deux imaginaires; car si les deux équations

$$x^2+nx+m=0, \quad x^2+n'x+m'=0$$

ont l'une des racines réelles et l'autre des racines imaginaires, les deux quantités n^2-4m , n'^2-4m' seront de signes différents, et par conséquent les coefficients α et γ du trinôme $\alpha+\beta y^2+\gamma y^4$ seront aussi de différents signes, en sorte que ce trinôme sera nécessairement résoluble en deux binômes réels.

5. De ce que nous venons de démontrer jusqu'ici, il s'ensuit que l'intégration de la différentielle proposée Pdx se réduit toujours à celle d'une différentielle de la forme

$$\frac{Ndx}{\sqrt{(a+bx^2)(m+nx^2)}},$$

où N est une fonction rationnelle de x^2 , et où a, b, m, n sont des coefficients quelconques réels. Ainsi, toute la difficulté ne consiste qu'à trouver l'intégrale de cette dernière différentielle. Quant à l'intégrale exacte, elle paraît impossible en général; du moins l'analyse connue ne fournit aucun moyen pour l'obtenir. Mais il y a deux cas où elle se présente d'elle-même: le premier est celui où l'un des coefficients b, n est nul,

l'autre est celui où $\frac{b}{a} = \frac{n}{m}$; dans ce dernier l'irrationalité disparaît, et dans le premier il ne reste que l'irrationalité relative à la quadrature du cercle ou de l'hyperbole, et qu'on peut toujours faire disparaître par les méthodes connues. Si donc la proposée n'est pas exactement dans l'un de ces deux cas, mais seulement dans un cas très-voisin de l'un d'eux, c'est-à-dire si l'une des quantités $\frac{b}{a}, \frac{n}{m}$ est très-petite, ou si elles sont à très-peu près égales, on pourra alors, au défaut d'une intégrale exacte, en avoir une très-approchée par le moyen des séries, et d'autant plus approchée que la quantité supposée très-petite le sera davantage, en disposant la série relativement aux puissances ascendantes de cette quantité. La méthode que je vais exposer a pour objet de ramener à cet état toute différentielle de la forme proposée, quels que soient les coefficients a, b, m, n .

6. Soit en général $\frac{b^2}{a^2} = \text{ou} > \frac{n^2}{m^2}$, ce qu'on peut toujours supposer, puisque, si $\frac{n^2}{m^2} > \frac{b^2}{a^2}$, il n'y aurait qu'à échanger a en m et b en n .

Je fais

$$\frac{x}{a} \sqrt{\frac{a+bx^2}{m+nx^2}} = y,$$

ce qui donne

$$\frac{dx}{\sqrt{(a+bx^2)(m+nx^2)}} = \frac{ay(m+nx^2)}{x},$$

par où l'on voit d'abord que la nouvelle variable y sera réelle tant que ce radical et la variable x le seront.

La différentielle

$$\frac{dx}{\sqrt{(a+bx^2)(m+nx^2)}}$$

se changera donc en

$$\frac{x dx}{ay(m+nx^2)};$$

mais l'équation

$$x^2(a+bx^2) = a^2y^2(m+nx^2)$$

étant différenciée donne

$$(a+2bx^2-nx^2)x dx = a^2(m+nx^2)y dy,$$

par conséquent

$$\frac{x dx}{ay(m+nx^2)} = \frac{a dy}{a+2bx^2-nx^2y^2};$$

de plus, la même équation, ordonnée par rapport à x et résolue à la manière des équations du second degré, donne

$$\begin{aligned} 2bx^2 + a - na^2y^2 &= \sqrt{a^2(1-4a^2ny^2) + 4a^2bmy^2} \\ &= a\sqrt{1+2(2bm-an)y^2+a^2n^2y^4}; \end{aligned}$$

donc

$$\frac{a dy}{a+2bx^2-nx^2y^2} = \frac{dy}{\sqrt{1+2(bm-an)y^2+a^2n^2y^4}}.$$

Si donc on substitue cette quantité à la place de

$$\frac{dx}{\sqrt{(a+bx^2)(m+nx^2)}},$$

et qu'on mette aussi dans l'expression de N , au lieu de x^2 , sa valeur

$$\frac{na^2y^2 - a + a\sqrt{1+2(2bm-an)y^2+a^2n^2y^4}}{2b},$$

en faisant disparaître le radical du dénominateur, s'il est nécessaire, on réduira la différentielle proposée

$$\frac{N dx}{\sqrt{(a+bx^2)(m+nx^2)}}$$

à la forme

$$L dy + \frac{M dy}{\sqrt{1+2(2bm-an)y^2+a^2n^2y^4}},$$

où L et M seront des fonctions toutes rationnelles de y^2 .

Or le trinôme sous le signe

$$1+2(2bm-an)y^2+a^2n^2y^4$$

se résout dans les deux binômes

$$1+(2bm-an+2\sqrt{b^2m^2-abmn})y^2,$$

$$1+(2bm-an-2\sqrt{b^2m^2-abmn})y^2,$$

qui sont toujours réels à cause de $\frac{b^2}{a^2} = \text{ou} > \frac{n^2}{m^2}$; car puisque

$$b^2m^2 - a^2n^2 = \text{ou} > 0,$$

les facteurs $bm+an$ et $bm-an$ seront nécessairement de même signe; donc aussi leur somme $2bm$ sera du même signe; ainsi, bm et $bm-an$ étant de même signe, leur produit b^2m^2-abmn sera toujours une quantité positive. On voit aussi que les deux quantités

$$2bm-an+2\sqrt{b^2m^2-abmn},$$

$$2bm-an-2\sqrt{b^2m^2-abmn},$$

sont de même signe, puisque leur produit a^2n^2 est nécessairement positif; et comme la demi-somme des mêmes quantités est

$$2bm-an=bm+bm-an,$$

et que nous venons de voir que bm et $bm-an$ sont de même signe, il s'ensuit que les deux quantités dont il s'agit seront toujours de même signe que bm .

Si donc on fait

$$2bm - an + 2\sqrt{b^2m^2 - abmn} = \pm p^2,$$

$$2bm - an - 2\sqrt{b^2m^2 - abmn} = \pm q^2,$$

les signes supérieurs étant pour le cas de bm positif, et les inférieurs pour celui de bm négatif, les quantités p et q seront toujours réelles, et l'on aura, en tirant la racine carrée,

$$p = \sqrt{\pm bm} + \sqrt{\pm (bm - an)},$$

$$q = \sqrt{\pm bm} - \sqrt{\pm (bm - an)} \quad \text{ou} \quad = \sqrt{\pm (bm - an)} - \sqrt{\pm bm};$$

de sorte qu'on pourra toujours prendre p et q positives, et alors p sera toujours plus grande que q .

Ainsi, la transformée de la proposée

$$\frac{Ndx}{\sqrt{(a+bx^2)(m+nx^2)}}$$

sera

$$Ldy + \frac{Mdy}{\sqrt{(1 \pm p^2y^2)(1 \pm q^2y^2)}},$$

où L et M seront des fonctions rationnelles de y^2 , p et q des quantités réelles et positives dont l'une $p > q$, et le radical $\sqrt{(1 \pm p^2y^2)(1 \pm q^2y^2)}$ nécessairement réel, puisque y est réelle tant que x et la proposée sont réelles, comme on l'a vu ci-dessus.

De sorte que la difficulté ne consistera plus que dans l'intégration de la nouvelle différentielle

$$\frac{Mdy}{\sqrt{(1 \pm p^2y^2)(1 \pm q^2y^2)}}.$$

7. Dès qu'on est une fois parvenu à une différentielle de cette dernière forme, il n'y a plus qu'à continuer et répéter les substitutions et les transformations que nous venons d'enseigner; et pour cela on pourra se servir des formules précédentes en y faisant

$$a=1, \quad m=1, \quad b=\pm p^2, \quad n=\pm q^2,$$

et ainsi de suite. Voici le tableau de ces opérations.

Soit

$$p' = p + \sqrt{p^2 - q^2}, \quad q' = p - \sqrt{p^2 - q^2},$$

$$p'' = p' + \sqrt{p'^2 - q'^2}, \quad q'' = p' - \sqrt{p'^2 - q'^2},$$

$$p''' = p'' + \sqrt{p''^2 - q''^2}, \quad q''' = p'' - \sqrt{p''^2 - q''^2},$$

$$\dots\dots\dots;$$

on fera successivement

$$y' = \frac{yR}{1 \pm q^2y^2},$$

$$y'' = \frac{y'R'}{1 \pm q'^2y'^2},$$

$$y''' = \frac{y''R''}{1 \pm q''^2y''^2},$$

$$\dots\dots\dots;$$

en supposant, pour abrégé,

$$R = \sqrt{(1 \pm p^2y^2)(1 \pm q^2y^2)},$$

$$R' = \sqrt{(1 \pm p'^2y'^2)(1 \pm q'^2y'^2)},$$

$$R'' = \sqrt{(1 \pm p''^2y''^2)(1 \pm q''^2y''^2)},$$

$$\dots\dots\dots;$$

on aura par là

$$y'^2 = \frac{\pm q^2y^2 - 1 + R}{\pm 2p^2},$$

$$y''^2 = \frac{\pm q'^2y'^2 - 1 + R'}{\pm 2p'^2},$$

$$y'''^2 = \frac{\pm q''^2y''^2 - 1 + R''}{\pm 2p''^2},$$

$$\dots\dots\dots$$

et

$$\frac{dy}{R} = \frac{dy'}{R'} = \frac{dy''}{R''} = \dots$$

Donc la différentielle $\frac{Mdy}{R}$ se changera d'abord en $L'dy' + \frac{M'dy'}{R'}$, où L' et M' seront des fonctions rationnelles de y'^2 ; ensuite la différentielle $\frac{M'dy'}{R'}$ se changera pareillement en $L''dy'' + \frac{M''dy''}{R''}$, L'' et M'' étant aussi des fonctions rationnelles de y''^2 , et ainsi de suite. Et il est clair,

d'après ce que nous avons démontré dans le numéro précédent, que $y', y'', \dots$ et $R', R'', \dots$ seront toujours réelles.

Il est bon de remarquer au reste que si la fonction M est sans dénominateur, les fonctions dérivées L' et M' seront aussi entières et du même ordre, ou d'un ordre inférieur, car on aura, par les substitutions prescrites,

$$\begin{aligned}\frac{dy}{R} &= \frac{dy'}{R'}, \\ \frac{y^2 dy}{R} &= \frac{dy'}{\pm 2p^2} + \frac{(\pm q^2 y'^2 - 1) dy'}{R'}, \\ \frac{y^4 dy}{R} &= \frac{2(\pm q^2 y'^2 - 1) dy'}{4p^4} + \frac{(\pm q^2 y'^2 - 1)^2 + (\pm p^2 y')(\pm q^2 y'^2) dy'}{4p^4 R'}.\end{aligned}$$

Il en sera de même des fonctions L'', M'' , et ainsi des autres dérivées de celles-ci à l'infini.

Il est clair aussi que la même chose aura lieu pour les fonctions L et M , relativement à la fonction d'où elles sont dérivées (6); de sorte que si celle-ci est elle-même sans dénominateur, toutes les fonctions $L, L', L'', \dots, M, M', M'', \dots$ seront aussi sans dénominateur, et d'un ordre égal ou inférieur, mais jamais supérieur à celui de la fonction primitive N .

8. De cette manière donc la différentielle à intégrer

$$\frac{N dx}{\sqrt{(a + bx^2)(m + nx^2)}}$$

se trouvera transformée en celle-ci

$$L dy + L' dy' + L'' dy'' + \dots + \frac{Z dz}{\sqrt{(1 \pm r^2 z^2)(1 \pm s^2 z^2)}},$$

en désignant par Z, z, r, s les derniers termes des séries $M, M', M'', \dots, y, y', y'', \dots, p, p', p'', \dots, q, q', q'', \dots$, qu'on pourra continuer aussi loin qu'on voudra. Et comme les membres $L dy, L' dy', L'' dy'', \dots$, sont chacun intégrables en particulier, puisque L est une fonction rationnelle de y^2, L' de $y'^2, \dots$, il s'ensuit que l'intégration de la proposée sera

réduite à celle de la différentielle

$$\frac{Z dz}{\sqrt{(1 \pm r^2 z^2)(1 \pm s^2 z^2)}},$$

dans laquelle Z est une fonction rationnelle de z^2 , et de plus entière si la fonction primitive N est sans dénominateur.

Voici maintenant l'avantage de cette réduction. On a vu (6) que p et q sont des quantités positives telles $p > q$; donc, puisque

$$p' = p + \sqrt{p^2 - q^2}, \quad q' = p - \sqrt{p^2 - q^2} = \frac{q^2}{p},$$

il est clair que p' et q' seront aussi positives, et $p' > p, q' < q$, et à plus forte raison $< p'$. De même, ayant

$$p'' = p' + \sqrt{p'^2 - q'^2}, \quad q'' = p' - \sqrt{p'^2 - q'^2} = \frac{q'^2}{p'},$$

il s'ensuit que $p'' > p', q'' > 0 < q' < p''$, et ainsi de suite. D'où l'on conclura en général que les quantités $p, p', p'', \dots$ forment une série croissante à l'infini, et que les quantités $q, q', q'', \dots$ forment une série correspondante, mais décroissante jusqu'à zéro.

Et il est bon d'observer que si l'on prend les sommes et les différences des termes correspondants dans ces deux séries, en faisant

$$p + q = m, \quad p - q = n, \quad p' + q' = m', \quad p' - q' = n', \dots,$$

ce qui donne

$$p = \frac{m+n}{2}, \quad q = \frac{m-n}{2}, \quad p' = \frac{m'+n'}{2}, \quad q' = \frac{m'-n'}{2}, \dots,$$

on aura

$$\begin{aligned}m' &= m + n, & n' &= 2\sqrt{mn}, \\ m'' &= m' + n', & n'' &= 2\sqrt{m'n'}, \\ &\dots & &\dots\end{aligned}$$

de sorte que dans les séries $m, m', m'', \dots, n, n', n'', \dots$ les termes correspondants seront toujours moyens proportionnels, arithmétiques et géométriques, entre les doubles des termes qui les précèdent.

On peut donc continuer ces séries jusqu'à ce qu'on arrive à des termes p'' , ..., q'' , ..., dont le second soit aussi petit qu'on voudra; alors, prenant ces termes pour r et s , on pourra, dans la différentielle correspondante

$$\frac{Z dz}{\sqrt{(1 \pm r^2 z^2)(1 \pm s^2 z^2)}},$$

supposer s nul, ce qui la réduira à

$$\frac{Z dz}{\sqrt{1 \pm r^2 z^2}},$$

intégrable par les logarithmes ou par les arcs de cercle, selon que le signe supérieur ou l'inférieur aura lieu.

9. Mais comme la petitesse du terme $s^2 z^2$ ne dépend pas seulement du coefficient s^2 , mais aussi de la valeur qu'on donne à la variable z , pour avoir dans tous les cas une approximation sûre, on fera $z = \frac{t}{\sqrt{rs}}$

et $\frac{s}{r} = \alpha$, ce qui changera la différentielle

$$\frac{Z dz}{\sqrt{(1 \pm r^2 z^2)(1 \pm s^2 z^2)}} \text{ en } \frac{T dt}{\sqrt{(\alpha \pm t^2)(1 \pm \alpha t^2)}},$$

en nommant T ce que devient $\frac{Z}{r}$ par la substitution de $\frac{t}{\sqrt{rs}}$ à la place de z .

Or, depuis $t = 0$ jusqu'à $t = 1$ et $t = -1$, il est clair que le terme αt^2 sera moindre que α ; par conséquent, en négligeant ce terme, on sera assuré de ne négliger que des quantités de l'ordre de α .

D'ailleurs il est visible que la valeur du radical $\sqrt{1 \pm \alpha t^2}$ sera nécessairement renfermée entre ces deux-ci, 1 et $\sqrt{1 \pm \alpha}$; par conséquent, l'intégrale de la différentielle

$$\frac{T dt}{\sqrt{(\alpha \pm t^2)(1 \pm \alpha t^2)}}$$

aura pour limites celle de la différentielle $\frac{T dt}{\sqrt{\alpha \pm t^2}}$ et cette même inté-

grale divisée par $\sqrt{1 \pm \alpha}$. Ainsi, comme on est le maître de rendre la valeur de α aussi petite que l'on veut, on pourra aussi resserrer à volonté les limites dont il s'agit.

Si cependant on voulait s'arrêter à une valeur de α qui ne fût pas assez petite pour fournir des limites données, il n'y aurait qu'à résoudre en série le radical

$$\frac{1}{\sqrt{1 \pm \alpha t^2}}$$

et prendre autant de termes qu'on le jugerait à propos.

Cette série est, comme on sait,

$$1 \mp \frac{1}{2} \alpha t^2 + \frac{1.3}{2.4} \alpha^2 t^4 \mp \frac{1.3.5}{2.4.6} \alpha^3 t^6 + \dots$$

Soit π le nombre des termes qu'on en veut prendre et Π le dernier de ces termes; pour embrasser tous les termes suivants, il faudrait multiplier Π par la série

$$1 \mp \frac{2\pi-1}{2\pi} \alpha t^2 + \frac{(2\pi-1)(2\pi+1)}{2\pi(2\pi+2)} \alpha^2 t^4 \mp \frac{(2\pi-1)(2\pi+1)(2\pi+3)}{2\pi(2\pi+2)(2\pi+4)} \alpha^3 t^6 + \dots;$$

or cette série est évidemment toujours renfermée entre ces limites 1 et

$1 \mp \alpha + \alpha^2 \mp \alpha^3 + \dots$, c'est-à-dire entre 1 et $\frac{1}{1 \pm \alpha}$. Donc, en général,

la somme exacte de tous les termes de la série continuée à l'infini sera toujours renfermée entre la valeur de la somme d'un certain nombre de termes pris depuis le commencement, et la valeur de la somme des mêmes termes, mais en divisant le dernier par $1 \pm \alpha$.

Par conséquent, l'erreur résultant des termes qu'on aura négligés sera toujours moindre que la valeur du dernier terme multiplié par $\frac{\alpha}{1 \pm \alpha}$; ainsi l'on peut l'apprécier facilement et la diminuer à volonté.

Il serait facile au reste de trouver des limites plus exactes et plus serrées, mais cela n'est pas nécessaire ici, où l'on suppose que α est une quantité fort petite et même aussi petite que l'on veut.

Mais depuis $t = \pm 1$ jusqu'à $t = \pm \infty$, le terme αt^2 étant toujours $> \alpha$, l'approximation précédente ne saurait plus avoir lieu. On fera donc alors $t = \frac{1}{u}$, et la différentielle

$$\frac{T dt}{\sqrt{(\alpha \pm t^2)(1 \pm \alpha t^2)}}$$

se changera en

$$\frac{U du}{\sqrt{(\alpha \pm u^2)(1 \pm \alpha u^2)}}$$

U étant ce que devient $-T$ par la substitution de $\frac{1}{u}$ à la place de t . Cette transformée est, comme on voit, semblable à la différentielle en t , du moins pour la partie irrationnelle, et la variable u est ici renfermée entre les limites 0 et ± 1 , comme la variable t l'était ci-dessus; ainsi l'on pourra traiter cette différentielle en u de la même manière que l'autre en t .

Donc, en général, si l'intégration doit s'étendre depuis $t = f$ jusqu'à $t = g$, on distinguera trois cas : 1° lorsque f et g sont renfermées entre 1 et -1 ; on aura alors le cas de $t^2 < 1$; 2° lorsque f et g sont renfermées entre 1 et ∞ ou -1 et $-\infty$; ce sera le cas de $t^2 > 1$, et l'on emploiera la substitution $t = \frac{1}{u}$, laquelle rendra $u^2 < 1$; 3° lorsque f sera entre les premières limites et g entre les secondes, ou réciproquement; dans ce cas il faudra partager l'intégrale en deux parties, la première qui s'étende depuis $t = f$ jusqu'à $t = \pm 1$, et la seconde depuis $t = \pm 1$ jusqu'à $t = g$; et chacune de ces parties rentrera, comme on voit, dans l'un des cas précédents.

10. Au reste il est à propos d'observer que quand on a à intégrer une différentielle en série de la forme

$$(A + A' \xi + A'' \xi^2 + A''' \xi^3 + \dots) X dx,$$

X et ξ étant des fonctions de x , et A, A', A'', ... des coefficients constants, au lieu d'intégrer chaque terme à part, ce qui demande souvent

des réductions pénibles, il suffit (a étant une constante indéterminée) d'intégrer tout d'un coup la différentielle

$$\frac{X dx}{1 - a \xi},$$

dont l'intégration n'est guère plus difficile que celle de $X \xi dx$, surtout si ξ est une fonction rationnelle. Alors, nommant V l'intégrale complétée d'après les conditions du Problème, il n'y aura qu'à dégager la quantité a en développant par les méthodes connues la fonction V dans une série de la forme

$$u + a u' + a^2 u'' + a^3 u''' + \dots,$$

et l'on aura pour l'intégrale de la proposée la série

$$A u + A' u' + A'' u'' + A''' u''' + \dots$$

On sait que l'on a, en faisant $a = 0$ après les différentiations,

$$u = V, \quad u' = \frac{dV}{dx}, \quad u'' = \frac{1}{2} \frac{d^2 V}{dx^2}, \quad u''' = \frac{1}{2 \cdot 3} \frac{d^3 V}{dx^3}, \dots$$

Donc l'intégrale cherchée sera aussi représentée par

$$A V + A' \frac{dV}{dx} + \frac{A''}{2} \frac{d^2 V}{dx^2} + \frac{A'''}{2 \cdot 3} \frac{d^3 V}{dx^3} + \dots,$$

en faisant varier a seul dans V et supposant ensuite $a = 0$.

11. Reprenons les transformations du n° 7, et remarquons que, puisque les deux séries $p, p', p'', \dots, q, q', q'', \dots$ sont divergentes l'une par rapport à l'autre (8), si on les continue en arrière ainsi : ..., $p, p, p, \dots, q, q, q$, elles deviendront convergentes, en sorte qu'on parviendra à des termes r et s égaux, ou presque égaux entre eux; ce qui fera rentrer la différentielle correspondante

$$\frac{Z dz}{\sqrt{(1 \pm r^2 z^2)(1 \pm s^2 z^2)}}$$

dans le second cas d'intégration dont on a parlé dans le n° 5. Voici pour cela le procédé du calcul.

On fera

$$\begin{aligned} p &= \sqrt{p} + \sqrt{p^2 - q^2}, & q &= \sqrt{p} - \sqrt{p^2 - q^2}, \\ {}^*p &= \sqrt{p} + \sqrt{p^2 - {}^*q^2}, & {}^*q &= \sqrt{p} - \sqrt{p^2 - {}^*q^2}, \\ &\dots\dots\dots, & &\dots\dots\dots, \end{aligned}$$

ce qui donne

$$\begin{aligned} p &= \frac{p+q}{2}, & q &= \sqrt{pq}, \\ {}^*p &= \frac{p+{}^*q}{2}, & {}^*q &= \sqrt{{}^*p} \sqrt{q}, \\ &\dots\dots\dots, & &\dots\dots\dots \end{aligned}$$

De sorte qu'il est très-facile de continuer les séries $p, {}^*p, \dots, q, {}^*q, \dots$ aussi loin que l'on veut, puisque les termes correspondants sont toujours moyens arithmétiques et géométriques entre les deux précédents. Et l'on voit en même temps que, quelle que soit la différence des deux premiers termes p, q , elle doit aller toujours en diminuant dans les termes suivants, jusqu'à devenir nulle; car p étant $> q$, on a évidemment ${}^*p < p, {}^*q > q$, et en même temps ${}^*q < p$, puisque

$${}^*p - {}^*q = \frac{p+q}{2} - \sqrt{pq} = \frac{1}{2}(\sqrt{p} - \sqrt{q})^2;$$

donc aussi ${}^*p < p, {}^*q > q$ et $< {}^*p$, et ainsi de suite; en sorte que la série $p, {}^*p, \dots$ est décroissante, et la série $q, {}^*q, \dots$ est au contraire croissante, mais toujours séparée de l'autre par un intervalle qui diminue à l'infini.

12. Cela posé, on fera successivement

$$\begin{aligned} y &= \frac{{}^*y \cdot R}{1 \pm {}^*q^2 y^2}, \\ {}^*y &= \frac{{}^*y \cdot {}^*R}{1 \pm {}^*q^2 {}^*y^2}, \\ {}^*{}^*y &= \frac{{}^*{}^*y \cdot R}{1 \pm {}^*q^2 y^2}, \\ &\dots\dots\dots, \end{aligned}$$

en supposant

$$\begin{aligned} R &= \sqrt{(1 \pm p^2 y^2)(1 \pm q^2 y^2)}, \\ {}^*R &= \sqrt{(1 \pm {}^*p^2 y^2)(1 \pm {}^*q^2 y^2)}, \\ {}^*{}^*R &= \sqrt{(1 \pm {}^*{}^*p^2 y^2)(1 \pm {}^*{}^*q^2 y^2)}, \\ &\dots\dots\dots \end{aligned}$$

ce qui donnera (7)

$$\begin{aligned} y^2 &= \frac{\pm q^2 y^2 - 1 + R}{\pm 2 p^2}, \\ {}^*y^2 &= \frac{\pm {}^*q^2 y^2 - 1 + {}^*R}{\pm 2 {}^*p^2}, \\ {}^*{}^*y^2 &= \frac{\pm {}^*{}^*q^2 y^2 - 1 + {}^*{}^*R}{\pm 2 {}^*{}^*p^2}, \\ &\dots\dots\dots \end{aligned}$$

et

$$\frac{dy}{R} = \frac{{}^*dy}{{}^*R} = \frac{d{}^*y}{{}^*{}^*R} = \frac{d{}^*{}^*y}{{}^*{}^*{}^*R} = \dots$$

Et l'on observera que les nouvelles variables $y, {}^*y, \dots$ seront nécessairement réelles, ainsi que les radicaux $R, {}^*R, \dots$

Car d'abord il est clair que, y et R étant réels, y^2 sera réelle; et l'on voit en même temps que lorsque les signes supérieurs ont lieu, la valeur de y^2 sera positive, puisque dans ce cas R est évidemment > 1 ; lorsque les signes inférieurs ont lieu, on aura $R < q^2 y^2 + 1$, car en mettant pour q^2 sa valeur pq et prenant les carrés, on aura d'un côté

$$(1 - p^2 y^2)(1 - q^2 y^2),$$

savoir

$$1 - (p^2 + q^2) y^2 + p^2 q^2 y^4,$$

et de l'autre

$$1 + 2pqy^2 + p^2 q^2 y^4,$$

en sorte que l'excès de $(q^2 y^2 + 1)^2$ sur R^2 sera $(p + q)^2 y^2$, quantité toujours positive; donc, comme dans ce cas

$$y^2 = \frac{q^2 y^2 + 1 - R}{2 p^2},$$

il s'ensuit que la valeur de y^2 sera aussi positive. Donc y sera réelle dans l'un et l'autre cas. Donc aussi R sera réel en vertu de l'équation

$$\frac{dy}{R} = \frac{d'y}{R}.$$

Et de là on démontrera pareillement la réalité de y et de R , et ainsi des autres.

Par les substitutions précédentes, la différentielle $\frac{Mdy}{R}$ se changera donc d'abord en $Ld'y + \frac{M d'y}{R}$, L et M étant des fonctions rationnelles de y^2 ; ensuite la différentielle $\frac{M d'y}{R}$ se changera de même en

$$L d'y + \frac{M d'y}{R},$$

L , M étant aussi des fonctions rationnelles de y^2 , et ainsi de suite.

Donc la différentielle

$$\frac{Ndx}{\sqrt{(a+bx^2)(m+nx^2)}}$$

du n° 5 se trouvera transformée en celle-ci

$$Ldy + Ld'y + Ld''y + \dots + \frac{Zdz}{\sqrt{(1 \pm r^2 z^2)(1 \pm s^2 z^2)}},$$

en nommant Z , z , r , s les derniers termes des séries

$$M, M', M'', \dots, y, y', y'', \dots, p, p', p'', \dots, q, q', q'', \dots;$$

et comme les membres Ldy , $Ld'y$,... sont chacun intégrables en particulier, l'intégration de la proposée sera ainsi réduite à celle de la nouvelle différentielle

$$\frac{Zdz}{\sqrt{(1 \pm r^2 z^2)(1 \pm s^2 z^2)}},$$

où Z est une fonction rationnelle de z^2 , et où r et s sont des constantes aussi peu différentes entre elles qu'on voudra.

13. Il faut remarquer encore que lorsque M est une fonction sans dénominateur, on peut toujours réduire M à n'être qu'une pareille fonction, et du même ordre; car on a d'abord

$$\frac{dy}{R} = \frac{d'y}{R}.$$

Ensuite, ayant

$$y^2 = \frac{-R + 1 \pm 2 p^2 y^2}{\pm q^2},$$

on aura

$$\frac{y^2 dy}{R} = -\frac{dy}{\pm q^2} + \frac{(1 \pm 2 p^2 y^2) d'y}{\pm q^2 R}.$$

Maintenant, l'équation

$$\pm q^2 y^2 + R = 1 \pm 2 p^2 y^2$$

étant carrée, si l'on y substitue à la place de R^2 sa valeur en y , et qu'ensuite on substitue aussi pour y^2 , dans les termes qui ne contiennent point R , la valeur ci-dessus, on en tirera

$$y^4 = YR + Y.$$

en supposant

$$Y = \frac{p^2 + q^2 \pm 2 p^2 q^2 y^2}{(p^2 q^2 + q^4) q^2},$$

$$Y = \frac{-q^2 + (p^2 + q^2)(1 \pm 2 p^2 y^2) + q^2(1 \pm 2 p^2 y^2)^2}{(p^2 q^2 + q^4) q^2}.$$

Ainsi l'on aura

$$\frac{y^4 dy}{R} = Y dy + \frac{Y d'y}{R}.$$

On réduira de la même manière, par des substitutions successives, y^6 , y^8 ,... à la forme $YR + Y$, où Y sera une fonction rationnelle et entière de y^2 de l'ordre quatrième, sixième,...., et Y sera une pareille fonction de y^2 de l'ordre sixième, huitième,....; et l'on aura par conséquent aussi

$$\frac{y^4 dy}{R} = Y dy + \frac{Y d'y}{R},$$

et ainsi de suite.

D'où l'on voit qu'en général la différentielle

$$\frac{(a + by^2 + cy^4 + \dots) dy}{B}$$

se réduira toujours à la différentielle

$$Y dy + \frac{(A + B y^2 + C y^4 + \dots) dy}{y^3},$$

où Y sera une fonction rationnelle et entière de γ^2 .

On fera les mêmes opérations sur les autres transformées en $^n y$, $^{n-1} y$,.... et l'on en conclura en général que si dans la différentielle primitive

$$\frac{N dx}{\sqrt{(a + bx^2)(m + nx^2)}},$$

N est une fonction sans dénominateur, auquel cas nous avons déjà démontré plus haut que M sera aussi une fonction de même forme et de même ordre, cette fonction sera réductible à celle-ci

$$dV + \frac{Z dz}{\sqrt{(1 \pm r^2 z^2)(1 \pm s^2 z^2)}},$$

dans laquelle V sera une fonction rationnelle et entière de $y, y', y'', \dots$, et Z une fonction rationnelle et entière de z^2 du même ordre que la fonction N .

14. Il ne s'agira donc plus que d'intégrer la différentielle

$$\frac{Zdz}{\sqrt{(1 \pm r^2 z^2)(1 \pm s^2 z^2)}}$$

dans laquelle r et s seront des quantités aussi peu différentes entre elles qu'on voudra; et il est d'abord clair qu'en les supposant égales l'irrationalité disparaîtra, et l'intégration n'aura plus de difficulté. En même temps il est visible que puisque $r \gg s$, le radical $\sqrt{(1 \pm r^2 s^2)(1 \pm s^2 s^2)}$ sera nécessairement renfermé entre les deux quantités $1 \pm r^2 s^2$ et $1 \pm s^2 s^2$; par conséquent, l'intégrale de la proposée aura pour limites

les intégrales de $\frac{Zdz}{1+r^2z^2}$ et de $\frac{Zdz}{1+s^2z^2}$, limites qu'on pourra resserrer autant qu'on voudra, puisqu'on est le maître de diminuer à volonté la différence de r et s .

Mais si l'on voulait tenir compte de l'effet de cette différence, il n'y aurait qu'à y employer la méthode ordinaire des séries; et, pour en rendre l'emploi plus exact relativement à la différentielle proposée, on la mettra d'abord sous la forme

$$\frac{Zdz}{rs\sqrt{\left(\frac{1}{r^2} \pm z^2\right)\left(\frac{1}{s^2} \pm z^2\right)}}$$

ensuite on supposera

$$\frac{1}{s^2} = b^2 + \beta, \quad \frac{1}{r^2} = b^2 - \beta,$$

c'est-à-dire

$$b^2 = \frac{r^2 + s^2}{2r^2s^2}, \quad \beta = \frac{r^2 - s^2}{2r^2s^2},$$

en sorte que β sera une quantité fort petite de l'ordre de $r-s$, et la différentielle en question se changera en celle-ci

$$\frac{Z dz}{rs \sqrt{(b^2 \pm z^2)^2 - \beta^2}}$$

laquelle, par le développement du radical, deviendra

$$\frac{Z}{rs} \left[\frac{1}{b^2 \pm z^2} + \frac{1}{2} \frac{\beta^2}{(b^2 \pm z^2)^3} + \frac{1.3}{2.4} \frac{\beta^4}{(b^2 \pm z^2)^5} + \dots \right] dz,$$

série dont chaque terme est rationnel et par conséquent intégrable par les arcs de cercle ou par les logarithmes selon que le signe supérieur ou l'inférieur aura lieu.

Mais, pour n'avoir pas à intégrer à part chaque terme de cette série, on intégrera la différentielle

$$\frac{Zdz}{rs(b^2 + a \pm z^2)},$$

a étant une constante indéterminée, et, nommant V l'intégrale complétée suivant les conditions des Problèmes, on dégagera ensuite a , en développant V dans une série de la forme

$$u + au' + a^2 u'' + a^3 u''' + a^4 u^{IV} + \dots;$$

on aura alors, pour l'intégrale de la série dont il s'agit, celle-ci

$$u + \frac{\beta^2}{2} u' + \frac{1.3 \times \beta^4}{2.4} u'' + \dots$$

Cette série sera, comme on voit, fort convergente lorsque β sera une très-petite quantité; en sorte qu'il suffira le plus souvent de n'en prendre qu'un ou deux termes. Il y a cependant un cas où l'approximation serait toujours inexacte, quelque petite que fût la quantité β ; c'est celui où, en prenant dans la formule le signe inférieur, on aurait dans l'un des termes de l'intégrale $z = \pm b + z$, z étant une quantité du même ordre que β ; alors $(b^2 - z^2)^2$ serait une quantité du même ordre que β^2 , et par conséquent la série cesserait d'être convergente.

15. Pour résoudre ce cas d'une manière générale, je considère la formule

$$\frac{Z dz}{\sqrt{(m^2 - z^2)(n^2 - z^2)}},$$

dans laquelle la différence entre m et n est supposée très-petite, et qui doit être intégrée depuis $z=f$ jusqu'à $z=g$, les quantités f, g étant l'une ou l'autre, ou toutes deux, peu différentes de $\pm m$.

Supposons d'abord l'une de ces quantités peu différente de m , et par conséquent aussi de n , tandis que l'autre est assez différente de $-m$; comme la quantité sous le signe est

$$(m - z)(n - z)(m + z)(n + z),$$

et que

$$(m + z)(n + z) = \left(z + \frac{m+n}{2}\right)^2 - \left(\frac{m-n}{2}\right)^2,$$

on pourra donner à la différentielle cette forme

$$\frac{Z dz}{\sqrt{(m-z)(n-z)} \sqrt{\left(z + \frac{m+n}{2}\right)^2 - \left(\frac{m-n}{2}\right)^2}},$$

et il est clair que $\left(\frac{m-n}{2}\right)^2$ sera toujours très-petite vis-à-vis de $\left(z + \frac{m+n}{2}\right)^2$, en sorte que la résolution du radical

$$\sqrt{\left(z + \frac{m+n}{2}\right)^2 - \left(\frac{m-n}{2}\right)^2}$$

ne sera sujette à aucun inconvénient. On aura donc à intégrer la formule

$$\frac{Z}{\sqrt{(m-z)(n-z)}} \left[\frac{1}{z + \frac{m+n}{2}} + \frac{1}{2} \frac{\left(\frac{m-n}{2}\right)^2}{\left(z + \frac{m+n}{2}\right)^3} + \frac{1.3}{2.4} \frac{\left(\frac{m-n}{2}\right)^4}{\left(z + \frac{m+n}{2}\right)^5} + \dots \right] dz,$$

dont chaque terme est intégrable par les logarithmes ou les arcs de cercle.

Si l'une des quantités f, g était peu différente de $-m$, on donnerait alors au radical $\sqrt{(m^2 - z^2)(n^2 - z^2)}$ la forme

$$\sqrt{(m+z)(n+z)} \sqrt{\left(z - \frac{m+n}{2}\right)^2 - \left(\frac{m-n}{2}\right)^2},$$

et l'on aurait à intégrer cette autre série

$$\frac{Z}{\sqrt{(m+z)(n+z)}} \left[\frac{1}{z - \frac{m+n}{2}} + \frac{1}{2} \frac{\left(\frac{m-n}{2}\right)^2}{\left(z - \frac{m+n}{2}\right)^3} + \frac{1.3}{2.4} \frac{\left(\frac{m-n}{2}\right)^4}{\left(z - \frac{m+n}{2}\right)^5} + \dots \right] dz,$$

qu'on voit être nécessairement convergente, et dont l'intégration est toujours facile.

Enfin, si l'une des quantités f, g était très-proche de m , et que l'autre

fût en même temps peu différente de $-m$, on partagerait alors l'intégrale en deux parties, dont l'une se prendrait depuis m jusqu'à zéro et l'autre depuis zéro jusqu'à $-m$, et pour la première on emploierait la première série, et pour la seconde la seconde série.

16. Nous finirons par présenter encore un moyen de simplification relativement à la manière de compléter l'intégrale cherchée. Nous remonterons pour cela à la différentielle en y du n° 6, et nous remarquerons que si l'intégration de cette différentielle doit commencer au point où $y=0$, alors, comme $y=0$ donne aussi $y'=0$, $y''=0$,...., ainsi que $y=0$, $y'=0$,...., toutes les autres différentielles transformées devront aussi commencer au point où leur variable sera nulle; de sorte qu'il n'y aura dans ce cas aucune constante à ajouter. Mais si l'intégration doit commencer dans un autre point quelconque, il faudra alors, pour compléter l'intégrale, en retrancher la valeur correspondant à ce point, ce qui rendra l'intégrale moins simple et même quelquefois sujette à des difficultés, si la valeur de y devait être infinie au commencement de l'intégration.

On objectera en général à ces inconvénients en ramenant tous les cas au premier, c'est-à-dire à celui où l'intégrale commence à $y=0$. Pour cet effet, soit f la valeur de y au point où l'on veut faire commencer l'intégration de la différentielle

$$\frac{M dy}{\sqrt{(1 \pm p^2 y^2)(1 \pm q^2 y^2)}};$$

on substituera au lieu de y une autre variable u déterminée par l'équation

$$f^2 - u^2 - y^2 + 2uy\sqrt{(1 \pm p^2 f^2)(1 \pm q^2 f^2)} + p^2 q^2 f^2 u^2 y^2 = 0,$$

laquelle donne

$$u = \frac{y\sqrt{(1 \pm p^2 f^2)(1 \pm q^2 f^2)} - f\sqrt{(1 \pm p^2 y^2)(1 \pm q^2 y^2)}}{1 - p^2 q^2 f^2 y^2}.$$

et réciproquement

$$y = \frac{u\sqrt{(1 \pm p^2 f^2)(1 \pm q^2 f^2)} + f\sqrt{(1 \pm p^2 u^2)(1 \pm q^2 u^2)}}{1 - p^2 q^2 f^2 u^2},$$

où l'on voit que $y=f$ donne $u=0$ et que $y=\infty$ donne $u=\frac{1}{pqf}$.

Or l'équation précédente, étant différenciée et divisée en croix, donne

$$\frac{dy}{u(p^2 q^2 f^2 y^2 - 1) + y\sqrt{(1 \pm p^2 f^2)(1 \pm q^2 f^2)}} + \frac{du}{y(p^2 q^2 f^2 u^2 - 1) + u\sqrt{(1 \pm p^2 f^2)(1 \pm q^2 f^2)}} = 0,$$

et, mettant dans le dénominateur de dy la valeur précédente de u en y , ainsi que dans le dénominateur de du la valeur de y en u , on aura

$$\frac{dy}{\sqrt{(1 \pm p^2 y^2)(1 \pm q^2 y^2)}} = \frac{du}{\sqrt{(1 \pm p^2 u^2)(1 \pm q^2 u^2)}}.$$

Soit maintenant

$$u^2 + y^2 = s, \quad uy = t,$$

on aura par la même équation

$$s = f^2 + 2Ft + p^2 q^2 f^2 t^2,$$

en faisant

$$F = \sqrt{(1 \pm p^2 f^2)(1 \pm q^2 f^2)}.$$

De là on aura

$$y^2 - u^2 = \sqrt{s^2 - 4t^2},$$

par conséquent

$$y^2 = \frac{s + \sqrt{s^2 - 4t^2}}{2},$$

$$u^2 = \frac{s - \sqrt{s^2 - 4t^2}}{2}.$$

Qu'on substitue cette valeur de y^2 dans la quantité M qui est supposée une fonction rationnelle de y^2 , et faisant disparaître le radical du dénominateur.

minuteur s'il y en a un, il viendra

$$M = P + Q\sqrt{s^2 - 4t},$$

P et Q étant des fonctions rationnelles de s et de t .

Et, comme la valeur de u^2 ne diffère de celle de y^2 que par le signe du radical, il est visible que $P - Q\sqrt{s^2 - 4t}$ sera pareillement la valeur d'une fonction L de u^2 semblable à la fonction M de y^2 ; de sorte qu'on aura

$$P = L + Q\sqrt{s^2 - 4t},$$

et, par conséquent,

$$M = L + 2Q\sqrt{s^2 - 4t}.$$

Or Q est, comme nous venons de le voir, une fonction rationnelle de s et de t ; donc, en y substituant pour s sa valeur en t trouvée ci-dessus, on aura pour Q une fonction rationnelle de t . De plus, $\sqrt{s^2 - 4t} = y^2 - u^2$, et les valeurs de u et de y données plus haut étant multipliées l'une par $u(1 - p^2 q^2 f^2 y^2)$, l'autre par $y(1 - p^2 q^2 f^2 u^2)$, et ensuite retranchées l'une de l'autre, on a

$$y^2 - u^2 = fy\sqrt{(1 \pm p^2 u^2)(1 \pm q^2 u^2)} + fu\sqrt{(1 \pm p^2 y^2)(1 \pm q^2 y^2)},$$

donc

$$M = L + 2fQ[y\sqrt{(1 \pm p^2 u^2)(1 \pm q^2 u^2)} + u\sqrt{(1 \pm p^2 y^2)(1 \pm q^2 y^2)}];$$

cette équation étant combinée avec l'équation différentielle

$$\frac{dy}{\sqrt{(1 \pm p^2 y^2)(1 \pm q^2 y^2)}} = \frac{du}{\sqrt{(1 \pm p^2 u^2)(1 \pm q^2 u^2)}},$$

on aura (à cause de $udy + ydu = dt$)

$$\frac{Mdy}{\sqrt{(1 \pm p^2 y^2)(1 \pm q^2 y^2)}} = \frac{Ldu}{\sqrt{(1 \pm p^2 u^2)(1 \pm q^2 u^2)}} + 2fQdt,$$

où la partie $2fQdt$ est intégrable, puisque Q est une fonction rationnelle de t .

De cette manière, la substitution de u à la place de y réduit l'intégration de la différentielle proposée à celle d'une autre différentielle semblable, puisque L est une fonction de u^2 semblable à la fonction M de y^2 ; et elle a en même temps cet avantage que l'intégration relative à u commencera toujours à $u=0$, quelle que soit la valeur initiale f de y .

17. Par la méthode générale que nous venons d'exposer, on est donc assuré de pouvoir intégrer aussi exactement qu'on voudra toute différentielle affectée d'un radical carré, où la variable sous le signe monte jusqu'à la quatrième puissance; ce qui est le cas d'un grand nombre de Problèmes géométriques et mécaniques qu'on ne pouvait résoudre jusqu'ici que d'une manière incomplète et limitée.

Comme cette méthode est d'un genre assez nouveau, et qu'on pourrait rencontrer encore quelques difficultés dans son usage, nous allons l'appliquer en détail à la rectification des arcs elliptiques et hyperboliques.

Rectification de l'ellipse et de l'hyperbole.

18. Soit, dans une ellipse dont le demi-grand axe est pris pour l'unité et le demi-petit axe est b , x l'abscisse prise du centre sur le grand axe, on aura l'ordonnée rectangulaire

$$y = b\sqrt{1 - x^2},$$

et l'élément de l'arc elliptique sera

$$\sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{1 + \frac{b^2 x^2}{1 - x^2}} dx = \frac{\sqrt{1 - e^2 x^2}}{\sqrt{1 - x^2}} dx,$$

en faisant $\sqrt{1 - b^2} = e$, excentricité de l'ellipse.

Cette expression trouvée pour l'ellipse a lieu également pour l'hyperbole; tant que $e < 1$ elle se rapporte à l'ellipse, et si $e > 1$ elle appartient alors à l'hyperbole, dans laquelle, le demi-petit axe b devenant imaginaire, b^2 est une quantité négative, et par conséquent $\sqrt{1 - b^2} > 1$.

19. Lorsque e est une quantité fort petite ou très-peu différente de l'unité, on peut, dans l'expression de l'élément de l'arc, réduire le radical du numérateur en une série convergente, et ensuite intégrer chaque terme en particulier par les méthodes connues; mais à mesure qu'on s'éloigne de ces deux cas, la convergence des séries diminue, et il faudrait souvent pousser les séries très-loin pour avoir des déterminations de l'arc suffisamment exactes. Feu M. Euler a donné pour ces deux cas, dans ses *Opuscles*, des séries qui représentent le quart de l'ellipse.

Le premier n'a point de difficulté, parce que la série est toujours convergente lorsque e est une petite quantité, la variable x ne pouvant jamais excéder l'unité. Il n'en est pas de même du second; car en supposant e^2 peu différent de l'unité et mettant en conséquence le radical $\sqrt{1-e^2x^2}$ sous la forme $\sqrt{(1-x^2) + (1-e^2)x^2}$, il est clair que la série dans laquelle on développerait ce radical en prenant $1-x^2$ pour premier terme, et $(1-e^2)x^2$ pour second terme, cessera d'être convergente près du sommet de l'ellipse où $1-x^2$ est une quantité très-petite ou nulle, et qu'ainsi elle ne pourra servir pour déterminer la longueur du quart entier de l'ellipse, mais seulement pour une partie de cette longueur. M. Euler n'a résolu ce cas que par des méthodes indirectes; mais, comme il est analogue à celui dont nous avons traité dans le n° 15, il peut l'être par des principes semblables.

Pour ne rien laisser à désirer ici sur l'objet présent, nous allons donner succinctement la solution des deux cas dont il s'agit, en présentant les formules les plus simples et les plus générales pour la rectification des ellipses peu excentriques ou très-aplaties.

20. Et d'abord, lorsque l'excentricité e de l'ellipse proposée est fort petite, il n'y aura qu'à résoudre le radical $\sqrt{1-e^2x^2}$ en série à la manière ordinaire, et la différentielle de l'arc elliptique deviendra

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \left(1 - \frac{1}{2} e^2 x^2 - \frac{1.1}{2.4} e^4 x^4 - \frac{1.1.3}{2.4.6} e^6 x^6 - \dots \right) dx,$$

dont chaque terme est intégrable.

En effet, on a, par les réductions connues,

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x,$$

$$\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\frac{1}{2} x \sqrt{1-x^2} + \frac{1}{2} \arcsin x,$$

$$\int \frac{x^4 dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\left(\frac{1}{4} x^3 - \frac{1.3}{2.4} x\right) \sqrt{1-x^2} + \frac{1.3}{2.4} \arcsin x,$$

et ainsi de suite.

Mais on peut avoir directement l'intégrale de toute la série par la méthode du n° 10, en intégrant simplement la différentielle

$$\frac{dx}{(1-ax^2)\sqrt{1-x^2}},$$

laquelle, en supposant $\sqrt{\frac{1-x^2}{1-ax^2}} = y$, se change en celle-ci

$$-\frac{dy}{\sqrt{1-a}\sqrt{1-y^2}},$$

dont l'intégrale est $\frac{\arccos y}{\sqrt{1-a}}$; de sorte que l'intégrale de la proposée sera

$$\frac{1}{\sqrt{1-a}} \arccos \sqrt{\frac{1-x^2}{1-ax^2}},$$

et comme cette intégrale s'évanouit d'elle-même lorsque $x=0$, elle ne demande point de constante.

Dénotant donc en général cette quantité par V , il n'y aura qu'à regarder V comme une fonction de a et à la résoudre en une série ascendante de la forme

$$u + au' + a^2u'' + a^3u''' + \dots,$$

soit par la méthode des séries, soit par des différentiations relatives à a ; on aura alors, pour l'arc elliptique répondant à l'abscisse x prise du centre sur le grand axe, la formule

$$u - \frac{1}{2} e^2 u' - \frac{1.1}{2.4} e^4 u'' - \frac{1.1.3}{2.4.6} e^6 u''' - \dots$$

Pour avoir le quart entier de l'ellipse, on fera $x=1$, ce qui donne

$$V = \frac{90^\circ}{\sqrt{1-a}},$$

en désignant par 90° l'angle droit ou le quart d'un cercle dont le rayon est l'unité. On aura donc dans ce cas, en résolvant $\frac{1}{\sqrt{1-a}}$ en série,

$$u = 90^\circ, \quad u' = \frac{1}{2} 90^\circ, \quad u'' = \frac{1.3}{2.4} 90^\circ, \dots,$$

par conséquent, le quart d'ellipse sera exprimé par la série

$$90^\circ \left(1 - \frac{1.1}{2.2} e^2 - \frac{1.1.1.3}{2.2.4.4} e^4 - \frac{1.1.1.3.3.5}{2.2.4.4.6.6} e^6 - \dots \right),$$

qu'on voit être toujours convergente lorsque e est une fraction assez petite.

21. Supposons maintenant e peu différente de l'unité, ce qui est le cas d'une ellipse ou d'une hyperbole très-aplatie suivant que e sera $<$ ou $>$ 1; on mettra alors la différentielle $\sqrt{\frac{1-e^2x^2}{1-x^2}} dx$ sous la forme

$$\sqrt{\frac{1-ex}{1-x}} \sqrt{\frac{1+ex}{1+x}} dx,$$

et l'on représentera le radical $\sqrt{\frac{1+ex}{1+x}}$ ainsi $\sqrt{1 - \frac{(1-e)x}{1+x}}$, où l'on voit qu'à cause de $1-e$ très-petite, le terme $\frac{(1-e)x}{1+x}$ sera toujours fort petit du même ordre dans tout le quart d'ellipse où x croît depuis 0 jusqu'à 1; de sorte que la réduction de ce radical en série ne sera sujette à aucune difficulté.

Mais, pour rendre le calcul plus simple, on donnera au même radical la forme $\sqrt{e + \frac{1-e}{1+x}}$, et faisant $\frac{1-e}{e} = n$, on aura à intégrer la diffé-

rentielle en série

$$\sqrt{\frac{1-ex}{1-x}} \sqrt{e} \left(1 + \frac{1}{2} \frac{n}{1+x} - \frac{1.1}{2.4} \frac{n^2}{(1+x)^2} + \frac{1.1.3}{2.4.6} \frac{n^3}{(1+x)^3} - \dots \right) dx,$$

dont chaque terme est intégrable en partie algébriquement et en partie par logarithmes.

Suivant la méthode du n° 10, il n'y aura donc qu'à intégrer la différentielle

$$\sqrt{\frac{1-ex}{1-x}} \frac{\sqrt{e}}{1 - \frac{a}{1+x}} dx,$$

qu'on nommera dV , et à résoudre ensuite la quantité V , regardée comme une fonction de a , en une série ascendante de la forme

$$u + au' + a^2u'' + a^3u''' + \dots;$$

alors on aura sur-le-champ la série

$$u + \frac{1}{2} nu' - \frac{1.1}{2.4} n^2 u'' + \frac{1.1.3}{2.4.6} n^3 u''' - \dots$$

pour l'intégrale de la différentielle proposée, c'est-à-dire pour la longueur de l'arc elliptique ou hyperbolique.

Or, comme

$$\frac{1}{1 - \frac{a}{1+x}} = \frac{1+x}{1-a+x} = 1 + \frac{a}{1-a+x},$$

on aura

$$dV = \sqrt{\frac{1-ex}{1-x}} \sqrt{e} dx + a \sqrt{e} \sqrt{\frac{1-ex}{1-x}} d[\log(1-a+x)];$$

et faisant $\frac{1-x}{1-ex} = y^2$, ce qui donne

$$x = \frac{1-y^2}{1-ey^2}, \quad dx = -\frac{2(1-e)y}{(1-ey^2)^2} dy,$$

on aura

$$dV = -\frac{2(1-e)\sqrt{e}}{(1-ey^2)^2} dy + 2ae\sqrt{e} \frac{1}{1-ey^2} dy - \frac{2a\sqrt{e}(1+e-ae)}{2-a-(1+e-ae)y^2} dy;$$

donc, en intégrant par les méthodes connues,

$$V = -\frac{(1-e)y\sqrt{e}}{1-ey^2} + \left(\frac{1-e}{2} - ea\right) \log \left(\frac{1-y\sqrt{e}}{1+y\sqrt{e}} \right) \\ + a \sqrt{\frac{e(1+e-ea)}{2-a}} \log \left(\frac{1-y\sqrt{\frac{1+e-ea}{2-a}}}{1+y\sqrt{\frac{1+e-ea}{2-a}}} \right).$$

Cette intégrale est nulle lorsque $y=0$, auquel cas $x=1$; ainsi elle répond aux arcs elliptiques ou hyperboliques pris depuis le sommet ou l'extrémité du grand axe; mais, dans le cas de l'ellipse, il faudra prendre l'expression de l'arc négativement puisqu'il diminue tandis que l'abscisse x augmente. On aura donc en général, pour l'arc d'ellipse ou d'hyperbole pris depuis le sommet et terminé au point qui répond à l'abscisse x prise du centre, la valeur en série

$$\mp u \mp \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{e}\right) u' \pm \frac{1 \cdot 1}{2 \cdot 4} \left(1 - \frac{1}{e}\right)^2 u'' \mp \frac{1 \cdot 1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 6} \left(1 - \frac{1}{e}\right)^3 u''' \dots,$$

les signes supérieurs étant pour l'ellipse où $e < 1$, et les inférieurs pour l'hyperbole où $e > 1$. Et pour avoir le quart entier de l'ellipse il faudra faire $x=0$ et par conséquent $y=1$.

Au reste, puisque $u + au' + a^2u'' \dots$ est le développement de la fonction V , on voit d'abord qu'on aura

$$u = -(1-e) \left[\frac{y\sqrt{e}}{1-ey^2} - \frac{1}{2} \log \left(\frac{1-y\sqrt{e}}{1+y\sqrt{e}} \right) \right], \\ u' = -e \log \left(\frac{1-y\sqrt{e}}{1+y\sqrt{e}} \right) + \sqrt{\frac{e(1+e)}{2}} \log \left(\frac{1-y\sqrt{\frac{1+e}{2}}}{1+y\sqrt{\frac{1+e}{2}}} \right);$$

et les quantités suivantes $u'', u''', \dots$ seront les coefficients des puissances $a, a^2, \dots$ dans le développement de la fonction

$$\sqrt{e \left[\frac{1+e}{2} + \frac{(1-e)a}{2(2-a)} \right]} \times \log \left(\frac{1-y\sqrt{\frac{1+e}{2} + \frac{(1-e)a}{2(2-a)}}}{1+y\sqrt{\frac{1+e}{2} + \frac{(1-e)a}{2(2-a)}}} \right),$$

coefficients qu'on trouvera aisément par la méthode des séries, ou par des différentiations successives.

22. Après avoir ainsi résolu d'une manière nouvelle et plus simple qu'on ne l'avait fait, les deux cas extrêmes de la rectification des arcs elliptiques et hyperboliques, nous allons appliquer notre méthode générale à la rectification d'une ellipse ou d'une hyperbole quelconque.

Et d'abord il est clair que la différentielle à intégrer étant (18)

$$\frac{\sqrt{1-e^2x^2} dx}{\sqrt{1-x^2}},$$

il n'y aura qu'à multiplier le haut et le bas de la fraction par $\sqrt{1-e^2x^2}$, pour la ramener à la forme de celle du n° 6, laquelle sera dans notre cas

$$\frac{(1-e^2x^2) dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-e^2x^2)}}.$$

Mais, pour rendre le calcul plus général, nous nous proposerons la différentielle

$$\frac{(A+Bx^2) dx}{\sqrt{(1-p^2x^2)(1-q^2x^2)}},$$

dans laquelle on suppose $p > q$; ainsi pour l'ellipse on prendra $p=1$, $q=e$, et pour l'hyperbole $p=e$, $q=1$.

On fera donc, conformément aux transformations du n° 7,

$$p' = p + \sqrt{p^2 - q^2}, \quad q' = p - \sqrt{p^2 - q^2},$$

$$p'' = p' + \sqrt{p'^2 - q'^2}, \quad q'' = p' - \sqrt{p'^2 - q'^2},$$

$$\dots \dots \dots$$

$$\frac{xR}{1-q^2x^2} = x', \quad \frac{x'R'}{1-q'^2x'^2} = x'', \dots$$

en supposant

$$R = \sqrt{(1-p^2x^2)(1-q^2x^2)},$$

$$R' = \sqrt{(1-p'^2x'^2)(1-q'^2x'^2)},$$

et l'on aura par là

$$x' = \frac{1+q^2x^2-R}{2p^2},$$

$$x'^2 = \frac{1+q'^2x'^2-R''}{2p'^2},$$

$$\frac{dx}{R} = \frac{dx'}{R'} = \frac{dx''}{R''} = \dots,$$

où $x', x'', \dots, R', R'', \dots$ seront nécessairement réels, puisque x et R le sont.

Par ces substitutions la différentielle $\frac{(A+Bx^2)dx}{R}$ deviendra successivement

$$\frac{(A' + B'x'^2)dx'}{R'} = \frac{Bdx'}{2p^2},$$

$$\frac{(A'' + B''x''^2)dx''}{R''} = \frac{Bdx''}{2p'^2} = \frac{B'dx''}{2p'^2},$$

$$\frac{(A''' + B'''x'''^2)dx'''}{R'''} = \frac{Bdx'''}{2p^2} = \frac{B'dx'''}{2p'^2} = \frac{B''dx'''}{2p''^2},$$

et ainsi de suite, en faisant, pour abréger,

$$A' = A + \frac{B}{2p^2}, \quad A'' = A' + \frac{B'}{2p'^2}, \quad A''' = A'' + \frac{B''}{2p''^2}, \dots,$$

$$B' = \frac{Bq^2}{2p^2}, \quad B'' = \frac{B'q'^2}{2p'^2}, \quad B''' = \frac{B''q''^2}{2p''^2}, \dots,$$

Donc, en général, si ξ est un terme quelconque de la série $x, x', x'', \dots$, r et s les deux termes correspondants dans les séries $p, p', p'', \dots$, et $q, q', q'', \dots$, et r', s' les deux termes qui les précèdent dans les mêmes séries,

la différentielle proposée sera transformée en celle-ci

$$-\frac{B}{2p^2} \left(dx' + \frac{q^2}{2p'^2} dx'' + \frac{q'^2 q'^2}{2p'^2 \times 2p''^2} dx''' + \dots + \frac{q^2 q'^2 \dots}{2p'^2 \times 2p''^2 \times \dots \times 2p'^2} d\xi \right) + \frac{(C + D\xi) d\xi}{\sqrt{(1-r^2\xi^2)(1-s^2\xi^2)}},$$

dans laquelle on aura

$$C = A + \frac{B}{2p^2} \left(1 + \frac{q^2}{2p'^2} + \frac{q'^2 q'^2}{2p'^2 \times 2p''^2} + \dots + \frac{q^2 q'^2 \dots}{2p'^2 \times 2p''^2 \times \dots \times 2p'^2} \right)$$

$$D = B \times \frac{q^2 q'^2 q''^2 \dots s^2}{2p^2 \times 2p'^2 \times 2p''^2 \times \dots \times 2p'^2}.$$

23. Maintenant pour l'ellipse on a

$$A = 1, \quad B = -e^2, \quad p = 1, \quad q = e < 1;$$

ainsi les nombres $p, p', p'', \dots$ forment une série croissante depuis l'unité, et les nombres correspondants $q, q', q'', \dots$ forment une série décroissante depuis la valeur de l'excentricité (8). Or, par la nature de l'ellipse, la variable x^2 est renfermée entre 0 et 1; donc on aura

$$R^2 = (1-p^2x^2)(1-q^2x^2) < (1-q^2x^2),$$

par conséquent

$$x'^2 = \frac{x^2 R^2}{(1-q^2x^2)^2} < x^2 < 1;$$

donc aussi

$$R'^2 < (1-q'^2x'^2)^2,$$

car

$$(1-q'^2x'^2)^2 - (1-p'^2x'^2)(1-q'^2x'^2) = (p'^2 - q'^2)(1-q'^2x'^2)x'^2 > 0;$$

et de là

$$x''^2 < x'^2 < 1,$$

et ainsi de suite.

Donc $1-q'^2x'^2, 1-q''^2x''^2, \dots$ étant des quantités positives, la réalité déjà démontrée des radicaux $R', R'', \dots$ demande que les facteurs correspondants $1-p'^2x'^2, 1-p''^2x''^2, \dots$ soient positifs; par conséquent on aura $x'^2 < \frac{1}{p'^2}, x''^2 < \frac{1}{p''^2}, \dots$, donc aussi $\xi^2 < \frac{1}{p^2}$.

Puis donc que $r^2 \xi^2 < 1$, on pourra faire $r\xi = \sin \varphi$, et la différentielle $\frac{(C + D\xi^2)d\xi}{\sqrt{(1-r^2\xi^2)(1-s^2\xi^2)}}$ deviendra

$$\frac{\left(\frac{C}{r} + \frac{D}{r^3} \sin^2 \varphi\right) d\varphi}{\sqrt{1 - \frac{s^2}{r^2} \sin^2 \varphi}},$$

où l'on voit que le radical $\sqrt{1 - \frac{s^2}{r^2} \sin^2 \varphi}$ ne sera jamais ni > 1 ni $< \sqrt{1 - \frac{s^2}{r^2}}$; de sorte que l'intégrale de la différentielle dont il s'agit aura pour limites celle de

$$\left(\frac{C}{r} + \frac{D}{r^3} \sin^2 \varphi\right) d\varphi,$$

laquelle est

$$\left(\frac{C}{r} + \frac{D}{r^3}\right) \varphi - \frac{D \sin 2\varphi}{4r^3},$$

et cette même intégrale divisée par $\sqrt{1 - \frac{s^2}{r^2}}$; limites qu'on pourra resserrer autant qu'on voudra, en diminuant de plus en plus la valeur de $\frac{s}{r}$ par la continuation des séries $p, p', p'', \dots, r$, et $q, q', q'', \dots, s$.

Mais, pour approcher davantage de la vraie valeur de l'intégrale en question, il n'y aura qu'à développer le radical par la méthode ordinaire, et la différentielle proposée deviendra

$$\begin{aligned} \frac{C}{r} d\varphi + \frac{1}{r^3} \left(D + \frac{1}{2} s^2 C\right) \sin^2 \varphi d\varphi \\ + \frac{1}{2} \frac{s^2}{r^3} \left(D + \frac{3}{4} s^2 C\right) \sin^4 \varphi d\varphi + \frac{1}{2.4} \frac{s^4}{r^3} \left(D + \frac{5}{6} s^2 C\right) \sin^6 \varphi d\varphi + \dots, \end{aligned}$$

dont l'intégrale sera

$$\left(\frac{C}{r} + F\right) \varphi - (F \sin \varphi + G \sin^3 \varphi + H \sin^5 \varphi + I \sin^7 \varphi + \dots) \cos \varphi,$$

en faisant

$$\begin{aligned} F &= \frac{1}{2} \frac{1}{r^3} \left(D + \frac{1}{2} s^2 C\right) + \frac{3}{2.4} \frac{s^2}{r^3} \left(D + \frac{3}{4} s^2 C\right) \\ &\quad + \frac{3^2.5}{2.4.6} \frac{s^4}{r^3} \left(D + \frac{5}{6} s^2 C\right) + \frac{3^3.5^2.7}{2.4.6^2.8} \frac{s^6}{r^3} \left(D + \frac{7}{8} s^2 C\right) + \dots, \\ G &= \frac{1}{2.4} \frac{s^2}{r^3} \left(D + \frac{3}{4} s^2 C\right) + \frac{3.5}{2.4.6} \frac{s^4}{r^3} \left(D + \frac{5}{6} s^2 C\right) + \dots, \\ H &= \frac{3}{2.4.6} \frac{s^4}{r^3} \left(D + \frac{5}{6} s^2 C\right) + \dots \end{aligned}$$

Donc, puisque $x = 0$ rend $x', x'', \dots, \xi = 0$, par conséquent aussi $\varphi = 0$, on aura pour la valeur de l'arc elliptique qui répond à l'abscisse x , prise depuis le centre sur le grand axé,

$$\begin{aligned} -\frac{B}{2p^2} \left(x' + \frac{q^2}{2p^2} x'' + \frac{q^2 q'^2}{2p^2 \times 2p^2} x''' + \dots + \frac{q^2 q'^2 \dots}{2p^2 \times 2p^2 \dots \times 2p^2} \xi\right) \\ + \left(\frac{C}{r} + F\right) \varphi - (F \sin \varphi + G \sin^3 \varphi + H \sin^5 \varphi + \dots) \cos \varphi, \end{aligned}$$

en faisant, dans les formules du numéro précédent,

$$p = 1, \quad q = e, \quad A = 1, \quad B = -e^2.$$

24. Il y a cependant une remarque importante à faire sur l'emploi de cette valeur : comme l'angle φ n'est déterminé que par son sinus $r\xi$, il est clair qu'il peut avoir une infinité de valeurs différentes, et l'on voit aussi que les valeurs de $x', x'', \dots, \xi$ peuvent être également positives et négatives à cause de l'ambiguïté des radicaux $R, R', R'', \dots$ qui entrent dans leurs expressions, de sorte que le signe de φ est aussi indéterminé.

Nous remarquerons donc que, puisque

$$\frac{dx}{R} = \frac{d\xi}{\sqrt{(1-r^2\xi^2)(1-s^2\xi^2)}} = \frac{d\varphi}{r \sqrt{1 - \frac{s^2}{r^2} \sin^2 \varphi}},$$

et que R est toujours positif depuis $x = 0$ jusqu'à $x = 1$; que, de plus,

le radical $\sqrt{1 - \frac{\delta^2}{r^2} \sin^2 \varphi}$ ne peut devenir nul, ni par conséquent changer de signe, il faut que $d\varphi$ soit positif en même temps que dx ; par conséquent, l'angle φ , qu'on a vu être nul lorsque $x = 0$, devra être toujours positif et augmenter continuellement depuis $x = 0$ jusqu'à $x = 1$; de sorte que la valeur de φ , répondant à une valeur de x , sera nécessairement toujours plus grande ou moindre que celle qui répondra à une plus grande ou moindre valeur de x . Or, à cause de l'ambiguïté du signe des radicaux $R, R', \dots$, il est clair que les valeurs de x^2 en x^2 , de x'^2 en $x'^2, \dots$, sont chacune doubles (22); de manière que la valeur de x^2 en x^2 sera double, celle de x^2 en x'^2 sera quadruple, et qu'en général la valeur de x^2 en ξ^2 sera $2^{n \text{ triple}}$, en dénotant par p l'exposant du rang de ξ dans la série $x', x'', \dots, \xi$. Donc, quoique toutes ces valeurs de x^2 répondent à une même valeur de ξ^2 , elles ne répondront pas pour cela au même angle φ ; mais, en les rangeant suivant l'ordre de leur grandeur, la plus petite répondra au plus petit angle, qui aura pour sinus $\pm r\xi$ (en supposant ce sinus positif), et que nous dénoterons par ω ; les autres répondront aux angles suivants, qui auront pour sinus $\pm r\xi$. Ainsi, la seconde répondra à l'angle $180^\circ - \omega$, la troisième à l'angle $180^\circ + \omega$, la quatrième à l'angle $2.180^\circ - \omega$, et ainsi de suite; et, en général, la $\nu^{i \text{ème}}$ répondra à l'angle $\frac{\nu-1}{2} 180^\circ + \omega$ ou $\frac{\nu}{2} 180^\circ - \omega$, selon que ν sera impair ou pair.

Il s'ensuit de là qu'après avoir déduit de la valeur donnée de x^2 celle de $\xi^2 = [x^{(p)}]^2$ par les formules

$$x^2 \left(\frac{1 - p^2 x^2}{1 - q^2 x^2} \right) = x'^2, \quad x'^2 \left(\frac{1 - p'^2 x'^2}{1 - q'^2 x'^2} \right) = x''^2, \dots,$$

lesquelles ne donnent chacune qu'une valeur simple, il faudra remonter de celle-ci à celle-là par les formules

$$x^2 = \frac{1 + q^2 x'^2 - R'}{2p^2}, \quad x'^2 = \frac{1 + q'^2 x''^2 - R''}{2p'^2}, \dots,$$

en commençant par la dernière et ayant soin de donner aux radicaux

$$R' = \sqrt{(1 - p'^2 x'^2)(1 - q'^2 x'^2)}, \quad R'' = \sqrt{(1 - p''^2 x''^2)(1 - q''^2 x''^2)}, \dots,$$

les signes + et -, ce qui donnera toujours des valeurs doubles, en sorte qu'il en résultera 2^n valeurs différentes de x , toutes positives (12) et renfermées entre les mêmes limites 0 et 1, parmi lesquelles se trouvera donc nécessairement la valeur donnée de x^2 .

Soit ν l'exposant du rang que celle-ci tiendra parmi toutes ces valeurs rangées selon leur grandeur, à commencer par la plus petite, on fera donc

$$\varphi = \frac{\nu-1}{2} 180^\circ + \omega, \quad \text{ou} \quad \varphi = \frac{\nu}{2} 180^\circ - \omega,$$

selon que ν sera impair ou pair, en prenant pour ω l'angle qui, dans les tables, répond à $r\xi$.

A l'égard des signes qu'il faudra donner ensuite aux valeurs mêmes de $x', x'', \dots$, on les déterminera toujours par les expressions

$$x' = \frac{xR}{1 - q^2 x^2}, \quad x'' = \frac{x'R'}{1 - q'^2 x'^2}, \dots,$$

en prenant les radicaux $R, R', R'', \dots$, avec les signes qui répondent à la valeur donnée de x^2 ; et il est clair que puisque l'on a ici $q^2 x^2, q'^2 x'^2, \dots < 1$, les signes de $x', x'', \dots$ seront les mêmes que ceux de $xR, xRR', xRR'R'', \dots$, ou (puisque xR est positif) de $+1, R', R'R'', R'R'R'', \dots$.

25. Pour avoir le quart entier de l'ellipse, on fera $x=1=p$, ce qui donne $x'=0, x''=0, \dots, \xi=0$, par conséquent aussi $\omega=0$; et, comme cette valeur est la plus grande que x puisse avoir, on aura nécessairement dans ce cas $\nu=2^n$; donc, $\varphi=2^{n-1}.180^\circ$, et $\sin \varphi=0$. Donc la longueur du quart de l'ellipse sera exprimée simplement par

$$\left(\frac{C}{r} + F \right) \cdot 2^{n-1} \cdot 180^\circ.$$

Si l'ellipse devenait circulaire, on aurait alors $e=0$; donc $q=0$, et, de là, $q'=0$, $q''=0, \dots$, $s=0$, $p=1$, $p'=2$, $p''=4, \dots$, $r=p^{(a)}=2^a$; et comme, dans ce cas, $A=1$, $B=0$, on aurait aussi $C=1$, $D=0$; donc $F=0$; ce qui réduirait l'équation précédente à $\frac{180^\circ}{2}=90^\circ$, comme elle doit être.

26. Au reste, cette multiplicité des valeurs de x^2 qui répondent à une même valeur de ξ^2 fait qu'on a tout d'un coup, et par une même formule, non-seulement la longueur de l'arc elliptique qui répond à l'abscisse donnée, mais encore celle des arcs qui répondent à différentes autres abscisses; et si c'est un inconvénient dans le cas où l'on ne demande que l'arc d'une abscisse donnée, ce sera au contraire un avantage lorsqu'on voudra construire une table de la longueur des arcs pour toutes les abscisses. Nous verrons d'ailleurs que cette multiplicité de valeurs cesse d'avoir lieu lorsqu'on emploie les transformations du n° 2, lesquelles conduisent à des différentielles intégrables par les logarithmes.

27. Pour l'hyperbole où $e>1$ et x^2 aussi >1 , on mettra d'abord, pour éviter les imaginaires, l'élément de l'arc sous cette forme

$$\frac{\sqrt{e^2 x^2 - 1} dx}{\sqrt{x^2 - 1}},$$

multipliant ensuite le haut et le bas par $\sqrt{e^2 x^2 - 1}$, on aura la différentielle

$$\frac{(e^2 x^2 - 1) dx}{\sqrt{(e^2 x^2 - 1)(x^2 - 1)}} \quad \text{ou bien} \quad \frac{(e^2 x^2 - 1) dx}{\sqrt{(1 - e^2 x^2)(1 - x^2)}},$$

qui se rapporte à la formule

$$\frac{(A + Bx^2) dx}{R}$$

du n° 22, en y faisant $A=-1$, $B=e^2$, $p=e$, $q=1$. Ainsi, les nombres p , p' , p'' , ... augmenteront depuis la valeur de e , et les nombres q , q' , q'' , ... iront en diminuant depuis l'unité.

Or, puisque $x^2 > 1$, par la nature de l'hyperbole, on aura

$$R^2 > (1 - q^2 x^2)^2;$$

par conséquent,

$$x'^2 > x^2 > 1,$$

et de là on trouvera aussi

$$x''^2 > x'^2 > 1,$$

et ainsi de suite.

Donc, $1 - p^2 x'^2$, $1 - p'^2 x''^2$, ... étant des quantités négatives, la réalité déjà prouvée des radicaux R , R' , ... demande que les facteurs corrélatifs $1 - q^2 x^2$, $1 - q'^2 x'^2$, ... soient aussi négatifs; donc on aura

$$q'^2 x'^2 > 1, \quad q''^2 x''^2 > 1, \dots;$$

par conséquent,

$$x'^2 > \frac{1}{q'^2}, \quad x''^2 > \frac{1}{q''^2}, \dots, \quad \xi^2 > \frac{1}{s^2},$$

et de là

$$\frac{1}{s^2 \xi^2} < 1.$$

On pourra donc supposer $\frac{1}{s\xi} = \sin \varphi$, c'est-à-dire $\xi = \frac{1}{s \sin \varphi}$, et cette substitution changera la différentielle

$$\frac{(C + D\xi^2) d\xi}{\sqrt{(1 - r^2 \xi^2)(1 - s^2 \xi^2)}}$$

en celle-ci

$$-\left(\frac{C}{r} + \frac{D}{rs^2 \sin^2 \varphi}\right) d\varphi,$$

dont l'intégrale aura évidemment pour limites celle de

$$-\left(\frac{C}{r} + \frac{D}{rs^2 \sin^2 \varphi}\right) d\varphi,$$

et cette même intégrale divisée par $\sqrt{1 - \frac{s^2}{r^2}}$.

Mais, pour avoir une valeur plus approchée, on réduira en série le

radical $\sqrt{1 - \frac{s^2}{r^2} \sin^2 \varphi}$, et la différentielle deviendra

$$-\frac{D}{rs^2} \frac{d\varphi}{\sin^2 \varphi} - \frac{1}{r} \left(C + \frac{D}{2r^2} \right) d\varphi - \frac{1}{2} \frac{s^2}{r^3} \left(C + \frac{3}{4} \frac{D}{r^2} \right) \sin^2 \varphi d\varphi \\ - \frac{3}{2 \cdot 4} \frac{s^4}{r^5} \left(C + \frac{5}{6} \frac{D}{r^2} \right) \sin^4 \varphi d\varphi - \dots,$$

dont l'intégrale est

$$\frac{D}{rs^2} \cot \varphi - \left(\frac{C}{r} + \frac{D}{2r^3} + f \right) \varphi + (f \sin \varphi + g \sin^3 \varphi + h \sin^5 \varphi + \dots) \cos \varphi,$$

en supposant

$$f = \frac{1}{2^2} \frac{s^2}{r^3} \left(C + \frac{3}{4} \frac{D}{r^2} \right) + \frac{3^2}{2^2 \cdot 4^2} \frac{s^4}{r^5} \left(C - \frac{5}{6} \frac{D}{r^2} \right) + \frac{3^2 \cdot 5^2}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2} \frac{s^6}{r^7} \left(C + \frac{7}{8} \frac{D}{r^2} \right) + \dots,$$

$$g = \frac{3}{2 \cdot 4^2} \frac{s^4}{r^5} \left(C + \frac{5}{6} \frac{D}{r^2} \right) + \frac{3 \cdot 5^2}{2 \cdot 4^2 \cdot 6^2} \frac{s^6}{r^7} \left(C + \frac{7}{8} \frac{D}{r^2} \right) + \dots,$$

$$h = \frac{3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6^2} \frac{s^6}{r^7} \left(C + \frac{7}{8} \frac{D}{r^2} \right) + \dots,$$

Ainsi, il n'y aura qu'à ajouter à cette intégrale la partie algébrique

$$-\frac{B}{2p^2} \left(x' + \frac{q^2}{2p^2} x'' \dots \right),$$

conformément aux formules du n° 22, et en y faisant

$$p = e, \quad q = 1, \quad A = -1, \quad B = e^2,$$

pour avoir l'expression complète de l'arc hyperbolique.

28. Mais il faut faire ici des remarques semblables à celles du n° 24. On remarquera donc que, puisque la différentielle $\frac{dx}{R}$ est transformée en

$$\frac{d\xi}{\sqrt{(1 - r^2 \xi^2)(1 - s^2 \xi^2)}} = -\frac{d\varphi}{r \sqrt{1 - \frac{s^2}{r^2} \sin^2 \varphi}},$$

l'angle φ diminuera continuellement tandis que x augmente, de sorte que, comme (22) $x=1$ donne $x'=\infty$, $x''=\infty$, ..., $\xi=\infty$, et par conséquent $\varphi=0$, l'angle φ sera toujours négatif depuis le point où

$x=1$, c'est-à-dire depuis le sommet de l'hyperbole; de sorte qu'en changeant le signe de φ dans l'expression précédente, l'angle φ croîtra toujours avec l'arc hyperbolique compté depuis le sommet, et l'on y pourra appliquer la règle donnée dans le numéro cité.

Ainsi, nommant ω l'angle tabulaire qui aura pour sinus $\pm \frac{1}{x\xi}$ (en supposant ce sinus positif) et ν l'exposant du rang que la valeur donnée de x^2 tiendra parmi toutes celles qui répondent à la valeur trouvée de ξ^2 , après les avoir rangées suivant l'ordre de leur grandeur, à commencer par la plus petite, on fera

$$\varphi = \frac{\nu-1}{2} 180^\circ + \omega \quad \text{ou} \quad = \frac{\nu}{2} 180^\circ - \omega,$$

suivant que ν sera impair ou pair.

Et, pour les signes de x' , x'' , ..., on les déterminera, d'après ceux des radicaux R , R' , R'' , ..., par les formules

$$x' = \frac{xR}{1 - q^2 x^2}, \quad x'' = \frac{xR'}{1 - q'^2 x'^2}, \dots,$$

de sorte que, comme $1 - q^2 x^2$, $1 - q'^2 x'^2$, ... sont des quantités toujours négatives, ainsi qu'on l'a démontré dans le numéro précédent, il est clair que les signes de x' , x'' , ... seront les mêmes que ceux de $-xR$, $-xRR'$, $-xRR'R''$, ..., ou (puisque xR est positif) de -1 , R' , $-R''$, $R'''R''$, ...

D'après ces déterminations, on aura donc, pour la valeur de l'arc hyperbolique (en changeant le signe de φ),

$$-\frac{B}{2p^2} \left(x' + \frac{q^2}{2p'^2} x'' + \frac{q'q'^2}{2p'^2 \times 2p'^2} x''' + \dots + \frac{q^2 q'^2 \dots}{2p'^2 \times 2p'^2 \dots \times 2^{\nu-1} r^3} \xi \right) \\ - \frac{D}{rs^2} \cot \varphi + \left(\frac{C}{r} + \frac{D}{2r^3} + f \right) \varphi - (f \sin \varphi + g \sin^3 \varphi + \dots) \cos \varphi;$$

et, comme cette formule devient nulle lorsque $x=1$ (ce que nous allons démontrer), il s'ensuit qu'elle représentera exactement l'arc hyperbolique pris depuis le sommet de l'hyperbole, et qui répondra à l'abscisse x comptée depuis le centre sur le grand axe.

29. Pour voir ce que cette formule donne lorsque $x=1$, auquel cas on a $x'=\infty$, il faut chercher les expressions de x'' , x''' , ... ξ en x' , et, pour cela, il faut commencer par chercher celles des radicaux R' , R'' , Or, puisque à $x=1$ répond $x'=\infty$, il est d'abord clair que dans l'expression de x^2 en x'^2 il faut donner au radical R' une valeur positive; ayant

$$x^2 = \frac{1 + q^2 x'^2 - R'}{2p^2} \quad \text{et} \quad R' = \sqrt{(1 - p^2 x'^2)(1 - q^2 x'^2)},$$

on aura, lorsque $x'=\infty$,

$$R' = p'q'x'^2 - \frac{p'^2 + q'^2}{2p'q'};$$

de sorte qu'à cause de $p'q'=q^2$, la valeur de x^2 sera

$$\frac{2q^2 + p'^2 + q'^2}{4p^2q^2};$$

mais $p^2 + q^2 = 4p^2 - 2q^2$; donc

$$x^2 = \frac{1}{q^2} = 1.$$

Au contraire, puisque à $x'=\infty$ il répond aussi $x''=\infty$, il faudra, dans l'expression de x''^2 en x'^2 , donner au radical R'' une valeur négative; car, en prenant sa valeur positive, on trouverait aussi $x'^2 = \frac{1}{q^2}$, et, par la même raison, il faudra prendre négativement les valeurs de tous les radicaux suivants R'' , R''' ,

On aura donc, lorsque $x=1$, et x' , x'' , ... infinis,

$$R' = p'q'x'^2 - \frac{p'^2 + q'^2}{2p'q'},$$

$$R'' = -p''q''x''^2 + \frac{p''^2 + q''^2}{2p''q''},$$

$$R''' = -p'''q'''x'''^2 + \frac{p'''^2 + q'''^2}{2p'''q'''},$$

$$\dots\dots\dots$$

et, ces valeurs étant substituées dans les expressions

$$x'' = \frac{x'R'}{1 - q'^2 x'^2}, \quad x''' = \frac{x''R''}{1 - q''^2 x''^2}, \dots,$$

on aura (en rejetant les termes que la supposition de x' , x'' , ... infinis rend nuls)

$$x'' = -\frac{p'}{q'}x',$$

$$x''' = \frac{p''}{q''}x'' = -\frac{p'p''}{q'q''}x',$$

$$x^{(4)} = \frac{p'''}{q'''}x''' = -\frac{p'p''p'''}{q'q''q'''}x',$$

$$\dots\dots\dots;$$

$$\text{donc aussi } \xi = -\frac{p'p''p'''\dots r}{q'q''q'''\dots s}.$$

Par conséquent, à cause de $p'q'=q^2$, $p''q''=q'^2$, $p'''q'''=q''^2$, ..., les termes $\frac{q^2}{2p'^2}x''$, $\frac{q'^2}{2p''^2 \times 2p'^2}x'''$, ... deviendront $-\frac{x'}{2}$, $-\frac{x'}{4}$, ..., et le terme $\frac{q^2q'^2}{2p'^2 \times 2p''^2 \times 2p'^2} \xi$ deviendra $-\frac{x'}{2^{\mu-1}}$, en supposant $\xi = x^{(\mu)}$.

D'un autre côté, puisque $\sin \varphi = \frac{1}{s\xi}$, on a, lorsque $\xi=\infty$, $\varphi=0$; donc

$$\cot \varphi = \frac{\cos \varphi}{\sin \varphi} = \frac{1}{\sin \varphi} = s\xi = -s \frac{p'p''\dots r}{q'q''\dots s},$$

done, comme

$$D = B \times \frac{q^2q'^2\dots s^2}{2p'^2 \times 2p''^2 \dots \times 2p'^2} \quad \text{et} \quad sr = s^{\mu},$$

on aura

$$\frac{D}{rs^{\mu}} \cot \varphi = -\frac{Bx'}{2p^2 \times 2^{\mu-1}}.$$

La formule du numéro précédent deviendra donc, par ces substitutions,

$$-\frac{Bx'}{2p^2} \left(1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \dots - \frac{1}{2^{\mu-1}} \right) + \frac{Bx'}{2p^2} \frac{1}{2^{\mu-1}},$$

dont la valeur est évidemment nulle, puisque

$$1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \dots - \frac{1}{2^{\mu-1}} = \frac{1}{2^{\mu-1}}.$$

30. Au reste, pour éviter l'embarras que peuvent causer, dans le calcul de la longueur des arcs hyperboliques, les valeurs fort grandes des quantités $x', x'', \dots$ près du sommet de l'hyperbole où x diffère peu de 1, on peut employer la transformation indiquée dans le n° 16, par le moyen de laquelle la différentielle à intégrer se trouve réduite à une autre de la même forme, mais dont la variable sera renfermée, pour toute l'étendue de l'hyperbole, entre 0 et 1.

Pour cet effet on fera, dans les formules du numéro que nous venons de citer, $y = x, f = 1, p = e, q = 1$; et prenant les signes inférieurs, on aura, pour la nouvelle variable u , l'expression

$$u = \frac{\sqrt{(1 - e^2 x^2)(1 - x^2)}}{e^2 x^2 - 1} = \frac{\sqrt{(e^2 x^2 - 1)(x^2 - 1)}}{e^2 x^2 - 1} = \sqrt{\frac{x^2 - 1}{e^2 x^2 - 1}},$$

qu'on voit être égale à zéro lorsque $x = 1$, et égale à $\frac{1}{e}$ lorsque $x = \infty$: de sorte que la valeur de u commencera avec l'arc hyperbolique et ira ensuite en augmentant avec lui jusqu'au maximum $u = \frac{1}{e}$, qui répondra à la branche infinie de l'hyperbole.

Par cette substitution, la différentielle

$$\frac{(e^2 x^2 - 1) dx}{\sqrt{(1 - e^2 x^2)(1 - x^2)}}$$

sera transformée en

$$\frac{(e^2 u^2 - 1) du}{\sqrt{(1 - e^2 u^2)(1 - u^2)}} + 2Q dt,$$

en supposant que la fonction $e^2 x^2 - 1$ devienne $P + Q\sqrt{s^2 - 4t}$, par la substitution de $\frac{s + \sqrt{s^2 - 4t}}{2}$ à la place de x^2 , et faisant $t = xu, s = 1 + e^2 t$, à cause de $f = 1$ et $F = 0$; ce qui donnera $Q = \frac{e^2}{2}$, et par conséquent $2Q dt = e^2 d(xu)$.

Ainsi, l'arc hyperbolique répondant à l'abscisse x sera égal à la quantité algébrique

$$e^2 xu = \frac{e^2 x \sqrt{x^2 - 1}}{\sqrt{e^2 x^2 - 1}},$$

moins l'intégrale de

$$\frac{(1 - e^2 u^2) du}{\sqrt{(1 - e^2 u^2)(1 - u^2)}}$$

prise depuis $u = 0$. Et il est évident que cette différentielle rentre dans le cas de celle de l'arc elliptique, dont nous avons donné l'intégrale dans le n° 23: car si l'on fait $u = \frac{y}{e}$, elle devient

$$e \sqrt{\frac{(1 - y^2) dy}{(1 - y^2)(1 - \frac{y^2}{e^2})}},$$

en sorte qu'il n'y aura qu'à supposer dans les formules de ce numéro

$$A = \frac{1}{e}, \quad B = -\frac{1}{e}, \quad p = 1, \quad q = \frac{1}{e}, \quad x = y = eu,$$

et prendre l'intégrale depuis $y = 0$ jusqu'à $y = 1$ pour toute la longueur de l'arc hyperbolique.

A l'égard de la partie algébrique $\frac{e^2 x \sqrt{x^2 - 1}}{\sqrt{e^2 x^2 - 1}}$, il n'est pas difficile de voir qu'elle représente la tangente à l'hyperbole prise entre le point de contact et la rencontre de la perpendiculaire menée du centre de l'hyperbole sur la même tangente; car la partie de la tangente prise entre la courbe et l'axe est $\frac{\sqrt{e^2 x^2 - 1} \sqrt{x^2 - 1}}{x}$, et la partie entre l'axe et la perpendiculaire est $\frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x \sqrt{e^2 x^2 - 1}}$, dont la somme est $\frac{e^2 x \sqrt{x^2 - 1}}{\sqrt{e^2 x^2 - 1}}$.

Ainsi, l'intégrale de

$$\frac{(1 - y^2) dy}{e \sqrt{(1 - y^2)(1 - \frac{y^2}{e^2})}}$$

exprimera proprement la différence ou l'excès de la tangente prise entre la courbe et la perpendiculaire menée du centre sur l'arc hyperbolique qui répond à cette tangente.

31. Nous avons employé jusqu'ici, pour la rectification de l'ellipse et de l'hyperbole, les transformations qui servent à augmenter l'inégalité des facteurs sous le signe; nous allons maintenant faire usage de celles qui diminuent cette inégalité, et que nous avons exposées dans le n° 11 et les suivants, et nous les appliquerons d'abord en général à la formule

$$\frac{(A + Bx^2) dx}{\sqrt{(1 - p^2 x^2)(1 - q^2 x^2)}}.$$

On fera donc

$$p = \frac{p+q}{2}, \quad q = \sqrt{pq},$$

$${}^p p = \frac{{}^p p + {}^p q}{2}, \quad {}^p q = \sqrt{{}^p p \cdot {}^p q},$$

$$\dots\dots\dots$$

$${}^1 x^2 = \frac{{}^1 q^2 x^2 + 1 - R}{2 \cdot {}^1 p}, \quad {}^2 x^2 = \frac{{}^2 q^2 x^2 + 1 - R}{2 \cdot {}^2 p}, \dots,$$

en supposant

$$R = \sqrt{(1 - p^2 x^2)(1 - q^2 x^2)}, \quad {}^1 R = \sqrt{(1 - {}^1 p^2 x^2)(1 - {}^1 q^2 x^2)}, \dots,$$

ce qui donnera

$$x = \frac{{}^1 x \cdot {}^1 R}{1 - {}^1 q^2 x^2}, \quad {}^2 x = \frac{{}^2 x \cdot {}^2 R}{1 - {}^2 q^2 x^2}, \dots,$$

$$\frac{dx}{R} = \frac{d^1 x}{{}^1 R} = \frac{d^2 x}{{}^2 R} = \dots,$$

et, par le n° 13,

$$\frac{x^2 dx}{R} = \frac{dx}{q^2} - \frac{(1 - 2 \cdot {}^1 p^2 x^2) d^1 x}{{}^1 q^2 \cdot {}^1 R}, \dots,$$

où les nouvelles variables ${}^1 x, {}^2 x, \dots$ seront nécessairement réelles, ainsi que les quantités radicales ${}^1 R, {}^2 R, \dots$ (n° 12).

Ainsi, la différentielle $\frac{(A + Bx^2) dx}{R}$ deviendra successivement

$$\frac{({}^1 A + {}^1 B x^2) d^1 x}{{}^1 R} + \frac{B dx}{q^2},$$

$$\frac{({}^2 A + {}^2 B x^2) d^2 x}{{}^2 R} + \frac{B dx}{q^2} + \frac{{}^1 B d^1 x}{q^2},$$

$$\frac{({}^3 A + {}^3 B x^2) d^3 x}{{}^3 R} + \frac{B dx}{q^2} + \frac{{}^1 B d^1 x}{q^2} + \frac{{}^2 B d^2 x}{q^2},$$

et ainsi de suite, en faisant, pour abréger,

$${}^1 A = A - \frac{B}{q^2}, \quad {}^2 A = {}^1 A - \frac{{}^1 B}{q^2}, \quad {}^3 A = {}^2 A - \frac{{}^2 B}{q^2}, \dots,$$

$${}^1 B = B - \frac{2 \cdot {}^1 p^2}{q^2}, \quad {}^2 B = {}^1 B - \frac{2 \cdot {}^1 p^2}{q^2}, \quad {}^3 B = {}^2 B - \frac{2 \cdot {}^2 p^2}{q^2}, \dots$$

De sorte que si ξ est un terme quelconqué de la série $x, {}^1 x, {}^2 x, \dots$, ξ le terme qui le précède dans la même série, et r, s les deux termes correspondants des séries $p, {}^1 p, {}^2 p, \dots, q, {}^1 q, {}^2 q, \dots, r, s$ les termes qui les précèdent, la différentielle proposée sera transformée en celle-ci

$$\frac{B}{q^2} \left(dx + \frac{2 \cdot {}^1 p^2}{q^2} d^1 x + \frac{2 \cdot {}^1 p^2 \times 2 \cdot {}^2 p^2}{q^2 \cdot {}^1 q^2} d^2 x + \dots + \frac{2 \cdot {}^1 p^2 \times 2 \cdot {}^2 p^2 \times \dots \times 2 \cdot r^2}{q^2 \cdot {}^1 q^2 \cdot \dots \cdot s^2} d^r x \right) + \frac{(C + D \xi^2) d \xi}{\sqrt{(1 - r^2 \xi^2)(1 - s^2 \xi^2)}},$$

dans laquelle on aura

$$C = A + \frac{B}{q^2} \left(1 + \frac{2 \cdot {}^1 p^2}{q^2} + \frac{2 \cdot {}^1 p^2 \times 2 \cdot {}^2 p^2}{q^2 \cdot {}^1 q^2} + \dots + \frac{2 \cdot {}^1 p^2 \times 2 \cdot {}^2 p^2 \times \dots \times 2 \cdot r^2}{q^2 \cdot {}^1 q^2 \cdot \dots \cdot s^2} \right),$$

$$D = B \times \frac{2 \cdot {}^1 p^2 \times 2 \cdot {}^2 p^2 \times 2 \cdot {}^3 p^2 \times \dots \times 2 \cdot r^2}{q^2 \cdot {}^1 q^2 \cdot {}^2 q^2 \cdot \dots \cdot s^2}.$$

32. Pour l'ellipse, on fera, comme dans le n° 23, $A = 1, B = -e^2, p = 1, q = e < 1$, et les nombres $p, {}^1 p, {}^2 p, \dots, r; q, {}^1 q, {}^2 q, \dots, s$ formeront donc deux séries, la première descendante depuis l'unité, et la seconde ascendante depuis la valeur de l'excentricité, lesquelles se trouveront toujours séparées par un intervalle qui ira en diminuant de plus en plus,

II.

en sorte que les termes r et s seront renfermés entre 1 et e et approcheront d'autant plus de l'égalité que le nombre des termes qui les précèdent sera plus grand.

Et il est facile de se convaincre par le calcul que, quelque petite que soit la valeur de e , peu de termes suffiront pour rendre les valeurs de r et s presque égales.

Or, dans l'ellipse, on a $x^2 = ou < 1$; donc $q^2 x^2$ sera < 1 ; en sorte que $1 - q^2 x^2$ sera > 0 ; mais $(1 - q^2 x^2)^2 = R^2 + (p - q)^2 x^2$, comme on peut s'en convaincre par le calcul, à cause de $q^2 = pq$; donc $1 - q^2 x^2 > R$, et $q^2 x^2 + R < 1$; ainsi, comme $x^2 = \frac{q^2 x^2 + 1 - R}{2p^2}$, on aura

$$p^2 x^2 = \frac{q^2 x^2 + 1 - R}{2} < \frac{q^2 x^2 + 1 + R}{2} < 1.$$

D'où l'on voit que $q^2 x^2$ étant < 1 , on aura nécessairement $p^2 x^2 < 1$, et cela, soit qu'on prenne dans la valeur de x^2 le radical R positif ou négatif.

Or, q^2 étant $< p^2$, on aura donc aussi $q^2 x^2 < 1$, et de là on trouvera, par un raisonnement semblable, $p^2 x^2 < 1$, et ainsi de suite. Donc $r^2 \xi^2 < 1$, et à plus forte raison $s^2 \xi^2 < 1$.

On pourra donc supposer $r\xi = \sin \varphi$, ce qui changera la différentielle

$$\frac{(C + D\xi^2)d\xi}{\sqrt{(1 - r^2\xi^2)(1 - s^2\xi^2)}}$$

en celle-ci

$$\frac{\left(\frac{C}{r} + \frac{D}{r^3} \sin^2 \varphi\right) d\varphi}{\sqrt{1 - \frac{s^2 \sin^2 \varphi}{r^2}}} = \frac{\left(\frac{C}{r} + \frac{D}{r^3}\right) \frac{d\varphi}{\cos \varphi} - \frac{D}{r^3} \cos \varphi d\varphi}{\sqrt{1 + \frac{r^2 - s^2}{r^4} \tan^2 \varphi}},$$

qui sera, comme on voit, toujours plus petite que

$$\left(\frac{C}{r} + \frac{D}{r^3}\right) \frac{d\varphi}{\cos \varphi} - \frac{D}{r^3} \cos \varphi d\varphi,$$

dont l'intégrale est

$$\left(\frac{C}{r} + \frac{D}{r^3}\right) \log \tan \left(45^\circ + \frac{1}{2} \varphi\right) - \frac{D}{r^3} \sin \varphi.$$

De même, en faisant $s\xi = \psi$, on aura la transformée

$$\frac{\left(\frac{C}{s} + \frac{D}{s^3} \frac{d\psi}{\cos \psi} - \frac{D}{s^3} \sin \psi d\psi\right)}{\sqrt{1 - \frac{r^2 - s^2}{s^2} \tan^2 \psi}},$$

qui sera par conséquent plus grande que

$$\left(\frac{C}{s} + \frac{D}{s^3}\right) \frac{d\psi}{\cos \psi} - \frac{D}{s^3} \cos \psi d\psi,$$

dont l'intégrale est pareillement

$$\left(\frac{C}{s} + \frac{D}{s^3}\right) \log \tan \left(45^\circ + \frac{1}{2} \psi\right) - \frac{D}{s^3} \sin \psi.$$

De sorte qu'on aura par ce moyen deux limites entre lesquelles la valeur de l'intégrale de la différentielle en question sera nécessairement renfermée, et qui seront d'autant plus resserrées que les coefficients r et s seront moins inégaux.

Mais, pour avoir une intégrale plus approchée, on emploiera les séries, et pour cet effet il sera à propos de faire $\xi \sqrt{\frac{r^2 + s^2}{2}} = \sin \varphi$, ce qui réduira la différentielle

$$\frac{(C + D\xi^2)d\xi}{\sqrt{(1 - r^2\xi^2)(1 - s^2\xi^2)}}$$

à cette forme

$$\frac{\left(\frac{\beta}{\cos \varphi} + \gamma \cos \varphi\right) d\varphi}{\sqrt{1 - \alpha^2 \tan^2 \varphi}},$$

en supposant

$$\alpha = \frac{r^2 - s^2}{r^2 + s^2}, \quad \beta = C \sqrt{\frac{2}{r^2 + s^2}} + D \left(\frac{2}{r^2 + s^2}\right)^{\frac{3}{2}}, \quad \gamma = -D \left(\frac{2}{r^2 + s^2}\right)^{\frac{3}{2}}.$$

Or, le coefficient α^2 étant fort petit, on pourra réduire en série le radical $\sqrt{1 - \alpha^2 \tan^2 \varphi}$; de sorte que la différentielle deviendra

$$\left(\frac{\beta}{\cos \varphi} + \gamma \cos \varphi\right) \left(1 + \frac{\alpha^2}{2} \tan^2 \varphi + \frac{3\alpha^4}{2 \cdot 4} \tan^4 \varphi + \frac{3 \cdot 5 \alpha^6}{2 \cdot 4 \cdot 6} \tan^6 \varphi + \dots\right) d\varphi,$$

laquelle, à cause de

$$\frac{\tan^m \varphi}{\cos \varphi} = (\tan^m \varphi + \tan^{m+1} \varphi) \cos \varphi,$$

est réductible à cette forme plus simple

$$\frac{\beta d\varphi}{\cos \varphi} \left[\gamma + \frac{\alpha'}{2}(\beta + \gamma) \tan^2 \varphi + \frac{\alpha'}{2} \beta \tan^4 \varphi + \frac{3\alpha'}{2.4}(\beta + \gamma) \tan^6 \varphi + \frac{3\alpha'}{2.4} \beta \tan^8 \varphi + \frac{3.5\alpha'}{2.4.6}(\beta + \gamma) \tan^{10} \varphi \dots \right] \cos \varphi d\varphi,$$

et aura pour intégrale

$$a \log \tan \left(45^\circ + \frac{\varphi}{2} \right) + (\beta + \gamma - a + f \tan^2 \varphi + g \tan^4 \varphi + h \tan^6 \varphi + i \tan^8 \varphi + \dots) \sin \varphi$$

en faisant

$$a = \beta - \frac{3}{2} \frac{\alpha'}{2}(\beta + \gamma) + \frac{3.5}{2.4} \frac{\alpha'}{2} \beta - \frac{3.5.7}{2.4.6} \frac{3\alpha'}{2}(\beta + \gamma) + \frac{3.5.7.9}{2.4.6.8} \frac{3\alpha'}{2} \beta - \frac{3.5.7.9.11}{2.4.6.8.10} \frac{3.5\alpha'}{2.4.6}(\beta + \gamma) + \dots,$$

$$f = \frac{1}{2} \frac{\alpha'}{2}(\beta + \gamma) - \frac{5}{2.4} \frac{\alpha'}{2} \beta + \frac{5.7}{2.4.6} \frac{3\alpha'}{2}(\beta + \gamma) - \dots,$$

$$g = \frac{1}{4} \frac{\alpha'}{2} \beta - \frac{7}{4.6} \frac{3\alpha'}{2.4}(\beta + \gamma) + \dots,$$

$$h = \frac{1}{6} \frac{3\alpha'}{2.4}(\beta + \gamma) - \dots,$$

33. Cette expression n'est sujette à aucune ambiguïté de la part de la valeur de φ , car on voit qu'elle demeure la même en augmentant ou diminuant φ d'un multiple quelconque de la circonférence, et si l'on voulait mettre $180^\circ \pm \varphi$ à la place de φ , alors $\tan \left(45^\circ + \frac{\varphi}{2} \right)$ deviendrait négative, et son logarithme imaginaire; c'est pourquoi il faudra toujours prendre pour φ l'angle tabulaire qui répond au sinus $r\xi$.

A l'égard des radicaux $\sqrt{R}$, $\sqrt{R'}$, on pourra les prendre à volonté

positifs ou négatifs; seulement, il faudra avoir soin de donner ensuite aux quantités $\sqrt{x}$, $\sqrt{x'}$,... les signes convenables d'après les formules du n° 31. En prenant ces radicaux positivement, toutes les quantités $\sqrt{x}$, $\sqrt{x'}$,... ξ seront positives et deviendront nulles lorsque $x = 0$, comme on le voit par les formules du numéro cité; on aura donc aussi $\varphi = 0$ lorsque $x = 0$; et comme l'intégrale précédente devient aussi nulle dans ce cas, on aura donc, pour l'arc elliptique répondant à l'abscisse x prise depuis le centre de l'ellipse sur le grand axe, cette expression complète

$$\frac{B}{q^2} \left(x + \frac{2p^2}{q^2} \sqrt{x} + \frac{2p^2 \times 2p^2}{q^2 q^2} \sqrt{x} + \dots + \frac{2p^2 \times 2p^2 \dots 2r^2}{q^2 q^2 \dots s^2} \sqrt{x} \right) + a \log \tan \left(45^\circ + \frac{\varphi}{2} \right) (\beta + \gamma - a + f \tan^2 \varphi + g \tan^4 \varphi + \dots) \sin \varphi.$$

Pour avoir le quart entier de l'ellipse, on fera $x = 1$, ce qui donne $R = 0$ et $\sqrt{x^2} = \frac{q^2 + 1}{2p^2}$; donc $\sqrt{p^2 x^2} = \frac{q^2 + 1}{2} < 1$; et de même les autres quantités $\sqrt{p^2 x^2}$,... seront de plus en plus au-dessous de l'unité, ce qu'on peut démontrer généralement ainsi.

Puisque $\sqrt{p^2 x^2} = \frac{q^2 x^2 + 1 - R}{2}$ et $\sqrt{q^2 x^2} < 1 - R$, on aura (32) $\sqrt{p^2 x^2} < 1 - R$; mais $R > 1 - p^2 x^2$, à cause de $p^2 > q^2$; donc $\sqrt{p^2 x^2} < p^2 x^2$; et de la même manière on prouvera que $\sqrt{p^2 x^2} < \sqrt{p^2 x^2}$,...; de sorte que les quantités $\sqrt{p^2 x^2}$, $\sqrt{p^2 x^2}$, $\sqrt{p^2 x^2}$,... $r\xi$ formeront une série décroissante. Ainsi, lors même que $px = 1$, la valeur de $r\xi$ sera toujours moindre que 1, par conséquent l'angle φ sera moindre que 90° , et d'autant moindre que le terme $r\xi$ sera plus éloigné de px ; ainsi, on n'aura jamais à craindre que l'expression précédente contienne des termes infinis et devienne par conséquent fautive.

34. Pour l'hyperbole, on fera, comme dans le n° 27,

$$A = -1, \quad B = e^2, \quad p = e^2 > 1, \quad q = 1.$$

Ainsi, les nombres p , p' , p'' ,... r iront en diminuant depuis la valeur de e , et les nombres q , q' , q'' ,... s iront en augmentant depuis l'unité,

en sorte que ceux-là s'approcheront de plus en plus de ceux-ci, mais en demeurant toujours plus grands; cependant la différence sera bientôt si petite, qu'on pourra regarder r et s comme presque égales.

Maintenant, on a dans l'hyperbole $x^2 = 0 > 1$, donc $q^2 x^2 - 1 > 0$; par conséquent, puisque $(q^2 x^2 - 1)^2 = R^2 + (p - q)^2 x^2$, on aura $q^2 x^2 - 1 > R$ et $1 + R < q^2 x^2$.

Or

$$x^2 = \frac{q^2 x^2 + 1 - R}{2 p^2} = \frac{(q^2 x^2 + 1)^2 - R^2}{2 p^2 (q^2 x^2 + 1 + R)} = \frac{2 x^2}{q^2 x^2 + 1 + R},$$

à cause de $(q^2 x^2 + 1)^2 - R^2 = (p + q)^2 x^2 = 4 p^2 x^2$; donc $x^2 > \frac{1}{q^2}$, et par conséquent $q^2 x^2 > 1$. Et cette même conclusion aurait lieu à plus forte raison en donnant au radical R une valeur négative, puisque alors la valeur de x^2 en deviendrait plus grande. Ayant donc $q^2 x^2 > 1$, on aura aussi $q^2 x^2 > 1$, et de là on prouvera par un raisonnement semblable que $q^2 x^2 > 1$, et ainsi de suite.

Donc en général $s^2 \xi^2 > 1$, et à plus forte raison $r^2 \xi^2 > 1$.

On pourra donc supposer $r \xi = \frac{1}{\sin \varphi}$ ou $s \xi = \frac{1}{\sin \psi}$, et l'on trouvera, comme dans le n° 32, que la différentielle

$$\frac{(C + D \xi^2) d \xi}{\sqrt{(1 - r^2 \xi^2)(1 - s^2 \xi^2)}}$$

sera renfermée entre ces deux-ci

$$-\left(\frac{C}{r} + \frac{D}{r^2 \sin^2 \varphi}\right) \frac{d \varphi}{\cos \varphi} \quad \text{et} \quad -\left(\frac{C}{s} + \frac{D}{s^2 \sin^2 \psi}\right) \frac{d \psi}{\cos \psi},$$

dont les intégrales sont

$$\left(\frac{C}{r} + \frac{D}{r^2}\right) \log \tan \left(45^\circ - \frac{\varphi}{2}\right) + \frac{D}{r^2 \sin \varphi},$$

et

$$\left(\frac{C}{s} + \frac{D}{s^2}\right) \log \tan \left(45^\circ - \frac{\psi}{2}\right) + \frac{D}{s^2 \sin \psi}.$$

Mais, pour avoir une intégrale plus approchée, on fera

$$\xi \sqrt{\frac{r^2 + s^2}{2}} = \frac{1}{\sin \varphi},$$

et la différentielle

$$\frac{(C + D \xi^2) d \xi}{\sqrt{(1 - r^2 \xi^2)(1 - s^2 \xi^2)}}$$

deviendra par cette substitution

$$\left(-\frac{\beta}{\cos \varphi} + \frac{\gamma \cos \varphi}{\sin^2 \varphi}\right) d \varphi, \\ \sqrt{1 - \frac{\alpha^2}{\cos^4 \varphi}},$$

en conservant les valeurs de α, β, γ du n° 32. Ainsi, puisque α^2 est une quantité fort petite, on pourra réduire en série le radical, ce qui donnera cette transformée

$$\left(-\frac{\beta}{\cos \varphi} + \frac{\gamma \cos \varphi}{\sin^2 \varphi}\right) \left(1 + \frac{1}{2} \frac{\alpha^2}{\cos^4 \varphi} + \frac{1.3}{2.4} \frac{\alpha^4}{\cos^8 \varphi} + \frac{1.3.5}{2.4.6} \frac{\alpha^6}{\cos^{12} \varphi} + \dots\right) d \varphi,$$

laquelle peut être changée en celle-ci

$$-\frac{\beta d \varphi}{\cos \varphi} + \left(\gamma \cos \varphi + \frac{\alpha^2 \beta + \gamma}{2 \cos^3 \varphi} - \frac{\alpha^2 \beta}{2 \cos^5 \varphi} + \frac{3 \alpha^4 \beta + \gamma}{2.4 \cos^7 \varphi} - \frac{3 \alpha^4 \beta}{2.4 \cos^9 \varphi} + \frac{3.5 \alpha^6 \beta + \gamma}{2.4.6 \cos^{11} \varphi} - \dots\right) \frac{d \varphi}{\sin^2 \varphi}$$

dont l'intégrale sera de la forme

$$a \log \tan \left(45^\circ - \frac{\varphi}{2}\right) - \left(\beta + \gamma - a - \frac{f}{\cos^3 \varphi} + \frac{g}{\cos^5 \varphi} - \frac{h}{\cos^7 \varphi} + \frac{i}{\cos^9 \varphi} - \dots\right) \frac{1}{\sin \varphi},$$

en conservant les expressions des quantités $a, f, g, h, \dots$ données dans le n° 32.

35. Comme l'arc hyperbolique ne commence qu'au point où $x = 1$, il faudra, pour avoir la valeur exacte de l'arc qui répond à une abscisse quelconque x , retrancher de l'intégrale la valeur qui répond à $x = 1$.

Ainsi, en supposant

$$X = \frac{B}{q^2} \left(x + \frac{2^1 p^2}{q^2} x + \frac{2^2 p^2 \times 2^1 p^2}{q^2 q^2} x^2 + \dots + \frac{2^1 p^2 \times 2^2 p^2 \dots 2^1 p^2}{q^2 q^2 \dots q^2} x^2 \right) \\ + a \log \tan \left(45^\circ - \frac{\varphi}{2} \right) - \left(\beta + \gamma - a - \frac{f}{\cos^2 \varphi} + \frac{g}{\cos^4 \varphi} - \frac{h}{\cos^6 \varphi} + \dots \right) \frac{1}{\sin \varphi},$$

et nommant K la valeur de X lorsque x y devient égal à 1, on aura $X - K$ pour l'expression complète de l'arc hyperbolique qui répond à l'abscisse x prise depuis le centre sur le grand axe.

Quant à l'angle φ , on prendra celui qui dans les tables répond au sinus $\frac{1}{2} \sqrt{\frac{r^2 + s^2}{2}}$, et comme nous avons vu que $r^2 \xi^2$ et $s^2 \xi^2$ sont tou-

jours > 1 , il s'ensuit que cet angle sera, dans tous les cas, moindre que 90 degrés, en sorte que $\tan \left(45^\circ - \frac{\varphi}{2} \right)$ et $\cos \varphi$ ne seront jamais nuls.

Pour les radicaux $\sqrt{R}$, $\sqrt{R} \dots$, il sera libre de les prendre positivement ou négativement, pourvu qu'on ait soin de donner les signes convenables aux quantités $\sqrt{x}$, $\sqrt{x} \dots$, d'après les formules du n° 31. Mais, en les prenant tous négativement, on aura l'avantage que les valeurs de $\sqrt{x^2}$, $\sqrt{x^2} \dots$ seront plus grandes, et qu'ainsi l'angle φ sera moindre: de plus, les valeurs de $\sqrt{x}$, $\sqrt{x} \dots$ ξ seront alors toutes positives, puisque $1 - \sqrt{q^2} \sqrt{x^2}$, $1 - \sqrt{q^2} \sqrt{x^2} \dots$ sont nécessairement négatives.

On pourrait enfin faire servir aussi pour l'hyperbole les résultats trouvés précédemment pour l'ellipse, en employant la transformation indiquée dans le n° 30; il n'y aurait pour cela qu'à faire dans la formule générale du n° 33

$$A = \frac{1}{e}, \quad B = -\frac{1}{e}, \quad p = 1, \quad q = \frac{1}{e},$$

et mettre au lieu de x

$$e \sqrt{\frac{x^2 - 1}{e^2 x^2 - 1}}.$$

Cette formule donnerait alors, pour une abscisse quelconque x , l'excès de la tangente prise entre la courbe et la perpendiculaire menée du centre sur l'arc hyperbolique qui répond à cette tangente.

DEUXIÈME SECTION.

MÉMOIRES

EXTRAITS DES

RECUEILS DE L'ACADÉMIE ROYALE

DES SCIENCES ET BELLES-LETTRES

DE BERLIN.



SUR LES

COURBES TAUTOCHRONES.



SUR LES

COURBES TAUTOCHRONES^(*).

(Mémoires de l'Académie royale des Sciences et Belles-Lettres
de Berlin, t. XXI, 1765.)

On appelle en général courbe *tautochrone* une courbe telle, que si un corps se meut le long de sa concavité, soit en montant, soit en descendant, il emploie toujours le même temps à parcourir un arc quelconque pris du point le plus bas.

M. Huygens ayant démontré, dans son fameux ouvrage intitulé : *Horologium oscillatorium*, que la cycloïde était la tautochrone des corps pesants dans le vide, cette découverte excita la curiosité des Géomètres, et les engagea à chercher une méthode directe et analytique pour résoudre le Problème du tautochronisme dans une hypothèse quelconque, Problème qui est peut-être un des plus curieux et en même temps des plus difficiles de la Mécanique.

MM. Jean Bernoulli et Euler se sont particulièrement appliqués à cette recherche, et ont donné presque en même temps, l'un dans les *Mémoires de l'Académie des Sciences de Paris* pour l'année 1730, et l'autre dans le tome IV des *Commentaires de l'Académie de Pétersbourg*, et ensuite dans le second volume de sa *Mécanique*, des méthodes très-ingénieuses pour déterminer les tautochrones dans un milieu résistant comme le carré de la vitesse, et dans quelque hypothèse de pesanteur que ce soit. Ces méthodes, qui sont les mêmes quant au fond, consistent à faire en sorte

(*) Lu dans l'Assemblée du 4 mars 1767.

que l'expression générale du temps $\int \frac{dx}{u}$ devienne égale à une fonction de dimension nulle de deux quantités quelconques, l'une constante A et l'autre variable X, telles qu'en faisant $X = A$ on ait le temps total depuis le commencement du mouvement jusqu'à sa fin. Car alors la quantité A, qui dépend de l'arc total que le corps doit parcourir, s'évanouit nécessairement de la formule $\int \frac{dx}{u}$, lorsque $X = A$, et par conséquent l'expression du temps se trouve entièrement indépendante de la longueur de cet arc. Or, pour cela il suffit que la quantité différentielle $\frac{dx}{u}$ soit elle-même une fonction de dimension nulle de X et de A, comme par exemple $\frac{dp}{\sqrt{A^2 - p^2}}$ et d'autres semblables; condition à laquelle il n'est pas difficile de satisfaire lorsqu'on peut avoir l'expression de la vitesse u , ce qui arrive quand la résistance est nulle et quand elle est proportionnelle au carré de la vitesse; mais il n'en est pas tout à fait de même dans les autres cas où l'équation en u n'est point intégrable. Aussi les deux grands Géomètres dont nous venons de parler n'ont-ils considéré d'autres hypothèses de résistance que celle du carré de la vitesse, et M. Fontaine est le seul qui ait fait jusqu'ici quelques pas de plus dans cette recherche. Sa méthode est fondée sur un calcul particulier qu'il appelle *fluxio-différentiel* et qui consiste à faire varier les mêmes quantités de deux manières différentes; et l'on peut regarder l'ouvrage qu'il a donné sur cette matière comme un des plus beaux qui se trouvent parmi les *Mémoires de l'Académie des Sciences de Paris*, et surtout comme celui qui a le plus contribué à la célébrité de cet illustre Mathématicien.

Mais, quelque profonde et quelque ingénieuse que soit cette nouvelle théorie des tautochrones, il faut avouer qu'elle laisse encore beaucoup à désirer. Lorsqu'il n'y a point de résistance, et que par conséquent la force accélératrice du corps est entièrement indépendante de la vitesse, on sait depuis longtemps que le tautochronisme exige que cette force soit proportionnelle à l'espace qui reste à parcourir. Mais quelle est en général la force nécessaire pour produire le tautochronisme, en la regar-

dant comme une fonction quelconque de l'espace et de la vitesse? Voilà le Problème qu'il faut résoudre pour avoir une théorie générale et complète des tautochrones. M'étant occupé de ce Problème, voici la solution que j'en ai trouvée, et qui est, si je ne me trompe, générale et nouvelle.

Solution du Problème des tautochrones.

Soient u la vitesse du corps en un point quelconque de la ligne qu'il décrit, p sa force accélératrice dans ce point, x l'espace qu'il a encore à parcourir, et a l'espace total depuis le point d'où le corps est parti jusqu'à celui où il doit arriver; on aura, comme on sait (à cause que, x croissant, u diminue), l'équation

$$u du + p dx = 0.$$

Et le temps que le corps doit employer à parcourir l'espace x sera exprimé par $\int \frac{dx}{u}$; de sorte qu'en faisant, après l'intégration, $x = a$, on aura le temps total depuis le commencement du mouvement jusqu'à la fin. Or, ce temps doit être indépendant de l'espace parcouru a , par la nature du Problème; donc il faut que la valeur de $\int \frac{dx}{u}$ soit telle, qu'en faisant $x = a$, a s'évanouisse entièrement.

Soient X une fonction quelconque de x , et A une pareille fonction de a ; il est clair que la condition dont il s'agit aura lieu si, en faisant $X = zA$, et substituant la valeur de x tirée de cette équation dans la formule $\int \frac{dx}{u}$, cette substitution y fait disparaître la quantité a et la réduit à n'être qu'une fonction de z ; car alors la supposition de $x = a$ donnera $X = A$ et par conséquent $z = 1$; de sorte que la formule $\int \frac{dx}{u}$ aura dans ce cas une valeur déterminée et indépendante de a . Donc, si l'on différencie cette formule en faisant varier x et a , qu'ensuite on suppose $dx = X'dX$, $da = A'dA$ (X' étant une fonction de X ou x , et A' une pareille fonction de A ou a), et qu'on mette à la place de dX sa valeur

$\Lambda dz + z d\Lambda$, il faudra que le coefficient de $d\Lambda$ soit égal à zéro. Cela posé, comme la vitesse u doit dépendre des deux quantités x et a , supposons qu'en les faisant varier toutes deux en même temps on ait la différentielle

$$du = P dx + Q da,$$

il est clair qu'on aura d'abord, en vertu de l'équation $udu + p dx = 0$,

$$P = -\frac{p}{u};$$

ensuite la différentielle de $\int \frac{dx}{u}$ sera, dans la même supposition,

$$\frac{dx}{u} - da \int \frac{Q dx}{u^2};$$

laquelle, en faisant les substitutions convenables, c'est-à-dire en mettant $X'(\Lambda dz + z d\Lambda)$ au lieu de dx , et $\Lambda' d\Lambda$ au lieu de da , deviendra

$$\frac{\Lambda X' dz}{u} + \left(\frac{X' z}{u} - \Lambda' \int \frac{Q dx}{u^2} \right) d\Lambda.$$

Donc il faudra que l'on ait

$$\frac{X' z}{u} - \Lambda' \int \frac{Q dx}{u^2} = 0;$$

c'est-à-dire, en remettant pour z sa valeur $\frac{X}{\Lambda}$, et faisant, pour plus de simplicité, $XX' = \xi$ et $\Lambda\Lambda' = \alpha$,

$$\frac{\xi}{u} - \alpha \int \frac{Q dx}{u^2} = 0.$$

D'où, en faisant varier α seul, on tire

$$Q = \frac{u d\xi - \xi du}{\alpha dx},$$

et mettant pour $\frac{du}{dx}$ sa valeur P , ou bien $-\frac{p}{u}$,

$$Q = \frac{\frac{u d\xi}{dx} + \frac{p\xi}{u}}{\alpha}.$$

De sorte que la valeur complète de du sera en général

$$du = -\frac{p dx}{u} + \left(\frac{u d\xi}{dx} + \frac{p\xi}{u} \right) \frac{da}{\alpha},$$

ξ étant une fonction quelconque de x , et α une pareille fonction de a .

Maintenant, soit R le facteur composé de x et de u , qui, multipliant l'équation

$$du + \frac{p dx}{u} = 0,$$

dans laquelle a est supposé constant, la rendrait intégrable, il est évident que ce même facteur étant regardé comme une fonction de u , x et a doit aussi rendre intégrable l'équation

$$du + \frac{p dx}{u} - \left(\frac{u d\xi}{dx} + \frac{p\xi}{u} \right) \frac{da}{\alpha} = 0;$$

donc il faut que l'équation

$$R \left(\frac{u d\xi}{dx} + \frac{p\xi}{u} \right) \left(\frac{u du + p dx}{\frac{u^2 d\xi}{dx} + p\xi} + \frac{da}{\alpha} \right) = 0$$

soit intégrable; et comme le terme $\frac{da}{\alpha}$ est une fonction de a seul, et que les termes $\frac{u du + p dx}{\frac{u^2 d\xi}{dx} + p\xi}$ ne contiennent point a , mais seulement x et u , il

s'ensuit : 1° que le multiplicateur commun $R \left(\frac{u d\xi}{dx} + \frac{p\xi}{u} \right)$ doit être une quantité constante, c'est-à-dire que R doit être réciproquement proportionnel à $\frac{u d\xi}{dx} + \frac{p\xi}{u}$; 2° que par conséquent la quantité $\frac{u du + p dx}{\frac{u^2 d\xi}{dx} + p\xi}$ doit être une différentielle complète de x et de u .

Soit

$$\frac{u^2 d\xi}{dx} + p\xi = r,$$

ce qui donne

$$p = \frac{r}{\xi} - \frac{u^2 d\xi}{\xi dx}.$$

et l'on aura la transformée

$$\frac{\xi u du - u^2 d\xi}{\xi r} + \frac{dx}{\xi},$$

laquelle, en faisant $\frac{u}{\xi} = y$, se changera en celle-ci

$$\frac{u dy}{ry} + \frac{dx}{\xi}.$$

Or, comme ξ est une fonction de x , il est visible que cette quantité ne saurait être une différentielle complète, à moins que $\frac{u^2}{r}$ ne soit une fonction de y seule.

Donc, si l'on dénote par $\varphi(y)$ une fonction quelconque de y , il faudra que l'on ait $r = u^2 \varphi(y)$, c'est-à-dire, à cause de $y = \frac{u}{\xi}$, $r = u^2 \varphi\left(\frac{u}{\xi}\right)$.

Donc, en substituant cette valeur de r dans l'équation $p = \frac{r}{\xi} - \frac{u^2 d\xi}{\xi dx}$, on aura

$$p = u^2 \left[\frac{\varphi\left(\frac{u}{\xi}\right)}{\xi} - \frac{d\xi}{\xi dx} \right].$$

Telle est l'expression générale de la force accélératrice nécessaire pour le tautochronisme, où ξ peut être une fonction quelconque de x , et $\varphi\left(\frac{u}{\xi}\right)$ une fonction quelconque de $\frac{u}{\xi}$.

REMARQUE. — La solution précédente est fondée sur cette considération qu'en faisant $X = zA$ l'expression du temps $\int \frac{dx}{u}$ doit devenir une fonction de la seule variable z . Soit donc $\Pi(z)$ cette fonction; on aura en général

$$\int \frac{dx}{u} = \Pi(z) + c,$$

la constante c devant être telle que $\int \frac{dx}{u}$ soit nul lorsque $x = 0$. Or, puisque X est une fonction quelconque de x , supposons qu'elle devienne

égale à f quand $x = 0$; et l'on aura dans ce cas $z = \frac{f}{A}$; donc il faudra que

$$\Pi\left(\frac{f}{A}\right) + c = 0,$$

et par conséquent que

$$c = -\Pi\left(\frac{f}{A}\right),$$

de sorte qu'on aura

$$\int \frac{dx}{u} = \Pi(z) - \Pi\left(\frac{f}{A}\right);$$

d'où l'on voit que la valeur de $\int \frac{dx}{u}$ contiendra nécessairement la quantité A , à moins que f ne soit égal à zéro. Donc il faut, pour l'exactitude de la solution, que la fonction X soit telle qu'elle s'évanouisse lorsque $x = 0$; et comme $\xi = XX'$, il faudra aussi que la quantité ξ devienne nulle dans le même cas.

EXEMPLE. — Supposons

$$\varphi\left(\frac{u}{\xi}\right) = f + g \frac{\xi}{u} + h \frac{\xi^2}{u^2},$$

f, g, h étant des constantes quelconques, nous aurons

$$p = h\xi + gu + \left(\frac{f}{\xi} - \frac{d\xi}{\xi dx}\right)u^2.$$

Soit $\frac{f}{\xi} - \frac{d\xi}{\xi dx} = k$, en sorte que

$$p = h\xi + gu + ku^2,$$

et l'on trouvera par l'intégration

$$\xi = Ce^{-kx} + \frac{f}{k},$$

C étant une constante arbitraire qu'on déterminera par la condition que $\xi = 0$ lorsque $x = 0$ (Remarque précédente); de sorte qu'on aura

$$C = -\frac{f}{k}.$$

et par conséquent

$$\xi = f \frac{1 - e^{-kx}}{k}.$$

On voit par là que pour que le tautochronisme ait lieu dans un milieu dont la résistance serait en général $-gu - ku^2$, il faut que le mobile soit sollicité par une force proportionnelle à ξ , c'est-à-dire à $\frac{1 - e^{-kx}}{k}$, x étant l'espace à parcourir.

Si $k = 0$, c'est-à-dire si la résistance du milieu était simplement proportionnelle à la vitesse, on aurait (en supposant k infiniment petit) la force proportionnelle à x ; et il en serait de même si la résistance était tout à fait nulle. Ce qui s'accorde avec ce que l'on sait d'ailleurs.

Au reste, ces cas sont les seuls où l'on ait pu jusqu'ici déterminer les lois du tautochronisme; notre méthode donne, comme on voit, le moyen d'étendre cette recherche aussi loin qu'il est possible.

COROLLAIRE I. — C'est une chose digne de remarque que l'expression de la force sollicitatrice qu'on vient de trouver pour le cas de la résistance $gu + ku^2$ ne dépende en aucune manière du terme gu ; de sorte que la même courbe qui est tautochrone dans le vide, ou dans un milieu résistant comme le carré de la vitesse, doit l'être aussi dans un milieu dont la résistance serait proportionnelle à la vitesse, ou en partie au carré de la vitesse. Pour en trouver la raison, il n'y a qu'à examiner l'expression générale de p , et l'on verra que, comme la quantité $\varphi\left(\frac{u}{\xi}\right)$ exprime une fonction quelconque de $\frac{u}{\xi}$, on peut écrire $\varphi\left(\frac{u}{\xi}\right) + g \frac{\xi}{u}$ au lieu de $\varphi\left(\frac{u}{\xi}\right)$; ce qui donnera simplement dans la valeur de p le nouveau terme gu . D'où l'on peut conclure en général que toute courbe, qui est tautochrone dans une hypothèse quelconque de force et de résistance, l'est aussi en supposant la résistance augmentée d'une quantité proportionnelle à la vitesse.

COROLLAIRE II. — L'équation

$$pu du + p dx = 0$$

donne, en mettant pour p sa valeur $u^2 \left[\frac{\varphi\left(\frac{u}{\xi}\right)}{\xi} - \frac{d\xi}{\xi dx} \right]$, et faisant, comme ci-dessus, $\frac{u}{\xi} = y$,

$$\frac{dy}{y \varphi(y)} + \frac{dx}{\xi} = 0,$$

d'où l'on tirera la valeur de y en x , et par conséquent aussi celle de u , à cause que $u = \xi y$.

Soit

$$\int \frac{dy}{y \varphi(y)} = \Phi(y),$$

l'intégrale étant prise de manière qu'elle soit nulle lorsque $y = 0$, on aura, en substituant $\frac{dX}{X}$ au lieu de $\frac{dx}{\xi}$, et intégrant ensuite,

$$\Phi(y) + \log X = C,$$

C étant la valeur de X lorsque $y = 0$. Or, puisque $y = \frac{u}{\xi}$ et que u doit être égal à zéro au commencement du mouvement lorsque $x = a$ et par conséquent $X = A$, on aura $C = \log A$; donc

$$\Phi(y) = \log \frac{A}{X},$$

et faisant $X = zA$,

$$\Phi(y) = -\log z.$$

Dénotons par Ψ la fonction réciproque de Φ , c'est-à-dire une fonction telle que $\Psi(\Phi y) = y$, et l'on aura $y = \Psi(-\log z)$; donc $u = \xi \Psi(-\log z)$; donc

$$\frac{dx}{u} = \frac{dx}{\xi \Psi(-\log z)} = \frac{dX}{X \Psi(-\log z)} = \frac{dz}{z \Psi(-\log z)},$$

quantité qui doit être intégrée de manière qu'elle soit nulle lorsque $z = 0$. Or z est donnée en x par l'équation $z = \frac{X}{A}$; donc on connaîtra aussi la vitesse u et le temps $\int \frac{dx}{u}$ en x . Si l'on veut avoir le temps total

employé à décrire l'arc a , il faudra faire $x = a$ ou bien $z = 1$; et comme l'expression du temps est une fonction de z seul, il est clair que le temps total sera indépendant de la longueur de l'arc parcouru a .

COROLLAIRE III. — Soit t le temps employé à parcourir un arc quelconque $a - x$, pris du point où le corps commence à se mouvoir, en sorte que l'on ait

$$dt = -\frac{dx}{u},$$

et comme $u = \xi y$, on aura

$$dt = -\frac{dx}{\xi y},$$

et mettant au lieu de $\frac{dx}{\xi}$ sa valeur tirée de l'équation

$$\frac{dy}{y^2 \varphi(y)} + \frac{dx}{\xi} = 0,$$

il viendra

$$dt = \frac{dy}{y^2 \varphi(y)}.$$

Or, au commencement du mouvement, on a $x = a$ et $u = 0$, donc $y = 0$; et à la fin on a $x = 0$ et par conséquent aussi $\xi = 0$ (par la Remarque précédente), donc $y = \frac{u}{\xi} = \infty$. Ainsi, pour déterminer le mouvement du corps, il n'y a qu'à intégrer les équations

$$\frac{dy}{y^2 \varphi(y)} + \frac{dx}{\xi} = 0 \quad \text{et} \quad dt = \frac{dy}{y^2 \varphi(y)},$$

de manière que y soit nulle lorsque $t = 0$ et $x = a$; et l'on aura y en x et t en y ; ou bien, à cause de $y = \frac{u}{\xi}$, on aura u en x , et t en x et u . A l'égard du temps total, on le trouvera en faisant, dans l'expression de t , $y = \infty$.

COROLLAIRE IV. — Soit, comme dans l'exemple ci-dessus,

$$\varphi(y) = f + \frac{g}{y} + \frac{h}{y^2} \quad \text{et} \quad \xi = f \frac{1 - e^{kx}}{k},$$

en sorte que la résistance du milieu soit $gu + ku^2$, et la force sollicitatrice $hf \frac{1 - e^{kx}}{k}$, l'équation

$$\frac{dy}{y^2 \varphi(y)} + \frac{dx}{\xi} = 0$$

deviendra

$$\frac{dy}{fy + g + \frac{h}{y}} + \frac{k dx}{f(1 - e^{kx})} = 0,$$

ou bien

$$\frac{y dy}{h + gy + fy^2} + \frac{ke^{kx} dx}{f(e^{kx} - 1)} = 0,$$

dont l'intégrale, prise de manière que $y = 0$ lorsque $x = a$, est

$$\frac{1}{2f} \log \frac{h + gy + fy^2}{h} - \frac{g}{2f \sqrt{fh - \frac{1}{4}g^2}} \left(\arctan \frac{fy + \frac{1}{2}g}{\sqrt{fh - \frac{1}{4}g^2}} - \arctan \frac{\frac{1}{2}g}{\sqrt{fh - \frac{1}{4}g^2}} \right) + \frac{1}{f} \log \frac{e^{kx} - 1}{e^{ka} - 1} = 0,$$

c'est-à-dire

$$\frac{e^{kx} - 1}{e^{ka} - 1} \sqrt{1 + \frac{g}{h}y + \frac{f}{h}y^2} = e^{\frac{g}{\sqrt{fh - \frac{1}{4}g^2}} \arctan \frac{fy + \frac{1}{2}g}{\sqrt{fh - \frac{1}{4}g^2}}},$$

$$\frac{g}{e \sqrt{fh - \frac{1}{4}g^2}} \arctan \frac{\frac{1}{2}g}{\sqrt{fh - \frac{1}{4}g^2}},$$

d'où l'on tirera la valeur de y en x . Ensuite on aura

$$u = fy \frac{1 - e^{kx}}{k},$$

$$t = \int \frac{dy}{y^2 \varphi(y)} = \int \frac{dy}{h + gy + fy^2},$$

c'est-à-dire, en intégrant de manière que $t = 0$ lorsque $y = 0$,

$$t = \frac{1}{\sqrt{fh - \frac{1}{4}g^2}} \left(\arctan \frac{fy + \frac{1}{2}g}{\sqrt{fh - \frac{1}{4}g^2}} - \arctan \frac{\frac{1}{2}g}{\sqrt{fh - \frac{1}{4}g^2}} \right).$$

Faisant $\gamma = \infty$, on aura le temps total égal à

$$\frac{1}{\sqrt{fh - \frac{1}{4}g^2}} \left(\frac{\pi}{2} - \text{arc tang} \frac{\frac{1}{2}g}{\sqrt{fh - \frac{1}{4}g^2}} \right),$$

π étant l'angle de 180 degrés.

Soit $g = 0$, on aura

$$\frac{e^{4x} - 1}{e^{4x} + 1} \sqrt{1 + \frac{fy^2}{h}} = 1,$$

d'où

$$\sqrt{1 + \frac{fy^2}{h}} = \frac{e^{4x} - 1}{e^{4x} + 1}.$$

On aura de plus

$$t = \frac{1}{\sqrt{fh}} \text{arc tang} \frac{fy}{\sqrt{fh}}.$$

Or

$$\text{arc tang} \frac{fy}{\sqrt{fh}} = \text{arc cos} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{fy^2}{h}}},$$

donc

$$t = \frac{1}{\sqrt{fh}} \text{arc cos} \frac{e^{4x} - 1}{e^{4x} + 1},$$

et faisant $x = 0$, on aura pour le temps total

$$\frac{\pi}{2\sqrt{fh}}.$$

SCOLIE. — Si l'on voulait que le temps employé à parcourir l'espace a fût proportionnel à A^m , le Problème pourrait se résoudre de la même manière, en supposant $\int \frac{dx}{u} = ZA^m$ (Z étant une fonction quelconque de z), ce qui donnerait par la différentiation

$$\frac{d \int \frac{dx}{u}}{\int \frac{dx}{u}} = \frac{dZ}{Z} + \frac{m dA}{A},$$

c'est-à-dire, en substituant à la place de la différence de $\int \frac{dx}{u}$ sa valeur trouvée dans le Problème précédent,

$$\frac{AX' dz}{u} + \left(\frac{X'z}{Z} - A' \int \frac{Q dx}{u^2} \right) dA = \frac{dZ}{Z} + \frac{m dA}{A}.$$

Donc, comparant ensemble les termes de dA ,

$$\frac{X'z}{u} - A' \int \frac{Q dx}{u^2} = \frac{m}{A},$$

c'est-à-dire, en multipliant par $A \int \frac{dx}{u}$, et substituant $\frac{X}{A}$ à la place de z , ξ à la place de XX' et α à la place de AA' ,

$$\frac{\xi}{u} - \alpha \int \frac{Q dx}{u^2} = m \int \frac{dx}{u},$$

d'où, en différentiant, on aura

$$Q = \frac{u(d\xi - m dx) - \xi du}{z dx},$$

ou bien, à cause de $\frac{du}{dx} = -\frac{p}{u}$,

$$Q = \frac{u \left(\frac{d\xi}{dx} - m \right) + p \xi}{\alpha}.$$

Ainsi on trouvera que la quantité

$$\frac{u du + p dx}{u^2 \left(\frac{d\xi}{dx} - m \right) + p \xi}$$

doit être une différentielle complète; de sorte qu'en faisant

$$u^2 \left(\frac{d\xi}{dx} - m \right) + p \xi = r,$$

la question se réduira à rendre la quantité

$$\frac{\xi u du - u^2 (d\xi - m dx)}{\xi r}$$

une différentielle exacte.

Qu'on mette $\frac{dX}{X}$ à la place de $\frac{dx}{\xi}$, et qu'on divise le haut et le bas de la fraction par u^2 , elle se changera en celle-ci

$$\frac{\frac{du}{u} - \frac{d\xi}{\xi} + \frac{m dX}{X}}{\frac{r}{u^2}},$$

c'est-à-dire en

$$\frac{d \log \frac{u X^m}{\xi}}{\frac{r}{u^2}};$$

d'où l'on voit que $\frac{r}{u^2}$ doit être une fonction de $\log \frac{u X^m}{\xi}$, c'est-à-dire de $\frac{u X^m}{\xi}$; de sorte qu'on aura

$$r = u^2 \varphi \left(\frac{u X^m}{\xi} \right),$$

et par conséquent

$$p = u^2 \left[\varphi \left(\frac{u X^m}{\xi} \right) - \frac{d\xi}{\xi dx} + \frac{m}{\xi} \right].$$

A l'égard de la valeur de X , on la déterminera par le moyen de l'équation $\frac{dX}{X} = \frac{dx}{\xi}$, laquelle donne $X = e^{\int \frac{dx}{\xi}}$. Au reste, on prouvera encore ici, comme on a fait dans la Remarque précédente, que la valeur de ξ doit être nulle lorsque $x = 0$.

Soit

$$\varphi \left(\frac{u X^m}{\xi} \right) = f + \frac{h \xi}{u^2 X^m},$$

on aura

$$p = \frac{h \xi}{X^m} + u^2 \left(\frac{f+m}{\xi} - \frac{d\xi}{\xi dx} \right),$$

et faisant

$$\frac{f+m}{\xi} - \frac{d\xi}{\xi dx} = h,$$

on aura

$$\xi = \frac{f+m}{h} (1 - e^{-hx});$$

done

$$\frac{dX}{X} = \frac{dx}{\xi} = \frac{h e^{hx} dx}{(f+m)(e^{hx} - 1)},$$

d'où l'on tire

$$\log X = \frac{1}{f+m} \log \frac{e^{hx} - 1}{h},$$

et ensuite

$$X = \left(\frac{e^{hx} - 1}{h} \right)^{\frac{1}{f+m}}.$$

Donc, si l'on fait, pour abrégér,

$$\frac{m}{f+m} = n \quad \text{et} \quad h(f+m) = g,$$

on aura

$$p = g e^{-hx} \left(\frac{e^{hx} - 1}{h} \right)^{1-2n} + h u^2,$$

et le temps total employé à parcourir l'espace a sera proportionnel à $\left(\frac{e^{ha} - 1}{h} \right)^n$.

Si $k = 0$, alors $p = g x^{1-2n}$, et le temps total devient proportionnel à a^n .

APPENDICE (*).

En examinant la solution que nous venons de donner du Problème des tautochrones, il est aisé de voir qu'elle se réduit à faire en sorte que l'élément du temps dt soit de cette forme $Y dy$, Y dénotant une fonction quelconque de y , et y étant égal à $\frac{u}{\xi}$. En effet, puisque au commence-

(*) Lu à l'Académie le 30 avril 1767.

ment du mouvement on a $u = 0$, et à la fin $x = 0$, et par conséquent aussi $\xi = 0$ (hypothèse), il est clair que le temps total sera égal à l'intégrale de Ydy prise de manière qu'elle soit nulle lorsque $y = 0$ et qu'elle finisse lorsque $y = \infty$, et qu'ainsi il sera tout à fait indépendant de l'arc parcouru, comme la nature du Problème exige.

De là il s'ensuit que l'on peut rendre notre solution beaucoup plus générale en prenant pour y une fonction quelconque de u et de x , pourvu qu'elle soit nulle lorsque $u = 0$, et qu'elle soit infinie lorsque $x = 0$, conditions qui peuvent avoir lieu d'une infinité de manières.

Soit donc y une fonction quelconque de u et de x telle, que $y = 0$ quand $u = 0$, et $y = \infty$ quand $x = 0$, et soit $dy = Mdu + Ndx$; qu'on dénote par Y une fonction quelconque de y , et l'on aura en général, dans le cas du tautochronisme,

$$dt = Ydy,$$

c'est-à-dire, en mettant pour dt sa valeur $\frac{dx}{u}$, et pour dy , $Mdu + Ndx$,

$$\left(\frac{1}{u} - YN\right)dx - YMdu = 0.$$

Or l'équation $udu + pdx = 0$ donne $du = -\frac{pdx}{u}$; donc, faisant cette substitution, et divisant toute l'équation par dx , on aura

$$\frac{1}{u} - YN + \frac{YMp}{u} = 0,$$

d'où l'on tire

$$p = \frac{Nu}{M} - \frac{1}{MY}.$$

C'est là, ce me semble, la solution la plus simple et en même temps la plus générale qu'on puisse donner du Problème dont il s'agit.

MÉMOIRE

SUR

LE PASSAGE DE VÉNUS

DU 3 JUIN 1769.