



LETTRE XXX.

VICOMTE BROUNCKER A JOHN WALLIS.

Sir, les papiers que je vous adresse ci-joint m'ont été envoyés, depuis un jour, par le Dr Scarbrough. J'imagine, à les voir, que M. Frenicle a chez lui une grande Table de nombres (carrés, cubes, etc.) avec la décomposition en facteurs premiers de la somme de chacun d'eux et de ses parties aliquotes; ce qui lui rend aisées de pareilles solutions, presque à la simple inspection, en suivant d'ailleurs la méthode que vous avez dernièrement indiquée pour résoudre ces problèmes et qui est universellement applicable à tous ceux de même nature. Mes hommages à votre femme, et soyez bien assuré que je suis,

Sir, votre très fidèle ami et
humble serviteur,

BROUNCKER.

6/16 avril 1658.

LETTRE XXXI.

FRENICLE A KENELM DIGBY.

Voici, comme vous me l'avez demandé, très honoré Chevalier, quelques solutions du problème du clarissime savant Wallis; il n'y a pas là toutes celles qui se sont présentées à moi, car elles sont si nombreuses que je ne serais pas parvenu à les écrire. Pour plus de brièveté, j'avais jugé à propos de réduire le calcul à peu de nombres qui devaient me les fournir; mais de ce peu de nombres j'ai vu sortir tant de solutions si variées que j'ai été obligé d'y mettre une borne, car les premières en faisaient naître toujours de nouvelles, indéfiniment diversifiées; de la sorte, je n'ai pu, en aussi peu de temps, les ranger dans l'ordre que je m'étais proposé, ce que je ferai, avec l'aide de Dieu, au premier jour.

Voici quel était le problème : *Trouver deux carrés, tels que chacun*

d'eux, ajouté avec toutes ses parties aliquotes, fasse une même somme. Comme exemple étaient donnés les carrés 16 et 25, dont chacun, ajouté à ses parties aliquotes, fait 31. On en demande d'autres semblables.

Ainsi on ne demande qu'un couple d'autres carrés, ce qui ne présente évidemment aucune difficulté, si, pour ce problème, on admet les carrés multiples. Or Wallis n'aurait pas, pour lui, le droit de les refuser, puisque pour un certain problème de M. Fermat, relatif à un nombre, somme de deux cubes, à décomposer en deux autres cubes (comme 1729, somme des deux cubes 1 et 1728, peut être décomposé en deux autres cubes 729 et 1000); puisque, dis-je, pour la solution de ce problème très facile, il s'est contenté de fournir des multiples de nombres communiqués.

Voici donc une règle qui permettra de résoudre facilement le problème de M. Wallis. Qu'on multiplie les carrés 16 et 25 par un autre carré quelconque impair et non divisible par 5; on aura deux nouveaux carrés satisfaisant à la question. Ainsi les carrés des nombres 12 et 15, 28 et 35, 36 et 45, 44 et 55, 52 et 65, etc., forment des solutions. Qu'on ajoute, en effet, à ses parties aliquotes chacun des carrés 144 et 225, on a pour somme 403. Les carrés 784 et 1225 font, de même, 1767. Les carrés 1296 et 2025 feront, toujours chacun avec les parties aliquotes, la somme 3751; et ainsi des autres. Mais cette solution est indigne d'un mathématicien, et la question, entendue dans ce sens, est telle qu'elle n'aurait pas dû être proposée. Il faut donc croire que, dans son problème, M. Wallis a eu une autre intention, et qu'il s'attend à une autre solution, sans pouvoir consentir à celle-ci.

Supposons donc le problème proposé comme suit :

Trouver deux carrés premiers entre eux, tels que chacun d'eux, ajouté avec ses parties aliquotes, fasse une même somme.

Voici maintenant les côtés de carrés satisfaisant à la question.

Si, en effet, on ajoute à ses parties le carré du nombre 326, on a pour somme 187131; de même, le carré du nombre 407, ajouté à ses



parties, donne la même somme 187 131. Après les six premiers coupes, cette somme est donnée par ses facteurs.

[N. B. — Il a paru désirable, pour la commodité du lecteur, de résoudre en leurs facteurs les nombres composés donnés par Frenicle, et, en même temps, de faire disparaître quelques fautes; on pourra ainsi, plus aisément, se rendre compte de tout le procédé et en examiner l'application.]

Côtés des carrés.	Somme.	Côtés des carrés.	Somme.
346 (= 2.163)	187 131	146 311 (= 11.47.283)	24 126 447 513
407 (= 11.37)	(= 3.7 ² .19.67)	147 823 (= 13.83.137)	(= 3.7.19.37.61.73.367)
627 (= 3.11.19)	658 749	361 232 (= 2 ⁴ .107.211)	7 ² 13 ²
749 (= 7.107)	(= 3.7.13.19.127)	497 173 (= 19.137.191)	3, 31, 37, 49, 73, 127, 169
1510 (= 2.5.151)	4 980 801	111 498 (= 2 ³ .3.11.211)	7 ² 13 ²
1809 (= 3 ² .67)	(= 3.7 ² .31.1093)	183 169 (= 7.137.191)	3, 19, 31, 37, 49, 73, 169
13 066 (= 2.47.139)	307 464 339	343 952 (= 2 ⁴ .7.37.83)	3 ² 7 ² 19 ²
14 001 (= 3.13.359)	(= 3.7.13.37.61.499)	507 419 (= 11.163.283)	9, 49, 67, 73, 361, 367
10 686 (= 2.3.13.137)	314 858 271	724 152 (= 2 ³ .3.11.13.211)	3 ² 13 ²
17 351 (= 47.373)	(= 3.7 ² .13.37.61.73)	1193 941 (= 7.19.47.191)	7, 9, 19, 31, 37, 61, 127, 169
.....			

[suivaient ici 27 autres paires de carrés.]

On peut trouver davantage de couples de carrés, mais il vaut mieux passer à autre chose; car on peut obtenir la même somme en ajoutant à leurs parties, non seulement des carrés pris deux à deux, mais aussi des carrés pris trois à trois, quatre à quatre, cinq à cinq, six à six, etc. et d'ailleurs premiers entre eux. J'appelle *premiers entre eux* des carrés pris trois à trois, quatre à quatre, etc., quand aucun nombre

ne peut les diviser tous. Ainsi les carrés 9, 16, 225, 324 seront dits premiers entre eux, parce qu'il n'y a aucune mesure commune aux quatre, quoiqu'il y en ait trois qui aient 9 comme mesure commune.

Assemblages de trois carrés.

Côtés des carrés.	Somme.
243 828 (= 2 ³ .11.37.151)	133 151 753 133 (= 3 ² .7 ² .19.31.67.1093)
294 867 (= 3 ² .67.163)	
307 285 (= 5.11.37.151)	
Côtés des carrés.	Somme.
589 734 (= 2.3 ² .67.163)	34 [86 304 061 447] nombre inexact, auquel il faut substituer
614 570 (= 2.5.11.37.151)	
736 263 (= 3 ² .11.37.67)	932 062 271 931 (= 3 ² .7 ² .19.31.67.1093)

[suivaient 26 autres groupes de 3 carrés.]

Il me reste encore bien d'autres assemblages de trois carrés satisfaisant à la question et que j'ai bien trouvés, mais que le défaut de temps ne m'a pas permis de ranger de façon, très noble Seigneur, à vous les présenter; de même, pour les assemblages de quatre, cinq, six, etc., que vous recevrez, quand ils seront prêts, avec ceux de trois précités; cependant, pour vous donner au moins un ou deux exemples de ce que je vous promets, je mettrai ceux-ci en attendant les autres.

Assemblages de quatre carrés.

Côtés des carrés.	Somme.
(2 ² .7.107 =) 2996 ⁽¹⁾	20 421 219 = 3.7.13.19.31.127
(2 ² .3.11.19 =) 2508	[suivaient trois autres assemblages par quatre.]
(3.5.11.19 =) 3135	
(5.7.107 =) 3745	

Assemblages par cinq.

139 954 381 710 (= 2.3.5.11.13.19.83.137.151)
165 476 277 890 (= 2.5.7.11.47.107.151.283)
167 186 334 770 (= 2.5.7.13.83.107.137.151)
198 242 772 651 (= 3 ² .7.11.47.67.107.283)
200 291 443 443 (= 3 ² .7.13.67.83.107.137)
Somme 13.27.31.37.61.73.127.361.367.1093.2401

(1) Frenicle avait donné, par faute de copie, 2296.

Assemblages par six.

79 588 991 130 (= 2.3.5.11.19.29.47.67.139)
 82 718 076 012 (= 2².3.11.13.19.37.191.359)
 95 075 206 310 (= 2.5.7.29.47.67.107.139)
 98 813 140 244 (= 2².7.13.37.107.191.359)
 103 397 595 015 (= 3.5.11.13.19.37.191.359)
 123 516 425 305 (= 5.7.13.37.107.191.359)
 Somme..... 19.27.37.61.67.127.499.961.2197.2401

Voici d'autres assemblages de carrés par deux, trois, etc.

[suivaient ici de nombreux assemblages de carrés envoyés plus tard, à savoir : par deux, 6; par trois, 52; par quatre, 20; par cinq, 3; par six, 5; puis, par deux, 5; par trois, 5; par quatre, 7; par cinq, 3; par six, 6; par sept, 4; par huit, 1; par neuf, 1; puis, par cinq, 1; par six, 3; par sept, 2; par huit, 2; par neuf, 3; par dix, 2; par onze, 1; par douze, 2; par treize, 2; par quatorze, 1; par quinze, 1; par dix-neuf, 1. J'ai cru sans intérêt de les reproduire tous, pour ne pas remplir plusieurs feuilles de nombres; cependant, j'en ai relevé le compte, pour ne pas paraître vouloir faire tort à l'auteur.]

[Il s'est d'ailleurs, dans la Lettre XLIII, excusé sur la hâte de son travail de nombreuses fautes de calcul ou de plume, qui se sont glissées dans ses chiffres; cette excuse est d'autant plus valable qu'une partie de ces fautes peut être du fait du copiste. Remarquons toutefois que Frenicle s'est écarté de la règle qu'il nous avait proposée, à savoir que les carrés fussent premiers entre eux. Cela n'a pas lieu pour les siens; quand, par exemple, il propose un groupe de six carrés, il regarde comme suffisant qu'aucun même nombre ne divise tous les six, tandis qu'il n'y aura pas un seul couple de deux carrés premiers entre eux (ainsi qu'on le reconnaîtra immédiatement et comme lui-même l'avoue); c'est de la sorte qu'il a pu donner autant de groupes. En ce qui me concerne, dans mes solutions de la Lettre XXIX, pour composer les racines des carrés, je n'ai employé que les nombres premiers inférieurs à 100, jugeant inutile d'aller plus loin; et, dans ces limites, il n'y a pas d'autres combinaisons que celles que j'ai données. Toutes celles que Frenicle a données, ainsi que je l'ai vérifié,

comprennent au moins un facteur premier supérieur à 100 et pouvant aller jusqu'à près de 500 (comme si pour des nombres inférieurs la combinaison était impossible). C'est ainsi qu'il a pu fournir autant de solutions.]

LETTRE XXXII.

JOHN WALLIS A VICOMTE BROUNCKER.

Vous avez eu la bonté de m'envoyer et j'ai reçu la semaine dernière, très illustre Seigneur, les solutions données par Frenicle au problème que j'avais jadis proposé sur les deux carrés qui font la même somme par l'addition avec leurs parties aliquotes. Je vois par là que le très noble savant a non seulement résolu cette question, mais qu'il y a pris beaucoup plus d'intérêt que je n'avais fait moi-même.

Sa première solution est la même que ma première; car un carré impair non divisible par 5 est exactement la même chose qu'un carré qui soit à la fois premier avec 16 et avec 25.

Quant aux autres solutions, je crois qu'elles ont absolument la même origine que les miennes, qu'elles ont été trouvées par une méthode tout à fait semblable ou du moins à peine meilleure.

Si ces solutions sont si nombreuses, il ne faut guère s'en étonner, du moment où il a jugé l'affaire digne de ses peines. Car si je ne me trompe, et comme vous le pensez aussi, il doit avoir à sa disposition une Table suffisamment étendue donnant jusqu'à peut-être 500 ou même au delà les carrés, cubes (peut-être même d'autres puissances) des nombres premiers, avec la décomposition en facteurs de la somme de chacun et de ses parties aliquotes; de la sorte il est facile, de la manière que j'ai indiquée, d'obtenir un certain nombre de solutions. Qu'après en avoir trouvé suffisamment, une personne aussi sagace puisse, en les combinant, transformant et mêlant ensemble de diverses façons, en déduire beaucoup d'autres, on ne peut en douter, dès que l'on sait de combien de manières on peut transposer sept ou huit lettres ou changer les rangs d'autant de cloches. Quoi qu'il en soit, je



suis convaincu que la découverte de ce mystère, qui nous appartient, et d'où, avec ces problèmes, en découlent une infinité d'autres, ne sera pas moins agréable aux mathématiciens que ne le serait, sans l'indication de la méthode, l'énoncé de mille nombres de la sorte.

Au reste, je n'ai jamais pensé que Frenicle ne résoudrait pas cette question que j'avais proposée d'ailleurs à un autre que lui. Puisqu'il avait dès longtemps résolu celles de Fermat, il n'était pas douteux qu'il ne réussit aussi facilement sur la mienne, qui dépendait du même principe.

En tout cas, j'aurais préféré qu'il se fût au moins épargné la peine de former en nombres les racines des carrés par la multiplication successive des facteurs qu'il a évidemment trouvés tout d'abord; car il aurait été d'autant plus facile d'examiner, si on l'eût voulu, les nombres qu'il a donnés, ce qui ne peut maintenant se faire qu'en détruisant son travail; mais je ne m'embarrasserai pas de cet examen, qui n'est pas si important. Peut-être a-t-il craint que, s'il avait exposé la chose aussi simplement, j'en eusse conclu sa méthode qu'il croyait que j'ignorais.

D'autre part il lui a plu de changer la question que j'avais proposée, en introduisant la condition que les carrés à donner soient premiers entre eux. Il a voulu ainsi éviter qu'on eût la grande facilité de donner les multiples de 16 et 25, qui satisfont à la question, par un carré quelconque premier avec l'un et l'autre. Je ne regrette pas absolument cette condition, mais j'ai deux motifs pour ne pas la regarder comme tout à fait nécessaire. En premier lieu, la limitation dont il s'agit exclut plus de carrés qu'il ne faut, car il est clair que, même étant connus 16 et 25 comme satisfaisant à la question, il y a beaucoup d'autres carrés, même non premiers entre eux, dont la recherche n'est en rien facilitée par cette connaissance ou même par celle d'autres carrés premiers entre eux. Ainsi je le fais juge s'il est en rien plus facile de trouver $8 \times 3 \times 37$ et $2 \times 19 \times 29$ ou bien $3 \times 4 \times 11 \times 19 \times 37$ et $7 \times 8 \times 29 \times 67$ que j'ai donnés, quoiqu'ils ne soient pas premiers entre eux, que s'ils l'étaient. En second lieu,

quoique la chose soit facile pour Frenicle (en tant qu'il sait qu'un nombre formé de deux ou plusieurs nombres premiers entre eux, si on l'ajoute à ses parties aliquotes, donne une somme égale au produit de ces nombres premiers entre eux, augmentés chacun de ses parties aliquotes; ce qui est le principal mystère dans les questions de ce genre), celui qui ignore ce principe n'aura pas plus de facilité pour reconnaître, comme propres à la question, les équimultiples des nombres donnés plutôt que d'autres carrés premiers entre eux; au contraire, celui qui connaît le principe n'aura pas beaucoup plus de facilité pour trouver la méthode de recherche applicable aux autres carrés premiers entre eux.

Enfin il donne non seulement des assemblages par deux, mais par trois, quatre, cinq, etc. Mais le très noble savant sait très bien que, à part la peine du calcul, il n'y a là rien de nouveau par rapport à la question que j'ai proposée; les assemblages de trois, quatre, etc., voire même de cent, se trouvent en effet par la même méthode absolument que ceux de deux; et même, dans le petit nombre de ceux que j'ai indiqués, il trouvera trois carrés remplissant la condition dont il s'agit; savoir ceux de $3 \times 4 \times 11 \times 19 \times 37$, de $3 \times 5 \times 11 \times 19 \times 37$ et de $7 \times 8 \times 29 \times 67$, puisque chacun d'eux, ajouté à ses parties aliquotes, donne comme somme

$$3 \times 3 \times 7 \times 7 \times 13 \times 19 \times 31 \times 67 \times 127.$$

Il n'y aurait non plus rien de nouveau si ce que j'ai proposé pour les carrés l'eût été pour les cubes, bicarrés, etc.; si ce que j'ai proposé pour l'égalité des sommes l'eût été pour leur relation dans un rapport donné (possible). Dans des cas de ce genre, le calcul peut être plus long avant que le but soit atteint, mais les solutions dépendent toujours du même principe, et sont à chercher toujours par le même procédé; ce que sait parfaitement notre si sagace Correspondant. Cela peut au reste s'appliquer aux autres questions de ce genre en nombre infini.

Il me reste encore à vous dire que je viens précisément de recevoir



de Hollande une lettre que m'a écrite M. Schooten et que je crois devoir communiquer à V. S. Après l'avoir lue, je suis absolument dans la croyance que la méthode dont s'est servie M. Frenicle pour la solution de la troisième question de Fermat (celle du carré dont le produit par un nombre donné non carré soit inférieur d'une unité à un carré) ne vaut pas celles qui ont été données d'ici, au moins la seconde. Je vois en effet qu'il a hésité sur le donné non carré 109, ce qui est clair même d'après son traité imprimé, où il dit que le carré qui se rapporte à ce nombre lui a été communiqué par M. Fermat: je vois aussi que cette méthode montrée, semble-t-il, à M. Huygens, lui a paru tellement pénible qu'il a reculé devant l'application; la nôtre au contraire est si commode qu'en très peu de temps elle peut fournir des nombres très considérables. Mais de fait je n'ai pas encore vu cette méthode de Frenicle, qu'il a jugé à propos de taire dans son Traité imprimé, et je n'en puis parler que par conjectures; je ne veux donc faire aucune affirmation téméraire. Quant à la lettre de Schooten, s'il plait à V. S. qu'elle soit jointe aux nôtres lors de l'impression de celles-ci (ce qui me paraît intéressant et ce qu'il désire lui-même), je vous prie de me le faire savoir et m'empresserai d'accomplir, autant que possible, votre vœu, comme,

Très illustre Seigneur,

Votre très obéissant et très respectueux

JOHN WALLIS.

Oxford, 13/23 avril 1658.

LETTRE XXXIII.

FRANÇOIS SCHOOTEN A J. WALLIS.

Clarissime savant, l'exemplaire de la première partie de vos Œuvres mathématiques que vous m'avez destiné, en même temps qu'un autre pour Huygens, m'a été parfaitement remis par M. Thrommje; je vous en fais mes meilleurs remerciements, tandis que j'ai le chagrin de voir que mes *Exercitationes* ne vous ont pas été remises, quoique, au

moment où elles ont paru, j'en ai donné un exemplaire à l'imprimeur, qui devait l'envoyer à Londres avec d'autres et le faire de là parvenir à Oxford à votre adresse et en mon nom. Je suis très heureux d'apprendre qu'elles ne vous ont pas déplu, et que vous avez également apprécié ce que le très noble Huygens a ajouté à la fin sur les raisonnements dans le jeu de dés. Votre jugement à cet égard nous est, plus que mille autres, un clair garant que nous n'avons ni l'un ni l'autre mal employé nos efforts en essayant soit de rétablir soit de pousser plus avant les Mathématiques. Mais surtout je suis charmé du mutuel accord qu'on peut immédiatement remarquer entre vos écrits et les miens, comme en autres choses sur ce que nous avons dit l'un et l'autre des progressions et où l'on dirait que nous nous étions communiqué nos pensées à l'avance.

Vous me parlez des questions de Fermat proposées l'année dernière à tous les mathématiciens de l'Europe. Voici ce qui m'est arrivé à ce sujet. Ce fut le 26 janvier de l'année passée que le très illustre M. Guillaume Boreel, député auprès du Roi de France Très Chrétien par les Provinces-Unies, envoya de Paris aux professeurs de Mathématiques de l'Académie de Leyde une lettre qui renfermait deux questions numériques avec ce titre ⁽¹⁾ :

« Deux problèmes mathématiques proposés, comme s'ils étaient insolubles, aux mathématiciens de France, d'Angleterre, de Hollande et du reste de l'Europe, envoyés le 3 janvier 1657 par M. de Fermat, Conseiller du Roi au Parlement de Toulouse, à M. Claude Martin de Laurendière, Docteur Médecin, et reçus par celui-ci le 21 janvier. »

« PREMIER PROBLÈME. — Trouver un cube (voir page 311, lignes 21 à 25) propriété. »

« SECOND PROBLÈME. — On demande (voir page 311, lignes 26 à 27) un cube. »

Cette lettre fut reçue par M. Golius le 7 février, la veille du jour où

⁽¹⁾ Voir la Pièce 79 de la *Correspondance de Fermat*, T. II, p. 332.



il devait déposer les fonctions de Recteur Magnifique; il l'ouvrit en ma présence seulement le 11 du même mois. J'y fis alors la réponse suivante et aussitôt après l'avoir communiquée à M. Golius, je l'adressai le 17 février audit M. Boreel à Paris, avec une lettre de transmission et deux problèmes sur le même sujet que je proposais en retour à M. Fermat⁽¹⁾.

« Réponse aux questions proposées aux mathématiciens de toute l'Europe par M. de Fermat, Conseiller du Roi au Parlement de Toulouse. »

« Pour résoudre la première question, où il s'agit de trouver un nombre cube dont la somme avec les parties aliquotes fasse un carré, je cherche à partir de l'unité 4, 7, 10, 13 ou davantage de nombres en proportion continue (en augmentant successivement de 3 leur nombre), tels que leur somme fasse un carré; le dernier des termes proportionnels sera le cube demandé. Quant au second terme proportionnel, je prends successivement les différents nombres premiers, en commençant par les plus faibles. »

« Puisque les proportionnels

1. 2. 4. 8, 1. 3. 9. 27, 1. 5. 25. 125

donnent comme somme les nombres 15, 40, 156, qui ne sont pas carrés, ayant pris pour seconds termes de ces séries les nombres premiers 2, 3, 5, je prends maintenant pour second terme le nombre premier 7 et j'ai les proportionnels : 1. 7. 49. 343, dont la somme est 400, carré de côté 20. Je trouve ainsi que 343 est de tous le plus petit cube qui satisfasse à la question; c'est d'ailleurs celui qui a été donné par M. de Fermat. Prenant ensuite toujours quatre proportionnels différents, et employant successivement tous les nombres premiers de 2 à 97, je n'ai rencontré aucun autre carré que celui déjà indiqué; et j'ai reculé dès lors devant la poursuite de ces calculs, *ne pouvant*

⁽¹⁾ La Lettre qui suit se trouve également publiée (en latin) dans le Tome II des *Oeuvres complètes de Christiaan Huygens* (n° 377 de la Correspondance).

d'ailleurs reconnaître une voie plus abrégée pour parvenir sûrement au but ⁽¹⁾. »

» Si l'on prend de même sept proportionnels

1. 2. 4. 8. 16. 32. 64.,

1. 3. 9. 27. 81. 243. 729.,

etc.,

les sommes 127, 1093, etc. ne sont pas carrées; mais je n'ai pas eu le courage d'entreprendre de plus longues recherches sur 7 proportionnels et la fatigue des calculs m'a de même empêché de les tenter sur 10, 13, 16 ou plus de proportionnels. Mais je n'en ose pas moins juger que, quoique les cubes en question doivent être en nombre infini, à ce que je pense du moins, personne ne peut en trouver facilement au delà d'un certain nombre, comme 5 ou 6, eu égard à la grande distance qui les sépare. »

« M. de Fermat reconnaîtra d'ailleurs que le moyen de trouver ainsi ces nombres est infaillible, dès qu'il saura que, pour déterminer les proportionnels précités, je me sers des expressions analytiques a^2 , a^4 , a^8 , a^{12} , etc., ou s'il s'agit de nombres ayant 15, 27, 39, 48, 51, 63, 69 ou 75 etc. parties aliquotes, je me sers, en outre des notations précédentes, de celles-ci : a^2b^2 , a^4b^2 , a^8b^2 , a^8b^4 , $a^{12}b^2$, $a^2b^3c^3$ ou $a^{12}b^3$, a^4b^6 ou $a^{18}b^3$, etc., comme pouvant être utiles pour cette affaire, c'est-à-dire pour représenter les nombres cubes à trouver. Mais, comme ces expressions indiquent, pour trouver les nombres cherchés, des calculs encore plus fastidieux, je ne crois guère que cette voie puisse être heureusement tentée. Mais je n'ajouterai rien, car, en dehors des moyens indiqués, il n'en existe pas pour trouver certainement ces nombres, à moins que M. de Fermat n'ait peut-être imaginé, pour établir les égalités, quelques abrégés qui pourraient diminuer singulièrement l'embarras de cet examen; il ferait certes, en les communiquant, une chose qui me serait très agréable. »

⁽¹⁾ Les mots en italique sont indiqués comme à supprimer.



« De même pour résoudre la seconde question, où on demande un carré tel que sa somme avec ses parties aliquotes fasse un cube, je cherche à partir de l'unité 3, 5, 7, 9, 11, 13, etc. ou davantage (en augmentant toujours par 2) de nombres en proportion continue, tels que leur somme fasse un cube, et, pour second terme, j'essaye un nombre premier quelconque, comme il est indiqué par

$$1, a, a^2, 1, a, a^2, a^3, a^4, 1, a, a^2, a^3, a^4, a^5, a^6, \text{etc.} »$$

Si, en effet, cette somme est un cube, le dernier proportionnel sera le carré cherché. Ainsi je me sers de $a^2, a^3, a^6, a^8, a^{10}$, etc. pour trouver les nombres ayant 2, 4, 6, 8, 10 parties aliquotes, ou bien encore de $a^2 b^2$ pour ceux qui en ont 8, de $a^4 b^2$ pour 14 parties, $a^6 b^2$ pour 20, $a^4 b^4$ pour 24, $a^2 b^2 c^2$ ou $a^6 b^2$ pour 26 parties, etc. Mais, comme ces dernières expressions correspondent à des modes de recherches de plus en plus difficiles pour ces carrés, j'ai peine à croire qu'elles puissent servir heureusement pour parvenir au but proposé. »

« En montrant l'existence de tous ces modes, par lesquels il est évident que l'on peut certainement obtenir les nombres cherchés, pourvu qu'on ne recule pas devant le travail d'examiner successivement, comme j'ai dit ci-dessus, tous les nombres premiers en commençant par les plus petits, j'espère avoir satisfait pleinement au désir du clarissime Fermat. »

« Écrit à Leyde, le 17 février 1657, par moi, François van Schooten, professeur de Mathématiques à l'Académie de Leyde. »

Suivent ⁽¹⁾ deux problèmes du même genre, proposés en retour à M. de Fermat :

« PREMIER PROBLÈME. — Trouver deux cubes dont la somme fasse un cube ou, s'il ne peut les obtenir, montrer que le problème est impossible. »

« DEUXIÈME PROBLÈME. — Montrer si l'on peut, ou non, trouver d'autres nombres parfaits que ceux que fournit la méthode d'Euclide (IX, prop. dern.), c'est-à-dire la progression suivant la raison double. »

⁽¹⁾ Pièce 378 de la Correspondance de Huygens.

Voilà ce que j'ai répondu alors, et les questions que j'ai proposées à mon tour.

En traitant ces questions, je m'étais seulement proposé d'indiquer à leur auteur la façon dont elles devaient être résolues. Il sera facile à votre perspicacité de reconnaître que j'atteignais ce but, puisqu'on ne peut donner aucun nombre qui ne soit pas soumis à quelqu'une des conditions précitées (comme on peut le déduire de mes *Exercitationes*, section 3), ou ne puisse être trouvé par les modes indiqués. Quant aux nombres eux-mêmes, ils ne me paraissaient pas avoir tant de valeur que la méthode pour les trouver certainement ne dût suffire à M. de Fermat. C'est aussi ce que j'avais surtout en vue pour les deux problèmes ajoutés par moi, en sorte que, si les nombres que je demandais ne se rencontraient pas aisément, il suffit de montrer l'impossibilité du premier problème, et de prouver que le second ne peut être résolu par un moyen différent de celui d'Euclide. Mais à tout cela, rien que je sache ne m'a été répondu par M. Fermat, ou du moins aucune réponse ne m'est parvenue; je n'ai pas cru cependant devoir aucunement le presser à ce sujet, afin de ne pas sembler prétendre à une grande gloire pour la solution d'un problème qui n'a évidemment aucun usage, ni aucune utilité. Ainsi je ne sais même pas si M. de Fermat a reçu ou non ma réponse, ni quel jugement il a porté sur elle dans le cas où il l'aurait reçue.

J'avoue d'ailleurs qu'à cette époque il ne m'est venu à l'esprit aucun des abrégés qui auraient pu, comme je le croyais, servir à diminuer considérablement le travail; c'est pour cela que je disais à Fermat, qui, sans aucun doute, devait posséder ces abrégés avant tout autre, que, s'il en connaissait de généraux touchant cette matière, il ferait une chose très digne de reconnaissance s'il voulait bien nous les communiquer.

Après avoir ainsi résolu les questions de Fermat, j'ai cru devoir les communiquer au clarissime M. Hudde et lui proposer de les résoudre. Voici ce qu'il me répondit, le 23 février, d'Utrecht où il était alors :

« Quant aux questions proposées par M. Fermat et à la solution que



» vous en avez donnée, j'avoue que les problèmes ne me déplaisent
» pas, mais qu'il n'en est pas de même de la raison par laquelle vous
» vous efforcez de me persuader que je dois, moi aussi, m'efforcer
» d'en chercher la solution; à mon avis, ce qui est le plus nécessaire
» et utile doit passer avant ce qui l'est moins; si donc j'ai encore
» quelque loisir à consacrer à la Science, j'ai la confiance de pouvoir
» le dépenser sur des questions, non seulement beaucoup plus utiles,
» mais aussi beaucoup plus générales et plus intéressantes, et qui
» semblent promettre une gloire plus brillante au savant qui les étu-
» diera. Aussi je n'ai pu prendre sur moi de m'appliquer à la solution
» de ces problèmes; cependant, pour l'amour de vous seul, je me suis
» résolu, au détriment de tous mes autres travaux, à leur consacrer la
» journée d'hier pour vous faire part de ce que je parviendrais à dé-
» couvrir, pour l'abrègement du travail, et cela dans le cas où vous
» n'auriez pas encore envoyé votre réponse à Paris.

» Voici la règle que j'ai choisie entre beaucoup et que j'emploierais
» pour la solution de la première question, où il s'agit de trouver un
» nombre cube, tel qu'ajouté à toutes ses parties aliquotes, il fasse un
» carré. Qu'on prenne un carré (en commençant par les plus petits),
» tel que son double, moins l'unité, soit un nombre premier; que de
» ce dernier nombre on retranche 1, et qu'on multiplie le reste par le
» carré que l'on a pris, ou bien, ce qui revient au même, par la plus
» grande moitié de ce nombre premier. Si, en ajoutant 1 au produit,
» on a un carré, le nombre premier précité sera le côté du cube
» cherché.

» Par exemple :

Racine.	Carré.	Double carré moins 1.	Nombre premier moins l'unité	par	le carré ou la plus grande moitié du nombre premier	donne	qui plus 1	donne
2	4	7	6		4	24		25, carré; donc 7 est le côté du cube demandé.
3	9	17	16		9	144		
4	16	31	30		16	480		
5	25	»	»		»	»		
6	36	71	70		36	2520		
7	49	97	96		49	4704		
8	64	197	196		64	8604		
9	81	»	»		»	»		
10	100	199	198		100	19800		
11	121	241	240		121	29040		
12	144	»	»		»	»		
13	169	337	336		169	56784		
14	196	»	»		»	»		
15	225	449	448		225	100800		
16	256	»	»		»	»		
17	289	577	576		289	166464		
18	324	647	646		324	209304		
19	361	»	»		»	»		
20	400	»	»		»	»		
21	441	881	880		441	388030		
22	484	967	966		484	467544		
23	529	»	»		»	»		

» Les places vides dans ce Tableau sont celles qui ne correspondent
» pas à des nombres premiers, comme le demande la règle; mais, ce
» qui peut-être excitera votre étonnement, tous les nombres corres-
» pondant à ces places sont divisibles soit par 7, soit par 17. En tous
» cas, si j'ai bien calculé, il est certain par là qu'au-dessous du
» nombre cube de 1150, soit 1520 875 000, il n'y a qu'un seul cube,
» 343, qui satisfasse à la question, en ne comptant toutefois que ceux
» qui ont trois parties aliquotes, c'est-à-dire ceux auxquels la règle
» est appropriée.

» En effet, le premier nombre que nous trouverions ensuite est su-
» périeur à 1150, tandis que le côté 7 du cube 343, trouvé par le pre-



» mier carré, est précisément celui du cube donné par l'auteur comme
» satisfaisant au problème.

» Maintenant, quand je pèse vos paroles : *Prenant ensuite, etc.*
» (p. 556/7) ... *sûrement au but*, je n'ai aucun doute que le procédé
» que j'ai indiqué ne soit plus facile pour atteindre le résultat proposé.
» puisque je suis arrivé à 1151 en une heure et demie environ; et, si
» j'avais eu sous la main votre Catalogue des nombres premiers, je me
» serais épargné à peu près la moitié du travail. Aussi il vous sera
» facile, si vous le jugez intéressant, de poursuivre la recherche pour
» des nombres encore plus grands.

» Le calcul suivant indique comment j'ai trouvé cette règle :

» Soit a^3 le nombre cube à trouver, a étant un certain nombre premier.

» Les parties aliquotes de ce cube sont 1, a , a^2 , dont la somme
» avec a^3 fait $1 + a + a^2 + a^3$, qui doit être égale à un carré.

» Posons donc

$$1 + a + a^2 + a^3 = [(1 + a)b]^2;$$

» divisant, de part et d'autre, par $1 + a$:

$$1 + a^2 = (1 + a)b^2;$$

» d'où $\frac{1+a^2}{1+a} = b^2$ ou $a - 1 + \frac{2}{a+1} = b^2$.

» Mais, puisque a doit être un nombre premier, $\frac{2}{a+1}$ pourra être
» divisé par 2 (haut et bas). D'ailleurs cette fraction, ajoutée à l'en-
» tier $a - 1$, ne pourra, comme il le faut, donner un carré, si son dé-
» nominateur $\frac{a}{2} + \frac{1}{2}$ n'est pas lui-même un carré. On tire de là une
» grande simplification, puisque tout d'abord il suffit de faire que
» $\frac{a}{2} + \frac{1}{2}$ soit carré, c'est-à-dire que $a + 1 = 2\Box$ ou $a = 2\Box - 1$. C'est
» de là que j'en viens à dire dans ma règle : *Qu'on prenne un carré*
» *tel que son double moins l'unité soit un nombre premier*, et que je passe
» celui qui n'a pas cette propriété, comme ne pouvant servir pour le
» but proposé. Cet artifice permet de diminuer singulièrement le tra-

» vail, non seulement pour a^3 , mais encore pour les autres expres-
» sions. »

» Voilà, mon très cher ami, à quoi mon temps s'est dépensé, en
» sorte que, pour la solution de l'autre problème, je n'ai rien qui vaille
» la peine de vous être communiqué, non plus que pour les autres
» modes de chercher les cubes, soit par a^6 , a^9 , a^{12} , etc., soit par $a^2 b^3$,
» dans les cas où les parties aliquotes ne forment pas une progression,
» comme dans les précédents. »

Quand j'ai reçu cette Lettre, j'avais déjà envoyé la mienne à Paris :
mais j'apprenais qu'entre 1 et 1520875000 on ne peut trouver aucun
cube, sauf celui déjà connu 343, en se servant de la voie la plus
facile, celle de a^3 ; les autres voies par a^6 , a^9 , etc. ou $a^2 b^3$, $a^6 b^3$, etc.,
devant être regardées comme plus difficiles, nous avons pensé, moi et
M. Golius, qui s'était également proposé de résoudre ces problèmes,
devoir nous abstenir de recherches numériques ultérieures, jugeant
que nous pouvions mieux employer de bonnes heures aux Mathéma-
tiques.

Peu de temps après, à savoir le 9 mars, j'ai reçu de la Haye une
lettre du très noble Huygens, laquelle en renfermait une autre à moi
adressée de Paris par M. Mylon, juriconsulte, et en même temps une
page redemandée depuis par Huygens, qui m'écrivait là-dessus ⁽¹⁾ :

« Voici une lettre pour vous de notre ami Mylon, et aussi une page
» dont il a voulu que je prisse également connaissance; je vous
» prierai, en raison des questions de M. de Fermat, de me la ren-
» voyer à votre commodité. »

Voici ce que contenait cette page ⁽²⁾ :

« M. de Fermat a proposé à tous les arithméticiens par M. Digby,

» 1. Trouver un cube (voir page 311, lignes 21 à 25) la même
» propriété.

⁽¹⁾ Voir Correspondance de Huygens, n° 373.

⁽²⁾ Voir Correspondance de Huygens, n° 374.



» 2. On demande aussi (voir page 311, lignes 26 à 27) fasse
» un cube.

» M. de Frenicle a résolu ces questions et M. Martin, qui en a les
» solutions, les fait imprimer, à ce qu'on m'a dit.

» Depuis ⁽¹⁾ peu M. de Fermat a écrit ceci à M. de Frenicle.

[Suit la pièce LXXX de la *Correspondance de Fermat*, Tome II,
page 333.]

» A quoi M. de Frenicle a envoyé l'ordre qu'il tient pour résoudre
» ces questions, dont le calcul est extrêmement long.

En répondant là-dessus à Huygens et à Mylon, je priai M. Mylon de
présenter à M. Frenicle mes très respectueuses salutations et en même
temps j'envoyai la page 426 de mes *Exercitationes*, page que je venais
d'avoir imprimée et où l'on peut voir combien je lui portais d'égards,
à ce point que, pour ces questions auxquelles mes autres études ne
m'avaient pas permis de consacrer assez de temps, je témoignais que
je lui concédais volontiers la palme. Mylon répondit le 12 avril ⁽²⁾, et
le 21 du même mois ⁽³⁾, Huygens m'envoya de la Haye cette réponse,
où, entre autres choses, il disait :

« J'envoie à M. de Zuylechem les pensées de M. Frenicle touchant
» les propositions numériques de M. de Fermat et vos solutions, et le
» prie de vous en faire part. »

Voici quelles étaient ces pensées de M. Frenicle ⁽⁴⁾ :

« M. Frenicle trouve que c'est plus tôt fait d'examiner tous les
» cubes de suite pour voir ceux qui satisfont (qui est la question
» proposée par M. de Fermat) que de se servir de la méthode de
» M. Schooten. Néanmoins, pour s'en servir, il donne ce théorème :
» Il n'y a aucune puissance dont la racine soit un nombre premier

⁽¹⁾ Correspondance de Huygens, n° 371.

⁽²⁾ Voir Correspondance de Huygens, n° 382.

⁽³⁾ Voir Correspondance de Huygens, n° 386.

⁽⁴⁾ Correspondance de Huygens, n° 383.

» et l'exposant un nombre impairément pair, qui puisse avoir un
» quarré pour la somme de ses parties.

» Donc M. Schooten doit exclure ces nombres de sa méthode. Il en
» peut encore exclure beaucoup d'autres, savoir ceux où les propor-
» tionnelles sont en multitude impaire, car leur somme ne sera point
» un quarré et n'a pas besoin d'être examinée, si le nombre de la pro-
» portion n'est pareil à 79, 199 et autres dont il se trouve fort peu,
» se trouvant plusieurs milliers de nombres où il n'y en a que cinq
» ou six.

» Davantage le second nombre de la proportion continuelle doit
» être un de cette progression ⁽¹⁾

$$\begin{array}{ccccccc} 1. & 7. & 41. & 239. & 1393. & 8119. & 47321. \\ a. & b. & c. & d. & & & \end{array}$$

» et entre ceux-là il n'y aura que ceux qui auront ces deux pro-
» priétés :

» La première, que ce soit un nombre premier;

⁽¹⁾ En cette progression

$$\begin{array}{l} 6 \text{ fois } a - 1 = b, \\ 6b - a = c, \\ 6c - b = d, \\ \text{etc.} \end{array}$$

Les nombres de la précédente progression se trouvent encore autrement par la seule
addition, comme en celle qui suit, en laquelle il n'y aura que ceux de la colonne *h* qui
sont vis-à-vis des impairs de la colonne *g* qui soient utiles.

<i>g.</i>	<i>h.</i>	
1	1	La construction de cette Table est aisée par addition, car
2	3	
5	7	
12	17	
29	41	
70	99	1 + 1 font 2 en <i>g</i>
169	239	2 + 1 font 3 en <i>h</i>
408	577	3 + 2 font 5 en <i>g</i>
985	1393	5 + 2 font 7 en <i>h</i>
2378	3363	7 + 5 font 12 en <i>g</i>
5741	8119	12 + 5 font 17 en <i>h</i>
		etc.

(Note de Frenicle.)



» La seconde, qu'il soit moindre de l'unité qu'un double carré.
» Or, par les lettres finales et autres propriétés des doubles carrés,
» on peut voir aisément qu'il n'y en a aucun qui puisse satisfaire,
» outre 7, si le cube n'a plus de 60 lettres. Il se trouve par ces
» deux propriétés qu'il n'y a que deux nombres à examiner s'ils
» sont doubles carrés pour aller jusqu'à la racine de ce cube de
» 60 lettres. Et cet examen est d'ajouter 1 et prendre la racine
» carrée de la moitié, car les autres ou sont composés ou leurs
» finales montrent qu'ils ne sont pas doubles carrés moins 1.

» M. Frenicle propose ce problème :

» *Trouver un nombre triangulaire, dont le sextuple plus 1 soit nombre*
» *cube.*

» J'écris de l'autre part ce que j'ai pu tirer sur-le-champ de M. de
» Frenicle, touchant les propositions numériques de M. de Fermat;
» je vous supplie d'en faire part à M. Schooten, etc.

» Voici la solution de M. de Frenicle pour les nombres suivants :

Pour 13 c'est le carré de.....	649	Pour 33 c'est le carré de.....	<23>
» 19 » »	170	» 37 » »	73
» 17 » »	33	» 41 » »	2049
» 21 » »	55	» 43 » »	3482
» 23 » »	24	» 47 » »	48
» 29 » carré carré de...	99	» 53 » »	66249
» 31 » carré de.....	1520	» 59 » »	530

» Pour 61, c'est le carré de 1766319049, lequel carré, étant
» diminué de 1, donne le carré de 226153980. Or le carré qui
» satisfait à 61 a 19 ⁽¹⁾ lettres, quoiqu'il n'étoit besoin, pour le
» trouver par la méthode de M. Frenicle, que de 5418, 11418, 23718
» et 29718.

» Pour 109, il n'y en a point au-dessous de 25 lettres.

» Pour 127, c'est le carré de 4730624. »

Là-dessus, Huygens ajouta ce qui suit :

» Je vous laisse à examiner ce que Mylon m'a écrit des pensées

⁽¹⁾ Lisez 17.

» de M. Frenicle sur la question proposée par M. Fermat. Il paraît
» donner, pour la recherche des cubes dont il s'agit, certains abrégés
» importants, plus peut-être que vous n'aviez cru qu'on pût les
» trouver, mais il conviendrait de rechercher sur quelles raisons il
» s'appuie. Quant à l'autre question, proposée par Fermat, trouver
» un carré dont le produit par un nombre donné, étant augmenté
» de l'unité, etc., je l'avais résolue par une certaine règle indiquée
» pour cela. J'estime que c'est la même dont Frenicle s'est servi pour
» trouver les nombres que Mylon m'a envoyés, mais le travail était
» immense et tel que je n'aurais pas voulu l'entreprendre. »

Quelque temps après, savoir le 18 mai, Mylon m'écrivait la lettre
suivante ⁽¹⁾ :

« Monsieur, j'ai fait voir à M. de Frenicle votre petit papier imprimé
» dont il vous remercie. Un de ses amis veut ici faire imprimer le défi
» de M. de Fermat et la solution du dit S^r de Frenicle. Il y prétend
» joindre la vôtre avec les abrégés, exclusions et théorèmes de son
» ami. J'ai prié qu'on ne le fit pas sans savoir votre volonté. Prenez
» donc la peine de me mander, par la voie de M. de Zuylichem (puis-
» qu'il a cette bonté), si vous trouverez bon d'être nommé ou non, ou
» si vous ne désirez pas que votre solution soit imprimée. Je tâcherai
» de faire suivre en cela votre intention, étant, etc. »

Au-dessous se trouvait ce qui suit ⁽²⁾ :

« M. de Frenicle vous envoie ces théorèmes sur votre dernière ques-
» tion :

» 1. Pour les nombres pairs parfaits, il n'y en a aucun que ceux
» qui se trouvent par la méthode donnée par Euclide.

» 2. Pour les impairs, s'il y en a aucun, il doit être multiple d'un
» carré par un nombre premier, parement pair plus 1.

⁽¹⁾ Comparez Correspondance de Huygens, n° 388.

⁽²⁾ Comparez Correspondance de Huygens, n° 389.



» THÉORÈME. — Il n'y a aucun quarré qui, multiplié par 19, surpasse
» de l'unité un quarré multiplié par 7. »

Je répondis par la lettre suivante ⁽¹⁾ :

« Monsieur, puisque vous avez eu la bonté de me mander qu'un des
» amis de M. Frenicle veut faire imprimer le défi de M. de Fermat et
» la solution dudit S^r de Frenicle, et qu'il prétend d'y joindre aussi
» la mienne avec ses abrégés, exclusions et théorèmes que M. de Fre-
» nicle a inventés pour la raccourcir, je n'ai pas voulu manquer de
» vous en remercier et de vous écrire que tout ce qu'on fera me sera
» agréable, soit qu'on l'imprime ou non. Car, n'ayant employé guère
» de temps pour la chercher et remarquant qu'il eût fallu faire grande
» opération pour trouver les nombres requis, je me suis contenté d'y
» enseigner seulement les chemins par lesquels je voyois clairement
» que les mêmes nombres, s'il y en avoit plusieurs tels, se dussent
» trouver infailliblement, en cas qu'on voulût prendre la peine d'exa-
» miner généralement de suite tous les nombres qui y pourroient
» aucunement servir, sans penser particulièrement quels nombres en
» fussent exempts, de même comme a fait M. de Frenicle; de sorte
» que ma méthode n'étant que analytique, c'est-à-dire expliquant
» comment on peut par le moyen de l'Algèbre découvrir les chemins
» par lesquels ces nombres peuvent être cherchés, je serois d'avis
» que, si on la veut faire imprimer, l'on y ajoutât ces mots :

» *Moyen analytique de chercher ces nombres, trouvé par François de*
» *Schooten*, ou bien

» *Suiv le mode de recherche de ces nombres par l'Algèbre, comme l'a*
» *trouvé Fr. de Schooten.*

» Ce qui la feroit plus recommandable, seroit d'y ajouter de plus
» les abrégés, exclusions et théorèmes de M. de Frenicle, afin que
» cela ne semble pas être trouvé pour rien, mais y serve pour embel-
» lissement et plus grande perfection de cette matière. Je vous en

⁽¹⁾ Cette Lettre de Schooten est en français, sauf les mots imprimés en italique.

» laisse tout le pouvoir. Dans ma solution, je voudrois bien que ces
» mots en fussent effacés :

» *ne pouvant d'ailleurs reconnaître une voie plus abrégée pour par-*
» *venir sûrement au but,*

» et au lieu de ces mots

» *à moins que M. de Fermat n'ait peut-être imaginé pour établir les*
» *égalités quelques abrégés, etc.*

» j'aimerois plutôt ceux-ci :

» *à moins que M. de Fermat n'ait peut-être imaginé pour établir les éga-*
» *lités quelques abrégés généraux (qui en tout cas ne se sont pas pre-*
» *sentés à mon esprit).*

» En finissant, je demeure, etc. »

De Leyde, ce 29 de mai 1657.

Les choses en étaient là quand enfin parut à la lumière le Traité in-
titulé : *Solution de deux problèmes, etc.*, et qui est, je pense, le même
que celui dont vous m'avez parlé dans votre Lettre; le susdit ambassa-
deur prit soin de nous en faire expédier deux exemplaires, le 26 oc-
tobre, l'un pour moi, l'autre pour Huygens. Dès que je l'eus vu, je ne
pus que m'étonner de l'orgueil de l'auteur, qui, dans son avant-
propos, adressé à M. Digby, ne rougit pas de s'exalter en ces termes :

Très illustre Seigneur, voici que Paris donne cette solution de problèmes
que ni vos Anglais, ni les Belges n'ont aucunement pu trouver; la Gaulé
celtique est fière d'enlever la palme à la Narbonnaise, etc.

et autres semblables plus loin; comme si ce fût une affaire d'État que
de connaître ces nombres et que chacun dût attacher tant d'importa-
nce à cette solution qu'il ne sût où employer plus utilement son
temps. A voir le titre même, je n'ai pu ne pas ressentir une certaine
indignation en voyant l'auteur de ce Traité y amener une certaine *In-*
quisition sur ma solution; car je n'avais jamais attendu de France au-
cune *Inquisition*; et je croyais même l'auteur trop sensé pour faire ou
laisser faire, sur une chose aussi indifférente et de si faible impor-



tance, rien de pareil contre quelqu'un qui ne lui avait, que je sache, fait aucune offense; qui, au contraire, avait témoigné des plus grands égards pour lui.

Peu après que ce Traité fut parvenu dans mes mains, je reçus de la Haye une lettre de l'illustre Huygens, à qui, comme je l'ai dit plus haut, un autre exemplaire avait été envoyé de Paris. Dans cette lettre, il me disait entre autres choses ⁽¹⁾ :

« Les problèmes de Frenicle vous ont été, je n'en doute pas, en-
» voyés par l'auteur. En les voyant, je ne puis que m'étonner de la
» diversité des goûts des humains. »

Mais, quant à ce qu'y affirme l'auteur, que la plupart des mathématiciens tant d'Angleterre que de Hollande s'occupent de la solution de ces problèmes, en ce qui concerne les Hollandais, je ne connais guère personne qui ait jugé intéressant de les aborder; au contraire, les plus exercés, à qui je les avais proposés, n'ont semblé y reconnaître aucun usage ni aucun profit, et personne ne s'est trouvé parmi eux qui ait estimé assez la gloire à en retirer pour vouloir prendre la peine de rechercher la solution.

Vous me demandez, très honorable Monsieur, à quel point on s'est franchement comporté avec moi dans cette affaire; je crois que ce qui précède suffit pour vous le faire connaître. J'ai cru devoir vous tout exposer, avec plus de longueurs peut-être que n'en réclamait le sujet, surtout parce que j'ai compris à votre lettre que vous aviez l'intention de faire imprimer tant vos solutions que les lettres que vous avez reçues à cette occasion. J'estime que la mienne, ou au moins une partie, rentrera dans votre plan et dans votre narration. Si donc vous croyez devoir en imprimer quelque chose, vous ne le ferez certainement pas contre mon gré.

J'ai cru devoir communiquer à Huygens ce que vous avez remarqué sur la lune de Saturne et sur l'aspect de cette planète; il y pourra

(1) Le 23 novembre 1657 (Correspondance de Huygens, n° 431).

reconnaître votre soigneuse et excellente application sur cette matière, de laquelle il est lui-même, je crois, attentivement occupé pour le moment. Mais, pour ne pas vous retenir trop longtemps, je mets fin à cette lettre, en vous souhaitant tout bonheur et toute prospérité. Adieu,

Votre très affectueux et très respectueux,

FR. DE SCHOOTEN.

Leyde, le 18 mars 1658.
St. grég.

Je suis heureux que vos remarques sur le texte de Pappus, d'après les manuscrits grecs, correspondent exactement à mes conjectures. Si je les avais connues plus tôt, j'aurais pris soin de faire imprimer en même temps ce véritable sens de Pappus, ce qu'il faut maintenant réserver pour la prochaine édition, s'il y a lieu d'en donner une. Cependant je vous remercie à cette occasion et vous recommande de tout cœur au Dieu qui peut tout donner. Encore une fois adieu.

LETTRE XXXIV

(à laquelle étaient jointes les quatre suivantes).

VICOMTE BROUNCKER A SIR JOHN WALLIS.

Sir, étant pressé, je ne puis que vous adresser les lettres ci-jointes comme elles me sont arrivées, et vous dire qu'ayant résolu, dans le propre sens qu'il lui donne, cette proposition qu'il semblait estimer la plus difficile, je ne me regarde pas comme obligé en aucune façon d'essayer la solution de ces autres qu'il envoie, comme presumant que la précédente aurait dépassé mes forces. Autrement, je ne les regarde pas comme si difficiles, et je crois que si j'en avais le désir et le loisir, il pourrait aussi là-dessus recevoir pleine satisfaction de,

Sir, votre fidèle et humble serviteur,

BROUNCKER.

1/11 mai 1658.



Quant à ce qu'il dit concernant vous-même, je ne pense pas que cela mérite la moindre réplique. Le lecteur sera sans doute pleinement satisfait par ce que vous avez déjà dit.

LETTRE XXXV.

KENELM DIGBY A VICOMTE BROUNCKER.

Mylord, j'ai reçu il y a deux jours la lettre que votre Seigneurie a bien voulu m'écrire le 13 mars, et, en même temps, deux autres du docteur Wallis à moi, et une du même à votre Seigneurie. Je vous fais mes très humbles et très sincères remerciements pour la vôtre, que j'ai reçue avec un excès d'allégresse, de joie et de respect; en premier lieu, pour votre excessive civilité et bienveillance à mon égard; ensuite, pour votre noble et savante réponse à la requête de M. Frenicle. Maintenant, ni lui, ni M. Fermat n'auront plus à chicaner ni votre Seigneurie, ni le docteur Wallis; j'écris, à ce dernier, longuement (eu égard à la difficulté que j'éprouve maintenant pour écrire beaucoup), et je prends la liberté de vous demander de bien vouloir lui faire remettre ma lettre, que je laisse ouverte, pour que vous puissiez y jeter les yeux à votre fantaisie.

Mais surtout, Mylord, je vous félicite de tout cœur pour l'heureuse étoile qui a présidé à votre naissance, et qui, dans une qualité et un rang si élevés, vous a gratifié aussi d'une part si excellente d'intelligence que vous pouvez être justement envié par les plus éminents de ceux qui font leur tâche de l'étude et de la Science. Ma lettre ci-jointe pourra faire connaître à votre Seigneurie avec quel retard j'ai reçu la dernière lettre du docteur Wallis. Si vous voyez le D^r F., je vous prie de lui reprocher la précaution hors de propos qui lui a fait garder si longtemps cette lettre. Si je n'étais pas tout à fait épuisé (tant je suis débile maintenant) par ma lettre au D^r Wallis, votre Seigneurie ne serait pas si facilement délivrée à cette fois de l'embarras que je lui cause; mais la raison que je viens de dire m'empêche de poursuivre

plus longtemps, si ce n'est pour baiser humblement votre main et me dire,

Mylord, votre très humble et très obéissant serviteur,

KENELM DIGBY.

Paris, 4 mai 1658.

LETTRE XXXVI

(jointe à la précédente).

KENELM DIGBY A JOHN WALLIS.

Très digne et très honoré Monsieur, la lettre que vous m'avez fait la faveur de m'écrire le 26 décembre ne m'est parvenue que tout dernièrement, en même temps qu'une autre écrite, vers la même époque, par vous à mylord Brouncker; celui-ci semble les avoir remises au D^r F. pour me les envoyer, par ce motif que M. White n'était pas alors à Londres. Le docteur (comme toujours quand on se met à négliger) garda la lettre par devers lui jusqu'à ce que, plusieurs mois après, ayant été informé de la chose, je lui écrivis, le priant d'aller trouver Mylord et s'accuser devant lui de son oubli, pour me disculper moi-même, et en même temps de m'envoyer immédiatement la lettre.

Il me la fit, en effet, parvenir par le premier courrier, en me disant qu'il avait été voir Mylord pour me décharger de tout blâme de négligence ou de manque de respect. Je vous déclare, ainsi que je le fais à tout autre, quand l'occasion s'en présente, que j'admire singulièrement le grand fonds qui vous fournit (comme il ressort de votre réponse immédiate) une si étonnante abondance de matière que, dans l'espace d'une nuit, vous écrivez plus que n'aurait fait un autre en un mois entier. On admire justement saint Jérôme, pour avoir achevé en une nuit le Traité qu'il nous a laissé contre Jovinien; mais vos réponses numériques étaient sur tel sujet, demandaient telle méthode pour le traiter, qu'un effort beaucoup plus prolongé eût dû être attendu. On peut comparer cela à un fil qui est couramment et aisément tiré du lin qui le donne tout prêt; ce fil glisse et se tord par le facile travail de la simple rotation du rouet. Mais chaque trait de votre



plume demandait, dans cette occasion, une nouvelle taille de pierre en forme dans le bloc brut, pour assembler la voûte que vous bâtissiez; assemblage qui, pour la moindre partie, réclamait l'exactitude la plus stricte et la plus parfaite dans le tout et dans le détail. Là-dessus l'admiration est justement acquise à l'aisance avec laquelle vous avez accompli ce travail d'Hercule, en vous jouant vraiment. Quand je le considère sous ce rapport, je suis en vérité troublé d'avoir quelque peu contribué à vous en charger (quoique je n'aie été qu'un instrument passif); mais à le voir sous une autre lumière, à reconnaître ce qui en est en vérité, je veux dire combien peu il vous a coûté, quel progrès il a réalisé et quel honneur en rejaillira sur notre nation, j'avoue alors que je suis heureux de l'opposition qu'on vous a faite; non que j'approuve l'aigreur qui, parfois, accompagne les disputes, et spécialement en Mathématiques (où l'on ne doit considérer que la démonstration, les parties ne devant s'occuper que du seul sujet en question). Mais le genre et le style de ce pays leur fournit une excuse; on y est d'ordinaire dans les discussions très aigre ou plutôt méchant (à mon sens), de part et d'autre, et si vous n'aviez pas été un étranger, et, de fait, quelqu'un pour qui ils ont une grande estime, ils auraient encore été moins sans gêne à votre égard, car, à leur compte, tout ce qu'ils disent dans ce goût n'est qu'une ronde et habituelle familiarité, loin de toute injure ou offense. M. Fermat m'a envoyé, il y a quelque temps, une lettre où il revient sur quelques points de vos envois antérieurs; il s'en rapportait à ma discrétion pour vous communiquer ce qu'il écrivait.

Aussi longtemps qu'il m'a laissé le choix, je ne vous en ai point envoyé copie; mais maintenant, par le dernier courrier, il me demande de le faire; je vous adresse donc une transcription de cet écrit. Certainement vous avez la satisfaction d'avoir affaire en même temps aux deux plus grands hommes de France (de l'aveu de tous les plus éminents), et je ne doute pas que vos dernières lettres des 4 et 15 mars (que j'ai reçues précisément ce matin, en même temps qu'une de vous du même temps à Mylord Brouncker) ne vous assurent de leur part et de

celle de tout le monde une pleine et entière déférence. Quoique, depuis que j'ai reçu ces lettres, je n'aie eu que le temps de les parcourir rapidement, tandis que de tels morceaux ont besoin d'être examinés sérieusement et à loisir (spécialement pour un joueur aussi faible que moi dans ces parties), je vois assez la lumière qui y éclate pour la saluer comme un Soleil, non pas à son lever, mais à son midi en culmination, au plus haut point du zénith. J'ai la confiance que ces derniers écrits ne susciteront plus de chicanes contre eux; je vais tout aussitôt m'empreser de les envoyer à M. Fermat et à M. Frenicle, et je vous transmettrai de même immédiatement ce qu'ils m'en diront.

Votre précédente lettre, celle qui est restée si longtemps dans les mains du Docteur F., a été envoyée par le dernier courrier à M. Frenicle, qui est dans cette ville, mais que mon indisposition ne me permet pas d'aller voir moi-même. Il m'a répondu un mot par mon homme, me disant qu'il écrirait à cette occasion quelque chose que j'aurais aujourd'hui avant le départ de la poste pour Londres. Je vais garder mon paquet ouvert jusqu'au dernier moment, qui n'est pas bien éloigné, et si quelque papier me vient de M. Frenicle, je le comprendrai dans l'envoi.

Je vous fais donc mes très humbles et sincères remerciements pour la belle démonstration que vous avez bien voulu m'envoyer. En vérité, elle m'a infiniment plu et je suis sûr qu'elle plaira de même à tous ceux qui la verront. Je vous aurais demandé la permission de la rendre *publici juris* en la faisant imprimer, mais le post-scriptum de votre lettre du 15 mars me fait connaître que vous avez l'intention de publier ce qui s'est passé entre vous et ces Messieurs, par mon entremise; si vous le faites, j'espère et désire très vivement que cette excellente production de votre seul cerveau trouve là une place, qui sera certes plus belle et honorable si elle est accompagnée de plusieurs sœurs du même père et assistée d'un cortège venant des familles des deux plus riches seigneurs de cette nation en ce genre de trésors, que si elle se présentait toute seule sans compagnie ni entourage. Quant à ce que vous avez bien voulu me demander très civilement et très obligeam-



ment mon avis à l'occasion de la publication de ces lettres, je ne puis que vous remercier très humblement de votre égard par moi. Si j'avais imaginé qu'elles devaient survivre à leur lecture par vous, moi qui les écrivais, comme si j'avais été à converser avec vous de vive voix, j'y aurais certes marqué avec plus de soin et d'attention le respect que je professe pour vous.

Si ma santé et ma force me le permettaient, je vous entretiendrais de diverses particularités que je suis obligé de remettre à une autre fois, quoiqu'en vérité vous puissiez raisonnablement trouver cette lettre assez longue et fastidieuse pour avoir plutôt besoin de pardon et d'excuse; mais j'ai tant de plaisir à vous entretenir qu'il me coûte beaucoup d'en finir. Comme je viens seulement de me relever d'une maladie qui m'a retenu près d'un mois dans mon lit, je ne suis pas capable d'écrire plus longtemps; c'est d'ailleurs la première fois depuis que je suis levé, que j'emploie ma plume pour une affaire de quelque importance. En envoyant hier votre lettre à M. Fermat, j'ai été obligé d'employer la main de mes secrétaires. Je vous souhaite tout bonheur et, prenant respectueusement congé de vous, je demeure,

Digne Monsieur,

Votre très humble et très obéissant serviteur,

KENELM DIGBY.

Paris, 4 mai 1658.

LETTRE XXXVII

(renfermée, avec la suivante, dans la précédente).

FERMAT A KENELM DIGBY.

Toulouse, 7 avril 1658.

(Voir la *Correspondance de Fermat*, n° 91, Tome II, page 374.)

LETTRE XXVIII.

FRENICLE A KENELM DIGBY.

Je m'étais proposé, très illustre et très honoré Seigneur, de ne plus rien écrire à propos de ces disputes qui me sont fastidieuses et auxquelles je répugne grandement; cependant, cette fois encore, j'ai cru devoir vous adresser quelques remarques pour vous faire comprendre que le clarissime Wallis, dont je connaissais déjà la science, me fournit surtout un sujet d'étonnement, quand je vois qu'un homme aussi pénétrant a pu s'oublier assez lui-même pour donner des solutions telles que celles qu'on lit dans sa lettre du 21 novembre et qu'il soutient encore comme légitimes. Il n'a pas d'ailleurs à me reprocher de ne pas avoir d'estime pour lui ou pour ses œuvres; il en est tout autrement; mais si j'ai eu de lui une opinion autre que celle qu'il méritait, qu'il s'en accuse lui-même; car c'est bien lui qui avait été la cause de cette fausse appréciation, en présentant comme choses sérieuses de vraies plaisanteries, s'il m'est permis de le dire. Sans doute il n'avait pas voulu appliquer sérieusement son esprit sur ces matières; car, à voir ses dernières solutions et sa dernière lettre, je le reconnais comme très habile et très perspicace, quoique trop attaché à défendre les opinions qu'il a une fois émises; il ne réfléchit pas combien il est habituel aux hommes de se tromper et combien il est honnête et louable de reconnaître son erreur et de s'abstenir d'un entêtement hors de saison.

Qu'il n'estime pas non plus que j'aie prétendu triompher de lui ou lui faire quelque insulte; mais ma réponse à sa lettre était bien en rapport avec celle-ci; aussi suis-je prêt à lui donner satisfaction pour tout ce que renferment les deux épîtres dont il se plaint et à montrer qu'elles ne contiennent rien qui ne s'appuie sur des raisons qu'il faille admettre, rien qui ne réponde justement à sa lettre précitée du 21 novembre. Il n'a pas à m'objecter que j'ai dû avoir une fausse opinion de



lui, puisque je n'ai pu le juger autrement que par ses œuvres : « A leurs fruits vous les connaîtrez ». Et il n'y a pas de mathématicien qui ne juge que, du moment où je ne gardais pas un silence absolu, j'aie fait preuve à son égard de plus de courtoisie qu'il n'était en droit de s'y attendre. Et en vérité, si dans ces réponses il y a quelque chicane, elle a eu au moins cette utilité qu'elle a pu faire connaître en partie ce qu'il vaut vraiment, soit à moi, soit aux autres qui ont vu sa dernière lettre, car c'a été pour lui un aiguillon qui l'a forcé à examiner plus attentivement les questions et à s'en rendre maître. Il est clair en effet désormais qu'il possède la troisième de Fermat et la sienne : quant aux deux premières de Fermat, il reste un doute jusqu'à ce qu'il ait fourni, en dehors de l'unité, un autre cube et un autre carré qui, ajoutés à leurs parties, fassent l'un un carré, l'autre un cube, ou jusqu'à ce qu'au moins il résolve le problème posé pages 3 et 4 de l'*Inquisition* de Frenicle sur la solution de Schooten et trouve en nombres les trois cubes et le carré exprimés analytiquement.

Le clarissime Wallis doit aussi faire attention à ne pas prendre le silence de Fermat comme la reconnaissance qu'il a eu satisfaction et qu'il admet de pareilles solutions ; car il en est tout autrement. Ce silence vient de ce que Fermat le voit seulement attaché à ces solutions non acceptables et qu'il préfère le laisser dans cette fausse estime et dans la vaine joie qu'elles lui donnent plutôt que d'essayer en vain de le détourner d'elles.

Enfin, dans la dernière lettre du clarissime Wallis du 19 mars, il y a un point où il ne me paraît pas agir franchement, quand il soutient que de mes deux épîtres précitées la seconde contredit la première, puisque, dit-il, la seconde reçoit l'unité comme cube et comme carré, la première la rejette. La première en effet ne refuse nullement à l'unité le caractère de cube ou de carré qui lui est communément attribué ; mais, comme l'unité n'a pas de parties, on nie qu'elle puisse être présentée comme le cube ou le carré cherché, qui doit être ajouté à ses parties, qui doit donc en avoir. Si donc dans la première on dit que Wallis, en donnant l'unité, n'a pas donné un cube, il est plus

clair que le jour qu'il faut entendre, non pas que l'unité n'est pas un cube absolument parlant, mais bien qu'elle n'est pas un cube satisfaisant à la question.

En ce qui concerne ces solutions, qui sont tellement faciles qu'il suffise pour les trouver de multiplier par 2 ou 3 un nombre donné, je ne sais si, dans votre Angleterre, on a coutume de les admettre ; mais ici on ne le ferait pas, et s'il est vrai que le problème est imparfaitement proposé quand on peut y satisfaire de la sorte, contre la pensée de l'auteur, cependant nous ne croyons pas qu'il faille astreindre les mathématiciens à faire leurs propositions avec une précaution absolue, surtout quand elles viennent de savants comme l'est hors de doute le très docte Fermat et quand elles sont énoncées seulement à la hâte et pour faire plaisir ; c'est à celui qui donne la solution à la fournir juste et digne d'elle-même. Si quelqu'un proposait au contraire un pareil problème, ayant en vue une solution aussi simple, on prendrait cela pour une injure ; car le proposant paraîtrait tenir son correspondant pour tout à fait inhabile, à sembler regarder comme suffisant de lui proposer ce qu'on ne devrait pas même demander à un enfant.

Voilà, très illustre Seigneur, ce que j'ai cru devoir vous faire remarquer ; vous saurez par là ce que je pense maintenant du clarissime Wallis, comme vous savez que c'est malgré moi, sur votre invitation et forcé par vous (car pour moi vos désirs sont des ordres), que j'ai porté un jugement sur sa lettre, et que je serai d'ailleurs et toujours votre très attaché et tout dévoué. Adieu.

LETTRE XXXIX.

JOHN WALLIS A KENELM DIGBY.

La lettre que vous m'avez envoyée, très noble Seigneur, en date de Paris 4 mai, style nouveau, a été reçue par nous le 3 mai de notre style ; autant j'ai été heureux de cette rapidité, autant j'ai regretté le retard qu'a au contraire subi la lettre que je vous ai adressée. D'autre part,



quelque plaisir que devait nécessairement me faire la vôtre, surtout en me témoignant la bienveillance que vous m'accordez et l'honneur que vous me faites, je ne puis vous dissimuler que sur un ou deux points je n'aie été fâché, et surtout en apprenant le mauvais état de votre santé. Qui sait ce que vous valez pour le progrès des Sciences doit nécessairement s'inquiéter vivement de votre santé, car il n'ignore pas ce qui en dépend. Mais la divine Providence sera à remercier de vous avoir conservé sain et sauf pour l'avantage des Belles-Lettres dont vous serez encore l'honneur et l'ornement. Je regrette encore, en lisant les éloges que vous me prodiguez et que je dois à votre bonté, non à mon mérite, d'être incapable non seulement de m'en rendre digne, mais même de vous en remercier comme je le devrais. Car la facilité de votre style, la vivacité de votre esprit dans le rôle de la bienveillance sont de telle nature que je ferais preuve de toute imprudence en voulant lutter là-dessus avec vous, en essayant d'égaler mes expressions aux bontés dont vous me comblez. J'avoue donc à quel point je suis impuissant et je me prosterne vaincu, n'ayant rien à répondre pour témoigner la gratitude de mon cœur humblement dévoué; croyez bien qu'elle est au-dessus de tout ce que je peux dire, accordez à mon aveu la grâce qu'il implore et daignez me continuer la faveur que vous m'avez jusqu'ici accordée. Je vais rapidement achever ce qui me reste à dire.

Pour la lettre de M. Frenicle, incluse dans la vôtre, je me plais à en reconnaître l'amabilité, mais je n'ai guère à y répondre si ce n'est pour le remercier de l'opinion qu'il a désormais conçue et qu'il professe sur mon compte. J'admets avec joie l'excuse ou la défense qu'il présente pour ses lettres antérieures. Je ne disputerai pas pour le voir encore juger d'entêtement hors de saison ce que j'ai regardé comme une juste défense de moi-même; ni pour le voir douter encore si je puis répondre aux deux premières questions de Fermat; quand il aura pesé mes lettres des 4 et 15 mars, ce doute s'effacera. Enfin je n'examinerai plus si dans ses lettres précédentes il a, oui ou non, nié que l'unité fût un carré ou un cube. Tout cela ne vaut pas la peine de contredire ce

très noble Seigneur. Enfin notre question (de carrés qui, ajoutés à la somme de leurs parties aliquotes, fassent une même somme), que nous avions jadis proposée en passant à Fermat, je vois, par une lettre récemment reçue, que Frenicle l'a résolue et qu'il y a même attaché beaucoup plus d'importance que je ne l'aurais fait. Mais on devait bien attendre qu'il la résolut très facilement, puisque la solution dépend tout à fait des mêmes principes que celle des questions de Fermat qu'il avait déjà trouvée.

Je ne pense pas non plus devoir longuement répondre à la lettre de M. Fermat. Deux points suffisent. D'une part, il dit que j'aurais avancé, ou au moins que je n'aurais pas douté que mylord vicomte Brouncker ne puisse résoudre, pourvu qu'il veuille s'y essayer, ce problème du cube donné à partager en deux cubes rationnels. Maintenant il affirme que la proposition est impossible, et je me serais donc avancé à la légère et bien témérairement. Je répondrai à votre clarissime Correspondant qu'il ne cite pas exactement ce que j'ai avancé: car il passe sous silence ce que j'avais ajouté: *du moins en tant que la nature de la chose peut le permettre*. Si j'avais précisément fait cette addition, c'est que je soupçonnais déjà de prime-abord que la chose était impossible; mais, ne l'ayant pas examinée, je n'avais rien à affirmer. Je ne parlais donc de solution que suivant ce que permettait la nature de la question, c'est-à-dire l'exécution si la chose est possible, sinon, la reconnaissance de l'impossibilité. Au reste, je ne me trompais pas dans mes conjectures, puisque, bientôt après, le très honoré Lord me faisait entendre ce que dit maintenant Fermat. La lettre qu'il m'écrivit particulièrement porte, en effet:

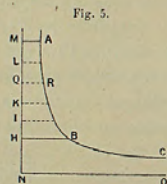
« Sir, cette nuit passée j'ai reçu votre Votre opinion concernant M. Fermat est effectivement la même que la mienne, spéciale-
» ment au sujet de son dernier papier.... Ses déterminations négatives
» sont, à mon avis, sa plus grande gloire, et c'est là où il se regarde
» lui-même comme singulier. Autrement il ne proposerait certaine-
» ment pas une chose impossible comme: *Partager un nombre cube*
» *donné en deux cubes rationnels*, ce qui ne se peut. Cette question ne



» doit pas être confondue avec l'autre, déjà résolue au moins de plusieurs manières, par M. Frenicle, comme vous savez....

Le second point concerne ce que M. Fermat dit des hyperboles; il pense que je n'ai pas foi à ses assertions sur le centre de gravité dans les hyperboles infinies. C'est tout le contraire; je n'avais aucun soupçon que votre très noble Correspondant n'eût pleinement dit la vérité en affirmant qu'il avait approfondi ce sujet depuis de longues années, au moins dans les hyperboles entières et peut-être aussi dans les semi-hyperboles, quoiqu'il n'en eût pas encore parlé. Je ne doute pas davantage qu'il ne puisse résoudre la question ci-dessous qu'il propose; je crois amplement qu'il a nombre d'excellents théorèmes, soit sur les hyperboles, soit sur les autres matières élevées de la Géométrie, soit même en Arithmétique, et il en a déjà donné assez de spécimens.

Voici la question qu'il propose : Étant donnée la vraie hyperbole ABC (fig. 5), ayant pour asymptotes NM, NO, à l'une de celles-ci, soit



NO, on mène des parallèles MA, HB. On propose de couper la figure AMHB (limitée par la ligne hyperbolique et les trois droites AM, MH, HB) au moyen d'une droite QR parallèle à HB et MA, en sorte que le segment RQHB soit au reste AMQR en raison donnée.

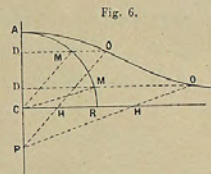
Voici ma solution : Si la raison est énonçable en vrais nombres entiers, soit comme de 3 à 2 ou de a à e ; entre les droites NH, HM, on cherchera autant de moyennes proportionnelles (du moins celle qui sera utile de ces moyennes) qu'il y a d'unités dans la somme des deux nombres moins 1 (par exemple, $4 = 3 + 2 - 1$ ou $a + e - 1$); soit de

ces moyennes NQ la 3^{me} (ou celle dénommée par a) à partir de NH, ou la 2^{me} (ou celle dénommée par e) à partir de NM. Je dis que la droite QR, menée parallèlement par Q à HB ou à MA, résout le problème. Si, au contraire, la raison n'est pas énonçable, on pourra obtenir une approximation au moyen des logarithmes, mais non pas une solution rigoureusement géométrique.

Quant au reste, ou j'en ai déjà suffisamment parlé auparavant, ou bien on peut le passer sous silence. Je n'ai, en effet, pas le loisir et je ne crois pas intéressant de descendre aux minuties de détail.

Cependant, pour donner un retour à votre très noble Correspondant, je désire lui proposer une question qui ressemble à la sienne ci-dessus et qui n'est peut-être pas moins élégante.

Étant donnée la conchoïde AO (fig. 6), dont A est le sommet, P le pôle, CRH la règle (coupant à angle droit AP au point C), on décrit de C comme centre le quart de cercle AR du côté OH.



On propose de décrire une figure de même genre que la figure conchoïde indéfinie OARH (entre la droite RH indéfinie, la conchoïde AO indéfinie et le quart de cercle AR), telle que cette nouvelle figure $\omega\alpha\pi\eta$ soit en raison donnée avec la proposée.

Où, s'il préfère un énoncé sous forme de théorème, pour ne pas sembler proposer des énigmes, je dirai :

Le rapport de la figure conchoïde indéfinie OARH à une autre quelconque $\omega\alpha\pi\eta$ du même genre est composé des rapports CA à xx et CP à $x\pi$ (les lettres $\alpha, x, \pi, p, \eta, \omega$ dénotant dans une figure les mêmes



points que dans l'autre A, C, P, R, H, O), quelle que soit d'ailleurs la variation du rapport des droites AC, CP.

Je lui communiquerai, s'il le désire, soit la recherche, soit la démonstration.

Il me reste encore à vous dire, très illustre Seigneur, que je comprends par votre lettre que les deux personnages avec lesquels nous avons eu affaire sont très considérables. Il se peut donc bien qu'un étranger comme moi, n'étant pas suffisamment au courant des choses et des dignités de ce pays, les ait traités un peu plus familièrement qu'il ne convenait à leur dignité, que j'aie agi d'ailleurs pour mon compte ou pour celui du très honoré Vicomte. Si j'ai fait quelque faute de ce genre, c'a été contre mon gré et j'espère que vos très nobles Correspondants, qui ont daigné d'eux-mêmes descendre avec moi dans l'arène, ne s'en prendront pas à quelqu'un plus habitué à la poussière des écoles qu'à celle des Cours. Que cette excuse me serve aussi à votre endroit, si j'ai pu me rendre coupable envers vous, car en tout je voudrais avoir observé les lois de la convenance, en tant que je suis,

Très illustre Seigneur,

Votre très humble et très obéissant serviteur,

JOHN WALLIS.

Oxford, 5/15 mai 1658.

LETTRE XL.

JOHN WALLIS A VICOMTE BROUCCER.

TRÈS ILLUSTRE LORD,

J'entends que vous avez reçu, en sûreté, ma dernière lettre à envoyer à Paris. Quant aux démonstrations que vous me demandez, les voici :

La solution du problème de Fermat (de l'espace hyperbolique à partager dans un rapport donné) se démontre comme suit (fig. 5, p. 582) :

Si l'on prend sur l'asymptote les droites NH, NI, NK, NQ, NL, NM

en proportion géométrique, que des points H, I, K, Q, L, M on mène des droites parallèles à l'autre asymptote, l'espace hyperbolique ABHM est divisé en cinq parties égales, comme l'a démontré Grégoire de Saint-Vincent, Livre X, je crois. Par suite, si l'on a d'un côté deux parties, de l'autre trois, il est clair que QR divise dans le rapport 2 à 3.

C. Q. F. D.

Quant à mon problème ou théorème de la figure en conque, en voici une brève explication (fig. 6, page 583).

Soit la conchoïde AOO, dont P est le pôle, A le sommet, CHH la règle; CAR le quart de cercle, DM une ordonnée quelconque du quart de cercle, DO, de la conchoïde; et le reste construit comme dans la figure. Posons, pour plus de facilité dans le calcul,

$$HO = CA = CR = CM = r, \quad CP = p, \quad CD = c \quad \text{et} \quad PD = p + c = l,$$

par conséquent

$$\overline{PD}^2 = l^2.$$

A cause des parallèles et des triangles semblables, on a

$$\frac{CD}{HO} = \frac{c}{r} = \frac{PC}{PH} = \frac{p}{\frac{pr}{c}} = \frac{PD}{PO} = \frac{l}{\frac{l}{r}},$$

d'où

$$\overline{PO}^2 = \frac{r^2 l^2}{c^2}.$$

D'ailleurs, par Euclide, I, 47,

$$\overline{CM}^2 - \overline{CD}^2 = \overline{DM}^2 = r^2 - c^2$$

et

$$\overline{DO}^2 = \overline{PO}^2 - \overline{PD}^2 = \frac{r^2 l^2}{c^2} - l^2 = \frac{r^2 l^2 - l^2 c^2}{c^2} = \frac{r^2 - c^2}{c^2} l^2.$$

Par conséquent,

$$DO = \frac{l}{c} \sqrt{r^2 - c^2} = \frac{c+p}{c} p \sqrt{r^2 - c^2} = \sqrt{r^2 - c^2} + \frac{\sqrt{r^2 - c^2}}{c} p.$$

Mais

$$DO = DM + MO, \quad DM = \sqrt{r^2 - c^2}, \quad \text{donc} \quad MO = \frac{\sqrt{r^2 - c^2}}{c} p.$$



Cela posé, si dans des conchoïdes différentes AO, Aω, la quantité CA reste toujours la même et que, par suite, r et c ne changent pas, tandis que PC ou p devient π , on aura toujours

$$\frac{MO}{M\omega} = \frac{\frac{\sqrt{r^2 - c^2}}{c} p}{\frac{\sqrt{r^2 - c^2}}{c} \pi} = \frac{p}{\pi}.$$

Par suite, la somme de toutes les MO à celle des Mω, c'est-à-dire, en raison de la hauteur commune de part et d'autre, la figure RMAO sera à la figure RMAω comme p à π .

Si maintenant PC ou p reste, au contraire, sans changement, tandis que CA, donc CD changent, soit r en ρ et c en α , on aura

$$\frac{MO}{M\omega} = \frac{\frac{\sqrt{r^2 - c^2}}{c} p}{\frac{\sqrt{\rho^2 - \alpha^2}}{\alpha} p} = \frac{\frac{\sqrt{r^2 - c^2}}{c}}{\frac{\sqrt{\rho^2 - \alpha^2}}{\alpha}} = \frac{r}{\rho}.$$

En effet, la somme des $\sqrt{r^2 - c^2}$ est à celle des $\sqrt{\rho^2 - \alpha^2}$, c'est-à-dire le quart de cercle est au quart de cercle, comme r^2 à ρ^2 , ou en raison doublée des rayons. De même, on a toujours $\frac{c}{\alpha} = \frac{r}{\rho}$. Par suite, la somme des $\frac{\sqrt{r^2 - c^2}}{c}$ est à celle des $\frac{\sqrt{\rho^2 - \alpha^2}}{\alpha}$, comme $\frac{r^2}{r}$ à $\frac{\rho^2}{\rho}$, c'est-à-dire comme r à ρ .

Si enfin il y a changement tant dans la quantité PC que dans la quantité CA, soit de p en π et de r en ρ , la somme des MO ou $\frac{\sqrt{r^2 - c^2}}{c} p$ sera à celles des $\mu\omega$ ou $\frac{\sqrt{\rho^2 - \alpha^2}}{\alpha} \pi$, c'est-à-dire la figure RMAO sera à la figure $\rho\mu\omega$ en raison composée de p à π et de r à ρ , c'est-à-dire dans le rapport $\frac{pr}{\pi\rho}$ ou du rectangle PCA au rectangle $\pi x\alpha$. C. Q. F. D.

Cela connu, il sera facile soit de partager dans un rapport donné la figure en conque RMAO, soit de construire une autre figure qui soit avec elle dans un rapport donné.

Enfin, vous me demandez la solution d'un troisième problème qui ne concerne pas les lettres de Fermat, et qu'un de mes amis, au commencement de février dernier, me donna par écrit un soir que je le rencontrai par hasard. J'ai récemment appris du même ami qu'elle a été imprimée sous le titre :

« Les professeurs de Mathématiques les plus en renom et les autres » célèbres mathématiciens d'Angleterre sont instamment priés par » Jean de Montfert de vouloir bien résoudre ce problème. »

» On donne, en nombres, dans une ellipse : les diamètres extrêmes, » la distance du centre à un point de l'axe transverse, et l'angle avec » l'axe d'une ligne qui le coupe en ce point. Trouver en nombres les » segments de cette ligne prolongée, s'il est besoin, et compris entre » l'axe transverse et l'ellipse.

» Étant données (fig. 7)

$$AC = 1,00000,$$

$$aC = 0,76604,$$

$$CB = 0,50000,$$

$$CBD = 70^\circ.$$

» on demande BD et BF. »

Je crus que cette question était de mon ami, car il n'avait donné aucune indication contraire, et je ne lui demandai pas de qui elle était. Je la résolus le lendemain matin un peu plus généralement, à peu près sous la forme qui suit, car je ne m'en souviens pas exactement. Je ne m'en suis plus occupé, la chose ne me paraissant offrir ni grande difficulté, ni grande importance; au reste, à ce que j'apprends, elle a reçu de divers diverses solutions, que, du reste, je n'avais pas encore vues.

On donne dans une ellipse les diamètres extrêmes (ou bien deux diamètres conjugués quelconques avec l'angle de leur inclinaison) AP, ap. L'un d'eux, soit AP, est rencontré en un point donné B (soit en dedans de l'ellipse, soit en dehors sur le diamètre prolongé) par une droite DF qui coupe l'ellipse aux points D et F. Trouver les droites BD, BF.



Des points D, F, au diamètre AP, menez les ordonnées DE, FE. Posons, pour la commodité du calcul,

$$AP = 2d, \quad ap = 2\delta, \quad DE \text{ ou } FE = a, \quad BC = b, \quad CE = c.$$

Par conséquent, $BE = |c - b|$, différence entre BC et CE. Nous supposons, en effet, que FE et DE tombent au-dessus de la droite ap , en sorte que si DE tombe au-dessous de aCp , il faut réputer CE comme une quantité négative, ou bien, ce qui revient au même, on aura $BE = c \mp b$, ce qui ne troublera pas le calcul.



Dans les triangles DBE, FBE, on donne encore les angles (l'angle en B étant donné et l'angle en E droit ou au moins donné), donc on donne le rapport des côtés, qui est celui des sinus des angles opposés : soit donc $\frac{BE}{DE(\text{ou } FE)} = \frac{n}{m}$. Comme $BE = |c - b|$ et DE (ou FE) = a ,

$$\frac{n}{m} = \frac{|c - b|}{a}, \quad a = \frac{|c - b|}{n} m, \quad a^2 = \frac{c^2 + b^2 - 2cb}{n^2} m^2.$$

Or, dans une ellipse, l'ordonnée DF ou FE est, ou bien moyenne proportionnelle entre les segments AE, EP du diamètre (si $aC = AC$), ou est, à cette moyenne proportionnelle, dans le rapport aC à AC . Donc, les carrés étant proportionnels aux carrés,

$$\frac{AC(=d)}{aC(=\delta)} = \frac{\sqrt{AE \cdot EP}}{DE(\text{ou } FE=a)} \quad \text{et} \quad \frac{d^2}{\delta^2} = \frac{AE \times EP}{a^2}.$$

Mais

$$AE \times EP = (\frac{1}{2}AP - CE) \times (\frac{1}{2}AP + CE) = (d - c) \times (d + c) = d^2 - c^2.$$

Donc

$$\frac{d^2}{\delta^2} = \frac{d^2 - c^2}{a^2}, \quad a^2 = \frac{d^2 - c^2}{\delta^2}.$$

Puis donc que

$$\frac{d^2 - c^2}{\delta^2} = a^2 = \frac{c^2 + b^2 - 2cb}{n^2} m^2,$$

on aura

$$d^2 \delta^2 n^2 - c^2 \delta^2 n^2 = c^2 d^2 m^2 + b^2 d^2 m^2 - 2cbd^2 m^2,$$

et

$$m^2 b^2 d^2 - n^2 d^2 \delta^2 = 2m^2 bd^2 c - m^2 d^2 c^2 - n^2 \delta^2 c^2,$$

et

$$\frac{m^2 b^2 d^2 - n^2 d^2 \delta^2}{m^2 d^2 + n^2 \delta^2} = \frac{2m^2 bd^2 c - m^2 d^2 c^2 - n^2 \delta^2 c^2}{m^2 d^2 + n^2 \delta^2} = c - c^2.$$

Résolvant l'équation :

$$\frac{m^2 bd^2 \pm nd\delta\sqrt{m^2 d^2 + n^2 \delta^2} - m^2 b^2}{m^2 d^2 + n^2 \delta^2} = c = CE.$$

Il faut remarquer que des quantités ainsi désignées avec ambiguïté par les signes $\pm$, la plus grande, correspondant au signe $+$, est la distance CE du point E le plus éloigné du centre; la plus petite, correspondant au signe $-$, est la distance CE du point E le plus proche, lequel est d'ailleurs situé au-dessus du centre vers B (comme le suppose la figure), si la quantité est positive, c'est-à-dire si

$$m^2 bd^2 > nd\delta\sqrt{m^2 d^2 + n^2 \delta^2} - m^2 b^2.$$

Il sera, au contraire, au-dessous du centre, si l'inégalité est renversée, et, par suite, la quantité négative, ou enfin si, par suite de l'égalité entre ces deux termes, ils se détruisent réciproquement. E sera au centre. Il peut même arriver, si B est pris en dehors de l'ellipse, que

$$m^2 b^2 > m^2 d^2 + n^2 \delta^2;$$

auquel cas l'équation est impossible, preuve qu'alors la droite rencontrant sous l'angle donné le diamètre prolongé au point donné B, est tout entière en dehors de l'ellipse, et que les points D et F n'existent pas. S'il y avait égalité, que $m^2 b^2$ se détruisait avec $m^2 d^2 + n^2 \delta^2$, la droite ainsi menée toucherait l'ellipse sans la couper, et les points D,



F coïncideraient. Tout cela est assez clair, pour qui connaît bien la nature des équations, et n'a pas besoin d'être plus longuement expliqué.

Avant désormais les points B donné, E trouvé, on aura BE côté du triangle DBE ou FBE et, par suite, connaissant aussi tous les angles, comme on l'a dit, le côté BD ou BF; on aura, en effet,

$$\frac{\sin D (\text{ou } F)}{\sin E} = \frac{BE}{BD (\text{ou } BF)}.$$

C. Q. D. F.

Voilà, très noble Lord, ce que, pour obéir à vos ordres, devait vous présenter

Le fidèle exécuteur de vos volontés,

JOHN WALLIS.

11/21 mai 1658.

LETTRE XLI.

KENELM DIGBY A M. TH. WHITE.

Très honoré Monsieur, je vous remercie humblement de votre lettre du 1^{er} avril, et je vous assure que j'ai été très charmé de ce que vous m'avez envoyé de la part de mylord Brouncker et du docteur Wallis. Ils se sont maintenant montrés effectivement tous deux de très grands personnages. J'ai rencontré quelques-uns des plus capables mathématiciens, depuis que j'ai reçu leurs lettres; je les leur ai montrées et ils ont maintenant pour eux la plus grande vénération. En fait, c'est M. Frenicle qui a été l'occasion de ces visites, car il parlait si hautement de ces lettres qu'il a donné le désir de les voir; car, quoiqu'il ne veuille rien abandonner de ce qu'il a écrit pour les discuter, maintenant il divulgue à tout le monde l'estime qu'il en fait, ce que je tiens pour la marque d'un noble esprit. Je laisse ouvert mon paquet pour le docteur Wallis; vous pourrez le lire et le donner ainsi à mylord Brouncker, que je prie, une fois qu'il en aura vu le contenu, de le sceller et de l'expédier au Docteur.

J'ai écrit par la dernière poste à sa Seigneurie; aussi ne veux-je pas le déranger encore par une lettre spéciale pour lui; mais je vous prie de lui présenter mes humbles respects. En vérité, ces dernières lettres de sa Seigneurie et du Docteur ont amené un grand changement dans les opinions sur leur compte. On les regarde maintenant comme les plus grands mathématiciens du temps, et laissez-moi vous le dire en particulier, je demandais à M. Frenicle, combien il était estimé dans la balance contre l'un ou l'autre; il répondit aussitôt qu'il ne pesait pas devant eux, qu'il n'était qu'un mauvais écolier en présence des plus grands maîtres du temps. Je ne veux pas vous retenir plus longtemps, mais je reste

Votre très humble et très affectionné serviteur,

KENELM DIGBY.

Paris, 8 mai 1658.

LETTRE XLII.

KENELM DIGBY A JOHN WALLIS.

Très honoré Monsieur, quoique je vous aie ennuyé d'une longue lettre (la quatrième de ce mois) par le dernier courrier, je ne puis encore m'empêcher de vous en adresser une nouvelle aussi tôt; c'est un effet de l'excès de contentement que m'ont procuré les vôtres des 4 et 15 mars; je suis encore obligé de vous le témoigner en un ou deux mots. En vérité, depuis bien longtemps, rien ne m'a fait autant de plaisir que ces lettres, tant ce que vous avez envoyé en même temps à mylord Brouncker, que ce que sa Seigneurie m'a également écrit, avec tant de science, de profondes et subtiles spéculations. Vous venez de faire paraître ici nos mathématiciens comme des Samsons, qui peuvent aisément rompre et mettre en pièces toutes les cordes et tous les pièges des Philistins qui vous assaillaient chaudement. Et les plus grands hommes d'ici sont maintenant forcés d'avouer que l'Angleterre ne le cède à aucune nation du monde en ces nobles spéculations. M. Frenicle dit maintenant bien haut et bien fort combien il rêve



vos profondes connaissances; il se plaint seulement que vous l'ayez si longtemps laissé s'enfoncer dans son erreur, en badinant si longuement avec lui comme s'il eût été un joueur trop faible pour vous, avant d'en venir avec lui à votre meilleur jeu et à l'emploi de vos forces.

Il m'a promis de m'envoyer aujourd'hui une lettre pour exprimer ces sentiments dans ce sens. Aussi vais-je garder mon paquet ouvert jusqu'à la dernière heure, si sa lettre n'arrive pas avant, afin que vous puissiez l'avoir par ce courrier. Car je crois qu'il ne vous déplaira pas de voir un aussi grand personnage en cette matière reconnaître la vérité comme il devait le faire et s'y soumettre franchement. J'ai aussi envoyé vos lettres à M. Fermat, et, si je reçois son sentiment sur elles, je vous le communiquerai.

Je baise vos mains et reste, digne Monsieur,

Votre très humble et très obéissant serviteur,

KENELM DIGBY.

Paris, 8 mai 1658.

LETTRE XLIII.

FRENICLE A KENELM DIGBY.

J'ai lu les dernières lettres du clarissime Wallis, en date des 4 et 15 mars, que vous m'avez communiquées, très illustre et très honoré Chevalier. Elles m'ont clairement fait connaître maintenant combien Wallis a fait de progrès dans les Sciences mathématiques; mais mon esprit demeure en suspens quand je me demande ce qui a induit un homme aussi savant à vouloir être aussi longtemps méconnu par nous. Quel motif pouvait-il avoir, quand c'est de son devoir et de sa profession de faire connaître la Science? Je l'avoue, j'y ai été quelque peu trompé; mais, si j'ai commis quelque faute, elle doit lui être imputée, non à moi. Tel il se montrait, tel il devait être jugé, et pourtant ce jugement défavorable, je ne le portais pas de mon plein gré, mais à regret. Aussi, tant qu'il y avait lieu de blâmer, je n'aurais pas voulu

que le blâme parût venir de moi, j'aurais désiré que mon nom fût caché et que ce que je disais parût un avis plutôt qu'un reproche; je ne voulais pas sembler m'être attaqué, même avec quelque raison, à une personne aussi illustre. Mais puisqu'il faut passer à l'approbation, ce n'est plus en secret et à contre-cœur, mais ouvertement et avec joie, que je paraîtrai, sous mon nom, à la face de tout le public savant. J'avais jugé Wallis endormi, j'ai plaisir à l'apprécier éveillé. J'avais déjà vu un Hercule, mais jouant avec des jeunes filles; aujourd'hui je le contemple triomphant des hydres et des monstres; d'abord poursuivant de frivoles et puérils amusements, il accomplit maintenant des labeurs effrayants et gigantesques. C'est au reste le clarissime Schooten que visaient spécialement les problèmes sur les cubes à ajouter à leurs parties; mais il a été prévenu par la sagacité de l'illustre savant, par la puissance de cet Atlas auquel convenait bien une pareille preuve de sa force, qui doit se consacrer à de tels exercices et non pas à des minuties.

Que la Hollande cède donc à l'Angleterre, Leyde à Oxford; si les Gaules Narbonnaise et Celtique pourraient disputer la palme au Kent et à l'Oxford de la Bretagne, si elles pourraient lutter à forces égales, ou même peut-être supérieures, ce n'est pas à moi à le décider; je laisse à d'autres à le juger. Jusqu'à présent le combat n'a pas été égal et les chances n'étaient pas les mêmes.

Je prie votre clarissime Correspondant de m'excuser si j'ai écrit à son sujet plus librement que je n'aurais dû. Vous savez ce qui m'y a poussé, vous savez que je ne voulais lancer contre lui aucune injure, aucune invective, que je ne voulais rien ternir de sa réputation; j'ai tenu cachées les lettres dont il se plaint, j'ai refusé de les montrer même à mes amis qui les demandaient; j'aurais désiré, s'il eût été possible, que Wallis seul les lût. Vous savez que je n'ai agi que pour le stimuler, afin de pouvoir éprouver son mérite, et certes il l'eût mieux fait paraître, s'il eût donné les solutions des cubes avant d'avoir reçu l'opuscule latin que je vous ai dédié, très noble Seigneur, s'il n'eût eu par suite aucun secours. Car il ne manque pas de gens qui



aurait des soupçons et qui peuvent dire que le clarissime Wallis s'est fatigué à la recherche de ces solutions, mais que son labeur n'ayant pas réussi, pour produire au moins quelque chose, il a donné comme solution l'unité au lieu des nombres cube et carré qui auraient résolu réellement les questions; il a été facile, ajoutent-ils, à un homme, d'ailleurs sagace, de marcher par un chemin déjà frayé, par une voie battue et aplanie; lorsqu'il a pu voir les parties cubiques des cubes donnés et considérer les parties de la somme des mêmes cubes décomposés, il lui a été aisé de fabriquer sa méthode. Si je répète ces imaginations, ce n'est pas que je veuille rien ôter ni dérober à la gloire due à Wallis, mais tout cela ne paraît pas absolument dépourvu de raison et on conjecture que mon opuscule ne lui a pas été sans utilité pour trouver sa méthode. Mais pour mes lettres, ce qui y a semblé méchant et dur pour Wallis a tourné à son avantage; car si mes piqures ne l'eussent aiguillonné, si j'avais approuvé sa solution, peut-être, content de celle-ci, n'aurait-il pas été plus loin. Que votre clarissime Correspondant ne continue donc pas à m'en vouloir, comme si mes attaques ne lui avaient pas été vraiment utiles, ainsi qu'à tous les savants avec lui; qu'il avoue au contraire que j'ai bien mérité de lui et des autres, en dissipant par la bourrasque de mes chicanes les nuages qui couvraient encore à nos yeux la brillante lumière que possède Oxford et celle, non moins éclatante, qui resplendit sur Londres. Que le clarissime Wallis ne croie pas davantage que je porte envie à la gloire de quelqu'un, ni que moi, qui vénère le mérite où qu'il soit, méprise quelque nation, la vôtre surtout; car j'ai visité autrefois votre Angleterre et j'ai toujours eu pour elle un penchant particulier. J'ai même eu grande joie de reconnaître enfin l'erreur que je partageais avec quelques autres, si j'ai été tant soit peu fâché que votre clarissime Correspondant ait voulu nous cacher si longtemps ses forces. Qu'il ne pense pas enfin que je prise tant ce que je fais; au contraire, j'en fais d'ordinaire bien peu d'estime, ce qui peut amener que je m'étonne si d'autres, qui s'occupent des mêmes questions, n'y parviennent pas, et que j'aie honte de les voir

parfois s'égarer bien loin. Mais assez là-dessus; venons à ce qui regarde la Science.

Je regrette que votre clarissime Correspondant nous présente encore l'unité comme une solution légitime et ne veuille pas faire attention que, comme je l'ai souvent répété, si l'unité n'a pas de parties, elle ne peut leur être ajoutée. L'unité, dit-il, est un cube qui, ajouté à ses parties aliquotes, c'est-à-dire à rien, redonne 1, qui est carré. Je réponds : Si l'unité peut être ajoutée à ses parties, celles-ci sont quelque chose; si elles ne sont rien, comment y aurait-il des parties? Je m'étonne comment un savant aussi perspicace s'en tient à une contradiction aussi évidente, surtout quand il s'agit de nombres, non pas d'irrationnels; s'il se refuse à admettre ce que je dis, qu'il reste en paix, je n'insisterai pas davantage. Laissons donc une vaine dispute sans importance et venons à la défense de ce que me reproche votre clarissime Correspondant. J'ai à montrer brièvement comment j'ai pu regarder l'unité comme cube et comme carré, même comme un nombre, mais comment en cela je n'ai pas exercé une tyrannie à l'égard de Wallis en lui refusant le droit d'en faire autant. Que l'unité soit universellement regardée comme un cube et comme un carré, je n'ai pas à le nier, mais il ne s'agit pas de cela, que je n'ai jamais contredit; mais qu'on la prenne pour un nombre, cela n'est pas accordé, et l'on conteste notamment qu'elle puisse recevoir l'appellation de nombre, alors qu'elle est solitaire, quoique, pour plus de brièveté, quand elle se trouve avec un ou plusieurs nombres, il soit préférable de dire nombres au pluriel et non, par circonlocution, tels nombres avec l'unité.

J'arrive désormais à ce qui regarde les parties aliquotes. Dans ce que j'ai avancé à ce propos, je voulais seulement indiquer que pour les nombres fractionnaires il n'y a pas proprement de parties aliquotes en nombre déterminé, qu'elles devraient être considérées comme en nombre infini ou indéfini et que par suite on n'a pas à les admettre. Si donc j'ai énuméré $\frac{1}{32}, \frac{1}{16}$ dans les parties aliquotes du nombre $\frac{343}{64}$,



je l'ai fait parce qu'elles ont avec leur entier une relation par nombre de même qualité que le nombre entier lui-même, puisque de part et d'autre on a un nombre joint à des fractions: j'ai donc pensé qu'elles ne devaient pas être écartées. Pour m'expliquer plus clairement, le nombre $\frac{343}{64} = 5\frac{23}{64}$; c'est donc le nombre 5 avec la fraction $\frac{23}{64}$; les relatifs des parties $\frac{1}{32}$, $\frac{1}{16}$, $\frac{1}{8}$ sont d'autre part $\frac{343}{2}$, $\frac{343}{4}$, $\frac{343}{8}$, ou bien $171\frac{1}{2}$, $85\frac{3}{4}$, $42\frac{7}{8}$, c'est-à-dire des nombres entiers avec des fractions ou de même nature que le nombre entier auquel se rapportent ces parties. Ces nombres doivent donc être admis comme parties à aussi bon droit que ceux donnés par le très noble, très savant, et très honoré par moi lord Vicomte Brouncker, ornement de la ville de Londres. Ces derniers ont en effet des relatifs qui diffèrent de leur nombre, savoir 343, 49, 7, nombres entiers alors que le proposé est entier avec une fraction. Si donc chacune des parties assignées par moi n'est pas vraiment une partie, mais fait plusieurs parties, le nombre aussi auquel elles se rapportent n'est pas une, mais plusieurs parties. D'un autre côté, je reconnais dans chaque nombre entier une propriété qui fait défaut aux parties aliquotes données par l'illustrissime Vicomte, c'est que chaque partie aliquote d'un nombre composé quelconque a comme relatif une autre des parties du même nombre ou du moins elle-même (si le nombre est carré), sauf toutefois l'unité qui a pour relatif non une partie, mais le nombre total. Or dans les parties indiquées dont il est question, la première $\frac{1}{64}$ correspond au nombre 343, la suivante $\frac{7}{64}$ au nombre 49, la dernière enfin au nombre 7. Ces relatifs, qui devraient être des parties du nombre, se trouvent plus grande que lui.

Je rends grâce au clarissime Wallis de m'avoir averti d'une faute due à la négligence du typographe: peut-être sans lui ne l'aurais-je jamais remarquée; vous savez au reste que ce lapsus ne m'est pas imputable et que dans l'original vous pouvez lire le nombre exact et tel que le clarissime Wallis l'a corrigé. Cependant je dois craindre d'avoir laissé échapper des fautes du même genre dans les solutions

de la question du très savant Wallis, car je les ai données à la hâte, au fur et à mesure que je les trouvais, et sans les revoir; je demande donc qu'on veuille bien m'excuser s'il y a lieu: je substituerai les nombres véritables à ceux qui seraient fautifs.

Puisque enfin le clarissime Wallis a trouvé comme moi, quoique un peu aidé pour les deux premiers, cinq cubes donnant un carré, je lui en envoie un sixième, le plus éloigné de tous, et qui est noté analytiquement page 4 de l'opuscule latin précité; j'y ajoute un second carré. Mais comme il est peut-être occupé à de graves spéculations, pour ne pas le retenir longtemps à leur examen, je les donnerai en parties avec les parties des sommes relatives à chaque cube ou carré partiel.

Racines des cubes partiels.	Parties des sommes des cubes partiels et de leurs parties.									
32	3	5	17	113	257					
241	4	11	113	113	257					
467	8	9	5	13	113	193				
243	32	5	17	41	193					
73	4	5	13	37	41					
31	64	13	37							
5	4	3	13							
7	16	25								

Racines des carrés partiels.	Parties des sommes des carrés partiels et de leurs parties.									
499	3	7	109							
263	49	13	109							
191	7	13	31							
4			31							
5			31							
67	3	49	31							
439	3		31	67						
37	3	7		67						
163	3	7	19	67						
11	7	19								
7	3	19								

Mais quelque plaisir que je prenne à abuser de votre patience, pour vous occuper si longtemps à cet entretien, très illustre Seigneur, pour



qui j'ai autant de respect que d'affection, je n'oserais certes pas le faire si je n'avais pas tant de confiance en votre bienveillance pour,

Très excellent Chevalier,

Votre très dévoué et très obéissant

B. FRENICLE DE BESSY.

LETTRE XLIV.

JOHN WALLIS A KENELM DIGBY.

Je vous rends très humbles grâces, illustrissime Seigneur, pour votre lettre du 8 mai, que j'ai reçue avec celle de Frenicle y incluse. Si je ne puis revendiquer comme m'étant dues les louanges dont vous m'accablez (car qui peut les mériter pour la solution de quelques problèmes d'Arithmétique ou de Géométrie?), je ne puis estimer peu de chose de recevoir de vous de tels éloges spontanés. Qu'ils viennent d'une appréciation dont chez de telles personnes le poids est toujours considérable, qu'ils ne soient dus qu'à l'affection, on doit également priser soit l'estime, soit l'amour des grands hommes, et si je puis du moins être assuré de l'une ou de l'autre, je dois le reconnaître avec gratitude. En tout cas je suis heureux, illustrissime Chevalier, d'avoir heureusement répondu, soit à vos désirs, soit aux questions de vos clarissimes Correspondants, et s'il reste encore quelque point où ils ne croient pas avoir encore entière satisfaction, comme j'ai résolu leurs principales propositions, et donné les méthodes de solution (que d'ailleurs le temps me manque), je ne crois pas que le reste vaille la peine de nous embarrasser d'escarmouches sans fin. Je ne doute pas en effet qu'ils ne pensent bien, au vu de nos solutions, que nous pouvons également résoudre le reste, pourvu que nous ayons le désir et le loisir de nous en occuper; et je ne crois pas non plus que vos très nobles Correspondants exigent que nous le fassions. Car ils ont négligé toutes nos questions, sauf celle des deux carrés qui,

ajoutés à leurs parties aliquotes, fassent la même somme, point sur lequel j'ai eu ample satisfaction; ils ne doivent donc pas se fâcher si je ne répons pas à quelques-unes de leurs demandes.

Cependant, pour ne pas paraître tergiverser, voici ce que je dirai à la hâte sur les deux questions qui restent dans la dernière lettre de Fermat.

En premier lieu, il demande deux cubes rationnels faisant la même somme que les deux donnés 1 et 8. Je répons que les cubes du nombre positif $\frac{20}{7}$ et du négatif $\frac{17}{7}$ donnent la même somme que 1 et 8, car

$$\frac{8000}{343} - \frac{4913}{343} = \frac{3087}{343} = 9.$$

Le même moyen qui m'a donné un cube positif et un négatif ou, ce qui revient au même, la différence de deux positifs égale à la somme des deux cubes donnés, ce même moyen fournira aussi deux positifs; mais le couple ci-dessus s'est présenté d'abord. Certes, votre très savant Correspondant ne peut estimer plus difficile de trouver deux cubes rationnels qui fassent une somme donnée (possible) que deux qui fassent une différence donnée (possible), quoique le calcul puisse être plus long soit d'une façon soit de l'autre. Au reste, dans le cas proposé, il ne s'agit que de trouver deux cubes dont la somme fasse neuf fois un cube; en prenant une Table de cubes et en employant des abrégés qui se présentent d'eux-mêmes à un homme exercé, et analogues à ceux que nous avons déjà mis en œuvre pour le troisième problème de Fermat, il n'y a pas une grande difficulté pour qui veut entreprendre le calcul, car ces cubes, divisés par le troisième, donneront pour somme le nombre $9 = 8 + 1$. Telle est la méthode à employer pour toute somme ou différence possible de cubes à chercher.

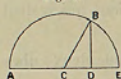
En second lieu, il propose de démontrer ce théorème : *Il n'y a en nombres aucun triangle rectangle dont l'aire soit un nombre carré.* Voici comment je le prouve :

Dans la figure ci-contre (fig. 8), dont le tracé est immédiat, les côtés



du triangle rectangle BCD ne peuvent être énonçables en nombres, si AD et DE ne sont pas entre eux comme des nombres plans semblables (autrement leur produit ne sera pas un nombre carré, et la racine BD

Fig. 8.



ne sera pas énonçable) ou comme des nombres carrés. Soient les nombres $2a^2$, $2e^2$. Dès lors CB, CD, BD seront proportionnels à $a^2 + e^2$, $a^2 - e^2$, $2ae$, et CD, $\frac{1}{2}$ BD le seront à $a^2 - e^2$, ae . Dès lors, comme la différence de deux carrés et leur moyen proportionnel ne peuvent être des plans semblables, leur produit ou l'aire du triangle ne peut être un carré. c. q. f. d.

Au reste, je n'ai rien appris du sentiment de Fermat sur nombre de nos lettres, car pour toutes celles qui ont suivi la date du 5 novembre, le silence est complet.

Quant à votre dernière lettre et à celle de Frenicle, je n'ai qu'à vous remercier pour mettre enfin un terme à ces discussions et aussi à l'ennui qu'elles vous ont occasionné hors toute mesure et dont je demande pardon pour,

Très illustre Chevalier,

Votre très humble, très obéissant
et dévoué serviteur,

JOHN WALLIS.

Oxford, 20/30 juin 1658.

APPENDICE AUX LETTRES PRÉCÉDENTES ⁽¹⁾.

LETTRE XLV (47).

JOHN WALLIS A VICOMTE BROUNCKER.

Très illustre Lord, les lettres qui précèdent étaient déjà imprimées et commençaient à être distribuées quand j'ai reçu aujourd'hui, par votre intermédiaire, une lettre de l'illustissime chevalier Digby, datée du 19 juin, qui en renfermait une autre de M. de Fermat. Celle du 25 mai dont il parle doit être perdue avec ce qu'elle pouvait renfermer, ou du moins rien ne m'est parvenu. Mais pour celles que je viens de recevoir, en raison de plusieurs propositions de Fermat, élégantes et dignes de lui, je les ai aussitôt envoyées à l'imprimerie, pour les joindre comme appendice aux autres, au moins dans les exemplaires qui ne sont pas encore parus. Ainsi le public pourra connaître des spécimens d'un tel génie, bien dignes d'un homme aussi supérieur, et ce sera une raison pour forcer cet illustre savant de mettre au jour ce qu'il garde jusqu'à présent pour lui. Il est bien établi que dans ces matières il est au premier rang, qu'il s'est particulièrement occupé de questions sur les nombres généralement négligées jusqu'à présent, qu'il a fait aussi en Géométrie des recherches d'une admirable subtilité; on ne peut donc permettre qu'il garde pour lui et les siens tout ce trésor qui serait d'un si grand prix pour l'univers savant. Je suis sûr que là-dessus votre Seigneurie est entièrement de mon avis, comme elle le sera pour les remerciements à lui faire en raison de l'affabilité qu'il nous témoigne et de l'éloge dont il nous honore, éloge que nous avons plaisir à lui retourner. Mais il faut ou ne pas répondre à sa

(1) Dans la seconde édition du *Commercium*, la distinction comme appendice a été supprimée, et les lettres suivantes sont imprimées dans l'ordre XLVI, XLVII, XLV; leur nouveau numérotage est indiqué entre parenthèses et en chiffres modernes.



lettre ou différer de le faire, puisque nous avons eu à peine le temps de la lire avant de l'envoyer à l'imprimerie, pour suivre le reste déjà terminé. D'ailleurs ce qu'il a déjà fait lui-même, il n'est pas nécessaire que nous le fassions à notre tour; là où il peut être arrêté, si notre aide pouvait lui être utile, nous ne la refuserons pas. Après vous avoir écrit à la hâte, il me reste à me dire,

Très illustre Lord,

Votre très respectueux et très obéissant

JOHN WALLIS.

Oxford, 3/13 juillet 1658.

LETTRE XLVI (45).

KENELM DIGBY A JOHN WALLIS.

Noble Sir, j'ai dernièrement reçu de M. Fermat le papier ci-inclus avec prière de lui de l'envoyer à Mylord Brouncker et à vous-même. J'espère que vous aurez reçu mes lettres des 8 et 25 mai. Mais le principal objet de celle-ci sera de prendre congé de vous pour plusieurs mois; car je vais entreprendre un long voyage qui me prendra au moins tout cet été. Si je retourne à Paris, je vous en informerai en vous présentant mes humbles respects. En même temps je cesse de vous importuner et je reste,

Noble Sir,

Votre très humble et très obéissant serviteur,
que vous honorez grandement,

KENELM DIGBY.

Paris, 19 juin 1658.

LETTRE XLVII (46)

(jointe à la précédente).

FERMAT A KENELM DIGBY.

(Voir la *Correspondance de Fermat*, n° 96, Tome II, page 402; Tome III, page 314.)

RÉPLIQUE ANONYME AU COMMERCIIUM.

[A la suite de l'exemplaire Vg13 du *Commercium Epistolicum* de Wallis à la Bibliothèque Nationale, et dans l'un des manuscrits de Boulliau (Bibl. Nat. franç. n° 13040) se trouve un imprimé anonyme de trois pages sur une demi-feuille petit in-4°. Cette pièce, qui constitue une réplique au *Commercium*, étant très rare ⁽¹⁾, j'en reproduis ci-après le texte latin, suivi de la traduction. Quant à l'auteur, si la question est posée entre Frenicle et Fermat, il ne peut guère, ce semble, y avoir de doute, quoique Libri ait hésité un moment (voir Tome I, Avertissement, pages xxii, lignes 9 à 12), et que, dans ses *Recherches sur les manuscrits de Fermat*, M. Ch. Henry se soit, contre Libri, prononcé en faveur de la seconde hypothèse. J'estime, en effet, que Fermat doit être absolument écarté, si l'on considère le fait même de l'impression, le ton de la réplique, enfin certaines particularités de l'orthographe; tout, au contraire, nous indique Frenicle, si ce n'est qu'en tous cas l'auteur aura voulu déguiser sa personnalité. C'est, en effet, Frenicle lui-même qui est désigné dans la pièce sous l'initiale « F. », tandis que Fermat est indiqué par l'expression « amicus noster ». On ne peut donc exclure absolument la possibilité que l'imprimé anonyme soit dû à un troisième mathématicien français, plus ou moins lié également avec Digby (par exemple, Careavi, Mylon ou Martin de Laurendière); mais il aurait alors été au moins inspiré par Frenicle; la pièce doit donc valoir comme de ce dernier.]

ILLUSTRISSIMO ET CLARISSIMO VIRO D. K. D ⁽²⁾.

Commercii Epistolici tandem data nobis tuo beneficio est copia, in qua primum illud inquirendum venit an in commercium publicum cadere debuerint epistolæ privatae, non solum non consentientibus, sed ne suspicantibus illud quidem aut scientibus earum authoribus: hac enim in re aliquam saltem juri gentium vim factam nemo merito inficias eat. Sed nil forsan expedit questionibus mathematicis ethicis

⁽¹⁾ La réédition, donnée par M. Ch. Henry dans ses *Recherches* (pages 178 à 180), a été faite, en réalité, sur une copie d'Arbogast, et présente par suite quelques inexactitudes.

⁽²⁾ D(omino) K(enelm) D(igby).



immisceri : detur itaque venia illustrissimæ et doctissimæ nationi, quæ gloriam suam intra septa nimis angusta noluit continere. Vicit nempe amor patriæ, cujus famam extendere enixe semper et cupiunt et laborant boni cives. Sed an ipsi satis hæc in parte ab illis consultum sit, videntur aliquantulum ambigere nostrates et ad illud poetæ, tentabundi licet ac dubitabundi, quadamtenus respicere.

Quondam etiam victis redit in præcordia virtus,
Viresque cadunt Danaï (¹)

An autem instaurare ipsis prælium liceat aut, aliqua saltem ratione, victoriæ a se dedecus amoliri, tuum (Vir clarissime), postquam hæc paucissima legeris, erit iudicium.

Quæ hactenus viris vestratibus proposita sunt, in duas commodè species dividi possunt: vel enim in problemata specialia, vel in theoremata aut problemata universalis et generalia. Ad priorem speciem spectant problemata de partibus aliquotis, et speciales quæstiones de quadratis unitate diminutis casus. Horum legitimam solutionem ab ipsis accepimus: attamen præcesserat libellus Domini F. (²), cujus ope cum facillimum fuerit numeros ab ipso exhibitos ἀναλύνειν (³), et constructionis formam et processum inde nullo negotio elicere, ἐπείγουσι (⁴) nonnulli et, ad removendum, si quis supersit, scrupulum, demonstrationes theorematum generalium, quæ est secunda propositarum quæstionum species, et in qua nullum aut specimen aut auxilium à nostris habuerunt, ab ipsis merito exposcunt: qua in parte quid aut tentaverint aut produxerint vestrates, en accipe:

Theorema præcipuum hoc erat: Dato quovis numero non quadrato in integris, dantur infiniti quadrati in integris, qui in datum numerum ducti, adscita unitate, conficiunt quadratum. Verba autem *in integris* hic addimus; licet enim, ex iis quæ in scripto amici nostri (⁵)

(¹) Virgile, *Énéide*, II, 367-8.

(²) La *Solutio duorum problematum* etc. qui est perdue.

(³) ἀναλύνειν I.

(⁴) ἐπείγουσι I.

(⁵) Pièce 81 de la *Correspondance de Fermat*; traduction ci-avant p. 312.

præcesserant, luce clarius sit de integris tantum ibi quæstionem esse, tollere tamen omnino ambigua non gravamur. Hujus theorematis demonstrationem facilem sibi author *Commercii* asserit paginis 82 et 83; imo hæc ibi contineri discrete innuit; sed analystæ nostri ne vestigium quidem demonstrationis illic agnoscunt.

Secundum theorema negativum hoc erat: Nullus numerus cubus in duos cubos rationales dividi potest. Hujus cum demonstrationem non dederit F. in libello à se anno 1657 edito (¹), — licet in eo quæstionem proposuerit huic consimilem his verbis: Invenire 2 vel 3 vel 4 etc. hexagona (²) centralia quorum latus unitate tantum differat, et eorum summa sit æqualis cubo. Quæstio enim illa ad problema nostrum (³) reduci potest, in quo datum cubum in duos cubos rationales dividendum proposuimus, modo unitas, ut vult ipse F. ex hexagoni (⁴) definitione, inter hæc hexagona (⁵) non computetur; — debuerant vestrates huic statim demonstrationi incumbere. Sed nescio qua ratione factum sit ut neglexerint omnino ea in quibus nostrates ipsis non præiverant.

Tertium theorema generale, quod sub forma problematis concipi potest, hoc erat: Datus quivis numerus de (⁶) duobus cubis compositus in duos alios cubos est divisibilis; — vel, si problema universale proponendum mavis: — Datum numerum ex duobus cubis compositum in duos alios cubos rationales dividere; quæ divisio per nos potest infinities variari. Huic autem propositioni non tantum canon nullus generalis datus est, quem tamen inquirebamus, sed in speciali problematis in numero 9 propositione, loco summæ quæ profundæ et abstrusæ est disquisitionis, data est differentia tantum; in quo casu nullam aut Vieta aut Bachetus in Diophantum agnoverant difficultatem,

(¹) La *Solutio* précédemment mentionnée.

(²) Exagona I.

(³) Le problème avait été proposé par Fermat (Lettre LXXXIII, traduction ci-avant p. 313), mais *nostrum* doit s'entendre: « de notre compatriote ».

(⁴) Exagoni I.

(⁵) Exagona I.

(⁶) Sic I.



cum problema nostrum ne attingerint ⁽¹⁾ quidem, imo illud difficillimum videantur judicasse ⁽²⁾.

Quartum problema negativum hoc erat : Nullum in numeris est triangulum rectangulum cujus area sit numerus quadratus. Hujus demonstrationem existimat author *Commercii* dedisse in pagina sui libelli ultima : sed ne hic quidem demonstrationem ullam deteximus. Supponit quippe pro medio demonstrationis theorema sequens : Differentia duorum quadratorum atque eorundem medius proportionalis non possunt esse plani similes : quod nihil aliud est quam obscurum per obscurius aut saltem æque obscurum probare. Licet enim verum nobis esse constet theorema illud suppositum, cur tamen illud non demonstraverit author non video, cum non minorem ipsius demonstratio, quam demonstratio theorematum, habeat difficultatem.

Vides itaque (Vir Clarissime) quos evelli nostratibus scrupulos ab authore illo operæ pretium sit, ut omni ex parte victoriam consequatur. Major certe ⁽³⁾ viæ pars ab ipso jam peracta est, nec Philistinis ulla satis tuta latebra aut effugium est contra Samsonem. Effice ⁽⁴⁾ igitur (Vir Clarissime) ut tanti et tam celebres viri fractos jam et labantes adversarios ab his quatuor vix satis fidis propugnaculis actutum deiciant, quo peracto plenæ vestratium victoriæ, consentientibus vel nostratibus, plenus etiam triumphus accedet. Nec addictum me minus aut jussis vestris obsequentem aut tu, Vir Illustrissime, aut ipsi quoque in posterum experientur. Vale.

A L'ILLUSTRISSE ET CLARISSIME SIR KENELM DIGBY.

Grâce à vous, nous avons enfin entre les mains ce *Commercium epistolicum* qui soulève une première question, à savoir si des lettres particulières auraient dû être livrées au public non seulement sans l'aveu

⁽¹⁾ Lisez *attingerint*.

⁽²⁾ indicasse I.

⁽³⁾ certæ I.

⁽⁴⁾ Effige I.

de leurs auteurs, mais même à leur insu et avant qu'ils en eussent conçu le moindre soupçon ; personne ne pourra contester à juste titre que dans cette occasion le droit des gens n'ait au moins subi une certaine atteinte. Mais il ne faut peut-être pas mêler des questions morales à des sujets mathématiques ; souffrons donc une pareille licence à une illustre et savante nation, qui n'a pas voulu limiter sa gloire par des barrières trop étroites. C'est l'amour de la patrie qui l'a emporté : les bons citoyens désirent à tout prix étendre sa renommée et consacrent leurs efforts à ce but. Mais a-t-il été, dans ce cas, complètement atteint ? Nos compatriotes semblent quelque peu en douter et, quoique avec hésitation et sans assurance, se rappeler ces vers du poète :

Mais parfois le courage revient au vaincu,
Et le Grec triomphant succombe à son tour.

Peuvent-ils renouveler la lutte ou, pour quelque motif au moins, éviter le déshonneur de la défaite ? Il vous appartiendra d'en juger, quand vous aurez lu ces quelques lignes.

Ce qui, jusqu'à présent, a été proposé à vos compatriotes peut être aisément distingué en deux classes de questions : d'une part, les problèmes particuliers, de l'autre, les théorèmes ou problèmes universels et généraux. Dans la première classe rentrent les problèmes des parties aliquotes et les cas particuliers de la question sur les carrés diminués de l'unité. Nous avons reçu d'Angleterre une solution légitime pour tous les problèmes de cette classe ; cependant elle avait été précédée par l'opuscule de M. F(renicle), grâce auquel il était très facile d'analyser les nombres qu'il avait donnés et de déduire ainsi sans aucune peine le mode et le procédé de construction. On peut donc suspendre son jugement et afin d'écarter tout scrupule, s'il en reste, réclamer à bon droit de vos compatriotes les démonstrations des théorèmes généraux qui constituent la seconde classe des questions proposées et pour lesquels ils n'ont eu de notre côté ni modèle ni secours. Or qu'ont-ils tenté ou produit à ce sujet ? Je vais le dire.

Le principal théorème était le suivant : Étant donné un nombre



entier non carré, on peut déterminer une infinité de carrés entiers, tels que le produit de chacun d'eux par le nombre donné, après addition de l'unité, fasse un carré. J'ajoute ici le mot *entiers*; quoiqu'en effet, d'après ce qui précédait dans l'écrit de notre ami (Fermat), il soit plus clair que le jour que la question portait seulement sur les nombres entiers, je n'ai aucune raison pour ne pas écarter désormais toute ambiguïté. Or l'auteur du *Commercium* affirme, pages 82 et 83 (*), qu'il peut facilement démontrer ce théorème; bien plus il fait entendre que la démonstration est expressément contenue dans ce passage; mais nos analystes ne peuvent en reconnaître aucune trace.

Le second théorème était celui-ci : Aucun nombre cube ne peut être partagé en deux cubes rationnels. Dans l'opuscule qu'il a publié en 1657, F(renicle) n'a pas donné la démonstration de ce théorème; cependant il y a proposé une question analogue en ces termes : Trouver deux, trois ou quatre, etc. hexagones centraux, tels que leurs côtés diffèrent seulement d'une unité et que leur somme soit égale à un cube (**). Cette question peut en effet se ramener au problème précédemment énoncé, partage d'un cube donné en deux cubes rationnels, pourvu que l'on ne compte pas l'unité parmi les hexagones centraux, ainsi qu'au reste l'entend F(renicle) d'après sa définition de l'hexagone. Vos compatriotes auraient donc dû s'attacher aussitôt à chercher la démonstration désirée; mais je ne sais comment il se

(*) Voir ci-avant pages 433 à 435.

(**) Frenicle entend par hexagone central de côté n , le nombre

$$1 + \sum_{i=1}^n 6(n-i) = n^2 - (n-1)^2.$$

La somme de p hexagones centraux consécutifs (des côtés n à $n+p-1$) sera donc

$$(n+p-1)^2 - (n-1)^2.$$

Demander qu'elle fasse un cube, revient donc à proposer de résoudre en nombres entiers l'équation

$$(n+p-1)^2 - (n-1)^2 = q^3.$$

Frenicle exclut naturellement la solution $n=1$, $p=q$.

fait qu'ils aient absolument négligé les questions pour lesquelles ils n'ont pas été devancés par les nôtres.

Le troisième théorème général, qui peut être conçu sous forme de problème, était le suivant : Tout nombre donné somme de deux cubes peut être partagé en deux autres cubes; ou si vous préférez la proposition comme problème général : Un nombre somme de deux cubes étant donné, le partager en deux autres cubes. Nous pouvons faire varier ce partage à l'infini. Or pour ce problème aucune règle générale n'a été fournie, comme nous le demandions, et dans le cas particulier du nombre donné 9, au lieu de le donner comme somme, ce qui demande une profonde et abstruse recherche, il n'a été donné que comme différence; chose à laquelle ni Viète ni Bachet sur Diophante n'ont trouvé aucune difficulté, tandis qu'ils n'ont pas même abordé notre problème, qu'au contraire ils semblent l'avoir trouvé très difficile.

Enfin il y avait un quatrième théorème général négatif : Il n'y a en nombres aucun triangle rectangle dont l'aire fasse un nombre carré. L'auteur du *Commercium* estime qu'il en a donné la démonstration à la dernière page de son Livre (*); mais nous n'avons pas davantage pu y découvrir aucune démonstration. Il suppose, en effet, comme moyen de démonstration le théorème suivant : La différence de deux carrés et leur moyen proportionnel ne peuvent être des plans semblables [c'est-à-dire des nombres dans le rapport de deux carrés entiers]. Mais ce n'est là que prouver ce qui est obscur par une autre assertion encore plus obscure ou au moins aussi obscure. Nous reconnaissons à la vérité comme exact ce théorème supposé, mais je ne vois pas pourquoi l'auteur du *Commercium* n'en a pas donné la démonstration qui certainement présente autant de difficulté que celle de l'énoncé proposé.

Vous voyez ainsi quels scrupules cet auteur doit encore écarter pour remporter sur les nôtres une victoire complète. Sans aucun

(*) Lettre XLIV, page 600.



doute il a déjà accompli la plus grande part de la route et, contre ce Samson, les Philistins n'ont plus ni cachette ni refuge assez sûr. Obtenez donc que des héros aussi justement célèbres délogent encore, de ces quatre derniers retranchements à peine solides, leurs adversaires déjà épuisés et chancelants; cela fait, les vôtres auront pleine victoire et plein triomphe, de l'aveu même des nôtres. En tous cas vous me trouverez toujours aussi dévoué et obéissant à vos ordres et je ne le serai pas moins à l'égard de nos adversaires.

ERRATA.

Tome I.

Avertissement, page XII, ligne 20 : La lettre en question porte seulement l'intitulé : « Clarissimo Gassendo P. F. S. T. »; le nom de Fermat n'est donc indiqué que par la phrase de Sorbière citée Tome II, page 268, note.
Avertissement, pages XIX et XX, voir Tome III, Avertissement, pages IX-XV.
Page 237, note (1), voir Tome III, page 203, note (1).

Tome II.

Page 25, ligne 6 : au lieu de B et C, lire D et C.
» 26, ligne dernière de la note : au lieu de Nicalaus, lire Nicolaus.
» 151, titre courant : au lieu de XXX, lire XXIX.
» 180, ligne dernière : au lieu de $3 - \sqrt{18}$, lire $3 - \sqrt{8}$.
» 279, ligne 12 : au lieu de B ad O, lire O ad B.
» 346 : ajouter à la lettre LXXXIV le Post-scriptum. Tome III, page 421.
» 359, note 1 : le passage de Galilée dont il s'agit se trouve à la première page de la quatrième journée dans le Dialogue des *Massimi Sistemi*.
» 407, ligne avant-dernière : corriger quartam (texte de Wallis) en quintam.

Tome III.

Page 78, ligne 10 en rem. : au lieu de RAB, lire RAC.
» 119, ligne 7 : au lieu de par, lire pour.
» 124, titre courant : au lieu de [133, 137], lire [136, 137].
» 415, ligne 10 : au lieu de il, lire Elle.
» 427, ligne 9 : au lieu de 1^{er} octobre, lire 1^{er} décembre.

FIN DU TOME TROISIÈME.



PARIS. — IMPRIMERIE GAUTHIER-VILLARS ET FILS,
39963 Quai des Grands-Augustins, 55.

