INTRODUCTION AUX LIEUX EN SURFACE,

A MON AMI M. DE CARCAVI.

Pour couronner l'*Introduction aux lieux plans et solides*, il reste à traiter des *lieux en surface*. Les anciens n'ont fait qu'indiquer ce sujet, mais n'ont pas enseigné de règles générales, ni même donné quelque exemple célèbre, à moins que ce ne soit enseveli depuis longtemps dans ces monuments de l'antique Géométrie où tant de précieuses découvertes ont été abandonnées sans défense aux insectes et souvent anéanties sans laisser aucune trace.

Cette théorie est cependant susceptible d'une méthode générale, comme le montrera cette courte dissertation; plus tard, si nous en avons le loisir, nous éclaircirons davantage chacune des découvertes géométriques que nous avons jusqu'ici fait brièvement connaître.

Les caractères que nous avons cherchés et montrés dans les lignes comme lieux peuvent être de même recherchés pour les surfaces planes, sphériques, coniques, cylindriques ou pour celles des conoïdes et sphéroïdes (1) quelconques, si l'on établit tout d'abord les lemmes constitutifs de chacun de ces lieux.

Posons donc le lemme suivant pour les lieux en surface plane :

1. *Si une surface quelconque est coupée par autant de plans quelconques que l'on voudra, et que l'intersection de cette surface et de ces*

(1) Rappelons qu'Archimède avait appelé *conoïdes* les paraboloïdes elliptiques de révolution et les hyperboloïdes de révolution (à deux nappes); *sphéroïdes* les ellipsoïdes de révolution.

plans en nombre indéfini soit toujours une ligne droite, la surface en question sera un plan.

Pour les lieux en surface sphérique :

2. *Si une surface quelconque est coupée par autant de plans quelconques que l'on voudra, et que l'intersection de cette surface et de ces plans en nombre indéfini soit toujours un cercle, la surface en question sera une sphère.*

Pour les lieux en surface de sphéroïde :

3. *Si une surface quelconque est coupée par autant de plans quelconques que l'on voudra, et que l'intersection de cette surface et d'un plan sécant soit tantôt un cercle, tantôt une ellipse, mais jamais une autre ligne, la surface en question sera un sphéroïde.*

Pour les lieux en surface de conoïde parabolique ou hyperbolique :

4. *Si une surface quelconque est coupée par autant de plans quelconques que l'on voudra, et que l'intersection commune soit tantôt un cercle, tantôt une ellipse, tantôt une parabole ou une hyperbole, mais jamais une autre ligne, la surface en question sera un conoïde parabolique ou hyperbolique.*

Pour les lieux en surface conique :

5. *Si une surface quelconque est coupée par autant de plans quelconques que l'on voudra, et que l'intersection commune soit tantôt une ligne droite, tantôt un cercle, tantôt une ellipse, tantôt une parabole ou hyperbole, et jamais une autre ligne, la surface en question sera un cône.*

Pour les lieux en surface cylindrique :

6. *Si une surface quelconque est coupée par autant de plans quelconques que l'on voudra, et que l'intersection commune soit tantôt une droite, tantôt un cercle, tantôt une ellipse, mais jamais une autre ligne, la surface en question sera un cylindre.*

Mais il se présente très souvent des lieux pour lesquels les sections sont des droites, des paraboles et des hyperboles et aucune autre ligne, comme le montrera bientôt l'analyse de la question. Il convient donc ou plutôt il est absolument nécessaire pour cette étude de constituer *une nouvelle espèce de cylindres ayant pour bases parallèles des paraboles ou des hyperboles et pour côtés des lignes droites, parallèles entre elles, joignant les bases ainsi supposées*, par analogie avec les cylindres ordinaires. De la sorte, aucune section plane d'un tel cylindre ne sera un cercle ou une ellipse; ces nouveaux cylindres pourront d'ailleurs, comme les ordinaires, être droits ou obliques, suivant que le demandera l'analyse du lieu de la question proposée.

Je répète que les problèmes de lieux conduisent nécessairement à de tels cylindres; leur invention et leur définition ne doivent donc pas être regardées comme inutiles.

Bien plus, avant d'aller plus loin, je dirai que la construction d'Archimède pour les sphéroïdes et les conoïdes ne suffit pas pour notre objet; les problèmes conduisent en effet à en considérer d'obliques et non pas seulement des droits.

De ce que nous avons posé résultent tout d'abord de très beaux lieux en surface sphérique :

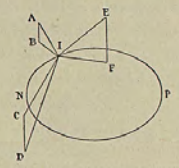
Si de points donnés en nombre quelconque et dans des plans quelconques, on mène des droites concourant en un même point, et que la somme des carrés des droites menées soit égale à une aire donnée, le point de concours sera sur une surface sphérique ou sur une sphère donnée de position. Nous pouvons, en effet, dire ici une sphère, à l'imitation d'Euclide et des anciens géomètres, qui ont appelé *cercle* la circonférence et non l'aire du cercle; en tout cas, c'est sur une surface de cette nature que se trouvera le point en question.

Prenons en effet un plan quelconque donné de position et dans ce plan, suivant les règles données ailleurs pour les lieux plans et solides, cherchons le lieu des points dont la somme des carrés des distances aux points donnés soit égale à l'aire donnée.

Cette recherche est facile : supposons le problème résolu et soit

dans le plan considéré, la courbe NIP comme lieu (*fig.* 89). Abaissons sur ce plan, des points A, E, C donnés par hypothèse, les normales AB, EF, CD. Le plan étant donné de position, ces normales AB, EF, CD, abaissées des points A, E, C donnés, seront elles-mêmes données, ainsi que leurs points de rencontre B, F, D avec le plan. Prenons sur le lieu NIP un point quelconque I, et joignons AI, BI, EI, IF, CI, DI.

Fig. 89.



Les droites AI, EI, CI joignant aux points donnés A, C, E un point I du lieu, la somme des carrés de ces droites est égale à l'aire donnée. Si l'on en retranche les carrés des normales AB, EF, CD, lesquelles sont données, comme nous l'avons prouvé, la différence sera $BI^2+FI^2+DI^2$, somme qui dès lors sera donnée. Or les points B, F, D sont donnés dans le plan supposé, ainsi que nous l'avons vu; ainsi, on a des droites BI, FI, DI menées de points B, F, D donnés dans un même plan, droites concourant en un même point d'un lieu dans le même plan, et dont la somme des carrés est égale à une aire donnée; d'après un théorème d'Apollonius que nous avons restitué depuis longtemps, on sait que le lieu NIP est un cercle donné de position.

Une analyse absolument semblable donnera les mêmes conséquences pour tout autre plan que l'on prendra; tous ces plans quelconques, en nombre indéfini, donneront donc toujours des cercles comme lieux; d'après le lemme 2, la surface cherchée sera donc une sphère.

En effet, quand nous cherchons un lieu en surface satisfaisant à une question, rien ne nous empêche d'imaginer que la surface cherchée

est coupée par le plan choisi. Mais ici la section ne peut être qu'un cercle, car nous avons prouvé qu'un cercle satisfait comme lieu à la même condition que la surface cherchée; il faut donc que ce cercle soit situé sur ladite surface. Il est donc clair que, dans le cas proposé, le lieu en surface est toujours coupé par un plan suivant un cercle, et par conséquent que c'est une sphère.

On démontre de même les lieux suivants :

Si de points en nombre quelconque, donnés dans un ou plusieurs plans, on mène des droites concourant en un même point, et que la somme des carrés d'une partie des menées soit à la somme des carrés des autres dans un rapport donné ou dans une différence donnée, ou plus grande ou plus petite d'une quantité donnée que dans un rapport donné (1), *le point de concours sera sur une sphère donnée de position.*

Des artifices analogues feront reconnaître une infinité de très belles propriétés de la surface sphérique.

Soient, en nombre quelconque, des plans donnés de position; si d'un même point on mène à ces plans donnés, sous des angles donnés, des droites dont la somme des carrés soit égale à une aire donnée, ce point sera sur la surface d'un sphéroïde donné de position.

Faisons l'analyse en prenant, suivant la méthode indiquée, un plan quelconque donné de position; cherchons-y, suivant les règles pour les lieux plans et solides telles que nous les avons autrefois exposées dans le plan, le lieu des points dont la somme des carrés des menées aux plans donnés sous les angles donnés est égale à l'aire donnée.

La construction se présente immédiatement; le plan que nous avons pris est en effet donné de position aussi bien que les autres plans donnés; les intersections de ce plan choisi et des plans donnés seront donc également données. Les droites menées aux plans donnés d'un point quelconque du plan supposé recevront donc facilement une expression analytique. Si l'on fait la somme de leurs carrés et qu'on

(1) C'est-à-dire, en général, soit une fonction linéaire.

l'égale à l'aire donnée, l'analyse donnera comme lieu, dans le plan supposé, un cercle ou une ellipse, et sa marche même prouvera que dans aucun autre plan donné de position, quel qu'il soit, le lieu ne peut être d'une autre nature. Il est donc clair, d'après le lemme 3, que le lieu cherché, dont les sections sont seulement des cercles ou des ellipses, est un sphéroïde.

Si la somme des carrés d'une partie déterminée des droites ainsi menées est à la somme des autres dans un rapport donné ou dans une différence donnée, ou si elle est plus grande ou plus petite d'une quantité donnée que dans un rapport donné, la surface cherchée sera celle d'un sphéroïde, d'un conoïde, d'un cône ou d'un cylindre, etc., suivant ce qui sera indiqué par l'analyse convenablement menée.

Par exemple, si l'on donne le rapport, on aura en général une surface de conoïde; mais, si les plans donnés se coupent suivant des droites concourant en un même point, la surface deviendra conique; si les intersections des plans donnés sont parallèles, la surface sera cylindrique. On aura d'ailleurs soit un cylindre ordinaire, soit un des nôtres.

La pratique découvrira immédiatement ce qui en est; je me borne à donner des indications générales et sommaires, pour que la trop grande multiplicité des exemples n'empêche pas de saisir clairement la méthode.

J'ai réservé pour la dernière place un exemple du plan comme lieu, qui aurait peut-être dû occuper la première :

Soient donnés de position des plans en nombre quelconque; si à ces plans on mène d'un même point, sous des angles donnés, des droites dont la somme soit égale à une droite donnée, ce point sera sur un plan donné de position.

Coupons en effet, suivant la méthode indiquée, les plans donnés par un plan quelconque donné de position et cherchons-y le lieu satisfaisant à la question, d'après la méthode donnée pour les lieux plans. Ce sera une ligne droite, comme le montrera l'Analyse, et il en

sera de même pour toutes les autres sections planes. Il est donc clair, d'après le lemme I, que le lieu cherché est une surface plane.

Si la somme d'une partie déterminée des droites ainsi menées est à la somme des autres dans un rapport donné ou dans une différence donnée, ou si elle est plus grande ou plus petite d'une quantité donnée que dans un rapport donné, le point sera de même sur une surface plane donnée de position.

D'ailleurs, dans les questions précédentes, si les plans donnés avaient été parallèles entre eux, le lieu eût été également une surface plane, ce qu'il est à peine nécessaire de remarquer.

Comme couronnement, j'ajouterai encore une notable extension du lieu à trois ou quatre droites d'Apollonius :

Soient trois plans donnés de position; si d'un point donné on mène aux plans donnés, sous des angles donnés, des droites telles que le produit de deux d'entre elles soit au carré de la troisième dans un rapport donné, le lieu du point sera soit un plan, soit une sphère, soit un sphéroïde, soit un conoïde, soit une surface conique ou cylindrique (des anciens ou nouvelle), selon la diverse situation des plans donnés.

De même pour quatre plans, ainsi qu'il sera aisé de le voir.

Les divers cas, les conditions-limites pour les données, les problèmes ou théorèmes locaux en nombre infini que nous avons omis pour être plus bref, la démonstration des lemmes énoncés et tout ce qui aurait peut-être besoin d'une plus longue explication, sera facilement suppléé par tout géomètre soigneux et réfléchi qui aura lu cet écrit; désormais ce sujet, qui paraissait singulièrement ardu, est rendu aisé à comprendre.

Toulouse, 6 janvier 1643.

SUR LA SOLUTION

DES

PROBLÈMES DE GÉOMÉTRIE

PAR LES COURBES LES PLUS SIMPLES

ET CONVENANT EN PARTICULIER A CHAQUE GENRE DE PROBLÈMES,

DISSERTATION EN TROIS PARTIES.

PREMIÈRE PARTIE.

Ce peut être un paradoxe que de dire que, même en Géométrie, Descartes n'était qu'un homme; mais, pour le reconnaître, que les plus subtils Cartésiens examinent s'il n'y a pas une imperfection dans la distribution faite par leur maître des lignes courbes en certaines classes ou degrés, et si l'on ne doit pas adopter un classement plus satisfaisant et plus conforme aux véritables lois de l'Analyse géométrique. Nous pensons pouvoir soulever cette question sans diminuer en rien la gloire d'un homme aussi illustre, car il est de l'intérêt de Descartes et de tous les Cartésiens que la vérité, dont ils se portent à bon droit comme les plus déclarés partisans, quoique parfois elle soit en désaccord avec leurs opinions, devienne manifeste pour tous, ou, si cette expression est trop générale, au moins pour les géomètres et les analystes.

La distribution en classes déterminées des problèmes de Géométrie a paru nécessaire, non seulement aux anciens, mais aussi aux analystes

modernes. Qu'on propose d'abord les équations

$$a + d = b \qquad \text{ou} \qquad a^3 + ba = z^3.$$

Dans les termes de la première, l'inconnue ne dépasse pas la racine ou le côté, dans la seconde on trouve la seconde puissance ou le carré du côté inconnu; et toutes deux constituent ensemble le premier genre des problèmes, le plus simple. Ce sont là en effet les problèmes que les géomètres ont l'habitude d'appeler *plans*.

Le second genre de problèmes est celui où la quantité inconnue s'élève à la troisième ou à la quatrième puissance, c'est-à-dire au cube ou au bicarré. La raison pour laquelle deux puissances consécutives ne constituent, quoique différentes de degré, qu'un seul et même genre de problèmes, est que les équations quadratiques se ramènent facilement aux simples ou linéaires, par un procédé que les anciens connaissaient aussi bien que les modernes, et se résolvent donc facilement avec la règle et le compas. De même les équations du quatrième degré ou biquadratiques se ramènent aux équations du troisième degré ou cubiques, par la méthode qu'ont donnée Viète et Descartes. C'est en effet l'objet de cette subtile *paraplérose climatique* de Viète que l'on peut voir dans son traité *De emendatione æquationum*, Chap. VI, et l'artifice dont use Descartes en pareil cas est tout à fait semblable, quoiqu'il l'énonce en termes différents.

De même l'analyste à la façon de Viète ou de Descartes pourra, quoiqu'un peu plus difficilement, ramener l'équation bicubique à la quadratocubique ou, si l'on veut, l'équation du sixième degré à l'équation du cinquième. Mais de ce que, dans les cas précités, où il n'y a qu'une seule quantité inconnue, les équations de degré pair s'abaissent aux équations du degré impair immédiatement inférieur, Descartes a affirmé avec confiance (page 323 de la *Géométrie* qu'il a publiée en français) qu'il en était absolument de même pour les équations renfermant deux quantités inconnues. Car telles sont toutes les équations constitutives de lignes courbes; or, dans ces équations, non seulement la réduction ou abaissement en question ne réussira pas,

comme l'a affirmé Descartes, mais encore les analystes le reconnaîtront absolument impossible. Qu'on propose, par exemple, l'équation constitutive de la parabole biquadratique

$$a^4 = z^2 e.$$

Par quel moyen abaissera-t-on au troisième degré cette équation du quatrième? Quelle *paraplérose climatique* pourra-t-on imaginer?

Je désigne comme Viète les quantités inconnues par des voyelles, car je ne vois pas pourquoi Descartes a fait un changement dans une chose sans importance et qui est de pure convention.

Cette discussion ou cette remarque n'est nullement oisive ou inutile, comme le prouve la méthode générale par laquelle je ramène tous les problèmes, quels qu'ils soient, à un certain degré de courbes.

Si l'on propose un problème où la quantité inconnue s'élève à la troisième ou à la quatrième puissance, nous le résoudrons par les sections coniques qui sont du second degré. Si l'équation s'élève à la cinquième ou à la sixième puissance, nous pouvons donner la solution par des courbes du troisième degré; si l'équation monte à la septième ou à la huitième puissance, nous donnerons la solution par des courbes du quatrième degré, et ainsi de suite indéfiniment par un procédé identique. Il est évident par là que la question soulevée ne porte pas sur les mots, mais bien sur la chose elle-même.

Soit proposé, par exemple :

$$a^5 + b^v a = z^{vi}, \qquad \text{ou si l'on veut} \qquad a^5 + b^{iv} a = z^v;$$

dans les deux cas, le problème sera résolu par les courbes du troisième degré ou cubiques, ainsi que Descartes l'a fait au reste.

Mais si l'on propose

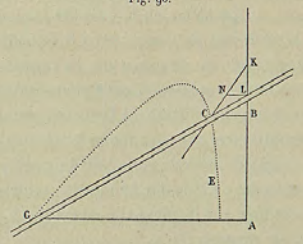
$$a^8 + b^{vii} a = z^{viii}, \qquad \text{ou encore} \qquad a^7 + b^{vi} a = z^{vii},$$

nous résoudrons le problème par des courbes du quatrième degré ou biquadratiques, ce que Descartes n'a pas fait ni jugé possible, puisqu'il a cru que dans ce cas il fallait nécessairement recourir à des

courbes du cinquième ou sixième degré. Or c'est une faute en vraie Géométrie que de prendre, pour la solution d'un problème quelconque, des courbes trop complexes ou d'un degré trop élevé, en laissant les plus simples qui conviennent, et Pappus avant les modernes avait déjà remarqué que c'est pécher réellement contre les règles de la Géométrie que de résoudre un problème par un genre de courbes qui ne lui convient pas. Pour éviter cette faute, il faut corriger Descartes et ramener chaque problème à son rang particulier et naturel.

Page 322, Descartes affirme encore nettement que les courbes naissant de l'intersection d'une règle et d'une autre droite ou courbe sont toujours d'un degré ou genre plus élevé que la droite ou courbe de la figure, page 321, dont elles dérivent (*fig.* 90).

Fig. 90.



Mais imaginons, par exemple, au lieu de la droite CNK de ladite figure, page 321, une parabole cubique ayant pour sommet K et pour axe indéfini KLBA; qu'on achève la construction dans l'esprit de Descartes, il est clair que l'équation constitutive de cette parabole cubique sera

$$a^3 = b^2 e.$$

On reconnaîtra aussitôt que la courbe EC provenant de cette supposition n'a qu'une équation biquadratique; donc la courbe biquadratique est d'un degré ou genre plus élevé que la courbe cubique, selon la règle énoncée par Descartes lui-même, alors qu'il affirme au contraire expressément (p. 323) que la courbe biquadratique et la cubique sont d'un même degré ou genre.

Quant à notre méthode qui réduit tous les problèmes à l'infini, à savoir ceux d'équations de la troisième et quatrième puissance, à des courbes du second degré; ceux de la cinquième et sixième puissance, au troisième degré; ceux de la septième et huitième puissance, au quatrième degré, et ainsi de suite indéfiniment, nous ne différerons pas de la communiquer à tous ceux qui regarderont comme un tort de dissimuler au préjudice de la vérité une erreur quelconque, fût-elle de Descartes.

Qu'on ne s'arrête pas à ce que les problèmes qui montent à la seconde puissance, et qui sont de la même espèce que les problèmes du premier degré (étant appelés *plans* comme eux), ont besoin du cercle, c'est-à-dire d'une courbe du second degré. Cette objection trouvera sa réponse spéciale quand nous donnerons notre méthode générale pour résoudre tous les problèmes absolument par les courbes qui leur conviennent.

SECONDE PARTIE DE LA DISSERTATION.

Pour satisfaire à l'engagement que j'ai pris publiquement, je donne ma méthode générale pour la solution des problèmes quelconques par les courbes qui leur conviennent en propre.

J'ai déjà dit, dans la première Partie de cette Dissertation, que les problèmes de deux degrés immédiatement consécutifs, par exemple 3 et 4, 5 et 6, 7 et 8, 9 et 10, etc., ne réclament qu'un seul degré de courbes. Ainsi ceux des puissances 3 et 4 se résolvent par des courbes du 2^e degré; ceux des puissances 5 et 6, par des courbes du 3^e degré, etc., à l'infini.

Voici la manière d'opérer. L'équation donnée quelconque, qui ne renferme qu'une quantité inconnue, sera d'abord ramenée au degré le plus élevé, je veux dire le pair; puis on la débarrassera du terme où entre l'inconnue au premier degré. Cela fait, il restera une équation

entre la quantité connue ou le terme donné d'une part, et de l'autre un membre inconnu dans chaque terme duquel entrera le carré de la racine inconnue. On égalera ce membre inconnu à un carré dont on formera la racine de façon qu'en égalant ledit carré avec le membre inconnu, on puisse éliminer autant que possible de degrés les plus élevés de la racine inconnue. Il faut d'ailleurs avoir soin que les divers termes de la racine du carré à former ainsi soient tous affectés de la racine ou quantité inconnue, et que le dernier de ces termes soit, en outre, affecté aussi d'une seconde inconnue. On aura ensuite par une simple division d'un côté, par l'extraction d'une racine carrée de l'autre, deux équations constitutives de courbes convenant au problème donné, et leur intersection résoudra la question par la méthode que nous avons appliquée dès longtemps à la solution des problèmes par les lieux.

Soit, comme exemple : $a^6 + ba^5 + z^{II}a^4 + d^{III}a^3 + m^{IV}a^2 = n^{VI}$.

Tous les problèmes qui montent à la cinquième ou sixième puissance peuvent être ramenés à cette forme. Car il suffit pour cela ou d'élever de la cinquième à la sixième puissance, ou de débarrasser celle-ci du terme en a, toutes choses suffisamment enseignées par Viète et Descartes.

On formera le carré de la racine : $a^3 + bae$, et on l'égalera au premier membre de l'équation. On aura ainsi

$$a^6 + 2ba^4e + b^2a^2e^2 = a^6 + ba^5 + z^{II}a^4 + d^{III}a^3 + m^{IV}a^2.$$

Supprimant de part et d'autre a^6 et divisant par a^2, ce que l'on pourra toujours faire en observant la précaution indiquée pour l'emploi de la méthode, il reste

$$ba^3 + z^{II}a^2 + d^{III}a + m^{IV} = 2ba^2e + b^2e^2,$$

équation qui donne, comme on le voit, une courbe du troisième degré.

Mais, pour avoir la seconde équation et arriver facilement à la solution du problème, il faut égaler aussi à l'autre membre de l'équation, n^{VI}, le carré de $a^3 + bae$.

Donc, en extrayant la racine carrée et appelant, par exemple, n^{III} la racine carrée de n^{VI}, qui s'obtient facilement, on aura

$$n^{III} = a^3 + bae,$$ racine du carré égalé au premier membre de la première équation donnée.

Nous avons donc une seconde équation qui donne également une courbe du troisième degré. Qui ne voit maintenant que l'intersection des deux courbes trouvées donnera la valeur de a, c'est-à-dire la solution du problème proposé?

Si le problème monte à la septième ou huitième puissance, on le posera d'abord sous la forme d'une équation de la huitième puissance, puis on débarrassera celle-ci du terme affecté de la seule racine. Cela fait, soit après cette réduction permise et conforme à la méthode :

$$a^8 + ba^7 + d^{II}a^6 + n^{III}a^5 + m^{IV}a^4 + g^{V}a^3 + r^{VI}a^2 = z^{VIII}.$$

On formera le carré à égaler aux deux membres de cette équation sur la racine

$$a^4 + \tfrac{1}{2}ba^3 + d^{II}ae.$$

J'ai formé le second terme de cette racine du carré de façon que les deux puissances les plus élevées de l'inconnue a s'éliminent dans l'équation, ce qui est très facile. En égalant le carré de cette racine au premier membre de l'équation proposée, supprimant les termes communs et divisant par a^2, on aura d'un côté l'équation constitutive d'une courbe du quatrième degré. Puis on extraira la racine carrée du second membre de l'équation proposée en premier lieu; soit p^{IV} cette racine de z^{VIII}, on l'égalera à $a^4 + \frac{1}{2}ba^3 + d^{II}ae$. Cette équation donnera une autre courbe du quatrième degré et l'intersection de ces deux courbes donnera la valeur de a, c'est-à-dire la solution du problème proposé.

Il faut remarquer, au reste, que, dans les problèmes qui montent aux puissances 9 et 10, on devra former la racine du carré de façon qu'elle comprenne au moins quatre termes, de façon à éliminer les trois degrés les plus élevés de l'inconnue.

Pour les problèmes montant aux puissances 11 et 12, la racine du carré à former doit avoir au moins cinq termes, dont on disposera de

façon à éliminer les quatre degrés les plus élevés de l'inconnue.

Le procédé pour former ainsi la racine est toujours très simple; les analystes trouveront à l'essai qu'il suffit absolument de la division ou application (pour employer les termes géométriques dans un sujet purement géométrique); les signes + et — n'apporteront au reste aucune difficulté pour la pratique de la méthode.

Comme d'ailleurs les problèmes qui montent à la seconde puissance sont réduits à la première par l'extraction de la racine carrée, cette méthode donne leur solution connue au moyen de lignes du premier degré ou de droites; on voit donc s'évanouir la vaine objection dont nous avons parlé dans la première Partie de cette Dissertation, si l'on suppose l'extraction de la racine carrée immédiatement connue pour toute espèce de problèmes.

On a ainsi la résolution et construction exacte et la plus simple possible des problèmes de Géométrie par des lieux naissant suivant les cas de courbes d'espèces différentes et convenant à ces problèmes. Au reste, l'analyste sera libre de faire varier ces courbes, sauf à rester toujours dans le genre naturel aux problèmes, en résolvant ceux du 8^e et 7^e degré par des courbes du 4^e; ceux du 10^e et du 9^e, par des courbes du 5^e; ceux du 12^e et 11^e par des courbes du 6^e et ainsi de suite indéfiniment par une méthode uniforme. Au contraire, d'après Descartes, les problèmes des 8^e et 7^e degré ont besoin de courbes des 5^e et 6^e; les problèmes du 10^e ou du 9^e, de courbes du 7^e ou du 8^e; les problèmes du 12^e ou du 11^e, de courbes du 9^e ou du 10^e, et ainsi de suite indéfiniment; les Cartésiens peuvent voir combien cela est loin de la simplicité et de la vérité géométrique, ou bien, si cela leur plaît, ils essayeront de nous contredire.

Car nous cherchons seulement la vérité, et si elle est cachée quelque part dans les écrits du grand homme, nous aurons la plus grande joie à la reconnaître et à l'embrasser; car, pour employer une formule qui n'est point de moi, j'ai une si grande admiration pour ce génie extraordinaire, que j'estime plus Descartes lorsqu'il se trompe que beaucoup d'autres quand ils ont raison.

TROISIÈME PARTIE DE LA DISSERTATION.

Cela peut suffire pour la théorie générale; car les problèmes que Descartes donne comme résolubles au moyen de courbes d'un degré trop élevé, nous les avons heureusement abaissés par une méthode générale à des courbes d'un degré moitié moindre. Mais on doit comprendre ceci en ce sens qu'il faut au moins ce degré pour toutes les questions absolument, car une infinité de cas spéciaux se prêtent à un abaissement encore plus grand. Je veux donc aller plus loin et ramener l'analyse cartésienne, non seulement à des termes de degré moitié moindre, mais à des degrés 4 fois, 6 fois, 100 fois, et indéfiniment moins élevés pour certains cas. On reconnaîtra mieux ainsi l'erreur de Descartes, et elle trouvera sa correction immédiate par l'analyse; au reste, je désignerai, ce qui est plus commode, dans les degrés élevés, les puissances par les nombres que comportent leurs exposants.

Soit proposé de *trouver six moyennes proportionnelles entre deux données*. Soient b et d les deux données, a la première moyenne à trouver, on a l'équation $a^7 = b^6 d$. D'après Descartes, cette équation ne peut être résolue que par des courbes du 5^e ou du 6^e degré. Dans la seconde Partie de cette Dissertation, elle est, avec toutes les autres de même nature, résolue généralement par des courbes du 4^e degré. Mais rien ne nous empêche de la résoudre par des courbes du 3^e degré. Égalons en effet chacun des membres de l'équation au terme $a^4 e^2 d$. Si, dans l'équation avec a^7, on divise de part et d'autre part par a^4, il vient $e^2 d = a^3$, ce qui donne, comme on voit, une courbe du 3^e degré. De l'autre côté, $a^4 e^2 d = b^6 d$; divisant par d et extrayant la racine carrée, $a^2 e = b^3$, ce qui donne également une courbe du 3^e degré. L'intersection de ces deux courbes donnera la valeur de a, c'est-à-dire la solution du problème proposé au moyen de courbes du 3^e degré.

Soit proposé maintenant de *trouver douze moyennes proportionnelles entre deux données;* l'équation sera $a^{13} = b^{12} d$. Descartes a pensé qu'elle ne peut se résoudre que par des courbes du 11^e ou 12^e degré.

J'ai enseigné, en général, dans la seconde Partie de cette Dissertation, que toutes les équations de ce degré peuvent être résolues par des courbes du 7^{e} degré. Mais une recherche plus attentive donne immédiatement une solution élégante par des courbes du 5^{e}; on peut même l'obtenir par des courbes du 4^{e}, comme on le verra ensuite.

Égalons d'abord chacun des deux membres au terme $a^{8}e^{4}d$. Dans la première équation, avec a^{12}, divisant de part et d'autre par a^{8}, il vient $a^{4} = e^{4}d$, courbe du 5^{e} degré. Dans la seconde équation, avec $b^{12}d$, divisant par d et extrayant la racine quatrième ou biquadratique, on a $a^{2}e = b^{3}$, courbe du 3^{e} degré. Le problème proposé est ainsi résolu par deux courbes, l'une du 5^{e}, l'autre du 3^{e} degré.

Mais on peut résoudre ce problème encore plus facilement, c'est-à-dire par des courbes du 4^{e} degré. Si, en effet, on égale les deux membres à $a^{9}e^{3}d$, on aura d'un côté, en divisant par a^{9}, $a^{3} = e^{3}d$, équation d'une courbe du 4^{e} degré; d'autre part, en divisant par d et extrayant la racine troisième ou cubique : $a^{3}e = b^{4}$, ce qui donne aussi une courbe du 4^{e} degré. Ainsi nous avons une construction facile par deux courbes du 4^{e} degré.

Après ces exemples, on ne peut douter que l'*invention de* 30 *moyennes proportionnelles* ne puisse s'obtenir par des courbes du 7^{e} ou même du 6^{e} degré. Égalons, en effet, les deux membres de l'équation $a^{31} = b^{30}d$ au terme commun $a^{25}e^{6}d$; le problème sera ramené à des courbes du 7^{e} degré. Par le terme commun $a^{25}e^{5}d$, il le sera à des courbes du 6^{e}.

De même, l'*invention de* 72 *moyennes proportionnelles* se fera par des courbes du 9^{e} degré, et il est clair, d'après ce qui précède, que l'on peut assigner un rapport plus grand que tout rapport donné entre le degré du problème et celui des courbes qui le résolvent. Quand les Cartésiens auront vu cela, je ne doute pas qu'ils ne reconnaissent la nécessité de notre remarque et de notre correction.

Il faut observer qu'il convient souvent de changer la forme de l'équation pour que le degré soit susceptible d'une division commode en parties aliquotes. Il sera inutile de répéter cette remarque.

Qu'on propose, par exemple, l'*invention de* 10 *moyennes*, c'est-à-dire

l'équation $a^{11} = b^{10}d$, on multipliera les deux termes par une droite donnée, z par exemple; l'équation deviendra $a^{11}z = b^{10}dz$, et l'on arrive ainsi au nombre 12, qui permet facilement une réduction ou abaissement par ses parties aliquotes. En égalant chacun des deux membres à $a^{8}e^{4}$, on aura d'un côté l'équation $a^{3}z = e^{4}$, courbe du quatrième degré. De l'autre côté, en extrayant la racine bicarrée, soit celle-ci n^{m} par le terme donné $b^{10}dz$, on a $a^{2}e = n^{m}$, courbe du troisième degré. Ainsi on trouvera dix moyennes par deux courbes, l'une du 4^{e}, l'autre du 3^{e} degré, ce à quoi on est arrivé facilement par un petit changement de l'équation primitive.

Je ne m'arrête pas aux autres abréviations que l'art fournira de lui-même aux analystes et qui sont en nombre infini. J'ajoute toutefois que ce que je viens de dire s'applique non seulement quand la puissance inconnue se trouve sans aucun autre terme affecté d'un degré moins élevé, mais encore s'il y a des termes de degrés voisins du plus élevé, comme dans l'équation $a^{13} + na^{12} + ma^{11} + ra^{10} = b^{12}d$.

La solution de cette question, en prenant le même terme commun que ci-dessus, $a^{9}e^{3}a$, sera aussi facile que celle de l'invention de 12 moyennes entre deux données. Le même artifice s'emploierait de même pour les équations d'autres degrés plus élevés.

Cependant il faut remarquer que, dans les équations où se trouve seulement un terme inconnu dans un des membres, il faut que l'exposant de la puissance unique de l'inconnue soit un nombre premier, pour que l'on désigne par cet exposant le degré du problème. Si, en effet, l'exposant est composé, le problème se ramène immédiatement au degré des diviseurs.

Si l'on demande, par exemple, 8 moyennes proportionnelles entre deux données, on aura l'équation $a^{9} = b^{8}d$. Dans ce cas, le nombre 9 étant composé et ayant deux fois 3 comme facteur, le problème doit être regardé comme du troisième degré, et il l'est de fait. Si, en effet, on trouve deux moyennes proportionnelles entre les deux données, si ensuite on intercale de nouveau deux moyennes proportionnelles entre le premier et le second terme de la progression ainsi formée,

puis entre le second et le troisième, puis entre le troisième et le quatrième, on aura 8 moyennes entre les deux lignes proposées en premier lieu.

Si l'on demande maintenant 14 moyennes entre deux données, l'équation $a^{15} = b^{14}d$ montre que le problème se ramène à deux autres, l'un du 3^e, l'autre du 5^e degré.

On voit ainsi que l'exposant de la puissance unique doit être un nombre premier pour exprimer et représenter véritablement le degré du problème.

Comme d'ailleurs je considère comme certain que *les nombres obtenus en ajoutant l'unité aux carrés successifs que l'on forme en partant de 2 sont toujours premiers*, théorème dont j'ai depuis longtemps annoncé la vérité aux analystes, je veux dire que les nombres

$$3,\ 5,\ 17,\ 257,\ 65537,\ \ldots,\ \text{à l'infini}$$

sont premiers; il n'y a aucune difficulté pour trouver un procédé permettant de *construire un problème dont le degré soit dans un rapport plus grand que tout rapport donné avec le degré des courbes qui servent à le résoudre.*

Par exemple, soit proposé de trouver entre deux données 256 moyennes proportionnelles, on aura l'équation $a^{257} = b^{256}d$; on égalera les deux termes à $a^{240}e^{16}d$, et la question sera résolue par des courbes du 17^e degré.

Si l'on cherchait 65536 moyennes proportionnelles, le problème serait résolu par des courbes du 257^e degré, et ainsi de suite indéfiniment, en abaissant le degré du plus grand nombre à celui du nombre immédiatement inférieur. Et qui ne voit qu'en deux nombres consécutifs, le rapport augmente indéfiniment?

Les Cartésiens essayeront-ils encore de dissimuler l'erreur de Descartes? Quant à moi, je m'abstiens de rien prévoir : j'attends avec intérêt, mais sans rien ajouter de plus, ce qu'il adviendra à ce sujet.

MÉTHODE

POUR LA

RECHERCHE DU MAXIMUM ET DU MINIMUM.

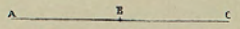
Toute la théorie de la recherche du maximum et du minimum suppose la position de deux inconnues et la seule règle que voici :

Soit a une inconnue quelconque de la question (qu'elle ait une, deux ou trois dimensions, suivant qu'il convient d'après l'énoncé). On exprimera la quantité maxima ou minima en a, au moyen de termes qui pourront être de degrés quelconques. On substituera ensuite $a + e$ à l'inconnue primitive a, et on exprimera ainsi la quantité maxima ou minima en termes où entreront a et e à des degrés quelconques. On *adégalera*, pour parler comme Diophante, les deux expressions de la quantité maxima ou minima, et on retranchera les termes communs de part et d'autre. Cela fait, il se trouvera que de part et d'autre tous les termes seront affectés de e ou d'une de ses puissances. On divisera tous les termes par e, ou par une puissance de e d'un degré plus élevé, de façon que dans l'un au moins des termes de l'un quelconque des membres e disparaisse entièrement. On supprimera ensuite tous les termes où entrera encore e ou l'une de ses puissances et l'on égalera les autres, ou bien, si dans l'un des membres il ne reste rien, on égalera, ce qui revient au même, les termes en plus aux termes en moins. La résolution de cette dernière équation donnera la valeur de a, qui conduira au maximum ou au minimum, en reprenant sa première expression.

Voici un exemple :

Soit à partager la droite AC (*fig.* 91) *en* E, *en sorte que* AE × EC *soit maximum.*

Fig. 91.



Posons AC = b; soit a un des segments, l'autre sera $b - a$, et le produit dont on doit trouver le maximum : $ba - a^2$. Soit maintenant $a + e$ le premier segment de b, le second sera $b - a - e$, et le produit des segments : $ba - a^2 + be - 2ae - e^2$;

Il doit être *adégalé au précédent* : $ba - a^2$;

Supprimant les termes communs : $be \backsim 2ae + e^2$;

Divisant tous les termes : $b \backsim 2a + e$;

Supprimez e : $b = 2a$.

Pour résoudre le problème il faut donc prendre la moitié de b.

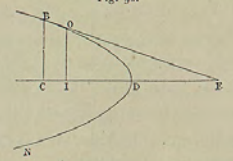
Il est impossible de donner une méthode plus générale.

DES TANGENTES DES LIGNES COURBES.

Nous ramenons à la méthode précédente l'invention des tangentes en des points donnés à des courbes quelconques.

Soit donnée, par exemple, la parabole BDN (*fig.* 92), de sommet D,

Fig. 92.



de diamètre DC; soit donné sur elle le point B, par lequel il faut mener la droite BE tangente à la parabole et rencontrant le diamètre en E.

Si l'on prend sur la droite BE un point quelconque O, dont on mène

l'ordonnée OI, en même temps que l'ordonnée BC du point B, on aura : $\frac{CD}{DI} > \frac{BC^2}{OI^2}$, puisque le point O est extérieur à la parabole. Mais $\frac{BC^2}{OI^2} = \frac{CE^2}{IE^2}$, à cause de la similitude des triangles. Donc $\frac{CD}{DI} > \frac{CE^2}{IE^2}$.

Or le point B est donné, donc l'ordonnée BC, donc le point C, donc CD. Soit donc CD = d, donnée. Posons CE = a et CI = e; on aura $\frac{d}{d-e} > \frac{a^2}{a^2 + e^2 - 2ae}$.

Faisons le produit des moyens et des extrêmes :

$$da^2 + de^2 - 2dae > da^2 - a^2 e.$$

Adégalons donc, d'après la méthode précédente; on aura, en retranchant les termes communs :

$$de^2 - 2dae \backsim -a^2 e,$$

ou, ce qui revient au même :

$$de^2 + a^2 e \backsim 2dae.$$

Divisez tous les termes par e :

$$de + a^2 \backsim 2da.$$

Supprimez de : il reste $a^2 = 2da$, donc : $a = 2d$.

Nous prouvons ainsi que CE est double de CD, ce qui est conforme à la vérité.

Cette méthode ne trompe jamais, et peut s'étendre à nombre de questions très belles; grâce à elle, nous avons trouvé les centres de gravité de figures terminées par des lignes droites et courbes, aussi bien que ceux de solides et nombre d'autres choses dont nous pourrons traiter ailleurs, si nous en avons le loisir.

Quant à la quadrature des aires limitées par des lignes courbes et droites, ainsi qu'au rapport que les solides qu'elles engendrent ont aux cônes de même base et même hauteur, nous en avons déjà longuement traité avec M. de Roberval.

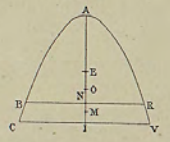
II.

CENTRE DE GRAVITÉ DU CONOIDE PARABOLIQUE,

D'APRÈS LA MÊME MÉTHODE.

Soit CBAV (*fig.* 93) un conoïde parabolique, ayant pour axe IA, et pour base un cercle de diamètre CIV. Cherchons son centre de gravité par cette méthode toujours et toujours la même, qui nous a servi pour

Fig. 93.



les maxima, les minima et les tangentes des lignes courbes, et prouvons ainsi, par de nouveaux exemples et par un nouvel et brillant emploi de cette méthode, l'erreur de ceux qui croient qu'elle peut être en défaut.

Pour pouvoir arriver à l'analyse, posons IA $= b$. Soit O le centre de gravité; appelons a la longueur AO inconnue; coupons l'axe IA par un plan quelconque BN, et posons IN $= e$, d'où NA $= b - e$.

Il est clair que, dans cette figure et les semblables (paraboles ou paraboliques), les centres de gravité, dans les segments retranchés par les parallèles à la base, divisent les axes dans un rapport constant (il est évident, en effet, que la démonstration d'Archimède pour la parabole peut s'étendre, par un raisonnement identique, à toutes les paraboles et aux conoïdes paraboliques). Donc le centre de gravité du segment, dont NA est l'axe et BN le rayon de base, divisera AN en un point comme E, en sorte que $\frac{NA}{AE} = \frac{IA}{AO}$, ou, en notes, $\frac{b}{a} = \frac{b-e}{AE}$.

La portion de l'axe sera donc $AE = \frac{ba - ae}{b}$, et l'intervalle des deux centres de gravité, $OE = \frac{ae}{b}$.

Soit M le centre de gravité de la partie restante CBRV; il doit nécessairement tomber entre les points N, I, à l'intérieur de la figure, d'après le postulatum 9 d'Archimède *De æquiponderantibus*, puisque CBRV est une figure entièrement concave par rapport à son intérieur.

Mais $\frac{\text{Partie CBRV}}{\text{Partie BAR}} = \frac{EO}{OM}$, puisque O est le centre de gravité de la figure totale CAV et que E et M sont ceux des parties.

Or dans le conoïde d'Archimède, $\frac{\text{Partie CAV}}{\text{Partie BAR}} = \frac{IA^2}{NA^2} = \frac{b^2}{b^2 + e^2 - 2be}$; donc, *dividendo* : $\frac{\text{Partie CBRV}}{\text{Partie BAR}} = \frac{2be - e^2}{b^2 + e^2 - 2be}$. Mais nous avons prouvé que $\frac{\text{Partie CBRV}}{\text{Partie BAR}} = \frac{OE}{OM}$. Donc, en notes, $\frac{2be - e^2}{b^2 + e^2 - 2be} = \frac{OE\left(=\frac{ae}{b}\right)}{OM}$; d'où $OM = \frac{b^2ae + ae^3 - 2bae^2}{2b^2a - be^2}$.

D'après ce qui a été établi, le point M est entre les points N et I; donc OM $<$ OI; or, en notes, OI $= b - a$. La question est donc ramenée à notre méthode, et l'on peut poser

$$b - a \backsim \frac{b^2ae + ae^3 - 2bae^2}{2b^2e - be^2}.$$

Multipliant de part et d'autre par le dénominateur, et divisant par e :

$$2b^3 - 2b^2a - b^2e + bae \backsim b^2a + ae^2 - 2bae.$$

Puisqu'il n'y a pas de termes communs, supprimons tous ceux où entre e et égalons les autres :

$$2b^3 - 2b^2a = b^2a, \qquad \text{d'où} \qquad 3a = 2b.$$

Par conséquent $\frac{IA}{AO} = \frac{3}{2}$, et $\frac{AO}{OI} = \frac{2}{1}$. C. Q. F. T.

La même méthode s'applique à tous les centres de gravité de toutes les paraboles à l'infini, comme à ceux des conoïdes paraboliques. Je n'ai pas le temps d'indiquer, par exemple, comment on cherchera les

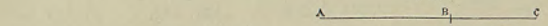
centres de gravité dans *notre conoïde parabolique de révolution autour de l'ordonnée;* qu'il suffise de dire que, dans ce conoïde, le centre de gravité divise l'axe en deux segments qui sont dans le rapport $\frac{11}{5}$.

III.

SUR LA MÊME MÉTHODE.

Je veux, au moyen de ma méthode, *partager la ligne donnée* AC (*fig.* 94) *au point* B, *en sorte que* $AB^2 \times BC$ *soit le maximum* de tous les solides que l'on peut former de la même façon en partageant la ligne AC.

Fig. 94.



Posons, en notations algébriques, $AC = b$, l'inconnue $AB = a$; on aura $BC = b - a$ et le solide $a^2b - a^3$ doit satisfaire à la condition proposée.

Prenons maintenant $a + e$ au lieu de a, on aura pour le solide

$$(a+e)^2(b-e-a) = ba^2 + be^2 + 2bae - a^3 - 3ae^2 - 3a^2e - e^3.$$

Je le compare au premier solide; $a^2b - a^3$, comme s'ils étaient égaux, quoiqu'en fait ils ne le soient point. C'est cette comparaison que j'appelle *adégalité*, pour parler comme Diophante, car on peut ainsi traduire le mot grec παρισότης dont il se sert.

Je retranche ensuite de part et d'autre les termes communs, c'est-à-dire $ba^2 - a^3$. Cela fait, dans un membre il ne reste rien, dans l'autre on a $be^2 + 2bae - 3ae^2 - 3a^2e - e^3$. Il faut donc comparer les termes en plus et ceux en moins; on a ainsi une seconde *adégalité* entre $be^2 + 2bae$ d'une part, $3ae^2 + 3a^2e + e^3$ de l'autre. Divisons tous les termes par e, l'*adégalité* aura lieu entre $be + 2ba$ et $3ae + 3a^2 + e^2$. Après cette division, si tous les termes peuvent encore être divisés par e, il faut réitérer la division, jusqu'à ce qu'on

ait un terme qui ne se prête plus à cette division par e, ou, pour employer le langage de Viète, qui ne soit plus affecté de e. Mais, dans l'exemple proposé, nous trouvons que la division ne peut être réitérée. Il faut donc s'arrêter là.

Maintenant je supprime tous les termes affectés de e; il me reste d'une part $2ba$, de l'autre $3a^2$, membres entre lesquels il faut établir, non plus comme auparavant, une comparaison feinte ou une *adégalité*, mais bien une véritable équation. Je divise de part et d'autre par a; j'ai donc $2b = 3a$ ou $\frac{b}{a} = \frac{3}{2}$.

Revenons à notre question, et divisons AC en B en sorte que $\frac{AC}{AB} = \frac{3}{2}$, je dis que le solide $AB^2 \times BC$ est le maximum de tous ceux qui peuvent être formés sur la ligne AC, par une autre division quelconque.

Pour établir la certitude de cette méthode, je prendrai un exemple du Livre d'Apollonius, *De la section déterminée*, lequel au rapport de Pappus (Livre VII, commencement) renfermait des limitations difficiles et notamment celle qui suit et que je considère comme la plus difficile. Pappus (Livre VII) la suppose trouvée et, sans la démontrer vraie, la regarde comme telle et en tire d'autres conséquences. En cet endroit, Pappus appelle un rapport minimum μοναχὸν καὶ ἐλάχιστον (singulier et minimum), parce que, si l'on propose une question sur des grandeurs données, et qu'elle soit en général satisfaite par deux points, pour les valeurs maxima ou minima, il n'y aura qu'un point qui satisfasse. C'est pour cela que Pappus appelle *minimum* et *singulier* (c'est-à-dire unique) le plus petit rapport de tous ceux qui peuvent être proposés dans la question. Commandin doute en cet endroit de la signification du terme μοναχός qu'emploie Pappus, parce qu'il ignore la vérité que je viens d'expliquer.

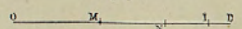
Voici la proposition. — *Soit une droite donnée* OMID (*fig.* 95) *et sur cette droite quatre points donnés* O, M, I, D. *Il faut diviser le segment* MI *en un point* N, *en sorte que* $\frac{ON \times ND}{MN \times MI}$ *soit un rapport plus petit que celui de deux autres rectangles semblables quelconques* $\frac{ON \times ND}{MN \times NI}$.

Posons les données OM $= b$, DM $= z$, MI $= g$, et soit maintenant l'inconnue MN $= a$. On aura donc en notations

$$\text{ON} \times \text{ND} = bz - ba + za - a^2, \qquad \text{MN} \times \text{NI} = ga - a^2.$$

Il faut donc que le rapport $\frac{bz - ba + za - a^2}{ga - a^2}$ soit le plus petit de tous ceux qui peuvent être obtenus par une division quelconque de la droite MI.

Fig. 95.



Substituons maintenant $a + e$ à a, nous aurons le rapport

$$\frac{bz - ba - be + za + ze - a^2 - e^2 - 2ae}{ga + ge - a^2 - e^2 - 2ae},$$

qu'il faut comparer par *adégalité* au premier, c'est-à-dire qu'on multipliera d'un côté le premier terme par le quatrième, de l'autre, le second par le troisième, et que l'on comparera les deux produits :

$$\underset{\text{premier terme}}{(bz - ba + za - a^2)}\,\underset{\text{dernier terme}}{(ga + ge - a^2 - e^2 - 2ae)}$$
$$= bzga - gba^2 + gza^2 - ga^3 + bzge - bage + zage - a^2ge - bza^2 + ba^3 - za^3 + a^4 + bzc^2 + bae^2 - zae^2 + a^2e^2 - 2bzae + 2ba^2e - 2za^2e + 2a^3e.$$

D'autre part,

$$\underset{\text{second terme}}{(ga - a^2)}\,\underset{\text{troisième terme}}{(bz - ba - be + za + ze - a^2 - e^2 - 2ae)}$$
$$= bzga - gba^2 - gbae + gza^2 + gzae - ga^3 - gae^2 - 2ga^2e - bza^2 + ba^3 + ba^2e - za^3 - za^2e + a^4 + a^2e^2 + 2a^3e.$$

Je compare ces deux produits par *adégalité*; retranchant les termes communs et divisant par e,

$$bzg - a^2g - bze + bae - zae - 2bza - 2za^2 + 2ba^2$$
$$= -gae - 2ga^2 + ba^2 - za^2.$$

Supprimant tous les termes où se trouve encore e, il reste

$$bzg - a^2g - 2bza - 2za^2 + 2ba^2 = -2ga^2 + ba^2 - za^2,$$

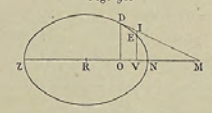
et, en transposant,

$$-ba^2 + za^2 - ga^2 + 2bza = bzg.$$

En résolvant cette équation, nous trouverons la valeur de a ou de MN, par suite le point N, et nous vérifierons la proposition de Pappus, qui enseigne que, pour trouver le point N, il faut faire $\frac{\text{OM.MD}}{\text{OI.ID}} = \frac{\text{MN}^2}{\text{NI}^2}$; car la résolution de l'équation nous conduira à la même construction.

Pour appliquer aussi cette même méthode aux *tangentes*, je puis procéder comme suit. Soit, par exemple, l'ellipse ZDN (*fig.* 96),

Fig. 96.



d'axe ZN et de centre R. Prenons sur sa circonférence un point comme D, menons par ce point la tangente DM à l'ellipse et l'ordonnée DO. Posons, en notations algébriques, la donnée OZ $= b$ et la donnée ON $= g$; soit l'inconnue OM $= a$, en comprenant par OM la portion de l'axe comprise entre le point O et le point de rencontre avec la tangente.

Puisque DM est tangente à l'ellipse, si, par un point V pris *ad libitum* entre O et N, je mène IEV parallèle à DO, il est évident que la ligne IEV coupe la tangente DM et l'ellipse, soit aux points E et I. Mais, puisque DM est tangente à l'ellipse, tous ses points, sauf D, sont en dehors de l'ellipse, donc IV $>$ EV et $\frac{\text{DO}^2}{\text{EV}^2} > \frac{\text{DO}^2}{\text{IV}^2}$. Mais, d'après la propriété de l'ellipse, $\frac{\text{DO}^2}{\text{EV}^2} = \frac{\text{ZO.ON}}{\text{ZV.VN}}$, et d'autre part $\frac{\text{DO}^2}{\text{IV}^2} = \frac{\text{OM}^2}{\text{VM}^2}$. Donc $\frac{\text{ZO.ON}}{\text{ZV.VN}} > \frac{\text{OM}^2}{\text{VM}^2}$.

Soit l'arbitraire $OV = e$, nous aurons

$$ZO.ON = bg, \qquad ZV.VN = bg - be + ge - e^2,$$
$$OM^2 = a^2, \qquad VM^2 = a^2 + e^2 - 2ae.$$

Donc $\frac{bg}{bg - be + ge - e^2} > \frac{a^2}{a^2 + e^2 - 2ae}$. Si donc on multiplie le premier terme par le dernier et le second par le troisième, on aura

$$\underbrace{bga^2 + bge^2 - 2bgae}_{\text{produit du premier terme par le dernier}} > bga^2 - bea^2 + gea^2 - a^2e^2.$$

Il faut donc, suivant ma méthode, comparer par adégalité ces deux produits, retrancher ce qui leur est commun et diviser ce qui reste par e; on aura donc

$$bge - 2bga \backsim - ba^2 + ga^2 - a^2e.$$

Supprimant les termes où reste e,

$$-2bga \backsim - ba^2 + ga^2,$$

membres qu'il faut égaler, d'après la méthode. Transposant comme il convient, on aura $ba - ga = 2bg$.

On voit que cette solution est la même que celle d'Apollonius, car, d'après ma construction, pour trouver la tangente, il faut faire $\frac{b-g}{g} = \frac{2b}{a}$ ou $\frac{ZO - ON}{ON} = \frac{2ZO}{OM}$, tandis que, d'après celle d'Apollonius, il faut faire $\frac{ZO}{ON} = \frac{ZM}{MN}$. Il est clair que ces deux constructions reviennent au même.

Je pourrais ajouter nombre d'autres exemples, tant du premier que du second cas de ma méthode, mais ceux-ci suffisent, et prouvent assez qu'elle est générale et ne tombe jamais en défaut.

Je n'ajoute pas la démonstration de la règle, ni les nombreuses autres applications qui pourraient en confirmer la haute valeur, comme l'invention des centres de gravité et des asymptotes, dont j'ai envoyé un exemple au savant M. de Roberval.

IV.

MÉTHODE DU MAXIMUM ET MINIMUM.

En étudiant la méthode de la *syncrise* et de l'*anastrophe* de Viète, et en poursuivant soigneusement son application à la recherche de la constitution des équations corrélatives, il m'est venu à l'esprit d'en dériver un procédé pour trouver le maximum ou le minimum et pour résoudre ainsi aisément toutes les difficultés relatives aux conditions limites, qui ont causé tant d'embarras aux géomètres anciens et modernes.

Les maxima et minima sont en effet uniques et singuliers, comme le dit Pappus et comme le savaient déjà les anciens, quoique Commandin avoue ignorer ce que signifie dans Pappus le terme μοναχῶς (singulier). Il suit de là que, de part et d'autre du point constitutif de la limite, on peut prendre une équation ambiguë; que les deux équations ambiguës ainsi prises sont dès lors corrélatives, égales et semblables.

Soit, par exemple, proposé de *partager la droite b en sorte que le produit de ses segments soit maximum*. Le point satisfaisant à cette question est évidemment le milieu de la droite donnée, et le produit maximum est égal à $\frac{b^2}{4}$; aucune autre division de cette droite ne donnera un produit égal à $\frac{b^2}{4}$.

Mais si l'on propose de partager la même droite b en sorte que le produit des segments soit égal à z^u (cette aire étant d'ailleurs à supposer plus petite que $\frac{b^2}{4}$), on aura deux points satisfaisant à la question, et ils se trouveront situés de part et d'autre du point correspondant au produit maximum.

Soit en effet a un des segments de la droite b, on aura $ba - a^2 \backsim z^u$, équation ambiguë, puisque pour la droite a on peut prendre chacune

des deux racines. Soit donc l'équation corrélative $be - e^2 = z^{II}$. Comparons ces deux équations d'après la méthode de Viète :

$$ba - be = a^2 - e^2.$$

Divisant de part et d'autre par $a - e$, il viendra

$$b = a + e;$$

les longueurs a et e seront d'ailleurs inégales.

Si, au lieu de l'aire z^{II}, on en prend une autre plus grande, quoique toujours inférieure à $\frac{b^2}{4}$, les droites a et e différeront moins entre elles que les précédentes, les points de division se rapprochant davantage du point constitutif du produit maximum. Plus le produit des segments augmentera, plus au contraire diminuera la différence entre a et e, jusqu'à ce qu'elle s'évanouisse tout à fait pour la division correspondant au produit maximum; dans ce cas, il n'y a qu'une solution unique et singulière, les deux quantités a et e devenant égales.

Or la méthode de Viète, appliquée aux deux équations corrélatives ci-dessus, nous a conduit à l'égalité $b = a + e$; donc, si $e = a$ (ce qui arrivera constamment pour le point constitutif du maximum ou du minimum), on aura, dans le cas proposé, $b = 2a$, c'est-à-dire que, si l'on prend le milieu de la droite b, le produit des segments sera maximum.

Prenons un autre exemple : *Soit à partager la droite b de telle sorte que le produit du carré de l'un des segments par l'autre soit maximum.*

Soit a l'un des segments : on doit avoir $ba^2 - a^3$ maximum. L'équation corrélative égale et semblable est $be^2 - e^3$. Comparons ces deux équations d'après la méthode de Viète :

$$ba^2 - be^2 = a^3 - e^3;$$

divisant de part et d'autre par $a - e$, il vient

$$ba + be = a^2 + ae + e^2,$$

ce qui donne la constitution des équations corrélatives.

Pour trouver le maximum, faisons $e = a$; il vient

$$2ba = 3a^2 \quad \text{ou} \quad 2b = 3a;$$

le problème est résolu.

Toutefois, comme pratiquement les divisions par un binome sont généralement compliquées et trop pénibles, il est préférable, en comparant les équations corrélatives, de mettre en évidence les différences des racines, pour n'avoir à opérer qu'une simple division par cette différence.

Soit à chercher le maximum de $b^2a - a^3$. D'après les règles de la méthode précitée, on devrait prendre pour équation corrélative $b^2e - e^3$. Mais puisque e, aussi bien que a, est une inconnue, rien ne nous empêche de la désigner par $a + e$; on aura de la sorte

$$b^2a + b^2e - a^3 - e^3 - 3a^2e - 3e^2a = b^2a - a^3.$$

Il est clair que, si l'on supprime les termes semblables, tous ceux qui resteront seront affectés de l'inconnue e; ceux en a seul se trouvent en effet les mêmes de part et d'autre. On a ainsi

$$b^2e = e^3 + 3a^2e + 3e^2a,$$

et, en divisant tous les termes par e,

$$b^2 = e^2 + 3a^2 + 3ae,$$

ce qui donne la constitution des deux équations corrélatives sous cette forme.

Pour trouver le maximum, il s'agit d'égaler les racines des deux équations, afin de satisfaire aux règles de la première méthode, dont notre nouveau procédé tire sa raison et sa façon d'opérer.

Ainsi il faut égaler a à $a + e$, d'où $e = 0$. Mais, d'après la constitution que nous avons trouvée pour les équations corrélatives,

$$b^2 = e^2 + 3a^2 + 3ae;$$

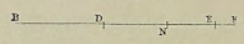
nous devons donc supprimer, dans cette égalité, tous les termes affec-

tés de e, comme se réduisant à 0; il restera $b^2 = 3a^2$, équation qui donnera le maximum cherché pour le produit dont il s'agit.

Pour montrer plus complètement la généralité de cette double méthode, considérons de nouveaux genres d'équations corrélatives dont Viète n'a pas traité et que nous emprunterons au Livre de la *Section déterminée* d'Apollonius (dans Pappus, Livre VII, prop. 61), dont les conditions de limites sont expressément reconnues comme difficiles par Pappus.

Soit la droite BDEF (*fig.* 97), *sur laquelle on donne les points* B, D, E, F. *Trouver entre les points* D *et* E *un point* N *tel que le rapport des produits* BN × NF *et* DN × NE *soit minimum.*

Fig. 97.



Posons DE $= b$, DF $= z$, BD $= d$, DN $= a$; il faut que le rapport $\frac{dz - da + za - a^2}{ba - a^2}$ soit minimum.

Le rapport corrélatif semblable et égal est $\frac{dz - de + ze - e^2}{be - e^2}$, d'après notre première méthode. Égalons les produits des termes moyens et des extrêmes, nous aurons

$$dzbe - dze^2 - dabe + dae^2 + zabe - zae^2 - a^2be + a^2e^2 = dzba - dza^2 - deba + dea^2 + zeba - zea^2 - e^2ba + e^2a^2.$$

Supprimant les termes semblables et faisant les transpositions convenables :

$$dzba - dzbe + dea^2 - dae^2 - zea^2 + zae^2 + a^2be - e^2ba = dza^2 - dze^2.$$

Divisant de part et d'autre par $a - e$ (ce qui sera très facile, si l'on prend ensemble les termes corrélatifs; ainsi $\frac{dzba - dzbe}{a - e} = dzb$, et de même $\frac{dea^2 - dae^2}{a - e} = dae$, etc.; il est aisé de disposer les termes corrélatifs pour obtenir ces divisions), on aura, après la division,

$$dzb + dae - zae + bae = dza + dze,$$

égalité qui donne la constitution des deux équations corrélatives.

Pour passer de cette constitution au minimum, il faut, d'après la méthode, faire $e = a$, d'où

$$dzb + da^2 - za^2 + ba^2 = 2dza;$$

la résolution de cette équation donnera la valeur de a, pour laquelle le rapport proposé sera minimum.

L'analyste ne sera pas arrêté par ce que cette équation a deux racines, car celle qu'il faut prendre se trahira d'elle-même, quand on ne voudrait pas la reconnaître. Même avec des équations ayant plus de deux racines, un analyste tant soit peu sagace pourra toujours se servir de l'une ou de l'autre de nos méthodes.

Mais il est clair, d'après l'exemple que nous venons de traiter en dernier lieu, que la première de ces deux méthodes sera en général d'un emploi peu commode, par suite de ces divisions répétées par un binome. Il faut donc recourir à la seconde qui, quoique simplement dérivée de la première, comme je l'ai dit, procurera aux habiles analystes une facilité surprenante et d'innombrables abréviations; bien plus, elle s'appliquera, avec une aisance et une élégance bien supérieures, à la recherche des tangentes, des centres de gravité, des asymptotes et autres questions pareilles.

C'est donc avec la même confiance que jadis, que j'affirme toujours aujourd'hui que la recherche du maximum et du minimum se ramène à cette règle unique et générale, dont l'heureux succès sera toujours légitime et non pas dû au hasard, comme certains l'ont pensé.

Soit a une inconnue (*voir* page 121, ligne 6 à ligne dernière)... *sa première expression.*

S'il reste encore quelqu'un qui considère cette méthode comme due à un heureux hasard, il peut bien essayer d'en rencontrer un pareil.

Quant à celui qui ne l'approuverait pas, je lui proposerai ce problème :

Étant donnés trois points, en trouver un quatrième tel que la somme de ses distances aux trois points donnés soit minima.

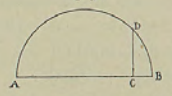
V.

APPENDICE A LA MÉTHODE DU MAXIMUM ET MINIMUM.

Dans le cours des questions, il se présente souvent des radicaux; l'analyste ne doit pas alors hésiter à employer une troisième inconnue, ou, s'il le faut, à en poser un plus grand nombre encore; on pourra en effet de la sorte éviter les élévations aux puissances qui, en se répétant, compliquent d'ordinaire les calculs. L'artifice de cette méthode va être expliqué par les exemples qui suivent :

Soit un demi-cercle de diamètre AB (*fig.* 98), *avec la perpendiculaire* DC *au diamètre. On demande le maximum de la somme* AC + CD.

Fig. 98.



Soit b le diamètre, posons AC $= a$; on aura donc CD $= \sqrt{ba - a^2}$. La question est ramenée à rendre maxima la quantité $a + \sqrt{ba - a^2}$.

En appliquant les règles de la méthode, on arriverait à *adégaler* des expressions dont le degré serait trop élevé; désignons donc par $\bar{o}$ la quantité maxima; car pourquoi abandonnerions-nous l'usage adopté par Viète de représenter par des voyelles les quantités inconnues (¹)?

(¹) Pour conserver la notation de Fermat, tout en évitant la confusion avec le zéro, nous surmontons d'un trait la voyelle *o*.

Nous aurons donc $a + \sqrt{ba - a^2} = \bar{o}$; donc $\bar{o} - a = \sqrt{ba - a^2}$, et en élevant au carré :

$$\bar{o}^2 + a^2 - 2\bar{o}a = ba - a^2.$$

Cela fait, il faut effectuer une transposition de façon qu'un membre de l'équation soit formé par le seul terme où $\bar{o}$ figure à la plus haute puissance; on pourra dès lors déterminer le maximum, ce qui est le but de l'artifice. Cette transposition nous donne

$$ba - 2a^2 + 2\bar{o}a = \bar{o}^2.$$

Mais par hypothèse $\bar{o}$ est la quantité maxima; donc $\bar{o}^2$, carré d'une quantité maxima, sera lui-même un maximum; par conséquent, $ba - 2a^2 - 2\bar{o}a$ (expression égale à $\bar{o}^2$) sera un maximum. Il n'y figure d'ailleurs aucun radical; traitons-la, d'après la méthode, comme si $\bar{o}$ était une quantité connue. Nous aurons l'*adégalité*

$$ba - 2a^2 + 2\bar{o}a \backsim ba + be - 2a^2 - 2e^2 - 4ae + 2\bar{o}a + 2\bar{o}e.$$

Supprimons les termes communs, et divisons les autres par e,

$$b + 2\bar{o} \backsim 2e + 4a.$$

Supprimons $2e$ d'après la règle; nous aurons

$$b + 2\bar{o} = 4a, \quad \text{d'où} \quad 4a - b = 2\bar{o} \quad \text{ou} \quad 2a - \tfrac{1}{2}b = \bar{o}.$$

Cette égalité étant établie par la méthode, il faut revenir à la première, dans laquelle nous avons posé $a + \sqrt{ba - a^2} = \bar{o}$.

Mais nous venons de trouver $\bar{o} = 2a - \frac{1}{2}b$; donc

$$2a - \tfrac{1}{2}b = a + \sqrt{ba - a^2}, \quad \text{d'où} \quad a - \tfrac{1}{2}b = \sqrt{ba - a^2}.$$

Élevons au carré :

$$a^2 + \tfrac{1}{4}b^2 - ba = ba - a^2,$$

d'où enfin

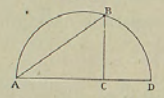
$$ba - a^2 = \tfrac{1}{8}b^2;$$

de cette dernière équation on tirera la valeur de a correspondant au maximum cherché.

Nous pouvons employer le même artifice pour trouver *le cône de surface maxima qui peut être inscrit dans une sphère donnée.*

Soient AD (*fig.* 99) le diamètre de cette sphère, AC la hauteur du cône cherché, AB son côté, BC son rayon de base. Il faudra, d'après Archimède, que la somme $AB \times BC + BC^2$ soit maxima.

Fig. 99.



Soit b le diamètre; posons $AC = a$. Nous aurons $AB = \sqrt{ba}$, $BC = \sqrt{ba - a^2}$.

$$AB \times BC + BC^2 = \sqrt{b^2a^2 - ba^3} + ba - a^2.$$

Égalons cette somme à l'aire maxima, soit $\overset{-pl.}{o}$:

$$\overset{-pl.}{o} + a^2 - ba = \sqrt{b^2a^2 - ba^3}.$$

Élevons au carré, etc.; la méthode que nous avons indiquée conduira à une équation donnant $\overset{-pl.}{o}$, et permettant ainsi de résoudre celle que nous venons de poser.

Cependant, dans l'exemple choisi, on peut obtenir la solution sans prendre une troisième inconnue; car on peut ramener le problème à chercher, en se donnant la droite AB dans le triangle CBA, quel est le maximum du rapport $\frac{CB \times BA + CB^2}{AD^2}$, et, dans ce cas, la méthode ordinaire est suffisante.

Soit b la droite donnée AB; posons $CB = a$, nous aurons $AC^2 = b^2 - a^2$. Mais $\frac{AC^2}{AB^2} = \frac{AB^2}{AD^2}$; donc $AD^2 = \frac{b^4}{b^2 - a^2}$. Or nous voulons que le rapport de $ba + a^2$ à cette dernière expression soit maximum.

Multiplions haut et bas par $b^2 - a^2$; le rapport $\frac{b^4}{b^3a + b^2a^2 - ba^3 - a^4}$ doit être minimum. Mais b^4 est donné, comme puissance de la donnée b; donc la quantité $b^3a + b^2a^2 - ba^3 - a^4$ doit être maxima.

La méthode conduira à l'équation

$$b^3 + 2b^2a = 3ba^2 + 4a^3,$$

dont le degré s'abaisse immédiatement (1) :

$$4a^3 - ba = b^2;$$

la solution est dès lors évidente.

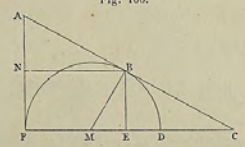
Nous ne nous arrêtons pas davantage sur un sujet désormais éclairci; on voit comment, en recourant à une troisième ou à une quatrième inconnue, et, s'il le faut, en multipliant encore le nombre des positions auxiliaires, on peut se débarrasser des radicaux et de tous les autres obstacles qui peuvent arrêter l'analyste.

Cependant, et quoique l'invention des tangentes découle elle-même de la méthode générale, on peut remarquer que, dans certains cas, les questions de maximum ou minimum peuvent se résoudre plus élégamment et peut-être plus géométriquement, au moyen de la construction d'une tangente.

Donnons-en un seul exemple, qui peut valoir pour plusieurs :

Dans un demi-cercle FBD (*fig.* 100), *on mène la perpendiculaire* BE; *on demande le maximum du produit* $FE \times EB$.

Fig. 100.



Si, d'après notre méthode, on cherche à construire le rectangle $FE \times EB$ en s'en donnant la valeur, la question se ramène à décrire une hyperbole ayant pour asymptotes AF, FC, et pour laquelle les produits des abscisses FE par les ordonnées EB aient la valeur donnée;

(1) En tenant compte de la racine $a = -b$.

les points d'intersection de l'hyperbole et du demi-cercle satisferont à la question. Mais, comme le produit FE × EB doit être maximum, il s'agit en fait de construire une hyperbole qui ait pour asymptotes AF, FC et qui, au lieu de couper le demi-cercle, lui soit tangente, soit en B; car les points de contact déterminent les quantités maxima ou minima.

Supposons le problème résolu : si l'hyperbole touche le demi-cercle en B, la tangente en B au demi-cercle sera également tangente à l'hyperbole. Soit ABC cette droite. Elle est tangente à l'hyperbole en B et rencontre les asymptotes en A et C; donc, d'après Apollonius, AB = BC; par suite, FE = EC et AF = 2BE = 2AN. Mais, comme tangente au cercle, BA = AF; donc BA = 2AN, et à cause de la similitude des triangles, si M est le centre, MB = 2ME. Mais le rayon MB est donné; donc le point E le sera.

On peut de même ramener en général toute recherche de maximum ou de minimum à la construction géométrique d'une tangente; mais cela ne diminue en rien l'importance de la méthode générale, puisque la construction des tangentes en dépend, aussi bien que la détermination des maxima et des minima.

VI.

SUR LA MÊME MÉTHODE.

La théorie des tangentes est une suite de la méthode, dès longtemps publiée pour l'invention du maximum et du minimum, qui permet de résoudre très aisément toutes les questions de limitation, et notamment ces fameux problèmes dont les conditions-limites sont indiquées comme difficiles par Pappus (Livre VII, préf.).

Les lignes courbes dont nous cherchons les tangentes ont leurs propriétés spécifiques exprimables, soit par des lignes droites seulement,

soit encore par des courbes compliquées comme on voudra avec des droites ou d'autres courbes.

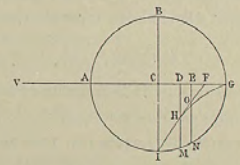
Nous avons déjà satisfait au premier cas par notre règle, qui, trop concise, a pu paraître difficile, mais cependant a été reconnue légitime.

Nous considérons en fait dans le plan d'une courbe quelconque deux droites données de position, dont on peut appeler l'une *diamètre*, l'autre *ordonnée*. Nous supposons la tangente déjà trouvée en un point donné sur la courbe, et nous considérons par *adégalité* la propriété spécifique de la courbe, non plus sur la courbe même, mais sur la tangente à trouver. En éliminant, suivant notre théorie des maxima et minima, les termes qui doivent l'être, nous arrivons à une égalité qui détermine le point de rencontre de la tangente avec le diamètre, par suite la tangente elle-même.

Aux nombreux exemples que j'ai déjà donnés, j'ajouterai celui de la tangente à la *cissoïde*, inventée, dit-on, par Dioclès.

Soient un cercle dont les deux diamètres AG, BI (*fig.* 101) se coupent normalement, et la cissoïde IHG, à laquelle, par un quelconque de ses points, soit H, il faut mener la tangente.

Fig. 101.



Supposons le problème résolu, et F l'intersection de CG et de la tangente HF. Posons DF = a, et, en prenant un point E quelconque entre D et F, DE = e.

D'après la propriété spécifique de la cissoïde : $\frac{MD}{DG} = \frac{DG}{DH}$, on aura

donc à exprimer analytiquement l'*adégalité* $\frac{NE}{EG} \backsimeq \frac{EG}{EO}$, EO étant la portion de la droite EN interceptée entre E et la tangente.

Soient la donnée AD $= z$, la donnée DG $= n$, la donnée DH $= r$, et, comme nous l'avons dit, l'inconnue DF $= a$, l'arbitraire DE $= e$.

On aura

$$EG = n - e, \qquad EO = \frac{ra - re}{a}, \qquad EN = \sqrt{zn - ze + ne - e^2}.$$

D'après la règle, il faut considérer la propriété spécifique, non pas sur la courbe, mais sur la tangente, et poser donc $\frac{NE}{EG} = \frac{EG}{EO}$, EO étant l'ordonnée de la tangente, ou, en notations analytiques,

$$\frac{\sqrt{zn - ze + ne - e^2}}{n - e} \backsimeq \frac{n - e}{\frac{ra - re}{a}};$$

carrant, pour se débarrasser du radical :

$$\frac{zn - ze + ne - e^2}{n^2 + e^2 - 2ne} \backsimeq \frac{n^2 + e^2 - 2ne}{\frac{r^2a^2 + r^2e^2 - 2r^2ae}{a^2}}.$$

Multipliant tous les termes par a^2, *et adégalant*, d'après la règle, le produit des extrêmes au carré du moyen, supprimant les termes superflus, conformément à la méthode, on aura enfin

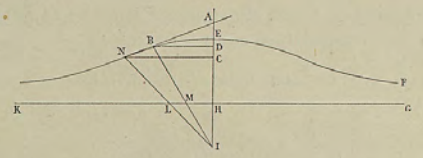
$$3za + na = 2zn.$$

D'où la construction suivante de la tangente : Prolongez le rayon CA du cercle donné jusqu'en V et prenez AV $=$ AC. Divisez AD $\times$ DG par VD, soit DF le quotient; joignez FH; vous aurez la tangente à la cissoïde.

Indiquons aussi la façon de procéder pour la *conchoïde de Nicomède*, mais indiquons-la seulement pour ne pas être trop long.

Soit la conchoïde de Nicomède construite sur la figure ci-contre (*fig.* 102), comme elle l'est dans Pappus et dans Eutocius : I est le pôle, KG l'asymptote à la courbe, IHE la perpendiculaire à l'asymptote, N un point donné sur la courbe, par lequel il faut mener une tangente NBA rencontrant IE en A.

Fig. 102.



Supposons le problème résolu, comme ci-dessus. Menons NC parallèle à KG. D'après la propriété spécifique de la courbe, LN $=$ HE. Prenons un point quelconque, soit D, entre C et E, et menons par ce point, parallèlement à CN, DB qui rencontre la tangente en B. Comme la propriété spécifique de la courbe doit être considérée sur la tangente, joignons BI qui rencontre KG en M; on doit adégaler, d'après les règles de l'art, MB et HE; on arrivera ainsi à l'équation cherchée. Pour cela, on posera, comme ci-dessus, CA $= a$, CD $= e$, EH $= z$, et on désignera de même les autres données par leurs noms. On trouvera facilement l'expression analytique de la droite MB, on l'*adégalera*, comme il a été dit, à la droite HE, et on résoudra la question.

Ce que j'ai dit paraît suffire pour le premier cas. Il est vrai qu'il y a une infinité d'artifices pour abréger les calculs dans la pratique; mais on peut facilement les déduire de ce qui précède.

Pour le second cas, que jugeait difficile M. Descartes, à qui rien ne l'est, on y satisfait par une méthode très élégante et assez subtile.

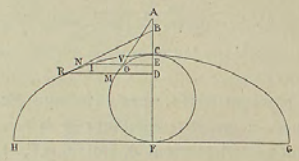
Tant que les termes sont formés seulement de lignes droites, on les cherche et on les désigne d'après la règle précédente. D'ailleurs, pour éviter les radicaux, il est permis de substituer aux ordonnées des courbes, celles des tangentes trouvées d'après la méthode précédente. Enfin, ce qui est le point important, aux arcs de courbes on peut substituer les longueurs correspondantes des tangentes déjà trouvées, et

arriver à l'*adégalité*, comme nous l'avons indiqué : on satisfera ainsi facilement à la question.

Prenons comme exemple la courbe de M. de Roberval [*cycloïde*].

Soient HBIC (*fig.* 103) la courbe, C son sommet, CF l'axe; décrivons le demi-cercle COMF, et prenons sur la courbe un point quelconque, soit R, duquel il faut mener la tangente RB.

Fig. 103.



Menons par ce point R, perpendiculairement à CDF, la droite RMD, coupant le demi-cercle en M. La propriété spécifique de la courbe est que la droite RD est égale à la somme de l'arc de cercle CM et de l'ordonnée DM. Menons, d'après la précédente méthode, la tangente MA au cercle (le même procédé serait en effet applicable si la courbe COM était d'une autre nature). Supposons la construction opérée, et soient l'inconnue $DB = a$, les droites trouvées par construction : $DA = b$, $MA = d$; les données $MD = r$, $RD = z$, l'arc de cercle donné $CM = n$, la droite arbitraire $DE = e$.

Par E menons EOVIN parallèle à la droite RMD; on a $\frac{a}{a-e} = \frac{z}{\text{NIVOE}}$; d'où $\text{NIVOE} = \frac{za - ze}{a}$.

Il faut donc *adégaler* (à cause de la propriété spécifique de la courbe qui est à considérer sur la tangente) cette droite $\frac{za - ze}{a}$ à la somme $OE + \text{arc}CO$.

Mais $\text{arc}CO = \text{arc}CM - \text{arc}MO$. Donc $\frac{za - ze}{a} \backsim OE + \text{arc}CM - \text{arc}MO$.

Pour obtenir l'expression analytique des trois derniers termes, tout en évitant les radicaux, on peut, d'après la remarque précédente, sub-

stituer, à OE, l'ordonnée EV de la tangente, et à l'arc MO, la portion de tangente MV qui lui est adjacente.

Pour trouver l'expression analytique de EV, on a d'ailleurs $\frac{b}{b-e} = \frac{r}{\text{EV}}$, d'où $\text{EV} = \frac{rb - re}{b}$.

Pour celle de MV, à cause des triangles semblables, comme ci-dessus, $\frac{b}{d} = \frac{e}{\text{MV}}$, d'où $\text{MV} = \frac{de}{b}$.

Enfin on a posé $\text{arc}CM = n$. On aura donc analytiquement

$$\frac{za - ze}{a} \backsim \frac{rb - re}{b} + n - \frac{de}{b}.$$

Multipliant, de part et d'autre, par ab :

$$zba - zbe \backsim rba - rae + bna - dae.$$

Mais, d'après la propriété de la courbe, $z = r + n$, donc $zba = rba + bna$. Supprimant les termes communs,

$$zbe \backsim rae + dae.$$

Divisons par e; comme il ne reste ici aucun terme superflu, il n'y a pas d'autre suppression à faire :

$$zb = ra + da, \qquad \text{d'où} \qquad \frac{r+d}{b} = \frac{z}{a}.$$

Pour la construction, on fera donc $\frac{\text{MA} + \text{MD}}{\text{DA}} = \frac{\text{RD}}{\text{DB}}$; on joindra BR qui touchera la courbe CR.

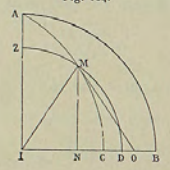
Mais comme $\frac{\text{MA} + \text{MD}}{\text{DA}} = \frac{\text{MD}}{\text{DC}}$, ainsi qu'il est facile de le démontrer, on peut faire $\frac{\text{MD}}{\text{DC}} = \frac{\text{RD}}{\text{DB}}$, ou, pour que la construction soit plus élégante, joindre MC et lui mener RB parallèle.

La même méthode donnera les tangentes à toutes les courbes de cette espèce. Nous avons indiqué il y a longtemps leur construction générale.

Comme il a été proposé de trouver la *tangente de la quadratrice ou quadratrice de Dinostrate*, voici comment nous la construisons d'après la méthode précédente.

Soient AIB (*fig.* 104) un quart de cercle, AMC la quadratrice, à laquelle il faut mener la tangente en un point donné M. Je joins MI; de I comme centre, avec IM comme rayon, je décris le quart de cercle ZMD, et, menant la perpendiculaire MN, je fais $\frac{MN}{IM} = \frac{\text{arc MD}}{IO}$. Je joins MO qui sera tangente à la quadratrice; que cela suffise.

Fig. 104.



Cependant il arrive souvent que la courbure change, comme dans la conchoïde de Nicomède (1er cas) et dans toutes les espèces, sauf la première, de la courbe de M. de Roberval (2e cas); pour pouvoir bien dessiner la courbe, il convient donc de rechercher mathématiquement les points d'inflexion, où la courbure devient concave de convexe, ou inversement. Cette question se résout élégamment par la méthode *de maximis et minimis*, grâce au lemme général suivant :

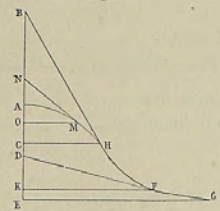
Soit la courbe AHFG (*fig.* 105) *dont la courbure change par exemple au point* H. *Menez la tangente* HB, *l'ordonnée* HC; *l'angle* HBC *sera le minimum entre tous ceux que la tangente fait avec l'axe* ACD, *qu'elle soit au-dessous ou au-dessus du point* H, comme il est facile de le démontrer.

Qu'on prenne en effet, au-dessus du point H, un point M; la tangente en ce point rencontrera l'axe entre A et B, soit en N; l'angle en N sera donc plus grand que l'angle en B.

De même, si l'on prend le point F au-dessous de H, le point D, où la tangente FD rencontre l'axe, sera au-dessous de B, et la tangente DF

rencontrera d'ailleurs la tangente BH du côté de FH; l'angle en D sera donc plus grand que l'angle en B.

Fig. 105.



Nous ne poursuivons pas tous les cas, nous indiquons seulement le mode de recherche, les formes des courbes variant indéfiniment.

Pour donc trouver, par exemple, le point H sur la figure, on cherchera d'abord, d'après la méthode précédente, la propriété de la tangente en un point quelconque de la courbe. Puis, par la doctrine *de maximis et minimis*, on déterminera le point H tel qu'en menant la perpendiculaire HC et la tangente HB, le rapport $\frac{HC}{CB}$ soit minimum. Car ainsi l'angle en B sera minimum. Je dis que le point H ainsi trouvé sera celui où commence le changement de courbure.

La même méthode *de maximis et minimis* donne aussi, par un artifice singulier, l'invention du centre de gravité, comme je l'ai indiqué autrefois à M. de Roberval.

Mais, comme couronnement, on peut encore *trouver les asymptotes d'une courbe donnée*, recherche qui conduit à de remarquables propriétés pour les courbes indéfinies. Nous pourrons un jour les développer et les démontrer plus au long.

VII.

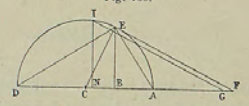
PROBLÈME ENVOYÉ AU R. P. MERSENNE

le 10 novembre 16[illegible].

Trouver le cylindre de surface maxima inscrit dans une sphère donnée.

Soit donnée une sphère de diamètre AD (*fig.* 106), de centre C. On demande d'y inscrire le cylindre de surface maxima.

Fig. 106.



Supposons le problème résolu; soient DE le diamètre de base du cylindre, EA son côté (on peut en effet donner cette position au cylindre, l'angle inscrit dans le demi-cercle étant droit). La surface du cylindre est proportionnelle à $DE^2 + 2DE.EA$: il faut donc chercher le maximum de la somme $DE^2 + 2DE.EA$.

Si l'on abaisse la perpendiculaire EB, on a, d'une part, $DE^2 = AD.DB$; de l'autre, $DE.EA = AD.BE$. Nous avons donc à chercher le maximum de la somme $AD.DB + 2AD.BE$, ou, en divisant les deux termes par la droite donnée AD, le maximum de la somme $DB + 2BE$.

Cette question est facile : qu'on fasse $CB = \frac{1}{2}BE$, ou, ce qui revient au même, $BC = \frac{CE}{\sqrt{5}}$, le point E satisfera au problème. Menons en effet la tangente EF qui rencontre en F le prolongement du diamètre; je dis que la somme $DB + 2BE$ est maxima.

En effet, puisque $CB = \frac{1}{2}BE$, $BE = \frac{1}{2}BF$; donc $BF = 2BE$; donc $DF = DB + 2BE$; il est clair ainsi que la somme $DB + 2BE$ est maxima.

Prenons en effet un point quelconque, soit I, sur le demi-cercle, et abaissons la perpendiculaire IN; par le même point I, menons IG parallèle à la tangente et rencontrant le diamètre en G. Ce point G tombera entre les points F et D, autrement la parallèle GI ne rencontrerait pas le demi-cercle. En raison du parallélisme, on a $\frac{FB}{BE} = \frac{GN}{NI}$; mais $FB = 2BE$; donc $GN = 2NI$ et, par suite, $GD = DN + 2NI$. Mais comme $GD(= DN + 2NI)$ est inférieure à $DF(= DB + 2BE)$, il s'ensuit que $DB + 2BE$ est un maximum et que le cylindre cherché aura pour base DE et pour côté EA.

On prouvera, d'après ce qui précède, que le rapport $\frac{DE}{EA}$ est celui du plus grand au plus petit segment d'une droite divisée en moyenne et extrême raison.

Nous pouvons d'ailleurs par le même procédé *trouver et construire un cylindre de surface donnée.*

On ramènera en effet la question à l'égalité entre la somme $DN + 2NI$ et une droite donnée, soit DG, qui, d'après la valeur trouvée pour le maximum, devra être au plus égale à DF. Menez GI parallèle à FE; le point I satisfera à la question et l'on pourra ainsi avoir tantôt deux cylindres, tantôt un seul répondant à la condition posée.

Si, en effet, le point G tombe entre F et A, deux cylindres différents satisferont au problème; mais si G tombe en A ou plus près de D, la solution sera unique.

VIII.

ANALYSE POUR LES RÉFRACTIONS.

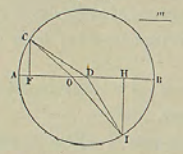
Soit ACBI (*fig.* 108) un cercle dont le diamètre AFDB sépare deux milieux de nature différente, le moins dense étant du côté ACB, le plus dense du côté AIB.

Soient D le centre du cercle et CD le rayon incident tombant sur ce centre du point C donné; on demande le rayon réfracté DI, ou autrement le point I par où passera le rayon après la réfraction.

Abaissez sur le diamètre les perpendiculaires CF, IH. Le point C

étant donné ainsi que le diamètre AB et le centre D, le point F et la droite FD seront également donnés. Supposons que le rapport de la résistance du milieu plus dense à celle du milieu moins dense soit celui de la droite donnée DF à une autre droite m donnée en dehors de la figure. On devra avoir $m < \mathrm{DF}$, la résistance du milieu moins dense devant être inférieure à celle du milieu plus dense, par un axiome plus que naturel.

Fig. 108.



Nous avons maintenant à mesurer, au moyen des droites m et DF, les mouvements suivant les droites CD et DI; nous pourrons ainsi représenter comparativement l'ensemble du mouvement sur ces deux droites par la somme de deux produits : $\mathrm{CD}.m + \mathrm{DI}.\mathrm{DF}$.

Ainsi la question est ramenée à partager le diamètre AB en un point H de telle sorte que si en ce point on élève la perpendiculaire HI, puis qu'on joigne DI, l'aire $\mathrm{CD}.m + \mathrm{DI}.\mathrm{DF}$ soit minima.

Nous emploierons à cet effet notre méthode, déjà répandue parmi les géomètres et exposée depuis environ vingt ans par Hérigone dans son *Cursus mathematicus*. Appelons n le rayon CD ou son égal DI, b la droite DF, et posons $\mathrm{DH} = a$. Il faut que la quantité $nm + nb$ soit minima.

Soit, pour l'inconnue e, une droite arbitraire DO; joignons CO, OI. En notations analytiques : $\mathrm{CO}^2 = n^2 + e^2 - 2be$, et $\mathrm{OI}^2 = n^2 + e^2 + 2ae$; donc

$$\mathrm{CO}.m = \sqrt{m^2n^2 + m^2e^2 - 2m^2be}, \qquad \mathrm{IO}.b = \sqrt{b^2n^2 + b^2e^2 + 2b^2ae}.$$

La somme de ces deux radicaux doit être *adégalée*, d'après les règles de l'art, à la somme $mn + bn$.

Pour faire disparaître les radicaux, on élèvera au carré, on supprimera les termes communs et l'on transposera de façon à ne laisser dans un des membres que le radical qui subsistera; puis on élèvera de nouveau au carré; après nouveau retranchement des termes communs de part et d'autre, division de tous les termes par e et suppression de ceux où e entrera encore, selon les règles de notre méthode généralement connue depuis longtemps, on arrivera, en ôtant les facteurs communs, à l'équation la plus simple possible entre a et m, c'est-à-dire qu'après avoir fait disparaître les obstacles opposés par les radicaux, on trouvera que la droite DH de la figure est égale à la droite m.

Par conséquent, pour trouver le point de réfraction, il faut, ayant mené les droites CD et CF, prendre les droites DF et DH dans le rapport de la résistance du milieu plus dense à celle du milieu moins dense, soit dans le rapport de b à m. On élèvera ensuite en H la perpendiculaire HI au diamètre; elle rencontrera le cercle en I, point où passera le rayon réfracté; et ainsi d'ailleurs le rayon, passant d'un milieu moins dense dans un plus dense, s'infléchira du côté de la perpendiculaire : ce qui concorde absolument et sans exception avec le théorème découvert par Descartes; l'analyse ci-dessus, dérivée de notre principe, donne donc de ce théorème une démonstration rigoureusement exacte.

IX.

SYNTHÈSE POUR LES RÉFRACTIONS.

Le savant Descartes a proposé pour les réfractions une loi qui est, comme on dit, conforme à l'expérience; mais, pour la démontrer, il a dû s'appuyer sur un postulat absolument indispensable à ses raisonnements, à savoir que le mouvement de la lumière se ferait plus facilement et plus vite dans les milieux denses que dans les rares; or ce postulat semble contraire à la lumière naturelle.

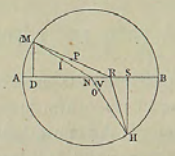
En cherchant, pour établir la véritable loi des réfractions, à partir du principe contraire, — à savoir que le mouvement de la lumière se fait plus facilement et plus vite dans les milieux rares que dans les denses, — nous sommes retombés précisément sur la loi que Descartes a énoncée. Est-il possible d'arriver sans paralogisme à une même vérité par deux voies absolument opposées, c'est une question que nous laissons à examiner aux géomètres assez subtils pour la résoudre rigoureusement; car, sans entrer dans de vaines discussions, la possession assurée de la vérité nous suffit et nous l'estimons préférable à une plus longue continuation de querelles inutiles et illusoires.

Notre démonstration s'appuie sur ce seul postulat que la nature opère par les moyens et les voies les plus faciles et les plus aisées. Car c'est ainsi que nous croyons qu'il doit être énoncé et non pas comme on le fait d'ordinaire en disant que la nature opère toujours par les lignes les plus courtes.

En effet, de même qu'en spéculant sur les mouvements naturels des graves, Galilée en mesure les rapports aussi bien par le temps que par l'espace, de même nous ne considérerons pas les espaces ou les lignes les plus courtes, mais celles qui peuvent être parcourues le plus facilement, le plus commodément et dans le temps le plus court.

Cela supposé, soient deux milieux de nature différente (*fig.* 109)

Fig. 109.



séparés par le diamètre ANB du cercle AHBM, le milieu le moins dense étant du côté de M, le plus dense du côté de H; menons de M vers H

les lignes quelconques MNH, MRH, brisées sur le diamètre aux points N et H.

La vitesse du mobile sur MN dans le milieu rare étant plus grande, d'après l'axiome ou le postulat, que la vitesse du même mobile sur NH, et les mouvements étant supposés uniformes dans chacun des deux milieux, le rapport du temps du mouvement sur MN au temps du mouvement sur NH sera, comme on sait, le produit du rapport de MN à NH et du rapport inverse des vitesses sur NH et sur MN. Soit donc posé $\frac{\text{vitesse sur MN}}{\text{vitesse sur NH}} = \frac{\text{MN}}{\text{NI}}$, on aura $\frac{\text{temps sur MN}}{\text{temps sur NH}} = \frac{\text{IN}}{\text{NH}}$.

On prouvera de même que si le rapport de la vitesse dans le milieu rare à la vitesse dans le milieu dense est $\frac{\text{MR}}{\text{RP}}$, on aura $\frac{\text{temps sur MR}}{\text{temps sur RH}} = \frac{\text{PR}}{\text{RH}}$. D'où il suit que $\frac{\text{temps sur MNH}}{\text{temps sur MRH}} = \frac{\text{IN} + \text{NH}}{\text{PR} + \text{RH}}$.

Or, puisque c'est la nature qui dirige la lumière du point M vers le point H, nous devons chercher un point, soit N, par lequel la lumière, en s'infléchissant ou se réfractant, parviendra dans le temps le plus court du point M au point H; car on doit admettre que la nature, qui mène le plus vite possible ses opérations, visera d'elle-même ce point-là. Si donc la somme IN + NH, qui mesure le temps du mouvement sur la ligne brisée MNH, est une quantité minima, nous aurons atteint notre but.

L'énoncé du théorème de Descartes donne ce minimum, comme nous allons aussitôt le prouver par un véritable raisonnement géométrique et sans aucune ambiguïté. Voici en effet cet énoncé :

Si du point M on mène le rayon MN, que du même point M on abaisse la perpendiculaire MD, puis que l'on prenne $\frac{\text{DN}}{\text{NS}}$ dans le rapport de la plus grande vitesse à la moindre, qu'enfin on élève en S la perpendiculaire SH et que l'on mène le rayon NH, la lumière incidente au point N dans le milieu rare se réfractera dans le milieu dense du côté de la perpendiculaire vers le point H.

C'est ce théorème qui est en accord avec notre Géométrie, comme il résulte de la proposition suivante purement géométrique.

Soit le cercle AHBM, dont ANB est un diamètre et N le centre; sur la circonférence de ce cercle je prends un point M quelconque, je mène le rayon MN et j'abaisse sur le diamètre la perpendiculaire MD. Soit donné d'autre part le rapport $\frac{DN}{NS}$, en supposant $DN > NS$; en S j'élève au diamètre la perpendiculaire SH qui rencontre la circonférence au point H; je joins ce point au centre par le rayon HN. Posons $\frac{DN}{NS} = \frac{MN}{NI}$; je dis que la somme $IN + NH$ est minima; c'est-à-dire que si l'on prend un autre point quelconque, R par exemple, sur le rayon NB, que l'on joigne MR, RH et que l'on fasse $\frac{DN}{NS} = \frac{MR}{RP}$, on aura $PR + RH > IN + NH$.

Pour le démontrer, faisons $\frac{MN}{DN} = \frac{RN}{NO}$ et $\frac{DN}{NS} = \frac{NO}{NV}$. Il est clair que, par construction, puisque DN est plus petit que le rayon MN, on aura $NO < NR$; de même, puisque $NS < ND$, on aura $NV < NO$.

Cela posé, on a, d'après Euclide : $MR^2 = MN^2 + NR^2 + 2DN.NR$; mais puisque, par construction, $\frac{MN}{DN} = \frac{NR}{NO}$, on a $MN.NO = DN.NR$; donc $2MN.NO = 2DN.NR$; donc $MR^2 = MN^2 + NR^2 + 2MN.NO$.

Mais, puisque $NR > NO$, $NR^2 > NO^2$; donc

$$MR^2 > MN^2 + NO^2 + 2MN.NO.$$

Mais la somme $MN^2 + NO^2 + 2MN.NO = (MN + NO)^2$. Donc

$$MR > MN + NO.$$

D'autre part, par construction, $\frac{DN}{NS} = \frac{MN}{NI} = \frac{NO}{NV}$; donc

$$\frac{DN}{NS} = \frac{MN + NO}{IN + NV}.$$

Mais on a aussi $\frac{DN}{NS} = \frac{MR}{RP}$; donc $\frac{MN + NO}{IN + NV} = \frac{MR}{RP}$. Or $MR > MN + NO$; donc aussi $RP > IN + NV$.

Il reste à prouver que $RH > HV$; car, s'il en est ainsi, il est clair que $PR + RH > IN + NH$.

Or dans le triangle NHR, d'après Euclide,

$$RH^2 = HN^2 + NR^2 - 2SN.NR.$$

Mais par construction $\frac{MN(=NH)}{DN} = \frac{NR}{NO}$, et $\frac{DN}{NS} = \frac{NO}{NV}$; donc, *ex æquo*, $\frac{HN}{NS} = \frac{NR}{NV}$. Donc $HN.NV = NS.NR$ et $2HN.NV = 2SN.NR$; donc

$$RH^2 = HN^2 + NR^2 - 2HN.NV.$$

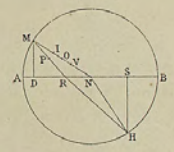
Mais on a prouvé que $NR^2 > NV^2$; donc

$$HR^2 > HN^2 + NV^2 - 2HN.NV.$$

Or $HN^2 + NV^2 - 2HN.NV = HV^2$, d'après Euclide; donc $HR^2 > HV^2$ et $HR > HV$. Ce qu'il restait à prouver.

Si l'on prend le point R sur le rayon AN, quand même les droites MR, RH se trouveraient dans le prolongement l'une de l'autre, comme dans la figure suivante (*fig.* 110), — la démonstration étant d'ailleurs indépendante de ce cas particulier, — le résultat sera le même, c'est-à-dire que l'on aura toujours $PR + RH > IN + NH$.

Fig. 110.



Faisons, comme ci-dessus, $\frac{MN}{DN} = \frac{RN}{NO}$ et $\frac{DN}{NS} = \frac{NO}{NV}$; il est clair que $RN > NO$ et $NO > NV$.

$MR^2 = MN^2 + NR^2 - 2DN.NR$. A $2DN.NR$ on peut, d'après le même raisonnement que ci-dessus, substituer $2MN.NO$; d'ailleurs $NR^2 > NO^2$; donc $MR^2 > MN^2 + NO^2 - 2MN.NO$. Mais

$$MN^2 + NO^2 - 2MN.NO = MO^2.$$

Donc $MR^2 > MO^2$ et $MR > MO$.

D'autre part, on a, par construction, $\frac{DN}{NS} = \frac{MN}{IN} = \frac{NO}{NV}$; donc, *vicissim* : $\frac{MN}{NO} = \frac{NI}{NV}$, et *dividendo* : $\frac{MO}{ON} = \frac{IV}{VN}$, et *vicissim* :

$$\frac{MO}{IV} = \frac{ON}{NV} = \frac{DN}{NS} = \frac{MR}{RP}.$$

Mais on a prouvé que MR > MO; donc PR > IV. Il reste à prouver, pour établir la proposition, que RH > HN + NV; ce qui est très facile d'après ce qui précède.

En effet $RH^2 = HN^2 + NR^2 + 2SN.NR$; à $2SN.NR$ on peut substituer, comme on l'a vu, $2HN.NV$; d'ailleurs $NR^2 > NV^2$. Donc

$$HR^2 > HN^2 + NV^2 + 2HN.NV;$$

donc, comme ci-dessus, HR > HN + NV.

Il est donc certain que la somme des deux droites PR, RH, quand même elles ne formeraient qu'une droite unique PRH, est toujours supérieure à la somme IN + NH. C. Q. F. D.

NOUVEAU TRAITEMENT EN ANALYTIQUE

DES

INCONNUES SECONDES ET D'ORDRE SUPÉRIEUR.

La réduction aux premières des inconnues secondes et d'ordre supérieur, opération de la plus haute importance en Algèbre, trouve son fondement dans la seule proportion de la double équation, à réitérer autant de fois qu'il est besoin, ainsi que le montre la marche elle-même de la question.

Soit proposé

$$a^3 + e^3 = z^{III} \quad \text{et} \quad ba + e^2 + de = n^2.$$

Pour ramener la seconde inconnue à la première, voici les règles :

Faites passer dans un membre de l'équation tous les termes où entre la seconde inconnue. Ainsi, dans l'exemple choisi,

de $a^3 + e^3 = z^{III}$, tirez : $z^{III} - a^3 = e^3$;

de $ba + e^2 + de = n^2$, $\quad n^2 - ba = e^2 + de$.

De la sorte dans chaque équation les termes en e, c'est-à-dire ceux où entre la seconde inconnue, constituent un des membres de l'équation.

Si cette équation double est ramenée à une proportion, on aura

$$z^{III} - a^3 : e^3 :: n^2 - ba : e^2 + de.$$

En égalant le produit des extrêmes à celui des moyens, tous les termes seront divisibles par e, la seconde inconnue, ce qui est évident, puisque e figure dans le second et le quatrième membre de la proportion.

On aura

$$z^{III}e^2 - a^3e^2 + z^{III}de - a^3de = n^2e^2 - bae^2.$$

Divisez par e jusqu'à ce qu'un terme soit entièrement débarrassé de e :

$$z^{III}e - a^3e + z^{III}d - a^3d = n^2e^2 - bae^2.$$

Cela fait, cette nouvelle équation sera, par rapport à la seconde inconnue, d'un degré moins élevé que la plus haute des deux proposées en premier lieu. On voit en effet que dans la plus haute des deux premières proposées entre e^3, dans cette dernière, le terme le plus élevé par rapport à e est en e^2.

Il ne faut pas s'arrêter ici, mais réitérer la proportion sur la double équation, jusqu'à ce qu'on ait ramené la seconde inconnue au premier degré, afin d'éviter tout radical.

Préparons donc cette dernière équation de la manière prescrite et formons un membre de l'équation avec tous les termes en e, quels qu'ils soient; on aura

$$z^{III}d - a^3d = n^2e^2 - bae^2 - z^{III}e + a^3e.$$

Des deux premières équations, la moins élevée donne, comme nous l'avons dit :

$$n^2 - ba = e^2 + de.$$

Ramenez encore cette double équation à une proportion

$$z^{III}d - a^3d \,;\, n^2e^2 - bae^2 - z^{III}e + a^3e \,::\, n^2 - ba \,;\, e^2 + de.$$

Égalons le produit des moyens à celui des extrêmes; tous les termes pourront être divisés par e, comme on l'a montré. On aura

$$z^{III}de^2 + z^{III}d^2e - a^3de^2 - a^3d^2e$$
$$+ n^2e^2 - n^2bae^2 - n^2z^{III}e + n^2a^3e - ban^2e^2 + b^2a^2e^2 = bz^{III}ae - ba^4e.$$

Divisant tout par e, il vient enfin

$$z^{III}de + z^{III}d^2 - a^3de - a^3d^2$$
$$= n^4e - n^2bae - n^2z^{III} + n^2a^3 - ban^2e + b^2a^2e + bz^{III}a - ba^4.$$

Cela fait, cette nouvelle équation est encore, relativement à la

seconde inconnue, abaissée d'un degré. Si l'on fait passer dans un membre de l'équation tous les termes où entre e, on a

$$z^{III}d^2 - a^3d^2 + n^2z^{III} - n^2a^3 - bz^{III}a + ba^4$$
$$= n^4e - n^2bae - ban^2e + b^2a^2e - z^{III}de + a^3de.$$

Il n'y a pas lieu d'aller plus loin, puisque la seconde inconnue ne se trouve plus qu'au premier degré, si bien que, par une simple division, on aura la relation de e à la première inconnue. Ainsi

$$e = \frac{z^{III}d^2 - a^3d^2 + n^2z^{III} - n^2a^3 - bz^{III}a + ba^4}{n^4 - n^2ba - n^2ba + b^2a^2 - z^{III}d + a^3d}$$ C. Q. F. T.

Pour ramener la recherche des deux inconnues à celle d'une seule, il faut reprendre une quelconque des deux équations primitives; la moins élevée est plus convenable pour que le degré de l'équation finale ne monte pas trop haut.

Ainsi nous avons dans une des deux équations primitives :

$$ba + e^2 + de = n^2.$$

Au lieu de e on substituera sa valeur trouvée qui est exprimée au moyen soit de termes connus, soit de la première inconnue qui ici est a. Puis on ordonnera l'équation par rapport à cette première inconnue. Il est clair que la seconde sera éliminée, qu'on sera arrivé à une équation libre de tout radical et que la méthode est générale.

Si en effet on proposait plus de deux inconnues, la méthode, réitérée autant qu'il le faudra, exprimera par exemple la troisième en fonction de la première et de la seconde, puis la seconde en fonction de la première, toujours par le même moyen.

APPENDICE A LA MÉTHODE PRÉCÉDENTE.

La méthode précédente permet en Algèbre une élimination complète et absolue des radicaux. L'unique procédé que l'on ait jusqu'à

présent possédé pour cette élimination, le *climatisme symétrique de Viète*, est loin d'être une invention suffisante et assez efficace.

Qu'on propose par exemple

$$\sqrt[3]{ba^2-a^3}+\sqrt{a^2+ca}+\sqrt[4]{d^3a-a^3}+\sqrt{ga-a^2}=n.$$

Comment l'analyste à la façon de Viète pourra-t-il se débarrasser de radicaux de cette sorte? La difficulté ne croîtra-t-elle pas, plus il poussera son travail? Enfin, fatigué et désespéré, n'implorera-t-il pas de l'Analyse une lumière nouvelle?

Elle est clairement fournie par la méthode précédente. Je ne donnerai qu'un seul exemple très court; car, le principe une fois dévoilé, tout le reste apparaît sans la moindre difficulté.

Soit proposé $\sqrt[3]{za^2-a^3}+\sqrt[3]{a^3+b^2a}=d$.

D'abord on ordonnera l'équation de façon à en constituer un membre avec un seul radical.

Soit donc $d-\sqrt[3]{a^3+b^2a}=\sqrt[3]{za^2-a^3}$.

Cela fait, on désignera tous les radicaux, excepté celui qui a été rejeté seul dans un membre de l'équation, par des inconnues secondes, ou d'ordre supérieur, si besoin est.

Posons donc, par exemple : $\sqrt[3]{a^3+b^2a}=e$.

On arrive ainsi au procédé de la méthode précédente, à la proportion de la double équation. On a en effet : $d-e=\sqrt[3]{za^2-a^3}$.

Élevant les divers membres au cube, $d^3+3de^2-3d^2e-e^3=za^2-a^3$; mais, par hypothèse, $e^3=a^3+b^2a$.

On a donc une double équation; dans chaque équation, il faut, d'après la méthode, faire passer dans un même membre tous les termes où entre la seconde inconnue. On aura donc

$$za^2-a^3-d^3=3de^2-3d^2e-e^3, \qquad a^3+b^2a=e^3.$$

On réitérera l'opération jusqu'à ce qu'on arrive à exprimer la seconde inconnue au moyen de la première. Cela fait, on substituera à e sa nouvelle valeur, dans une quelconque des équations primitives que l'on ordonnera; on aura résolu la question.

Je n'ajoute rien de plus, ce serait inutile; je ne m'arrête pas aux superfluités. Qui ne voit en effet que tous les termes irrationels peuvent être de même représentés, si une seconde inconnue ne suffit pas, par des troisièmes, quatrièmes inconnues, et indéfiniment? Auquel cas on considérera d'abord comme seconde la quatrième ou dernière, et les autres provisoirement comme première inconnue ou comme termes connus, jusqu'à ce qu'on ait entièrement éliminé cette dernière inconnue et ramené les équations à ne contenir que la première, la seconde et la troisième. Puis par le même moyen on réduira la troisième inconnue à la seconde et à la première, et la seconde à la première, comme nous l'avons déjà indiqué.

Il n'y a donc aucune irrationelle qui résiste à l'élimination par cette méthode, dont l'usage est surtout précieux, indispensable même, dans la résolution numérique des équations. En effet, aussitôt les irrationelles éliminées, l'artifice de Viète sera applicable pour la recherche numérique des racines; si la question ne peut être résolue en nombres exacts, on aura des solutions aussi approchées qu'on le voudra. Au contraire, tant qu'il y a des irrationelles, il est impossible d'arriver aux solutions approchées.

Une recherche plus approfondie a montré que l'on pouvait déduire de là une méthode très remarquable pour la pleine et parfaite connaissance des lieux en surface, comme aussi pour les problèmes où l'on donne au début de la question plus d'éléments que n'en réclame la détermination de la construction du problème.

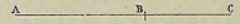
Pour expliquer ceci plus clairement, il y a certains problèmes qui ne reconnaissent qu'une position inconnue, et qu'on peut appeler *déterminés*, pour les distinguer des problèmes de lieux. Il y en a certains autres qui ont deux positions inconnues et ne peuvent jamais être ramenés à n'en avoir qu'une seule : ce sont les problèmes de lieux. Dans les premiers problèmes, nous recherchons seulement un point unique, dans les derniers, une ligne. Mais si le problème proposé admet trois positions inconnues, il s'agit de trouver, pour satis-

faire à la question, non plus seulement un point ou une ligne, mais bien une surface entière; de là naissent les lieux en surface, etc.

De même que dans les premiers problèmes les données suffisent pour déterminer la question, dans les seconds il manque une donnée pour la détermination; dans les troisièmes il en manque deux. Mais il peut se faire que, de même que dans ces cas les données suffisent ou sont en nombre insuffisant, au contraire dans d'autres, les données soient surabondantes et en excès. Un exemple rendra la chose claire.

Sur la droite AC (*fig.* 94) donnée, on donne le produit $AB \times BC$ et la différence des carrés $AB^2 - BC^2$.

Fig. 94.



Il est clair que dans ce cas il y a plus de données que n'en réclament la détermination et par conséquent la solution de la question. Cependant ces problèmes se présentent très fréquemment, surtout en Physique et dans les arts manuels; tous peuvent se traiter, grâce à notre méthode, par une simple division, sans recourir à des extractions de racine, à quelque degré que puissent monter les équations.

Soit proposé, par exemple, dans une certaine question :

$$a^3 + b^2 a = c^2 d,$$

et en même temps, parce que nous supposons la question *surabondante* (c'est le nom que nous donnons à ces problèmes, de même que nous avons pour habitude d'appeler *déficients* les problèmes de lieux) :

$$g^n a - a^3 = b^2 n^n.$$

Ramenez cette double équation à une proportion, en traitant, par l'application de la méthode que nous avons enseignée, notre unique inconnue, ici a, comme nous avons fait ci-dessus la seconde, ou bien celles d'ordre supérieur, et réitérons l'opération jusqu'à ce que la valeur de a puisse s'obtenir par une simple division, et être exprimée, non plus au moyen de l'inconnue première, mais bien en termes entièrement connus. On aura une solution très simple du problème, et l'analyste ne sera plus embarrassé par les équations quadratiques, cubiques, biquadratiques, etc.

Voici, comme *couronnement*, la solution très simple que notre méthode donne de ce fameux problème :

Étant donnés une ellipse et un point en dehors de son plan, couper par un plan, de façon que la section soit un cercle, la surface conique ayant pour sommet le point donné et pour base l'ellipse donnée.

Les géomètres ramènent la question à prendre *ad libitum* cinq points sur l'ellipse, à joindre ces points par des droites au sommet de la surface conique, et à décrire un cercle passant par ces cinq droites; ils trouvent ainsi que le problème est solide. Mais, puisque sur l'ellipse le nombre des points est indéfini, si au lieu de cinq, on en prend six, le problème sera *surabondant*, et on arrivera à une double équation, qui donnera finalement l'inconnue par une simple division.

De même, si l'on donne une courbe quelconque plane, ou un lieu en surface, quel qu'en soit le degré, on pourra trouver les diamètres et les axes et même, dans la surface-lieu, toutes les courbes constitutives du lieu en surface, etc.

Soit, par exemple, une surface conique dont le sommet soit donné et qui ait pour base une parabole ou une ellipse cubique ou biquadratique, ou de quelque degré supérieur, en allant jusqu'à l'infini. Une telle surface peut être coupée au moyen de notre méthode de façon à obtenir une courbe quelconque qui puisse être tracée sur cette surface d'après sa nature, et la solution du problème sera toujours très simple.

Je n'ajoute rien sur les tangentes des courbes ni sur les autres et nombreux usages de cette méthode, qui se présenteront d'eux-mêmes à la réflexion attentive du chercheur analyste.

SUR LE

PROBLÈME D'ADRIEN ROMAIN.

Au très illustre Christian HUYGENS.

En examinant plus attentivement, l'année dernière, la célèbre réponse de François Viète au problème d'Adrien Romain, et en tombant sur ce passage du Chapitre VI où ce subtil mathématicien avance ne pas savoir si Adrien lui-même a bien connu la formation et les propriétés de l'équation qu'il a proposée, j'ai commencé à douter que Viète de son côté eût bien donné et découvert une solution suffisamment générale de cette fameuse équation.

Adrien Romain proposait en effet, suivant l'énoncé corrigé par Viète, de trouver la valeur de la racine de l'équation algébrique :

$$45x - 3795x^3 + 95\,634x^5 - 113\,8500x^7 + 781\,1375x^9 - 3451\,2075x^{11}$$
$$+ 1053\,0\,6075x^{13} - 2\,3267\,6280x^{15} + 3\,8494\,2375x^{17} - 4\,8849\,4125x^{19}$$
$$+ 4\,8384\,1800x^{21} - 3\,7865\,8800x^{23} + 2\,3603\,0652x^{25} - 1\,1767\,9100x^{27}$$
$$+ 4695\,5700x^{29} - 1494\,5040x^{31} + 376\,4565x^{33} - 74\,0259x^{35}$$
$$+ 11\,1150x^{37} - 1230\,0x^{39} + 945x^{41} - 45x^{43} + x^{45} = \textit{un nombre donné.}$$

Il est certain que Viète a fait une très élégante et très savante réduction de ce problème, suivant son habitude, en employant les sections angulaires et qu'il a construit, page 318 de l'édition elzévirienne, une Table importante qu'il est aisé d'étendre indéfiniment à un nombre

quelconque de termes en continuant à appliquer la méthode dont il s'est servi; cette Table permet de reconnaître quelle équation correspond à une division spéciale des angles.

Ainsi, si l'on prend d'abord, dans les rangs impairs, $x^3 - 3x$ et qu'on égale cette expression à un nombre donné qui soit au plus égal à 2, la question se ramène à la trisection de l'angle. Si ensuite on égale $x^5 - 5x^3 + 5x$ à un nombre donné qui soit au plus égal à 2, la question se ramène à diviser un angle en cinq parties égales. Si c'est $x^7 - 7x^5 + 14x^3 - 7x$ que l'on égale encore à un nombre donné au plus égal à 2, il s'agira de prendre la septième partie d'un angle; si l'on continue indéfiniment la Table de Viète selon la méthode qu'il a donnée, le premier membre de l'équation proposée par Adrien sera le 45e terme de la Table, et la question sera ramenée à prendre la 45e partie d'un angle donné.

Mais il faut observer que, dans toutes ces équations, la méthode de Viète et l'emploi des sections angulaires ne sont applicables qu'aux cas où, comme nous l'avons dit, le nombre donné, auquel on égale une quelconque des expressions algébriques de la Table, ne dépasse pas 2; si au contraire ce nombre donné est supérieur à 2, aussitôt tout ce mystère des sections angulaires devient inutile et ne rend plus aucun service pour la solution de la question proposée.

Cependant Adrien avait proposé en général de résoudre l'équation en s'en donnant le second membre; il faut donc recourir à un autre moyen qu'aux sections angulaires de Viète.

Si l'on propose tout d'abord, comme premier cas, d'égaler $x^3 - 3x$ à un nombre donné qui soit au plus égal à 2, la question, comme nous l'avons déjà indiqué, se ramène à la trisection de l'angle; si, au contraire, on égale $x^3 - 3x$ à 4 ou à tout autre nombre supérieur à 2, l'équation proposée est résolue par les analystes au moyen de la méthode de Cardan. Mais, dans les autres cas suivants, la solution peut-elle être obtenue indéfiniment par des extractions de racines, voilà ce que les analystes n'ont pas encore essayé; mais pourquoi ne pas faire progresser l'Algèbre de ce côté, surtout sous vos auspices,

illustre Huygens, vous dont tous les savants honorent à juste titre le brillant mérite?

Soit donc proposé d'égaler $x^5 - 5x^3 + 5x$ à 4 ou à tout autre nombre supérieur à 2. Dans ce cas, la méthode de Viète est inapplicable; mais nous pouvons affirmer hardiment, pour résoudre généralement le problème d'Adrien, que pour toutes les expressions de la Table précitée, toutes les fois que le nombre donné est supérieur à 2, la question proposée peut être facilement résolue par des extractions de racines.

Nous avons en effet remarqué, bien plus nous avons démontré que, dans tous ces cas, la question peut être ramenée, de même que dans l'équation cubique, à une quadratique par une racine cubique, selon la méthode de Cardan et de Viète; si l'équation est du cinquième degré, à une quadratique par une racine du cinquième degré; si l'équation est du septième degré, à une quadratique par une racine du septième degré, et ainsi de suite indéfiniment.

Soit, par exemple, $x^3 - 3x = 4$. Tous savent que la méthode précitée donne la racine : $x = \sqrt[3]{2+\sqrt{3}} + \sqrt[3]{2-\sqrt{3}}$.

Mais proposons, dans l'exemple d'Adrien ou de Viète, d'égaler $x^5 - 5x^3 - 5x$ à 4 ou à tout autre nombre plus grand que 2.

Par une méthode qui est générale et qui s'appliquera indéfiniment à tous les cas de la Table, nous supposerons que la racine cherchée est de la forme $\frac{y^2+1}{y}$; en opérant la substitution, nous verrons toujours se détruire réciproquement les termes qui s'opposent à la simple résolution de la question par une extraction de racine; par exemple, dans le cas proposé, la racine sera $\sqrt[3]{2+\sqrt{3}} + \sqrt[3]{2-\sqrt{3}}$.

Si l'on prend la septième expression dans la Table de Viète (je veux dire celle dont l'exposant de la plus haute puissance est 7), soit

$$x^7 - 7x^5 + 14x^3 - 7x = 4,$$

et que l'on imagine, comme ci-dessus, $x = \frac{y^2+1}{y}$, tous les termes s'opposant à la solution par extraction de racine se détruiront de

même, et l'on trouvera pour la racine cherchée : $\sqrt[7]{2+\sqrt{3}} + \sqrt[7]{2-\sqrt{3}}$, et ainsi de suite à l'infini.

C'est ce que vous pourrez non seulement reconnaître par l'expérience, mais aussi démontrer, aussitôt que vous le désirerez; car c'est une propriété spécifique de toutes les équations que l'on peut former avec la Table de Viète, que leurs solutions s'obtiennent toujours par de simples extractions de racines, lorsque le terme connu est supérieur à 2.

Or le nombre donné, auquel peut être égalée une expression analytique de la Table, peut être soit 2, soit plus petit que 2, soit plus grand que 2.

Dans le premier cas, la racine cherchée est toujours 2.

Dans le second, la question se ramène, d'après Viète, aux sections angulaires.

Dans le troisième, elle se résout facilement au moyen de notre méthode, c'est-à-dire par des extractions de racines.

Ainsi, si l'on prend l'expression analytique proposée par Adrien :

$$45x - 3795x^3 + \ldots = 4,$$

la racine cherchée sera $x = \sqrt[45]{2+\sqrt{3}} + \sqrt[45]{2-\sqrt{3}}$.

Nous n'avons pas à nous arrêter plus longtemps sur un sujet désormais éclairci par des exemples suffisants; on peut toutefois remarquer que l'extraction de la racine du 45e degré, ou l'invention de quarante-quatre moyennes proportionnelles entre deux quantités données, peut se ramener très facilement à l'extraction successive de deux racines cubiques et d'une racine du 5e degré, ce que montrent suffisamment les diviseurs 5 et 9 du nombre 45; 5 en effet correspond à une racine du 5e degré, et 9 à l'extraction de deux racines cubiques, puisque 9 est le carré de 3, exposant du cube.

Ainsi, l'invention de deux moyennes proportionnelles réitérée deux fois et celle de quatre moyennes, opérée une seule fois, fournissent quarante-quatre moyennes et résolvent notre question, de même que

Viète a ramené la division de l'angle en 45 parties égales, ce qui est le problème d'Adrien, à une équation cubique réitérée deux fois et à une équation du 5e degré, c'est-à-dire à une double trisection et à une seule division en 5.

Je n'ajoute rien sur les solutions multiples de l'équation ou question proposée; j'ai seulement donné celle qui se présente en premier lieu, me réservant à traiter à loisir des autres dont la discussion demande plus de travail.

Adieu, homme illustre, aimez-moi.

RÉPONSE AUX QUESTIONS DE CAVALIERI.

Il y a longtemps qu'à l'exemple d'Archimède pour sa *parabole*, j'ai carré *toutes celles en nombre indéfini dans lesquelles les abscisses sont proportionnelles aux ordonnées élevées à une puissance quelconque*. Cette découverte, que j'ai été le premier à faire, a été communiquée à M. de Beaugrand et à d'autres; cependant je dois dire que M. de Roberval, qui, sur mes indications, s'était attaqué à ces questions, en a trouvé de lui-même la solution, et a ainsi donné une preuve de l'heureuse perspicacité de son génie en Mathématique.

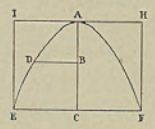
J'ai également trouvé les centres de gravité de ces figures et de celles qui en dérivent; j'ai employé à cet effet cette méthode qui m'appartient et grâce à laquelle j'ai aussi bien construit les tangentes des courbes quelconques, ainsi que leurs asymptotes, enfin tous les problèmes qui se rapportent à la recherche du maximum et du minimum.

Mais arrivons à la question : le savant Bonaventure Cavalieri demande ce que l'on peut dire des quadratures précitées. J'ai établi une règle générale qui donne la solution, non seulement quand il y a rapport constant entre l'abscisse et une puissance de l'ordonnée, mais aussi quand le rapport est donné entre une puissance quelconque de l'abscisse et une puissance quelconque de l'ordonnée; voici l'énoncé général.

Soit une figure parabolique quelconque EAF (*fig.* 111), et supposons, par exemple, $\frac{CA^3}{BA^2} = \frac{EC^4}{DB^2}$. Je prends les exposants des puissances, tant des ordonnées que des abscisses : l'exposant est 4 pour le bicarré

de l'ordonnée; 3 pour le cube de l'abscisse. Je dis donc que le rapport du parallélogramme EH à l'aire de la figure EAF est le même que celui de la somme des exposants des deux puissances à l'exposant de la

Fig. 111.



puissance des ordonnées. Ainsi, dans l'exemple proposé, le rapport du parallélogramme à la figure inscrite sera de 7 à 4.

Dès lors, si, par exemple, $\frac{EC^4}{DB^4} = \frac{CA}{AB}$, l'exposant de l'abscisse étant simplement l'unité, le rapport du parallélogramme à la figure sera de 5 à 4.

Il en sera de même indéfiniment pour toutes les figures de ce genre.

Donc on peut affirmer ce que le savant Cavalieri ne proposait qu'avec doute, à savoir que s'il y a rapport constant entre les puissances des ordonnées et la simple longueur de l'abscisse (ou avec le côté, comme disent les analystes), le rapport du parallélogramme à la figure est de 2 à 1 pour le triangle, de 3 à 2 pour la parabole simple, de 4 à 3 pour la parabole cubique, de 5 à 4 pour la biquadratique, et ainsi de suite indéfiniment.

Si maintenant, en laissant fixe la droite CA, *on fait tourner la figure autour d'elle de façon à engendrer un solide, le rapport du cylindre* EH *à ce solide se trouvera comme suit :*

Le cylindre est au solide dans le rapport de la somme du double de l'exposant de la puissance de l'abscisse et de l'exposant de la puissance de l'ordonnée à ce dernier exposant.

Soit, par exemple, $\frac{EC^3}{DB^3} = \frac{CA^2}{BA^2}$. L'exposant du carré de l'abscisse est 2, dont le double est 4; ajoutant 3, exposant de la puissance de

l'ordonnée, on a 7; le rapport du cylindre au solide est donc de 7 à 3 (exposant de la puissance de l'ordonnée).

Par là, j'ai répondu à la seconde question.

Les *centres de gravité* de toutes ces figures, tant planes que solides, divisent le diamètre dans le rapport soit du parallélogramme à la figure plane, soit du cylindre au solide.

Si *l'on fait tourner la figure autour de* EF, le solide engendré n'est plus simple comme précédemment, mais composé. Cependant un habile géomètre peut facilement établir une proposition simple entre ce solide et le cylindre circonscrit. Je pourrai le montrer plus longuement et avec des preuves à M. Cavalieri, s'il le désire.

Mais quand il demande si des courbes de ce genre, en dehors du triangle et de la parabole, peuvent être des sections coniques, il semble ne pas penser à leurs propriétés spécifiques; il est tout aussi impossible qu'elles soient des sections coniques qu'il est impossible que la section de la sphère par un plan soit une parabole, une hyperbole, ou une ellipse.

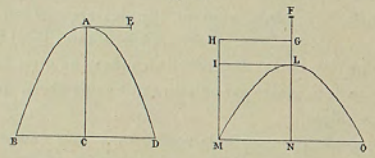
Je lui demanderai en grâce de vouloir bien nous envoyer d'Italie quelques problèmes.

PROPOSITIONS A LALOUVÈRE.

I.

Soit une parabole BAD (*fig.* 112) dont AC est l'axe, BC une ordonnée, AE le paramètre. On demande le rapport de la courbe AB à la droite BC.

Fig. 112.



Soit l'hyperbole MLO de centre G, d'axe transverse FL égal au paramètre AE de la parabole. Soit LN l'axe de cette hyperbole, dont nous supposerons le paramètre égal à l'axe transverse, en sorte que pour toute ordonnée on ait $MN^2 = FN.NL$. En G, élevons la perpendiculaire GH égale à l'ordonnée BC de la parabole; menons HM et LI, parallèles à GN et GH et par M, point de rencontre de HM et de l'hyperbole, menons l'ordonnée MN.

Je dis que le rapport de la courbe parabolique AB à la droite BC est le même que celui du quadrilatère MHGL (formé par les droites MG, HG, GL et la courbe ML) au rectangle IG.

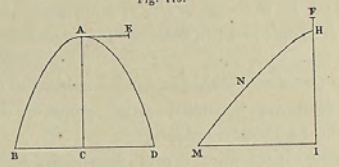
II.

Soit donnée (*fig.* 113) la parabole BAD; soient AC son axe, BC une ordonnée, AE le paramètre; on fait tourner la figure parabolique BAC

autour de l'ordonnée BC; trouver la mesure de la surface courbe du solide engendré.

Je construis l'hyperbole MNH ayant HI pour axe, en prenant son axe transverse HF égal au quart du paramètre de la parabole, c'est-à-dire de la droite AE, et en faisant le paramètre de cette hyperbole

Fig. 113.

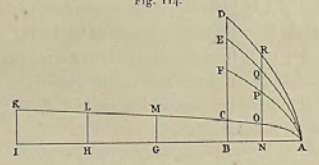


égal à son axe transverse, en sorte que, pour une ordonnée quelconque, on ait $IM^2 = FI.IH$. Je prends HI égale à l'axe AC de la parabole et je mène l'ordonnée IM. Du produit de CA par l'arc parabolique BA, je retranche l'aire hyperbolique IMH; je construis le carré égal à la différence. La diagonale de ce carré sera le rayon d'un cercle égal à la surface courbe du solide engendré par la rotation de l'aire ABC autour de l'ordonnée BC.

III.

Soit une demi-parabole quelconque AC (*fig.* 114), de sommet A et d'axe AB; de cette courbe j'en déduis d'autres en nombre indéfini comme AF, AE, AD, etc.

Fig. 114.



Voici la loi de leur formation : pour la courbe AF, l'ordonnée BF est

égale à l'arc de courbe parabolique CA, et si je prends un autre point quelconque, comme N, par lequel je mène l'ordonnée NP, cette ordonnée NP est de même égale à l'arc de parabole AO. Pour la courbe EA, l'ordonnée EB est égale à la courbe FA du second degré et toute autre ordonnée QN est de même égale à l'arc PA de la même courbe du second degré. De même, pour la courbe AD, l'ordonnée BD est égale à la courbe EA du troisième degré, et toute autre ordonnée NR à l'arc QA de la même courbe du troisième degré; et ainsi de suite indéfiniment.

Je dis que toutes ces courbes en nombre indéfini se trouvent dans un rapport donné avec la parabole simple primitive; voici comment on peut énoncer le théorème général :

Qu'on prolonge indéfiniment la parabole primitive AC par les points M, L, K, par exemple, et de même son axe par les points G, H, I, en nombre aussi grand que l'on voudra, en prenant $BG = GH = HI = AB$ l'axe, et en menant les ordonnées GM, HL, IK :

Le rapport de la courbe parabolique AM à la courbe AF du second degré est celui de l'ordonnée GM à l'ordonnée BC.

Le rapport de la courbe parabolique AL à la courbe AE du troisième degré est celui de l'ordonnée HL à la droite BC.

Le rapport de la courbe parabolique AK à la courbe AD du quatrième degré est celui de l'ordonnée KI à la droite BC.

Et ainsi de suite indéfiniment.

Si l'on fait tourner les figures AMG, AFB autour des ordonnées GM, BF, le rapport de la surface courbe engendrée par la figure AMG tournant autour de GM à la surface courbe engendrée par la figure AFB tournant autour de BF est égal au rapport de GM^3 à BC^3.

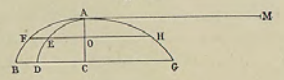
De même le rapport de la surface courbe engendrée par la figure ALH tournant autour de HL à la surface courbe engendrée par la figure AEB tournant autour de BE sera égal au rapport de HL^3 à BC^3.

Et ainsi de suite indéfiniment.

IV.

Soit BA (*fig.* 115) une demi-cycloïde dont on déduit une autre courbe DA par la condition que le rapport des ordonnées $\frac{BC}{CD}$ ou $\frac{FO}{EO}$ soit constamment égal à un rapport donné. Des géomètres ont démontré que la demi-cycloïde BA est double de la droite AC, diamètre du cercle générateur de la cycloïde. On demande la relation des courbes AD à d'autres lignes soit courbes, soit droites.

Fig. 115.



Voici notre énoncé général : Si ces nouvelles courbes se trouvent, comme sur la figure ci-dessus, entre la cycloïde et le diamètre du cercle générateur, toutes ces courbes AD et leurs parties seront égales à des arcs de parabole; si ces nouvelles courbes sont au contraire extérieures à la cycloïde, comme dans la figure ci-après (*fig.* 116), toutes ces courbes AD et leurs parties auront un rapport donné à la somme d'une droite et d'un arc de cercle.

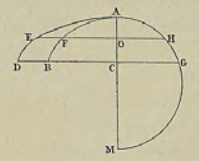
Sur la première figure (*fig.* 115), le théorème général peut être formulé comme il suit. Construisez AM pour la condition $\frac{BC^2 - CD^2}{CD^2} = \frac{4AC}{AM}$; prenez A comme sommet d'une parabole ayant AM pour paramètre et AC pour axe; soit G le point de rencontre de cette parabole et du prolongement de la droite BDC, H le point de rencontre avec le prolongement de la droite FEO. Le rapport de la courbe parabolique AG à la courbe AD sera donné; on aura en effet $\frac{AG^2}{AD^2} = \frac{BC^2}{BC^2 - CD^2}$, et le rapport des arcs AH et AE sera le même.

Si l'on fait tourner les figures : ACG autour de l'ordonnée CG, ADC autour de la droite DC, le rapport des surfaces courbes engendrées sera égal au rapport des courbes AG et AD. Il en sera de même pour

les parties de figure AOH, AEO, si on les fait tourner autour des droites OH, OE.

Pour l'autre figure (*fig.* 116), dans laquelle la courbe AD est extérieure à la cycloïde AB, je fais $\frac{CD^2 - CB^2}{CD^2} = \frac{AC}{AM}$, et je prends la longueur AM sur la même direction que AC; sur cette droite AM, je

Fig. 116.

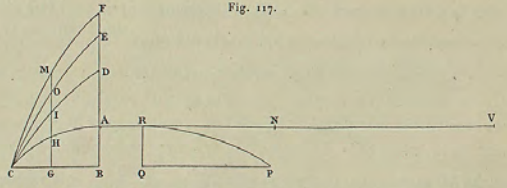


décris un demi-cercle qui sera coupé aux points G et H par les droites DBC, EFO. On aura $\left(\frac{\text{arc AG} + \text{GC}}{\text{arc AD}}\right)^2 = \left(\frac{\text{arc AH} + \text{HO}}{\text{arc AE}}\right)^2 = \frac{BC^2}{DC^2 - CB^2}$, rapport donné.

V.

Soit la parabole AC (*fig.* 117), de sommet A, d'axe AB, d'ordonnée CB; de la courbe parabolique CA j'en déduis d'autres en

Fig. 117.



nombre indéfini CD, CE, CF, par la même méthode que précédemment (*fig.* 114), sauf que cette fois je les fais toutes passer par l'extrémité de la même ordonnée, au lieu de les faire toutes passer par le sommet.

La propriété de ces nouvelles courbes sera donc que, si l'on mène GHIOM parallèle à l'axe AB, la droite BD interceptée en D par la courbe CID du second degré sera égale à l'arc de parabole AC, et la droite GI égale à l'arc de parabole CH; la droite BE interceptée en E par la courbe du troisième degré sera égale à l'arc DIC du second degré et ainsi de suite indéfiniment pour les courbes et leurs arcs.

Je dis que toutes ces courbes CD, EC, FC, etc. sont égales à des arcs de paraboles primitives ou simples, qui seront toutefois différentes de celles qui ont été précédemment égalées aux courbes dérivées. Voici le théorème général :

Je construis la parabole RP, ayant pour axe RQ = AB l'axe de la première parabole, et pour paramètre RV, double du paramètre AN. Je dis que l'arc RP de cette parabole est égal à la courbe CID.

Si, avec RQ = AB pour axe, on prend le paramètre RV = 3AN, l'arc parabolique RP sera égal à la courbe COE.

Si, toujours avec RQ = AB pour axe, on prend le paramètre RV = 4AN, l'arc parabolique RP sera égal à la courbe CMF.

VI.

Si, autour des droites AB, BD, BE, BF, on fait tourner les figures ACB, DCB, ECB, FCB, etc., on peut construire un cercle équivalent à chacune des surfaces courbes des solides ainsi engendrés, avec autant de facilité que l'on peut construire un cercle représentant la surface courbe du conoïde parabolique engendré par la rotation de la parabole AB autour de l'axe AB. Je n'ajouterais pas cette dernière construction que j'apprends avoir déjà été trouvée (sans avoir cependant connaissance de ce qui a été écrit par d'autres sur ce sujet), si le procédé n'était pas général et ne s'étendait pas très aisément à tous les conoïdes engendrés autour des axes BD, BE, BF par ces nouvelles courbes en nombre indéfini.

Si l'on fait tourner (*fig.* 117) la courbe CD autour de la droite BD, voici comment on trouvera la surface courbe du solide engendré :

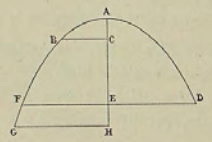
Construisez, d'après la méthode ci-dessus, la courbe parabolique RP

égale à la courbe CID, et faites tourner cette parabole RP autour de la droite RQ. On aura $\frac{\text{surf. conoïde RPQ}}{\text{surf. conoïde DICB}} = \frac{PQ}{CB}$, rapport des ordonnées. Si l'on construit de même la parabole RP égale à la courbe COE, on aura encore $\frac{\text{surf. conoïde RPQ}}{\text{surf. conoïde EOCB}} = \frac{PQ}{CB}$, et ainsi de suite indéfiniment.

VII.

Soit maintenant (*fig.* 118) la parabole FBAD d'axe EA, d'ordonnée FE. On demande la mesure de la surface courbe du solide engendré par la rotation de la figure ABFE autour de l'axe AE.

Fig. 118.



Prenez AC égal au quart du paramètre; construisez l'ordonnée CB; prenez EH = AC, et construisez l'ordonnée GH, puis le carré équivalent à CBGH, ce qui est facile d'après Archimède. La diagonale de ce carré équivalent à CBGH sera le rayon du cercle équivalent à la surface courbe du conoïde FAD engendré autour de l'axe AE.

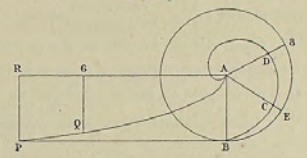
VIII.

Le subtil géomètre qui a récemment démontré l'égalité de la spirale à la parabole aurait pu concevoir le théorème plus généralement et établir une comparaison entre un nombre indéfini de spirales et de paraboles d'espèces différentes, grâce à la proposition suivante qui peut être énoncée de façon à servir d'exemple général :

Soit sur la *fig.* 38 du Livre de Dettonville (*fig.* 119), une spirale d'espèce quelconque, c'est-à-dire telle que le rapport d'une puissance quelconque du rayon AB à la même puissance du rayon AC soit égal

au rapport d'une puissance quelconque de la circonférence totale BE8B à la puissance semblable de l'arc E8B.

Fig. 119.



Construisez la parabole dont la demi-base ou la dernière ordonnée RP soit égale au rayon AB, et dont l'axe AR soit égal à une fraction de la circonférence totale BE8B, fraction ayant pour numérateur l'exposant de la puissance du rayon AB, et pour dénominateur la somme des exposants de la puissance du rayon AB et de la puissance de la circonférence BE8B; qu'enfin les puissances des ordonnées de la parabole, ayant pour exposant la somme de ceux des puissances du rayon AB et de la circonférence BE8B, soient entre elles dans le même rapport que les puissances des abscisses dont l'exposant est celui de la circonférence BE8B. Je dis que la spirale et la parabole ainsi construites seront toujours égales entre elles dans tous les cas.

Par exemple, soit d'abord la spirale d'Archimède et la parabole simple : $\frac{AB}{AC} = \frac{\text{circ. BE8B}}{\text{arc E8B}}$. Construisez la parabole AQP ayant pour dernière ordonnée RP = AB, et pour axe AR une fraction de la circonférence BE8B, ayant pour numérateur l'exposant de la puissance du rayon AB (ici 1) et pour dénominateur la somme des exposants des puissances du rayon et de l'arc (ici 2; car dans ce cas l'exposant de la puissance de l'arc est 1). Ainsi l'axe AR devra être $\frac{1}{2}$ de la circonférence constitutive de la spirale, et dans la parabole, une puissance de l'ordonnée RP ayant pour exposant la somme de ceux des puissances du rayon et de l'arc (ici 2) doit être à la puissance semblable de l'ordonnée 6Q comme une puissance de l'abscisse AR ayant pour expo-

sant celui de la circonférence BE8B (ici 1) est à la puissance semblable de l'abscisse AG, c'est-à-dire que l'on doit avoir : $\left(\frac{RP}{6Q}\right)^2 = \frac{RA}{6A}$. La courbe parabolique PQA et la spirale BCDA seront égales.

Supposons maintenant : $\frac{AB^2}{AC^2} = \frac{\text{circ. BE8B}}{\text{arc E8B}}$. Dans ce cas l'exposant de la puissance du rayon AB est 2, celui de la puissance de la circonférence est 1. La parabole se construira suivant la règle ci-dessus : l'ordonnée RP sera prise égale au rayon AB, l'axe $AR = \frac{2}{3}$ circ. BE8B, enfin $\left(\frac{RP}{6Q}\right)^3 = \frac{RA}{6A}$. Cette parabole et la spirale correspondante seront égales.

Soit encore : $\frac{AB}{AC} = \frac{\overline{\text{circ. BE8B}}^3}{\overline{\text{arc E8B}}^3}$. Dans la parabole, l'ordonnée RP sera prise égale au rayon AB, l'axe $AR = \frac{1}{4}$ circ. BE8B, et enfin $\left(\frac{RP}{6Q}\right)^4 = \left(\frac{RA}{6A}\right)^3$. Il y aura toujours égalité entre la parabole et la spirale.

Soit enfin dans la spirale : $\frac{AB^2}{AC^2} = \frac{\overline{\text{circ. BE8B}}^2}{\overline{\text{arc E8B}}^3}$; dans la parabole correspondante et égale à cette spirale, on aura, comme toujours, l'ordonnée $RP = AB$, l'axe $RA = \frac{2}{5}$ circ. BE8B, et enfin pour le rapport des ordonnées et des abscisses : $\left(\frac{RP}{6Q}\right)^5 = \left(\frac{AR}{6A}\right)^3$.

La méthode sera indéfiniment la même pour comparer les spirales et les paraboles d'espèce quelconque. Il n'y aura d'ailleurs aucune difficulté pour égaler des arcs de spirale augmentés ou diminués avec des arcs de la parabole correspondante. D'après ce qui précède, il y a à l'intérieur d'un même cercle une infinité de spirales différentes d'espèce et de longueur; bien plus, il y en a une infinité qui surpassent la circonférence du cercle, ce que l'on peut compter parmi les merveilles de la Géométrie. Cependant il n'y en a pas qui ne soit inférieure à la somme de la circonférence et du rayon, et il n'y en a pas qui ne soit plus grande que le rayon.

DE LA COMPARAISON

DES LIGNES COURBES AVEC LES LIGNES DROITES.

DISSERTATION GÉOMÉTRIQUE.

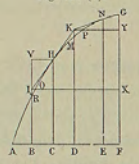
Jamais encore, que je sache, une ligne courbe purement géométrique n'a été égalée par les géomètres à une droite donnée. Ce qu'en effet un subtil mathématicien anglais a récemment découvert et démontré, *que la cycloïde primaire est quadruple du diamètre du cercle qui l'engendre*, paraît devoir se limiter, d'après l'avis des plus savants géomètres. Ils pensent en effet que c'est une loi et un ordre de la nature qu'on ne puisse trouver une droite égale à une courbe, à moins de supposer d'abord une autre droite égale à une autre courbe, et prenant cet exemple de la cycloïde, ils montrent qu'il en est ainsi dans ce cas. Je ne le nie pas; il est clair en effet que le tracé de la cycloïde suppose l'égalité d'une autre courbe avec une droite, à savoir celle de la circonférence du cercle générateur de la cycloïde avec la droite qui est la base de la cycloïde. Mais on va voir ci-dessous ce qu'il en est de cette loi de la nature qu'ils établissent, et combien il est dangereux sur un ou deux faits d'expérience de conclure aussitôt un axiome. Je vais en effet démontrer l'*égalité à une droite d'une courbe véritablement géométrique et pour la construction de laquelle on n'a à supposer aucune égalité semblable d'une autre courbe avec une droite*, et je traiterai toute la question aussi brièvement que possible.

PROPOSITION I.

Soit (*fig.* 120) *une courbe quelconque* AHMG *concave vers un même côté, par exemple une des paraboles en nombre infini, dont les tangentes*

rencontrent en dehors de la courbe la base AF *et l'axe* FG. *Je prends sur une courbe de cette nature un point quelconque* H *par lequel je mène la tangente* IHK; *sur celle-ci je prends, de côté et d'autre, les points* K, I, *d'où j'abaisse* IB, KD *perpendiculaires sur la base* AF *et coupant la courbe aux points* R, M. *Je dis que le segment* HI *de la tangente est plus petit que l'arc de courbe* RH, *qu'au contraire le segment* HK *de la même tangente est plus grand que l'arc de courbe* HM.

Fig. 120 (1).



En effet, puisque, par hypothèse, la tangente KI rencontre la base AF en dehors de la courbe, l'angle CHI que fait la perpendiculaire HC à la base avec la tangente HI est plus petit qu'un droit; et par conséquent la perpendiculaire abaissée de H sur la droite BI tombera en V au-dessus des points B, R, I. On en conclut que HV $<$ HI et que HI est plus petit que la droite qui joint les points H, R. Donc, *a fortiori*, HI est plus petit que l'arc de courbe HR sous-tendu par cette droite qui joint les points H, R. Premier point qu'il fallait démontrer.

Je dis maintenant que le segment KH est plus grand que l'arc de courbe HM. Du point K je mène à la courbe la tangente KN, et j'abaisse la perpendiculaire NE. Il est prouvé, par ce qui précède, que KN $<$ arc NM. Mais, d'après Archimède, la somme des tangentes HK + KN $>$ arc HN. Donc segment HK $>$ arc HM. Second point qu'il fallait démontrer.

Il n'y a pas à objecter que la tangente menée du point K peut tomber au delà du point G. Car, dans ce cas, on peut prendre un autre point entre K et M, et employer le raisonnement précédent.

Il suit de là que, si des points K, I on abaisse sur l'axe des perpendiculaires qui coupent la courbe en O, P, on aura, dans le cas de la figure, HI $>$ arc HO et HK $<$ arc HP.

Si l'on imagine en effet la figure retournée, en sorte que l'on prenne l'axe comme base, et la base comme axe, la démonstration sera non seulement semblable, mais absolument identique.

Il résulte enfin de la construction même que, si BC = CD, on a les segments des tangentes HI = HK. Ce qu'il est important de remarquer.

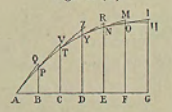
Proposition II.

Pour mesurer les lignes courbes, je ne me servirai pas de lignes inscrites et circonscrites à l'exemple d'Archimède, mais seulement de circonscrites formées par des segments de tangentes; je démontrerai, en effet, qu'il y a deux séries de tangentes, l'une plus grande que la courbe, l'autre plus petite, et les analystes verront que la démonstration par les circonscrites seules est beaucoup plus facile et plus élégante.

Je dis donc qu'il est possible, suivant l'esprit de la méthode d'Archimède, *de circonscrire à une quelconque des courbes précitées deux figures composées de droites, et dont l'une surpasse la courbe d'une différence inférieure à un intervalle donné quelconque; dont l'autre soit au contraire plus petite que la courbe d'une différence également inférieure à un intervalle donné quelconque.*

Soit (*fig.* 121) une quelconque des courbes précitées : je partage la base AG en un nombre quelconque de parties égales, AB, BC, CD,

Fig. 121 (2).

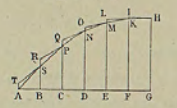


DE, EF, FG; par les points B, C, D, E, F, j'élève les perpendiculaires BQ, CV, DZ, ER, FM, qui rencontrent la courbe aux points P, T, Y, N, O. Je mène les tangentes AQ, PV, TZ, YR, NM, OI.

D'après la première proposition : tangente AQ > arc AP ; tangente PV > arc PT ; etc. ; enfin tangente OI > arc OH. Donc la figure formée par tous les segments des tangentes AQ, PV, TZ, YR, NM, OI est plus grande que la courbe.

Mais soient la même courbe (*fig.* 122) et la base AG divisée en autant de parties égales aux points B, C, D, E, F. En ces points B, C,

Fig. 122 (3).



D, E, F, j'élève encore des perpendiculaires BR, CQ, DO, EL, FI, qui rencontrent la courbe aux points S, P, N, M, K. Au point S, je mène la tangente ST jusqu'à la rencontre avec la perpendiculaire AT ; puis aux points P, N, M, K, H, les tangentes PR, NQ, MO, KL, HI, rencontrant les perpendiculaires BS, CP, DN, EM, FK aux points R, Q, O, L, I. D'après la première proposition : tangente ST < arc AS ; tangente PR < arc PS ; etc. ; enfin la parallèle à la base, IH < arc KH. Donc la figure, formée par tous ces segments de tangentes ST, PR, NQ, MO, KL, HI, sera plus petite que la courbe.

Mais, d'après le corollaire de la proposition I, les segments pris sur les deux côtés des tangentes en un point de la courbe, et correspondant de part et d'autre à des segments égaux de la base, sont égaux entre eux. Par conséquent, puisque les courbes des figures 2 et 3 sont supposées égales ou plutôt comme ce n'est qu'une même courbe et que, si nous avons tracé deux figures, ce n'a été que pour éviter la confusion, on a : tangente ST (3e figure) = tangente PV (2e figure) : le point S (3e figure) étant identique à P (2e figure), et les segments AB, BC de la base étant égaux de part et d'autre dans les deux figures, les segments pris des deux côtés sur la tangente et correspondant à ces segments égaux de la base doivent en effet être égaux, c'est-à-dire que ST (3e figure) = PV (2e figure).

On prouvera de même que PR (3e figure) = TZ (2e figure) ; etc. pour les autres segments. Il n'y aura que le premier de la 2e figure et le dernier de la 3e qui ne seront pas égaux à quelque segment sur l'autre figure. Donc l'excès de la figure 2 sur la figure 3 est égal à celui de la tangente AQ (2e figure) sur la tangente IH (3e figure). Mais, à cause du parallélisme, IH est égal à un segment de base, FG ou AB, puisqu'on suppose tous ces segments égaux dans les deux figures ; donc la 2e figure, composée de tangentes et plus grande que la courbe, surpasse la 3e figure, composée de tangentes et plus petite que la courbe, de l'excès de la tangente AQ sur le segment AB de la base qui lui correspond (2e figure).

Si donc nous voulons circonscrire à la courbe deux figures, l'une plus grande, l'autre plus petite, et dont la différence soit plus petite qu'une quantité donnée quelconque, la construction sera très facile. La tangente au point A (*fig.* 121) est donnée d'après la méthode des tangentes déjà connue, donc l'angle QAB est donné ; mais l'angle QBA est droit ; donc le triangle QAB est donné d'espèce, donc le rapport $\frac{AQ}{AB}$. Il faut donc régler la division de la base en sorte que la différence AQ — AB soit plus petite qu'une droite donnée quelconque ; pour cela, il suffit de chercher deux droites dans le rapport donné et dont la différence soit plus petite que la droite donnée : problème facile. On prendra ensuite un segment quelconque AB de la base, avec la seule condition qu'il soit au plus égal à la plus petite des deux droites satisfaisant audit problème.

Nous aurons ainsi trouvé deux figures circonscrites à la courbe, l'une plus grande, l'autre plus petite que cette courbe, et telles que la différence de ces figures soit inférieure à un intervalle donné quelconque ; *a fortiori*, l'excès de la plus grande des circonscrites sur la courbe et celui de la courbe sur la plus petite des circonscrites seront chacun plus petits encore.

On voit donc que notre méthode par double circonscription ouvre un accès facile à la méthode d'Archimède, quand il s'agit de la mesure

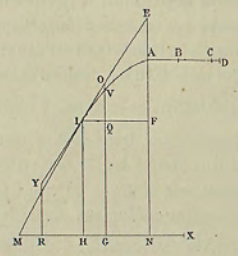
des lignes courbes. Il suffit de l'avoir dit une fois et de l'avoir démontré.

Cela posé, j'affirme hardiment qu'on peut trouver une courbe vraiment géométrique égale à une droite donnée. Cette courbe est une des paraboles en nombre infini, sur lesquelles nous avons spéculé il y a déjà longtemps; c'est celle où les cubes des ordonnées sur l'axe sont proportionnels aux carrés des abscisses de l'axe. Pour que les géomètres n'aient pas à douter de mon affirmation, voici la démonstration en peu de mots.

Proposition III.

Soient (*fig.* 123) MIVA *la parabole dont je viens de parler,* A *son sommet,* AN *son axe,* I *un point quelconque pris sur la courbe. Si je mène*

Fig. 123 (4).



les perpendiculaires ou ordonnées sur l'axe MN, IF, *j'aurai constamment* $\frac{MN^3}{IF^2} = \frac{NA^2}{FA^2}$. *Il faut prouver que la courbe* MIA *est égale à une droite donnée.*

Je pose $\frac{AN^2}{NM^2} = \frac{NM}{AD}$, AD étant pris perpendiculaire à AN; il est clair que AD sera le paramètre de la dite parabole, c'est-à-dire que $AD \times AN^2 = NM^3$ et que, si l'on prend un autre point I, on aura encore pour le cube de l'ordonnée : $AD \times AF^2 = IF^3$. Cela n'a pas besoin

de démonstration, et nous n'avons pas à nous arrêter à ce qui est trop facile.

Je mène la tangente au point I, soit IOE, E étant son point de rencontre avec l'axe AN. D'après la méthode des tangentes, on aura FA = 2AE, par conséquent $\frac{FE}{AF} = \frac{3}{2}$, donc $\frac{EF^2}{AF^2} = \frac{9}{4}$.

Je prends $CD = \frac{1}{9}AD$, et le milieu B du reste CA; on aura $\frac{DA}{AB} = \frac{9}{4} = \frac{EF^2}{AF^2}$.

Donc $AD \times AF^2 = FE^2 \times AB$. Mais $AD \times AF^2 = IF^3$; donc $AB \times EF^2 = IF^3$. Donc $\frac{EF^2}{IF^2} = \frac{IF}{AB}$, *et componendo* (comme $EF^2 + IF^2 = IE^2$) : $\frac{IE^2}{IF^2} = \frac{IF + AB}{AB}$.

Si je mène du point I, perpendiculairement sur la base, la droite IH, si je trace une autre perpendiculaire quelconque GQVO, rencontrant l'ordonnée IF en Q, la courbe en V, et la tangente en O, les triangles semblables donneront $\frac{IO}{IQ(=HG)} = \frac{IE}{IF}$, d'où $\frac{IO^2}{HG^2} = \frac{IE^2}{IF^2}$.

Mais $\frac{IE^2}{IF^2} = \frac{IF + AB}{AB}$. Donc $\frac{IO^2}{HG^2} = \frac{IF + AB}{AB}$, *relation constante que je me proposais de démontrer.*

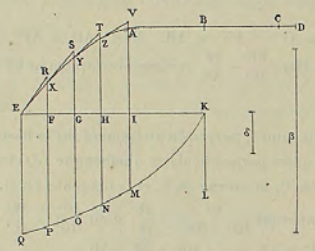
Il suit de là que, si sur le prolongement de MN on prend NX = AB, on a toujours $\frac{IO^2}{HG^2}$ ou (pour la tangente et le segment de base de l'autre côté, qui, à cause des parallèles, donnent toujours le même rapport) $\frac{IY^2}{RH^2} = \frac{HX}{NX}$. Car HX = IF + AB et NX = AB, ce qui est évident d'après la construction, puisqu'à cause des parallèles on a HN = IF, et qu'on a pris NX = AB.

Proposition IV.

Soit (*fig.* 124) AXE cette parabole dont la propriété, comme nous avons dit, est que les cubes des ordonnées soient proportionnels aux carrés des abscisses sur l'axe. Soient AI l'axe, EI la base ou demi-base; l'axe AI et l'ordonnée IE étant donnés, on trouvera, comme ci-dessus, le paramètre AD, dont on retranchera le neuvième, CD; après

quoi on prendra le milieu B du reste AC. Je divise la base EI en autant de parties égales que l'on voudra EF, FG, GH, HI; aux points F, G, H, j'élève les perpendiculaires FX, GY, HZ, qui rencontrent la courbe aux points X, Y, Z. Par les points E, X, Y, Z, je mène les tangentes ER, XS, YT, ZV qui rencontrent le prolongement des perpendiculaires FX, GY, HZ, IA aux points R, S, T, V. Enfin je prends, sur le prolongement de EI, IK = AB.

Fig. 124 (5).



Il résulte de la proposition précédente et de son corollaire que l'on a $\frac{ZV^2}{HI^2} = \frac{HK}{KI}$; de même $\frac{YT^2}{GH^2} = \frac{GK}{KI}$; $\frac{XS^2}{FG^2} = \frac{FK}{KI}$; enfin $\frac{ER^2}{EF^2} = \frac{EK}{KI}$.

Cela posé, en K j'élève KL perpendiculaire sur EK, et je prends KL = KI = AB. J'imagine maintenant qu'avec K comme sommet, KE pour axe, on décrive la parabole simple ou parabole d'Archimède, de paramètre KL. Soit KMQ cette parabole, j'élève jusqu'à sa rencontre les perpendiculaires EQ, FP, GO, HN, IM qui en seront évidemment les ordonnées, et qui seront dans le prolongement des perpendiculaires FX, GY, etc.

Comme nous l'avons déjà dit, $\frac{ZV^2}{HI^2} = \frac{HK}{KI}$. Mais, en multipliant les deux termes par KL, on a $\frac{HK}{KI} = \frac{HK.KL}{IK.KL}$; or, d'après la nature de la parabole d'Archimède, $HK.KL = HN^2$; d'ailleurs $IK.KL = KL^2$, puisque l'on a pris KL = KI. Donc $\frac{HN^2}{KL^2} = \frac{ZV^2}{HI^2}$. Donc $\frac{HN}{KL} = \frac{ZV}{HI}$.

Nous prouverons de même que l'on aura, entre les tangentes et les ordonnées, les rapports : $\frac{YT}{GH} = \frac{GO}{KL}$; $\frac{XS}{FG} = \frac{FP}{KL}$; enfin $\frac{ER}{EF} = \frac{EQ}{KL}$.

Mais, puisque $\frac{ZV}{HI} = \frac{HN}{KL}$, en égalant le produit des extrêmes à celui des moyens, on a NH.HI = KL.ZV. De même, OG.GH = KL.YT, et PF.FG = KL.XS, enfin EQ.EF = KL.ER.

Mais pourquoi s'arrêter plus longtemps sur une question aussi facile, lorsque nous arrivons ainsi immédiatement à la méthode d'Archimède? En inscrivant et en circonscrivant les figures au segment parabolique, la somme de tous les rectangles QE.EF, PF.FG, OG.GH, NH.HI, représentera le segment parabolique EQMI; la somme des tangentes ER, XS, YT, ZV, en redoublant la circonscription, conformément aux règles de notre méthode, représentera la courbe même EXYZA. Donc le segment parabolique EQMI est égal au produit de KL par la courbe EXA. Or le segment parabolique EQMI est donné en rectilignes, puisque Archimède a carré la parabole et par conséquent ses segments. Donc le produit $KL \times \widehat{EXA}$ est donné; mais KL est donné, donc la courbe EXA, et l'on peut trouver une droite qui lui soit égale. C. Q. F. D.

Si quelqu'un trouvait cependant cette démonstration trop rapide, je ne refuse pas de donner à part le raisonnement complet, en suivant les traces d'Archimède; ceux qui estiment que ce qui précède ne suffit pas pourront lire et examiner le raisonnement qui suit :

Il faut prouver que le segment parabolique EQMI = $KL \times \widehat{EXA}$.

Posons, d'après Archimède, EQMI = $KL \times \beta$. KL et β sont donnés.

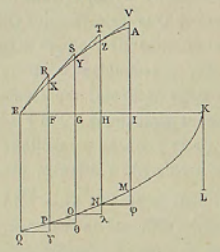
Si nous prouvons que $\beta = \widehat{EXA}$, notre proposition sera établie.

Je dis donc que $\beta = \widehat{EXA}$. Si en effet elle n'est point égale à cette courbe, elle sera ou plus grande ou plus petite. Soit d'abord $\beta > \widehat{EXA}$ et soit, dans cette hypothèse, δ leur différence.

D'après la proposition II, nous pouvons circonscrire à la courbe EXA une figure composée de segments de tangentes et qui soit supérieure à la courbe d'un intervalle moindre que δ. Supposons cette circon-

scription effectuée et représentée dans une figure à part (*fig.* 125), marquée *cinquième* en chiffre romain, où cet ensemble de segments de tangentes, ER + XS + YT + ZV, d'après ce qui a été démontré, est plus grand que la courbe EXA. Mais on suppose également β plus grande que cette courbe, et l'excès de la figure circonscrite sur la courbe est inférieur à celui de β sur la courbe. Donc la figure circonscrite est plus petite que β. Donc le produit de KL par la circonscrite

Fig. 125 (V).



est inférieur à KL × β. Mais KL × β est égal au segment parabolique EQMI. Donc le produit de KL par la circonscrite est inférieur à ce segment parabolique EQMI.

Or nous avons prouvé que

$$KL \times ER = QE \times EF,$$
$$KL \times XS = PF \times FG,$$
$$KL \times YT = OG \times GH,$$
$$KL \times ZV = NH \times HI.$$

Donc, en sommant, le produit de KL par la figure circonscrite est égal à la somme QE × EF + PF.FG + OG.GH + NH.HI. Si maintenant, sur les droites FP, GO, HN, IM qui décroissent continuellement à mesure qu'elles se rapprochent du sommet de la parabole, on abaisse, des points Q, P, O, N, les perpendiculaires (parallèles à la

base) Qγ, Pθ, Oλ, Nφ, il est clair que le rectangle QEFγ = QE.EF; de même θF = PF.FG; λG = OG × GH; enfin φH = NH.HI. Donc le produit de KL par la circonscrite est égal à la somme des rectangles γE, θF, λG, φH.

Mais nous avons prouvé que ce produit de KL par la circonscrite est inférieur au segment parabolique EQMI. Donc

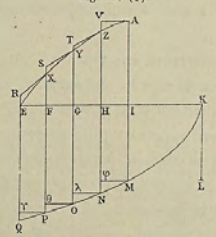
$$\gamma E + \theta F + \lambda G + \varphi H < EQMI;$$

ce qui est absurde, puisque la somme forme une figure composée de rectangles, évidemment circonscrite au segment parabolique, et par conséquent supérieure. Donc β n'est pas plus grande que la courbe EXA.

Nous allons prouver qu'elle n'est pas plus petite. Supposons en effet $\beta < \widehat{EXA}$, et soit δ l'excès de la courbe sur la droite β.

Circonscrivons à la courbe sur une figure (*fig.* 126) séparée (désignée comme *cinquième* en caractère grec) une suite de segments de

Fig. 126 (ε).



tangentes inférieure à la courbe EXA, mais en sorte que l'excès de la courbe sur elle soit inférieur à δ. Soit cette suite de segments de tangentes : XR + YS + ZT + AV.

Comme l'excès de la courbe sur β est égal à δ, et que l'excès de la même courbe sur la figure circonscrite est moindre que δ, la circonscrite sera plus grande que β, donc son produit par KL sera plus

grand que le segment parabolique EQMI. Mais, d'après ce qui a été démontré, le produit de KL par la circonscrite est égal à

$$PF \times FE + OG \times GF + NH \times HG + MI \times IH.$$

En effet, $\frac{XR}{FE} = \frac{FP}{KL}$; donc $KL \times XR = PF \times FE$, et ainsi de suite pour les autres.

Puisque le produit de KL par la circonscrite est plus grand que le segment parabolique EQMI, la somme des rectangles

$$PF.FE + OG.GF + NH.GH + MI.HI$$

est supérieure à ce segment parabolique. Mais si on mène les perpendiculaires (parallèles à la base) $P\gamma$, $O\theta$, $N\lambda$, $M\varphi$, qui rencontrent les ordonnées à l'intérieur de la parabole (car les ordonnées croissent à mesure qu'elles s'éloignent du sommet), les rectangles ainsi construits PE, OF, NG, MH seront respectivement égaux aux précédents. Donc la somme PE + OF + NG + MH sera supérieure au segment parabolique. Ce qui est absurde, car ces rectangles PE, OF, NG, MH composent une figure inscrite dans le segment parabolique et par conséquent plus petite.

Donc β n'est pas inférieure à la courbe EXA. Ne lui étant ainsi ni supérieure, ni inférieure, elle lui est égale. C'est ce que nous avons voulu démontrer longuement pour écarter tout scrupule.

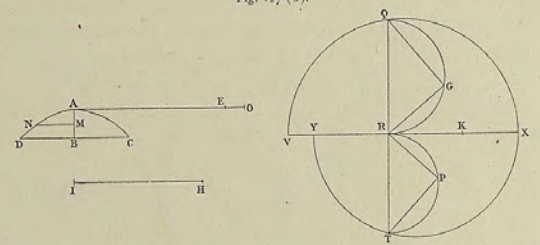
De ce qui a été démontré, ressort que l'on peut établir avec la même facilité l'égalité entre un segment parabolique quelconque EQPF, retranché du premier, et le produit de la donnée KL par la courbe EX. Si donc on donne sur la base un point quelconque F, comme, d'après Archimède, le segment parabolique EQPF est donné en rectilignes, le produit $KL \times \overline{EX}$ est donné; mais KL est donné, donc l'arc EX. Par conséquent, si l'on donne sur la base un point quelconque F, il est clair que l'arc de courbe correspondant est donné et qu'on peut assigner une droite qui lui soit égale.

Il n'y a pas à objecter que, pour trouver une droite égale à la courbe EXA, il semble falloir construire une parabole simple, ce qui

rendrait le problème solide. Car le tracé de cette parabole n'est supposé que pour rechercher la vérité et faire régulièrement la démonstration; rien n'empêche qu'on ne dissimule ce tracé imaginaire de parabole, et qu'on ne fasse le calcul en ne laissant apparaître que des droites et des cercles. Sauf erreur, voici ce calcul.

Soit (*fig.* 127) la courbe parabolique DAC, telle que les cubes des ordonnées DB et NM soient proportionnels aux carrés des abscisses de l'axe, BA, AM. On donne la hauteur AB, et la demi-base BD, ou la base totale DBC. Je dis que la droite prouvée égale à la courbe DAC est donnée par un calcul véritablement géométrique.

Fig. 127 (6).



Soit AO le paramètre de cette parabole, qui est donné avec l'axe et l'ordonnée, comme il a été montré plus haut; j'en retranche la neuvième partie EO. Je prends égale au reste AE la droite YK, que je prolonge de KX égale à l'ordonnée ou demi-base DB. Sur YX comme diamètre, je décris le demi-cercle YTX et, prenant en R le milieu de YK, j'y élève la perpendiculaire RT qui rencontre le demi-cercle en T. Je prends RV égale à RT, et sur VX comme diamètre je décris le demi-cercle VQX jusqu'à la rencontre duquel j'élève du point R la perpendiculaire RQ. Sur les droites TR, RQ, je décris les demi-cercles TPR, RGQ, et j'y inscris les cordes TP, RG égales à RY. Je joins RP, QG et je dis que le rapport $\frac{\text{arc DAC}}{\text{DBC}} = \frac{2QG^2}{3RP^2}$ et par conséquent est donné. Soit

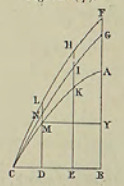
donc posé $\frac{3RP^2}{2QG^2} = \frac{DC}{IH}$. La droite IH donnée par cette construction sera égale à la courbe parabolique DAC.

Si cette construction d'ailleurs ne concorde pas avec la démonstration précédente, il faut la corriger d'après cette dernière.

Si cette propriété de notre courbe parabolique ne suffit pas pour la faire placer par les géomètres au rang des objets particulièrement remarquables de leur Science, ce qui va suivre lui assurera peut-être ce rang. Car qu'y a-t-il de plus singulier que de voir, de cette seule courbe, en dériver une infinité d'autres différentes de cette première et différentes entre elles, et qu'on démontrera néanmoins être égales à des droites données? Voici la proposition générale :

Soient (*fig.* 128) CMA *notre courbe parabolique*, AB *sa hauteur*, CB *sa demi-base; sur cette courbe, on en formera d'autres en nombre infini de*

Fig. 128 (7).



cette façon. Si l'on mène perpendiculairement à la base des droites quelconques DMNL, EKIH, *coupant la courbe aux points* M, K, *la nouvelle courbe* CNIG *à former de cette première sera de telle nature que* DN *soit égale à l'arc correspondant* CM *de la première courbe*, EI *à l'arc* CMK *de la première courbe, et de même pour toutes les autres perpendiculaires. Cette nouvelle courbe* CNIG *sera différente d'espèce de la première.*

On formera sur cette seconde courbe une troisième CLHF, *en sorte que* DL, EH *soient respectivement égales aux arcs* CN, CNI *de la seconde courbe. Sur la troisième, on formera de la même façon une quatrième, sur la quatrième une cinquième, sur la cinquième une sixième, et ainsi de*

suite à l'infini. Je dis que toutes ces courbes CNIG, CLHF, *etc. à l'infini seront, de même que la première parabolique* CMKA, *égales à des droites données.*

Il faut remarquer que toutes ces courbes, en nombre indéfini, sont purement géométriques, et, cependant, on ne peut leur appliquer cette prétendue loi de la nature, dont j'ai parlé au commencement de cette Dissertation. Quoique, en effet, on suppose les droites DN, EI égales aux arcs CM, CMK, elles n'en sont pas moins posées comme égales à des lignes droites, d'après la démonstration précédente. Car, soit donné un point quelconque D, d'après ce qui précède, une droite égale à l'arc CM est donnée; donc la droite DN posée par construction égale à l'arc CM doit être considérée comme une droite véritablement donnée et non supposée égale à un arc. De même pour les autres. Donc la courbe CNIG est véritablement géométrique, et une fois que nous aurons démontré qu'elle est égale à une droite donnée, il s'ensuivra que la courbe qui en dérive, CLHF, est aussi purement géométrique, et de même toutes les autres indéfiniment.

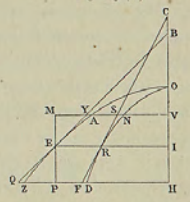
La démonstration est facile en posant d'abord une proposition qui soit générale pour toute cette question.

Proposition VI.

Soient (*fig.* 129) *une courbe quelconque* ONR, *de la nature des précédentes, dont* O *est le sommet*, OVI *l'axe* (*ou l'ordonnée, car la démonstration est la même dans les deux cas*). *Je forme sur elle une autre courbe* OAE, *telles que ses ordonnées soient égales aux arcs correspondants de la première courbe; c'est-à-dire* VA $= \widehat{ON}$, IE $= \widehat{OR}$, *et ainsi de suite. Je mènerai comme suit la tangente en un point donné de cette nouvelle courbe. Soit* E *le point donné, je mène l'ordonnée* EI *qui coupe la première courbe en* R. *Je mène en ce point* R *la tangente* RC *à la première courbe. Cette tangente rencontre l'axe au point* C. *Je pose* $\frac{RC}{CI} = \frac{IE}{IB}$, *et je joins* EB. *Je dis que* EB *est tangente en* E *à la nouvelle courbe* EAO.

En effet, si je prends sur l'axe un point quelconque V, et si je mène l'ordonnée VNA coupant la première courbe en N, la tangente RC en S, la seconde courbe en A, enfin EB en Y, il me suffit de prouver que l'on a toujours VY > VA, pour établir que EB ne coupe pas la nouvelle courbe du côté du sommet. Or cette preuve est facile à donner.

Fig. 129 (8).



En effet, VA = $\widehat{ON} = \widehat{OR} - \widehat{NR}$. Mais RS < $\widehat{RN}$, suivant le corollaire de la première proposition. Donc $\widehat{OR} - RS > \widehat{OR} - \widehat{RN}$. Mais VY = $\widehat{OR} - RS$, comme nous allons le prouver tout à l'heure. Donc VY (ordonnée de EB) > VA (ordonnée de l'arc OAE). Donc tous les points de EB du côté du sommet sont extérieurs à la courbe; donc EB ne coupe pas la courbe du côté du sommet.

Mais je dis qu'elle ne la coupe pas davantage plus bas. Je prends en effet un point quelconque H, par lequel je mène l'ordonnée HZ, qui coupe la première courbe en D, le prolongement de RC en F, la seconde courbe en Z, le prolongement de EB en Q. Si je prouve qu'en tous cas HQ > HZ, j'aurai prouvé que tous les points de EB, même au-dessous de E, sont extérieurs à la courbe, et par suite la droite EB sera démontrée toucher la seconde courbe au point E.

HZ = $\widehat{OD} = \widehat{OR} + \widehat{RD}$, par construction. Mais RF > $\widehat{RD}$, suivant le corollaire de la première proposition, RF étant un segment inférieur de la tangente RC. Donc $\widehat{OR} + RF > \widehat{OR} + \widehat{RD}$. Mais $\widehat{OR} + RF$ = HQ, comme nous allons le prouver tout à l'heure, et $\widehat{OR} + \widehat{RD}$ = HZ, par

construction. Donc en tous cas HQ > HZ. Donc la droite EB est tangente en E à la seconde courbe.

Reste à prouver en premier lieu que $\widehat{OR} - RS = VY$.

Je mène EM parallèle à l'axe et rencontrant en M le prolongement de VY. Par construction, $\frac{EI}{IB} = \frac{RC}{CI}$. Mais $\frac{EI}{IB} = \frac{YV}{VB} = \frac{YM}{ME}$, et $\frac{RC}{CI} = \frac{RS}{VI}$; donc $\frac{YM}{ME} = \frac{RS}{VI}$. Mais, à cause des parallèles, ME = VI; donc YM = RS. Mais aussi EI = VM; donc EI − MY = VY. Or, par construction, EI = $\widehat{OR}$. Donc $\widehat{OR} - MY (= RS) = YV$. Premier point qu'il fallait démontrer.

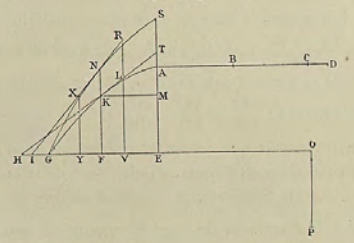
On raisonnera de même au-dessous de l'ordonnée EI. Menant EP parallèle à l'axe, on prouvera que QP = RF.

En effet, $\frac{EI}{IB}$ ou $\frac{QH}{HB}$ ou $\frac{QP}{PE} = \frac{RC}{CI}$ ou $\frac{RF}{IH}$. Mais PE = IH; donc QP = RF. D'ailleurs HQ = HP + PQ; HP = IE = $\widehat{OR}$; PQ = RF, comme on vient de le démontrer. Donc $\widehat{OR} + RF$ = HQ. Second point qu'il fallait démontrer.

Il est donc prouvé que EB est tangente à la seconde courbe au point E, ce qu'il fallait démontrer.

Soit maintenant (*fig.* 130) notre courbe parabolique GKA, de hau-

Fig. 130 (9).



teur AE, de demi-base GE, de paramètre AD. Soient, comme précédemment, CD = $\frac{1}{9}$AD, et B le milieu de AC. De cette première courbe

j'en forme une autre à partir du point G, soit GNS, qui rencontre en S l'axe de la première, la propriété de cette nouvelle courbe étant que, si l'on prend un point quelconque F et que l'on élève la perpendiculaire FKN qui rencontre les deux courbes en K et N, on ait toujours FN égal à l'arc GK de la première courbe. Menons KM parallèle à la base et, par ce même point K, TKH tangente à la première courbe et rencontrant l'axe en T, la base en H; par le point N de la seconde courbe, menons la tangente RNXI, qui rencontre la base en I; enfin des deux points R, X, pris arbitrairement de part et d'autre sur cette tangente, abaissons sur la base les perpendiculaires XY, RV.

D'après ce qui précède, on a constamment, quelle que soit la tangente KT, $\frac{KT^2}{FE^2}$ ou $\frac{KL^2}{FV^2} = \frac{FE+AB}{AB}$; mais $\frac{KT^2}{FE^2(=KM^2)} = \frac{KH^2}{HF^2}$, à cause des parallèles; donc $\frac{KH^2}{HF^2} = \frac{FE+AB}{AB}$. D'autre part, d'après la proposition précédente, $\frac{KH^2}{HF^2} = \frac{FN^2}{FI^2}$, car les côtés sont proportionnels, comme le démontre cette proposition; donc les carrés le sont également. Donc $\frac{NF^2}{FI^2} = \frac{FE+AB}{AB}$; *componendo* : $\frac{(NF^2+FI^2)(=NI^2)}{FI^2} = \frac{FE+2AB}{AB}$. Mais $\frac{NI^2}{FI^2} = \frac{RN^2}{FV^2}$ et aussi $= \frac{NX^2}{FY^2}$; donc, si l'on prend un point quelconque N sur la seconde courbe, le rapport des carrés du segment de tangente et du segment de base correspondant, soit d'un côté, soit de l'autre, sera $\frac{FE+2AB}{AB}$. Si donc je prolonge la base GE de EO $= 2AB$, qu'en O j'élève la perpendiculaire OP $= AB$, on aura toujours, pour notre seconde courbe : $\frac{NR^2}{FV^2}$ ou $\frac{NX^2}{FY^2} = \frac{FO}{OP}$.

Cela posé, il est clair que les autres courbes en nombre indéfini, qu'on tracera comme nous l'avons indiqué, sont de telle nature que, par exemple, dans la troisième, le rapport des carrés du segment de la tangente et du segment de base correspondant sera $\frac{FE+3AB}{AB}$, en prenant F au point où tombe la perpendiculaire abaissée du point de contact sur la base.

Dans la quatrième courbe, le même rapport des carrés des segments correspondants de la tangente et de la base sera $\frac{FE+4AB}{AB}$, et ainsi de suite indéfiniment.

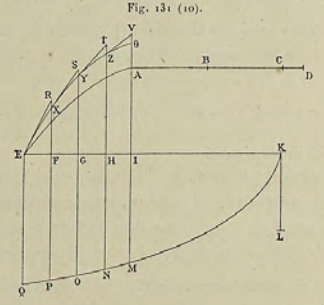
La démonstration est toujours la même et s'applique évidemment en tous cas.

Ceci établi, il est facile d'arriver au théorème général.

Proposition VII.

Soient (*fig.* 131) EA notre courbe parabolique, AI son axe, IE sa demi-base. Je forme sur elle la seconde courbe EXYZθ de telle sorte,

Fig. 131 (10).



comme je l'ai dit plus haut, qu'une ordonnée quelconque FX soit égale à l'arc de la première courbe interceptée par cette ordonnée ou perpendiculaire. Je divise la base en un nombre quelconque de parties égales EF, FG, GH, HI; aux points F, G, H, j'élève des perpendiculaires qui coupent la seconde courbe aux points X, Y, Z. Soient AD le paramètre de la première courbe, CD sa neuvième partie, B le milieu du reste AC. Soit, dans le prolongement de la base, IK $= 2AB$ et, élevée en K, la perpendiculaire KL $= AB$. Par le point K, sur l'axe KE, j'imagine décrite la parabole simple ou d'Archimède ayant KL pour

paramètre; soit KMOQ cette parabole; par les points E, F, G, H, I, j'élève des perpendiculaires à la base qui rencontrent cette parabole aux points Q, P, O, N, M.

D'après le corollaire de la proposition précédente, comme EXO est la seconde courbe dérivée de la première, c'est-à-dire formée par le procédé que nous avons déjà indiqué plusieurs fois, si l'on y prend un point quelconque Y, et que l'on mène le segment de tangente YT, on a $\frac{YT^2}{GH^2} = \frac{KG}{KL}$. Mais, en multipliant de part et d'autre par KL, $\frac{GK}{KL} = \frac{GK \times KL}{KL^2}$, et, d'après la nature de la parabole simple, $GK \times KL = GO^2$. Donc $\frac{YT^2}{GH^2} = \frac{GO^2}{KL^2}$ et $\frac{YT}{GH} = \frac{GO}{KL}$, ou, en égalant le produit des extrêmes à celui des moyens, $GO \times GH = KL \times YT$.

Si l'on mène les autres tangentes ER, XS, ZV, rencontrant les perpendiculaires en R, S, V, on prouvera de même que

$$QE \times EF = KL \times ER, \qquad PF \times FG = KL \times XS;$$

et ainsi de suite indéfiniment.

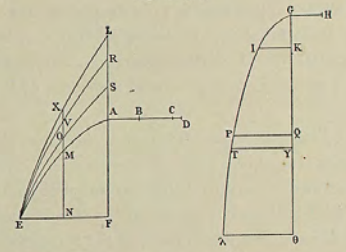
D'où, en ramenant à la méthode d'Archimède par le même procédé que dans la proposition IV, on conclura que le segment parabolique EQMI est égal au produit de KL par l'arc EXO de la seconde courbe. De même pour les autres segments paraboliques : par exemple, segm. $EQPF = KL \times \widehat{EX}$; segm. $EQOG = KL \times \widehat{EXY}$; et ainsi de suite indéfiniment.

Or tous ces segments paraboliques sont donnés en rectilignes par la quadrature de la parabole qu'Archimède a démontrée; KL est également donné. On a donc également comme données tant la seconde courbe totale EXO que les arcs EX, EY, etc., interceptés sur elle par les perpendiculaires élevées aux points F, G, etc.

Pour égaler à une droite donnée la troisième courbe, la construction sera la même, sauf que l'on prendra $IK = 3AB$; pour la quatrième courbe, $IK = 4AB$; et enfin on établira, entre toutes les courbes à dériver indéfiniment de la première, cette relation : que deux quelconques seront entre elles comme les segments paraboliques de même hauteur d'une même parabole, dont les distances au sommet de la parabole sont d'autant de fois le paramètre qu'il y a d'unités dans les ordres des courbes comparées entre elles.

Soient par exemple (*fig.* 132) EMA notre courbe parabolique, AF son axe, EF sa demi-base, AD son paramètre, CD le neuvième de ce

Fig. 132 (11).



dernier, B le milieu du reste AC. Je forme de cette première courbe la seconde EOS, telle que, si l'on prend un point quelconque N sur la base, NO, perpendiculaire à la base, et qui rencontre les courbes M, O, soit égale à l'arc EM de la première courbe. Je forme ensuite de la seconde courbe la troisième EVR, où NV est égale à l'arc EO de la seconde courbe. De la troisième EVR je forme la quatrième EXL, où NX est égale à l'arc EV de la troisième courbe. Soit à part la parabole simple ou d'Archimède, d'axe indéfini GKQY, de sommet G, de paramètre $GH = AB$. On demande par exemple le rapport de la quatrième courbe EXL à la primitive EMA.

La première de ces deux courbes étant du quatrième ordre, je prends sur l'axe l'abscisse $GY = 4GH$ et, sur son prolongement, $Y0 = EF$ (demi-base); je mène les ordonnées YT, 0λ.

La seconde des deux courbes à comparer étant du premier ordre, je prends sur l'axe l'abscisse GK égale au paramètre pris une seule

fois et, sur son prolongement, KQ = EF (demi-base); je mène les ordonnées KI, QP. D'après ce qui a été démontré et conformément à la règle générale,

$$\frac{\text{segm. parab. YT}\lambda\theta}{\text{segm. parab. KIPQ}} = \frac{(4^{e}\text{ courbe})\text{EXL}}{(1^{re}\text{ courbe})\text{EMA}}.$$

Mais, d'après Archimède, le rapport des segments paraboliques est donné, donc celui des courbes est donné; mais la première est donnée, comme il a été démontré; donc la quatrième est donnée, et l'on peut assigner une droite donnée qui lui soit égale. D'ailleurs cette relation constante peut, si l'on veut, être accommodée en langage géométrique, en écartant la parabole et en se servant seulement de la règle et du compas.

Enfin qui ne voit que ce qui a été prouvé et réduit en règle pour les courbes totales vaut pour les arcs de ces courbes à comparer entre eux, au moyen de segments paraboliques ayant pour hauteur les segments de la demi-base qui correspondent aux arcs de courbes?

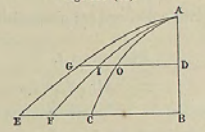
Je n'ajoute rien sur les solides engendrés par ces courbes en nombre infini, ni sur leurs surfaces courbes, ni sur les centres de gravité de ces lignes, de ces solides ou de ces surfaces; car les méthodes générales données à cet égard par de célèbres géomètres ne laissent rien ignorer là-dessus une fois connue la propriété spécifique de la courbe donnée, quoiqu'en beaucoup de cas il ne soit pas inutile que chacun fasse usage de sa propre industrie.

Mais, avant de terminer cet écrit, il me vient à la pensée d'examiner la proposition suivante :

Soient (fig. 133) COA *notre courbe parabolique,* A *son sommet,* AB *son axe,* CB *sa demi-base. On peut en former une infinité d'autres courbes de la manière déjà indiquée, mais non pas, comme auparavant, du côté de la base, au contraire de celui du sommet. Soient donc formées ainsi les courbes* AIF, AGE, *etc. indéfiniment, sous cette condition que, si l'on prend sur l'axe un point quelconque* D *et que l'on mène à l'axe la perpendiculaire* DOIG, *qui coupe les courbes aux points* O, I, G, *la droite* DI

pour la seconde courbe soit égale à l'arc AO *de la première, la droite* DG *pour la troisième, égale à l'arc* AI *de la seconde, et ainsi de suite indéfiniment. Toutes les courbes de cette sorte différeront d'espèce non seulement entre elles et par rapport à la première* AOC, *mais elles différeront*

Fig. 133 (12).



aussi de celles que nous avons formées du côté de la base. On demande si les courbes AIF, AGE, *etc. à l'infini sont égales à des droites données ou bien à d'autres courbes* (1).

Que les géomètres le cherchent, ils verront grandir encore la merveille. Il est certain que si les méthodes dont ils se servent pour mesurer les courbes sont générales et suffisantes, comme ils l'affirment, et comme je ne prétends pas dès lors le mettre en doute, ils reconnaîtront la chose au premier coup d'œil et ils épargneront un travail superflu à un géomètre déjà fatigué.

S'ils trouvent quelques points trop concis dans les démonstrations précédentes, je les prie au reste d'y suppléer ou de m'excuser.

(1) Dans la note de la page 237 du Tome I, il a été dit par inadvertance que les diverses courbes en question pouvaient être superposées par simple translation. De fait, ce sont des développées d'hyperboles, rentrant dans l'équation générale

$$(ny+b)^{\frac{2}{3}} - nx^{\frac{2}{3}} = b^{\frac{2}{3}},$$

où n représente l'ordre de dérivation à partir de la développée de parabole, $y^3 = ax^2$, que donne cette équation, si l'on fait $n = 0$ et $b = \frac{8}{27}a$.

APPENDICE A LA DISSERTATION

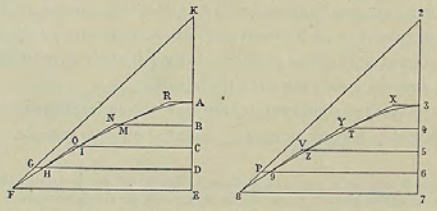
SUR LA COMPARAISON DES LIGNES COURBES AVEC LES LIGNES DROITES.

Pour répondre à la dernière question posée dans la Dissertation, il paraît convenable d'établir d'abord les propositions suivantes.

Proposition I.

Soient (*fig.* 134) *deux courbes* AIF, 3Z8 *dont les axes* AE, 37 *soient égaux entre eux. Je mène des ordonnées en nombre quelconque également distantes du sommet dans les deux figures.* Soient, par exemple, BM, CI, DH, EF les ordonnées de la première, 4T, 5Z, 69, 78 celles de la seconde; AB, distance au sommet de l'ordonnée BM, est supposée égale à 43, distance au sommet de l'ordonnée 4T. De même, on suppose CA = 53, DA = 63, enfin EA = 73, supposition déjà faite.

Fig. 134 (1).



Si les ordonnées sont toujours aux longueurs interceptées sur l'axe par les tangentes comme les lignes correspondantes de l'autre figure (c'est-à-dire si, menant les tangentes d'un côté aux points F, H, I, M, de l'autre aux points 8, 9, Z, T, on a toujours par exemple :

$$\frac{\text{ordonnée FE}}{\text{sous-tangente KE}} = \frac{\text{ordonnée 87}}{\text{sous-tangente 72}},$$

$$\frac{\text{ordonnée DH}}{\text{sous-tangente pour le point H}} = \frac{\text{ordonnée 69}}{\text{sous-tangente pour le point 9}},$$

et ainsi pour les autres), *je dis que les deux courbes* AIF, 3Z8 *sont égales, ou plutôt semblables et identiques, les ordonnées d'une figure étant égales à celles de l'autre également distantes du sommet.*

Menons en effet sur la première figure, par les points H, I, M, les segments de tangentes HO, IN, MR, rencontrant les ordonnées aux points O, N, R; sur la seconde figure, les segments de tangentes 9V, ZY, TX, rencontrant les ordonnées aux points V, Y, X. On suppose $\frac{FE}{EK} = \frac{87}{72}$. Mais les angles en E, 7 sont droits; donc les triangles FEK, 872, semblables; donc $\frac{FK}{KE} = \frac{82}{72}$. Mais, si l'on prolonge les ordonnées, DH jusqu'en G, 69 jusqu'en P, $\frac{FK}{KE} = \frac{FG}{DE}$, et $\frac{82}{72} = \frac{8P}{67}$; donc $\frac{FG}{DE} = \frac{8P}{67}$. Mais DE = 67, puisque EA = 73, et DA = 63; donc FG = 8P.

On prouvera de même pour les autres segments de tangentes que : HO = 9V, IN = ZY, MR = TX.

Donc la série des tangentes de la première figure est égale à la série des tangentes de la seconde, d'où, par la méthode d'Archimède de réduction à l'impossible, on conclura facilement l'égalité des courbes AIF et 3Z8, premier point à établir, ainsi que l'égalité des arcs correspondants : FH = 89, HI = 9Z, etc.

Reste à prouver que les ordonnées de l'une des figures sont égales à celles de l'autre.

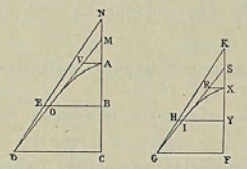
D'après la supposition faite, les ordonnées sont, de part et d'autre, dans le même rapport avec les sous-tangentes; donc les angles GFE, P87, formés par les tangentes et les ordonnées, sont égaux. De même $\widehat{OHD} = \widehat{V96}$, $\widehat{NIC} = \widehat{YZ5}$, $\widehat{RMB} = \widehat{XT4}$. D'ailleurs, tous les arcs de la première courbe, FH, HI, IM, MA sont respectivement égaux aux arcs de la seconde, 89, 9Z, ZI, T3, et l'inclinaison de ces arcs est constamment la même de part et d'autre (car l'inclinaison des courbes est mesurée par celle des tangentes qui font toujours, comme nous l'avons prouvé, des angles égaux dans les deux figures). Donc les courbes AMIFH, 3TZ98 sont non seulement égales entre elles, mais

encore semblables, et si on imagine qu'on les superpose, elles coïncideront entièrement, et auront donc, aussi bien que leurs axes, leurs ordonnées égales ou plutôt identiques. C'est le second point qu'il fallait démontrer.

PROPOSITION II.

Soient (*fig.* 135) *deux paraboles de même nature* AOD, XIG, *d'axes* AC, XF, *de demi-bases* DC, GF; soit par exemple : $\frac{DC^3}{BO^2} = \frac{CA^2}{BA^2}$, et de même $\frac{GF^3}{IY^2} = \frac{FX^2}{YX^2}$; nous restons ainsi sur notre parabole, quoique la proposition soit générale. *Si les axes sont proportionnels aux demi-*

Fig. 135 (2).



bases, c'est-à-dire si $\frac{CA}{DC} = \frac{XF}{GF}$, *je dis que ces deux paraboles sont dans le rapport de leurs axes ou bien de leurs demi-bases*, c'est-à-dire que

$$\frac{\text{courbe AOD}}{\text{courbe XIG}} = \frac{AC}{XF} \text{ ou bien } = \frac{CD}{GF},$$

ces deux derniers rapports étant égaux par supposition.

La démonstration est facile. Je partage chaque axe en un même nombre quelconque de segments, soit deux seulement pour éviter la confusion et la prolixité. Soit donc B le milieu de l'axe AC, Y celui de l'axe FX; je mène les ordonnées BO, YI, puis en D, O, les tangentes DN, OM, dont la première rencontre en E l'ordonnée BO, la seconde en V la parallèle AV aux ordonnées; de même sur l'autre figure, je mène aux points G, I les tangentes GK, IS, qui rencontrent en H, R l'ordonnée YI et la parallèle XR.

Par supposition, $\frac{DC}{CA} = \frac{GF}{FX}$; d'autre part, d'après la nature de la parabole, $\frac{CA}{\text{sous-tang. CN}} = \frac{2}{3}$, et $\frac{FX}{\text{sous-tang. FK}} = \frac{2}{3}$; donc $\frac{DC}{CN} = \frac{GF}{FK}$; donc les triangles DNC, GKF sont semblables; donc $\frac{DN}{NC} = \frac{GK}{KF}$. Mais $\frac{DN}{NC} = \frac{DE}{CB}$ et $\frac{GK}{KF} = \frac{GH}{FY}$; donc $\frac{DE}{CB} = \frac{GH}{FY}$.

On prouvera de même que $\frac{OV}{BA} = \frac{IR}{XY}$.

Les segments de l'axe, AB, BC d'une part, XY, YF de l'autre, étant égaux entre eux, en sommant les segments de tangentes, on aura

$$\frac{DE + OV}{AC} = \frac{GH + IR}{XF}.$$

Mais la somme des segments, DE + OV, dont on peut multiplier le nombre autant qu'on le voudra, représente, par la réduction à l'impossible, comme on l'a déjà indiqué et prouvé, la courbe totale DOA; de même la somme GH + IR, dont on peut aussi multiplier le nombre des termes à volonté, représente la courbe totale GIX. Donc

$$\frac{\text{courbe DOA}}{\text{axe AC}} = \frac{\text{courbe GIX}}{\text{axe XF}};$$

vicissim et convertendo :

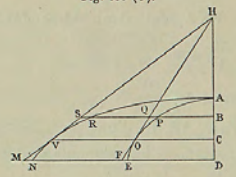
$$\frac{\text{axe AC}}{\text{axe XF}} \text{ ou } \frac{\text{base DC}}{\text{base GF}} = \frac{\text{courbe DOA}}{\text{courbe GIX}}. \quad \text{C. Q. F. D.}$$

PROPOSITION III.

Soit (*fig.* 136) AO *une courbe d'axe* AC, *de base* CO; *imaginons formée sur elle une courbe de même axe et de même sommet, dont les ordonnées soient proportionnelles à celles de la première courbe*, c'est-à-dire $\frac{\text{base CO}}{\text{base CV}} = \frac{\text{BP ordonnée de la 1re}}{\text{BR ordonnée de la 2e}} = \frac{DE}{DN}$, etc., indéfiniment. *Si en un point quelconque* O *de la première courbe, on mène la tangente* OH *rencontrant l'axe en* H, *et que l'on prolonge* CO *jusqu'à la rencontre de la seconde courbe en* V, *je dis que la droite qui joint* V, H *est tangente*

à la seconde courbe, et que les tangentes qui se correspondent sur les deux courbes coupent toujours l'axe au même point.

Fig. 136 (3).



En effet, menons les ordonnées BPR, DEN, rencontrant les courbes en P, R, E, N et les droites OH, VH ou leurs prolongements en Q, S, F, M. Si nous prouvons que BS, menée au-dessus de CV, est toujours plus grande que BR, et que DM, menée au-dessous, est aussi plus grande que l'ordonnée DN, il sera clair que la droite MVSH est tangente à la seconde courbe en V.

Or, par construction, $\frac{CO}{CV} = \frac{BP}{BR}$, et, en raison du parallélisme des droites COV, BQS, que coupent les trois droites CH, OH, VH, issues d'un même point, $\frac{CO}{CV} = \frac{BQ}{BS}$; donc $\frac{BP}{BR} = \frac{BQ}{BS}$; *vicissim* $\frac{BP}{BQ} = \frac{BR}{BS}$.

Mais, OQH étant tangente à la première courbe en O, BQ > BP; donc BS > BR. Ce qu'il fallait prouver en premier lieu.

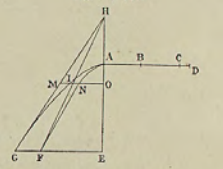
La démonstration est la même pour l'ordonnée menée plus bas. En effet, on suppose $\frac{CO}{CV} = \frac{DE}{DN}$; d'autre part, à cause des parallèles, $\frac{CO}{CV} = \frac{DF}{DM}$; donc $\frac{DE}{DN} = \frac{DF}{DM}$. Mais DE < DF; donc DN < DM. Donc MVSH est tangente en V à la seconde courbe.

Lemme pour ce qui suit.

Soit (*fig.* 137) notre parabole GIA, d'axe AE, de demi-base EFG, de tangente GH. Construisons sur le même axe AE une autre parabole FNA, telle que l'on ait pour la demi-base : $EF^2 = \frac{1}{2}EG^2$, et de

même pour les ordonnées quelconques : $NO^2 = \frac{1}{2}OI^2$. Soient AD le paramètre de la première parabole GIA, CD sa neuvième partie, B le milieu du reste. Je mène en F la tangente FH à la seconde parabole; elle rencontre l'axe au même point H que la tangente à la première,

Fig. 137 (4).



d'après la proposition précédente, ou bien d'après la nature de ces paraboles, puisque l'on a pour l'une et pour l'autre : $\frac{EA}{EH} = \frac{2}{3}$. Je dis que $\frac{FE^2}{EH^2} = \frac{\frac{1}{2}AB}{EG}$.

En effet, d'après la proposition III de la Dissertation, $\frac{GE^2}{EH^2} = \frac{AB}{EG}$. Prenant la moitié des antécédents, comme $\frac{1}{2}GE^2 = EF^2$ par supposition, $\frac{EF^2}{EH^2} = \frac{\frac{1}{2}AB}{GE}$.

Nous prouverons de même que, si $FE^2 = \frac{1}{3}GE^2$, $\frac{FE^2}{EH^2} = \frac{\frac{1}{3}AB}{EG}$. De même pour les rapports des carrés : $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$, etc. à l'infini.

Puisque, pour le rapport $\frac{1}{2}$, nous avons prouvé que $\frac{EF^2}{EH^2} = \frac{\frac{1}{2}AB}{GE}$, *componendo*, $\frac{(FE^2 + EH^2)\,(= FH^2)}{EH^2} = \frac{\frac{1}{2}AB + GE}{GE}$. Si $EF^2 = \frac{1}{3}GE^2$, on aura $\frac{FH^2}{EH^2} = \frac{\frac{1}{3}AB + GE}{GE}$; si $EF^2 = \frac{1}{4}GE^2$, on aura $\frac{FH^2}{EH^2} = \frac{\frac{1}{4}AB + EG}{EG}$; et ainsi de suite indéfiniment, cette relation ayant d'ailleurs lieu pour toute ordonnée.

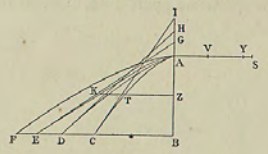
Proposition IV.

Cela posé, nous découvrons sans difficulté le théorème général.

Soient (*fig.* 138) notre parabole AC, AB son axe, BC la demi-base; soient formées sur elle les autres courbes en nombre infini AD, AE,

AF, telles que, si l'on mène une ordonnée quelconque BCDEF, BD soit toujours égale à la première courbe CA, BE à la seconde AD, BF

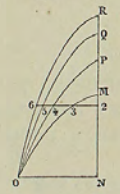
Fig. 138 (5).



à la troisième AE, et qu'il en soit de même pour toutes les courbes et toutes les ordonnées. Je dis que chacune de ces courbes AD, AE, AF, etc. à l'infini, est toujours égale à une droite donnée, de même que cela a lieu pour les courbes que dans la Dissertation nous avons construites du côté de la base par un procédé analogue.

Voici le théorème général : Soit construite à part (*fig.* 139) la parabole O3M absolument égale et semblable à la parabole AC, ayant par

Fig. 139 (5).



conséquent son axe MN = AB, sa demi-base ON = BC; c'est seulement pour éviter la confusion que nous faisons une figure à part. Soit $NP^2 = 2NM^2$, $NQ^2 = 3NM^2$, $NR^2 = 4NM^2$, et ainsi de suite indéfiniment. La demi-base ON restant la même, je construis, par les sommets P, Q, R, des paraboles de même nature que la parabole O3M ou AC; soient O4P, O5Q, O6R, etc. ces paraboles.

Je dis que la parabole O4P = courbe AD, que la parabole O5Q = courbe AE, que la parabole O6R = courbe AF; et ainsi de suite indéfiniment.

Comme, en effet, dans nos paraboles O4P, O5Q, O6R, si l'on mène l'ordonnée 23456, on a toujours, d'après la nature de ces paraboles,

$$\frac{ON^3}{(42)^3} = \frac{NP^3}{(P2)^3}, \qquad \frac{ON^3}{(52)^3} = \frac{NQ^3}{(Q2)^3}, \qquad \frac{ON^3}{(62)^3} = \frac{NR^3}{(R2)^3},$$

il est clair, d'après ce qui a été démontré dans la Dissertation, que chacune de ces paraboles est égale à une droite donnée; par suite, notre théorème général une fois démontré, il s'ensuivra que chacune des courbes AD, AE, AF est égale à une droite donnée.

Voici la démonstration du théorème général : Soient AS le paramètre de notre parabole, SY son neuvième, V le milieu du reste. Aux points C, D, E, je mène aux nouvelles courbes les tangentes CI, DH, EG, qui rencontrent l'axe aux points I, H, G. D'après ce qui a été démontré dans la Dissertation (prop. III) : $\frac{BC^2}{BI^2} = \frac{AV}{BC}$; *componendo* : $\frac{CI^2}{BI^2} = \frac{AV + BC}{BC}$. Mais, d'après la Dissertation (prop. VI) : $\frac{CI^2}{BI^2} = \frac{BD^2}{BH^2}$, BH étant la sous-tangente de DH; donc $\frac{BD^2}{BH^2} = \frac{AV + BC}{BC}$; *componendo* : $\frac{DH^2}{BH^2} = \frac{AV + 2BC}{BC}$. Mais, d'après la même proposition, $\frac{DH^2}{HB^2} = \frac{BE^2}{BG^2}$, BG étant la sous-tangente de EG; donc $\frac{BE^2}{BG^2} = \frac{AV + 2BC}{BC}$.

Nous prouverons de même que, si l'on mène à la courbe EA l'ordonnée ZTK, coupant en T la courbe CA, et que l'on imagine au point K la tangente à la courbe AKE : $\frac{KZ^2}{(\text{sous-tangente de K})^2} = \frac{AV + 2ZT}{ZT}$, et cela, quel que soit le point K.

Soit tracée (*fig.* 140) sur une figure à part, pour éviter la confusion, cette même courbe AKE, qui sera désignée dans cette figure nouvelle par $\beta\varphi\lambda$. Soient donc la base $\lambda\delta$ = EB, la tangente $\lambda\gamma$ = EG, l'axe $\delta\beta$ = BA, la sous-tangente $\delta\gamma$ = BG, l'ordonnée $\nu\varphi$ = ZK. De

cette courbe $\lambda\varphi\beta$, j'en forme une moindre $0\pi\beta$, telle que les carrés de ses ordonnées soient moitié des carrés des ordonnées de la première courbe; ainsi $\delta 0^2 = \frac{1}{2}\delta\lambda^2$, $\nu\pi^2 = \frac{1}{2}\nu\varphi^2$, etc. Je mène à cette nouvelle courbe les tangentes 0γ, $\pi 7$, aux points 0, π.

Fig. 138 (5).

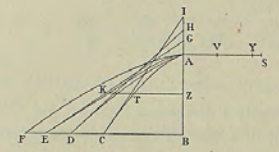
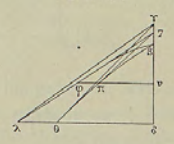


Fig. 140 (5).



D'après la proposition III ci-dessus, il est clair que les tangentes 0γ, $\lambda\gamma$ rencontrent l'axe au même point γ; de même les tangentes en φ, π rencontrent l'axe au même point 7, puisque les ordonnées des deux courbes sont en rapport constant.

Je trace encore à part (*fig.* 141) une parabole de même nature que OM, OP, etc., d'axe $98 = MN = AB = \beta\delta$; de demi-base $0\chi = NO\sqrt{\frac{1}{2}}$ ou $BC\sqrt{\frac{1}{2}}$. Soit $\chi 119$ cette parabole dont je forme une autre courbe 912ψ, de même axe 98, mais dont l'ordonnée $8\psi = \text{arc}\,\chi 119$; l'ordonnée $10\,11\,12 = \text{arc}\,119$, et de même pour les autres.

Fig. 139 (5).

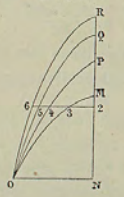
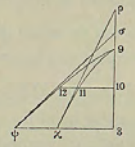


Fig. 141 (5).



Il faut prouver en premier lieu que les courbes $0\pi\beta$ et $\psi 129$ sont les mêmes, c'est-à-dire absolument égales et semblables. Voici com-

ment. Nous avons prouvé que $\frac{BE^2}{EG^2}$ ou $\frac{\lambda\delta^2}{\delta\gamma^2} = \frac{AV + 2CB}{CB}$. Prenant la moitié des antécédents, comme nous avons supposé $0\delta^2 = \frac{1}{2}\lambda\delta^2$, $\frac{0\delta^2}{\delta\gamma^2} = \frac{\frac{1}{2}AV + CB}{CB}$. Nous prouverons de même, pour une autre ordonnée quelconque $\pi\nu$, $\frac{\pi\nu^2}{(\pi 7)^2} = \frac{\frac{1}{2}AV + ZT}{ZT}$, etc.

Il faut maintenant examiner si la courbe $\psi 129$ jouit de la même propriété. Voici comment on y arrivera.

Dans la courbe $\chi 119$, dont la demi-base $\chi 8 = BC\sqrt{\frac{1}{2}}$, et l'axe $89 = AB$, d'après le lemme précédent, si l'on mène les tangentes $\chi\rho$, $\psi\sigma$ aux points χ, ψ : $\frac{(8\chi)^2}{(8\rho)^2} = \frac{\frac{1}{2}AV}{CB}$; *componendo*, $\frac{(\chi\rho)^2}{(8\rho)^2} = \frac{\frac{1}{2}AV + CB}{CB}$.

De même, si l'on suppose la droite $910 = AZ$, c'est-à-dire si les points 10 et Z sont à égale distance du sommet, le rapport du carré de la tangente en 11 au carré de la sous-tangente sera $\frac{\frac{1}{2}AV + ZT}{ZT}$. Mais (prop. VI) : $\frac{(\chi\rho)^2}{(8\rho)^2} = \frac{(\psi 8)^2}{(8\sigma)^2}$, et de même $\frac{\overline{\text{tang}\,11}^2}{\overline{\text{sous-tang}\,11}^2} = \frac{\overline{12\,10}^2}{\overline{\text{sous-tang}\,12}^2}$. Donc $\frac{(\psi 8)^2}{(8\sigma)^2} = \frac{\frac{1}{2}AV + BC}{BC}$.

Mais, sur l'autre figure (*fig.* 140), nous avons prouvé que $\frac{0\delta^2}{\delta\gamma^2} = \frac{\frac{1}{2}AV + BC}{CB}$; donc, dans les deux courbes $\psi 129$, $0\pi\beta$, $\frac{\psi 8}{8\sigma} = \frac{0\delta}{\delta\gamma}$.

La même relation aura lieu pour tous les autres points; on prouvera de même, par exemple, que $\frac{10\,12}{\text{sous-tang}\,12} = \frac{\pi\nu}{\nu 7}$, etc.

Donc (*Appendice*, prop. I) les courbes 912ψ, $0\pi\beta$ ayant même axe et leurs ordonnées étant aux sous-tangentes constamment dans le même rapport que leurs correspondantes de l'une à l'autre courbe, ces courbes seront égales entre elles ainsi que leurs demi-bases et les ordonnées à égale distance des sommets.

Mais, par construction, la demi-base $\psi 8 = \widehat{\chi 119}$; donc $\widehat{\chi 119} = 0\delta$. Mais $0\delta = \delta\lambda\sqrt{\frac{1}{2}}$; donc la courbe parabolique $\chi 119 = \delta\lambda\sqrt{\frac{1}{2}}$. Mais $\delta\lambda = BE$ et, dans la construction des courbes dérivées de la première AC, on suppose $BE = \widehat{AD}$.

Donc parab. $\chi 119 = \sqrt{\frac{1}{2}}\,\widehat{AD}$. Mais on a aussi $\widehat{\chi 119} = \sqrt{\frac{1}{2}}\,\widehat{O4P}$, car la base $\chi 8 = \sqrt{\frac{1}{2}}BC = \sqrt{\frac{1}{2}}NO$, et l'axe $89 = AB = NM = \sqrt{\frac{1}{4}}NP$. Les paraboles O4P, $\chi 119$ étant de même nature, et l'axe et la base de la parabole $\chi 119$ étant respectivement dans le rapport $\sqrt{\frac{1}{2}}$ avec l'axe et la base de la parabole O4P, on aura aussi (*Appendice*, prop. II) parab. $\chi 119 = \sqrt{\frac{1}{2}}$ parab. O4P. Puisque nous avons ainsi prouvé que la parabole $\chi 119$ est dans le rapport $\sqrt{\frac{1}{2}}$, soit avec la parabole O4P, soit avec la courbe AD, la courbe AD et la parabole O4P seront égales. C. Q. F. D.

On prouvera de même que la courbe AE et la parabole O5P sont égales.

En effet, $\frac{BE^2}{BG^2} = \frac{AV+2BC}{BC}$, comme il a été démontré; *componendo* etc., $\frac{EG^2}{BG^2} = \frac{AV+3BC}{BC}$. Mais (*Dissertation*, prop. VI): $\frac{EG^2}{BG^2} = \frac{BF^2}{(\text{sous-tang F})^2}$; donc $\frac{BF^2}{(\text{sous-tang F})^2} = \frac{AV+3BC}{BC}$.

Pour la suite, nous suivrons de point en point la démonstration précédente, sauf que dans la figure à part (*fig.* 140), après avoir pris $\lambda\delta = BF$, on prendra $\delta\theta = \sqrt{\frac{1}{3}}BF$ ou $\sqrt{\frac{1}{4}}\delta\lambda$; la courbe $\lambda\varphi\beta$ sera égale à la courbe FA, et $\theta\pi\beta$ sera de telle sorte que ses ordonnées suivent le rapport des bases $\frac{\lambda\delta}{\theta\delta}$.

Dans l'autre figure à part (*fig.* 141), où sont les courbes 911χ, 912ψ, on prendra comme ci-dessus $98 = NM = AB = \beta\delta$, mais ensuite la base $8\chi = \sqrt{\frac{1}{3}}ON = \sqrt{\frac{1}{3}}CB$. La parabole $\chi 119$ sera de même nature que les paraboles CTA ou O3M. On en formera la courbe $\psi 129$ dont les ordonnées 8ψ, 1012 seront, comme ci-dessus, égales aux arcs $\chi 9$, 119, et on prouvera, comme ci-dessus, que les courbes $\beta\pi\theta$, 911χ sont égales et semblables, c'est-à-dire identiques.

On conclura l'égalité des bases $\theta\delta$, $\psi 8$; par suite la base $\psi 8$ ou la courbe $911\chi = \sqrt{\frac{1}{2}}\delta\lambda = \sqrt{\frac{1}{3}}BF = \sqrt{\frac{1}{3}}$ courbe AE. Mais on aura démontré précédemment que parab. $\chi 119 = \sqrt{\frac{1}{3}}$ parab. O5Q. Donc la courbe AE et la parabole O5Q seront égales.

On emploiera le même raisonnement pour les cas subséquents, et l'on établira ainsi la vérité générale du théorème.

Qui aura lu attentivement la Dissertation précédente et cet Appendice reconnaîtra aussitôt les principaux fondements de notre méthode et verra qu'on en déduit très facilement la mesure des courbes.

SUR LA TRANSFORMATION

ET LA

SIMPLIFICATION DES ÉQUATIONS DE LIEUX,

POUR LA COMPARAISON SOUS TOUTES LES FORMES

DES AIRES CURVILIGNES, SOIT ENTRE ELLES, SOIT AVEC LES RECTILIGNES,

ET EN MÊME TEMPS

SUR L'EMPLOI DE LA PROGRESSION GÉOMÉTRIQUE

POUR LA QUADRATURE DES PARABOLES ET HYPERBOLES A L'INFINI.

Archimède n'a employé la progression géométrique que pour la seule quadrature de la parabole; dans ses autres comparaisons entre quantités hétérogènes, il s'est borné à la seule progression arithmétique. Est-ce parce qu'il avait trouvé que la progression géométrique se prêtait moins bien à la quadrature? Est-ce parce que l'artifice particulier dont il s'est servi pour carrer avec cette progression la première parabole peut difficilement s'appliquer aux autres? Quoi qu'il en soit, j'ai reconnu et éprouvé cette progression comme très féconde en quadratures, et je communique volontiers aux géomètres modernes mon invention qui permet de carrer, par une méthode absolument identique, et paraboles et hyperboles.

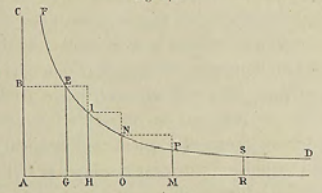
Toute cette méthode dérive d'une seule propriété bien connue de la progression géométrique, c'est-à-dire du théorème suivant :

Étant donnée une progression géométrique dont les termes décroissent indéfiniment, la différence des deux termes de la raison de cette progression est au plus petit des deux comme le plus grand de tous les termes de la progression est à la somme de tous les autres jusqu'à l'infini (1).

Cela posé, soit d'abord proposée la quadrature des hyperboles :

Je définis hyperboles des courbes d'espèces variant à l'infini, qui, comme DSEF (*fig.* 142), ont cette propriété que, si l'on suppose, sous

Fig. 142.



un angle donné quelconque RAC, les asymptotes RA, AC que l'on peut prolonger indéfiniment comme la courbe elle-même, et que si l'on mène parallèlement à l'une des asymptotes et comme on le voudra, les droites GE, HI, ON, MP, RS, etc., on aura toujours le même rapport entre une puissance déterminée de AH et la même puissance de AG d'une part, et une puissance de GE (semblable ou différente par rapport à la précédente) et la même puissance de HI, d'autre part. J'entends par puissances, non seulement les carrés, cubes, bicarrés, etc., dont les exposants sont 2, 3, 4, etc., mais aussi les racines simples dont l'exposant est 1.

Je dis que toutes ces hyperboles à l'infini, sauf une seule, celle d'Apollonius ou la première, peuvent être carrées au moyen d'une progression géométrique par une méthode uniforme et constante.

Soit par exemple l'hyperbole dont la propriété est définie par l'éga-

(1) Soit S la somme des termes d'une progression géométrique décroissant indéfiniment dont le plus grand terme est a, et la raison $q = \frac{u}{v}$; comme $q < 1$, $v > u$. Fermat énonce la relation $\frac{v-u}{u} = \frac{a}{S-a}$; d'où l'on tire immédiatement $S = a\frac{v}{v-u} = \frac{a}{1-q}$.

lité constante des rapports $\frac{HA^2}{AG^2} = \frac{GE}{HI}$ et $\frac{OA^2}{AH^2} = \frac{HI}{ON}$, etc. Je dis que l'espace indéfini qui a pour base GE et qui est limité d'un côté par la courbe ES, de l'autre par l'asymptote indéfinie GOR, est égal à une aire rectiligne donnée.

Imaginons les termes d'une progression géométrique décroissant indéfiniment; soient AG le premier, AH le second, AO le troisième, etc. Supposons que ces termes soient assez rapprochés les uns des autres pour que, suivant la méthode d'Archimède, on puisse *adégaler*, comme dit Diophante, ou égaler par approximation le parallélogramme rectiligne $GE \times GH$ au quadrilatère mixtiligne GHIE; nous supposerons de plus que les premiers intervalles GH, HO, OM, etc. des termes progressifs soient suffisamment égaux entre eux, pour que l'on puisse facilement employer la méthode d'Archimède de réduction à l'impossible, par circonscriptions et inscriptions. Il suffit de faire cette remarque une fois pour ne pas s'obliger à revenir et à insister constamment sur un artifice bien connu de tous les géomètres.

Cela posé, puisque $\frac{AG}{AH} = \frac{AH}{AO} = \frac{AO}{AM}$, on aura aussi $\frac{AG}{AH} = \frac{GH}{HO} = \frac{HO}{OM}$, pour les intervalles. Mais, pour les parallélogrammes,

$$\frac{EG \times GH}{HI \times HO} = \frac{HI \times HO}{NO \times OM};$$

en effet, le rapport des parallélogrammes $\frac{GE \times GH}{HI \times HO}$ est composé des rapports $\frac{GE}{HI}$ et $\frac{GH}{HO}$; mais, comme nous l'avons indiqué, $\frac{GH}{HO} = \frac{AG}{AH}$; donc le rapport $\frac{EG \times GH}{HI \times HO}$ est composé des rapports $\frac{GE}{HI}$ et $\frac{AG}{AH}$. D'autre part, par construction, $\frac{GE}{HI} = \frac{HA^2}{GA^2}$ ou $\frac{AO}{GA}$, par suite de la proportionalité des termes; donc le rapport $\frac{EG \times GH}{HI \times GO}$ est composé des rapports $\frac{AO}{AG}$ et $\frac{AG}{AH}$; mais $\frac{AO}{AH}$ est composé des mêmes rapports; on aura donc pour le rapport des parallélogrammes : $\frac{GE \times GH}{HI \times HO} = \frac{OA}{AH} = \frac{HA}{AG}$.

On prouvera de même que $\frac{HI \times HO}{ON \times OM} = \frac{AO}{HA}$.

Mais les droites AO, HA, GA qui constituent les rapports des parallélogrammes, forment, par construction, une proportion géométrique; donc les parallélogrammes en nombre indéfini $GE \times GH$, $HI \times HO$, $ON \times NM$, etc. formeront une progression géométrique continue dont la raison sera $\frac{HA}{AG}$. Par suite, selon le théorème constitutif de notre méthode, GH, différence des deux termes de la raison, sera au plus petit terme GA, comme le premier terme de la progression des parallélogrammes, c'est-à-dire comme le parallélogramme $EG \times GH$, à la somme de tous les autres parallélogrammes en nombre indéfini, ou autrement, suivant l'*adéquation* d'Archimède, à la figure limitée par HI, par l'asymptote HR et la courbe IND prolongée indéfiniment.

Mais, si l'on multiplie les deux termes par GE, $\frac{HG}{GA} = \frac{GE \times GH}{GE \times GA}$; donc $GE \times GH$ est à cette figure indéfinie dont la base est HI comme $GE \times GH$ est à $GE \times GA$. Donc le parallélogramme $GE \times GA$, qui est une aire rectiligne donnée, est *adégal* à la figure précitée; si l'on ajoute de part et d'autre le parallélogramme $GE \times GH$, qui, par suite des divisions indéfiniment poursuivies, s'évanouira et se réduira à rien, on arrive à cette vérité qu'il serait facile de confirmer par une démonstration plus prolixe, menée à la façon d'Archimède : que dans ce genre d'hyperbole, le parallélogramme AE est équivalent à la figure comprise sous la base GE, l'asymptote GR et la courbe ED indéfiniment prolongée.

Il est facile d'étendre cette invention à toutes les hyperboles définies ci-dessus, sauf la seule exception que nous avons indiquée. Soit en effet une autre hyperbole ayant pour propriété que $\frac{GE}{HI} = \frac{HA^3}{GA^3}$, etc. pour les autres ordonnées.

Prenons, comme ci-dessus, une série indéfinie de termes en progression; on démontrera de même que les parallélogrammes EH, IO, MN, etc. forment de même une progression indéfinie; mais, dans ce cas, le rapport du premier parallélogramme au second, du second au

troisième, etc. sera $\frac{AO}{GA}$, ce que montrera immédiatement la composition des rapports. Donc le parallélogramme EH sera à la figure comme OG à GA, ou, en multipliant les termes par GE, comme OG × GE à GE × GA : *vicissim* OG × GE est à EH ou GE × GH comme GE × GA à la figure. Mais $\frac{OG \times GE}{HG \times GE} = \frac{OG}{GH}$ ou $\frac{2}{1}$ par *adéquation;* car les intervalles voisins de la base sont, par construction, sensiblement égaux entre eux. Donc, dans cette hyperbole, le parallélogramme EGA, qui est égal à une aire rectiligne donnée, sera le double de la figure comprise sous la base GE, l'asymptote GR et la courbe ESD indéfiniment prolongée.

La démonstration sera la même dans tous les autres cas; il n'y a que pour la première hyperbole, c'est-à-dire la simple ou celle d'Apollonius, que la méthode est en défaut. La raison en est que les parallélogrammes EH, IO, NM y sont toujours égaux; les termes constitutifs de la progression, étant dès lors égaux entre eux, ne donnent aucune différence, et c'est précisément la différence qui fait tout le mystère de cette affaire.

Je n'ajoute pas la démonstration que, dans l'hyperbole commune, les parallélogrammes en question sont toujours égaux; la chose se voit immédiatement et dérive aussitôt de cette propriété de l'espèce que l'on a toujours $\frac{GE}{HI} = \frac{HA}{GA}$.

Le même moyen carre toutes les paraboles sans qu'il y en ait cette fois une seule qui, comme pour les hyperboles, échappe à notre méthode.

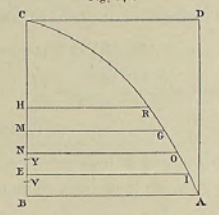
Je ne donnerai qu'un exemple, celui de la première parabole, celle d'Apollonius; sur ce modèle, on pourra faire toutes les démonstrations pour les paraboles quelconques à l'infini.

Soit AGRC une semi-parabole première (*fig.* 143), de diamètre CB, de demi-base AB. Si l'on prend les ordonnées IE, ON, GM, etc., on a toujours $\frac{AB^2}{IE^2} = \frac{BC}{CE}$, $\frac{IE^2}{ON^2} = \frac{EC}{CN}$, etc. à l'infini, d'après la propriété spécifique de la parabole d'Apollonius.

D'après la méthode, imaginons les droites BC, EC, NC, MC, HC, etc.,

formant une progression indéfinie. Les parallélogrammes AE, IN, OM, GH formeront aussi, comme on l'a prouvé ci-dessus, une progression indéfinie.

Fig. 143.



Pour connaître le rapport des parallélogrammes AE, IN, il faut, d'après la méthode, recourir à la composition des rapports.

Or le rapport des parallélogrammes AE et IN est composé des rapports $\frac{AB}{IE}$ et $\frac{BE}{EN}$. Mais, puisque $\frac{AB^2}{IE^2} = \frac{BC}{CE}$, si entre BC et CE on prend la moyenne proportionnelle CV, de même entre EC et NC la moyenne proportionnelle YC, les droites BC, VC, EC, YC, NC formeront une progression géométrique, et l'on aura $\frac{BC}{EC} = \frac{BC^2}{VC^2}$; donc, puisque $\frac{BC}{EC} = \frac{AB^2}{EI^2}$, $\frac{AB}{IE} = \frac{BC}{VC}$. Par conséquent, le rapport des parallélogrammes $\frac{AE}{IN}$ est composé du rapport $\frac{BC}{VC}$ ou $\frac{VC}{CE}$ ou $\frac{EC}{YC}$ et du rapport $\frac{BE}{EN}$ ou, comme on l'a prouvé plus haut, $\frac{BC}{CE}$; mais un rapport composé des deux $\frac{BC}{CE}$ et $\frac{EC}{CY}$ est égal au rapport $\frac{BC}{CY}$; donc le rapport des parallélogrammes $\frac{AE}{IN} = \frac{BC}{YC}$, et par conséquent, d'après le théorème constitutif de notre méthode, le rapport du parallélogramme AE à la figure IRCHE est $\frac{BY}{YC}$ et celui du même parallélogramme AE à la figure totale AIGRCB est $\frac{BY}{BC}$, BC étant le diamètre total. Mais, si l'on multiplie de part et

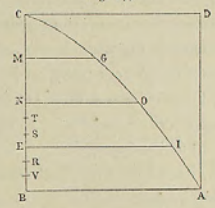
d'autre par AB, $\frac{BY}{BC} = \frac{AB \times BY}{AB \times BC}$; or $AB \times BC$ est le parallélogramme BD, obtenu en menant AD parallèle au diamètre et en la prolongeant jusqu'à la rencontre en D avec la tangente CD; donc le rapport du parallélogramme AE à la figure semi-parabolique ARCB est le même que celui des parallélogrammes $AB \times BY$ et BD; donc $\frac{AE}{AB \times BY} = \frac{ARCB}{BD}$. Mais AE ayant AB pour côté, $\frac{AE}{AB \times BY} = \frac{BE}{BY}$; donc $\frac{BE}{BY} = \frac{ARCB}{BD}$, ou *convertendo*, $\frac{BD}{ARCD} = \frac{BY}{BE}$. Mais, à cause de l'*adégalité* des droites BV, VE, EY, différences des termes de la progression, mais supposées sensiblement égales par suite de la division en un très grand nombre de parties très petites, $\frac{BY}{BE} = \frac{3}{2}$. Le rapport du parallélogramme BD à la figure est donc le rapport de 3 à 2, ce qui est d'accord avec la quadrature de la parabole donnée par Archimède, quoiqu'il se soit autrement servi de la progression géométrique. Si d'ailleurs j'ai trouvé nécessaire de changer sa méthode et de prendre une autre voie que la sienne, c'est que je suis assuré qu'en suivant exactement les traces de ce grand géomètre, on reconnaîtra que l'emploi de la progression géométrique est stérile pour la quadrature des autres paraboles en nombre indéfini, tandis que pour toutes ces paraboles sans exception la démonstration et les règles générales sont immédiatement données par notre procédé.

Soient, pour ne pas laisser lieu au doute, AIGC (*fig.* 144) la parabole dont j'ai parlé dans ma *Dissertation sur la comparaison des lignes courbes avec les lignes droites*, AB sa base, BC son diamètre, IE, IC ses ordonnées telles que l'on ait $\frac{AB^3}{IE^2} = \frac{BC^3}{EC^2}$. Qu'on imagine le reste de la construction comme ci-dessus, c'est-à-dire la progression indéfinie des droites BC, EC, NC, MC, etc. et celle des parallélogrammes AE, IN, OM, etc.

Prenez entre BC et EC les deux moyennes proportionnelles VC, RC; de même, entre EC et CN, les deux moyennes proportionnelles SC, TC.

Comme, par construction, $\frac{BC}{EC} = \frac{EC}{NC}$, les lignes BC, VC, RC, EC, SC, TC, NC seront en progression.

Fig. 144.



D'ailleurs $\frac{AB^3}{IE^3} = \frac{BC^2}{EC^2} = \frac{BC}{NC}$. Mais, dans la progression des sept proportionnelles BC, VC, RC, EC, SC, TC, NC, la première, la troisième, la cinquième et la septième forment aussi une progression continue.

Donc :: BC : RC : SC : NC, et en prenant le premier, le second et le quatrième terme de cette nouvelle progression, $\frac{BC}{NC} = \frac{BC^3}{RC^3}$; mais nous avons prouvé que $\frac{BC}{NC} = \frac{AB^3}{IE^3}$; donc $\frac{AB^3}{IE^3} = \frac{BC^3}{RC^3}$, d'où $\frac{AB}{IE} = \frac{BC}{RC}$.

Mais le rapport des parallélogrammes $\frac{AE}{IN} = \frac{AB}{IE} \times \frac{BE}{EN}$ ou $\frac{BC}{RC} \times \frac{BC}{EC}$ $\left(\text{puisque d'ailleurs } \frac{BE}{EN} = \frac{BC}{EC}\right)$.

D'autre part, dans les sept proportionnelles, en prenant la première, la troisième, la quatrième et la sixième, on a $\frac{BC}{EC} = \frac{RC}{TC}$; donc $\frac{AE}{IN} = \frac{BC}{RC} \times \frac{RC}{TC} = \frac{BC}{TC}$; donc $\frac{AE}{IGCE} = \frac{BT}{TC}$.

Donc, d'après ce qui a été démontré, le rapport du parallélogramme à la figure : $\frac{AE}{AICB} = \frac{BT}{BC} = \frac{AB \times BT}{AB \times BC}$, en multipliant de part et d'autre par AB; *vicissim* et *convertendo* : $\frac{BD}{AICB} = \frac{AB \times BT}{AB \times BE} = \frac{BT}{BE}$, en raison de la communauté du côté AB. Mais BT comprend *cinq* intervalles : TS, SE, ER, RV, VB qui, à cause de notre méthode logarithmique, sont

censés égaux entre eux; BE en comprend *trois :* ER, RV, VB; donc, dans ce cas, le rapport du parallélogramme BD à la figure est de 5 à 3.

On peut de là tirer facilement une règle universelle. *Il est clair en effet que le rapport du parallélogramme* BD *à la figure* AICB *est toujours égal au rapport de la somme des exposants des puissances de l'ordonnée et de l'abscisse à l'exposant de la puissance de l'ordonnée.* Ainsi, dans cet exemple, la puissance de l'ordonnée AB est le cube, l'exposant 3; celle de l'abscisse est le carré, exposant 2. On doit avoir, ainsi que nous l'avons établi comme règle constante, le rapport de la somme $3+2$ ou 5 à 3, exposant de l'ordonnée.

Pour les hyperboles, on trouve aussi facilement une règle universelle. *Dans une hyperbole quelconque* (*fig.* 142) *le rapport du parallélogramme* BG *à la figure indéfiniment étendue* RGED *sera égal au rapport de la différence de l'exposant de la puissance de l'ordonnée et de celui de la puissance de l'abscisse à l'exposant de la puissance de l'ordonnée.* Soit, par exemple, $\frac{HA^3}{GA^3}=\frac{GE^2}{HI^2}$; la différence des exposants du cube et du carré, $3-2=1$; l'exposant de la puissance de l'ordonnée, qui est au carré, est 2. Dans ce cas le rapport du parallélogramme à la figure sera de 1 à 2.

Pour ce qui regarde les centres de gravité et les tangentes des hyperboles et paraboles, leur invention, dérivée de ma *Méthode de maximis et minimis*, a été communiquée aux géomètres modernes, il y a déjà environ vingt ans. Les plus célèbres mathématiciens de la France voudront bien sans doute le faire savoir aux étrangers, afin que dans l'avenir il n'y ait point de doute à cet égard.

Il est remarquable combien le travail des quadratures peut être avancé par la théorie qui précède; car elle permet de carrer facilement une infinité de courbes auxquelles n'ont jamais pensé les géomètres tant anciens que modernes. Nous allons condenser brièvement ces résultats sous certaines règles.

Soit une courbe dont la propriété conduise à l'équation suivante :

$b^2-a^2=e^2$ (on voit immédiatement que cette courbe est un cercle).

On peut ramener la puissance de l'inconnue e^2 à une racine par une division (application ou parabolisme). Nous pouvons en effet poser

$$e^2=bu;$$

car on est libre d'égaler le produit de l'inconnue u par la connue b au carré de l'inconnue e. On aura donc alors

$$b^2-a^2=bu.$$

Mais le terme bu peut être décomposé en autant de termes qu'il y en a dans l'autre membre de l'équation, tout en affectant ces termes des mêmes signes que ceux de l'autre membre. Posons donc

$$bu=bi-by,$$

en représentant toujours, comme Viète, les inconnues par des voyelles. Il viendra

$$b^2-a^2=bi-by.$$

Égalons chacun des termes d'un membre au correspondant de l'autre. On aura

$$b^2=bi \quad \text{d'où} \quad i=b \text{ sera donné,}$$
$$-a^2=-by \quad \text{ou} \quad a^2=by.$$

Le point extrême de la droite y sera sur une parabole primaire. Ainsi, dans ce cas, tout peut être ramené à un carré; si donc on ordonne tous les e^2 sur une ligne droite donnée, leur somme sera un solide rectiligne donné et connu.

Soit maintenant proposée la courbe dont l'équation est

$$a^3+ba^2=e^3.$$

Qu'on applique e^3 à une aire donnée, soit par exemple : $e^3=b^2u$.

La droite u pouvant être composée de plusieurs inconnues, soit

$$a^3+ba^2=b^2i+b^2y.$$

Égalons terme à terme, savoir :

$a^3=b^2i$, on aura une parabole sous un cube et une racine.

$ba^2=b^2y$, on aura une parabole sous un carré et une racine, c'est-à-dire primaire.

Or ces deux paraboles sont carrables; donc la somme des e^3 ordonnés sur une droite donnée formera un *bi-plan* qu'on pourra facilement égaler à des quantités rectilignes du même degré.

S'il y a dans l'équation un plus grand nombre de termes, aussi bien que s'ils sont composés avec différentes puissances de l'une ou de l'autre inconnue, ils n'en pourront pas moins d'ordinaire être traités par la même méthode, au moyen de réductions légitimes.

Il est donc clair que si dans la première équation : $b^2 - a^2 = e^2$, au lieu de e^2, nous substituons bu, nous pouvons considérer comme un *plan* la somme de tous les u, ordonnés sur une ligne droite, et la carrer. En effet la somme des u n'est autre chose que celle des e^2, divisée par une droite donnée b.

De même dans la seconde équation, la somme des u n'est autre chose que celle des e^3, divisés par le carré donné b^2.

Donc, aussi bien dans le premier que dans le second cas, la somme des u fait une figure égale à une aire rectiligne donnée.

Ces opérations se font par *synérèse* et s'accomplissent, comme il est clair, au moyen de paraboles.

Mais on n'obtient pas moins de quadratures par *diérèse*, au moyen d'hyperboles, soit seules, soit unies à des paraboles.

Soit proposée, par exemple, la courbe ayant pour équation

$$\frac{b^6 + b^5 a + a^6}{a^5} = e^3.$$

On peut de même poser $e^3 = bu$, ou bien, pour avoir de part et d'autre trois termes dans chaque membre de l'équation

$$bu = b\bar{o} + bi + by.$$

Il viendra

$$\frac{b^6 + b^5 a + a^6}{a^5} = b\bar{o} + bi + by \quad \text{et, également terme à terme :}$$

1° $\frac{b^6}{a^5} = b\bar{o}$; multipliant par a^5 des deux côtés, $b^6 = a^5 b\bar{o}$; divisant par b; $b^5 = a^5\bar{o}$, équation d'une hyperbole. On sait en effet que les

équations constitutives des hyperboles renferment dans un membre une quantité donnée, dans l'autre le produit de puissances des deux inconnues.

2° $\frac{b^5 a}{a^5}$ ou $\frac{b^5}{a^4} = bi$. Multipliant par a^4 et divisant par b de part et d'autre : $b^4 = a^4 i$, équation d'une hyperbole différente de la précédente.

3° $\frac{a^6}{a^5}$ ou $a^2 = by$; équation d'une parabole.

On voit donc que, dans l'équation proposée, la somme des u ordonnés sur une droite donnée est égale à une aire rectiligne donnée; car la somme de deux hyperboles carrables et d'une parabole donne une aire égale à un rectiligne ou à un carré donné.

Rien n'empêche au reste de diviser séparément, comme on l'a fait, chacun des termes du numérateur par le dénominateur. Le résultat est en effet le même que si l'on divisait en une fois par le dénominateur le numérateur entier composé de trois termes. Cette division séparée permet de comparer facilement chaque terme d'un des membres de l'équation à son corrélatif dans l'autre.

Soit proposé encore : $\frac{b^5 a - b^6}{a^3} = e^3$.

Posons $e^3 = b^2 u$, ou bien, à cause des deux termes du membre corrélatif, $e^3 = b^2 i - b^2 y$. On aura :

1° $\frac{b^5 a}{a^3} = \frac{b^5}{a^2} = b^2 i$; multipliant par a^2 et divisant par b^2, $b^3 = a^2 i$, équation d'une hyperbole carrable.

2° $\frac{b^6}{a^3} = b^2 y$; multipliant par a^3 et divisant par b^2, $b^4 = a^3 y$, équation constitutive d'une hyperbole carrable.

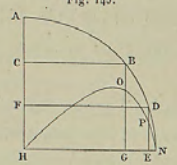
Si donc on revient à la première équation, on aura, dans ce cas, donnée en rectilignes la somme de tous les e^3, ordonnée sur une droite donnée.

Mais rien n'empêche d'aller plus loin dans le travail des quadratures.

Soit (*fig.* 145) une courbe quelconque ABDN, de base HN, de diamètre HA; soient CB, FD les ordonnées sur le diamètre, BG, DE les ordonnées sur la base. Nous supposerons que les ordonnées dé-

croissent constamment de la base au sommet, comme dans la figure : c'est-à-dire HN > FD ; FD > CB, et ainsi de suite.

Fig. 145.



La figure formée par les carrés de HN, FD, CB, ordonnés sur la droite AH, c'est-à-dire le solide $CB^2 \times CA... + FD^2 \times FC... + NH^2 \times HF$, est toujours égale à la figure formée par les rectangles $BG \times GH$, $DE \times EH$ doublés et ordonnés sur la base HN, c'est-à-dire au solide $2BG.GH.GH... + 2DE.EH.EG$, etc., la série des termes de part et d'autre étant supposée indéfinie. Or, pour les autres puissances des ordonnées, la réduction des termes sur le diamètre aux termes sur la base se fait avec la même facilité, et cette observation conduit à la quadrature d'une infinité de courbes inconnues jusqu'ici.

En effet, la somme des cubes de HN, FD, CB, ordonnés de même sur la droite AH, sera égale à celle des produits : $BG.GH^2$, $DE.EH^2$, triplés et ordonnés de même sur la droite HN, c'est-à-dire que le *bi-plan* $CB^3.CA... + DF^3.FC... + HN^3.HF$ sera égal à la somme des *bi-plans* $3(BG.GH^2.HG... + DE.EH^2.EG)$.

De même la somme des bicarrés de HN, FD, CB, ordonnés sur la droite AH, sera égale à *quatre fois* celle des bi-plans $BG.GH^3 ... DE.EH^3$, ordonnés de même sur la droite HN.

De là dérivent, comme on va le voir, une infinité de quadratures.

Soit, par exemple, cette courbe ABDN, dont on donne la base HN et le diamètre HA. Appelons analytiquement b le diamètre donné HA, d la base donnée HN, e une ordonnée quelconque FD, a une coordonnée quelconque HF, et soit, par exemple, $b^2 - a^2 = e^2$ l'équation constitutive de la courbe (qui sera un cercle). D'après le théorème général

qui précède, la somme des e^2, ordonnés sur la droite b, est égale à la somme des produits HG.GB, doublés et ordonnés sur la droite HN ou d; mais la somme des e^2, ordonnés sur b, est égale, comme on l'a prouvé plus haut, à un rectiligne donné; donc la somme des produits HG.GB, doublés et ordonnés sur la base d, forme une aire rectiligne donnée; si l'on prend la moitié, la somme des produits HG.GB, ordonnée sur la base d, formera de même une aire rectiligne donnée.

Pour passer facilement, et sans embarras de radicaux, de la première courbe à la nouvelle, nous devons employer un artifice qui est toujours le même, et dans lequel consiste notre méthode.

Soit HE.ED un quelconque des produits à ordonner sur la base; comme nous appelons analytiquement e l'ordonnée FD ou sa parallèle HE, a la coordonnée FH ou sa parallèle DE, nous appellerons ea le produit HE.ED. Égalons ce produit ea, formé de deux droites inconnues et indéterminées, à bu, c'est-à-dire au produit de la donnée b par une inconnue u, et supposons que u soit égale à EP prise sur la même droite que DE; nous aurons $\frac{bu}{e} = a$. Mais, d'après la propriété spécifique de la première courbe : $b^2 - a^2 = e^2$; substituant à a sa nouvelle valeur $\frac{bu}{e}$, il viendra $b^2e^2 - b^2u^2 = e^4$ ou, en transposant, $b^2e^2 - e^4 = b^2u^2$, équation constitutive de la nouvelle courbe HOPN, dérivée de la première, et pour laquelle il est prouvé que la somme des bu ordonnés sur b est donnée. Divisant par b la somme des u ordonnés sur la base, c'est-à-dire la surface HOPN, sera donnée en rectilignes, on aura donc sa quadrature.

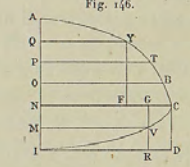
Soit, comme second exemple, $ba^2 - a^3 = e^3$ l'équation constitutive de la première courbe. La somme des e^3 ordonnés sur le diamètre b est donnée, donc la somme des produits $HE^2.ED$ ordonnés sur la base. Mais $HE^2.ED$ est en expression analytique e^2a; égalons ce produit à b^2u, et supposons, comme ci-dessus, $EP = u$. On aura $\frac{b^2u}{e^2} = a$; si donc, au lieu de a, on substitue sa valeur $\frac{b^2u}{e^2}$, et qu'on suive les règles de l'analyse, on aura $b^3u^2e^2 - e^6 = b^6u^3$, équation constitutive de

la nouvelle courbe HOPN dérivée de la première, et pour laquelle la somme des produits $b^2 u$, ordonnés sur la base d, est donnée. Divisant par b^2, la somme des u ordonnés sur la base d sera donnée, donc la quadrature de la figure HOPN. La méthode est générale et s'étend à tous les cas indéfiniment.

Mais il faut remarquer et observer avec soin que, pour les transformations de courbes dont les ordonnées au diamètre décroissent vers la base, les analystes doivent suivre un autre procédé qui diffère du précédent.

Soit (*fig.* 146) la courbe primitive IVCBTYA, de diamètre AI, d'ordonnées MV, NC, OB, PT, QY. Cette courbe est supposée telle que ses

Fig. 146.



ordonnées MV du côté de la base décroissent jusqu'à la base, en sorte que MV < NC; que, d'autre part, du côté de A, la courbe s'infléchisse suivant CBYA, en sorte que CN > BO, BO > PT, PT > QY, etc., en sorte que l'ordonnée maxima soit CN.

Si, dans ce cas, nous cherchons la transformation des carrés MV^2, NC^2 en produits sur la base, nous ne les comparerons plus aux produits IR.RV, comme précédemment. Car le théorème général suppose que la somme $MV^2 \ldots + NC^2$ est égale à celle des produits VG.GN, puisque CN, l'ordonnée maxima, peut et doit être regardée comme base par rapport à la courbe dont le sommet est I. Il faut donc, dans une courbe dont les ordonnées décroissent vers la base, comparer les carrés $MV^2 \ldots NC^2$ aux produits GV.GN, c'est-à-dire, pour arriver sur cette figure à une équation analytique : si nous posons MI = RV = a, MV = RI = e et CD = GR = z donnée (cette droite menée parallèle-

ment au diamètre par l'extrémité de l'ordonnée maxima est facile à trouver par nos méthodes), on aura GV.GN = $ze - ae$; par suite, la somme des carrés $MV^2 \ldots NC^2$ jusqu'à l'ordonnée maxima sera comparée à la somme des produits $ze - ae$, ordonnés sur la base ID. La somme des autres carrés CN^2, BO^2, PT^2 sera comparée à la somme des produits YF.FN, soit en expression analytique $ae - ze$. Cela établi, on dérivera facilement de la première courbe une nouvelle sur la base; on observera la même règle pour toutes les autres puissances des inconnues.

Pour bien montrer que notre méthode fournit de nouvelles quadratures, dont aucun des modernes n'a encore jamais rien soupçonné, soit proposée la courbe précédente, dont l'équation est

$$\frac{b^3 a - b^4}{a^3} = e^3.$$

Il a été prouvé que la somme des e^3 est donnée en rectilignes. En les transformant sur la base, on aura, d'après la méthode précédente, $\frac{b^2 u}{e^2} = a$; substituant la nouvelle valeur de a, et achevant les calculs suivant les règles, on arrivera à la nouvelle équation $e^3 + u^3 = beu$, qui donne une courbe du côté de la base. C'est celle de Schooten, qui en a donné la construction dans ses *Miscellanea*, section XXV, page 493. La figure courbe AKOGDCH de cet auteur sera donc facilement carrable d'après les règles précédentes.

Il y a également lieu de remarquer que, des courbes dont la somme des puissances des ordonnées se trouve donnée, on peut déduire des courbes facilement carrables, non seulement sur la base, mais aussi sur le diamètre. Supposons, par exemple (*fig.* 145), l'équation constitutive déjà prise $b^2 - a^2 = e^2$; non seulement on en dérivera une nouvelle courbe sur la base ayant pour équation $b^2 e^2 - e^4 = b^2 u^2$, mais encore une nouvelle courbe sur le diamètre en égalant la puissance de l'ordonnée e^2 à un produit bu. Car la somme des produits bu, ordonnés sur le diamètre, sera donnée; donc, en divisant par b la somme des u ordonnés sur le diamètre, on aura la quadrature de la courbe

dérivée de la primitive sur le diamètre, et dont l'équation sera $b^2 - a^2 = bu$. Il est évident que cette nouvelle courbe sur le diamètre est une parabole. Une transformation de cette sorte, non seulement donne des courbes nouvelles dérivées des premières, mais conduit facilement des paraboles aux hyperboles et des hyperboles aux paraboles, comme l'essai le fera voir.

Mais, de même que des courbes où est donnée la somme de puissances des ordonnées, l'analyse précédente dérive des courbes où la somme des ordonnées simples est donnée, de même, de courbes où est donnée la somme des ordonnées, on arrive facilement à des courbes où est donnée la somme des puissances des ordonnées.

Soit, comme exemple, la courbe dont l'équation est $b^2e^2 - e^4 = b^2u^2$, équation où, comme je l'ai établi, la somme des u est donnée. Si l'on pose $u = \frac{ae}{b}$, et qu'on substitue à u sa nouvelle valeur $\frac{ae}{b}$, on aura $b^2e^2 - e^4 = a^2e^2$, et, en divisant tous les termes par e^2, $b^2 - e^2 = a^2$, ou bien $b^2 - a^2 = e^2$. Dans cette nouvelle courbe, qui est un cercle, la somme des e^2 sera donnée.

Si de la première courbe où est donnée la somme des ordonnées, on veut en déduire une nouvelle où soit donnée la somme de leurs cubes, on se servira toujours de la même méthode, mais en prenant des puissances conditionnées des inconnues.

Ainsi, soit proposée la courbe que nous avons plus haut déduite d'une autre et dont l'équation est $b^5u^2e^2 - e^9 = b^6u^3$, et où il est établi que la somme des u, c'est-à-dire des ordonnées, se trouve donnée.

Pour en déduire une nouvelle courbe où la somme des cubes des ordonnées soit donnée, on posera $u = \frac{e^2a}{b^2}$, et on substituera à u sa nouvelle valeur; en opérant conformément aux règles de l'art, on aura l'équation $ba^2 - a^3 = e^3$, qui donnera une courbe où la somme des e^3, c'est-à-dire des cubes des ordonnées, se trouve donnée.

Cette méthode, non seulement conduit à la connaissance d'une infinité de quadratures jusqu'à présent ignorées des géomètres, mais

encore fait découvrir une infinité de courbes dont on obtient les quadratures en supposant celle de courbes plus simples, comme le cercle, l'hyperbole, etc.

Par exemple, dans l'équation du cercle $b^2 - a^2 = e^2$, on a, données en rectilignes, les sommes de toutes les puissances des ordonnées dont l'exposant est pair, carrés, bicarrés, bicubes, etc. Quant à la somme des puissances à exposant impair, comme celles des e^3, e^5, elle n'est donnée en rectilignes que si l'on suppose la quadrature du cercle. Il est facile de démontrer ce que je viens de dire et de le réduire en règle, comme corollaire de la méthode qui précède.

Il arrive aussi souvent que, pour trouver la mesure d'une courbe proposée, il faille réitérer l'opération deux fois ou plus souvent encore.

Soit proposée, par exemple, la courbe déterminée par l'équation suivante :

$$b^3 = a^2e + b^2e.$$

Si la somme des e est donnée, ainsi que la droite b, on aura aussi comme donnée celle des rectangles be. En inversant la méthode que nous avons exposée au début de cette Dissertation, posons $be = \overline{o^2}$, d'où $\frac{\overline{o^2}}{b} = e$. Substituant à e sa nouvelle valeur, il viendra

$$b^4 = a^2\overline{o^2} + b^2\overline{o^2}.$$

Nous avons là une première opération, inverse de celle indiquée au début de la Dissertation, et qui a conduit à une nouvelle courbe où il reste à chercher si la somme des $\overline{o^2}$ est donnée.

Il faut donc recourir à la seconde méthode qui de la somme des carrés des ordonnées conduit à la somme des ordonnées simples.

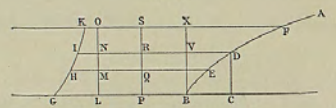
D'après la méthode précédente exposée en seconde ligne, posons $\frac{bu}{o} = a$ et substituons à a la nouvelle valeur que lui assigne cette méthode. Il viendra $b^4 - b^2\overline{o^2} = b^2u^2$, et divisant tous les termes par b^2, $b^2 - \overline{o^2} = u^2$, équation du cercle. La somme des u est donc donnée, si l'on suppose la quadrature du cercle.

Si nous remontons à la première courbe : $b^3 = a^2 e + b^2 e$, il en résulte que l'aire de cette courbe peut être carrée en supposant la quadrature du cercle, et nous sommes facilement et rapidement arrivés à cette conclusion par notre analyse, au moyen de deux courbes différentes de la précédente.

L'utilité de tout ce qui précède sera immédiatement reconnue par un analyste subtil, tant pour l'invention de droites égales à des courbes, que pour nombre d'autres problèmes qui n'ont pas encore été assez approfondis.

Soient (*fig.* 148) AB une parabole primaire, CB son axe, CD l'ordonnée égale à l'axe CB et au paramètre BV. Prenez BP, PL, LG

Fig. 148.



égales entre elles et à l'axe CB, et portées sur son prolongement. Menez à CD les parallèles indéfinies BX, PS, LO (qui seront données) et par un point quelconque F de la courbe, menez à l'axe la parallèle FXSOK rencontrant les droites BX, PS, LO aux points X, S, O. Faites enfin $\frac{FX + XS}{SO}$ ou $\frac{XS}{SO} = \frac{SO}{OK}$. Prenant de même les points D, E, faites $\frac{DR}{RN} = \frac{RN}{NI}$ et $\frac{EQ}{QM} = \frac{QM}{MH}$. Imaginez par les points G, H, I, K, ... une courbe indéfinie qui aura pour asymptote la droite indéfinie LO.

Cette courbe GHIK est celle dont l'espèce est définie par l'équation précédente, $b^3 = a^2 e + b^2 e$. Je dis donc, d'après la réitération indiquée ci-dessus des opérations analytiques, que l'aire KIHGLMNO, qui se prolonge indéfiniment du côté des points K, O, est égale au *double* du cercle ayant pour diamètre l'axe BC. C'est ainsi que nous avons immédiatement résolu cette question que nous proposait un savant géomètre.

Par la même méthode j'ai carré la courbe de Dioclès ou plutôt j'ai ramené sa quadrature à celle du cercle.

Mais le redoublement des opérations est surtout élégant lorsque l'analyse passe des plus hautes puissances des ordonnées aux plus basses, ou au contraire des plus basses aux plus hautes; cette méthode s'applique en particulier pour trouver la somme des ordonnées dans une courbe quelconque proposée, ainsi qu'à beaucoup d'autres problèmes de quadratures.

Soit proposée, par exemple, la courbe dont l'équation est

$$b^3 - a^3 = e^2,$$

et qu'on voit immédiatement être un cercle. On demande la somme des cubes des ordonnées, c'est-à-dire la somme des e^3.

Si la somme des e^3 est donnée, on peut, par les méthodes précédentes, en raison de la nature de la puissance, déduire de cette courbe une autre sur la base, où la somme des ordonnées soit donnée. Soit posé, d'après la méthode, $\frac{b^2 \overline{o}}{e^2} = a$. Substituant à a sa nouvelle valeur, il vient $b^2 e^4 - e^6 = b^4 \overline{o}^2$, équation d'une courbe où, dans l'hypothèse que la somme des e^3 de la première courbe est donnée, la somme des $\overline{o}$ sera donnée.

Puisque, dans cette nouvelle courbe, la somme des $\overline{o}$ est donnée, on peut en dériver une troisième où l'on cherche la somme des carrés des ordonnées, et non celle des cubes comme dans la première courbe. D'après notre méthode pour les carrés, nous poserons, comme on l'a vu, $\frac{eu}{b} = \overline{o}$; d'où $b^2 e^4 - e^6 = b^2 e^2 u^2$. Divisant tout par e^2, il viendra $b^2 e^2 - e^4 = b^2 u^2$, courbe où la somme des e^2 doit être donnée. Partant de cette courbe, cherchons-en une où soit donnée la somme des ordonnées; posons par exemple $e^2 = by$; la dernière équation deviendra $by - y^2 = u^2$. Si donc, dans la précédente, la somme des e^2 est donnée, dans celle-ci on aura celle des by, donc celle des y.

Or dans cette dernière courbe, qui est évidemment un cercle, la somme des y est donnée, en supposant toutefois la quadrature du

cercle; donc, en remontant de cette dernière courbe, où finit notre analyse, à la première, il est clair que dans le cercle la somme des cubes des ordonnées est donnée, si l'on suppose la quadrature du cercle. De même pour les puissances cinquième, septième et les autres de degré impair indéfiniment, comme il est facile de le voir. Seulement le nombre des courbes se multiplie à mesure que s'élève le degré de la puissance dont il s'agit. On passera sans difficulté de l'analyse à la synthèse et au véritable calcul de la figure à carrer.

Au reste, il arrive souvent qu'il faut étrangement promener l'analyse par un très grand nombre de courbes pour arriver à la simple mesure pour une équation de lieu proposée.

Soit par exemple : $\frac{b^7a - b^8}{a^6} = e^2$.

Supposons donnée la quadrature de la figure correspondant à cette équation; la somme des a est donc donnée, donc celle des ba, et si l'on pose $ba = \overline{o^2}$, celle des $\overline{o^2}$. On aura d'ailleurs $a = \frac{\overline{o^2}}{b}$, d'où l'équation $\frac{b^{12}\overline{o^2} - b^{14}}{\overline{o^{12}}} = e^2$.

De cette nouvelle courbe, par l'autre méthode que nous avons indiquée si souvent, on en déduira une troisième. La somme des $\overline{o^2}$ étant donnée, posons $\frac{bu}{o} = e$, on aura l'équation $\frac{b^{10}\overline{o^2} - b^{12}}{\overline{o^{10}}} = u^2$.

C'est la troisième courbe où l'on aura la somme des $\overline{o}$, et par conséquent des u. Mais si la somme des u est donnée, on aura, d'après la première méthode, celle des produits bu. Soit $bu = y^2$, d'où $\frac{y^2}{b} = u$, nous aurons l'équation $\frac{b^{13}\overline{o^2} - b^{14}}{\overline{o^{10}}} = y^4$, quatrième courbe où sera donnée la somme des y^2. Par la méthode ordinaire, déduisons-en une autre; soit $\frac{bi}{y} = \overline{o}$; achevant les calculs suivant les règles de l'analyse, $b^4y^4i^2 - b^4y^6 = i^{10}$, cinquième courbe où sera donnée la somme des y, donc celle des i.

Maintenant, par la méthode contraire, déjà souvent employée, cherchons une autre courbe où l'on connaisse la somme des carrés des ordonnées; soit $\frac{ia}{b} = y$ (car à défaut de voyelles rien n'empêche de reprendre celles qui ont déjà été employées), on aura $b^2a^4 - a^6 = b^2i^4$, sixième courbe où la somme des i^2 est donnée.

Ramenons aux racines par la méthode connue et déjà employée plusieurs fois; soit $i^2 = be$; on aura la somme des be donnée, et une septième courbe $b^2a^4 - a^8 = b^4e^2$, où la somme des e est donnée, donc celle des a.

De là on en déduira une autre, où la somme des carrés des ordonnées sera donnée.

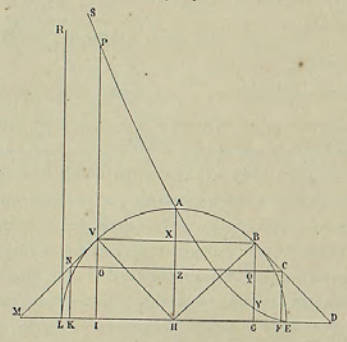
Posons, d'après la méthode, $\frac{\overline{ao}}{b} = e$, d'où $b^2a^4 - a^6 = b^2a^2\overline{o^2}$. Divisant tous les termes par a^2, il vient $b^2a^2 - a^4 = b^2\overline{o^2}$, équation d'une huitième courbe où la somme des a^2 est donnée. Ayant la somme des a^2, on peut déduire enfin une autre courbe où l'on ait la somme des ordonnées. Soit $a^2 = bu$, on aura $bu - u^2 = \overline{o^2}$, dernière équation qui donne une *neuvième* courbe, où la somme des u est donnée. Mais cette dernière courbe est évidemment un cercle et la somme des u n'y est donnée qu'en supposant la quadrature du cercle. Donc, en remontant à l'équation de la première courbe, la quadrature en sera donnée si l'on suppose celle de la dernière courbe ou du cercle.

Nous avons ainsi employé neuf courbes différentes pour arriver à la connaissance de la première.

FRAGMENT SUR LA CISSOÏDE.

Soit la cissoïde EAPS (*fig.* 149) dans le demi-cercle LVABE, dont H est le centre, LE le diamètre, HA le rayon perpendiculaire au diamètre; soit LR la droite perpendiculaire au diamètre et asymptote de la cissoïde.

Fig. 149.



Je dis que l'aire comprise entre EL, la cissoïde EAPS et son asymptote LB prolongées indéfiniment est triple du demi-cercle LAE. Si donc on fait la même construction dans l'autre moitié du cercle, l'ensemble des deux aires, dont E formera le point saillant, sera égal au triple du cercle total.

La démonstration, loin d'être pénible, est assez élégante.

Je prends sur le diamètre deux points I, G quelconques, mais de part et d'autre du centre et à même distance; on aura donc HI = HG, et par suite LI = GE. En I et G j'élève des perpendiculaires qui rencontreront la cissoïde aux points P, Y, le cercle aux points V et B. Par ces derniers points, V, B, je mène les rayons HV, HB et les tangentes VM, BD, qui rencontreront le diamètre en M, D. Au delà de I, je prends une très petite longueur IK arbitraire, et au delà de G, GF = IK; en K et F, j'élève au diamètre les perpendiculaires KN, FC qui rencontreront les tangentes aux points N, C, desquels j'abaisserai sur les droites VI, BG les perpendiculaires NO, CQ.

Cela fait, il est clair que l'aire de la cissoïde est égale à la somme de tous les rectangles PI × IK et YG × GF que l'on peut construire de la sorte; ces rectangles ont des bases égales, KI = GF, et leurs hauteurs sont les ordonnées à angle droit de la cissoïde. Mais, d'après la propriété de cette courbe, $\frac{VI}{IE} = \frac{IE}{IP}$; d'autre part, IE = IH + HE = IH + HV; donc $\frac{IV}{IH+HV} = \frac{IE}{EP}$. Maintenant les triangles HVI, VMI, VNO donnent $\frac{IV}{IH+HV} = \frac{NO}{NV+VO}$; donc $\frac{KI(=NO)}{NV+VO} = \frac{IE}{IP}$, d'où

$$IP \times IK = IE \times NV + IE \times VO.$$

D'un autre côté, d'après la propriété de la cissoïde, $\frac{BG}{GE} = \frac{GE}{GY}$. Mais GE = HE − HG = HB − HG; donc $\frac{BG}{BH-HG} = \frac{GE}{GY}$. Mais, en raison de la similitude des triangles, on aura aussi

$$\frac{BG}{BH-HG} = \frac{QC}{BC-BQ} = \frac{GF}{BC-BQ};$$

on en conclura que YG × GF = GE × BC − GE × BQ.

Mais comme par construction HI = HG et KI = GF, on aura évidemment VN = BC et VO = BQ. Par conséquent, si l'on prend les deux rectangles correspondants,

$$PI \times IK + YG \times GF[=YG \times IK]$$
$$= IE \times NV + GE \times BC[=LI \times NV] + IE \times VO - GE \times BQ[=GE \times BO];$$

mais

$$IE \times NV + LI \times NV = LE \times NV,$$

et

$$IE \times VO - GE \times VO = IG \times VO = 2IH \times VO = 2VX \times VO;$$

donc

$$PI \times IK + YG \times IK = EL \times VN + 2VX \times VO.$$

Or la somme des produits du diamètre EL par les segments VN des tangentes dans le quart de cercle LVA représente le produit du diamètre par le quart de circonférence LVA, c'est-à-dire le double du demi-cercle LAE; d'autre part, la somme des rectangles $2VX \times VO$ ou, si l'on mène OZQ parallèle au diamètre, des rectangles $2VX \times XZ$ représente le demi-cercle LAE.

Donc l'aire de la cissoïde qui est équivalente à la double série de ces rectangles vaut évidemment le triple du demi-cercle.

OBSERVATIONS SUR DIOPHANTE.

1. — Porismes de Bachet, Livre III, définition 6.

« Un triangle rectangle en nombres (c'est-à-dire l'ensemble de trois nombres rationels a, b, c, liés par la relation : $a^2 = b^2 + c^2$) est dit formé des deux nombres p et q, si l'on a

$$a = p^2 + q^2, \qquad b = p^2 - q^2, \qquad c = 2pq. \text{ »}$$

Nous pouvons former un triangle avec trois nombres en progression arithmétique, en le composant, selon cette définition 6, avec le terme moyen et la différence de deux termes; car le produit des trois termes et de la différence sera égal à l'aire dudit triangle, et, par suite, si la différence est l'unité, l'aire du triangle sera représentée par le produit des trois termes.

2. — Diophante, II, 8.

« Résoudre en nombres rationels l'équation indéterminée : $x^2 + y^2 = a^2$. »

Au contraire, il est impossible de partager soit un cube en deux cubes, soit un bicarré en deux bicarrés, soit en général une puissance quelconque supérieure au carré en deux puissances de même degré; j'en ai découvert une démonstration véritablement merveilleuse que cette marge est trop étroite pour contenir.

3. — Diophante, II, 10.

« Résoudre : $x^2 + y^2 = a^2 + b^2$. »

Un nombre, somme de deux cubes, peut-il être de même partagé en deux autres cubes? C'est là un problème difficile dont la solution a

certainement été ignorée par Bachet et par Viète, peut-être par Diophante lui-même; je l'ai résolu plus loin dans mes Notes sur le problème IV, 2.

4. — Diophante, III, 10.

« Résoudre : $x+y+a=\square$, $y+z+a=\square$, $z+x+a=\square$, $x+y+z+a=\square$. »

J'ai indiqué, dans ma Note sur le problème V, 30, comment on peut trouver quatre nombres tels que la somme de deux quelconques d'entre eux, augmentée d'un nombre donné, fasse un carré.

5. — Diophante, III, 11.

« Résoudre le problème précédent, en supposant a négatif. »

Ma Note sur V, 31 montre comment on peut trouver quatre nombres tels que la somme de deux quelconques d'entre eux, diminuée d'un nombre donné, fasse un carré.

6. — Diophante, III, 17.

« Résoudre : $xy+x+y=\square$, $yz+y+z=\square$, $zx+z+x=\square$. »

Il y a dans Diophante un autre problème, V, 5, sur le même sujet (¹). Cependant on ne sait pas s'il a omis, tout en le connaissant, le problème suivant ou s'il n'en avait pas, plus probablement, donné la solution dans un de ses treize Livres :

Trouver trois carrés tels que le produit de deux quelconques d'entre eux, augmenté de la somme des deux mêmes carrés, fasse un carré.

Je puis donner de ce problème des solutions en nombre indéfini. En voici une, par exemple; les trois carrés : $\frac{3\,504\,384}{203\,401}$, $\frac{2\,019\,241}{203\,401}$, 4, satisfont à la condition proposée.

On peut d'ailleurs aller plus loin et étendre la question de Diophante. Ainsi j'ai traité généralement le problème suivant et je puis en fournir des solutions en nombre indéfini :

(¹) V, 5, Diophante suppose que les inconnues du problème III, 17 sont des carrés; il ajoute de plus les conditions : $xy+z=\square$, $yz+x=\square$, $zx+y=\square$.

Trouver quatre nombres tels que le produit de deux quelconques d'entre eux, augmenté de la somme des deux mêmes nombres, fasse un carré.

On cherchera, d'après V, 5, trois carrés tels que le produit de deux quelconques d'entre eux, augmenté de la somme des deux mêmes carrés, fasse un carré. Soient par exemple les trois carrés donnés par Diophante : $\frac{25}{9}$, $\frac{64}{9}$, $\frac{196}{9}$; nous les prendrons pour les trois premiers nombres de notre problème; soit x le quatrième; en formant son produit avec chacun des précédents et en ajoutant la somme des deux facteurs, nous aurons

$$\frac{34}{9}x+\frac{25}{9}=\square, \qquad \frac{73}{9}x+\frac{64}{9}=\square, \qquad \frac{205}{9}x+\frac{196}{9}=\square;$$

équation triple, que j'ai enseigné à traiter dans ma Note sur VI, 24.

7. — Commentaire de Bachet sur Diophante, III, 22.

Tout nombre premier, de la forme $4n+1$, est une seule fois l'hypoténuse d'un triangle rectangle; son carré l'est deux fois, son cube trois, son bicarré quatre, et ainsi de suite indéfiniment.

Le même nombre premier et son carré sont, d'une seule façon, somme de deux carrés; son cube et son bicarré le sont de deux façons; sa cinquième et sa sixième puissance de trois façons, et ainsi de suite indéfiniment.

Si un nombre premier, qui soit la somme de deux carrés, est multiplié par un autre nombre premier, qui soit également la somme de deux carrés, leur produit sera, de deux façons différentes, somme de deux carrés; si le multiplicateur est le carré du second nombre premier, le produit sera somme de deux carrés de trois façons différentes; si le multiplicateur est le cube du second nombre premier, le

produit sera somme de deux carrés de quatre façons différentes, et ainsi de suite indéfiniment.

Il est, d'après cela, facile de déterminer *de combien de façons différentes un nombre donné peut être hypoténuse d'un triangle rectangle.*

On prendra tous les diviseurs premiers de ce nombre qui seront de la forme $4n+1$; par exemple 5, 13, 17.

Si le nombre donné est divisé par des puissances de ses facteurs premiers, il faut d'ailleurs prendre ces puissances au lieu du facteur simple; supposons par exemple que le nombre donné soit divisé par le cube de 5, par le carré de 13 et par 17 simplement.

On prendra les exposants de tous les facteurs, à savoir : pour 5, l'exposant 3 du cube; pour 13, l'exposant 2 du carré; pour 17, l'unité simple.

On ordonnera, comme on voudra, lesdits exposants; soit, par exemple, l'ordre 3.2.1.

On multipliera le premier par le second, on doublera et on ajoutera la somme du premier et du second; il vient 17. On multipliera 17 par le troisième, on doublera et on ajoutera la somme de 17 et du troisième; il vient 52. Le nombre donné sera hypoténuse de 52 triangles rectangles différents. Le procédé sera le même quel que soit le nombre des facteurs et quelles que soient leurs puissances.

Les autres nombres premiers, qui ne sont pas de la forme $4n+1$, ainsi que leurs puissances, n'ajoutent ni ne diminuent rien au nombre qu'il s'agit de trouver.

Trouver un nombre premier qui soit hypoténuse d'autant de façons que l'on voudra.

Soit à trouver un nombre qui soit hypoténuse de sept façons différentes.

Je double le nombre donné 7; il vient 14. J'ajoute 1, ce qui fait 15. Je prends tous les diviseurs premiers de 15, qui sont 3 et 5. Je retranche l'unité de chacun d'eux, et je prends la moitié des restes; j'ai 1 et 2. Je prends maintenant autant de facteurs premiers que

j'ai ici de nombres distincts, à savoir deux, et je multiplie entre eux ces facteurs premiers en les affectant des exposants 1 et 2; pourvu que ces facteurs premiers soient de la forme $4n+1$, j'aurai ainsi (en multipliant l'un par le carré de l'autre) un nombre satisfaisant à la question proposée.

Il est dès lors facile de trouver le nombre minimum qui soit hypoténuse d'autant de façons que l'on voudra.

Trouver un nombre qui soit somme de deux carrés d'autant de façons que l'on voudra.

Soit proposé de 10 façons; je prends tous les facteurs premiers du double 20 : j'ai 2.2.5. De chacun de ces nombres je retranche l'unité; il vient 1.1.4. J'aurai en conséquence à prendre trois nombres premiers de la forme $4n+1$, par exemple, les nombres 5, 13, 17; à cause de l'exposant 4, je prendrai la quatrième puissance de l'un de ces nombres, je la multiplierai par les deux autres, et j'aurai ainsi le nombre cherché.

Il est d'après cela facile de trouver le nombre minimum qui soit somme de deux carrés d'autant de façons qu'on le voudra.

Pour reconnaître *de combien de façons différentes un nombre donné est somme de deux carrés*, voici la méthode.

Soit proposé le nombre 325. Ses diviseurs premiers, de la forme $4n+1$, sont : 5 par son carré, 13 simplement. Je prends les exposants : 2. 1. J'ajoute leur produit à leur somme, ce qui fait 5; j'ajoute l'unité, ce qui fait 6; je prends la moitié, 3. Le nombre donné sera somme de deux carrés de *trois* façons différentes.

Si l'on a trois exposants, par exemple : 2.2.1, voici comment on opérera. Je prends le produit des deux premiers et j'ajoute leur somme, ce qui fait 8. Je multiplie 8 par le troisième et j'ajoute la somme des facteurs, ce qui fait 17. J'ajoute enfin l'unité, ce qui fait 18, dont la moitié est 9. Le nombre proposé sera somme de deux carrés de *neuf* façons différentes.

Si le dernier nombre dont on aurait à prendre la moitié se trouvait

impair, on en retrancherait l'unité, et l'on prendrait la moitié du reste.

Le problème suivant peut encore être proposé : *Trouver un nombre entier dont la somme avec un entier donné fasse un carré et qui, d'autre part, soit l'hypoténuse d'autant de triangles rectangles que l'on voudra.*

La question est difficile. Si, par exemple, on demande de trouver un nombre qui soit 2 fois hypoténuse, et qui, augmenté de 2, fasse un carré, 2023 est un nombre satisfaisant à ces conditions, et il y en a une infinité d'autres, comme 3362, etc.

8. — Commentaire de Bachet sur Diophante, IV, 2.

« 1. Pour résoudre : $x^3+y^3=a^3-b^3$, on posera $x=\frac{3a^3b}{a^3+b^3}-b$, $y=a-\frac{3ab^3}{a^3+b^3}$. Pour que les deux nombres x, y soient positifs, il faut que l'on ait $a^3>2b^3$. »

En réitérant l'opération, il est facile de s'affranchir de la condition et de résoudre généralement aussi bien cette question que les suivantes, ce que n'ont pu faire ni Bachet, ni Viète lui-même.

Soient donnés les deux cubes 64 et 125; on en demande deux autres dont la somme soit égale à la différence des deux cubes donnés.

D'après le procédé donné par Bachet pour son problème 3, page suivante, on cherchera deux autres cubes dont la différence soit égale à celle des deux donnés. Bachet a donné ces deux cubes, $\frac{15\,252\,992}{250\,047}$ et $\frac{125}{250\,047}$. Par construction, leur différence est égale à la différence des deux cubes donnés; mais, après les avoir trouvés par l'opération indiquée pour le problème 3, comme le double du moindre ne dépasse pas le plus grand, on peut les transporter dans les données du problème 1.

On aura ainsi deux cubes donnés, et on en cherchera deux autres dont la somme soit égale à la différence des donnés; la condition indiquée pour le problème 1 étant satisfaite, la solution s'obtiendra sans difficulté. Mais la différence des deux cubes trouvés par le problème 3

est égale à la différence des deux cubes primitivement donnés 64 et 125; ainsi rien n'empêche de construire deux cubes dont la somme soit égale à la différence des donnés 64 et 125, ce qui sans doute étonnerait Bachet lui-même.

Bien plus, si l'on passe circulairement par les trois problèmes et qu'on réitère indéfiniment les opérations, on aura une infinité de couples de cubes satisfaisant à la même condition; en effet, après avoir trouvé en dernier lieu nos deux cubes dont la somme soit égale à la différence des donnés, nous pouvons (problème 2) en chercher deux autres dont la différence soit égale à la somme de nos deux cubes, c'est-à-dire à la différence de ceux primitivement donnés; de la différence nous repasserons à la somme et ainsi de suite indéfiniment.

9. — Même commentaire.

« 2. Pour résoudre : $x^3-y^3=a^3+b^3$, on posera $x=\frac{3ab^3}{a^3-b^3}+a$, $y=\frac{3a^3b}{a^3-b^3}-b$.

3. Pour résoudre : $x^3-y^3=a^3-b^3$, on posera $x=\frac{3a^3b}{a^3+b^3}-b$, $y=\frac{3ab^3}{a^3+b^3}-a$.

Pour que x et y soient positifs, il faut que $a^3<2b^3$. »

La condition, imposée pour la solution de ce problème 3, n'est pas légitime, ainsi que je le montrerai en opérant comme pour le problème 1.

Bien plus, d'après ce qui précède, je résoudrai heureusement le problème suivant, dont Bachet a ignoré la solution :

Partager un nombre, somme de deux cubes, en deux autres cubes, et cela d'une infinité de façons, en répétant continuellement les opérations, comme je l'ai indiqué ci-dessus.

Ainsi soit à trouver deux cubes dont la somme soit égale à celle des deux cubes 8 et 1. Je chercherai d'abord (problème 2) deux cubes dont la différence soit égale à la somme des donnés; je trouverai $\frac{8000}{343}$ et $\frac{4913}{343}$. Comme le double du moindre dépasse le plus grand, on est ramené au problème 3, d'où l'on passera au problème 1, et on aura dès lors la solution.

Si l'on en veut une seconde, on repassera par le problème 2 et ainsi de suite.

Pour montrer que la condition posée par le problème 3 n'est pas légitime, soit à trouver, étant donnés les deux cubes 8 et 1, deux autres cubes dont la différence soit égale à celle des donnés.

Bachet dirait, sans doute, que le problème est impossible; je n'en ai pas moins trouvé, par ma méthode, les deux suivants dont la différence est $7 = 8 - 1$. Ces deux cubes sont $\frac{2024284625}{6128487}$ et $\frac{1981385216}{6128487}$, et leurs racines sont $\frac{1265}{183}$ et $\frac{1256}{183}$.

10. — Commentaire de Bachet sur Diophante, IV, 11.

« Bachet : Résoudre $\frac{x^3+y^3}{x+y} = a$, en supposant que a soit des formes p^2 ou $3p^2$. »

Cette condition doit être complétée de la façon que j'ai indiquée plus loin pour celle du problème suivant [Obs. 12]. Il n'y a pas à s'étonner que Bachet n'ait pas aperçu la méthode générale, qui est réellement difficile; mais il aurait au moins dû avertir le lecteur que celle qu'il donne est seulement particulière.

11. — Diophante, IV, 12.

« Résoudre : $x^3 - y^3 = x - y$. »

Si l'on cherche *deux bicarrés dont la différence soit égale à celle de leurs racines*, on pourra résoudre la question en employant l'artifice de ma méthode.

Qu'on cherche, en effet, deux bicarrés dont la différence soit un cube, et tels que la différence de leurs racines soit 1. On trouvera, par la première opération, les racines $-\frac{9}{22}$ et $\frac{13}{22}$. Le premier de ces deux nombres étant affecté du signe —, on réitérera l'opération suivant ma méthode, en égalant la première racine à $x - \frac{9}{22}$, la

seconde à $x + \frac{13}{22}$, et l'on obtiendra ainsi des nombres positifs satisfaisant au problème.

12. — Commentaire de Bachet sur Diophante, IV, 12.

« Bachet : Résoudre $\frac{x^3-y^3}{x-y} = a$, en supposant a des formes p^2 ou $3p^2$. »

La condition n'est pas légitime, parce qu'elle n'est pas générale. Il faut ajouter « ou que le nombre exprimant le rapport soit multiple d'un carré par un nombre premier de la forme $3n+1$ (comme 7, 13, 19, 37, etc.), ou par un produit de nombres premiers de cette forme (comme sont les produits 21, 91, etc.) ». La démonstration et la solution du problème dépendent de ma méthode.

13. — Diophante, IV, 17.

« Résoudre : $x_1 + x_2 + x_3 = \square$, $x_1^2 + x_2 = \square$, $x_2^2 + x_3 = \square$, $x_3^2 + x_1 = \square$. »

Ce problème peut, peut-être, se résoudre plus élégamment comme suit :

Posons $x_1 = x$, $x_2 = 2x + 1$, en sorte que $x_1^2 + x_2 = \square$. Pour x_3, choisissons arbitrairement le coefficient de x et le terme constant, de façon que $x_2^2 + x_3 = \square$; par exemple soit $x_3 = 4x + 3$.

On a ainsi satisfait à deux conditions; il faut encore que l'on ait

$$x_1 + x_2 + x_3 = \square \qquad \text{et} \qquad x_3^2 + x_1 = \square.$$

Mais

$$x_1 + x_2 + x_3 = 7x + 4, \qquad x_3^2 + x_1 = 16x^2 + 25x + 9.$$

On a donc une double équation où les termes constants sont carrés, dont la solution est facile par suite, en ramenant ces termes à être égaux à un même carré.

Par le même procédé, on peut étendre le problème à 4 nombres et même à autant que l'on voudra; il suffit de faire en sorte que la

somme des termes indépendants de x, dans les expressions des divers nombres, fasse un carré; ce qui est très facile.

14. — Diophante, IV, 18.

« Résoudre : $x_1+x_2+x_3=\square$, $x_1^2-x_2=\square$, $x_2^2-x_3=\square$, $x_3^2-x_1=\square$. »

Le mode de raisonnement que j'ai employé pour la précédente question permet de résoudre également celle-ci et de l'étendre à autant de nombres que l'on voudra.

15. — Diophante, IV, 20.

« Résoudre : $x_1x_2+1=\square$, $x_2x_3+1=\square$, $x_3x_1+1=\square$. »

Soit proposé de trouver trois nombres tels que le produit de deux quelconques d'entre eux, augmenté de l'unité, fasse un carré, et que, de plus, chacun de ces trois nombres eux-mêmes, augmenté de l'unité, fasse un carré.

J'ajouterai une solution de cette question, qui a déjà été traitée.

Soit une solution indéterminée du présent problème de Diophante, choisie de telle sorte que, pour x_1 et x_3, les termes indépendants de x, augmentés chacun d'une unité, fassent des carrés. Soient, par exemple, les trois nombres indéterminés :

$$x_1=\frac{169}{5184}x+\frac{13}{36},\qquad x_2=x,\qquad x_3=\frac{7225}{5184}x+\frac{85}{36}.$$

Il est clair qu'ils fournissent une solution de ce problème IV, 20; il faut de plus maintenant satisfaire aux conditions

$$x_1+1=\square,\qquad x_2+1=\square,\qquad x_3+1=\square,$$

c'est-à-dire à une triple équation, qu'il sera facile de résoudre par ma méthode, le terme indépendant de x, après l'addition de l'unité, se trouvant carré dans chacune des expressions.

16. — Diophante, IV, 21.

« Résoudre : $x_1x_2+1=\square$, $x_1x_3+1=\square$, $x_1x_4+1=\square$, $x_2x_3+1=\square$, $x_2x_4+1=\square$, $x_3x_4+1=\square$. »

Cherchez d'abord trois nombres tels que le produit de deux quelconques d'entre eux, augmenté de l'unité, fasse un carré; soient, par exemple, les nombres 3, 1, 8.

Cherchez maintenant un quatrième nombre tel que son produit par chacun des trois nombres déjà trouvés fasse un carré après addition de l'unité. Soit x ce nombre; on aura

$$3x+1=\square,\qquad x+1=\square,\qquad 8x+1=\square,$$

triple équation dont la solution s'obtiendra par la méthode que j'ai inventée. Voir ma Note sur le problème VI, 24.

17. — Diophante, IV, 23.

« Résoudre : $x_1x_2x_3+x_1=\square$, $x_1x_2x_3+x_2=\square$, $x_1x_2x_3+x_3=\square$. »

Ce problème peut se résoudre non seulement sans le lemme de Diophante, mais même sans double équation.

Posons

$$x_1x_2x_3=x^2-2x,\qquad x_1=1,\qquad x_2=2x,$$

nous satisferons à deux des conditions du problème.

Pour obtenir x_3, il faut maintenant diviser $x_1x_2x_3$, c'est-à-dire x^2-2x, par x_1x_2, c'est-à-dire $2x$; il viendra $x_3=\frac{1}{2}x-1$, et, en l'ajoutant à $x_1x_2x_3$, nous aurons

$$x^2-\frac{3}{2}x-1=\square.$$

Il faut d'ailleurs que la valeur de x dépasse 2, en raison des positions déjà faites; on formera donc la racine du carré $\square$, en retranchant

de x un nombre arbitrairement choisi qui soit plus grand que 2. Le reste est évident.

18. — Commentaire de Bachet sur IV, 31.

« Bachet (proposition empirique) : Tout nombre est soit carré, soit somme de 2, 3 ou 4 carrés entiers. »

Bien plus, il y a une proposition très belle et tout à fait générale que j'ai été le premier à découvrir :

Tout nombre est : soit triangle, soit somme de 2 ou 3 triangles;

Soit carré, soit somme de 2, 3 ou 4 carrés;

Soit pentagone, soit somme de 2, 3, 4 ou 5 pentagones;

et ainsi de suite indéfiniment, qu'il s'agisse d'hexagones, d'heptagones ou de polygones quelconques; cette merveilleuse proposition pouvant s'énoncer en général en raison du nombre des angles.

Je ne puis en donner ici la démonstration, qui dépend de nombreux et abstrus mystères de la Science des nombres; j'ai l'intention de consacrer à ce sujet un Livre entier et de faire accomplir ainsi à cette partie de l'Arithmétique des progrès étonnants au delà des bornes anciennement connues.

19. — Diophante, IV, 35.

« Résoudre : $x_1+x_2+x_3=6$, $x_1x_2+x_3=\square$, $x_1x_2-x_3=\square$. »

On peut opérer plus facilement comme suit : Partagez arbitrairement en deux nombres le donné 6; soient, par exemple, les parties 5 et 1. Divisez par le nombre donné, 6, le produit de ces parties, diminué de l'unité, c'est-à-dire 4; il vient $\frac{2}{3}$. Retranchez ce quotient tant de 5 que de 1; les deux restes $\frac{13}{3}$ et $\frac{1}{3}$ peuvent être pris pour les deux premières parties du nombre à partager; la troisième sera dès lors $\frac{4}{3}$.

20. — Commentaire de Bachet sur Diophante, IV, 44.

« Résoudre : $(x_1+x_2+x_3)x_1=\frac{\alpha(\alpha+1)}{2}$; $(x_1+x_2+x_3)x_2=\beta^2$; $(x_1+x_2+x_3)x_3=\gamma^3$, avec la condition que α soit entier, x_1, x_2, x_3, β, γ pouvant être simplement rationels.

Si l'on pose $x_1+x_2+x_3=x^3$ et $\beta=x^3-z^3$, on arrive à la condition

$$\frac{\alpha(\alpha+1)}{2}=2z^3x^3-\gamma^3-z^6; \quad \text{d'où} \quad (2\alpha+1)^2=16z^3x^3-8\gamma^3-8z^6+1.$$

On résoudra en égalant cette dernière expression à $(4zx-\delta)^2$; mais α ne peut guère être obtenu entier qu'en prenant $\delta=1$. »

Bachet n'a pas fait des essais suffisamment rigoureux. Prenons en effet [pour γ^3] un cube arbitraire dont la racine soit de la forme $3n+1$.

Nous aurons, par exemple, à égaler $2x^2-344$ à un triangle $\left[\frac{\alpha(\alpha+1)}{2}\right]$ et $16x^2-2751$ à un carré $[(2\alpha+1)^2]$; or on peut, si l'on veut, prendre pour racine de ce carré $4x-3$, etc.

Rien n'empêche, en effet, de généraliser la méthode et de prendre au lieu de 3 un autre nombre impair tout à fait quelconque, sauf à choisir le cube en conséquence.

21. — Commentaire de Bachet sur Diophante, IV, 45.

« Diophante enseigne dans ce problème à traiter la *double équation*

$$ax+b=\square, \qquad a_1x+b_1=\square,$$

pour le cas où a et a_1 sont différents et où d'ailleurs le rapport de a à a_1 n'est pas un carré, mais en supposant que b et b_1 soient des carrés inégaux; Bachet montre que la solution est également possible, b et b_1 étant quelconques : 1° si, en supposant $a>a_1$, le rapport de ab_1-ba_1 à $a-a_1$ est carré; 2° si, avec la même hypothèse $a>a_1$, le rapport de a_1b-b_1a à a_1 est carré. »

Mais que l'on propose, par exemple, la double équation

$$2x+5=\square, \qquad 6x+3=\square;$$

on pourra prendre les carrés $16=2x+5$, $36=6x+3$; et il y en a une infinité qui satisfont de même à la question. Il n'est pas d'ailleurs

difficile de donner une règle générale pour les problèmes de ce genre, en sorte que les conditions posées par Bachet sont à peine dignes de lui, car on peut aisément étendre à une infinité de cas, bien plus à tous les cas possibles, ce qu'il n'a trouvé que pour deux cas seulement.

22. — Diophante, V, 3.

« Résoudre $x_1x_2+a=\square$, $x_2x_3+a=\square$, $x_3x_1+a=\square$, $x_1+a=\square$, $x_2+a=\square$, $x_3+a=\square$. »

De cette solution, il est facile de déduire celle de la question suivante :

Trouver quatre nombres tels que le produit de deux quelconques d'entre eux, augmenté d'un nombre donné, fasse un carré.

Soient pris en effet, pour trois de ces nombres, ceux qu'on aura trouvés pour le problème de Diophante et qui satisferont dès lors, en outre, à la condition que chacun d'eux, augmenté d'un nombre donné, fasse un carré. Soit $x+1$ le quatrième nombre à chercher; on aura une triple équation facile à résoudre par ma méthode. Voir la Note sur le problème VI, 24.

Nous aurons ainsi une solution de la question proposée par Bachet sur III, 12, et outre que le procédé est plus général, il a sur celui de Bachet cette supériorité que les trois premiers nombres, augmentés chacun du nombre donné, donnent des carrés.

Toutefois, je ne sais pas encore si le problème peut être résolu en posant la condition que le quatrième nombre, augmenté du donné, fasse également un carré; c'est une recherche qui reste à faire.

23. — Diophante, V, 8.

« Construire trois triangles rectangles numériques dont les aires soient égales. »

Mais peut-on trouver quatre ou même un plus grand nombre, allant jusqu'à l'infini, de triangles de même aire? Rien ne paraît s'opposer

à ce que cette question soit possible; elle est donc à examiner plus profondément.

J'ai résolu le problème; bien plus, pour un triangle donné quelconque, j'en fournis une infinité ayant la même aire. Soit, par exemple, 6 l'aire du triangle 3.4.5, en voici un autre de même aire : $\frac{7}{10}\cdot\frac{120}{7}\cdot\frac{1201}{70}$, ou, si l'on veut le même dénominateur : $\frac{49}{70}\cdot\frac{1200}{70}\cdot\frac{1201}{70}$.

Voici le procédé qui peut, sans exceptions, s'appliquer indéfiniment. Soit un triangle quelconque, d'hypoténuse z, de base b, de hauteur d. On en déduira un autre triangle non semblable, mais de même aire, en formant ce nouveau triangle avec les nombres z^2 et $2bd$, sauf à diviser par $2zb^2-2zd^2$ les expressions du quatrième degré qui représentent les côtés. Le triangle ainsi obtenu aura toujours une aire égale à celle du triangle dont il dérive.

Du second triangle ainsi déterminé, on en déduira, par la même méthode, un troisième; de ce troisième un quatrième; du quatrième un cinquième, et on aura ainsi une série indéfinie de triangles dissemblables et de même aire.

Pour que l'on ne doute pas qu'il soit possible d'en donner plus de trois, à ceux de Diophante : 40.42.58, 24.70.74, 15.112.113, j'en ajoute un quatrième dissemblable et de même aire : hypoténuse $\frac{1412881}{1189}$; base $\frac{1412880}{1189}$; hauteur $\frac{1681}{1189}$.

Si l'on réduit tous ces nombres au même dénominateur, on aura, en entiers, les quatre triangles suivants de même aire :

1°	47 560,	49 938,	68 962;
2°	28 536,	83 230,	87 986;
3°	17 835,	133 168,	134 357;
4°	1 681,	1 412 880,	1 412 881.

On pourra en trouver une infinité de même aire en poursuivant l'application du procédé, et dès lors étendre le problème suivant de Diophante au delà des bornes où il l'a restreint.

Voici, obtenu par un autre procédé, un triangle dont l'aire est le sextuple d'un carré, comme celle du triangle 3.4.5 :

2 896 804, 7 216 803, 7 776 485.

24. — Diophante, V, 9.

« Trouver trois nombres tels que le carré de chacun d'eux, soit augmenté, soit diminué de la somme des trois nombres, fasse un carré. »

D'après ce que j'ai dit ci-dessus, il est clair que je puis résoudre le problème :

Trouver autant de nombres que l'on voudra, tels que le carré de chacun d'eux, soit augmenté, soit diminué de la somme de tous ces nombres, fasse un carré.

Bachet n'a probablement pas connu la solution de ce problème; sans quoi il aurait généralisé la question de Diophante, comme il l'a fait pour IV, 31 et ailleurs.

25. — Commentaire de Bachet sur Diophante, V, 12.

« Doutes sur la question de savoir si un nombre qui, comme 21, n'est ni carré, ni somme de deux carrés entiers, peut être partagé en deux carrés. »

Le nombre 21 ne peut être partagé en deux carrés fractionnaires. Je puis le démontrer très facilement; plus généralement aucun nombre divisible par 3, mais non par 9, ne peut être somme de deux carrés, soit entiers, soit fractionnaires.

26. — Même Commentaire.

« Sur les conditions imposées au choix du nombre donné a pour la possibilité du problème :

$$x+y=1, \quad a+x=\square, \quad a+y=\square. \text{ »}$$

Voici la vraie condition, c'est-à-dire celle qui est générale et qui exclut tous les nombres ne pouvant être choisis :

Il faut que le nombre donné ne soit pas impair, et que la somme

de son double et de l'unité, après division par le plus grand carré qui y entre comme facteur, ne puisse pas être divisée par un nombre premier qui soit inférieur d'une unité à un multiple de 4.

27. — Commentaire de Bachet sur Diophante, V, 14.

« Sur les conditions imposées au choix du nombre donné a pour la possibilité du problème :

$$x+y+z=1, \quad a+x=\square, \quad a+y=\square, \quad a+z=\square. \text{ »}$$

La condition posée par Bachet n'est, elle-même, pas satisfaisante; bien plus, il n'a pas fait ses essais avec assez de soin, car sa règle n'exclut pas le nombre 37, qui ne peut cependant être pris.

Voici comment on doit concevoir la véritable condition :

Prenons deux progressions géométriques suivant la raison 4, et dont les premiers termes soient 1 et 8; superposons-en les termes comme suit :

1, 4, 16, 64, 256, 1024, 4096, etc.,
8, 32, 128, 512, 2048, 8192, 32768, etc.

Je considère d'abord le premier terme de la seconde progression, 8; il faut que le nombre donné ne soit ni le double de 1 (terme superposé à 8), ni égal à la somme d'un multiple de 8 et du double de 1.

Je considère en second lieu le second terme de la seconde progression, 32, et je prends le double du terme 4 superposé; j'ajoute à ce double, 8, la somme des termes qui précèdent dans la même progression, celle du dessus (dans ce cas, cette somme se réduit à l'unité); j'ai ainsi 9.

Prenant donc les nombres 32 et 9, je dis que le nombre donné ne doit être ni 9, ni la somme de 9 et d'un multiple de 32.

Je considère maintenant le troisième terme de la seconde progression, 128; je prends le double, 32, du nombre 16 superposé; j'ajoute la somme des termes antécédents dans la même progression du haut, c'est-à-dire 1 et 4; j'ai 37. Prenant donc les deux nombres 128 et 37, je dis que le nombre donné ne doit être ni 37, ni la somme de 37 et d'un multiple de 128.

Je considère encore le quatrième terme de la seconde progression; le même procédé me donne les nombres 512 et 149. Il faudra donc que le nombre donné ne soit ni 149, ni la somme de 149 et d'un multiple de 512.

Voilà la méthode uniforme dont l'application doit se poursuivre indéfiniment, et qui n'a pas été indiquée par Diophante dans sa généralité, ni reconnue par Bachet lui-même; les essais de ce dernier ont même été fautifs, non seulement pour le nombre 37, comme je l'ai déjà indiqué, mais aussi pour 149 et les autres, qui tombent également dans les limites des essais qu'il déclare avoir faits [jusqu'à 325].

28. — Diophante, V, 19.

« Résoudre :

$(x_1+x_2+x_3)^3-x_1=\alpha_1^3, \quad (x_1+x_2+x_3)^3-x_2=\alpha_2^3, \quad (x_1+x_2+x_3)^3-x_3=\alpha_3^3. \ »$

Ou bien le texte grec est corrompu, ou bien Diophante n'a pas exprimé le moyen par lequel il a obtenu sa solution. Bachet croit qu'il a été aidé par le hasard, ce que je n'admets guère, car je pense que sa méthode n'est pas difficile à retrouver.

Il s'agit de trouver un carré plus grand que 2, mais plus petit que 3, et dont la différence avec 3 se partage en trois cubes (1).

Prenons, pour racine du carré cherché, une expression composée d'un terme en x et de -1, par exemple : $x-1$. Si je retranche de 3 le carré de cette expression, il reste : $2+2x-x^2$, qu'il s'agit de décomposer en une somme de trois cubes de façon que l'équation se réduise à deux termes de degré consécutif.

On peut y arriver d'une infinité de façons : soit $1-\frac{1}{3}x$ la racine de l'un des cubes; pour celle du second, prenons $1+x$, afin que la

(1) Si, d'après la marche de Diophante, on pose $x_1+x_2+x_3=z$, $\alpha_1=\frac{z}{m_1}$, $\alpha_2=\frac{z}{m_2}$, $\alpha_3=\frac{z}{m_3}$, on arrive à la condition $z^2\left(3-\frac{1}{m_1^3}-\frac{1}{m_2^3}-\frac{1}{m_3^3}\right)=1$. Diophante suppose $\frac{1}{m_1^3}+\frac{1}{m_2^3}+\frac{1}{m_3^3}<1$; le carré $\frac{1}{z^2}$ doit donc satisfaire aux conditions indiquées par Fermat.

somme de ces deux cubes donne $2x$ pour le terme du premier degré: la racine du troisième ne devra comprendre qu'un terme en x, qu'il faudra d'ailleurs affecter du signe $-$, pour que la valeur de x reste dans les limites assignées; mais il ne sera pas difficile de choisir le coefficient de ce terme en x de manière que la solution tombe effectivement entre les limites en question.

Cela fait, il est clair que notre premier cube sera plus petit que l'unité, comme nous le désirons; au contraire, le second est plus grand, et le troisième est affecté du signe $-$; il s'ensuit qu'il faut trouver deux cubes dont la somme soit égale à la différence du second et du troisième; nous arrivons ainsi, comme Diophante, à sa seconde opération.

« Mais nous avons », dit-il « dans les Porismes, que la différence de deux cubes quelconques est aussi la somme de deux cubes. »

Ici Bachet est de nouveau embarrassé et, comme les Porismes de Diophante lui font défaut, il soutient qu'il y a là un problème qui n'est possible que sous une certaine condition; il enseigne en effet à partager en deux cubes la différence de deux cubes, mais seulement lorsque le plus grand des cubes donnés surpasse le double du plus petit, et il avoue franchement qu'il ignore comment on peut en général partager en deux cubes la différence de deux cubes quelconques. J'ai exposé plus haut, à propos du problème IV, 2, la solution générale de cette question et des autres relatives au même sujet.

29. — Diophante, V, 24.

« Trouver trois carrés tels que le produit des trois, plus l'un quelconque d'entre eux, fasse un carré. Le problème est ramené à trouver trois triangles rectangles tels que le rapport du produit des bases au produit des hauteurs soit carré. »

Voici comment je restitue et j'explique la méthode de Diophante, qui n'a pas été comprise par Bachet.

Ayant pris comme premier triangle : 3, 4, 5, pour lequel le produit des côtés de l'angle droit est 12, Diophante dit : « On est ramené à chercher deux triangles tels que le produit des côtés de l'angle droit

de l'un soit 12 fois le produit des côtés de l'angle droit de l'autre. » La raison en est que si l'on multiplie entre eux ces deux produits, on aura un nombre plan semblable à 12, et que dès lors, en multipliant ce dernier nombre par 12, on aura un carré, ce que demande le problème proposé.

Diophante continue : « Or l'aire de l'un de ces triangles sera 12 fois celle de l'autre », ce qui est évident de soi-même. « Mais au lieu de 12 fois, on peut prendre 3 fois »; en effet, 3 étant le quotient de 12 par le carré 4, la multiplication générale des bases et des hauteurs donnera toujours un carré, puisque, si l'on divise un carré par un carré, le quotient est encore un carré.

La suite du texte de Diophante ne donne pas la solution cherchée, mais je la restituerai comme suit :

Dans le cas proposé, on formera l'un des deux triangles des nombres 7 et 2, l'autre des nombres 5 et 2. Le premier triangle aura son aire triple de celle du second, et leur couple satisfera à la question.

Au reste, pour trouver deux triangles rectangles dont l'aire soit dans un rapport donné, voici la règle générale.

Soit $\frac{r}{s}$ le rapport donné, en supposant $r > s$. On formera le plus grand triangle des nombres $2r+s$ et $r-s$, le plus petit des nombres $r+2s$ et $r-s$.

On peut encore former les deux triangles des manières suivantes :

Le premier de $2r-s$ et $r+s$, le second de $2s-r$ et $r+s$;

Le premier de $6r$ et $2r-s$, le second de $4r+s$ et $4r-2s$;

Le premier de $r+4s$ et $2r-4s$, le second de $6s$ et $r-2s$.

On peut déduire de ce qui précède une méthode pour trouver trois triangles rectangles dont les aires soient proportionnelles à trois nombres donnés, pourvu que la somme de deux de ces nombres soit quadruple du troisième.

Soient donnés, par exemple, les nombres r, s, t, et supposons $r+t=4s$. On formera les trois triangles comme suit : le premier de $r+4s$ et $2r-4s$, le second de $6s$ et $r-2s$, le troisième de $4s+t$ et $4s-2t$. (J'ai admis $r > t$.)

On peut également en tirer un moyen de trouver trois triangles rectangles en nombres, tels que leurs aires forment un triangle rectangle.

On ramènera en effet la question à trouver un triangle pour lequel la somme de la base et de l'hypoténuse soit quadruple de la hauteur. Ce problème est facile, et le triangle cherché sera semblable au suivant : 17, 15, 8. Quant aux trois triangles, les nombres générateurs seront : pour le premier, 49 et 2; pour le second, 47 et 2; pour le troisième, 48 et 1.

Enfin on aura également le moyen de trouver trois triangles dont les aires soient proportionnelles à trois carrés donnés, en supposant que la somme de deux de ces carrés soit quadruple du troisième. On pourra aussi trouver de même trois triangles ayant leurs aires égales; enfin nous pouvons construire d'une infinité de façons deux triangles rectangles, ayant leurs aires dans un rapport donné, en multipliant l'un des termes du rapport ou les deux termes par des carrés donnés, etc.

30. — Diophante, V, 25.

« Trouver trois carrés, tels que le produit des trois, moins l'un quelconque d'entre eux, fasse un carré. Le problème est ramené à trouver trois triangles rectangles tels que le rapport du produit des hypoténuses au produit des hauteurs soit carré. »

De même que pour le précédent, Bachet a traité ce problème en laissant de côté la méthode de Diophante, qui reste donc à éclaircir et à expliquer. Il s'agit à cet effet de trouver deux triangles rectangles tels que le produit de l'hypoténuse et de la base dans l'un de ces triangles soit dans un rapport donné avec le même produit pour l'autre triangle.

Cette question m'a longtemps tourmenté, et quiconque essayera de la résoudre pourra reconnaître qu'elle est vraiment difficile; j'ai enfin découvert une méthode pour la solution générale.

Soit à chercher deux triangles tels que le produit de l'hypoténuse par la hauteur, dans l'un de ces triangles, soit double du même produit dans l'autre.

Soient a et b les nombres générateurs de l'un des triangles, a et d ceux de l'autre.

Pour le premier, le produit de l'hypoténuse et de la hauteur sera $2ba^3 + 2b^3a$;

Pour le second, le même produit sera $2da^3 + 2d^3a$. On demande que le premier de ces produits soit double du second : par conséquent

$$ba^3 + b^3a = 2da^3 + 2d^3a.$$

Divisant tous les termes par a,

$$ba^3 + b^3 = 2da^2 + 2d^3;$$

transposant :

$$2d^3 - b^3 = ba^2 - 2da^2.$$

Pour résoudre la question, il faut donc que le quotient de $2d^3 - b^3$ par $b - 2d$ soit un carré.

Il s'agit par suite de trouver deux nombres, b et d, tels que l'excès du double du cube de l'un sur le cube de l'autre donne un carré, si on le divise ou si on le multiplie (car cela revient au même) par l'excès du double du second sur le premier.

Soient $x + 1$ l'un de ces nombres et 1 l'autre. L'excès du double du cube du premier sur le cube du second est $1 + 6x + 6x^2 + 2x^3$; l'excès du double du second nombre sur le premier est $1 - x$. Le produit de $1 + 6x + 6x^2 + 2x^3$ par $1 - x$ doit être un carré. Or ce produit est $1 + 5x - 4x^3 - 2x^4$, qu'on peut égaler au carré de $1 + \frac{5}{2}x - \frac{25}{8}x^2$. Le reste n'offre plus de difficulté.

Pour étendre cette méthode au cas d'un rapport quelconque, il suffira de prendre, pour l'un des nombres, la somme de x et de l'excès du plus grand terme du rapport sur le moindre; pour l'autre nombre, ce même excès; c'est ce que nous avons fait au reste pour le rapport de 2 à 1. De cette façon en effet le terme indépendant de x dans le produit final sera un carré, et l'équation pourra se traiter facilement; sa solution conduira à deux nombres représentant b et d et l'on remontera ainsi au problème primitif.

En revoyant ce que j'ai écrit ci-dessus sur cette question de Diophante, j'ai été sur le point de tout effacer parce qu'en réalité ce n'est pas elle qui se ramène au problème dont j'ai exposé la solution; cependant, si je me suis trompé en réduisant une question à une autre, cette dernière n'en est pas moins valablement résolue; mon travail a donc été plutôt mal placé que perdu et je laisse tel quel ce que j'ai écrit dans la marge.

Quant à la question même de Diophante, je l'ai soumise à un nouvel examen et en employant toutes les ressources de ma méthode, j'ai enfin obtenu la solution générale; toutefois je ne vais donner qu'un exemple, dont les nombres montreront suffisamment par eux-mêmes que ce n'est point le hasard, mais une méthode régulière qui a permis de les trouver.

Diophante propose en fait de chercher deux triangles rectangles, tels que le produit de l'hypoténuse par la hauteur pour le premier soit au même produit pour le second dans le rapport de 5 à 1.

Voici deux triangles satisfaisant à

	Premier triangle.	Second triangle.
Hypoténuses.....	48 543 669 109,	42 636 752 938,
Bases.....	36 083 779 309,	41 990 695 480,
Hauteurs.....	32 472 275 580,	7 394 200 038.

31. — Diophante, V, 30.

« Résoudre $x_1^2 + x_2^2 + a = \square$, $x_1^2 + x_3^2 + a = \square$, $x_2^2 + x_3^2 + a = \square$. »

Grâce à ce problème, nous obtenons la solution d'une question qui, autrement, paraîtrait très difficile : *Étant donné un nombre, en trouver quatre tels que leurs sommes deux à deux, augmentées du nombre donné, fassent des carrés.*

Soit donné le nombre 15; on commencera par chercher, d'après la solution de Diophante, trois carrés tels que leurs sommes deux à deux, augmentées du nombre donné, fassent des carrés. Soient 9, $\frac{1}{100}$, $\frac{529}{225}$ ces trois carrés; on prendra, pour le premier des quatre nombres cherchés : $x^2 - 15$; pour le second : $6x + 9$ (9 étant l'un des carrés trouvés et 6, coefficient de x, le double de la racine de ce carré); d'a-

près le même procédé, on prendra pour le troisième nombre : $\frac{1}{5}x + \frac{1}{100}$, et pour le quatrième : $\frac{40}{15}x + \frac{529}{225}$.

Grâce à ces positions, on satisfait à trois des conditions de l'énoncé; car si l'on fait la somme du premier nombre et de l'un quelconque des trois suivants, et que l'on ajoute 15, on a un carré.

Il faut encore qu'on ait des carrés en ajoutant 15 soit à la somme du second et du troisième, soit à celle du troisième et du quatrième, soit à celle du second et du quatrième. Nous aurons ainsi une triple équation, qui sera facile à traiter, parce que, grâce à la construction dont nous avons emprunté l'artifice au problème de Diophante, dans chacune des expressions à égaler à un carré, le terme constant sera un carré, et qu'il n'y aura en outre qu'un terme en x. Voir à ce sujet ce que j'ai dit sur le problème VI, 24.

32. — Diophante, V, 31.

« Résoudre $x_1^2 + x_2^2 - a = \square$, $x_2^2 + x_3^2 - a = \square$, $x_3^2 + x_1^2 - a = \square$. »

Un artifice analogue à celui que nous avons employé sur la précédente question, pour trouver quatre nombres tels que leurs sommes deux à deux, augmentées d'un nombre donné, fassent des carrés, peut servir pour passer de la présente question de Diophante à la recherche de quatre nombres tels que leurs sommes deux à deux, diminuées d'un nombre donné, fassent des carrés.

On prendra pour le premier nombre : $x^2 +$ le nombre donné; pour le second, on ajoutera le premier carré trouvé d'après Diophante à un terme en x ayant pour coefficient le double de la racine de ce carré; etc. Le reste est évident.

33. — Diophante, V, 32.

« Résoudre : $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = \square$.

Pourquoi ne cherche-t-il pas deux bicarrés dont la somme soit un carré? C'est que ce problème est impossible, comme notre méthode de démonstration peut le mettre hors de doute.

34. — Diophante, VI, 3.

« Trouver un triangle rectangle en nombres, dont l'aire, augmentée d'un nombre donné, fasse un carré. » — Viète avait supposé à tort, comme le remarque Bachet, que le nombre donné devait être la somme de deux carrés. Dans les problèmes suivants, l'aire doit être diminuée ou retranchée d'un nombre donné.

Voici sans doute l'origine de l'erreur de Viète : cet illustre savant aura égalé l'aire à la différence de deux bicarrés (1), comme $x^4 - 1$, pour en faire un carré, en y ajoutant le quintuple d'un carré, 5 étant le nombre donné.

Ce dernier nombre étant somme de deux carrés, on peut en effet trouver un carré, dont le quintuple, diminué d'une unité, fasse un carré. Prenons pour racine de ce carré à quintupler $x + 1$ (le coefficient de x pourrait être pris différent de l'unité); le quintuple du carré sera $5x^2 + 10x + 5$; en ajoutant l'aire, $x^4 - 1$, on a la somme $x^4 + 5x^2 + 10x + 4$, à égaler à un carré, ce qui est aisé, le terme indépendant de x étant carré, par suite de l'hypothèse ajoutée comme condition.

Mais Viète n'a pas vu que le problème peut se résoudre tout aussi bien en prenant pour l'aire, non pas $x^4 - 1$, mais $1 - x^4$; car alors la question se ramène immédiatement à faire que le nombre donné, 5, 6, ou tout autre quelconque, multiplié par un carré, fasse un autre carré, après addition de l'unité; ce qui peut se résoudre très facilement et sans exception, puisque l'unité est un carré.

J'ai résolu cette question, ainsi que les deux suivantes, par une méthode particulière, qui permet, si nous cherchons, par exemple, un triangle dont l'aire, augmentée de 5, fasse un carré, de donner un tel triangle en nombres minimi : $\frac{9}{3}$, $\frac{40}{3}$, $\frac{41}{3}$; l'aire est 20, et en ajoutant 5, donne le carré 25.

(1) C'est effectivement la marche que suit Diophante, et qui revient à supposer carré le rapport des deux nombres générateurs du triangle. La solution de Viète (*Zetet.*, V, 9) est présentée sous forme synthétique et correspond à une combinaison particulière : le nombre donné étant supposé de la forme $r^2 + s^2$, il prend pour nombres générateurs $(r+s)^2$ et $(r-s)^2$ et divise les côtés du triangle par $2(r+s)(r-s)^2$.

Mais ce n'est pas ici la place de développer le principe et l'emploi de cette méthode; la marge n'y suffirait pas, car j'aurais bien des choses à dire à ce sujet.

35. — **Diophante, VI, 6.**

« Trouver un triangle rectangle, tel que l'aire, augmentée de l'un des côtés de l'angle droit, fasse un nombre donné. »

Ce problème et les suivants peuvent être résolus autrement :

Qu'on forme, pour celui-ci, un triangle avec le nombre donné et l'unité, et qu'on divise les côtés par la somme du nombre donné et de l'unité, les quotients constitueront le triangle cherché.

36. — **Diophante, VI, 7.**

« Trouver un triangle rectangle, tel que l'aire, diminuée de l'un des côtés de l'angle droit, fasse un nombre donné. »

Qu'on forme un triangle avec le nombre donné et l'unité, et qu'on divise les côtés par la différence du nombre donné et de l'unité, on aura le triangle cherché.

Au reste, cette question est susceptible d'une infinité de solutions, par le procédé qui nous permet d'en trouver indéfiniment aux doubles équations de cette sorte; j'ai indiqué plus bas l'emploi de ce procédé, sur la question 24.

Bien plus, on aura de même une infinité de solutions pour les quatre questions suivantes, ce qui n'a été reconnu ni par Diophante, ni par Bachet. Mais pourquoi ni l'un ni l'autre n'ont-ils pas ajouté le problème que voici ?

Trouver un triangle rectangle, tels que l'un des côtés de l'angle droit, diminué de l'aire, fasse un nombre donné.

Ils semblent bien n'en avoir pas connu la solution, parce qu'elle n'est pas immédiatement fournie par la double équation; cependant on peut la trouver aisément avec notre méthode.

Ce troisième cas peut être de même ajouté aux questions suivantes.

37. — **Diophante, VI, 8 et 9.**

« Trouver un triangle rectangle, tel que l'aire, augmentée (diminuée) de la somme des côtés de l'angle droit, fasse un nombre donné. »

Avec notre méthode, on peut ajouter le problème que voici :

Trouver un triangle rectangle tel que la somme des côtés de l'angle droit, diminuée de l'aire, fasse un nombre donné.

38. — **Diophante, VI, 10 et 11.**

« Trouver un triangle rectangle, tel que l'aire, augmentée (diminuée) de la somme de l'hypoténuse et d'un des côtés de l'angle droit, fasse un nombre donné. »

Avec notre méthode, on peut ajouter le problème que voici :

Trouver un triangle rectangle tel que la somme de l'hypoténuse et de l'un des côtés de l'angle droit, diminuée de l'aire, fasse un nombre donné.

On ajoutera de même le suivant aux commentaires de Bachet (1).

Trouver un triangle rectangle tel que l'hypoténuse, diminuée de l'aire, fasse un nombre donné.

39. — **Diophante, VI, 13.**

« Trouver un triangle rectangle, tel que l'aire, augmentée de l'un ou de l'autre des deux côtés de l'angle droit, fasse un carré dans les deux cas. »

Diophante ne donne, comme satisfaisant à ce problème, que des triangles d'une seule espèce; notre méthode fournit une infinité de triangles d'espèces différentes, lesquelles dérivent successivement de la solution de Diophante.

Soit, en effet, déjà trouvé le triangle 3.4.5 satisfaisant à cette condition « que le produit des deux côtés de l'angle droit fasse un carré,

(1) « Trouver un triangle rectangle, tel que l'aire, augmentée (diminuée) de l'hypoténuse, fasse un nombre donné. »

si on lui ajoute le produit du plus grand de ces deux côtés par leur différence et par l'aire du triangle ». Il s'agit d'en déduire un autre jouissant de la même propriété.

Soient 4 le plus grand côté de l'angle droit du triangle cherché et $3+x$ le plus petit. Le produit des deux côtés de l'angle droit, si on lui ajoute le produit du plus grand des deux côtés par leur différence et par l'aire du triangle, fera $36-12x-8x^2$, expression qu'il faut égaler à un carré. D'un autre côté, les côtés 4 et $3+x$ étant ceux de l'angle droit d'un triangle rectangle, la somme de leurs carrés doit faire un carré; or cette somme fait $25+6x+x^2$, seconde expression qu'il faut aussi égaler à un carré.

On a donc une double équation, qu'il est facile de résoudre, savoir

$$36-12x-8x^2=\square, \qquad 25+6x+x^2=\square.$$

40. — Diophante, VI, 14.

« Trouver un triangle rectangle, tel que l'aire, diminuée de l'un ou de l'autre des deux côtés de l'angle droit, fasse un carré dans les deux cas. »

Avec notre méthode, on pourra résoudre la question suivante qui, autrement, est très difficile :

Trouver un triangle rectangle tel que chacun des deux côtés de l'angle droit, diminué de l'aire, fasse un carré.

41. — Diophante, VI, 15 et 17.

« Trouver un triangle rectangle, tel que l'aire, diminuée (augmentée) soit de l'hypoténuse, soit de l'un des deux côtés de l'angle droit, fasse un carré. »

On peut, avec notre méthode, essayer la question suivante qui, autrement, est très difficile :

Trouver un triangle rectangle tel qu'en retranchant l'aire, soit de l'hypoténuse, soit de l'un des côtés de l'angle droit, on ait toujours un carré.

42. — Diophante, VI, 19.

« Trouver un triangle rectangle, tel que le périmètre en soit un cube et que la somme de l'aire et de l'hypoténuse fasse un carré.
» ... Il faut trouver un carré qui, augmenté de 2, fasse un cube.... »

Peut-il y avoir, en nombres entiers, un autre carré que 25 qui, augmenté de 2, fasse un cube? Cela paraît certainement au premier abord difficile à discuter; cependant, je puis prouver, par une démonstration rigoureuse, que 25 est bien le seul carré entier qui soit inférieur à un cube de deux unités. En nombres fractionnaires, la méthode de Bachet fournit une infinité de tels carrés, mais la théorie des nombres entiers, qui est très belle et très subtile, n'a pas été connue jusqu'à présent, ni par Bachet, ni par aucun auteur dont j'aie vu les écrits.

43. — Commentaire de Bachet sur Diophante, VI, 24.

« Ce commentaire est consacré à la théorie de la *double équation*. »

Là où ne suffisent pas les *équations doubles* ou διπλοισότητες, il faut recourir à des *équations triples* ou τριπλοισότητες, découverte qui m'appartient et qui conduit à la solution d'une foule de très beaux problèmes.

Soit, par exemple, à égaler à des carrés les expressions

$$x+4, \quad 2x+4, \quad 5x+4,$$

il y a là une *équation triple* qu'il est aisé de résoudre par l'intermédiaire d'une *équation double*.

Si, en effet, on substitue à x une expression qui, augmentée de 4, fasse un carré, par exemple x^2+4x, les trois expressions ci-dessus à égaler à des carrés deviendront

$$x^2+4x+4, \quad 2x^2+8x+4, \quad 5x^2+20x+4.$$

La première est un carré par construction; il reste donc à satisfaire aux conditions

$$2x^2+8x+4=\square, \qquad 5x^2+20x+4=\square,$$

c'est-à-dire à une *équation double* qui, à la vérité, ne fournira qu'une solution unique, mais de cette solution on pourra en tirer une autre, de cette seconde une troisième, et ainsi de suite indéfiniment.

A cet effet, lorsqu'on aura trouvé une valeur pour x, on substituera à x le binome formé de x plus la valeur qui vient d'être obtenue. Ce procédé fournira une infinité de solutions dérivant chacune de la précédente et venant s'ajouter aux antérieures.

C'est grâce à cette invention que nous pouvons donner une infinité de triangles de même aire, ce que Diophante semble n'avoir pas su faire, comme il ressort de son problème V, 8, où il cherche seulement trois triangles de même aire pour résoudre le problème suivant avec trois inconnues; mais cette dernière question, d'après la découverte qui m'est due, peut être étendue à un nombre indéfini d'inconnues.

44. — Même Commentaire.

A ce traité des *équations doubles*, nous pourrions faire de nombreuses additions sur des points ignorés des anciens et aussi bien des modernes. Mais il suffira, pour établir l'importance de notre méthode et en montrer l'usage, de résoudre ici la question suivante, dont la difficulté est incontestable.

Trouver un triangle rectangle en nombres, tel que l'hypoténuse soit un carré, ainsi que la somme des côtés de l'angle droit.

Le triangle cherché est représenté par les trois nombres suivants :

4 687 298 610 289, 4 565 486 027 761, 1 061 652 293 520,

et il est formé des deux nombres 2 150 905 et 246 792.

J'ai, par une autre méthode, trouvé la solution de cette autre question :

Trouver un triangle rectangle en nombres, tel que le carré de la différence des côtés de l'angle droit, moins le double carré du plus petit de ces côtés, fasse un carré.

Le triangle 1525, 1517, 156, formé des nombres 39 et 2, est un de ceux qui satisfont à la question.

J'ajoute d'ailleurs avec confiance que les deux triangles ci-dessus sont les petits en nombres entiers qui satisfassent aux questions proposées.

Voici quelle est ma méthode : Cherchez, suivant le procédé ordinaire, la solution de la question proposée. Si, après l'achèvement des calculs, l'opération n'aboutit pas, parce que la valeur à donner à l'inconnue se trouve affectée du signe — et doit être regardée comme plus petite que zéro, j'affirme hardiment qu'il ne faut pas désespérer et rester à bayer, comme dit Viète, mais comme il l'a fait après les anciens analystes; il faut au contraire essayer de nouveau la question en substituant à l'inconnue le binome x moins le nombre trouvé dans la première opération comme valeur affectée du signe de soustraction. On aura ainsi une nouvelle équation qui conduira à une solution en nombres vrais.

C'est par ce moyen que j'ai résolu les deux questions ci-dessus; autrement elles sont très difficiles. J'ai de même montré qu'une somme de deux cubes peut être décomposée en deux autres cubes, et j'ai donné la construction qui peut nécessiter la réitération de l'opération jusqu'à trois fois; il arrive en effet souvent que la vérité cherchée oblige l'analyste le plus habile et le plus industrieux à recommencer plusieurs fois le calcul, ainsi que l'expérience le fera aisément reconnaître.

45. — Problème 20 de Bachet sur Diophante, VI, 26.

« Bachet. — Trouver un triangle rectangle dont l'aire soit un nombre donné. »

L'aire d'un triangle rectangle en nombres ne peut être un carré.

Je vais donner la démonstration de ce théorème que j'ai découvert; je ne l'ai pas trouvée au reste sans une pénible et laborieuse méditation; mais ce genre de démonstration conduira à des progrès merveilleux dans la science des nombres.

Si l'aire d'un triangle était un carré, il y aurait deux bicarrés dont la différence serait un carré; il s'ensuit qu'on aurait également deux carrés dont la somme et la différence seraient des carrés. Par conséquent, on aurait un nombre carré, somme d'un carré et du double d'un carré, avec la condition que la somme des deux carrés, qui servent à le composer, soit également un carré. Mais si un nombre carré est somme d'un carré et du double d'un carré, sa racine est également somme d'un carré et du double d'un carré, ce que je puis prouver sans difficulté. On conclura de là que cette racine est la somme des deux côtés de l'angle droit d'un triangle rectangle, dont l'un des carrés composants formera la base, et le double de l'autre carré la hauteur.

Ce triangle rectangle sera donc formé par deux nombres carrés, dont la somme et la différence seront des carrés. Mais on prouvera que la somme de ces deux carrés est plus petite que celle des deux premiers dont on a également supposé que la somme et la différence soient des carrés. Donc, si on donne deux carrés dont la somme et la différence soient des carrés, on donne par là même, en nombres entiers, deux carrés jouissant de la même propriété et dont la somme est inférieure.

Par le même raisonnement, on aura ensuite une autre somme plus petite que celle déduite de la première, et en continuant indéfiniment on trouvera toujours des nombres entiers de plus en plus petits satisfaisant aux mêmes conditions. Mais cela est impossible, puisqu'un nombre entier étant donné, il ne peut y avoir une infinité de nombres entiers qui soient plus petits.

La marge est trop étroite pour recevoir la démonstration complète et avec tous ses développements.

Par le même procédé, j'ai découvert et démontré qu'il n'y a aucun nombre triangulaire, sauf l'unité, qui soit un bicarré.

46. — Commentaire de Bachet sur Diophante Nomb. polyg. 9.

« Trouver un polygone, le côté en étant donné, et inversement. »

Je mettrai ici, sans démonstration, une proposition très belle et très remarquable que j'ai découverte :

Dans la progression naturelle commençant à l'unité, le produit d'un nombre quelconque par le nombre immédiatement supérieur fait le double du triangle du premier nombre; si le multiplicateur est le triangle du nombre immédiatement supérieur, on a le triple de la pyramide du premier nombre; si c'est la pyramide du nombre immédiatement supérieur, on a le quadruple du triangulotriangulaire du premier nombre; et ainsi de suite indéfiniment, suivant une règle uniforme et générale.

J'estime qu'on ne peut énoncer sur les nombres de théorème qui soit plus beau ou plus général. Je n'ai ni le temps ni la place d'en mettre la démonstration sur cette marge.

47. — Bachet, Appendice, II, 27.

« $1 = 1^3$, $3 + 5 = 2^3$, $7 + 9 + 11 = 3^3$, $13 + 15 + 17 + 19 = 4^3$, ... »

Voici comment j'énoncerai cette proposition d'une façon plus générale :

Dans toute progression constitutive de polygone, l'unité constitue la première *colonne;* la somme des deux nombres suivants, diminuée du premier triangle multiplié par l'excès sur 4 du nombre des angles du polygone, forme la seconde *colonne;* la somme des trois nombres suivants, diminuée du second triangle multiplié par l'excès sur 4 du nombre des angles du polygone, forme la troisième *colonne;* et ainsi de suite indéfiniment, suivant la même loi (1).

(1) Soit la progression arithmétique commençant à l'unité, et de raison $k-2 : 1, 1+(k-2), 1+2(k-2), \ldots, 1+(n-1)(k-2), 1+n(k-2), \ldots$; le $n^{\text{ième}}$ poly-

48. — **Bachet, Appendice, II, 31.**

« $n^3\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2 = \Sigma_1^n (na)^3$. »

Il suit de là que le produit du cube du plus grand nombre $[(na)^3]$ par le nombre des termes $[n]$ est plus petit que le quadruple de la somme des cubes $[\Sigma_1^n (na)^3]$.

gone de k angles est la somme des n premiers termes

$$P_n^k = \frac{n}{2}[n(k-2) - (k-4)] = n + \frac{n(n-1)(k-2)}{2}.$$

Si, dans la même progression, on désigne par Σ_m la somme des m termes qui suivent les $\frac{m(m-1)}{2}$ premiers, on aura

$$\Sigma_m = P^k_{\frac{m(m+1)}{2}} - P^k_{\frac{m(m-1)}{2}} = m + \frac{k-2}{2} m(m^2-1).$$

Dès lors, d'après Fermat, la $m^{\text{ième}}$ *colonne*, terme qu'il a forgé :

$$C_m = \Sigma_m - (k-4)\frac{m(m-1)}{2} = m\left[m + \frac{m(m-1)(k-2)}{2}\right];$$

c'est le produit par m du polygone ayant m pour côté.

En supposant $k = 4$, le polygone ayant m pour côté devient le carré m^2, et la colonne $C_m = m^3$; on retrouve donc comme cas particulier le théorème énoncé par Bachet et qui était déjà connu dans l'antiquité.

TRADUCTION

DES LETTRES ET DES FRAGMENTS EN LATIN

DANS LA CORRESPONDANCE DE FERMAT.