桑木文庫
洋書
0324

桑木文庫
洋書
0324

物理
08
F
3.3

九州帝國大學理學部
8275
物理學教室

理学部 洋 遡及
022232002004785
九州大学蔵書

物
0
3.

東京書

ŒUVRES

DE FERMAT.

物
0
3.

D 802143

20660 PARIS. — IMPRIMERIE GAUTHIER-VILLARS ET FILS,
Quai des Grands-Augustins, 55.

ŒUVRES
DE FERMAT

PUBLIÉES PAR LES SOINS DE

MM. PAUL TANNERY ET CHARLES HENRY

SOUS LES AUSPICES

DU MINISTÈRE DE L'INSTRUCTION PUBLIQUE.

TOME TROISIÈME.

Traductions par M. Paul TANNERY :

1° DES ÉCRITS ET FRAGMENTS LATINS DE FERMAT; 2° DE L'*Inventum novum* DE JACQUES DE BILLY;
3° DU *Commercium epistolicum* DE WALLIS.

PARIS,
GAUTHIER-VILLARS ET FILS, IMPRIMEURS-LIBRAIRES
DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,
Quai des Grands-Augustins, 55.

M DCCC XCVI

國立中央圖書館
昭和19.4.25
130618

TABLE DES MATIÈRES

DU TROISIÈME VOLUME.

Pages

AVERTISSEMENT IX

PREMIÈRE PARTIE.

TRADUCTION DES ÉCRITS LATINS DE FERMAT.

Restitution de deux Livres des lieux plans d'Apollonius de Perge :
Livre I 3
Livre II 27

Des contacts sphériques 49

Fragments géométriques :
Solution d'un problème proposé par M. de Pascal 67
Deux porismes 71
Porismes d'Euclide : leur théorie renouvelée et présentée aux géomètres modernes sous forme d'introduction 73
Proposition de M. de Fermat sur la parabole 79
Démonstration du lieu à trois droites 83

Introduction aux lieux plans et solides 85
Appendice renfermant la solution des problèmes solides par les lieux 96

Introduction aux lieux en surface 102

Dissertation en trois parties : sur la solution des problèmes de Géométrie par les courbes les plus simples et convenant en particulier à chaque genre de problèmes. 109

Maxima et minima :
I. Méthode pour la recherche du maximum et du minimum 121
Des tangentes des lignes courbes 122
II. Centre de gravité du conoïde parabolique, d'après la même méthode 124
III. Sur la même méthode : *Je veux, au moyen de ma méthode*, etc 126
IV. Méthode du maximum et du minimum 131
V. Appendice à la méthode du maximum et du minimum 136
VI. Sur la même méthode : *La théorie des tangentes*, etc 140
VII. Problème envoyé au R. P. Mersenne le 10 novembre 1642 148
VIII. Analyse pour les réfractions 149
IX. Synthèse pour les réfractions 151

Pages

(*Méthode d'élimination*). Nouveau traitement en analytique des inconnues secondes et d'ordre supérieur 157
Appendice à la méthode précédente 159
Sur le problème d'Adrien Romain 164
Réponse aux questions de Cavalieri 169
Propositions à Lalouvère 172
Dissertation géométrique : de la comparaison des lignes courbes avec les lignes planes 181
Appendice 204
(*Méthode de quadrature*). Sur la transformation et la simplification des équations de lieux pour la comparaison, sous toutes les formes, des aires curvilignes, soit entre elles, soit avec les rectilignes; et, en même temps, sur l'emploi de la progression géométrique pour la quadrature des paraboles et hyperboles à l'infini 216
Fragment sur la cissoïde 238
Observations sur Diophante 241

SECONDE PARTIE.

TRADUCTION DES LETTRES ET DES FRAGMENTS EN LATIN DE LA CORRESPONDANCE DE FERMAT.

Lettre n° 3. Fermat à Mersenne, 3 juin 1636 (fragments) 277
» n° 5. Nouveaux théorèmes de Mécanique 278
» n° 7. Fermat à Roberval, août 1636 (fr.) 281
» n° 9. Fermat à Étienne Pascal et Roberval, 23 août 1636 (fr.) 283
» n° 12. Fermat à Mersenne pour Sainte-Croix, septembre 1636 286
» n° 13. Fermat à Roberval, 22 septembre 1636 (fr.) 292
» n° 15. Fermat à Roberval, 4 novembre 1636 (fr.) 293
» n° 16. Objections de M. de Fermat contre une proposition de Mécanique de M. de Roberval 294
» n° 17. Fermat à Roberval, 7 décembre 1636 (fr.) 296
» n° 18. Fermat à Roberval, 16 décembre 1636 (fr.) 296
» n° 19. Fermat à Roberval, février 1637 (fr.) 300
» n° 36. Fermat à Mersenne, 26 décembre 1638 (fr.) 302
» n° 37. Fermat à Mersenne, 20 février 1639 (fr.) ..... »
» n° 42. Fermat à Roberval, août 1640 (fr.) ..... »
» n° 62. Fermat à Gassendi, 1646 ..... »
» n° 67. Fermat à Auzout ? 1648 309
» n° 68. Fermat à Carcavi, 20 août 1650 (fr.) 310
» n° 70. Pascal à Fermat, 20 juillet 1654 (fr.) ..... »
» n° 79. Premier défi aux mathématiciens, 3 janvier 1657 311

Pages

Lettre n° 81. Second défi aux mathématiciens, février 1657 312
» n° 84. Fermat à Digby, 15 août 1657 (fr.) 313
» n° 89. Fermat à Digby, juin 1658 314
» n° 106. Fermat à Carcavi, juin 1660 319

TROISIÈME PARTIE.

TRADUCTION DE L'*INVENTUM NOVUM* DU PÈRE JACQUES DE BILLY.

Préface 325
Première Partie. — Des solutions en nombre indéfini dans les doubles équations 328
Seconde Partie. — De la triple équation et des solutions en nombre indéfini 360
Troisième Partie, comprenant le procédé pour obtenir des solutions en nombre indéfini donnant des valeurs carrées ou cubiques à des expressions où entrent plus de trois termes de degrés différents 376

QUATRIÈME PARTIE.

TRADUCTION DU *COMMERCIUM EPISTOLICUM* DE WALLIS.

Dédicace de Wallis à Kenelm Digby 401
1. Brouncker à Wallis, 15 mars 1657 403
2. Wallis à Brouncker, 17 mars 1657 404
3. Brouncker à Wallis, 9 juin 1657 405
4. Fermat à Digby, 20 avril 1657 406
5. Wallis à Digby, 16 juin 1657 ..... »
6. Digby à Wallis, 1er août 1657 410
7. Wallis à Digby, 13 septembre 1657 412
8. Brouncker à Wallis, 21 septembre 1657 416
9. Wallis à Digby, 7 octobre 1657 417
10. Brouncker à Wallis, 13 octobre 1657 419
11. Fermat à Digby, 6 juin 1657 420
12. Fermat à Digby, 15 août 1657. — P. S. ..... »
13. Brouncker à Wallis, 16 octobre 1657 422
14. Brouncker à Wallis, 1er novembre 1657 423
15. Wallis à Brouncker, 1er décembre 1657 425
16. Wallis à Digby, 1er décembre 1657 427
17. Wallis à Brounker, 17 décembre 1657 457

		Pages
18.	Wallis à Digby, 26 décembre 1657	480
19.	Wallis à Brouncker, 30 janvier 1658	490
20.	Brouncker à Wallis, 28 février 1658	503
21.	Digby à Wallis, 6 février 1658	504
22.	Frenicle à Digby, 3 février 1658	507
23.	Wallis à Digby, 14 mars 1658	511
24.	Brouncker à Wallis, 23 mars 1658	528
25.	Digby à Wallis, 20 février 1658	»
26.	Frenicle à Digby, ... février 1658	530
27.	Brouncker à Digby, 23 mars 1658	536
28.	Wallis à Digby, 25 mars 1658	537
29.	Wallis à Brouncker, 29 mars 1658	541
30.	Brouncker à Wallis, 16 avril 1658	546
31.	Frenicle à Digby, 11 avril 1658	»
32.	Wallis à Brouncker, 23 avril 1658	551
33.	Schooten à Wallis, 18 mars 1658	554
34.	Brouncker à Wallis, 11 mai 1658	571
35.	Digby à Brouncker, 4 mai 1658	572
36.	Digby à Wallis, 4 mai 1658	573
37.	Fermat à Digby, 7 avril 1658	576
38.	Frenicle à Digby, 4 mai 1658	577
39.	Wallis à Digby, 15 mai 1658	579
40.	Wallis à Brouncker, 21 mai 1658	584
41.	Digby à White, 8 mai 1658	590
42.	Digby à Wallis, 8 mai 1658	591
43.	Frenicle à Digby, 2 mai 1658	592
44.	Wallis à Digby, 30 juin 1658	598

APPENDICE.

45.	Wallis à Brouncker, 13 juillet 1658	601
46.	Digby à Wallis, 19 juin 1658	602
47.	Fermat à Digby, juin 1658	»
Réplique anonyme au *Commercium* :		
	Texte latin	603
	Traduction	606
Errata		611

FIN DE LA TABLE DES MATIÈRES DU TOME TROISIÈME.

AVERTISSEMENT.

I.

Comme il a été dit dans l'Avertissement, en tête du Tome I de cette édition, page XXXIV, la Commission de publication des *Œuvres de Fermat* a décidé qu'un Volume spécial serait consacré à des traductions des Écrits et Fragments latins de Fermat, de l'*Inventum novum* du P. de Billy, enfin du *Commercium epistolicum* de Wallis.

Si j'ai accepté la tâche ainsi déterminée, il ne m'en sera pas moins permis, je l'espère, de réclamer d'autant plus l'indulgence pour mon travail, que j'aurais désiré personnellement, pour une traduction des Écrits de Fermat, la publication en regard du texte. J'estimais, en effet, que, dans ces conditions, il eût été plus aisé de faire une œuvre plus utile et moins sujette à critique.

Une traduction d'un auteur mathématique peut être faite de deux façons, très différentes l'une de l'autre : ou bien elle sera rigoureusement conforme à la lettre et aux notations du texte, en sorte qu'elle puisse, au point de vue historique, le remplacer absolument pour ceux qui ignorent la langue originaire; ou bien elle reproduira seulement, avec toute la fidélité possible, l'ordre des idées de l'auteur, mais en transcrivant ses notations et ses expressions techniques d'après le système courant; elle servira alors plus utilement le mathématicien qui ne s'attache qu'au fond du raisonnement, sans se préoccuper de la forme des symboles.

Le premier mode est naturellement le seul auquel on puisse penser quand il s'agit d'un auteur contemporain; il n'exige d'ailleurs, de la part du traducteur, qu'une connaissance suffisante de la langue de cet auteur : il est donc de beaucoup le plus facile à suivre. Au contraire, si l'auteur à traduire est ancien ou déjà assez éloigné de nous pour que son système de notations soit essentiellement différent du nôtre, le second mode doit, en principe, être préféré.

S'il s'agit, en effet, du point de vue historique, aucune traduction ne peut, quoi qu'on fasse, équivaloir au texte, quand il est l'œuvre d'un génie véritablement créateur, tel que ceux qui méritent d'être traduits. Car il n'y a pas à

considérer que les notations, il faut tenir compte des concepts; or ceux-ci sont intimement liés à la langue dans laquelle ils sont formulés. Et ce n'est pas parce qu'un mathématicien, comme Fermat, se sera servi de deux langues, qu'on aurait raison de penser que la maternelle a dû, pour lui, être naturellement l'instrument de ses conceptions; à une époque où l'instruction se faisait en latin, où la presque totalité des Ouvrages mathématiques étaient composés dans cette langue, c'était celle-là qui servait principalement à penser en Mathématiques, et il ne me paraît pas douteux que Fermat n'ait conservé jusqu'à la fin de sa vie une habitude qui est évidente pendant la féconde époque de sa jeunesse (1).

D'autre part, si l'on vise à avoir un texte réellement intelligible, si l'on veut faire œuvre véritable de traducteur, il faut bien remplacer par les termes techniques en usage ceux qui sont tombés en désuétude, il faut bien traduire aussi sous la forme moderne les notations obsolètes; sans quoi la traduction ne présente, pour ainsi dire, aucun avantage sur le texte, surtout lorsqu'il est en latin, puisque la connaissance de cette langue est encore assez répandue, même parmi les mathématiciens, auxquels il suffit d'en savoir les premiers éléments et de posséder un vocabulaire très restreint.

Mais, dans ce mode d'interprétation, la tâche du traducteur, s'il veut rester fidèle, présente de sérieuses difficultés; l'emploi de nouveaux termes techniques, surtout leur substitution, souvent indiquée, à des périphrases qui alourdissent le style, tendent à faire attribuer à l'auteur des concepts qui lui sont réellement étrangers et dont il peut être nécessaire de bien marquer le défaut pour rendre compte de la véritable marche des idées; d'un autre côté, il arrive souvent que l'emploi des notations modernes fait apparaître immédiatement une conclusion qui, avec les anciennes, exige encore des développements plus ou moins longs. On se trouve ainsi amené à des suppressions plus ou moins graves.

Il y a donc, et cela pour ainsi dire à chaque instant, à choisir entre deux tendances, dont ni l'une ni l'autre ne peut être sacrifiée en principe : Chercher à être le plus clair possible en tenant compte des habitudes modernes; suivre assez fidèlement le texte pour ne pas en donner une simple paraphrase. J'estime que, dans une traduction en regard du texte, ces difficultés disparaissent en grande partie; il est possible alors de prendre plus de libertés et de viser

(1) Descartes, tout au contraire, comme mathématicien, travailla en français, sinon dès le début, au moins de très bonne heure, tandis qu'en Métaphysique, il trouve certainement plus commode d'écrire ses *Méditations*, par exemple, en latin, de se servir d'une langue toute faite, plutôt que d'en créer une.

avant tout à la clarté; le lecteur est immédiatement averti, par le voisinage du texte, de l'importance des modifications apportées, et il est, pour ainsi dire, invité, toutes les fois que la question peut l'intéresser, à comparer l'interprétation avec les expressions de l'auteur.

Dans une traduction publiée séparément, et surtout dans un Volume susceptible d'être vendu isolément, j'ai cru devoir tenir un plus grand compte du texte de Fermat, et refondre par suite une traduction déjà complètement faite pour mon usage personnel. Je ne me dissimule pas que, du compromis que j'ai essayé entre les deux tendances indiquées plus haut, il ne pouvait résulter une œuvre complètement satisfaisante au point de vue de l'un et de l'autre des deux buts cherchés. Suivant ce que chacun désirera trouver dans cette traduction, il me reprochera nécessairement, soit d'avoir trop conservé des formes anciennes, soit, au contraire, de ne pas les avoir assez respectées. Je ne pourrai répondre qu'une chose, c'est que j'ai fait de mon mieux et que je suis le premier à reconnaître les imperfections inhérentes au système suivi ou plutôt à l'absence d'un système précis et rigoureusement observé.

Les remarques que je viens de présenter ne s'appliquent pas entièrement aux autres traductions qui suivent dans ce Volume celles des Écrits de Fermat. En particulier, pour l'*Inventum novum* du P. de Billy, je ne crois guère que personne attache un intérêt spécial à l'étude des notations (1) et des formes de langage de cet auteur. Je n'ai donc conservé que les expressions typiques, comme celles de nombres *vrais* ou *faux* (au lieu de positifs ou négatifs). Je n'ai eu, au contraire, aucun scrupule, par exemple, à traduire *terminus* au moyen de l'expression toute moderne de *forme* (algébrique), qui lui correspond assez exactement.

L'*Inventum novum* a, en tout cas, une importance réelle; il fait connaître, d'une façon bien détaillée, toute cette partie des recherches arithmétiques de Fermat, qui intéressait le plus ses contemporains, tandis qu'aujourd'hui elle est à peu près complètement négligée. L'*Inventum* est donc un complément d'autant plus essentiel des *Œuvres de Fermat* qu'il donne la clef de nombre des *Observations sur Diophante*, et présente la solution de plusieurs problèmes numériques réellement difficiles. Pour un Ouvrage secondaire de ce genre, que sa forme rend assez malaisément abordable dans le texte original, une réédition de ce texte eût été sans objet, une traduction peut rendre de véritables services.

(1) Ce sont celles de Fermat dans ses *Observations sur Diophante*, c'est-à-dire celles que Bachet avait adoptées dans sa traduction latine de l'auteur grec.

En ce qui concerne le *Commercium* de Wallis, il ne s'agissait que de faire mieux connaître en France une série de lettres très importantes au point de vue historique, mais qui est suffisamment répandue soit dans l'édition princeps, soit dans celle des *Œuvres de Wallis*, pour qu'une réimpression fût sans intérêt; d'un autre côté, ces lettres sont assez faciles à lire, les notations n'y jouent qu'un rôle tout à fait secondaire, et d'ailleurs se rapprochent déjà beaucoup des nôtres. Il me suffira de remarquer que qui voudra réellement connaître toutes celles qu'employait Wallis devra recourir aux sources; c'est ainsi, pour ne citer qu'un exemple, qu'au symbolisme : $a \backsim b$ pour désigner la différence, prise en valeur absolue, des deux nombres a et b, j'ai substitué le suivant : $|a - b|$.

II.

J'ai à remercier les mathématiciens qui ont bien voulu m'indiquer quelques fautes d'impression dans les deux premiers Tomes; elles sont signalées dans l'Errata à la fin de ce Volume. J'ai l'espoir que le même concours bénévole ne me fera pas défaut pour le Tome III, qui sera suivi d'un *Supplément* d'une vingtaine de feuilles d'impression, renfermant, avec divers extraits concernant Fermat et tirés des écrits de Mersenne et des Lettres de Descartes et de Huygens, les index annoncés dans l'Avertissement du Tome I, index qu'il sera plus commode de manier dans un fascicule séparé.

Comme pièces nouvelles et inédites, je ne puis, jusqu'à présent, en annoncer que deux pour ce *Supplément* : 1° la lettre à Mersenne de Cavalieri, contenant les questions auxquelles Fermat a répondu par la Pièce insérée Tome I, pages 195 à 198; cette lettre de Cavalieri est datée du 23 novembre 1641; 2° une lettre sans date, mais postérieure à 1651, adressée à Fermat par un M. de Magnas et décrivant une aurore boréale. Je voudrais espérer qu'avant la fin de l'année 1896 quelque découverte plus importante permettra de combler une des nombreuses lacunes qui subsistent malheureusement dans la correspondance du géomètre de Toulouse.

Avant de terminer, j'ai à signaler deux rectifications concernant les deux premiers Volumes, et qui sont assez importantes pour être mentionnées en dehors de l'Errata.

Tout d'abord dans le second Volume, nous avons omis, pour la lettre de Fermat à Digby, du 15 août 1657 (n° 84 de la Correspondance), un long postscriptum que Wallis n'a inséré que dans la réédition de son *Commercium*. On le trouvera ci-après pages 421-422.

En second lieu, dans l'Avertissement, en tête du premier Volume (p. XIX-XX), pour reproduire le billet autographe de Fermat conservé dans le Volume $\frac{183}{E}$ de la Bibliothèque de la Ville de Toulouse, je m'étais servi du texte déjà publié par Libri, en prenant soin de le faire collationner sur l'original; cette précaution, on le verra, était insuffisante. D'autre part, sur la foi de M. Charles Henry qui affirmait (1) l'identité des écritures d'après un fac-simile que lui avait adressé le bibliothécaire de Toulouse et non, il est vrai, d'après l'original, j'ai indiqué Carcavi comme ayant écrit la note au bas du billet, comme étant par conséquent le destinataire. J'ai même, dans cette hypothèse, essayé d'expliquer l'éloge hyperbolique dont Fermat a gratifié ce destinataire, en lui offrant les *Massimi Sistemi* de Galilée.

Des doutes m'étant survenus à ce sujet en raison de la nature des relations entre Galilée et Carcavi (2), j'ai demandé et obtenu la communication du Volume de Toulouse, et j'ai tout d'abord reconnu que le texte de Fermat n'avait pas été exactement reproduit. En dehors des différences orthographiques, il y en a une autre assez importante (parce qu'elle prouve une singulière intimité entre Fermat et celui auquel il s'adresse); la véritable lecture est indiquée en italique dans le texte nouveau que je donne ci-après :

« Peust estre croirés uous que pour me mettre en reputation et per purgar,
» comme on dit, la mala fama, ie pretens m'eriger en donneur de liures. Vous
» en croirés ce qu'il uous plaira, mais si c'estoit par hasard uostre pensée,
» *asseurés uous, mon cher,* que uous n'aués pas touché au but. Ie ne songe
» en uous offrant les dialogues Italiens du systeme de Galilée qu'a faire une
» action de iustice, et a uous rendre maistre de l'ouurage d'un autheur qui
» ne passeroit, s'il uiuoit, que pour uostre disciple. Receués, donc, ce pre-
» sent, comme uous estant deu, et ne me considerés point en ce rencontre
» comme un adroit negotiateur mais comme un bon iuge, qui rejette comme
» une tentation lidée de uostre grande et fameuse bibliotheque et ne se
» souuient que de la passion qu'il a d'estre tout à uous. »

Suit, d'une écriture inconnue, la note :

« Ce billet est de Monsieur de fermat coer au parlemant qui ma fait presant
» de ce liure. »

(1) *Recherches sur les manuscrits de Pierre de Fermat*, page 10.

(2) Avant même de quitter Toulouse, Carcavi avait formé le projet de donner une édition des Œuvres de Galilée, et il a entretenu, dans ce but, avec ce dernier, une Correspondance qu'il a poursuivie étant à Paris. Il est dès lors presque certain qu'il a possédé de bonne heure le Dialogue des *Massimi Sistemi* et que Fermat ne l'ignorait pas; d'autre part, l'éloge hyperbolique, adressé à un éditeur ou traducteur, aurait été une maladresse.

Le Volume qui contient ce billet ne présente aucun indice qui puisse faire reconnaître par qui il a été possédé après 1642, date de la mort de Galilée; il porte au contraire la marque de la bibliothèque du célèbre érudit Peiresc, mort en 1637. Cette circonstance, et tout aussi bien la rareté de cette édition de l'Ouvrage condamné par l'autorité ecclésiastique, peuvent expliquer l'expression « adroit négociateur » dans le texte du billet de Fermat.

Quant à l'écriture de la note au bas du billet, elle offre avec celle de Carcavi des différences assez marquées, ainsi que j'ai pu le constater en comparant une lettre autographe écrite par lui à Mersenne le 17 mars 1648 et actuellement conservée à la Bibliothèque nationale (français nouv. acq. 6204, p. 296). Mais, pour identifier avec certitude cette écriture inconnue avec celle d'un ami intime de Fermat, possédant une bibliothèque d'une certaine importance, j'ai fait de nombreuses tentatives qui sont restées infructueuses; je ne puis donc soumettre au lecteur que des probabilités.

Je dois en tout cas témoigner ma profonde reconnaissance à deux amis qui m'ont secondé avec ardeur dans cette recherche et m'ont procuré des photographies de spécimens d'écritures difficiles à trouver, M. Baillaud, directeur de l'Observatoire de Toulouse, et M. Hochart, de Bordeaux.

La circonstance que d'une part, après la mention « conseiller au parlement », le siège de la cour ne se trouve pas indiqué; que d'un autre côté le Volume offert par Fermat se retrouve actuellement dans la bibliothèque de Toulouse, font présumer *a priori* que l'ami du grand géomètre habitait cette ville. Mais dans ce cas, il faut admettre que l'éloge hyperbolique est en fait une plaisanterie adressée à un intime pour un motif dont nous n'avons pas le secret, et d'autre part, à moins de supposer que l'écriture ne soit celle d'un secrétaire (ce qui rendrait le problème à peu près insoluble), on ne peut la rapprocher que de celle d'un seul personnage, Gaspard de Fieubet, qui fut nommé en 1653 premier président du parlement de Toulouse, où il était auparavant procureur général.

L'écriture de Fieubet est bien, au premier aspect, du même genre que celle des deux lignes au bas du billet de Fermat; toutefois, dans le détail, pour la forme de certaines lettres, il y a des différences sensibles; Fieubet a possédé, de fait, une bibliothèque importante; mais il est plus que douteux qu'il ait jamais été assez intime avec Fermat pour que celui-ci, s'adressant à un procureur général, ait pu lui écrire « mon cher ». Et même un rapport secret de l'intendant de Toulouse, adressé à Colbert en 1663 (*Correspondance administrative sous le règne de Louis XIV*, Tome II, page 853) signale Fermat comme n'étant pas des amis du premier président.

Si l'on écarte les motifs qui font croire que le donataire devait être Toulousain, il est un ami certainement très intime de Fermat auquel on peut penser. C'est Etienne d'Espagnet, conseiller au parlement de Bordeaux, et fils du président Jean d'Espagnet, avec lequel on l'a parfois confondu, et qui avait commencé à former une bibliothèque considérable. Érudit en toute science, Etienne d'Espagnet ne s'est pas seulement occupé, entre autres choses, comme son père, de philosophie hermétique, il réussit assez bien dans la fabrication des verres de lunettes astronomiques, pour que, dans une lettre inédite à Boulliau du 2 décembre 1667 (Bibl. nat. fr. 13044, f° 244 verso) Tito-Livio Burattini mentionne Auzout et lui comme étant ceux qui ont particulièrement réussi en France à obtenir des verres « esquisitissimi ». Ne serait-ce pas là précisément la clef de l'éloge hyperbolique?

Les spécimens de son écriture dont M. Hochart a pu me procurer une photographie remontent à 1635, c'est-à-dire à une époque sensiblement antérieure à celle du cadeau de Fermat. Il n'y a pas de différences sensibles dans le détail, mais l'écriture est notablement moins grosse, ce qui peut s'expliquer par la différence de l'âge.

En résumé, je considère la question comme n'étant pas résolue, mais j'estime que la probabilité penche pour l'identification avec Etienne d'Espagnet, et je serais tenté de rapprocher la date du billet des dernières années de Fermat [1].

[1] *P.-S.* — Je dois à l'obligeance de M. Favaro le renseignement suivant : D'après une lettre de Heinsius à Léopold de Médicis, en date du 4 mars 1661 (publiée par Targioni Tozzetti dans ses *Notizie degli aggrandimenti delle scienze fisiche accaduti in Toscana*, Florence, 1780, page 501), Golius, interrogé sur les manuscrits inédits de Viète, dont la communication avait été promise aux Elzevirs par Espagnet, aurait répondu que ce dernier, tombé en disgrâce, avait été exilé de Bordeaux, et qu'il ne savait plus où le trouver. — Cet exil dut être la conséquence du rôle assez important joué par Espagnet pendant la Fronde. Se serait-il, pendant plus ou moins longtemps, retiré à Toulouse? En 1662, cependant, il était rentré à Bordeaux, et, en 1666, son fils aîné, Jean, le remplaçait dans sa charge (indications que je dois à un jeune érudit bordelais, M. Dast de Boisville, et qu'il a tirées des Archives départementales de la Gironde).

Paris, le 25 février 1896.

PAUL TANNERY.

TRADUCTION

DES

ÉCRITS LATINS DE FERMAT.

RESTITUTION
DES
DEUX LIVRES DES LIEUX PLANS
D'APOLLONIUS DE PERGE.

LIVRE I.

Ce que sont les lieux plans est chose bien connue; ce sujet fut traité en deux livres par Apollonius, au témoignage de Pappus qui, au début de son Livre VII, en donne les diverses propositions, mais dans un langage passablement obscur ou du moins mal compris du traducteur (il ne m'a pas été possible d'examiner le manuscrit grec). C'est cette théorie, la plus belle, semble-t-il, de toute la Géométrie, que nous arrachons à l'oubli, pour opposer fièrement Apollonius traitant des Lieux plans, aux Apollonius français, bataves et illyriens; car nous avons la confiance assurée qu'il n'y a pas d'ouvrage où resplendissent plus vivement les merveilles de la Géométrie; pour le faire avouer aussitôt, je commence immédiatement.

Les propositions du Livre I sont les suivantes :

PROPOSITION I.

« *Si on mène deux lignes, soit d'un point donné, soit de deux, et soit en ligne droite, soit parallèles, soit sous un angle donné, enfin ayant*

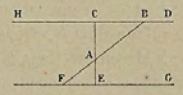
entre elles un rapport donné, ou comprenant un rectangle donné; si l'extrémité de l'une est sur un lieu plan donné de position, l'extrémité de l'autre sera également sur un lieu plan donné de position, tantôt du même genre, tantôt d'un genre différent, tantôt situé de même par rapport à la ligne droite, tantôt de façon contraire. »

On peut facilement diviser cette proposition en huit autres et chacune de celles-ci en cas nombreux. Le défaut de ponctuation semble au reste avoir embarrassé le traducteur, et Pappus lui-même paraît être tombé dans l'obscurité par trop de concision. Voici comment nous éclaircissons le tout, par notre division en huit parties.

1. Proposition. — *Si d'un point donné on mène en ligne droite deux lignes dans un rapport donné, et que l'extrémité de l'une se trouve sur un lieu plan donné de position (c'est-à-dire une droite ou une circonférence de cercle donnée de position), l'extrémité de l'autre sera sur une droite ou une circonférence de cercle donnée de position.*

Soit A le point donné (*fig.* 1), par lequel on mène en ligne droite AB et AF dans un rapport donné. Soit par exemple le point B sur la

Fig. 1.



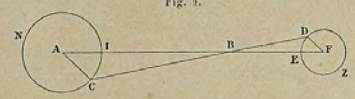
ligne droite HCBD donnée de position, je dis que le point F est aussi sur une droite donnée de position.

Du point A, j'abaisse sur la droite HD la perpendiculaire AC, le point C sera donné; je prolonge CA jusqu'en E, en prenant $\frac{CA}{AE}$ dans le rapport donné; AE sera donné, donc le point E. Par le point E je mène GEF parallèle à la droite HD; elle sera donnée de position et passera par le point F, car toutes les droites, passant par un point donné et coupant deux parallèles, sont divisées dans le même rapport.

Il est donc clair que toute droite passant par le point A et terminée aux parallèles données de position sera partagée dans le rapport donné.

Soient maintenant donnés le point B (*fig.* 2) et le cercle ICN dont

Fig. 2.



le centre est A. Menez BA qui coupe la circonférence en I, et prolongez IB suivant BE, en sorte que le rapport $\frac{IB}{BE}$ soit égal au donné. Continuez le prolongement jusqu'en F en sorte que $\frac{AI}{EF} = \frac{IB}{BE}$, et de F comme centre, avec FE comme rayon, décrivez la circonférence de cercle EDZ qui, d'après la construction, sera évidemment donnée de position. Je dis que toutes les droites passant par le point B et terminées de part et d'autre aux circonférences des cercles donnés de position seront partagées dans le rapport donné.

Soit menée par exemple CBD; joignez CA, DF. On a

$$\frac{IB}{BE} = \frac{AI}{EF}; \quad \text{donc, par somme,} \quad \frac{BA}{BF} = \frac{AI\,(=AC)}{EF\,(=FD)}.$$

D'ailleurs les angles ABC, FBD opposés par le sommet sont égaux. Les triangles sont donc semblables et par conséquent

$$\frac{CD}{BD} = \frac{BA}{BF}, \quad \text{c'est-à-dire le rapport donné.}$$

Si donc du point donné B on mène deux droites, par exemple BC, BD, en ligne droite et dans le rapport donné, et que BC se termine à une circonférence donnée de position, BD se terminera aussi à une autre circonférence donnée de position.

Si les droites sont prolongées jusqu'aux arcs concaves des cercles, la proposition reste vraie.

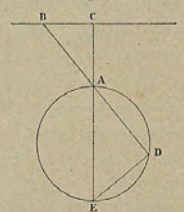
Nous avertissons que dans nos démonstrations nous n'insistons pas

sur les détails évidents d'eux-mêmes, et que nous n'examinons pas les différents cas qui peuvent se déduire sans difficulté de ce que nous avons dit.

2. Proposition. — *Si d'un point donné on mène dans le prolongement l'une de l'autre deux droites dont le rectangle soit donné, et que l'extrémité de l'une se trouve sur un lieu plan donné de position, il en sera de même pour l'extrémité de l'autre.*

Soit A le point donné (*fig.* 3), et en premier lieu une droite BC donnée de position; abaissez sur elle la perpendiculaire AC; le point C

Fig. 3.



sera donné. Prolongez cette perpendiculaire et soit $CA \times AE$ égal au rectangle donné. Sur AE comme diamètre, décrivez le cercle ADE. Je dis que toutes les droites menées par le point A et terminées d'un côté à la droite, de l'autre à la circonférence du cercle (qui est évidemment donné de position), seront partagées au point A en sorte que le rectangle de leurs segments soit égal à l'aire donnée.

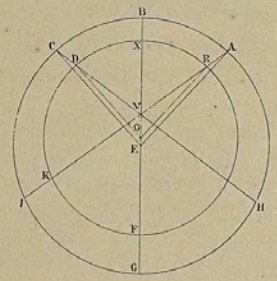
Soit en effet, par exemple, la droite DAB; joignez DE. L'angle ADE inscrit dans un demi-cercle est droit et les angles BAC, DAE, opposés par le sommet, sont égaux. Les triangles DAE, ACB seront donc semblables et par conséquent $BA \times AD = CA \times AE$ qui est donné.

Si donc par le point A on mène, dans le prolongement l'une de l'autre, les deux droites AB, AD, et que l'extrémité de l'une, à savoir

AB, se trouve sur la droite BC donnée de position, l'extrémité de l'autre se trouvera sur un lieu plan, c'est-à-dire le cercle ADE, donné de position.

Soit maintenant donné le point V (*fig.* 4), avec le cercle BIGH de centre E; joignez EV; prolongez jusqu'en B, VB sera donné; prolon-

Fig. 4.



gez de l'autre côté jusqu'en F en sorte que $BV \times VF$ soit égal au rectangle donné. Soit encore $GV \times VX$ égal à ce rectangle. Sur XF comme diamètre, décrivez le cercle XKF qui est évidemment donné de position. Je dis que les droites, passant par le point V et terminées aux deux cercles, sont partagées au point V en sorte que le rectangle de leurs segments soit égal au rectangle donné.

Soit par exemple menée AVKI, je dis que $AV \times VK$ est égal au rectangle donné.

Soit pris le centre O du petit cercle, que nous supposerons coupé en R par la droite AVKI; joignez RO, AE. Nous avons supposé $GV \times VX = BV \times VF$. Par conséquent $\frac{GV}{VB} = \frac{FV}{VX}$. *Componendo*, prenant la moitié des antécédents, et *convertendo*,

$$\frac{EB\,(=EA)}{EV} = \frac{OX\,(=OR)}{OV}.$$

Les deux triangles OVR, VEA ont de plus l'angle EVA commun, ils seront donc semblables.

Par conséquent : $\frac{AV}{RV} = \frac{AE}{RO}$ $\left(\text{ou } \frac{EB}{OX}\right) = \frac{VE}{VO}$. Mais $\frac{EB}{OX} = \frac{VE}{VO}$; donc, par différence, $\frac{EB}{OX} = \frac{VB}{VX}$. Donc $\frac{AV}{RV} = \frac{BV}{XV}$.

Nous prouverons de même que $\frac{GV}{VF} = \frac{IV}{KV}$ ou *vicissim* $\frac{GV}{VI} = \frac{FV}{VK}$. Mais $\frac{FV}{VK} = \frac{VR}{VX}$ (les rectangles $KV \times VR$, $FV \times VX$, dans le cercle, étant égaux), et nous avons prouvé que $\frac{VR}{VX} = \frac{VA}{VB}$. Donc, d'un côté, $\frac{FV}{VK} = \frac{VA}{VB}$. Donc $KV \times VA = FV \times VB$, rectangle donné.

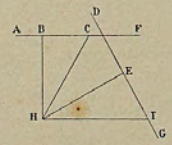
D'autre part, $\frac{GV}{IV} = \frac{VR}{VX}$, et par suite $IV \times VR = GV \times VX$, rectangle donné.

Par conséquent, si par le point V on mène dans le prolongement l'une de d'autre deux droites AV, VK, dont le rectangle soit donné, et que l'extrémité de l'une, soit VA, se trouve sur un cercle donné de position, l'extrémité de l'autre se trouvera sur un lieu plan (le cercle XKF) donné de position.

3. Proposition. — *Si d'un point donné on mène sous un angle donné deux lignes dans un rapport donné, et que l'extrémité de l'une se trouve sur un lieu plan donné de position, il en sera de même pour l'extrémité de l'autre.*

Soit H le point donné (*fig.* 5) et, en premier lieu, une droite AF

Fig. 5.



donnée de position. La perpendiculaire HB abaissée sur elle sera donnée.

Soit l'angle BHE égal à l'angle donné, et $\frac{BH}{HE}$ dans le rapport donné.

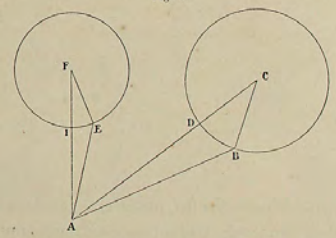
La droite HE sera donnée de position, ainsi que le point E. De ce point E j'élève sur la droite HE la perpendiculaire indéfinie DEG; elle sera donnée de position. Prenant sur AF un point C quelconque, et joignant HC, je fais l'angle CHI égal au donné : je dis que $\frac{HC}{HI}$ est dans le rapport donné.

En effet, les angles BHE, CHI étant égaux, si je retranche la partie commune CHE, les angles BHC, EHI seront égaux. Ceux en B et E sont droits; donc les triangles HBC, HEI sont semblables. Donc $\frac{HB}{HC} = \frac{HE}{HI}$, et *vicissim* $\frac{HB}{HE} = \frac{HC}{HI}$: c'est le rapport donné.

Si donc du point donné H on mène deux droites HC, HI sous un angle donné CHI et dans un rapport donné, et si le point C de l'une HC se trouve sur une droite donnée de position, l'extrémité de l'autre se trouve sur un lieu plan, la droite DG, dont la position est donnée, comme il a été prouvé.

Si la première extrémité se trouve sur un cercle, soit A le point

Fig. 6.



donné (*fig.* 6), IE le cercle donné de position, F son centre. Joignez FA qui coupe le cercle en I; soit un angle IAD égal au donné, et $\frac{IA}{AD}$ dans le rapport donné. AD sera donnée de position ainsi que le point D. Prolongez et soit $\frac{IA}{AD} = \frac{IF}{DC}$. De C comme centre, décrivez le cercle DB,

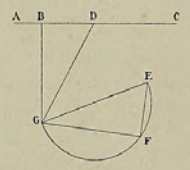
qui est évidemment donné de position. Soit pris sur le premier cercle un point E quelconque; joignez EA; soit l'angle EAB égal au donné, et le point B sur le second cercle, je dis que $\frac{AE}{BA}$ est le rapport donné.

Joignant FE, BC, on prouvera, comme ci-dessus, que les angles FAE, CAB sont égaux et, en raisonnant comme dans la proposition I (2e figure), que les triangles FAE, CAB sont semblables. Donc $\frac{AF}{AE} = \frac{AC}{AB}$, et *vicissim* $\frac{AF}{AC}$, c'est-à-dire $\frac{AI}{AD} = \frac{AE}{AB}$. Donc le rapport $\frac{AE}{AB}$ est le donné et le sens de la proposition est évident, aussi bien que la conséquence.

4. Proposition. — *Que d'un point donné on mène deux lignes sous un angle donné et telles que leur rectangle soit donné; si l'extrémité de l'une se trouve sur un lieu plan donné de position, il en sera de même pour l'autre.*

Soit G le point donné (*fig.* 7) avec la droite AC donnée de position, sur laquelle j'abaisse la perpendiculaire GB; soit BGE l'angle donné

Fig. 7.



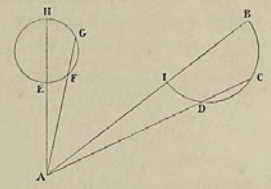
et BG × GE l'aire donnée. Sur GE, je décris le demi-cercle GEF. Prenant sur la droite donnée de position un point quelconque D, je joins DG, et fais l'angle DGF égal au donné; je dis que DG × GF est égal à l'aire donnée.

Joignant FE, je prouverai, comme dans la proposition précédente, l'égalité des angles BGD, EGF; mais ceux en B, F sont égaux comme droits; on conclura la similitude des triangles BGD, EGF, l'égalité

des rectangles BG × GE, GD × GF, et la vérité de la proposition. Si donc, etc.

Soit maintenant A (*fig.* 8) le point donné, avec le cercle HGE donné de position. Je mène par son centre la droite AEH qui coupe la

Fig. 8.



circonférence aux points E, H. Soit HAB l'angle donné, et HA × AI, aussi bien que EA × AB, égal à l'aire donnée. Le demi-cercle décrit sur IB (lequel est évidemment donné de position) satisfera à la question. En effet, menons par exemple GFA, et faisons l'angle GADC égal au donné. Je dis que les rectangles GA × AD et FA × AC sont égaux à l'aire donnée.

Car, comme HA × AI = EA × AB, on a $\frac{HA}{AE} = \frac{AB}{AI}$. Mais, d'après le raisonnement de la proposition précédente, l'égalité des angles HAG, BAC est évidente; aussi bien, comme dans la proposition 2, on déduira facilement $\frac{HA}{GA} = \frac{BA}{AC}$. Mais $\frac{HA}{GA} = \frac{FA}{AE}$, donc

$$\frac{FA}{AE} = \frac{BA}{AC}, \quad \text{d'où} \quad FA \times AC = BA \times AE, \text{ le rectangle donné,}$$

D'autre part :

$$\frac{BA}{AC} = \frac{AD}{AI}, \quad \text{d'où} \quad GA \times AD = HA \times AI, \text{ le rectangle donné.}$$

La proposition est ainsi entièrement établie; si donc, etc.

Dans ce cas, j'ai pris le point A en dehors du cercle donné de posi-

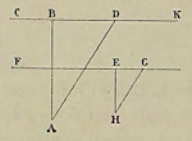
tion; mais on peut le prendre au dedans, comme dans le second cas de la proposition 2.

Les quatre propositions précédentes supposent un seul point donné, les suivantes deux.

5. Proposition. — *Si par deux points donnés on mène deux lignes parallèles dans un rapport donné, et que l'extrémité de l'une se trouve sur un lieu plan donné de position, il en sera de même pour l'autre.*

Soient A, H (*fig.* 9) les deux points, CBDK une droite donnée de po-

Fig. 9.



sition, sur laquelle on abaissera la perpendiculaire AB. Soit HE parallèle à cette dernière, et $\frac{AB}{HE}$ le rapport donné; le point E sera donné. Menez par ce point FEG perpendiculaire à HE et parallèle à la droite donnée de position. Je dis que toutes les parallèles, menées par les points A, H et terminées aux droites CD, FG données de position, seront dans le rapport donné $\frac{AB}{HE}$.

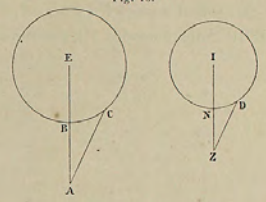
En effet, les angles BAD, EHG seront égaux, comme les droits en B, E; donc les triangles BAD, EHG seront semblables. Le reste est facile.

Si donc des deux points A, H, on mène les parallèles AD, HG dans le rapport donné, et que AD se termine à une droite donnée de position, HG se terminera aussi à une droite donnée de position, par conséquent à un lieu plan.

Dans la figure ci-contre (*fig.* 10), soient donnés les points A, Z et, de position, le cercle BC de centre E. Joignez AE coupant le cercle en B; menez à AE la parallèle ZN et soit $\frac{AB}{ZN}$ dans le rapport donné. Pro-

longez ZN jusqu'en I, $\frac{BE}{NI}$ étant aussi dans le rapport donné. Le cercle décrit de I comme centre, avec IN comme rayon, sera donné de position et satisfera à la question.

Fig. 10.

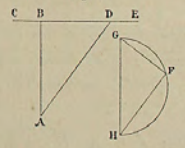


En effet, si l'on mène les parallèles AC, ZD, rencontrant les cercles aux points C, D, $\frac{AC}{DZ}$ sera dans le rapport donné; car l'égalité des angles BAC, NZD ressort du premier cas de cette proposition; le reste résulte du second cas de la proposition 3.

6. Proposition. — *Si par deux points donnés on mène deux parallèles dont le rectangle soit donné, et que l'extrémité de l'une soit sur un lieu plan donné de position, il en sera de même pour l'autre.*

Soient donnés les deux points A, H (*fig.* 11), et de position la droite CE, sur laquelle on abaissera la perpendiculaire AB. Menez à

Fig. 11.

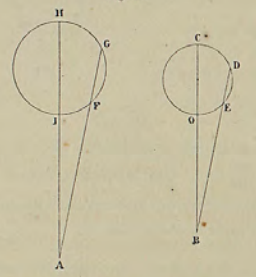


cette dernière la parallèle HG, et soit AB × HG égal au rectangle donné. La droite HG sera donnée et le demi-cercle HGF décrit sur elle satisfera à la question.

En effet, qu'on mène les parallèles quelconques AD, HF, et qu'on joigne GF, en reprenant les démonstrations précédentes, on conclura la similitude des triangles BAD, GHF et l'égalité de AD × HF au rectangle donné BA × HG. Si donc par deux points, etc.

Dans le second cas, soient donnés les points A, B (*fig.* 12), et de position le cercle IFGH. Soient menées AIH par son centre et la paral-

Fig. 12.



lèle BC; soient AI × BC et AH × BO égaux au rectangle donné; le demi-cercle décrit sur la droite OC satisfait à la question.

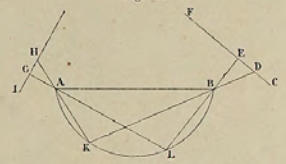
En effet, si l'on mène les parallèles AFG, BED, les angles HAG, CBD seront égaux et l'on démontrera l'égalité au rectangle donné de AG × BE et de AF × BD, comme dans le second cas de la proposition 4.

7. Proposition. — *Si par deux points donnés on mène sous un angle donné deux droites dans un rapport donné, et que l'extrémité de l'une se trouve sur un lieu plan donné de position, il en sera de même pour l'extrémité de l'autre.*

Soient donnés les points A, B (*fig.* 13), et de position la droite IGH. Sur BA décrivez le segment de cercle ALB capable de l'angle donné. Du point A abaissez sur la droite IH la perpendiculaire AG, que vous prolongerez jusqu'à sa rencontre avec la circonférence en L. Menez

LBE, et soit $\frac{AG}{BE}$ dans le rapport donné. Menez FEDC perpendiculaire à BE, et prenez sur l'arc de cercle un point quelconque K, duquel vous mènerez, par A et B, les droites KAH, KBD rencontrant en H et D les droites IH, FC. Je dis que $\frac{AH}{BD}$ est dans le rapport donné $\frac{AG}{BE}$.

Fig. 13.



Car, s'il en est ainsi, les triangles AGH, BED seront semblables : donc les angles GAH, EBD seront égaux, ainsi que leurs opposés par le sommet KAL, KBL. Mais cette dernière égalité a lieu, puisque ces angles sont inscrits dans le même segment, et il est facile de remonter de l'analyse à la synthèse.

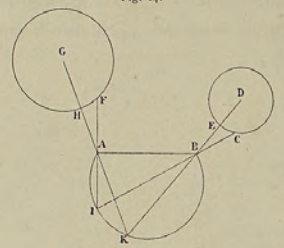
Si donc, par deux points A, B, on mène deux droites AH, BD, sous l'angle donné HKD < et ayant entre elles un rapport donné >, si l'extrémité de AH est sur la droite IH donnée de position, l'extrémité de BD sera sur la droite FC, donnée aussi de position, d'après la construction.

Soient maintenant donnés les points A, B (*fig.* 14), et de position le cercle HF; sur AB décrivez le segment de cercle AKB capable de l'angle donné. Soit G le centre du cercle HF; joignez AHG, prolongez-la jusqu'à sa rencontre en K avec l'arc de cercle, menez KBE, et soit $\frac{AH}{BE}$ dans le rapport donné. Prolongez BE jusqu'en D, en sorte que $\frac{HG}{DE}$ soit aussi dans le rapport donné. Le cercle décrit de D comme centre sera donné de position et donnera la solution de la question.

Si en effet on mène IAF, IBC, les angles en A et B seront égaux, et le reste de la démonstration est facile; on voit aussitôt que $\frac{AF}{BC}$ est dans

le rapport donné, et qu'il en est de même si l'on prolonge les droites jusqu'aux arcs concaves. Si donc, etc.

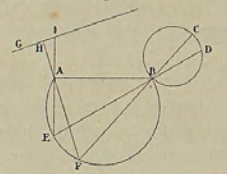
Fig. 14.



8. Proposition. -- *Si par deux points donnés on mène deux lignes sous un angle donné et dont le rectangle soit donné, que l'extrémité de l'une soit sur un lieu plan donné de position, il en sera de même pour l'extrémité de l'autre.*

Soient donnés les deux points A, B (*fig.* 15), et de position la droite GI. Sur AB décrivez le segment de cercle capable de l'angle

Fig. 15.



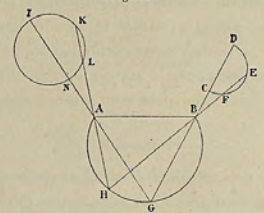
donné; menez AH perpendiculaire sur GI et prolongez-la jusqu'en F. Joignez FB, à prolonger jusqu'en C en sorte que AH × BC soit égal à l'aire donnée. Le cercle décrit sur la droite BC satisfera à la question.

En effet, si l'on prend sur l'arc un point quelconque E, et qu'on joigne EAI, EBD, AI × BD sera égal au rectangle donné.

La démonstration est la même que dans les cas qui précèdent.

Soient maintenant donnés les points A, B (*fig.* 16), et de position le cercle IKL. Sur AB décrivez le segment de cercle capable de l'angle

Fig. 16.



donné. Menez par le centre la droite ANI, à prolonger jusqu'en G; joignez GB, et prolongez en sorte que AI × BC et AN × BD soient égaux à l'aire donnée. Le demi-cercle décrit sur CD satisfera à la question; c'est-à-dire que si l'on prend un point quelconque comme H et qu'on achève la construction de la figure, comme ci-dessus, AK × BF et AL × BE seront égaux au rectangle donné. La démonstration est la même que dans les cas précédents.

Ainsi la proposition est établie, et le premier théorème d'Apollonius ou de Pappus est éclairci.

Il faut remarquer que les cas pour lesquels nous avons indiqué seulement des demi-cercles donnent en fait les cercles entiers; d'ailleurs les diverses situations des données engendrent des cas multiples qu'on pourra, à loisir, déduire facilement des précédents par des raisonnements immédiats.

Pappus ajoute que le lieu plan, sur lequel se trouve l'extrémité de la seconde droite, est *tantôt du même genre, tantôt d'un genre différent*. Ce qui est clair : par exemple, dans la proposition 1, il est du même genre; car, si la première droite se termine à une droite, la seconde se termine aussi à une droite; et de même un cercle conduit

à un cercle. Dans la première partie de la proposition 2, au contraire, et dans plusieurs autres cas, le lieu est d'un genre différent.

Pappus ajoute aussi que le lieu est *tantôt situé de même par rapport à la ligne droite, et tantôt de façon contraire*. Ces mots *par rapport à la ligne droite* n'offrent aucun sens et je pense qu'il faut les supprimer. J'explique ainsi ce passage : tantôt le second lieu est placé d'une manière contraire au premier; par exemple, si le premier est la partie convexe de la circonférence, le second sera la partie concave, etc. Des exemples de cette opposition sont donnés dans les propositions ci-dessus.

PROPOSITION II.

« *Si l'on donne une extrémité d'une ligne droite donnée de position, l'autre sera sur une circonférence concave donnée de position.* »

Avec une pareille leçon, la proposition est fausse; il faut, par exemple, aux mots *donnée de position*, substituer ceux-ci : *donnée de grandeur*, et le sens sera : *si l'on donne le diamètre et le centre d'un cercle, l'extrémité du diamètre sera sur un cercle donné de position*. Ce qui est évident de soi et ne mérite pas qu'on s'y arrête davantage.

PROPOSITION III.

« *Si, de deux points donnés, on mène deux droites qui se coupent sous un angle donné, leur point commun sera sur une circonférence concave donnée de position.* »

Cette proposition est évidente de soi, car le segment capable de l'angle donné et décrit sur la droite joignant les deux points est donné, comme l'a enseigné Euclide dans les *Éléments*.

PROPOSITION IV.

« *Si, d'un triangle d'aire donnée, on donne la base de grandeur et de position, le sommet sera sur une droite donnée de position.* »

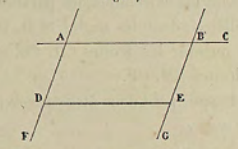
Cette droite sera une parallèle à la base; sa construction et tout le reste se tirent immédiatement du Livre I des *Éléments*.

PROPOSITION V.

« *Si une droite est donnée de grandeur et parallèle à une droite donnée de position, et qu'une de ses extrémités soit sur une droite donnée de position, l'autre extrémité sera aussi sur une droite donnée de position.* »

Soit DE (*fig.* 17) une droite donnée de grandeur et parallèle à la droite AC donnée de position. L'extrémité D est supposée sur une

Fig. 17.



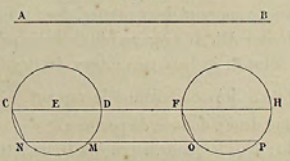
droite AF donnée de position. Si par E vous menez BEG parallèle à AF, elle résout la question.

En effet, toutes les droites, comprises entre ces deux parallèles et parallèles elles-mêmes à la droite AC donnée de position, sont égales entre elles; ce qui est clair d'après la construction même.

Si donc une extrémité de l'une d'elles est sur AF, l'autre sera sur BG, comme le veut la proposition. Il est facile de l'étendre à des cercles.

Soit en effet AB (*fig.* 18) une droite donnée de position, à laquelle

Fig. 18.



est parallèle NO donnée de grandeur. Soit le point N sur la circonfé-

rence du cercle CNM donné de position. Je dis que le point O est sur un cercle donné de position.

Soit E le centre du cercle CNM; je mène le diamètre parallèle à AB et je le prolonge jusqu'en F, en sorte que CF = NO, la droite donnée. La droite CF sera donnée de position et de grandeur; je la prolonge en faisant FH = CD. Le cercle décrit sur FH résout la question, car le point O sera sur sa circonférence.

En effet, soit le point O sur la circonférence du cercle FOP : les droites CN, FO, joignant les extrémités des parallèles égales CF, NO, seront égales et parallèles : donc les angles NCD, OFH seront égaux; mais il en est ainsi, puisque les droites CD, FH, égales entre elles, sont parallèles aux droites NM, OP.

La proposition de Pappus peut donc être conçue plus généralement comme suit :

Si une droite est donnée de grandeur et parallèle à une droite donnée de position, et qu'une de ses extrémités soit sur un lieu plan donné de position, l'autre extrémité sera aussi sur un lieu plan donné de position.

Proposition VI.

« *Si d'un point on mène, à deux droites parallèles ou concourantes données de position, deux droites sous des angles donnés, et dans un rapport donné ou bien dont l'une, plus une droite dans un rapport donné avec l'autre, fait une somme donnée, le point sera sur une droite donnée de position.* »

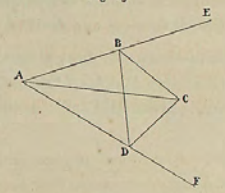
Cette proposition comprend deux parties, dont voici la *première :*

Soient deux droites AE, AF (*fig.* 19) données de position et se coupant en A. Du point C, je leur mène deux droites CB, CD sous les angles donnés CBA, CDA. Soit donné le rapport $\frac{BC}{CD}$. Je dis que le point C est sur une droite donnée de position.

Joignez AC, BD; dans le quadrilatère ABCD, on a trois angles donnés : ABC, ADC, BAD; l'angle BCD est donc donné. Le rapport $\frac{BC}{CD}$ est

aussi donné par hypothèse, donc le triangle BDC est donné d'espèce, donc les angles CBD, CDB, donc par différence les angles ABD, ADB. Donc le triangle ABD est donné d'espèce, donc le rapport $\frac{AB}{BD}$; mais $\frac{BD}{BC}$ l'est aussi (puisqu'il est prouvé que le triangle BDC est donné d'espèce), donc $\frac{AB}{BC}$ le sera. Mais BA est donnée de position, ainsi que le point A; donc AC est donnée de position, et si sur cette droite on

Fig. 19.

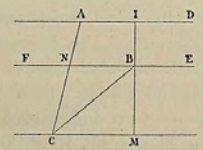


prend un point quelconque, et qu'on mène de ce point aux droites données des droites sous les angles donnés, on prouvera que les menées sont toujours dans le rapport donné.

Second cas, lorsque les droites données sont parallèles :

Soient les droites CA, CB (*fig.* 20), sous les angles donnés CAD, CBF, et dans le rapport donné. L'angle CNB est donné, comme égal,

Fig. 20.



à cause des parallèles, au donné CAD; donc le triangle CNB est donné d'espèce, donc le rapport $\frac{CN}{CB}$; mais, par hypothèse, $\frac{CB}{CA}$ est donné; donc

$\frac{CN}{CA}$ le sera, et il est dès lors facile de prouver que C est sur une droite donnée de position.

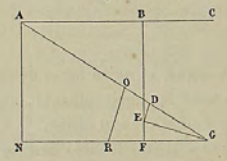
Construction : Par le point B quelconque, je mène la perpendiculaire IBM; IB est donné. Soit $\frac{AN}{NC} = \frac{IB}{BM}$. Par le point M je mène aux deux données une parallèle qui satisfera à la question, comme il est facile de le démontrer.

Si donc d'un point l'on mène, à deux droites parallèles ou concourantes données de position, des droites sous des angles donnés et dans un rapport donné, le point sera sur une droite donnée de position.

Voici maintenant la *seconde* partie de la proposition :

Soient données les droites AC, AG (*fig.* 21), concourant en A. Menez AN faisant avec la droite AC l'angle donné CAN, et égale à la

Fig. 21.



droite donnée. Menez NG parallèle à AC, et soit ROG l'autre angle donné. D'après la première partie de cette proposition, menez GE telle que si, d'un point quelconque E pris sur cette droite, on mène ED, EF parallèles à RO, AN, elles soient dans le rapport donné; GE sera donnée de position, d'après ce qui a été démontré. Prolongez FE jusqu'en B, FB sera donnée de grandeur, comme égale à la donnée AN, à cause des parallèles. Quel que soit donc le point E pris sur la droite GE, si l'on mène de ce point aux droites AC, AG les droites ED, EB sous les angles donnés, BE plus EF, à qui ED est dans le rapport donné, fait la somme donnée, comme le veut la proposition.

Si donc d'un point on mène, à deux droites concourantes données de position, deux droites sous des angles donnés et telles que l'une,

plus une droite dans un rapport donné avec l'autre, fasse une somme donnée, le point sera sur une droite donnée de position.

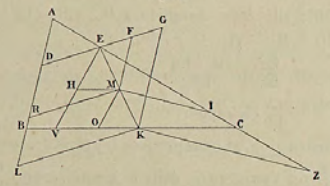
Proposition VII.

« *Soient en nombre quelconque des droites données de position, auxquelles on mène d'un point des lignes droites sous des angles donnés; si le produit d'une ligne donnée et d'une des menées, avec le produit de la ligne donnée et d'une autre menée, etc., est égal au produit d'une donnée et de la dernière des menées, le point sera sur une ligne droite donnée de position* (1). »

Cette proposition est une extension de la précédente; ce qui a été plus haut démontré pour deux lignes dans la première partie de la proposition VI est proposé ici comme ayant lieu pour un nombre quelconque.

Soient AB, BC, CA (*fig.* 22) trois droites données de position et formant un triangle; il faut trouver une droite, EK par exemple, sur

Fig. 22.



laquelle prenant un point quelconque M, et menant de ce point les droites MR, MO, MI, sous les angles donnés MRA, MOB, MIA, on ait $\frac{OM + MI}{MR}$ dans un rapport donné.

D'après la première partie de la proposition précédente, on trouvera une droite sur laquelle prenant un point quelconque et menant

(1) La traduction est accommodée au sens admis par Fermat (*voir* t. I, p. 24, note 1).

de ce point des droites sur AB, BC, les menées soient dans le rapport donné. Cette droite est donnée de position, donc le point où elle rencontre AC, soit E. Si l'on mène de ce point EV, ED, parallèles à MO et MR, d'après la construction, $\frac{VE}{ED}$ sera dans le rapport donné. Prenant ensuite les droites AC et AB, par le même procédé, on trouvera un point K, tel que les droites KL, KZ, issues de ce point et sous les angles donnés, c'est-à-dire parallèles à MR, MI, soient dans le rapport donné. On aura donc aussi $\frac{KZ}{KL}$ dans le rapport donné. Si l'on joint EK, un point quelconque pris sur cette droite satisfera à la question.

Soit pris M par exemple, pour profiter de la construction déjà faite; menez MF parallèle à BA, et MH parallèle à BC. Il faut prouver que $\frac{OM+MI}{MR}=\frac{VE}{ED}$, c'est-à-dire le rapport donné.

Menons encore KG parallèle à BA et supposons vrai ce que nous voulons prouver. Nous aurons *vicissim* $\frac{MR}{ED}=\frac{MI+MO}{EV}$; *dividendo :* $\frac{MR-DE}{DE}=\frac{MI+MO-EV}{EV}$. Mais MF étant parallèle à BA, on a EF = MR − DE; MH étant parallèle à BC, EH = EV − MO. Donc IM − EH = MO + MI − VE.

Par conséquent, $\frac{EF}{DE}=\frac{IM-EH}{EV}$, *vicissim :* $\frac{EF}{IM-EH}=\frac{ED}{EV}$, *convertendo :* $\frac{IM-EH}{EF}=\frac{EV}{ED}$, le rapport donné.

Mais par construction, si nous prenons les trois droites EH, EF, IM, on a $\frac{VE}{EH}=\frac{KE}{EM}$, et l'on a aussi dans le même rapport $\frac{KZ}{MI}=\frac{KE}{EM}$, et encore, puisque KG est parallèle à BA, $\frac{GE}{EF}=\frac{KE}{EM}$.

Par conséquent, les trois droites VE, KZ, EG sont proportionnelles aux trois HE, MI, EF; donc $\frac{KZ-EV}{EG}=\frac{MI-EH}{EF}$. Mais nous avons prouvé que $\frac{MI-EH}{EF}=\frac{EV}{ED}$, le rapport donné. Donc $\frac{KZ-EV}{EG}=\frac{EV}{ED}$, le rapport donné, et *vicissim :* $\frac{KZ-EV}{EV}=\frac{EG}{ED}$; *componendo :* $\frac{KZ}{EV}=\frac{GD}{ED}$.

Mais, à cause des parallèles KG, BA, on a KL = DG. Donc *vicissim :* $\frac{KZ}{KL}=\frac{EV}{ED}$, ce qui avait déjà été donné par la construction.

Ainsi est établie la vérité d'une très belle proposition. Il est facile, en procédant de même, d'étendre la construction et la démonstration aux cas suivants, pour un nombre quelconque de lignes. Car, de même que la construction pour deux lignes donne la solution du problème pour trois, la construction pour trois lignes donne la solution pour quatre, la construction pour quatre donne la solution pour cinq, et l'application de la méthode se poursuit toujours de même indéfiniment.

Proposition VIII et dernière.

« *Si d'un point on mène sous des angles donnés, à des parallèles données de position, des droites qui interceptent, à partir de points donnés sur les premières, des longueurs dans un rapport donné, ou produisant une aire donnée, ou dont la somme des carrés ou bien la différence des carrés soit égale à une aire donnée, le point sera sur des droites données de position.*

Si cette proposition était vraie, elle aurait quatre parties, mais nous n'avons trouvé qu'elle fût exacte que pour le *rapport donné*. Écartons donc le reste, pour l'aire produite par les deux droites, pour la somme ou la différence de leurs carrés, et rejetons-le comme faussement inventé ou transporté d'ailleurs.

Je propose donc comme suit le théorème corrigé :

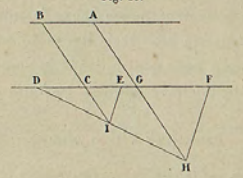
Si d'un point on mène sous des angles donnés, à des parallèles données de position, des droites qui interceptent, à partir de points donnés sur les premières, des longueurs dans un rapport donné, le point sera sur une ligne droite donnée de position.

Voici la construction :

Soient AB, GC (*fig.* 23) les parallèles données, A, F les points donnés sur ces droites, BAH l'un des angles donnés, GFH l'autre. Les points A et F étant donnés, avec les angles à ces sommets, les droites

AH, FH seront données de position, par suite leur point de rencontre H : donc le point G où AH coupe la parallèle GC. Partagez GF en D en sorte que $\frac{GD}{DF}$ soit dans le rapport donné ; D sera donné. Joignez DH, cette droite est donnée de position. Je dis que la droite DH satisfait

Fig. 23.



à la question, c'est-à-dire que si on prend sur elle un point quelconque I, qu'on mène de ce point IB, IE, sous les angles donnés, le rapport des abscisses à partir des points A et F, c'est-à-dire $\frac{AB}{EF}$, est égal au rapport donné, $\frac{GD}{DF}$.

Soit C le point de rencontre de BI et de la parallèle GF. Par construction, IB est parallèle à AH, comme menée sous l'angle donné égal à HAB. De même IE est parallèle à HF ; de plus, à cause des parallèles, $GC = AB$; il reste à prouver que $\frac{GC}{EF} = \frac{GD}{DF}$ ou *vicissim* $\frac{GC}{GD} = \frac{EF}{DF}$. Mais cela est évident, car d'une part $\frac{HI}{HD} = \frac{GC}{GD}$; de l'autre $\frac{HI}{HD} = \frac{EF}{FD}$. Donc $\frac{GC}{EF}$ est égal au rapport donné.

Il y a, tant pour cette proposition que pour les précédentes, de nombreux cas, qu'il est facile de trouver et d'ajouter ; pourquoi nous y arrêter plus longtemps?

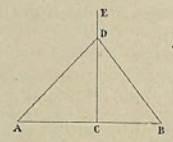
LIVRE II.

Proposition I.

« *Si des points donnés sont joints par des lignes droites à un même point, et que la différence des carrés de ces droites soit une aire donnée, le point de concours sera sur une droite donnée de position.* »

Soient A et B (*fig.* 24) les deux points donnés ; soit une aire donnée quelconque plus petite que $\overline{AB}^2$. Partagez AB en C, en sorte que

Fig. 24.



$AC^2 - CB^2$ soit égal à l'aire donnée ; élevez la perpendiculaire indéfinie CE. Prenez-en un point quelconque D. Joignez DA, BD. Je dis que $AD^2 - DB^2$ est égal à l'aire donnée.

C'est évident, puisque $AD^2 - DB^2 = AC^2 - CB^2$.

Si l'aire donnée était plus grande que AB^2, le point C tomberait en dehors de la droite AB.

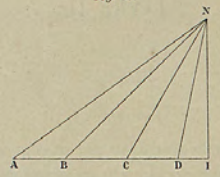
A cette proposition on peut rattacher les deux suivantes :

Soient donnés quatre points A, B, C, D (*fig.* 25) *en ligne droite, et soit* AB = CD. *Prenez un autre point quelconque* N ; *menez les quatre droites* NA, NB, NC, ND. *Je dis que*

$$AN^2 + ND^2 - (BN^2 + NC^2) = 2AB \times BD.$$

En effet, menons la perpendiculaire NI, et supposons d'abord que le point I tombe en dehors de la droite AD. Il est clair que, en raison de

Fig. 25.



NI^2 commun à tous les termes,

$$AN^2 + ND^2 - (BN^2 + NC^2) = AI^2 + ID^2 - (BI^2 + CI^2).$$

Mais (II, 4) (1) $AI^2 + DI^2 = 2DI^2 + AD^2 + 2AD \times DI$, et par le même théorème $BI^2 + CI^2 = 2DI^2 + BD^2 + CD^2 + 2BD \times DI + 2CD \times DI$.

Aux deux derniers termes de cette égalité, puisque $AB = CD$, on peut substituer $2AD \times DI$.

Donc

$$AI^2 + ID^2 - (BI^2 + CI)^2 = AD^2 - (BD^2 + CD^2) = AD^2 - (BD^2 + AB^2).$$

Mais (II, 4) (1) $AD^2 - (AB^2 + BD^2) = 2AB \times BD$.

La proposition est donc établie.

Je n'ajoute pas les autres cas pour cette proposition, ni pour les suivantes, car ce serait aussi fastidieux que facile.

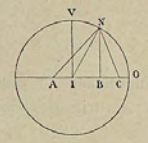
Si l'on joint un point à trois autres donnés en ligne droite, et que la somme des carrés de deux droites ainsi menées surpasse le carré de la troisième d'une aire donnée, le point sera sur une circonférence donnée de position.

Soient A, B, C (*fig.* 26) les trois points donnés en ligne droite. Soit donnée une aire supérieure à $2AB \times BC$. Prenez $AI = BC$, et soit l'aire donnée égale à $2AB \times BC + IV^2$. De I comme centre, avec IV pour

(1) Renvoi aux *Éléments* d'Euclide.

rayon, décrivez le cercle VNO. Soit un point N quelconque sur sa circonférence; joignez-le aux points donnés, par les droites NA, NB, NC. Je dis que $AN^2 + NC^2 - NB^2$ est égal à l'aire donnée.

Fig. 26.



En effet, joignez IN; d'après la proposition précédente :

$$AN^2 + NC^2 = IN^2 + BN^2 + 2AB \times BC.$$

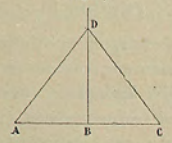
Donc $AN^2 + NC^2 - NB^2 = IN^2 + 2AB \times BC$ et la proposition est établie.

Proposition II.

« *Si l'on joint un point à deux autres donnés et que les droites ainsi menées soient dans un rapport donné, le premier point sera, soit sur une droite, soit sur une circonférence.* »

Soient donnés les deux points A, C (*fig.* 27), et supposons d'abord le rapport d'égalité. Prenez en B le milieu de AC; élevez BD perpen-

Fig. 27.



diculaire; il est clair que, si l'on en prend un point quelconque D, on aura $AD = DC$.

Supposons maintenant un rapport d'inégalité; soient A, B (*fig.* 28) les deux points donnés, $\frac{R}{S}$ le rapport donné. Soit $\frac{R^2}{S^2} = \frac{AN}{NB}$. Entre AN

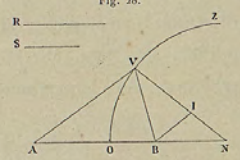
et NB prenez la moyenne proportionnelle NO, et avec ce rayon décrivez le cercle OVZ. Soit un point quelconque V sur la circonférence ; joignez VA, BV. Je dis que ces droites sont dans le rapport $\frac{R}{S}$.

En effet, joignons VN, et menons BI parallèle à VA. On a

$$\frac{AN}{NO(=NV)} = \frac{NV}{NB}.$$

Ce sont les côtés qui comprennent un même angle ANV dans les deux triangles ANV, BVN; ces triangles sont donc semblables et les

Fig. 28.



angles VAB, BVI égaux. Mais AVB, VBI le sont à cause des parallèles; donc les triangles AVB, VBI sont semblables et $\frac{AV}{VB} = \frac{VB}{BI}$ avec $\frac{VB}{BI} = \frac{NV}{NB} = \frac{AN}{NV}$. Donc $\frac{VB^2}{BI^2}\left(= \frac{AN}{NB} = \frac{R^2}{S^2}\right) = \frac{AV^2}{VB^2}$. Donc $\frac{AV}{VB} = \frac{R}{S}$, et la proposition est établie.

Proposition III.

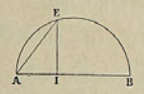
« *Si une droite est donnée de position en même temps qu'un point sur elle, si de ce point l'on mène une droite limitée, que de l'extrémité de celle-ci on abaisse une perpendiculaire sur la ligne donnée de position, et que le carré de la menée soit égal au produit d'une donnée et de l'abscisse à partir soit du point donné, soit d'un autre donné sur la ligne donnée de position, l'extrémité de la menée sera sur une circonférence donnée de position.* »

Soit AB (*fig.* 29) la droite donnée de position, A le point donné sur elle. Il faut trouver une circonférence de cercle telle que, si l'on prend

sur elle un point quelconque E, et qu'on abaisse la perpendiculaire EI, AE^2 soit égal au produit d'une donnée et de AI (c'est ainsi qu'on doit ici entendre *l'abscisse à partir du point donné*).

Soit AB la longueur donnée; sur AB je décris un demi-cercle; il est clair d'après la construction que $AB \times AI = AE^2$.

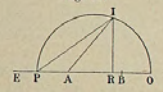
Fig. 29.



Il y a plus de difficulté pour le second cas, à savoir quand l'abscisse part d'un autre point que A, comme dans l'exemple suivant :

Soient donnés les deux points A, B (*fig.* 30), et en outre un point E sur la même ligne droite. Soit AB la longueur donnée. Il faut trouver

Fig. 30.



une circonférence de cercle, soit PIO, telle que si d'un point quelconque I de cette circonférence l'on abaisse la perpendiculaire IR, $AI^2 = AB \times ER$, AB étant la donnée.

Appliquons $BA \times AE$ sur la droite BA en excès d'un carré : soit la largeur $AP = BO$ (1). Le demi-cercle décrit sur PO satisfera à la question.

En effet, $AI^2 = AR^2 + RI^2$. Mais $RI^2 = PR \times RO$ et, comme on le prouvera tout à l'heure,

$$PR \times RO = AR \times RB + OA \times AP\ (= BP \times PA = BA \times AE).$$

Donc $AI^2 = AR^2 + AR \times RB + BA \times AE$, ou puisque

$$AR^2 + AR \times RB = BA \times AR, \qquad AI^2 = BA \times AR + AB \times AE,$$

(1) C'est-à-dire construisons AP d'après la condition : $AB \times AP + AP^2 = BA \times AE$.

soit, réduisant encore ces deux rectangles en un seul, $AI^2 = BA \times ER$.

Il reste à prouver que $PR \times RO = AR \times RB + PB \times BO$.

En effet, en multipliant entre elles les parties :

$$PR \times RO = PA \times RB + PA \times BO (= BO^2) + AR \times RB + AR \times BO (= PA \times AR).$$

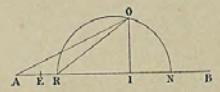
Mais $PA \times AR + PA \times RB = PA \times AB = AB \times BO$. Ajoutant BO^2, on a $AO \times OB$, c'est-à-dire $PB \times BO$. Donc

$$PR \times RO = AR \times RB + PB \times BO. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

Je ne poursuis pas les différents cas, désormais rendus très faciles. Cependant je ne crois pas devoir omettre celui où le point E ne se trouve pas au delà de A, comme ci-dessus.

Soient donnés les deux points A et E (*fig.* 31), et la droite AB; il faut trouver une circonférence de cercle comme NOR, telle qu'en pre-

Fig. 31.



nant sur elle un point quelconque O, et abaissant la perpendiculaire OI, $AO^2 = BA \times EI$.

Appliquons $BA \times AE$ sur la droite BA, en défaut d'une figure carrée (1). Nous aurons le point R; soit $BN = AR$. Le demi-cercle décrit sur RN satisfera à la question. La démonstration sera semblable à celle que nous avons donnée pour le premier cas.

Proposition IV.

« *Si de deux points donnés on mène des droites à un point, et que le carré de l'une soit d'une aire donnée plus grand que dans un rapport donné avec le carré de l'autre, le point d'intersection sera sur une circonférence donnée.* »

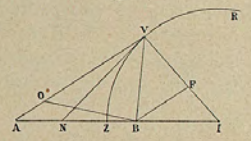
(1) C'est-à-dire construisons AR par la condition : $AB \times AR - \overline{AR}^2 = BA \times AE$.

Soient A, B (*fig.* 32) les deux points, $\frac{AI}{IB}$ le rapport donné, $BA \times AN$ l'aire donnée. Soit IZ moyenne proportionnelle entre NI et IB; avec ce rayon décrivez le cercle ZVR, prenez-en un point quelconque V, joignez VA, VB. Je dis que $AV^2 - \frac{IA}{BI} \times VB^2 = BA \times AN$ (rapport et aire donnés).

Soit en effet $VA \times AO = BA \times AN$; joignez OB, NV, VI et menez BF parallèle à AN. Il faut prouver que $\frac{AV \times VO}{VB^2} = \frac{AI}{IB}$.

Or $\frac{NI}{IZ(=VI)} = \frac{VI}{IB}$; ce sont les côtés d'un même angle dans les triangles NIV, VBI, qui sont donc semblables; donc les angles VNB, BVF

Fig. 32.



sont égaux. Mais les angles VNB, VOB le sont comme inscrits dans le même segment (car puisque $BA \times AN = VA \times AO$, les quatre points N, B, V, O sont sur un cercle); donc les angles VOB, BVF sont égaux. Mais les angles OVB, VBF le sont aussi à cause des parallèles. Donc les triangles OBV, VBF sont semblables. Donc $\frac{OV}{VB} = \frac{VB}{BF}$: multipliant de part et d'autre par le rapport $\frac{AV}{VB}$, on a

$$\frac{AV}{VB} \times \frac{VB}{BF} \quad \text{ou} \quad \frac{AV}{BF} \quad \text{ou} \quad \frac{AI}{IB} = \frac{AV}{VB} \times \frac{OV}{VB} = \frac{AV \times VO}{VB^2} \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

Pappus paraît avoir omis ici la proposition suivante qui est analogue :

Si de deux points donnés on mène des droites à un point, et que le carré de l'une soit d'une aire donnée plus petit que dans un rapport donné avec

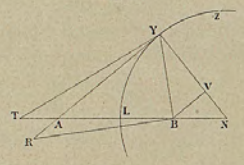
le carré de l'autre, le point d'intersection sera sur une circonférence donnée.

Soient donnés les deux points A et B (*fig.* 33), le rapport $\frac{AN}{BN}$, l'aire $BA \times AT$. Soit, entre TN, NB, la moyenne proportionnelle NL; avec ce rayon, décrivez la circonférence de cercle LYZ; prenez sur elle un point quelconque Y, joignez YA, YB. Je dis que

$$\frac{YA^2 + BA \times AT(\text{donné})}{YB^2} = \frac{AN}{NB}.$$

Soit en effet $YA \times AR = BA \times AT$; joignez TY, RB, YN; menez BV

Fig. 33.



parallèle à AY; comme suite de l'égalité $YA \times AR = BA \times AT$, on prouvera que les angles YTB, YRB sont égaux et on achèvera comme ci-dessus.

PROPOSITION V.

« *Si de points donnés en nombre quelconque on mène des droites à un même point et que la somme des carrés de toutes ces droites soit égale à une aire donnée, le point sera sur une circonférence donnée de position.* »

Soient d'abord deux points A, B (*fig.* 34); menez la droite AB, prenez son milieu en E; de E comme centre, avec un rayon quelconque EI, décrivez le cercle ION. Je dis que, quelque point O que l'on prenne sur la circonférence : $AO^2 + OB^2 = 2(IE^2 + AE^2)$.

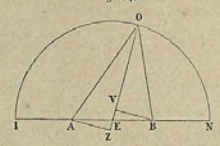
En effet, joignez EO, abaissez sur elle les perpendiculaires BV, AZ. Dans le triangle AEO, $AO^2 = AE^2 + EO^2 + 2OE \times EZ$. Dans le triangle

OEB, $OE^2 + EB^2 = OB^2 + 2OE \times EV (= 2OE \times EZ)$, car EV = EZ, puisque AE = EB.

Ajoutant membre à membre :

$$AO^2 + OB^2 + 2OE \times EZ = (AE^2 + EB^2)(= 2EA^2) + 2EO^2 (= 2IE^2) + 2OE \times EZ.$$

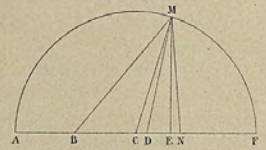
Fig. 34.



Retranchant de part et d'autre $2OE \times EZ$, il reste l'égalité annoncée, et la proposition est établie pour le premier cas.

Soient donnés en ligne droite trois points B, D, E (*fig.* 35) et soit $BD > DE$. Prenez $CD = \frac{1}{3}(BD - DE)$. De C comme centre avec un

Fig. 35.



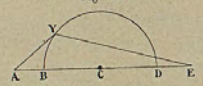
rayon quelconque CA, décrivez le demi-cercle AMF, je dis que, quelque point M que l'on prenne sur sa circonférence, $MB^2 + MD^2 + ME^2$ sera une somme constante.

En effet, joignez MB, MC, MD, ME; prenez EN = CD et joignez MN. Puisque $BD - DE = 3CD = 3EN$, on a $DN + 2CD = BD$ ou $CN + CD = BD$. Retranchez CD de part et d'autre : CN = BC. Puisque, d'autre part, CD = EN, d'après la seconde proposition de ce livre, $CM^2 + MN^2 - (DM^2 + ME^2)$ est constant. Mais CM^2 est constant. Donc $DM^2 + ME^2$ fera une somme égale à MN^2 ou plus grande ou plus petite

d'une quantité constante. Ajoutez de part et d'autre MB^2; d'une part, $MB^2 + MD^2 + ME^2$, de l'autre $BM^2 + MN^2$ feront des sommes égales ou différentes d'une quantité constante soit dans un sens soit dans l'autre. Mais, d'après la proposition précédente, $BM^2 + MN^2$ est constant, puisque $BC = CN$, donc $BM^2 + DM^2 + EM^2$ est constant. C. Q. F. D.

Démonstration générale de la même proposition. — Soient d'abord deux points A, E (*fig.* 36); joignez AE, prenez son milieu en C. Soit donnée une aire Z qui ne devra pas être plus petite que $AC^2 + CE^2$; car si elle est égale à cette somme, il est clair que le point C seul satisfait à la question, et qu'il n'y en aura pas d'autre tel que la somme des carrés des droites le joignant aux points A, E soit égale à Z.

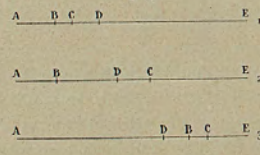
Fig. 36.



Si $Z > AC^2 + CE^2$, soit BC^2 égal à la moitié de la différence; de C comme centre, avec CB comme rayon, je décris un cercle qui satisfait à la question. J'omets la démonstration qui est trop simple et a été donnée par Pappus et autres. Il ne faut pas s'arrêter trop longtemps aux choses faciles.

Lemme pour la méthode générale. — Soient (*fig.* 37) des points donnés

Fig. 37.



A, B, C, E en nombre quelconque. Prenons une fraction AD de la somme des droites terminées d'une part au point A, de l'autre aux

autres points donnés, fraction conditionnée par le nombre des points, à savoir le quart dans l'exemple choisi. Soit donc

$$AD = \tfrac{1}{4}(AB + AC + AE).$$

La position du point D varie suivant les cas. *Je dis que la somme des droites terminées par le point* D *et par les points donnés du côté du point* A *sera égale à la somme des droites terminées par le point* D *et par les points donnés du côté du point* E. C'est-à-dire que l'on aura

Dans la 1re figure : $ED = AD + BD + CD$.
Dans la 2e figure : $ED + CD = BD + AD$.
Dans la 3e figure : $ED + CD + BD = AD$.

D'abord dans la 3e figure, par hypothèse, $4AD = AB + AC + AE$; retranchez de part et d'autre $3AD$, il restera d'un côté AD; de l'autre, retrancher $3AD$ de $AB + AC + AE$ est la même chose que de retrancher AD de chacune des droites AB, AC, AE : il restera donc

$$BD + CD + ED = AD.$$ C. Q. F. D.

Si l'on avait donné cinq points, on aurait d'un côté $5AD$, de l'autre 4 droites terminées à A et aux points donnés, etc.; la méthode est toujours la même et s'applique indéfiniment.

Dans la 2e figure, $4AD = AB + AC + AE$; retranchez de part et d'autre $3AD$ et ajoutez BD, vous aurez $AD + BD = ED + CD$.

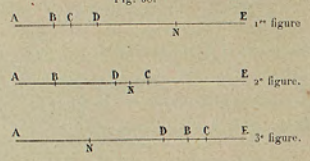
Dans la 1re figure, $4AD = AB + AC + AE$; ajoutez de part et d'autre $BD + CD$ et retranchez $3AD$; vous aurez $AD + BD + CD = DE$.

La méthode est la même pour un nombre quelconque de points jusqu'à l'infini, et la même conclusion sera tirée de quelque manière que l'on fasse varier les cas.

Second lemme. — Soit faite sur la 1re figure (*fig.* 38) la construction précédente; je prends sur la même droite un point N quelconque. *Je dis que la somme des carrés des droites terminées par les points donnés et par* N *dépasse la somme des carrés des droites terminées par les points donnés et par le point* D, *du carré* DN *pris autant de fois qu'il y a de*

points donnés, soit 4 dans l'exemple choisi. Les 2e et 3e figures représentent des cas différents.

Fig. 38.



Sur la première figure, en comparant chaque carré à chaque autre, on a

$$AN^2+BN^2+CN^2-(AD^2+BD^2+CD^2)$$
$$=3DN^2+2AD.DN+2BD.DN+2CD.DN$$

ou

$$AN^2+BN^2+CN^2=AD^2+BD^2+CD^2+3DN^2$$
$$+2AD.DN+2BD.DN+2CD.DN;$$

cela ressort évidemment de la formation du carré du binome avec le signe +.

D'autre part :

$$EN^2=ED^2+ND^2-2ED.DN,$$

ce qui ressort de la formation du carré du binome avec le signe −.

Par conséquent

$$AN^2+BN^2+CN^2+EN^2=AD^2+BD^2+CD^2+ED^2+4DN^2$$
$$+2AD.DN+2BD.DN+2CD.DN-2ED.DN.$$

Si donc nous prouvons que la somme des rectangles en plus est égale à celle des rectangles en moins, la vérité de la proposition sera établie, à savoir que :

$$AN^2+BN^2+CN^2+EN^2-(AD^2+BD^2+CD^2+ED^2)=4DN^2.$$

Il faut donc prouver que $2ED.DN=2AD.DN+2BD.DN+2CD.DN$, ou, en divisant tous les termes par $2DN$, que l'on a l'égalité

$$ED=AD+BD+CD.$$

Or c'est ce qui a été démontré par le lemme précédent.

Je ne m'arrête pas aux divers cas. — Si l'on donne cinq points, la somme des carrés des distances des points donnés au point N dépasse de $5DN^2$ la somme des carrés des distances des points donnés au point D : la démonstration est la même.

Il ressort de là que la somme des carrés des distances au point D est minima.

Dans cet exposé, je n'ajoute pas une trop scrupuleuse observation des différents cas. La conclusion du second lemme se ramènera toujours à prouver que la somme des rectangles en plus est égale à celle des rectangles en moins, et la question sera ainsi ramenée au premier lemme.

Première proposition générale. — Soient, sur la même figure, toujours donnés quatre points A, B, C, E sur la droite AE, et

$$AD=\tfrac{1}{4}(AB+AC+AE),$$

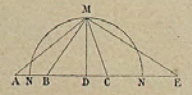
fraction conditionnée. On propose, étant donnée une aire Z, de *trouver un cercle, tel qu'en prenant sur la circonférence un point quelconque, la somme des carrés de ses distances aux points donnés soit égale à l'aire donnée.*

Pour que le problème soit possible, il faut, d'après ce qui a été démontré, que l'aire $Z>AD^2+BD^2+CD^2+ED^2$.

Soit donc $4DN^2$ égal à l'excès de Z sur la somme des quatre carrés; le cercle décrit de D comme centre avec DN pour rayon satisfera à la question.

En effet, prenons d'abord le point N (*fig.* 39) de l'un et de l'autre

Fig. 39.



côté. Il a été prouvé par le second lemme que

$$AN^2+NB^2+CN^2+EN^2=AD^2+BD^2+CD^2+ED^2+4DN^2;$$

mais $AD^2 + BD^2 + CD^2 + ED^2 + 4DN^2 = Z$. Donc

$$AN^2 + BN^2 + CN^2 + EN^2 = Z \text{ l'aire donnée.}$$ C. Q. F. D.

Élevez maintenant la perpendiculaire DM et joignez AM, BM, CM, EM. Je dis que la somme de leurs carrés est égale à l'aire donnée Z.

En effet

$$AM^2 = AD^2 + DM^2,$$
$$BM^2 = BD^2 + DM^2,$$
$$CM^2 = CD^2 + DM^2,$$
$$EM^2 = ED^2 + DM^2.$$

Donc

$$AM^2 + BM^2 + CM^2 + EM^2 = AD^2 + BD^2 + CD^2 + ED^2 + 4DM^2 (= 4DN^2).$$

Mais $AD^2 + BD^2 + CD^2 + ED^2 + 4DN^2 = Z$ (l'aire donnée). Donc $AM^2 + BM^2 + CM^2 + EM^2 =$ l'aire donnée. C. Q. F. D.

Menons maintenant le point M (*fig.* 40) quelconque, et abaissons

Fig. 40.

la perpendiculaire MO. On prouvera de même que

$$AM^2 + BM^2 + CM^2 + EM^2 = 4OM^2 + AO^2 + BO^2 + CO^2 + EO^2.$$

D'après le second lemme, la somme de ces quatre derniers carrés est égale à la somme $AD^2 + BD^2 + CD^2 + ED^2 + 4OD^2$. Donc

$$AM^2 + BM^2 + CM^2 + EM^2 = AD^2 + BD^2 + CD^2 + ED^2 + 4OD^2 + 4OM^2.$$

Mais $4OD^2 + 4OM^2 = 4DM^2 = 4DN^2$, les rayons DM et DN étant égaux. Donc

$$AM^2 + BM^2 + CM^2 + EM^2$$
$$= AD^2 + BD^2 + CD^2 + ED^2 + 4DN^2 = Z \text{ (l'aire donnée).}$$ C. Q. F. D.

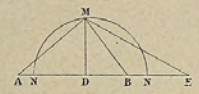
Si l'on achève les cercles, la même démonstration s'appliquera pour

les autres demi-cercles, et elle s'étendra à un nombre de points quelconques avec la même facilité de raisonnement; car les carrés DM^2, DN^2, DO^2 sont toujours pris autant de fois qu'il y a de points et la conclusion est toujours juste.

D'où suit un corollaire qui servira pour la proposition suivante :

Soient des points donnés en nombre quelconque, par exemple trois, A, B, E (*fig.* 41); trouver un cercle NM, tel qu'en prenant un point

Fig. 41.

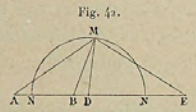


quelconque M sur ce cercle, et joignant AM, BM, EM, on ait par exemple $2AM^2 + BM^2 + EM^2$ égal à une aire donnée.

Dans ce cas, on construira $AD = \frac{1}{4}(AB + AE)$, car le point A joue ici le rôle de deux points et c'est comme si l'on disait : étant donnés quatre points A, A, B, E, trouver un cercle NM, tel qu'en prenant sur ce cercle un point quelconque M on ait $AM^2 + AM^2 + BM^2 + EM^2$ égal à une aire donnée.

Il faut entendre ceci de même de tout autre point et de tout autre rapport de multiplicité. — Soit par exemple proposé (*fig.* 42)

Fig. 42.



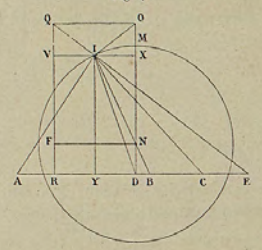
$AM^2 + 2BM^2 + EM^2$ égal à une aire donnée; on prendra

$$AD = \frac{1}{4}(2AB + AE).$$

Il fallait faire cette remarque, mais elle n'a pas besoin d'une plus longue explication.

Seconde proposition. — Soient sur la droite AE (*fig.* 43) des points donnés en nombre quelconque, quatre par exemple, A, B, C, E, et un point Q en dehors de la droite AE; on cherche un cercle, comme MI, tel qu'en prenant sur ce cercle un point quelconque I, on ait $AI^2 + BI^2 + CI^2 + EI^2 + QI^2$ égal à une aire donnée.

Fig. 43.



Abaissez sur la droite AE la perpendiculaire QR et prenez AD, fraction conditionnée de la somme AR + AB + AC + AE (le cinquième dans ce cas où l'on donne cinq points). Élevez la perpendiculaire DO et abaissez sur elle la perpendiculaire QO. Prenez RF = DN, fraction conditionnée (ici le cinquième) de la droite QR, et soit l'espace donné égal à la somme $AD^2 + RD^2 + BD^2 + CD^2 + ED^2 + Z$.

Faisons $Z = 4DN^2 + ON^2 + 5NM^2$ (4 étant le nombre des points donnés sur la droite AE, et 5 le nombre total des points donnés). Je dis que le cercle décrit de N comme centre, avec NM comme rayon, satisfait à la question.

En effet, prenez sur ce cercle un point quelconque I, joignez AI, BI, CI, EI, QI. Menez VIX parallèle à AE et IY parallèle à OD; il est clair, d'après le corollaire de la proposition précédente, que $4DI^2 + OI^2 = Z$, car le point D joue le rôle de quatre points; et puisque $DN = \frac{1}{5}OD$, il est évident que $4DI^2 + OI^2 = 4DN^2 + ON^2 + 5NM^2$. Mais $4DN^2 + ON^2 + 5NM^2 = Z$ par construction. Donc $4DI^2 + OI^2 = Z$.

Mais $4DI^2 = 4DX^2 + 4XI^2$ et $OI^2 = OX^2 + XI^2$. Donc

$$Z = 4DX^2 (= 4IY^2) + XO^2 (= VQ^2) + 5XI^2.$$

Ajoutez de part et d'autre $AD^2 + RD^2 + BD^2 + CD^2 + ED^2$, vous aurez, dans le premier membre, l'espace donné, car, par hypothèse, il est égal à la somme de ces cinq carrés et de Z; dans le second membre : $AI^2 + BI^2 + CI^2 + EI^2 + QI^2$, somme qui sera donc égale à l'espace donné.

En effet, d'après le second lemme :

$$AD^2 + RD^2 + BD^2 + CD^2 + ED^2 + 5DY^2 = AY^2 + RY^2 + BY^2 + CY^2 + EY^2;$$

donc

$$AD^2 + RD^2 + BD^2 + CD^2 + ED^2 + 4IY^2 + VQ^2 + 5DY^2 = AY^2 + RY^2 + BY^2 + CY^2 + EY^2 + 4IY^2 + VQ^2.$$

Si, à chacun des carrés AY^2, BY^2, CY^2, EY^2, on ajoute IY^2, on aura

$$AI^2 + BI^2 + CI^2 + EI^2 = AY^2 + BY^2 + CY^2 + EY^2 + 4IY^2.$$

Donc

$$AD^2 + RD^2 + BD^2 + CD^2 + ED^2 + 4IY^2 + VQ^2 + 5DY^2 = AI^2 + BI^2 + CI^2 + IE^2 + RY^2 + VQ^2.$$

Mais $RY^2 (= VI^2) + QV^2 = QI^2$. Donc

$$AD^2 + RD^2 + BD^2 + CD^2 + ED^2 + 4IY^2 + VQ^2 + 5DY^2 = AI^2 + BI^2 + CI^2 + EI^2 + QI^2.$$

Mais on a prouvé que le premier membre est égal à l'aire donnée; donc

$$AI^2 + BI^2 + CI^2 + EI^2 + QI^2 = \text{l'aire donnée.}$$ C. Q. F. D.

On en déduira facilement que l'aire donnée est égale à

$$AN^2 + BN^2 + CN^2 + EN^2 + QN^2 + 5NM^2,$$

ce que nous avons omis comme évident.

Bien plus le même artifice peut s'appliquer à un nombre quelconque de points.

Si par exemple on donne deux points Q, L (*fig.* 44) en dehors de la ligne, la construction s'achèvera comme on le voit, en prenant

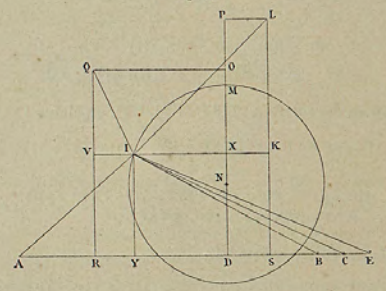
$$AD = \tfrac{1}{6}(AR + AS + AB + AC + AE), \quad \text{puis} \quad DN = \tfrac{1}{6}(QR + LS),$$

et en faisant

$$\text{l'aire donnée} = AD^2 + RD^2 + SD^2 + BD^2 + CD^2 + ED^2 + 4DN^2 + NO^2 + NP^2 + 6NM^2.$$

On terminera de la même manière, le point D jouant toujours le rôle

Fig. 44.



de tous les points donnés sur la droite AE, et les points P, O jouant le rôle des points Q, L.

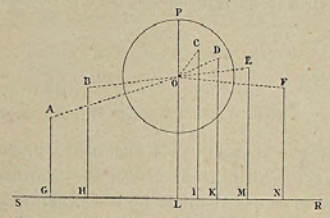
La méthode de construction et de démonstration est indéfiniment la même.

Mais, comme des cas multiples découlent de la différente position de la droite prise et passant par deux ou plusieurs points, mais pouvant laisser les autres dans diverses positions de chacun de ses côtés, quoique pour chaque cas il y ait des abréviations spéciales, je préfère, comme spécimen du procédé, montrer plus généralement la construction.

Soient des points donnés en nombre quelconque A, B, C, D, E, F

(*fig.* 45) sur la même droite ou sur des droites différentes. Prenez dans le même plan une droite quelconque SR, qui laisse tous les points

Fig. 45.



donnés du même côté; abaissez les perpendiculaires AG, BH, CI, DK, EM, FN, prenez GL fraction conditionnée (dans ce cas, $\frac{1}{6}$) de

$$GH + GI + GK + GM + GN;$$

élevez la perpendiculaire LO, et prenez LO fraction conditionnée (ici $\frac{1}{6}$) de $AG + BH + CI + KD + EM + FN$.

Soit l'aire donnée égale à

$$AO^2 + BO^2 + CO^2 + DO^2 + EO^2 + FO^2 + 6OP^2;$$

le carré décrit de O comme centre, avec OP pour rayon, satisfera à la question; la démonstration est facile pour qui a étudié ce qui précède.

PROPOSITION VI.

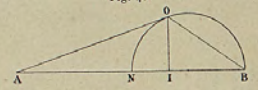
« *Si, de deux points donnés, on mène deux droites qui se coupent, et de leur rencontre une droite interceptant une abscisse à partir d'un point donné sur une droite donnée de position, si la somme des carrés des premières menées est égale au produit d'une donnée et de l'abscisse, le point de rencontre sera sur une circonférence donnée de position.* »

Je donne la proposition comme on la trouve dans Pappus d'après la version de Fédéric Commandin, mais je ne doute pas qu'il n'y ait une

faute, soit dans le texte grec, soit dans la traduction. Voici le sens de la proposition :

Soient deux points A, B (*fig.* 46); il faut trouver une circonférence comme NOB, sur laquelle on prendra un point quelconque O; en joi-

Fig. 46.



gnant OA, OB et en abaissant la perpendiculaire OI, on devra avoir l'égalité entre le produit de AI par une donnée et la somme AO^2+OB^2.

Supposons d'abord que AB soit la droite donnée, cas assez simple.

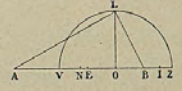
Prenez $BN=\frac{1}{2}AB$, et décrivez sur BN un demi-cercle; il résoudra le problème, c'est-à-dire que si on y prend, par exemple, le point O, on aura $BA\times AI=AO^2+OB^2$.

En effet, $AO^2=AI^2+IO^2$. Si donc de $BA\times AI$ on retranche $AI^2+IO^2(=BI.IN)$, il reste $BI\times AN$ ou $BI\times NB$ à prouver égal à OB^2, ce qui est évident d'après la construction.

Second cas : la droite donnée est plus grande que AB, mais plus petite que 2AB. Nous allons donner la construction :

Soient donnés les deux points A et B (*fig.* 47) et la droite $AI<2AB$, par hypothèse; il faut résoudre le problème proposé.

Fig. 47.



Prenez en N le milieu de AB : soit $NE=\frac{BI}{2}$ (E restera compris entre A et B). Appliquez sur la droite BE le rectangle IB.BN en excédent d'une figure carrée (¹); soit trouvée la largeur EV, prenez BZ=EV, et sur VZ décrivez le demi-cercle VLZ, je dis qu'il résout le problème.

(¹) C'est-à-dire : construisez EV d'après la condition $IB.BN=BE.EV+EV^2$.

En effet, joignez LA, LB et abaissez la perpendiculaire LO que nous supposerons, comme premier cas, tomber entre E et B. Il est clair, d'après la démonstration de la proposition III d'Apollonius [dans ce même Livre], que $EO.OB+VE.EZ(=NB.BI)=OL^2$.

Ajoutez de part et d'autre OB^2, il vient

$$EB.BO+NB.BI=OL^2+OB^2.$$

Doublez : $2EB.BO+2NB.BI(=AB.BI)=2(LO^2+OB^2)$. Ajoutez de part et d'autre 2NE.OB, il vient

$$(2EB.BO+2NE.OB)(=AB.BO)+AB.BI$$
$$=2(LO^2+OB^2)+2NE.OB(=IB.BO),$$

d'après la construction.

Retranchant de part et d'autre OB^2, il reste

$$AO.OB+AB.BI=2LO^2+OB^2+IB.BO.$$

Retranchant de part et d'autre IB.BO, c'est-à-dire dans le premier membre de AB.BI, il reste AO.OB + AO.BI ou en tout

$$IO.OA=2LO^2+OB^2.$$

Ajoutez AO^2 de part et d'autre :

$$IA.AO=AO^2+OB^2+2LO^2=AL^2+LB^2.$$ C. Q. F. D.

Je passe les autres cas.

Proposition VII.

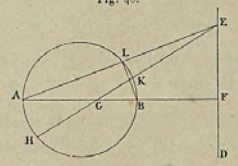
« *Si, à l'intérieur d'un cercle donné de position, on a un point donné, par lequel on mène une droite; si l'on prend sur cette droite un point extérieur, et que le carré de la menée jusqu'au point donné à l'intérieur soit égal au produit de la droite totale et de sa partie extérieure, seul ou augmenté du produit des deux segments intérieurs au cercle, le point pris à l'extérieur sera sur une droite donnée de position.* »

Cette proposition comprend deux parties : la première est dans Pappus (Livre VII, prop. 159); la seconde se déduit facilement de la

première en ajoutant des termes égaux. Je donnerai seulement la démonstration de Pappus.

Soit un cercle de diamètre AB (*fig.* 48); prolongez AB jusqu'à une droite quelconque DE qui lui soit perpendiculaire.

Fig. 48.



Soit $AF.FB = FG^2$. Je dis que, quel que soit le point E, si on le joint à G par une droite prolongée jusqu'en H, on aura $HE.EK = EG^2$.

Joignez AE, BL, l'angle en L est droit comme celui en F. Donc $AE.EL = AF.FB + FE^2$.

En effet $\widehat{ALB}$, comme droit, est égal au droit $\widehat{AFE}$; donc les quatre points L, B, F, E sont sur une circonférence; donc $FA.AB = EA.AL$. Mais $AE^2 = AF^2 + FE^2$, et aussi $AE^2 = AE.EL + EA.AL$; de même $AF^2 = AF.FB + FA.AB$. Donc $AE.EL + EA.AL = AF.FB + FA.AB + FE^2$. Mais comme $EA.AL = FA.AB$, il reste $AE.EL = AF.FB + FE^2$. Mais $AE.EL = HE.EK$ et $AF.FB = FG^2$. Donc $HE.EK = EF^2 + FG^2 = EG^2$.

PROPOSITION VIII ET DERNIÈRE.

« *Et si le même point est sur une droite donnée de position, et que le cercle ne soit pas dans les positions, les points des deux côtés du point donné seront sur une circonférence donnée de position.* »

Cette proposition est réciproque de la précédente, et la démonstration peut en être facilement déduite en suivant une marche inverse.

Je n'ajoute pas la distinction des différents cas ni les conditions de limites pour les données; tout cela ressort assez clairement de la construction et de la démonstration.

DES CONTACTS SPHÉRIQUES.

La théorie des contacts d'Apollonius de Perge a été élégamment restituée par l'Apollonius Gallus, masque sous lequel se cachait ce François Viète de Fontenay dont les admirables travaux en Mathématiques ont fourni de si heureux suppléments à la Géométrie ancienne. Mais cette théorie des contacts a jusqu'à présent été bornée aux plans, et personne, que je sache, ne l'a poussée plus loin et ne s'est hasardé à l'élever aux problèmes sphériques.

On va voir qu'on arrive dans cette voie à de brillants problèmes et qu'on peut facilement obtenir une élégante construction pour les questions les plus ardues.

Il s'agit en général de chercher une sphère passant par des points donnés ou touchant des sphères et des plans donnés. Tout le sujet sera épuisé en quinze problèmes.

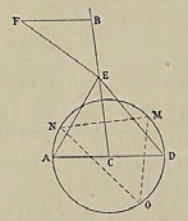
PROBLÈME I.

Étant donnés quatre points, trouver une sphère passant par ces points.

Soient donnés quatre points N, O, M, F (*fig.* 49), par lesquels il faut mener une sphère. Prenant *ad libitum* trois de ces points N, O, M, au triangle NOM (qui est dans un même plan, d'après les Éléments), je circonscris un cercle NAOM, qui sera évidemment donné de grandeur et de position. Il est clair que ce cercle NAOM est sur la surface de la sphère cherchée, puisque, si une sphère est coupée par un plan, la section est un cercle, et que, par les trois points N, M, O, il ne passe

qu'un cercle, celui que j'ai construit. Les points N, M, O étant sur la surface de la sphère cherchée, le plan du triangle NMO coupera la sphère cherchée suivant le cercle NAOM; nous en concluons donc que ce cercle est sur la surface de la sphère.

Fig. 49.



Soit C le centre de ce cercle, j'y élève au plan du cercle la perpendiculaire CEB; il est clair que le centre de la sphère cherchée est sur cette droite CB. Du point F j'abaisse sur CB la perpendiculaire FB qui sera évidemment donnée de grandeur et de position; par C je mène, parallèlement à FB, la droite ACD. L'angle BCA sera droit, mais, la droite BC étant perpendiculaire au plan du cercle, ACD sera dans ce plan et donnée de position. Donc ses points de rencontre A, D avec le cercle sont donnés.

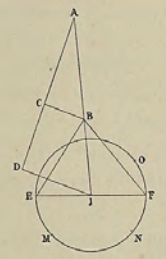
Supposons maintenant le problème résolu, et E le centre de la sphère cherchée, point qui se trouve sur la droite CB, comme nous l'avons déjà dit d'après Théodose. Je joins FE, AE, ED; ces droites seront égales, puisque par hypothèse F et par démonstration A et D sont sur la surface de la sphère. Mais ces trois droites FE, AE, ED sont dans un même plan, puisque FB, ACD, parallèles, sont dans un même plan qui comprend aussi CB et par conséquent les trois droites FE, AE, DE. Si donc par les trois points donnés A, F, D on fait passer un cercle, son centre E sera sur la droite CB, et on aura dès lors le centre de la sphère cherchée, et la sphère elle-même.

Problème II.

Étant donnés trois points et un plan, trouver une sphère passant par les points donnés et tangente au plan donné.

Soient donnés les trois points N, O, M (*fig.* 50); le cercle MEON passant par ces points sera, comme il a été démontré, sur la surface

Fig. 50.



de la sphère cherchée, et le centre de cette sphère sera sur la perpendiculaire IBA au plan de ce cercle. Soit A le point de rencontre de IBA avec le plan donné; ce point A sera donné de position. Du centre du cercle MEON, j'abaisse sur le plan donné la perpendiculaire ID; le point D sera donné, donc la droite AD de grandeur et de position, donc de même les droites ID, IA. Donc le plan du triangle ADI est donné de position; mais celui du cercle MON est également donné de position, donc l'intersection FIE de ces deux plans sera donnée de position, donc les points E, F sur le cercle.

Supposons maintenant le problème résolu et B le centre de la sphère cherchée; je joins BE, BF et je mène BC parallèle à ID; le triangle ADI et la droite EIF étant dans un même plan, les droites EB, BF, BC y seront également. Mais ID est perpendiculaire au plan donné; donc BC, qui lui est parallèle, sera aussi perpendiculaire au plan donné.

De plus, comme la sphère cherchée doit être tangente à ce plan donné AD, la perpendiculaire BC, abaissée de son centre sur ce plan, donnera le point de contact C. Donc les droites BC, BE, BF seront égales, et il est prouvé qu'elles sont dans un même plan donné de position, plan qui comprend aussi la droite AD.

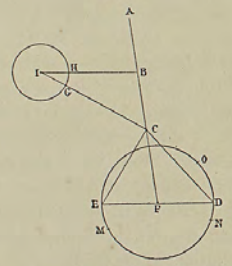
Le problème est donc ramené, étant donnés dans un même plan deux points E, F et une droite AD, à trouver un cercle passant par les deux points donnés et tangent à la droite donnée; ce problème a été résolu par Apollonius Gallus; donc le centre de la sphère B est donné, et tout est clair.

Problème III.

Étant donnés trois points et une sphère, trouver une sphère passant par les points donnés et tangente à la sphère donnée.

Soient donnés les trois points M, N, O (*fig.* 51) et la sphère IG; on a comme donné le cercle MON de la sphère cherchée. La perpendi-

Fig. 51.



culaire FCB au plan de ce cercle contiendra encore le centre de la sphère cherchée. De I, centre de la sphère donnée, j'abaisse sur FB la perpendiculaire IB, qui sera donnée de position et de grandeur. Par le centre F, je lui mène la parallèle ED; d'après ce qui a été démontré, elle sera dans le plan du cercle et les points E, D seront donnés.

Supposons maintenant le problème résolu et C le centre de la sphère cherchée. Les droites IC, CE, CD seront dans un même plan donné, puisque I, E, D sont donnés. Le point de contact des deux sphères est d'ailleurs sur la droite qui joint leurs centres; donc la sphère cherchée sera tangente à la sphère donnée au point G, et IC sera supérieur du rayon IG à la droite CE ou CD. De I comme centre, avec le rayon de la sphère donnée, je décris dans le plan donné des droites IC, CE, CD, un cercle qui passera par le point G et sera donné de grandeur et de position. Mais les points E, D sont dans son plan. La question est donc ramenée à chercher, dans Apollonius Gallus, le procédé pour, étant donné dans un même plan deux points et un cercle, trouver un cercle passant par les deux points donnés et tangent au cercle donné.

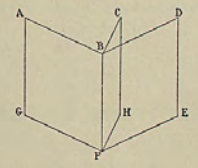
Problème IV.

Étant donnés quatre plans, trouver une sphère qui soit tangente à ces quatre plans donnés.

Soient donnés les quatre plans AH, AB, BC, HG (*fig.* 53) que doit toucher la sphère cherchée.

Soient deux plans AF, FD (*fig.* 52) tangents à la même sphère;

Fig. 52.

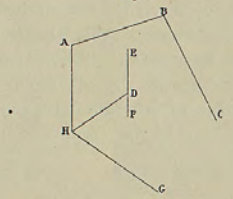


menons le plan BFHC qui bissecte leur angle; il est assez clair que le centre de la sphère tangente aux deux plans AF, FD se trouve sur le plan bissecteur, pour qu'il soit inutile de s'arrêter plus longtemps sur une chose si simple. Si les deux plans AF, FD étaient parallèles,

le centre de la sphère serait sur le plan parallèle coupant par moitié leur intervalle.

Cela posé, puisque les deux plans CB, BA (*fig.* 53) sont donnés de position, le centre de la sphère cherchée est sur un plan donné de position, à savoir le bissecteur de l'angle des deux plans donnés CB, BA.

Fig. 53.



Mais, en raison des deux plans BA, AH, le même centre de la sphère cherchée est sur un autre plan également donné de position, et l'intersection des deux plans donnés de position, qui bissectent, l'un l'angle des plans CB, BA, l'autre l'angle des plans BA, AH, donne une droite donnée de position qui passe par le centre de la sphère cherchée. Soit FE cette droite; en raison des deux plans AH, HG, le centre de la sphère cherchée est encore sur un autre plan donné de position, dont l'intersection avec la droite donnée de position FE, donnera un point D qui est évidemment le centre de la sphère cherchée. Le reste est clair.

Problème V.

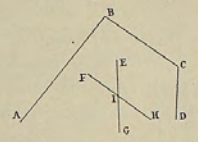
Étant donnés trois plans et un point, trouver une sphère tangente aux plans donnés et passant par le point donné.

Soient donnés les trois plans AB, BC, CD (*fig.* 54) et le point H; il faut trouver une sphère tangente aux trois plans donnés et passant par le point H. Supposons le problème résolu.

Les trois plans donnés, d'après le raisonnement de la proposition précédente, donneront de position une droite qui passe par le centre

de la sphère cherchée. Soit GE cette droite. J'abaisse sur elle, du point donné H, la perpendiculaire HI, qui sera donnée de position et de grandeur; je la prolonge jusqu'en F, en sorte que IF = IH; le point F sera donné.

Fig. 54.



Le centre de la sphère cherchée est sur la droite GE, laquelle est perpendiculaire en I sur le milieu de la droite HF, dont l'extrémité H est, par hypothèse, sur la surface de la sphère. L'autre extrémité F sera donc également sur la surface de la sphère; bien plus le cercle, décrit de I comme centre, avec IH comme rayon, dans le plan perpendiculaire à GE, sera sur la surface de la sphère; or ce cercle est donné de grandeur et de position. Mais si un cercle de la sphère est donné de grandeur et de position, en même temps qu'un certain plan comme AB, d'après un corollaire facile de notre proposition II, la sphère passant par le cercle donné et tangente au plan donné sera donnée. La question est en effet ramenée au problème II, et la solution est dès lors évidente.

Problème VI.

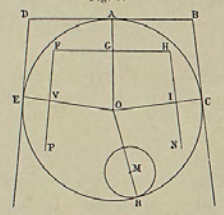
Étant donnés trois plans et une sphère, trouver une sphère tangente à la sphère donnée et aux plans donnés.

Soient donnés les trois plans ED, DB, BC (*fig.* 55) et la sphère RM; il faut construire une sphère tangente à la sphère donnée et aussi aux trois plans donnés.

Supposons le problème résolu et la sphère ERCA satisfaisant aux conditions, c'est-à-dire touchant la sphère en R et les plans aux points E, A, C. Soit O le centre de cette sphère ERCA; joignez RO, EO, AO, CO; ces droites seront égales. D'ailleurs OR passera par le centre M

de la sphère donnée, et les droites EO, OA, OC seront perpendiculaires aux plans donnés DE, DB, BC. Prenons OV = OG = OI = OM, et par les points V, G, I, imaginons menés les plans VP, GH, IN parallèles aux plans donnés ED, DB, BC.

Fig. 55.



Puisque OR = OE et OM = OV, par différence, RM = VE. Mais RM, rayon de la sphère donnée, est donnée de grandeur; donc VE est aussi donnée de grandeur. D'ailleurs OE, perpendiculaire au plan DE, le sera au plan VP parallèle au plan DE; donc VE sera la distance des plans DE, PV. Mais il a été démontré que VE est donnée de grandeur, donc l'intervalle des plans parallèles DE, PV est donné, ainsi que la position de l'un d'eux DE, par hypothèse. Donc PV est aussi donné de position. On prouvera de même que les plans GH, IN sont donnés de position. Or les droites OV, OG, OI sont perpendiculaires à ces plans et égales à OM. Donc la sphère décrite de O comme centre, avec OM pour rayon, sera tangente aux plans PV, GH, IN donnés de position. Mais le point M est donné aussi, comme centre de la sphère donnée. Ainsi la question est ramenée à celle-ci : Étant donnés trois plans PV, GH, IN et un point M, trouver une sphère passant par le point donné M et tangente aux plans donnés PV, GH, IN, c'est-à-dire que le problème est ramené au précédent.

J'userai dans la suite du même artifice quand il n'y aura pas de points parmi les données, mais seulement des sphères et des plans, pour substituer un point donné à une des sphères.

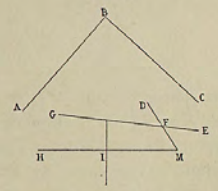
Problème VII.

Étant donnés deux points et deux plans, trouver une sphère passant par les points donnés et tangente aux plans donnés.

Soient donnés les deux plans AB, BC (*fig.* 56) et les deux points H, M; il faut trouver une sphère passant par les points H, M et tangente aux plans AB, BC.

Je joins HM, je prends son milieu en I; par le point I, qui est donné, je fais passer un plan normal à la droite HM. Les points H, M étant

Fig. 56.



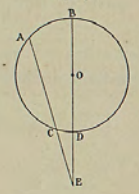
sur la surface de la sphère, il est clair que le centre de la sphère est sur ce plan normal à HM et passant par I, plan qui est donné de position, puisque la droite HM et le point I le sont.

Ainsi, à cause des points H et M, le centre de la sphère est sur un plan donné de position. Mais, à cause des plans AB, BC, par une démonstration déjà faite, il est aussi sur un autre plan donné, donc sur une droite donnée de position, soit GE. J'abaisse sur cette droite, de l'un des points donnés M, la perpendiculaire MF; elle sera donnée de grandeur et de position. Je la prolonge jusqu'en D en sorte que FD = MF. Le point D sera donné et, d'après une démonstration déjà faite, se trouvera sur la surface de la sphère. On a donc comme données : trois points H, M, D par lesquels passe la sphère cherchée, et le plan AB auquel elle est tangente; la question est donc ramenée au problème II.

Avant d'aller plus loin, il faut établir quelques lemmes faciles.

Lemme I. — Soit le cercle BCD (*fig.* 57) en dehors duquel je prends un point quelconque E; par ce point et le centre je mène la droite EDOB, puis une autre quelconque ECA. Il est clair, d'après les Éléments, que AE.EC = BE.ED.

Fig. 57.

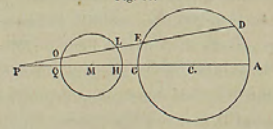


Soit maintenant la sphère de centre O et de grand cercle ACDB; si du même point E, par un point quelconque de la surface de la sphère, je fais passer une droite ECA jusqu'à sa seconde rencontre avec la surface sphérique, on aura encore AE.EC = BE.ED.

Si en effet on imagine qu'autour de la droite BDE immobile tournent le cercle et la droite ECA, les droites EC, EA restent invariables, puisque les points C, A décriront des cercles normaux sur l'axe. Par conséquent, dans tous les plans on aura AE.EC = BE.ED.

Lemme II. — Soient dans un même plan deux cercles ADE, HLO

Fig. 58.



(*fig.* 58); par leur centre je fais passer la droite ACMP et je suppose $\frac{\text{rayon AC}}{\text{rayon HM}} = \frac{\text{CP}}{\text{MP}}$. Par le point P je mène *ad libitum* une droite POLED

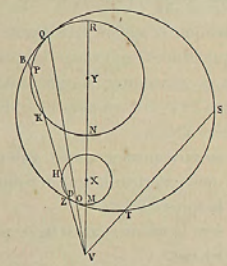
coupant les deux cercles, aux points O, L, E, D. Apollonius Gallus a démontré que l'on a

$$AP.PQ = GP.PH = DP.PO = EP.PL.$$

La vérité de cette proposition en sphérique importe pour les problèmes suivants. Mais elle est évidente; car si, autour de l'axe AP immobile, on fait tourner en même temps les deux cercles et la droite POLED, les droites PO, PL, PE, PD resteront invariables pour la raison donnée dans le lemme précédent; les rectangles restent donc aussi invariables et la proposition est vraie dans un plan quelconque.

Lemme III. — Soient données deux sphères YN, XM (*fig.* 59), par

Fig. 59.



les centres desquelles on fait passer la droite RYNXMV; je pose $\frac{\text{rayon YN}}{\text{rayon XM}} = \frac{\text{YV}}{\text{VX}}$. Du point V, je mène VTS dans un plan quelconque, et je pose SV.VT = RV.VM. Si l'on décrit une sphère quelconque passant par les points T, S et touchant une des deux sphères, elle touchera également l'autre.

Supposons la sphère OTS, passant par les points T, S et tangente en O à la sphère MX; je dis que la sphère YN sera également touchée par la sphère OTS.

Je prolonge VO jusqu'à sa seconde rencontre en Q avec la sphère OTS. D'après le premier lemme : QV.VO = SV.VT. Mais par construction : SV.VT = RV.VM. Ce dernier rectangle, d'après le second lemme, est égal au produit de VO et de la droite passant par V, O et prolongée jusqu'à la rencontre de la sphère YN. Donc le point Q est sur la surface de la sphère YN : il est donc commun aux surfaces des deux sphères YN, OTS.

Je dis maintenant que les deux sphères se touchent en ce point Q. Menons en effet par le point V et un point quelconque de la sphère OTS, une droite quelconque dans un plan quelconque, soit VZ qui, prolongée, coupe les trois sphères aux points Z, D, H, K, P, B. D'après les lemmes I et II :

ZV.VB (sphère OTS) = DV.VP (sphères XM, YN).

Mais DV > VZ, puisque la sphère OTS touche extérieurement la sphère XM en O, et que la droite qui coupe la sphère OTS la rencontrera dès lors avant de rencontrer la sphère XM. Puis donc que DV.VP = ZV.VB et que ZV < DV, on aura PV < BV. Donc le point B est extérieur à la sphère YN.

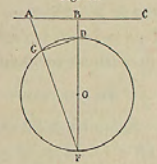
On prouvera, par un raisonnement pareil, que tous les points de la sphère enveloppante sont extérieurs, sauf le point Q. Donc la sphère OTS y est tangente à la sphère YN. C. Q. F. D.

La démonstration sera la même et aussi facile pour les contacts intérieurs et dans tous les cas.

Lemme IV. — Soient le plan AC (*fig.* 60) et la sphère DGF, dont le centre est O; par le centre O, je mène FODB perpendiculaire au plan, puis, par le point F, une droite quelconque coupant la sphère en G et le plan en A. Je dis que AF.FG = BF.FD.

En effet, coupons la sphère et le plan donné suivant le plan du triangle ABF; soient, comme intersections, le cercle GFD sur la sphère, la droite ABC dans le plan. FB, perpendiculaire au plan AC, le sera à la droite AC. On a donc, dans un même plan, le cercle DGF et la droite AC, avec FDB passant par le centre du cercle et perpendiculaire à AC. Si l'on joint GD, les angles en G, B sont droits; donc le quadrilatère ABDG est inscriptible.

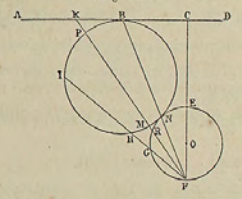
Fig. 60.



Donc AF.FG = BF.FD, et la même démonstration peut se faire pour toute autre section de la sphère.

Lemme V. — Soient le plan ABD (*fig.* 61) et la sphère EGF de centre O; par ce centre O, je fais passer la droite FOEC perpendiculaire au plan, et, dans un autre plan quelconque, je mène la droite FGHI. Soit IF.FH = CF.FE. Si, par les points I, H, je décris une sphère qui touche le plan AC, elle sera également tangente à la sphère EGF.

Fig. 61.



Imaginons construite la sphère IHB, passant par les points I, H, et tangente en B au plan AC; je dis que les sphères EGF, IHB sont tangentes.

Je joins FB; soit CF.FE = BF.FN; d'après le lemme qui précède, le point N sera sur la surface de la sphère EGF. Mais, par construction,

CF.FE = IF.FH; donc IF.FH = BF.FN. Donc le point N est sur la surface de la sphère IBH.

Il faut maintenant prouver que les sphères EGF, IBH sont tangentes en N, ce qui est facile. Par le point F et un point quelconque de la sphère EGF, je mène FR qui rencontre la sphère IBH en M et en P, et le plan AC en K. D'après le lemme précédent,

$$KF.FR = CF.FE = IF.FH \text{ (par construction)} = PF.FM.$$

Mais si KF.FR = PF.FM, comme KF > FP (la sphère IBH étant tangente en B au plan AC), FR < FM; donc le point R est extérieur à la sphère IBH. Il en sera de même pour tout autre point de la sphère EGF dans un plan quelconque des deux côtés du point N. Donc les sphères EGF, IBH sont tangentes en N.

Ces lemmes quoique faciles sont très beaux, surtout III et V. Dans le lemme III, en effet, on a une infinité de sphères tangentes à la sphère XM et passant par les points T, S, mais il est prouvé que toutes ces sphères en nombre infini sont tangentes à la sphère YN. Dans le lemme V, on a de même une infinité de sphères passant par les points I, H et tangentes au plan AC, et toutes ces sphères en nombre infini touchent la sphère EGF.

Ceci posé, il est facile de résoudre les autres problèmes.

Problème VIII.

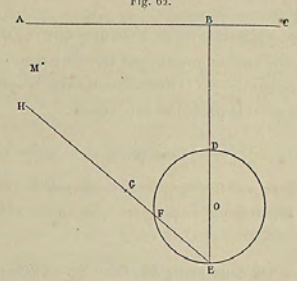
Étant donnés deux points, un plan et une sphère, trouver une sphère passant par les points donnés et tangente au plan donné et à la sphère donnée.

Soient donnés le plan ABC (*fig.* 62), la sphère DFE, et les points H, M. Par le centre O de la sphère donnée, j'abaisse sur le plan donné ABC la perpendiculaire EODB; je joins HE, et je pose BE.ED=HE.EG. Le point G sera donné.

Étant donnés trois points H, G, M et un plan, on cherchera (problème II) une sphère passant par les trois points donnés et tangente au plan donné. Elle résoudra le problème.

Elle passe en effet par les deux points donnés H, M, et est tangente au plan ABC par construction et à la sphère DFE d'après le lemme V;

Fig. 62.

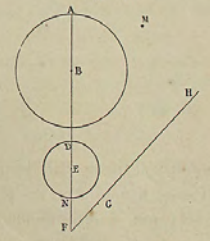


en effet, puisque HE.EG = BE.ED, toute sphère passant par les deux points H et G et tangente au plan ABC touchera aussi la sphère DEF.

Problème IX.

Étant donnés deux points et deux sphères, trouver une sphère passant par les deux points donnés et tangente aux sphères données.

Fig. 63.



Soient données les deux sphères AB, DE (*fig.* 63) et les deux

points H, M. Je mène AF par les centres des sphères données, et je pose $\frac{\text{rayon AB}}{\text{rayon DE}} = \frac{\text{BF}}{\text{FE}}$; le point F sera donné; soit encore NF.FA = HF.FG, le point G sera donné.

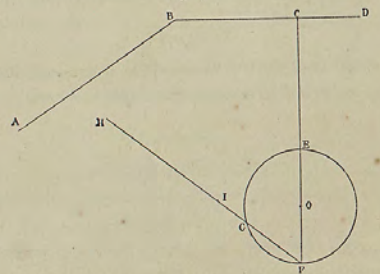
Étant donnés trois points M, G, H et une sphère DN, on cherchera (problème III) une sphère passant par les trois points donnés et tangente à la sphère donnée DN; elle touchera aussi la sphère AB, d'après le lemme III, et ainsi le problème sera résolu.

Problème X.

Étant donnés un point, deux plans et une sphère, trouver une sphère passant par le point donné et tangente à la sphère et aux deux plans donnés.

Soient donnés les deux plans AB, BD (*fig.* 64), la sphère EGF et le point H. Du point O, centre de la sphère donnée, j'abaisse sur un des

Fig. 64.



deux plans donnés la perpendiculaire CEOF, et je pose CF.FE = HF.FI. Les deux points H, I étant donnés avec les deux plans AB, BD, je cherche (problème VII) une sphère passant par les deux points donnés et tangente aux deux plans donnés; elle touchera aussi la sphère (lemme V) et le problème sera résolu.

Problème XI.

Étant donnés un point, un plan, et deux sphères, trouver une sphère passant par le point donné, et tangente au plan donné ainsi qu'aux deux sphères données.

Un raisonnement semblable aux précédents ramènera la question au problème VIII, où l'on donne deux points, un plan et une sphère, et cela par le moyen du lemme V. On peut aussi se servir du lemme III pour ramener de même la question à ce problème VIII, mais par une autre construction.

Problème XII.

Étant donnés un point et trois sphères, trouver une sphère qui passe par le point donné et touche les sphères données.

Je ne fais pas non plus la figure; car le lemme III ramène immédiatement la question au problème IX où l'on donne deux points et deux sphères.

Problème XIII.

Étant donnés deux plans et deux sphères, trouver une sphère qui touche les plans donnés et les sphères données.

Supposons le problème résolu. Si nous imaginons, concentrique à la surface sphérique trouvée, une autre surface sphérique parallèle à une distance égale au rayon de la plus petite des sphères données, cette nouvelle surface sphérique sera tangente à des plans distants des donnés d'un intervalle égal à ce rayon de la plus petite sphère, et tangents également à une sphère concentrique à la plus grande et dont le rayon différera de celui de la plus grande du rayon de la plus petite.

Cette dernière sphère est donc donnée, de même que les plans menés parallèlement aux donnés à une distance égale au rayon de la moindre sphère. Enfin la nouvelle surface sphérique passe par le centre de la moindre des sphères données, centre qui est donné.

Ainsi, par ce même artifice que nous avons déjà employé dans le problème VI, la question est ramenée au problème X : Étant donnés un point, deux plans et une sphère, trouver etc.

PROBLÈME XIV.

Étant donnés trois sphères et un plan, trouver une sphère tangente aux sphères et au plan donné.

Par le même moyen que dans le problème VI et dans le précédent, on ramènera la question au problème XI : Étant donné un point, un plan et deux sphères, etc.

PROBLÈME XV.

Étant données quatre sphères, trouver une sphère qui leur soit tangente.

Supposons le problème résolu. Par la méthode qu'a employée Apollonius Gallus pour ramener le problème des trois cercles à celui d'un point et de deux cercles, méthode que nous avons déjà employée aussi dans les problèmes précédents, nous ramènerons ce bel et célèbre problème au problème XII, où l'on donne trois sphères et un point.

Ainsi nous avons achevé entièrement le travail proposé, et brillamment complété Apollonius Gallus; toutefois, pour ne pas allonger indéfiniment ce traité des contacts sphériques, nous avons négligé les cas divers, les limitations et les menus détails.

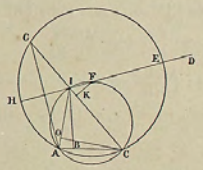
FRAGMENTS GÉOMÉTRIQUES.

SOLUTION D'UN PROBLÈME PROPOSÉ PAR M. DE PASCAL.

M. de Pascal a proposé : *Dans un triangle, étant donné l'angle au sommet et le rapport de la hauteur à la différence des côtés, trouver l'espèce du triangle.*

Soit AC (*fig.* 65) une droite donnée quelconque, sur laquelle on décrit le segment de cercle AIFC, capable de l'angle donné. La ques-

Fig. 65.



tion est ramenée à chercher un triangle dont on donne la base AC, l'angle au sommet AIC et le rapport de la hauteur à la différence des côtés.

Supposons le problème résolu; soit AIC le triangle cherché; j'abaisse la hauteur IB, je prends le milieu F de l'arc AFC. Je joins FA, FC et FI, j'abaisse sur AI, IC les perpendiculaires CO, FK; de F comme centre, avec AF pour rayon, je décris le cercle AHGEC, que les droites CI, FI

prolongées rencontrent aux points G, H, E. Enfin je joins GA. $\widehat{AFC}$ au centre est double de $\widehat{AGC}$ à la circonférence. Mais $\widehat{AIC} = \widehat{AFC}$ dans le même segment. Donc $\widehat{AIC} = 2\widehat{AGC}$. Mais $\widehat{AIC} = \widehat{AGC} + \widehat{IAG}$. Donc $\widehat{IGA} = \widehat{IAG}$. Donc IA = IG. Mais, FK étant perpendiculaire du centre F sur GC, on a GK = KC. Donc $KI = \frac{1}{2}(CI - IG) = \frac{1}{2}(CI - IA)$.

Mais le rapport $\frac{BI}{CI - IA}$ est donné, donc $\frac{BI}{IK}$, et en multipliant de part et d'autre par AC, $\frac{AC.BI}{AC.IK}$. Mais AC.BI = AI.CO, le triangle AIC étant la moitié de chacun de ces deux rectangles. Donc le rapport $\frac{AI.CO}{AC.IK}$ est donné.

Mais, par hypothèse, $\widehat{AIC}$ est donné, $\widehat{COI}$ est droit par construction. Donc ΔCOI est donné d'espèce. Donc le rapport $\frac{CO}{CI}$ est donné, donc $\frac{AI.CO}{AI.IC}$. Mais j'ai prouvé que $\frac{AI.OC}{AC.IK}$ est donné; donc $\frac{AI.IC}{AC.IK}$ est donné.

Maintenant dans le triangle isoscèle AFC, $\widehat{AFC}$ est donné par hypothèse, donc $\widehat{FAC}$, donc $\widehat{CIF}$ son égal; mais $\widehat{FKI}$ est droit, donc ΔFIK est donné d'espèce, donc $\frac{KI}{IF}$, donc $\frac{AC.IK}{AC.IF}$.

Mais j'ai prouvé que $\frac{AI.IC}{AC.IK}$ est donné, donc $\frac{AI.IC}{AC.IF}$ est donné. Mais CI.IA = CI.IG, puisque IG = IA, et CI.IG = HI.IE. Donc $\frac{HI.IE}{AC.IF}$ est donné.

Soit $\frac{ED}{AC}$ ce rapport donné : AC étant donnée, ED le sera; portons cette longueur sur le prolongement de HE, comme dans la figure. $\frac{HI.IE}{AC.IF} = \frac{ED}{AC}$ (rapport donné). Mais $\frac{DE}{AC} = \frac{DE.IF}{AC.IF}$. Donc $\frac{HI.IE}{AC.IF} = \frac{DE.IF}{AC.IF}$. Donc DE.IF = HI.IE.

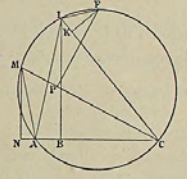
Mais j'ai prouvé que le triangle AFC est donné d'espèce; la base AC est donnée de grandeur; donc AF est donnée, donc son double HE.

Aux rectangles égaux DE.IF, HI.IE, ajoutons de part et d'autre

DE.IH. On aura DE.FH = DI.IH. Mais, DE, FH étant données, DE.FH le sera; donc DI.IH; et ce produit appliqué sur la droite DH donnée de grandeur est en défaut d'une figure carrée (1); donc IH est donnée, et par différence IF. Mais F est donné de position, donc le point I et tout le triangle AIC. Il est facile de remonter de l'analyse à la synthèse.

Pour dissiper tous les doutes, il est aisé de prouver que le triangle cherché est semblable au trouvé AIC de la seconde figure (*fig.* 66)

Fig. 66.



(ce triangle peut au reste avoir son sommet des deux côtés du point F, à égale distance de part et d'autre du point F; il sera le même d'espèce et de grandeur, la position seule sera différente). Si le triangle cherché n'est pas semblable au trouvé, la base restant la même, son sommet tombera entre les points F, I, ou entre les points I, A (le côté n'importe pas, car du côté FC on peut faire la même démonstration avec le second triangle AIC.)

Soit d'abord le sommet entre A et I, et supposons, s'il est possible, le triangle cherché semblable au triangle AMC. Je joins FM, et j'abaisse la perpendiculaire FP; le rapport $\frac{MN}{MP}$ sera donné par hypothèse et par conséquent égal à $\frac{IB}{IK}$ que nous avons prouvé être égal au rapport donné; ce qui est absurde.

(1) C'est-à-dire que DI.IH = DH.IH − IH².

En effet, dans les triangles rectangles FMP, FIK, $\hat{M} = \hat{I}$, donc ces triangles FIK, FMP sont semblables; mais FM > FI, donc MP > IK. Mais MN < IB, donc $\frac{MN}{MP}$ ne peut être égal à $\frac{IB}{IK}$.

Si le point M tombe entre I et F, on prouvera que la hauteur est plus grande et la différence des côtés plus petite et cela par le même raisonnement; donc le rapport est différent. Si M est du côté FC, on se servira du second triangle AIC, et la démonstration sera la même. Il est ainsi inutile de s'arrêter plus longtemps à ces cas, et il est constant que le triangle cherché est semblable au trouvé AIC. Le problème est donc résolu.

Je propose en revanche, s'ils le veulent bien, tant à M. de Pascal qu'à M. de Roberval, de résoudre ce problème :

En un point donné sur une spirale de Galilée, trouver la tangente.

M. de Roberval sait ce qu'est cette spirale.

J'ai résolu ce problème et j'en attends la solution d'hommes aussi savants qu'ils le sont; mais, s'ils le préfèrent, je leur communiquerai la mienne et même une méthode générale pour les tangentes des lignes courbes.

Toutefois, pour ne pas paraître quitter les mains vides ce sujet des triangles, je puis proposer les questions suivantes :

Étant donnés la base, l'angle au sommet et la somme de la hauteur et de la différence des côtés, trouver le triangle.

Étant donnés la base, l'angle au sommet et la différence de la hauteur et de la différence des côtés, trouver le triangle.

Étant donnés la base, l'angle au sommet et le produit de la hauteur par la différence des côtés, trouver le triangle.

Étant donnés la base, l'angle au sommet et la somme des carrés de la hauteur et de la différence des côtés, trouver le triangle.

ainsi que beaucoup d'autres questions semblables que mes savants correspondants résoudront toutefois plus facilement, je pense, que le

problème ou théorème proposé sur la tangente à la spirale de Galilée.

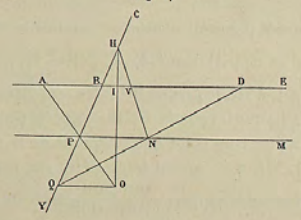
Il faut observer que, dans les questions sur les triangles, toutes les fois que le problème peut être résolu par les lieux plans, il ne faut pas recourir aux solides, mais mes savants correspondants le savent assez, et il était sans doute inutile de faire cette remarque.

DEUX PORISMES

(DE PIERRE DE FERMAT).

Porisme I. — *Étant données de position deux droites* ABE, YBC (*fig.* 67), *se coupant au point* B, *et deux points* A, D *sur la droite* ABE, *trouver deux points, par exemple* O, N, *tels que si l'on en mène, brisée sur un point quelconque* H *de la droite* YBC, *une ligne* OHN *coupant aux points* I *et* V *la droite* ABD, *on ait* AI × DV *égal à une aire donnée, savoir* AB × BD.

Fig. 67.



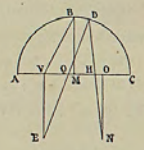
Voici la construction porismatique d'Euclide qui représente la solution la plus générale du problème.

Soit pris quelconque le point O; je joins AO qui coupe YBC en P, et, par O, je mène OQ parallèle à ABD et rencontrant YBC en Q. Je mène également, parallèle à ABD, l'indéfinie PNM. Je joins QD qui

coupe PNM en N. Je dis que les deux points O, N satisfont à la question, c'est-à-dire que si l'on prend n'importe où sur la droite YBC un point H, et qu'on joigne OH, NH, qui coupent la droite ABD aux points I, V, on aura dans tous les cas $AI \times DV = AB \times BD$.

PORISME II. — *Étant donné un cercle* ABDC (*fig.* 68) *de diamètre* AC, *de centre* M, *trouver deux points* E, N, *tels que si l'on en mène, brisée sur un point quelconque* D *de la circonférence, une ligne* EDN *coupant le diamètre aux points* Q, H, *la somme des carrés de* QD, DH *soit au triangle* QDH *dans un rapport donné et que cette relation subsiste toujours généralement, quelle que soit la ligne brisée.*

Fig. 68.



J'élève du centre M perpendiculairement au diamètre la droite MB. Je pose $\frac{4BV}{VM}$ égal au rapport donné. En V, j'élève VE perpendiculaire au diamètre et égale à VB; je prends MO = MV, et je mène ON égale et parallèle à VE. Je dis que les points cherchés sont les points E, N, c'est-à-dire que si l'on prend un point quelconque D de la circonférence, qu'on joigne ED, ND, qui coupent le diamètre aux points Q, H, on aura dans tous les cas le rapport $\frac{QD^2 + DH^2}{\text{triangle QDH}}$ égal au donné, savoir $\frac{4BV}{VM}$.

On ne propose pas seulement de trouver la démonstration de ce porisme. Que les mathématiciens plus subtils voient s'il n'y a pas en dehors de E et de N deux autres points qui puissent satisfaire au problème et s'il y a, comme dans le premier porisme, des solutions en

nombre indéfini. Si je n'ai pas de réponse, je ne dédaignerai pas de venir au secours de la Géométrie sur le point où elle se trouvera en défaut.

PORISMES D'EUCLIDE,

LEUR THÉORIE RENOUVELÉE ET PRÉSENTÉE AUX GÉOMÈTRES MODERNES SOUS FORME D'INTRODUCTION.

Au commencement de son Livre VII, Pappus a énuméré les Livres des géomètres anciens qui faisaient partie de l'ensemble analytique. Tous ces Livres sont perdus par l'effet du temps, sauf le seul Livre d'Euclide sur les *Données* et les quatre premiers des *Coniques* d'Apollonius; aussi les géomètres modernes ont-ils eu à faire de grands efforts pour réparer tant soit peu la perte d'Ouvrages, dont l'âge destructeur tendait à abolir jusqu'à la mémoire. Avant tous, François Viète, ce génie si subtil qu'on ne louera jamais assez, a heureusement restitué les Livres d'Apollonius *Sur les contacts* dans un Livre unique qu'il a intitulé l' « *Apollonius Gallus* ». Son exemple a excité Marino Ghetaldi et Willebrord Snellius à aborder des entreprises analogues, dans lesquelles ils ont assez réussi pour que, grâce à eux, nous ne regrettions plus guère les Livres d'Apollonius *De la section en rapport, De la section en produit, De la section déterminée, Des convergences*. Suivaient les *Lieux plans*, les *Lieux solides* et les *Lieux en surface*. Ces matières ont été traitées à leur tour par des géomètres dont le nom n'est pas inconnu, et, quoique manuscrits et encore inédits, leurs travaux ne sont pas restés ignorés.

Mais il reste encore, vierge de toute tentative et comme désespérante, la théorie des Porismes d'Euclide. Pappus a beau affirmer que c'était « une œuvre pleine d'art et de la plus grande utilité pour la solution des problèmes les plus obscurs », les géomètres de l'âge écoulé ou du temps actuel en ont ignoré jusqu'au nom, ou n'ont pas

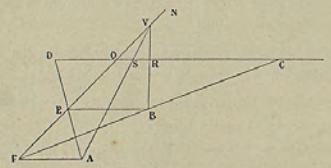
même soupçonné de quoi il s'agissait. J'ai longtemps tâtonné dans de profondes ténèbres, cherchant en vain comment relever la Géométrie de ce côté, jusqu'à ce qu'enfin « une lumière éclatante a frappé mes yeux et a dissipé pour eux l'obscurité de la nuit ». Je ne veux pas cacher jalousement à la postérité un spécimen de ma découverte à la fois ancienne et nouvelle, alors que l'astre de Suède brille sur toutes les sciences et que nous déroberions en vain comme des mystères les secrets des Mathématiques; il n'est en effet rien qui puisse échapper au clairvoyant génie de cette reine incomparable, et il ne nous est pas permis de cacher une théorie qui, nous pouvons à peine en douter, serait découverte au premier signe venu d'elle, comme inspiration ou comme ordre.

Pour jeter donc la lumière sur toute cette question des porismes, j'ai choisi un certain nombre des plus remarquables propositions porismatiques, et je les présente avec confiance à l'attention et à l'examen des géomètres, pour bien faire connaître ce qu'est un porisme et quel en est surtout l'usage.

Porisme I.

Soient deux droites ON, OC (*fig.* 69) formant un angle au point O et données de position. Soient donnés également les points A et B.

Fig. 69.



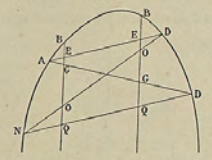
De ces points A, B, on mène les droites BE, AF, parallèles à OC et rencontrant NO prolongée aux points E, F. On joint AE qui rencontre CO prolongée en D, et on joint aussi FB qui rencontre en C cette même

droite CO. Si maintenant d'un point quelconque de la droite ON, V par exemple, on mène les droites AV, BV, soit S le point de rencontre de AV et de OC, R celui de BV et de la même droite OC, on aura toujours $CR \times DS = CO \times DO$, c'est-à-dire une aire donnée.

Porisme II.

Soit une parabole quelconque NAB (*fig.* 70) et un de ses diamètres quelconque BEO. Je prends sur la courbe deux points quelconques D

Fig. 70.

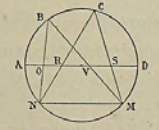


et N, desquels je mène des droites concourant en un autre point quelconque de la courbe, soit en D. Ces droites AD, DN couperont le diamètre en des points tels que E, O ou G, Q. Les abscisses sur un même diamètre seront toujours dans un même rapport, c'est-à-dire qu'on aura constamment $\frac{OB}{BE} = \frac{QB}{GB}$.

Porisme III.

Soit un cercle ayant pour diamètre une droite AD (*fig.* 71); je mène

Fig. 71.



à celle-ci une parallèle quelconque NM, rencontrant le cercle aux points N, M. Soient donnés ces points N, M; je mène arbitrairement de

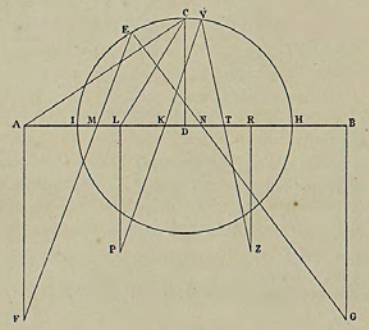
ces points une ligne NBM brisée sur le cercle et qui coupe le diamètre en des points O, V. Je dis que le rapport $\frac{AO.DV}{AV.DO}$ est donné; ou bien que si l'on mène une autre ligne brisée NCM, coupant le diamètre aux points R, S, on aura toujours $\frac{AO.DV}{AV.DO} = \frac{AR.DS}{AS.DR}$.

Il est facile d'étendre cette proposition aux ellipses, aux hyperboles et aux sections opposées.

PORISME IV.

Soit le cercle ICH (*fig.* 72), son diamètre IDH donné, son centre D, son rayon CD normal au diamètre. Soient sur le prolongement du dia-

Fig. 72.



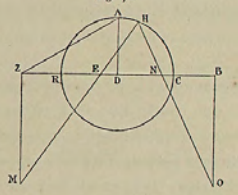
mètre deux points B, A donnés de telle sorte que AI = BH. Soit posé $\frac{DI}{IA} = \frac{DL}{LI}$ et DR = DL; les points R et L seront donnés. Qu'on joigne CA et qu'on prenne, égale à cette droite, AF perpendiculaire au diamètre. Soit enfin BG égale et parallèle à AF, et des points F, G, menée brisée sur le cercle une droite FEG qui coupe le diamètre aux points M et N. Je dis que la somme $RM^2 + LN^2$ est toujours égale à une même aire donnée.

En second lieu, avec les mêmes positions, si l'on joint CL, que l'on prenne, égale à cette droite, LP perpendiculaire au diamètre, et qu'on mène RZ parallèle et égale à LP; si des deux points Z et P on mène brisée sur la circonférence une ligne comme PVZ, coupant le diamètre aux points K, T, la somme $AT^2 + BK^2$ sera toujours égale à une autre aire donnée.

PORISME V.

Soit le cercle RAC (*fig.* 73), son diamètre RDC donné, son centre D, son rayon DA normal au diamètre. Soient pris arbitrairement sur le

Fig. 73.



diamètre, mais à égale distance du centre D, deux points Z, B. Joignons AZ; menons, égale à cette droite, ZM perpendiculaire au diamètre et BO égale et parallèle à ZM. Qu'on mène, brisée sur la circonférence, une ligne quelconque MHO, coupant le diamètre aux points E, N; le rapport $\frac{EH^2 + HN^2}{\text{triangle } EHN}$ sera donné et égal au rapport $\frac{AZ}{\frac{1}{2}ZD}$.

Par l'énoncé de ces propositions, dont personne ne niera l'élégance et la beauté, on peut facilement reconnaître la nature même des porismes. Il est évident en effet qu'on peut, ainsi que le dit Pappus, les énoncer comme théorèmes ou comme problèmes. Je les ai énoncées comme théorèmes; mais rien n'empêche de les transformer en problèmes. Par exemple le porisme V peut être conçu comme suit :

Étant donné un cercle RAC *de diamètre* RC, *trouver deux points* M *et* O, *tels que si de ces points on mène, brisée sur la circonférence, une*

ligne quelconque MHO, *on ait toujours comme donné le rapport au triangle* EHN *de la somme des carrés des abscisses* EH, HN.

La construction résulte du théorème qui précède : si en effet on prend dans le rapport donné $\frac{AZ}{\frac{1}{4}ZD}$, tout le reste s'ensuit. De la même manière, on peut, pour tous les autres porismes sans exception, transformer facilement les théorèmes en problèmes.

D'autre part, Pappus indique qu'au sens des géomètres postérieurs à Euclide : « le porisme est en défaut, en ce qui concerne l'hypothèse, par rapport au théorème de lieu ». Cela révèle entièrement la nature spéciale du porisme et ç'a été presque sans autre indice que celui fourni par ces mots que nous avons pénétré les secrets de cette matière.

Lorsque nous cherchons un lieu, nous nous proposons de trouver une ligne droite ou une courbe qui nous est inconnue en tant seulement que nous avons à déterminer le lieu qu'occupe la ligne à trouver; mais quand nous partons d'un lieu supposé donné et connu pour en trouver un autre, ce nouveau lieu est appelé *porisme* par Euclide, et c'est pourquoi Pappus a ajouté avec grande raison que les lieux eux-mêmes sont une espèce de porismes et qu'on leur donne ce nom.

Comme seul exemple, nous allons appliquer notre définition à la figure du porisme V. La droite RC étant donnée, si l'on cherche une courbe quelconque telle que RAB dont la propriété soit qu'en abaissant d'un quelconque de ses points A la perpendiculaire AD, on ait $AD^2 = RD \times DC$, nous trouverons que la courbe RAC est une circonférence de cercle. Mais si, ce lieu étant déjà donné, nous partons de là pour en trouver un autre, par exemple, le problème du porisme V, ce nouveau lieu sera appelé *porisme,* comme tous les autres en nombre infini que la sagacité d'un analyste exercé peut imaginer et déduire de celui qui est déjà connu.

Comme nous l'avons déjà dit, les lieux eux-mêmes sont des porismes; il faut d'ailleurs corriger d'après le texte grec l'erreur du traducteur

de Pappus à cet endroit où il dit que : « *L'Ouvrage des Porismes est très utile pour les résolutions des problèmes les plus obscurs et de leurs genres qui ne comprennent pas cette nature qui en fournit la multitude* ». Ces derniers mots, pour ainsi dire, n'offrent aucun sens; il faut recourir à Pappus lui-même dont le texte est le suivant, d'après les manuscrits :

Πορίσματα ἐστὶ πολλοῖς ἄθροισμα φιλοτεχνότατον εἰς τὴν ἀνάλυσιν τῶν ἐμβριθεστέρων προβλημάτων καὶ τῶν γενῶν ἀπερίληπτον τῆς φύσεως παρεχομένης πλῆθος.

Pappus dit que *les porismes servent à l'analyse des problèmes plus obscurs et des genres,* c'est-à-dire des problèmes généraux. Il résulte en effet de ce que nous avons dit que les propositions des porismes sont générales au plus haut degré. Puis il ajoute : « *dont la nature fournit une multitude à peine compréhensible à l'esprit* », mots par lesquels il indique ces solutions en nombre infini du même problème, qui tiennent presque du miracle.

A notre invention de ces théorèmes ou problèmes, s'ajoute une méthode particulière, dérivant de la pure Analyse, et grâce à laquelle, avec les cinq porismes précédents, nous en avons trouvé, construit et démontré beaucoup d'autres.

Si les savants accueillent avec faveur ce peu que nous donnons à titre seulement d'introduction et de prodrome d'une œuvre plus approfondie, nous pourrons un jour restituer la totalité des trois Livres des porismes, et, bien plus, pousser plus loin qu'Euclide lui-même et découvrir des porismes vraiment étonnants et qui jusqu'à présent sont inconnus, sur les sections coniques et sur d'autres courbes quelconques.

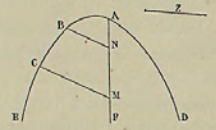
PROPOSITION DE M. DE FERMAT SUR LA PARABOLE.

J'ai proposé de *décrire une parabole par quatre points donnés.*

Il y a deux cas, pour chacun desquels il faut d'abord poser le lemme

suivant. Soit ECBAD (*fig.* 74) une parabole dont le diamètre AF est donné de position; soient également donnés les points B, C de la parabole et l'angle des ordonnées sur le diamètre AF. Je dis que la parabole est donnée de position.

Fig. 74.



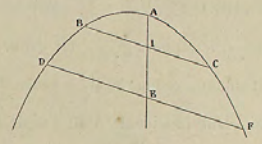
Menons les ordonnées BN, CN. Du point B donné, BN est menée sous un angle donné (puisqu'on donne l'angle des ordonnées) sur AF donnée de position; donc le point N est donné; de même M. Les droites BN, CM sont donc données de position et de grandeur. Mais d'après la nature de la parabole, $\frac{CM^2}{BN^2} = \frac{MA}{NA}$, si l'on suppose que A est le sommet de la parabole ou l'extrémité du diamètre. Le rapport $\frac{MA}{NA}$ est ainsi donné, ou, *dividendo*, le rapport $\frac{MN}{NA}$; mais MN est donnée, avec les points M et N, donc NA, donc le point A. Si d'ailleurs on pose $\frac{AN}{NB} = \frac{NB}{Z}$, Z côté droit de la parabole sera donné, les autres droites l'étant. Ainsi, on a donnés : le sommet A, le côté droit Z, le diamètre AF de position, l'angle des ordonnées. Donc la parabole est donnée de position (Apollonius, I, 52).

Cela posé, il est facile de construire le premier cas (*fig.* 75). Soient donnés les quatre points B, C, D, F; si on les joint par les droites BC, CF, FD, DB, ou bien aucune ne sera parallèle à l'opposée, ou bien, comme dans ce cas, on aura par exemple BC parallèle à DF.

Prenons les milieux I, E de ces deux droites et supposons le problème résolu; si on joint IE, qui divise par moitié deux parallèles, ce sera un diamètre de la parabole. Mais I, E sont donnés, donc IE l'est de position, ainsi que l'angle DEI. On a donc donnés : le diamètre IE

de position, l'angle des ordonnées et deux points B, D de la parabole; donc la parabole DBACF est donnée de position.

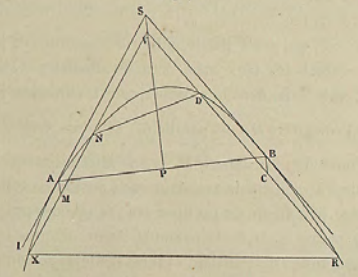
Fig. 75.



Le second cas est plus difficile : c'est celui où aucune des droites joignant deux des points donnés n'est parallèle à une autre.

Soient donnés (*fig.* 76) quatre points X, N, D, R, en sorte que si l'on joint XR, RD, DN, NX, aucune ne soit parallèle à l'opposée. Sup-

Fig. 76.



posons le problème résolu et tracée la parabole XANDBR satisfaisant à la condition proposée. Soient V le point de rencontre de XN, RD prolongées, M, C les milieux de XN, RD. Menez par ces milieux les diamètres MA, CB qui rencontrent la parabole aux points A, B, et par ces derniers IAS, SB parallèles à XV, VR et se rencontrant en S. Je joins AB, j'en prends le milieu en P et je joins SP.

Cette construction faite, il est clair que IAS, menée par le sommet du diamètre MA parallèlement à l'ordonnée XN, est tangente à la parabole en A. On prouvera de même que SB est tangente à la parabole en B. Donc (Apoll., III, 17) $\frac{XV.VN}{RV.VD} = \frac{AS^2}{SB^2}$. Mais les quatre points X, N, D, R étant donnés, le rapport $\frac{XV.VN}{RV.VD}$ est donné, donc $\frac{AS^2}{SB^2}$, donc $\frac{AS}{SB}$. Mais $\widehat{ASB}$ est donné, comme égal, à cause des parallèles, au donné $\widehat{XVR}$. Ainsi, dans le triangle ASB, l'angle au sommet S est donné avec le rapport des côtés $\frac{AS}{SB}$; donc ce triangle est donné d'espèce, donc $\widehat{SAB}$ et le rapport $\frac{SA}{AB}$; donc, puisque $AP = \frac{1}{2}AB$, le rapport $\frac{SA}{AP}$ est donné. Ainsi dans le triangle SAP, l'angle en A est donné avec le rapport des côtés $\frac{SA}{AP}$; donc le triangle est donné d'espèce, donc $\widehat{PSA}$ est donné.

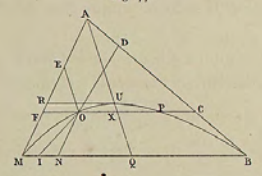
Ceci posé, SP, qui passe par le milieu de la corde AB joignant les points de contact des tangentes, sera un diamètre de la parabole (Apoll., II, 29). Mais, dans la parabole, tous les diamètres sont parallèles, donc le diamètre MA est parallèle à SP, donc $\widehat{IAM} = \widehat{ASP}$. Mais $\widehat{ASP}$ est prouvé donné; donc $\widehat{IAM}$, et son alterne-interne $\widehat{NMA}$. Mais M, milieu de NX, donnée de grandeur et de position, est donné. Donc MA, diamètre, est donné de position avec l'angle des ordonnées AMN et les deux points N, D de la parabole. Donc, d'après le lemme, la parabole est donnée de position, et il est facile de remonter de l'analyse à la synthèse.

Il est clair que, dans ce dernier cas, deux paraboles satisfont au problème, car les droites DN, XR, supposées non parallèles, se rencontrent, et alors, par le même raisonnement, on peut tracer une parabole qui résout également le problème.

DÉMONSTRATION DU LIEU A TROIS DROITES.

Soient données de position trois droites formant un triangle : AM, MB, BA (*fig.* 77); soit un point O quelconque duquel on mène sur

Fig. 77.



les droites données les droites OE, OI, OD sous les angles donnés OEM, OIM, ODB. Soit enfin donné le rapport $\frac{EO.OD}{OI^2}$. Je dis que le lieu du point O est une section conique.

Prenez en Q le milieu de MB, joignez AQ et par O menez à MB, MA les parallèles FOC, ON.

Les trois triangles OEF, ODC, OIN sont donnés d'espèce : car, par hypothèse, les angles OEF, ODC, OIN sont donnés, et il en est de même de l'angle EFO égal au donné AMB, à cause des parallèles; de OCD, égal au donné MBA; enfin de ONI, puisque ONB est donné comme égal à AMB à cause des parallèles. Donc le rapport $\frac{OE}{OF}$ est donné; de même le rapport $\frac{OD}{OC}$; donc le rapport $\frac{EO.OD}{FO.OC}$. Mais, par hypothèse, le rapport $\frac{EO.OD}{OI^2}$ est donné; donc le rapport $\frac{FO.OC}{OI^2}$ sera donné. Mais le rapport $\frac{OI^2}{ON^2}$ est donné, puisque le triangle OIN est donné d'espèce; donc le rapport $\frac{FO.OC}{ON^2}$ ou $\frac{FO.OC}{FM^2}$ sera donné (FM étant égal à ON).

Si on partage AQ en U de telle façon qu'en menant UR parallèle

à MB, le rapport $\frac{UR^2}{RM^2}$ soit égal au donné $\frac{FO.OC}{FM^2}$ (ce qui est facile, puisque l'angle MRU est donné), et si l'on fait passer par le point U une section conique ayant AQ pour diamètre et tangente en M, B aux droites MA, AB (ce qui est très facile et donnera d'ailleurs, suivant les différentes positions du point U, soit une parabole, soit une hyperbole, soit une ellipse; je n'ajoute pas ce qui serait superflu, surtout pour vous); je dis que la section conique ainsi décrite passera par le point O.

Soit en effet P le point où elle passera de l'autre côté. La droite UR, parallèle à l'ordonnée MB, sera tangente à la conique; donc, si celle-ci passe par le point O, on aura $\frac{PF.FO}{FM^2} = \frac{UR^2}{RM^2}$ (Apoll., III, 6). Mais, par construction, $\frac{UR^2}{RM^2} = \frac{FO.OC}{FM^2}$. Donc PF.FO = FO.OC; donc FO = PC (1).

Or il en est ainsi; car, Q étant le milieu de MB, on a FX = XC; d'autre part, dans la conique, OX = XP; donc, par différence, FO = PC.

Il est facile de remonter de l'analyse à la synthèse, par une démonstration conduisant à l'impossible.

(1) La conclusion devrait être PF = OC, ce qui revient au même en retranchant OP de part et d'autre.

INTRODUCTION

AUX

LIEUX PLANS ET SOLIDES.

Que les anciens aient longuement traité des lieux, on ne peut en douter; nous le savons par Pappus, qui, au commencement du Livre VII, témoigne qu'Apollonius avait écrit sur les lieux plans, et Aristée sur les lieux solides. Mais, si nous ne nous trompons pas, la recherche des lieux ne leur était point suffisamment aisée. Nous le conjecturons de ce fait que, pour nombre de lieux, ils n'ont point donné un énoncé assez général, ainsi qu'on le verra plus loin.

Nous soumettons donc cette théorie à une analyse qui lui est propre et particulière, et qui ouvre la voie générale pour la recherche des lieux.

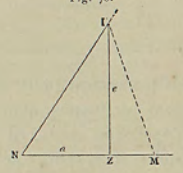
Toutes les fois que dans une équation finale on trouve deux quantités inconnues, on a un lieu, l'extrémité de l'une d'elles décrivant une ligne droite ou courbe. La ligne droite est simple et unique dans son genre; les espèces des courbes sont en nombre indéfini, cercle, parabole, hyperbole, ellipse, etc.

Toutes les fois que l'extrémité de la quantité inconnue qui décrit le lieu suit une ligne droite ou circulaire, le lieu est dit *plan;* si elle décrit une parabole, une hyperbole ou une ellipse, le lieu est dit *solide;* pour d'autres courbes, on l'appelle lieu *de ligne.* Nous n'ajouterons rien sur ce dernier cas, car la connaissance du lieu *de ligne* se déduit très facilement, au moyen de réductions, de l'étude des lieux *plans* et *solides.*

Il est commode, pour établir les équations, de prendre les deux quantités inconnues sous un angle donné, que d'ordinaire nous supposerons droit, et de se donner la position et une extrémité de l'une d'elles; pourvu qu'aucune des deux quantités inconnues ne dépasse le carré, le lieu sera plan ou solide, ainsi qu'on le verra clairement ci-après.

Soit NZM (*fig.* 78) une droite donnée de position, dont on donne le

Fig. 78.



point N. Qu'on égale NZ à la quantité inconnue a, et la droite ZI (menée sous l'angle donné NZI) à l'autre quantité inconnue e.

Soit

$$da = be.$$

Le point I sera une droite donnée de position.

En effet, on aura $\frac{b}{d} = \frac{a}{e}$. Donc le rapport $\frac{a}{e}$ est donné, ainsi que l'angle en Z. Donc le triangle NIZ est donné d'espèce, donc l'angle INZ. Mais le point N est donné, ainsi que la position de la droite NZ. Donc NI sera donnée de position. La synthèse est facile.

On ramènera à cette équation toutes celles dont les termes sont soit donnés, soit formés par les inconnues a et e, multipliées par des droites données ou bien prises simplement.

$$z^{II} - da = be.$$

Soit posé $z^{II} = dr$. On aura $\frac{b}{d} = \frac{r-a}{e}$.

Soit pris MN $= r$; le point M sera donné et l'on aura MZ $= r - a$.

Le rapport $\frac{MZ}{ZI}$ sera donc donné, ainsi que l'angle en Z. Donc le triangle IZM sera donné d'espèce, et en joignant MI, on conclura que cette droite est donnée de position. Ainsi le point I sera sur une droite donnée de position, et la même conclusion se tirera sans difficulté pour toute équation qui aura des termes en a ou e seulement.

C'est là la première et plus simple équation de lieu, qui servira à trouver tous les lieux sur une ligne droite; par exemple la proposition 7 du Livre I d'Apollonius *Des lieux plans*, qui pourra dès lors s'énoncer et se construire plus généralement.

Cette équation renferme aussi la très belle proposition suivante, que nous avons découverte par son moyen :

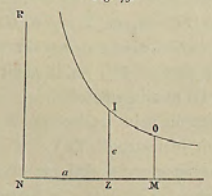
« *Soient, en nombre quelconque, des droites données de position, auxquelles on mène d'un même point des droites sous des angles donnés; si la somme des produits des droites ainsi menées par des données est égale à une aire donnée, le point d'où on les mène sera sur une droite donnée de position.* »

Nous omettons une infinité d'autres propositions, qui pourraient, à bon droit, être opposées à celles d'Apollonius.

Le second degré des équations de cette sorte se présente si $ae = z^{II}$, auquel cas le point I est sur une hyperbole.

Menez NR (*fig.* 79) parallèle à ZI; prenez sur NZ un point quel-

Fig. 79.



conque, soit M, par lequel vous mènerez MO parallèle à ZI. Con-

struisez le rectangle NMO égal à l'aire z^n. Par le point O, entre les asymptotes NR, NM, décrivez une hyperbole; elle sera donnée de position et passera par le point I, puisqu'on suppose ae, c'est-à-dire le rectangle NZI, équivalent au rectangle NMO.

On ramènera à cette équation toutes celles dont les termes sont, soit donnés, soit en a, en e ou en ae.

Ainsi soit $d^n + ae = ra + se$.

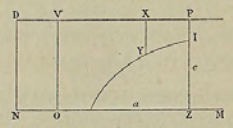
D'après les règles de l'art, on aura $ra + se - ae = d^n$. Formez un rectangle de deux côtés, qui donnent les termes : $ra + se - ae$. Ces deux côtés seront $a - s$ et $r - e$, et leur rectangle $ra + se - ae - rs$.

Si maintenant de d^n vous retranchez rs, le rectangle

$$(a - s)(r - e) = d^n - rs.$$

Prenez NO (*fig.* 80) égal à s, et ND, parallèle à ZI, égale à r. Par le

Fig. 80.



point D, menez DP parallèle à NM; par le point O, OV parallèle à ND; prolongez ZI jusqu'en P.

Puisque $NO = s$ et $NZ = a$, on a $a - s = OZ = VP$. De même, puisque $ND = ZP = r$ et $ZI = e$, on a $r - e = PI$. Le rectangle $PV \times PI$ est donc égal à l'aire donnée $d^n - rs$; le point I est donc sur une hyperbole ayant PV, VO pour asymptotes.

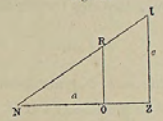
Si, en effet, prenant un point quelconque X et menant la parallèle XY, on construit le rectangle $VXY = d^n - rs$, et que par le point Y, entre les asymptotes PV, VO, on décrive une hyperbole, elle passera par le point I. L'analyse et la construction seront faciles dans tous les cas.

Le degré suivant des équations de lieu se présente si l'on a $a^2 = e^2$ ou si a^2 est à e^2 dans un rapport donné, ou encore si $a^2 + ae$ est à e^2 dans un rapport donné. Enfin ce cas comprend toutes les équations dont les termes vont jusqu'au carré, et sont en a^2, e^2 ou ae.

Dans tous ces cas, le point I est sur une ligne droite, ce qui est très facile à démontrer.

Si le rapport $\frac{NZ^2 + NZ.ZI}{ZI^2}$ est donné (*fig.* 81), qu'on mène une

Fig. 81.



parallèle quelconque OR, le rapport $\frac{NO^2 + NO.OR}{OR^2}$ sera le même, comme il est très facile de le prouver. Le point I sera donc sur une droite donnée de position.

Il en sera de même pour toutes les équations dont tous les termes seront affectés des carrés des inconnues ou de leur rectangle; il est inutile de détailler plus exactement les cas particuliers.

Si aux carrés des inconnues avec ou sans leur rectangle s'ajoutent des termes soit donnés absolument, soit produits d'une droite donnée par l'une des inconnues, la construction est plus difficile. Nous la ferons brièvement dans les différents cas, avec la démonstration.

Si $a^2 = de$, le point I est sur une parabole.

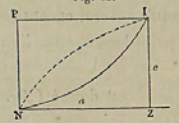
Soit (*fig.* 82) NP parallèle à ZI; avec NP pour diamètre, décrivez la parabole dont le paramètre est la droite donnée d et dont les ordonnées sont parallèles à NZ. Le point I sera sur cette parabole, qui est donnée de position.

En effet, d'après la construction, le rectangle $d \times NP = PI^2$, ou autrement $d \times IZ = NZ^2$, et par suite $de = a^2$.

On ramènera facilement à cette équation toutes celles où a^2 se ren-

contre avec des termes produits de e par des données, ou bien e^2 avec des termes produits de a par des données; il en sera de même, quand

Fig. 82.



l'équation comprendrait en outre des termes absolument donnés.

Soit

$$e^3 = da.$$

Dans la figure précédente, avec N pour sommet, NZ pour diamètre, décrivez la parabole dont le paramètre est d, et dont les ordonnées sont parallèles à la droite NP. Elle satisfera à la question, comme cela est évident.

Soit

$$b^3 - a^3 = de \qquad \text{ou, par conséquent,} \qquad b^3 - de = a^3.$$

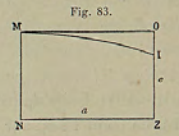
Divisez b^2 par d; soit $b^2 = dr$. On aura donc

$$dr - de = a^3 \qquad \text{ou} \qquad d(r - e) = a^3.$$

On aura ainsi ramené cette équation à la précédente en substituant $r - e$ à e.

Soit en effet menée MN (*fig.* 83) parallèle à ZI et égale à r, et par

Fig. 83.



le point M, MO parallèle à NZ. Le point M est donné, ainsi que la position de la droite MO. D'après cette construction, $OI = r - e$. Donc $d \times OI = NZ^2 = MO^2$.

La parabole décrite à partir du sommet M, sur le diamètre MN, avec

d comme paramètre et des ordonnées parallèles à NZ, satisfera à la question, comme il est clair d'après la construction.

Si $b^2 + a^2 = de$, on aura $de - b^2 = a^2$, etc., comme ci-dessus. On construira de même toutes les équations semblablement composées en a^2 et e.

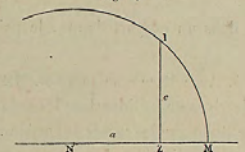
Mais a^2 se trouve souvent avec e^2 et des termes absolument donnés.

Soit $b^2 - a^2 = e^2$.

Le point I sera sur un cercle donné de position, si l'angle NZI est droit.

Soit pris NM (*fig.* 84) égal à b. Le cercle décrit de N comme centre, avec NM comme rayon, satisfera à la question, c'est-à-dire que quel

Fig. 84.



que soit le point I pris sur sa circonférence, ZI^2 (ou e^2) sera égal à NM^2 (ou b^2) $- NZ^2$ (ou a^2), comme il est clair.

On ramènera à cette équation toutes celles qui ont des termes en a^2, e^2, et en a ou e multipliés par des données, pourvu que l'angle NZI soit droit, et en outre que le coefficient de a^2 soit égal à celui de e^2.

Soit

$$b^2 - 2da - a^2 = e^2 + 2re.$$

Ajoutez de part et d'autre r^2 pour substituer $e + r$ à e, vous aurez

$$r^2 + b^2 - 2da - a^2 = e^2 + r^2 + 2re.$$

A $r^2 + b^2$ ajoutez d^2, pour substituer $d + a$ à a, et soit

$$r^2 + b^2 + d^2 = p^2.$$

On aura

$$p^2 - d^2 - 2da - a^2 = r^2 + b^2 - 2da - a^2,$$

car par construction

$$p^2 - d^2 = r^2 + b^2.$$

Si maintenant, au lieu de $a + d$, on prend a, et si, au lieu de $e + r$, on prend e, on aura

$$p^2 - a^2 = e^2.$$

L'équation sera ramenée à la précédente.

On y ramènera par un raisonnement semblable toutes les équations pareilles. Grâce à ce procédé, nous avons construit toutes les propositions du second Livre d'Apollonius *Sur les lieux plans*, et nous avons démontré que les six premières ont lieu pour des points quelconques, ce qui est assez remarquable et était peut-être ignoré d'Apollonius.

Mais soit $\frac{b^2 - a^2}{e^2}$ dans un rapport donné, le point I sera sur une ellipse.

Soit pris $MN = b$. Avec M comme sommet, NM comme diamètre, N comme centre, décrivez une ellipse dont les ordonnées soient parallèles à la droite ZI et telle que les carrés des ordonnées soient aux rectangles des segments du diamètre dans le rapport donné; le point I sera sur cette ellipse. Car $NM^2 - NZ^2$ est égal au rectangle des segments du diamètre.

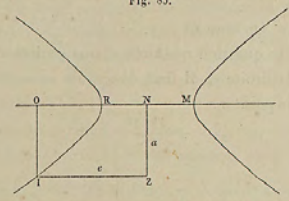
On ramènera à cette équation toutes celles où a^2 se trouve dans un membre, opposé à e^2 dans l'autre, sous un signe contraire, et avec un coefficient différent. Car, si les coefficients sont identiques et l'angle droit, le lieu sera un cercle, comme nous l'avons dit. D'ailleurs, quoique les coefficients soient les mêmes, le lieu sera une ellipse, si l'angle n'est pas droit.

Si les équations comprennent en outre des termes produits de a ou e par des données, la réduction se fera néanmoins par l'artifice que nous avons déjà employé.

Soit $\frac{a^2 + b^2}{e^2}$ dans un rapport donné, le point I est sur une hyperbole.

Menez NO (*fig.* 85) parallèle à ZI; soit $\frac{b^2}{NR^2}$ dans le rapport donné. Le point R sera donné. Avec R comme sommet, RO comme diamètre,

Fig. 85.



N comme centre, décrivez une hyperbole dont les ordonnées soient parallèles à NZ, et telles que la somme de RO^2 et du produit par RO du diamètre total [MR] soit à OI^2 dans le rapport donné $\frac{NR^2}{b^2}$.

Par conséquent, *componendo*, en prenant $MN = NR$, $\frac{MO \times OR + NR^2}{OI^2 + b^2}$ est dans le rapport donné $\frac{NR^2}{b^2}$.

Mais $MO \times OR + NR^2 = NO^2 = ZI^2 = e^2$ et $OI^2 + b^2 = NZ^2 (\text{ou } a^2) + b^2$.

Donc $\frac{e^2}{b^2 + a^2} = \frac{NR^2}{b^2}$, et, *convertendo*, $\frac{b^2 + a^2}{e^2}$ est le rapport donné.

Donc le point I est sur une hyperbole donnée de position.

Le même artifice que nous avons déjà employé ramènera à cette équation toutes celles où figurent a^2 et e^2 avec des termes donnés, soit simplement, soit en outre avec des termes produits de a ou e par des données, et où a^2 se trouve dans l'autre membre que e^2, mais sous le même signe. Car, si les signes étaient contraires, on conclurait à un cercle ou à une ellipse.

L'équation la plus difficile est celle où a^2 et e^2 figurent avec des termes en ae, et en outre des termes donnés, etc.

Soit $b^2 - 2a^2 = 2ae + e^2$.

Ajoutez de part et d'autre a^2 pour avoir $a + e$ comme racine de l'un des membres :

$$b^2 - a^2 = a^2 + 2ae + e^2.$$

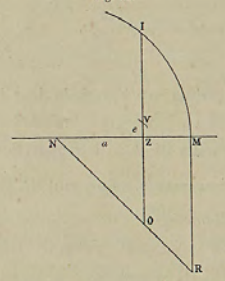
A $a + e$ substituons e, par exemple, et, d'après ce qui précède, soit le cercle MI (*fig.* 86) satisfaisant à la question : c'est-à-dire que

$$MN^2(=b^2) - NZ^2(=a^2) = ZI^2(=[a+e]^2).$$

Soit VI = NZ = a. On aura ZV = e.

Mais dans cette question nous cherchons seulement le point V ou l'extrémité de la droite e. Il faut donc voir et montrer sur quelle ligne se trouve le point V.

Fig. 86.



Soit MR parallèle à ZI et égale à MN. Joignez NR que IZ prolongée rencontre en O. Puisque MN = MR, NZ = ZO. Mais NZ = VI; donc, par addition, VO = ZI. Donc $MN^2 - NZ^2 = VO^2$. Mais le triangle NMR est donné d'espèce; donc le rapport $\frac{NM^2}{NR^2}$ est donné, donc le rapport $\frac{NZ^2}{NO^2}$, donc le rapport $\frac{MN^2 - NZ^2}{NR^2 - NO^2}$. Mais nous avons prouvé que $OV^2 = MN^2 - NZ^2$; donc le rapport $\frac{NR^2 - NO^2}{OV^2}$ est donné. Mais les points N et R sont donnés, ainsi que l'angle NOZ. Donc le point V, d'après ce qui a été démontré précédemment, est sur une ellipse.

Par un procédé analogue, on ramènera aux cas précédents tous les autres dans lesquels des termes en ae se rencontrent avec des termes les uns donnés, les autres en a^2 et e^2, ou encore produits de a et de e par des données; la discussion de ces différents cas est très facile, et

la question se résoudra toujours par le moyen d'un triangle connu d'espèce.

Nous avons donc embrassé dans un exposé bref et lucide tout ce que les anciens ont laissé inexpliqué sur les lieux plans et solides; par suite on reconnaîtra immédiatement quels lieux donnent tous les divers cas de la dernière proposition du Livre I d'Apollonius *Des lieux plans*, et on découvrira en général, sans grande difficulté, tout ce qui regarde cette matière.

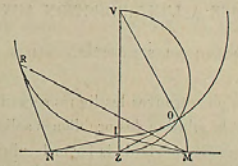
Comme couronnement de ce Traité, nous y ajouterons une très belle proposition, dont la facilité apparaîtra aussitôt.

Étant données de position des droites en nombre quelconque, si d'un même point on mène à chacune d'elles une droite sous un angle donné, et que la somme des carrés des droites menées soit égale à une aire donnée, le point est sur un lieu solide donné de position.

Un seul exemple suffit à indiquer le procédé général de construction.

Soient donnés deux points N et M (*fig.* 87), et soit à trouver le lieu des points tels que si l'on mène les droites IN, IM, la somme de leurs carrés soit au triangle INM dans un rapport donné.

Fig. 87.



Soit posé NM = b. Appelons e la droite ZI menée perpendiculairement, et a la distance NZ.

D'après les règles de l'art, $\frac{2a^2 + b^2 - 2ba + 2e^2}{be}$ est un rapport donné.

En résolvant les positions d'après les règles exposées, la construction se fera comme suit.

Prenez en Z le milieu de NM; élevez en Z la perpendiculaire ZV; soit dans le rapport donné $\frac{4ZV}{NM}$; sur VZ décrivez le demi-cercle VOZ, inscrivez ZO = ZM et joignez VO. De V comme centre avec VO pour rayon, décrivez le cercle OIR. Si d'un point quelconque R pris sur ce cercle, on mène RN, RM, je dis que $RN^2 + RM^2$ est au triangle RNM dans le rapport donné.

Si cette découverte eût précédé notre restitution déjà ancienne des deux Livres *Des lieux plans*, les constructions des théorèmes de lieux en eussent été rendues beaucoup plus élégantes; cependant nous ne regrettons pas cette production, quoique précoce et insuffisamment mûrie. Il y a en effet pour la Science un certain intérêt à ne pas dérober à la postérité les travaux encore informes de l'esprit; l'œuvre d'abord simple et grossière se fortifie et grandit par les nouvelles inventions. Il est même important pour l'étude de pouvoir contempler pleinement les progrès cachés de l'esprit et le développement spontané de l'art.

APPENDICE A L'INTRODUCTION AUX LIEUX

RENFERMANT LA SOLUTION DES PROBLÈMES SOLIDES PAR LES LIEUX.

Après la méthode pour trouver les lignes servant de lieux, il reste à chercher comment la solution des problèmes solides peut se déduire de ce que nous avons dit et cela de la façon la plus élégante. Dans ce but, il faut restreindre cette faculté des quantités inconnues de varier en dehors de leurs limites; car dans les lieux il y a une infinité de points qui satisfont à la question proposée.

Le plus commode est de déterminer la question au moyen de deux équations de lieux; car deux lignes-lieux données de position se

coupent mutuellement, et le point d'intersection, qui est donné de position, ramène la question de l'indéfini aux termes proposés.

Des exemples peuvent expliquer la chose brièvement et clairement. Soit proposé $a^3 + ba^2 = z''b$.

Il est commode d'égaler chacun des deux membres de l'équation au solide bae, en sorte qu'en divisant ce solide, d'un côté par a, de l'autre par b, la question soit ramenée à des lieux.

Puisque ainsi $a^3 + ba^2 = bae$, on aura $a^2 + ba = be$. Comme il est clair d'après notre méthode, l'extrémité de e sera sur une parabole donnée de position.

D'autre part $z''b = bae$; donc $z'' = ae$, et, d'après notre méthode, l'extrémité de e sera sur une hyperbole donnée de position. Mais nous avons déjà prouvé qu'elle est sur une parabole donnée de position. Elle est donc donnée de position, et il est facile de remonter de l'analyse à la synthèse.

La méthode sera la même pour toutes les équations cubiques; car, en ramenant d'un côté tous les termes solides où figure a, de l'autre le solide entièrement donné ou encore en laissant avec ce dernier des termes solides en a ou en a^2, on pourra former une équation semblable à celle du cas précédent.

Soit maintenant un exemple d'équations biquadratiques :

Soit $a^4 + b'''a + z^2a^2 = d^{IV}$, d'où $a^4 = d^{IV} - b'''a - z^2a^2$.

Égalons ces deux membres à z^2e^2. Puisque $a^4 = z^2e^2$, en extrayant la racine carrée, $a^2 = ze$; l'extrémité de e sera sur une parabole donnée de position.

D'autre part, puisque $d^{IV} - b'''a - z^2a^2 = z^2e^2$, en divisant tous les termes par z^2, on a $\frac{d^{IV} - b'''a}{z^2} - a^2 = e^2$. D'après notre méthode, l'extrémité de e sera sur un cercle donné de position. Mais elle est aussi sur une parabole donnée de position. Elle est donc donnée.

Le même procédé peut servir à résoudre toutes les équations biquadratiques; car, par la méthode de Viète (Cap. I : *De emend.*), on peut faire disparaître le terme affecté du cube, et en disposant d'un côté le

bicarré inconnu, de l'autre le reste des termes, on résoudra la question par une parabole et un cercle ou une hyperbole.

Soit proposé comme exemple de trouver deux moyennes proportionnelles.

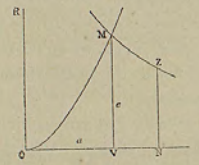
Soient deux droites, b la plus grande, d la plus petite, entre lesquelles il faut trouver deux moyennes proportionnelles.

Soit a la plus grande de ces moyennes, on aura $a^3 = b^2 d$. Égalez les deux termes à bae. On aura d'un côté $a^2 = be$, de l'autre $ae = bd$.

Par suite la question se résoudra par l'intersection d'une hyperbole et d'une parabole.

Soit une droite quelconque OVN (*fig.* 88) donnée de position, et le point O donné sur cette droite. Soient données les droites b et d, entre lesquelles il faut trouver deux moyennes proportionnelles. Supposons $OV = a$, et soit e la droite VM perpendiculaire à OV.

Fig. 88.



D'après la première équation ($a^2 = be$), il est clair qu'il faut décrire, avec le point O comme sommet, b comme paramètre et un diamètre parallèle à VM, une parabole dont les ordonnées soient parallèles à OV : cette parabole passera par le point M.

D'après la seconde équation ($bd = ae$), soit pris sur la droite OV un point quelconque N; élevez-y la perpendiculaire NZ, et soit $ON \times NZ = bd$. Élevez aussi la perpendiculaire OR. D'après notre méthode des lieux, il faut décrire une hyperbole passant par le point Z et ayant pour asymptotes RO, OV; elle sera donnée de position et passera par le point M.

Mais la parabole déjà décrite est aussi donnée de position et passe par le même point M; donc le point M est donné de position. Si on en abaisse la perpendiculaire MV, le point V est donné, donc la droite OV qui est la plus grande des deux moyennes proportionnelles que nous cherchons.

Ces deux moyennes peuvent donc être trouvées par l'intersection d'une parabole et d'une hyperbole.

Si l'on veut élever la question à une équation biquadratique, qu'on multiplie tous les termes par a :

$$a^4 = b^2 da.$$

En égalant, d'après la méthode précédente, chacun des deux membres à $b^2 e^2$, on aura deux équations, à savoir $a^2 = be$, et $da = e^2$, qui donneront chacune une parabole donnée de position. La construction des moyennes proportionnelles se fera donc ainsi par l'intersection de deux paraboles.

Ces deux constructions se trouvent dans Eutocius sur Archimède; elles s'expliquent immédiatement par cette méthode.

Il est donc inutile d'employer les *plaraplèroses climactiques* de Viète, pour ramener à des équations quadratiques les biquadratiques au moyen de cubiques à racine de deux dimensions. Car il est clair que les biquadratiques se résolvent avec la même élégance, la même facilité et la même rapidité que les cubiques, et il n'est pas possible, je crois, d'imaginer une solution plus élégante.

Pour faire ressortir l'élégance de cette méthode, voici la *construction de tous les problèmes cubiques et biquadratiques au moyen d'une parabole et d'un cercle.*

Soit $a^4 - z^{\text{III}} a = d^{\text{IV}}$, d'où $a^4 = z^{\text{III}} a + d^{\text{IV}}$.

Formez le carré de la différence de a^2 et de b^2 (ou d'un autre carré quelconque) : ce carré sera $a^4 + b^4 - 2b^2 a^2$.

Ajoutez, comme supplément, à chaque membre de l'équation : $b^4 - 2b^2 a^2$, on aura

$$a^4 + b^4 - 2b^2 a^2 = b^4 - 2b^2 a^2 + z^{\text{III}} a + d^{\text{IV}},$$

Soit $2b^2 = n^2$, et égalons chaque membre de l'équation à n^2e^2.

On aura d'un côté, en prenant la racine carrée, $a^2 - b^2 = ne$ et par suite l'extrémité de e sera sur une parabole, d'après notre méthode.

De l'autre côté, on aura $\frac{b^4}{n^2} - a^2 + \frac{z^{II}a}{n^2} + \frac{d^{IV}}{n^2} = e^2$, et, d'après notre méthode, l'extrémité de e sera sur un cercle.

Ainsi la question est résolue par le tracé d'une parabole et d'un cercle.

Cette méthode s'étend facilement à tous les cas, tant cubiques que biquadratiques. Il faut seulement prendre soin d'avoir dans un membre a^4, dans l'autre le reste des termes quelconques, à condition qu'il n'y en ait pas en a^3. Mais par l'*expurgation* de Viète on peut toujours, dans une équation biquadratique, faire disparaître le terme affecté du cube; la méthode reste donc la même dans tous les cas.

Quant aux équations cubiques, la méthode de Viète en fait disparaître le terme affecté du carré; en sorte qu'en multipliant tous les termes par a, on aura une équation biquadratique, où aucun terme ne sera affecté du cube; elle se résoudra donc par la méthode qui précède.

Il faut seulement prendre soin que, dans la seconde équation, on ait dans un membre a^2, dans l'autre e^2, sous des signes contraires, ce qui est toujours très facile.

Pour parcourir tous les cas, soit encore

$$a^4 = z^{II}a^2 - z^{III}d.$$

Formez le carré de a^2 moins un carré quelconque donné, soit b^2, vous aurez $a^4 + b^4 - 2a^2b^2$. Ajoutez, comme supplément aux deux membres de l'équation, $b^4 - 2a^2b^2$, on aura

$$a^4 + b^4 - 2a^2b^2 = b^4 - 2a^2b^2 + z^{II}a^2 - z^{III}d.$$

Pour faciliter la division, il faut, dans le second membre, prendre la différence entre $2b^2$ et z^{II}, soit par exemple n^2, et égaler chacun des deux membres à n^2e^2, en sorte que l'on ait : d'un côté, $a^2 - b^2 = ne$; de l'autre, $\frac{b^4}{n^2} - a^2 - \frac{z^{III}d}{n^2} = e^2$.

Il faut remarquer ici qu'il faut avoir $2b^2 > z^{II}$, autrement a^2 n'aurait pas le signe —, et, au lieu d'un cercle, nous trouverions une hyperbole. Mais le remède est facile. En effet, nous prenons b^2 arbitrairement, par suite rien n'est plus simple que de prendre son double supérieur à z^{II}. D'ailleurs notre méthode des lieux établit qu'on a toujours un cercle lorsque dans un des membres de l'équation se trouve un des carrés inconnus avec le signe +, et dans l'autre membre, l'autre carré inconnu avec le signe —.

Prenons, pour exemple de cette construction, l'invention des deux moyennes. On a $a^3 = b^2d$, d'où $a^4 = b^2da$. Ajoutez de part et d'autre $b^4 - 2b^2a^2$, il vient

$$a^4 + b^4 - 2b^2a^2 = b^4 + b^2da - 2a^2b^2.$$

Soit $2b^2 = n^2$, et égalez chacun des deux membres à n^2e^2.

On aura d'un côté : $a^2 - b^2 = ne$; l'extrémité de e est sur une parabole. De l'autre : $\frac{b^2}{2} + \frac{d}{2}a - a^2 = e^2$; l'extrémité de e sera sur un cercle.

Celui qui aura étudié ce qui précède n'essayera pas de ramener aux problèmes plans, c'est-à-dire de résoudre par les droites et le cercle les questions des moyennes proportionnelles, de la trisection de l'angle et autres semblables.