ANNÉE 1654.

LXIX.

FERMAT A PASCAL (1).

1654.

(*Œuvres de Pascal*, 1779, IV, p. 441-442.)

Monsieur,

Si j'entreprends de faire un point avec un seul dé en huit coups; si nous convenons, après que l'argent est dans le jeu, que je ne jouerai pas le premier coup, il faut, par mon principe, que je tire du jeu $\frac{1}{6}$ du total pour être désintéressé, à raison dudit premier coup.

Que si encore nous convenons après cela que je ne jouerai pas le second coup, je dois, pour mon indemnité, tirer le 6^{me} du restant, qui est $\frac{5}{36}$ du total.

Et si après cela nous convenons que je ne jouerai pas le troisième coup, je dois, pour mon indemnité, tirer le 6^{me} du restant, qui est $\frac{25}{216}$ du total.

Et si après cela nous convenons encore que je ne jouerai pas le quatrième coup, je dois tirer le 6^{me} du restant, qui est $\frac{125}{1296}$ du total, et je conviens avec vous que c'est la valeur du quatrième coup, supposé qu'on ait déjà traité des précédents.

Mais vous me proposez dans l'exemple dernier de votre lettre (je

(1) « Imprimée pour la première fois. Cette Lettre est sans date dans la copie que j'en ai; elle paroît répondre à une lettre de Pascal que je n'ai pu recouvrer. » (*Note de Bossut.*) — L'éditeur des *Œuvres de Pascal* a d'ailleurs placé cette Lettre entre celles numérotées ci-après LXXIV et LXXV.

mets vos propres termes) que si j'entreprends de trouver le six en huit coups et que j'en aie joué trois sans le rencontrer, si mon joueur me propose de ne point jouer mon quatrième coup et qu'il veuille me désintéresser à cause que je pourrois le rencontrer, il m'appartiendra $\frac{125}{1296}$ de la somme entière de nos mises.

Ce qui pourtant n'est pas vrai, suivant mon principe. Car, en ce cas, les trois premiers coups n'ayant rien acquis à celui qui tient le dé, la somme totale restant dans le jeu, celui qui tient le dé et qui convient de ne pas jouer son quatrième coup, doit prendre pour son indemnité $\frac{1}{6}$ du total.

Et s'il avoit joué quatre coups sans trouver le point cherché et qu'on convint qu'il ne joueroit pas le cinquième, il auroit de même pour son indemnité $\frac{1}{6}$ du total. Car la somme entière restant dans le jeu, il ne suit pas seulement du principe, mais il est de même du sens naturel que chaque coup doit donner un égal avantage.

Je vous prie donc que je sache si nous sommes conformes au principe, ainsi que je crois, ou si nous différons seulement en l'application.

Je suis, de tout mon cœur, etc.

Fermat.

LXX.

PASCAL A FERMAT.

Mercredi 29 juillet 1654.

(*Va*, p. 179-183.)

Monsieur,

1. L'impatience me prend aussi bien qu'à vous et, quoique je sois encore au lit, je ne puis m'empêcher de vous dire que je reçus hier au soir, de la part de M. de Carcavi, votre lettre sur les partis, que j'admire si fort que je ne puis vous le dire. Je n'ai pas le loisir de

m'étendre, mais, en un mot, vous avez trouvé les deux partis (¹) des dés et des parties dans la parfaite justesse : j'en suis tout satisfait, car je ne doute plus maintenant que je ne sois dans la vérité, après la rencontre admirable où je me trouve avec vous.

J'admire bien davantage la méthode des parties que celle des dés; j'avois vu plusieurs personnes trouver celle des dés, comme M. le chevalier de Méré, qui est celui qui m'a proposé ces questions, et aussi M. de Roberval : mais M. de Méré n'avoit jamais pu trouver la juste valeur des parties ni de biais pour y arriver, de sorte que je me trouvois seul qui eûsse connu cette proportion.

2. Votre méthode est très-sûre et est celle qui m'est la première venue à la pensée dans cette recherche; mais, parce que la peine des combinaisons est excessive, j'en ai trouvé un abrégé et proprement une autre méthode bien plus courte et plus nette, que je voudrois vous pouvoir dire ici en peu de mots : car je voudrois désormais vous ouvrir mon cœur, s'il se pouvoit, tant j'ai de joie de voir notre rencontre. Je vois bien que la vérité est la même à Toulouse et à Paris.

Voici à peu près comme je fais pour savoir la valeur de chacune des parties, quand deux joueurs jouent, par exemple, en *trois* parties, et chacun a mis 32 pistoles au jeu :

Posons que le premier en ait *deux* et l'autre *une;* ils jouent maintenant une partie, dont le sort est tel que, si le premier la gagne, il gagne tout l'argent qui est au jeu, savoir 64 pistoles; si l'autre la gagne, ils sont *deux* parties à *deux* parties, et par conséquent, s'ils veulent se séparer, il faut qu'ils retirent chacun leur mise, savoir chacun 32 pistoles.

(¹) *Parti* signifie ici répartition entre des joueurs, d'après leurs chances relatives, de la masse des enjeux, dans le cas où le jeu est abandonné avant sa fin.

Le *parti des dés* dont il s'agit ici paraît avoir été simplement demandé dans le cas où celui qui tient les dés a parié d'amener un point déterminé en un nombre de coups convenu (*voir* Lettre LXIX et ci-après, LXX, 7).

Quant au *parti des parties*, la question est clairement exposée ci-après (2 à 6). *Comparer,* à la suite du *Traité du triangle arithmétique* de Pascal, l'application qui en est faite à ce même problème (*Œuvres de Pascal,* édition de 1779, V, p. 32).

Considérez donc, Monsieur, que, si le premier gagne, il lui appartient 64; s'il perd, il lui appartient 32. Donc, s'ils veulent ne point hasarder cette partie et se séparer sans la jouer, le premier doit dire : « Je suis sûr d'avoir 32 pistoles, car la perte même me les donne; mais » pour les 32 autres, peut-être je les aurai, peut-être vous les aurez, le » hasard est égal. Partageons donc ces 32 pistoles par la moitié et me » donnez, outre cela, mes 32 qui me sont sûres. » Il aura donc 48 pistoles et l'autre 16.

Posons maintenant que le premier ait *deux* parties et l'autre *point,* et ils commencent à jouer une partie. Le sort de cette partie est tel que, si le premier la gagne, il tire tout l'argent, 64 pistoles; si l'autre la gagne, les voilà revenus au cas précédent, auquel le premier aura *deux* parties et l'autre *une.*

Or, nous avons déjà montré qu'en ce cas il appartient, à celui qui a les *deux* parties, 48 pistoles : donc, s'ils veulent ne point jouer cette partie, il doit dire ainsi : « Si je la gagne, je gagnerai tout, qui est 64; » si je la perds, il m'appartiendra légitimement 48 : donc donnez-moi » les 48 qui me sont certaines, au cas même que je perde, et partageons » les 16 autres par la moitié, puisqu'il y a autant de hasard que vous » les gagniez comme moi. » Ainsi il aura 48 et 8, qui sont 56 pistoles.

Posons enfin que le premier n'ait qu'*une* partie et l'autre *point.* Vous voyez, Monsieur, que, s'ils commencent une partie nouvelle, le sort en est tel que, si le premier la gagne, il aura *deux* parties à *point,* et partant, par le cas précédent, il lui appartient 56; s'il la perd, ils sont partie à partie : donc il lui appartient 32 pistoles. Donc il doit dire : « Si vous voulez ne la pas jouer, donnez-moi 32 pistoles qui me sont » sûres, et partageons le reste de 56 par la moitié. De 56 ôtez 32, » reste 24; partagez donc 24 par la moitié, prenez-en 12 et moi 12, » qui, avec 32, font 44. »

Or, par ce moyen, vous voyez, par les simples soustractions, que, pour la première partie, il appartient sur l'argent de l'autre 12 pistoles; pour la seconde, autres 12; et pour la dernière, 8.

Or, pour ne plus faire de mystère, puisque vous voyez aussi bien

tout à découvert et que je n'en faisois que pour voir si je ne me trompois pas, la valeur (j'entends sa valeur sur l'argent de l'autre seulement) de la dernière partie de *deux* est double de la < dernière > partie de *trois* et quadruple de la dernière partie de *quatre* et octuple de la dernière partie de *cinq*, etc.

3. Mais la proportion des premières parties n'est pas si aisée à trouver : elle est donc ainsi, car je ne veux rien déguiser, et voici le problème dont je faisois tant de cas, comme en effet il me plaît fort :

Étant donné tel nombre de parties qu'on voudra, trouver la valeur de la première.

Soit le nombre des parties donné, par exemple 8. Prenez les *huit* premiers nombres pairs et les *huit* premiers nombres impairs, savoir :

2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16

et

1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15.

Multipliez les nombres pairs en cette sorte : le premier par le second, le produit par le troisième, le produit par le quatrième, le produit par le cinquième, etc.; multipliez les nombres impairs de la même sorte : le premier par le second, le produit par le troisième, etc.

Le dernier produit des pairs est le *dénominateur* et le dernier produit des impairs est le *numérateur* de la fraction qui exprime la valeur de la première partie de *huit* : c'est-à-dire que, si on joue chacun le nombre de pistoles exprimé par le produit des pairs, il en appartiendroit sur l'argent de l'autre le nombre exprimé par le produit des impairs.

Ce qui se démontre, mais avec beaucoup de peine, par les combinaisons telles que vous les avez imaginées, et je n'ai pu le démontrer par cette autre voie que je viens de vous dire, mais seulement par celle des combinaisons. Et voici les propositions qui y mènent, qui sont proprement des propositions arithmétiques touchant les combinaisons, dont j'ai d'assez belles propriétés :

4. Si d'un nombre quelconque de lettres, par exemple de 8 :

A, B, C, D, E, F, G, H,

vous en prenez toutes les combinaisons possibles de 4 lettres et ensuite toutes les combinaisons possibles de 5 lettres, et puis de 6, de 7 et de 8, etc., et qu'ainsi vous preniez toutes les combinaisons possibles depuis la multitude qui est la moitié de la toute jusqu'au tout, je dis que, si vous joignez ensemble la moitié de la combinaison de 4 avec chacune des combinaisons supérieures, la somme sera le nombre tantième de la progression quaternaire à commencer par le binaire, qui est la moitié de la multitude.

Par exemple, et je vous le dirai en latin, car le français n'y vaut rien :

Si quotlibet litterarum, verbi gratia octo :

A, B, C, D, E, F, G, H,

sumantur omnes combinationes quaternarii, quinquenarii, senarii, etc., usque ad octonarium, dico, si jungas dimidium combinationis quaternarii, nempe 35 (*dimidium* 70), *cum omnibus combinationibus quinquenarii, nempe* 56, *plus omnibus combinationibus senarii, nempe* 28, *plus omnibus combinationibus septenarii, nempe* 8, *plus omnibus combinationibus octonarii, nempe* 1, *factum esse quartum numerum progressionis quaternarii cujus origo est* 2 : *dico quartum numerum, quia* 4 *octonarii dimidium est.*

Sunt enim numeri progressionis quaternarii, cujus origo est 2, *isti :*

2, 8, 32, 128, 512, *etc.*,

quorum 2 *primus est*, 8 *secundus*, 32 *tertius et* 128 *quartus : cui* 128 *æquantur*

+ 35 *dimidium combinationis* 4 *litterarum*
+ 56 *combinationis* 5 *litterarum*
+ 28 *combinationis* 6 *litterarum*
+ 8 *combinationis* 7 *litterarum*
+ 1 *combinationis* 8 *litterarum.*

5. Voilà la première proposition qui est purement arithmétique; l'autre regarde la doctrine des parties et est telle :

Il faut dire auparavant : si on a *une* partie de 5, par exemple, et qu'ainsi il en manque 4, le jeu sera infailliblement décidé en 8, qui est double de 4.

La valeur de la première partie de 5 sur l'argent de l'autre est la fraction qui a pour numérateur la moitié de la combinaison de 4 sur 8 (je prends 4 parce qu'il est égal au nombre des parties qui manque, et 8 parce qu'il est double de 4) et pour dénominateur ce même numérateur plus toutes les combinaisons supérieures.

Ainsi, si j'ai *une* partie de 5, il m'appartient, sur l'argent de mon joueur, $\frac{35}{128}$: c'est-à-dire que, s'il a mis 128 pistoles, j'en prends 35 et lui laisse le reste, 93.

Or cette fraction $\frac{35}{128}$ est la même que celle-là : $\frac{105}{384}$, laquelle est faite par la multiplication des pairs pour le dénominateur et la multiplication des impairs pour le numérateur.

Vous verrez bien sans doute tout cela, si vous vous en donnez tant soit peu la peine : c'est pourquoi je trouve inutile de vous en entretenir davantage.

6. Je vous envoie néanmoins une de mes vieilles Tables; je n'ai pas le loisir de la copier, je la referai.

Vous y verrez comme toujours que la valeur de la première partie est égale à celle de la seconde, ce qui se trouve aisément par les combinaisons.

Vous verrez de même que les nombres de la première ligne augmentent toujours; ceux de la seconde de même; ceux de la troisième de même.

Mais ensuite ceux de la quatrième diminuent; ceux de la cinquième, etc. Ce qui est étrange.

Si on joue chacun 256 en

Il m'appartient, sur les 256 pistoles de mon joueur, pour la

	6 parties.	5 parties.	4 parties.	3 parties.	2 parties.	1 partie.
1re partie	63	70	80	96	128	256
2e partie	63	70	80	96	128	
3e partie	56	60	64	64		
4e partie	42	40	32			
5e partie	24	16				
6e partie	8					

Si on joue 256 chacun en

Il m'appartient, sur les 256 de mon joueur, pour

	6 parties.	5 parties.	4 parties.	3 parties.	2 parties.	1 partie.
la 1re partie	63	70	80	96	128	256
les 2 premières parties	126	140	160	192	256	
les 3 premières parties	182	200	224	256		
les 4 premières parties	224	240	256			
les 5 premières parties	248	256				
les 6 premières parties	256					

7. Je n'ai pas le temps de vous envoyer la démonstration d'une difficulté qui étonnoit fort M. < de Méré >, car il a très bon esprit, mais il n'est pas géomètre (c'est, comme vous savez, un grand défaut) et

même il ne comprend pas qu'une ligne mathématique soit divisible à l'infini et croit fort bien entendre qu'elle est composée de points en nombre fini, et jamais je n'ai pu l'en tirer. Si vous le pouviez faire, on le rendroit parfait.

Il me disoit donc qu'il avoit trouvé fausseté dans les nombres par cette raison :

Si on entreprend de faire un *six* avec un dé, il y a avantage de l'entreprendre en 4, comme de 671 à 625.

Si on entreprend de faire *sonnés* avec deux dés, il y a désavantage de l'entreprendre en 24.

Et néanmoins 24 est à 36 (qui est le nombre des faces de deux dés) comme 4 à 6 (qui est le nombre des faces d'un dé).

Voilà quel étoit son grand scandale qui lui faisoit dire hautement que les propositions n'étoient pas constantes et que l'Arithmétique se démentoit : mais vous en verrez bien aisément la raison par les principes où vous êtes.

Je mettrai par ordre tout ce que j'en ai fait, quand j'aurai achevé des Traités géométriques où je travaille il y a déjà quelque temps.

8. J'en ai fait aussi d'arithmétiques, sur le sujet desquels je vous supplie de me mander votre avis sur cette démonstration.

Je pose le lemme que tout le monde sait : que la somme de tant de nombres qu'on voudra de la progression continue depuis l'unité, comme

$$1,\ 2,\ 3,\ 4,$$

étant prise deux fois, est égale au dernier, 4, mené dans le prochainement plus grand, 5 : c'est-à-dire que la somme des nombres contenus dans A, étant prise deux fois, est égale au produit

$$A\ in\ (A+1).$$

Maintenant je viens à ma proposition :

Duorum quorumlibet cuborum proximorum differentia, unitate demptâ, sextupla est omnium numerorum in minoris radice contentorum.

Sint duæ radices R, S unitate differentes : dico

$R^3 - S^3 - 1$ *æquari summæ numerorum in S contentorum sexies sumptæ.*

Etenim S vocetur A : ergo R est

$$A+1.$$

Igitur cubus radicis R, seu $A+1$, *est*

$$A^3+3A^2+3A+1^3.$$

Cubus vero S, seu A, est

$$A^3,$$

et horum differentia est

$$3A^2+3A+1^3,$$

id est $R^3 - S^3$; *igitur, si auferatur unitas,*

$$3A^2+3A \quad æq. \quad R^3-S^3-1.$$

Sed duplum summæ numerorum in A seu S contentorum æquatur, ex lemmate,

$$A\ in\ (A+1), \quad hoc\ est \quad A^2+A ;$$

igitur sextuplum summæ numerorum in A contentorum æquatur

$$3A^2+3A.$$

Sed

$$3A^2+3A \quad æq. \quad R^3-S^3-1;$$

igitur

$R^3 - S^3 - 1$ *æq. sextuplo summæ numerorum in A seu S contentorum.*

Quod erat demonstrandum.

On ne m'a pas fait de difficulté là-dessus, mais on m'a dit qu'on ne m'en faisoit pas par cette raison que tout le monde est accoutumé aujourd'hui à cette méthode; et moi je prétends que, sans me faire grâce, on doit admettre cette démonstration comme d'un genre excellent : j'en attends néanmoins votre avis avec toute soumission.

Tout ce que j'ai démontré en Arithmétique est de cette nature.

9. Voici encore deux difficultés :

J'ai démontré une proposition plane en me servant du cube d'une ligne comparé au cube d'une autre : je prétends que cela est purement géométrique et dans la sévérité la plus grande.

De même j'ai résolu le problème :

De quatre plans, quatre points et quatre sphères, quatre quelconques étant donnés, trouver une sphère qui, touchant les sphères données, passe par les points donnés et laisse sur les plans des portions de sphères capables d'angles donnés,

et celui-ci :

De trois cercles, trois points, trois lignes, < trois > quelconques étant donnés, trouver un cercle qui, touchant les cercles et les points, laisse sur les lignes un arc capable d'angle donné.

J'ai résolu ces problèmes *plainement*, n'employant dans la construction que des cercles et des lignes droites; mais, dans la démonstration, je me sers de lieux solides, de paraboles ou hyperboles : je prétends néanmoins qu'attendu que la construction est plane, ma solution est plane et doit passer pour telle.

C'est bien mal reconnaître l'honneur que vous me faites de souffrir mes entretiens que de vous importuner si longtemps; je ne pense jamais vous dire que deux mots, et si je ne vous dis pas ce que j'ai le plus sur le cœur, qui est que, plus je vous connois, plus je vous admire et vous honore et que, si vous voyiez à quel point cela est, vous donneriez une place dans votre amitié à celui qui est, Monsieur, votre etc.

LXXI.

FERMAT A CARCAVI (1).

DIMANCHE 9 AOUT 1654.

(*Œuvres de Pascal*, IV, p. 444-445.)

MONSIEUR,

1. J'ai été ravi d'avoir eu des sentiments conformes à ceux de M. Pascal, car j'estime infiniment son génie et je le crois très capable de venir à bout de tout ce qu'il entreprendra. L'amitié qu'il m'offre m'est si chère et si considérable que je crois ne devoir point faire difficulté d'en faire quelque usage en l'impression de mes Traités.

Si cela ne vous choquoit point, vous pourriez tous deux procurer cette impression, de laquelle je consens que vous soyez les maîtres; vous pourriez éclaircir ou augmenter ce qui semble trop concis et me décharger d'un soin que mes occupations m'empêchent de prendre. Je désire même que cet Ouvrage paroisse sans mon nom, vous remettant, à cela près, le choix de toutes les désignations qui pourront marquer le nom de l'auteur que vous qualifierez votre ami.

2. Voici le biais que j'ai imaginé pour la seconde Partie qui contiendra mes inventions pour les nombres. C'est un travail qui n'est encore qu'une idée, et que je n'aurois pas le loisir de coucher au long sur le papier; mais j'enverrai succinctement à M. Pascal tous mes principes et mes premières démonstrations, de quoi je vous réponds à l'avance qu'il tirera des choses non seulement nouvelles et jusqu'ici inconnues, mais encore surprenantes.

Si vous joignez votre travail avec le sien, tout pourra succéder et

(1) L'autographe de cette lettre a fait partie de la Collection Benjamin Fillon et a passé en vente le 16 février 1877 (*Inventaire des autographes et des documents historiques composant la collection de M. Benjamin Fillon*, séries I et II. Paris, Étienne Charavay, 1877, p. 9-10). On trouve reproduit dans ce catalogue le § 1 de cette lettre, et de plus, facsimilés, la signature, la date et les mots « Vostre tres humble et tres obeissant serviteur », ces derniers supprimés dans l'édition.

s'achever dans peu de temps, et cependant on pourra mettre au jour la première Partie que vous avez en votre pouvoir.

Si M. Pascal goûte mon ouverture, qui est principalement fondée sur la grande estime que je fais de son génie, de son savoir et de son esprit, je commencerai d'abord à vous faire part de mes inventions numériques. Adieu.

Je suis, Monsieur, votre très humble et très obéissant serviteur,

FERMAT.

A Toulouse, ce 9 août 1654.

LXXII.

PASCAL A FERMAT.

LUNDI 24 AOUT 1654.

(*Va*, p. 184-188.)

MONSIEUR,

1. Je ne pus vous ouvrir ma pensée entière touchant les partis de plusieurs joueurs par l'ordinaire passé, et même j'ai quelque répugnance à le faire, de peur qu'en ceci cette admirable convenance, qui étoit entre nous et qui m'étoit si chère, ne commence à se démentir, car je crains que nous ne soyons de différents avis sur ce sujet. Je vous veux ouvrir toutes mes raisons, et vous me ferez la grâce de me redresser, si j'erre, ou de m'affermir, si j'ai bien rencontré. Je vous le demande tout de bon et sincèrement, car je ne me tiendrai pour certain que quand vous serez de mon côté.

Quand il n'y a que *deux* joueurs, votre méthode, qui procède par les combinaisons, est très sûre; mais, quand il y en a *trois*, je crois avoir démonstration qu'elle est mal juste, si ce n'est que vous y procédiez de quelque autre manière que je n'entends pas. Mais la méthode que je vous ai ouverte et dont je me sers partout est commune à

toutes les conditions imaginables de toutes sortes de partis, au lieu que celle des combinaisons (dont je ne me sers qu'aux rencontres particulières où elle est plus courte que la générale) n'est bonne qu'en ces seules occasions et non pas aux autres.

Je suis sûr que je me donnerai à entendre, mais il me faudra un peu de discours et à vous un peu de patience.

2. Voici comment vous procédez quand il y a *deux* joueurs :

Si deux joueurs, jouant en plusieurs parties, se trouvent en cet état qu'il manque *deux* parties au premier et *trois* au second, pour trouver le parti, il faut, dites-vous, voir en combien de parties le jeu sera décidé absolument.

Il est aisé de supputer que ce sera en *quatre* parties, d'où vous concluez qu'il faut voir combien quatre parties se combinent entre deux joueurs et voir combien il y a de combinaisons pour faire gagner le premier et combien pour le second et partager l'argent suivant cette proportion. J'eusse eu peine à entendre ce discours-là, si je ne l'eusse su de moi-même auparavant; aussi vous l'aviez écrit dans cette pensée. Donc, pour voir combien quatre parties se combinent entre deux joueurs, il faut imaginer qu'ils jouent avec un dé à deux faces (puisqu'ils ne sont que deux joueurs), comme à croix et pile, et qu'ils jettent quatre de ces dés (parce qu'ils jouent en quatre parties); et maintenant il faut voir combien ces dés peuvent avoir d'assiettes différentes. Cela est aisé à supputer : ils en peuvent avoir *seize* qui est le second degré de *quatre*, c'est-à-dire le quarré. Car figurons-nous qu'une des faces est marquée a, favorable au premier joueur, et l'autre b, favorable au second; donc ces quatre dés peuvent s'asseoir sur une de ces seize assiettes :

a	a	a	a	a	a	a	a	b	b	b	b	b	b	b	b
a	a	a	a	b	b	b	b	a	a	a	a	b	b	b	b
a	a	b	b	a	a	b	b	a	a	b	b	a	a	b	b
a	b	a	b	a	b	a	b	a	b	a	b	a	b	a	b
1	1	1	1	1	1	1	2	1	1	1	2	1	2	2	2

et, parce qu'il manque deux parties au premier joueur, toutes les faces qui ont deux *a* le font gagner : donc il en a 11 pour lui; et parce qu'il y manque trois parties au second, toutes les faces où il y a trois *b* le peuvent faire gagner : donc il y en a 5. Donc il faut qu'ils partagent la somme comme 11 à 5.

Voilà votre méthode quand il y a *deux* joueurs; sur quoi vous dites que, s'il y en a davantage, il ne sera pas difficile de faire les partis par la même méthode.

3. Sur cela, Monsieur, j'ai à vous dire que ce parti pour deux joueurs, fondé sur les combinaisons, est très juste et très bon; mais que, s'il y a plus de deux joueurs, il ne sera pas toujours juste et je vous dirai la raison de cette différence.

Je communiquai votre méthode à nos Messieurs, sur quoi M. de Roberval me fit cette objection :

Que c'est à tort que l'on prend l'art de faire le parti sur la supposition qu'on joue en *quatre* parties, vu que, quand il manque *deux* parties à l'un et *trois* à l'autre, il n'est pas de nécessité que l'on joue *quatre* parties, pouvant arriver qu'on n'en jouera que *deux* ou *trois*, ou à la vérité peut-être *quatre;*

Et ainsi qu'il ne voyoit pas pourquoi on prétendoit de faire le parti juste sur une condition feinte qu'on jouera *quatre* parties, vu que la condition naturelle du jeu est qu'on ne jouera plus dès que l'un des joueurs aura gagné, et qu'au moins, si cela n'étoit faux, cela n'étoit pas démontré, de sorte qu'il avoit quelque soupçon que nous avions fait un paralogisme.

Je lui répondis que je ne me fondois pas tant sur cette méthode des combinaisons, laquelle véritablement n'est pas en son lieu en cette occasion, comme sur mon autre méthode universelle, à qui rien n'échappe et qui porte sa démonstration avec soi, qui trouve le même parti précisément que celle des combinaisons; et de plus je lui démontrai la vérité du parti entre deux joueurs par les combinaisons en cette sorte :

N'est-il pas vrai que, si deux joueurs, se trouvant en cet état de

l'hypothèse qu'il manque *deux* parties à l'un et *trois* à l'autre, conviennent maintenant de gré à gré qu'on joue *quatre* parties complètes, c'est-à-dire qu'on jette les quatre dés à deux faces tous à la fois, n'est-il pas vrai, dis-je, que, s'ils ont délibéré de jouer les quatre parties, le parti doit être, tel que nous avons dit, suivant la multitude des assiettes favorables à chacun?

Il en demeura d'accord et cela en effet est démonstratif; mais il nioit que la même chose subsistât en ne s'astreignant pas à jouer les *quatre* parties. Je lui dis donc ainsi :

N'est-il pas clair que les mêmes joueurs, n'étant pas astreints à jouer < les > quatre parties, mais voulant quitter le jeu dès que l'un auroit atteint son nombre, peuvent sans dommage ni avantage s'astreindre à jouer les quatre parties entières et que cette convention ne change en aucune manière leur condition? Car, si le premier gagne les deux premières parties de *quatre* et qu'ainsi il ait gagné, refusera-t-il de jouer encore deux parties, vu que, s'il les gagne, il n'a pas mieux gagné, et s'il les perd, il n'a pas moins gagné? car ces deux que l'autre a gagné ne lui suffisent pas, puisqu'il lui en faut trois, et ainsi il n'y a pas assez de quatre parties pour faire qu'ils puissent tous deux atteindre le nombre qui leur manque.

Certainement il est aisé de considérer qu'il est absolument égal et indifférent à l'un et à l'autre de jouer en la condition naturelle à leur jeu, qui est de finir dès qu'un aura son compte, ou de jouer les quatre parties entières : donc, puisque ces deux conditions sont égales et indifférentes, le parti doit être tout pareil en l'une et en l'autre. Or, il est juste quand ils sont obligés de jouer quatre parties, comme je l'ai montré : donc il est juste aussi en l'autre cas.

Voilà comment je le démontrai et, si vous y prenez garde, cette démonstration est fondée sur l'égalité des deux conditions, vraie et feinte, à l'égard de deux joueurs, et qu'en l'une et en l'autre un même gagnera toujours et, si l'un gagne ou perd en l'une, il gagnera ou perdra en l'autre et jamais deux n'auront leur compte.

4. Suivons la même pointe pour *trois* joueurs et posons qu'il manque

une partie au premier, qu'il en manque *deux* au second et *deux* au troisième. Pour faire le parti, suivant la même méthode des combinaisons, il faut chercher d'abord en combien de parties le jeu sera décidé, comme nous avons fait quand il y avoit deux joueurs : ce sera en *trois*, car ils ne sauroient jouer *trios* parties sans que la décision soit arrivée nécessairement.

Il faut voir maintenant combien trois parties se combinent entre trois joueurs et combien il y en a de favorables à l'un, combien à l'autre et combien au dernier et, suivant cette proportion, distribuer l'argent de même qu'on a fait en l'hypothèse de deux joueurs.

Pour voir combien il y a de combinaisons en tout, cela est aisé : c'est la troisième puissance de 3, c'est-à-dire son cube 27. Car, si on jette *trois* dés à la fois (puisqu'il faut jouer trois parties), qui aient chacun *trois* faces (puisqu'il y a trois joueurs), l'une marquée *a* favorable au premier, l'autre *b* pour le second, l'autre *c* pour le troisième, il est manifeste que ces trois dés jetés ensemble peuvent s'asseoir sur 27 assiettes différentes, savoir :

a	*a*	*a*	*a*	*a*	*a*	*a*	*a*	*a*	*b*	*b*	*b*	*b*	*b*	*b*	*b*	*b*	*b*	*c*	*c*	*c*	*c*	*c*	*c*	*c*	*c*	*c*
a	*a*	*a*	*b*	*b*	*b*	*c*	*c*	*c*	*a*	*a*	*a*	*b*	*b*	*b*	*c*	*c*	*c*	*a*	*a*	*a*	*b*	*b*	*b*	*c*	*c*	*c*
a	*b*	*c*	*a*	*b*	*c*	*a*	*b*	*c*	*a*	*b*	*c*	*a*	*b*	*c*	*a*	*b*	*c*	*a*	*b*	*c*	*a*	*b*	*c*	*a*	*b*	*c*
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1			1			1	1	1	1			1		
			2						2			2	2	2		2						2					
								3							3			3			3	3	3	3		

Or, il ne manque qu'*une* partie au premier : donc toutes les assiettes où il y a un *a* sont pour lui : donc il y en a 19.

Il manque *deux* parties au second : donc toutes les assiettes où il y a deux *b* sont pour lui : donc il y en a 7.

Il manque *deux* parties au troisième; donc toutes les assiettes où il y a deux *c* sont pour lui; donc il y en a 7.

Si de là on concluoit qu'il faudroit donner à chacun suivant la proportion de 19, 7, 7, on se tromperoit trop grossièrement et je n'ai garde de croire que vous le fassiez ainsi; car il y a quelques faces

favorables au premier et au second tout ensemble, comme *abb*, car le premier y trouve un *a* qu'il lui faut, et le second deux *b* qui lui manquent; et ainsi *acc* est pour le premier et le troisième.

Donc il ne faut pas compter ces faces qui sont communes à deux comme valant la somme entière à chacun, mais seulement la moitié. Car, s'il arrivoit l'assiette *acc*, le premier et le troisième auroient même droit à la somme, ayant chacun leur compte, donc ils partageroient l'argent par la moitié; mais s'il arrive l'assiette *aab*, le premier gagne seul. Il faut donc faire la supputation ainsi :

Il y a 13 assiettes qui donnent l'entier au premier et 6 qui lui donnent la moitié et 8 qui ne lui valent rien : donc, si la somme entière est une pistole, il y a 13 faces qui lui valent chacune une pistole, il y a 6 faces qui lui valent chacune $\frac{1}{2}$ pistole et 8 qui ne valent rien.

Donc, en cas de parti, il faut multiplier

	13 par une pistole,	qui font	13
	6 par une demi,	qui font	3
	8 par zéro,	qui font	0
Somme...	27	Somme...	16

et diviser la somme des valeurs, 16, par la somme des assiettes, 27, qui fait la fraction $\frac{16}{27}$, qui est ce qui appartient au premier en cas de parti, savoir 16 pistoles de 27.

Le parti du second et du troisième joueur se trouvera de même :

Il y a	4 assiettes qui lui valent 1 pistole : multipliez...		4
Il y a	3 assiettes qui lui valent $\frac{1}{2}$ pistole : multipliez...		$1\frac{1}{2}$
Et	20 assiettes qui ne lui valent rien.....		0
Somme...	27	Somme...	$5\frac{1}{2}$

Donc il appartient au second joueur 5 pistoles et $\frac{1}{2}$ sur 27, et autant au troisième, et ces trois sommes, $5\frac{1}{2}$, $5\frac{1}{2}$ et 16, étant jointes, font les 27.

5. Voilà, ce me semble, de quelle manière il faudroit faire les partis par les combinaisons suivant votre méthode, si ce n'est que vous ayez quelque autre chose sur ce sujet que je ne puis savoir. Mais, si je ne me trompe, ce parti est mal juste.

La raison en est qu'on suppose une chose fausse, qui est qu'on joue

en *trois* parties infailliblement, au lieu que la condition naturelle de ce jeu-là est qu'on ne joue que jusques à ce qu'un des joueurs ait atteint le nombre de parties qui lui manque, auquel cas le jeu cesse.

Ce n'est pas qu'il ne puisse arriver qu'on joue trois parties, mais il peut arriver aussi qu'on n'en jouera qu'une ou deux, et rien de nécessité.

Mais d'où vient, dira-t-on, qu'il n'est pas permis de faire en cette rencontre la même supposition feinte que quand il y avoit deux joueurs? En voici la raison :

Dans la condition véritable de ces trois joueurs, il n'y en a qu'un qui peut gagner, car la condition est que, dès qu'un a gagné, le jeu cesse. Mais, en la condition feinte, deux peuvent atteindre le nombre de leurs parties : savoir, si le premier en gagne une qui lui manque, et un des autres, deux qui lui manquent; car ils n'auront joué que trois parties, au lieu que, quand il n'y avoit que deux joueurs, la condition feinte et la véritable convenoient pour les avantages des joueurs en tout; et c'est ce qui met l'extrême différence entre la condition feinte et la véritable.

Que si les joueurs, se trouvant en l'état de l'hypothèse, c'est-à-dire s'il manque *une* partie au premier et *deux* au second et *deux* au troisième, veulent maintenant de gré à gré et conviennent de cette condition qu'on jouera *trois* parties complètes, et que ceux qui auront atteint le nombre qui leur manque prendront la somme entière, s'ils se trouvent seuls qui l'aient atteint, ou, s'il se trouve que deux l'aient atteint, qu'ils la partageront également, *en ce cas*, le parti se doit faire comme je viens de le donner, que le premier ait 16, le second $5\frac{1}{2}$, le troisième $5\frac{1}{2}$, de 27 pistoles, et cela porte sa démonstration de soi-même en supposant cette condition ainsi.

Mais s'ils jouent simplement à condition, non pas qu'on joue nécessairement trois parties, mais seulement jusques à ce que l'un d'entre eux ait atteint ses parties, et qu'alors le jeu cesse sans donner moyen à un autre d'y arriver, lors il appartient au premier 17 pistoles, au second 5, au troisième 5, de 27.

Et cela se trouve par ma méthode générale qui détermine aussi

qu'en la condition précédente, il en faut 16 au premier, $5\frac{1}{2}$ au second, et $5\frac{1}{2}$ au troisième, sans se servir des combinaisons, car elle va partout seule et sans obstacle.

6. Voilà, Monsieur, mes pensées sur ce sujet sur lequel je n'ai d'autre avantage sur vous que celui d'y avoir beaucoup plus médité; mais c'est peu de chose à votre égard, puisque vos premières vues sont plus pénétrantes que la longueur de mes efforts.

Je ne laisse pas de vous ouvrir mes raisons pour en attendre le jugement de vous. Je crois vous avoir fait connoître par là que la méthode des combinaisons est bonne entre deux joueurs par accident, comme elle l'est aussi quelquefois entre trois joueurs, comme quand il manque *une* partie à l'un, *une* à l'autre et *deux* à l'autre, parce qu'en ce cas le nombre des parties dans lesquelles le jeu sera achevé ne suffit pas pour en faire gagner deux; mais elle n'est pas générale et n'est bonne généralement qu'au cas seulement qu'on soit astreint à jouer un certain nombre de parties exactement.

De sorte que, comme vous n'aviez pas ma méthode quand vous m'avez proposé le parti de plusieurs joueurs, mais seulement celle des combinaisons, je crains que nous soyons de sentimens différens sur ce sujet.

Je vous supplie de me mander de quelle sorte vous procédez en la recherche de ce parti. Je recevrai votre réponse avec respect et avec joie, quand même votre sentiment me seroit contraire. Je suis etc.

LXXIII.

FERMAT A PASCAL (1).

SAMEDI 29 AOUT 1654.

(*Œuvres de Pascal*, IV, p. 435-437.)

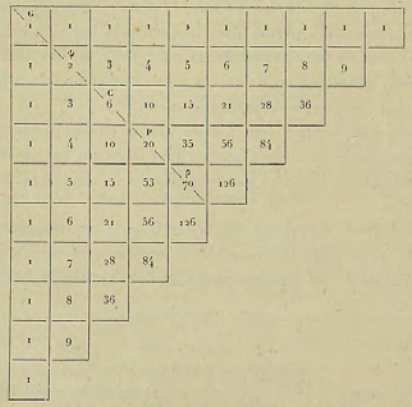
MONSIEUR,

1. Nos coups fourrés continuent toujours et je suis aussi bien que

(1) Cette lettre a été écrite par Fermat avant qu'il eût reçu la précédente.

vous dans l'admiration de quoi nos pensées s'ajustent si exactement qu'il semble qu'elles aient pris une même route et fait un même chemin. Vos derniers Traités du *Triangle arithmétique* et de *son application* en sont une preuve authentique : et si mon calcul ne me trompe, votre onzième conséquence (¹) couroit la poste de Paris à Toulouse, pendant que ma proposition des nombres figurés, qui en effet est la même, alloit de Toulouse à Paris.

(¹) La onzième conséquence du *Traité du triangle arithmétique* est énoncée ainsi :
Chaque cellule de la dividente est double de celle qui la précède dans son rang parallèle ou perpendiculaire.
Pascal appelle *cellules de la dividente* celles que la bissectrice de l'angle droit du triangle traverse diagonalement : par exemple les cellules G, ϕ, C, P, ρ.



La proposition des nombres figurés de Fermat est celle de l'*Observation XLVI sur Diophante* et de la lettre XII, **12** (*voir* plus haut, page 70, note 1). La onzième conséquence du *Traité du triangle arithmétique* de Pascal ne correspond de fait qu'à la première partie de la proposition de Fermat, à savoir que $m(m+1)$ est le double du triangle de côté m ; pour retrouver dans l'œuvre de Pascal le reste de cette proposition, il faut, à la onzième conséquence, ajouter la douzième, etc., en mettant d'ailleurs celle-ci sous la forme de la proposition XI du *Traité des ordres numériques*.

Je n'ai garde de faillir tandis que je rencontrerai de cette sorte, et je suis persuadé que le vrai moyen pour s'empêcher de faillir est celui de concourir avec vous. Mais, si j'en disois davantage, la chose tiendroit du compliment, et nous avons banni cet ennemi des conversations douces et aisées.

Ce seroit maintenant à mon tour à vous débiter quelqu'une de mes inventions numériques ; mais la fin du parlement augmente mes occupations, et j'ose espérer de votre bonté que vous m'accorderez un répit juste et quasi nécessaire.

2. Cependant je répondrai à votre question des trois joueurs qui jouent en deux parties. Lorsque le premier en a une, et que les autres n'en ont pas une, votre première solution est la vraie, et la division de l'argent doit se faire en 17, 5 et 5 : de quoi la raison est manifeste et se prend toujours du même principe, les combinaisons faisant voir d'abord que le premier a pour lui 17 hasards égaux, lorsque chacun des < deux > autres n'en a que 5.

3. Au reste, il n'est rien à l'avenir que je ne vous communique avec toute franchise. Songez cependant, si vous le trouvez à propos, à cette proposition :

Les puissances quarrées de 2, augmentées de l'unité, sont toujours des nombres premiers.

Le quarré de 2, augmenté de l'unité, fait 5 qui est nombre premier.

Le quarré du quarré fait 16 qui, augmenté de l'unité, fait 17, nombre premier.

Le quarré de 16 fait 256 qui, augmenté de l'unité, fait 257, nombre premier.

Le quarré de 256 fait 65 536 qui, augmenté de l'unité, fait 65 537, nombre premier.

Et ainsi à l'infini.

C'est une propriété de la vérité de laquelle je vous réponds. La démonstration en est très malaisée et je vous avoue que je n'ai pu

encore la trouver pleinement; je ne vous la proposerois pas pour la chercher, si j'en étois venu à bout (¹).

Cette proposition sert à l'invention des nombres qui sont à leurs parties aliquotes en raison donnée, sur quoi j'ai fait des découvertes considérables. Nous en parlerons une autre fois.

Je suis, Monsieur, votre, etc.,

FERMAT.

A Toulouse, le 29 août 1654.

LXXIV.

FERMAT A PASCAL (²).

VENDREDI 25 SEPTEMBRE 1654.

(*Œuvres de Pascal*, IV, p. 437-441.)

MONSIEUR,

1. N'appréhendez pas que notre convenance se démente, vous l'avez confirmée vous même en pensant la détruire, et il me semble qu'en répondant à M. de Roberval pour vous, vous avez aussi répondu pour moi.

Je prends l'exemple des trois joueurs, au premier desquels il manque une partie, et à chacun des deux autres deux, qui est le cas que vous m'opposez.

Je n'y trouve que 17 combinaisons pour le premier et 5 pour chacun des deux autres : car, quand vous dites que la combinaison *acc* est bonne pour le premier et pour le troisième, il semble que vous ne vous souveniez plus que tout ce qui se fait après que l'un des joueurs a gagné, ne sert plus de rien. Or, cette combinaison ayant fait gagner le premier dès la première partie, qu'importe que le troisième en

(¹) *Voir* Tome I, p. 131, et Tome II, p. 206.
(²) Réponse à la lettre LXXII.

gagne deux ensuite, puisque, quand il en gagneroit trente, tout cela seroit superflu?

Ce qui vient de ce que, comme vous avez très bien remarqué, cette fiction d'étendre le jeu à un certain nombre de parties ne sert qu'à faciliter la règle et (suivant mon sentiment) à rendre tous les hasards égaux, ou bien, plus intelligiblement, à réduire toutes les fractions à une même dénomination.

Et afin que vous n'en doutiez plus, si au lieu de *trois* parties, vous étendez, au cas proposé, la feinte jusqu'à *quatre*, il y aura non seulement 27 combinaisons, mais 81, et il faudra voir combien de combinaisons feront gagner au premier une partie plus tôt que deux à chacun des autres, et combien feront gagner à chacun des deux autres deux parties plus tôt qu'une au premier. Vous trouverez que les combinaisons pour le gain du premier seront 51 et celles de chacun des autres deux 15, ce qui revient à la même raison.

Que si vous prenez cinq parties ou tel autre nombre qu'il vous plaira, vous trouverez toujours trois nombres en proportion de 17, 5, 5.

Et ainsi j'ai droit de dire que la combinaison *acc* n'est que pour le premier et non pour le troisième, et que *cca* n'est que pour le troisième et non pour le premier, et que partant ma règle des combinaisons est la même en trois joueurs qu'en deux, et généralement en tous nombres.

2. Vous aviez déjà pu voir par ma précédente (¹) que je n'hésitois point à la solution véritable de la question des trois joueurs dont je vous avois envoyé les trois nombres décisifs, 17, 5, 5. Mais parce que M. < de > Roberval sera peut-être bien aise de voir une solution sans rien feindre, et qu'elle peut quelquefois produire des abrégés en beaucoup de cas, la voici en l'exemple proposé :

Le premier peut gagner, ou en une seule partie, ou en deux, ou en trois.

(¹) Lettre LXXIII, 2.

S'il gagne en une seule partie, il faut qu'avec un dé qui a trois faces, il rencontre la favorable du premier coup. Un seul dé produit trois hasards : ce joueur a donc pour lui $\frac{1}{3}$ des hasards, lorsqu'on ne joue qu'une partie.

Si on en joue deux, il peut gagner de deux façons, ou lorsque le second joueur gagne la première et lui la seconde, ou lorsque le troisième gagne la première et lui la seconde. Or, deux dés produisent 9 hasards : ce joueur a donc pour lui $\frac{2}{9}$ des hasards, lorsqu'on joue deux parties.

Si on en joue trois, il ne peut gagner que de deux façons, ou lorsque le second gagne la première, le troisième la seconde et lui la troisième, ou lorsque le troisième gagne la première, le second la seconde et lui la troisième; car, si le second ou le troisième joueur gagnoit les deux premières, il gagneroit le jeu, et non pas le premier joueur. Or, trois dés ont 27 hasards : donc ce premier joueur a $\frac{2}{27}$ des hasards lorsqu'on joue trois parties.

La somme des hasards qui font gagner ce premier joueur est par conséquent $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{9}$ et $\frac{2}{27}$, ce qui fait en tout $\frac{17}{27}$.

Et la règle est bonne et générale en tous les cas, de sorte que, sans recourir à la feinte, les combinaisons véritables en chaque nombre des parties portent leur solution et font voir ce que j'ai dit au commencement, que l'extension à un certain nombre de parties n'est autre chose que la réduction de diverses fractions à une même dénomination. Voilà en peu de mots tout le mystère, qui nous remettra sans doute en bonne intelligence, puisque nous ne cherchons l'un et autre que la raison et la vérité.

3. J'espère vous envoyer à la Saint-Martin un Abrégé de tout ce que j'ai inventé de considérable aux nombres. Vous me permettrez d'être concis et de me faire entendre seulement à un homme qui comprend tout à demi-mot.

Ce que vous y trouverez de plus important regarde la proposition

que tout nombre est composé d'un, de deux ou de trois triangles; d'un, de deux, de trois ou de quatre quarrés; d'un, de deux, de trois, de quatre ou de cinq pentagones; d'un, de deux, de trois, de quatre, de cinq ou de six hexagones, et à l'infini (1).

Pour y parvenir, il faut démontrer que tout nombre premier, qui surpasse de l'unité un multiple de 4, est composé de deux quarrés, comme 5, 13, 17, 29, 37, etc.

Étant donné un nombre premier de cette nature, comme 53, trouver, par règle générale, les deux quarrés qui le composent.

Tout nombre premier, qui surpasse de l'unité un multiple de 3, est composé d'un quarré et du triple d'un autre quarré, comme 7, 13, 19, 31, 37, etc.

Tout nombre premier, qui surpasse de 1 ou de 3 un multiple de 8, est composé d'un quarré et du double d'un autre quarré, comme 11, 17, 19, 41, 43, etc.

Il n'y a aucun triangle en nombres duquel l'aire soit égale à un nombre quarré (2).

Cela sera suivi de l'invention de beaucoup de propositions que Bachet avoue avoir ignorées, et qui manquent dans le Diophante.

Je suis persuadé que dès que vous aurez connu ma façon de démontrer en cette nature de propositions, elle vous paroîtra belle et vous donnera lieu de faire beaucoup de nouvelles découvertes; car il faut, comme vous savez, que *multi pertranseant ut augeatur scientia* (3).

S'il me reste du temps, nous parlerons ensuite des nombres magiques, et je rappellerai mes vieilles espèces sur ce sujet.

Je suis de tout mon cœur, Monsieur, votre, etc.,

FERMAT.

Ce 25 septembre.

Je souhaite la santé de M. de Carcavi comme la mienne et suis tout à lui.

(1) *Voir* Lettre XII, 3.
(2) *Voir* Lettre XII, 2.
(3) *Voir* plus haut p. 35, note 2.

Je vous écris de la campagne, et c'est ce qui retardera par aventure mes réponses pendant ces vacations.

LXXV.

PASCAL A FERMAT (1).

MARDI 27 OCTOBRE 1654.

(*Œuvres de Pascal*, IV, p. 443.)

MONSIEUR,

Votre dernière lettre m'a parfaitement satisfait. J'admire votre méthode pour les partis, d'autant mieux que je l'entends fort bien; elle est entièrement vôtre, et n'a rien de commun avec la mienne, et arrive au même but facilement. Voilà notre intelligence rétablie.

Mais, Monsieur, si j'ai concouru avec vous en cela, cherchez ailleurs qui vous suive dans vos inventions numériques, dont vous m'avez fait la grâce de m'envoyer les énonciations. Pour moi, je vous confesse que cela me passe de bien loin; je ne suis capable que de les admirer, et vous supplie très humblement d'occuper votre premier loisir à les achever. Tous nos Messieurs les virent samedi dernier et les estimèrent de tout leur cœur : on ne peut pas aisément supporter l'attente de choses si belles et si souhaitables. Pensez-y donc, s'il vous plaît, et assurez-vous que je suis, etc.

PASCAL.

Paris, 27 octobre 1654.

(1) Réponse à la Lettre précédente.

ANNÉE 1656.

LXXVI.

FERMAT A CARCAVI (1).

1656.

(Bibl. Nat. fr. 20945, XVII, p. 78-84.)

< MONSIEUR >,

1. J'ai reçu un très grand contentement de vos lettres du 19 du mois passé, lesquelles m'ont été rendues il y a deux jours, et je me tiens fort obligé à la civilité de M. Pascal, duquel, si l'estime que j'en ai pouvoit être plus grande, elle seroit augmentée par tant de démonstrations que j'en ai reçues. Je vous prie donc (vous qui m'avez fait l'honneur de me faire connoître une personne si savante) de lui témoigner le respect et l'estime que j'ai pour lui, et que, si je ne puis pas correspondre avec les effets à tant de grâces qu'il lui a plu de me faire, je ne manquerai pas au moins d'y satisfaire avec ma bonne volonté que j'ai voulu vous faire connoître présentement par la réponse que je vous envoie de ce qu'on m'a proposé. Le temps est court; mais, n'espérant pas de pouvoir la semaine prochaine avoir la commodité de m'appliquer à de semblables spéculations, je suis contraint de vous en dire mon sentiment sur le champ.

2. Il est bien vrai qu'il me déplaît que d'abord je ne suis pas du sentiment de M. Pascal touchant l'*Analyse speciose*, de laquelle je fais plus grand cas

(1) Cette lettre a été publiée pour la première fois par M. Charles Henry (*Recherches*, p. 197-200) d'après une copie sans date, sans adresse et sans signature. La date de 1656 a été attribuée à cette lettre à cause des allusions aux jansénistes et molinistes, et au séjour de Huygens à Paris que le savant hollandais quitta le 30 novembre 1655 (*Œuvres complètes*, I, p. 367). Le texte n'est qu'une traduction passablement incorrecte de l'original qui était rédigé en latin, comme on peut le conclure d'après les nombreux mots de cette langue que le traducteur, parfois embarrassé, a transcrits dans l'interligne.

que lui, et j'ose dire que les preuves que j'en ai sont si grandes que non seulement elles me persuadent, mais elles m'obligent d'en faire une estime bien grande. J'avoue que le retour en est bien souvent difficile; mais, parce que, quand j'ai fait exactement l'analyse, je suis aussi sûr de la solution du problème comme si je l'eusse démontré par synthèse, je ne me soucie pas quelquefois d'en chercher la construction la plus aisée, me persuadant ce qu'en une autre occasion M. Pascal (1) dit : *non esse par labori præmium*. Mais, en cela comme en toutes autres choses, je laisse volontiers que chacun suive son propre sentiment.

3. Je viens au problème des <cercles> tangens dont on désire une plus grande explication. Aussitôt que vous me l'envoyâtes, il me souvint que j'avois songé à cette matière en cherchant le *lieu que décriroit le centre d'un cercle qui toucheroit deux autres cercles donnés, ou un cercle donné et une ligne donnée, etc.*, et que j'avois démontré que, quand deux cercles sont égaux <et qu'>ils se doivent toucher avec un autre cercle qui les enferme ou qui les exclut tous deux, le lieu est la ligne droite qui les divise également et qu'elle est perpendiculaire à la ligne qui unit les centres des cercles donnés; mais, quand ils sont inégaux et qu'il faut qu'ils se touchent comme ici-dessus, alors le lieu est hyperbole ou, pour mieux dire, il est les sections opposées, les foyers desquelles sont les centres des cercles donnés et le côté transvers égal à la différence des semidiamètres des dits cercles.

Or, dans le cas dans lequel il faudra inclure l'un et exclure l'autre en le touchant, les sections opposées ont les foyers comme auparavant, mais le côté transvers est l'aggrégé et non pas la différence des semidiamètres.

Je passe les autres problèmes que j'ai démontrés en cette matière, parce qu'ils ne sont pas à propos pour nous; mais je dirai seulement en passant que, quand les donnés sont un cercle et une ligne droite qui le coupe, le lieu est à deux paraboles qui ont toutes deux pour foyer le centre du cercle donné et passent par les intersections du dit cercle et de la ligne donnée.

Ainsi, en recevant vos lettres, je m'aperçus qu'en laissant une détermination dans le problème de M. Pascal (2), il se feroit local, en la manière ici-dessous :

Étant donné un cercle et une ligne, trouver un autre cercle qui, touchant

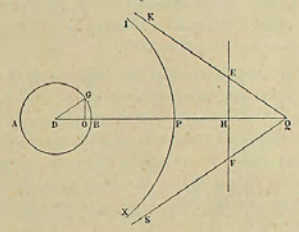
(1) Dans les écrits connus de Pascal, on ne trouve guère qu'une expression analogue : *ad illa, quæ plus afferunt fructus quam laboris, vergentes*, mots qui terminent le *De numericis ordinibus tractatus*.

(2) *Comp.* Lettre LXX, 9.

le donné, soit coupé par la ligne en sorte que le segment soit capable d'un angle donné.

Soit le cercle ABG (*fig.* 82) donné, la ligne <EF, le> centre D; soit la perpendiculaire DBH et qu'on fasse l'angle HDG égal à l'angle donné. Menant GO perpendiculaire, que ci-après on coupe BH en P dans la raison GD à DO, et qu'on prolonge la ligne DH en Q en sorte que la raison DO à HQ soit la même que celle du quarré GO au quarré GD avec le rectangle HDO.

Fig. 82.



Qu'après, par le point Q, on tire les angles HQK, HQS égaux à l'angle donné, et que par le point P, autour des asymptotes QS, QK, on décrive l'hyperbole IPX.

Je dis qu'elle satisfera à la proposition, c'est-à-dire que le cercle quelconque qui, ayant son centre sur ladite hyperbole, touchera le cercle donné, sera aussi coupé par la ligne donnée en sorte que son segment soit capable de l'angle GDO. Mais cela, on ne le doit entendre qu'en cas que l'angle donné soit aigu, puisque, s'il est droit, le lieu est la ligne droite <donnée>, comme il est clair, et que, s'il est obtus, le lieu est aussi une hyperbole, mais il y a alors quelque peu de mutation dans la construction. — Mais il n'est pas nécessaire de dire tous les détails.

Cela étant supposé, on peut facilement résoudre le problème par les lieux solides en cas quelconque, c'est à dire en décrivant cette dernière hyperbole et les autres sections opposées dont j'ai parlé ici-dessus, puisque leur intersection donnera toujours le centre du cercle qu'on cherche.

Mais, parce que le problème est plan et craignant le scrupule des géomètres, je l'ai résolu alors par les lieux plans généralement; mais, parce que je m'aperçus que la construction en étoit beaucoup embrouillée, je choisis

au plus facile les donnés et je les appliquai en nombres; et c'est tout ce que je vous envoyai alors et je ne vous enverrai autre chose, parce que le susdit Monsieur ne veut pas la solution simplement analytique, mais qu'il veut aussi une construction gentille et facile, laquelle je n'ai pas pour à cette heure le loisir de la chercher.

4. Pour ce qui est de l'autre < problème > de cinq lignes données (1), je ne sais pas qui lui a dit que je l'estime facile. Je ne crois pas vous avoir écrit une telle chose, puisque je m'aperçus alors qu'on pouvoit venir difficilement à l'équation et qu'après qu'on l'auroit trouvée, la construction en seroit beaucoup embrouillée. Vous me ferez la faveur de le dire à M. Pascal et je songerai à cela quand j'aurai plus de loisir.

5. Je viens au problème *de minimis* avec lequel le dit Monsieur dit qu'il a résolu plusieurs autres problèmes. C'est ce que je crois facilement, parce que ma méthode s'étend aux mêmes et m'apprend que le plus souvent en ces problèmes le point du minime est centre du cercle ou de la sphère qui satisfait à ce qu'on propose. Je dis *le plus souvent*, parce que je n'ai pas le loisir de les examiner tous et je suis certain qu'en celui-ci, dont M. Pascal ne parle point, bien qu'il soit local *ad circulum*, le point du minime n'est pas le centre du cercle :

Étant donné quelconque nombre de points en une ligne droite, comme A, C, D, E, F, G, B (*fig.* 83), *trouver un autre comme* I, *duquel menant les lignes* IA, IC, ID, IE, IF, IG, IB, *l'assemblage des quarrés des dites lignes ait au triangle* AIB *la raison minime de toutes les possibles.*

Fig. 83.



C'est à quoi je voudrois prier M. Pascal de me faire la faveur d'appliquer sa méthode.

6. Après, < pour > le lieu du problème duquel il dit que dépendent tous les lieux plans proposés par lui, je n'ai pas voulu manquer de le chercher et aussitôt j'ai trouvé que c'était un cercle, en la manière ci-dessous :

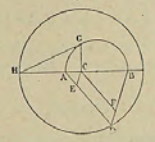
Soit donnée la ligne droite AB (*fig.* 84) *coupée* utcumque *en* C *et qu'il*

(1) Peut-être un problème ayant rapport à l'*hexagramme* de Pascal.

faille trouver le lieu sur lequel étant pris le point D, *et étant tirées les lignes* DA, DB *et les parallèles* CE, CF, *les rectangles* ADE, BDF *pris ensemble soient égaux au quarré de la ligne donnée* Z.

Qu'on décrive sur la ligne AB le demi-cercle AGB et qu'après, élevant la perpendiculaire CG, on tire la ligne GH égale à la ligne Z et terminée à la ligne AB allongée s'il le faut. Je dis que, si du centre C, avec la distance CH, on décrit le cercle HD, il sera le lieu qu'on cherche.

Fig. 84.



Vous pouvez proposer à M. Pascal, avec les mêmes données, de *trouver le point* D, *en sorte que les deux rectangles* DAE, DBF *soient égaux au quarré de la < ligne > Z donnée :* c'est ce que j'ai trouvé en un même temps.

7. J'ai cherché le lieu de cet autre : *Étant donnés autant de cercles qu'on voudra et une ligne droite, trouver un point duquel menant des tangentes aux cercles donnés et une perpendiculaire à la ligne donnée, les quarrés des tangentes aient à la perpendiculaire une raison donnée,* et j'ai trouvé qu'il peut être ellipse, parabole ou hyperbole selon la diversité des données. Mais il seroit trop long d'écrire tout, car il faudroit faire un livre et non pas une lettre; je mettrai ici seulement pour essai la détermination qui est que, toutes les fois que la raison donnée sera la même que la raison du nombre des cercles donnés à l'unité, le lieu sera parabole; si elle est plus petite, il sera ellipse, et si elle est plus grande, il sera hyperbole.

8. Le *porisme* des anciens à la description des sections coniques me semble très joli, mais je n'ai pas le loisir de les examiner pour à cette heure; je conserverai le tout pour un meilleur temps, comme aussi de vous parler des quarrés que ces Messieurs appellent *magiques*, desquels M. Pascal fait quelque mention dans sa lettre.

9. J'y ajoute seulement que vous dites le vrai quand vous dites qu'il vous souvient que je vous ai parlé autrefois des *deux moyennes*, parce qu'il y a longtemps que j'ai trouvé la méthode de les trouver en une infinité de

façons (j'entends par les lieux solides); mais, entre tous, ceux là m'ont plu davantage qui résolvent le problème *per circulum et ellipsim* : c'est ce que je vous prie de proposer à M. Pascal pour savoir s'il lui est peut-être arrivé tout de même.

10. Je vous prie de me donner quelques nouvelles des jansénistes et molinistes, comme aussi quelque objection qu'on fait à M. Descartes; et je voudrois savoir en quel estime M. Hugenius, gentilhomme hollandois, est auprès de ces Messieurs. Il a imprimé plusieurs petits livres de Géométrie (1) et il a demeuré quelque temps à Paris.

LXXVII.

FERMAT A CARCAVI (2).

JUIN 1656.

(*Corresp. Huyg.*, n° 301.)

.... 1. Si A et B jouent avec deux dés en sorte que, si A amène 6 points en ses deux dés avant que B en amène 7, le joueur A gagne et, si B amène 7 avant que A ait amené <6>, le joueur B aura gagné, et de plus le joueur A a la primauté, l'avantage de A à B est comme 30 à 31,

(1) Christiani Hugenii, Const. F., Theoremata de quadratura hyperboles, ellipsis et circuli, ex dato portionum gravitatis centro, quibus subjuncta est Ἔξέτασις Cyclometriæ Cl. viri Gregorii a S. Vincentio editæ anno CIↃ IↃ CXLVII, Lugd. Batavorum, 1651, 4°. — De circuli magnitudine inventa : accedunt ejusdem Problematum quorundam illustrium constructiones. Lugd. Batavorum, 1654, 4°.

(2) Cette pièce est un extrait adressé par Carcavi à Huygens. Dans la lettre d'envoi, du 22 juin 1656, Carcavi écrivait (*Corresp. Huyg.*, n° 300) :

« M. de Fermat m'a envoyé, il y a déjà quelques jours, la solution de ce que vous aviez » proposé touchant le parti des jeux, et vous verrez par l'extrait que je vous fais de sa » lettre qu'il a la démonstration générale de ces sortes de questions, et conclurez certai- » nement avec nous, non seulement pour la résolution de ce problème, mais aussi pour » quantité de plusieurs autres très belles spéculations que nous avons vu de lui, tant » en ce qui concerne les nombres que pour la géométrie, que c'est un des plus grands » génies de notre siècle. Je tâche, il y a déjà longtemps, d'en tirer ce que je puis pour le

2. Si le joueur A a la première fois la primauté et ensuite le joueur B ait aussi la primauté la seconde fois, et ainsi alternativement (auquel cas A poussera le dé la première fois, et puis B deux fois de suite, et puis A deux fois de suite, et ainsi jusques à la fin), en cette espèce le parti du joueur A est à celui du joueur B comme 10355 à 12276.

3. Que si le joueur A joue premièrement deux fois et le joueur B trois fois, puis le joueur A deux fois et ensuite le joueur B trois fois, et ainsi à l'infini que le joueur A qui commence ne joue jamais que deux coups et que le joueur B en joue trois (supposant toujours que A cherche à ramener 6 et B 7), le parti de A à B est comme 72360 à 87451.

4. Les questions diversifient et la méthode change au jeu de cartes. Par exemple, je propose :

Si trois joueurs A, B, C parient avec 52 cartes (qui est le nombre d'un jeu complet) que celui qui aura plus tôt un cœur gagnera, en supposant que A prend la 1re carte, B la 2e et C la 3e, et que ce même ordre est toujours gardé jusques à ce que l'un ait gagné;

5. Si deux joueurs jouent à prime (1) avec 40 cartes, l'un entreprend de ramener prime dans les quatre premières cartes qui lui

» donner au public et j'en avois fait la proposition à M. de Schooten pour y employer les » Elzevirs, mais les choses ne se trouvèrent pas disposées pour nous procurer cette » satisfaction. »

« En ce qui concerne Messieurs Pascal et Desargues, ... le premier avoit déjà trouvé la solution de votre proposition et me doit donner au premier jour celle de toutes les autres qui sont dans l'extrait de cette lettre de M. de Fermat. » ....

La question posée par Huygens est la dernière de son Traité *De ratociniis in ludo aleæ* qu'il venait de terminer en brouillon et d'envoyer (le 6 mai 1656) à Schooten pour que ce dernier en achevât la mise en latin. Elle est ainsi conçue :

Propositio XIV. — *Si ego et alius duabus tesseris alternatim jaciamus hac conditione ut ego vincam simul atque septenarium jaciam, ille vero quam primum senarium jaciat, ita videlicet ut ipsi primum jactum concedam, invenire rationem meæ ad ipsius sortem.* (Fr. a Schooten, *Exercitationum mathematicarum* liber V, continens sectiones triginta miscellaneas. Lugd. Batavorum, 1657, in-4°, p. 533.)

(1) *Voir* ci-après, LXXVII *bis*, 6.

seront baillées et l'autre parie que le premier ne réussira pas, quel est leur parti?

6. Toutes ces questions ont des méthodes et des règles différentes. Si on n'en peut venir à bout, je vous les expliquerai toutes avec leurs démonstrations; la plus subtile et la plus malaisée est celle du vrai parti de celui qui tient le dé au jeu de la chance contre les autres (1).

7. Soit encore, si vous voulez, deux joueurs qui jouent au piquet: le premier entreprend d'avoir trois as en ses douze premières cartes; quel est le parti de celui-ci contre l'autre qui parie qu'il n'aura point les trois as?

LXXVII *bis*.

HUYGENS A CARCAVI (2).

JEUDI 6 JUILLET 1656.

(*Corresp. de Huygens*, n° 308.)

.... 1. J'ay veu par la solution que Monsieur de Fermat a faite de mon Probleme (3) qu'il a la methode universelle pour trouver tout ce qui appartient à cette matiere, ce que je desirois seulement de sçavoir en la proposant. La mesme raison de 30 à 31 est dans le traité que j'ay envoyé à Monsieur Schoten il y a 2 mois : dans le mesme il y a aussi un Theoreme duquel je me sers dans toutes ces questions des parti du jeu; et je le mettray icy, parce qu'autrement je ne pourrois pas vous faire voir que je suis venu à bout des Problemes que Monsieur de Fermat a proposez, le calcul de quelques uns d'entre iceux estant si long que je n'ay pas assez de patience pour en rechercher le dernier

(1) Il s'agit probablement de la question exposée Lettre LXXVIII, 3.

(2) Extrait communiqué à Fermat et à Pascal (*voir* ci-après LXXVIII, 1) et répondant à la pièce précédente, LXXVII.

(3) *Voir* Pièce LXXVII, 1.

produit; c'est pourquoy dans ceux la, apres vous avoir expliqué le dit theoreme, je me contenteray de mettre la methode par laquelle l'on y peut parvenir.

2. Le Theoreme est cettui-cy :

Si le nombre des hazards qu'on a pour avoir b soit p, et le nombre des hazards qu'on a pour avoir c soit q, cela vaut autant que si l'on avait $\frac{bp+cq}{p+q}$.

Par exemple si j'avois 2 hazards pour avoir $\frac{1}{3}$ de ce qui est mis au jeu et 5 hazards pour en avoir $\frac{1}{2}$, je multiplie $\frac{1}{3}$ par 2 et $\frac{1}{2}$ par 5. Puis j'adjouste ensemble les produits qui sont $\frac{2}{3}$ et $\frac{5}{2}$; la somme est $\frac{19}{6}$, laquelle je divise par $5+2$, c'est 7; dont j'ay $\frac{19}{42}$. Je dis qu'il m'appartient $\frac{19}{42}$ de ce qui est mis au jeu.

3. La premiere des questions de Monsieur de Fermat (1) est telle : A et B jouent à 2 dez. A gaignera en amenant 6 points. B gaignera en amenant 7 points. A poussera le dé la première fois, et puis B deux fois de suite et puis A deux fois de suite, et ainsi jusques à ce que l'un ou l'autre ait gaigné.

Pour faire les partis je nommeray d ce qui est mis au jeu, et je mettray x pour la part qui en appartient au joueur A.

Or il est evident que, quand A aura fait le premier coup et B ses deux coups de suite, et encore A l'un de ses deux coups, sans que ny l'un ny l'autre ait rencontré, que alors A aura derechef la mesme apparence pour gaigner qu'il avoit des le commencement, et que par consequent il luy appartiendra derechef la mesme part de ce qui est mis au jeu, c'est à dire x.

Partant, lorsque A vient à faire le premier de ses deux coups de suite, il aura

5 hazards pour avoir d,
et 31 hazards pour avoir x,

(1) Pièce LXXVII, 2.

car de 36 divers coups que produisent 2 dez, il y en a 5 de 6 points, c'est à dire qui luy donnent d ou ce qui est mis au jeu, et 31 qui luy font manquer les 6 points, et ainsi luy donnent x, le mettant en estat d'avoir encore un coup à faire devant que le tour de B soit venu. Mais

$$\left.\begin{array}{l}\text{5 hazards pour avoir } d\\ \text{et 31 hazards pour avoir } x\end{array}\right\} \text{ valent autant par le theoreme precedent que } \frac{5d+31x}{36}.$$

Cecy est donc la part de A lorsque A fait le premier de ses deux coups de suite.

Le coup d'auparavant c'est quand B fait le dernier de ses deux coups, et parce qu'il gaigne en amenant 7 points lesquels se rencontrent en 6 façons différentes et qu'alors A perd, donques à ce coup A aura

$$\text{6 hazards pour avoir o ou rien,}$$
$$\text{et 30 hazards pour avoir } \frac{5d+31x}{36},$$

car son tour sera venu de faire deux coups de suite; lesquels hazards par le précédent théorème valent $\frac{150d+930x}{1296}$. Cecy est donc la part de A, lorsque B fait le dernier de ses 2 coups de suite.

Quand donc B fait le premier de ses 2 coups, A aura

$$\text{6 hazards pour avoir o,}$$
$$\text{30 hazards pour } <\text{avoir}> \frac{150d+930x}{1296},$$

ce qui vaut $\frac{4500d+27900x}{46656}$.

Quand donc A fait le premier coup de tous, A aura

$$\text{5 hazards pour avoir } d,$$
$$\text{31 hazards pour avoir } \frac{4500d+27900x}{46656},$$

ce qui vaut $\frac{372780d+864900x}{1679616}$.

Cecy est donc égal à x, et partant x égal à $\frac{10355}{22631}<d>$.

Le parti du joueur A est donc $\frac{10355}{22631}$ de ce qui est mis au jeu, et le

reste $\frac{12276}{22631}$ est le party de B, et l'un est à l'autre comme $\frac{10355}{12276}$, qui sont les mesmes nombres de Monsieur de Fermat.

4. Dans la seconde question (1) où il suppose que le joueur A joue premierement deux fois, et puis le joueur B trois fois et ensuite le joueur A $<$ deux fois et puis le joueur B $>$ trois fois, la methode est tout à fait semblable, et j'y trouve aussi les mesmes nombres que Monsieur de Fermat, mais qu'il les faut transposer : c'est-à-dire que le party de A est à celui de B comme 87451 à 72360, au lieu qu'il a mis 72360 à 87451.

5. La troisieme est (2) quand trois joueurs A, B et C parient avec toutes les 52 cartes que celuy qui aura plus tost un cœur gaignera, et que l'on suppose que A prend la premiere carte, B la seconde, C la troisieme et ainsi consecutivement jusques à ce que l'un ait gaigné.

Il y a 13 cœurs parmy ces 52 cartes, c'est pourquoy s'il arrivoit que toutes les autres 39 fussent prises selon le dit ordre sans que personne eust rencontré un cœur, alors ce seroit le tour du joueur A de prendre et il auroit gaigné asseurement. Quand donc C prend la trente-neuvieme carte, au cas que jusques là personne n'ait rencontré, il est certain que A aura 13 hazards pour avoir perdu et 1 hazard pour avoir tout ce qui est mis au jeu, que j'appelleray d comme devant. Or, d'avoir

$$\text{13 hazards pour avoir o,}$$
$$\text{et 1 hazard pour avoir } d,$$

cela vaut $\frac{1d}{14}$ par nostre theoreme; d'icy je cognois que, quand B prend la trente-huitieme carte, A aura

$$\text{13 hazards pour avoir o,}$$
$$\text{et 2 hazards pour avoir } \frac{1}{14}d$$

(1) Pièce LXXVII, 3.
(2) Pièce LXXVII, 4.

(c'est quand B manque de rencontrer un cœur, car alors c'est à C de prendre la trente-neuvieme); lesquels hazards valent $\frac{1}{105}d$.

Quand A prend la trente-septieme, A aura donc

13 hazards pour avoir d,

et 3 hazards pour avoir $\frac{1d}{105}$,

ce qui vaut $\frac{1368}{1680}d$.

Ainsi en reculant tousjours d'une carte l'on sçaura à la fin la part de A, lorsqu'il prend la premiere de toutes, et de la mesme maniere se trouvera le party de B, et le reste sera celuy de C.

6. La quatrieme est (1) quand deux joueurs jouent à la prime avec 40 cartes et que le joueur A entreprend de ramener prime, et B parie que A ne reussira pas dans les quatre premieres cartes. L'on m'a dit que d'avoir prime c'est avoir 4 cartes differentes, à sçavoir une de chasque sorte. Je trouve donc que le party de A est à celui de B comme 1000 à 8139, de sorte que l'on peut bien parier 8 contre 1 que quelqu'un n'amesnera pas prime.

7. La cinquieme et derniere question (2) est quand deux joueurs jouent au piquet et que le premier entreprend d'avoir 3 as dans ses douze premieres cartes et que l'autre parie qu'il ne les aura pas. Pour resoudre celle-cy, je supposeray qu'il prend ses 12 cartes une à une, car il n'importe aucunement. S'il arrive donc que celuy qui l'entreprend ayant pris 11 cartes ait desja rencontré 2 as, il y aura parmi les 25 cartes qui restent encore 2 as, et partant il aura en ce cas 2 hazards pour avoir gaigné, c'est pour avoir d, et 23 hazards pour avoir 0, c'est à dire pour perdre : ce qui vaut $\frac{2}{25}d$.

(1) Pièce LXXVII, 5.
(2) Pièce LXXVII, 7.

Quand il a pris 10 cartes, s'il a rencontré 2 as, il aura donc

2 hazards pour avoir d,

et 24 hazards pour avoir $\frac{2}{25}d$, c'est pour avoir seulement 2 as en 11 cartes;

lesquels hazards valent $\frac{49}{325}d$.

Mais quand il a pris 10 cartes, s'il n'a encore que 1 as, il y aura parmy les 26 restantes 3 as; c'est pourquoy alors il aura

3 hazards pour avoir $\frac{2}{25}d$, c'est pour avoir 2 as en 11 cartes,

et 23 hazards pour avoir 0, c'est pour avoir 1 as en 11 cartes,

car avec cecy il ne sçauroit gagner; lesquels hazards valent $\frac{3}{325}d$.

Quand il a pris 9 cartes, s'il a 2 as, il aura

2 hazards pour avoir d,

et 25 hazards pour avoir $\frac{49}{325}d$, c'est pour avoir seulement 2 as en 10 cartes,

lesquels hazards valent $\frac{1875}{8775}d$.

Mais ayant pris 9 cartes, s'il n'a encore qu'1 as, il aura

3 hazards pour avoir $\frac{49}{325}d$, c'est 2 as en 10 cartes,

et 24 hazards pour avoir $\frac{3}{325}d$, c'est 1 as en 10 cartes,

ce qui vaut $\frac{219}{8775}d$.

Et enfin si parmi ses 9 cartes il n'a encore aucun as, il aura

4 hazards pour avoir $\frac{3}{325}d$, c'est 1 as en 10 cartes,

et 23 hazards pour avoir 0, c'est pas 1 as en 10 cartes,
car alors il ne sçauroit gaigner,

lesquels hazards valent $\frac{12}{8775}d$.

Ainsi par cette méthode en reculant tousjours d'une carte je sçau-

ray à la fin la part du joueur A, lorsqu'il n'a encore pris aucune carte et que par consequent il n'a pas encore 1 as : laquelle ayant ostée de *d*, le reste sera la part du joueur B. Ce qu'il falloit trouver.

8. Si j'estois bien informé de l'estat de la question au jeu de la chance que Monsieur de Fermat dit estre la plus malaisée (1), j'essayerois aussi de la resoudre. Pour celles que je viens de traiter, je vous prie, Monsieur, de me faire la faveur de les communiquer à Monsieur Milon, et que je puisse sçavoir si ce que Messieurs de Fermat et Pascal en auront trouvé sera conforme à ce que j'en explique. Je desire aussi fort de sçavoir s'ils ne se servent pas du mesme theoreme que moy.

. . . . . .

LXXVIII.

CARCAVI A HUYGENS (2).

JEUDI 28 SEPTEMBRE 1656.

(*Corresp. Huyg.*, n° 336.)

MONSIEUR,

1. Il y a déjà longtemps que j'ai fait voir à Messieurs de Fermat et Pascal ce que vous aviez pris la peine d'envoyer à M. Mylon et à moi touchant les partis (3), mais je n'ai pu me donner l'honneur de vous faire réponse, la chose n'ayant pas dépendu absolument de moi et la commodité de ces Messieurs ne s'étant pas toujours rencontrée avec le desir que j'avois de vous satisfaire.

M. Pascal se sert du même principe que vous et voici comme il l'énonce :

S'il y a tel nombre de hasards qu'on voudra, comme par exemple 10

(1) Pièce LXXVII, 6.
(2) Publiée pour la première fois par M. Charles Henry (*Pierre de Carcavy*, p. 18).
(3) *Voir* la Lettre précédente.

qui donnent chacun 3 pistoles et qu'il y en ait 2 qui donnent chacun 4 pistoles, et qu'il y en ait 3 qui ôtent chacun 3 pistoles, il faut ajouter toutes les sommes ensemble et les hasards ensemble, et diviser l'un par l'autre. Le quotient est le requis, ce qui revient à une même énonciation que la vôtre.

2. Mais il ne voit pas comment cette règle peut s'appliquer à l'exemple suivant :

Si on joue en six parties, par exemple du piquet, une certaine somme et qu'un des joueurs ait deux, trois ou quatre parties et que l'on veuille quitter le jeu, quel parti il faut faire quand un a une partie à point, ou deux ou trois etc. à point, ou bien quand un a deux parties et l'autre une, etc.?

Et le dit S^r^ Pascal n'a trouvé la règle que lorsqu'un des joueurs a une partie à point ou quand il en a deux à point (lorsque l'on joue en plusieurs parties), mais il n'a pas la règle générale. Voici son énonciation (1) :

Il appartient à celui qui a la première partie de tant qu'on voudra, par exemple de six, sur l'argent du perdant, le produit d'autant de premiers nombres pairs que l'on joue de parties, excepté une, divisé par le produit d'autant de premiers nombres impairs. Le premier produit sera la mise du perdant, le second produit sera la part qui en appartient au gagnant.

Par exemple, si on joue en 4 parties, prenez les 3 premiers nombres pairs : 2, 4, 6; multipliez l'un par l'autre, c'est 48; prenez les 3 premiers impairs : 1, 3, 5; le produit c'est 15 qui appartiendront au gagnant sur l'argent du perdant, si on a mis chacun 48 pistoles.

Cette règle sert pour la première et la seconde partie, celui qui en a deux ayant le double de celui qui n'en a qu'une. Il en a la démonstration, mais qu'il croit très difficile.

(1) *Comp.* Lettre LXX. 3. — L'énoncé de Carcavi est mal conçu et en désaccord avec l'exemple.

3. Voici une autre proposition qu'il a faite à M. de Fermat, laquelle il juge sans comparaison plus difficile que toutes les autres :

Deux joueurs jouent à cette condition que la chance du premier soit 11 et celle du second 14; un troisième jette les trois dés pour eux deux et, quand il arrive 11, le premier marque un point et, quand il arrive 14, le second de son côté en marque un. Ils jouent en 12 points, mais à condition que, si celui qui jette le dé ramène 11 et qu'ainsi le premier marque un point, s'il arrive que le dé fasse 14 le coup d'après, le second ne marque point, mais en ôte un au premier, et ainsi réciproquement, en sorte que, si le dé amène six fois 11 et le premier ait marqué six points, si en après le dé amène trois fois de suite 14, le second ne marquera rien, mais ôtera trois points du premier. S'il arrive aussi en après que le dé fasse six fois de suite 14, il ne restera rien au premier et le second aura trois points, et s'il amène encore huit fois de suite 14 sans amener 11 entre deux, le second aura 11 points et le premier rien; et s'il amène quatre fois de suite 11, le second n'aura que sept points et l'autre rien; et s'il amène cinq fois de suite 14, il (1) aura gagné.

La question parut si difficile à M. Pascal qu'il douta si M. de Fermat en viendroit à bout, mais il m'envoya incontinent cette solution :

Celui qui a la chance de 11, *contre celui qui a la chance* 14, *peut parier* 1156 *contre* 1, *mais non pas* 1157 *contre* 1;

et qu'ainsi la véritable raison de ce parti étoit entre les deux; par où M. Pascal ayant connu que M. Fermat avoit fort bien résolu ce qui lui avoit été proposé, il me donna les véritables nombres pour les lui envoyer et pour lui témoigner que de son côté il ne lui avoit pas proposé une chose qu'il n'eût résolue auparavant. Les voici :

150 094 635 296 999 121
129 746 337 890 625.

Mais ce que vous trouverez de plus considérable est que le dit S^r de

(1) Lisez : *le second*.

Fermat en a la démonstration, comme aussi M. Pascal de son côté, bien qu'il y ait apparence qu'ils se soient servis d'une différente méthode.

..... 4. J'ai envoyé votre livre (1) à M. de Fermat, dont il rend très humbles grâces et vous remercie très humblement de celui que vous avez eu la bonté de me donner.....

(1) Il s'agit ici d'exemplaires des premiers opuscules de Huygens (*voir* ci-dessus, page 320, note 1), adressés par lui à Claude Mylon pour Carcavi et Fermat (*Corresp. Huyg.*, n° 297, 306, 308, 310) aux soins de François Henry, avocat au Parlement de Paris.

Nous ne reproduisons pas, dans la lettre de Carcavi, quelques passages étrangers à ses relations avec Fermat et Pascal.

ANNÉE 1657.

LXXIX.

PREMIER DÉFI AUX MATHÉMATICIENS (1).

MERCREDI 3 JANVIER 1657.

A

(*Comm. ep.*, n° 33.)

Problemata duo mathematica, tanquam indissolubilia Gallis, Anglis, Hollandis, nec non cæteris Europæ Mathematicis proposita a D^no^. de Fermat, Regis Consiliario in Tolosano Parlamento,

Castris Parisios ad D^um^. Claudium Martinum Laurenderium, Doctorem Medicum, transmissa 3 nonas Januar. 1657, accepta verò 12 Kal. Febr.

PROBLEMA PRIUS.

1. Invenire cubum qui, additus omnibus suis partibus aliquotis, conficiat quadratum.

2. Ut numerus 343 est cubus a latere 7. Omnes ejus partes aliquotæ sunt : 1, 7, 49, quæ, adjunctæ ipsi 343, conficiunt numerum 400, qui est quadratus a latere 20. Quæritur alius cubus ejusdem naturæ.

(1) Le titre qui précède la rédaction A du Défi semble avoir été composé par Willem Boreel, Ambassadeur de Hollande en France de 1650 à 1668, lequel, le 26 janvier 1657, adressa la pièce à Golius pour Schooten à Leyde.

Le titre de la rédaction B est de la main de Thomas White, qui servait d'intermédiaire entre Digby et Brouncker; celui-ci reçut le défi le 4 mars 1657, et le transmit le lendemain à Wallis.

L'expression : *Gallia Celtica*, dans cette seconde rédaction, prouve que le défi avait été également adressé à Frenicle, probablement par une lettre directe de Fermat à ce dernier.

PROBLEMA POSTERIUS.

3. Quæritur etiam numerus quadratus qui, additus omnibus suis partibus aliquotis, conficiat numerum cubum.

B

(*Fa*, p. 188; *Comm. ep.*, n° 1.)

A challenge from M. Fermat for D. Wallis, with the hearty commendations of the messager, Thomas White.

Proponatur (si placet) Wallisio et reliquis Angliæ Mathematicis sequens quæstio numerica :

Invenire etc. (*ut supra* 1).

Exempli gratia, numerus 343 est cubus a latere 7. Omnes ipsius partes etc. (*ut supra* 2).

Quæritur etc. (*ut supra* 3).

Has solutiones exspectamus; quas, si Anglia aut Galliæ Belgica et Celtica non dederint, dabit Gallia Narbonensis, easque in pignus nascentis amicitiæ D. Digby offeret et dicabit.

LXXX.

FERMAT A FRENICLE (1).

< FÉVRIER 1657 >

(*Comm. ep.*, n° 33; *Correspondance de Huygens*, n° 372.)

Tout nombre non quarré est de telle nature qu'on peut trouver infinis quarrés par lesquels si vous multipliez le nombre donné et si vous ajoutez l'unité au produit, vienne un quarré.

(1) Cette pièce est un extrait envoyé d'abord par Cl. Mylon à Huygens à la suite d'une lettre datée du 2 mars 1657; Huygens le renvoya le 9 mars à Schooten.

Exemple : 3 est un nombre non quarré, lequel multiplié par 1, qui est quarré, fait 3 et, en prenant l'unité, fait 4, qui est quarré.

Le même 3, multiplié par 16, qui est quarré, fait 48 et, en prenant l'unité, fait 49, qui est quarré.

Il y en a infinis qui, multipliant 3, en prenant l'unité, font pareillement un nombre quarré.

Je vous demande une règle générale pour, étant donné un nombre non quarré, trouver des quarrés qui, multipliés par le dit nombre donné, en ajoutant l'unité, fassent des nombres quarrés.

Quel est, par exemple, le plus petit quarré qui, multipliant 61, en prenant l'unité, fasse un quarré?

Item, quel est le plus petit quarré qui, multipliant 109 et prenant l'unité, fasse un quarré?

Si vous ne m'envoyez pas la solution générale, envoyez-moi la particulière de ces deux nombres que j'ai choisis des plus petits, pour ne vous donner pas trop de peine.

Après que j'aurai reçu votre réponse, je vous proposerai quelque autre chose. Il paroit, sans le dire, que ma proposition n'est que pour trouver des nombres entiers, qui satisfassent à la question, car, en cas de fractions, le moindre arithméticien en viendroit à bout.

LXXXI.

SECOND DÉFI DE FERMAT AUX MATHÉMATICIENS (1).

FÉVRIER 1657.

(*Va*, p. 190; *Comm. ep.*, n° 8.)

Quæstiones pure arithmeticas vix est qui proponat, vix qui intelligat. Annon quia Arithmetica fuit hactenus tractata geometricè potius

(1) Cette pièce, qui pose le même problème que la Lettre précédente LXXX à Frenicle, fut reçue par Brouncker, de la part de Digby et par l'intermédiaire de Thomas White, en mars 1657.

quàm arithmeticè? Id sane innuunt pleraque et Veterum et Recentiorum volumina; innuit et ipse Diophantus (1). Qui licet à Geometria paulo magis quàm cæteri discesserit, dum Analyticen numeris tantum rationalibus adstringit, eam tamen partem Geometriæ non omnino vacare probant satis superque *Zetetica* Vietæa, in quibus Diophanti methodus ad quantitatem continuam, ideoque ad Geometriam porrigitur.

Doctrinam itaque de numeris integris tanquam peculiare sibi vendicat Arithmetica patrimonium; eam, apud Euclidem leviter duntaxat in *Elementis* adumbratam, ab iis autem qui secuti sunt non satis excultam (nisi forte in iis Diophanti libris, quos injuria temporis abstulit, delitescat), aut promovere studeant Ἀριθμητικῶν παῖδες aut renovare.

Quibus, ut præviam lucem præferamus, theorema seu problema sequens aut demonstrandum aut construendum proponimus; hoc autem si invenerint, fatebuntur hujusmodi quæstiones nec subtilitate, nec difficultate, nec ratione demonstrandi, celebrioribus ex Geometria esse inferiores :

Dato quovis numero non quadrato, dantur infiniti quadrati qui, in datum numerum ducti, adscitâ unitate conficiant quadratum.

Exemplum. — Datur 3, numerus non quadratus; ille, ductus in quadratum 1, adscitâ unitate conficit 4, qui est quadratus.

Item idem 3, ductus in quadratum 16, adscitâ unitate facit 49 qui est quadratus.

Et, loco 1 et 16, possunt infiniti quadrati idem præstantes inveniri; sed canonem generalem, *dato quovis numero non quadrato*, inquirimus.

Quæratur, verbi gratia, quadratus qui, ductus in 149, aut 109, aut 433, etc., adscitâ unitate conficiat quadratum.

(1) *Voir* le *Traité des nombres polygones*. — Fermat vise d'ailleurs le fait que Diophante admet, pour ses problèmes, les solutions en nombres fractionnaires.

LXXXI *bis*.

BOULLIAU A FERMAT (1).

MARS 1657.

(Bib. Nat. fr. 13026, f° 51.)

Illustrissimo ac eruditissimo viro Domino de Fermat, in suprema Curia Tholosana consiliario, Mathematico

τῷ πάνυ

Ismael Bullialdus S. P. D.

Hanc de Porismatibus scriptiunculam (2), Vir Ill^me^, simul cum aliis paucis, circa theoremata aliquot geometrica, meis lucubrationibus, cum Mathematicis nostræ ætatis communicare et publici juris facere statui; eam vero rem cùm occasione eruditi simul ac subtilis opusculi tui de Porismatibus, quod anno superiore (3) ad amicos tuos huc transmisisti, aggressus sim, Te antesignanum sequor; quod mihi decori ac gloriæ vertit. Tibi enim, Vir eximie, quàm studiose te colam aliquatenus significare, tam mihi gratum ac jucundum est, ut occasionem, si nata opportune non fuisset, multis curis studioque vehementi redemissem. Omnes equidem, quibus virtutes tuæ notæ sunt, ingenii judiciique acumen probatum, merito te suspiciunt ac celebrant : nec soli per Galliam qui vivunt, verùm per universam Europam

(1) Lettre inédite, dont nous devons l'indication à M. Lucien Auvray, de la Bibliothèque nationale. Elle est publiée d'après la minute de Boulliau.

(2) Il s'agit de l'Ouvrage de Boulliau, dont le titre est donné Tome I, page 77, note 2. *Comparer* avec la présente Lettre l'extrait inséré dans la Note précitée.

(3) Dans l'*Exercitatio de Porismatibus* (*voir* Tome I, p. 77, note, ligne 10 en remontant), Boulliau dit *ante biennium*; mais cette expression, qui indique la fin de 1654, semble se rapporter à l'envoi à Paris par Fermat de propositions détachées comme les *Porismata duo* (Tome I, p. 73 à 76), retrouvés dans les papiers de Pascal. L'opuscule *Porismatum Euclideorum etc.* (Tome I, p. 76 à 84), ici désigné expressément, n'aurait été communiqué au contraire qu'en 1656 (*anno superiore*). Il y a donc lieu de corriger dans ce sens ce que nous avons dit sur la date de cette communication Tome I, page 78, deuxième alinéa de la note.

laudes tuas illi prædicant, quibus nomen tuum innotuit; atque in Italia dum egi, Bonaventuram Cavallerium Bononiæ, et Evangelistam Torricellum Florentiæ, summos hujus nostri sæculi Mathematicos, audivi εὑρήματα tua sublimes mentis tuæ effectiones, quarum copia ipsis facta erat, mirantes summisque laudibus extollentes. Inter illos itaque, qui Te toto animo colunt et venerantur, me recense; utque officium, tenue quamvis, acceptum gratumque Tibi sit, hoc mihi perfice. Et quæ cum paucis hactenus communicasti, præstantissimos animi tui partus, omnium utilitati et commodo ut serviant, in publicum emitte, illosque diutius comprimere noli. Vale Vir Ill^me^.

Scribebam Lutetiæ Parisior. die Martii 1657.

LXXXII.

FERMAT A DIGBY.

VENDREDI 20 AVRIL 1657.

(*Va*, p. 189-190; *Comm. ep.*, n° 4.)

MONSIEUR,

1. Puisque vous voulez que les complimens cessent, soit fait; il me suffit de vous assurer une fois pour toutes que vous vous êtes très-justement acquis un pouvoir absolu sur moi et que je ne perdrai point d'occasion à vous le témoigner.

J'ai lu l'*Arithmetica infinitorum* (1) de Wallisius et j'en estime beaucoup l'auteur; et, bien que la quadrature tant des paraboles que des hyperboles infinies ait été faite par moi depuis fort longues années et

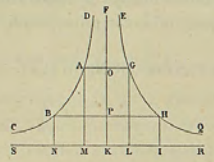
(1) Johannis Wallisii SS. Th. D. Geometriæ Professoris Saviliani in celeberrimâ Academia Oxoniensi Arithmetica infinitorum sive Nova methodus inquirendi in Curvilineorum quadraturam aliaque difficiliora Matheseos Problemata; Oxonii Typis Leon. Lichfield Academiæ Typographi, Impensis Tho. Robinson, Anno 1656. 216 pages in-4°.

que j'en aie autrefois entretenu l'illustre Torricelli (1), je ne laisse pas d'estimer l'invention de Wallisius, qui sans doute n'a pas su que j'eusse préoccupé son travail.

2. Voici une de mes propositions aux termes où je la conçus en l'envoyant à Torricelli :

Soient les deux droites SKR et KOF (*fig.* 85) et soient décrites les courbes EGHQ d'un côté et DABC de l'autre, en forme d'hyperboles

Fig. 85.



dont les asymptotes soient les droites premièrement données. Soient encore tirées AG, BH, parallèles à SKR, et les droites BN, AM, GL, HI, parallèles à KOF.

En l'hyperbole ordinaire, le rectangle NP est égal au rectangle MAO; mais supposons maintenant que le produit du quarré BN et de la droite BP soit égal au produit du quarré MA et de la droite AO : en ce cas, la courbe sera une nouvelle hyperbole dont la propriété sera que

(1) Dans une lettre perdue, probablement de la fin de 1646, et qui semble avoir été la seule que Fermat ait adressée à Torricelli. Elle dut répondre à une communication à laquelle Torricelli fait allusion dans la partie inédite de sa lettre à Roberval du 7 juillet 1646, dans celle à Mersenne du même jour (*Bullettino Boncompagni*, VIII, pages 400-404) et dans celle à Carcavi du 8 juillet 1646 (*Memorie della Reale Accademia dei Lincei*, V$_3$, 20 juin 1880). Dans la première de ces lettres (Bibl. Nat. lat., 11196, f° 16 v°) on lit :

« Hyperbolarum Theoremata, quæ mitto ad Ill^m. De Fermat, ut judicium subeant, num » cum parabolis saltem aliqua ex parte conferri possint, videre poteris. Si unius hyper- » bolæ primariæ quadratura tamdiu quæsita est, nos pro una infinitas damus. »

Ces théorèmes ont été de fait envoyés, avec la lettre du 8 juillet 1646, à Carcavi, qui avait communiqué à Torricelli des propositions de Fermat sur les nombres. Le géomètre italien connaissait d'ailleurs, au moins par les *Cogitata* de Mersenne (1644), les travaux de Fermat sur les paraboles de divers degrés (*voir* Tome I, page 195, note 1).

le parallélogramme BI sera égal à l'espace compris sous la base BH et les deux courbes BADF, FEGH, qui vont à l'infini du côté de F.

Que si le produit du cube BN et de la droite BP est égal au produit du cube AM et de la droite AO, en ce cas, ce sera une autre hyperbole dont la propriété sera que le parallélogramme BI sera double de l'espace compris dans la base BH et les deux courbes en montant, *ut supra*.

Et par règle générale, si le produit d'une puissance de BN par une puissance de BP est égal au produit d'une pareille puissance de MA par une pareille de AO (en supposant celles de BN et MA pareilles entre elles, comme aussi celles de BP et de AO aussi pareilles), le parallélogramme BI sera à la figure prolongée à l'infini *ut supra*, comme la différence de l'exposant de la puissance de BN avec l'exposant de la puissance de BP est à l'exposant de la puissance de BP.

De sorte qu'il suit de là qu'en l'hyperbole ordinaire l'espace de la figure prolongée à l'infini n'est point égal à un espace donné, parce que l'exposant des puissances, étant le même, ne donne aucune différence; et, pour faire que l'espace de la dite figure prolongée à l'infini soit égal à un espace donné, il faut que l'exposant de BN soit plus grand que celui de BP, comme il est aisé de remarquer.

3. Tout ceci, quoiqu'énoncé un peu diversement, se peut tirer du livre de Wallisius; mais il n'a pas fait une spéculation sur ces figures, de laquelle il sera sans doute bien aise d'être averti et qui peut passer pour un des miracles de la Géométrie. Je l'ai autrefois donnée à Torricelli aussi bien que la précédente; c'est :

Comme il arrive que quelquefois l'espace prolongé à l'infini, comme BADFEGH, est aussi infini, comme en l'hyperbole ordinaire, et quelquefois fini, comme en celles dont les exposants de BN surmontent ceux de BP, on demande si, lorsque le dit espace prolongé à l'infini est égal à un espace fini, il a un centre de gravité fixe et certain.

Or, il arrive une chose merveilleuse en cette recherche et laquelle j'ai découverte et démontrée, c'est que quelquefois le dit espace,

quoique fini, n'a point de centre de gravité fixe, et quelquefois il en a.

Car, par exemple, lorsque le produit du quarré BN et de la droite BP est égal aux produits semblablement tirés, la figure BADFEGH prolongée à l'infini, qui en ce cas est égale au parallélogramme BI, n'a pourtant aucun centre de gravité.

Mais, si le produit, par exemple, du cube BN et de la droite BP, est égal aux produits semblables et semblablement tirés, en ce cas, non seulement l'espace de la figure prolongé à l'infini est égal à un espace donné, qui est, comme nous avons dit, la moitié du parallélogramme BI, mais encore cette figure prolongée à l'infini a un centre de gravité, qui va en ce cas en la ligne PF coupée en telle sorte au point O que la ligne PO soit égale à la ligne KP; et ce point O sera le dit centre de gravité de cette figure prolongée à l'infini.

Si Monsieur Wallisius veut avoir la démonstration de cette proposition et de la règle générale pour trouver les dits centres de gravité, je vous l'envoierai pour lui en faire part.

4. Pour ce qui regarde la quadrature du cercle dans son dit Traité, je n'en suis pas pleinement persuadé, car ce qui se déduit par comparaison en Géométrie n'est pas toujours véritable.

5. Je ne vous parle ni de votre Livre (1), ni de celui de Thomas Anglus (2) : *ne sutor ultra crepidam*. Vous êtes souverain en Physique et je vous reconnois pour tel : j'espère pourtant au premier voyage vous entretenir de la proportion que gardent les graves dans leur descente

(1) Il s'agit sans doute de : Two Treatises in the one of which The Nature of bodies, in the other the Nature of man's soule is looked into in way of discovery of the immortality of reasonable soules. Ψυχῆς φύσιν ἀξίως λόγου κατανοῆσαι οἷόν τε δυνατὸν εἶναι ἄνευ τῆς τοῦ ὅλου φύσεως; animæ naturam, absque totius natura, sufficienter cognosci posse existimas? Plato in Phæd. At Paris, Printed by Gilles Blaizot. MDCXLIIII with Priviledge. C'est le Chapitre X (p. 76-86) qui est consacré à la pesanteur.

(2) Il s'agit de : Euclides physicus sive de principiis naturæ Stœcheidea E. Authore Thoma Anglo Ex Albiis East-Saxonum. Londini prostant apud Johannem Crook. MDC.L.VII.

naturelle, de quoi vous avez traité dans votre Livre que Monsieur Borel (1) m'a fait la faveur de me faire voir.

Je suis, Monsieur, votre très humble et très obéissant serviteur,

FERMAT.

A Castres, le 20 avril 1657.

LXXXIII.

FERMAT A DIGBY.

MERCREDI 6 JUIN 1657.

(*Va*, p. 191; *Comm. ep.*, n° 11.)

MONSIEUR,

J'ai reçu votre dernière lettre la veille du départ de M. Borel, qui ne me donne quasi pas le loisir de vous faire un mot de réponse.

Vos deux lettres *angloises* (2) m'ont été traduites par un jeune *Anglois* qui est en cette ville et qui n'a point connoissance de ces matières, de sorte que sa traduction s'est trouvée si peu intelligible que je n'y ai pu découvrir aucun sens réglé, et ainsi je ne puis vous résoudre si ce Mylord a satisfait à mes questions ou non. Il me semble pourtant, au travers de l'obscurité de cette traduction bourrue, que l'auteur des lettres a trouvé mes questions un peu trop aisées, ce qui me fait croire qu'il ne les a pas résolues.

Et parce qu'il pourroit équivoquer sur le sens de mes propositions, j'ai demandé un nombre cube en nombres entiers, lequel, ajouté à toutes ses parties aliquotes, fasse un nombre quarré.

J'ai donné par exemple 343, qui est cube et aussi nombre entier,

(1) Probablement le médecin du Roi, Pierre Borel, né à Castres vers 1620 et fixé à Paris depuis 1653.

(2) Lettres de Brouncker écrites en mars 1657 et qui sont perdues. Elles répondaient aux défis de Fermat (Pièces LXXIX et LXXXI); l'analyse s'en trouve dans la Lettre n° 9 du *Commercium epistolicum*.

lequel, ajouté à toutes ses parties aliquotes, fait 400, qui est un nombre quarré; et, parce que cette question reçoit plusieurs autres solutions, je demande un autre nombre cube en entiers, qui, joint à toutes ses parties aliquotes, fasse un nombre quarré.

Et si le Mylord Brouncker répond qu'en entiers il n'y a que le seul nombre 343 qui satisfasse à la question, je vous promets et à lui aussi de le désabuser en lui en exhibant un autre.

Je demandois encore un quarré en entiers qui, joint à toutes ses parties aliquotes, fasse un cube.

Pour la question proposée dans l'Écrit latin (1) que je vous envoyai, elle est aussi en nombres entiers, et, partant, les résolutions en fractions, lesquelles peuvent être d'abord fournies *a quolibet de trivio arithmetico*, ne me satisferoient pas.

Je suis avec respect, Monsieur, votre très humble et très obéissant serviteur,

FERMAT.

A Castres, le 6 juin 1657.

Je vous parlerai de la descente naturelle des corps pesants dès que j'aurai un peu plus de loisir (2).

LXXXIV.

FERMAT A DIGBY.

MERCREDI 15 AOUT 1657.

(*Comm. ep.*, n° 12; *Fa.*, p. 191-193.)

MONSIEUR,

1. J'ai reçu avec joie et satisfaction votre dernier paquet et, quand il ne contiendroit autre nouvelle que celle de votre convalescence et

(1) La pièce LXXXI.

(2) Ce post-scriptum, emprunté au tome II de l'édition des Œuvres de Wallis (Oxford, 1693, in-f°), manque dans l'édition du *Commercium* de 1658. — Cf. Lettre LXXXII, 5.

du retour de votre santé, c'est un bien si grand et si considérable pour tous ceux qui aiment les belles-lettres, qu'ils ne peuvent en recevoir un plaisir médiocre.

2. J'ai reçu la copie de la lettre de Monsieur Wallis (1), que j'estime comme je dois, et j'avoue que ses figures sont les mêmes que les miennes et que ses conclusions pour leur quadrature sont aussi les mêmes; mais sa façon de démontrer, qui est fondée sur induction plutôt que sur un raisonnement à la mode d'Archimède, fera quelque peine aux novices, qui veulent des syllogismes démonstratifs depuis le commencement jusqu'à la fin. Ce n'est pas que je ne l'approuve; mais, toutes ses propositions pouvant être démontrées *viâ ordinariâ, legitimâ et Archimedeâ* en beaucoup moins de paroles que n'en contient son livre, je ne sais pas pourquoi il a préféré cette manière par notes algébriques à l'ancienne, qui est et plus convaincante et plus élégante, ainsi que j'espère lui faire voir à mon premier loisir.

Je voudrois qu'ensuite il eût déterminé les centres de gravité de ces hyperboles infinies, en distinguant celles qui en ont d'avec celles qui n'en ont pas (2); car, tandis qu'il dira que la chose lui est connue et qu'il n'en a pas voulu charger son livre, il ne me persuadera pas, et d'autant plus que la proposition générale sans démonstration me suffira de sa part. Et je vous réponds, à l'avance, qu'elle ne sauroit contenir plus de huit ou dix lignes; dès qu'il me l'aura envoyée, je lui ferai part de ma spéculation sur ce sujet et de ma façon de démontrer.

3. Pour les questions des nombres, j'ose vous dire, avec respect et sans rien rabattre de la haute opinion que j'ai de votre nation, que les deux lettres de Mylord Brouncker (3), quoique obscures à mon égard et mal traduites, n'en contiennent point aucune solution; ce n'est pas que je prétende par là renouveler les joûtes et les anciens coups de

(1) *Cf.* l'Épitre V du *Commercium* datée du 6 juin 1657 et répondant à la Lettre LXXXII.

(2) *Cf.* l'Épitre XVI du *Commercium*, réponse de Wallis datée du 21 novembre 1657.

(3) *Voir* page 341, note 2.

lances que les Anglois ont autrefois faits contre les François : mais, sans sortir de la métaphore, j'ose vous soutenir, et à vous, Monsieur, plus justement qu'à tout autre, qui excellez aux deux métiers, que le hasard et le bonheur se mêlent quelquefois aux combats de science aussi bien qu'aux autres, et qu'en tous cas nous pouvons dire que *non omnis fert omnia tellus* (1).

Je serai pourtant ravi d'être détrompé par cet ingénieux et savant seigneur et, pour lui témoigner que notre combat ne sera point à outrance, je me relâche dans la question suivante, que je m'en vais lui proposer, de la rigueur de mes premières questions qui ne vouloient que des nombres entiers : il me suffira qu'ils soient rationaux à la mode de Diophante. (Le nom de cet auteur me donne l'occasion de vous faire souvenir de la promesse qu'il vous a plu me faire, de recouvrer quelque manuscrit de cet auteur, qui contienne tous les treize livres, et de m'en faire part, s'il vous peut tomber en main.)

4. Voici la nouvelle question, ou pour Mylord Brouncker ou pour Monsieur Wallis, que j'écris en latin suivant votre ordre (2) :

Datum numerum ex duobus numeris cubis compositum dividere in duos alios numeros cubos.

Hanc propositionem in quadratis tantum exsequutus est Diophantus, in cubis ne tentavit quidem, in iis saltem libris qui ad nos de majore ipsius opere pervenerunt.

Exempli gratia, proponatur numerus 28 *ex duobus cubis* 1 *et* 27 *compositus.*

Oportet dictum numerum 28 *in duos alios cubos rationales dividere et propositionis solutionem generaliter præstare.*

Je consens que M. Frenicle l'entreprenne; je suis persuadé qu'il ne la trouvera pas si aisée que les autres, que je savois être de sa juridiction. Je l'estime extraordinairement aussi bien que vous, mais pour-

(1) Allusion à Virgile, Eclog. IV, 39 : *omnis feret omnia tellus.*
(2) Cf. Observation IX sur Diophante.

tant ce que je vais ajouter l'étonnera, si vous prenez la peine de le lui communiquer.

5. Je lui avois écrit qu'il n'y a qu'un seul nombre quarré en entiers qui, joint au binaire, fasse un cube, et que ledit quarré est 25, auquel si vous ajoutez 2, il se fait 27, qui est cube (1). Il a peine à croire cette proposition négative et la trouve trop hardie et trop générale.

Mais, pour augmenter son étonnement, je dis que, si on cherche un quarré qui, ajouté à 4, fasse un cube, il n'en trouvera jamais que deux en nombres entiers, savoir 4 et 121. Car 4 ajouté à 4 fait 8 qui est cube, et 121 ajouté à 4 fait 125 qui est aussi cube. Mais, après cela, toute l'infinité des nombres n'en sauroit fournir un troisième qui ait la même propriété.

Je ne sais ce que diront vos Anglois de ces propositions négatives et s'ils les trouveront trop hardies : j'attends leur résolution et celle de M. Frenicle, qui n'a pas répondu à une longue lettre que M. Borel lui rendit de ma part. De quoi je suis surpris, car je lui répondois exactement à tous ses doutes et lui faisois quelque question de mon chef, dont j'attends la solution.

Je suis avec grand respect, Monsieur, votre très humble et très obéissant serviteur,

FERMAT.

A Castres, le 15 août 1657.

6. J'oubliois de vous dire que M. Borel a écrit à son père que M. l'Ambassadeur de Hollande s'étonnoit de quoi je n'avois pas répondu à M. Schooten qui prétend avoir résolu mes questions et m'en avoir proposé d'autres; mais je vous assure que je n'ai rien vu de sa part et que, si vous m'en envoyez copie, j'y répondrai (2).

7. J'ai mis la proposition un peu plus générale dans la page sui-

(1) *Cf.* Observation XLII sur Diophante.
(2) La réponse de Schooten au premier Défi (Pièce LXXIX) fut adressée par lui le 17 février 1657 à l'Ambassadeur de Hollande, Willem Boreel. Elle est insérée dans la Lettre n° 33 du *Commercium epistolicum* et dans la *Correspondance de Huygens*, n^os 377 et 378.

vante où elle me semble être mieux ; on la peut concevoir pour M. Frenicle, qui aime les nombres entiers, en ces termes :

Trouver deux nombres cubes dont la somme soit cube,

et

Trouver deux nombres cubes dont la somme soit égale à deux autres nombres cubes.

8. *Proposuit Diophantus* (1) :

Datum numerum quadratum in duos quadratos dividere;

item :

Datum numerum ex duobus quadratis compositum in duos alios quadratos dividere.

Quæstionem autem ad cubos evehere nec ipse nec Vieta tentavit : quidni igitur famosam propositionem et recentioribus reservatam Analystis expedire aut dubitemus aut differemus?

Proponatur itaque :

Datum numerum cubum in duos cubos rationales dividere;

item :

Datum numerum ex duobus cubis compositum in duos alios cubos rationales dividere,

et inquiratur quid eâ de re Anglia, quid Hollandia censeat.

(1) *Cf.* Observations II et III sur Diophante.

LXXXV.

FERMAT A DIGBY (1).

REMARQUES SUR L'ARITHMÉTIQUE DES INFINIS DU S. J. WALLIS.

MERCREDI 15 AOUT 1657.

(*Comm. ep.*, n° 13; *Fa.*, p. 193-196.)

1. En son Épitre il déclare comment il s'est mis à la recherche de la quadrature du cercle et dit que quelques vérités, qui ont été découvertes en Géométrie, lui ont donné l'espérance qu'elle se pourroit trouver. Ces vérités sont :

Que la raison des cercles infinis du cône aux infinis du cylindre est connue, savoir celle du cône au cylindre qui a même base et hauteur; et pareillement la raison des diamètres desdits cercles, savoir celle du triangle qui passe par l'axe du cône au parallélogramme qui passe par l'axe du cylindre;

Comme aussi on a la raison du conoïde parabolique au cylindre circonscrit, et celle de la parabole au parallélogramme qui passent par leurs axes, qui sont comme l'assemblage des diamètres des cercles infinis qui composent lesdits solides;

De plus, qu'on a aussi trouvé la raison des ordonnées (tant au triangle qu'au conoïde parabolique ou parabole), qui sont les diamètres desdits cercles.

D'où il conclut que, puisqu'on a trouvé aussi la raison de la sphère au cylindre circonscrit, ou celle de l'infinité des cercles parallèles, dont on peut concevoir que la sphère est composée, à pareille multitude de ceux qui se peuvent feindre au cylindre, on pourra aussi espérer de pouvoir découvrir la raison des ordonnées en la sphère ou au cercle à celles du cylindre ou quarré, savoir la raison des dia-

(1) Pièce apportée par White à Brouncker en même temps que la précédente (premiers jours d'octobre 1657). Wallis répondit (à Digby) par la Lettre 16 du *Commercium*.

mètres des cercles infinis qui composent la sphère aux diamètres des cercles du cylindre. Ce qui seroit avoir la quadrature du cercle.

Mais, de même qu'on ne pourroit pas avoir la raison de tous les diamètres pris ensemble des cercles qui composent le cône à ceux du cylindre circonscrit, si on n'avoit la quadrature du triangle; non plus que la raison des diamètres des cercles qui composent le conoïde parabolique à ceux qui font le cylindre circonscrit, si on n'avoit la quadrature de la parabole; ainsi on ne pourra pas connoître la raison des diamètres de tous les cercles qui composent la sphère à ceux des cercles qui composent le cylindre circonscrit, si l'on n'a pas la quadrature du cercle. Car, de demander la raison qu'il y a entre les diamètres de tous les cercles parallèles qu'on peut concevoir en la sphère (lesquels diamètres, pris tous ensemble, ne sont autre chose qu'un cercle) et ceux des cercles qu'on peut feindre au cylindre circonscrit (lesquels font un quarré circonscrit audit cercle), cela n'est autre chose que de demander la raison du cercle au quarré circonscrit.

II. En la même Épître (1), après avoir posé une suite de nombres, savoir :

$$1,\quad 6,\quad 30,\quad 140,\quad 630,$$

il demande le terme moyen qui doit être mis entre 1 et 6. Je réponds que, si on a égard à la suite entière des dits nombres, on ne peut poser aucun terme moyen entre les dits 1 et 6, pource qu'en cette suite les

(1) Si, dans la suite de Wallis, on considère l'unité comme étant le terme de rang 0, le terme de rang n sera

$$T_n = \frac{3.5\ldots(2n-1)(2n+1)}{1.2\ldots(n-1)n}\,2^n,$$

et l'on peut aussi poser

$$T_n = \frac{2n+1}{\pi}\,2^{2n+1}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{2n}x\,dx, \quad \text{ou bien} \quad T_n = \frac{2^{2n}}{\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{2n+1}x\,dx} = \frac{2^{2n}}{\int_0^1 \frac{z^{2n+1}dz}{\sqrt{1-z^2}}},$$

d'où

$$T_{\frac{1}{2}} = \frac{8}{\pi}.$$

nombres ne font pas une proportion continue, mais, en autant de façons que l'un est comparé à l'autre, autant font-ils de proportions différentes; de sorte que ce sont plusieurs proportions ou progressions disjointes et ainsi, quand on prendroit un terme moyen entre 1 et 6, il n'auroit rien de commun avec les autres nombres.

Toute la proportion ou suite, qu'on peut remarquer entre ces nombres, consiste au rapport qu'ont entre eux les nombres dont ils proviennent par multiplication, auxquels on voit une espèce de progression arithmétique. Néanmoins il ne sçauroit passer aux nombres susdits, en telle sorte que, par icelui, on puisse donner un terme moyen entre deux des nombres, qui ait correspondance à toute la suite.

Au contraire, la propriété même de cette progression fait qu'il n'y en peut avoir; voici comment :

Les nombres donnés

$$1,\quad 6,\quad 30,\quad 140,\quad 630$$

sont produits par les suivants en multipliant :

$$1,\quad 4\tfrac{3}{1},\quad 4\tfrac{2}{2},\quad 4\tfrac{3}{3},\quad 4\tfrac{3}{4},$$

ou les équivalents :

$$1,\quad \frac{6}{1},\quad \frac{10}{2},\quad \frac{14}{3},\quad \frac{18}{4}.$$

En ces nombres, qui servent à faire les donnés, il est facile de voir où est le rapport. Il consiste, aux premiers, en la seule augmentation du dénominateur de la fraction qui y est jointe, ce qui fait diminuer les nombres d'autant plus qu'ils s'éloignent du premier terme, savoir de 1; et aux seconds

$$1,\quad \frac{6}{1},\quad \frac{10}{2},\quad \text{etc.},$$

qui sont les mêmes en autres termes, les numérateurs des fractions augmentent de 4 et les dénominateurs de l'unité, ce qui fait pareillement diminuer les nombres tant plus la progression avance : en sorte

que celui qui est le plus proche du premier terme 1, savoir $4\frac{2}{1}$ ou $\frac{6}{1}$, qui vaut 6, est le plus grand de tous.

Il faut aussi remarquer que le rapport des nombres de la dite progression n'arrive pas jusques au premier terme 1, ou plutôt ne commence pas dès le premier terme, mais au second seulement, qui est sa borne. De sorte que, si on vouloit augmenter les termes de la dite progression, en la changeant et mettant un nombre moyen entre le premier et le second terme, savoir entre 1 et $4\frac{2}{1}$ ou $\frac{6}{1}$, il ne faudroit pas avoir égard à 1, mais aux autres nombres

$$4\tfrac{2}{1},\quad 4\tfrac{2}{2},\quad 4\tfrac{2}{3},\quad 4\tfrac{2}{4},$$

ou à ces autres qui sont les mêmes :

$$\tfrac{6}{1},\quad \tfrac{10}{2},\quad \tfrac{14}{3},\quad \tfrac{18}{4};$$

car cette progression n'auroit pas de suite, si on la commençoit par 1.

Puis donc : qu'il ne faut pas avoir égard au premier terme 1, qui n'a rien de commun avec les nombres de la dite progression, mais aux autres seulement; et qu'ils augmentent à mesure qu'ils approchent du premier terme 1 : il s'ensuit que le nombre, qu'on prendroit entre 1 et $4\frac{2}{1}$ ou $\frac{6}{1}$, seroit plus grand que le dit $\frac{6}{1}$ ou 6, et il faudroit multiplier le premier terme 1 par ce nombre moyen qui seroit plus grand que 6, pour avoir le moyen terme entre les deux premiers des nombres premièrement donnés, qui sont 1 et 6 (car les dits nombres donnés

1, 6, 30, 140, 630

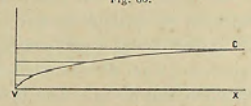
n'ont point d'autre rapport ou liaison que celle qu'ils empruntent de leurs multiplicateurs, autrement ils n'en ont aucune). Et ainsi on auroit un nombre plus grand que 6 pour le moyen terme d'entre 1 et 6; ce qui est absurde.

De là s'ensuit qu'on ne peut donner le moyen terme entre 1 et 6, en

tant qu'ils sont compris en la suite ou progression des nombres : 1, 6, 30, 140, 630.

On peut inférer de là que la ligne courbe VC (*fig.* 86) (1) n'est point égale en elle-même et qu'elle ne peut provenir d'aucun mouvement continu qui soit égal ou réglé, mais de plusieurs, différens suivant ses parties; et que c'est une ligne composée de portions de plusieurs courbes comprises entre les parallèles à l'axe VX de la figure. Car, en

Fig. 86.



icelle, il est bien nécessaire que la moyenne ligne tirée entre la première et la seconde parallèle, savoir entre 1 et 6, soit moindre que 6. Mais, outre que cette moyenne ligne seroit de différente longueur suivant la nature et la propriété de cette portion de la courbe VC, qui n'a rien de commun avec les autres portions, comme a été dit, elle n'auroit rapport qu'avec les deux termes 1, 6, et non pas avec les autres, ni avec les moyennes qu'on auroit tirées entre deux, si on prenoit le tout conjointement.

III. En la première proposition le dit sieur Wallis propose une suite de quantités commençant par 0 (qui représente le point) et qui se suivent en progression arithmétique, et cherche quelle raison il y a entre la somme des dites quantités et la somme d'autant de termes égaux à la plus grande des données.

Le moyen qu'il donne pour trouver cette raison est de prendre les sommes de diverses quantités de nombres commençant par les moindres, puis comparer les raisons les unes aux autres et inférer de là une proposition universelle.

On se pourroit servir de cette méthode, si la démonstration de ce

(1) La figure ne se trouvant pas dans le *Commercium*, nous la restituons d'après l'*Arithmetica infinitorum* de Wallis (*Opera mathematica*, Oxford, 1695, in-f°, tome I, p. 477).

qui est proposé étoit bien cachée et, qu'auparavant de s'engager à la chercher, on se voulut assurer à peu près de la vérité; mais il ne s'y faut fier que de bonne sorte et on doit y apporter les précautions nécessaires. Car on pourroit proposer telle chose et prendre telle règle pour la trouver qu'elle seroit bonne à plusieurs particuliers et néanmoins seroit fausse en effet et non universelle. De sorte qu'il faut être fort circonspect pour s'en servir, quoiqu'en y apportant la diligence requise, elle puisse être fort utile, mais non pas pour prendre, pour fondement de quelque science, ce qu'on en aura déduit, comme fait le sieur Wallis : car, pour cela, on ne se doit contenter de rien moins que d'une démonstration, et principalement au sujet de la proposition dont il s'agit, dont la solution et démonstration est fort facile.

Voici comme on démontrera que les dites quantités proposées, étant jointes ensemble, font la moitié d'autant de quantités égales à la plus grande d'icelles :

Soient exposées des quantités ou nombres qui commencent par le point ou par o, et qui se suivent en progression arithmétique; et soient celles de la première ligne

1° Quantités données.....	o *a b c d*
2° Quantités égales à la plus grande des données....	*d d d d d*
3° Excès des plus grandes par dessus les données...	*d c b a* o

Puisque les quantités données sont en progression arithmétique, le troisième terme *b* surpassera le second de pareille quantité que le second (savoir *a*) surpasse le premier qui est o; mais l'excès de *a* par dessus o est *a* : et, partant, toutes ces quantités se surpasseront l'une l'autre de proche en proche selon la quantité du second terme *a*. Et si on prend les quantités de deux en deux, laissant une d'icelles entre deux, comme sont *a*, *c*, ou *b*, *d* de la première ligne, leur différence sera le troisième terme, comme il est évident. Et de même, si on les prenoit de trois en trois, elles auroient le quatrième terme *c* pour leur différence.

De là il s'ensuit que, si on prend autant de termes égaux au plus grand terme *d* des quantités données, comme en la seconde ligne, leur excès par dessus les quantités données sera égal aux dites quantités données, comme on [le] voit en la troisième ligne. Car l'excès de *d* par dessus la plus grande des quantités données, savoir par dessus *d*, est o, qui est le premier terme des quantités données; l'excès du même *d* par dessus le terme précédent *c* est le second terme *a*, comme il a été montré, savoir pource que les deux quantités *c* et *d* sont prochaines; et ensuite l'excès de *d* par dessus *b* sera *b*, et ainsi des autres, jusques à ce qu'enfin, étant au premier terme o, l'excès de *d* par dessus icelui sera le même *d*.

Et ainsi la ligne des excès, qui est la troisième, sera égale à la première qui contient les quantités données; mais la première et la troisième ligne étant jointes ensemble (savoir les quantités données étant jointes aux excès des quantités de la seconde ligne par dessus celles de la première, qui sont les données), font la dite seconde ligne, qui a chacun de ses termes égal au plus grand de ceux de la première : partant la seconde ligne, ou le plus grand terme des données pris autant de fois qu'il y a de termes, sera double de la première ligne, c'est à dire des quantités données. Ce qu'il falloit démontrer.

IV. En la seconde proposition, il requiert que le premier terme soit o et le second 1. Autrement il dit que *moderatio est adhibenda*.

A cela je dis que, si on commence par o, quelque nombre qu'on mette pour le second terme, la somme d'autant de fois le plus grand terme sera toujours double des quantités données. Car, si pour *a*, *b*, *c*, *d* on prend quelques nombres qu'on voudra, qui soient en progression arithmétique depuis le premier terme o, cela succédera toujours en la même sorte, ainsi qu'il a été ci-devant démontré.

LXXXVI.

FERMAT A DE LA CHAMBRE.

AOUT 1657.

(D. III, 50).

A Toulouse, le mois d'août 1657.

MONSIEUR,

1. Je n'avois garde de vous obéir lorsque vous m'ordonniez de recevoir votre Livre (1) sans le lire. Le présent que vous m'en avez fait est une marque trop précieuse de l'amitié dont vous m'honorez; mais sa lecture m'a fait concevoir l'idée de cette amitié comme un bien qui mérite d'être conservé avec soin, avec respect et avec estime. Et pour vous le faire voir, je ne vous parlerai point de vos autres spéculations de Physique, quoiqu'elles soient pleines d'un raisonnement très solide et très subtil; il me suffira de vous entretenir un peu sur la matière de la réflexion et de la réfraction, quand ce ne seroit que pour réparer par cette lettre la perte d'un Discours que je vous avois adressé, il y a déjà quelques années, sur ce même sujet et que j'ai su n'être point venu en vos mains. Ce qui m'y confirme est que j'entre par là dans quelque société d'opinion avec vous, et j'ose même vous assurer par avance que, si vous souffrez que je joigne un peu de ma géométrie à votre physique, nous ferons un travail à frais communs qui nous mettra d'abord en défense contre M. Descartes et tous ses amis.

2. Je reconnois premièrement avec vous la vérité de ce principe, que la nature agit toujours par les voies les plus courtes. Vous en déduisez très bien l'égalité des angles de réflexion et d'incidence, et l'objection de ceux qui disent que les deux lignes qui conduisent la

(1) La Lumière à Monseigneur l'Éminentissime Cardinal Mazarin par le sieur De La Chambre, conseiller du Roy en ses Conseils et son Médecin ordinaire. A Paris, chez P. Recolet, Imp. et Lib. ord. du Roy; au Palais, en la gallerie des Prisonniers, aux Armes du Roy et de la Ville. MDCLVII, avec Privilège du Roy (446 pages in-4°).

vue ou la lumière dans le miroir concave sont très souvent les plus longues, n'est point considérable, si vous supposez seulement, comme un autre principe indisputable, que tout ce qui appuie ou qui fait ferme sur une ligne courbe, de quelque nature qu'elle soit, est censé appuyer ou faire ferme sur une droite qui touche la courbe au point où la rencontre se fait: ce qui peut être prouvé par une raison de physique aidée d'une autre de géométrie.

Le principe de Physique est que la nature fait ses mouvements par les voies les plus simples. Or, la ligne droite étant plus simple que la circulaire ni que pas une autre courbe, il faut croire que le mouvement du rayon qui tombe sur la courbe se rapporte plutôt à la droite qui touche la courbe qu'à la courbe même.

Premièrement, parce que cette droite de l'attouchement est plus simple que la courbe; secondement (et c'est ce qui s'emprunte de la Géométrie), parce que aucune droite ne peut tomber entre la courbe et la touchante, par un principe d'Euclide. De sorte que le mouvement est justement le même sur la droite qui touche que sur la courbe qui est touchée.

Et, cela supposé, on ne peut jamais dire que les deux droites qui conduisent la lumière ou le rayon soient quelquefois les plus longues aux miroirs concaves, parce qu'en ce cas même elles se trouvent les plus courtes de toutes celles qui peuvent se réfléchir sur la droite qui touche la courbe. Et, par conséquent, il ne faut ni supposer que la nature agisse par contrainte en ce cas, ni conclure qu'elle suive une autre manière de mouvement que celle qu'elle pratique aux miroirs plans et en toute autre espèce de miroirs. De sorte que voilà votre principe pleinement établi pour la réflexion.

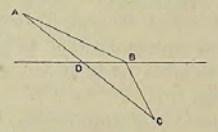
3. Mais, puisqu'il a servi à la réflexion, pourrons-nous en tirer quelqu'usage pour la réfraction? Il me semble que la chose est aisée et qu'un peu de géométrie nous pourra tirer d'affaire.

Je ne m'étendrai point sur la réfutation de la démonstration de M. Descartes. Je la lui ai autrefois contestée, à lui, dis-je, *viventi*

atque sentienti, comme disoit Martial (1), mais il ne me satisfit jamais. L'usage de ces mouvements composés est une matière bien délicate et qui ne doit être traitée et employée qu'avec une très-grande précaution. Je les compare à quelques-uns de vos remèdes, qui servent de poison s'ils ne sont bien et dûment préparés. Il me suffit donc de dire en cet endroit que M. Descartes n'a rien prouvé, et que je suis de votre sentiment en ce que vous rejetez le sien.

Mais il faut passer plus outre et trouver la raison de la réfraction dans notre principe commun, qui est que la nature agit toujours par les voies les plus courtes et les plus aisées. Il semble d'abord que la chose ne peut point réussir et que vous vous êtes fait vous-même une objection qui paroit invincible. Car (*fig.* 87) puisque, dans la page 315

Fig. 87.



de votre Livre, les deux lignes CB, BA qui contiennent l'angle d'incidence et celui de réfraction, sont plus longues que la droite ADC qui leur sert de base dans le triangle ABC, le rayon de C en A, qui contient un chemin plus court que celui des deux lignes CB, BA, devroit, au sens de notre principe, être la seule et véritable route de la nature, ce qui pourtant est contraire à l'expérience. Mais on peut se défaire aisément de cette difficulté en supposant, avec vous et avec tous ceux qui ont traité de cette matière, que la résistance des milieux est différente, et qu'il y a toujours une raison ou proportion certaine entre ces deux résistances, lorsque les deux milieux sont d'une consistance certaine et qu'ils sont uniformes entre eux.

Ne vous étonnez pas de ce que je parle de résistance, après que vous

(1) Martial, *Epigr.*, I, II, 3. — *Voir* les Lettres XXII et XXIV.

avez décidé que le mouvement de la lumière se fait en un instant et que la réfraction n'est causée que par l'antipathie naturelle qui est entre la lumière et la matière. Car, soit que vous m'accordiez que le mouvement de la lumière sans aucune succession peut être contesté et que votre preuve n'est pas entièrement démonstrative, soit qu'il faille passer par votre décision, à savoir que la lumière fuit l'abondance de la matière qui lui est ennemie, je trouve, même en ce dernier cas, que, puisque la lumière fuit la matière et qu'on ne fuit que ce qui fait peine et qui résiste, on peut, sans s'éloigner de votre sentiment, établir de la résistance où vous établissez de la fuite et de l'aversion.

Soit donc, par exemple, en votre figure le rayon CB qui change de milieu au point B, où il se rompt pour se rendre au point A. Si ces deux milieux étoient les mêmes, la résistance au passage du rayon par la ligne CB seroit à la résistance au passage du rayon par la ligne BA comme la ligne CB à la ligne BA. Car, les milieux étant les mêmes, la résistance au passage seroit la même en chacun d'eux et, par conséquent, elle garderoit la raison des espaces parcourus. D'où il suit que, les milieux étant différents et la résistance par conséquent différente, on ne peut plus dire que la résistance au passage du rayon par la ligne CB soit à la résistance au passage du rayon par la ligne BA comme la ligne CB à la ligne BA; mais en ce cas la résistance par la ligne CB sera à la résistance par la ligne BA comme CB à une autre ligne dont la raison à la ligne BA exprimera celle des deux résistances différentes.

Comme : si la résistance par le milieu A est double de la résistance par le milieu C, la résistance par CB sera à la résistance par BA comme la ligne CB au double de la ligne BA; et si la résistance par le milieu C est double de la résistance par le milieu A, la résistance par CB sera à la résistance par BA comme la ligne CB à la moitié de la ligne BA. De sorte qu'en ces deux cas, les deux résistances par CB et par BA, étant jointes, pourront être exprimées : ou par la ligne CB jointe à la moitié de la ligne BA, ou par la ligne CB jointe au double de BA.

Vous voyez déjà sans doute la conclusion de ce raisonnement : car,

soient donnés, par exemple, les deux points C et A en deux milieux différents séparés par la ligne BD et qui soient de telle nature que la résistance de l'un soit double de celle de l'autre; il faut chercher le point B auquel le rayon, qui va de C en A ou d'A en C, soit coupé ou rompu.

Si nous supposons que la chose est déjà faite, et que la nature agit toujours par les voies les plus courtes et les plus aisées, la résistance par CB, jointe à la résistance par BA, contiendra la somme des deux résistances, et cette somme, pour satisfaire au principe, doit être la moindre de toutes celles qui se peuvent rencontrer en quelqu'autre point que ce soit de la ligne DB. Or ces deux résistances jointes sont en ce cas, comme nous avons prouvé, représentées : ou par la ligne CB jointe à la moitié de BA, ou par la même ligne CB jointe au double de BA.

La question se réduit donc à ce problème de Géométrie :

Étant donnés les deux points C *et* A *et la droite* DB, *trouver un point dans la droite* DB *auquel si vous conduisez les droites* CB *et* BA, *la somme de* CB *et de la moitié de* BA *contienne la moindre de toutes les sommes pareillement prises, ou bien que la somme de* CB *et du double de* BA *contienne la moindre de toutes les sommes pareillement prises;*

et le point B qui sera trouvé par la construction de ce problème sera le point où se fera la réfraction.

Vous voyez par là qu'il faut que le rayon se coupe et se rompe lorsque les milieux sont différents. Car, bien que la somme des deux lignes CB et BA soit toujours plus grande que la somme des deux lignes CD et DA ou que la toute CA, néanmoins la ligne CB, jointe à la moitié ou au double de BA, peut être plus courte que la ligne CD jointe à la moitié ou au double de DA.

Je vous avoue que ce problème n'est pas des plus aisés; mais, puisque la nature le fait en toutes les réfractions pour ne se départir pas de sa façon d'agir ordinaire, pourquoi ne pourrons-nous pas l'entreprendre?

Je vous garantis par avance que j'en ferai la solution quand il vous plaira et que j'en tirerai même des conséquences qui établiront solidement la vérité de notre opinion. J'en déduirai d'abord : que le rayon perpendiculaire ne se rompt point; que la lumière se rompt dès la première surface sans plus changer le biais qu'elle a pris; que le rayon rompu s'approche quelquefois de la perpendiculaire, et qu'il s'en éloigne quelque autre fois, à mesure qu'il passe d'un milieu rare dans un plus dense ou au contraire; et en un mot, que cette opinion s'accorde exactement avec toutes les apparences. De sorte que, si elle n'est pas vraie, on peut dire ce que disoit Galilée en un sujet différent, que la nature semble nous l'avoir inspirée *per pigliarsi gioco di nostri ghiribizzi* (1).

Mais j'ai tort de ne songer pas que le sujet de cette lettre ne devoit être qu'un remerciment. Je vous conjure, Monsieur, d'excuser sa longueur, quand ce ne seroit que par l'intérêt que vous y avez, et de la recevoir en tout cas comme un témoignage de l'estime que j'ai pour votre savoir et du respect avec lequel je suis, Monsieur,

Votre très humble et très affectionné serviteur,

FERMAT.

LXXXVII.

DIGBY A FERMAT.

MERCREDI 5 DÉCEMBRE 1657.

(*Fa.*, p. 196-197.)

MONSIEUR,

Je me donnai l'honneur de vous écrire le 19 du mois passé. Depuis ce temps-là, j'ai été en Normandie et à mon retour j'ai trouvé la Lettre

(1) Nous n'avons pu retrouver le texte auquel est empruntée cette citation.

que vous m'avez fait l'honneur de m'écrire du 17 du même mois (1), dont je vous rends très-humbles grâces et m'estime très-heureux de vous servir dans le commerce qui est entre vous et Monsieur de Frenicle, à qui je montrai aussi votre Lettre et, comme vous y parlez de notre Chancelier Bacon, cela me fit souvenir d'un autre beau mot qu'il dit en ma présence une fois à feu Monsieur le Duc de Buckingham.

C'étoit au commencement de ses malheurs, quand l'assemblée des États, que nous appelons le Parlement, entreprit de le ruiner, ce qu'elle fit ensuite : ce jour là, il en eut la première alarme. J'étois avec le Duc, ayant dîné avec lui; le Chancelier survint et l'entretint de l'accusation qu'un de ceux de la Chambre Basse avoit présentée contre lui, et il supplia le Duc d'employer son crédit auprès du Roi pour le maintenir toujours dans son esprit. Le Duc lui répondit qu'il étoit si bien avec le Roi leur maître, qu'il n'étoit pas besoin de lui rendre de bons offices auprès de Sa Majesté : ce qu'il disoit, non pas pour le refuser, car il l'aimoit beaucoup, mais pour lui faire plus d'honneur. Le Chancelier lui répondit de très-bonne grâce qu'en effet il croyoit être parfaitement bien dans l'esprit de son Maître, mais aussi qu'il avoit toujours remarqué que, pour si grand que soit un feu et pour si fortement qu'il brûle de lui-même, il ne laissera pourtant pas de brûler mieux et d'être plus beau et plus clair, si on le souffle comme il faut.

De même j'ai dit à Monsieur Frenicle que, pour si grand feu d'esprit qu'il ait et quelque merveilleux que soit son génie pour la science des nombres, son feu seroit plus brillant, s'il le vouloit exciter ou augmenter par l'étude, par la lecture des anciens et par la conversation.

Il vous honore infiniment et dit que jamais homme n'a approché de votre fond de science; il m'a apporté ce matin un écrit pour vous l'envoyer. Je l'ai fait copier par mon secrétaire, car vous ne l'auriez pu lire; il écrit d'ordinaire sur des lambeaux de papier et si vite qu'il n'y a que lui même qui puisse lire son écriture.

(1) Cette lettre est perdue.

Vous aurez vu, par ma dernière lettre, que j'ai reçu celle (1) que vous me fîtes l'honneur de m'écrire lorsque vous étiez à la campagne. Au lieu de vous laisser passer le titre de paresseux que vous vous donnez injustement, j'admire infiniment la facilité et la présence avec laquelle, au milieu de vos grandes occupations, vous exprimez sur le champ vos profondes et subtiles pensées. Je vous supplie de croire que j'honore vos rares talens et que je voudrois que mes actions vous pûssent témoigner mieux que mes paroles à quel point je suis etc.

LXXXVIII.

DIGBY A FERMAT.

MERCREDI 12 DÉCEMBRE 1657.

(*Voir* p. 197.)

MONSIEUR,

Depuis que je me suis donné l'honneur de vous écrire une lettre du 5 de ce mois (2), je reçus celle que vous m'avez fait la faveur de m'écrire du 25 du passé (3), dont je vous rends très-humbles grâces. Elle me fut rendue comme j'étois à table avec Monsieur Frenicle à qui je la montrai et, y ayant papier et encre sur le buffet, je le priai de vous écrire quelque petit mot sur ce que vous y disiez sur son sujet; je vous envoie son écrit.

Il me fait souvenir fort souvent d'un aumônier, qu'avoit le feu roi d'Angleterre, qui étoit un des plus éloquens prédicateurs de son temps et très-subtil théologien; mais, depuis que la guerre fut commencée, il n'y avoit plus moyen de le faire prêcher ou parler de sa science : il n'avoit d'autres idées en son imagination que de machines de guerre

(1) Ces lettres de Digby et de Fermat sont perdues.
(2) La lettre qui précède.
(3) Lettre perdue.

et des stratagèmes pour prendre des villes, en quoi il n'entendoit rien du tout.

Ainsi Monsieur Frenicle ne me veut entretenir d'autre chose que de la théologie mystique et de ses pensées sur le franc-arbitre ou sur la prédestination, quittant le rang qu'il pourroit posséder d'un des plus grands mathématiciens du siècle pour un des moindres théologiens. Car c'est bien tard de commencer la physique et la théologie après l'âge de cinquante ans : je dis la physique, parce qu'il est malaisé d'être un grand théologien si on n'est un solide physicien et si on n'a une véritable connoissance de la nature, dont le sommet sert de base à la grâce.

Mais je dois bien prendre garde de m'engager en ce que j'entends aussi peu et encore moins que lui; je reviens à ce que je sais de science certaine, dont je vous ferai démonstration évidente toutes les fois que l'occasion s'en présentera, et c'est que je suis etc.

ANNÉE 1658.

LXXXIX.

DIGBY A FERMAT.

MERCREDI 13 FÉVRIER 1658.

(*Va*, p. 197-198.)

MONSIEUR,

Je suis sur le point d'entrer en carrosse pour aller à Rouen, dont je ne crois pas revenir de quinze jours ou trois semaines. C'est pourquoi, dès que j'eus reçu votre paquet du 27 du passé (1), j'allai chez M. Clerselier et, n'ayant pas moyen de lui faire faire des copies de vos écrits avant mon départ, je crus que vous trouveriez bon que je les lui confiasse sur la parole qu'il me donna, de vous les rendre fidèlement dès qu'il auroit tiré copie de ce qu'il lui faut. C'est un fort honnête homme et fort votre serviteur; il m'a dit qu'il se donneroit l'honneur de vous écrire par cet ordinaire.

Au reste, Monsieur, quand bien je demeurerois ici, je ne serois pas assez vain pour accepter la charge que vous voudriez m'imposer : elle est trop pesante pour ma foiblesse. Je sais trop bien (2)

> ..... quid ferre recusent,
> Quid valeant humeri.....

pour pouvoir être arbitre entre deux grands personnages; il faut aller

(1) Lettre perdue, à laquelle étaient jointes des copies demandées par Clerselier pour la publication des Lettres de Descartes. *Voir* Lettre XC ci-après.
(2) HORACE, *Art poétique*, 39-40.

du pair avec eux. Crassus s'acquitta bien mal de cette fonction entre César et Pompée, n'ayant pas les reins aussi forts qu'eux.

Il est vrai que ceux qui sont dans les vallées peuvent discerner la hauteur des plus grandes montagnes pour en avoir de l'admiration; mais, pour bien juger de ce qu'il y a au sommet de quelqu'une d'elles, il faut être monté aussi haut sur une autre. Vous me permettrez donc de vous dire avec le grossier Palæmon (1) :

Non nostrum inter vos tantas componere lites.

Et, pour ce qui est de la chaleur avec laquelle vous, Monsieur, et M. Descartes avez soutenu vos sentimens, je ne serois pas d'avis d'en rien ôter ou changer, pourvu qu'il n'y ait rien qui soit offensant, ce qu'on ne peut présumer de deux aussi grands hommes et à quoi M. Clerselier prendra garde. Car, de vouloir étouffer ce petit feu brillant et étincelant, ce seroit ôter beaucoup de la grâce et de la force à une contestation d'esprit et de science, et c'est une des raisons pourquoi les disputes aux Universités des Suisses sont si peu agréables, leur manière d'argumenter étant bien éloignée de la vivacité des bacheliers de la Sorbonne qui pressent avec véhémence et avec chaleur : car cette chaleur provient d'un feu qui ne brûle pas, mais qui semble donner la lumière et la vie comme celle du Soleil.

Je ne saurois m'empêcher de vous envoyer quelques vers que le plus grand génie de notre île pour les Muses (2) écrivit au Chancelier Bacon, qui étoit son grand ami et que vous témoignez être fort le vôtre en le citant souvent. Je vous dirai comment je les ai rappelés en ma mémoire : l'autre jour, m'entretenant avec une personne de grand mérite de vos rares qualités, je lui récitai ces vers y mettant votre nom au lieu de celui de *Baco*. Il en voulut avoir une copie : je la lui fis transcrire par mon secrétaire sur le brouillard que j'en fis à la hâte; il

(1) Virgile, *Eclog.*, III, 108.

(2) Nous n'avons pu retrouver ces vers ni dans Shakespeare, ni dans aucun des grands poètes contemporains. Au reste, il s'agit probablement d'une pièce latine.

vous en auroit fait aussi une copie s'il eût été chez moi, mais je viens de l'envoyer chez M. l'Ambassadeur d'Angleterre (1).

Je suis etc.

XC.

FERMAT A CLERSELIER (2).

DIMANCHE 3 MARS 1658.

(Bib. nat. fr. n. a. 3280, f° 35; D.[2] III, 43.)

MONSIEUR,

J'ai reçu votre lettre (3) avec les deux copies des écrits de M. Descartes sur le sujet de notre ancien démêlé.

Je voudrois bien, Monsieur, vous satisfaire ponctuellement en ce que vous semblez souhaiter que je refasse mes réponses d'alors qui se sont égarées (4); mais, comme je hais naturellement tout ce qui choque tant soit peu la vérité, et qu'il me seroit aussi malaisé de rajuster ce vieux ouvrage qu'à un peintre de refaire mon portrait

(1) Nous trouvons au vol. 69 de la Correspondance *Angleterre* conservée aux Archives du Ministère des affaires étrangères la preuve que l'ambassadeur d'alors s'appelait Lokard.

(2) Le texte de cette lettre est établi principalement d'après une copie du temps collationnée à Vienne par Despeyrous et qui présente plusieurs passages inédits publiés par Libri (*Journal des Savants*, 1845, pp. 686-687). — Quoique datée du 3 mars, elle ne fut envoyée, d'après le post-scriptum, que le 10, avec la lettre suivante.

(3) Lettre annoncée dans la précédente de Digby, et qui est perdue. Les écrits de Descartes sur la Dioptrique qui l'accompagnaient étaient : la lettre à Mersenne (*ci-avant* XXIII) et la lettre à Mydorge (*Desc.*, III, 42). *Voir* plus haut, page 125, note 1.

(4) Ce langage paraît l'effet d'un malentendu; Clerselier possédait bien les deux lettres de Fermat à Mersenne sur la Dioptrique (*ci-avant* XXII et XXIV), mais il aura cru à des répliques postérieures de Fermat; celui-ci aura compris que les lettres perdues dont on lui parlait étaient celles auxquelles Descartes avait répondu et que nous venons de mentionner. Il n'avait certainement pas rouvert la discussion; toutefois il nous manque des lettres de lui à Mersenne en 1638, où il avait touché incidemment la question de la Dioptrique, comme dans les Pièces XXV *bis*, 1 et XXVI.

d'alors sur mon visage d'à présent, j'ai cru qu'il valoit mieux vous écrire tout de nouveau une lettre qui contiendra mes raisons d'opposition et vieilles et nouvelles, et c'est à quoi je travaillerai pour la huitaine (1).

J'entre dans vos sentiments pour ce qui concerne l'impression; il y faudra changer les termes les plus choquants et les plus aigres, mais n'y faire point autrement de grand changement, et de cela je m'en remets à vous. Monsieur de Carcavi vous fournira sans doute mon traité *de maximis et minimis;* il l'a de toutes façons, c'est-à-dire avec démonstration et sans démonstration, et, puisqu'il est question d'instruire ou de désabuser le public, il sera bon de l'insérer dans votre recueil avec une lettre de M. Milon ou de quelque autre de vos fameux géomètres qui éclaircisse la chose et qui prépare les lecteurs à entendre la dernière lettre de M. Descartes (2), par laquelle il m'écrivit (comme vous verrez) qu'il étoit satisfait de ma géométrie.

Pour la question de Dioptrique, je vous proteste, sans nulle feintise, que je souhaite de m'être trompé; mais je ne saurois obtenir sur moi, en façon quelconque, que le raisonnement de M. Descartes soit une démonstration, et même qu'il en approche. Je vous envoierai dans huit jours la lettre qui éclaircira mes doutes sur cette matière. Et je suis de tout mon cœur, Monsieur, Votre très humble et très obéissant serviteur,

FERMAT.

A Toulouse, ce 3 mars 1658.

J'ai retenu cette lettre, qui étoit prête à vous être envoyée dès la semaine passée, parce que j'ai cru que M. Digby, par la voie duquel j'ai pris la liberté de vous écrire, ne seroit pas encore de retour à Paris. Vous recevrez donc les deux conjointement et, si la seconde est un peu trop longue, assurez-vous, Monsieur, que j'ai mis peine à l'accourcir, et que je pouvois dire beaucoup plus que je n'ai fait. Je

(1) *Voir* la Lettre suivante XC *bis*.
(2) *Voir* Lettre XXXII.

l'ajouterai un jour, si les géomètres de Paris soutiennent la démonstration de M. Descartes.

Il ne sera pas malaisé par les répliques de M. Descartes de supposer ce que j'aurois dit au contraire, et ma dernière < lettre > le contiendra à peu près.

Vous me renvoierez mes écrits (1) quand vous voudrez; je n'en ai point de hâte.

XC *bis*.

FERMAT A CLERSELIER.

DIMANCHE 10 MARS 1658.

(D., III, 44.)

MONSIEUR,

1. Les conclusions qui se peuvent tirer de la proposition qui sert de fondement à la Dioptrique de M. Descartes sont si belles et doivent naturellement produire de si beaux effets dans tous les ouvrages de l'art qui regardent la réfraction, qu'il seroit à souhaiter, non seulement pour la gloire de notre défunt ami, mais bien plus pour l'augmentation et embellissement des sciences, que cette proposition fût véritable et qu'elle eût été légitimement démontrée, et d'autant plus qu'elle est de celles dont on peut dire que *multa sunt falsa probabiliora veris*. Je veux même passer plus outre et la comparer à ce fameux mensonge dont il est parlé dans le Tasse, et que ce poète assure être plus beau que la vérité :

Quando sarà il vero
Si bello, che si possa a ti preporre? (2)

Je commence par là, Monsieur, afin de vous faire connoître que je

(1) Il s'agit probablement d'écrits mathématiques conservés d'ailleurs; mais nous ne pouvons préciser lesquels.
(2) *Jérusalem délivrée*, II, 22 :

Magnanima menzogna, or quando è il vero etc.

serois ravi que le différend que j'ai eu autrefois sur ce sujet avec M. Descartes se terminât à son avantage. J'y trouverois mon compte en toutes façons : la gloire d'un ami que j'ai infiniment estimé et qui a passé avec raison pour un des grands hommes de son temps; l'établissement d'une vérité physique des plus importantes; et l'exécution aisée des effets merveilleux qui s'en pourroient infailliblement déduire. Tout cela me vaudroit incomparablement mieux qu'un gain de cause, quand même je devrois compter pour rien le

Mecum certasse feretur (1),

dont les amis de M. Descartes peuvent toujours raisonnablement consoler ses adversaires. Je me mets donc, Monsieur, en la posture d'un homme qui veut être vaincu; je le déclare hautement :

Jamjam efficaci do manus scientiæ (2).

Mais, parce que les démonstrations sont des raisons forcées et, qu'à moins d'être convaincu par elles, on n'en sauroit être persuadé, voyons, Monsieur, si le consentement des lecteurs peut échapper à notre auteur, et si nous pourrons nous défaire aisément des objections qui semblent lui pouvoir être opposées. Il faut pour cela suivre sa démonstration mot pour mot, et il suffira d'enfermer par des parenthèses ce qui ne sera point à lui et que j'ajouterai du mien.

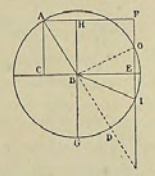
2. Voici donc comme il parle sur la fin de la page 16 de sa Dioptrique françoise (3) :

« Et premièrement, supposons qu'une balle, poussée d'A vers B » (*fig.* 56), rencontre au point B, non plus la superficie de la terre, » mais une toile CBE qui soit si foible et si déliée que cette balle ait la

(1) Ovide, *Metam.*, XIII, 20.
(2) Horace, *Epodes*, XVII, 1.
(3) Discours de la méthode pour bien conduire sa raison et chercher la vérité dans les Sciences : plus la Dioptrique, les Météores et la Géométrie, qui sont des essais de cette Méthode. A Leyde, de l'imprimerie de Ian Maire, CIↃ IↃ C XXXVII : avec privilège, p. 16 (2e pagination de l'Ouvrage).

» force de la rompre et de passer tout au travers, en perdant seule- » ment une partie de sa vitesse, à savoir, par exemple, la moitié. Or » cela posé, afin de savoir quel chemin elle doit suivre, considérons » de rechef que son mouvement diffère entièrement de sa détermina- » tion à se mouvoir plutôt vers un côté que vers un autre, d'où il suit » que leur quantité doit être examinée séparément; et considérons

Fig. 56.



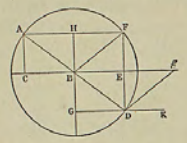
» aussi que, des deux parties dont on peut imaginer que cette déter- » mination est composée, il n'y a que celle qui faisoit tendre la balle » de haut en bas qui puisse être changée en quelque façon par la ren- » contre de la toile, et que, pour celle qui la faisoit tendre vers la » main droite, elle doit toujours demeurer la même qu'elle a été, à » cause que cette toile ne lui est aucunement opposée en ce sens là. »

3. (Mais ce raisonnement n'est-il pas un peu opposé au sens commun? L'extension qu'il en fait de la réflexion à la réfraction n'est-elle pas aussi un peu forcée? En la page 13, il suppose que la balle va toujours d'égale vitesse, tant en descendant qu'en remontant, qu'elle continue son mouvement dans un même milieu (1); il en déduit, en la page 15, que la rencontre de la terre (2) peut bien empêcher la détermination qui faisait descendre la balle d'A vers CE, à cause qu'elle

(1) « Mais afin de ne nous embarrasser point en des nouvelles difficultés, supposons que la terre est parfaitement platte et dure, et que la balle va tousjours d'esgale vitesse, tant en descendant qu'en remontant... »
(2) « Et en suite il est aysé à entendre que la rencontre de la terre ne peut empescher que l'une de ces deux déterminations et non point l'autre en aucune façon. »

occupe tout l'espace qui est au dessous de CE, mais qu'elle ne peut point empêcher l'autre qui la faisoit avancer vers la main droite, vu qu'elle ne lui est aucunement opposée en ce sens-là; d'où il infère l'égalité des angles de réflexion et d'incidence.

Fig. 53.



Mais quand bien ce raisonnement seroit véritable en la réflexion, quelque sceptique scrupuleux ne manquera point d'alléguer qu'il y a trois circonstances en la réfraction qui doivent changer la conséquence, ou du moins servir d'empêchement à la recevoir sans nouvelle preuve :

Premièrement, en la figure de la page 17 ou en celle de la page 18 (1), la balle ne continue pas son mouvement d'une égale vitesse, puisque, par la supposition, elle perd, par exemple, la moitié de sa vitesse dès le point B.

Secondement, elle ne passe pas toujours par un même milieu, comme il paroît en la figure de la page 18.

Et enfin la détermination qui la faisoit aller de haut en bas n'est pas tout à fait empêchée par la rencontre de la toile ou de l'eau, mais changée seulement ou diminuée.

Or, que la conséquence soit la même nonobstant la diversité de ces trois circonstances, il sera malaisé qu'un médiocre logicien le puisse accorder. Il alléguera pour excuse de sa logique scrupuleuse, qu'il n'a pas cru se faire grande violence, lorsqu'en la figure de la page 15 (*fig.* 53) il a donné les mains que la détermination de la

(1) A ces figures correspond celle que nous avons reproduite plus haut sous le n° 56, d'après l'édition des Lettres de Descartes, de Clerselier.

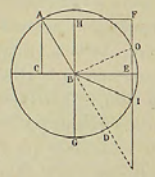
gauche à la droite restoit la même, puisque la balle allant toujours de même vitesse pouvoit conserver l'une de ses visées ou déterminations lorsque l'autre seule étoit empêchée; que d'ailleurs le mouvement se faisoit dans un même milieu; et qu'enfin, la détermination de haut en bas étant entièrement empêchée, il n'y avoit pas grand mal de consentir que celle de la gauche à la droite restât tout entière : comme, quand on perd un œil, on dit que la vertu visive se conserve entière en celui qui reste.

Mais, en la réfraction, tout y est différent. Veut-on y obtenir le consentement de notre sceptique sans preuve? La détermination de la gauche à la droite demeurera-t-elle la même, lorsque toutes les raisons qui le lui avoient persuadé en la réflexion se sont évanouies? Mais ce n'est pas tout : il a sujet d'appréhender l'équivoque et, lorsqu'il aura accordé que cette détermination de gauche à droite demeure la même, il a occasion de soupçonner que l'auteur le chicanera sur l'explication de ce terme. Car, quoiqu'il ait protesté que la détermination est différente de la puissance qui meut, et que leur quantité doit être examinée séparément, si notre sceptique lui accorde en cet endroit que cette détermination de gauche à droite demeure la même en la réfraction, c'est-à-dire qu'elle conserve la même visée ou direction, il y a apparence que l'auteur voudra l'obliger ensuite à lui accorder que la balle, dont la détermination vers la droite n'est point changée, s'avance autant et aussi vite vers la droite qu'elle faisoit auparavant, quoique sa vitesse et le milieu par où elle passe soient changés.

Mais parce qu'il ne paroît pas sitôt qu'on veuille lui faire une si grande violence, il ne croit pas être encore temps de se départir du respect qu'il doit au nom de M. Descartes, et il veut bien lui avouer, sur sa seule parole, que cette détermination vers la droite demeurera la même, pourvu qu'il ne se parle point du temps que la balle doit employer à s'avancer de ce côté là : parce que M. Descartes même a avoué que la force qui meut et la détermination sont deux quantités qui n'ont rien de commun, et qu'elles doivent être séparément examinées).

4. « Puis, ayant décrit du centre B le cercle AFD et tiré à angles droits sur CBE les trois lignes droites AC, HB, FE, en telle sorte qu'il y ait deux fois autant de distance entre FE et HB qu'entre HB et AC, nous verrons que cette balle doit tendre vers le point I. Car, puisqu'elle perd la moitié de sa vitesse en traversant la toile CBE, elle doit employer deux fois autant de temps à passer au-dessous, depuis B jusques à quelque point de la circonférence du cercle AFD, qu'elle

Fig. 56.



a fait au-dessus, à venir depuis A jusques à B. Et, puisqu'elle ne perd rien du tout de la détermination qu'elle avoit à s'avancer vers le côté droit, en deux fois autant de temps qu'elle en a mis à passer depuis la ligne AC jusques à HB, elle doit faire deux fois autant de chemin vers ce même côté (¹). »

5. (C'est ici le guet-apens, et la trop grande crédulité de celui qui avoit franchi tous ses scrupules sur le premier article, reçoit en cet endroit une nouvelle attaque. L'auteur a sujet d'espérer que, puisque notre sceptique lui a déjà accordé que la détermination vers la droite restoit la même, il ne doit pas le dédire non plus, que cette détermination ou cette visée et direction vers le côté droit ne soit également vite et n'avance toujours autant qu'elle faisoit auparavant.

Mais le sceptique commence à n'entendre plus raillerie et, s'il a consenti de bonne foi que la détermination vers la droite ne changeoit

(¹) Discours de la méthode, etc. A Leyde, CIↃ IↃ CXXXVIII, p. 18 (2ᵉ pagination).

pas, il proteste qu'il n'est point engagé à consentir qu'en changeant de milieu elle fasse toujours un égal progrès, puisque l'auteur a si souvent et si solennellement assuré que la détermination et la force mouvante sont tout à fait différentes et distinctes; et pour se confirmer en son doute, il ajoute que si, dans la figure de la page 17, la balle étoit poussée depuis H jusques à B, et qu'elle continuât son mouvement vers BG, le raisonnement de celui qui diroit :

« La détermination de la balle sur la route HBG n'est point changée au point B, car elle est la même, et le mouvement perpendiculaire se continue dans la même ligne HBG; donc cette balle avance autant et aussi vite au dessous de B qu'elle faisoit auparavant. »

ce raisonnement, dis-je, seroit ridicule, parce que la détermination ou direction du mouvement diffère de sa vitesse.

Pourquoi donc notre sceptique sera-t-il obligé d'accorder gratuitement et sans preuve que le mouvement qui se fait vers la droite dans la figure de la page 18 avance également vers le dit côté droit, après qu'il a changé de milieu? Ce n'est pas que cette proposition ne puisse être vraie, mais elle ne l'est qu'au cas que la conclusion que M. Descartes en tire soit véritable, c'est-à-dire que la raison ou proportion pour mesurer les réfractions ait été par lui légitimement et véritablement assignée. Il ne l'a donc pas prouvée par une proposition si douteuse et si peu admissible.

En un mot, quand toutes les oppositions qu'on peut faire à son raisonnement seroient fautives, peut-il faire passer pour véritable ce qui n'est ni axiome, ni déduit par une conséquence légitime d'aucune première vérité? Les démonstrations qui ne forcent pas de croire ne peuvent point porter ce nom.)

Et croiriez-vous, Monsieur, que si la proposition de M. Descartes étoit démonstrativement prouvée, son évidence et sa clarté n'eussent pas percé les ténèbres de mon entendement, pendant vingt années qui se sont écoulées depuis notre ancien démêlé, puisque je vous ai protesté, dès le commencement de ma lettre, que je travaille sincèrement

à me tirer d'erreur, et que je ne cherche qu'un honnête prétexte à me rendre? Je serois même ravi d'établir l'honneur de M. Descartes aux dépens du mien, et je voudrois, s'il m'étoit possible, en reconnoissant la vérité de sa preuve, ajouter avant que de finir :

Se clara videndam
Obtulit et pura per noctem in luce refulsit (1).

Il en sera pourtant ce que M. le chevalier Digby et vous, Monsieur, trouverez bon. Je vous soumets à tous deux ma logique et ma mathématique, et je consens à ce que vous en fassiez un sacrifice à la mémoire de cet illustre, qui n'est plus en état de se défendre; mais, jusques à ce que vous ayez prononcé, je prétends que la véritable raison ou proportion des réfractions est encore inconnue et que θεῶν ἐν γούνασι κεῖται (2), en compagnie de tant d'autres vérités que l'avenir découvrira peut-être mieux que n'a pu faire le passé.

Excusez ma longueur et faites moi l'honneur de me croire, Monsieur, Votre très humble et très affectionné serviteur,

FERMAT.

XCI.

FERMAT A DIGBY.

DIMANCHE 7 AVRIL 1658.

(*Comm. ep.*, 37.)

MONSIEUR,

1. J'ai reçu les nouvelles solutions de la proposition (3) de Monsieur Wallisius, que Monsieur Frenicle a ajoutées aux premières. Je

(1) Virgile, *Énéide*, II, 589-590.
(2) Homère, *Iliade*, XVII, 514.
(3) « Trouver deux nombres entiers carrés tels que les sommes formées par chacun d'eux et par ses parties aliquotes soient égales. »
Cette question avait été proposée par Wallis dans sa Lettre à Digby du 21 novembre 1657 (*Comm.* 16). Les solutions de Frenicle sont dans sa Lettre à Digby (*Comm.* 31) que Brouncker reçut le 5 avril 1658.

suis ravi, aussi bien que vous, de l'abondance et fertilité de son esprit et de la grande facilité qu'il s'est acquise en ces matières. Je m'étois contenté de donner deux solutions en nombres premiers entre eux, et avois seulement indiqué qu'on pouvoit, par ma méthode, étendre la question à trois, quatre, cinq et plusieurs nombres de même nature. Mais, puisque Monsieur Frenicle m'a si avantageusement préoccupé, je n'ajoute plus rien à son travail, et je consens que ma petite et maigre solution demeure en vos mains.

2. Après avoir reçu la lettre de Monsieur Wallisius (1), je suis toujours surpris de quoi il méprise constamment tout ce qu'il ne sait pas. Les questions en nombres entiers ne sont point de son goût. Il s'imagine que je ne sais point les centres de gravité des hyperboles infinies, et il semble promettre sur la fin la quadrature de l'hyperbole, c'est-à-dire de celle d'Apollonius : car, pour toutes les autres, ni lui ni moi ne l'ignorons pas.

Je lui réponds succinctement :

3. Premièrement à ce qu'il dit que je fais grand cas des propositions négatives, comme qu'il n'y a que le seul quarré 25 qui, ajouté à 2, fasse un cube en nombres entiers; et encore qu'il n'y a que les deux quarrés 4 et 121 qui, ajoutés à 4, fassent des cubes, aussi en entiers (2). Il dit que ce sont des propositions ordinaires et *neque majus quid aut grandius insinuant quam si dicerem cubicubum nullum in integris esse vel etiam quadratum qui, numero* 62 *junctus, efficiat quadratum, ... vel etiam nullos in integris cubos esse qui ab invicem distent numero vicenario nec, præter* 8 *et* 27, *qui distent numero* 19, *etc.*; ...., *cujusmodi innumeras determinationes negativas in promptu esset comminisci.*

Je réponds que je ne fais point cas de toute sorte de propositions négatives; par exemple, celles qu'il rapporte et infinies de telle nature ne sont que des amusements d'un arithméticien de trois jours, et leur

(1) Lettre 16 du *Commercium epistolicum*. (*Voir* la note qui précède.)
(2) *Voir* Lettre LXXXIV, 5.

raison est d'abord connue *etiam lippis et tonsoribus* (1). De sorte que d'en inférer de là qu'il faut faire peu de compte de toutes sortes de propositions négatives, voyez, Monsieur, quelle logique! Mais je ne veux point d'autre preuve que celles que je vous ai proposées sont du haut étage et dignes d'être recherchées, c'est que ni lui, qui s'estime tant, ne les a pas encore démontrées, ni Monsieur Frenicle même, que je mets au-dessus de lui, sans lui faire tort; et ce dernier, qui connoît merveilleusement les mystères les plus cachés des nombres, ne les a pas méprisées.

4. Mais, parce que les nombres entiers ne plaisent pas à Monsieur Wallisius, en voici une autre, à laquelle il pourra s'occuper et en laquelle je n'exclus point les fractions (2) :

Il n'y a aucun triangle rectangle en nombres dont l'aire soit quarrée.

5. Et, pour lui faire voir que le défaut de connoissance de cette sorte de questions lui fera quelquefois concevoir plus grande opinion de ses forces qu'il n'en doit raisonnablement avoir, il dit qu'il ne doute point que le Mylord Brouncker ne résolve les deux questions (3) :

Datum numerum cubum in duos cubos rationales dividere,

et

Datum numerum ex duobus cubis compositum in duos alios cubos rationales dividere;

je lui réponds qu'il pourra, par aventure, ne se mécompter pas en la seconde, quoiqu'elle soit assez difficile, mais que, pour la première, c'est une de mes propositions négatives que ni lui ni le Seigneur Brouncker ne démontreront peut-être pas si aisément. Car je soutiens qu'*il n'y a aucun cube en nombres qui puisse être divisé en deux cubes rationaux.*

(1) Horace, *Sat.* I, VI, 3.
(2) Problème impossible. — Observation XLV sur Diophante.
(3) *Voir* Lettre LXXXIV, 4 et 8. — Observations II et IX sur Diophante.

Pour la seconde question, elle n'est pas d'une extrême difficulté et, pour lui témoigner que je veux même la lui proposer en cas des plus aisés en prenant un petit nombre, je me contente que lui ou Mylord Brouncker divisent le nombre 9, qui est composé des deux cubes 8 et 1, en deux autres cubes rationaux. S'il rejette cette proposition, qui n'est pas des plus difficiles, je n'oserai plus leur en proposer ni en entiers ni en fractions.

6. Pour son canon *ad inveniendos quadratos qui, ducti in datum numerum non quadratum, adscita unitate, conficiant quadratum,* je ne sais pas pourquoi il doute que cette invention nous paroisse malaisée, puisqu'il n'est point d'algébriste novice qui ne trouve sa règle d'abord. Mais ma question *en entiers* est si fort au dessus de ces petites règles *de trivio*, que M. Frenicle l'a jugée digne de l'occuper, et c'est tout dire. Il a si exactement répondu à tout le reste qui regarde les questions numériques que j'aurois tort d'ajouter quelque chose du mien à ses réponses (1).

7. Pour ce qui regarde les centres de gravité des hyperboles infinies et la règle pour distinguer celles qui en ont de celles qui n'en ont pas < je répondrai > que je l'avois résolu pleinement et envoyé tant à Torricelli qu'aux géomètres de Paris dix ans avant l'impression du livre *Arithmetica infinitorum* (2). S'il ne m'en veut pas croire, les Roberval et les Pascal, qui ont toutes mes propositions sur ce sujet depuis plusieurs années, le pourront désabuser.

8. La promesse qu'il fait sur la quadrature de l'hyperbole s'exécutera sans doute comme celle du cercle : la voie qu'il tient en se servant de certaines progressions, *inter quorum terminos interpolationem quærit*, est de ces méthodes qui aboutissent à trouver une chose aussi difficile que celle qu'on a pour but de chercher. *Obscurum autem*

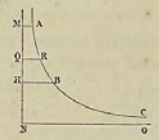
(1) Digby avait tout d'abord communiqué à Frenicle la lettre de Wallis du 21 novembre 1657 et Frenicle avait rédigé en réponse une épître latine à Digby, datée du 3 février 1658 (*Comm. ep.*, 22).
(2) *Voir* Lettre LXXXII, 2.

explicare per obscurius, matæotechnia est, comme a très bien dit notre Viète (¹).

Mais pour lui faire voir que je ne manque pas de théorèmes effectifs et très beaux en la véritable hyperbole d'Apollonius, voici un problème dont je puis donner la construction.

Soit (*fig.* 88) l'hyperbole d'Apollonius ABC, ses asymptotes MNO; soient tirées les deux parallèles à NO, les droites MA, HB. Je propose la figure AMHB contenue sous l'hyperbole et sous les droites AM, MH, HB. Il la faut diviser < par > une parallèle aux bases comme QR, en sorte que le segment RQHB soit au restant AMQR en raison donnée.

Fig. 88.



Ce problème sera construit par moi bien plus tôt que M. Wallisius ne donnera la quadrature de l'hyperbole d'Apollonius.

En voilà de reste pour ce coup. Ce n'est pas pour faire un démêlé formel avec M. Wallisius, mais c'est seulement pour me justifier à vous, consentant que vous ne lui envoyiez que ce qu'il vous plaira du contenu en cette lettre. Je ne réponds pas aux dernières réponses, parce que ce n'est pas moi qui lui avois fait les objections auxquelles il répond.

Je suis, Monsieur, Votre très humble et très obéissant serviteur,

FERMAT.

A Toulouse, le 7 avril 1658.

(¹) VIÈTE, *Ad Adriani Romani problema responsum*, Cap. V. — Édition Elzevir; Leyde, 1646, p. 309. — Le mot *autem* a été ajouté par Fermat.

XCII.

DIGBY A FERMAT.

MERCREDI 15 MAI 1658.

(*Fa*, p. 198-200.)

ILL^MO SIG. PADRON COL^MO,

Avrei temuto d'infastidire troppo V. S. Illustrissima con nuova lettera, se la sua ultima delli 4 del corrente non m'avesse recata cagione (quantunque in soggetto di poco rilievo) di renderle qualche picciola servitù o più presto ossequio e conformità alli suoi commandi; avendo imparato dal savio che, come c'è tempo di parlare, vi lo è anche del silenzio; e dallo spiritoso Poëta Tosco (¹), che

Il silentio ancor suole
Haver prieghi e parole.

Ma lei avendomi fatto l'onore d'ordinarmi di mandarle un de' miei libri della Physica in Inglese (²), non l'ho voluto lasciar andare senza accompagnamento di queste poche righe, per ringraziarla della sua tanta compiacenza in dire che ha intento di trascorrerlo, per avvezzarsi cosi alla nostra rozza favella; rozza in quant'al suono ed ingrata all' orecchia non avvezza ad essa, ma forse, quanto alla copia, proprietà, ed energia dell' espressioni, ed all' eleganza e politezza in ogni altro genere, che non cede punto alle più eleganti e stimate, nè delle volgari, nè delle dotte, che abbino mai avuto prattica nel mondo, e che nelle poesie che abbiamo, non solo va del pari, ma avvanza di gran lunga li migliori o Toscani, o Latini, o Greci; eccettuando però nell' Eroica Omero e Virgilio, i quali dui, senza contrasto, son fuori

(¹) Nous n'avons pu retrouver l'auteur de ces beaux vers.

(²) Il s'agit sans doute du premier des *Two treatises* cités ci-dessus, page 340, note 1. Digby parle plus loin d'une traduction (latine?) de ce Livre, faite à Paris, mais elle ne paraît pas avoir été imprimée. Était-elle entre les mains de Fermat, qui ne savait pas l'anglais?

d'ogni comparazione con tutti de i secoli dopo loro, e però prudentemente fece quel Grammatico ardito Giulio Scaligero (che maggior epiteto non gli posso conceder io, quantunque i pedanti moderni gl' affigghino il titolo invidioso di divino Critico), che in vece di far censura dell' ultimo e forse il minore di essi, gl' eresse un altare. Onde veramente alle volte lamento la sorte che ci ha fatti

Penitus toto divisos orbe Britannos (1),

poi che abbiamo parecchie composizioni poetiche le quali meritarebbono la luce ed il godimento universale, e per le quali capire, ho conosciuto quattro persone di spiriti sublimi ed ingegnosissimi (dui Francesi, e dui Italiani), che per aver visto delle grossiere interpretazioni in prosa di certi carmi Inglesi, si sono applicati con fervore a studiare nostra lingua, per bever alla schietta fonte delle nostre acque, le quali hanno poi confessato avergli più sedato la loro sete in simile materia, che qualsivoglia abondante fiume di altra regione in terra ferma. Per conformarmi dunque al voler di V. S. I., ho messo in mano del messaggiero di Tolosa lunedì passato un involto contenendo il mio detto libro, del quale veramente non ne aveva più copia appresso di me, avendo per ciò scritto in Inghilterra, dove è stato ristampato questo trattato tre o quattro volte in ambedue le Università di Oxonio e Cantabrigia; e poi che lei si vuole penare di dar un' occhiata a questo mio componimento, mi rallegro molto che ciò sia nella lingua nella quale io l'ho conceputo, per esser che quantunque il traduttore sia stato uomo dottissimo, e la sua traduzione essaminata per tutto il Collegio dei Dottori Inglesi di questa Città, tutti valenti Teologi i quali la fecero fare per servir allo studio di tutti i loro seminarii, nientedimeno egli è cosa certa, che ci è gran differenza tra l'original ed il transcritto, in quanto al vigor dell'espressione, e credo che dopo aver vissuto sempre in nostra corte polita, e conversato continuamente co'l Bacone, il Seldeno e altri maggiori lumi della

(1) VIRGILII *Eclog. I*, v. 67.

nostra Patria, non si stimarebbe vanità in me s'io mi attribuissi lo scriver correttamente in Inglese. E quando io feci il primo disegno di questo discorso, godevo di tranquillità assai per spiegar con maggior chiarezza ciò che voleva dire, essendo che lo feci nello spazio di quelli quasi dui anni ch'io fui continuamente su'l mare : durante il quale è ben vero che quasi ogni giorno ebbi occasione di prepararmi a combattere con la mia flotta (essendo nel mar Mediterraneo circondata dalle forze Francesi e Spagnuole (1), con chi avevamo allora guerra, e anche dalle Vineziane), nientedimeno mi avvanzava tanto tempo, che se non fosse stato che per evitar il tedio (ancorchè il comando del Re fu il mio primo motivo), mi accingevo ogni giorno con premura a metter qualche cosa in carta, di modo che posso con ragione dire come quel più dotto e gentil cavagliero di tutta la nazion Castigliana e prencipe de' loro Poeti, Garcilasso de la Vega (2) :

Entre las armas del sangriento Marte
Hurtò del tiempo esta breve suma,
Tomando hora la spada, hora la pluma.

Ma poi che lei si degna voler veder de i meschini parti del mio sterile ingegno, ho volsuto farle parte ancora d'un altro trattaticiuolo che ho composto intorno all' infallibilità della Religione Catolica, per dar soddisfazione a un' de' maggiori genii ch' io abbia mai conosciuto, e che finalmente l'ha convinto (3). Perchè lui non si contentava di considerar Iddio come un Legislatore, che volesse dimostrare il suo potere con dar premii o pene secondo una volontà imperiosa, senza motivo ragionevole fondato in natura, e però bisognò penetrar nella Filosofia

(1) Les croisières de Digby dans la Méditerranée avec deux bâtiments armés en course remontaient à 1628.

(2) Ces vers se trouvent dans l'Églogue III. Digby supprime entre le premier et le second le vers suivant :

Do apenas hay quien su furor contraste

(*Obras de Garcilaso de la Vega illustradas con notas*. En Madrid, MDCCLXXXVIII, p. 97-98).

(3) « A Discourse concerning Infallibility in Religion, written by sir Kenelme Digby to the Lord George Digby, eldest sonne of the Earle of Bristol ». Paris, 1652, in-12.

della Religione, e perchè essa sia necessaria a gl' uomini. In una parola, bisognò combattere in lui tutte le maggiori forze de' più dotti Sociniani (la più terribil' setta d'Eretici che sia mai stata), nel che fare ho qui impiegato tutto'l vigore del mio debbole ingegno in una strada non calcata d'altri, e tutte le piu squisite espressioni che so della lingua nostra, e non ne feci stampare se non 30 copie per dar ad amici confidenti. Gli mando ancora un altro trattato Inglese, che ha fatto gran romore in Inghilterra e che molti vogliono attribuire a me, ancor che sia sotto il nome del Signor Bianchi (conosciuto sotto titolo di Thomas Anglus), per esser che i sentimenti dell'Autor e li miei siano precisamente gl'istessi (1). Dimando perdono de'l mio tanto importunarla, e la riverisco, etc.

XCIII.

CLERSELIER A FERMAT (2).

MERCREDI 15 MAI 1658.

(D., III, 45; Bibl. Nat. fr. 3280, n. acq., fos 43-50.)

MONSIEUR,

1. Je ne veux pas m'arrêter beaucoup à vous faire des excuses d'avoir tant tardé à faire réponse aux deux vôtres, l'une du 3e et l'autre du 10e mars dernier, pource que je me persuade que vous croirez aisément qu'il m'a fallu des obstacles invincibles pour m'empêcher de satisfaire à temps à des témoignages si obligeans de votre suffisance et de votre civilité. En effet, une maladie qui m'a détenu dans le lit presque tout ce temps-là, et qui m'a ôté le moyen de pou-

(1) Thomas White, en dehors de ses ouvrages latins, publiés sous le nom de *Thomas Anglus*, a composé un grand nombre de Traités en anglais. Digby désignait peut-être celui qui parut à Londres en 1655, sous le titre : *The Grounds of Obedience and Government*.

(2) Réponse à la Lettre XC *bis*.

voir occuper mon esprit à des considérations si relevées, est la véritable cause qui m'a empêché de vous témoigner plus tôt ma reconnoissance.

Mais tout cela seroit peu, si je pouvois aujourd'hui répondre à tous les doutes de votre sceptique, et satisfaire pleinement aux difficultés que vous proposez dans votre dernière; car, comme elles ne dépendent point du temps, la réponse n'en seroit de rien moins meilleure et convaincante, pour n'être pas venue à temps. Néanmoins, pourvu que ce soit à vous, Monsieur, que j'aie affaire, et non point à votre sceptique, dont l'humeur seroit trop difficile à contenter, je me promets de pouvoir éclaircir la plupart de ses doutes, et de faire voir, si je ne me trompe, si clairement en quoi il s'est mépris dans ses raisonnemens, que, vous prenant vous-même pour l'arbitre de nos différens et pour le juge de nos conclusions, j'espère que vous reconnoîtrez la subtilité des siennes et la vérité des miennes, c'est-à-dire de celles de M. Descartes.

2. Premièrement, je ne vois point que le raisonnement que fait M. Descartes, à l'occasion de sa figure (1) de la page 17 de sa Dioptrique, soit aucunement opposé au sens commun, ni que l'extension qu'il en fait de la réflexion à la réfraction soit forcée. Car la même raison qui lui a fait conclure en la page 15 que la terre CBE (2) ne pouvoit empêcher que la détermination de haut en bas, et non point celle de gauche à droite, pource qu'elle est entièrement opposée à la première et point du tout à la seconde, la même lui a dû faire conclure, dans la figure de la page 17 ou 18, que la détermination de haut en bas pouvoit bien être changée en quelque façon par la rencontre de la toile ou de l'eau, mais point du tout celle qui fait tendre la balle vers la main droite, à cause que l'eau ou la toile est en quelque façon opposée à l'une et point à l'autre.

Je vous prie de remarquer ici la façon de parler de M. Descartes (car

(1) *Voir* fig. 56, page 369.

(2) *Voir* fig. 53, page 370.

c'est de là que dépend en partie la solution de tous les doutes de votre sceptique) : il ne dit pas simplement que la détermination de haut en bas peut être changée par la rencontre de la toile, mais seulement qu'elle peut être changée *en quelque façon* (1).

Car en effet elle n'est pas tout-à-fait changée, puisque la balle continue de descendre, mais elle est changée en quelque façon, en tant que c'est changer en quelque façon la détermination qu'un mobile avoit à avancer vers un certain côté, que de faire que dans le même temps il n'avance pas tant vers ce côté-là qu'il faisoit auparavant : ce qui change la quantité de sa détermination.

3. De plus, les trois circonstances que remarque votre sceptique, pour l'empêcher d'admettre cette conséquence, ne la peuvent aucunement infirmer. Car, que la vitesse soit diminuée, que le milieu soit changé, et que la détermination de haut en bas ne soit pas tout-à-fait empêchée, mais que la balle continue de descendre, tout cela ne doit point apporter de changement à la détermination de gauche à droite, à laquelle pas une de ces circonstances ne s'oppose et ne met obstacle, puisque cette détermination peut demeurer la même quoique la vitesse soit changée, une même détermination pouvant être jointe à différentes vitesses.

Le milieu ne peut aussi apporter aucun changement à cette détermination, puisqu'il lui est également facile de s'ouvrir et faire passage d'un côté que d'un autre dans le milieu qu'elle parcourt. Et bien que la balle continue de descendre et qu'elle ne remonte pas comme en la réflexion, cette détermination vers la main droite se peut aussi bien faire et maintenir en descendant qu'en remontant.

Jusques ici votre sceptique auroit, ce me semble, tort de ne vouloir pas accorder que la détermination de gauche à droite demeure la même en la réfraction, après en être demeuré d'accord sans difficulté en la réflexion. Et il ne doit point appréhender qu'on le chicane sur l'explication de ce terme, et qu'on l'oblige à rien avouer qu'on ne

(1) *Voir* le texte de Descartes, page 369.

prouve et qui ne soit tiré, par une conséquence légitime, de ce qu'on a avancé auparavant, M. Descartes ayant trop soigneusement fait remarquer la différence qu'il y a entre la détermination et le mouvement, ou, comme vous dites, la puissance qui meut, pour s'en oublier.

4. Mais voici le point qui effarouche votre sceptique, et qui lui fait perdre ce peu de respect qu'il sembloit encore porter au nom de M. Descartes. C'est à ce coup qu'il dit n'entendre plus raillerie, et que, s'il a consenti de bonne foi que la détermination vers la droite ne changeoit pas, il proteste qu'il n'est point engagé à consentir que la balle, changeant de milieu, fasse toujours un égal progrès et, comme il dit un peu auparavant, aille aussi vite vers la droite, après qu'il a été supposé que la balle au point B perd la moitié de sa vitesse, et que M. Descartes a si solennellement assuré que la détermination et la force mouvante sont tout-à-fait différentes et distinctes.

Mais ne voyez-vous pas que ce qui empêche votre sceptique de donner les mains à cela est qu'il ne distingue pas assez lui-même la détermination d'avec la force mouvante ou la vitesse, et qu'il les confond ensemble, croyant que la division ou la perte que l'une souffre, à savoir la vitesse, se doive ressentir par l'autre, à savoir par la détermination vers la main droite, quoique rien ne se soit opposé qui ait pu changer ou diminuer la quantité de la détermination que la balle avoit à avancer vers ce côté-là? Car, s'il avoit bien pris garde à ce que dit M. Descartes, il n'auroit pas de peine à comprendre que, la vitesse étant diminuée de moitié [au point B], la détermination de gauche à droite demeurant toujours la même [en ce point-là] qu'elle a été [auparavant], il est nécessaire, pour accorder cette vitesse à cette détermination, que la balle suive la ligne BI.

Et quoique, dans la route qu'elle prend, en des temps égaux, elle fasse autant de chemin ou qu'elle avance autant vers la droite qu'elle faisoit auparavant, et qu'ainsi elle conserve toujours la même détermination qu'elle avoit à avancer vers [ce côté] là, il ne s'ensuit pas

qu'elle aille aussi vite qu'elle faisoit auparavant (ce que votre sceptique semble avoir toujours appréhendé qu'on lui voulût faire accorder), puisque M. Descartes avoue lui-même qu'il lui faut le double de temps pour faire autant de chemin qu'auparavant. Mais comme, dans la route qu'elle est obligée de prendre, elle incline plus qu'elle ne faisoit vers la droite, elle ne laisse pas d'avancer autant vers ce côté-là, quoiqu'elle aille deux fois moins vite.

Et c'est à mon avis ce qui fait la beauté et la force tout ensemble du raisonnement de M. Descartes, de faire voir quelle doit être dans cette rencontre la route véritable que doit prendre la balle, qui ne peut être autre que celle qu'il a expliquée en ce lieu-là, pour se rapporter à la détermination vers la droite qu'elle doit garder, et à la perte de la vitesse qu'elle a soufferte en B.

5. Mais ce qui le plus a abusé votre sceptique est un raisonnement très spécieux à la vérité, et très capable de surprendre les autres et de faire qu'on y soit surpris soi-même, si l'on n'y prend garde, mais qui pourtant est faux et contre l'intention de M. Descartes. Ce raisonnement est que, comme M. Descartes sur la figure de la page 17 dit que, la détermination vers le côté droit étant la même, quoique le mouvement de la balle soit diminué de moitié au point B, en deux fois autant de temps elle doit avancer deux fois autant vers la droite (1), donc *a pari*, dit votre sceptique, posé que la balle soit poussée perpendiculairement depuis H jusques à B et qu'elle continue son mouvement vers BG, la détermination de la balle sur la route BG n'étant point changée au point B et demeurant la même, puisque le mouvement perpendiculaire se continue dans la même ligne HBG, en deux fois autant de temps elle doit avancer deux fois autant, et aussi vite au dessous de B qu'elle avoit fait auparavant au dessus : ce qui est absurde, puisque l'on suppose que la balle au point B a perdu la moitié de sa vitesse.

Véritablement, si la conséquence qu'il infère étoit bien tirée de ce

(1) *Voir* le texte de Descartes, page 372.

qu'a avancé M. Descartes, je conclurois comme lui que M. Descartes se seroit trompé dans son raisonnement, duquel il s'ensuivroit une telle absurdité.

Mais aussi M. Descartes dit tout autre chose que ce que votre sceptique lui veut faire dire : car, quand il a dit que la détermination qu'avoit la balle à avancer vers le côté droit demeuroit la même, et que par conséquent en deux fois autant de temps elle devoit faire deux fois autant de chemin vers ce côté-là, il a conclu cela de ce que, bien qu'on suppose que la balle au point B perde la moitié de sa vitesse, néanmoins elle ne perd rien du tout de la quantité de la détermination qu'elle avoit à s'avancer vers le côté droit, à laquelle la toile n'est aucunement opposée en ce sens-là, et à laquelle se doit et se peut accommoder la vitesse qui reste en la balle (car autrement la balle rejailliroit au lieu de pénétrer la toile), pour faire en sorte que sans déroger à la perte qu'elle a soufferte et qu'allant moins vite, elle ne laisse pas d'avancer autant vers le côté droit qu'elle eût fait si elle n'eût rien perdu de sa vitesse.

Mais peut-on dire la même chose de la détermination d'une balle que l'on suppose tomber perpendiculairement sur la même toile, à savoir que la superficie sur laquelle elle tombe ne lui est aucunement opposée en ce sens-là, et qu'en perdant la moitié de sa vitesse, elle ne perd rien du tout de la quantité de la détermination qu'elle avoit à s'avancer vers le côté où elle visoit, et que la vitesse qui lui reste se doit et se peut accommoder avec cette détermination, pour la faire avancer en un temps égal sur la même route autant qu'elle eût fait si elle n'eût rien perdu de sa vitesse? Certainement personne ne dira que ce cas soit semblable au premier, et par conséquent la conclusion n'en peut être pareille.

6. Aussi tout le défaut [du raisonnement] de votre sceptique ne vient que de ce qu'il n'a pas pris garde que la même superficie CBE, en laquelle la balle au point B perd la moitié de sa vitesse, est aussi en même temps opposée à la détermination de haut en bas, soit qu'elle

soit perpendiculaire ou non. En sorte que, quoique la balle continue de descendre et même qu'elle descende dans la même ligne quand elle a été poussée perpendiculairement, on ne sauroit pas dire que cette détermination vers le bas soit la même, mais elle est changée en quelque façon, ainsi que dit M. Descartes. Car la balle ne descend plus avec la même quantité de détermination, puisque dans un temps égal elle ne va pas si loin qu'elle étoit déterminée d'aller avant qu'elle eût perdu la moitié de sa vitesse, ce qui est un changement en la détermination qu'elle avoit à avancer vers ce côté-là.

Et si vous y prenez garde, tous les changemens de détermination que M. Descartes a dit s'ensuivre en la balle du changement de sa vitesse ou de la force qui la pousse ou qui l'arrête en B (selon les différentes suppositions qu'il fait), ont tous été en la détermination de haut en bas, et non point en celle de gauche à droite, à cause, comme il dit en la page 17, ligne 13 (1), que des deux parties dont on peut imaginer que la détermination de la balle sur la route AB est composée, il n'y a que celle qui faisoit tendre la balle de haut en bas qui puisse être changée en quelque façon par la rencontre de la toile. Mais, à plus forte raison, cette toile peut-elle faire changer la détermination perpendiculaire à laquelle elle est entièrement opposée, qui est simple et qu'on ne peut pas dire être composée de deux, à l'une desquelles elle ne soit point du tout opposée, ainsi qu'elle ne l'est point à celle de gauche à droite, quand la balle est poussée de biais suivant la ligne AB.

Or, quel changement peut-il arriver en cette détermination de haut en bas, que celui qu'a expliqué M. Descartes? à savoir que cette balle, en continuant de descendre, avance tantôt plus et tantôt moins vers le bas qu'elle ne faisoit, selon le changement, c'est à dire l'augmentation ou la diminution que sa vitesse a reçue en B, et selon le rapport que cette vitesse a eu avec la détermination vers le côté droit, qui a dû toujours demeurer la même, comme j'ai dit plusieurs fois, c'est à dire

(1) *Voir* le texte de Descartes, page 369.

qui a dû faire que la balle ait toujours autant avancé de ce côté-là qu'elle avoit fait auparavant.

Et partant, tant s'en faut que l'absurdité qu'avoit voulu inférer votre sceptique suive bien de ce qu'a dit M. Descartes, qu'au contraire il se trouve que c'est lui-même qui, au lieu d'un bon argument, s'est embarrassé dans un sophisme, en supposant que la détermination de la balle dans une chute perpendiculaire étoit la même, au même sens que celle de gauche à droite est dite être la même quand la balle tombe obliquement.

7. Que si, après cela, vous prenez la peine d'examiner la réponse que M. Descartes a fait lui-même au reste des difficultés que votre sceptique lui a autrefois proposées par l'entremise du Révérend Père Mersenne, et auxquelles il satisfit alors par une lettre qu'il adressa à M. Mydorge (1), dont je vous ai naguère envoyé la copie, vous trouverez que ce qu'il dit est véritable, à savoir que votre sceptique s'est trompé, pour avoir parlé de la composition du mouvement en deux divers sens, et inféré de l'un ce qu'il avoit seulement prouvé de l'autre.

Je ne répète point ici ce qu'il en a dit; car, outre qu'il seroit inutile, comme j'en étois là, un de mes amis, appelé M. Rohault, savant mathématicien et des mieux versés que je connoisse en la philosophie de M. Descartes, m'est venu apporter une réponse qu'il a faite à votre lettre au Père Mersenne (2), pensant que M. Descartes n'y avoit point répondu (car je ne lui avois point montré cette lettre à M. Mydorge), et que vous n'eussiez reçu de lui aucune réponse, voyant que dans la lettre que vous m'avez fait l'honneur de m'écrire, laquelle je lui avois fait voir, vous continuez vos premières difficultés, et que dans celle à M. de la Chambre vous dites avoir autrefois contesté à M. Descartes sa démonstration touchant la réfraction, à lui, dites vous, *viventi atque sentienti*, mais qu'il ne vous satisfit jamais (3).

(1) *Voir* la note de la page 125.
(2) Lettre XXIV. — Cette réponse de Rohault est la Pièce XCIV ci-après.
(3) *Voir* ci-dessus page 355-356.

Et pource qu'il entend beaucoup mieux que moi toutes ces matières, et qu'il a répondu article par article à tous ceux de votre dite lettre, je m'abstiendrai de vous ennuyer davantage par mon discours, afin de vous laisser plus de temps pour examiner la réponse qu'il a faite à votre lettre. S'il me l'eût apportée plus tôt, il nous auroit tous deux soulagés : moi, d'écrire d'un sujet qui passe mes forces, et vous, de lire une si mauvaise lettre. Mais, comme c'en étoit déjà fait, je n'ai pas voulu perdre ma peine et j'ai pensé qu'il valoit mieux vous fatiguer de cette lecture, et vous donner par même moyen des preuves du soin où je m'étois mis de m'acquitter de ce que je vous devois, que de vous laisser venir la pensée que je m'en serois peut-être oublié, et que j'aurois été bien aise qu'un autre m'en eût déchargé.

Au reste, Monsieur, je vous prie d'excuser ce qui peut m'être échappé de libre en répondant à votre sceptique. J'aurois agi avec tout autre respect si mon discours se fût adressé à vous; mais, bien loin de craindre que pour cela vous me refusiez justice, je prends même l'assurance de vous demander quelque grâce. Il y a des rencontres où un peu de faveur n'offense point l'équité et, si dans celle-ci vous vous mettez de mon parti, je puis vous assurer qu'en toute autre je serai entièrement à vous, et que vous pourrez faire état d'avoir toujours prêt en moi, Monsieur,

Un très humble et très obéissant serviteur,

CLERSELIER.

Paris, ce 15 mai 1658.

XCIV.

RÉFLEXIONS OU PROJET DE RÉPONSE A LA LETTRE DE M. DE FERMAT

QUI CONTIENT SES OBJECTIONS SUR LA DIOPTRIQUE DE M. DESCARTES, PAR M. ROHAULT.

15 MAI 1658.

(D., III, 46; Bibl. nat. fr. 3280, n. acq., f^os 51-56.)

Je ne sais si le Père Mersenne, à qui cette lettre (1) étoit adressée, l'a communiquée à M. Descartes, ou si, l'ayant reçue, ses occupations l'ont empêché d'y faire réponse. Toutefois il paroît n'y avoir point répondu, parce que M. de Fermat, qui l'avoit écrite il y a environ vingt ans, répète encore à peu près les mêmes difficultés dans une lettre qu'il a écrite depuis peu à un de mes amis de cette ville (2). Je m'en vais essayer de suppléer quelques réponses tirées de l'intention de M. Descartes, et pour le faire plus commodément, je ne me proposerai aucun ordre que celui qui est dans les articles ou sections de la lettre que j'examinerai séparément.

ART. 1^er. — Le premier article ne contient qu'un compliment dont l'humeur civile de M. de Fermat honoroit M. Descartes, et dont sa mémoire lui est encore redevable.

ART. 2^a. *Je tranche*, etc. — Quoique M. Descartes accommode son *medium* à sa conclusion, et qu'il divise son mouvement en certaines déterminations plutôt qu'en d'autres, on ne le doit non plus trouver étrange que si un géomètre se sert d'une construction plutôt que d'une autre pour l'exécution d'un problème; et l'on ne conteste jamais la voie qu'il choisit, pourvu qu'il vienne à bout de ce qu'il entreprend.

(1) La Lettre XXIV ci-avant : les articles distingués par Rohault sont identiques avec ceux du numérotage de notre édition.

(2) La Lettre XC *bis* à Clerselier.

Au reste, M. Descartes a dû diviser son mouvement en une détermination perpendiculaire à la surface devers laquelle il étoit mu et en une détermination parallèle à la même surface, parce que, cette dernière ne rencontrant aucune opposition, il étoit assuré qu'elle devoit demeurer la même; ce qui lui étoit un moyen de conclure une vérité plus aisément qu'il n'eût pu faire en suivant une autre méthode.

Art. 3e. *Je reconnois*, etc. — M. de Fermat semble favoriser M. Descartes, en avouant qu'il est de son sentiment touchant la différence qu'il établit entre le mouvement et la détermination, et tâchant même de le prouver. Cependant il semble aussi qu'il y ait de l'adresse, pource qu'il impute à M. Descartes une opinion qu'il désavoueroit, à dessein, comme on pourroit croire, de s'en servir dans la suite.

C'est dans le second exemple, où il assure qu'une balle, poussée du point H au point B perpendiculairement sur la surface CBE, ne perd pas de sa détermination, à cause, dit-il, qu'en pénétrant l'eau ou la toile, elle continue à se mouvoir dans la même ligne droite.

Mais il doit considérer que la détermination d'un mobile doit être réputée changer, non seulement quand il quitte la ligne dans laquelle il se mouvoit auparavant, ou quand il se meut à contre-sens dans la même ligne, mais encore en se mouvant du même sens dans la même ligne droite, pourvu que ce soit [plus ou] moins loin qu'il n'étoit déterminé d'aller en ce sens-là. Et c'est en cette troisième façon que la quantité de la détermination de la balle est devenue moindre, autant que le mouvement : aussi la surface CBE étoit autant opposée à la première que la liaison des parties l'étoit à l'autre : c'est pourquoi il faut réputer comme nul cet exemple qui n'étoit que pour prouver une vérité que les deux parties ne contestent point.

Je ne daignerois d'observer que M. de Fermat appelle force ou puissance mouvante ce que M. Descartes appelle le mouvement, parce qu'il ne paroît pas dans la suite de la lettre que cette différence soit d'aucune conséquence.

Art. 4e. *Je reviens maintenant*, etc. — Cet article ne contient que quelques paroles de M. Descartes.

Art. 5e. *Je remarque d'abord*, etc. — Le manque de mémoire qui est ici imputé à M. Descartes, est fondé sur la croyance que M. de Fermat a, que la détermination de haut en bas [de l'exemple] de la page 17 de la Dioptrique n'est point changée, qui est une erreur semblable à celle qui a été désavouée dans la remarque sur l'article 3e. Et il ne sert de rien, pour prouver sa pensée, de dire que la détermination dans la ligne BI est composée en partie de celle qui fait aller le mobile de haut en bas, comme [étoit] celle qui le faisoit auparavant mouvoir vers le même côté dans la ligne AB. Il y a [en cela] de l'équivoque, et encore qu'on remarque toujours une détermination de haut en bas, la seconde est autre que la première, de même que dix écus sont une autre quantité d'écus que quinze écus, encore que ce soit toujours des écus.

Art. 6e. *Mais donnons que*, etc. — Après que M. de Fermat accorde, comme par forme de passe-droit, une chose qui est de devoir, il s'efforce de prouver que M. Descartes ne s'est pas aperçu que la détermination de gauche à droite étoit aussi changée; ce qui véritablement infirmerait sa démonstration. La raison, dit-il, est qu'on ne sauroit dire que la détermination de haut en bas soit changée, sinon parce que, depuis que le mobile se meut dans la ligne BI, sa quantité n'a plus la même raison avec celle de gauche à droite, qu'elle avoit quand il étoit porté dans la ligne AB.

Je ne sais si M. de Fermat parle ici tout de bon, d'autant qu'il raisonne comme une personne qui, après avoir porté quinze écus dans l'une de ses pochettes et trente dans l'autre, et en ayant perdu, par je ne sais quel accident, quelques-uns des quinze, reconnoîtroit cette perte par cela seulement que ce qui lui reste des quinze n'est plus la moitié de la somme qu'il a de l'autre côté, après quoi il vient à croire, pour se consoler, que cette dernière est augmentée, parce qu'elle fait, en récompense, plus du double de celle d'où il trouvoit d'abord à redire.

M. Descartes raisonne d'une autre façon, sans pourtant le faire autrement qu'un jeune homme qui n'auroit pas appris le cinquième

Livre des Éléments d'Euclide. Car, comme celui-ci jugeroit qu'il auroit perdu quelques-uns des quinze écus, en comparant ce qui lui resteroit avec ce qu'il avoit auparavant dans la même pochette, et ne se soucieroit pas de les comparer avec les trente de l'autre, de même M. Descartes juge du changement arrivé en la détermination de haut en bas, parce que sa quantité n'est plus la même, depuis que le mobile est au dessous de la surface CBE, qu'elle étoit quand il étoit au dessus. Et il a raison d'assurer que la détermination de gauche à droite n'est pas changée, parce que sa quantité est la même, le mobile étant dans la ligne BI, qu'elle étoit quand il étoit porté en AB.

Art. 7e. *Mais donnons encore*, etc. — Outre que M. de Fermat accorde encore ici gratuitement une chose qu'il auroit tort de contester, comme il se voit dans la remarque précédente, cet article ne contient que quelques paroles de M. Descartes.

Art. 8e. *Voyez comme il retombe*, etc. — M. Descartes est ici accusé de retomber pour la seconde fois dans une même faute, manque de se ressouvenir qu'il y a différence entre la détermination et le mouvement. Mais cette accusation n'est fondée que sur ce que M. de Fermat prend un peu rigoureusement les paroles de M. Descartes : car, quand il dit ces mots : *elle doit faire deux fois autant de chemin vers le même côté*, cela ne signifie pas que la balle se meuve dans une ligne deux fois plus grande qu'auparavant, mais que, quelle que soit cette ligne, elle doit tellement être inclinée vers la droite que la balle avance de ce côté-là deux fois plus qu'elle n'avoit fait. C'est le sens qu'il falloit donner aux paroles de M. Descartes, au lieu de l'autre, par lequel on prétend qu'il confond deux choses diverses; et son intention étoit assez évidente parce que pendant qu'il dit que la quantité de la détermination devient double dans le même temps, il suppose que le mouvement n'est que simple, c'est à dire que le mobile parcourt une ligne égale à celle qu'il avoit parcourue auparavant.

Ce qui suit de cet article, et l'absurdité que M. de Fermat y conclut, n'est pas au désavantage de M. Descartes, qui nieroit que la détermination de haut en bas demeure la même, suivant ce qui a été dit dans

la remarque sur le 3e article, et ainsi tout cet appareil de raisonnement s'en va en fumée.

Art. 9, 10, 11, 12. — Je passe pour vrai tout ce que contiennent ces articles; mais je crains qu'ils ne fassent point du tout au sujet.

Art. 13e. *Cela ainsi supposé*, etc. — M. de Fermat estime que, dans la page 20 de la Dioptrique, la supposition de M. Descartes est que l'accroissement d'un tiers de mouvement qui arrive à la balle soit simplement de haut en bas ou selon la ligne BG, au lieu que c'est le mesurer dans la ligne qu'elle a à décrire ou parcourir actuellement. Et cela est assez aisé à entendre, parce que, si cela étoit, M. Descartes n'auroit pas supposé, comme il a fait, la force du mouvement de la balle être augmentée d'un tiers, mais il auroit supposé la détermination de haut en bas être augmentée d'un tiers, et n'auroit rien supposé du mouvement. Il ne faut donc pas dire qu'à son sens, la balle qui se meut en BI s'y meuve d'un mouvement composé de celui qu'elle avoit vers BD et d'un autre vers BG dont on veuille qu'il suppose la quantité être du tiers plus de ce qui étoit en AB, mais bien que le mouvement actuel de la balle soit d'un tiers plus vite qu'auparavant, laissant au raisonnement à définir quel changement doit suivre de là en la détermination de haut en bas.

Art. 14e. *Imaginons ensuite*, etc. — Ce que M. de Fermat conclut dans cet article est vrai dans sa supposition, laquelle, comme je viens de remarquer, étant différente de celle de M. Descartes, il ne faut pas s'étonner s'ils établissent tous deux des proportions différentes desquelles par conséquent l'une ne sauroit détruire l'autre.

Art. 15e. *D'ailleurs la principale raison*, etc. — Il est vrai que M. Descartes entend que le mouvement d'un mobile accroit toujours d'une pareille quantité en pénétrant un même milieu, quoiqu'il tombe sur la surface avec des inclinaisons différentes. Et cela est bien raisonnable, puisque la facilité de se mouvoir dépend de la nature du corps que l'on suppose tel qu'il se peut ouvrir pour faire passage aussi facilement vers un côté que vers un autre, et que de l'inclinaison du rayon d'incidence dépend seulement la détermination à la quantité

de laquelle les diverses chutes pourront apporter de la variété selon le rapport qu'auront entre elles la détermination et la vitesse. Ce que M. de Fermat ajoute ensuite et qu'il dit avoir démontré être faux n'est vrai que dans la supposition qu'il croyoit être celle de M. Descartes, mais qui pourtant, comme j'ai montré, en est fort différente.

Art. 16°. *Ce n'est pas que*, etc. — M. de Fermat avoue qu'il n'est pas certain s'il faut suivre sa proportion plutôt que celle qu'il tâche de combattre. Mais je ne fais pas difficulté d'avouer qu'il faudroit retenir la sienne, si l'accélération ou le ralentissement du mouvement dépendoit de la seule surface commune aux deux corps dans lesquels le mobile se meut : mais parce que cette surface ne sauroit que détourner le mouvement et que c'est le second corps qui le facilite ou qui l'empêche, on doit retenir celle de M. Descartes.

Nous saurons, quand il plaira à M. de Fermat, les pensées qu'il a touchant la réfraction; mais je puis déjà dire par avance que ce que vous m'en avez fait voir d'ébauché dans sa lettre à M. de la Chambre m'a paru fort ingénieux et digne de lui (1).

Si vous lui faites voir ceci, je vous prie de lui taire mon nom, ou, si vous trouvez à propos de le lui déclarer, je vous prie aussi qu'il sache que ce n'est pas d'aujourd'hui que le bruit de son nom est venu jusques à moi; que j'honore beaucoup son mérite, et que je tiendrai à honneur s'il me daigne faire la grâce de me mettre au rang de ses très humbles serviteurs.

(1) Lettre LXXXVI.

XCV.

FERMAT A CLERSELIER (1).

DIMANCHE 2 JUIN 1658.

(D., III, 47; Bib. nat. fr. 3080, n. acq., f^os 57-61.)

Monsieur,

1. Je suis si passionné pour la gloire de M. Descartes que vous ne pouvez m'obliger plus sensiblement qu'en combattant les opinions du sceptique qui s'oppose à ses sentiments. Mais prenez garde, Monsieur, qu'il importe de conduire votre travail jusques au bout, et de renverser entièrement sur leurs auteurs tout ce que vous appelez ou paralogismes ou sophismes. Il ne suffit pas de dire que le sens de M. Descartes a été mal pris par ceux qui le reprennent; il faut prouver que l'explication que vous lui donnez va tout droit et sans détour à sa conclusion, et qu'enfin sa preuve est démonstrative.

2. Nous avions cru que la balle qui conserve sa direction et sa route ne perd point sa détermination, et nous l'avions avec quelque raison inféré de la différence que M. Descartes établit entre le mouvement et la détermination. Mais, sans nous empresser davantage à prouver la conséquence que nous tirions de son raisonnement, nous nous tenons pour suffisamment avertis de sa pensée et de la vôtre, qui veut « que la détermination d'un mobile soit réputée changer, non seulement quand il quitte la ligne dans laquelle il se mouvoit auparavant, ou quand il se meut à contre-sens dans la même ligne, mais encore en se mouvant du même sens dans la même ligne droite, pourvu que ce soit moins loin qu'il n'étoit déterminé d'aller en ce sens-là.

Et c'est en cette troisième façon », dites-vous (2), « que la quantité de la détermination de la balle est devenue moindre autant que le

(1) Réponse aux Lettres XCIII et XCIV.
(2) Lettre XCIV, 3.

mouvement », lorsqu'elle se meut sur la ligne HBG de la page 17 de la Dioptrique (1). Mais prenez garde que ce ne soit tomber dans la pétition du principe.

Vous entendez donc, dans la page 17, que la toile n'étant *aucunement* opposée à la détermination de gauche à droite, ces paroles veulent dire que cette détermination avance autant vers la droite qu'elle faisoit auparavant. C'est ce que je nie et qu'il faut prouver : car, bien que la toile n'empêche point que la balle n'avance toujours vers la droite, elle ne laisse pas d'avancer vers la droite, soit que ce progrès soit plus lent, soit qu'il soit plus vite qu'auparavant. Or, de cela seul que la toile n'empêche pas le progrès vers la droite, vous en inférez que ce progrès doit être justement le même, c'est à dire ni plus ni moins vite qu'auparavant. C'est donc αἴτημα αἰτήματος, et il faut de deux choses l'une : ou que le *medium* soit le même que la conclusion, ou que la conclusion en soit mal tirée.

Peut-être direz-vous que le mot *aucunement* fait tout le mystère, et qu'en disant que la toile ne lui est *aucunement* opposée en ce sens-là, tout le reste s'en déduit aisément. Mais il en faut toujours revenir là : si par le mot *aucunement* vous entendez que la toile n'empêche pas que la balle ne continue sa marche vers la droite et que son progrès ne se fasse également et en temps égal, je le nie et c'est ce qu'il faut prouver; si vous entendez que la toile ne lui est *aucunement* opposée, c'est à dire qu'elle n'empêche pas que la balle ne continue d'avancer vers la droite, sans assurer encore si son progrès doit se faire en temps égal, vous ne trouverez jamais votre compte dans la conclusion.

D'où il suit clairement que M. Descartes a voulu donner des paroles pour des choses, et qu'en traitant deux propositions différentes sur le sujet de la réflexion et de la réfraction, il a voulu accommoder son raisonnement à la première qu'il savoit et à la seconde qu'il a peut-être trop légèrement crue.

3. Ce n'est pas, comme je vous ai déjà souvent protesté, que sa pro-

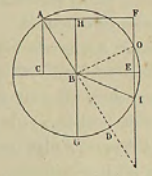
(1) *Voir* fig. 56, page 118 ou 399.

portion des réfractions ne puisse être vraie; mais j'ai du moins à vous dire que je ne la tiens du tout point prouvée, et qu'en tout cas vous avez trop de complaisance en faisant semblant d'approuver ma pensée sur ce même sujet (1), puisque, si ce que j'ai écrit là dessus à M. de la Chambre est véritable, ce que M. Descartes croit avoir démontré est nécessairement faux, ces deux opinions étant tout à fait contradictoires et incompatibles.

Mais supposons, si faire se peut, que la proposition de M. Descartes soit véritable. Il faut du moins pourvoir à ce que rien ne se démente dans les suites, et c'est aux amis du défunt à prévoir tous les cas qui pourroient faire peine à la vérité supposée de cette proposition. En voici un, par exemple, qu'il vous faudra tâcher de résoudre.

Supposez, dans la page 17, que la balle rencontre, au lieu de la

Fig. 56.



toile ou de l'eau, un corps dur et impénétrable, et que, lorsque la balle arrive au point B, elle ne laisse pas de perdre la moitié de sa vitesse. Car cette supposition est possible et, quoique le corps CBE ne contribue rien à la diminution de ladite vitesse (comme il fait en l'exemple de M. Descartes, lorsque c'est de la toile ou de l'eau), néanmoins nous pouvons imaginer et supposer que, lorsque la balle arrive au point B, elle perd justement la moitié de sa vitesse, sans nous mettre en peine d'où provient cette diminution, puisque le même M. Descartes, en la page 20, suppose ou imagine au point B une

(1) Lettre XCIV, 16.

nouvelle puissance qui augmente le mouvement ou la vitesse de la balle : de sorte que je ne crois pas que les amis de M. Descartes soient assez injustes pour nier que cette supposition puisse être non seulement imaginée, mais réduite en acte.

Cela supposé, il ne faut que transporter le raisonnement de M. Descartes au dessus du plan, et on pourra dire avec lui que, pour savoir le chemin que la balle doit prendre, il faut considérer que son mouvement differe entièrement de sa détermination à se mouvoir plutôt vers un côté que vers un autre : d'où il suit que leur quantité doit être examinée séparément.

Considérons aussi que, des deux parties dont on peut imaginer que cette détermination est composée, il n'y a que celle qui faisoit tendre la balle de haut en bas qui puisse être changée par la rencontre du plan CBE, et que, pour celle qui la faisoit tendre vers la main droite, elle doit toujours demeurer la même qu'elle a été, à cause que ce plan ne lui est aucunement opposé en ce sens-là.

Puis, ayant décrit du centre B le cercle AFD et tiré à angles droits sur CBE les trois lignes droites AC, HB, FE, en telle sorte qu'il y ait deux fois autant de distance entre FE et HB qu'entre HB et AC, nous verrons que cette balle doit tendre vers le point du cercle où la ligne FE coupe le cercle au dessus du plan; ce point peut être désigné par la lettre O.

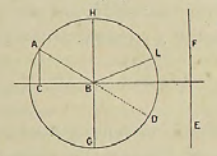
Car, puisque la balle perd la moitié de sa vitesse en rencontrant le plan au point B et qu'elle ne peut point le traverser par la supposition, elle doit employer deux fois autant de temps à passer au dessus depuis B jusques à quelque point de la circonférence du cercle AFD, qu'elle a fait à venir depuis A jusques à B. Et, puisqu'elle ne perd rien du tout de la détermination qu'elle avoit à s'avancer vers le côté droit, en deux fois autant de temps qu'elle en a mis à passer depuis la ligne AC jusques à HB, elle doit faire deux fois autant de chemin vers ce même côté, et par conséquent arriver à quelque point de la ligne droite FE au même instant qu'elle arrive aussi à quelque point de la circonférence du cercle AFD. Ce qui seroit impossible si elle n'alloit

vers O, d'autant que c'est le seul point au dessus du plan CBE où le cercle AFD et la ligne droite FE s'entrecoupent.

Si ce raisonnement, qui est justement le même que celui de M. Descartes, en le transportant seulement, ne conclut pas, pourquoi, de grâce, celui de M. Descartes conclura-t-il? Ce qui est démonstration au dessous deviendra-t-il paralogisme au dessus? Je ne crois pas que vous soyez de ce sentiment et que vous vouliez donner tout au seul nom et à l'inspiration, s'il faut ainsi dire, de M. Descartes.

4. Cela étant, passons à la figure de la page 19, et supposons de même que le plan CB est un corps dur et impénétrable, et que la balle, arrivant au point B, diminue de sa vitesse en telle sorte que la ligne FE, étant tirée comme en l'exemple précédent, ne coupe point le cercle AD.

Fig. 89.



Cette balle, par la supposition, ne peut point pénétrer au dessous du plan. Elle ne peut non plus se réfléchir à angles égaux, car sa détermination vers la droite ne seroit point la même. Enfin, quelque angle que vous preniez pour sa réflexion au dessus du plan, son progrès vers la droite sera toujours moindre qu'auparavant. Voire même quand vous la feriez rouler sur le diamètre CB en ligne droite, sa détermination vers la droite changeroit encore, comme il se voit à l'œil et comme il se déduit clairement de la supposition : car il faudroit qu'au même temps que la balle arrive à quelque point de la circonférence, elle arrivât à quelque point de la droite FE, ce qui est impossible.

Que deviendra donc cette balle? C'est à vous, Monsieur, et aux amis

de M. Descartes, à lui fournir un passeport et à lui marquer sa route en la faisant sortir de ce point fatal. J'en dirois davantage si je n'appréhendois de passer dans votre esprit pour un homme qui auroit envie de

Barbam vellere mortuo leoni (1).

J'attends, Monsieur, votre réplique ou celle de M. Rohault, que j'estime comme je dois; et je vous assure à l'avance que je ne cherche que la vérité sans chicane, et que je suis de tout mon cœur, Monsieur, votre très humble et très affectionné serviteur,

FERMAT.

XCVI.

FERMAT A KENELM DIGBY (2).

(*Comm. ep.*, n° XLVII.)

1. Illustrissimos Viros Vicecomitem Brouncker et Johannem Wallisium quæstionum numericarum a me propositarum solutiones tandem dedisse legitimas libens agnosco, imo et gaudeo. Noluerunt Viri Clarissimi vel unico momento impares sese aut ἥττονας quæstionibus propositis confiteri; mallem ipsos et quæstiones ipsas dignas laboribus Anglicis statim agnovisse et, postquam adepti ipsarum solutiones fuissent, triumphum eo illustriorem egisse quo certamen magis arduum apparuisset. Contrarium ipsis visum est; id sane gloriæ illustrissimæ et ingeniosissimæ nationis condonandum. Verùm, ut deinceps ingenue utrimque agamus, fatentur Galli propositis quæstionibus satisfecisse Anglos; sed fateantur vicissim Angli quæstiones ipsas dignas fuisse quæ ipsis proponerentur, nec dedignentur in posterum numerorum

(1) MARTIAL, livre X, épigr. 90.
(2) Envoyée par Digby à Wallis, le 19 juin 1658.

integrorum naturam accuratius examinare et introspicere, imo et doctrinam istam, quâ pollent ingenii vi et subtilitate, propagare.

2. Quod ut ab illis libentius impetremus, Diophantum ipsum et celeberrimum illius interpretem Bachetum ad auctoritatem rei proponimus.

Supponit Diophantus in plerisque Libri IV et V quæstionibus *numerum omnem integrum vel esse quadratum vel ex duobus aut tribus aut quatuor quadratis compositum.* Id sibi Bachetus, in commentariis ad quæstionem XXXI Libri IV, perfecta demonstratione assequi nondum licuisse fatetur. Id Renatus ipse Descartes incognitum sibi ingenue declarat in epistola quadam, quam propediem edendam accepimus, imo et viam, qua huc perveniatur, difficillimam et abstrusissimam esse non diffitetur (1). Cur igitur de propositionis illius dignitate dubitemus, non video. Ejus tamen perfectam demonstrationem a me inventam moneo Viros Clarissimos.

Possem et plerasque adjungere propositiones non solum celeberrimas, sed et firmissimis demonstrationibus probatas; exempli causa :

Omnis numerus primus qui unitate superat quaternarii multiplicem, est compositus ex duobus quadratis. Hujusmodi sunt 5, 13, 17, 29, 37, 41, etc.

Omnis numerus primus qui unitate superat ternarii multiplicem, est compositus ex quadrato et triplo alterius quadrati. Tales sunt 7, 13, 19, 31, 37, 43, etc.

Omnis numerus primus qui vel unitate vel ternario superat octonarii multiplicem, componitur ex quadrato et duplo alterius quadrati. Tales sunt 3, 11, 17, 19, 41, 43, etc.

Sed et præcedentem Bacheti propositionem generaliter olim Domino

(1) *Lettres de Mr Descartes*, éd. Clerselier, III, 66, p. 365 : « Mais pour ce Theoreme, qui est sans doute l'un des plus beaux qu'on puisse trouver touchant les nombres, je n'en sçay point la demonstration, et je la juge si difficile que je n'ose entreprendre de la chercher. » (Lettre à Mersenne, du 27 juillet 1638.) Descartes parle du théorème général énoncé dans la Lettre de Fermat pour Sainte-Croix (ci-dessus XII, 3) et rappelé ci-après.

de Sainte-Croix proposuimus (1), ejusque demonstrationem non ignoramus.

Omnis numerus integer : vel est triangulus vel ex duobus aut tribus triangulis compositus; est quadratus vel ex duobus, tribus aut quatuor quadratis compositus; est pentagonus vel ex duobus, tribus, quatuor aut quinque pentagonis compositus; est hexagonus vel ex duobus, tribus, quatuor, quinque vel sex hexagonis compositus; et sic uniformi in infinitum enuntiatione.

3. Hæc omnia et alia infinita quæ ad numeros integros spectant, quæque a nobis et inventa et generaliter demonstrata sunt, possemus et proponere Viris Clarissimis et, proponendo, negotium saltem aliquod ipsis facessere. Sed ingenuitatem gallicam sapient magis propositiones aliquot quarum demonstrationem a nobis ignorari non diffitemur, licet de earum veritate nobis constet.

Meminimus Archimedem non dedignatum propositionibus Cononis, veris quidem, sed tamen indemonstratis, ultimam manum imponere, earumque veritatem demonstrationibus illis subtilissimis confirmare. Cur igitur simile auxilium a Viris Clarissimis non exspectem, Conon scilicet Gallicus ab Archimedibus Anglis?

1° Potestates omnes numeri 2, quarum exponentes sunt termini progressionis geometricæ ejusdem numeri 2, unitate auctæ, sunt numeri primi (2).

Exponatur progressio geometrica 2, cum suis exponentibus :

1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.
2.	4.	8.	16.	32.	64.	128.	256.

Primus terminus 2, auctus unitate, facit 3, qui est numerus primus.

Secundus terminus 4, auctus unitate, facit 5, qui est pariter numerus primus.

(1) *Voir* Lettre XII, 3.
(2) *Voir* Lettre XLIII, 3.

Quartus terminus 16, auctus unitate, facit 17, numerum primum.

Octavus terminus 256, auctus unitate, facit 257, numerum primum.

Sume generaliter omnes potestates 2, quarum exponentes sunt numeri progressionis, idem accidet. Nam, si sumas deinde decimum sextum terminum, qui est 65536, ille auctus faciet 65537, numerum primum. Hoc pacto, potest dari et assignari nullo negotio numerus primus dato quocumque numero major.

Quæritur demonstratio illius propositionis, pulchræ sane, sed et verissimæ, cujus ope, ut jam diximus, problema alias difficillimum solvi statim potest : *Dato quovis numero, invenire numerum primum dato numero majorem.* Hujus clavis beneficio reserabunt fortasse Viri Clarissimi mysterium omne de numeris primis, hoc est : *Dato numero quovis, invenire* via brevissima et facillima *an sit primus vel compositus.*

2° Deinde : Duplum cujuslibet numeri primi unitate minoris quam multiplex octonarii, componitur ex tribus quadratis.

Esto quilibet numerus primus, unitate minor quam octonarii multiplex ut sunt 7, 23, 31, 47, etc.; eorum duplex est 14, 46, 62, 94 : componitur ex tribus quadratis.

Propositionem illam veram asserimus, sed Cononis modo, nondum aut asserente aut demonstrante Archimede.

3° Si duo numeri primi, desinentes aut in 3 aut in 7, et quaternarii multiplicem ternario superantes, inter se ducantur, productum componitur ex quadrato et quintuplo alterius quadrati.

Tales sunt numeri 3, 7, 23, 43, 47, 67, etc. Sume duos ex illis, exempli gratia, 7 et 23; quod sub iis fit, 161, componetur ex quadrato et quintuplo alterius quadrati. Nam 81, quadratus, et quintuplum 16 æquantur 161.

Id verum asserimus generaliter et demonstrationem tantum exspectamus. Singulorum autem ex ipsis quadrati componuntur ex quadrato et quintuplo alterius quadrati : quod et demonstrandum proponitur.

4. Sed ne demonstrationibus nimium fortasse deesse videamur, sequentem propositionem et asserimus et possumus demonstrare.

Nullus numerus triangulus, præter unitatem, æquatur numero quadratoquadrato.

Sint trianguli, ut norint omnes,

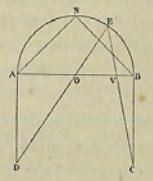
1. 3. 10. 15. 21. 28. 36. 45. etc.

Nullus omnino, facta in infinitum progressione, præter solam unitatem, erit quadratoquadratus.

5. Ne autem ad numeros integros deficiente Geometria videamur confugisse, en aliquot propositiones geometricas, quæ Angliam invisere non erubescent. Priores duas ex restituta a nobis Porismatum Euclideorum Geometria excerpsimus.

Esto semicirculus ANB (*fig.* 90) super diametro AB. Biscecetur in N

Fig. 90.



semicircumferentia ANB et, junctis NA, NB, a punctis A et B excitentur perpendiculares AD, BC, ipsis AN, NB æquales. Sumpto quolibet in semicircumferentia puncto, ut E, junctis rectis DE, EC occurrentibus diametro in punctis O et V, aio duo quadrata AV, BO simul sumpta esse, in hoc casu, æqualia quadrato diametri AB.

Generalius in Tractatu nostro hoc problema aut theorema proponebamus, sed in præsens speciale hoc sufficit (1).

Esto parabole quævis AMC (*fig.* 91), in qua sumantur duo quælibet puncta A et B et diameter quævis MN. Sumatur quodcumque aliud punctum in parabole, ut C, a quo ad puncta A et B jungantur

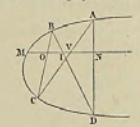
(1) *Voir* Tome I, p. 81 : *Porisma quintum*.

rectæ diametrum secantes. In eadem semper ratione secabitur diameter. Nam, sumpto alio quovis puncto D, erit

MO ad OV ut MI ad IN,

et semper similes abscissæ a diametro in eadem erunt ratione (1).

Fig. 91.



Hæc a nobis et inventa sunt et demonstrata, quæ ἀμοιβαίως pro theoremate frusti conici offerimus (2).

6. Sed et quæ nondum ex omni parte completa sunt, tentanda Anglis proponere non dubitamus.

Datis punctis, rectis aut circulis, invenire parabolen quæ per data puncta transeat et datas rectas aut circulos contingat.

Dari autem quatuor ex istis sufficit. Exempli gratia : Datis duobus punctis, recta et circulo, invenire parabolen quæ per data puncta transeat et rectam circulumque datos contingat. Unde emergunt quindecim problemata.

In ellipsi aut hyperbole idem proponatur; sed eo casu debent dari quinque aut puncta aut rectæ aut circuli aut quædam ex istis numero quinque, et inde emergunt 21 problemata.

Nos olim in Tractatu De contactibus sphæricis similia in sphæra expedivimus et tandem feliciter problema sequens construximus : Datis quatuor sphæris, invenire quartam quæ quatuor datas contingat (3). Tractatum integrum penes Dominum de Carcavi invenies.

(1) *Voir* Tome I, p. 79 : *Porisma secundum*.

(2) Cubature du tronc de cône oblique, dans la lettre XXIII du *Commercium epistolicum* (de Wallis à Digby, le 4 mars 1658, v. s.).

(3) *Voir* Tome I, p. 69.

Monemus tantum Viros Clarissimos ut, sepositis tantisper speciebus Analyseos, problemata geometrica via Euclidea et Apolloniana exsequantur, ne pereat paulatim elegantia et construendi et demonstrandi, cui præcipue operam dedisse veteres innuunt satis et Data Euclidis et alii a Pappo enumerati Analyseos libri; quos omni ex parte jam olim supplevimus dum operibus Vietæ, Ghetaldi, Snellii Tractatus nostros De locis planis, De locis solidis et linearibus, De locis ad superficiem, et De porismatibus adjecimus (1) : quos omnes habet dictus Dominus de Carcavi.

XCVII.

FERMAT A CLERSELIER.

DIMANCHE 16 JUIN 1658.

(D., III, 48; Bibl. nat. fr. 3280, nouv. acq., fos 62-65.)

MONSIEUR,

1. Nous laissâmes dernièrement la balle de M. Descartes en belle peine (2). C'est dans la figure de la page 19 de la Dioptrique, où elle faisoit tous ses efforts pour sortir du point B à l'honneur de M. Descartes; mais elle y trouva toutes les issues fermées en suivant le raisonnement de cet auteur, et même nous ne pouvons lui donner présentement de secours, si nous ne faisons changer de biais à sa logique.

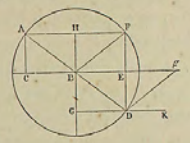
Reprenons la figure de la page 15 (*fig.* 53) et supposons que la balle qui va dans la droite AB diminue sa vitesse par moitié en arrivant au point B.

Si elle continuoit dans le même milieu, et que le plan CBE ne lui fût point opposé, elle iroit toujours en ligne droite vers D, avec cette différence pourtant qu'elle emploieroit depuis B jusques à D le double

(1) *Voir* Tome I, pages 3; 91; 111; 76.
(2) *Voir* ci-dessus la fin de la lettre XCV.

du temps qu'elle avoit mis depuis A jusques à B. Mais si, en supposant la même diminution de vitesse au point B, nous supposons que le plan CBE impénétrable à la balle se trouve maintenant entre deux et empêche que la balle ne passe au dessous, je dis qu'elle se réfléchira aussi bien à angles égaux que si la vitesse et le mouvement demeuroit le même.

Fig. 53.



Car, puisque l'interposition du plan n'empêche que l'une des parties dont la détermination est composée, et que celle de gauche à droite reste la même, donc la balle avancera autant vers la droite qu'elle eût fait au dessous, si le plan n'eût pas empêché sa route. Or, si le plan CBE ne faisoit point d'obstacle, la balle, qui diminue sa vitesse par moitié au point B, mettroit le double du temps depuis B jusques à D qu'elle avoit mis depuis A jusques à B, et lorsqu'elle seroit au point D, elle auroit avancé vers la droite jusques en E; elle mettroit donc le double du temps à s'avancer depuis B jusques à E qu'elle avoit fait à s'avancer depuis C jusques à B. Et il y a même raison de AB à BC que de BD à BE, parce que les angles ABC, DBE, sur les deux droites AD et CE, sont égaux, et par conséquent les triangles ABC, DBE semblables.

Nous pouvons faire le même raisonnement au dessus, si du point E nous élevons la perpendiculaire EF, et dire que, lorsque la balle sera à un des points de la circonférence, comme F, elle y aura mis le double du temps qu'elle avoit mis depuis A jusques à B, puisque le plan que nous supposons maintenant entre deux ne fait rien de nouveau qu'empêcher la détermination de haut en bas. Et partant, la détermination de gauche à droite sera pour lors marquée par le même

point E, et par conséquent, comme FB à EB, ainsi la droite AB sera à BC. D'où il suit que les angles ABC, FBE seront toujours égaux de quelque manière et en quelque proportion que la vitesse ou le mouvement changent.

2. Si M. Descartes eût pris garde qu'en quelque manière que la vitesse change au point B, la réflexion ne laisse pas de se faire à angles égaux, il n'eût pas été en peine, ni ses amis non plus, de tirer la balle du point B, où ils l'ont [vue] malheureusement engagée dans l'exemple de ma dernière lettre. Il n'eût pas soutenu que, la vitesse venant à changer au point B, la balle ne reste pas d'avancer vers la droite autant qu'elle faisoit auparavant. Il n'eût pas déduit d'un fondement non seulement incertain, mais encore faux, sa proportion des réfractions, et enfin il n'eût pas esquivé, dans la figure (1) de la page 19, de déterminer sous quel angle la balle étant au point B se réfléchit vers le point L.

Car, quoiqu'il paraisse, par son discours et par l'inspection même de la figure, qu'il a entendu que cette réflexion se fait à angles égaux, il a laissé un petit scrupule dans l'esprit des lecteurs, qui peuvent raisonnablement douter si, dans l'exemple de M. Descartes, la balle diminue sa vitesse au point B ou non. Si elle la diminue, la réflexion ne se pourroit pas faire à angles égaux, en suivant le raisonnement de M. Descartes. Que si la balle ne diminue point sa vitesse au point B, y a-t-il rien de plus contraire aux lois inviolables de la pure Géométrie, qui ne veut point qu'on puisse aller d'une extrême à l'autre sans passer par tous les degrés du milieu?

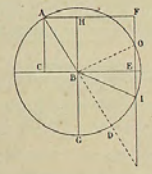
3. Or, M. Descartes et ses amis soutiennent que la balle, qui est poussée sur l'eau ou sur la toile, diminue sa vitesse également en toutes les inclinations, lorsqu'elle la traverse, et que cette diminution se fait dès le point B. Comment donc peut-on concevoir que, dès le premier angle où elle se réfléchit, sa vitesse ne diminue point du tout,

(1) *Voir* fig. 89, p. 401.

et qu'il n'en puisse pourtant être pris aucun plus grand auquel elle ne diminue d'une certaine quantité qui soit toujours la même? Ne seroit-il pas plus géométrique et plus naturel de soutenir, dans le sentiment de M. Descartes, que la diminution de la vitesse se fait inégalement, que cette diminution est la plus grande de toutes en la chute perpendiculaire d'H vers B et qu'elle se rend toujours moindre à mesure que les inclinations varient jusqu'à ce qu'elle devienne nulle? ce que M. Descartes a peut-être cru arriver lorsqu'elle se réfléchit. Mais, parce que nous venons de prouver que, soit que la vitesse augmente ou qu'elle diminue au point B, la réflexion ne reste pas de se faire à angles égaux, nous ne devons pas nous mettre en peine de rechercher plus soigneusement la conduite secrète dont se sert la nature en affoiblissant la vitesse de la balle ou également ou inégalement à mesure que les inclinations viennent à changer.

4. Mais que deviendra le raisonnement qui se doit faire au dessous du plan CBE, en la page 17, par exemple? Il sera le même que le précédent : car, que la vitesse diminue au point B ou par la rencontre de la toile, ou par quelque autre voie qui vienne d'ailleurs, c'est tout la même chose. Et puisqu'en la figure de la page 17 la balle perce la toile et qu'au point B la vitesse diminue par moitié, elle ne peut jamais avoir la détermination vers la droite pareille à celle qu'elle auroit, s'il n'y avoit point de toile et que pourtant la vitesse diminuât par moitié au point B, qu'en continuant toujours sa route vers la droite ABD.

Fig. 56.



Vous répliquerez : Mais, à ce compte-là, la détermination de haut en bas ne changeroit pas non plus par la rencontre de la toile. Je l'avoue, et pour ôter et éclaircir pleinement cette difficulté, il ne faut que dire que vous ne tirerez jamais autre chose du raisonnement des mouvements et des déterminations composées de M. Descartes, sinon que la réflexion se fait toujours à angles égaux et que la pénétration du second milieu se doit toujours faire en ligne droite. A quoi même se rapporte ce que vous dites dans votre dernier écrit (1), que la balle a toujours une même aisance à pénétrer le second milieu en toutes sortes d'inclinations; d'où il doit suivre, dans l'application du raisonnement de M. Descartes, qu'en toute sorte de cas la réflexion se fera à angles égaux, et que la pénétration se fera de même en tous les cas en ligne droite, le mouvement du dessous en ligne droite suivant les mêmes lois et répondant justement au mouvement du dessus à angles égaux.

Mais il n'y aura donc point de réfraction? me direz-vous. Je réplique que le mouvement de la balle et la réfraction ne se ressemblent que par la comparaison imaginaire de M. Descartes, et qu'au pis aller, si le détour de la balle en passant par le second milieu est véritable, il en faut chercher la raison ailleurs que dans la composition des mouvements, qui ne produira jamais en ce rencontre qu'un cercle dialectique.

De quelque biais que vous le preniez, il faudra examiner les principes secrets dont se sert la nature en produisant la réfraction, et si celui que j'ai touché dans ma lettre à M. de la Chambre (2) ne vous plaît pas, je souhaite qu'il vous en vienne de meilleurs dans l'esprit, et que cette vieille dispute aboutisse enfin à la pleine et entière découverte de la vérité.

Je suis de tout mon cœur, Monsieur,

Votre très humble et très obéissant serviteur,

FERMAT.

(1) Pièce XCIV, 15.
(2) Lettre LXXXVI.

XCVIII.

LALOUVÈRE A FERMAT (1).

21 JUILLET 1658.

Amplissimo Domino de Fermat in Suprema Curia Tolosana Senatori integerrimo.

Decem nunc dies sunt (Senator integerrime) cùm primùm legi à Te mihi oblatam nobilissimi et doctissimi Anonymi typis editam Epistolam, quæ *à præstantissimis toto Orbe Geometris postulat solutionem quarundam propositionum circa cycloidem ejusque centra gravitatis.* Ego licet, meæ tenuitatis mihi probè conscius, norim quàm longo post magnos illos viros intervallo in Geometrarum qualiumcumque numero locum teneam; quia tamen quid de quæsitis illis in mentem mihi veniret promere à Te tunc jussus sum, malui temeritatis quàm obsequii Tibi non prompti præstituti nomine accusari. En igitur quas circa problemata ejusmodi meditatus sum viginti omnino propositiones. Tu quem omnes Europæ Mathematici meritò suspiciunt, si quid perperam scriptum sit, aut si quid scriptis desit, emenda vel supple, modò tamen judiciorum publicorum occupationes quibus longè utilius distineris, id patiantur. Hâc emendatione vel etiam supplemento fidens noster hic libellus prodibit in vulgus intrepidè, quapropter Te hujus spei plenus adit, ab eo nempe missus, qui pluribus nominibus jamdiu Tibi est

Addictus ex animo servus

ANTONIUS LALOUERA Societatis Jesu.

Tolosano in Collegio XII Kal. Aug. 1658.

(1) Dédicace de l'opuscule : *De Cycloide Galilæi et Torricellii Propositiones viginti Autore Antonio Lalouera Societatis Jesu*, imprimé à Toulouse en 1658 (rarissime, dont un exemplaire est conservé Bibl. nat., Imprimés, Réserve V, 835 A). — Reproduite en tête du premier livre de l'Ouvrage : *Veterum Geometria promota in septem de Cycloide libros*, publié par Lalouvère en 1660.

XCIX.

CLERSELIER A FERMAT.

MERCREDI 21 AOUT 1658.

(D, III, 49. Bibl. Nat. fr. 3980, nouv. acq., f^os 66-77.)

MONSIEUR,

1. Je me trouve aujourd'hui plus empêché à répondre que je n'étois la dernière fois : aussi avez-vous changé de condition et, de juge que vous étiez, vous êtes devenu partie. Quand je n'avois qu'à défendre devant vous la cause de M. Descartes contre votre sceptique, je ne me promettois pas un succès moins favorable que celui que j'ai eu : j'avois une bonne cause à défendre, des subtilités à éclaircir, et un juge clairvoyant pour m'entendre et prononcer. Mais, quand je vous considère descendu de votre siège pour vous porter vous-même partie contre celui que je défends, le respect que je vous dois en quelque état que vous paroissiez, la grande estime que j'ai toujours conçue de vous et qui s'augmente en moi à mesure que vous vous faites davantage connoître, et le peu d'usage que j'ai dans la matière que nous agitons à comparaison de celui que vous vous y êtes acquis, tout cela m'étonne et fait que je ne sais encore quelle issue me promettre de tout ce démêlé.

Je vous dirai pourtant d'abord que, si je voulois agir avec moins de franchise que ne m'oblige l'honnête procédé que vous gardez avec moi, je pourrois user d'une exception qui paroîtroit peut-être légitime et recevable, en vous accordant tout ce que vous dites et prétendant que tout cela ne fait rien contre M. Descartes et ne combat en aucune façon sa doctrine de la réflexion et des réfractions.

Car je veux que la balle de la figure de la page 19 de la Dioptrique, selon la supposition que vous faites dans votre première lettre (1), se

(1) *Voir* Lettre XCV, p. 401.

trouve empêchée (comme vous dites sans doute agréablement) à trouver quelque issue pour prendre sa route; et je veux même que le passeport que vous lui avez donné par avance dans votre seconde, de peur que nous n'eussions pas assez de crédit pour lui en fournir un, et même que la route que vous avez eu la bonté de lui marquer en cet endroit (1), lui fût si aisée et si commode qu'elle ne fît point difficulté de la suivre, que pourroit-on conclure de là contre M. Descartes? lequel n'ayant apporté en ce lieu-là les exemples de la balle que pour expliquer certains effets particuliers de la lumière, à savoir celui de la réflexion qui se fait toujours à angles égaux, et celui de la réfraction qui se fait toujours de même sorte dans un même milieu et qui change selon la proportion qui est entre le milieu d'où elle sort et celui où elle entre, ce qui fait que tantôt elle s'approche et tantôt elle s'éloigne de la perpendiculaire : qui, dis-je, n'a eu aucune occasion d'expliquer le cas que vous proposez, pource qu'il n'a aucun rapport à son dessein.

2. Il n'y en avoit que trois qui y pussent servir, et il les a tous trois expliqués et, à mon avis, d'une manière si claire et si simple qu'il n'y a que ceux qui veulent plus que lui qui y trouvent de la difficulté.

Le premier cas, qui explique la réflexion, est celui d'une balle qui, étant poussée suivant la ligne AB, rencontre de biais dans son chemin un corps dur, impénétrable et inébranlable. Qu'y a-t-il de plus simple et de plus clair que cette balle, qui ne perd rien de sa vitesse, doit rejaillir à angles égaux, c'est-à-dire remonter aussi vite qu'elle est descendue et avancer autant qu'elle faisoit vers le côté où ce corps dur n'est point du tout opposé?

Le second, qui se rapporte à la réfraction lorsqu'elle s'éloigne de la perpendiculaire, est celui de la même balle qui, étant poussée comme dessus, rencontre aussi de biais un autre milieu, dans lequel elle pénètre et qui lui fait perdre une partie de sa vitesse. Quoi de plus clair et de plus simple que de dire que cette balle, ne pouvant plus

(1) *Voir* Lettre XCVII, 1, 2.

aller si vite qu'elle faisoit, doit pourtant conserver la détermination qu'elle avoit auparavant à avancer vers un certain côté, à laquelle ce milieu n'est aucunement opposé, et à quoi la perte qu'elle a soufferte en sa vitesse ne résiste point et se peut accommoder? Pourquoi vouloir obliger cette balle à faire plus qu'elle ne doit, puisque la nature ne fait rien en vain?

Enfin le troisième cas, qui se rapporte à la réfraction lorsqu'elle s'approche de la perpendiculaire, et le seul qui restoit à M. Descartes à éclaircir, s'explique heureusement par la même balle qui, étant poussée comme auparavant, rencontre aussi de biais dans son chemin un autre milieu, dans lequel elle pénètre avec une égale facilité de tous côtés et qui augmente sa vitesse d'une certaine quantité. Que peut-on penser de plus simple et de plus naturel que de dire que cette balle, devant aller plus vite qu'elle ne faisoit selon quelqu'une de ses directions, n'avance pourtant pas davantage selon celle à laquelle ce corps, par qui sa vitesse a été augmentée, n'est point du tout opposé?

3. Le cas que vous proposez outre cela dans votre première lettre est superflu et ne peut servir à expliquer aucun de ces phénomènes de la lumière. Et, par conséquent, il n'est ici d'aucune considération et, quelque inconvénient qui en pût suivre, cela ne pourroit préjudicier à ce que M. Descartes a auparavant prouvé, et par quoi il a expliqué si intelligiblement ces effets merveilleux de la lumière qui ne laisseroient pas d'être vrais et tels qu'il les a démontrés, quand votre supposition seroit difficile à expliquer par ses principes, ce que je ne désespère pourtant pas de faire, et quand elle se devroit expliquer suivant les vôtres, ce que je n'estime pas.

Mais, pource que c'est en ceci que consiste toute notre question, il faut que j'éclaircisse une fois un point qui vous semble n'avoir pas été prouvé par M. Descartes, à cause que sa preuve n'est pas purement géométrique, mais qu'elle est en partie fondée sur quelques principes de la nature si clairs qu'ils ne demandent aucune explication.

4. Ces principes sont : 1° que chaque chose demeure en l'état qu'elle est pendant que rien ne la change; 2° que, lorsque deux corps se rencontrent qui ont en eux des modes incompatibles, il se doit véritablement faire quelque changement en ces modes pour les rendre compatibles, mais que ce changement est toujours le moindre qui puisse être; 3° qu'un corps ne peut résister ou causer du changement dans un autre qu'en tant qu'il lui est opposé.

Ainsi donc, si une balle se meut d'A vers B, dans la figure (1) de la page 15, avec une certaine vitesse, elle continuera toujours d'aller avec la même vitesse vers ce côté-là si rien ne la change. Mais si vous lui opposez le corps dur, impénétrable et inébranlable CBE, pource que les modes de ces deux corps, l'un qui veut conduire la balle vers D et l'autre qui s'oppose à cette route, mais qui ne s'oppose point à sa vitesse, sont incompatibles, il faut qu'il arrive du changement en un de ces modes, mais le moindre qui puisse être. C'est pourquoi la balle changera de détermination et gardera sa vitesse, et d'autant que le corps CBE n'est opposé qu'à l'une des deux déterminations dont il est vrai que celle de la balle est composée eu égard au corps CBE sur lequel elle tombe, à savoir à celle qui la faisoit descendre et non point à celle de gauche à droite; ce corps ne peut apporter de changement qu'à celle-là et non point à l'autre, à laquelle il n'est point opposé. C'est pourquoi il oblige la balle à remonter et la laisse continuer à s'avancer vers la droite comme elle faisoit auparavant : à quoi il ne change rien, le mode de son corps n'ayant rien d'incompatible et d'opposé à celui-là.

Il ne faut plus ajouter à ce raisonnement que ce qui appartient à la Géométrie, et la preuve sera achevée. Si vous n'appelez pas cela preuve démonstrative, je ne sais plus de quelles raisons il se faudra servir pour en composer une; mais, pour moi, je me contente de pareilles démonstrations.

Or, le même raisonnement que je viens de faire se peut accommoder

(1) *Fig.* 53, p. 409.

à la figure de la page 17 et à celle de la page 19 et à tous les cas qui se peuvent proposer, et je n'y vois rien de différent que les différentes suppositions : à savoir que le corps CBE tantôt est dur et tantôt liquide, tantôt pénétrable et tantôt impénétrable ; que la vitesse tantôt diminue, tantôt augmente et tantôt demeure la même ; et que la balle tantôt continue de descendre et tantôt est obligée de remonter, et même que tantôt on peut opposer un corps au cours de la balle et tantôt non.

5. Examinons maintenant ces cas l'un après l'autre suivant ces principes, et voyons ce qui en doit arriver ; et je m'assure que l'on ne trouvera point que la chose doive aller comme vous dites, mais bien comme dit M. Descartes, et cela répondra en même temps à toutes vos nouvelles difficultés.

Premièrement, vous dites fort bien, au commencement de votre seconde lettre (1), que si l'on suppose que la balle qui va dans la ligne droite AB diminue sa vitesse par moitié en arrivant au point B, elle ira toujours en ligne droite vers D, si elle continue d'aller dans le même milieu et que le plan CBE ne lui soit point opposé : avec cette différence seulement, qu'elle emploiera depuis B jusques à D le double du temps qu'elle avoit mis auparavant depuis A jusques à B, et cela à cause qu'un corps doit toujours demeurer dans le même état où il est ou auquel on suppose qu'il soit, si rien ne le change. Or, n'y ayant rien qui change en la balle que la vitesse, ni rien par quoi la détermination doive être altérée plus d'un côté que d'un autre, tout cela fait qu'elle doit continuer dans la même ligne, et aller seulement moins vite selon cette détermination : de même que, lorsqu'un corps tombe perpendiculairement de l'air dans l'eau, il continue d'aller suivant la ligne perpendiculaire et va seulement d'autant moins vite que sa vitesse est diminuée à la rencontre de l'eau.

Si pourtant j'eusse été d'humeur à vouloir chicaner (ce qui ne m'arrivera jamais lorsque j'aurai affaire à une personne d'honneur et de mérite comme vous), j'aurois pu nier que le cas que vous proposez

(1) Lettre XCVII.

fût concevable et admissible : à savoir qu'un mobile, sans changer de milieu, puisse tout d'un coup passer d'une vitesse à une autre sans passer par les degrés d'entre deux. Ce que vous dites vous-même être contraire aux lois inviolables de la pure Géométrie et qui même est contraire à cette loi de la nature, qui est que chaque corps continue toujours de demeurer dans le même état autant qu'il se peut, et que jamais il ne le change que par la rencontre des autres. Le moyen donc de concevoir qu'un corps puisse tout d'un coup, étant arrivé au point B, perdre la moitié de sa vitesse, lorsqu'il ne se rencontre rien qui la lui puisse faire perdre! Mais je veux bien vous accorder toutes vos suppositions et ne vous rien nier, que ce qui ne se pourra absolument admettre à moins de renverser toutes les lois de la nature et toutes les notions claires et simples qui sont en nous.

6. Passons à votre seconde supposition, qui est à mon gré une des plus adroites que l'on pût faire en ce genre et dont sans doute j'aurois eu peine d'apercevoir la subtilité, n'étoit qu'étant accoutumé à suivre des voies fort simples dans mes raisonnements, je me défie de tout ce que je vois qui s'en écarte.

Vous supposez après cela que, la balle perdant comme auparavant la moitié de sa vitesse au point B, le plan CBE impénétrable se trouve entre deux et empêche que la balle ne passe au-dessous ; et vous dites que la balle réfléchira aussi bien à angles égaux que si la vitesse ou le mouvement demeuroit le même. Et certainement je confesse que vous le prouvez d'une manière la plus ingénieuse qu'il est possible ; mais permettez-moi aussi de vous dire qu'elle est captieuse et souffrez que je vous fasse voir en quoi je pense que vous vous êtes mépris.

Quand en l'exemple ci-dessus je suis demeuré d'accord que la balle, perdant au point B la moitié de sa vitesse, ne laissoit pas de continuer son chemin suivant la ligne BD, avec cette seule différence qu'elle alloit de moitié moins vite, ç'a été pource que, ne changeant point de milieu et aucun plan ne lui étant opposé, on ne pouvoit pas dire que la détermination de la balle suivant la ligne AB fût composée de deux

déterminations, non plus que lorsqu'une balle tombe perpendiculairement sur un plan. Mais ici, où vous supposez que le plan CBE lui est opposé, il est certain qu'à son égard la détermination de la balle sur la route AB est composée de deux déterminations, l'une qui la fait descendre vers lui, et l'autre qui la fait avancer vers la droite ou horizontalement, et que le plan s'oppose à celle-là et non point à celle-ci.

7. Maintenant, de deux choses l'une : ou vous supposez qu'après que la balle est venue avec deux degrés de vitesse, par exemple, depuis A jusques à B, étant au point B elle rencontre le plan CBE qui lui fait perdre la moitié de sa vitesse; ou bien vous supposez que, sans que ce plan y contribue, ayant perdu la moitié de sa vitesse au point B, elle rencontre le plan CBE. Et si j'ai bien compris le sens de votre seconde lettre, c'est principalement à ce dernier cas qu'elle se rapporte; mais remarquez encore ici en passant que je vous accorde plus que je ne devrois : car le moyen de concevoir qu'une balle perde la moitié de sa vitesse au point B, sans la rencontre d'aucun corps qui la lui puisse faire perdre!

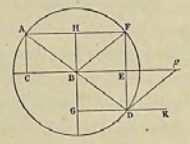
8. Au premier cas, il est aisé de voir qu'il ne faut, comme vous avez fait dans votre première lettre (1), que transférer le raisonnement de la figure de la page 17 au dessus du plan, et dire que, puisque la balle ne perd rien du tout de la détermination qu'elle avoit à avancer vers la droite, elle doit (toutes les autres conditions étant gardées) arriver au point O, ainsi que vous avez fort bien remarqué. C'est pourquoi je n'aurois garde de dire, comme vous faites : « Pourquoi de grâce le raisonnement de M. Descartes conclura-t-il au-dessous, s'il ne conclut pas au-dessus? Ce qui est démonstration en un cas deviendra-t-il paralogisme en l'autre? » Non sans doute : l'un et l'autre conclut également bien.

9. Au second cas, la balle peut suivre la route que vous avez mar-

(1) Lettre XCV, p. 400.

quée dans votre seconde lettre (1), et réfléchir toujours à angles égaux, de quelque manière et en quelque proportion que la vitesse ou le mouvement change au point B : mais non pas à la vérité par la raison que vous dites. Car la même proportion ne doit pas être gardée par une balle qui, rencontrant de biais un plan impénétrable, est obligée de réfléchir, que celle qui est gardée par une autre balle que l'on suppose n'en point rencontrer, et qui doit suivre les mêmes lois que celle qui en rencontre perpendiculairement, à cause qu'une balle qui ne rencontre aucun plan n'a qu'une seule détermination : elle ne va ni à gauche ni à droite, au lieu qu'une balle qui tombe de biais sur un plan y va toujours avec deux déterminations, à l'une desquelles ce plan est opposé et à l'autre non : et cette circonstance en doit changer l'effet, selon les principes ci-devant posés.

Fig. 53.



Mais voici comme la balle peut suivre la route que vous avez marquée, et réfléchir à angles égaux : à savoir il faut supposer que la balle, étant au point B et ayant perdu la moitié de sa vitesse (ou telle autre quantité qu'il vous plaira), commence à ce point B à suivre la route qu'elle suivroit, si elle avoit commencé à se mouvoir à ce point-là avec la vitesse qui lui reste. Or il est constant que si, sans avoir égard à la ligne AB qu'elle a parcourue avec deux degrés de vitesse, elle commençoit à se mouvoir en B, avec la vitesse qu'on suppose qui lui reste et [suivant] la direction qu'elle a véritablement au point B, elle iroit vers D avec un degré de vitesse [et y arriveroit] en deux fois autant de temps qu'il lui en a fallu pour venir d'A en B, si rien ne s'opposoit à

(1) *Voir* Lettre XCVII, 1.

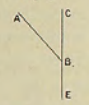
son mouvement. Et si, au lieu de lui opposer le plan impénétrable et inébranlable CBE au point B, on le lui opposoit au point D, il est évident, par ce que nous avons dit ci-dessus, que ce plan l'empêchant seulement de passer outre et non point d'avancer vers la droite, et ne diminuant ni n'augmentant la vitesse avec laquelle elle seroit venue vers lui depuis B, elle rejailliroit vers g et feroit un angle de réflexion gDK égal à celui d'incidence BDG, lequel se trouveroit égal à celui de la première incidence ABC. Or est-il qu'il doit arriver au point B le même changement en la détermination de la balle que celui qui arriveroit au point D si le plan CBE lui étoit opposé en ce point-là, puisque dès le point B la balle a toute la même vitesse et la même détermination qu'elle auroit au point D après avoir parcouru la ligne BD.

10. Et partant, la balle, selon votre supposition, doit, au point B, rejaillir suivant un angle égal à celui d'incidence : non point, comme j'ai dit, par la raison que vous dites, car il n'est pas vrai que, l'interposition du plan CBE n'empêchant que l'une des parties dont la détermination est composée, celle de gauche à droite reste la même qu'elle étoit quand la balle n'avoit aucun plan qui lui fût opposé; car, en ce dernier cas, la balle n'avoit qu'une détermination, et l'on ne peut pas dire qu'elle avançoit vers la droite. C'est pourquoi la conclusion que vous en tirez n'est pas non plus véritable.

Donc, dites-vous, la balle a dû avancer autant au-dessus vers la droite qu'elle eût fait au-dessous si le plan n'eût pas empêché sa route; et comme, lorsqu'elle seroit au point D au-dessous, elle auroit avancé en deux moments vers la droite depuis B jusques en E, de même aussi, pour avancer en deux moments autant au-dessus vers la droite, elle doit aller au point F qui est autant avancé vers la droite que le point D, et qui coupe le cercle au-dessus en même proportion que D le coupe au-dessous, et fait un angle de réflexion égal à celui d'incidence. Car toute cette proportion de gauche à droite que vous dites devoir être gardée au-dessus comme elle eût été au-dessous, si le plan CBE n'eût pas empêché sa route, n'est qu'une proportion imaginaire,

puisqu'au-dessous, quand il n'y a aucun plan interposé, la balle n'a aucune direction vers la droite, cette direction ou détermination vers la droite étant toujours relative au plan qu'on lui interpose. Et par exemple, si le plan CBE lui eût été opposé d'un autre sens comme en cette figure, où seroit tout votre raisonnement vers la droite? Mais cela doit arriver dans votre supposition même et dans toute autre, par la

Fig. 92.



raison que j'ai dite, qui est conforme aux lois de la nature et aux principes ci-devant établis.

11. Pour éclaircir encore ceci davantage, supposons pour troisième cas, comme a fait M. Descartes à la fin de la page 19 de la *Dioptrique* (1), que la balle, ayant été premièrement poussée d'A vers B, rencontre au point B le plan CBE qui augmente la force de son mouvement ou sa vitesse d'un tiers, en sorte qu'elle puisse faire par après autant de chemin en deux moments qu'elle en faisoit en trois auparavant. Et il

Fig. 93.



suit manifestement qu'elle doit rejaillir en F, puisque la détermination

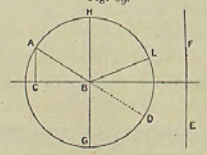
(1) Mais faisons encore ici une autre supposition et pensons que la balle ayant été premièrement poussée d'A vers B est poussée de rechef étant au point B par la raquette CBE, qui augmente la force de son mouvement, par exemple, d'un tiers, en sorte qu'elle puisse faire par après autant de chemin en deux moments qu'elle en faisait en trois auparavant. (*La Dioptrique*, p. 19-20).

vers la droite ne peut être augmentée par le plan CBE à laquelle il n'est aucunement opposé : et non pas en K, comme elle devroit faire, si votre raisonnement étoit véritable, mais qui ne le peut être, puisqu'il est contraire aux lois de la nature et même contre l'expérience, qui nous montre que la réflexion d'une balle et celle des autres semblables corps, qui ne sont pas parfaitement durs ou qui tombent sur d'autres qui affoiblissent leur mouvement, ne se fait jamais à angles égaux. Ainsi les balles les plus molles ne rebondissent pas si haut ni ne font pas des angles [de réflexion] si grands que celles qui sont plus dures.

Et remarquez que, puisqu'il est naturellement aisé de concevoir que, pour faire que la réflexion se fasse à angles égaux, le mouvement ne doit en aucune façon être augmenté ni diminué par la rencontre du plan, il semble que la raison nous doive aussi naturellement porter à croire que, lorsque ce plan l'augmente ou la diminue, l'angle de réflexion doit être à proportion ou plus grand ou plus petit que celui d'incidence, et non pas qu'il doive toujours être égal, comme il suit de votre raisonnement qui pour cela vous doit être suspect, quoiqu'il soit très ingénieux.

12. Mais, me direz-vous, que deviendra donc la balle dans la supposition que j'ai faite à la fin de ma première lettre (1), à l'occasion de la figure de la page 19? car c'est ici le point de la difficulté, et enfin il

Fig. 89.



la faut tirer de ce point fatal où elle paroit malheureusement engagée. C'est aussi ce que je prétends faire maintenant, à l'honneur de

(1) Lettre XCV, 4.

M. Descartes et sans faire changer de biais à sa logique, en me servant, dans le cas que vous proposez ici, du même raisonnement dont je me suis déjà servi quand j'ai passé à votre seconde supposition.

Si donc la balle, étant arrivée au point B, rencontre de biais le plan dur, impénétrable et inébranlable [CBE], et qu'elle perde à ce point B une telle partie de sa vitesse que la ligne FE, étant tirée comme aux exemples précédents, soit hors du cercle AD, je dis que : ou vous entendez que le plan CBE contribue à la perte de sa vitesse, ou vous entendez qu'il n'y contribue rien.

S'il n'y contribue rien, on ne peut pas concevoir autre chose sinon que la balle, après avoir perdu les deux tiers, par exemple, de sa vitesse, et ayant dans cet état une direction déterminée à aller vers D en un certain temps, à proportion de la force ou de la vitesse qui lui reste, et par conséquent d'avancer aussi suivant cette force d'une certaine quantité vers la droite à l'égard du plan CBE qu'on lui oppose, lequel pourtant n'est point opposé à cette direction vers la droite, elle doit rejaillir étant au point B comme elle feroit au point D, ainsi que j'ai dit ci-dessus. Et voilà la route que je lui aurois marquée, qui se trouve conforme à la vôtre, mais par une autre raison qui ne m'oblige point à changer de logique.

Mais remarquez que cette supposition même est impossible, qu'une balle perde les deux tiers de sa vitesse sans la rencontre d'aucun corps qui la lui puisse faire perdre.

Que si maintenant le corps CBE contribue à la perte de la vitesse, cela ne se peut faire en supposant le corps CBE parfaitement dur, impénétrable et inébranlable. Car le mouvement de la balle ne peut être diminué par la rencontre d'un corps, qu'en tant que la balle lui transporte de son mouvement; et si elle lui en transporte, cela ne se peut faire que du sens auquel le corps CBE lui est opposé et par conséquent elle ne lui peut transporter de son mouvement que selon cette partie de sa direction qui la fait tendre vers lui, et jamais la rencontre du corps CBE (que l'on doit supposer parfaitement uni) ne peut diminuer sa direction vers la droite ou parallèle. Or il est aisé de conclure que,

si la balle au point B a transporté au corps CBE tout le mouvement qui la faisoit tendre en bas, elle doit continuer son mouvement parallèle et rouler sur lui en avançant autant vers la droite qu'elle faisoit auparavant.

13. Que si, nonobstant cela, vous voulez contre toute raison faire cette supposition impossible, qu'elle perde une telle partie de sa vitesse au point B qu'elle ne puisse plus avancer autant vers la droite qu'elle faisoit auparavant, et par conséquent qu'elle ait aussi perdu une partie du mouvement qui la faisoit avancer vers la droite, alors je vous dirai qu'elle roulera sur le diamètre avec la vitesse qui lui reste, tout de même que, lorsque vous supposez que sans rencontrer aucun plan elle vient à perdre de sa vitesse, elle doit continuer son chemin dans la même ligne droite qu'elle avoit commencé à parcourir. Et ainsi il arrivera le même à cette balle que si, ayant été mue avec une certaine vitesse le long du plan CBE, il arrivoit qu'étant au point B (par une supposition impossible et sans aucune cause), elle vint à perdre une partie de sa vitesse : elle continueroit son chemin sur le même plan avec la vitesse qui lui resteroit.

Mais remarquez que, pour trouver quelque chose de défectueux aux raisonnements de M. Descartes, il en faut venir à des suppositions impossibles, et partant ce ne seroit pas merveille quand d'une impossibilité posée il s'ensuivroit une absurdité.

14. Par tout ce que dessus, il paroit que tout ce que vous dites dans votre seconde lettre (1) tombe de soi-même et n'a pas besoin de réponse : à savoir que, « si M. Descartes eût pris garde qu'en quelque manière que la vitesse change », c'est-à-dire augmente ou diminue « au point B, la réflexion ne laisse pas de se faire à angles égaux, il n'eût pas été en peine, ni ses amis non plus, de tirer la balle du point B où ils l'ont [vue] malheureusement engagée dans l'exemple de ma dernière lettre. Il n'eût pas soutenu que, la vitesse venant à changer au

(1) *Voir* Lettre XCVII, 2.

point B, la balle ne reste pas d'avancer vers la droite autant qu'elle faisoit auparavant et n'eût pas déduit, d'un fondement non seulement incertain, mais encore faux, sa proportion des réfractions ».

Tout cela, dis-je, n'étant plus appuyé d'aucunes raisons valables, se détruit de soi-même, aussi bien que ce que vous ajoutez à la fin de la même lettre (1) : à savoir que, le second milieu se pouvant, comme j'ai dit, ouvrir avec une égale facilité de tous côtés pour faire passage à la balle, et que la balle ayant toujours une même aisance à pénétrer le second milieu en toutes sortes d'inclinaisons, il doit suivre, dites-vous, « dans l'application du raisonnement de M. Descartes, qu'en toute sorte de cas la réflexion se fera à angles égaux et que la pénétration se fera de même en tous les cas en ligne droite, le mouvement de dessous en ligne droite suivant les mêmes lois et répondant justement au mouvement de dessus à angles égaux ».

15. Car, si je me suis assez bien fait entendre, vous devez maintenant tirer d'autres conclusions que celles-là des principes de M. Descartes et devez aussi, si je ne me trompe moi-même, avoir reconnu l'erreur du raisonnement duquel vous les aviez tirées. Et partant ne dites plus que le mouvement de la balle et la réfraction ne se ressemblent que par la comparaison imaginaire de M. Descartes; car c'est peut-être la plus juste et la plus claire que l'on puisse apporter pour l'expliquer. Mais, pour cela, il faut considérer la balle sans pesanteur, sans grosseur, sans figure et sans changement en sa vitesse dans toutes les lignes qu'elle parcourt : toutes lesquelles choses peuvent causer une infinité de variétés dans la réflexion et la réfraction d'une balle, mais, pource qu'elles n'ont point de lieu en l'action de la lumière [à laquelle se doit rapporter tout ce qu'il dit], M. Descartes ne les a point considérées dans le mouvement de cette balle dont il parle.

Et principalement il n'a point considéré cette circonstance que je vous prie de remarquer, qui est la plus commune et qui peut donner le plus d'occasion de douter de ce qu'a dit M. Descartes : c'est à savoir

(1) *Voir* Lettre XCVII, 4.

que, d'autant que le milieu que parcourt une balle lui ôte pour l'ordinaire à tous moments une partie de sa vitesse par le transport qu'elle lui en fait, de là arrive qu'une balle peut avoir perdu au point de la réflexion la moitié (ou plus ou moins) de la vitesse qu'elle avoit au commencement, et qu'elle ne laissera pas de réfléchir à angles égaux, à cause qu'au moment qu'elle vient à toucher le plan, sa vitesse a déjà été diminuée par le milieu qu'elle a parcouru, et que la direction qu'elle a alors ne laisse pas de la déterminer d'aller suivant la même ligne où sa première direction la portoit quand elle est sortie de la main ou de dessus la raquette, pourvu que sa pesanteur ou sa grosseur ou sa figure n'aient rien changé en cela.

16. Ce que je dis de la vitesse, quand le milieu la diminue, se doit aussi entendre quand elle est augmentée à tous moments par sa pesanteur : comme, lorsqu'une balle tombe le long d'un plan incliné, elle rejaillira aussi alors à angles égaux, encore que sa vitesse se trouve augmentée au point de la réflexion : et cela par la même raison, à savoir que cette augmentation ne lui vient pas du plan, mais qu'elle l'avoit avant que de le rencontrer.

Et ainsi vous voyez combien les principes de M. Descartes sont fermes et ses raisonnements bien suivis; ce qui montre que la véritable raison des réfractions se doit tirer du mouvement et des déterminations composées, en les examinant comme M. Descartes a fait. Et sans mentir, M. Descartes étoit un homme de trop bon sens et qui prenoit garde de trop près aux choses, pour tomber dans des fautes ou visibles ou grossières; et il me semble qu'il nous a donné sujet d'avoir assez bonne opinion de lui pour croire plutôt que nous nous méprenons en ne comprenant pas son sens et ses raisons que non pas de croire qu'il se soit trompé, au moins quand l'erreur où nous croyons qu'il soit tombé est apparente et grossière.

17. J'ajouterai seulement que, puisque les diverses expériences qu'a faites ici M. Petit (que vous connoissez) en toutes sortes de corps

transparents s'accordent toutes avec la proportion que M. Descartes a trouvée, il est aussi à croire que les raisons qui la lui ont fait trouver sont véritables : car le moyen d'arriver en tant de différents cas si justement au vrai par un même raisonnement, si ce raisonnement étoit faux!

Que si, après tout cela, vous ne voulez pas admettre les conclusions que j'ai tirées des principes que M. Descartes a établis, recevez au moins pour vraies les conclusions de cette lettre et croyez que, si mes raisonnements sont fautifs, les protestations de mon cœur sont sincères quand je vous assure que je veux être etc.