ANNÉE 1638.

XXV.

DESCARTES A MERSENNE (1).

< LUNDI 18 JANVIER 1638 >

(D, III, 56.)

MON RÉVÉREND PÈRE,

1. Je serois bien aise de ne rien dire de l'Écrit que vous m'avez envoyé (2), pource que je n'en saurois dire aucune chose qui soit à l'avantage de celui qui l'a composé. Mais à cause que je reconnois que c'est celui même qui avoit ci-devant tâché de réfuter ma Dioptrique,

(1) Lettre destinée à Fermat et envoyée à Mersenne en même temps que celle qui la précède (III, 55) dans l'édition Clerselier. Au lieu de l'adresser à Toulouse, le correspondant de Descartes la montra à Roberval et Étienne Pascal qui, prenant la défense de la Méthode attaquée, rédigèrent une Réplique (perdue). Elle fut envoyée, le 8 février 1638, par Mersenne à Descartes, qui répondit vers le 22 février (éd. Clerselier, III, 41, à Mersenne; III, 57, à Mydorge) en faisant appel à Mydorge et Hardy comme juges. Le 26 mars, Mersenne fit part à Descartes (qui répliqua le 3 mai par la Lettre XXVII ci-après) de nouvelles objections de Roberval et, probablement au commencement d'avril, ce dernier composa une seconde Défense de la Méthode de Fermat (éd. Clerselier, III, 58). Ainsi fut engagé ce *procès mathématique*, auquel Fermat resta de fait étranger pendant toute cette phase (*voir* ci-après Lettre XXVI) et dont les pièces seront réunies dans le *Supplément* de la présente édition.

Le texte de cette Lettre XXV a été revisé d'après une copie ancienne dans le MS. Bibl. Nat. fr. n. a. 5160, f^os 53 à 56.

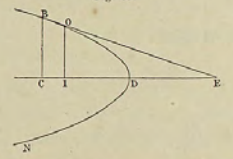
(2) L'envoi fait par Mersenne vers la fin de décembre 1637 comprenait, outre l'écrit dont il est ici question (*Methodus ad disquirendam maximam et minimam. — De tangentibus linearum curvarum*, Tome I, pages 133 à 136), l'*Isagoge ad locos planos et solidos* (Tome I, pages 91 et suiv.), qui, formant un paquet séparé, ne parvint à Descartes qu'un peu plus tard. Ces pièces avaient été remises à Mersenne par Carcavi.

et que vous me mandez qu'il a envoyé ceci après avoir lu ma Géométrie et s'étonnant de ce que je n'avois point trouvé la même chose, c'est-à-dire, comme j'ai sujet de l'interpréter, à dessein d'entrer en concurrence et de montrer qu'il sait en cela plus que moi; puis aussi à cause que j'apprends par vos lettres qu'il a la réputation d'être fort savant en Géométrie, je crois être obligé de lui répondre.

2. Premièrement donc, je trouve manifestement de l'erreur en sa règle, et encore plus en l'exemple qu'il en donne pour trouver les contingentes de la parabole : ce que je trouve en cette sorte.

Soit (*fig.* 60) BDN la parabole donnée dont DC est le diamètre, et que du point donné B il faille tirer la ligne droite BE qui rencontre

Fig. 60.



DC au point E et qui soit la plus grande qu'on puisse tirer du même point E jusques à la parabole : *sic enim proponitur quærenda maxima.*

Sa règle dit : *statuatur quilibet quæstionis terminus esse A*; je prends donc EC pour A, ainsi qu'il a fait : *et inveniatur maxima* (à savoir BE) *in terminis sub A gradu, ut libet, involutis;* ce qui ne se peut faire mieux qu'en cette façon : Que BC soit B, le quarré de BE sera $Aq. + Bq.$, à cause de l'angle droit BCE.

Ponatur rursum idem terminus qui prius esse $A + E$; à savoir je fais que EC est $A + E$ (ou bien, suivant son exemple, $A - E$, car l'un revient à l'autre) : *iterumque inveniatur maxima* (à savoir BE) *in terminis sub A et E gradibus ut libet coefficientibus;* ce qui ne se peut mieux faire qu'en cette sorte : Posons que CD ait été ci-devant D, lorsque BC étoit B, le côté droit de la parabole sera $\frac{Bq.}{D}$, à cause qu'il est à BC,

la ligne appliquée par ordre, comme BC est à CD le segment du diamètre auquel elle est appliquée. C'est pourquoi, maintenant que CE est $A + E$, DC est $D + E$, et le quarré de BC est $\frac{Bq.\text{ in }D + Bq.\text{ in }E}{D}$, qui étant ajouté au quarré de CE, qui est $Aq. + A\text{ in }E\text{ bis} + Eq.$, il fait le quarré de BE.

Adæquentur duo homogenea maximæ æqualia; c'est-à-dire que $Aq. + Bq.$ soit posé égal à

$$Bq. + \frac{Bq.\text{ in }E}{D} + Aq. + A\text{ in }E\text{ bis} + Eq. :$$

et demptis communibus, il reste

$$\frac{Bq.\text{ in }E}{D} + A\text{ in }E\text{ bis} + Eq.\text{ égal à rien.}$$

Applicentur ad E etc.; il vient

$$\frac{Bq.}{D} + A\text{ bis} + E.$$

Elidatur E, il reste

$$\frac{Bq.}{D} + A\text{ bis égal à rien.}$$

Ce qui ne donne point la valeur de la ligne A, comme assure l'auteur, et par conséquent sa règle est fausse.

3. Mais il se mécompte encore bien plus en l'exemple de la même parabole, dont il tâche de trouver la contingente. Car, outre qu'il ne suit nullement sa règle, comme il paroit assez de ce que son calcul ne se rapporte point à celui que je viens de faire, il use d'un raisonnement qui est tel que, si seulement, au lieu de *parabole* et *parabolen*, on met partout en son discours *hyperbole* et *hyperbolen* ou le nom de quelque autre ligne courbe, telle que ce puisse être, sans y changer au reste un seul mot, le tout suivra en même façon qu'il fait touchant la parabole jusques à ces mots : *ergo* CE *probavimus duplam ipsius* CD, *quod quidem ita se habet. Nec unquam fallit methodus*; au lieu desquels on peut mettre : *non ideo sequitur* CE *duplam esse ipsius* CD, *nec unquam ita se habet alibi quam in parabole, ubi casu et non ex vi præmissarum verum concluditur : semperque fallit ista methodus.*

4. Si cet auteur s'est étonné de ce que je n'ai point mis de telles règles en ma Géométrie, j'ai beaucoup plus de raison de m'étonner de ce qu'il a voulu entrer en lice avec de si mauvaises armes. Mais je lui veux bien encore donner le temps de remonter à cheval, et de prendre toutes les meilleures qu'il eût pu choisir pour ce combat, qui sont que, si on change quelques mots de la règle qu'il propose pour trouver *maximam* et *minimam*, on la peut rendre vraie et est assez bonne.

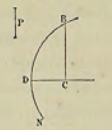
Ce que je ne pourrois néanmoins ici dire, si je ne l'avois su dès auparavant que de voir son Écrit : car, étant tel qu'il est, il m'eût plutôt empêché de la trouver qu'il ne m'y eût aidé. Mais encore que je l'aurois ignorée et que lui l'auroit parfaitement sue, il ne me semble pas qu'il eût pour cela aucune raison de la comparer avec celle qui est en ma Géométrie touchant le même sujet.

5. Car premièrement la sienne (c'est-à-dire celle qu'il a eu envie de trouver) est telle que, sans industrie et par hasard, on peut aisément tomber dans le chemin qu'il faut tenir pour la rencontrer, lequel n'est autre chose qu'une fausse position fondée sur la façon de démontrer qui réduit à l'impossible et qui est la moins estimée et la moins ingénieuse de toutes celles dont on se sert en mathématique. Au lieu que la mienne est tirée d'une connoissance de la nature des équations, qui n'a jamais été, que je sache, assez expliquée ailleurs que dans le troisième Livre de ma Géométrie; de sorte qu'elle n'eût su être inventée par une personne qui auroit ignoré le fonds de l'algèbre, et elle suit la plus noble façon de démontrer qui puisse être, à savoir celle qu'on nomme *a priori*.

6. Puis, outre cela, sa règle prétendue n'est pas universelle comme il lui semble, et elle ne se peut étendre à aucune des questions qui sont un peu difficiles, mais seulement aux plus aisées, ainsi qu'il pourra éprouver si, après l'avoir mieux digérée, il tâche de s'en servir pour trouver les contingentes, par exemple, de la ligne courbe BDN

(*fig.* 61), que je suppose être telle qu'en quelque lieu de sa circonférence qu'on prenne le point B, ayant tiré la perpendiculaire BC, les deux cubes des deux lignes BC et CD soient ensemble égaux au parallélépipède des deux mêmes lignes BC, CD et de la ligne donnée P.

Fig. 61.



(A savoir, si P est 9 et que CD soit 2, BC sera 4, pource que les cubes de 2 et de 4, qui sont 8 et 64, font 72, et que le parallélépipède composé de 9, 2 et 4 est aussi 72.)

Car elle ne se peut appliquer ni à cet exemple, ni aux autres qui sont plus difficiles, au lieu que la mienne s'étend généralement à tous ceux qui peuvent tomber sous l'examen de la géométrie, non seulement en ce qui regarde les contingentes des lignes courbes, mais il est aussi fort aisé de l'appliquer à trouver *maximas* et *minimas* en toute autre sorte de problèmes; de façon que, s'il l'avoit assez bien comprise, il n'auroit pas dit, après l'avoir lue, que j'ai omis cette matière en ma Géométrie.

7. Il est vrai toutefois que je n'y ai point mis ces termes de *maximis* et *minimis*, dont la raison est qu'ils ne sont connus que parce qu'Apollonius en a fait l'argument de son cinquième Livre, et que mon dessein n'a point été de m'arrêter à expliquer aucune chose de ce que quelques autres ont déjà su, ni de réparer les livres perdus d'Apollonius, comme Viète, Snellius, Marinus Ghetaldus (1), etc., mais seulement de passer au delà de tous côtés, comme j'ai assez fait voir en commençant par une question que Pappus témoigne n'avoir pu être trouvée par aucun des Anciens; et par même moyen, en composant et

(1) *Voir* Tome I, p. 3, note 3.

déterminant tous les lieux solides, ce qu'Apollonius cherchoit encore; puis en réduisant par ordre toutes les lignes courbes, la plupart desquelles n'avoient pas même été imaginées, et donnant des exemples de la façon dont on peut trouver toutes leurs propriétés; puis enfin, en construisant non seulement tous les problèmes solides, mais aussi tous ceux qui vont au sursolide ou au quarré de cube; et par même moyen, enseignant à les construire en une infinité de diverses façons.

D'où l'on peut aussi apprendre à déguiser en mille sortes la règle que j'ai donnée pour trouver les contingentes, comme si c'étoient autant de règles différentes. Mais j'ose dire qu'on n'en peut trouver aucune, si bonne et si générale que la mienne, qui soit tirée d'un autre fondement.

8. Au reste, encore que j'aie écrit (1) que ce problème pour trouver les contingentes fût le plus beau et le plus utile que je susse, il faut remarquer que je n'ai pas dit pour cela qu'il fût le plus difficile, comme il est manifeste que ceux que j'ai mis ensuite touchant les figures des verres brûlans, lesquels le présupposent, le sont davantage. De façon que ceux qui ont envie de faire paroître qu'ils savent autant de géométrie que j'en ai écrit, ne doivent pas se contenter de chercher ce problème par d'autres moyens que je n'ai fait, mais ils devroient plutôt s'exercer à composer tous les lieux sursolides, ainsi que j'ai composé les solides, et à expliquer la figure des verres brûlans, lorsque l'une de leurs superficies est une partie de sphère ou de conoïde donnée, ainsi que j'ai expliqué la façon d'en faire qui aient l'une de leurs superficies autant concave ou convexe qu'on veut, et enfin à construire tous les problèmes qui montent au quarré de quarré de quarré ou au cube de cube, comme j'ai construit tous ceux qui montent au quarré de cube.

9. Et après qu'ils auront trouvé tout cela, je prétends encore qu'ils m'en devront savoir gré, au moins s'ils se sont servis à cet effet de ma

(1) *Géométrie de Descartes*, éd. Hermann. Paris, 1886, p. 33.

Géométrie, à cause qu'elle contient le chemin qu'il faut tenir pour y parvenir, et que, si même ils ne s'en sont point servis, ils ne doivent pas pour cela prétendre aucun avantage par dessus moi, d'autant qu'il n'y a aucune de ces choses que je ne trouve autant qu'elle est trouvable, lorsque je voudrai prendre la peine d'en faire le calcul. Mais je crois pouvoir employer mon temps plus utilement à d'autres choses.

Je suis etc.

XXV *bis* (1).

FERMAT A MERSENNE.

< FÉVRIER 1638 >

(A, f^os 35-36, B, f^os 21^vo-22^vo.)

Mon Révérend Père,

1. J'ai appris par votre lettre que ma réplique (2) à M. Descartes n'étoit pas goûtée, que même il avoit trouvé à dire à mes méthodes *de maximis et minimis et de tangentibus* (3), en quoi pourtant il avoit trouvé M^rs de Pascal et de Roberval de contraire sentiment. De ces deux choses, la première ne m'a point surpris, pource que les choses de physique peuvent toujours nous fournir de doutes et entretenir les disputes; mais je suis étonné de la dernière, puisque c'est une vérité géométrique, et que je soutiens que mes méthodes sont aussi certaines que la construction de la 1^re proposition des Éléments. Peut-être que les ayant proposées nuement et sans démonstration, elles n'ont pas été

(1) Réponse inédite à une lettre par laquelle Mersenne, sans communiquer à Fermat la critique de Descartes relative à la Méthode *de maximis et minimis*, c'est-à-dire la Pièce XXV, l'informait que cette critique avait donné lieu à une réplique (perdue) de Roberval et de Pascal, envoyée à Descartes le 8 février 1638.

(2) Lettre XXIV. Mersenne avait parlé de l'impression produite dans son cercle, à Paris, par cette Lettre, non pas de la réplique de Descartes, qu'il n'avait pas encore reçue.

(3) Tome I, pages 133 à 136.

entendues ou qu'elles ont paru trop aisées à M. Descartes, qui a fait tant de chemin et a pris une voie si pénible pour ces tangentes dans sa Géométrie.

2. Quoi qu'il en soit, je ne me pique pas d'être cru que par ceux qui le voudront, et vous proteste que j'aimerois mieux prononcer :

Jamjam efficaci do manus scientiæ (1),

que de souffrir que rien de ce que je vous ai envoyé soit imprimé sous mon nom, ce que je vous prie d'empêcher par le pouvoir que vous avez sur tous ces Messieurs qui se mêlent de cette étude. Je ne vous envoierai donc plus rien pour M. Descartes, puisqu'il met des loix si sévères à un commerce innocent, et me contente de vous dire que je n'ai trouvé encore personne ici qui ne soit de mon avis, que sa Dioptrique n'est pas prouvée. Je voudrois seulement savoir si dans Paris on croit qu'il ait démontré exactement les fondements et les principes de la réfraction, et particulièrement qu'il vous plût me faire part des sentiments de M. Mydorge sur ce sujet, et de M. Desargues.

3. Voilà pour ce sujet. Pour les manuscrits de Viète (2), il n'y a que fort peu de chose que nous n'eussions pas dans les imprimés : ce sont seulement des exemples plus étendus et quelques propositions de *nombres multangulaires*, qui se trouvent en d'autres livres, de sorte que l'impression de ses œuvres n'en profiteroit guères. Outre que je les ai reçus de M. Despagnet, à la charge de ne les bailler à personne que par son aveu.

4. Puisque M. de Roberval a soutenu ma méthode, je lui veux faire encore part d'un de ses plus beaux usages touchant l'*invention des centres de gravité*, puisque M. de Beaugrand ne les lui a pas baillés, comme je l'en avois prié. Et ne serai pas marri qu'on propose à M. Descartes l'in-

(1) Vers d'Horace, *Epodes*, XVII, 1.

(2) On voit que Mersenne s'occupait déjà de l'édition des Œuvres de Viète, imprimée à Leyde par les Elzevirs en 1646 et à laquelle il apporta un concours efficace.

vention de quelques-uns de ces centres de gravité. Vous m'obligerez de donner cet écrit (1) à M. de Roberval et de m'envoyer son sentiment là-dessus, et s'il croit que nous soyons obligés d'envoyer à Leyde, pour avoir la solution des problèmes géométriques.

Mon Révérend Père, votre très humble et très affectionné serviteur,

FERMAT.

5. Je (2) serai bien aise de savoir le jugement de Mrs de Roberval et de Pascal sur mon *Isagoge topique* et sur l'*Appendix* (3), s'ils ont vu l'un et l'autre.

6. Et, pour leur faire envie de quelque chose d'excellent, il faut étendre les lieux d'un point à plusieurs *in infinitum* : comme par exemple, au lieu qu'on dit d'ordinaire :

Trouver une parabole en laquelle, prenant tel point qu'on voudra, il produise toujours un même effet,

je veux proposer :

Trouver une parabole en laquelle prenant tels deux, trois, quatre, cinq, etc. points que vous voudrez, ils produisent toujours un même effet, et ainsi à l'infini.

C'est chose que j'ai trouvée et plusieurs autres par l'aide de ces misérables méthodes qui passent pour sophistiques. Bien plus, je puis encore donner la résolution de cette question :

Trouver autant de lignes courbes qu'on demandera, en chacune desquelles prenant tel nombre de points qu'on voudra, tous ces points ensemble produisent un même effet.

(1) Il s'agit du fragment imprimé Tome I, pages 136 à 139, et pour lequel (page 136, note 3) le 20 avril 1638 a été indiqué à tort comme date de la lettre d'envoi.

Pour la communication antérieure à Beaugrand, *voir* Lettre XVIII, 5.

(2) Le post-scriptum qui suit se retrouve imprimé, sauf le dernier alinéa, dans les *Lettres de Descartes* (éd. Clerselier, III, page 383) comme Extrait d'une lettre de Fermat, inséré dans un envoi de Mersenne à Descartes (du 28 avril ou du 1er mai 1638). Il s'y trouve précédé, dans le même Extrait, du premier alinéa de l'écrit *Centrum gravitatis parabolici conoidis* (Tome I, pages 136 à 139), qui, comme on l'a vu dans la note précédente, fut envoyé par Fermat pour Roberval, dans la présente lettre à Mersenne. Il est clair que le post-scriptum était également destiné à Roberval.

(3) Tome I, pages 91 à 110. Ce passage prouve que l'*Appendix* est, comme l'*Isagoge*, antérieur à la publication de la *Géométrie* de Descartes.

7. J'oublioís de vous dire, sur le sujet de la *roulette* (1) de M. de Roberval, que je crois qu'il n'aura pas persisté en l'opinion qu'il avoit, de lui avoir donné un cercle égal. Je vous prie de le savoir de lui.

XXVI.

FERMAT A MERSENNE.

MARDI 20 AVRIL 1638 (2).

(D. III, 36.)

MON RÉVÉREND PÈRE,

1. Je vous suis extrêmement obligé du soin que vous prenez pour satisfaire ma curiosité, m'ayant bien voulu faire part d'une Lettre que je trouve très-excellente, soit pour la matière qu'elle contient, soit pour les paroles dont on s'est servi; c'est celle qui est signée *Petit* (3), qui est un nom inconnu pour moi, mais qui m'a donné un très grand desir d'être connu de lui; je serai ravi qu'il vous plaise de m'en donner le moyen, et j'ai cru que ni vous ni lui ne désapprouveriez pas la

(1) Mersenne avait parlé à Fermat de la quadrature de la cycloïde, obtenue par Roberval.

(2) L'annotateur anonyme de l'exemplaire des *Lettres de Descartes* de la Bibliothèque de l'Institut prétend que la date ne s'applique qu'au post-scriptum et que le corps de la lettre remonte au 26 novembre 1637. Victor Cousin, dans son édition des *Œuvres de Descartes* (t. VI, p. 365), adopte la même opinion qui nous paraît insoutenable, car si Clerselier a commis des confusions dans les lettres qu'il a publiées d'après les minutes non datées de Descartes, ces confusions ont résulté uniquement du désordre dans lequel se sont trouvées ces minutes à la suite d'un accident où elles ont failli être détruites. Mais la présente lettre était évidemment écrite (en copie par Mersenne) sur un seul feuillet et n'a pu souffrir aucun dérangement.

(3) Mersenne avait annoncé à Descartes cet écrit de Petit dans une lettre du 12 février 1638 (*Lettres de Descartes*, III, p. 190). Il le lui envoya le 12 mars (III, p. 389).

liberté que j'ai prise d'effacer sur la fin quelques paroles qui marquoient que ses objections contre la *Dioptrique* de M. Descartes étoient plus fortes et moins sujettes à réplique que les miennes. Ce n'est pas que j'en doute, puisque j'ai conçu une très grande opinion de son esprit; mais je désire, si vous l'agréez, d'être un peu mis à l'écart, et de voir toutes ces belles disputes plutôt comme témoin que comme partie.

2. Vous ajouterez une très grande obligation à toutes celles que je vous ai déjà, si vous me procurez la vue de ce Discours que l'auteur de cette belle Lettre promet touchant *la réfraction*. Et si j'osois espérer la communication des expériences qu'il a faites, peut-être y mêlerois-je de la géométrie, si je les trouvois conformes à mon sentiment. J'attendrai cette satisfaction avec impatience, et vous renvoierai par le premier courrier son écrit, que je retiens pour en tirer copie.

3. J'attends aussi par votre faveur les réponses (1) que M. Descartes a faites aux difficultés que je vous ai proposées sur sa *Dioptrique*, et ses remarques (2) sur mon Traité *de maximis et minimis et de tangentibus*. S'il y a quelque petite aigreur, comme il est malaisé qu'il n'y en ait, vu la contrariété qui est entre nos sentiments, cela ne vous doit point détourner de me les faire voir; car je vous proteste que cela ne fera aucun effet en mon esprit, qui est si éloigné de vanité, que M. Descartes ne sauroit m'estimer si peu que je ne m'estime encore moins. Ce n'est pas que la complaisance me puisse obliger de me dédire d'une vérité que j'aurai connue, mais je vous fais par là connoître mon humeur. Obligez-moi, s'il vous plaît, de ne différer plus à m'envoyer ses écrits, auxquels par avance je vous promets de ne faire point de réplique.

4. J'ai fort vu ces jours passés M. Despagnet, avec qui je vis de

(1) *Lettres de Descartes*, éd. Clerselier : Descartes à Mydorge, III, 42; fin de la lettre III, 57 (p. 312) à Mydorge.

(2) *Voir* ci-avant Lettre XXV. Mersenne aurait pu communiquer aussi dès lors à Fermat les autres lettres écrites à ce sujet par Descartes (*Lettres de Descartes*, éd. Clerselier : à Mersenne, III, 41; à Mydorge, III, 42; à Mydorge, III, 57).

longue main comme un ami intime; s'il va à Paris, comme il espère, il vous dira qu'il est de mon avis en tous les petits Discours que j'ai faits, sans en exclure la Dioptrique.

J'attends de vos nouvelles, et suis, etc.

A Toulouse, ce 20 avril 1638.

5. Quand vous voudrez que ma petite guerre contre M. Descartes cesse, je n'en serai pas marri et, si vous me procurez l'honneur de sa connoissance, je ne vous en serai pas peu obligé.

(A f° 60) (1).

6. Outre le papier (2) envoyé à R(oberval) et P(ascal), pour suppléer à ce qu'il y a de trop concis, il faut que M. Descartes sache, qu'après avoir tiré la parallèle qui concourt avec la tangente et avec l'axe ou diamètre des lignes courbes, je lui donne premièrement le nom qu'elle doit avoir comme ayant un de ses points dans la tangente, ce qui se fait par la règle des proportions qui se tire des deux triangles semblables. Après avoir donné le nom, tant à notre parallèle qu'à tous les autres termes de la question, tout de même qu'en la parabole, je considère derechef cette parallèle, comme si le point qu'elle a dans la tangente étoit en effet en la ligne courbe, et suivant la propriété spécifique de la ligne courbe, je compare cette parallèle par *adégalité* avec l'autre parallèle tirée du point donné à l'axe ou diamètre de la ligne courbe.

Cette comparaison par *adégalité* produit deux termes inégaux qui enfin produisent l'égalité (selon ma méthode), qui nous donne la solution de la question.

Et ce qu'il y a de merveilleux, est que l'opération nous indique si la

(1) Nous avons rattaché à la lettre du 20 avril 1638 le fragment suivant dont les copies par Arbogast portent sur le brouillon le titre : *De maximis et minimis, par M. Fermat* et la souscription : *Fin;* sur la mise au net, le titre : *Sur la méthode des tangentes, par Fermat.* Il a déjà été publié par M. Charles Henry (*Recherches*, pp. 183-184) d'après le brouillon d'Arbogast (Bibl. Nat. fr. n. a. 3280, f° 137), lequel n'a d'ailleurs eu entre les mains qu'une copie de Mersenne en partie indéchiffrable.

(2) Probablement la pièce insérée Tome I, pages 136-139. *Voir* Lettre XXV *bis*, 4.

ligne courbe est convexe ou concave, si la tangente est parallèle à l'axe ou diamètre, et de quel côté elle fait son concours lorsqu'elle n'est pas parallèle; ce qui serait trop long à décrire par le menu (1), et suffit de dire que nous trouvons des équations impossibles pour avoir pris le concours du mauvais côté, etc., de sorte qu'il paroit, même sans faire un plus grand discours, que l'équation se soudra aisément si le concours peut exister et en aussi peu de temps qu'on puisse imaginer.

XXVII.

DESCARTES A MERSENNE (2).

LUNDI 3 MAI 1638.

(D, III, 60.)

MON RÉVÉREND PÈRE,

1. Il y a déjà quelques jours que j'ai reçu votre dernière du 26 mars, où vous me mandez les exceptions (3) de ceux qui soutiennent l'Écrit

(1) A partir des mots *et suffit*, le texte est conjectural. Le brouillon d'Arbogast porte (les mots *en italique* sont ceux pour lesquels il a particulièrement hésité) :

« Et suffit lors que *nous trouvons* des équations impossibles, *nous ayons* pris le concours du mauvais côté *etc. de sorte* qu'il paroit *même sans faire un* plus grand *retour*, que l'équation *soit toujours* aussi *si le* concours peut exister et en aussi peu de temps qu'on puisse imaginer. »

Arbogast a ajouté en note : « Il me paroit que cette leçon est véritable, nous n'en avons pas mis la fin dans la copie au net, par ce que nous craignions de nous tromper. »

(2) Le texte de cette lettre a été corrigé sur l'original, actuellement conservé à la Bibliothèque Victor Cousin.

(3) Ces *exceptions* se retrouvent développées dans l'*Escrit de quelques amis de Monsieur de Fermat*, imprimé *Lettres de Descartes*, éd. Clerselier, III, 58. Mais Descartes ne l'avait pas encore reçu (*voir* ci-après, Lettre XXIX, 3); c'est donc à tort que la note de l'exemplaire de l'Institut, reproduite par Cousin (*Œuvres de Descartes*, t. VII, p. 23), assigne à cet Écrit la date du 15 mars 1638. Il ne doit avoir été envoyé qu'en avril; Descartes répondit seulement à Mersenne par la lettre III, 59 de l'édition Clerselier; la date du 14 avril 1638, indiquée pour cette lettre par l'annotateur anonyme (*Œuvres de Descartes*, éd. Cousin, t. VII, p. 35) est également trop reculée, Roberval n'ayant pas encore eu connaissance de cette réponse le 1er juin 1638.

de M. Fermat *de maximis etc.* Mais elles ont si peu de couleur que je n'ai pas cru qu'elles valûssent la peine que j'y répondisse. Toutefois, pource que je n'ai point eu depuis de vos nouvelles et que je crains que ce ne soit l'attente de ma réponse qui vous fasse différer de m'écrire, j'aime mieux mettre ici pour une fois tout ce que j'en pense, afin de n'avoir jamais plus besoin d'en parler.

2. Premièrement, lorsqu'ils disent qu'il n'y a point de *maxima* dans la parabole (1), et que M. F. trouve les tangentes par une règle du tout séparée de celle dont il use pour trouver *maximam*, ils lui font tort en ce qu'ils veulent faire croire qu'il ait ignoré que la règle qui enseigne à trouver les plus grandes sert aussi à trouver les tangentes des lignes courbes : ce qui seroit une ignorance très grossière, à cause que c'est principalement à cela qu'elle doit servir; et ils démentent son Écrit où, après avoir expliqué sa méthode pour trouver les plus grandes, il met expressément : *Ad superiorem methodum inventionem tangentium ad data puncta in lineis quibuscumque curvis reducimus* (2).

Il est vrai qu'il ne l'a pas suivie en l'exemple qu'il en a donné touchant la parabole, mais la cause en est manifeste. Car, étant défectueuse pour ce cas-là et ses semblables (au moins en la façon qu'il la propose), il n'aura pu trouver son compte en la voulant suivre, et cela l'aura obligé à prendre un autre chemin, par lequel rencontrant d'abord la conclusion qu'il savoit d'ailleurs être vraie, il a pensé avoir bien opéré et n'a pas pris garde à ce qui manquoit en son raisonnement.

3. Outre cela, lorsqu'ils disent que la ligne EP, tirée au dedans de la parabole (3), est, absolument parlant, plus grande que la ligne EB,

(1) *Voir* Lettre XXV, fig. 60. L'objection de Descartes contre la règle de Fermat était que pour trouver la tangente BE au point B de la parabole, il fallait chercher le maximum de BE, considéré comme droite à mener du point E à la parabole. Roberval et Pascal repoussaient à bon droit ce raisonnement.

(2) *Voir* Tome I, page 134, les deux dernières lignes.

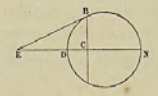
(3) *Voir* fig. 60, page 127. Il faut supposer la droite EP menée de E à un point de la parabole plus éloigné que B par rapport à E.

ils ne disent rien qui serve à leur cause. Car il n'est pas requis qu'elle soit la plus grande absolument parlant, mais seulement qu'elle soit la plus grande sous certaines conditions, comme ils ont eux-mêmes défini au commencement de l'Écrit (1) qu'ils m'ont envoyé, où ils disent que cette invention de M. F. est *touchant les plus grandes et les moindres lignes ou les plus grands et les moindres espaces que l'on puisse mener ou faire sous certaines conditions proposées*.

Et ils ne sauroient nier que la ligne EB ne soit la plus grande qu'on puisse mener du point E jusques à la parabole sous les conditions que j'ai proposées, à savoir qu'elle n'aille que jusques à elle sans la traverser, comme ils ont assez dû entendre dès le premier coup. Mais pour faire mieux voir que leur excuse n'est aucunement valable, je donnerai ici un autre exemple où je ne parlerai ni de tangente ni de parabole, et où toutefois la règle de M. Fer. manquera en même façon qu'au précédent. Aussi bien vous vous plaignez quand je vous envoie du papier vide, et vous ne m'avez point donné d'autre matière pour remplir cette feuille.

Soit donné le cercle BDN (*fig.* 62), et que le point E qui en est dehors soit aussi donné et qu'il faille tirer de ce point E vers ce cercle

Fig. 62.



une ligne droite, en sorte que la partie de cette ligne qui sera hors de ce cercle entre sa circonférence et le point donné E soit la plus grande. Voici comment la règle donnée par M. Fer. enseigne qu'il y faut procéder.

Ayant mené la ligne EDN par le centre du cercle et sa partie ED étant nommée B, et sa partie DN qui est le diamètre étant C, *statuatur*

(1) Écrit perdu, envoyé par Mersenne à Descartes le 8 février 1638.

quilibet quæstionis terminus esse A (1), ce qui ne se peut mieux faire qu'en menant BC perpendiculaire sur DN et prenant A pour CD.

Et inventâ maximâ etc. Pour trouver donc cette *maximam*, à savoir BE, puisque DC est A et DN est C, le quarré de BC est

$$A \text{ in } C - A \text{ quad.},$$

et puisque DC est A et DE est B, le quarré de CE est

$$Aq. + Bq. + A \text{ in } B \text{ bis},$$

lequel joint au quarré de BC fait le quarré de la plus grande BE, qui est

$$A \text{ in } C + Bq. + A \text{ in } B \text{ bis}.$$

Ponatur rursus idem qui prius terminus esse $A + E$, *iterumque inveniatur maxima*, ce qui ne se peut faire autrement, en suite de ce qui a précédé, qu'en posant $A + E$ pour DC. Et lors le quarré de BC est

$$C \text{ in } A + C \text{ in } E - Aq. - A \text{ in } E \text{ bis} - Eq.;$$

puis le quarré de CE est

$$Aq. + A \text{ in } E \text{ bis} + Eq. + Bq. + A \text{ in } B \text{ bis} + E \text{ in } B \text{ bis},$$

lequel, étant joint à l'autre, fait

$$A \text{ in } C + E \text{ in } C + Bq. + A \text{ in } B \text{ bis} + E \text{ in } B \text{ bis}$$

pour le quarré de la plus grande BE.

Adæquentur, c'est-à-dire qu'il faut poser

$A \text{ in } C + Bq. + A \text{ in } B \text{ bis}$ égal à $A \text{ in } C + E \text{ in } C + Bq. + A \text{ in } B \text{ bis} + E \text{ in } B \text{ bis}$.

Et demptis æqualibus (2), il reste

$$E \text{ in } C + E \text{ in } B \text{ bis égal à rien},$$

ce qui montre manifestement l'erreur de la règle.

5. Et afin qu'il ne puisse plus y avoir personne si aveugle qu'il ne

(1) Descartes reprend successivement, comme dans la Lettre XXV, les différentes phrases du texte de la règle donnée par Fermat (Tome I, page 133).
(2) Fermat avait dit *communibus* (Tome I, p. 133, ligne 3 en remontant).

la voie, je dirai ici en quelle sorte on la peut corriger. Car, bien que j'en aie touché un mot en ce que j'ai écrit à M. Mydorge (1), il y est néanmoins en telle façon que je ne désirois pas encore que tout le monde le pût entendre.

Premièrement donc à ces mots *et inventâ maximâ*, il est bon d'ajouter *vel aliâ quâlibet cujus ope possit postea maxima inveniri.* Car souvent, en cherchant ainsi la plus grande, on s'engage en beaucoup de calculs superflus.

Toutefois cela n'est pas un point essentiel; mais le principal et celui qui est le fondement de toute la règle est omis en l'endroit où sont ces mots : *Adæquentur duo homogenea maximæ aut minimæ æqualia*, lesquels ne signifient autre chose sinon que la somme qui explique *maximam in terminis sub A gradu ut libet involutis*, doit être supposée égale à celle qui l'explique *in terminis sub A et E gradibus ut libet coefficientibus.*

Et vous demanderez, s'il vous plaît, à ceux qui la soutiennent, si ce n'est pas ainsi qu'ils l'entendent, avant que de les avertir de ce qui doit y être ajouté : à savoir, au lieu de dire simplement *adæquentur*, il falloit dire : *adæquentur tali modo, ut quantitas per istam æquationem invenienda sit quidem una, cùm ad maximam aut minimam refertur, sed una emergens ex duabus quæ per eamdem æquationem possent inveniri essentque inæquales, si ad minorem maximâ vel ad majorem minimâ referrentur* (2).

6. Ainsi, en l'exemple que je viens de donner, ce n'est pas assez de chercher le quarré de la plus grande en deux façons; mais outre cela, il faut dire :

comme ce quarré, lorsqu'il est A in $C + Bq. + A$ in B bis,
est au même quarré, lorsqu'il est A in $C + E$ in $C + Bq. + A$ in B bis $+ E$ in B bis,
ainsi C in $A - Aq.$, qui est le quarré de BC,
est à C in $A + C$ in $E - Aq. - A$ in E bis $- Eq.$, qui est aussi le même quarré.

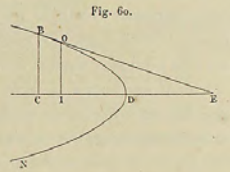
(1) *Lettres de Descartes*, éd. Clerselier, III, 57, page 306.
(2) Descartes essaye de ramener la méthode de Fermat à la sienne propre, c'est-à-dire à la recherche de la condition sous laquelle deux racines d'une équation deviennent égales.

Puis multipliant le premier de ces quarrés par le quatrième, on le doit supposer égal au second multiplié par le troisième, et après, en démêlant cette équation suivant la règle, on trouve son compte, à savoir que CD est $\frac{C \text{ in } B}{B \text{ bis} + C}$, comme il doit être.

7. Tout de même, en l'exemple de la parabole qui avoit été pris par M. F., et que j'avois suivi en mon premier Écrit (1), voici comme il faut opérer :

Soit BDN (*fig.* 60) la parabole donnée, dont DC est le diamètre, et que du point donné B il faille tirer la ligne droite BE, qui rencontre

Fig. 60.



DC au point E et qui soit la plus grande qu'on puisse tirer du même point E jusques à la parabole : — à savoir au dehors de cette parabole, comme ceux qui ne sont point sourds volontaires entendent assez, de ce que je la nomme la plus grande.

Je prends B pour BC et D pour DC, d'où il suit que le côté droit est $\frac{Bq.}{D}$, et sans m'arrêter à chercher la plus grande, je cherche seulement le quarré de BC en d'autres termes que ceux qui sont connus, en prenant A pour la ligne CE, et par après en prenant $A + E$ pour la même : à savoir, je la cherche premièrement par le triangle BCE, car

$$\text{comme } A \text{ est à } B, \quad \text{ainsi } A + E \text{ est à } \frac{A \text{ in } B + E \text{ in } B}{A},$$

qui par conséquent représente BC, et son quarré est

$$\frac{Aq. \text{ in } Bq. + A \text{ in } E \text{ in } Bq. \text{ bis} + Eq. \text{ in } Bq.}{Aq.};$$

(1) Lettre XXV.

puis je la cherche par la parabole, car, quand EC est $A + E$, DC est $D + E$, et le quarré de BC est

$$\frac{Bq.\text{ in }D + Bq.\text{ in }E}{D},$$

qui doit être égal au précédent, à savoir

$$\frac{A\text{ in }E\text{ in }Bq.\text{ bis} + Eq.\text{ in }Bq.}{Aq.}\text{ égal à }\frac{Bq.\text{ in }E}{D}.$$

D'où l'on trouve, en suivant la règle, que A, c'est-à-dire CE, est double de D, c'est-à-dire CD, comme elle doit être.

Or il est à remarquer que cette condition qui étoit omise, est la même que j'ai expliquée (1) en la page 346, comme le fondement de la méthode dont je me suis servi pour trouver les tangentes, et qu'elle est aussi tout le fondement sur lequel la règle de M. F. doit être appuyée; en sorte que, l'ayant omise, il fait paroître qu'il n'a trouvé sa règle qu'à tâtons, ou du moins qu'il n'en a pas conçu clairement les principes.

Et ce n'est point merveille qu'il l'ait pu former sans cela, car elle réussit en plusieurs cas, nonobstant qu'on ne pense point à observer cette condition, à savoir en ceux où l'on ne peut venir à l'équation qu'en l'observant, et la plupart sont de ce genre.

8. Pour ce qui est de l'autre article, où j'ai repris la façon dont se sert M. F. pour trouver la tangente de la parabole, vous dites qu'ils assurent tous qu'il faut prendre une propriété spécifique de l'hyperbole ou de l'ellipse pour en trouver les tangentes. En quoi nous sommes d'accord, car j'assure aussi la même chose et j'ai apporté expressément les exemples de l'ellipse et de l'hyperbole, qui concluent très mal, pour montrer que M. Fermat conclut mal aussi touchant la parabole dont il ne donne point de propriété spécifique.

Car de dire (2) qu'il y a plus grande proportion de CD à DI que du

(1) *Géométrie* de Descartes, éd. Hermann, pages 36 et 37.
(2) *Voir* Tome I, page 135, lignes 4 à 6.

quarré de BC au quarré de OI, ce n'est nullement une propriété spécifique de la parabole, vu qu'elle convient à toutes les ellipses et à une infinité d'autres lignes courbes, au moins lorsqu'on prend le point O entre les points B et E comme il a fait, et s'il l'eût pris au delà, elle eût convenu aux hyperboles. De façon que, pour la rendre spécifique, il ne falloit pas simplement dire *sumendo quodlibet punctum in recta* BE, mais il y falloit ajouter *sive sumatur illud intra puncta* B *et* E, *sive ultra punctum* B *in lineâ* EB *productâ*. Et cela ne peut être sous-entendu en son discours, à cause qu'il y décrit la ligne BE comme terminée des deux côtés, à savoir, d'un côté par le point B qui est donné, et de l'autre par la rencontre du diamètre CD.

Outre cela il falloit faire deux équations et montrer qu'on trouve la même chose en supposant EI être $A + E$, que lorsqu'on le suppose être $A - E$. Car sans cela le raisonnement de cette opération est imparfait et ne conclut rien.

9. Voilà sérieusement la vérité de cette affaire. Au reste, pour ce que vous ajoutez, que ces Messieurs qui ont pris connoissance de notre entretien ont envie de nous rendre amis, M. Fermat et moi, vous les assurerez, s'il vous plaît, qu'il n'y a personne au monde qui recherche ni qui chérisse l'amitié des honnêtes gens plus que je fais, et que je ne crois pas qu'il me puisse savoir mauvais gré de ce que j'ai dit franchement mon opinion de son Écrit, vu qu'il m'y avoit provoqué. C'est un exercice entièrement contraire à mon humeur que de reprendre les autres, et je ne sache point l'avoir encore jamais tant pratiqué qu'en cette occasion; mais je ne la pouvois éviter après son défi, sinon en le méprisant, ce qui l'eût sans doute plus offensé que ma réponse.

Je suis, mon Révérend Père,

Votre très humble et très affectionné serviteur,

DESCARTES.

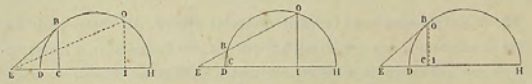
Du 3 mai 1638.

XXVIII.

BILLET AJOUTÉ A LA LETTRE PRÉCÉDENTE (1).

Pour entendre parfaitement la troisième (2) page de ma lettre, et par même moyen le défaut de la règle de M. de Fermat, il faut considérer ces trois figures (*fig.* 63) et penser que lorsqu'il dit : *Statuatur idem qui prius terminus esse* $A + E$, cela signifie qu'ayant posé EC pour A et EI pour $A + E$, il imagine EI être égal à EC, comme on le voit en la troisième figure, et que néanmoins il en fait le calcul tout de même que si elles étoient inégales, comme on le voit en la première et seconde figure, en cherchant premièrement EB par EC qu'il nomme A, puis EO par EI qu'il nomme $A + E$.

Fig. 63.



Et cela va fort bien, mais la faute est en ce qu'après les avoir ainsi calculées, il dit simplement : *Adæquentur*. Et on la peut voir clairement par la première figure où si l'on suppose la ligne EO (3) être égale à EB, il n'y a rien qui détermine les deux points B et O à s'assembler en un endroit de la circonférence du cercle plutôt qu'en l'autre, sinon que toute cette circonférence ne fût qu'un seul point, d'où vient que toutes les quantités qui demeurent en l'équation se trouvent égales à rien.

Mais pour faire que ces deux points B et O ne se puissent assembler

(1) L'original de la Lettre précédente a fait partie de la collection des autographes de Descartes anciennement conservée à l'Académie des Sciences et volée par Libri. Celui du fragment que nous cotons XXVIII n'y figurait pas; il n'est donc connu que par Clerselier.

(2) *Voir* plus haut XXVII, 5.

(3) *Addition en marge* : « Notez que je suppose ici que c'est le point E qui est donné et non le point B. »

qu'en un seul endroit, à savoir en celui où EB est la plus grande qu'elle puisse être sous la condition proposée, il faut considérer la seconde figure et, à cause des deux triangles semblables ECB et EIO, il faut dire :

comme EC ou BC est à EB, ainsi EI ou OI est à EO;

au moyen de quoi on fait qu'à mesure que la quantité EB est supposée plus grande, la quantité EO est supposée plus petite, à cause que les points E, B, O sont toujours là en même ligne droite. Et ainsi lorsque EB est supposée égale à EO, elle est supposée la plus grande qu'elle puisse être : c'est pourquoi on y trouve son compte.

Et c'est là le fondement de la règle qui est omis. Mais je crois que ce seroit pécher de l'enseigner à ceux qui pensent savoir tout et qui auroient honte d'apprendre d'un ignorant comme je suis; vous en ferez toutefois ce qu'il vous plaira.

XXIX.

ROBERVAL A FERMAT.

MARDI 1er JUIN 1638.

(*Va*, p. 154-155.)

MONSIEUR,

1. Puisqu'il est vrai qu'il n'y a aucun contentement que je préfère à celui que je reçois de vos lettres, vous devez penser que les occupations qui m'ont empêché de vous écrire depuis si longtemps, doivent avoir été bien pressantes, ayant eu la force d'interrompre notre entretien qui m'est si cher et si agréable.

2. Or, pour recommencer, je vous dirai que, si j'ai entrepris la défense de votre Traité [*de minimis et maximis*] contre les objections de

M. Descartes (1), je m'y suis senti obligé ou plutôt nécessité par mon génie, qui ne peut souffrir que la vérité soit tant soit peu obscurcie, tant s'en faut qu'il endure qu'on la fasse passer pour ce qu'elle a de plus contraire, j'entends pour une fausseté accompagnée de paralogismes. C'est pourquoi j'ai grand besoin qu'au lieu de me remercier (2) comme vous faites, vous m'excusiez, tant pource qu'étant foible, j'ai osé entrer en lice contre un fort adversaire pour vous, que pource que je l'ai fait sans vous en avertir, vu que vous sembliez y avoir le principal intérêt. Mais, en effet, c'est l'intérêt de la vérité et de tous ceux qui la chérissent : c'est pourquoi j'en ai fait le mien propre, et elle m'a paru si claire qu'elle m'a fait passer par dessus les considérations de ma foiblesse, à laquelle j'ai pensé que son évidence pourroit suppléer assez suffisamment. J'espère que vous recevrez cette excuse et que vous me ferez l'honneur de croire que la connoissance que j'ai de votre mérite, m'a tellement acquis à vous, qu'elle m'a fait témoigner ce zèle, quoique mon insuffisance seule l'ait pu rendre en quelque sorte indiscret.

3. M. Descartes n'ayant pas encore reçu mon Écrit (3) le 3 mai, ce qui est pourtant bien tard, a fait quelques objections nouvelles de peu de conséquence. Vous les verrez dans sa Lettre (4) que le Père Mersenne vous pourra envoyer.

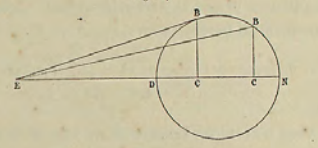
Il veut trouver la tangente d'un cercle, persistant toujours que c'est la plus grande, sinon qu'il y ajoute qu'elle n'est la plus grande que sous certaines conditions : en quoi il s'enferre lui-même, voulant réfuter votre Écrit (5), qui parle de la plus grande absolument, par l'exemple d'une qui n'est la plus grande que conditionairement.

Il est vrai que, voulant la trouver absolument ou la moindre, et, pour ce faire, nommant le diamètre ND (*fig.* 64) *C*, DE *B*, et DC ou

(1) *Voir* Lettre XXV.
(2) Dans une Lettre perdue.
(3) *Lettres de Descartes*, éd. Clerselier, III, 58.
(4) Lettre XXVII.
(5) *Methodus ad disquirendam maximam et minimam*, Tome I, p. 133 et suiv.

EC *A*, on tombe dans une absurdité que $C + B\,bis$ est égal à rien ; et, si le point E étoit dans le cercle, $C - B\,bis$ seroit égal à rien. Mais cette absurdité montre qu'il ne faut pas chercher le point B dans la circonférence autre part que dans la ligne DN, savoir au point N pour la

Fig. 64.

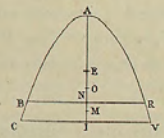


plus grande et au point D pour la moindre : en quoi il est remarquable que $C + B\,bis$ est la somme de la plus grande et de la moindre, et $C - B\,bis$ est leur différence.

Mandez-moi quel est votre sentiment, car, n'ayant pas encore le loisir de considérer bien particulièrement le fonds de votre méthode et sa démonstration, il se peut être qu'elle ne contienne des mystères qui me sont encore cachés.

4. J'ai trouvé admirable le moyen (1) par lequel vous l'appliquez aux paraboles et solides paraboliques pour en trouver les centres;

Fig. 65.



mais, le voulant éprouver en la vraie parabole, j'ai trouvé qu'il falloit changer votre raisonnement qui n'est que particulier au conoïde pa-

(1) *Centrum gravitatis parabolici conoidis*, tome I, p. 136 et suiv. *Voir* Lettre XXV *bis*, 4.

rabolique, car, ayant l'espèce de la ligne EO (*fig.* 65), vous pouvez bien dire :

comme la différence des quarrés IA et AN est au quarré de AN,
ainsi la ligne EO est à OM,

ce que vous ne pouvez pas en la parabole même (1), en laquelle, suivant ce raisonnement, il faudroit dire :

comme la différence des cubes de IA et AN est au cube de AN,
ainsi la différence des quarrés de EM et MO est au quarré de MO,

et cependant vous n'avez pas l'espèce ni de l'un ni de l'autre de ces quarrés.

Au lieu desquels j'ai dit ainsi :

il y a plus grande raison du cube IA au cube AN que du quarré EI au quarré OI,

ce qui réussit, et en la parabole cubique j'ai dit :

il y a plus grande raison du quarréquarré IA au quarréquarré AN
que du cube EI au cube OI,

etc.

Mais le raisonnement est autant ou plus beau et plus facile par les figures qui restent, ayant ôté le plan parabolique du parallélogramme qui le comprend.

J'ai promis à M. Mydorge de l'entretenir sur cette invention que je ne saurois assez admirer, et je m'assure que M. Pascal en fera ses exclamations ordinaires, si je puis la lui faire voir, comme j'espère (2), et à M. Desargues.

5. Il faut aussi que M. Descartes la voie, afin qu'il nous en fasse voir les paralogismes et, puisque vous avez trouvé les tangentes de sa

(1) Roberval n'avait pas compris toutes les ressources de la méthode de Fermat.

(2) Depuis quelque temps, Étienne Pascal avait attiré sur lui la colère de Richelieu et il se cachait, pour éviter une arrestation.

figure (1), qui est une espèce d'ovale, il sera bon que vous lui envoyez, ou nous, si vous le trouvez meilleur. Mais prenez garde que, par le même point donné, il peut y passer deux de ces ovales et partant y avoir deux tangentes, ce que j'espère que l'équation fera découvrir.

6. J'y travaillerois, mais je suis assuré que vous y réussirez mieux que moi, joint qu'il me faudroit être délivré de la roue à laquelle je suis attaché, ayant appelé du nom de *roue* le cercle qui roule avec les conditions que vous savez (2); et ayant donné un nom à la ligne courbe que décrit un point de la circonférence pendant une révolution entière, je démontre que l'espace compris de cette ligne courbe et de la droite qui lui sert de base, sur laquelle la roue se meut, est *majus dato quam in ratione*, c'est à savoir que, de cet espace en ayant ôté l'espace de la roue, il y aura même raison du reste à la même roue que de la base de l'espace à la moitié de la circonférence de la roue.

D'où il s'ensuit qu'en la roue ordinaire, de laquelle la base est estimée égale à la circonférence, l'espace dont il s'agit est triple de la roue; et si la base est double de la circonférence, l'espace sera quintuple de la roue; si triple, septuple : et ainsi en continuant par les nombres impairs.

De tout ceci je vous envoierai par le premier courrier une brève démonstration, en attendant le Traité entier.

Je suis etc.

(1) La courbe $x^3+y^3=axy$. — *Voir* Lettre XXV, 6, et ci-après, pièce XXXI, 3. — Il faut observer que, pour prendre à la lettre l'énoncé de Descartes et en l'absence de conventions précises sur l'interprétation des signes des coordonnées, Roberval devait rejeter les branches infinies de la courbe, comme ne faisant pas partie du lieu, et, au contraire, y ajouter dans chaque angle autre que celui des coordonnées positives, un *folium* symétrique de celui que forme la courbe dans ce dernier angle. La figure d'ensemble du lieu, figure admise au reste par Descartes lui-même, justifie dès lors le nom de *galand* (nœud de ruban), que lui donna Roberval (*voir*, ci-après, Lettre XXXV). Dans la phrase qui suit, ce dernier semble faire allusion au point double à l'origine.

(2) Conditions de génération des cycloïdes. — *Voir* Lettre XXV *bis*, 7.

XXX.

FERMAT A MERSENNE (1).

< JUIN 1638 >

(A, f° 27, B, f° 26.)

MON RÉVÉREND PÈRE,

1. J'avois déjà fait un mot d'écrit pour m'expliquer plus clairement à M. Descartes, sur le sujet de ma méthode *de maximis et minimis et de inventione tangentium*, lorsque votre dernière m'a été rendue, qui contient copie de la réplique (2) de M. Descartes. Je ne reste pas de lui envoyer ce que j'avois déjà fait (3), où il trouvera sans doute de quoi se désabuser de la croyance qu'il semble avoir, que j'ai trouvé cette méthode par hasard et que je n'en connois pas les vrais principes.

2. Il a déjà franchi qu'elle est bonne pour les tangentes, en se servant d'une propriété spécifique des lignes courbes, ce qu'il dit < ne > pouvoir être sous-entendu en mon écrit latin; en effet, je n'aurois ni sens commun, ni logique naturelle, si je croyois d'une propriété générale en tirer des particulières. La méthode donc est bonne, au sens auquel je l'emploie pour les tangentes.

Et n'importe de dire qu'il faut faire deux opérations, l'une par A+E, l'autre par A — E, car une seule suffit pour la construction, quoique la démonstration que je n'ai pas encore donnée, tire son principal fondement de ce que A + E fait la même chose que A — E.

(1) Lettre inédite, envoyée à Mersenne avec la Pièce suivante XXXI. Mersenne adressa le tout à Descartes le 20 juillet 1638. D'autre part, cette Lettre XXX fut écrite sur le vu de celle de Descartes à Mersenne, du 3 mai (*ci-avant* XXVII), que le Minime n'adressa à Fermat qu'après le 1er juin (*voir* Lettre XXIX, 3). Les deux Pièces XXX et XXXI sont donc de la fin de juin ou du commencement de juillet 1638.

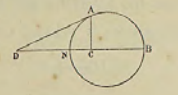
(2) Lettre XXVII.

(3) La Pièce XXXI.

3. Reste de dire un mot de la méthode sur le sujet de l'invention *maximæ et minimæ*, laquelle il prétend être fautive et en allègue l'exemple suivant :

Du point D (*fig.* 66) il faut tirer DA sur le cercle, en telle sorte qu'elle soit la plus grande qui, du point D, puisse être menée au dit

Fig. 66.



cercle sans le franchir (ce qui, en effet, ne veut dire autre chose que chercher la tangente AD).

Si nous prenons CN pour *A*, et DA pour la plus grande, selon la méthode, nous trouverons une équation impossible, d'où il conclut que la méthode est insuffisante.

Je réponds que je n'ai garde de prendre DA pour la plus grande (bien que la limitation de M. Descartes semble lui pouvoir donner ce nom), d'autant que la méthode, n'agissant que par la propriété spécifique du cercle, en trouve toujours de plus grandes qui peuvent être tirées au dit cercle jusques au point B. Mais la méthode satisfait d'ailleurs à cette question, qui y peut très facilement être réduite, comme M. Descartes a reconnu, et voici comment :

Puisque DA touche le cercle, DA est à AC, perpendiculaire, en moindre proportion qu'aucune autre ligne tirée du point D au cercle, de l'un et de l'autre côté du point A, n'est à la perpendiculaire tirée, du point auquel elle concourt avec le cercle, sur le diamètre; ce qui paroit d'abord.

Cherchons donc par la méthode un point au cercle, comme A, en sorte que DA *ad* AC *habeat minimam proportionem; dabitur punctum* A, *ideoque tangens*.

Voilà la raison de l'opération de M. Descartes, qu'il n'a pas dite,

laquelle confirme la règle tout à fait. Bien loin d'y remarquer des défauts, je crois qu'il y trouvera plus de facilité qu'à la sienne (1)....

XXXI.

MÉTHODE DE MAXIMIS ET MINIMIS

EXPLIQUÉE ET ENVOYÉE PAR M. FERMAT A M. DESCARTES (2).

(A, f^os 62 à 67.)

1. La méthode générale pour trouver les tangentes des lignes courbes mérite d'être expliquée plus clairement qu'elle ne semble l'avoir été.

Soit la courbe donnée ZCA (*fig.* 67), de laquelle le diamètre soit CB. Soit encore donné dans la courbe le point A, duquel soit menée l'appliquée AB sur le diamètre. Il faut chercher la tangente AD, de laquelle le concours avec le diamètre prolongé se fait au point D.

Les lignes AB et BC sont données; supposons que BA s'appelle *B*, et que BC s'appelle *D*. Supposons que la ligne BD, que nous cherchons, s'appelle *A*. Prenons à discrétion un point, tel que E, sur la tangente, duquel soit tirée EF parallèle à AB, et supposons que la ligne BF soit *E*.

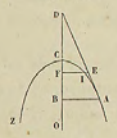
(1) La Lettre est évidemment incomplète. D'après la réponse de Descartes à Mersenne, en date du 27 juillet 1638 (*Lettres de Descartes*, éd. Clerselier, III, 66, p. 374-375), Fermat y aurait répondu à la question V de Sainte-Croix (*voir* p. 64, note), c'est-à-dire donné le nombre 1 476 304 896, comme quatrième connu dont le double soit égal à la somme de ses parties aliquotes. Descartes ajoute :

« ... il met un peu devant, touchant la quatrième question de M. de Sainte-Croix (*voir* p. 29, note 2), que j'aurai peut-être fait la même équivoque, qui lui arriva la première fois qu'elle lui fut proposée, et que j'aurai cru qu'il suffisoit que les nombres cherchés ne fussent ni quarrés, ni composés de deux quarrés, bien qu'ils fussent composés de quatre, ce qui n'est pas pourtant selon le sens de l'auteur etc. »

(2) Pièce jointe à la précédente (*voir* page 152, note 1). — Elle a été publiée par M. Charles Henry dans ses *Recherches sur les manuscrits de Pierre de Fermat* (pages 184 à 189), d'après le brouillon d'Arbogast. Celui-ci ne l'a connue que par une copie de Mersenne, aujourd'hui perdue.

Donc CF sera $D - E$, FE sera $\frac{B \text{ in } A - B \text{ in } E}{A}$, et, de quelque nature que soit la courbe, nous donnerons toujours les mêmes noms aux lignes CF et FE que nous venons de leur donner.

Fig. 67.



Cela étant fait, il est certain que le point E de la ligne EF, étant dans la tangente, sera hors de la courbe, et, par conséquent, la ligne EF sera plus grande ou plus petite que l'appliquée qui s'appuie à la courbe du point F : — plus grande, lorsque la courbe est convexe en dehors, comme en cet exemple, et plus petite, lorsque la courbe est convexe en dedans; car la règle satisfait à toutes sortes de lignes et détermine même, par la propriété de la courbe, de quel côté elle est convexe. — Quoique la ligne FE soit inégale à l'appliquée tirée du point F à la courbe, je la considère néanmoins comme si en effet elle étoit égale à l'appliquée, et en suite la compare par *adéquation* avec la ligne FI, suivant la propriété spécifique de la courbe.

2. Comme, en la parabole, par exemple, je fais

comme BC à CF, ainsi BA quarré à FE quarré,

ou bien, pour éviter les fractions et la diversité des lignes,

comme BC à CF, ainsi BD quarré à DF quarré;

car c'est toujours la même chose, à cause des deux triangles semblables DBA, DFE.

Ou bien encore je pourrois comparer le quarré FE avec le rectangle compris sous le côté droit et la ligne CF, comme si ce quarré étoit égal à ce rectangle, quoique en effet il ne le soit pas, puisque ce sont seule-

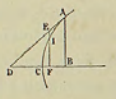
ment les appliquées à la courbe qui ont la propriété que nous donnons par *adéquation* à la ligne FE.

Cela étant fait, j'ôte les choses communes et divise le reste par E. J'efface tout ce qui reste mêlé avec E et égalise le surplus, de sorte que, par cette dernière équation, je connois la valeur de A et par conséquent la ligne BD et la tangente.

3. Et pour faire voir que la méthode est générale, et qu'elle satisfait avec pareille facilité à toutes sortes de questions, nous la pouvons appliquer, pour servir d'un second exemple, à la ligne courbe proposée par M. Descartes (1).

Soit la courbe CA (fig. 68), *de laquelle la propriété est telle que, quelque point qu'on prenne sur la dite courbe, comme* A, *tirant la perpendicu-*

Fig. 68.



laire AB, *les deux cubes* CB *et* BA *soient égaux au parallélépipède compris sous une ligne droite donnée, comme N, et sous les deux lignes* CB *et* BA.

Supposons que la chose soit déjà faite, et une construction pareille à la précédente, avec les noms des lignes BD, BC, BA, CF, FE. Il faudra comparer, par *adéquation*, les deux cubes CF, FE avec le solide compris sous N, FC, FE.

Les deux cubes de CF, FE sont en notes

$$Dcub. - Ecub. - Dq.\text{ in }E.3 + D\text{ in }Eq.3 + \frac{Bcub.\text{ in }Acub. - Bcub.\text{ in }Ecub. - Bcub.\text{ in }Aq.\text{ in }E.3 + Bcub.\text{ in }A\text{ in }Eq.3}{Acub.};$$

(1) *Voir* Lettre XXV, 6.

le solide de N, CF, FE, en notes, est

$$\frac{N\text{ in }D\text{ in }B\text{ in }A - N\text{ in }D\text{ in }B\text{ in }E - N\text{ in }B\text{ in }A\text{ in }E + N\text{ in }B\text{ in }Eq.}{A}.$$

Multipliant tout par $Acub.$, il faut comparer

$$Dc.\text{ in }Ac. - Ec.\text{ in }Ac. - Dq.\text{ in }E\text{ in }Ac.3 + D\text{ in }Eq.\text{ in }Ac.3 + Bc.\text{ in }Ac. - Bc.\text{ in }Ec. - Bc.\text{ in }Aq.\text{ in }E.3 + Bc.\text{ in }Aq.\text{ in }Eq.3$$

avec

$$N\text{ in }D\text{ in }B\text{ in }Ac. - N\text{ in }D\text{ in }B\text{ in }E\text{ in }Aq. - N\text{ in }B\text{ in }E\text{ in }Ac. + N\text{ in }B\text{ in }Eq.\text{ in }Aq.$$

Otons les choses communes, savoir, du premier terme,

$$Dc.\text{ in }Ac. + Bc.\text{ in }Ac.,$$

et du second,

$$N\text{ in }D\text{ in }B\text{ in }Ac.,$$

qui sont égaux par la propriété de la ligne; — puisque les deux cubes $Dc.$ et $Bc.$, répondant aux cubes des deux lignes BC et BA, sont égaux au solide N in D in B, qui répond à celui de la ligne donnée et des deux lignes BC et BA. — Divisons le reste par E et ôtons ensuite tout ce qui se trouvera mêlé avec E; restera enfin

$$Dq.\text{ in }A\text{ ter} + B\,cub.\text{ ter}\quad\text{égal à}\quad N\text{ in }D\text{ in }B + N\text{ in }B\text{ in }A,$$

et ainsi nous aurons

$$\frac{N\text{ in }D\text{ in }B = B\,cub.\text{ ter}}{Dq.\text{ ter} = N\text{ in }B}\quad\text{égal à}\quad A,$$

ce qu'il falloit chercher.

Nous avons mis, suivant la méthode de Viète (1), deux lignes = pour la marque du défaut, parce qu'il n'appert point, s'il n'a été dit d'ail-

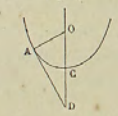
(1) *Viète*, In Artem analyticen Isagoge, cap. IV, præc. II (éd. Schooten, Leyde, Elzevirs, 1646, page 5) :

« Cum autem non proponitur utra magnitudo sit major vel minor, et tamen subductio » facienda est, nota differentiæ est = id est, minus incerto : ut propositis A quadrato et » B plano, differentia erit A quadratum = B plano, vel B planum = A quadrato. »

leurs, quelle est la proportion des deux lignes *B* et *D*, ou bien BA et BC, données. Car il peut arriver que quelquefois, suivant la diversité des proportions de *B* et de *D*, la ligne courbe sera convexe et d'autres fois concave; quelquefois encore que la tangente sera parallèle au diamètre BC; quelquefois enfin que le concours avec le diamètre se fera de l'autre côté, ce qui se détermine aisément par la méthode même, lorsqu'on nous donne la proportion des deux lignes données BA et BC, comme il est très aisé de voir et de faire comprendre. Lorsque je parle de la proportion des deux lignes données, j'entends leurs valeurs, *en nombres ou sourds ou rationaux;* car autrement on sait assez que, deux lignes étant données, leur proportion est aussi donnée.

4. Il paraît donc que ou je me suis mal expliqué ou que M. Descartes a mal compris mon Écrit latin (1); s'il veut que ce soit le premier, je ne le lui contesterai guère. Il s'est aussi trompé en ce qu'il a cru que, pour appliquer la méthode *de maximis et minimis* à l'invention des tangentes, il falloit chercher une ligne, comme AD (*fig.* 69), menée,

Fig. 69.



du point A donné, sur le diamètre, en telle sorte que AD soit la plus grande qui puisse être tirée du point D à la courbe. M. de Roberval (2) lui a déjà fait voir la raison de son mécompte, duquel il a voulu tirer cette conséquence, que la méthode *de maximis et minimis* étoit fautive et avoit besoin d'être corrigée, en quoi il s'est aussi bien trompé qu'au reste.

5. Mais pour lui marquer de quelle façon la méthode *de maximis et minimis* peut être appliquée à l'invention des tangentes, la voici :

(1) *Methodus ad disquirendam maximam et minimam*, Tome I, page 133.
(2) *Lettres de Descartes*, éd. Clerselier, III, 58.

Le point A étant donné, il faut avoir recours, non pas *ad maximam*, puisqu'on ne trouveroit que l'infini, mais *ad minimam*. Cherchons donc le point O dans le diamètre, de telle façon que la ligne OA soit la plus courte qui puisse être tirée du point O à la courbe. Le point O étant trouvé par la méthode, joignez les deux points O et A par la ligne OA, et tirez la ligne AD perpendiculaire sur OA. Je dis que la ligne AD touchera la courbe, <ce> dont la démonstration est aisée.

Car si AD ne touchoit pas la courbe, une autre droite la toucheroit au point A, laquelle fera son concours au dessus ou au dessous de D, et tous ses points seront hors de la courbe, et elle fera des angles inégaux avec OA au point A. Si donc, sur cette touchante supposée, du point O l'on tire une perpendiculaire, elle ne rencontrera pas la touchante au point A, mais au dessus ou au dessous, et elle coupera la courbe plus tôt que d'arriver à la touchante. Donc la partie de cette perpendiculaire comprise entre le point O et la courbe sera plus courte que la perpendiculaire, et la perpendiculaire étant plus courte que OA, à cause de l'angle droit, il s'ensuivra que la ligne comprise entre la courbe et le point O, faisant partie de la perpendiculaire, sera plus courte que OA, laquelle pourtant nous supposons la plus courte de toutes celles qui du point O peuvent être menées à la courbe.

Que si la ligne CA (*fig.* 70) est convexe en dehors, soit la tan-

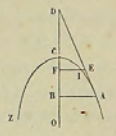
Fig. 70.

gente DA sur laquelle soit tirée la perpendiculaire AO. Il paroît par la construction que AO est la plus courte de toutes celles qui du point O sont menées à la courbe, de sorte qu'en cherchant le point O, le point A étant donné, on trouve aisément la tangente.

6. Il reste donc de chercher le point O par la méthode.

Soit par exemple la parabole donnée CIA (fig. 67) *sur laquelle le point* A *soit donné. Je veux chercher le point* O, *en sorte que* OA *soit la plus courte de toutes celles qui du point* O *peuvent être menées à la parabole.*

Fig. 67.



BC, comme ci-devant, s'appellera D, et BA s'appellera B, le côté droit de la figure, Z, donné, puisque la parabole est donnée. Supposons que OB soit A. Donc le quarré OA en notes sera $Aq. + Bq.$

Prenons maintenant, au lieu de la ligne A ou OB, OF ou $A + E$. Si du point F nous menons l'appliquée FI, son quarré sera en notes

$$Z \text{ in } D - Z \text{ in } E,$$

lequel, ajouté au quarré de OF, fera

$$Aq. + Eq. + A \text{ in } E \text{ bis} + Z \text{ in } D - Z \text{ in } E,$$

et cette somme fera le quarré de OI, lequel doit être plus grand que celui de OA, puisque son côté est supposé plus grand que OA. Comparons donc en notes, par adéquation, les quarrés OI et OA.

Nous aurons d'un côté

$$Aq. + Bq.,$$

et de l'autre

$$Aq. + Eq. + A \text{ in } E \text{ bis} + Z \text{ in } D - Z \text{ in } E.$$

Otons les choses communes; la comparaison restera entre

$$Eq. + A \text{ in } E \text{ bis}$$

d'un côté, et

$$Z \text{ in } E$$

de l'autre; car $Bq.$ est égal, par la propriété de la parabole, à Z in D.

Divisons le tout par E, et du reste ôtons le même E :

$$A \text{ bis sera égal à } Z,$$

et partant A ou OB sera égal à la moitié du côté droit de la parabole, et la tangente est trouvée.

7. C'est ainsi que j'appliquois ma méthode pour trouver les tangentes, mais je reconnus qu'elle avoit son manquement, à cause que la ligne OI ou son quarré sont d'ordinaire malaisés à trouver par cette voie; la raison est prise des asymmétries qui s'y rencontrent aux questions tant soit peu difficiles, et qu'on ne peut éviter, puisque, sur $D - E$ en notes, il faut donner un nom à FI aussi en notes, ce qui est souvent très malaisé.

La méthode de M. Descartes n'ôte pas non plus tous les inconvénients, car obligeant à mettre $\sqrt{ss - vv + 2vy - yy}$ au lieu de x, et le quarré de cette somme au lieu de xx, et son cube au lieu de x^3, et ainsi des autres, — c'est ainsi qu'il parle (1) page 342, — si on lui propose de trouver la tangente à une courbe, en sorte que, faisant en sa figure MA égal à y et CM à x, on ait l'équation suivante qui explique le rapport qui est entre x et y,

$$by^9 + b^2y^7 + b^3y^5 + b^4y^3 + b^5y \propto x^{10} - dx^9 - d^2x^7 - d^3x^5 - d^4x^3 - d^5x,$$

il me semble qu'il lui sera très malaisé de se desembarrasser des asymmétries qui se rencontrent en cette question et autres semblables et plus difficiles encore, si on veut, à l'infini; ce que je serai bien aise qu'il prenne la peine d'essayer.

8. Puisque donc ces deux méthodes paroissent insuffisantes, il en falloit trouver une qui levât toutes ces difficultés.

Il me semble avec raison que c'est la première que j'ai proposée, car CF restant toujours $D - E$, et FE, $\frac{B \text{ in } A - B \text{ in } E}{A}$, je ne vois rien qui

(1) *Géométrie de Descartes*, éd. Hermann. Paris, 1886, page 33, au bas. — Dans la figure, A est le sommet d'une courbe, AM l'abscisse, MC l'ordonnée courante; Fermat note d'ailleurs exactement les coordonnées comme l'avait fait Descartes.

empêche qu'on ne puisse le comparer, en prenant, si vous voulez, $D - E$ pour y et $\frac{B \text{ in } A - B \text{ in } E}{A}$ pour x, sans rencontrer jamais une seule asymmétrie, en quoi consiste la facilité et la perfection de cette méthode.

9. On pourroit ensuite chercher la converse de cette proposition et, la propriété de la tangente étant donnée, chercher la courbe à qui cette propriété doit convenir : à laquelle question aboutissent celles des verres brûlants proposées par M. Descartes. Mais cela mérite un discours à part et, s'il l'agrée, nous en conférerons quand il lui plaira. Je desire seulement qu'il sache que nos questions *de maximis et minimis* et *de tangentibus linearum curvarum* sont parfaites depuis huit ou dix ans et que plusieurs personnes qui les ont vues depuis cinq ou six ans le peuvent témoigner.

S'il desire voir l'application (1) que je fais de cette même méthode pour trouver les centres de gravité des espaces compris des lignes courbes et de leurs solides, je la lui ferai voir et lui proposerai cependant, s'il l'agrée, de *trouver le centre de gravité du conoïde qui se fait lorsque la demie parabole* CBA *est tournée sur son appliquée* BA, *et celui aussi de toutes ses portions, comme aussi la proportion qu'elles ont aux cônes de même base et de même hauteur* (2).

(1) *Centrum parabolici conoidis*, Tome I, p. 136.
(2) *Voir* Lettres IX, 7; XIII, 6; XV, 5.

XXXII.

DESCARTES A FERMAT (1).

MARDI 27 JUILLET 1638.

(D. III, 63.)

MONSIEUR,

Je n'ai pas eu moins de joie de recevoir la Lettre (2) par laquelle vous me faites la faveur de me promettre votre amitié, que si elle me venoit de la part d'une maîtresse dont j'aurois passionnément desiré les bonnes grâces : et vos autres écrits qui ont précédé me font souvenir de la Bradamante de nos poëtes (3), laquelle ne vouloit recevoir personne pour serviteur qui ne se fût auparavant éprouvé contre elle au combat.

Ce n'est pas toutefois que je prétende me comparer à ce Roger qui étoit seul au monde capable de lui résister; mais, tel que je suis, je vous assure que j'honore extrêmement votre mérite. Et voyant la dernière façon (4) dont vous usez pour trouver les tangentes des lignes courbes, je n'ai autre chose à y répondre, sinon qu'elle est très bonne et que, si vous l'eussiez expliquée au commencement en cette façon, je n'y eusse point du tout contredit.

Ce n'est pas qu'on ne pût proposer divers cas qui obligeroient à chercher derechef d'autres biais pour les démêler, mais je ne doute point que vous ne les trouvassiez aussi bien que celui-là.

Il est vrai que je ne vois pas encore pour quelle raison vous voulez

(1) Lettre adressée par l'intermédiaire de Mersenne, en même temps que celle de Descartes au Minime de la même date (Clerselier, III, 66), dont l'original (Bibl. Nat. fr. n. a. 5160, f° 15 V°) porte en marge ces mots :
« Je vous enuoye ma lettre pour M. de Fermat toute ouuerte, mais vous la fermerez s'il vous plaist auant que de lui enuoyer pour la bienseance. »
(2) Lettre perdue.
(3) Expression quelque peu singulière, puisque Bradamante et Roger appartiennent à l'*Orlando inamorato* de Berni et à l'*Orlando furioso* de l'Arioste.
(4) *Voir* Pièce XXXI.

que votre première règle, pour chercher les plus grandes et les moindres, se puisse appliquer à l'invention de la tangente, en considérant la ligne qui la coupe à angles droits comme la plus courte, plutôt qu'en considérant cette tangente comme la plus grande, sous les conditions qui la rendent telle.

Car, pendant qu'on ne dit point la cause pourquoi elle réussit en l'une de ces façons plutôt qu'en l'autre, il ne sert de rien de dire que cela arrive, sinon pour faire inférer de là que, même lorsqu'elle réussit, elle est incertaine. Et, en effet, il est impossible de comprendre tous les cas qui peuvent être proposés dans les termes d'une seule règle, si on ne se réserve la liberté d'y changer quelque chose aux occasions, ainsi que j'ai fait en ce que j'en ai écrit, où je ne me suis assujetti aux termes d'aucune règle, mais j'ai seulement expliqué le fondement de mon procédé et en ai donné quelques exemples, afin que chacun l'appliquât après, selon son adresse, aux divers cas qui se présenteroient.

Cependant je m'écarte ici, sans y penser, du dessein de cette Lettre, lequel n'est autre que de vous rendre grâces très humbles de l'offre qu'il vous a plu me faire de votre amitié, laquelle je tâcherai de mériter, en recherchant les occasions de vous témoigner que je suis passionnément, etc.

XXXIII.

FERMAT A MERSENNE.

MARDI 10 AOUT 1638.

(A, f^os 21-22, B, f^o 24 v^o.)

Mon Révérend Père,

1. Je ne vous écris à ce coup que pour vous remercier très humblement de la peine que vous prenez à me faire part des curiosités qui tombent en vos mains.

Je vous renvoie votre Écrit Harmonique (1), duquel je vous dirai une autre fois pleinement mes sentiments.

Maintenant je me trouve sur le point d'aller à la campagne, pour une commission de ma charge, d'où je n'aurai nulle commodité pour vous écrire, de quoi je vous demande pardon par avance, vous conjurant de ne rester pas pour cela de m'écrire par tous les courriers; car j'ai baillé ordre pour faire que vos lettres me soient rendues, lesquelles vous mettrez au bureau en la forme ordinaire.

2. J'attends surtout avec impatience de voir rétracter M. Descartes du jugement qu'il avoit fait de ma méthode, et de l'impossibilité qu'il s'étoit figuré qu'elle avoit, pour résoudre la question de sa figure, de laquelle, sans doute, il a maintenant vu les tangentes (2).

3. Vous direz, s'il vous plaît, à M. de Roberval, que j'ai trouvé celle (3) qui lui manquoit pour les connoître toutes, et que je satisferai à ses autres questions à mon retour.

4. Pour les nombres des parties aliquotes (4), si j'ai loisir, je mettrai par écrit ma méthode analytique sur ce sujet et vous en ferai part. Je trouve que M. Frenicle se tient fort caché et ne veut pas découvrir son artifice. Je n'en fais pas de même, car vous savez assez avec quelle liberté j'étale toutes mes pensées.

(1) Les Lettres qui suivent ne renferment rien au sujet de cet Écrit Harmonique, qui devait être, non pas de Mersenne, mais d'un de ses correspondants, peut-être Bannius, de Harlem (*Lettres de Descartes*, éd. Clerselier, III, 68, p. 393), peut-être Gandais (*ibid.*, II, 97, p. 438).

(2) *Voir* Pièce XXXI, 3. — Fermat n'a pas encore reçu la lettre de Descartes, XXXII.

(3) *Voir* Lettre XXXV, 2.

(4) *Voir* page 154, note 1. — Dès le 1^er mai 1638 (*Lettres de Descartes*, éd. Clerselier, III, 68, p. 392), Mersenne avait demandé à Descartes une règle pour trouver des nombres ayant un rapport donné avec la somme de leurs parties aliquotes. Le 13 juillet (*ibid.*, II, 89, p. 388), Descartes avait envoyé au Minime sept nombres satisfaisant à cette condition pour les rapports $\frac{1}{3}$ ou $\frac{1}{4}$. Frenicle fit faire à ce sujet une Communication à Descartes (*ibid.*, II, 92, Lettre de Descartes à Mersenne du 15 novembre 1638, p. 408-409), et lui adressa ensuite directement une Lettre, à laquelle Descartes répondit (*ibid.*, II, 95).

5. Je lirai le Galilei (1) en mon voyage, à quoi je n'ai pu encore vaquer, à cause des occupations de la fin du Parlement. Souvenez-vous de m'écrire, bien que vous ne receviez pas de mes lettres, et croyez-moi, mon Révérend Père,

Votre très humble serviteur,

FERMAT.

A Toulouse, ce 10 août 1638.

< *P.-S.* > 6. En relisant une de vos Lettres, j'ai trouvé que vous me demandiez ma pensée sur la question 25 des *Méchaniques* d'Aristote (2). Si vous cherchez parmi vos papiers, vous trouverez que je vous l'ai envoyée, il y a longtemps, tout au long.

7. Pour les centres de gravité, il y a plus de deux ans que je les ai envoyés à M. de Roberval, des figures mêmes auxquelles M. Descartes (3) dit les avoir trouvés et desquelles on peut dériver tous les autres.

Car celui de la parabole quarrée, qui est l'ordinaire, divise l'axe en deux parties qui sont

comme 3 à 2;

la cubique,

comme 4 à 3;

(1) Les *Discorsi* imprimés à Leyde en 1638. *Voir* page 112, note 1.

(2) « On demande pourquoi deux cercles, l'un plus grand, l'autre plus petit, placés » concentriquement, parcourent des longueurs égales lorsqu'on les fait rouler ensemble, » tandis que les longueurs parcourues par les cercles roulant isolément sont dans le rap- » port de grandeur (des diamètres) des deux cercles; pourquoi, d'autre part, quand ils » sont adaptés concentriquement, la longueur parcourue dans le roulement est égale » tantôt à celle que parcourrait le petit cercle roulant seul, tantôt à celle que parcourrait » le grand cercle. »

Dans les explications qu'il donne à ce sujet, Aristote admet que la longueur parcourue par un cercle qui roule est, après un tour complet, égale à la circonférence de ce cercle; mais il n'arrive pas à définir cinétiquement le glissement, et fait intervenir des considérations dynamiques qui sont en réalité étrangères à la question.

(3) *Lettres de Descartes*, éd. Clerselier, II, 89, Lettre à Mersenne du 13 juillet 1638, pages 386-387. — Fermat avait énoncé la règle générale, pour trouver le centre de gravité d'une aire de parabole de degré quelconque, dans sa Lettre à Roberval du 4 novembre 1636 (*voir* XV, 5).

la quarréquarrée,

comme 5 à 4;

la sursolide,

comme 6 à 5,

et ainsi à l'infini.

Et ce que vous trouverez de plus merveilleux, c'est que ces questions se trouvent par ma méthode *de maximis et minimis* (1), comme M. de Roberval vous fera voir, et à M. Descartes.

XXXIV.

DESCARTES A FERMAT (2).

< LUNDI 11 OCTOBRE 1638 >

(D, III, 64).

MONSIEUR,

1. Je sais bien que mon approbation n'est point nécessaire pour vous faire juger quelle opinion vous devez avoir de vous-même, mais si elle y peut contribuer quelque chose, ainsi que vous me faites l'honneur de m'écrire (3), je pense être obligé de vous avouer ici franchement que je n'ai jamais connu personne qui m'ait fait paroître qu'il sût tant que vous en Géométrie.

2. La tangente de la ligne courbe que décrit le mouvement d'une roulette, qui est la dernière chose que le Révérend Père Mersenne a pris la peine de me communiquer de votre part, en est une preuve très assurée. Car, d'autant qu'elle semble dépendre du rapport qui est

(1) *Voir* l'Écrit *Centrum gravitatis parabolici conoidis*, Tome I, page 136.

(2) Dans une Lettre à Mersenne du 15 novembre 1638, Descartes (éd. Clerselier, II, 92, p. 406-407) dit lui avoir adressé une Lettre pour Fermat cinq semaines auparavant, dans un paquet qui devait arriver à Paris environ la mi-octobre. Il s'agit évidemment de celle-ci, qui a donc été mal datée du 25 septembre par l'annotateur anonyme de l'exemplaire de l'Institut.

(3) Dans une Lettre perdue.

entre une ligne droite et une circulaire, il n'est pas aisé d'y appliquer les règles qui servent aux autres, et M. de Roberval qui l'avoit proposée, qui est sans doute aussi l'un des premiers géomètres de notre siècle, confessoit ne la savoir pas et même ne connoître aucun moyen pour y parvenir (1).

Il est vrai que depuis il a dit aussi qu'il l'avoit trouvée, mais ç'a été justement le lendemain, après avoir su que vous et moi <la> lui envoyions, et une marque certaine qu'il se mécomptoit est qu'il disoit avoir trouvé en même temps que votre construction étoit fausse, lorsque la base de la courbe étoit plus ou moins grande que la circonférence du cercle : ce qu'il eût pu dire tout de même de la mienne, sinon qu'il ne l'avoit pas encore vue, car elle s'accorde entièrement avec la vôtre (2).

3. Au reste, Monsieur, je vous prie de croire que, si j'ai témoigné ci-devant n'approuver pas tout-à-fait certaines choses particulières qui venoient de vous, cela n'empêche point que la déclaration que je viens de faire ne soit très vraie. Mais comme on remarque plus soigneusement les petites pailles des diamans que les plus grandes taches des pierres communes, ainsi j'ai cru devoir regarder de plus près à ce qui venoit de votre part que s'il fût venu d'une personne moins estimée.

Et je ne craindrai pas de vous dire que cette même raison me console, lorsque je vois que de bons esprits s'étudient à reprendre les choses que j'ai écrites, en sorte qu'au lieu de leur en savoir mauvais gré, je pense être obligé de les en remercier. Ce qui peut, ce me semble, servir à vous assurer que c'est véritablement et sans fiction que je suis, etc.

(1) *Lettres de Descartes*, éd. Clerselier, III, 65, p. 350. — Dans cette Lettre à Mersenne, du 23 août 1638, Descartes donne, pour la tangente en un point donné d'une cycloïde ordinaire, allongée ou raccourcie, la construction fondée sur la considération du centre instantané de rotation.

(2) Cp. *Lettres de Descartes*, II, 91, p. 400-401. — La construction de Fermat, pour la tangente à la cycloïde, fut envoyée par Mersenne à Descartes le 11 septembre 1638. — *Voir*, pour cette construction, Tome I, p. 163.

XXXV.

FERMAT A MERSENNE.

VENDREDI 22 OCTOBRE 1638.

(A, f^os 39-44; B, f^os 10^vo-12^vo.)

..... 1. Je reprends le style géométrique après vous avoir parlé d'affaires (1).

Premièrement, je vous renvoie le sentiment de M. Descartes sur la Géostatique (2), et vous conjure de me faire part de tout ce que vous avez de lui.

2. Après cela, je satisferai à la question de la *tangente du galand parallèle à l'axe* (3), c'est-à-dire qui fasse un angle de 45 degrés avec la droite donnée par position.

Pour satisfaire à cette question, qui semble d'abord malaisée et qui l'a paru à M. de Roberval, car je n'ai pas encore vu la solution de M. Descartes (4), je me suis servi de la méthode de mon *Appendix ad locos* (5), de laquelle l'usage en plusieurs rencontres est miraculeux, pour éviter les asymmétries et cette longueur d'équations qui semblent ne devoir jamais prendre fin.

Soit donné le galand NSQR (*fig.* 71), la droite donnée par position DNOP, et la ligne Z donnée de grandeur.

La propriété du galand est que, quel point que vous preniez, comme

(1) Le commencement de cette Lettre inédite est perdu.

(2) La Lettre de Descartes à Mersenne (éd. Clerselier, I, 73) du 13 juillet 1638 : Examen de la question, savoir si un corps pèse plus ou moins, étant proche du centre de la terre, qu'en étant éloigné.

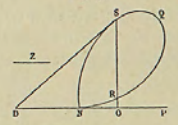
(3) *Voir* Lettre XXXIII, 3. — C'était Roberval qui avait posé cette question, après avoir donné le nom de *galand* (nœud de ruban) à la courbe proposée par Descartes et dont il avait étudié la forme.

(4) Cette solution se trouve dans la Lettre de Descartes à Mersenne du 23 août 1638 (éd. Clerselier, III, 65, p. 354-357). *Comparez* la Lettre du 15 novembre (Clerselier, II, 92; Cousin, VIII, p. 6).

(5) Tome I, page 103-110.

S ou R, le solide sous *Z in* NO *in* OS est égal aux deux cubes NO et OS; ou bien le solide sous *Z in* NO *in* OR est égal aux deux cubes NO et OR. Il faut trouver la tangente SD, par exemple du côté d'en haut, qui fasse l'angle SDO égal à la moitié d'un droit.

Fig. 71.



Soit fait. Par ma méthode des tangentes (1), si NO est appelée *D*, et OS, *B*, la ligne OD sera égale à

$$\frac{B\,cub.\ \text{bis} - D\,cub.}{Z\ \text{in}\ B - Dq.\ \text{ter}},$$

et si la tangente étoit du côté d'en bas, la ligne OD seroit égale à

$$\frac{D\,cub. - B\,cub.\ \text{bis}}{Dq.\ \text{ter} - Z\ \text{in}\ B}.$$

Mais nous n'avons besoin que de la première équation, puisque nous ne travaillons qu'au premier cas.

Supposons que NO, inconnue, s'appelle *A*, et que OS s'appelle *E*, nous aurons, pour la ligne OD,

$$\frac{E\,cub.\ \text{bis} - A\,cub.}{Z\ \text{in}\ E - Aq.\ \text{ter}}.$$

Or, puisque l'angle D est demi-droit et que l'angle O est droit, les lignes OD et OS seront égales; il faudra donc que

$$\frac{E\,cub.\ \text{bis} - A\,cub.}{Z\ \text{in}\ E - Aq.\ \text{ter}}\ \text{soit égal à}\ E,$$

et, par conséquent,

$$E\,cub.\ \text{bis} - A\,cub.\quad \text{sera égal à}\quad Z\ \text{in}\ Eq. - Aq.\ \text{in}\ E\ \text{ter}.$$

(1) *Voir* Pièce XXXI, 3.

Or, par la propriété de la ligne,

$$A\,cub.\quad \text{est égal à}\quad Z\ \text{in}\ A\ \text{in}\ E - E\,cub.$$

Nous aurons donc (1)

$$E\,cub. - Z\ \text{in}\ A\ \text{in}\ E\quad \text{égal à}\quad Z\ \text{in}\ Eq. - Aq.\ \text{in}\ E\ \text{ter}.$$

Divisons le tout par *E*, nous aurons

$$Eq. - Z\ \text{in}\ A\quad \text{égal à}\quad Z\ \text{in}\ E - Aq.\ \text{ter},$$

et enfin

$$Eq. - Z\ \text{in}\ E\quad \text{égal à}\quad Z\ \text{in}\ A - Aq.\ \text{ter}.$$

Et partant, nous avons un lieu elliptique, et le point S est *ad ellipsin positione datam; sed est etiam ad curvam positione datam. Ergo datur* par l'intersection de ces deux lieux et par ma méthode topique (2).

Par la même facilité on fera la résolution du second cas. Mais, pour rendre la proposition générale, vous pourrez, par la même méthode, faire l'angle D égal à tel angle que vous voudrez, ou bien, ce qui est la même chose, faire que la ligne DO soit à la ligne OS en proportion donnée.

En voilà, à mon avis, assez pour vous témoigner que je ne tiens pas caché ce que je sais.

3. Pour *la tangente de la roulette* (3), bien loin d'en faire un mystère, je vous veux faire comprendre qu'il n'y a point de question de cette matière qui puisse m'échapper. Vous saurez donc que cette même méthode dont je me sers pour les tangentes des lignes courbes, lorsque leurs appliquées ou les portions de leur diamètre ont relation à des

(1) Fermat commet ici une faute de calcul. Les premiers termes des équations suivantes devraient être *E cub.* ter; *Eq.* ter; *Eq.* ter. Le lieu est donc un cercle et non un ellipse.

(2) *Voir* plus loin 9, une seconde solution, également imparfaite. Fermat n'a pas reconnu, comme l'avait fait Descartes, que le problème particulier est plan; il n'avait, semble-t-il, cherché que des méthodes générales.

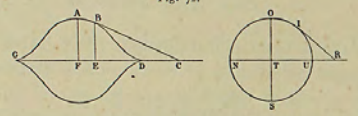
(3) *Voir* Lettre XXXIV, 2.

lignes droites, me sert aussi, avec un peu de changement pris de la nature de la chose, à trouver les tangentes des courbes dont les appliquées ou les portions de leur diamètre ont relation à d'autres courbes.

4. Je vous en ai déjà fait voir l'exemple en la roulette. En voici un autre *en l'ovale* (1) *de laquelle le sphéroïde est au cylindre circonscrit comme le double du diamètre à la circonférence du cercle*, laquelle j'envoyai dernièrement à M. de Roberval.

Soit l'ovale GABD (*fig.* 72) et l'axe GD autour duquel se décrit le

Fig. 72.



sphéroïde. Soit le cercle NOIS, coupé à angles droits par les deux diamètres OS et NU, duquel la circonférence soit double de l'axe GD, en sorte que le quart OU soit égal au demi-axe FD. Soit le point B en l'ovale, duquel il faut tirer la tangente.

Tirons la perpendiculaire BE et faisons la portion du quart OI égale à FE; tirons au cercle la tangente IR qui coupe le diamètre NU au point R. Faisons EC, en l'ovale, double de IR. La ligne BC touchera l'ovale.

5. En voici un autre exemple :

Soit la parabole EDAG (*fig.* 73), de laquelle l'axe AG et le sommet A. *Soit une autre courbe* ABF *de même axe et sommet, et que* BC, *appliquée, soit égale à la portion de parabole* DA, *et l'appliquée* FG *égale à la portion de parabole* EA, *etc., à l'infini.* Il faut trouver, au point B de cette nouvelle courbe, une tangente.

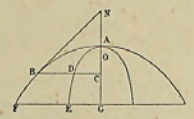
(1) Cette courbe, évidemment imaginée par Fermat, a pour équation rapportée aux axes FA, FD : $y = a\sqrt{\cos\frac{x}{b}}$, b étant le rayon du cercle auxiliaire NOIS.

Soit tirée l'appliquée BDC. Soit O le *focus* de la parabole. Faisons

comme OA + AC à AC, ainsi le quarré BC au quarré CN.

La ligne BN touchera la courbe FBA.

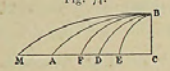
Fig. 73.



6. Voilà deux exemples aisés, lesquels vous pourrez proposer à soudre, si vous voulez, avant que de faire voir les solutions. Mais, pour le suivant, je le propose à M. de Roberval et encore, si j'osois, à M. Descartes :

Soient autant de courbes que l'on voudra de même sommet B (fig. 74), *comme* BE, BD, BF, BA, *données par position, et soit marquée une autre*

Fig. 74.



courbe de même sommet, comme MB, *en sorte que les appliquées de cette dernière, comme* MC, *soient moyennes proportionnelles entre la somme des portions des autres courbes,* AB, BF, BD, BE, *et la somme des appliquées* AC, FC, DC, EC. *Il faut trouver une tangente à un point donné de cette dernière courbe.*

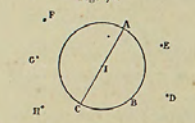
Si vous voulez que les quatre courbes de mon exemple soient un cercle, une parabole, une hyperbole et une ellipse, j'y consens, à la charge que vous croyiez que je donnerai la solution en tout nombre et en toute espèce de courbes données, et ce sans aucune asymmétrie, ce qui semble merveilleux.

7. Avant que de quitter la Géométrie, je vous donne encore une spé-

culation qui semble être excellente et qui allonge infiniment l'étrivière au lieu plan : *Si a quotcumque punctis* (1), laquelle j'ai trouvée en cherchant les lieux *ad superficiem* (2) :

C'est que, après avoir trouvé un cercle qui satisfasse à la question d'Apollonius *in plano*, comme par exemple : *Soient* (fig. 75) *les points*

Fig. 75.



donnés F, G, H, E, D *et le cercle trouvé* ABC *en sorte que, quel point que vous preniez en sa superficie, comme* A, *les quarrés* FA, GA, HA, DA, EA *soient égaux à un espace donné*, je dis que : *Si autour du point* I *comme centre, vous décrivez une sphère de laquelle le cercle* ABC *soit un des grands, quel point que vous preniez en la superficie de la sphère, il satisfera à la question du lieu.*

J'ai trouvé ensuite beaucoup de choses merveilleuses sur le sujet des lieux *ad superficiem*, mais je ne puis pas vous dire tout à la fois.

8. Le quadrilatère (3) de M. de Roberval, que je n'ai pas cru si pressé que la tangente du galand, sera différé au premier voyage.

9. Il faut que je vous die encore qu'on peut trouver la tangente de 45 degrés au galand (4) par une voie qui semble plus géométrique. Car, là où ma précédente solution a employé la ligne courbe du galand pour trouver le point cherché par l'intersection du galand et d'une ellipse, cette autre voie n'emploie que les sections coniques.

(1) *Voir* Lettre XIX, 1.

(2) *Comparer* Tome I, p. 113.

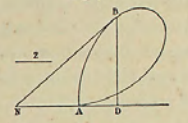
(3) Problème proposé à Descartes par Mersenne, comme n'ayant pas été résolu par Roberval (*Lettres de Descartes*, éd. Clerselier, III, 65, du 23 août 1638; p. 357) :

« Les côtés AD et AE du quadrilatère ADCE étant donnés avec l'angle DAE et la longueur de la diagonale AC, et enfin la proportion qui est entre les deux lignes AG et AH, perpendiculaires sur les côtés inconnus CD et CE, il faut chercher le reste. »

(4) *Voir* plus haut, 2.

Supposons que Z (*fig.* 76), le côté droit du galand, est inconnu, et

Fig. 76.



que AD est une ligne donnée nommée B, que DB est inconnue, nommée A. Donc le côté droit sera

$$\frac{A\ cub. + B\ cub.}{B\ \text{in}\ A}.$$

Par ma méthode des tangentes, la ligne DN qui concourt avec la tangente sera

$$\frac{B\ \text{in}\ A\ cub.\ \text{bis} - Bqq.}{A\ cub. - B\ cub.\ \text{bis}},$$

laquelle il faut faire égale à A. Nous aurons donc

$$Aqq. - B\ cub.\ \text{in}\ A\ \text{bis} \quad \text{égal à} \quad B\ \text{in}\ A\ cub.\ \text{bis} - Bqq.,$$

et enfin

$$B\ \text{in}\ A\ cub.\ \text{bis} + B\ cub.\ \text{in}\ A\ \text{bis} - Aqq. \quad \text{égal à} \quad Bqq.,$$

laquelle équation, pour trouver la valeur de A, se peut résoudre ou par ma méthode topique, ou par telle autre qu'on voudra.

Or, A étant connue, le côté droit Z sera connu, et si le galand donné est différent de celui-ci, il faudra faire :

comme le côté droit de celui-ci à la ligne AD ou B donnée,
ainsi le côté droit du galand donné à une autre ligne

qui déterminera un point semblable au point D, et la question est faite.

S'il y a manque en la supputation, vous la corrigerez, car je n'ai pas seulement le loisir de relire ma lettre.

10. Pour Galilée (1), j'avois commencé de l'examiner par le menu, et, si j'ai du loisir assez, je continuerai.

Lorsqu'il parle de la proportion de la vitesse en la descente qui se fait en un même ou divers milieux par des corps différents, vous trouverez que son expérience qui précède contredit sa règle qui suit.

Je vous entretiendrai une autre fois plus à loisir, bien que l'oisiveté de la campagne vous ait présentement fait voir une lettre plus longue que je n'avois desseigné.

Je suis, mon Révérend Père, votre très humble serviteur,

FERMAT.

Ce 22 octobre 1638.

11. Puisque mes deux vers (2) ont eu votre approbation, en voici deux autres de même main qu'on estime ici plus que les premiers et desquels vous me direz, s'il vous plait, votre sentiment :

Optato patriam afflictam Delphine beavit
Rex Justus : nunquam justior ille fuit.

XXXVI.

FERMAT A MERSENNE (3).

DIMANCHE 26 DÉCEMBRE 1638.

(A, f^os 23-24; B, f^o 25 v^o.)

1. Pour les nombres, je peux trouver par ma méthode toutes les questions des parties aliquotes (4), mais la longueur des opérations me rebute et la recherche des nombres premiers, à laquelle toutes ces

(1) *Voir* Lettre XXXIII, 5.

(2) Ces vers de Fermat ne sont pas connus.

(3) Cette Pièce est un extrait d'une Lettre perdue, déjà publié par M. Charles Henry (*Recherches, etc.*, pp. 177-178) d'après le brouillon d'Arbogast, qui dérive d'une copie de Mersenne.

(4) *Voir* Lettre XXXIII, 4.

questions aboutissent. Sur lequel sujet je ne sais point de méthode que la vulgaire, sinon qu'il suffit de faire la division jusques à la plus petite racine quarrée du nombre donné, car si on n'a point trouvé de diviseur jusque là, on n'a garde d'en trouver de plus grands, pource que leur quotient seroit moindre que la racine quarrée, ce qui est impossible, par l'expérience qu'on aura déjà faite.

2. Pour la Géométrie, comme toutes les courbes et les tangentes qui sont de la juridiction de la méthode de M. Descartes le sont aussi de la mienne, et particulièrement lorsque la comparaison des portions du diamètre aux appliquées est mêlée de lignes courbes, je m'en démêle aussi aisément que des simples tangentes. De quoi je vous ai déjà donné quelques exemples, vous priant d'en proposer les questions et principalement le dernier exemple (1), sur quoi vous ne m'avez pas répondu. Obligez-moi donc de savoir si les messieurs de Paris en peuvent donner la solution, et je vous envoierai tout aussitôt la mienne.

3. Bien plus, je donnerai infinies tangentes de courbes dont la proportion est pleine d'asymmétries.

Soit la courbe DNE (*fig.* 77), le diamètre NF, l'appliquée quelconque DF. Supposons que NF étant appelée A, l'appliquée DF soit égale à

Fig. 77.

$$\text{lat.}(Bq. + Aq.) + \text{lat.}(Dq. - Aq.) + \text{lat.}(B \text{ in } A - Aq.) + \text{lat.}\left(\frac{A\,cub. - B \text{ in } Aq.}{D}\right) + \text{lat.}\left(\frac{Aqq. + Dq. \text{ in } Aq.}{Bq. + Aq.}\right).$$

Je demande une tangente au point D.

(1) *Voir* Lettre XXXV, 6.

Ma méthode les donnera, et infinies de pareille nature, etc., quand bien la ligne DF seroît composée de centinomies ou plus grand nombre de termes.

Je ne dis rien que je n'exécute dès qu'on m'aura témoigné qu'on ne le sait pas.

4. Je proposerai le reste après que vous m'aurez envoyé les papiers de M. Descartes (1). Cependant j'étends encore ce problème local *ad superficiem* (2) qui enchérit sur le plan d'Apollonius, et le conçois ainsi :

Si a quotcumque punctis datis in quibuslibet planis ad punctum unum inflectantur rectæ, et sint species, quæ ab omnibus, dato spatio æquales, punctum ad inflexionem sphæricam superficiem positione datam continget.

La construction se dérive aisément de celle que je donnai il y a longtemps du lieu plan. Et M. de Roberval le pourra trouver d'abord et avouera qu'il y a fort peu de propositions de Géométrie qui valent celle-ci.

(1) Probablement les importantes Lettres de Descartes à Mersenne, du 27 juillet 1638 (Clerselier, III, 66), du 23 août (III, 65) et du 15 novembre (II, 92).
(2) *Voir* Lettre XXXV, 7.

ANNÉE 1639.

XXXVII.

FERMAT A MERSENNE (1).

DIMANCHE 20 FÉVRIER 1639.

(B, f° 2 v°.)

1. Vous m'avez envoyé 360 duquel les parties aliquotes sont au même nombre comme 9 à 4, et moi je vous envoie 2016 qui a la même propriété.

2. Je viens maintenant au défi des plus grands géomètres du monde (2).

Pour première question, proposé :

$$1C - 6N \quad \text{égal à} \quad 40 \text{ et la valeur d'} 1N, 4,$$

et encore

$$1C + 4N \quad \text{égal à} \quad 80, \text{ où N est encore } 4,$$

ils demandent la méthode pour trouver la racine en pareilles questions sans aller à tâtons.

(1) Extrait inédit d'une Lettre perdue.
(2) Descartes, dans sa Lettre à Mersenne du 9 février 1639 (Clerselier, II, 97, p. 450), répond à ces mêmes questions. La seconde et la troisième lui avaient été adressées le 25 janvier; il les désigne comme étant d'un M. Dounot. La première ne lui fut envoyée que par le courrier suivant.

Je vous réponds avec Viète (1) que ceux qui feront cette recherche sans employer les artifices déjà connus *excruciabunt se frustra et bonas horas mathematices quam colent dispendio perdent*.

3. Ils proposent ensuite

$$1C - 8Q + 19N \quad \text{égal à} \quad 14,$$

et après avoir déterminé que le problème est ambigu et donné trois valeurs de la racine, savoir 2, $3 - \sqrt{2}$, $3 + \sqrt{2}$, ils ajoutent : *Qui dederit quartam solutionem, portento erit simile.*

En quoi, sans préjudice de la grammaire, ils pèchent autant contre les Mathématiques, qui nous enseignent qu'il est impossible qu'en ce cas et autres pareils, il y ait quatre solutions. Car il est très certain qu'un problème ne peut recevoir pour le plus qu'autant de solutions que son plus grand terme a de degrés, et ainsi ils ont fait eux-mêmes ce *portentum* d'avoir proposé une question impossible.

4. Mais la troisième proposition contient sans doute la plus forte attaque, qui semble d'autant plus considérable que le moyen dont Viète s'est servi pour soudre pareilles questions, lequel il appelle *syncrisis* en son Traité *De recognitione æquationum* (2), est défectueux et ne dit pas tout.

Voici la dernière question :

$$1C - 9Q + 13N \quad \text{æq.} \quad \sqrt{288} - 15.$$

Quæritur 1 N. *Hoc problema recipit tres solutiones quarum exhibimus primam, scilicet* $3 - \sqrt{2}$, *quæ satisfacit exacte.*

Si reliquas duas dederim, ero illis *magnus Apollo.*

Hæ sunt : prima $3 + \sqrt{18}$, secunda $3 - \sqrt{18}$.

(1) VIÈTE (éd. Schooten, Leyde, Elzevirs, 1646), *De emendatione æquationum*, chap. I, p. 129 :

« Itaque exruciarunt se frustra et bonas horas Mathematices quam colebant dispendio » absumpserunt. »

(2) *Ibid.*, pages 104 et suiv.

Si cela ne suffit, je donnerai une méthode générale (1) pour toutes solutions pareilles, laquelle réussit sans nulle peine, et n'a pas les défauts de celle de Viète, qui est très fâcheuse à cause des divisions, particulièrement aux exemples un peu malaisés, comme celui dont est question, que les analystes communs ne sauraient soudre par la *syncrise*.

(1) *Voir* Lettre XXXVIII *bis*, 4.

ANNÉE 1640.

XXXVIII.

FRENICLE A MERSENNE (1).

< MARS 1640 >

(Fr. n. a. 6204, f° 229.)

MON RÉVÉREND PÈRE,

1. Puisque vous desirez que je vous rafraîchisse la mémoire de l'entretien que nous eûmes dernièrement ensemble touchant les nombres des tables magiques, je vous dirai que ce que M. Fermat vous en a envoyé est fort peu de chose, car il n'y a presque rien hors de ce qu'il peut avoir vu dans Stiphelius, Spinula et la vieille Clavicule (2), et que la méthode qu'il dit avoir pour les construire n'est autre que celle qu'ils enseignent, encore qu'elle ne soit pas d'eux : laquelle, pour ce qui regarde les impairs, est la plus noble qui se sauroit trouver et est si facile que ce n'est qu'un jeu d'enfant, et n'y a pas grand sujet de se tant glorifier pour l'avoir apprise dans un livre.

(1) Lettre inédite qui fut communiquée à Fermat et à laquelle il répondit par la suivante, XXXVIII *bis*.

(2) Arithmetica integra, authore Michaele *Stifelio*, cum præfatione Philippi Melanchthonis. — Norimbergæ apud Joh. Petrejum. Anno Christi MDXLIII. Cum gratia et privilegio Cæsareo atque Regio ad sexennium.

Franciscus *Spinola* est cité dans les *Deliciæ physicomathematicæ* de Daniel Schwenter, Nuremberg, 1626, comme s'étant occupé des carrés magiques. Le seul Ouvrage imprimé qui soit connu avec ce nom d'auteur (*P. Francisci Spinulæ Mediolanensis Opera*, Venise, 1563) est un Volume de vers latins où ne se trouve aucune allusion à ce sujet.

Nous n'avons pu déterminer non plus quel Ouvrage Frenicle désigne sous le nom de *vieille Clavicule;* il s'agit peut-être d'un tirage sans lieu ni date de l'Écrit théosophique *Clavicula Salomonis filii David*.

2. S'il savoit quelque chose de nouveau pour les pairs, il vous devroit avoir envoyé une table du quarré de 18 ou 22 ou pour le moins de 14, qui a servi de borne à Bachet (1), et, quand il l'aura fait, nous avouerons qu'il y sait quelque chose.

3. Ce qu'il vous a envoyé n'est pas digne d'un honnête homme comme lui, mais est plutôt l'occupation d'un écolier et, s'il veut s'employer à un exercice qui lui soit plus convenable, sans sortir de cette matière, qu'il dispose les nombres d'un quarré en telle sorte que toutes les lignes et diagonales soient égales et que, telles enceintes qu'on voudra, et non plus, en étant ôtées, le quarré qui restera soit de même nature que le premier.

Par exemple, que 22 soit donné pour le côté du quarré magique; on demande que, ce quarré ayant les conditions requises, on en puisse ôter *trois* enceintes et que le quarré restant, qui aura 16 cellules de côté, soit encore magique; et qu'ôtant *deux* enceintes de celui-ci, le quarré restant, qui aura 12 cellules de chaque côté, soit encore magique; et que de celui-ci, en ôtant *une* enceinte, le quarré restant, qui aura 10 de côté, soit encore magique; et que du premier quarré de 22, tel autre nombre d'enceintes qu'on en veuille ôter, le quarré restant ne soit plus magique.

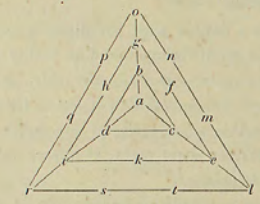
4. Davantage, il se peut aussi étudier à faire de ces tables qui aient une partie de leurs cellules vides et néanmoins que toutes les lignes, colonnes et diagonales, soient égales tant en la quantité des nombres qu'en la somme d'iceux.

Par exemple, s'il y a en la table quarrée 144 cellules, qu'il n'y en ait que 60 ou autre nombre possible de remplies de nombres consécutifs et qui commencent par tel qu'on voudra, et qu'en chaque colonne, ligne et diagonale, il y ait 5 nombres, la somme desquels soit égale par tout.

5. Mais s'il veut sortir des quarrés et s'appliquer aux solides, il pourra considérer les nombres disposés en telle sorte qu'ils forment

(1) Problèmes plaisans et delectables qui se font par les nombres. — A Lyon, MDCXXIV.

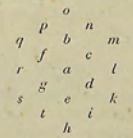
les trois faces extérieures d'une pyramide triangulaire ou *tétraèdre*, et faire que les dits nombres, étant en progression donnée, fassent toutes les enceintes égales entre elles.



Par exemple, que la somme des nombres représentés par *l*, *m*, *n*, *o*, *p*, *q*, *r*, *s*, *t* soit égale à celle de *c*, *f*, *g*, *h*, *i*, *k*, et à celle de *c*, *b*, *d* : et que les lignes *a*, *c*, *e*, *l*; *a*, *b*, *g*, *o* et *a*, *d*, *i*, *r* soient égales entre elles en valeur comme elles le sont en longueur en Géométrie; et que les trois lignes de chaque enceinte soient égales entre elles, c'est-à-dire l'une à l'autre, jusques à où il se peut; et déterminer à quelles enceintes doit finir l'égalité susdite.

Ce seront là des occupations qui méritent aucunement qu'il s'y emploie et, quand il y aura satisfait, on lui découvrira des choses qui surpasseront d'autant celles-ci que celles-ci surpassent ce qu'il vous a envoyé.

6. Je vous dirai aussi que, s'il ne veut pas sortir des plans, je lui pourrois demander un *hexagone* rempli de nombres consécutifs, qui ait même somme en chacun de ses côtés et des lignes qui vont du centre à la circonférence.



Par exemple, que les nombres représentés par *o*, *n*, *m*; *m*, *l*, *k*; *k*, *i*, *h*; *h*, *t*, *s*; *s*, *r*, *q*; *q*, *p*, *o*, comme aussi par *a*, *b*, *o*; *a*, *c*, *m*; *a*, *d*, *k*; *a*, *e*, *h*; *a*, *g*, *s* et *a*, *f*, *q*, eûssent chacun leur somme égale; et en outre, qu'ôtant quelques enceintes de ladite figure, sous les conditions déduites au quarré, la même égalité demeurât encore.

Vous remarquerez, s'il vous plaît, que la quantité de lettres qui sont ici ne sert que d'exemple, et ne s'ensuit pas d'icelle qu'on puisse faire ces choses sous la quantité qu'elles représentent, car elles ne servent que pour les donner mieux à entendre.

7. Pour ce qui est des nombres dont il veut renouer la conférence, on attend encore la solution de ceux qu'on lui a envoyés autrefois, et de celui que vous avez encore envoyé depuis peu (1), duquel il doit d'autant plus facilement venir à bout, qu'il a trouvé la démonstration de tout ce qui concerne les parties aliquotes.

8. Et s'il trouve que ce soit peu de chose pour lui, qu'il vous envoie un nombre *parfait* qui ait 20 lettres ou le prochainement suivant, afin de ne point sortir de ce qu'il sait avec perfection, et j'estime qu'il en viendra d'autant plus facilement à bout, qu'il pourra sur tout ce que dessus consulter l'oracle de ce grand démon dont vous nous avez tant fait de fête, lequel nous tiendrons pour bon ange et des plus blancs, s'il y satisfait. Encore que, s'ils étoient versés en ces matières-là comme le sont vos Sainte-Croix et Frenicle, cela leur serviroit plutôt d'ébattement que de travail, vu qu'il y a longtemps qu'ils ont trouvé et considéré ces choses-là.

Voilà, mon Père, si j'ai bonne mémoire, un raccourci de tout l'entretien que nous eûmes ensemble avant-hier.

Je suis, mon Révérend Père,

Votre très humble et affectionné serviteur,

FRENICLE.

(1) *Comparer* les Lettres XXXVI, 1 et XXXVII, 1. Frenicle fait allusion à une correspondance perdue, qui paraît avoir surtout concerné les nombres en relation donnée avec la somme de leurs parties aliquotes.

XXXVIII *bis*.

FERMAT A MERSENNE.

DIMANCHE 1 AVRIL 1640.

(*Va*. p. 173-176.)

MON RÉVÉREND PÈRE,

1. Je vous dois deux réponses pour les deux dernières Lettres que j'ai reçues de votre part et que j'ai trouvées toutes deux en même temps à mon retour de la campagne; le sujet de la première concerne Monsieur Desargues et celui de la seconde Monsieur de Frenicle.

2. Je suspends la réponse aux questions de Monsieur Desargues, jusques à ce que j'aurai vu par votre faveur le troisième Livre des Coniques de Monsieur Mydorge et les autres (1), s'il y en a d'imprimés depuis les deux premiers qui sont les seuls que j'ai en mon pouvoir. Je vous promets alors de m'étendre sur tout ce qu'il semble que vous desirez de moi, et cependant je suis obligé de vous dire que j'estime beaucoup Monsieur Desargues et d'autant plus qu'il est lui seul inventeur de ses Coniques; son livret, qui passe, dites-vous, pour jargon, m'a paru très intelligible et très ingénieux (2).

(1) Les deux premiers Livres des Coniques de Mydorge avaient été publiés en 1631 sous le titre :

Claudii Mydorgii patricii Parisini Prodromi Catoptricorum et Dioptricorum sive Conicorum operis ad abdita radii reflexi et refracti mysteria prævii et facem præferentis Libri primus et secundus. D. A. L. G. — Parisiis, Ex typographia I. Dedin, via Nucum, sub signo trium Columbarum, M.DC.XXXI. Cum privilegio Regis (in-folio).

Les deux suivants furent ajoutés dans la réédition de 1639 :

Claudii Mydorgii.... Libri quatuor priores. D. A. L. G. — Parisiis, Ex typographia I. Dedin, via Nucum, sub insigni parvi Scuti, M.DC.XXXIX. Cum privilegio Regis.

(2) Il s'agit du *Brouillon project d'une atteinte aux euenemens des rencontres d'un cone avec un plan, par le S. G. D. L.*, dont l'édition originale, imprimée à Paris en 1639, est introuvable (Œuvres de Desargues, éd. Poudra, I, pages 97 à 230). — La correspondance de Fermat ne contient aucune autre indication sur les questions que lui avait posées Desargues.

3. Pour Monsieur de Frenicle, ses inventions en Arithmétique me ravissent et je vous déclare ingénûment que j'admire ce génie qui, sans aide d'Algèbre, pousse si avant dans la connoissance des nombres entiers, et ce que j'y trouve de plus excellent consiste en la vitesse de ses opérations, de quoi font foi les nombres aliquotaires qu'il manie avec tant d'aisance. S'il vouloit m'obliger de me mettre dans quelqu'une de ses routes, je lui en aurois très grande obligation et ne ferois jamais difficulté de l'avouer, car les voies ordinaires me lassent et, lorsque j'entreprends quelqu'une de ces questions, il me semble que je vois devant moi

Magnum maris æquor arandum (1),

à cause de ces fréquentes divisions qu'il faut faire pour trouver les nombres premiers. Ce n'est pas que mon analyse soit défectueuse, mais elle est lente et longue pour ce regard et j'ose dire sans vanité que, si je pouvois l'accompagner de cette facilité, je trouverois de fort belles choses. Je voudrois avoir mérité par mes services la faveur que je lui demande et ne désespère pas même de la payer par quelques inventions qui peut-être seront nouvelles à Monsieur Frenicle.

(B, f° 3 r°) (2).

4. Pour la méthode que j'oppose à la *syncrise* (3), ce n'est seulement que pour éviter les divisions qui sont souvent très fâcheuses en cette sorte de questions.

Soit, par exemple :

$$bda - ba^3 - a^3 \quad \text{æq.} \quad z^{\text{sol.}}.$$

Cette équation peut avoir trois solutions, desquelles soit par exemple n l'une qui soit donnée. Il faut trouver les autres deux.

(1) Virgile, *Enéide*, II, 780 : Longa tibi exsilia et vastum maris æquor arandum.

(2) Le fragment qui suit est inédit; il est reproduit d'après l'extrait de la Lettre du 1er avril 1640, que contient le manuscrit Vicq-d'Azyr-Boncompagni. Il est très improbable que les notations algébriques, dans lesquelles dominent les habitudes cartésiennes, soient réellement celles de Fermat.

(3) *Voir* Tome I, page 147, note 3. — *Comparer* Lettre XXXVII, 4.

Pour y parvenir, il est nécessaire de baisser cette équation d'un degré, ce que Viète fait par division et M. Descartes aussi; voici comme je procède :

n est égal à a; or il y a deux lignes égales à a, inégales à n. Posons que l'une de ces deux lignes soit $n+e$, et faisons maintenant l'équation comme si $n+e$ étoit a, nous aurons

$$bdn+bde-be^2-e^3-bn^2-2bne-3ne^2-n^3-3n^2e \quad \text{æq.} \quad z^{\text{sol.}}.$$

Or, puisque a est égal à n, donc

$$bda-ba^2-a^3 \quad \text{sera égal à} \quad bdn-bn^2-n^3.$$

Mais

$$bda-ba^2-a^3 \quad \text{est égal à} \quad z^{\text{sol.}},$$

par la première équation; donc

$$bdn-bn^2-n^3 \quad \text{est égal à} \quad z^{\text{sol.}}.$$

Otez donc d'un côté de la seconde équation $bdn-bn^2-n^3$, et de l'autre côté z^{sol}, il restera

$$bde-be^2-e^3-2bne-3ne^2-3n^2e \quad \text{æq.} \quad 0.$$

Et, le tout divisé par e, qui est une division simple et non composée comme celle de Viète et des autres, restera

$$bd-be-e^2-2bn-3ne-3n^2 \quad \text{æq.} \quad 0$$

et ainsi l'équation ne sera que quarrée et, lorsque e sera connu, en y ajoutant n, vous aurez la ligne cherchée.

Ce n'est pas que j'estime beaucoup ceci, ni que j'aie tout dit en vous donnant ce seul exemple, mais c'est seulement pour la facilité de l'opération.

5. Je viens aux propositions des quarrés (1) : sur quoi je vous puis protester que je n'ai jamais vu ni Stiphelius ni cette *Clavicule* et ne sais

(1) *Voir* Lettre XXXVIII, 1 à 3. — Ici reprend le texte donné par les *Varia*. Le carré magique est inédit.

ce que ces livres contiennent et, pour faire voir que j'ai vu peut-être plus loin qu'eux et satisfaire à la semonce de M. Frenicle, je vous envoie le quarré de 14 aux conditions requises, duquel, si vous ôtez deux enceintes, le restant sera aussi quarré aux conditions requises et, si vous ôtez encore deux enceintes de ce restant, ce qui restera sera encore quarré aux mêmes conditions.

1	2	185	186	5	6	7	190	191	192	11	194	195	14
15	16	26	25	24	177	176	175	174	173	172	171	27	28
42	156	31	165	159	34	35	162	37	164	158	40	167	29
56	142	152	46	52	149	148	147	146	47	53	45	153	43
57	128	59	130	61	135	134	63	132	66	137	68	139	70
71	125	73	123	122	76	120	119	19	75	116	82	114	84
85	111	96	109	108	107	91	92	90	103	102	87	100	98
112	97	110	95	89	93	105	106	104	94	88	101	86	99
126	83	115	81	80	118	77	78	121	117	74	124	72	113
140	69	138	60	131	62	64	133	65	136	67	129	58	127
141	55	54	144	150	51	50	49	48	145	151	143	44	154
168	41	157	32	33	160	161	36	163	38	39	166	30	155
182	170	180	179	178	23	22	21	20	19	18	17	181	169
183	184	3	4	187	188	189	8	9	10	193	12	13	196

Le premier quarré fait en ces lignes 1379; le deuxième fait 985; le troisième fait 591.

6. Or, ne doutez point que je ne possède la méthode générale pour faire toute sorte de quarrés en cette sorte et aux conditions qu'ôtant tel nombre d'enceintes qu'on voudra, le restant soit encore quarré, etc.

Mais, à n'ôter qu'une seule enceinte, je crois la question impossible : à quoi peut-être M. Frenicle ne prit pas garde (1), lorsqu'il me proposa d'ôter trois enceintes de 22, et puis deux du restant, et puis une du restant. Car, aux deux premiers cas, la question est faisable en beaucoup de manières, mais au troisième je ne l'estime point possible : de quoi la raison dépend de ma règle, laquelle je n'ai pourtant ni trouvée ni cherchée que lorsque j'ai reçu la Lettre de M. Frenicle, et c'est pour cela que je ne détermine pas absolument l'impossibilité de ce cas, jusqu'à ce que j'aurai eu encore quelques jours pour y songer de nouveau.

7. Mais ce que je trouve de plus beau en ma règle, et que je ne crois pas avoir été touché ni par Stiphelius ni par aucun autre, est que je puis déterminer en combien de façons, et non plus, chaque quarré peut être disposé aux conditions requises, comme par exemple, s'il m'est permis de demander à M. Frenicle, en combien de sortes différentes 22 peut être rangé.

8. Je passe bien plus outre, et passant aux solides qui le sont effectivement, j'ai trouvé une règle générale pour ranger tous les cubes à l'infini, en telle façon que toutes les lignes de leurs quarrés, tant diagonales, de largeur, de longueur que de hauteur, fassent un même nombre, et déterminer outre cela en combien de façons différentes chaque cube doit être rangé, ce qui, me semble, est une des plus belles choses de l'Arithmétique.

Vous en trouverez un exemple (2) sur le cube 64, à côté du quarré de 14.

Il faut ranger les quatre quarrés qui font la solidité du cube, en telle façon que le premier soit dessous; le deuxième soit mis sur le premier, en telle façon que 53 soit sur 4 et 56 sur 1; il faut ensuite mettre le troisième sur le deuxième, en telle façon que 60 soit sur 53 et 57 sur 56; et enfin il faut mettre le quatrième sur le troisième, en sorte que 13 soit sur 60 et 16 sur 57. Cela étant fait, vous aurez un cube qui sera divisé en douze quarrés, lesquels se trouveront tous disposés aux conditions requises; il y aura en tout 72 lignes différentes, chacune desquelles fera une même somme, savoir 130.

(1) *Voir* Lettre XXXVIII, 3. — *Comparer* Lettre XL, 3.

(2) Les carrés ci-après se trouvaient, ainsi que le carré magique reproduit plus haut (5), transcrits sur une feuille détachée; ils ne sont pas non plus donnés dans les *Varia*.

1.

4	62	63	1
41	23	22	44
21	43	42	24
64	2	3	61

2.

53	11	10	56
32	34	35	29
36	30	31	32
9	55	54	12

3.

60	6	7	57
17	47	46	20
45	19	18	48
8	58	59	5

4.

13	51	50	16
40	26	27	37
28	38	39	25
49	15	14	52

9. Vous voyez combien ceci est au-dessus du tétraèdre et de l'hexagone (1) de M. Frenicle, desquels le premier n'est pas solide en effet, mais par fiction seulement, quoique je ne doute pas qu'il ne puisse être haussé en solide: mais, dans ces deux propositions, il y a beaucoup de nombres superflus dans les entre-deux des lignes qui aboutissent ou au sommet ou au centre, ce qui fait qu'elles ne sont pas si parfaites que la mienne, en laquelle je puis encore ôter les enceintes requises et faire que le restant demeure aussi cube, etc.

Je soumets pourtant le tout à mondit Sr de Frenicle et crois que, si j'avois l'honneur d'être connu de lui, il auroit omis quelques paroles qui sont dans sa Lettre. Je ne resterai pas de lui assurer l'estime que je fais de lui et de le conjurer de me faire part de sa méthode.

10. Pour le solide de la roulette, je le réduirois bien à des solides plus simples, mais à des sphères, cônes ou cylindres qui soient créés par des lignes droites données, il me semble qu'il est impossible.

Excusez si le papier me manque, etc.

11. *P.-S.* Depuis ma Lettre écrite (2), un de mes vieux papiers m'est

(1) *Voir* Lettre XXXVIII, 5 et 6.

(2) Ce post-scriptum paraît appartenir à une Lettre antérieure et avoir été l'occasion de la Lettre XXXVIII de Frenicle.

tombé en main, lequel contient une observation sur le problème XXI du Livre de Bachet, imprimé à Lyon en 1624, et qui porte pour titre : *Problèmes plaisans et délectables qui se font par les nombres.*

Voici l'endroit (1); il propose de ranger en quarré les nombres consécutifs en progression arithmétique, en sorte que tous les rangs, tant de haut, de bas que des côtés et par les diamètres, fassent une même somme, de quoi il baille une règle générale pour les quarrés impairs, et avoue n'en avoir pu trouver aucune pour les pairs, mais avoir fait seulement plusieurs observations particulières, par le moyen desquelles il a rangé les pairs jusques à 144.

Or, pour la règle des quarrés impairs, je dis premièrement qu'elle n'est pas de son invention, car elle est dans l'Arithmétique de Cardan (2); mais d'ailleurs elle ne résout la question que d'une seule façon, qui le peut être en plusieurs. Je dis donc :

1° Que ma méthode range les quarrés pairs et impairs à l'infini;

2° Qu'elle les range en toutes les façons possibles, lesquelles augmentent comme les combinaisons, à mesure que les quarrés sont plus grands;

3° Que la règle des pairement impairs n'est pas différente de celle des pairement pairs, mais bien la même, quoique Bachet ait cru qu'elles devoient être différentes.

Voici un exemple de ma méthode :

Il range le 25 d'une seule façon, n'y sachant autre chose, et voici comme il le range :

11	24	7	20	3
4	12	25	8	16
17	5	13	21	9
10	18	1	14	22
23	6	19	2	15

(1) Pages 60 et suivantes de l'édition originale.

(2) *Practica arithmetica et mensurandi singularis* (Milan, 1539), réimprimée dans le quatrième tome de l'édition des Œuvres de Cardan en 10 volumes (Lyon, 1663). — Cardan y donne, sans règle de construction, sept carrés magiques (de 3^2 à 9^2) qu'il attribue aux sept planètes et appelle *planétaires*. Il paraît les avoir empruntés à Agrippa de Nettesheym (*De occulta philosophia*. Cologne, 1533).

En voici trois autres que j'ai choisis parmi plusieurs que ma méthode enseigne :

11	22	9	20	3
2	14	25	8	16
19	5	13	21	7
10	18	1	12	24
23	6	17	4	15

11	24	17	10	9
4	12	25	18	6
7	5	13	21	19
20	8	1	14	22
23	16	9	2	15

12	25	6	19	3
5	11	24	8	17
16	4	13	22	10
9	18	2	15	21
23	7	20	1	14

Il range le 36 à tâtons d'une seule façon, comme s'ensuit :

6	32	3	34	35	1
7	11	27	28	8	30
19	14	16	15	23	24
18	20	22	21	17	13
25	29	10	9	26	12
36	5	33	4	2	31

En voici une autre parmi plusieurs que ma méthode fournit; si le temps ne me manquoit, je vous en envoierois demi-douzaine :

5	31	4	33	36	2
14	18	22	21	13	23
26	7	9	10	30	29
11	25	27	28	12	8
20	24	15	16	19	17
35	6	34	3	1	32

Mais, parce qu'on pourroit croire que la règle n'a qu'un seul exemple, lorsque les diamétraux demeurent les mêmes, voici qui fait voir le contraire : c'est un exemple de ma méthode du 64, différent de celui de Bachet, et qui garde néanmoins les diamétraux :

1	7	6	60	61	59	58	8
16	10	51	52	53	54	15	9
17	47	19	45	44	22	18	48
40	34	38	28	29	27	31	33
32	26	30	36	37	35	39	25
41	23	43	21	20	46	42	24
56	50	11	13	12	14	55	49
57	63	62	5	4	3	2	64

En voilà assez pour donner de l'exercice à M. Frenicle, car je ne sais guère rien de plus beau en l'Arithmétique que ces nombres que quelques uns appellent *planetarios*, et les autres *magicos*; et de fait j'ai vu plusieurs talismans, où quelques uns de ces quarrés rangés de la sorte sont décrits, et parmi plusieurs un grand, d'argent, qui contient le 49 rangé selon la méthode de Bachet, ce qui fait croire que personne n'a encore connu la générale ni le nombre des solutions qui peuvent arriver à chaque quarré.

Si la chose est sue à Paris, vous m'en éclaircirez; en tout cas, je ne la dois qu'à moi seul.

Je suis etc.

XXXIX.

FERMAT A MERSENNE (1).

< MAI? 1640 >

(B, f° 6 v°.)

1. Je trouve plusieurs abrégés pour trouver les nombres parfaits (2) et je dis par avance qu'il n'y en a aucun de 20 ni de 21 caractères, ce qui détruit l'opinion de ceux qui avoient cru qu'il y en avoit un dans l'enceinte de chaque dixaine; comme un depuis 1 jusques à 10, un autre depuis 10 jusques à 100, un autre depuis 100 jusques à 1000, etc. Ce qui n'est pas vrai, comme il paraît par cet exemple; car depuis 10 000 000 000 000 000 000 jusques à la dixaine suivante, il n'y en a pas un, ni depuis la suivante à la prochaine non plus.

2. Je passe à ma proposition (3) de ranger les quarrés. Vous pouvez vous assurer que j'en possède absolument la méthode, aussi bien que

(1) Ce fragment inédit, de date incertaine, semble avoir fait partie d'une Lettre envoyée à Mersenne par Fermat avant qu'il en eût reçu la réponse de Frenicle à la précédente.
(2) *Voir* Lettre XXXVIII, 8. — *Comparer* ci-après Lettre XL, 6.
(3) *Comparer* Lettres XXXVIII *bis*, 7, et XL, 2.

celle des cubes, et pour vous montrer jusques où va la connaissance que j'en ai, le quarré de 8, qui est 64, se peut disposer en autant de façons différentes, et non plus, qu'il y a d'unités en ce nombre

$$1\,004\,144\,995\,344,$$

ce qui sans doute vous effraiera, puisque Bachet et les autres que j'ai vus n'en donnent qu'une seule.

Je rangerai de même tous les quarrés et cubes à l'infini et déterminerai en combien de façons et non plus, avec la démonstration.

3. Pour savoir si M. Frenicle ne procède point par tables, proposez lui (1) de

Trouver un triangle rectangle duquel l'aire soit un nombre quarré;
Trouver deux quarréquarrés desquels la somme soit quarréquarrée;
Trouver quatre quarrés en proportion arithmétique continue;
Trouver deux cubes desquels la somme soit cube;

S'il vous répond que jusques à un certain nombre de chiffres il a éprouvé que ces questions ne trouvent point de solution, assurez-vous qu'il procède par tables.

XL.

FERMAT A MERSENNE.

< JUIN? 1640. >

(*Va*, p. 176-178.)

MON RÉVÉREND PÈRE,

1. J'ai reçu avec grande satisfaction votre lettre accompagnée de celle (2) de M. Frenicle, qui me confirme en l'estime que je faisois de

(1) *Voir* Lettre XII, 2, où Fermat proposait déjà à Sainte-Croix trois de ces problèmes impossibles, et un dernier analogue au troisième de la présente.
(2) En réponse à la Lettre XXXVIII *bis*.

lui. J'y réponds succinctement et premièrement, sur ce qu'il a douté que j'eusse une méthode générale pour ranger tous les quarrés pairs à l'infini. Je vous prie de l'assurer du contraire, car il est très certain qu'il y a plus de dix ans que je la découvris et en donnai dès lors des exemples sur des quarrés plus hauts que ceux de Bachet, comme M. Despagnet vous pourroit témoigner.

2. Il est vrai que je n'avois pas songé de déterminer exactement en combien de façons ces quarrés pouvoient être ordonnés, et j'avoue que je n'avois pas vu toutes les manières qui y conduisent, puisque je doutois même que le quarré pût demeurer magique en levant une seule enceinte (1); mais, ayant trouvé une règle pour les ordonner en beaucoup de façons, je crus qu'elle les contenoit toutes, ce qui me semble excusable, puisque je vous envoyai ma Lettre aussitôt après la première méditation que j'eus fait sur ce sujet.

3. Depuis que j'ai reçu la dernière de M. Frenicle, j'ai aussitôt découvert que la question du quarré de 22 étoit de ma portée et, pource que l'opération seroit trop longue qui consiste à ranger le quarré de 22 en telle sorte que, levant trois enceintes, il reste magique, et du restant encore deux et qu'il demeure magique, et puis une seule du reste à la même condition, je me contenterai pour ce coup de vous envoyer le carré qui reste après les trois premières et les deux secondes enceintes ôtées, duquel si vous levez une seule enceinte, le reste demeure magique, comme vous verrez.

Pource que le temps me manque, je diffère à vous envoyer les cinq enceintes qui manquent pour parfaire le quarré entier de 22, jusques au départ du prochain courrier (2).

Après cela vous devez croire que, dès que j'aurai loisir, j'irai aussi avant sur ce sujet qu'il est possible.

(1) *Comparer* Lettres XXXVIII *bis*, 6 et 7, et XXXIX, 2.
(2) La Lettre ainsi annoncée fait défaut.

127	126	125	361	362	363	364	365	366	118	117	116
347	148	338	339	145	143	342	142	344	345	139	138
325	161	169	168	318	319	320	321	163	162	324	160
292	293	191	190	299	298	297	186	185	184	302	193
270	280	272	273	211	210	209	208	278	279	205	215
248	227	250	251	230	232	231	233	256	257	258	237
226	249	228	229	252	253	254	255	234	235	236	259
204	214	206	207	277	276	275	274	212	213	271	281
182	192	301	300	189	188	187	296	295	294	183	303
171	315	323	322	164	165	166	167	317	316	170	314
149	346	147	146	340	341	144	343	141	140	337	336
369	359	360	124	123	122	121	120	119	367	368	358

4. Pour ce qui est des cubes (1), je n'en sais pas plus que M. Frenicle, mais pourtant je puis les ranger tous à la charge que les diagonales seules des quarrés que nous pouvons supposer parallèles à l'horizon seront égales aux côtés des quarrés, ce qui n'est pas peu de chose, en attendant qu'une plus longue méditation découvre le reste. Je dresserai celui de 8, 10 et 12 à ces conditions, si M. Frenicle me l'ordonne.

5. Pour les quarrés qui ont des cellules vides (2), j'y travaillerai au plus tôt.

6. Ce que j'estime le plus est l'abrégé (3) pour l'invention des nombres parfaits, à quoi je suis résolu de m'attacher, si M. Frenicle ne me fait part de sa méthode.

(1) *Voir* Lettre XXXVIII *bis*, 8.
(2) *Voir* Lettre XXXVIII, 4.
(3) *Voir* Lettre XXXIX, 1.

Voici trois propositions que j'ai trouvées, sur lesquelles j'espère de faire un grand bâtiment :

Les nombres moindres de l'unité que ceux qui procèdent de la progression double, comme

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	
1	3	7	15	31	63	127	255	511	1023	2047	4095	8191	etc.,

soient appelés les radicaux des nombres parfaits, pource que, toutes les fois qu'ils sont premiers, ils les produisent. Mettez, au dessus de ces nombres, autant en progression naturelle : 1, 2, 3, 4, 5, etc. qui soient appelés leurs exposants.

Cela supposé, je dis que :

1° Lorsque l'exposant d'un nombre radical est composé, son radical est aussi composé. Comme, parce que 6, exposant de 63, est composé, je dis que 63 est aussi composé.

2° Lorsque l'exposant est nombre premier, je dis que son radical moins l'unité est mesuré par le double de l'exposant. Comme, parce que 7, exposant de 127, est nombre premier, je dis que 126 est multiple de 14.

3° Lorsque l'exposant est nombre premier, je dis que son radical ne peut être mesuré par aucun nombre premier que par ceux qui sont plus grands de l'unité qu'un multiple du double de l'exposant ou que le double de l'exposant. Comme, parce que 11, exposant de 2047, est nombre premier, je dis qu'il ne peut être mesuré que par un nombre plus grand de l'unité que 22, comme 23, ou bien par un nombre plus grand de l'unité qu'un multiple de 22 : en effet 2047 n'est mesuré que par 23 ou par 89, duquel, si vous ôtez l'unité, reste 88, multiple de 22.

Voilà trois fort belles propositions que j'ai trouvées et prouvées non sans peine : je les puis appeler les fondements de l'invention des nombres parfaits. Je ne doute pas que M. Frenicle ne soit allé plus avant, mais je ne fais que commencer, et sans doute ces propositions passeront pour très belles dans l'esprit de ceux qui n'ont pas beaucoup

épluché ces matières, et je serai bien aise d'apprendre le sentiment de M. de Roberval.

7. Au reste, vous ou moi avons équivoqué de quelques caractères au nombre que j'avois cru parfait (1), ce que vous connoîtrez aisément puisque je vous baillois 137 438 953 471 pour son radical, lequel j'ai pourtant depuis trouvé, par l'abrégé tiré de ma troisième proposition, être divisible par 223; ce que j'ai connu à la seconde division que j'ai faite, car, l'exposant dudit radical étant 37, duquel le double est 74, j'ai commencé mes divisions par 149, plus grand de l'unité que le double de 74; puis, continuant par 223, plus grand de l'unité que le triple de 74, j'ai trouvé que ledit radical est multiple de 223.

De ces abrégés j'en vois déjà naître un grand nombre d'autres et *mi par di veder un gran lume.*

Je vous entretiendrai un jour de mon progrès, si M. Frenicle me vient au secours et m'abrège par ce moyen ma recherche des abrégés. En tout cas, je vous conjure de faire en sorte que M. de Roberval joigne son travail au mien, puisque je me trouve pressé de beaucoup d'occupations qui ne me laissent que fort peu de temps à vaquer à ces choses.

Je suis etc.

XLI.

ROBERVAL A FERMAT.

SAMEDI 4 AOUT 1640.

(*Fa*, p. 165-166.)

MONSIEUR,

1. Encore que depuis près de trois ans je n'aie eu l'honneur d'avoir commerce avec vous, je n'ai pourtant pas été privé entièrement

(1) Probablement dans la partie perdue de la Lettre XXXIX.

du plaisir que je reçois de vos spéculations mathématiques, car le Père Mersenne m'a fait la faveur de me communiquer la plupart des lettres qu'il a reçues de vous depuis ce temps là, dans lesquelles j'ai reconnu une augmentation continuelle et très sensible en la beauté et solidité de vos pensées, auxquelles il n'y a rien que d'admirable, soit sur le sujet de la Géométrie ou de l'Arithmétique.

2. Sur tout je suis ravi de votre invention *de minimis et maximis* et du moyen (1) par lequel vous l'appliquez à la recherche des touchantes des lignes courbes, et ne crois pas que jusques ici il se soit vu rien sur ce sujet qui ne cédât de beaucoup à ce que vous nous en avez donné. Car l'invention de M. Descartes, à laquelle j'assigne le premier lieu après la vôtre, n'en approche que de bien loin, parce que, quoiqu'elle puisse être rendue universelle, ce qu'il n'a pas fait et le pourra maintenant à l'imitation de votre dernière addition, toutefois elle est sans comparaison plus longue, plus embarrassée et plus difficile.

3. Je vous dirai que j'ai d'autant plus admiré votre invention qu'à peine croyois-je que, pour trouver les touchantes des lignes courbes qui n'ont rapport qu'à d'autres courbes ou partie à des droites et partie à des courbes, on pût s'en servir, ce que M. Descartes avoue de la sienne sur le sujet de la *roulette* et autres lignes pareilles, lesquelles pour cette considération il rejette de la Géométrie (2) : sans raison, puisqu'à l'imitation de votre dernière addition, sa méthode peut être rendue universelle comme la vôtre, mais avec une difficulté, laquelle bien souvent ne se pourroit presque surmonter par un esprit humain.

4. Cette opinion fut cause que, quand je vis que vous aviez trouvé les touchantes de la roulette (3) et que vous assuriez avoir la règle universelle pour toutes les lignes courbes, je crus qu'elle ne pouvoit être autre que celle que j'avois inventée au temps même que j'inventai cette roulette, laquelle règle ou méthode je n'avois encore commu-

(1) *Voir* le Traité *Doctrinam tangentium*, Tome I, pages 158 à 167.
(2) *Géométrie* de Descartes, éd. Hermann, Paris, 1886, page 16.
(3) *Voir* Lettre XXXIV, 2.

niquée à personne, m'étant contenté d'en avoir démontré les effets à M. Pascal en la tangente de la *quadratrice* qui se trouvoit des plus difficiles, y joignant la démonstration géométrique, comme a fait Archimède en celle de la spirale, laquelle par ma méthode s'expédie en deux mots.

5. J'avois fait la même chose en la *cissoïde* et avois démontré, de plus, que ces deux lignes courbes sont infinies de leur nature et ont des asymptotes parallèles entre elles (1), ce qu'on m'a assuré avoir été déjà démontré par un auteur dont on ne m'a pu dire le nom.

6. J'ai aussi démontré les tangentes des lignes courbes qui se décrivent avec un compas sur la superficie d'un cylindre, puis se réduisent en plan, et en général celles de toutes les courbes qui ont pu venir à ma connoissance; et cette méthode est tellement différente de la vôtre (contre ma première opinion) qu'elles ne se ressemblent en rien qu'en la conclusion.

7. Depuis, M. Mydorge faisant quelques difficultés sur la vôtre, je lui en donnai la solution, et en même temps je lui ouvris les principes de la mienne et lui en fis voir un essai en la cissoïde. Si je sais que vous l'ayez agréable, je vous en écrirai. Elle n'est pas inventée avec une si subtile et si profonde géométrie que la vôtre ou celle de M. Descartes et, partant, elle paroît avec moins d'artifice; en récompense, elle me semble plus simple, plus naturelle et plus courte, de sorte que, pour toutes les touchantes dont j'ai parlé, il ne m'a pas même été besoin de mettre la main à la plume.

8. Depuis cette invention, je me suis appliqué aux lieux solides *ad tres et ad quatuor lineas*, lesquels j'ai entièrement restitués, quoique, pour n'y rien oublier, il ne faille guère moins de discours qu'aux six

(1) Roberval semble avoir considéré la *cissoïde* comme comprenant la courbe symétrique que l'on obtient en changeant le signe de x dans l'équation $y^2(a-x)=(a+x)^3$. Il est probable que les anciens entendaient également dans le même sens leur définition de cette courbe, mais, pas plus que pour la quadratrice, ils n'avaient considéré les branches en dehors du cercle $x^2+y^2=a^2$.

premiers Livres des Éléments. C'est de quoi je vous entretiendrai une autre fois, parce qu'il y a quelque chose qui me semble le mériter.

9. Ensuite j'ai considéré la percussion, le mouvement et les autres effets que cause quelque impression, soit violente ou naturelle, en quoi je ne crois pas avoir mal employé le temps, puisqu'en une matière si épineuse, encore ai-je découvert quelque chose de grande utilité, à ce que je pense, et laquelle je pourrai peut-être augmenter avec le temps.

10. J'oubliois presque à vous dire que les nombres, dont vous avez déjà découvert des propriétés admirables, contiennent de grands mystères; mais, pour les mieux découvrir, il faudroit être plusieurs ensemble, d'accord et sans jalousie, et desquels le génie fût naturellement porté à cette spéculation, ce qui est très difficile à rencontrer. Si ce sujet vous plaît, ou quelqu'un de ceux dont j'ai parlé ci-dessus, je prendrai aussi plaisir à le considérer plus particulièrement, espérant que vous me ferez part de vos inventions, de quoi je vous supplie en qualité de etc.

XLII.

FERMAT A ROBERVAL.

< AOUT 1640 >

(*Fa*, p. 161-162.)

MONSIEUR,

1. Après vous avoir remercié de vos civilités (1) et protesté que je serai ravi d'avoir des occasions à vous plaire, je vous supplierai de me faire part de votre invention sur le sujet des tangentes des lignes courbes et encore de vos spéculations méchaniques sur la percussion,

(1) Réponse à la Lettre précédente, XLI.

puisque vous me faites espérer la communication de vos pensées en cette matière.

2. Après cela, je vous dirai que M. Frenicle m'a donné depuis quelque temps l'envie de découvrir les mystères des nombres, en quoi il me semble qu'il est extrêmement versé. Je lui ai envoyé (1) les belles propositions sur les progressions géométriques qui commencent à l'unité, lesquelles j'ai non seulement trouvées, mais encore démontrées, bien que la démonstration en soit assez cachée, ce que je vous prie d'essayer, puisque vous les avez vues.

3. Mais voici ce que j'ai découvert (2) depuis sur le sujet de la proposition 12 du cinquième Livre de Diophante, en quoi j'ai suppléé ce que Bachet avoue n'avoir pas su, et rétabli en même temps la corruption du texte de Diophante, ce qui seroit trop long à vous déduire. Il suffit que je vous donne ma proposition et que je vous fasse plutôt souvenir que j'ai autrefois démontré (3) qu'*un nombre moindre de l'unité qu'un multiple du quaternaire n'est ni quarré, ni composé de deux quarrés, ni en entiers ni en fractions*. J'en demeurai pour lors là, bien qu'il y ait beaucoup de nombres plus grands de l'unité qu'un multiple du quaternaire, qui pourtant ne sont ni quarrés, ni composés de deux quarrés, comme 21, 33, 77, etc., ce qui a fait dire à Bachet sur la division proposée de 21 en deux quarrés : *quod quidem impossibile est, ut reor, cùm is neque quadratus sit, neque suapte natura compositus ex duobus quadratis*, où le mot de *reor* marque évidemment qu'il n'a point su la démonstration de cette impossibilité, laquelle j'ai enfin trouvée et comprise généralement dans la proposition suivante :

4. *Si un nombre donné est divisé par le plus grand quarré qui le mesure, et que le quotient se trouve mesuré par un nombre premier moindre*

(1) *Voir* Lettre XL, 6.
(2) *Voir* Tome I, *Observations* XXV et XXVI sur Diophante.
(3) Cette proposition avait été, en même temps que le second théorème énoncé Lettre XII, 3, envoyée par Mersenne à Descartes, le 22 mars 1638, comme démontrée par Fermat.

de l'unité qu'un multiple du quaternaire, le nombre donné n'est ni quarré, ni composé de deux quarrés, ni en entiers, ni en fractions.

Exemple : Soit donné 84. Le plus grand quarré qui le mesure est 4, le quotient 21, lequel est mesuré par 3 ou bien par 7, moindres de l'unité qu'un multiple de 4. Je dis que 84 n'est ni quarré, ni composé de deux quarrés, ni en entiers, ni en fractions.

Soit donné 77. Le plus grand quarré qui le mesure est l'unité; le quotient 77, qui est ici le même que le nombre donné, se trouve mesuré par 11 ou par 7, moindres de l'unité qu'un multiple du quaternaire. Je dis que 77 n'est ni quarré, ni composé de deux quarrés, ni en entiers ni en fractions. Etc.

Je vous avoue franchement que je n'ai rien trouvé en nombres qui m'ait tant plu que la démonstration de cette proposition, et je serai bien aise que vous fassiez effort de la trouver, quand ce ne seroit que pour apprendre si j'estime plus mon invention qu'elle ne vaut.

5. J'ai démontré ensuite cette proposition, qui sert à l'invention des nombres premiers :

Si un nombre est composé de deux quarrés premiers entre eux, je dis qu'il ne peut être divisé par aucun nombre premier moindre de l'unité qu'un multiple du quaternaire.

Comme, par exemple, ajoutez l'unité, si vous voulez, à un quarré pair, soit le quarré 10 000 000 000, lequel avec 1 fait 10 000 000 001. Je dis que 10 000 000 001 ne peut être divisé par aucun nombre premier moindre de l'unité qu'un multiple de 4, et ainsi, lorsque vous voudrez éprouver s'il est nombre premier, il ne faudra point le diviser ni par 3, ni par 7, ni par 11, etc.

6. Si ne faut-il pas oublier tout à fait la Géométrie. Voici ce qu'on m'a proposé et que j'ai trouvé tout aussitôt :

Per datum extra vel intra parabolen punctum, rectam ducere quæ abscindat segmentum a parabole æquale dato spatio. Et, si punctum sit intra parabolen, determinare minimum quod a parabole per dictum punctum abscindi possit spatium.

Si vous ne rencontrez pas d'abord la construction, je vous ferai part de la mienne.

J'attends de vos nouvelles et suis etc.

XLIII.

FERMAT A FRENICLE (1).

< AOUT? 1640 >

(A, f° 76.)

1. Soit par exemple la progression double depuis le binaire avec ses exposants au-dessus :

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
2	4	8	16	32	64	128	256	512	1024	2048	4096	8192	16384	32768	65536

Je dis que, si vous augmentez les nombres de la progression de l'unité, et que vous fassiez 3, 5, 9, 17, etc., tous les dits nombres progressifs ainsi augmentés, qui se trouveront avoir pour exposants des nombres qui ne sont pas de la dite progression double, seront nombres composés.

2. Bien qu'on puisse faire une anatomie particulière qui est trop longue à décrire, il suffit de vous faire comprendre, dans l'exemple qui suit, la proposition que j'y ai faite :

Soit le nombre progressif augmenté de l'unité 8193, duquel l'exposant est 13 nombre premier. Je dis que, si vous divisez 8193 par 3, le

(1) Fragment publié par M. Ch. Henry (*Recherches etc.*, p. 192-193) d'après le brouillon d'Arbogast. Il porte sur la copie au net le titre : *Sur les nombres premiers de Fermat à Frenicle*, et la mention : *D'après la copie de Mersenne.*

quotient ne pourra être divisé que par un nombre qui surpasse de l'unité ou le double de 13 exposant susdit, ou un multiple dudit double de 13, etc., à l'infini.

Que si l'exposant est un nombre composé, qui pourtant ne soit pas un de ceux de la progression double, je puis trouver tous les diviseurs fort aisément.

3. Mais voici ce que j'admire le plus : c'est que je suis quasi persuadé (1) que tous les nombres progressifs augmentés de l'unité, desquels les exposants sont des nombres de la progression double, sont nombres premiers, comme

3 5 17 257 65537 4 294 967 297

et le suivant de 20 lettres

18 446 744 073 709 551 617; etc.

Je n'en ai pas la démonstration exacte, mais j'ai exclu si grande quantité de diviseurs par démonstrations infaillibles, et j'ai de si grandes lumières, qui établissent ma pensée, que j'aurois peine à me dédire.

XLIV.

FERMAT A FRENICLE.

JEUDI 18 OCTOBRE 1640.

(*Fa*, p. 162-164.)

MONSIEUR,

1. Les vacations, qui m'ont éloigné de Toulouse, m'ont en même temps éloigné de mon devoir et empêché de vous écrire plus tôt depuis

(1) C'est là le plus ancien énoncé donné par Fermat de la célèbre proposition dont Euler a reconnu la fausseté. *Voir* Tome I, page 131, note 1. Le sixième nombre $(2^{32}+1)$ indiqué ici par Fermat comme premier est divisible par 641. Le septième $(2^{64}+1)$ est divisible par 274 177.

la dernière de vos lettres en date du 21 septembre (1). Je tâcherai de réparer par celle-ci la longueur de l'attente et commencerai par la liberté que je prends de vous dire que je n'ai point vu encore aucune proposition de votre part que je n'eûsse plus tôt trouvée et considérée; et afin de vous rendre vous-même juge de cette vérité, et vous ôter en même temps le scrupule que vous pourriez avoir, que je n'en use comme quelqu'un de ceux du lieu où vous êtes, qui s'attribue impunément les inventions d'autrui, après qu'elles lui ont été communiquées, je commencerai par la proposition (2) de la différence de deux quarrés, que vous trouverez dans Bachet sur le Diophante, au commentaire de la proposition 11 du deuxième Livre, en même façon que vous me l'avez envoyée, vous avouant pourtant que l'application, que j'estime beaucoup, est toute vôtre et que je l'ai apprise de vous.

2. Pour le sujet des progressions, je vous avois envoyé par avance (3) les propositions qui servent à déterminer les parties des puissances -1, et, par ma seconde Lettre (4), je vous avois fait comprendre que j'avois considéré toutes les propositions qui servent aux puissances $+1$, de quoi je m'étois contenté de vous donner deux exemples, dont l'un étoit démontré par moi et par conséquent connu nécessairement, et l'autre ne m'étoit point entièrement connu par raison démonstrative, bien que je vous assurasse que je n'en doutais pas.

Or, pour venir à la connoissance de ce dernier, quoiqu'imparfaite encore et non achevée, je ne le pouvois sans avoir plus tôt examiné et prouvé par démonstrations toutes leurs propositions contenues en votre dernière, ce que vous n'aurez nulle peine de croire, puisque le seul exemple que je vous envoyai le marquoit assez, auquel j'ajoutois qu'en toutes progressions on pouvoit déterminer les diviseurs communs et généraux avec pareille aisance.

Mais je vous avoue tout net (car par avance je vous avertis que,

(1) Lettre perdue.
(2) Construction de deux carrés entiers ayant une différence donnée.
(3) *Voir* Lettre XL, 6.
(4) Lettre XLIII.

comme je ne suis pas capable de m'attribuer plus que je ne sais, je dis avec même franchise ce que je ne sais pas) que je n'ai pu encore démontrer l'exclusion de tous diviseurs en cette belle proposition que je vous avois envoyée et que vous m'avez confirmée, touchant les nombres 3, 5, 17, 257, 65537, etc. Car, bien que je réduise l'exclusion à la plupart des nombres et que j'aie même des raisons probables pour le reste, je n'ai pu encore démontrer nécessairement la vérité de cette proposition, de laquelle pourtant je ne doute non plus à cette heure que je faisois auparavant. Si vous en avez la preuve assurée, vous m'obligerez de me la communiquer; car, après cela, rien ne m'arrêtera en ces matières.

3. Reste à vous parler de la proposition fondamentale des parties aliquotes, laquelle m'étoit tellement connue que je vous l'avois envoyée par la première lettre que je vous écrivis (1), laquelle on m'a dit depuis s'être égarée. Pourtant, si le Père Mersenne veut prendre le soin de la faire chercher dans le bureau de la poste, elle se trouvera dans un paquet que j'adressois à M. ... (2).

Outre que cette proposition est si naturelle, qu'il est impossible de déterminer et de trouver la moindre chose sur ce sujet, qu'elle ne se présente d'abord; de sorte qu'ayant depuis fort longtemps trouvé et envoyé les propositions des deux nombres 17 296 et 18 416 et autres pareilles (3), il falloit par nécessité que j'eusse passé par la dite proposition.

Pour votre application, il me semble qu'elle n'ôte pas la longueur que je trouvois en cette sorte de questions, qui est la seule difficulté que j'y ai toujours reconnue; sinon que je ne l'aie pas bien comprise, de quoi je vous prie m'avertir et me rendre certain.

4. Il me semble après cela qu'il m'importe de vous dire le fondement sur lequel j'appuie les démonstrations de tout ce qui concerne les progressions géométriques, qui est tel :

(1) Lettre perdue, qui doit avoir été écrite entre les Lettres XL et XLIII.
(2) Carcavi?
(3) *Voir* Pièce IV A.

Tout nombre premier (1) mesure infailliblement une des puissances -1 de quelque progression que ce soit, et l'exposant de la dite puissance est sous-multiple du nombre premier donné -1; et, après qu'on a trouvé la première puissance qui satisfait à la question, toutes celles dont les exposants sont multiples de l'exposant de la première satisfont tout de même à la question.

Exemple : soit la progression donnée

1	2	3	4	5	6	
3	9	27	81	243	729	etc.

avec ses exposants en dessus.

Prenez, par exemple, le nombre premier 13. Il mesure la troisième puissance -1, de laquelle 3, exposant, est sous-multiple de 12, qui est moindre de l'unité que le nombre 13, et parce que l'exposant de 729, qui est 6, est multiple du premier exposant, qui est 3, il s'ensuit que 13 mesure aussi la dite puissance $729-1$.

Et cette proposition est généralement vraie en toutes progressions et en tous nombres premiers; de quoi je vous envoierois la démonstration, si je n'appréhendois d'être trop long.

5. Mais il n'est pas vrai que tout nombre premier mesure une puissance $+1$ en toute sorte de progressions : car, si la première puissance -1, qui est mesurée par le dit nombre premier, a pour exposant un nombre impair, en ce cas il n'y a aucune puissance $+1$ dans toute la progression qui soit mesurée par le dit nombre premier.

Exemple : parce qu'en la progression double, 23 mesure la puissance -1 qui a pour exposant 11, le dit nombre 23 ne mesurera aucune puissance $+1$ de la dite progression à l'infini.

Que si la première puissance -1 qui est mesurée par le nombre

(1) C'est de cet énoncé qu'a été tirée la proposition connue sous le nom de *Théorème de Fermat*, à savoir que si p est premier et ne divise pas a, il divise $a^{p-1}-1$.

premier donné a pour exposant un nombre pair, en ce cas la puissance + 1 qui a pour exposant la moitié dudit premier exposant sera mesurée par le nombre premier donné.

6. Toute la difficulté consiste à trouver les nombres premiers qui ne mesurent aucune puissance + 1 en une progression donnée : car cela sert, par exemple, à trouver quels des nombres premiers mesurent les radicaux des nombres parfaits et à mille autres choses, comme, par exemple, d'où vient que la 37^e puissance — 1 en la progression double est mesurée par 223. En un mot, il faut déterminer quels nombres premiers sont ceux qui mesurent leur première puissance — 1 en telle sorte que l'exposant de la dite puissance soit un nombre impair, ce que j'estime fort malaisé, en attendant un plus grand éclaircissement de votre part et qu'il vous plaise d'étendre cet endroit de votre lettre, où vous dites qu'après avoir trouvé que le diviseur doit être multiple + 1 de l'exposant, il y a aussi des règles pour trouver le quantième des dits multiples + 1 de l'exposant doit être le diviseur.

7. Voici une mienne proposition (que peut-être vous aurez aussi trouvée) que j'estime beaucoup, bien qu'elle ne découvre pas tout ce que je cherche, que sans doute j'achèverai d'apprendre de vous :

En la progression double, si d'un nombre quarré, généralement parlant, vous ôtez 2 ou 8 ou 32 etc., les nombres premiers moindres de l'unité qu'un multiple du quaternaire, qui mesureront le reste, feront l'effet requis.

Comme de 25, qui est un quarré, ôtez 2; le reste 23 mesurera la 11^e puissance — 1.

Ôtez 2 de 49, le reste 47 mesurera la 23^e puissance — 1.

Ôtez 2 de 225, le reste 223 mesurera la 37^e puissance — 1; etc.

En la progression triple, si d'un nombre quarré *ut supra* vous ôtez 3 ou 27 ou 243 etc., les nombres premiers moindres de l'unité qu'un multiple du quaternaire, qui mesureront le reste, feront l'effet requis. Comme :

Ôtez 3 de 25, le reste 22 est divisé par 11, qui est premier et

moindre de l'unité qu'un multiple du quaternaire; aussi 11 mesure la 5^e puissance — 1.

Ôtez 3 de 121; le reste 118 est mesuré par 59 moindre de l'unité qu'un multiple du quaternaire; aussi 59 mesure la 29^e puissance — 1.

En la progression quadruple, il faut ôter 4 ou 64 ou 1024, etc. à l'infini en toutes progressions, en procédant de même façon.

8. J'ajouterai encore cette petite proposition.

Si d'un quarré vous ôtez 2, le reste ne peut être divisé par aucun nombre premier qui surpasse un quarré de 2.

Comme prenez pour quarré 1 000 000, duquel, ôté 2, reste 999 998. Je dis que le dit reste ne peut être divisé ni par 11, ni par 83, ni par 227 etc.

Vous pouvez éprouver la même règle aux quarrés impairs et, si je voulois, je vous la rendrois belle et générale; mais je me contente de vous l'avoir indiquée seulement.

9. Avant que finir, voici une autre proposition, laquelle vous fournira peut-être quelque application, comme vous y êtes très heureux.

Si un nombre est mesuré par un autre et que le nombre divisé soit encore divisé par un autre nombre moindre que le premier diviseur, en ce cas, si vous ôtez du quotient de la seconde division, multiplié par la différence des deux diviseurs, le reste de la seconde division, ce qui restera sera mesuré par le premier diviseur (1).

Exemple : 121 est mesuré par 11. Divisez encore 121 par 7; le quotient sera 17 et le reste de la division 2.

Multipliez le quotient 17 par 4, différence du premier et du second diviseur, et du produit 68 ôtez-en 2; reste 66 qui sera aussi mesuré par 11, premier diviseur.

10. Que si le second diviseur est plus grand que le premier, en ce

(1) C'est-à-dire que si l'on a

$$a = bq = b_1 q_1 + r,$$

si l'on a $b > b_1$, b divise $q_1(b - b_1) - r$. Si au contraire $b < b_1$, b divise $q_1(b_1 - b) + r$.

cas, si vous ajoutez au quotient de la seconde division, multiplié par la différence des deux diviseurs, le reste de la seconde division, ce qui restera sera mesuré par le premier diviseur.

Exemple : 117 est mesuré par 3. Divisez encore 117 par 4; le quotient sera 29 et le reste de la division 1.

Ajoutez au quotient 29, multiplié par la différence des diviseurs (qui ne change ici rien, parce que c'est l'unité), le reste de la dite division, qui est 1; la somme 30 sera aussi mesurée par 3, premier diviseur.

J'ai déjà trop écrit et il me semble qu'il est temps que vous parliez, après avoir employé si mal votre temps à lire cette longue lettre, qui vous confirmera que je suis etc.

XLV.

FERMAT A MERSENNE.

MARDI 25 DÉCEMBRE 1640.

(A, f^os 12-13 *bis*, B, f° 19.)

MON RÉVÉREND PÈRE,

1. Je languissois dans l'attente de vos lettres et de M. de Frenicle. Je suis bien aise qu'il approuve ce que j'ai fait (1); et afin qu'il ne soit plus en doute de ce que je lui demande, voici trois questions que je lui propose, pource que les spéculations que j'y ai faites ne me satisfont pas pleinement :

1° La raison essentielle pourquoi 3, 5, 17, 257, etc. à l'infini, sont toujours nombres premiers;

2° Qu'il me donne quelqu'un de ses autres moyens pour trouver

(1) La réponse de Frenicle à la Lettre XLIV est perdue.

à l'infini des nombres premiers de tels nombres de figures qu'on voudra.

Sur quoi je voudrois être éclairci si une de mes pensées est vraie, qu'en la progression d'un nombre pair, comme 6, toutes les puissances + 1 de la progression qui ont pour exposant : 1, 2, 4, 8, 16, etc. sont nombres premiers, si elles ne sont pas mesurées par un de ceux-ci : 3, 5, 17, 257, etc.; laquelle proposition, si elle est vraie, est de très grand usage.

Si je puis une fois tenir la raison fondamentale que 3, 5, 17, etc. sont nombres premiers, il me semble que je trouverai de très belles choses en cette matière, car déjà j'ai trouvé des choses merveilleuses dont je vous ferai part, après que j'aurai eu votre réponse et celle de M. Frenicle.

3° Je lui demande un moyen plus général que celui que j'ai inventé pour savoir quels sont les multiples de l'exposant utiles à la division.

Après cela, je travaillerai aux propositions que vous me demandez.

2. Sur le sujet des triangles rectangles (1), voici mes fondements :

1° Tout nombre premier, qui surpasse de l'unité un multiple du quaternaire, est une seule fois la somme de deux quarrés, et une seule fois l'hypoténuse d'un triangle rectangle.

2° Le même nombre et son quarré sont chacun une fois la somme de deux quarrés;

Son cube et son quarréquarré sont chacun deux fois la somme de deux quarrés;

Son carrécube et son cubecube sont chacun trois fois la somme de deux quarrés;

Etc., à l'infini.

3° Ce même nombre étant une fois l'hypoténuse d'un triangle rectangle, son quarré l'est deux fois, son cube trois, son quarréquarré quatre, etc. à l'infini.

(1) *Comparer*, Tome I, l'*Observation VII sur Diophante*.

4° Étant donné un nombre, pour savoir combien de fois il est l'hypoténuse d'un triangle rectangle, divisez-le par tous les nombres premiers, plus grands de l'unité qu'un multiple du quaternaire, qui le mesurent. Puis rangez les exposants des puissances des dits nombres premiers qui mesurent le nombre donné, en tel ordre que bon vous semblera, l'un après l'autre. Multipliez le premier par le second deux fois, et à cela ajoutez la somme du premier et du second; puis multipliez cette dernière somme deux fois par le troisième, et ajoutez au produit tant la dite dernière somme que le troisième, etc. à l'infini. La dernière somme marquera à combien de triangles le nombre donné peut servir d'hypoténuse.

Les nombres premiers qui sont moindres de l'unité qu'un multiple du quaternaire, ni 2, non plus que leurs puissances, ne font rien à la question, et n'augmentent ni ne diminuent le nombre des dits triangles rectangles.

Soit, par exemple, un nombre donné mesuré par 5, par le quarré de 13, par le cube de 17, et par le cube aussi de 29.

Nous aurons quatre diviseurs dont les exposants de leurs puissances, qui mesurent le nombre donné, sont :

1, 2, 3, 3.

Je multiplie le premier par le second deux fois : viendra 4; ajoutez-y le premier et le second : viendra 7. Je multiplie 7 par le troisième 3 deux fois : viendra 42, auquel ajoutant 7 et 3, c'est 52. Je multiplie 52 par le quatrième (qui est 3) deux fois : viendra 312, auquel ajoutant 52 et 3, viendra 367.

Je dis donc que le nombre donné sera l'hypoténuse de 367 triangles rectangles et non plus.

5° Pour trouver, par exemple, le moindre nombre de tous ceux qui sont 367 fois seulement l'hypoténuse d'un triangle rectangle, je double le nombre donné et au dit double j'ajoute l'unité : viendra 735, duquel je prends tous les diviseurs séparément. Quoiqu'un nombre mesure et par soi et par ses puissances, j'entends tous les diviseurs qui

sont nombres premiers; le dit nombre se trouve donc divisé aux dites conditions par 3, 5, 7, 7. J'ôte de chacun des dits diviseurs l'unité et prends la moitié du reste : viendra 1, 2, 3, 3.

Il faut donc prendre quatre nombres premiers plus grands de l'unité qu'un multiple du quaternaire, et prendre leurs puissances exposées par les dits quatre nombres. En quoi faisant, vous satisferez à la question généralement en multipliant les dites quatre puissances entre elles.

Que si vous voulez le moindre nombre satisfaisant à la question, il faudra prendre les quatre plus petits nombres premiers de la qualité requise, qui sont : 5, 13, 17, 29, et pour leurs puissances, il faut que celle du plus petit ait le plus grand exposant, et ainsi des autres. Nous prendrons donc le cube de 5, le cube de 13, le quarré de 17, et 29, et multipliant tous les uns par les autres, nous aurons le moindre nombre de tous ceux qui servent d'hypoténuse à 367 triangles rectangles et non plus.

3. Il s'ensuit de là que si le double du nombre donné, plus 1, est nombre premier, en ce cas le nombre cherché ne peut être divisé que par un seul nombre premier plus grand de l'unité qu'un multiple du quaternaire.

Comme si vous demandez un nombre qui serve d'hypoténuse à 20 triangles rectangles et non plus, pource que 41 est nombre premier, il faut prendre la 20e puissance d'un nombre premier de la qualité requise.

Vous trouverez, par conséquence aisée, un nombre qui ait autant de diviseurs différents que vous voudrez et qui puisse satisfaire à la question, lorsqu'elle est possible. J'entends des diviseurs de la qualité requise, car vous y en pouvez mettre, comme nous avons dit, autant que vous voudrez de ceux qui sont moindres de l'unité qu'un multiple de 4, ou bien 2 et telle de ses puissances que vous voudrez.

Je vous écris ceci si fort à la hâte que je ne prends pas garde si je fais des fautes, et omets beaucoup de choses dont je vous dirai le menu une autre fois.

4. Pour la *question des ellipses* (1), elle se déduira fort aisément de ce que vous venez de voir, car la question va là *à trouver un nombre qui serve d'hypoténuse à 12 triangles et non plus, de telle qualité que la dite hypoténuse ait plus grande proportion au plus grand des deux autres côtés que le dit plus grand au moindre :* c'est-à-dire que chacun des dits triangles soit comme, par exemple, 29, 21, 20. Ce qui est aisé, et ayant trouvé le dit nombre, son quarré sera le demi-diamètre des ellipses.

Il le faut quarrer, afin que la perpendiculaire sur le foyer soit un nombre entier. J'en dis assez pour me faire entendre à M. Frenicle.

5. J'ajoute encore qu'une toute pareille règle à la précédente des hypoténuses sert à cette question :

Étant donné un nombre, déterminer combien de fois il est la différence de deux nombres desquels le produit est un nombre quarré.

Et n'y a que cette différence, qu'en cette question tous les nombres premiers hormis 2 sont utiles, ce qui n'est pas en la précédente des hypoténuses.

Comme, si un nombre est mesuré par 3 et par le quarré de 5, les exposants étant 1 et 2, multipliez le premier par le second deux fois, à quoi ajoutant leur somme, viendra 7. Vous pouvez donc assurer que 75 est 7 fois la différence de deux nombres desquels le produit fait un quarré.

Pour avoir le plus petit, vous userez de même voie.

Or, pour trouver tous les triangles et aussi les dits nombres en cette

(1) *Voir* sur cette question, antérieurement proposée par Frenicle à Descartes, les *Lettres* de ce dernier, du 20 décembre 1638 (éd. Clerselier, II, 95), du 9 février 1639 (II, 97), du 30 avril 1639 (III, 84). Frenicle avait demandé de construire sur le même grand axe $(2a)$ un nombre déterminé d'ellipses telles que pour chacune la distance des foyers $(2c)$ fût supérieure au petit axe $(2b)$ et qu'on pût exprimer en nombres entiers le grand axe, le petit axe, la distance $(a - c)$ d'un foyer au sommet voisin, et l'excès $\left(\frac{a^2 + c^2}{a}\right)$, sur la distance des foyers, de la distance de l'un d'eux à l'extrémité de l'ordonnée passant par l'autre.

question, la chose est assez aisée, de quoi je vous écrirai séparément, si vous voulez.

De cette dernière question, on peut tirer l'invention d'hyperboles au lieu d'ellipses, etc.

Dès que M. de Frenicle m'aura écrit, je lui donnerai des propositions que je juge, sans me flatter, qu'il estimera incomparablement plus belles que tout ce dont nous avons encore parlé.

Je suis,

Mon Révérend Père,

Votre très humble serviteur,

FERMAT.

A Toulouse, ce 25 décembre 1640.

ANNÉE 1641.

XLVI.

FERMAT A MERSENNE (1).

MARDI 26 MARS 1641.

(A, f° 34; B, f° 24 v°.)

Mon Révérend Père,

1. Les occupations que les procès nous donnent sur la tête m'ont empêché de pouvoir lire à loisir les Traités (2) que vous m'avez fait la faveur de m'envoyer. Je me réserve d'y vaquer avec soin aussitôt après Pâques, et ce sera alors que je vous satisferai et vous marquerai avec liberté mes sentiments.

2. Je suis toujours dans l'attente de la réponse de M. de Frenicle (3), et en tout cas, vous m'obligerez de me renvoyer ma démonstration (4) pource que je n'en ai point gardé de copie. Comme aussi je serai bien aise qu'il vous plaise m'envoyer ma copie de mon *Isagoge ad locos*, de

(1) Lettre inédite.

(2) Mersenne faisait alors notamment circuler (*Lettres de Descartes*, éd. Clerselier, II, 44, du 28 octobre 1640 à Mersenne; MS. B, f° 29 v° et suiv., lettre inédite de Pujos à Mersenne du 9 mai 1641), avec l'opuscule de Fermat *Doctrinam tangentium* (Tome I, p. 158 et suiv.) : 1° un Traité *des cercles qui se font dans l'eau;* 2° un autre *pour le mouvement journalier de la terre;* 3° la lettre de Beaugrand contre Desargues (*Œuvres de Desargues*, éd. Poudra, II, p. 355 et suiv.).

(3) Réponse à la Lettre XLV?

(4) Démonstration perdue.

son *Appendix* et *De inventione tangentium in curvis* (1), m'étant engagé envers M. Despagnet de les lui faire voir.

3. Excusez l'importunité à laquelle je me trouve engagé par ma négligence. Voici, en revanche de la peine que je vous donne, une belle proposition tirée de mes Lieux *ad superficiem* (2) et qui n'est qu'une suite d'une des propositions du Traité entier :

Soit une sphère donnée et en icelle décrit un solide régulier. Je dis que, si vous prenez un point à discrétion dans toute la superficie de la sphère, et que de ce point vous tiriez des lignes à tous les angles du solide régulier, les quarrés de toutes ces lignes pris ensemble seront égaux à un espace donné.

Comme, si vous en désirez un exemple, soit une sphère donnée et en icelle décrit un tétraèdre. Je dis que, si vous prenez un point à discrétion dans toute la surface de la sphère, et que de ce point vous tiriez quatre lignes aux quatre angles du tétraèdre, les quarrés de ces quatre lignes pris ensemble feront un espace qui sera double du quarré du diamètre de la sphère. Etc.

La démonstration n'est pas malaisée et se tire facilement de celle d'une autre proposition que j'envoyai il y a longtemps à M. de Roberval (3).

Je suis, mon Révérend Père,

Votre très humble et très affectionné serviteur,

Fermat.

A Toulouse, ce 26 mars 1641.

(1) *Voir* Tome I, pages 91 et suiv.; 103 et suiv.; 158 et suiv.; le dernier titre doit en effet désigner l'écrit *Doctrinam tangentium*.

(2) *Voir* Tome I, pages 111 et suiv. L'énoncé qui suit est un cas particulier du théorème général : *Si a quotcumque punctis*, page 113.

(3) *Voir* Lettre XIX.

XLVII.

FERMAT A MERSENNE (1).

SAMEDI 15 JUIN 1641.

(A, f° 14; B, f° 15 v°.)

MON RÉVÉREND PÈRE,

1. Je tâche de contenter assez amplement la curiosité de M. de Frenicle par la Lettre que vous trouverez dans votre paquet (2). Il m'a pourtant demandé la solution d'une question (3) que je différe de lui envoyer jusqu'à ce que je serai de retour à Toulouse, me trouvant présentement à la campagne où j'aurois besoin de beaucoup de temps pour refaire ce que j'ai écrit sur ce sujet et que j'ai laissé dans mon cabinet.

Voici pourtant un échantillon de cette question générale, que vous lui pourrez faire voir par avance :

En la progression de 3, tous les nombres premiers, qui sont différents par l'unité d'un multiple de 12, mesurent seulement les puissances -1. Tels sont : 11, 13, 23, 37, etc.

En la même progression, les nombres premiers, qui sont différents par 5 d'un multiple de 12, mesurent les puissances $+1$. Tels sont : 5, 17, 19, etc.

En la progression de 5, tous les nombres premiers, qui finissent par 1 ou par 9, mesurent seulement des puissances -1. Tels sont : 11, 19, etc.

Ceux qui finissent par 3 ou par 7 mesurent des puissances $+1$. Tels sont : 7, 13, 17, etc.

Vous aurez une autre fois la règle générale en toute sorte de progressions.

(1) Lettre inédite.
(2) *Voir* Pièce XLVIII ci-après.
(3) *Voir* Lettres XLVIII, **12** et XLIX, **12**.

2. J'attends maintenant qu'il vous plaise m'envoyer la copie de mes Traités (1) que je vous ai si souvent demandée pour M. Despagnet.

Je suis, mon Révérend Père,

Votre très humble et très affectionné serviteur,

FERMAT.

Ce 15 juin 1641.

3. Depuis avoir écrit la lettre de M. Frenicle, j'ai trouvé la dernière question que je lui fais (2) :

Étant donné un nombre, déterminer combien de fois il peut être la somme des deux petits côtés d'un triangle rectangle.

S'il la veut, je lui en ferai part, et serai cependant bien aise de voir sa solution.

XLVIII.

FERMAT A FRENICLE (3).

< 15 JUIN 1641 >

(B, f° 26 v°-28 r°.)

1. La proposition fondamentale des triangles rectangles est que tout nombre premier, qui surpasse de l'unité un multiple de 4, est composé de deux quarrés (4).

(1) *Voir* Lettre XLVI, **2**.
(2) *Voir* Lettre XLVIII, **11**.
(3) Cette pièce inédite, reproduite d'après une copie qui ne porte ni adresse ni date, ne doit être considérée que comme un extrait d'une Lettre de Fermat. Cette Lettre était évidemment adressée à Frenicle, dont nous avons la réponse (ci-après XLIX), datée du 2 août 1641. Le post-scriptum de la Lettre XLVII ci-avant, adressée à Mersenne le 15 juin 1641, prouve d'ailleurs que le présent extrait a bien été fait sur la Lettre pour Frenicle, mise par Fermat dans le paquet envoyé à cette date au Minime. L'auteur de l'extrait n'a copié que ce qui lui a paru avoir un intérêt mathématique et a négligé toutes les transitions d'une question à l'autre.
(4) *Voir* Lettre XLV, **2**.

2. La méthode pour trouver les triangles composés en conséquence des primitifs est dans les Livres (1), ou s'en peut tirer aisément :

Soit le nombre donné 65, lequel je trouve être l'hypoténuse de quatre triangles, par la règle déjà envoyée (2). Les nombres premiers de la qualité requise qui le composent sont 5 et 13. Le triangle (3) de 5 est 5, 4, 3; celui de 13 est 13, 12, 5.

Je multiplie la base 12 par la base 4, vient 48; puis le petit côté 5 par l'autre 3, vient 15; et derechef 12 par 3, en croix, vient 36; puis 4 par 5, vient 20.

La somme des deux premiers produits et la différence des deux seconds font les deux petits côtés d'un des triangles cherchés, qui sera par conséquent : 65, 63, 16.

Et derechef la somme des deux derniers produits et la différence des deux premiers sont les deux petits côtés d'un autre des triangles cherchés, qui sera partant : 65, 56, 33.

(Que si, au lieu de 13, 12, 5, vous aviez pris le même 3, 4, 5, en faisant la même opération, vous n'eussiez trouvé qu'un seul triangle qui est, en mon précédent exemple : 25, 24, 7.)

Les deux autres triangles sont semblables aux deux premiers et se font, l'un en multipliant les côtés du premier par l'hypoténuse du second, et l'autre en multipliant les côtés du second par l'hypoténuse du premier; ils sont donc : 65, 52, 39; 65, 60, 25.

3. Cette méthode est générale, de sorte que toute la difficulté consiste à trouver les triangles primitifs, lorsque le nombre premier qui leur sert d'hypoténuse est donné, et cette question se réduit à la suivante déjà proposée (4) :

Étant donné un nombre premier qui surpasse de l'unité un multiple de 4, trouver les deux quarrés qui composent le dit nombre.

(1) Fermat va simplement en effet exposer la méthode de Diophante, III, **22**, pour construire quatre triangles ayant une même hypoténuse.

(2) Dans la Lettre XLV, **2**, 4°.

(3) Le triangle qui a 5 pour hypoténuse.

(4) Probablement dans un passage non conservé de la présente Lettre.

Car si l'on n'a ces deux quarrés, on ne sauroit trouver le triangle primitif. Mais ce problème, de trouver ces deux quarrés, est aussi malaisé que de tâtonner, et l'ordre de la proposition précédente est grandement difficile.

4. Soit un nombre impair donné, comme 15, les couples des nombres sous lesquels il est produit sont 1, 15, et 3, 5. Chacun de ces deux couples le fait être un des petits côtés d'un triangle rectangle, car le premier couple (1) produit le triangle : 113, 112, 15; et le second couple produit le triangle : 17, 15, 8 (j'entends des triangles non composés).

Au premier de ces triangles, 15 est le plus petit côté, au second, le moyen. *On demande quelle est la proportion des deux côtés qui produisent un nombre impair, au-dessus de laquelle le dit nombre impair soit le petit côté, et au-dessous le moyen.*

Je réponds qu'il est impossible de le déterminer exactement en nombres entiers, parce que l'équation d'algèbre produit des nombres irrationaux, quoiqu'on en puisse approcher à l'infini de plus en plus par nombres entiers.

Par exemple : si les deux côtés qui produisent l'impair sont entre eux en proportion moindre que de 2 414 213 à 1 000 000 ou égale, le nombre impair fera le moyen côté; que si les deux côtés qui produisent l'impair sont en proportion plus grande que de 2 414 214 à 1 000 000 ou égale, le nombre impair fera le petit côté.

On peut approcher ces deux proportions à l'infini, mais non en termes précis; elle sera (2) en termes irrationaux, savoir de 1 à 1 + Rq. de 2.

5. Il y a des triangles qui se peuvent diviser en deux, et subdiviser

(1) En thèse générale, suivant le langage de Diophante, un triangle rectangle en nombre a, b, c, est dit formé des deux nombres p et q, si l'on a

$$a = p^2 + q^2, \qquad b = p^2 - q^2, \qquad c = 2pq,$$

relations qui entraînent l'égalité $a^2 = b^2 + c^2$. Mais ici, comme Fermat veut des nombres premiers entre eux et que a, b, c seraient pairs, il prend leurs moitiés.

(2) Fermat renverse la proportion qu'il a indiquée plus haut.

en quatre, seize et ainsi tant que l'on veut, toutes les lignes des divisions demeurant commensurables en nombres entiers (1).

Si l'on entend que l'aire du triangle est double, comme celle de 17, 15, 8, qui est double de l'aire de 13, 12, 5, cela est aisé et se peut ainsi énoncer :

Étant donnés deux nombres entiers, trouver deux triangles, desquels les aires soient en proportion de deux nombres donnés.

Il y a quatre règles pour soudre cette question en ce sens (2).

6. Il y a des triangles dont les moindres côtés ne diffèrent jamais que de l'unité, comme 3, 4, 5; 20, 21, 29, lesquels se forment sur un des termes par règle infaillible à l'infini. Car il ne faut qu'ajouter le double de l'hypoténuse à la somme des deux autres côtés, et le tout, ajouté au moindre côté, fait le côté moindre du triangle requis. Ajoutez-y l'unité, vous aurez le moyen.

Exemple : le double de 29 est 58; ajoutez-y la somme des deux petits côtés, savoir 41, vient 99, auquel ajoutez 20, qui est le petit côté; vient 119, auquel ajoutez l'unité, vous aurez 119 et 120 pour les deux moindres côtés du triangle requis, qui sera : 119, 120, 169.

L'hypoténuse se fait du triple de l'hypoténuse et du double de la somme des deux autres côtés. Le triple de l'hypoténuse est 87, le double de la somme des autres côtés 82, lequel, avec 87, fait 169, qui est l'hypoténuse requise.

Nous avons donc tiré du triangle : 20, 21, 29, celui-ci : 119, 120, 169; de celui-ci, nous en tirerons un autre à l'infini.

Même méthode pour trouver un triangle, la différence des moindres côtés duquel soit un nombre donné. J'omets les règles et les limitations pour trouver tous les possibles de la qualité requise, car la règle est aisée, en supposant les fondements.

7. Il y a des triangles auxquels le moindre côté est toujours différent d'un quarré de chacun des deux autres, comme 20, 21, 29.

(1) *Voir* Lettre XLIX, 4.

(2) *Voir* l'Observation XXIX sur Diophante et ci-après, 10, la première de ces règles.

Trouvez, par la précédente, un triangle non composé, les côtés moindres duquel diffèrent par un quarré, comme 20, 21, 29 ou tel autre.

S'il a les qualités requises, il en faut tirer deux de celui-ci par la méthode précédente, et le second qui viendra satisfera à la proposition.

Et s'il n'a pas les conditions requises, le premier qui s'en tirera, par la précédente, satisfera à la proposition.

Comme : 3, 4, 5 ne satisfait qu'à la précédente et non à celle-ci. Le premier qui s'en tirera y satisfera, à savoir : 29, 21, 20, et si de celui-ci vous en tirez un, viendra 119, 120, 169, qui ne satisfait pas à cette question; mais celui qui s'en tirera, à savoir : 985, 697, 696, et ainsi à l'infini, alternativement, y satisfera.

8. Il y en a d'autres qui pris par couples ont leurs différences relatives (1) comme 11, 60, 61 et 119, 120, 169.

Pour les former, il faut trouver trois quarrés en proportion arithmétique, qui sont par exemple : 1, 25, 49. Formez l'un des triangles de la somme des côtés des premier et deuxième quarrés et du côté du second, et formez l'autre triangle de la somme des deux côtés du second et du troisième, et du côté du deuxième, vous aurez les deux triangles requis.

Autre exemple (2) : Soient exposés les trois quarrés en proportion arithmétique 49, 169, 289.

Les deux triangles se formeront de 20 et 7 et de 30 et 7, et seront

449, 351, 280; 949, 851, 420.

9. Trouver un nombre qui soit autant de fois qu'on voudra polygone et non plus (3).

(1) C'est-à-dire deux triangles rectangles en nombres (a, b, c) (a_1, b_1, c_1), tels que l'on ait $a - b = b_1 - c_1$ et $b - c = a_1 - b_1$.

(2) Fermat commet dans cet exemple une erreur de plume. Car, d'après sa règle, ayant les carrés 7^2, 13^2, 17^2, il devait former les triangles, l'un de $7 + 13 = 20$ et de 13, l'autre de $13 + 17 = 30$ et de 13; il aurait ainsi trouvé les triangles 569, 520, 231 et 1069, 780, 731, satisfaisant au problème proposé. *Voir* ci-après, XLIX, 6.

(3) Question proposée par Fermat à Freniele. *Voir* Lettre XLIX, 7.

10. Trouver deux triangles dont les aires soient en proportion donnée (1).

Voici la règle la plus élégante :

Soient les deux nombres qui expriment la proportion donnée, a et b. Les deux triangles se forment : le premier, de a bis $+ b$ et de $a - b$; le second, de b bis $+ a$ et de $a - b$.

Vous aurez donc deux triangles qui seront par leurs aires en proportion donnée. Car, si vous les demandez de 5 à 3, les deux triangles se formeront, le premier de 13 et 2, le second de 11 et 2, et les deux triangles seront : 173, 165, 52 | 125, 117, 44.

11. Étant donné un nombre, trouver combien de fois il peut être la somme des deux petits côtés d'un triangle rectangle (2).

12. Règle pour déterminer les nombres premiers qui, en toute progression, mesurent les puissances $- 1$ seulement, ou $+ 1$ aussi (3).

XLIX.

FRENICLE A FERMAT (4).

VENDREDI 2 AOUT 1641.

(*Fo*, p. 165-168.)

MONSIEUR,

1. J'étois dans l'impatience de savoir votre retour à Toulouse, pour me donner l'honneur et le contentement de continuer nos conférences, lorsque le Révérend Père Mersenne m'en a donné avis; j'espère qu'elles dureront plus longtemps que je ne pensois, parce qu'il est survenu quelque chose qui m'arrête ici.

(1) *Voir* plus haut, 5.
(2) Question proposée par Fermat à Frenicle. *Voir* Lettre XLVII, 3, et XLIX, 9.
(3) Question proposée par Frenicle à Fermat. *Voir* Lettre XLVII, 1, et XLIX, 12.
(4) Réponse à la Lettre précédente, XLVIII.

2. J'ai mille remerciements à vous faire de la limitation des côtés que vous m'avez envoyée (1), laquelle véritablement je prise fort. J'avois bien reconnu que la proportion étoit irrationelle et pour cela je m'étois contenté des raisons de 10 à 24 et à 25, mais vous l'entendez ici à l'infini. J'avois cru, par la lecture de votre précédente (2), par laquelle vous mandiez qu'il étoit aisé de la trouver, que vous prétendissiez de donner une raison rationelle pour cette limitation; c'est ce qui m'avoit fait dire que peut-être ne la trouveriez-vous pas si facile, parce que je la savois être impossible.

Je sais que l'Algèbre de ce pays-ci n'est pas propre pour soudre ces questions, ou pour le moins on n'a pas encore ici trouvé la manière de l'y appliquer : c'est ce qui me fait croire que vous vous êtes fabriqué depuis peu quelque espèce d'Analyse particulière pour fouiller dans les secrets les plus cachés des nombres, ou que vous avez trouvé quelque adresse pour vous servir à cet effet de celle que vous aviez accoutumé d'employer à d'autres usages.

Si la démonstration de cette limitation étoit courte, vous m'obligeriez beaucoup de me l'envoyer : car, si elle est trop longue, je ne voudrois pas que vous vous détournassiez de vos études à cette occasion.

Cette même raison, de 1 à $1 + \sqrt{2}$, se peut aussi appliquer à la proportion des côtés des quarrés qui composent l'hypoténuse, mais en un sens contraire à celui des parties plus prochaines du côté impair, comme aussi elle se peut appliquer aux nombres qui composent la moitié des côtés pairs, au même sens qu'aux parties des impairs.

3. Je viens maintenant à ce qui regarde les triangles.

Les méthodes (3) que vous donnez, tant pour trouver les quarrés que les côtés des triangles qui appartiennent aux hypoténuses composées, sont véritablement fort belles, et vous avez la méthode de si bien disposer vos règles, que cela leur donne une certaine grâce qui les fait encore agréer davantage, mais elles ne suivent pas mon intention, car

(1) *Voir* XLVIII, 4.
(2) Lettre perdue.
(3) *Voir* XLVIII, 2.

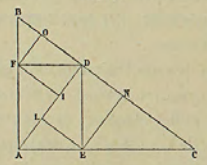
je n'ai point entendu qu'on se servit des quarrés ni des triangles des parties des hypoténuses composées, mais seulement des dites parties.

Par exemple, je demande une manière de trouver que 65 est composé des quarrés 64, 1 et 49, 16, supposant seulement qu'il a 5 et 13 pour les parties premières, sans employer à cet effet les quarrés 4 et 1, ni les côtés 3 et 4, non plus que ceux qui appartiennent à 13.

4. Des quatre propriétés des triangles que je vous avois proposées, vous avez fort bien trouvé la deuxième (1); pour les trois autres, vous n'avez pas suivi mon intention. Partant, il faut que je m'éclaircisse plus que je n'avois fait.

La première est facile (2) : Que le triangle rectangle soit ABC (*fig.* 78); il le faut diviser en deux triangles ABD, ADC avec la perpendiculaire AD; et derechef le triangle ADC en deux triangles EDC, EDA par la perpendiculaire DE et l'autre pareillement ABD en deux, savoir ADF, BDF, par la perpendiculaire DF; et derechef les triangles BDF, ADF, ADE, DEC par les autres perpendiculaires FO, FI, EL, EN; et continuer ainsi tant qu'on voudra et faire que toutes les lignes et sections d'icelles, comme AL, LI, ID, BO, OD, DN, NC, soient nombres entiers.

Fig. 78.



5. Vous donnez par après (3) les triangles dont le moindre côté est différent d'un quarré de chacun des deux autres : je sais bien que la

(1) Lettre XLVIII, 6.
(2) Lettre XLVIII, 5.
(3) Lettre XLVIII, 7.

moitié de ceux qui ont 1 pour différence de leurs petits côtés ont aussi cette propriété, savoir ceux qui commencent par un nombre pair (1), mais je n'attendois pas que vous dussiez vous servir de ceux-là, espérant que vous donneriez le moyen de les trouver tous; et, afin d'exclure les susdits, on pourroit ainsi proposer le problème :

Donner tous les triangles qui ont un quarré pour différence de leur petit côté à chacun des deux autres côtés, en sorte que l'une des différences ne puisse pas mesurer l'autre.

6. Pour l'autre propriété des triangles (2), qui est d'avoir un autre triangle relatif en différences, en sorte que la différence des deux grands côtés du premier soit celle des deux petits côtés du second, et la différence des deux petits côtés du premier soit celle des deux grands côtés du second, comme on voit aux triangles :

$$\begin{matrix} & 49 & & & & & & 1 & & & 49 & \\ 11 & & 60 & & 61 & \Big| & 119 & & 120 & & 169, \end{matrix}$$

vous n'avez pas considéré attentivement cette proposition, car les triangles que vous donnez :

$$\begin{matrix} & 98 & & & & & & 98 & & 431 & \\ 449 & & 351 & & 280 & \Big| & 949 & & 851 & & 420, \end{matrix}$$

n'ont pas cette propriété, mais en ont une autre, qui est que les grands côtés de chacun ont pareille différence, savoir 98, et en outre que les deux hypoténuses ont pareille différence que les deux grands côtés. Mais ce n'est pas ce que je demande, car aux triangles

$$\begin{matrix} & 49 & & & & & & 1 & & & 49 & \\ 11 & & 60 & & 61 & \text{et} & 119 & & 120 & & 169, \end{matrix}$$

vous voyez que 120 et 169 n'ont pas même différence que 60 et 61, ni 61 et 169 même différence que 60 et 120. Il faudroit donc, pour satisfaire à la question, qu'en vos triangles il y eût même différence de 449 à 351 que de 851 à 420, et de 351 à 280 que de 949 à 851.

(1) C'est-à-dire dont le plus petit côté est pair.
(2) Lettre XLVIII, 8. *Voir* les notes.

7. Vous me proposez par après (1) de *trouver un nombre qui soit polygone autant de fois qu'on voudra et non plus.*

Je vous dirai qu'il y a quelques années que je m'étois mis à la recherche de cela, mais à peine eus-je commencé, que je m'avisai que les figures qui sont maintenant en usage sont si extravagantes, lorsqu'on les veut mettre en pratique, j'entends quand on les veut représenter avec des jetons ou des points, qu'on les nommeroit plus à propos chimères ou grotesques que figures, lesquelles, si elles ne sont entièrement régulières, au moins doivent-elles en approcher le plus que faire se peut.

Cela fut cause que je quittai ce que j'avois commencé pour me mettre à réformer ces figures, et Dieu m'a fait la grâce d'y réussir en quelque façon, car j'ai trouvé une manière de faire des figures régulières en nombres d'une infinité de sortes, et d'autres aussi qui n'ont point d'angles *ingrédiens*, de tant de côtés qu'on voudra. J'ai ensuite considéré quelques-unes de leurs propriétés et ce qui dépend d'icelles, de sorte que je ne me suis pas beaucoup arrêté aux figures communes, que je nommerois plutôt progressions de triangles que figures, à cause de l'assemblage des triangles par lequel elles sont formées. Je crois bien que ce n'est pas de ces nouvelles figures dont vous voulez parler, car possible ne vous en êtes-vous pas encore avisé; mais pour les communes, on peut considérer votre question en deux manières :

8. La première, si le nombre demandé est plusieurs fois polygone, de telle sorte qu'il enveloppe tous les polygones inférieurs, c'est-à-dire que, si ce nombre est, par exemple, heptagone, il doive aussi être hexagone, pentagone, quarré et triangle. Et ainsi, pour avoir un nombre qui fût sept fois polygone, il en faudroit donner un qui fût figure de 9, 8, 7, 6, 5, 4 et 3 côtés; ce qui seroit à la vérité fort difficile, et il faudroit un nombre fort grand pour y satisfaire, car les nombres

(1) *Voir* Lettre XLVIII, 9. Cette question dérive de celle qui termine le Livre *Des nombres polygones* de Diophante. Fermat ne paraît pas être jamais arrivé à une solution qui l'ait satisfait.

qui sont seulement triangles, quarrés et pentagones deviennent incontinent fort grands, et c'est à cela que j'avois commencé à travailler.

L'autre considération est qu'un nombre soit polygone en plusieurs façons, sans se soucier si les polygones sont de suite ou non. Je n'ai pas encore recherché cela; si vous l'avez trouvé, vous m'obligerez de me le communiquer.

9. L'autre question que vous me faites (1) contient deux problèmes :

L'un de *choisir un nombre qui soit la somme des deux petits côtés de tant de triangles qu'on voudra et non plus;*

L'autre est de *déterminer à combien de triangles un nombre donné est la somme des deux petits côtés.*

Pour soudre ces problèmes, il faut considérer que tout nombre premier, différent de l'unité d'un nombre divisible par 8, est la somme des deux petits côtés d'un triangle, et tout nombre qui est la somme des deux petits côtés d'un triangle auquel les côtés sont premiers entre eux, diffère de l'unité d'un nombre divisible par 8.

Sur ces fondements, il faut faire la même chose avec ces nombres qu'on feroit sur les nombres premiers pairement pairs $+1$, pour trouver ce qui est requis par les problèmes, si on demandoit des hypoténuses au lieu de la somme des deux petits côtés. Il seroit superflu de déduire cela plus au long : *intelligenti loquor.*

10. Si votre méthode est autre que celle-là, vous m'obligerez de me la communiquer, et aussi de quelle façon se pourroit trouver le triangle, ayant seulement la somme de ses petits côtés sans avoir les quarrés et doubles quarrés dont elle est la différence. Car ces sommes ont cette propriété d'être toujours deux fois la différence d'un quarré et d'un double quarré; et, si cette somme est un nombre composé d'autres de même nature, comme 119 composé de 17 et 7, il sera quatre fois la différence d'un quarré et d'un double quarré.

Il faudroit aussi trouver la même chose pour l'enceinte entière des triangles que pour la somme des deux petits côtés.

(1) *Voir* Lettre XLVIII, 11.

11. Sur le sujet des triangles, voici ce que je vous proposerai encore :

Une hypoténuse composée étant donnée avec les quarrés premiers entre eux qui la composent par leur addition, trouver ses parties.

Que 221 soit l'hypoténuse donnée avec les quarrés qui la composent, savoir : 100, 121 et 196, 25, il faut trouver par le moyen d'iceux que 221 a 13 et 17 pour parties.

12. J'attends de vous la manière (1) de trouver les nombres premiers qui ne mesurent que les puissances — 1 en toute analogie, et principalement en celle de 2.

Je suis etc.

L.

FRENICLE A FERMAT (2).

VENDREDI 6 SEPTEMBRE 1641.

(*Va*, p. 169-173.)

MONSIEUR,

1. Votre règle (3) pour trouver les triangles pareils à 11, 60, 61 et 119, 120, 169, est fort bonne; je m'étois seulement arrêté à l'exemple, sans la considérer autrement.

2. Mais celle que vous mettez ensuite, pour les triangles dont le moindre côté diffère d'un quarré des deux autres (4), sert à la vérité pour trouver quelques-uns de ces triangles, mais non pas pour les trouver tous, ainsi que vous prétendez : car, prenant tous les nombres qui sont en proportion comme le quarré + 1 de quelque nombre au

(1) *Voir* Lettre XLVII, 1.
(2) Réponse à une Lettre perdue, par laquelle Fermat avait répliqué à la précédente, XLIX.
(3) *Voir* Lettres XLVIII, 8 et XLIX, 6.
(4) *Cp.* Lettre XLIX, 5.

double — 2 du même nombre, on ne trouvera pas les triangles qui se font par 29 et 12 ou par 60 et 293, et une infinité d'autres; mais on les trouvera tous par la règle que vous mettez en l'écrit particulier (1) que vous avez envoyé, qui se fait mettant pour un des nombres constitutifs du triangle un nombre composé de deux quarrés premiers entre eux et de divers ordres.

Et cette dernière méthode sert à trouver tous les primitifs dont les côtés des quarrés (2) sont comme d'un nombre impair à un autre nombre. Par exemple, on trouvera par icelle qu'il y a deux triangles où les côtés des quarrés sont comme de 65 à un autre nombre, et dont le moindre côté est différent d'un quarré des deux autres : savoir les deux qui sont faits de 65 et 14 et de 65 et 24 et les autres qui sont en même proportion.

Mais si on vouloit tous les triangles primitifs dont les racines des quarrés sont comme d'un nombre pair à un impair, comme par exemple de 60 à quelque autre nombre, on n'y pourroit pas satisfaire par cette seconde règle, sinon après un long tâtonnement (3), et la première règle ne donne que la raison de 60 à 1861; mais il y a encore trois autres proportions, outre celle-là, qui ont toutes 60 pour un de leurs termes.

J'ai deux règles différentes dont chacune donne tous les triangles

(1) Écrit perdu. — La première règle de Fermat consiste à prendre pour les nombres servant à former le triangle rectangle (*voir* page 223, note 1)

$$p = r^2 + 1, \qquad q = 2r - 2.$$

La seconde règle à prendre, r et s étant premiers entre eux,

$$p = r^2 + s^2, \qquad q = 2(r - s)s.$$

(2) Frenicle appelle ici *côtés* ou *racines des quarrés* les nombres servant à former le triangle rectangle, désignés par p et q dans la note précédente.

(3) Si l'on pose

$$p = \frac{r^2 + 1}{2} \qquad \text{et} \qquad q = r - 1,$$

et que l'on fasse $q = 60$, on aura

$$r = 61, \qquad p = 1861.$$

Les trois autres proportions sont

60, 293; 60, 269; 60, 157.

susdits, avec cette différence que l'une regarde la proportion qui commence par un pair et l'autre celle qui commence par un impair.

Et celle-ci n'est pas beaucoup différente de votre dernière (1), car, ayant pris un triangle primitif, je me sers de son hypoténuse pour le premier terme, et pour l'autre, j'ôte d'un des côtés du triangle la différence de l'autre côté à l'hypoténuse.

Exemple : Que 20, 21, 29 soit le triangle, 29 le premier terme; pour l'autre, j'ôte de 20 la différence de 21 à 29, ou de 21 la différence de 20 à 29, et restera 12. On aura donc 29 et 12 dont les quarrés composeront le triangle cherché.

3. Votre première règle (2) pour trouver trois quarrés en proportion arithmétique a le même défaut que la précédente, car on ne les peut pas trouver tous par icelle. Par exemple, on ne trouvera pas les quarrés de 1, 29, 41, ou de 17, 53, 73. Mais, par la proposition que vous mettez en l'écrit particulier, on les peut tous comprendre.

Vous pouviez aussi donner aisément par la première règle le troisième quarré, sans obliger à prendre la différence des deux quarrés trouvés. Comme : en l'exemple que vous apportez, le quarré -2 de 5 est 23; le quarré suivant $+1$ est 37 : si on veut avoir le troisième nombre, il faut ajouter à 37 le double de 5, et on aura 47.

Si on prenoit 4, son quarré -2 est 14; le quarré suivant $+1$ est 26, auquel ajoutant 8, double de 4, on aura 34. Les trois nombres, étant réduits, sont 7, 13, 17.

La méthode dont je me sers pour trouver ces trois quarrés proportionaux, est tout autre que celle-là (3), et voici comme on procède pour les avoir tous :

(1) Cette règle de Frenicle revient en effet à la seconde de Fermat.

(2) *Cp.* Lettre XLVIII, 8. — La règle générale de Fermat paraît avoir consisté de fait à prendre pour les racines des trois carrés les nombres $r^2 - 2s^2$, $r^2 + 2rs + 2s^2$, $r^2 + 4rs + 2s^2$. La première règle revenait à supposer $s = 1$.

(3) Cette règle de Frenicle, revenant à prendre pour les racines des trois carrés en progression arithmétique les nombres $p^2 - 2pq - q^2$, $p^2 + q^2$, $p^2 + 2pq - q^2$, concorde en réalité avec la règle générale de Fermat (*voir* note précédente), si l'on a $p = r + s$ et $q = s$.

L'hypoténuse de tout triangle primitif sera le côté du moyen quarré; la différence des deux côtés du triangle sera le moindre côté, et leur somme sera le plus grand.

Exemple : Que le triangle soit 28, 45, 53. Le moyen côté sera l'hypoténuse, 53; la différence de 28 à 45, qui est 17, sera le moindre, et leur somme, 73, sera le plus grand. On aura donc 17, 53, 73 pour les racines des quarrés cherchés.

Et si l'on prend tous les triangles, commençant par le premier : 3, 4, 5, on aura tous les dits quarrés.

4. Après cette règle générale, j'en ai considéré deux particulières, dont l'une est celle que vous proposez en l'écrit particulier, savoir que, le moindre des trois quarrés demeurant toujours le même, on ait les deux autres en une infinité de façons, et à laquelle vous croyez que je n'ai pas pris garde, quoiqu'il y ait déjà longtemps que je l'ai trouvée, lorsque je travaillois aux triangles rectangles :

Car tout nombre et chacun d'iceux est la différence des deux moindres côtés d'une infinité de triangles;

Et tout nombre premier, différent de l'unité d'un multiple de 8, ou composé desdits nombres premiers seulement, est la différence des moindres côtés d'une infinité de triangles rectangles primitifs.

Et, y ayant des voies certaines pour trouver tous les triangles qui ont une même différence en leurs moindres côtés, on aura aisément tous les quarrés susdits.

Sur quoi il faut remarquer que, si le nombre proposé, qui doit être la racine du moindre quarré des trois et qui doit être la différence des deux petits côtés du triangle, n'est divisible que par un seul nombre premier différent de 1 d'un octonaire, comme sont 7, 49, 343; 17, 289, etc., le nombre sera la différence des petits côtés de deux triangles qu'on peut nommer *surprimitifs*, pource qu'ils sont primitifs des primitifs, car d'iceux dépend l'infinité des autres triangles, et ces deux triangles sont toujours les moindres dont l'un commence par un pair et l'autre par un impair, et d'iceux se forme l'infinité des autres.

Voici la manière dont je me sers : si je veux, par exemple, avoir tous les triangles qui ont 7 de différence entre leurs moindres côtés, je cherche les deux premiers triangles qui ont cette différence, et trouve 5, 12, 13 et 8, 15, 17. Je prends les racines des quarrés de chaque triangle, savoir 3, 2 et 4, 1, et mets chaque couple en tête d'une colonne. J'ai donc pour le premier : 3, 2. Pour avoir le triangle suivant, je prends la plus grande racine du premier pour la moindre du second, savoir 3, et pour la plus grande je prends le double de la plus grande du premier, plus la moindre. Ainsi j'aurai 8, qui est double de 3, + 2. Ce 8 sera la moindre racine du troisième triangle, et la plus grande du dit troisième sera 19, qui est double de 8, + 3. On fera la même chose à l'autre couple 4, 1, et on poursuivra aussi loin qu'on voudra.

3. 2.	4. 1.
8. 3.	9. 4.
19. 8.	22. 9.
46. 19.	53. 22.
... ...	... ...

Ayant donc tous les triangles qui ont 7 pour différence de leurs moindres côtés, il sera facile, par ce qui a été dit ci-devant, de trouver tous les quarrés arithmétiquement proportionaux, dont le moindre est 49.

Si le susdit moindre quarré étoit divisible par *deux* nombres premiers de même nature que les susdits, il y auroit *quatre* souches dont tous les triangles dépendroient.

S'il étoit divisible par *trois* nombres premiers, il y en auroit *huit*, qui ne dépendroient point l'un de l'autre.

Etc.

Ainsi 161, composé de 7 et 23, est la différence des petits côtés des triangles *surprimitifs* :

19. 180. 181. | 60. 221. 229 | 279. 440. 521 | et 400. 561. 689,

et de chacun d'iceux on peut faire une infinité de triangles primitifs qui auront le même 161 pour différence, et partant, le quarré de 161

sera le moindre quarré des trois proportionaux en une infinité de sortes.

Il faut excepter l'unité de ce qui a été dit, car elle sert bien de différence à une infinité de triangles, mais elle n'a qu'une seule souche, qui est le triangle 3, 4, 5, d'où dépendent tous les autres.

On aura donc les quarrés proportionaux (1) dont les racines sont ici :

7. 13. 17.	7. 17. 23.
7. 73. 103.	7. 97. 137.
7. 425. 601.	7. 565. 799.
7. 2477. 3503.	7. 3293. 4657.
.. ..	.. ..

et on les peut continuer tant qu'on voudra en continuant les triangles.

Voilà donc pour la première chose qui appartient aux dits quarrés.

5. La seconde est de trouver les dits trois quarrés en telle sorte qu'ils soient comme enchaînés l'un à l'autre et que le dernier et plus grand des trois soit le premier des trois suivans : comme on peut voir en ces colonnes, la fabrique desquelles je vous envoierai au premier voyage; toutefois j'estime que par l'inspection vous la jugerez aisément.

1. 5. 7.	7. 17. 23.	1. 29. 41
7. 13. 17.	23. 37. 47.	41. 85. 113.
17. 25. 31.	47. 65. 79.	113. 173. 217.
31. 41. 49.	79. 101. 119.	217. 293. 353.
49. 61. 71.	119. 145. 167.	353. 445. 521.
71. 85. 97.	167. 197. 223.	521. 629. 721.
97. 113. 127.	....	....
... .	....	....

Il y a aussi des voies pour avoir les différences égales desdits quarrés : car, en la première colonne, si on multiplie 24 par les sommes de tous les quarrés, lesquelles sommes sont 1, 5, 14, 30, etc., on aura

(1) Frenicle reprend la construction de trois carrés en progression arithmétique d'après les séries de triangles commençant par 5, 12, 13; 8, 15, 17.

les différences des quarrés, et en la seconde colonne, il faudroit multiplier 24 par les sommes des seuls quarrés impairs.

Il y a d'autres choses à considérer là-dessus, que je n'ai pas maintenant le loisir de déduire plus au long.

6. Me voici maintenant à l'endroit de votre Lettre, auquel vous parlez des nombres qui sont la somme des deux petits côtés d'un triangle (1) et, sur ce sujet, je vous dois ôter de l'opinion que vous avez que je ne susse pas que chacun de ces nombres peut servir de différence à une infinité de quarrés et de doubles quarrés. Vous vous êtes fondé sur un avertissement que je donnois, que les dits nombres sont toujours deux fois la différence d'un quarré et d'un double quarré; mais je n'ai pas dit qu'ils fussent seulement deux fois la différence d'un quarré et d'un double quarré, comme vous croyez avoir lu. Il faudroit avoir bien peu de pratique aux nombres pour ne s'être pas aperçu d'abord que 7 est quatre fois la différence entre de fort petits nombres : savoir entre 1 et 8, 2 et 9, 18 et 25, 25 et 32. Et je ne vous ai pas coté cela pour une propriété des dits nombres; mais, vous ayant demandé le moyen de trouver le triangle dont un nombre donné est la somme des côtés, sans avoir les quarrés et doubles quarrés dont il est la différence (2), il falloit vous avertir que les dits nombres étoient toujours deux fois la différence d'un quarré et d'un double quarré.

Car il y a deux couples dont je me sers pour avoir le dit triangle. Par exemple, pour avoir le triangle dont 7 est la somme des deux côtés, je me sers de 1 et 8, et de 2 et 9. Et, pource que j'étois pressé, je n'eus pas le loisir de m'éclaircir davantage. Je n'entends pas que les dits couples soient 2, 9 et 18, 25, comme vous avez cru, mais 1, 8 et 2, 9; et ce que j'observe en ceci est que les dites sommes sont deux fois la différence d'un quarré et d'un double quarré, en chaque couple desquels il y a un nombre moindre que la différence donnée : savoir, à un des couples le quarré est moindre, et à l'autre couple c'est le

(1) *Voir* Lettres XLVIII, 11, et XLIX, 9.
(2) *Voir* Lettre XLIX, 10.

double quarré. Cela s'observe toujours ainsi; et aux nombres qui sont composés de *deux* nombres premiers, comme 119, il a *quatre* couples, dont un des nombres est moindre que 119. Et voilà la méthode dont je me sers pour voir quels sont les couples utiles pour faire les triangles, car ce sont ceux auxquels un des nombres est moindre que la différence.

Ainsi, à 17, les deux couples utiles sont 1, 18 et 8, 25, à chacun desquels couples il y a un nombre moindre que 17, et, selon votre méthode même, on se servira aussi bien de 1, 18 que de 25, 8. Car si à 25, 8, on prend 2 et la différence de 5 à 2, de même à 1, 18, on aura 3 et la différence de 1 à 3, et on aura, en l'une et l'autre sorte, les mêmes nombres 2, 3.

De même, si on donnoit 161, on auroit *quatre* couples, savoir :

1. 162 | 8. 169 | 81. 242 | 128. 289,

à chacun desquels il y a un nombre moindre que 161.

Et, pour trouver les triangles, je me sers des racines des doubles quarrés, car elles sont les racines des quarrés qui composent l'hypoténuse. Ainsi à 17, on aura 2 et 3, racines des doubles quarrés 8, 18; mais, quand il y en a *quatre*, comme à 161, je prends les extrêmes, savoir 9, 8, et celles du milieu, 2, 11, qui donneront les triangles : 17, 144, 145, et 44, 117, 125.

1. 162	1. 9.
169. 8	13. 2
81. 242	9. 11
289. 128	17. 8

Pour avoir le côté pair du triangle, il faut prendre le double du produit des racines susdites des doubles quarrés : ainsi le double de 9 par 8 est 144, et le double de 2 par 11 est 44.

Mais pour le côté impair, on prend le produit des racines des quarrés simples : ainsi 1 par 17 donne 17, et 9 par 13 donne 117, le premier pour le triangle 17, 144, 145, le second pour 44, 117, 125.

7. Vous voyez si j'ai eu raison de dire que les nombres susdits sont la différence de *deux* couples quand ils sont premiers, et de *quatre* couples lorsqu'ils sont divisibles par deux nombres premiers. Mais ce qui le montrera encore mieux est la façon de trouver tous les couples dont un des dits nombres est la différence : car, selon ma méthode, il est nécessaire d'avoir ces deux couples qui font comme deux souches.

Exemple : *On me demande tous les quarrés et doubles quarrés dont* 7 *est la différence.* Je cherche les deux couples utiles à chacun desquels il y a un nombre moindre que 7; j'aurai 1, 8 et 9, 2. Je prends leurs racines et en fais deux colonnes séparées comme on voit ici :

Quarrés.	Doubles quarrés.	Quarrés.	Doubles quarrés.
1	2	3	1
5	3	5	4
11	8	13	9
27	19	31	22
65	46	75	53
157	111	181	128
...	...	...	...

et mets en chaque colonne les racines des quarrés d'un côté et celles des doubles quarrés de l'autre. J'ai donc d'un côté 1, 2; pour avoir les racines des couples suivans, je prends la somme de 1, 2, qui est 3, pour la racine du double quarré, et la somme des racines des deux doubles quarrés prochains pour la racine du quarré. Ainsi la somme de 1, 2 est 3, et celle de 3, 2 est 5 : j'ai donc 5 et 3. Pour le troisième couple, la somme de 5, 3 est 8, celle de 8 et 3 est 11. On poursuit ainsi autant qu'on veut, et l'autre colonne qui commence par 3, 1, se fait de même.

A chaque colonne la rangée de main droite, dont les nombres sont pairs et impairs alternativement, contient les racines des doubles quarrés, lesquels sont plus grands que les quarrés, lorsque la racine du double quarré est paire, comme 1, 2 et 11, 8; mais le double quarré est moindre quand sa racine est impaire, ce qui a lieu lorsque le moindre quarré des deux qui composent l'hypoténuse du triangle dont la dite

différence est la somme des côtés, est impair, comme à 3, 4, 5; mais c'est le rebours, quand le moindre quarré est pair, comme au triangle 5, 12, 13.

8. Je laisse le reste pour le premier voyage, auquel je vous envoierai aussi la méthode dont je me sers pour former les triangles relatifs en différence (1), comme 11, 60, 61 et 119, 120, 169; car je ne me sers pas des trois quarrés proportionaux.

Voici seulement ce que je vous proposerai :

1° *Trouver le moindre nombre qui soit autant de fois qu'on voudra, et non plus, la somme de deux quarrés* (2).

2° *Trouver un triangle auquel le double du quarré du petit côté étant ôté du quarré de la différence des deux moindres côtés, il reste un quarré.* Par exemple, si le triangle cherché étoit 7, 24, 25, il faudroit qu'ôtant 98 de 289, le reste 191 fût un quarré.

3° *Trouver un nombre qui serve d'hypoténuse à tant de triangles qu'on voudra, et non plus à chacun desquels le produit du moindre côté par l'hypoténuse soit plus grand que le quarré du moyen côté.*

4° *Trouver les bornes des proportions que les racines des quarrés constitutifs des triangles doivent avoir l'une à l'autre, afin que les triangles aient la propriété du troisième problème.*

Pour ceci, il y a autant de danger que les racines pèchent en excès qu'en défaut, mais elles ont un espace assez grand pour s'égayer, et elles ne sont pas gênées comme à l'autre limitation que vous m'avez envoyée. Si les racines sont en proportion double ou moindre, ou si elles sont en proportion triple ou plus grande, les triangles n'auront pas la dite propriété. Entre ces deux proportions, il y a un grand espace qui contient une infinité de proportions propres à ces triangles, lequel pourtant n'est pas si grand que la différence et intervalle des proportions double et triple, mais est un peu plus rétréci.

(1) *Voir* Lettres XLVIII, 8, et XLIX, 6.
(2) *Voir* l'Observation VII sur Diophante, t. I, p. 296.

9. Vous n'avez pas pris garde que je vous avois proposé, par ma précédente (1), de faire la même chose de l'enceinte entière du triangle, que vous demandiez de la somme des deux moindres côtés.

Je suis etc.

(1) Lettre XLIX, 10.

ANNÉE 1642.

LI.

FERMAT A MERSENNE (1).

LUNDI 10 NOVEMBRE 1642.

(A, f° 30; B, f° 17 r°.)

MON RÉVÉREND PÈRE,

1. Bien que la colère du refus de M. le Chancelier (2) me dure, je ne veux pas rester de vous obéir et chercher toutes les occasions à vous donner des preuves de mon affection et de mon service.

2. J'ai reçu ces jours passés une lettre de M. de Carcavi, par laquelle il me demande une question que M. de Roberval a résolue et à laquelle il a attaché cet éloge : *Magni quidem facienda inventio, sed maximi demonstratio geometrica, nec adeo facilis ab analysi ad synthesin regressus, ut quidam imperiti, re non satis perspecta, existimarunt.*

Cela m'a obligé d'y travailler et de l'envoyer par le précédent courrier à M. de Carcavi; mais, pource que peut-être il ne se souviendroit pas de vous en faire part et que même, en l'écrivant à la hâte, il m'a semblé que j'y ai mis quelque chose de superflu, je vous l'envoie comme elle doit être (3).

(1) Lettre inédite.

(2) Il s'agit d'une nomination qu'attendait Fermat (*Voir* Lettre LII, 2), probablement pour sortir des chambres des enquêtes et entrer dans celle de l'édit.

(3) La pièce dont il s'agit est imprimée dans le tome I, p. 167 et suiv. La question résolue par Roberval et traitée par Fermat est la construction du cylindre de surface maxima inscrit dans une sphère donnée.

3. J'attends après cela le Livre nouveau de l'Anglois (1) et vous conjure de ne vous rebuter pas de quoi je ne vous ai pas envoyé mon jugement de l'autre. Vous savez mes raisons, que je vous ai déjà alléguées.

4. Vous m'obligerez de me dire pourquoi je n'ai pas eu réponse de M. de Champbon, et de baiser les mains de ma part à MM. de Mydorge et Desargues.

5. Souvenez-vous de la communication des écrits de M. Frenicle, pour l'amour duquel j'ai travaillé après les nombres, et je m'assure que je vous persuaderai quelque jour que mon travail n'a pas été inutile.

6. Je ne sais pas en quelle posture je serai dans l'esprit de M. de La Chambre depuis que la commission de Castres a si mal réussi.

Je suis, mon Révérend Père,

Votre très humble et très affectionné serviteur,

FERMAT.

Ce 10 novembre 1642.

Tournez pour le problème (2).

(1) Dans la correspondance de cette époque entre Descartes et Mersenne, l'expression de « l'Anglois » désigne Hobbes, qui a donné en 1642 la première édition de son *De cive;* on y trouve également mentionné un autre auteur de la même nationalité, Thomas White (*Vitus*), qui publia, la même année, ses *De mundo dialogi tres*, où Descartes était critiqué. C'est peut-être l'ouvrage sur lequel Fermat refusait de donner son jugement.

(2) *Voir* page précédente, note 3.

ANNÉE 1643.

LII.

FERMAT A MERSENNE (1).

MARDI 13 JANVIER 1643.

(A, f° 15-16.)

MON RÉVÉREND PÈRE,

1. J'envoyai par le dernier courrier mon *Isagoge ad locos ad superficiem* (2) à M. de Carcavi, de laquelle il ne manquera pas de vous faire part. Vous y trouverez des propositions aussi belles que la Géométrie en puisse produire et, bien que mon discours soit concis, il m'a semblé que je n'en devois pas dire davantage, s'agissant d'une méthode générale de laquelle les exemples et l'usage peuvent être infinis.

Je m'imagine même que cette matière n'a pas été exactement connue des anciens; car, qu'y a-t-il dit dans tous leurs Livres en fait de lieux, qui vaille la proposition suivante, par exemple?

Datis quotlibet punctis in uno vel diversis planis, invenire sphæram, in cujus superficie sumendo quodlibet punctum et ab eo ducendo rectas ad puncta omnia data, quadrata ductarum simul sumpta æquentur spatio dato (3).

Et toutefois la construction en est aisée par ma méthode, et non seulement cette proposition a été par moi découverte, mais la voie géné-

(1) Lettre inédite.

(2) Tome I, p. 111 et suiv. Cette *Isagoge* est en effet datée du 6 janvier 1643.

(3) Cp. Tome I, p. 113 : *Si a quotcumque puncti*« etc.

rale pour en trouver infinies. Vous me direz votre sentiment de mon petit Traité, et celui de MM. les autres savants.

2. Cependant n'oubliez pas de m'envoyer le livre que vous m'avez promis (1), ni de me dire pourquoi je n'ai pas eu de réponse de M. de Champhon.

En attendant que vous preniez votre temps de parler pour moi lorsque l'occasion s'en offrira, je vous prie de savoir de M. de La Chambre qu'est-ce qui empêcha ma nomination l'année passée, et me donner avis de la réponse qu'il vous fera là dessus, afin que je sache s'il a joué de galimatias, ou s'il a eu véritablement pensée de m'obliger.

3. La proposition du *plus grand cône en superficie qui peut être inscrit en la sphère*, et que j'avois demandée à M. de Roberval par la voie de M. de Carcavi en revanche de celle du cylindre qu'il m'avoit demandée (2), ne m'a pas été encore envoyée. S'il me l'envoie, je vous en ferai part; mais ce n'est pas à dire que je ne sois en état de vous la faire tenir, s'il ne me relève pas de ce travail par sa construction.

4. *La proportion du cône, que le triangle équilatéral fait, à la sphère* est aisée, puisque les deux termes sont donnés en même espèce de corps, car la sphère peut se réduire en un cône par les propositions d'Archimède. Or, quand les deux termes sont donnés, vous ne doutez pas que la proportion ne soit donnée; vous n'ignorez pas la méthode de mettre toutes proportions, quoique irrationelles, en nombres entiers et approchés si près qu'on voudra. Néanmoins, si vous voulez celle-ci de moi, en tel nombre de figures de chiffre qu'il vous plaira, je vous la dresserai.

5. Vous m'obligerez de m'envoyer les épitaphes de feu M. le Cardinal que vous trouverez les meilleurs, à la réserve de celui qui finit :

Plaudente corona, Valete dixit,

que j'ai déjà vu.

(1) *Voir* Lettre LI, 3 et 4
(2) *Voir* Lettre LI, 2.

Je suis de tout mon cœur, mon Révérend Père,

Votre etc.,

FERMAT.

A Toulouse, ce 13 janvier 1643.

6. Je vous prie de presser M. de Carcavi pour le Pappus manuscrit, et pour les propositions que M. de Saint-Martin a de M. Frenicle (1).

LIII.

FERMAT A CARCAVI (2).

< 1643 >

(*Va*, p. 178.)

MONSIEUR,

1. Vous m'obligez toujours et je connois, dans la continuation de vos soins, celle de votre affection, de quoi je vous rends mille grâces.

Pour la Géométrie, je n'ose pas encore m'y attacher fortement depuis mon incommodité : je n'aurai pourtant pas beaucoup de peine à trouver les deux de vos propositions (3); pour celle de la parabole, je ne l'ai pas examinée, ni tentée.

2. Je remets tout ceci à ma première commodité; mais, de peur que vous ne m'accusiez de n'envoyer rien de mon invention, je vous envoie trois nombres parmi plusieurs autres que j'ai trouvés, dont les parties aliquotes font le multiple.

(1) *Voir* Lettre LIV, 3 et 4.
(2) Nous avons conservé à cette Lettre, dont la date est incertaine, le numéro qui lui a été assigné dans la Table du Tome I, page 439; mais, après nouvel examen, elle nous paraît avoir été écrite entre la Lettre LVIII du 31 mai 1643 et la Lettre LIX non datée; elle peut donc n'être pas antérieure au mois d'août 1643.
(3) Ces propositions paraissent bien différentes de celles dont il est parlé Lettre LIV, 1. Nous n'avons pu trouver d'autres renseignements ni sur les unes, ni sur les autres.

Le nombre suivant est *sous-triple* de ses parties aliquotes :

14 942 123 276 641 920.

Celui-ci est *sous-quadruple* :

1 802 582 780 370 364 661 760,

et celui-ci aussi :

87 934 476 737 668 055 040.

Puisque je me trouve sur cette matière, en voici deux que j'ai choisis parmi mes *sous-quintuples* :

Le premier se produit des nombres suivants multipliés entre eux :

8 388 608, 2801, 2401, 2197, 2187, 1331, 467, 307, 289, 241, 125, 61, 41, 31,

et l'autre se produit des nombres suivants multipliés entre eux :

134 217 728, 243, 169, 127, 125, 113, 61, 43, 31, 29, 19, 11, 7.

En voici encore un *sous-double* de ses parties, de mon invention, lequel, multiplié par 3, fait un *sous-triple* : le dit nombre est

51 001 180 160.

3. C'est parmi quantité d'autres que j'ai trouvés, que j'ai choisi par avance ceux-ci pour vous en faire part, afin que vous en puissiez juger par cet échantillon. J'ai trouvé la méthode générale pour trouver tous les possibles, de quoi je suis assuré que M. de Roberval sera étonné et le bon Père Mersenne aussi; car il n'y a certainement quoi que ce soit dans toutes les Mathématiques plus difficile que ceci, et hors M. de Frenicle et peut-être M. Descartes, je doute que personne en connoisse le secret, qui pourtant ne le sera pas pour vous, non plus que mille autres inventions, dont je pourrai vous entretenir une autre fois.

4. Et pour exciter par mon exemple les savants du pays où vous êtes, je leur propose (1) de *trouver autant de triangles en nombre qu'on*

(1) *Voir* l'Observation XXIII sur Diophante. — *Cp.* Lettre LVIII, 3.

voudra de même aire, ce que Diophante ni Viète n'ont trouvé que pour trois seulement.

Je suis, etc.

LIV.

FERMAT A MERSENNE (1).

< 27 JANVIER 1643 >

(A, f° 33; B, f° 14 v°.)

MON RÉVÉREND PÈRE,

1. Je vous rends mille grâces de votre souvenir et des propositions (2) que vous m'avez fait la faveur de m'envoyer.

Celles de la parabole, de l'hélice et du conoïde parabolique sont si visiblement fausses que ce seroit perdre le temps que de les réfuter. Néanmoins, si vous me l'ordonnez, je le ferai.

2. Je m'imagine que vous avez vu maintenant mes Lieux *ad superficiem* (3). Pourvu qu'on ne m'écrive pas qu'on les savoit auparavant que d'avoir vu mon Discours, comme on a ci-devant fait de quelques-unes de mes pièces, je serai assez satisfait; du reste, vous et ceux qui les verront, en serez les juges.

Je dois maintenant répondre aux deux questions numériques de M. de Saint-Martin (4).

3. La première est de *trouver trois triangles rectangles desquels les aires fassent les trois côtés d'un triangle rectangle* (5).

(1) Lettre inédite, non datée, mais qui, intermédiaire entre la Lettre LII du 13 janvier et la Lettre LV du 16 février 1643, doit être du 27 janvier ou du 3 février, jours de courrier. Nous avons supposé la première de ces deux dates.
(2) Nous n'avons trouvé aucune autre indication sur ces propositions.
(3) *Voir* Lettre LII, 1.
(4) *Voir* Lettre LII, 6.
(5) *Voir* l'Observation XXIX sur Diophante, Tome I, p. 321.

Les trois triangles qu'on demande sont ceux-ci :

2405, 2397, 196. 2213, 2205, 188. 2305, 2303, 96.

S'il en veut d'autres qui satisfassent à la question, je lui en puis fournir infinis et, s'il veut ma méthode pour les trouver, je lui en ferai part. Cependant il pourra éprouver si les trois que je lui envoie satisfont à ladite question.

4. La seconde question est celle-ci (1) : *Un nombre étant donné, déterminer combien de fois il est la différence des côtés d'un triangle qui ait un quarré pour différence de son petit côté aux deux autres côtés.* Le nombre qu'il donne est 1803601800.

Je réponds qu'en l'exemple proposé, il y a 243 triangles qui satisfont à la question, et qu'il n'y en peut pas avoir davantage.

La méthode universelle dont je lui ferai part, s'il me l'ordonne, est belle et digne de remarque, bien que je ne doute point que M. Frenicle ne lui ait baillé tout ce qui concerne ces questions.

Je ne vous envoie ces deux solutions que pour vous faire voir que les mystères numériques de M. Frenicle me doivent être communiqués aussi tôt qu'à tout autre, et que M. de Saint-Martin n'y doit pas faire difficulté.

5. Je vous prie m'envoyer au plus tôt le livre que vous m'avez promis (2), et faire en sorte que M. de Carcavi me fasse copier la réponse pour que je la puisse voir.

Je prendrai la liberté d'écrire par la première commodité à M. de Saint-Martin sur l'occasion de ces deux questions qu'il a voulu m'être proposées.

Cependant je vous prie me croire toujours, Monsieur,

Votre très humble et très affectionné serviteur,

FERMAT.

(1) *Cp.* Lettre L, 2.
(2) *Cp.* Lettres LI, 3 et LII, 2.

6. Vous ne m'écrivez pas à quoi il a tenu que je n'aie pas eu de réponse de M. l'abbé de Champbon (1) depuis si longtemps, ni si vous avez parlé à M. de La Chambre, duquel je voudrois, avant que rien tenter pour moi, que vous sûssiez à quoi la chose tint l'année passée.

LV.

FERMAT A MERSENNE (2).

LUNDI 16 FÉVRIER 1643.

(A, f^os 17-18; B, f^o 23 v^o.)

MON RÉVÉREND PÈRE,

1. Je vous remercie de vos soins à l'endroit de M. de La Chambre, et à lui-même de ceux qu'il prit à Lyon pour moi. M. de Marmiesse, notre avocat-général, m'ayant confirmé ce que vous venez de m'écrire, lorsqu'il sera temps, je ne doute point qu'il n'ait assez de crédit pour faire tenir cette vieille promesse que M. le Chancelier a faite depuis si longtemps en ma faveur (3).

2. Je suis bien aise que mes solutions (4) aient plu à M. de Saint-Martin; elles sont purement de mon invention, et M. de Frenicle le pourra assurer que j'ai trouvé par ma méthode la solution de tout ce qu'il m'avoit proposé sur pareil sujet. Ce n'est pas qu'il ne l'eût trouvé sans doute longtemps auparavant, mais j'ai eu assez de bonheur pour découvrir par d'autres voies ou quelquefois par les mêmes ce qu'il me proposoit, et je crois que les démonstrations de toutes ces propositions pourront malaisément venir d'ailleurs que de moi, si je ne me trompe.

(1) *Cp.* Lettres LI, 4 et 6; LII, 2.
(2) Lettre inédite.
(3) *Cp.* Lettres LI, 1; LII, 2; LIV, 6.
(4) *Voir* Lettre LIV, 3 et 4.

3. Si M. de Saint-Martin est exercé aux questions des nombres, voici ce que je prends la liberté de lui proposer en revanche de ses deux questions :

Trouver deux triangles rectangles dont les aires soient en raison donnée, en sorte que les deux petits côtés du plus grand triangle diffèrent par l'unité.

Trouver deux triangles rectangles en sorte que le contenu sous le plus grand côté de l'un et sous le plus petit du même soit en raison donnée au contenu sous le plus grand et le plus petit côté de l'autre (1).

Après qu'il aura résolu ces deux questions, je lui en fournirai de plus difficiles.

4. Que s'il croyoit que les solutions des deux que je lui ai données ne soient pas de moi, il m'obligera de choisir des plus difficiles qui sont résolues dans les écrits qu'il a de M. Frenicle, et, si je n'en fais pas la solution, je consens de ne voir point le dit travail de M. Frenicle, que je désire plutôt voir pour apprendre quelles sont les questions, que pour la solution qu'il en donne. Ce n'est pas que je ne l'estime beaucoup, mais c'est que je m'imagine que je n'aurai pas beaucoup de peine à la trouver.

Si je puis trouver du loisir pour satisfaire au désir de M. de Saint-Martin sur le sujet de ma méthode *de maximis et minimis* et sur celle dont je me sers à la résolution de ses questions numériques, je serai ravi de lui plaire et à vous qui me l'ordonnez.

5. Pour les lignes courbes auxquelles vous m'écrivez que M. de Roberval a trouvé d'autres lignes égales, sur lequel sujet vous m'alléguez l'hélice (2), j'appréhende qu'il y aura de l'équivoque. Il semble d'abord, par la raison des inscrites et circonscrites, que l'hélice

(1) *Voir* l'Observation XXX sur Diophante.

(2) Ce passage donne une date pour la découverte par Roberval de l'égalité entre la longueur des arcs de la spirale d'Archimède et ceux d'une parabole, égalité démontrée plus tard par Pascal. *Voir* Tome I, p. 206, note 1.

d'Archimède est la moitié de la circonférence du cercle qui sert à la décrire, et c'étoit une pensée que j'avois eue il y a fort longtemps, mais je me détrompai d'abord. Si c'est celle de M. de Roberval, je m'assure qu'il ne sera pas longtemps de même avis, et qu'il n'aura besoin que d'une seconde réflexion pour se dédire.

Je suis en peine de savoir des nouvelles de M. de Carcavi; vous m'obligerez de m'en donner et de me croire, mon Révérend Père,

Votre très humble et très affectionné serviteur,

FERMAT.

A Toulouse, ce 16 février 1643.

LVI.

FERMAT A MERSENNE (1).

MARDI 7 AVRIL 1643.

(A, f^os 19-20; B, f^o 22 v^o.)

MONSIEUR MON RÉVÉREND PÈRE,

1. Vous n'eûtes pas de mes lettres par le dernier courrier, à cause d'une petite absence qui m'a tenu huit jours à la campagne pendant la fête. Vous aurez maintenant la réponse que je fais à M. de Brulart (2) jointe à celle-ci; je l'ai écrite à la hâte, comme vous verrez, et c'est la raison qui m'oblige à vous prier qu'il n'en soit pas fait de copie et qu'elle ne sorte pas d'entre les mains de M. de Brulart.

(1) Lettre inédite.

(2) Le personnage désigné dans les Lettres LIV et LV sous le nom de Saint-Martin s'appelait Pierre Bruslart de Saint-Martin et était collègue de Carcavi au Grand-Conseil. Il semble qu'ici il s'agit encore de lui (*Cp.* LV, 4).

La réponse dont parle Fermat est perdue; on voit qu'elle concernait sa méthode *de maximis et minimis*.

Ce n'est pas que ce que j'y ai mis ne puisse être expliqué assez aisément, mais il y a quelque petit équivoque où on me pourroit accuser de négligence, comme lorsque j'ai dit que les deux derniers termes de l'équation qui se trouvent mesurés par E sont en plus grande raison qu'aucuns autres qui leur soient relatifs dans les plus hautes puissances. On pourrait dire qu'à le prendre *convertendo*, ils sont en moindre raison qu'aucuns autres de leurs relatifs; mais c'est en ma règle et en mon raisonnement toute la même chose, et les mêmes conséquences se déduisent de l'un et de l'autre.

Il y pourroit encore avoir équivoque en ce que j'ai dit : que non seulement A — E doit donner la même équation que A + E, mais encore que, si A + E donne moins que A, A — E doit aussi donner moins que A. Car il semble d'abord que, si A — E donne la même équation que A + E, qu'il est infaillible que, l'un donnant moins que A, l'autre donnera de même moins que A; ce qui pourtant n'est pas et qu'il me semble avoir suffisamment expliqué par l'exemple que j'ai ajouté.

Mais, pour ôter tout équivoque, lorsque j'ai dit que A — E doit donner la même équation que A + E, j'entends que par la position de A — E, en suivant ma méthode, on doit trouver A égal à une même quantité que si nous employons A + E par la même méthode. Mais, lorsque j'ai ajouté, en la seconde condition, que si A + E donne moins que A, A — E doit de même donner moins que A, j'entends que si, par la position de A + E, les homogènes qui représentent le plus grand sont moindres que les homogènes qui représentent le plus grand en la position de A seul, de même, en la position de A — E, les homogènes qui représentent le plus grand doivent être moindres que les homogènes qui représentent le plus grand en la position de A seul.

Voilà ce que j'ai cru vous devoir dire sur ce sujet. Car pour rendre la chose entièrement claire et parfaitement démontrée, il faudroit un Traité entier, que je ne refuirai pas de faire, dès que je pourrai trouver du loisir assez pour cela.

2. J'attends la solution de quelques-unes de mes questions numériques (1), et vous prie de m'apprendre quand est-ce que M. Frenicle sera de retour à Paris, et si M. de Sainte-Croix est en état de soudre des questions.

3. Pour les parties aliquotes, j'ai découvert des choses excellentes et je puis vous envoyer quelques multiples de mon invention autres que ceux que vous avez mis dans la préface du petit Livre *Des Pensées de Galilée* (2), et pour ne vous laisser plus en doute que je ne possède la voie infaillible de ces questions, j'ai relu ces jours passés une question que vous me faisiez par ordre de M. Frenicle, dont je vous envoie présentement la solution.

4. Vous me demandiez donc quelle proportion a le nombre, qui se produit des nombres suivants, avec ses parties aliquotes :

214 748 364 800 000, 11, 19, 43, 61, 83, 169, 223, 331, 379, 601, 757, 961, 1201, 7019, 823 543, 616 318 177, 6561, 100 895 598 169.

Vous me demandiez ensuite si ce dernier nombre est premier ou non, et une méthode pour découvrir dans l'espace d'un jour s'il est premier ou composé.

A la première question, je vous réponds que le nombre qui se fait de tous les nombres précédents multipliés entre eux, est sous-quintuple de ses parties.

(1) *Voir* Lettre LV, 3.

(2) Les nouvelles pensées de Galilée, mathematicien et ingenieur du duc de Florence, où il est traité de la proportion des mouvements naturels et violents et de tout ce qu'il y a de plus subtil dans les Mechaniques et dans la Physique. Où l'on verra d'admirables inventions et demonstrations inconnues jusqu'à present. Traduit d'Italien en François. — A Paris, chez Henry Guenon, rue Saint-Iacques, à l'Image de S. Bernard, pres des Iacobins, M.DC.XXXIX. Avec Privilege du Roy.

Dans la préface de ce volume, Mersenne ne donne d'après Fermat que les nombres déjà insérés dans celle de l'*Harmonie universelle* de 1636 (*voir* Pièce IV$_A$). Il en a ajouté divers autres dus à Sainte-Croix, Descartes (*un excellent Geometre*), Frenicle (*un excellent esprit*), au reste sans aucune désignation par nom propre.

A la seconde question, je vous réponds que le dernier de ces nombres est composé et se fait du produit de ces deux :

898423 et 112303,

qui sont premiers (¹).

Je suis toujours, mon Révérend Père,

Votre très humble et très affectionné serviteur.

FERMAT.

A Toulouse, ce 7 avril 1643.

LVII.

FRAGMENT D'UNE LETTRE DE FERMAT (²).

< 1643 >

(A, f° 74.)

Tout nombre impair non quarré est différent d'un quarré par un quarré, ou est la différence de deux quarrés, autant de fois qu'il est

(¹) Sur le problème ainsi posé, il était aisé de trouver la composition du dernier nombre. En effet, si, pour trouver le rapport du produit à la somme des parties aliquotes, on part du premier nombre qui est $2^{36} \times 5^5$, on remarque que 2^{36} a, pour somme de ses parties aliquotes, 223×616318177. Le second de ces deux facteurs correspond de même à la somme $2 \times 7^3 \times 898423$. Ce dernier facteur ne se retrouvant pas, comme les précédents, parmi ceux du produit proposé, il est naturel d'essayer de diviser par lui le dernier nombre donné, dès que l'on ignore si celui-ci est premier. Par conséquent, quelque méthode que possédât Fermat pour rechercher si un nombre est premier ou non (*voir* Pièce LVII), il est improbable qu'il ait employé cette méthode et fait des calculs plus longs que ceux que nous avons indiqués.

(²) Le fragment qui suit a été publié par M. Charles Henry (*Recherches etc.*, p. 191) d'après le brouillon d'Arbogast, transcrit d'une copie perdue de Mersenne. Il ne renferme que l'exposé d'une méthode pour la recherche des diviseurs d'un nombre, en commençant par les plus grands, et répond ainsi à une question faite par Mersenne pour le compte de Frenicle (*Cp.* LVI, 4) et sur laquelle les correspondants de Fermat ont dû revenir. Mais la copie d'Arbogast porte le titre : *Des nombres des parties aliquotes*, qui semble indiquer que ce fragment faisait partie d'une communication beaucoup plus étendue, adressée soit à Mersenne, soit à Frenicle. Dans ce cas, la date en serait probablement postérieure à celle que suppose le rang assigné à cette pièce pour la rapprocher de la Lettre LVI.

composé de deux nombres, et, si les quarrés sont premiers entre eux, les nombres compositeurs le sont aussi. Mais si les quarrés ont entre eux un commun diviseur, le nombre en question sera aussi divisible par le même commun diviseur, et les nombres compositeurs seront divisibles par le côté de ce commun diviseur.

Par exemple : 45 est composé de 5 et de 9, de 3 et de 15, de 1 et de 45. Partant, il sera trois fois la différence de deux quarrés : savoir de 4 et de 49, qui sont premiers entre eux, comme aussi sont les compositeurs correspondants 5 et 9; plus, de 36 et de 81, qui ont 9 pour commun diviseur, et les compositeurs correspondants, 3 et 15, ont le côté de 9, savoir 3, pour commun diviseur; enfin 45 est la différence de 484 et 529, qui ont 1 et 45 pour compositeurs correspondants.

Il est fort aisé de trouver les quarrés satisfaisants, quand on a le nombre et ses parties, et d'avoir les parties lorsqu'on a les quarrés.

Cette proposition se trouve quasi tout par tout. On en pourrait quasi autant dire des pairements pairs, excepté 4, avec quelque petite modification.

Cela posé, qu'un nombre me soit donné, par exemple 2027651281, on demande s'il est premier ou composé, et de quels nombres il est composé, au cas qu'il le soit.

J'extrais la racine, pour connoître le moindre des dits nombres, et trouve 45029 avec 40440 de reste, lequel j'ôte du double plus 1 de la racine trouvée, savoir de 90059 : reste 49619, lequel n'est pas quarré, parce que aucun quarré ne finit par 19, et partant je lui ajoute 90061, savoir 2 plus que 90059 qui est le double plus 1 de la racine 45029. Et parce que la somme 139680 n'est pas encore quarrée, comme on le voit par les finales, je lui ajoute encore le même nombre augmenté de 2, savoir 90063, et je continue ainsi d'ajouter tant que la somme soit un quarré, comme on peut voir ici (¹). Ce qui n'arrive qu'à 1040400, qui est quarré de 1020, et partant le nombre donné est composé; car il est aisé, par l'inspection des dites sommes, de voir qu'il n'y a au-

(¹) Fermat avait dû effectuer en marge les calculs indiqués, qui n'ont pas été reproduits sur la copie.

cune qui soit nombre quarré que la dernière, car les quarrés ne peuvent souffrir les finales qu'elles ont, si ce n'est 499 944 qui néanmoins n'est pas quarré.

Pour savoir maintenant les nombres qui composent 2 027 651 281, j'ôte le nombre que j'ai premièrement ajouté, savoir 90 061, du dernier ajouté 90 081. Il reste 20, à la moitié duquel plus 2, savoir à 12, j'ajoute la racine premièrement trouvée 45 029. La somme est 45 041, auquel nombre ajoutant et ôtant 1020, racine de la dernière somme 1 040 400, on aura 46 061 et 44 021, qui sont les deux nombres plus prochains qui composent 2 027 651 281. Ce sont aussi les seuls, pource que l'un et l'autre sont premiers.

Si l'on alloit par la voie ordinaire, pour trouver la composition d'un tel nombre, au lieu de onze additions, il eût fallu diviser par tous les nombres depuis 7 jusqu'à 44 021.

Plusieurs abrégés se peuvent trouver, comme lorsqu'on ne fait qu'une addition au lieu de dix, aux endroits où les sommes ont leurs finales quarrées, quand les compositeurs sont beaucoup éloignés l'un de l'autre.

LVIII.

FERMAT A < SAINT-MARTIN > (1).

DIMANCHE 31 MAI 1643.

(B, f° 9 v°.)

1. *Donner le sixième triangle qui a l'unité pour différence de ses deux petits côtés.*

(1) Fragment inédit d'une lettre perdue. Il porte comme titre, dans le manuscrit : « *Extraict d'une lre du* 31 *may* 1643 *à M. DF.* », ce qui indiquerait Frenicle comme le destinataire. Mais, si l'on compare la Lettre L de Frenicle à Fermat, il est très improbable que le premier ait proposé au second deux questions dont il lui avait auparavant donné une solution. Il est établi d'autre part, par les lettres suivantes (LIX et LX), que les questions énoncées par Fermat dans la présente (3) étaient proposées à St-Martin et à Frenicle. Le destinataire effectif fut donc plutôt St-Martin et la confusion s'explique d'ailleurs facilement.

Donner le second triangle qui a pour différence de ses deux petits côtés 7.

Pour la première question, le premier triangle qui a pour différence de ses deux côtés l'unité, lequel est : 3, 4, 5, donne aisément tous les autres par ordre, et voici comme je procède :

Du double de la somme de tous les trois côtés, ôtez-en séparément les deux petits côtés, et ajoutez-y le plus grand côté, vous aurez le second triangle, lequel par la même règle donnera le troisième, celui-là le quatrième, etc. à l'infini.

Pour avoir donc le second, prenez le double de la somme des trois côtés du premier, qui est 24; ôtez-en séparément les deux petits côtés, restera 20 et 21, et ajoutez à 24 le grand côté, viendra 29. Nous aurons donc pour le second triangle : 20, 21, 29; le troisième sera : 119, 120, 169, et le sixième : 23 660, 23 661, 33 461.

2. La seconde question a la pareille solution : il y a deux triangles fondamentaux qui ont 7 pour différence de leurs petits côtés, savoir 5, 12, 13, et 8, 15, 17. De chacun de ceux-là se forment tous les autres à l'infini par la méthode précédente.

Par exemple, le double de 5, 12, 13 est 60; ôtez-en séparément les deux petits côtés, 5 et 12, restera 48 et 55; ajoutez à 60 le plus grand côté, viendra 73. Donc nous aurons pour le premier triangle : 48, 55, 73.

De même 8, 15, 17 donnera 65, 72, 97. Etc. à l'infini.

Je sais bien qu'on pourroit réduire ces questions à trouver combien de fois et l'unité et 7 sont la différence d'un quarré et d'un double quarré; mais il faudroit en ce cas deux opérations, et il me semble plus commode d'en user d'une seule.

3. Je vous propose (1) :

1° *Trouver un triangle rectangle duquel le plus grand côté soit un quarré et la somme des deux ou trois autres soit quarrée.*

(1) *Voir* pour ces questions : 1° l'Observation XLIV sur Diophante; 2° l'Observation XXIII; 3° les Lettres LIX, 2, et LX, 2.

2° *Trouver quatre triangles de même aire.*

3° *Un triangle duquel l'aire, ajoutée au quarré de la somme des deux petits côtés, fasse un quarré.*

LIX.

FERMAT A MERSENNE (1).

< AOUT 1643 >

(A, f^os 37-38; B, f^os 22^bis r^o.)

MON RÉVÉREND PÈRE,

1. Vous m'écrivez que la proposition de mes questions impossibles (2) a fâché et refroidi MM. de Saint-Martin et Frenicle, et que c'a été le sujet qui m'a rompu leur communication. J'ai pourtant à leur représenter que tout ce qui paroît impossible d'abord ne l'est pas pourtant, et qu'il y a beaucoup de problèmes desquels, comme a dit autrefois Archimède, οὐκ εὐμέθοδα τῷ πρώτῳ φανέντα χρόνῳ τὴν ἐξεργασίαν λαμβάνοντι (3).

Vous vous étonnerez bien davantage si je vous dis de plus que toutes les questions que je leur ai proposées sont possibles, et que j'ai découvert leur solution. Ce n'est pas qu'elles ne soient très malaisées et que, pour les soudre, il ne faille faire quelque démarche au delà du Diophante et des Anciens et Modernes. Mais, comme toutes les inventions n'arrivent pas et ne se produisent pas en même temps, celle-ci est du nombre de celles dont la méthode n'est pas dans les Livres et que je puis attribuer au bonheur de ma recherche.

2. Et, afin que je ne vous tienne pas plus longuement en suspens,

(1) Lettre inédite, dont la date approximative est indiquée par celle de la suivante.
(2) Les questions de la Lettre LVIII, 3.
(3) Préambule du Traité *De lineis spiralibus*. Fermat a cité de mémoire; dans le texte d'Archimède, au lieu de τῷ πρώτῳ, on lit ἐν ἀρχῇ.

j'ai résolu toutes les questions que j'ai proposées à ces Messieurs, dont je ne vous coterai maintenant qu'un exemple, pour leur ôter seulement la mauvaise impression qu'ils avoient conçue contre moi, comme leur ayant proposé un amusement et un travail inutile. Je choisirai pour mon exemple une des plus belles propositions que je leur ai faites (1):

Trouver un triangle duquel le plus grand côté soit quarré, et la somme des deux autres soit aussi quarrée.

Voici le triangle :

4 687 298 610 289, 4 565 486 027 761, 1 061 652 293 520.

3. S'ils veulent la solution de quelqu'une des autres questions, je la leur envoierai dès qu'ils voudront; ils n'ont qu'à me marquer celle ou celles qu'ils désirent.

Il faut proposer les autres à soudre à ceux qui disent (comme M. de Carcavi m'a écrit) que j'ai trouvé ma méthode *de maxima et minima* par hazard. Car peut-être ne croiront-ils pas que j'aie trouvé ces questions à tâtons et par rencontre. M. Hardy est un de ceux-là.

Vous m'obligerez de saluer M. de Saint-Martin de ma part. Peut-être que, pour l'amour de lui, je mettrai par écrit mes inventions sur Diophante, où j'ai découvert plus que je ne m'étois jamais promis. La méthode pour soudre les questions que je lui ai proposées est un échantillon de mon travail.

Je serai bien aise que M. de Frenicle souffre le renouement de notre commerce.

4. M. de Carcavi vous fera part de quelques nombres sous-multiples que je lui ai envoyés (2).

J'en ai trouvé quantité d'autres et la méthode générale pour trouver tous les possibles.

5. N'oubliez pas de presser M. de La Chambre (3) et de le faire agir

(1) *Comparer* l'Observation XLIV sur Diophante.
(2) *Voir* Lettre LIII, 2.
(3) *Cp.* Lettres LI, 1 et 6; LII, 2; LIV, 6.

de la bonne façon. S'il me considère, comme il fait semblant, cette petite affaire vaut faite.

Je suis, mon Révérend Père, votre etc.

FERMAT.

6. Le théorème que vous m'avez proposé de la part du géomètre de Châlons (1), marque qu'il n'a pas fait grand progrès en l'Algèbre, car les plus médiocres ne peuvent pas douter que ce théorème ne soit généralement vrai.

Si MM. de Saint-Martin et de Frenicle veulent renouer le commerce des lettres, nous vous ferons voir des choses nouvelles et qu'il ne faut pas chercher dans les Livres.

Si M. de La Chambre n'agit pas bientôt et avec affection, je songerai à ne l'employer plus.

LX.

FERMAT A MERSENNE (2).

MARDI 1er SEPTEMBRE 1643.

(A, f° 31; B, f° 22 ter.)

MON RÉVÉREND PÈRE,

1. J'ai vu, par la lettre de M. de Saint-Martin, que mes questions lui ont paru impossibles (3) et à M. Frenicle aussi.

C'est une marque infaillible de la difficulté qu'ils y ont trouvée; pourtant, non seulement elles sont toutes faisables, mais j'en ai découvert la solution et, afin qu'ils n'en doutent pas, j'ajouterai à la solution

(1) Nous n'avons trouvé aucune indication sur ce géomètre, ni sur son problème.
(2) Lettre inédite.
(3) *Voir* Lettres LVIII, 3, et LIX, 1.

de la question que je vous envoyai dernièrement (1), qui étoit :

Trouver un triangle dont le plus grand côté soit quarré, et la somme des deux autres soit aussi quarrée,

celle de la suivante, qu'ils ont tout de même jugée impossible :

2. *Trouver un triangle duquel l'aire ajoutée au quarré de la somme des deux petits côtés fasse un quarré.*

Voici le triangle :

205769, 190281, 78320.

3. La troisième étoit :

Trouver quatre triangles de même aire.

Mais, pource que M. de Saint-Martin m'écrit qu'il espère de venir à bout de celle-là, je ne vous donnerai point la solution présentement, seulement vous dirai-je qu'après qu'il en aura trouvé quatre, je lui en ferai voir cinq et, s'il m'invite, une méthode générale pour trouver autant de triangles qu'on voudra de même aire; ce qui vous fera peut-être étonner de ce que Diophante et Viète (2) n'ont proposé ni fait la question qu'en trois seulement.

Si M. de Saint-Martin ne m'écrivoit qu'il est allé faire un voyage, je lui récrirois sans remise. Vous m'obligerez de m'apprendre quand il sera de retour, afin que je satisfasse à mon devoir, et cependant je vous prierai de lui faire voir cette lettre avec ma précédente (3), afin qu'il connoisse que je ne lui ai rien proposé dont je ne sois venu à bout.

Je serai bien aise que M. Frenicle voie ces miennes solutions, de quoi je me confie à vous et suis toujours, mon Révérend Père, votre etc.

FERMAT.

A Toulouse, 1 septembre 1643.

4. Je n'ai pas bien compris le théorème de Torricelli en votre

(1) *Voir* Lettre LIX, 2.
(2) Diophante, *Arithmétiques*, V, 8; Viète, *Zetetic.*, IV, 11.
(3) La Lettre LIX.

Lettre (¹); vous m'obligerez de l'étendre un peu plus et de faire bien la figure.

(¹) Torricelli avait communiqué en 1643 au P. Niceron un certain nombre de propositions qu'il fit imprimer l'année suivante dans ses *Opera geometrica*. La plus remarquable concernait le volume de révolution engendré par une hyperbole équilatère tournant autour de son asymptote; Torricelli énonçait que ce volume, à partir d'une ordonnée déterminée, est fini. Dans une lettre adressée par Mersenne à Torricelli le 25 décembre 1643 (*Discepoli di Galileo*, t° XLI, f° 9 r°), et publiée dans le *Bullettino Boncompagni*, VIII, p. 420, on lit :

« Clarissimus geometra Senator Tholosanus Fermatius tibi per me sequens problema solvendum proponit, quod tuo de conoide acuto infinito æquivaleat :

» Invenire triangulum rectangulum in numeris, cujus latus majus sit quadratum, summaque duorum aliorum etiam sit quadratum, denique summa majoris et medii lateris sit etiam quadratum.

» Exempli gratia : in triangulo 3, 4, 5, oportet 5 esse numerum quadratum; deinde summa 4 et 3, hoc est 7, foret numerus quadratus; denique summa 5 et 4, hoc est 9, esset quadrata.... »

ANNÉE 1644.

LXI.

FERMAT A CARCAVI (¹).

< 1644 >

(*Va*, p. 178-179.)

MONSIEUR,

1. Je suis marri de la perte du paquet de M. de Saint-Martin. Je lui écrivois sur le sujet des nombres et lui faisois part de quelques propositions et surtout de la suivante, que M. Frenicle m'avoit autrefois proposée (²) et qu'il m'avoua tout net ne savoir point :

Trouver un triangle rectangle, auquel le quarré de la différence des deux moindres côtés surpasse le double du quarré du plus petit côté d'un nombre quarré.

Je lui avouai aussi pour lors que je n'en savois point la solution et que je ne voyois pas même de voie pour y venir, mais depuis je l'ai trouvée avec autres infinies. Voici le triangle (³) :

156, 1517, 1525.

Il sert à la suivante question, pour laquelle M. Frenicle se mettoit en peine de ce préalable :

Trouver un triangle rectangle, duquel le plus grand côté soit quarré et le plus petit diffère d'un quarré de chacun des deux autres.

(¹) La date de cette Lettre est présumée d'après celle de l'édition de Théon de Smyrne, donnée par Boulliau.

(²) *Voir* Lettre L, 8. — On peut constater la perte de deux Lettres échangées entre Fermat et Frenicle à la suite de cette Lettre L.

(³) *Cp.* l'Observation XLIV sur Diophante.

Si vous jugez à propos de faire part de cette proposition à mon dit Sieur de Saint-Martin, je m'en remets à vous; je ne resterai pas de lui récrire par la première voie.

2. J'ai donné à Monsieur l'Archevêque (1) un petit mémoire de corrections sur le *Theon Smyrnæus*, que je crois qu'il envoiera à l'auteur avec le manuscrit de l'Astronomie (2). Je serai ravi que cette occasion me serve à être connu de M. Boulliau, de qui le mérite, étant connu à tout le monde, m'a été pleinement confirmé par ce nouveau travail sur le Théon, où j'ai particulièrement admiré la correction du décret de Timothée, qui ne pouvoit être due qu'à une main de cette importance.

Je suis etc.

(1) Charles de Montchal, archevêque de Toulouse. — Pour les corrections proposées par Fermat au texte édité par Boulliau, *voir* Tome I, Appendice, VIII, pages 373-376.

(2) Dans les prolégomènes de son *Astronomia philolaica* (1645), p. 20, Boulliau dit en effet avoir entre les mains ce manuscrit de la seconde partie de l'ouvrage de Théon, que Montchal avait mis à sa disposition; mais il ne le publia pas. Ce manuscrit, entré vers 1700 à la Bibliothèque Royale (fonds grec n° 1821), ne fut utilisé qu'en 1849 par Th.-H. Martin : *Theonis Smyrnæi Platonici liber de Astronomia*.

ANNÉE 1646.

LXII.

FERMAT A GASSENDI (1).

< 1646? >

(*Va*, p. 201-205.)

1. Pronuntiavit Galileus motum uniformiter acceleratum esse eum

(1) Cette pièce a été imprimée en premier lieu dans l'édition de Lyon (1658) des Œuvres de Gassendi, t. VI, pp. 541-543, ainsi que le mentionne au reste la note suivante des *Varia* :

« Hæc epistola Typis edita fuit tomo 6 Operum Gassendi inter epistolas ad eum scriptas. »

Elle porte comme intitulé dans les *Varia* :

« Viro Clarissimo Dom. Gassendo Petrus de Fermat S. P. — De proportione quâ gravia decidentia accelerantur. »

Elle est suivie dans les *Varia*, p. 204, de la pièce suivante :

« *Lettre de Monsieur Gassendi à Monsieur de*****

» Monsieur,

» Il y a déjà quelque temps que Monsieur le Président de Donneville, s'étant donné la » peine de me venir voir, me laissa un écrit de Monsieur de Fermat touchant l'accroisse- » ment de vitesse qui est en la cheute des corps, et parce que je n'ay point eu l'honneur » de le revoir depuis, et que je ne sçay point son logis pour le luy pouvoir rendre, et que » d'ailleurs il me semble qu'il me dit en passant qu'il avoit charge de vous le remettre » après qu'il me l'auroit monstré, je me suis advisé de vous l'envoyer sans plus attendre, » avec les tres humbles remerciemens que je dois à mondit sieur de Fermat de la bonté » qu'il a eüe de m'en donner la communication. Il seroit superflu de vous dire combien

qui, a quiete recedens, temporibus æqualibus æqualia celeritatis momenta sibi superaddit (¹).

Eum vero qui æqualibus spatiis æqualia celeritatis momenta sibi superaddit, adeo non convenire motui gravium descendentium affirmat ut, ex eo supposito, motum in instanti fieri deducat et, ut sibi persuasit, facillime demonstret.

Sed concedatur, si placet, viro perspicaci et Lyncæo indemonstrata conclusio, dummodo sit vera. Demonstrationem enim dum primo statim obtutu

Aut videt, aut vidisse putat per nubila (²),

nihil mirum si lectoribus minus utique Lyncæis parum videatur satisfecisse.

Ut igitur constet suus honor Galileo, neque amplius de ipsius illatione ambigatur, aut rationibus tantum probabilibus disputetur, propositionem ipsam more Archimedeo hic demonstratam habebis.

2. *Si quotlibet rectæ, ad unum punctum concurrentes, exponantur in continua proportione, earum intervalla erunt in eadem ratione.*

» j'en suis satisfait, puisque comme vous sçavés mieux que tout autre rien ne peut partir » d'une telle main qui ne soit parfait en tout point. Je suis, etc. »

D'autre part, les *Varia* (page VI non numérotée) reproduisent la mention honorifique suivante :

« *Samuel Sorberius in præfatione Operum Gassendi.*

» Petrum Fermatium tam longo intervallo Vietam, Diophantum et Pythagoreos omnes » post se relinquentem. »

Cette mention se trouve effectivement page 36 (non numérotée) de la Notice de Sorbière.

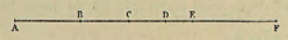
La présente lettre n'est pas datée; mais on peut la rapporter vraisemblablement à l'année 1646; c'est la date de l'ouvrage in-4 de Gassendi : *De proportione qua gravia decidentia accelerantur Epistolæ III quibus respondetur ad epistolas Petri Cazræi* (*Œuvres*, tome III, p. 564). Fermat fera allusion dans les nos LXXXII et LXXXIII à la même question.

(¹) C'est la définition qu'on trouve commentée dans la *Giornata terza* des *Discorsi e dimostrazioni matematiche intorno a due nuove Scienze attenenti alla meccanica et movimenti locali*. Leyde, 1638, 4°, p. 158. (Cf. *Opere di Galileo Galilei*, éd. Albèri, tome XIII, p. 155.)

(²) Virgile, Énéide, VI, 454.

Verbi gratia, sint rectæ (*fig.* 79) AF, BF, CF, DF, EF, etc. in continua proportione, erunt intervalla ipsarum, AB, BC, CD, DE, in eadem ratione.

Fig. 79.



Est enim

ut tota AF ad totam BF,

ita ablata BF a priore ad CF ablatam a posteriore.

Ergo

ita reliqua AB ad reliquam BC ut tota ad totam, hoc est, ut AF ad BF,

et sic de cæteris.

Eadem ratione demonstrabimus

ut AF ad CF, ita esse AB ad CD,

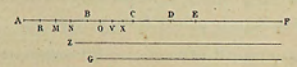
et

ut BF ad DF, ita esse BC ad DE,

etc.

3. *Si intelligatur motus a puncto* F (fig. 80) *versus punctum* A *continue acceleratus secundum rationem decursorum spatiorum, et exponantur quotlibet continue proportionales ut* AF, BF, <CF, DF, >EF, etc., *tempus in quo mobile percurret spatium* DE *erit æquale tempori in quo idem mobile percurret spatium* DC; *denique spatia omnia* ED, DC, CB *eodem tempore singula percurrentur.*

Fig. 80.



4. Demonstrabimus *primo* spatia CB, BA eodem tempore in supposito motu percurri.

Si enim tempus per AB non est æquale tempori per BC, erit vel majus vel minus.

Sit primum majus, si fieri potest. Ergo

tempus per AB est ad tempus per BC
ut aliqua recta major ipsâ BF ad ipsam BF.

Sit recta illa Z : ergo est

ut tempus per AB ad tempus per BC, ita recta Z ad rectam BF.

Sumantur inter rectas AF, BF, tot mediæ in continua proportione, ut RF, MF, NF, donec minor ex ipsis, ut NF, sit minor quam recta Z : quod quidem necessario eventurum, vel ex sola mediæ inventione ejusque iterata, quoties opus fuerit, operatione, quis non videt?

Erunt ergo continuæ proportionales rectæ AF, RF, MF, NF, BF; cùm autem sit

ut AF ad BF, ita BF ad CF, et ita AB ad BC,

ergo poterit continuari proportio sub eodem numero terminorum, ut sint etiam proportionales BF, OF, VF, XF, CF, idque in eadem superiorum ratione.

His ita positis et constructis, considerentur et comparentur singula spatia AR, RM, MN, NB singulis spatiis BO, OV, VX, XC, singula nempe singulis, hoc est, spatium AR spatio BO.

Si igitur per spatium AR fuerit motus uniformis juxta gradum velocitatis in puncto R acquisitum, $<$ et per spatium BO motus uniformis juxta gradum velocitatis in puncto B acquisitum $>$,

tempus per AR ad tempus per BO componeretur
ex ratione spatii AR ad spatium BO
et (vicissim) ex ratione velocitatis per B ad velocitatem per R :

quod notissimum est et Galileus ipse demonstravit, propositione quintâ *Tractatus de motu æquabili* (1).

At

ut spatium AR ad spatium BO, ita,

(1) « Si duo mobilia æquabili motu ferantur, sint tamen velocitates inæquales et inæqualia spatia peracta, ratio temporum composita erit ex ratione spatiorum, et ex ratione velocitatum contrarie sumptarum. » (*Discorsi e dimostrazioni matematiche*, Leyde, 1638, p. 154; *Opere di Galileo Galilei*, éd. Albèri, t. XIII, p. 152.)

per primam propositionem,

recta AF ad rectam BF,

et

ut velocitas per B ad velocitatem per R, ita,

ex supposita motûs accelerati juxta spatia decursa definitione,

recta BF ad rectam RF;

ergo tempus per AR, hoc casu, ad tempus per BO componeretur

ex ratione AF ad BF et ex ratione BF ad RF;

esset igitur

tempus per AR ad tempus per BO ut recta AF ad rectam RF.

Deinde, si per spatium RM fieret motus uniformis juxta gradum velocitatis $<$ in puncto M acquisitum, et per spatium OV motus uniformis juxta gradum velocitatis $>$ in $<$ puncto $>$ O acquisitum, eàdem ratione probabitur

tempus per MR ad tempus per OV esse ut recta RF ad rectam MF.

Similiter, considerando velocitates punctorum N et V, erit

tempus per MN ad tempus per VX ut MF ad NF.

Denique, considerando velocitates punctorum B et X in ultimis spatiis, erit

tempus per NB ad tempus per XC ut NF ad BF.

Sed omnes ejusmodi rationes, nempe AF ad RF, RF ad MF, MF ad NF, NF ad BF, ex constructione sunt eædem : ergo

tempus omnium motuum per totam AB
ad tempus omnium motuum per totam BC

in utrisque spatiis ita ut diximus consideratorum

est ut recta AF ad RF, sive NF ad BF.

Sed tempus motûs accelerati per AR est minus tempore motûs per AR uniformis juxta velocitatem in R : cùm enim a puncto R usque ad punctum A perpetuo, ex hypothesi, velocitas crescat, ergo a puncto R ad punctum A citius per motum acceleratum pervenitur quàm si velo-

citas acquisita in R eadem et uniformis usque ad punctum A perseveraret.

Eadem ratione probabitur tempus motûs accelerati per RM esse minus tempore motûs uniformis per RM, si velocitas ipsius ultimo ipsius spatii M puncto respondeat.

Denique constat motum per totam AB acceleratum, ut fiet hypothesis, minori tempore fieri quàm motum alium fictitium ex motibus uniformibus, juxta velocitates ultimis spatiorum AR, RM, MN, NB punctis respondentes, compositum.

At contra tempus motûs accelerati per BO est majus tempore motûs uniformis per BO, considerati juxta velocitatem puncti B, quia velocitas a puncto B ad O semper crescit in motu accelerato, juxta hypothesin, et minor semper est velocitate quæ respondet puncto B.

Unde pari ratiocinio concludetur motum per totam BC acceleratum, ut fiet hypothesis, majori tempore fieri quàm motum illum fictitium ex motibus uniformibus, juxta velocitates primis spatiorum BO, OV, VX, XC punctis respondentes, compositum.

Cùm ergo tempus motûs accelerati per AB sit minus tempore motûs illius fictitii per eamdem AB, et contra tempus motûs accelerati per BC sit majus tempore motûs illius fictitii per eamdem BC, ergo

minor est ratio temporis motûs accelerati per AB
ad tempus motûs accelerati per BC
quàm temporis motûs fictitii per AB
ad tempus motûs fictitii per BC;

sed,

ut tempus motûs accelerati per AB ad tempus motûs accelerati per BC,
ita posuimus esse rectam Z ad rectam BF,

et

ut tempus motûs fictitii per AB ad tempus motûs fictitii per BC,
ita demonstravimus esse NF ad BF :

ergo

minor est ratio rectæ Z ad rectam BF quàm rectæ NF ad eamdem BF,

quod est absurdum, cùm recta Z sit major rectâ NF.

Ergo tempus motûs accelerati per AB non est majus tempore motûs accelerati per BC.

Eâdem facilitate probabimus tempus motûs per AB accelerati non esse minus tempore motûs accelerati per BC.

Sit enim minus, si fieri potest : erit igitur

ut tempus motûs per AB accelerati ad tempus motûs accelerati per BC,
ita recta minor ipsâ BF ad ipsam BF.

Esto itaque recta illa, minor quàm BF, G et sit

tempus motûs accelerati per AB ad tempus motûs accelerati per BC
ut G ad rectam BF,

et inter rectas BF, CF exponatur continue proportionalium series quarum maxima OF sit major quàm G. Eodem quo usi sumus, in superiori demonstrationis parte, ratiocinio, conferendo spatia in ipsâ AB inter similes proportionales intercepta cum spatiis BO, OV, VX, XC, mutemus solummodo velocitates uniformes et fingamus, verbi gratia, motum per AR uniformem fieri juxta gradum velocitatis in puncto A acquisitæ; motum vero uniformem per BO fieri juxta velocitatem acquisitam in puncto O; et sic in reliquis spatiis, in quibus patet omnes velocitates per AB uniformes augeri, velocitates verò per BC uniformes minui, contra id quod in priore demonstrationis parte fuerat usurpatum.

Concludetur, ut supra,

tempus motûs hujusmodi uniformis per AR
ad tempus motûs uniformis per BO
esse ut recta RF ad rectam AF :

dum enim augentur velocitates, tempora motuum minuuntur.

Similiter

tempus motûs uniformis per RM ad tempus motûs uniformis per OV
erit ut MF ad MR.

Denique

tempus motûs fictitii illius per AB ex uniformibus compositi
ad tempus motûs fictitii per BC ex uniformibus pariter compositi
erit ut RF ad AF,

cùm omnes rationes sint eædem, hoc est, ut OF ad BF, per primam propositionem.

Tempus autem motûs accelerati per AB est majus tempore motûs illius fictitii ex uniformibus compositi, cùm supposuerimus in motibus uniformibus auctas fuisse velocitates, quæ nimirum in hoc casu primis spatiorum AR, RM, etc. punctis respondent; sed et tempus motûs accelerati per BC est minus tempore motûs fictitii ex uniformibus compositi, quia hic velocitates minuuntur et ultimis spatiorum BO, OV, etc. punctis respondent : ergo

major est ratio temporis motûs accelerati per $<$ AB
ad tempus motûs accelerati per $>$ BC
quàm temporis motûs fictitii per AB
ad tempus motûs fictitii per BC.

Sed

ut tempus motûs accelerati per AB ad tempus motûs accelerati per BC,
ita est recta G ad rectam BF,

ex suppositione; ut autem

tempus motûs fictitii per AB ad tempus motûs fictitii per BC,
ita recta OF ad BF,

ex demonstratione : ergo

recta G ad rectam BF majorem proportionem habet
quàm recta OF ad rectam BF,

quod est absurdum, cùm recta G sit minor rectâ OF, ex constructione.

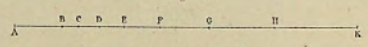
Non ergo tempus motûs accelerati per AB est minus tempore motûs accelerati per BC; sed nec majus, ut supra demonstratum est : *ergo est æquale.*

Eadem ratione patet tempus motûs accelerati per CD æquari tempori motûs accelerati per AB, et tempori motûs accelerati per BC, et, continuatis, si placet, in infinitum rationibus, *omnia omnino spatia eodem tempore percurri.*

5. His positis, *tertiâ propositione* mentem Galilei revelamus aut propositionis veritatem astruimus.

Intelligatur motus gravium descendentium a quiete ex puncto A (*fig.* 81) usque ad punctum H, verbi gratia, et *supponatur, si fieri*

Fig. 81.



potest, velocitatem gravis cadentis accelerari juxta rationem spatiorum decursorum. Ponatur motus jam factus ab A usque ad H tempore unius minuti aut altero quovis tempore determinato, et supponatur motus continuari usque ad punctum K : *Aio motum per* HK *fieri in instanti.*

Si enim motus per HK non fiat in instanti, fiet in tempore aliquo determinato, quod, per aliquem numerum multiplicatum, excedet tempus in decursu spatii AH insumptum; ponatur numerus multiplicans 5, ita ut tempus motûs per HK *quinquies* sumptum excedat tempus motûs per AH.

Rectis KA, HA sumatur tertia proportionalis GA et toties continuetur proportionalium series, donec spatiorum interceptorum numerus excedat numerum 5; fiant ergo, ex proportionalibus continuatis, *sex*, verbi gratia, spatia ultra punctum H, quæ sint HG, GF, FE, ED, DC, CB.

Ergo tempus motûs per HG, per præcedentem, est æquale tempori motûs per HK.

Similiter tempus motûs per GF est æquale tempori motûs per HK.

Denique motus per totam HB fiet in tempore quod ad tempus per HK erit sextuplum; at tempus temporis per HK quintuplum est majus tempore motûs per AH : ergo a fortiori tempus motûs per HB tempore motûs per totam HA est majus. Quod est absurdum.

Ergo vera remanet Galilei illatio quamvis eam ipse non demonstrarit.

6. Hæc breviter et familiariter, Clarissime Gassende, scripsimus, ne tibi in posterum facessat negotium aut Cazræus aut quivis alius Galilei adversarius, et in immensum excrescant volumina, quæ unicâ demonstratione, vel fatentibus ipsis auctoribus, aut destruentur aut inutilia et superflua efficientur. Vale.

ANNÉE 1648.

LXIII.

FERMAT A MERSENNE (1).

JEUDI 4 JUIN 1648.

(B$_{II}$, 2 v°.)

Voici la construction de la question des trois triangles *quorum areæ constituunt tria latera trianguli rectanguli numero* (2).

Trouvons un triangle de telle sorte que la somme de l'hypoténuse et de l'un des côtés soit quadruple de l'autre côté.

Ce qui est fait ainsi. Soit le dit triangle :

R	S	T
17	15	8

Formabuntur tria triangula rectangula :

primum abs $R+4S$ *et* $2R-4S$,

secundum abs $6S$ *et* $R-2S$,

tertium abs $4S+T$ *et* $4S-2T$.

(1) Fragment de lettre inédit.
(2) *Cp.* l'Observation XXIX sur Diophante.

Hoc est : in hoc exemplo in specie formabitur :

primum abs 49 *et* 2,
secundum abs 48 *et* 1,
tertium abs 47 *et* 2.

LXIV.

FERMAT A SÉGUIER (1).

MARDI 9 JUIN 1648.

(Bib. nat. fr. 17388, f° 74 r°.)

MONSEIGNEUR,

Je sçai que la vertu et le sçauoir sont les seules recommandations qui peuuent obtenir vostre protection, et que c'est sans doute auec trop de confiance que je prens la liberté de vous demender une grace (2) que i'aduoue n'auoir pas meritée. Mais ie sçai aussi, Monseigneur, que vous aués assés de bonté pour conter parmi les bonnes qualités l'inclination de les acquerir. C'est la seule qui ne m'a iamais abandonné et mon ambition a tousiours esté assés hardie pour me faire considerer les belles lettres comme une conqueste aisée en mesme temps que ie sentois bien et que l'experience m'a faict cognoistre qu'elle estoit au dessus de mes forces. C'est donc a des mouvements imparfaicts et au desir seul de meriter quelqu'une de vos faueurs que ie vous coniure, Monseigneur, d'accorder celle que M. de la Chambre a voulu prendre le soin de vous demender de ma part. Si ie ne suis pas

(1) Publiée par M. Charles Henry (*Recherches*, p. 63) d'après l'original dont nous reproduisons l'orthographe.

(2) Le 29 août 1648 Fermat fut député à Castres « pour tenir et desservir séance de la chambre de l'édit avec les présidents et conseillers de la religion prétendue réformée » (*Histoire générale du Languedoc*, tome XIV, Toulouse 1876, col. 206); c'est peut-être cette nomination qui faisait l'objet de la présente requête.

capable de m'en rendre digne a l'aduenir, ie la recognoistrai du moins par le respect auec lequel ie veus estre toute ma uie,

Monseigneur,
Vostre tres humble, tres obeissant
et tres obligé seruiteur,

FERMAT.

A Tolose le 9 iuin 1648.

(*Adresse.*)

A Monseigneur
Monseigneur le
Chancelier.
A Paris.

LXV.

FERMAT A LA CHAMBRE (MARTIN CUREAU DE) (1).

MARDI 18 AOUT 1648.

(Bib. Nat. fr. 17390, f° 115 r°.)

MONSIEUR,

Je ne vous ai point entretenu iusqu'ici d'affaires publiques, mais pource que les veritables mouvements d'un arrest que le parlement a donné n'ont pas esté peust estre cognus chez Monseigneur, i'ai dressé un mot d'escrit ou vous le treuueres, ie vous l'expose sur l'asseurance que i'ai et de vostre prudence et de l'honneur que vous me faictes de m'aymer. Il ne verra qu'autant de iour que vous voudres, outre que ma politique est tres foible et tres bornée, ie ne pretens par là vous faire paroistre que mon zele pour le seruice du roi et mon respect pour les volontés de Monseigneur. Si cest escrit ne peut pas seruir a cela

(1) Publiée par M. Charles Henry (*Recherches*, p. 67) d'après l'autographe.

mesme, excusés du moins mes fautes et faictes moi la grace de les tenir cachees et de me croire tousiours,

Monsieur,

Vostre tres humble et
tres obeissant seruiteur,

FERMAT.

A Tolose le 18 août 1648 (1).

(*Adresse.*)

A Monsieur
Monsieur de la Chambre
chez Monseigneur le
Chancelier.
A Paris.

LXVI.

NOTE DE FERMAT

JOINTE A LA LETTRE PRÉCÉDENTE (2).

(Bib. Nat. fr. 17390, f° 113.)

L'arrest que le parlement de Tolose a donné par lequel il est inhibé de leuer les tailles a main armée et par logements effectifs de gens de guerre, a esté si necessaire dans la conionture presente, qu'il n'y auoit apparament que ce seul remede pour faire subsister le calme dans la prouince de Guienne qui est dependante de ce ressort.

Le bruit qui s'estoit espandu par toutes les villes que le roi alloit quitter les arrerages des impositions et accorder une diminution considerable de la taille courante faisoit supporter au peuple auec tant

(1) Cette suscription est presque entièrement effacée : la date a été inscrite au verso par les commis de Séguier.

(2) Publiée par M. Charles Henry (*Recherches*, p. 68) d'après l'autographe.

d'impatience ces ordres seueres de logements effectifs qu'il se faisoit de touts costés des conspirations et des attroupements contre les brigades, et des rebellions si notables qu'elles eussent sans doute tramé de plus grands souslevements si le parlement n'eust suspendu par son arrest ces ordres violents qui sont contre les ordonnances et contre l'humanité mesme, s'il faut ainsi parler. Depuis ce temps là on n'a point cessé de donner des arrests pour procurer en toute diligence le payement des tailles, on a mesme taché d'empescher diuers abbus pratiqués par les commis qu'on a descouuert qui faisoient faire des quittances antidatées pour s'approprier par ceste voye les deniers royaus et les diuertir a leur profit; le parlement en a faict informer, a donné arrest et comission là dessus, bref il n'a rien omis pour ce regard. J'ai esté le premier qui ai eu quelque cognoissance des voyes obliques et qui ai suggéré à quelques uns de la Grande Chambre l'arrest qui est donné sur ce subject.

Je ne laisse pas de vous aduouer que ces remedes sont lents et que le payement des tailles l'est encore d'advantage, depuis que ceste grande rudesse de l'exaction a cessé, la raison est claire, la pauureté est si generalle et si grande, et les charges si hautes que des que ceste constrainte armée a cessé, rien ne paroist d'assés fort pour faire payer les contribuables, les saisies qui estoient l'extreme dans les voyes reglees commencent de n'effrayer plus et sont plustost des menaces que des coups.

Il faut pourtant haster les leuees et donner promptement au roi un secours si iuste et si necessaire. Il me semble que l'expedient le plus plausible et le plus aisé seroit d'auoir une declaration du roi qui portast permission a toutes les communautés d'emprunter les sommes necessaires a concurrence des tailles courantes et qui declarast les sommes empruntées audict effect priuilegiees a toutes debtes desd. communautés comme destinées au payement des charges courantes. Il est tres probable que tout l'argent de la prouince aboutiroit là, pource que la frequence des banqueroutes est cause que ceux qui ont de l'argent ayment mieux le garder que le hazarder. Ceste decla-

ration signée du registre du parlement seroit une asseurance entiere pour les creanciers et si le roi accordoit quelque remise pour l'auance, toutes les communautés accourroient en foulle pour emprunter les deniers necessaires et les payer tout aussi tost aux receueurs. On pourroit mesme enjoindre au parlement d'enuoyer des comissaires dans toutes les uilles pour faciliter lesd. payements, et si sa maiesté iugeoit qu'il fust important pour le bien de son estat de se seruir de ce mesme moyen pour faire approcher les deniers de l'an 1649, l'execution n'en seroit pas apparament malaisée.

LXVII.

FERMAT A MERSENNE (?).

FRAGMENT (1).

1648.

(D, III, 83.)

Asymmetrias in Algebraïcis omnino tollere, opus arduum nec satis hactenus ab Analystis tentatum.

Dentur, verbi gratia, termini asymmetri plures quatuor et secundum artis præcepta proponantur asymmetria liberandi. Vix est ut ab hujusmodi tricis expediat se Analysta : dum crescet labor, augebitur difficultas et fatigatus tandem, nihil, post repetitas sæpius operationes, aut profecisse se aut promovisse deprehendet. An itaque hærebit Analysis et asymmetriis undique obruta conticescet? Videant eruditi et methodum huic negotio conducibilem inquirant.

(1) Tiré d'une Lettre de Descartes à M***, datée du 18 décembre 1648, où ce fragment est précédé des mots : *Voici maintenant le billet de M. de Fermat*, et suivi d'une réponse de Descartes à la question posée. La partie latine, qui dans l'édition Clerselier est composée en italiques avec les lettres de l'équation en minuscules, est traduite en français (édition Cousin, tome X, p. 169).

Proponatur in exemplum :

$$\begin{aligned} &\text{latus}(B \text{ in } A - A \text{ quad.}) + \text{lat.}(Z \text{ quad.} + D \text{ in } A + A \text{ quad.}) \\ &\qquad + \text{lat.}(M \text{ in } A) + \text{lat.}(D \text{ quad.} - A \text{ quad.}), \\ &- \text{latere}(R \text{ in } A + A \text{ quad.}) \quad \text{æquari} \quad B + A. \end{aligned}$$

Operetur secundum præcepta artis Analysta et ab asymmetria proposita se expediat, aut artis inefficaciam fateatur (1).

Il me semble que les illustres en cette Science ne sauroient prendre un plus digne et plus nécessaire emploi que celui d'aplanir ces difficultés. Pour les y exciter, vous leur pourriez dire par avance que j'ai fait quelque progrès en cette matière et qu'il y a beaucoup à découvrir et à inventer; vous pourriez même en écrire en Italie et en Hollande, afin que la prophétie du Chancelier d'Angleterre s'accomplisse : *Multi pertransibunt et augebitur scientia* (2).

(1) *Voir* Tome I, p. 181-188.
(2) *Voir* plus haut, p. 35, note 2.

ANNÉE 1650.

LXVIII.

FERMAT A CARCAVI (1).

SAMEDI 20 AOUT 1650.

(Bibl. nat., lat. 11196, f^os 54-55.)

MONSIEUR,

1. Ma lettre par malheur fut envoyée trop tard la semaine dernière au messager d'Aurillac; vous la recevrez seulement par celui-ci avec la pénitence que je me suis enjoint à moi-même pour payer ce retardement, c'est-à-dire que je n'ai point voulu différer à vous envoyer ma méthode générale pour le débrouillement des *asymmétries* (2). Les fêtes m'ont tout à propos donné le loisir nécessaire pour y vaquer; je vous envoye mon original par pure paresse et vous prie me le renvoyer au plus tôt ou bien un autre à votre choix. Vous ménagerez mes intérêts comme vous l'entendez; ils consistent seulement à me laisser la satisfaction (j'use à dessein d'un mot adouci) d'avoir dévoilé une matière qui n'étoit pas connue, ce que diverses questions, que je vous ai proposées à diverses fois et dont pas une solution n'a jamais été donnée, prouvent assez suffisamment.

2. Mais, si vous voulez avoir le plaisir tout entier, proposez hardiment à trouver la tangente d'une courbe dont, par exemple, la propriété soit, en prenant A pour l'appliquée et E pour la portion du diamètre qui lui correspond :

(1) Publiée par M. Charles Henry (*Recherches*, p. 193).
(2) C'est la méthode d'élimination des radicaux, exposée tome I, p. 181-188.

Latus cub. (Z*q.* in A — A*c.*) + *lat. quad. quad.* (B *pl. pl.* — D *q.* in B in A + A *qq.*) + *lat. quad.* (B in A — A *q.*) + *lat. quad. cub.* (A *qc.* — B *qq.* in A).

Hæc omnia quatuor homogenea, quæ, in hoc casu, sunt rectæ, æquentur

B + A — E.

Quæritur tangens ad punctum datum in curva cujus superior æqualitas proprietatem specificam repræsentat.

Que fera en ce rencontre la méthode de M. Descartes que vous savez être infiniment plus embarrassée que la mienne? mais que fera encore la mienne, si les asymmétries ne sont ôtées?

Pour les ôter, la méthode que je vous envoye en vient à bout sans nulle difficulté, car, en donnant à chacune des lignes irrationelles le nom d'une seconde racine, tierce, quarte et cæt., on vient toujours à des doubles égalités lesquelles se réitèrent jusques à ce que l'application (ou la division) ôte la dernière de ces racines, puis la pénultième, et ainsi en rétrogradant jusques à ce que toutes les nouvelles racines inconnues que vous aurez prises à discrétion aient entièrement disparu, et pour lors il vous restera une équation sans asymmétrie en laquelle il n'y aura de racines inconnues que les deux premières A et E, qui n'auront que changé de degré à cause des multiplications fréquentes et nécessaires à chaque opération, et cette équation exempte d'asymmétrie représentera la propriété spécifique de la courbe.

Or, quand nous avons la propriété spécifique de la courbe sans asymmétrie, ma méthode *de tangentibus* donne la tangente très simplement et par la seule application à tous les cas généralement, soit que la propriété spécifique aie relation à des lignes droites seulement, soit qu'elle l'aie aussi à des courbes. Et partant, en joignant les deux méthodes, la tangente de la question proposée se trouve par l'application simple, ce qui semble merveilleux.

Je n'ajoute pas l'opération entière, pource que la longueur du travail me lasseroit, mais, en un mot, il suffit que vous voyez très clairement le progrès et la fin de l'ouvrage; ce que je crois avoir été inconnu jusques à présent, puisque M. Descartes, que je nomme avec tout le respect qui est dû à la mémoire d'un si merveilleux homme, proposoit comme une difficulté insurmontable la question suivante :

Étant donnés quatre points et une courbe, en laquelle prenant un point à discrétion, les droites menées de ce point aux quatre donnés fassent une somme donnée, trouver une tangente à quelconque point donné de cette courbe.

ainsi que je puis faire voir par une de ses lettres (1). Pourtant, mes méthodes jointes ensemble en donnent la solution simple, et l'opération < se fait > en se jouant.

Vous comprenez par là que le principal et plus considérable effet de cette méthode paroit aux tangentes de toutes sortes de lignes courbes à l'infini, puisque les tangentes s'y trouvent toujours par application simple, et après cela aux questions que j'appelle *abondantes*, qui se résolvent aussi par la seule division, sans aucune extraction de racines et cæt.

3. En voilà trop pour une seconde lettre, mais je suis d'humeur à vous faire paroître ce que peut notre ancienne amitié. Peut-être que ces petits éclaircissements serviront à ce qu'il y aura de trop concis dans mon écrit latin, quoique je ne doute point qu'après que vous et messieurs à qui vous le communiquerez y auront un peu rêvé, ils n'en trouvent l'intelligence et la pratique aisée.

Je n'ai qu'à vous avertir que l'ordre des pages de mon petit Traité est marqué par chiffres, et qu'il y a un endroit, en la page septième, qui semble défectueux, qui pourtant ne l'est pas, et il faut tout écrire comme un sens continu, ainsi que vous comprendrez d'abord.

(1) Cette lettre n'a pas été conservée.

Je vous réitère encore que je vous renvoierai vos écrits de mes Traités au plus tôt avec le Livre de M. Gaignières (1), sinon que vous en trouviez à Paris un autre exemplaire, auquel cas vous m'obligerez de le bailler à mondit S^r^ Gaignières, et j'en rembourserai le prix au messager qui vous porte mes lettres.

Je suis, Monsieur, votre du tout acquis serviteur,

FERMAT.

A Castres, ce 20 août 1650.

(1) La suite de la phrase montre qu'il s'agit d'un ouvrage prêté par Gaignières. Celui-ci n'est pas Roger de Gaignières dont les collections ont enrichi la Bibliothèque du roi, puisque ce célèbre collectionneur est né vers 1644, mais sans doute son père Aimé de Gaignières, secrétaire du duc de Bellegarde, gouverneur de Bourgogne. (Léopold Delisle, *Le cabinet des manuscrits*, Tome I, p. 335.)