桑木文庫
洋書
0324

桑木文庫
洋書
0324

物理
08
F
3.2

九州帝國大學理學部
8274
物理學教室

理学部 洋 遡及
022232002004773
九州大学蔵書

物
O
F
8.

ŒUVRES
DE FERMAT.

(23) 802142

1665 PARIS. — IMPRIMERIE GAUTHIER-VILLARS ET FILS,
Quai des Grands-Augustins, 55.

ŒUVRES
DE FERMAT

PUBLIÉES PAR LES SOINS DE

MM. PAUL TANNERY ET CHARLES HENRY

SOUS LES AUSPICES

DU MINISTÈRE DE L'INSTRUCTION PUBLIQUE.

TOME DEUXIÈME.

CORRESPONDANCE.



PARIS,
GAUTHIER-VILLARS ET FILS, IMPRIMEURS-LIBRAIRES
DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE
Quai des Grands-Augustins, 55.

M DCCC XCIV

臺灣大學圖書館
79. 1. 25
130618

TABLE DES MATIÈRES

DU DEUXIÈME VOLUME (¹).

				Pages
AVERTISSEMENT				IX

CORRESPONDANCE DE FERMAT.

I.	26 avril	1636.	Fermat à Mersenne	M	3
II.	mai?	»	Propositio Geostatica Domini de Fermat.	V	6
II_A.	.....		Premier extrait de l'*Harmonie universelle* de Mersenne		10
III.	3 juin	»	Fermat à Mersenne	V	11
III_A.	.....		Deuxième extrait de l'*Harmonie universelle* de Mersenne		15
III_B.	.....		Extrait des *Cogitata Physico-mathematica* de Mersenne		15
IV.	24 juin	»	Fermat à Mersenne	V	17
IV_A.	.....		Troisième extrait de l'*Harmonie universelle* de Mersenne		20
IV_B.	.....		Quatrième extrait de l'*Harmonie universelle* de Mersenne		21
V.	24 juin?	»	Nova in Mechanicis theoremata Domini de Fermat	V	23
VI.	15 juillet	»	Fermat à Mersenne	VM	27
VII.	août	»	Fermat à Roberval	V	31
VIII.	16 août	»	Etienne Pascal et Roberval à Fermat	V	35
IX.	23 août	»	Fermat à Etienne Pascal et Roberval	V	50
X.	2 septembre	»	Fermat à Mersenne	V	57
XI.	16 septembre	»	Fermat à Roberval	V	59
XII.	septembre?	»	Fermat à Mersenne (pour S^{te}-Croix)	M	63
XIII.	22 septembre	»	Fermat à Roberval	V	71

(¹) Les lettres majuscules placées devant les renvois indiquent que la pièce a été imprimée : V dans les *Varia Opera*, W dans le *Commercium epistolicum* de Wallis, D dans les *Lettres de Descartes*, P dans les *Œuvres de Pascal*, H dans la *Correspondance de Huygens*; enfin M qu'elle est tirée de sources manuscrites.

				Pages	
XIV.	11 octobre	1636.	Roberval à Fermat	V	75
XV.	4 novembre	»	Fermat à Roberval	V	83
XVI.	décembre?	»	Objecta a Domino de Fermat adversus propositionem mechanicam Domini de Roberval	V	87
XVII.	7 décembre	»	Fermat à Roberval	V	89
XVIII.	16 décembre	»	Fermat à Roberval	V	92
XIX.	février?	1637.	Fermat à Roberval	V	100
XX.	4 avril	»	Roberval à Fermat	V	102
XXI.	20 avril	»	Fermat à Roberval	V	104
XXII.	septembre?	»	Fermat à Mersenne	D	106
XXIII.	octobre?	»	Descartes à Mersenne (pour Fermat)	D	112
XXIV.	décembre?	»	Fermat à Mersenne	D	116
XXV.	18 janvier?	1638.	Descartes à Mersenne	D	126
XXV *bis*.	février?	»	Fermat à Mersenne	M	132
XXVI.	20 avril	»	Fermat à Mersenne	DM	135
XXVII.	3 mai	»	Descartes à Mersenne	D	138
XXVIII.	» »	»	Billet ajouté à la lettre précédente	D	146
XXIX.	1 juin	»	Roberval à Fermat	V	147
XXX.	juin?	»	Fermat à Mersenne	M	152
XXXI.	juin?	»	Méthode de maximis et minimis expliquée et envoyée par M. Fermat à M. Descartes	M	154
XXXII.	27 juillet	»	Descartes à Fermat	D	163
XXXIII.	10 août	»	Fermat à Mersenne	M	164
XXXIV.	11 octobre?	»	Descartes à Fermat	D	167
XXXV.	22 octobre	»	Fermat à Mersenne	M	169
XXXVI.	26 décembre	»	Fermat à Mersenne	M	176
XXXVII.	20 février	1639.	Fermat à Mersenne	M	179
XXXVIII.	mars?	1640.	Frenicle à Mersenne	M	182
XXXVIII *bis*.	1 avril	»	Fermat à Mersenne	VM	186
P-S.	?	»	Post-scriptum qui paraît appartenir à une lettre antérieure de Fermat à Mersenne	V	191
XXXIX.	mai?	»	Fermat à Mersenne (fragment)	M	194
XL.	juin?	»	Fermat à Mersenne	V	195
XLI.	4 août	»	Roberval à Fermat	V	199
XLII.	août?	»	Fermat à Roberval	V	202
XLIII.	août?	»	Fermat à Frenicle (fragment)	M	205
XLIV.	18 octobre	»	Fermat à Frenicle	V	206
XLV.	25 décembre	»	Fermat à Mersenne	M	212
XLVI.	26 mars	1641.	Fermat à Mersenne	M	218
XLVII.	15 juin	»	Fermat à Mersenne	M	220
XLVIII.	15 juin?	»	Fermat à Frenicle (extrait)	M	221
XLIX.	2 août	»	Frenicle à Fermat	V	226
L.	6 septembre	»	Frenicle à Fermat	V	232
LI.	10 novembre	1642.	Fermat à Mersenne	M	243
LII.	13 janvier	1643.	Fermat à Mersenne	M	245

				Pages	
LIII.	?	1643.	Fermat à Carcavi	V	247
LIV.	27 janvier?	»	Fermat à Mersenne	M	249
LV.	16 février	»	Fermat à Mersenne	M	251
LVI.	7 avril	»	Fermat à Mersenne	M	253
LVII.	?	»	Fragment d'une lettre de Fermat à Mersenne ou à Frenicle	M	256
LVIII.	31 mai	»	Fermat à Saint-Martin (?); fragment	M	258
LIX.	août?	»	Fermat à Mersenne	M	260
LX.	1 septembre	»	Fermat à Mersenne	M	262
LXI.	?	1644.	Fermat à Carcavi	V	265
LXII.	?	1646.	Fermat à Gassendi	V	267
LXIII.	4 juin	1648.	Fermat à Mersenne; fragment	M	277
LXIV.	9 juin	»	Fermat à Séguier	M	278
LXV.	18 août	»	Fermat à Cureau de la Chambre	M	279
LXVI.	» »	»	Note de Fermat jointe à la lettre précédente	M	280
LXVII.	?	»	Fermat à Mersenne ou Auzout (?); fragment	D	282
LXVIII.	20 août	1650.	Fermat à Carcavi	M	284
LXIX.	?	1654.	Fermat à Pascal	P	288
LXX.	29 juillet	»	Pascal à Fermat	V	289
LXXI.	9 août	»	Fermat à Carcavi	P	299
LXXII.	24 août	»	Pascal à Fermat	V	300
LXXIII.	29 août	»	Fermat à Pascal	P	307
LXXIV.	25 septembre	»	Fermat à Pascal	P	310
LXXV.	27 octobre	»	Pascal à Fermat	P	314
LXXVI.	?	1656.	Fermat à Carcavi (traduction d'une lettre latine)	M	315
LXXVII.	juin	»	Fermat à Carcavi (extrait)	H	320
LXXVII *bis*.	6 juillet	»	Huygens à Carcavi (extrait)	H	322
LXXVIII.	28 septembre	»	Carcavi à Huygens (extrait)	H	328
LXXIX.	3 janvier	1657.	Premier défi de Fermat aux mathématiciens	V	332
LXXX.	février?	»	Fermat à Frenicle; fragment	W	333
LXXXI.	février?	»	Second défi de Fermat aux mathématiciens	V	334
LXXXI *bis*.	mars	»	Boulliau à Fermat	M	336
LXXXII.	20 avril	»	Fermat à Digby	V	337
LXXXIII.	6 juin	»	Fermat à Digby	V	341
LXXXIV.	15 août	»	Fermat à Digby	V	342
LXXXV.	» »	»	Remarques sur l'*Arithmétique des infinis* du S. J. Wallis (Fermat à Digby)	V	347
LXXXVI.	août	»	Fermat à Cureau de la Chambre	D	354
LXXXVII.	5 décembre	»	Digby à Fermat	V	359
LXXXVIII.	12 décembre	»	Digby à Fermat	V	361
LXXXIX.	13 février	1658.	Digby à Fermat	V	363
XC.	3 mars	»	Fermat à Clerselier	D	365
XC *bis*.	10 mars	»	Fermat à Clerselier	D	367

					Pages
XCI.	7 avril	1658.	Fermat à Digby	W	374
XCII.	15 mai	»	Digby à Fermat	V	379
XCIII.	15 mai	»	Clerselier à Fermat	D	382
XCIV.	15 mai	»	Réflexions ou projet de réponse à la lettre de M. de Fermat qui contient ses objections sur la Dioptrique de M. Descartes, par M. Rohault	D	391
XCV.	2 juin	»	Fermat à Clerselier	D	397
XCVI.	juin?	»	Fermat à Digby	W	402
XCVII.	16 juin	»	Fermat à Clerselier	D	408
XCVIII.	21 juillet	»	Lalouvère à Fermat	*Dédicace*	413
XCIX.	21 août	»	Clerselier à Fermat	D	414
C.	16 février	1659.	Fermat à Carcavi	P	430
CI.	août	»	Relation des nouvelles découvertes en la science des nombres (Fermat à Carcavi)	H	431
CII.	26 août	»	Fermat à Billy	M	436
CIII.	août?	»	Fermat à Carcavi (extrait)	H	438
CIV.	septembre?	»	Fermat à Carcavi (extrait)	H	441
CV.	février	1660.	Fermat à Carcavi (extrait)	H	445
CVI.	juin?	»	Fermat à Carcavi (extrait)	H	446
CVII.	25 juillet	»	Fermat à Pascal	P	450
CVIII.	10 août	»	Pascal à Fermat	V	450
CIX.	décembre	»	Fermat à Huygens	H	452
CX.	?	1661.	Fermat à Carcavi (extrait)	H	454
CXI.	13 décembre	»	Fermat à Séguier	M	455
CXII.	1 janvier	1662.	Fermat à Cureau de la Chambre	D	457
CXIII.	6 mai	»	Clerselier à Fermat	D	464
CXIV.	13 mai	»	Clerselier à Fermat	D	472
CXV.	21 mai	»	Fermat à Clerselier	D	482
CXVI.	?	1664.	Fermat à M. de ***	V	485
CXVII.	?	»	Démonstration dont il est parlé dans la lettre précédente	V	489
CXVIII.	?	»	Saporta à Fermat	*Dédicace*	496
Variantes et notes critiques					501
Errata					514

FIN DE LA TABLE DES MATIÈRES DU TOME DEUXIÈME.

AVERTISSEMENT.

Dans le premier Volume de cette édition (*Avertissement*, p. XXXIII), nous en avions annoncé deux suivants pour la *Correspondance de Fermat*, tandis que nous avons réuni en un seul Tome toutes les pièces connues de cette correspondance, en dehors de celles que leur caractère nous avait déjà fait publier dans les *Œuvres diverses* ou dans leur *Appendice;* il a en effet été jugé préférable, contrairement à notre plan primitif, de laisser en dehors, ou plutôt de réserver pour les Volumes du *Complément* en préparation, les diverses lettres adressées par exemple à Mersenne par Descartes, ou à Digby par Wallis ou Brouncker, et qui ont dû être communiquées à Fermat sur le désir formel ou sous l'aveu tacite de leurs auteurs. Nous n'avons donc admis, en principe, que les lettres écrites par Fermat ou directement adressées à lui; nous n'avons fait d'exception que : 1° pour les deux lettres de Descartes à Mersenne (n^os^ 25 et 27) qu'il est indispensable d'avoir sous les yeux afin de comprendre les polémiques relatives à la dioptrique et à la méthode des tangentes; 2° pour une lettre de Frenicle à Mersenne (n° 38) qui était inédite et a été l'origine des relations entre Fermat et Frenicle; 3° pour deux lettres échangées entre Carcavi et Huygens (n^os^ 77 *bis* et 78), qui comblent en partie de regrettables lacunes de la correspondance entre Pascal et Fermat sur les probabilités. Enfin, comme indications relatives aux nombreuses lettres perdues de Fermat, nous nous sommes, dans le présent Volume, bornés à quelques notes et à quatre Extraits de l'*Harmonie universelle* de Mersenne annexés aux lettres n^os^ 2, 3 et 4.

N'ayant pas à revenir sur les questions relatives aux sources utilisées pour notre publication, nous pouvons nous borner aujourd'hui à quelques remarques touchant les dispositions typographiques et l'orthographe que nous avons adoptées.

Dans le but de faciliter les renvois pour les trois index (des noms propres, de la langue mathématique de Fermat, des matières) qui seront insérés dans le *Complément*, après la traduction des Œuvres latines, nous avons sub-

divisé les lettres, d'après les sujets traités, en paragraphes numérotés par des chiffres gras (égyptiens), que leur forme distingue nettement de ceux qui sont empruntés aux sources.

De même que dans le premier Volume, nous avons cherché avant tout la commodité de la lecture; nous avons donc, sans aucun scrupule, multiplié les alinéas et conformé la ponctuation aux habitudes modernes.

Pour l'orthographe française (1), nous avons en principe adopté celle du XVIII^e^ siècle, sauf à conserver les formes constamment usitées du temps de Fermat pour les mots techniques, comme *méchanique, quarré;* en dehors de la question de commodité, nous étions forcément conduits à cette solution, par suite de l'impossibilité absolue où l'on se trouve de reconstituer la véritable orthographe de Fermat.

On possède de Descartes, par exemple, assez de lettres autographes pour qu'il soit possible aujourd'hui de publier son énorme correspondance avec un texte conforme à l'orthographe rationnelle (2) qu'il adopta vers l'âge de quarante ans et qui est plus ou moins défigurée dans l'édition de Clerselier; mais pour Fermat, il fallait renoncer à toute tentative analogue. Il nous reste en tout de lui huit autographes en français (la dédicace à Carcavi, publiée dans l'Avertissement du premier Volume, pages XIX-XX, les n^os^ 64, 65, 66, 100, 102, 109, 111 de la Correspondance); deux seulement, 66 et 102, dépassent la proportion de simples billets, et leur ensemble nous permet tout au plus de conjecturer que Fermat avait une orthographe personnelle dont on pourrait marquer quelques traits (3), sans pouvoir affirmer qu'elle fût constante (4), même en dehors des lapsus de plume, auxquels il semble avoir été quelque peu sujet.

Nous avons, en tout cas, reproduit, sans les modifier, les autographes à

(1) En ce qui concerne les textes latins, nous avons suivi les mêmes principes que pour le premier Volume (*voir* l'Avertissement, page XXX).

(2) Nous pouvons ajouter « très réformatrice », d'autant que nombre de simplifications qu'il avait introduites sont encore à réaliser, quoiqu'elles soient également réclamées par l'étymologie et la prononciation. On peut prendre comme exemple l'orthographe usuelle du mot même auquel se rapporte cette note.

(3) Aucun *z* final; le *t* final conservé au pluriel; la forme *demender*.

(4) On trouve *honeur* et *honneur, avance* et *advance* dans des lettres différentes; dans la même, *commis,* mais *comission* et *comissaire;* il ne faut pas faire entrer en ligne de compte dans une autre lettre, *egalité* et *egal* (page 437). Dans le second mot, l'accent peut avoir échappé à la plume; or, à cette époque, où en principe on accentuait seulement les finales non muettes, *é*, dans le corps des mots et surtout pour un texte manuscrit, n'est pas une forme orthographique réellement différente de *es*; c'est une simple abréviation dont l'usage est arbitraire.

notre disposition (1); quant aux pièces qui ne sont connues que par des copies ou par l'édition des *Varia,* l'orthographe des sources ne présente certainement aucune authenticité. Nous avons déjà dit, dans l'Avertissement du premier Volume, que ceux qui ont copié au XVII^e^ siècle les écrits de Fermat, ne se sont fait aucun scrupule d'y introduire les notations algébriques cartésiennes; on ne peut supposer qu'ils aient respecté l'orthographe; Arbogast a également introduit la sienne dans les copies qu'il a faites, de première ou de seconde main. Le texte des *Varia* présente enfin des formes spéciales (2), systématiquement adoptées et qu'on doit attribuer à l'imprimeur beaucoup plutôt qu'à Samuel Fermat.

Dans ces conditions, nous avons jugé que la reproduction des différences purement orthographiques entre les sources et notre édition serait sans intérêt véritable pour le texte français (3) et qu'elle aurait au contraire le grave inconvénient de rendre excessivement pénible l'étude des variantes qui concernent soit le sens soit la forme littéraire. Nous nous sommes donc limités à ces dernières, que nous avons relevées aussi scrupuleusement que possible.

De nous deux, M. Paul Tannery s'est plus spécialement chargé de soigner

(1) Dans le n° 109, déjà publié avec l'orthographe de Fermat dans la *Correspondance de Huygens,* et dont nous n'avons pu collationner nous-mêmes l'original, nous avons introduit les formes modernes; d'autre part, dans les lettres d'un intérêt scientifique, pour ne pas compliquer inutilement la lecture, nous avons distingué l'*i* et le *j*, l'*u* et le *v*. Il suffit de rappeler que, dans l'orthographe ancienne, les différences de figure pour ces lettres ne correspondent à aucune distinction entre la voyelle et la consonne. La forme *j* sert couramment pour les majuscules manuscrites, arbitrairement pour les minuscules finales; Fermat ne paraît pas avoir eu l'habitude de l'employer dans ce dernier cas. La forme *v* est régulièrement usitée, dans les textes manuscrits et imprimés, pour les majuscules et les initiales minuscules, la forme *u* pour les médianes et finales minuscules; dans l'écriture de Fermat, ces deux formes se distinguent très difficilement.

(2) Dans cette édition, la réforme de l'orthographe est déjà très avancée; l'*i* et le *j*, l'*u* et le *v* sont distingués; l'*s* muette est remplacée par un accent, sauf dans le verbe *être* et dans quelques autres mots particuliers; on doit noter *oint* pour *oient,* dans les finales des verbes.

(3) Nous avions entrepris une étude spéciale des formes orthographiques des *Varia,* dans l'espérance que les différences qui existent d'une lettre à l'autre pourraient permettre de distinguer diverses provenances entre les copies utilisées par Samuel Fermat; par exemple, si les lettres de Fermat à Mersenne formaient deux groupes d'orthographe distincte, on devrait en conclure qu'elles proviennent de deux collections différentes. Nos recherches n'ont pas abouti; les formes que l'on peut considérer comme propres aux sources des *Varia* sont relativement rares; l'édition est trop incorrecte et les différences orthographiques trop fréquentes dans une même lettre pour que l'on puisse déduire des conclusions certaines.

l'édition des lettres des années 1636 à 1645; M. Charles Henry de celles des années 1646 à 1664.

Il nous reste à signaler les quelques différences que présente le classement des pièces de la correspondance contenue dans ce Volume avec la liste chronologique publiée dans le *Bulletin des Sciences mathématiques* de juin 1890 et encartée dans le Tome premier :

1° L'ordre des lettres 24 et 25 de la Liste a été interverti; la seconde lettre de Fermat à Mersenne sur la Dioptrique a été en effet écrite avant la première lettre de Descartes sur la méthode des tangentes (*voir* ci-après page 116, note).

2° La lettre 28 de la Liste, reconnue comme antérieure à la lettre 26, a pris le n° 25 *bis*, et a été remplacée par le Billet publié par Clerselier comme annexe à la lettre 27. Il y a des motifs pour croire que ce Billet n'a pas été réellement envoyé à Mersenne avec la lettre en question.

3° La pièce 38 de la Liste a pris le n° 38 *bis*, pour faire place à la lettre inédite de Frenicle à Mersenne que nous avons trouvée dans un Volume de la Correspondance de Mersenne, faisant partie du fonds Libri-Ashburnham; cette découverte nous a induits à penser que le Post-scriptum de la lettre 38 *bis* est en réalité d'une date antérieure à cette Lettre; mais cette conjecture ne nous a pas paru suffisamment établie pour que nous détachions ce Post-scriptum et en fassions une pièce à part.

4° La lettre de Huygens à Carcavi du 6 juillet 1656, publiée dans la *Correspondance de Huygens*, a été introduite sous le n° 77 *bis*.

5° La lettre inédite de Boulliau à Fermat a été introduite sous le n° 81 *bis*. Nous adressons tous nos remerciements à M. Lucien Auvray, de la Bibliothèque nationale, qui a bien voulu nous la signaler.

6° Les deux lettres de Fermat renfermées dans la pièce 90 de la Liste ont été désignées sous les n°s 90 et 90 *bis*.

En résumé, depuis la publication du Tome premier de cette édition, notre recueil de la Correspondance de Fermat a été augmenté de deux pièces inédites; nous renouvellerons, avec le ferme espoir d'être entendus, l'appel que nous avons déjà fait aux savants et aux amis de la Science qui pourraient nous fournir de nouveaux documents à utiliser dans le *Complément* de cette édition.

CORRESPONDANCE DE FERMAT.

CORRESPONDANCE DE FERMAT.

ANNÉE 1636.

I.

FERMAT A MERSENNE.

SAMEDI 26 AVRIL 1636.

(A f^os 10-11; B f^os 15^vs-16.)

MON RÉVÉREND PÈRE,

1. Je vous reste beaucoup obligé de la faveur que vous me faites espérer de conférer par lettres (1), et n'est pas une des moindres obligations que j'aie à M. de Carcavi qui me l'a procurée. Je suis marri de ce que sans doute ma réponse aux points de votre Lettre ne vous satisfera pas, mais j'aime mieux paroître ignorant en vous répondant mal, qu'indiscret en ne vous répondant point du tout.

2. J'ai toujours cru qu'il étoit bien malaisé de secouer et détruire les principes des Sciences, car, étant fondés sur l'expérience laborieuse de ceux qui les ont recherchés, il semble qu'il est bien malaisé d'en faire de plus précises, et il est encore plus inutile d'appeler la raison au secours des sens, puisque, dans ses opérations, elle présuppose toujours celles des sens exactes et véritables.

(1) Il est clair que cette Lettre est la première que Fermat ait écrite à Mersenne, en répondant d'ailleurs à une Lettre de ce dernier, qui est perdue.

3. De sorte que, par mon sentiment et par ces raisons, j'estime qu'il seroit bien malaisé de trouver une proportion différente de la double qui fît l'octave plus exactement que celle-là. Je vous avoue bien qu'il y en a infinies, qui effectivement feront des accords différents et desquels néanmoins la différence ne sera pas comprise par l'ouïe la plus délicate qui puisse être; et de là on pourroit conclure que peut-être la vraie octave ne consiste pas précisément en la proportion double. Mais, puisque, en ce principe que les Anciens nous ont baillé, nous n'avons jusques à présent su découvrir d'erreur sensible, rendons-leur ce respect de le croire véritable, jusques à ce que le contraire nous ait apparu.

4. Peut-être que, comme on a trouvé des lunettes qui rendent visibles les choses qui ne l'étoient pas auparavant, et qui nous font connoître les différences les plus menues et les plus subtiles, on trouvera quelque instrument qui fera tomber les sons les plus proches sous des différences remarquables et sensibles à l'ouïe.

5. Or, de chercher par raison pourquoi l'octave est en proportion double, c'est, ce me semble, traiter des choses hétérogènes : le son de l'octave est l'accident et la qualité de la proportion double qui consiste en quantité. La proportion se comprend par la vue; l'accord qu'elle fait, par l'ouïe; et ainsi il semble qu'on ne sauroit assigner une raison nécessaire pourquoi est-ce que l'un convient à l'autre. Car, comme vous savez, les raisons démonstratives s'arrêtent toujours entre des sujets homogènes. De sorte qu'il vaut mieux laisser décider aux sens toutes les questions de votre Lettre, que d'altérer des maximes reçues et qu'on ne sauroit convaincre de faux.

6. Il y a bien quelque chose sur quoi peut-être je pourrois vous donner des raisons plus précises, mais ce sera une autre fois. Je me contenterai cependant de vous avoir fait voir les effets de mon obéissance, bien qu'ils me soient désavantageux.

7. Vous m'obligerez beaucoup de me faire savoir si M. de Beaugrand est à Paris. C'est un homme duquel je fais une estime très singulière; il a l'esprit merveilleusement inventif, et je crois que sa Géostatique (1) sera quelque chose de fort excellent. Je lui écrirai dès que vous m'aurez donné de ses nouvelles.

8. Je serai aussi bien aise d'apprendre par votre moyen tous les Traités ou Livres nouveaux de Mathématiques qui ont paru depuis cinq ou six ans.

9. Je vous envoierai l'*hélice* (2) que vous me demandez, par la première commodité.

10. Et vous dirai cependant que j'ai rétabli entièrement le Traité d'Apollonius : *De locis planis* (3). Il y a six ans que je donnai à M. Prades, que peut-être vous connoissez, la seule copie que j'en avois, écrite de ma main. Il est vrai que la question la plus difficile et la plus belle, que je n'avois pas encore trouvée, y manquoit. Maintenant le Traité est de tous points accompli, et je vous puis assurer qu'en toute la Géométrie, il n'y a rien de comparable à ces propositions. J'en ai fait voir quelqu'une à M. de Beaugrand.

11. J'ai trouvé aussi beaucoup de sortes d'analyses pour divers problèmes tant numériques que géométriques, à la solution desquels l'analyse de Viète n'eût su suffire.

De tout cela, je vous en ferai part quand vous voudrez, et ce sans nulle ambition, de laquelle je suis plus exempt et plus éloigné que tous les hommes du monde.

12. Je voudrois pourtant qu'il vous plût, sans me nommer, proposer aux plus habiles de delà les deux questions suivantes à soudre, pour

(1) Joannis | de Beaugrand | Regi Franciæ Domui | Regnoque ac ærario | sanctiori a consiliis secretisque | Geostatice | seu | de vario pondere gravium | secundum varia a terræ < centro > | intervalla | Dissertatio mathematica | . — Apud Tussanum Du Bray, via | Jacobæa, sub Spicis maturis | M.DC.XXX.VI. — (Bibl. Nat., V 122, f°). — La dédicace, à Richelieu, est datée du 20 avril 1636.

(2) *Voir* ci-après Lettre III, 3.

(3) *Voir* Tome I, pages 3 à 51. — Il semble que la proposition que Fermat n'a trouvée qu'en dernier lieu soit la septième du Livre I (T. I, p. 24); il avait en effet achevé le Livre II dès 1629. *Voir* ci-après Lettre XXI, 3.

ce que leur solution dépend d'une méthode particulière que j'ai trouvée, de laquelle je ne ferai plus tant d'état, si vous trouvez quelqu'un qui les puisse soudre géométriquement (1).

PRIMA. — *Datæ sphæræ inscribere conum rectum omnium inscribendorum ambitu maximum.*

SECUNDA *idem proponit de cylindro quod superior de cono.*

Je ne prétends pas par là vous exclure du nombre de ceux qui chercheront la solution de ces deux questions.

J'attends de vos nouvelles et suis, mon Révérend Père, votre très humble serviteur.

FERMAT.

A Toulouse, ce 26 avril 1636.

II.

PROPOSITIO GEOSTATICA

DOMINI DE FERMAT (2).

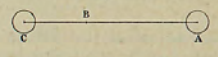
< MAI 1636 >

(*Va.*, p. 143-144.)

1. *Sit centrum Terræ* B (fig. 1), *semidiameter* BA, *portio alterius semidiametri* BC, *et fiat*

ut AB *ad* BC, *ita pondus appensum in* C *ad pondus appensum in* A :

Fig. 1.



Aio pondera A, C *non moveri, sed fieri æquilibrium.*

(1) *Voir* Tome I : la solution analytique de la première de ces deux questions, pages 155 et suiv ; la solution géométrique de la seconde, envoyée à Mersenne le 10 novembre 1642, pages 167 et suiv.

(2) Cette proposition a été envoyée par Fermat à Carcavi (*voir* ci-après Lettre VI, 2)

Hæc autem propositio probatu est facillima, vestigiis Archimedis (1) insistendo, et, si negetur, statim demonstrabitur.

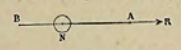
2. Hoc supposito, propositionem sane mirabilem inde deducimus :

Ponatur grave in puncto N (fig. 2) *inter puncta* A *et* B, *et fiat*

ut AB *ad* BN, *ita pondus* N *ad potentiam* R :

Aio pondus N, *juncto axe* AN, *a potentia* R *in puncto* A *collocata detineri et, si minimum augeatur potentia* R, *sursum tolli, ideoque quò propius pondus accedit ad centrum Terræ, minorem potentiam ad tollendum illud requiri.*

Fig. 2.



Hæc est, ni fallor, propositio quam Beaugrandus (2) in sua Geostatica demonstrat; nos eam hac ratione, quæ sequitur, demonstramus.

dans une lettre perdue, où il le priait sans doute de la communiquer à Mersenne. Fermat l'avait composée avant d'avoir pris connaissance de la Géostatique de Beaugrand, par conséquent avant la lettre suivante, du 3 juin 1636 (*voir* ci-après III, 5).

Mersenne en a inséré dans son *Harmonie universelle* une traduction assez fidèle, que nous reproduisons ci-après (II_A). Elle permet de constater une confusion dans les *Varia*, où les trois premiers articles sont rattachés à la pièce V ci-après, et où le titre du morceau est inséré après l'énoncé même de la proposition, c'est-à-dire avant l'article 3 : *Suppositis et concessis etc.*

(1) Si l'on compare la marche que suit Archimède (*De planorum æquilibriis*, I) pour démontrer le principe d'équilibre de la balance, on reconnaît que Fermat admet en fait comme postulats :

1° Que la direction de la gravité passe constamment par un point déterminé hors du corps pesant, à savoir par le centre de la Terre;

2° Que le point d'application de la gravité (au moins pour un corps sphérique homogène) est un point déterminé de la figure du corps pesant;

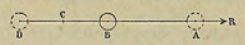
3° Que l'effet statique de la gravité, pour un corps déterminé, dépend uniquement de la distance de son centre de gravité au centre de la Terre.

Fermat ne suppose pas d'ailleurs que la gravité s'exerce en dehors de la sphère terrestre; dans ces limites, ses postulats concordent avec l'hypothèse newtonienne, si l'on considère la gravité comme la résultante de l'attraction d'une sphère composée de couches concentriques et homogènes sur un point matériel situé à son intérieur.

(2) *Voir* la Lettre I, 7. La *Géostatique* de Beaugrand a pour objet de démontrer que la gravité (supposée seulement à l'intérieur de la sphère terrestre) varie, pour un même

3. Suppositis et concessis quibus in demonstratione utimur, ex præcedente propositione et ex communibus notionibus desumptis, sit centrum Terræ C (*fig.* 3), semidiameter CA in qua sumatur punctum

Fig. 3.



B. In puncto autem B sit quodvis grave appensum; fiat autem

ut recta CA ad rectam CB,
ita pondus in B appensum ad potentiam aliquam, ut R.

Aio grave B a potentia R in puncto A sustineri et, si augeatur quantumlibet potentia R, pondus B ab hujusmodi aucta potentia in puncto A collocata sursum moveri.

Producatur enim AC in D, et sit CD æqualis CB, et in D collocetur pondus ponderi B æquale. Corporis igitur ex duobus gravibus B et D compositi centrum gravitatis est C, ideoque, si a puncto A auferatur

corps, proportionnellement à la distance de son centre de gravité au centre de la Terre. C'est donc, en fait, la même thèse que celle de Fermat, quoique ce dernier établisse une distinction assez subtile (*voir* ci-après Lettre IV, 1). Mais la démonstration de Beaugrand est absolument manquée comme fond et comme forme, et elle donnera lieu, dans la correspondance entre Mersenne et Descartes, à de fréquentes railleries de ce dernier contre le *géostaticien*.

Cette démonstration revient en fait à admettre que, si un corps pesant est suspendu par un fil sans gravité à l'extrémité d'un levier parallèle à l'horizon et maintenu d'ailleurs en équilibre, cet équilibre ne sera jamais détruit, quand même on allongerait, autant que l'on voudra, le fil de suspension supposé dirigé vers le centre de la Terre.

L'erreur d'une pareille thèse est aisée à reconnaître; mais il convient d'observer qu'à la date où nous sommes, les principes de la Statique ne sont nullement établis; on est même à peine d'accord sur les conditions d'équilibre du levier actionné par des forces parallèles, car la question qui s'agite est précisément de savoir si les postulats d'origine expérimentale sur lesquels repose la théorie d'Archimède sont vrais en prenant les forces de gravité concourantes, ainsi qu'elles le sont en réalité, ou en les supposant parallèles, avec le géomètre de Syracuse. Beaugrand admet la première alternative jusque dans ses conséquences évidemment erronées; Fermat suit la même voie, mais avec une prudence très caractéristique. Roberval défendra l'hypothèse d'Archimède (*ci-après* Lettres VIII, XIV); mais Galilée et Castelli, quoique déjà en possession, comme Roberval, du principe de l'équilibre du levier actionné par des forces concourantes, n'en ont pas moins pris en sérieuse considération les conclusions de Beaugrand et les propositions de Fermat (*voir* ci-après, Pièce V, note 6).

potentia R, quum recta BA nihil ponderet, erunt pondera B et D in æquilibrio et manebunt.

Si autem in A collocetur pondus deorsum tendens, potentiæ R sursum moventi æquale, idem est ac si a puncto A dematur potentia R; nam, quantum potentia tollit, tantumdem pondus deprimit. Collocetur igitur hujusmodi pondus in A : corpus igitur compositum ex potentia R collocata in A et sursum movente, ex pondere A deorsum tendente et ex gravibus B et D, erit in æquilibrio aut, si mavis, non movebitur.

Quum autem grave D sit æquale gravi B, et recta CD rectæ CB, erit

ut AC ad CD, ita AC ad CB,

et

ut pondus B ad potentiam R in A collocatam,
ita pondus D ad pondus in A deorsum tendens,

quod ipsi R potentiæ æquale posuimus. Est autem, ex hypothesi,

ut recta AC ad CB, ita pondus B ad potentiam R in A collocatam :

erit igitur

ut AC ad CD, ita pondus D ad pondus in A deorsum tendens.

Quum igitur distantiæ ponderibus sint reciproce proportionales, pondus in A deorsum tendens ponderi D æquiponderabit; si vero ab æquiponderantibus æquiponderantia auferantur, reliqua æquiponderabunt : ergo, si ab æquilibrio ex potentia R in A collocata et sursum movente, ex pondere in A deorsum tendente et ponderibus B et D composito, auferatur æquilibrium ex ponderibus A et D compositum, reliqua æquiponderabunt aut potius non movebuntur.

Auferantur igitur pondus A et pondus D; remanebit potentia R, in A collocata, et pondus B, quod proinde potentia R detinebit, ideoque, si minimâ augeatur vi, sursum tollit. Quod erat demonstrandum.

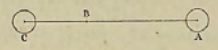
II$_A$.

MERSENNE, *Seconde Partie de l'Harmonie Universelle* (1637), livre VIII : De l'utilité de l'Harmonie, prop. XVIII, pages 61 et suiv. (1).

... Or, puisque Monsieur Fermat, Conseiller au Parlement de Tholose et très-excellent Géomètre, m'a donné le raisonnement qu'il a fait sur les différentes pesanteurs des poids, suivant qu'ils approchent davantage du centre..., je veux faire part au public de ses pensées sur ce sujet.

Soit donc le centre de la Terre dans la ligne droite AC (*fig.* 1), au point B;

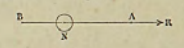
Fig. 1.



le demi-diamètre BA; et BC soit une portion de l'autre demi-diamètre. Et que le poids attaché au point C soit au poids attaché au point A comme AB à BC : je dis que les poids A, C seront en équilibre. Ceci étant posé, il en déduit la conclusion précédente, à savoir que la pesanteur d'un corps est d'autant moindre qu'il s'approche davantage du centre de la Terre.... Je mets ici le raisonnement entier de Monsieur Fermat.

Soit donc mis le poids entre A et B au point N (*fig.* 2); et comme A<B>

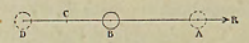
Fig. 2.



est à BN, ainsi soit le poids N à la puissance R : je dis que le poids N, joint à A par la ligne NA (2), est détenu par la puissance R mise au point A, et que si l'on augmente tant soit peu la puissance R, elle l'enlèvera; par conséquent, il faut une puissance d'autant moindre pour l'enlever, qu'il approche davantage du centre de la Terre.

Ce qu'il démontre en cette façon : Que C (*fig.* 3) soit le centre de la Terre,

Fig. 3.



le demi-diamètre CA, auquel soit pris le point B, dans lequel le poids attaché soit à la puissance R comme AC à CB : je dis que le poids B est soutenu par

(1) *Voir* la note 2 de la page 6, second alinéa.
(2) joint à BA par la ligne BA *Mersenne*.

la puissance R mise en A, laquelle l'enlèvera, pour peu qu'on l'augmente. Car soit prolongé AC jusques à D, et que CD soit égal à CB, et que l'on mette un poids en D égal au poids B, C sera le centre de pesanteur du corps composé des deux poids B et D; c'est pourquoi, si du point A l'on ôte la puissance R, les poids B et D demeureront en équilibre, puisque la ligne BA ne pèse point. Et si l'on met le poids en A qui tende en bas, égal à la puissance R qui tend en haut, l'on fait la même chose que si du point A l'on ôtoit la puissance R, puisque le poids abaisse autant comme la puissance enlève.

Que ce poids soit donc mis en A; donc le corps composé de la puissance R posée en A et tendant en haut, du poids A tendant en bas, et des poids B et D, demeurera en équilibre. Or puisque le poids D est égal au poids B, et que la ligne CD est égale à la ligne CB, AC est à CB comme AC à CD; et comme le poids B est à la puissance R mise en A, ainsi le poids D au poids mis en A qui tend en bas (lequel on suppose égal à la puissance R). Or, comme AC est à CB, ainsi le poids B à la puissance R posée en A; donc, comme AC à CD, ainsi le poids D au poids mis en A. Et par conséquent le poids mis en A sera en équilibre avec le poids D, puisque les distances sont en proportion réciproque des poids. Mais si l'on ôte des poids qui sont équilibres, d'autres poids qui sont aussi en équilibre, ceux qui resteront demeureront aussi en équilibre; donc si, de l'équilibre fait de la puissance R mise en A et tendant en haut, du poids mis en A tendant en bas, et des poids B et D, l'on ôte l'équilibre fait des poids A et D, les poids qui resteront demeureront en équilibre.

Soient donc ôtés les poids A et D, la puissance R mise en A et le poids B demeureront en équilibre, et partant, pour peu que l'on augmente la puissance R, elle enlèvera le poids B : ce qu'il falloit démontrer.

III.

FERMAT A MERSENNE.

MARDI 3 JUIN 1636.

(*Fa*, p. 121-122.)

MON REVEREND PÈRE,

1. J'ai reçu votre lettre avec satisfaction, puisqu'elle contient des remarques et des expériences très singulières : j'en ferai l'estime que je dois et de tout ce qui me viendra de votre part.

2. Je n'ai point vu de livre de musique plus nouveau de vous que celui que vous appelez *Questions harmoniques*, que j'ai, relié avec un autre recueil de *Questions* et les *Méchaniques* de Galilæi (1).

3. Si la démonstration de la proposition de l'hélice (2) n'étoit pas de grand discours et de grande recherche, je vous l'envoierois présen-

(1) Il a paru, en 1634, deux Volumes différents de *Questions* du P. Mersenne, tous deux petit in-octavo.

Le premier — *A Paris, chez Iaques Villery, ruë Clopin à l'Escu de France, et au coin de la ruë Dauphine aux trois Perruques, M.DC.XXXIIII. Avec Privilege du Roy.* — Sans nom d'auteur (le privilège, du 14 août 1629, est délivré au R. P. M. R. M.; l'achevé d'imprimer est du 1er décembre 1633) — contient (Bibl. Nat. Imprimés V 2141, Inventaire V 19294/5) : 4A

a) Questions inouyes, ou Recreation des scavans. Qui contiennent beaucoup de choses concernantes la Theorie (Théologie?), la Philosophie, et les Mathematiques (180 pages);

b) Questions harmoniques. Dans lesquelles sont contenuës plusieurs choses remarquables pour la Physique, pour la Morale, et pour les autres Sciences (276 pages).

Le second — *A Paris, chez Henry Guenon, ruë Sainct Iacques, prés les Iacobins, à l'image Sainct Bernard M.DC.XXXIV. Avec Privilege et Approbation.* — (Privilège d'août 1634, épîtres dédicatoires signées de Mersenne) — renferme (Bibl. Nat. Imprimés V 2675, Inventaire V 25150/1/2) :

c) Les Questions Theologiques, Physiques, Morales et Mathematiques. Où chacun trouvera du contentement ou de l'exercice, Composees par L. P. M. (240 pages);

d) Les Mechaniques de Galilée Mathematicien et Ingenieur du Duc de Florence, Avec Plusieurs Additions rares et nouvelles, utiles aux Architectes, Ingenieurs, Fonteniers, Philosophes et Artisans. Traduites de l'Italien par L. P. M. M. (88 pages);

e) Les Preludes de l'Harmonie Universelle, ou Questions Curieuses, Utiles aux Predicateurs, aux Theologiens, aux Astrologues, aux Medecins et aux Philosophes. Composees par L. P. M. M. (224 pages).

C'est évidemment ce second volume que possède Fermat et c'est le dernier recueil (*c*) qu'il désigne improprement sous le titre de *Questions harmoniques*.

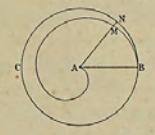
(2) *Voir* Lettre I, 9. — L'envoi promis ici par Fermat ne se retrouve pas dans ses Lettres à Mersenne, mais il fut fait avant le 4 novembre 1636 (*voir* Lettre XV, 6), et d'autre part, en rapprochant les extraits ci-après III_A et III_B des Œuvres de Mersenne, on reconnaît aisément que ce dernier nous a conservé, dans le second de ces extraits, une partie du travail de Fermat, suffisante pour que l'on puisse en apprécier toute l'importance. On peut constater également que l'hélice dont parle Fermat dans ses Lettres I, 9, et III, 3 n'est autre que celle qu'il désigne sous le nom d'*helix Galilei* (et non *Baliani*, fausse leçon de Bossut) dans la *Solution du problème proposé par Etienne Pascal* (Tome I, pages 73-74), pièce dont la date semble devoir être assignée en janvier ou février 1637. Cette *spirale de Galilée*, nom probablement donné par Mersenne, peut être définie la courbe décrite, relativement à la Terre supposée animée du mouvement de rotation diurne, par un point matériel pesant tombant librement suivant la loi de Galilée. Le problème de cette trajectoire préoccupait particulièrement le savant Minime et, dès sa première lettre à Fermat, il avait dû lui demander ses lumières sur cette question. — Il ne paraît pas douteux que l'écrit perdu ait été rédigé en latin.

tement; mais elle contiendra autant que deux des plus grands Traités d'Archimède, de sorte que je vous demande un peu de loisir pour cela et cependant vous la pouvez tenir pour très véritable.

4. J'en dresserai un Traité exprès, où je vous ferai voir de nouvelles hélices aussi admirables qu'on en puisse imaginer; pour vous en donner l'avant-goût, en voici une, qui est peut-être cette ligne que Ménélaüs appelle *admirable* dans le Pappus (1).

Esto helix AMB (fig. 4) *in circulo* CNB, *cujus ea sit proprietas ut, ductâ qualibet rectâ, verbi gratia* AMN, *tota circuli circumferentia sit*

Fig. 4.

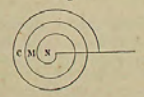


ad ejusdem circumferentiæ portionem NCB *ut* AB *quadratum ad quadratum* AM.

In hoc autem hæc helix differt ab helice Archimedis quod, in helice Archimedis, sit ut circumferentia ad portionem NCB, *ita* AB *ad* AM.

Pronunciamus : primo, spatium sub helice et recta AB *comprehensum esse dimidium totius circuli; deinde (quæ est proprietas mirabilis), spatium ex prima revolutione ortum (quod hic sit* N) (fig. 5) *esse dimidium*

Fig. 5.



spatii M *ex secunda revolutione orti; spatium vero* C *ex tertia revolutione*

(1) *Pappus*, IV, 36, édition Hultsch, page 270, 26. — La supposition de Fermat est très peu probable.

ortum esse æquale spatio M, *et omnia omnino deinceps spatia ex qualibet revolutione orta dicto spatio* M *similiter esse æqualia, ideoque et inter se.*

Je crois que vous m'avouerez que ces recherches sont belles, mais j'ai si peu de commodité d'en écrire les démonstrations qui sont des plus malaisées et des plus embarrassées de la Géométrie, que je me contente d'avoir découvert la vérité et de savoir le moyen de la prouver lorsque j'aurai le loisir de le faire. Si je puis trouver quelque occasion d'aller passer trois ou quatre mois à Paris, je les emploierai à mettre par écrit toutes mes nouvelles pensées en ces arts, à quoi je pourrai sans doute être beaucoup aidé de vos soins.

5. J'ai vu la *Géostatique* de M. de Beaugrand (1) et me suis étonné d'abord d'avoir trouvé ma pensée différente de la sienne; j'estime que vous l'aurez déjà remarqué. Je lui envoie franchement mon avis sur son livre, vous assurant que j'estime si fort son esprit et qu'il m'en a donné de si grandes preuves, que j'ai peine à me persuader qu'ayant entrepris une opinion contraire à la sienne, je ne me sois éloigné de la vérité; je consens pourtant qu'il soit mon juge et ne vous récuse pas non plus. Et parce que j'ai écrit à la hâte la démonstration que je vous envoyai et l'écrit que je lui envoie (2), je mettrai tout au net à loisir et tâcherai même de trouver de nouvelles raisons pour soutenir mon opinion, à laquelle pourtant je ne m'attacherai jamais par opiniâtreté dès qu'il me fera connoître le contraire.

Je suis etc.

(1) *Voir* Lettres I, 7, II, 2.

(2) Écrit de Fermat perdu, comme toute sa correspondance avec Beaugrand. — La démonstration envoyée à Mersenne n'est autre que la pièce précédente, II, ou peut-être la rédaction en français de la même pièce, II_A. Cependant on ne peut conclure du langage de Fermat que l'envoi a été fait directement à Mersenne et que, par suite, il y aurait eu une lettre perdue intermédiaire entre I et III (*voir* Pièce II, note 2 de la page 6).

III_A.

MERSENNE, *Seconde Partie de l'Harmonie Universelle* (1637), Nouvelles Observations Physiques et Mathématiques. Première Obs. page 2 :

La seconde chose qu'il est à propos de remarquer appartient à la demie circonférence dont je parle au même lieu (1) : car, outre ce que j'ai montré de la ligne hélice, par laquelle les poids descendent suivant l'imagination de Galilée, un excellent Géomètre a démontré les propriétés de cette hélice, laquelle lui pourra servir d'occasion pour restituer le livre de Démétrius, περὶ γραμμικῶν ἐπιστάσεων, dont Pappus (2) a parlé dans le 4. l. de ses Collections. Je dirai seulement qu'il y remarque (3) une raison perpétuelle de 15 à 8 : ceux qui en voudront savoir un plus grand nombre de particularités, les peuvent espérer de cet excellent personnage. Il a trouvé plusieurs autres nouvelles hélices, dont l'une est peut-être l'admirable de Ménélaüs (4), de laquelle le premier espace fait par la première révolution est sous double de celui de la seconde; et néanmoins tous les autres espaces suivans produits par les autres révolutions sont égaux à celui de la seconde révolution et par conséquent égaux entre eux. Je laisse les autres propriétés, dont il donnera la démonstration quand il lui plaira.

III_B.

MERSENNE, *Cogitata Physico-mathematica* (1644) — Ballistica, page 57.

1. Cùm Galilæus existimare videretur lapidem (positâ terrâ mobili et solis motum supplente) usque ad terræ centrum descendentem moveri per semi-circumferentiam.... de quâ superius (5) dictum est, demonstravit acutissimus Geometra D. Fermatius non esse descensum illum semicircularem, sed helicem describere peculiarem, quæ sit secunda inter sequentes, quemadmodum prima est Archimedea.

(1) Livre II du Mouvement des Corps, prop. III, pages 93 et suiv. — Galilée avait dit (*Massimi Sistemi*, 1632, p. 156 suiv.) qu'il était probable qu'un corps, tombant sans empêchement jusqu'au centre de la terre, décrirait, en tenant compte du mouvement de la terre, une demi-circonférence. Mersenne réfutait cette opinion.

(2) PAPPUS, IV, 36, édition Hultsch, page 270, 20.

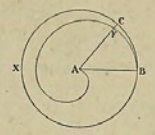
(3) *Voir* ci-après la pièce III_B, 2.

(4) *Voir* Lettre III, 4.

(5) Page 50 des *Ballistica* de Mersenne.

2. Sit igitur helix AFB (*fig.* 6) intra circulum BCX descripta, ita ut semper sit eadem ratio circumferentiæ BCX ad arcum BC, quæ est lineæ AB ad FC, vel quadrati AB ad quadratum FC, vel cubi AB ad cubum FC, vel cujuscumque alterius potestatis (1) AB ad similem potestatem FC, regula generalis

Fig. 6.



datur, quâ ratio circuli BCX ad spatium lineâ AB et helicibus AFB comprehensum reperiatur (2).

Hîc appono octo helices quarum majores numeri circulum, minores helicem referunt :

1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.
3	15	14	45	33	91	60	153
1	8	9	32	25	62	49	128

3. Quibus placet addere demonstrationem amici (3), qui demonstravit lineam descensûs gravium non esse circularem....., sufficiat annotasse

(1) Potentiæ *Mersenne*.

(2) Mersenne a fait ici quelque confusion; les spirales qu'il vient de définir ont pour équation polaire

$$\left(\frac{R-\rho}{R}\right)^n = \frac{\omega}{\Omega} \qquad (\Omega = 2\pi);$$

celles auxquelles se rapportent les nombres qui suivent et dans lesquelles doit d'ailleurs figurer comme seconde ($n = 2$) la trajectoire étudiée par Fermat, ont, au contraire, pour équation

$$\frac{R-\rho}{R} = \left(\frac{\omega}{\Omega}\right)^n.$$

Fermat a sans doute considéré les deux classes; pour la seconde, le rapport de l'aire de la spirale $\int_{\rho=0}^{\rho=R} \rho^2 \frac{d\omega}{2}$, au secteur de cercle correspondant $\frac{\Omega R^2}{2}$, est $\frac{2n^2}{(n+1)(2n+1)}$, formule dans laquelle rentrent les nombres donnés par Mersenne.

(3) La démonstration qui suit (en partie seulement) dans le texte de Mersenne ne peut être attribuée à Fermat.

lineam istam descensûs gravium rectam sub polis futuram; planam helicem sub æquatore; et in omni alio loco solidam helicem super coni isosceli superficie descriptam, cujus basis est parallelus, à quo descensus incipit, et vertex ipsum terræ centrum.

4. Quam demonstrationem libenter postulantibus communicabo, quemadmodum aliam elegantissimam à D. Fermatio inventam et ad ipsum missam Galilæum (1), quâ demonstrat spatium ab ista comprehensum helice esse, vel ad circuli sectorem, vel ad totum circulum quibus comprehenditur, ut 8 ad 15; quæ proportio reperitur similiter intra spatium à spirali circa coni superficiem descriptum et ipsam coni superficiem.

IV.

FERMAT A MERSENNE.

MARDI 24 JUIN 1636.

(*Va*, p. 122-123.)

MON RÉVÉREND PÈRE,

1. Je suis marri de n'avoir pu vous faire précisément comprendre mes sentimens touchant ma *Proposition Géostatique* (2); il est pourtant vrai que je n'avois garde de la prendre au sens que vous avez cru, car la seule raison que j'ai employée contre l'opinion de M. de Beaugrand, ç'a été celle-là même que j'ai trouvée dans votre Lettre, de sorte que je

(1) Galilée répondit à cet envoi par une lettre du 15 juin 1638 à Mersenne dont une traduction française se trouve dans le MS. de la Bibl. Nat. fr. nouv. acq. 6204; dans cette lettre, Fermat se trouve simplement désigné sous les termes : « votre amy ». Dans les manuscrits de Galilée, on ne retrouve aucune autre trace de rapports entre lui et Fermat que ce passage d'une lettre d'Elia Deodati du 14 juillet 1637 :

« Al Signor Carcavi essendo tornato di fuora, ho dato la lettera di V. S., della quale è » restato sodisfattissimo per la soluzione delle objezzioni fatte avanti dal suo amico, il » quale anco lui dovrà restare appagato quando lo vedrà. Il nome suo è M^r Fermat, Con- » sigliere del Parlamento di Tolosa, dove resiede. » (Bibliothèque Nationale Centrale de Florence. — MM. Galiléens, P. V., T. VI, f° 79^ro.)

Nous devons ce renseignement à l'obligeance de M. A. Favaro.

(2) Ci-devant, Pièce II.

n'avois garde de tomber dans un inconvénient que j'avois prévu et condamné.

J'estime donc que tout grave, en quel lieu du monde qu'il soit, hormis dans le centre, pris en soi et absolument, pèse toujours également, et c'est une proposition que j'aurois aisément prise pour principe, si je ne la voyois contestée. Je tâcherai donc à la prouver; mais, qu'elle soit vraie ou non, cela n'empêche pas la vérité de ma *Proposition*, qui ne considère jamais le grave en soi, mais toujours par relation au levier, et ainsi je ne mets rien dans la conclusion qui ne se trouve dans les prémisses.

Or l'équivoque, sans doute, est venue de ce que je ne vous ai pas assez expliqué les nouvelles pensées que j'ai sur le sujet des Méchaniques et lesquelles vous verrez grossièrement crayonnées sur le papier que je vous envoie (1); c'est pourtant à la charge que vous m'obligerez de ne les communiquer à personne et que vous me donnerez le loisir pour en faire les démonstrations exactes ou plutôt pour les mettre au net, car elles sont déjà faites.

L'erreur d'Archimède, si pourtant nous la pouvons nommer ainsi, provient de ce qu'il a pris pour fondement que les bras de la balance arrêteroient, quoiqu'ils ne fûssent pas parallèles à l'horizon, de quoi j'ai démontré le contraire.

Si vous examinez de nouveau la 6me et la 7me des *Equipondérans* (2), vous trouverez que je ne me trompe pas et que sa démonstration est toute fondée sur cette supposition.

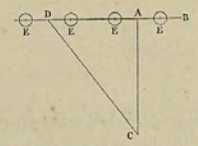
Car soit le levier EDB (*fig.* 7), duquel le centre A, celui de la terre C. Archimède, pour démontrer la proportion réciproque des poids, les divise en parties égales, comme E, et les attache en distances égales le long du levier. Or, il suppose que le centre de gravité de deux poids est au point qui divise leur intervalle également, et cela

(1) Ci-après, Pièce V.

(2) Archimède, *De planorum æquilibrio* I : Les propositions 6 et 7 démontrent la réciprocité des rapports entre les poids suspendus à un levier en équilibre et les longueurs des bras de levier; la première dans le cas de la commensurabilité, la seconde dans le cas de l'incommensurabilité des rapports.

est bien vrai aux deux poids qui sont autour du point A, parce que la ligne AC étant perpendiculaire au levier, les poids E autour du point A se trouvent également éloignés et du centre du levier et de celui de la terre et, par conséquent, ils se trouvent d'égale inclination.

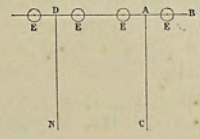
Fig. 7.



Mais si, dans le même levier, vous prenez le point D qui divise l'intervalle des deux graves E également, en ce cas le point plus éloigné du centre du levier est aussi le plus éloigné du centre de la terre, et ainsi le point D avec les deux poids E représente une balance, de laquelle les bras ne sont pas parallèles à l'horizon.

Mais si la descente des graves se faisoit par lignes parallèles, comme en cette figure (*fig.* 8) par les lignes AC et DN, en ce cas, la proposi-

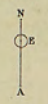
Fig. 8.



tion d'Archimède seroit vraie : ce n'est pas que dans l'usage elle manque sensiblement, mais il y a plaisir de chercher les vérités les plus menues et les plus subtiles et d'ôter toutes les ambiguïtés qui pourroient survenir. C'est ce que j'ai fait très exactement et je vous puis assurer que, quoique la recherche en soit bien malaisée, j'en possède toutes les démonstrations parfaitement.

Soit le centre de la terre A (*fig.* 9), le grave E au point E, et le point N dans la superficie ou ailleurs, plus éloigné du centre que le point E. Je ne dis pas que le point E pèse moins étant en E que s'il étoit en N, mais je dis que, si le point E est suspendu du point N

Fig. 9.



par le filet NE, la force étant au point N le retiendra plus aisément que s'il étoit plus proche de la dite force, et ce, en la proportion que je vous ai assignée.

Je crois vous avoir suffisamment expliqué ma pensée sur ce sujet.

2. Pour la question (1) des nombres dont vous me parlez, si vous m'en faites part, je tâcherai de la résoudre.

3. J'envoyai, il y a déjà longtemps, la proposition des parties aliquotes (2) à M. de Beaugrand, avec la construction pour trouver infinis nombres de même nature. S'il ne l'a pas perdue, il vous en fera part.

4. Je vous prie de relire ma proposition des graves et de m'en dire votre avis.

Je suis etc.

IV_A.

MERSENNE, *Harmonie Universelle* (1636), Préface générale (page 9 non numérotée).

.... Or, si je voulois parler des hommes de grande naissance ou qualité, qui se plaisent tellement en cette partie des Mathématiques qu'on ne sauroit peut-être leur rien enseigner, je répéterois le nom de celui à qui le livre de

(1) *Voir* ci-après, Lettre VI, 7.

(2) *Voir* ci-après, IV_A et IV_B, deux extraits des Ouvrages de Mersenne, probablement empruntés à cet écrit perdu que Fermat avait envoyé à Beaugrand.

l'Orgue est dédié (1) et ajouterois Monsieur Fermat, Conseiller au Parlement de Thoulouze, auquel je dois la remarque qu'il a faite des deux nombres 17296 et 18416, dont les parties aliquotes se refont mutuellement, comme font celles des deux nombres 220 et 284; et du nombre 672, lequel est sous double de ses parties aliquotes, comme est le nombre 120; et il sait les règles infaillibles et l'analyse pour en trouver une infinité d'autres semblables.

IV_B.

MERSENNE, *Seconde Partie de l'Harmonie Universelle* (1637), Nouvelles Observations Physiques et Mathématiques, pages 26 et suiv.

XIII. OBSERVATION.

Des parties aliquotes de 120, *et des nombres amiables.*

Il faut ajoûter à ce que j'ai dit des parties aliquotes des nombres dans la dixième remarque de la première Préface générale, la méthode de trouver le nombre semblable à 120 dont je parle au lieu susdit. Il faut donc mettre tant de nombres de suite qu'on voudra en raison double en commençant par 2, comme sont les nombres A, B, C, D, E, F :

G,	H,	I,	K,	L,	M,
1,	3,	7,	15,	31,	63.
A,	B,	C,	D,	E,	F,
2,	4,	8,	16,	32,	64.
N,	O,	P,	Q,	R,	S,
3,	5,	9,	17,	33,	65,

desquels l'unité étant ôtée, l'on fasse les nombres G, H, I, K, L, M, et auxquels l'unité étant ajoûtée l'on fasse les autres nombres N, O, P, Q, R, S. Lorsque l'un des nombres G, H, I, K, L, M, par exemple K, divisé par le nombre N du dernier ordre, éloigné de quatre rangs à main gauche, produira un nombre premier, le triple de ce nombre premier, multiplié par le nombre du rang du milieu qui précède K immédiatement, donnera le nombre requis : comme l'on voit en 15 divisé par 3 d'où vient 5 nombre premier, dont le triple 15, multiplié par 8, fait 120 qui est le nombre que nous avons donné dans la Préface susdite.

(1) Étienne Pascal.

L'autre exemple se voit en 63, lequel, divisé par 9, produit le nombre premier 7 dont le triple 21, multiplié par 32, fait 672, qui est l'autre nombre requis.

Quant aux deux nombres dont les parties aliquotes se refont mutuellement, il faut aussi mettre les nombres qui se suivent depuis 2 en progression géométrique :

2, 4, 8, 16, etc.

et puis il faut écrire des nombres triples dessous

6, 12, 24, 48,

desquels l'unité étant ôtée, restent

5, 11, 23, 47,

qu'il faut mettre dessus. Il faut enfin multiplier 6 par 12 en ôtant l'unité pour avoir 71; et 12 par 24, moins l'unité, pour produire 287; et 24 pour 48, moins l'unité, pour avoir 1151, qu'il faut disposer comme on les voit ici, jusqu'à l'infini

5, 11, 23, 47,
2, 4, 8, 16,
6, 12, 24, 48,
71, 287, 1151.

Lorsque l'un des nombres du dernier ordre avec son opposé et le précédent du premier ordre seront nombres premiers, l'on trouvera des nombres semblables à ceux dont il est question. Par exemple, le nombre du dernier rang 71, et 11 du premier ordre, et 5 qui le précède sont nombres premiers. Ceci posé, si l'on multiplie 71 par 4, et semblablement 5 et 11 par le même 4, l'on aura les deux nombres 284 et 220, dont les parties aliquotes se refont mutuellement. De rechef, le nombre du dernier ordre 1151 est nombre premier, aussi bien que son opposé dans le premier rang 47 et le précédent 23. Il faut donc multiplier 16 par 1151, et puis 47 et 23 par le même 16 pour avoir les deux nombres requis : 18416 et 17296; et ainsi des autres jusques à l'infini.

V.

NOVA IN MECHANICIS THEOREMATA

DOMINI DE FERMAT.

< Pièce jointe à la lettre précédente ou seconde rédaction envoyée à Carcavi. >

(*Va*, p. 142-143.)

1. Fundamenta Mechanices non satis accurata tradidisse Archimedem fueram dudum suspicatus : supposuisse enim motus gravium descendentium inter se parallelos patet, nec vero absque hac hypothesi constare possunt ipsius demonstrationes. Non infitior quidem hypothesin hanc ad sensum proxime accommodari; quippe, propter magnam a centro terræ distantiam possunt descensus gravium supponi paralleli non secus ac radii solares. Sed, veritatem intimam et accuratam quærentibus, hæc non satisfaciunt.

Generalis nempe vectium natura in quolibet mundi loco videtur consideranda et astruenda, ideoque nova in Mechanicis fundamenta e veris et proximis principiis accersenda. Hujus novæ Scientiæ propositiones tantum exhibemus, demonstrationes quum libuerit traditurі.

2. Duplex igitur vectium genus fingimus aut potius consideramus : unum cujus motus rectus tantum est, non circularis; alterum cujus extrema describunt circulos. De secundo hoc quæsitum tantum apud veteres; primum, quod longe videtur simplicius, ne agnoverunt quidem.

Singula exemplis illustramus, et prioris quidem centrum idem est cum centro terræ, posterioris centrum extra centrum terræ necessario debet collocari.

3. Sit igitur, in sequenti figura (*fig.* 10), centrum terræ punctum A, et intelligatur recta CB transire per punctum A; imo et ipsa CB in-

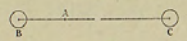
telligatur esse vectis, et in punctis B et C collocentur gravia B et C, sitque

pondus B ad pondus C ut recta CA ad rectam AB :

Aio vectem CB mansurum et æquilibrium in hoc casu constituturum.

Si vero deminuatur tantisper grave B, movebitur vectis in rectum per centrum A ad partes B, donec pondera distantiis a centro sint reciproce proportionalia.

Fig. 10.



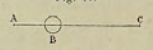
Hæc est *prima propositio* (1) cujus respectu terra ipsa magnus vectis dici potest, ad imitationem Gilberti qui eam magnum magnetem vocat.

4. Hoc posito, mirabilius quiddam proponimus (2), gravia nempe eo facilius tolli a potentia in superficie terræ aut alibi constituta, quò propiora fuerint centro terræ.

Sit centrum terræ A (*fig.* 11), punctum C extra centrum. Jungatur recta CA, in qua sumpto puncto B, collocetur grave in B. Si intelligamus grave B per filum aut axem CB suspensum, detinebitur a potentia, in C collocatà, cujus proportio sit ad pondus B ut recta AB ad rectam AC.

Indeque facillime deducitur et demonstratur gravia in centro non ponderare; cujus rei demonstrationem hactenus quæsitam jam novimus.

Fig. 11.



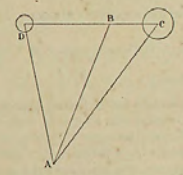
5. Secundum vectium genus Archimedeum dici potest; sed reciproca distantiarum cum ponderibus proportio, quam in vecte simplici demonstravimus, in hoc habere locum non potest, nec ideo subsistere sexta et septima Archimedis propositio (3).

(1) *Comparez* Pièce II, 1.
(2) *Comparez* Pièce II, 2.
(3) *Voir* page 18, note 2.

Ita igitur confidenter pronuntiamus et vectem generaliter sive brachia, sive in directum, sive parallela horizonti, sive etiam angulum constituant, consideramus.

Una quippe demonstratione totum evincimus : Sit vectis extra centrum terræ DBC (*fig.* 12), cujus centrum B, brachia BD et BC, centrum

Fig. 12.



terræ A. Jungantur rectæ DA, BA, CA, et in punctis B et C collocentur gravia sitque proportio gravis C ad grave D composita ex proportione rectæ DA ad rectam CA et reciproce ex angulo CAB ad angulum BAD : Aio vectem BDC, a puncto B suspensum, mansurum et æquilibrium constituturum.

Hanc propositionem, sicut et reliquas, verissimam asseveramus (1) et, quum libuerit, demonstrationibus ex puriore Geometria et Physica derivatis confirmabimus.

6. Inde patet corruere omnino Veterum de centris gravitatum definitiones; nullum quippe corpus præter sphæram potest reperiri in quo punctum reperiatur a quo grave, extra centrum terræ suspensum, servet eam quam in principio habuerit positionem.

Definietur ergo deinceps centrum gravitatis cujusque corporis, punctum intra corpus positum, quod si cohæreat centro terræ, corpus eam

(1) On voit que Fermat suppose pour l'équilibre des forces concourantes appliquées à un levier un principe qui diffère essentiellement de celui qui a été depuis universellement adopté.

servabit quam in principio habuerit positionem; eo enim solum casu habent locum centra gravitatis (1).

7. Demonstrabitur etiam et refelletur error Ubaldi (2) et aliorum, qui existimant libræ brachia, licet non sint parallela horizonti, æquilibrium tamen constitutura.

(1) Nous reproduisons ici une lettre relative à ce sujet et imprimée page 205 des *Varia* :

« *Lettera del Signor Benedetto Castelli, Abbate di Verona, al Signor di* ****.

» Ill^mo ed Ecc^mo Sig^re,

» Ho letti i pensieri sottillissimi del Sig^r di Fermat intorno al centro di gravità, e confesso liberamente che mi sono parsi belli e degni di quello sublime intelletto, che mi fu » celebrato con alta lode dal Signor di Beaugrand, quando passò per Roma, e voglio credere » che ne habbia assoluta dimostratione; e perchè il Sig^re di Beaugrand mi disse di havere » dimostrata una simile propositione, cioè che il medesimo grave, posto in diverse lontanze dal centro della terra, pesava inegualmente, e che il peso al peso era come la » distanza alla distanza dal centro della terra, io mi applicai a pensare a questa materia e » pretesi allhora di havere ritrovata la dimostratione, ma dopo, essendo mi state promosse » alcune difficoltà, mi raffreddai in questa specolatione. Mi ricordo però che ancor io ne » deducevo la medesima conseguenza che deduce ancora il Signor di Fermat, cioè che il » grave che haverà il suo centro di gravità col centro della terra non haverà peso alcuno; » e di più, che la terra tutta non ha peso; e in oltre ne cavai che, descendendo un grave » verso il centro della terra, non solo va mutando peso di momento in momento, ma (cosa » che puo parere più maravigliosa) il suo centro di gravità si va continuamente movendo » nella mole di esso grave; di più, che un grave di qualsivoglia figura, che si mova in se » medesimo circolarmente, pure va continuamente mutando il suo centro di gravità; e per » tanto facilmente concorro con il Sig^r di Fermat, che il centro di gravità non sia in natura » tale quale l'hanno descritto comunemente i Mechanici. E se io credessi che le mie debolezze potessero esser care al Signor di Fermat, gli ne mandarei una copia, non solo per » ricevere documenti da S. Sig^ria Ill^ma, ma per fare acquisto di un tale e tanto padrone, al » quale prego V. S. I. dedicarmi servitore di singulari devotione, e li bacio le mani. »

(2) GVIDIVBALDI E MARCHIONIBVS MONTIS MECHANICORVM LIBER. — Pisauri. Apud Hieronymum Concordiam, M.D.LXXVII. Cum Licentia Superiorum. — Fermat vise la Proposition III *De libra* de Guidobaldo del Monte; ce dernier cite, comme ayant soutenu une opinion contraire à la sienne, *Iordanus de ponderibus, Hyeronimus Cardanus de subtilitate, Nicolaus Tartalea de quæsitis et inventionibus.*

VI.

FERMAT A MERSENNE.

< Mardi 15 juillet 1636 > (1)

(*Va*, p. 145.)

Mon Révérend Père,

1. Puisque j'ai été assez heureux pour vous ôter l'opinion que vous aviez eue, que j'eusse suivi en ma *Proposition* (2) le même raisonnement que M. de Beaugrand, j'espère qu'avec la même facilité je vous ôterai tous les autres scrupules.

2. Vous avez cru que ma proposition étoit la même que celle de M. de Beaugrand, et ce, par deux raisons : l'une, que je l'avois écrit lorsque je l'envoyai à M. de Carcavi; l'autre, qu'elle semble conclure la même chose.

Pour la première, je vous réponds que, lorsque j'envoyai la dite proposition, je n'avois pas vu encore le livre de M. de Beaugrand et n'avois su si ce n'est qu'il écrivoit du divers poids des graves *secundum varia a terræ centro intervalla*, si bien que là-dessus j'imaginai la proposition que vous avez vue, et crus que peut-être ce seroit la même que celle de M. de Beaugrand, et l'écrivis ainsi à mondit sieur de Carcavi. Mais depuis, ayant vu le Livre de M. de Beaugrand, j'ai trouvé que son opinion est différente de la mienne en ce qu'il suppose que le grave en soi se rend ou plus pesant ou plus léger selon l'éloignement ou l'approche du centre.

3. Et moi je soutiens (en quoi je répondrai à votre seconde raison)

(1) Nous avons réuni à une fin de lettre, datée, des manuscrits A, B, une lettre très courte, non datée, des *Varia*, évidemment écrite sur le vu de la réponse de Mersenne à la Lettre IV.

(2) *Voir* la Pièce II.

qu'en soi il ne change point de poids, mais qu'il est tiré avec plus ou moins de force, ce qui est bien différent du reste.

Soit le centre de la Terre C (*fig.* 13), le grave B au point B et le point D dans la superficie. M. de Beaugrand tient que, si on pèse le

Fig. 13.



grave B dans le point B, on le trouvera plus léger que si on le pèse au point D. Et moi je dis que, si on pèse le grave B dans le point B, on le trouvera de même poids que s'il étoit pesé au point D, et qu'en tout cas, quand bien cela ne seroit pas (car ma proposition ne dépend nullement de la sienne), que le grave B sera soutenu plus aisément par une puissance qui sera au point D que par une autre puissance qui en sera plus proche, et en la proportion que j'ai assignée.

4. Vous ne devez pas douter que ma démonstration ne conclue parfaitement, bien qu'il semble que M. de Roberval ne l'a pas trouvée précise.

Je vous puis donc assurer que toutes les propositions que j'ai mises dans mon écrit (1) sont parfaitement vraies, et de cela je n'en veux pas être cru que lorsque j'aurai mis par écrit toutes les démontrations sur cette matière. Je suis si peu ambitieux que, si j'avois trouvé erreur en ce que je vous ai écrit, je ne ferois nulle difficulté de l'avouer.

(A f° 32, B f°s 25^vo-26^vo.)

5. Pour les lieux plans (2) et la proposition des nombres (3), je vous les envoierai, si M. de Beaugrand ne vous les baille pas.

(1) C'est-à-dire la Pièce V.
(2) *Voir* Lettre I, 10.
(3) *Voir* Lettre IV, 3.

6. Je n'ai pas encore pu examiner les propositions (1) de la trisection de l'angle, ni de l'invention des deux moyennes proportionnelles. Ce sera au plus tôt.

7. A la question numérique (2), je réponds qu'elle reçoit infinies solutions, et même plusieurs manières différentes de la résoudre. Voici la meilleure et la plus aisée que j'ai imaginée :

Soient trouvés deux quarrés desquels la somme soit quarrée, comme 9 et 16; ce que je n'enseigne pas, pour être trop trivial. Soit chacun d'eux multiplié par un même nombre composé de trois quarrés seulement, comme 11. Ces deux produits seront 99 et 176 qui satisferont à la question, car chacun d'eux et leur somme sont composés de trois quarrés seulement (3).

Et ainsi, par la même voie, vous en trouverez infinis, car, au lieu de 9 et 16, vous pouvez prendre tels autres deux quarrés que vous voudrez, desquels la somme soit quarrée, et au lieu de 11, tel autre nombre que vous voudrez composé de trois quarrés seulement.

Si vous prenez, au lieu de 11, un nombre composé de quatre quarrés

(1) On ne retrouve plus trace, dans la Correspondance de Fermat, de ces propositions. On peut croire qu'il s'agit des constructions données par Descartes dans sa *Géométrie* (éd. Hermann, p. 75-76) pour les deux célèbres problèmes de la Géométrie antique. Mersenne, à qui elles avaient été communiquées avant la publication, les aura envoyées à Fermat sans démonstration et sans révéler le nom de leur auteur.

(2) C'est la quatrième des cinq questions numériques proposées par Sainte-Croix (André Jumeau, prieur de) à Descartes en avril 1638 (*voir* Lettres de Descartes, éd. Clerselier, III, 74). Elle était ainsi conçue (pour Descartes) :

« Trouver deux nombres, chacun desquels, comme aussi la somme de leur aggrégat, ne conste que de trois tétragones. J'ai donné 3, 11, 14. J'attends que quelqu'un y satisfasse par d'autres nombres ou qu'il montre que la chose est impossible. »

La première solution donnée par cet énoncé ne paraît avoir été indiquée à Fermat que dans la réponse de Mersenne à la Lettre VI. *Voir* Lettre X, 2.

(3) B ajoute en marge les décompositions suivantes :

					1
1	49	49	9	144	1
1	49	25	9	16	1
9	1	25	81	16	4
11	99	99	99	176	7

seulement, comme 7, chacun des deux produits, ensemble leur somme, seront composés de quatre quarrés seulement.

Que si vous voulez non seulement deux nombres, mais trois ou tel nombre que vous voudrez, desquels un chacun, ensemble la somme de tous, soient composés de trois ou de quatre quarrés seulement, il ne faudra que trouver autant de quarrés que vous voudrez de nombres, desquels la somme soit quarrée, et les multiplier, chacun d'eux *ut supra*.

J'ajouterois la démonstration, mais le temps ne me le permet pas. En tout cas, vous pourrez faire l'essai sur la construction que je vous envoie.

8. Et vous dirai que j'ai trouvé de fort belles propositions sur ce sujet, comme :

Si, de deux plans semblables (1), *l'un est compose de trois quarrés seulement, l'autre le sera aussi;*

et plusieurs autres.

9. Je désirerois que M. de Roberval travaillât aux questions que je vous ai proposées (2).

10. J'ai achevé tout le Traité *De locis planis* (3), où il y a trente ou quarante propositions toutes très belles.

Je suis, mon Révérend Père, votre très affectionné serviteur,

FERMAT.

A Toulouse, ce 15 juillet 1636.

(1) Nombres qui sont entre eux dans le rapport de deux carrés.
(2) *Voir* la Lettre I, 12.
(3) *Voir* la Lettre I, 10.

VII.

FERMAT A ROBERVAL (1).

< AOUT 1636 >

(*Va*, p. 133-134.)

MONSIEUR,

1. Après vous avoir remercié de la faveur que vous m'avez faite et de la peine que vous avez prise, je répondrai en peu de mots aux objections que j'ai trouvées dans votre Lettre, et ce, sans aucun esprit de dispute et pour vous faire seulement approuver la vérité de mes propositions.

2. La première objection (2) consiste en ce que vous ne voulez pas accorder que le mitan d'une ligne qui conjoint deux poids égaux descendant librement, s'aille unir au centre du monde. En quoi certes il me semble que vous faites tort à la lumière naturelle et aux premiers principes : car, puisque ces deux poids sont égaux et qu'ils ont tous deux même inclination pour s'unir au centre du monde, s'ils n'étoient pas empêchés, il est clair qu'ils y approcheront tous deux également. Autrement, ayant supposé les poids égaux et les inclinations au centre égales, vous admettriez néanmoins plus de résistance d'un côté, ce qui seroit absurde.

Et n'importe d'alléguer un levier horizontal, lequel, étant pressé par deux forces égales aux deux bouts horizontalement, demeure néanmoins en l'état qu'il est, quoique l'appui qui est au dessous le divise en parties inégales. Car, au cas de ma proposition, la vérité de mon principe dépend de ce que les deux poids (ou puissances) ont naturellement inclination au centre de la terre et tendent là; et c'est pourquoi,

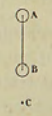
(1) Première lettre de Fermat à Roberval, répondant à une lettre perdue où ce dernier critiquait les propositions de la Pièce V, qui lui avait été communiquée par Carcavi.
(2) *Voir* Pièce V, 2.

n'ayant point d'avantage l'un sur l'autre, ils s'y approchent tous deux également. Mais en l'espèce du levier horizontal, les deux puissances des extrémités n'ont aucune inclination naturelle à l'appui, mais à s'approcher seulement; et ainsi l'appui ne doit être non plus considéré que s'il n'étoit point.

Outre que jamais personne n'a douté que le centre d'un grave ne s'unit au centre de la terre, s'il n'étoit empêché; or, deux graves, joints par une ligne qui conjoint leurs centres de gravité, ne sont censés constituer qu'un seul grave, duquel le centre de gravité est au mitan de la ligne qui les conjoint : quelle raison donc de croire qu'il s'arrête ailleurs que lorsque son centre sera uni à celui de la terre?

Soient les deux poids égaux A et B (*fig.* 14) joints par la ligne AB,

Fig. 14.



le centre de la terre C. Qu'on laisse choir librement les poids A et B; lorsque le poids B sera au centre C, on ne peut pas dire qu'il s'arrête, parce que le poids A *gravitat super* B *et destruit æquilibrium*. Où commencera donc le levier AB de s'arrêter? Vous ne sauriez trouver le commencement de son repos en un point plutôt qu'en l'autre, si ce n'est au mitan, parce qu'il se trouve pour lors également contrebalancé de tous côtés.

Je ne sais si ces raisons seront capables de vous faire changer d'avis, mais vous me permettrez bien de vous dire que vous trouverez peu de gens qui suivent votre opinion et qui ne m'accordent ce principe : c'est pourquoi je vous conjure de me dire nettement ce qu'il vous en semble.

3. La deuxième objection (1) est contre la nouvelle proportion des

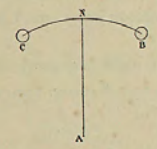
(1) *Voir* Pièce V, 5. — Roberval a, cette fois, raison contre Fermat.

angles que j'ai découverte, contre laquelle pourtant vous n'avez rien dit de précis, mais seulement que vous avez démontré que la proportion réciproque des poids doit être expliquée non pas par les angles, mais par les sinus de ces angles.

Voici la démonstration de ma proposition, de laquelle vous verrez aisément par conséquent celle de toutes celles que vous avez vues dans l'écrit que j'envoyai à M. de Carcavi.

Sit centrum terræ A (fig. 15), *vectis* CNB *portio circuli centro* A *intervallo* AN *descripti*, CN, NB *æquales circumferentiæ, et in punctis* C, B

Fig. 15.



æqualia pondera. Supponimus vectem CB *a puncto* N *suspensum manere, idemque accidere si gravia æqualia in quibuslibet punctis brachiorum* CN, NB *collocentur, modo hujusmodi puncta ex utraque parte æqualiter a puncto* N *distent : neque enim destruent æquilibrium pondera æqualia a centro terræ et a centro vectis sive libræ æqualiter distantia.*

Sit centrum terræ A (fig. 16), *vectis sive libra* EFBCD, *ut supra, cen-*

Fig. 16.



trum sive medium libræ punctum B. *Collocetur pondus* B *in puncto* B *aut,*

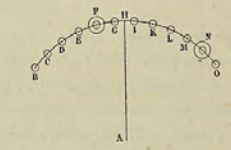
diviso pondere B *in partes æquales* E, F, B, C, D, *collocentur eæ partes in punctis* E, F, B, C, D, *et sint intervalla* EF, FB, BC, CD *æqualia. Supponimus pondus* B, *in puncto* B *collocatum et a puncto* B *suspensum, idem ponderare ac partes* E, F, B, C, D *simul sumptæ, in vecte collocatæ et ab eodem puncto* B *suspensæ.*

Illud nempe accidit quia, propter circulum EFBCD, *partes ponderis* B *eamdem semper servant distantiam a centro terræ ac pondus ipsum integrum* B : *quod non animadvertisse et descensus gravium parallelos supposuisse errorem peperit Archimedeum.*

His suppositis, propositionem nostram demonstramus, et ecce tantùm casum in quo tum vectis centrum, tum extrema æqualiter a centro terræ distant, quia hic casus veritatem prioris vectis geostatici non supponit, de qua videris ambigere.

Sit vectis FHN (fig. 17), *cujus centrum* H, *extrema* F *et* N, *in eadem, quo punctum* H, *a terræ centro distantia. Centro* A, *intervallo* AH, *descri-*

Fig. 17.



batur portio circuli FHN, *vectis extrema committens, et sit grave in* F *ad grave in* N *in proportione reciproca circumferentiæ* HF *ad circumferentiam* HN : *Aio vectem* FHN *a puncto* H *suspensum mansurum et æquilibrium constituturum.*

Hanc autem proportionem eamdem esse quæ angulorum ad centrum A, *patet : ex constructione et duobus axiomatibus præcedentibus facillime theorema concludes.*

4. La hâte du courrier me fait finir là, parce que je ne doute pas que vous ne puissiez voir la conclusion avec un peu de méditation.

Au reste, je vous puis assurer que le Livre (1) qu'il vous a plu m'envoyer est ce que j'ai vu de plus ingénieux sur cette matière ; mais, si mes propositions sont vraies, de quoi peut-être vous ne douterez pas toujours, vous m'accorderez que ce mouvement sur les plans inclinés se peut prouver encore plus précisément.

Ce n'est pas que je n'estime autant que je dois votre invention ; mais ce que le chancelier Bacon a dit est bien vrai : « *Multi pertransibunt et augebitur scientia* (2). »

Je suis etc.

VIII.

ÉTIENNE PASCAL ET ROBERVAL A FERMAT.

SAMEDI 16 AOUT 1636 (3).

(*Va*, p. 124-130.)

MONSIEUR (4),

1. Le principe que vous demandez pour la Géostatique est que, si deux poids égaux sont joints par une ligne droite ferme et [de soi] sans

(1) Il s'agit évidemment du *Traité de Méchanique. Des poids soustenus par des puissances sur les plans inclinez à l'Horizon. Des puissances qui soustiennent un poids suspendu à deux chordes. Par G. Pers. de Roberval, Professeur Royal ès Mathématiques au Collège de Maistre Gervais et en chaire de Ramus au Collège de France*, inséré, avec une pagination spéciale (de 1 à 36), dans la *Seconde Partie de l'Harmonie universelle* du P. Mersenne (1637).

(2) Cette pensée, tirée d'un texte du prophète Daniel (XII, 4), se trouve dans le *Novum organum* (I, aphor. 93) sous la forme : *Multi pertransibunt et multiplex erit scientia*, et dans le Traité *De dignitate et augmentis scientiarum* (I, cap. X, 3), sous la suivante : *Plurimi pertransibunt et augebitur scientia*. Mais Fermat a textuellement reproduit la légende d'une vignette au frontispice de la première édition du *Novum Organum* (1620), vignette qui représente un vaisseau franchissant à pleines voiles les Colonnes d'Hercule.

(3) Réponse à la Lettre VII. Fermat y a répliqué par la Lettre IX, puis à nouveau par la Lettre XI.

(4) Le texte de cette Lettre a été restitué d'après le manuscrit de la Bibliothèque nationale, latin 7226 f° 40 suiv. Les mots entre crochets [ ] sont des additions empruntées à l'édition des *Varia*. Quant aux autres leçons de cette édition, qui représentent une rédac-

poids et, qu'étant ainsi disposés, ils puissent descendre librement, ils ne reposeront jamais jusques à ce que le milieu de la ligne (qui est le centre de pesanteur des anciens) s'unisse au centre commun des choses pesantes.

2. Ce principe, que nous avons considéré il y a longtemps, ainsi qu'il vous a été mandé, paroît d'abord fort plausible; mais, quand il est question de principe, vous savez quelles conditions lui sont requises pour être reçu : desquelles conditions, cette principale manque au principe dont il s'agit ici, savoir que nous ignorons quelle est la cause radicale qui fait que les corps pesants descendent et d'où vient l'origine de cette pesanteur. Ainsi nous n'avons rien de connu assurément de ce qui arriveroit au centre où les choses pesantes aspirent, ni aux autres lieux hors la surface de la terre, de laquelle, pour ce que nous y habitons, nous avons quelques expériences sur lesquelles nous fondons nos principes.

3. Car il se peut faire que la pesanteur est une qualité qui réside dans le corps même qui tombe; peut-être qu'elle est dans un autre, qui attire celui qui descend, comme dans la terre. Il se peut faire aussi et est fort vraisemblable que c'est une attraction mutuelle ou un desir naturel que les corps ont de s'unir ensemble, comme il est clair au fer et à l'aimant, lesquels sont tels que, si l'aimant est arrêté, le fer, n'étant point empêché, l'ira trouver, [et] si le fer est arrêté, l'aimant ira vers lui et, si tous deux sont libres, ils s'approcheront réciproquement [l'un de l'autre], en sorte toutefois que le plus fort des deux fera le moins de chemin.

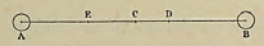
Or, de ces trois causes possibles de la pesanteur [ou des centres des corps], les conséquences seront fort différentes, ce que nous ferons connoître en les examinant ici l'une après l'autre.

tion nouvelle de Roberval faite en vue de l'impression de la Correspondance de Fermat, elles sont reproduites ci-après dans les *Variantes*. Bossut a compris cette Pièce dans son édition des *Œuvres de Blaise Pascal*, 1779; il a suivi en général le texte des *Varia*, à part les changements d'orthographe et quelques modifications de détail.

4. En premier lieu, si la première est vraie, selon l'opinion commune, nous ne voyons point que votre principe puisse subsister : car, sur ce sujet, le sens commun nous dit qu'en quelque lieu que soit un poids [près ou loin du centre de la terre], il pèse toujours également, ayant toujours [en soi] la même qualité qui le fait peser et [en même degré. Le sens commun nous dicte aussi, posée cette même opinion première] qu'alors un corps reposera au centre commun des choses pesantes, quand les parties du corps qui seront de part et d'autre du même centre, seront d'égale pesanteur pour contrepeser l'une à l'autre, sans avoir égard si elles sont peu ou beaucoup [également ou inégalement] éloignées du centre [commun].

Soient donc les deux poids égaux A, B (*fig.* 18), joints ensemble par la ligne [droite] ferme et [de soi] sans poids AB; et soit C le point du

Fig. 18.



milieu de la même ligne AB, et [soient] D, E, des autres points tels quels dans ladite ligne entre les poids A, B. [Vous demandez qu'on vous accorde que les poids A, B, tombant librement avec leur ligne, ne reposeront point jusqu'à ce que le point du milieu C s'unisse au centre commun des choses pesantes.]

Nous accordons que, si le composé des poids A, B est mis de sorte que le point C convienne avec le centre commun des choses pesantes, alors le tout demeurera en équilibre. Mais il nous semble aussi que si le point D ou E convient au même centre commun, en sorte que l'un des poids en soit plus proche, pourvu que l'un soit entièrement d'une part du centre et l'autre de l'autre, ils contrepèseront encore et demeureront en équilibre, comme par le point C, puisque (pour nous servir de vos paroles mêmes) ces deux poids sont égaux et ont tous deux même inclination pour s'unir au [même] centre commun [des choses pesantes], et l'un n'a aucun avantage par dessus l'autre pour le déplacer de son lieu.

Que si être plus proche ou plus éloigné du centre pouvoit être quelque avantage, ce que nous ne croyons pas, supposé que la pesanteur réside au corps même, vous trouverez plus de gens qui croiront que l'avantage est de la part de celui qui est plus proche du centre commun que l'autre : ce qui toutefois est directement contre votre supposition.

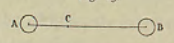
Et ne sert de rien d'alléguer le centre de pesanteur du corps AB, lequel centre, selon les anciens, est au milieu C : car ce centre n'a été démontré que quand la descente des poids se fait par des lignes parallèles, ce qui n'est pas; et, quand il y auroit un tel point, ce qui ne peut être aux corps qui tiennent à un même centre commun, il n'a pas été démontré et ne prouveroit aucunement que ce seroit ce point là par lequel le corps s'uniroit au centre commun. Même cela, pour les raisons précédentes, répugne à notre commune connoissance en plusieurs figures.

En tout cas, nous ne voyons point que ce centre commun des anciens doive être considéré autre part qu'aux poids qui sont pendus ou soutenus hors du lieu auquel ils aspirent.

5. Quant à la comparaison qui vous a été faite du levier horizontal, lequel, étant pressé horizontalement aux deux bouts par deux forces ou puissances égales, demeure en même état qu'il est, elle nous semble entièrement semblable au levier [précédent] AB pressé aux deux bouts par les deux poids égaux A, B, puisque ces poids ne pressent le levier que par la [force ou] puissance qu'ils ont de se porter vers leur centre commun C, D ou E.

Comme si le levier horizontal est AB (*fig.* 19) et les forces ou puis-

Fig. 19.



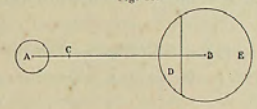
sances égales A [et] B, pressant horizontalement le levier pour le porter à un certain point commun C, auquel elles aspirent et lequel est posé également ou inégalement entre les mêmes puissances dans la ligne AB;

ces forces, pressant également le levier, se résisteront l'une à l'autre, selon notre sens, encore même que l'une, comme A, fût plus près que l'autre du point commun C auquel toutes deux aspirent. Et quand le levier ne seroit point horizontal, mais en telle autre position que l'on voudra, étant considéré [de soi] sans poids et toutes les autres choses comme auparavant, le même effet s'ensuivra selon notre jugement et la comparaison sera entièrement semblable à celle des poids qui sont à l'entour du centre commun des choses pesantes.

6. Nous ajouterons ici ce que nous pensons en ce cas des poids qui seroient inégaux joints comme dessus à une ligne droite ferme et [de soi] sans poids, pour mieux faire paroître notre sentiment.

Soient deux poids inégaux A, B (*fig.* 20), desquels A soit le moindre,

Fig. 20.



et soit AB la ligne ferme qui les joint, dans laquelle le centre de pesanteur des anciens soit le point C, lequel ne sera pas au milieu de la ligne AB. Si donc on pose le composé des poids A, B de sorte que le point C convienne au centre commun des choses pesantes, nous ne pouvons croire qu'il demeurera en cet état, le poids A étant entièrement d'une part du centre [des choses pesantes] et [le poids] B [entièrement] de l'autre part. Mais il nous semble que le plus grand poids B doit s'approcher du même centre [des choses pesantes, jusqu'à ce qu'une partie du dit poids B soit au delà du dit centre] vers A, comme la partie D, en sorte que cette partie D avec [tout le poids] A, étant d'une même part, contrepèsent avec la partie [E] restante de l'autre part.

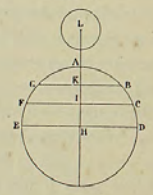
7. Outre ce, nous avons encore une instance en ce cas qui semble conclure que la figure et le volume et encore la disposition des poids

doit être considéré, d'autant qu'un corps pesant semble devoir peser d'autant moins qu'il occupera une plus grande portion de la circonférence ferme passant par le corps et décrite alentour du centre commun des choses pesantes, ce que nous expliquerons plus amplement ci après sur votre second principe du levier. Or vous savez qu'un même corps, sous différentes figures, positions ou volumes, peut occuper plus ou moins de cette circonférence et, s'il y a cause pour laquelle un même corps doive moins peser proche du centre qu'étant plus éloigné, celle-ci en est peut-être une, étant clair que, quoiqu'il fût toujours de même figure, position et volume, néanmoins, étant plus proche du centre, il occupera une plus grande portion de la circonférence susdite qu'étant plus éloigné. Mais, quand cela seroit, nous croyons qu'à peine seroit-il possible à l'esprit humain d'assigner les proportions de cette augmentation ou diminution selon les différents éloignements du centre.

8. Si la seconde ou la troisième cause possible de la pesanteur des corps est vraie, il nous semble que l'on en peut tirer des [mêmes] conclusions.

Soit le corps attirant ABCD (*fig.* 21) [sphérique], duquel le centre

Fig. 21.



soit H, et que la vertu d'attraction soit également épandue par toutes les parties du corps attirant, et soit le corps attiré L, considéré premièrement hors le corps attirant en A.

Soit menée la ligne droite AH, à laquelle soit un plan perpendiculaire EHD, coupant le corps ABCD en deux parties [égales et partant] d'égale vertu. Soient aussi, dans la ligne AH, marqués tant de points que l'on voudra, comme K, I, par lesquels soient menés des plans [FIC, GKB] parallèles au plan EHD, coupant le corps [attirant] ABCD en parties inégales, et partant d'inégale vertu.

[Alors] le corps [L] étant en A sera attiré vers H par la puissance de tout le corps ABCD et, le chemin étant libre, il viendra en K, là où il sera attiré vers H par la plus [grande et] forte partie BDEG [et contretiré vers A par la plus petite et plus foible partie BAG]; il en sera de même quand il sera venu en I, où il sera moins attiré que quand il était en K ou en A; toutefois il sera contraint de s'approcher toujours du centre H, tant qu'il y soit venu, et, la partie qui attire diminuant toujours et celle qui retire s'augmentant [toujours], il sera continuellement attiré avec moins de force jusques à ce qu'étant arrivé en H, il sera également attiré de toutes parts et demeurera en cet état.

Si cette position est vraie, il est facile de voir que le corps L pèsera d'autant moins qu'il sera [plus] proche du centre H; mais son poids ne diminuera pas en la proportion des lignes HI, HK, HA, ce que vous connoitrez assez en le considérant, sans que nous vous l'expliquions davantage.

9. Puis donc que de ces trois causes possibles de la pesanteur, nous ne savons quelle est la vraie, et que même nous ne sommes pas assurés que ce soit l'une d'icelles, se pouvant faire [que la vraie cause soit composée des deux autres ou] que ce [en] soit une [tout] autre, de laquelle on tireroit des conclusions toutes différentes, il nous semble que nous ne pouvons pas poser d'autres principes [pour raisonner] en cette matière que ceux desquels nous sommes assurés par une expérience continuelle assistée d'un bon jugement.

Quant à nous, nous appelons des corps également ou inégalement pesants, ceux qui ont une égale ou inégale puissance de se porter vers le centre commun [des choses pesantes], et un même corps est dit avoir un même poids, quand il a toujours cette même puissance : que

si cette puissance augmente ou diminue, alors, quoique ce soit le même corps, nous ne le considérons plus comme le même poids. Or, que cela arrive aux corps qui s'éloignent ou s'approchent du centre [commun des choses pesantes], c'est ce que nous désirerions bien de savoir; mais, ne trouvant rien qui nous contente sur ce sujet, nous laissons cette question indécise et nous raisonnons seulement sur ce que les Anciens et nous en avons pu découvrir de vrai jusques à maintenant. [Voilà ce que nous avons à vous dire pour le présent touchant votre principe de la Géostatique, laissant à part beaucoup d'autres doutes pour éviter prolixité de discours.]

10. Pour la nouvelle proportion des angles que vous mettez en avant, afin de la démontrer, vous supposez deux principes, desquels le premier est vrai et l'autre si éloigné d'être vrai, qu'il y a des cas où il arrive tout le contraire de ce que vous demandez [qu'on vous accorde pour vrai].

Le premier est tel : soit A (*fig.* 22) le centre commun des choses pesantes, l'appui du levier N, et du centre A, intervalle AN, soit décrite

Fig. 22.



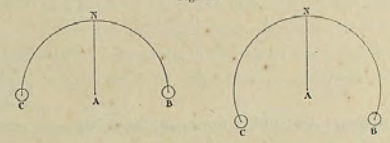
une portion de circonférence telle quelle CNB, pourvu que l'arc CN soit égal à l'arc NB; et soit considéré cet arc CN [B] comme une balance ou un levier [de soi] sans poids, qui se mène librement à l'entour de l'appui N; soient aussi des poids égaux posés en C [et] B.

Vous supposez que ces poids contrepèseront l'un à l'autre et feront équilibre, étant balancés sur le point N; et [il] semble que tacitement vous supposez encore l'équilibre, quand les bras du levier NC et NB seront des lignes droites, pourvu que les points C [et] B soient également éloignés du centre A, et les lignes NC et NB soustendantes ou cordes, en effet ou en puissance, d'arcs égaux NC, NB.

Toutes ces choses sont vraies en général, mais nous ne les croyons telles que pour ce que nous les avons démontrées en conséquence d'autres principes qui nous sont plus familiers, plus clairs et plus connus.

Toutefois, en particulier, il y a une distinction qui doit être bien considérée et est telle : Quand les arcs NC et NB sont chacun moindres qu'un quart de circonférence, le levier [CNB chargé des poids C et B] pèse sur l'appui N, poussant vers le centre A pour s'en approcher; quand les arcs CN, NB (*fig.* 23) sont chacun d'un quart de circonfé-

Fig. 23.



rence, le levier CNB chargé des poids C, B ne pèse nullement sur l'appui N, d'autant que les poids sont diamétralement opposés, et partant le levier demeurera de même sans appui [qu'avec un appui]; enfin, quand les arcs égaux NC, NB sont chacun plus grands qu'un quart de circonférence, le levier CNB, chargé des poids égaux C, B, pèse sur l'appui N poussant vers N pour s'éloigner du centre A.

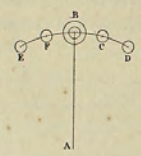
11. Si ces particularités sont bonnes, il s'ensuit que votre second principe ne peut subsister, ce qui paroîtra fort clair quand nous l'aurons examiné plus particulièrement, comme il s'ensuit :

Soit donc A (*fig.* 16) le centre commun des choses pesantes, la balance ou le levier EFBCD, dont l'appui est B. Soit posé un poids comme B, tout entier au point B, pesant de toute sa force sur l'appui B; ou bien soit divisé le poids B en parties égales E, F, B, C, D, lesquelles soient posées sur le levier aux points E, F, B, C, D, étant les arcs EF, FB, BC, CD égaux et tout l'arc EFBCD décrit alentour du centre A.

Vous supposez que le poids [B], posé tout entier au point B, pèsera

de même sur l'appui B qu'étant posé par parties [égales] aux points E, F, B, C, D. Cela est tellement éloigné du vrai que quelquefois [le poids B, ainsi posé par parties sur le levier, ne pèsera plus du tout sur l'appui B; quelquefois], en lieu de peser sur l'appui B [pour tirer le levier] vers A, il pèsera [tout] au contraire sur le même appui [B] pour s'éloigner de A; et toutefois, étant ramassé tout entier au point B

Fig. 16.

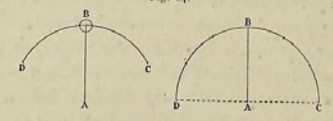


il pèsera toujours de toute sa force sur l'appui B pour emporter le levier vers A et, en général, étant [divisé et] étendu, il pèsera toujours moins sur l'appui qu'étant ramassé au point B [et vous supposez qu'entier et divisé, il pèse toujours de même].

Toutes ces choses, quoique contraires à votre supposition, sont démontrées en suite de nos principes, et nous vous en pouvons expliquer les principaux cas par vos principes mêmes.

12. Soit derechef A (*fig.* 24) le centre commun des choses pesantes,

Fig. 24.



alentour duquel soit décrit le levier CBD qui soit, de soi, sans poids et prolongé tant que de besoin : et soit B le point de l'appui, auquel si un poids est posé, nous demeurerons d'accord avec vous qu'il pèsera

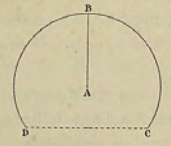
de toute sa force sur l'appui B, lequel appui, s'il n'est assez fort, rompra et le poids s'en ira avec son levier jusques au centre A.

13. Maintenant, soit divisé le poids, premièrement en deux parties égales et, ayant pris les arcs BC et CD, chacun d'un quart de circonférence, afin que tout l'arc CBD soit une demie circonférence, soit posée une moitié du poids en D, l'autre en C. Lors ces deux poids C [et] D, pesant vers A, ne feront point d'autre effet sur le levier CBD, sinon qu'ils le presseront également par les [deux] bouts C [et] D pour le courber. Supposant donc qu'il est assez roide pour ne pas plier, ils demeureront [sur le levier] de même que s'ils étoient attachés aux bouts du diamètre DAC, sans qu'il soit besoin de l'appui B, sur lequel le levier, chargé de ses deux poids, ne fait aucun effort : quand cet appui n'y sera pas, le tout demeurera de même que quand il y sera, ce qui est assez clair.

Que si le poids est divisé en plus de deux parties égales et, qu'étant étendu sur des portions égales du levier, deux d'icelles parties se rencontrent aux points C, D, [et] les autres dans l'espace CBD, celles qui seront en C [et] D, ne chargeront point l'appui B; quant aux autres, elles le chargeront, mais d'autant moins que plus elles approcheront des points C, D, auxquels finit la charge. Ainsi, il s'en faudra beaucoup que toutes ensemble étendues chargent autant l'appui que si elles étoient amassées en B; [elles ne pèsent donc pas de même].

14. Davantage, soient pris les arcs égaux BC [et] BD (*fig.* 25), plus

Fig. 25.

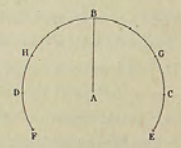


grands chacun qu'un quart de circonférence, et soit imaginée la ligne

droite DC. Puis, étant divisé le poids en deux parties égales seulement, soit attachée l'une en C, [et] l'autre en D. [Alors] il est clair que le levier, chargé des poids C, D, pèsera sur l'appui B; mais ce sera tout au contraire que si les deux poids étoient amassés en B. Car, si l'appui n'est pas assez fort, il rompra, et les poids, emportant leur levier, que nous supposons être de soi sans poids, ne cesseront de mouvoir tant que la ligne droite CD soit venue au point A, le levier étant monté en partie au-dessus de B, au lieu de s'abaisser vers A, ce qui seroit arrivé si les poids, étant amassés en B, avoient rompu l'appui. [Voyez quelle différence!]

15. Enfin, soit le levier comme auparavant (*fig.* 26), auquel soient les quarts de circonférence BC, BD et, de part et d'autre du point C,

Fig. 26.



soient pris des arcs égaux CG, CE, chacun moindre qu'un quart. De même, de part et d'autre du point D, soient pris les arcs égaux, entre eux et aux précédents, DH, DF, tous commensurables au quart. Soit aussi divisé tout l'arc EBF en tant de parties égales qu'on voudra, en sorte que les points E, C, G, B, H, D, F soient du nombre de ceux qui font la division; et soit divisé le poids en autant de parties égales que l'arc EBF, lesquelles parties de poids soient posées aux points de la division du levier.

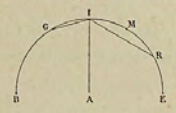
Alors, les poids qui se trouveront posés sur les arcs EC et FD, déchargeront autant l'appui B qu'il étoit chargé par ceux des arcs CG, DH. Ainsi, considérant tous ceux qui sont sur les arcs EG et FH, ils ne chargent point l'appui [B], lequel, par ce moyen, ne sera chargé que

par ceux qui seront sur les arcs GB, BH; et, si entre BG et BH il n'y a aucun poids (ce qui arrivera quand ces arcs BG et BH ne feront chacun qu'une partie de la [susdite] division [du levier]), alors l'appui [B] sera entièrement déchargé.

Voyez donc combien il y aura de différence entre les poids amassés en B et étendus [par parties] sur le levier EBF. Voyez aussi qu'un même poids [divisé par parties et étendu sur le levier] pèse d'autant moins sur l'appui B que plus [grande est la portion qu'] il occupe de la même circonférence décrite alentour du point A [centre commun des choses pesantes].

16. Maintenant, pour venir à votre démonstration, soit le levier GIR (*fig.* 27), [duquel] l'appui soit I et que les extrémités G, R et l'appui I

Fig. 27.



soient également éloignés du centre commun [des choses pesantes] A, alentour duquel soit imaginée la portion de circonférence GIR, et soit fait que

comme l'arc GI à l'arc IR, ainsi le poids R soit au poids G.

Vous dites que le levier chargé des poids G, R demeurera en équilibre sur son appui I; quant à la démonstration, vous supposez qu'elle est assez facile en conséquence des deux principes précédents et, de fait, si les principes étoient vrais, il ne resteroit peut-être pas beaucoup de difficulté et la chose se pourroit à peu près conclure ainsi, la conclusion étant faite selon la méthode d'Archimède, en sorte que les arcs RE, RM soient égaux, tant entre eux qu'à l'arc IG, et les arcs GB, GM égaux, tant entre eux qu'à l'arc IR.

[Et] soit étendu le poids R également depuis E jusques en M et le

poids G aussi également depuis M jusques en B; ainsi les deux poids G, R seront également étendus sur tout l'arc BGIMRE, duquel arc les portions IB, IE étant égales, le levier BGIMRE demeurera en équilibre sur l'appui I par le premier principe.

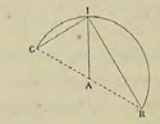
Mais le poids G, étendu depuis B jusques en M, pèse de même qu'étant ramassé au point G, par le second principe, et, par le même principe, le poids R pèse de même, étant étendu depuis M jusques en E, qu'étant ramassé au point R. Car tous ces poids, étant ramassés en G et en R, pèseront de même sur le levier qu'étant étendus; puis donc qu'étant étendus, ils faisoient équilibre sur le même levier, ils feront encore équilibre, étant ramassés en G et en R.

En cette démonstration, tout ce qui est fondé sur le second principe feroit les mêmes difficultés que le principe même et, partant, la conclusion ne s'ensuit pas que les poids G, R fassent équilibre sur le levier GIR.

Nous pouvions nous contenter de ce que dessus, croyant que vous serez satisfait; mais nous vous prions de considérer encore deux instances qui sont telles :

17. La première, qu'au levier GIR (*fig.* 28), l'angle GIR étant droit et [partant] l'arc GIR une demie circonférence [décrite autour de A

Fig. 28.

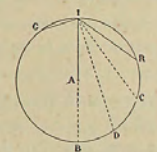


centre commun des choses pesantes], si [l'] on pose l'arc GI moindre que l'arc IR, par exemple que GI soit le tiers de IR et le poids R de 20 livres, il faudroit donc en G 60 livres, selon vous, pour faire équilibre sur le levier GIR appuyé au point I. Et toutefois, si vous mettez des poids égaux en G et en R, ils seront diamétralement opposés et

[partant par le principe de la Géostatique, au cas du dit principe accordé par vous et par nous, les dits poids égaux] feront encore équilibre comme s'ils pesoient sur les extrémités du diamètre GR vers le centre A; et, quand il y a une fois équilibre, pour peu que l'on augmente ou diminue l'un des poids, l'équilibre se perd. Voyez comme cela se peut accorder avec votre position.

18. La seconde instance est telle : soit le centre [commun des choses pesantes] A (*fig.* 29), alentour duquel soit la circonférence GIR, l'appui

Fig. 29.



du levier I, et les bras IG, IR, desquels GI soit le moindre; et soit prolongée la ligne droite IA tant qu'elle rencontre la circonférence en B. Partant, selon vous, il faudra en G un plus grand poids qu'en R et, si l'on prend l'arc IC plus grand que IR, faisant le bras du levier IC et même poids en C qui étoit en R, il faudra en G un plus grand poids qu'auparavant [pour faire l'équilibre]. De même, prenant l'arc ID encore plus grand que IC et faisant le bras du levier ID et le poids D de même que le poids C, il faudra encore augmenter le poids G. Ainsi, plus le bras du levier qui est en la circonférence IRB aboutira près du point B, étant chargé du même poids, plus il faudra à IG un grand poids pour contrepeser, et, selon le sens commun, raisonnant à l'ordinaire, le bras du levier étant [la ligne droite] IB [chargé comme dessus], il faudroit en G le plus grand poids. Et toutefois, alors le poids qui seroit en B, pesant vers A, feroit tout son effort sur la roideur du bras BI; et le moindre poids qui seroit en G feroit balancer le bras IB vers D; et pour peu que le poids qui sera sur le bras IG fait balancer le

bras IB avec son poids vers D (ce qui semble ne se pouvoir nier), alors, encore que tant G que B sortent de la circonférence, on conclura une absurdité manifeste contre votre position.

19. Enfin, Monsieur, pour ce que l'expérience de tout ce que dessus ne se peut faire des poids naturels, si vous voulez prendre la peine de la faire avec des artificiels, supposant [pour levier] un petit cercle artificiel, au lieu du grand cercle naturel, et des puissances qui agissent [ou aspirent] vers le centre du petit cercle, au lieu des poids qui agiroient vers le centre du grand, vous trouverez que l'expérience est du tout contraire à votre raisonnement.

Si nous eussions eu du temps davantage, nous vous aurions envoyé ce que nous avons établi sur ce sujet et les démonstrations, mais ce sera au premier ordinaire.

20. Si vous avez agréables les communications sur le sujet de la Géométrie, en laquelle nous savons que vous excellez entre tous ceux du temps, nous vous ferons voir de notre part des choses que peut-être vous ne mépriserez pas. Or ce que nous vous proposerons ne sera point par forme de questions, mais nous vous envoierons les démonstrations en même temps pour en avoir votre jugement.

[Vous nous obligerez aussi de nous faire de vos pensées. Nous sommes, etc.]

IX.

FERMAT A ÉTIENNE PASCAL ET ROBERVAL.

SAMEDI 23 AOUT 1636 (1).

(*Va*, p. 130-132.)

MESSIEURS,

1. J'ai lu avec grand soin le jugement qu'il vous a plu me donner des propositions que j'avois envoyées à M. de Carcavi et, comme j'ai

(1) Première réplique à la Lettre VIII; *voir* particulièrement 10 et 11.

reconnu la fermeté de votre raisonnement jointe avec une grande et profonde connoissance de cette matière, j'ai aussi cru que vous ne trouveriez pas mauvaise ma réplique que je ferai en peu de mots, et que peut-être je tirerai à ce coup de vous le consentement que vous n'avez pas voulu m'accorder d'abord. Et je ne pense pas avoir besoin de m'excuser des erreurs qu'il vous a semblé que j'avois commises, à quoi, quand je ne répondrois que par la hâte que j'eus d'écrire à M. de Roberval (1), lequel j'avois prié de suppléer ce qui ne seroit pas expliqué assez au long, j'aurois peut-être suffisamment satisfait.

2. Mais pourtant je vous déclare que je n'ai jamais cru parler que du levier moindre que le demi-cercle et, si j'ai omis de l'écrire, ma figure, qui n'en représentoit que celui-là, réparoit assez ce manquement, puisque je n'avois pas seulement eu le temps d'écrire la démonstration de ma proposition sur ma dite figure. Que si le levier est plus grand que le demi-cercle, j'ajouterai à la fin de ce discours la proportion qu'il doit garder; il me semble que j'en ai assez dit pour répondre à la plus forte des objections que vous faites contre mon second levier.

3. L'autre qui combat mon second principe a été prévue par moi, et je vous avouerai que, quoique ce second principe soit manifestement faux et qu'il choque mon sentiment sur le fait du premier levier, je l'avois pourtant industrieusement et à dessein mis dans ma Lettre, afin de vous faire accorder qu'un grave pèse moins, plus il approche du centre de la Terre, ou, en me niant cette vérité, vous obliger d'accorder celle de mon second levier. M. de Carcavi, à qui je l'avois écrit quelque temps auparavant que de recevoir vos Lettres, vous le témoignera sans doute, et j'en ai tiré du moins le profit que vous m'avez accordé qu'un grave pèse moins, plus il approche du centre, quoiqu'il soit malaisé de déterminer la proportion de la différence de ces poids.

4. Je me contente d'avoir dit ce peu de mots par avance et viens à la démonstration de mon second levier, après vous avoir assuré que

(1) *Voir* Lettre VII.

jamais homme du monde ne se portera avec plus de bonne foi et d'ingénuité que moi à avouer les vérités que j'aurai reconnues, et que je crois ma proposition tellement vraie que, l'ayant souvent considérée de divers biais et à diverses reprises, je n'ai jamais pu en douter.

Voici les vrais principes de ma démonstration :

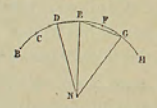
Axioma I. — *Si grave quiescens ab aliquo puncto suspendatur, gravitabit super lineam rectam punctum suspensionis et centrum terræ conjungentem. — Patet axiomatis veritas quia aliter grave non quiesceret.*

Axioma II. — *In vecte circulari, cujus dimidium punctum suspensionis, si ex utraque parte in punctis æqualium sectionum gravia æqualia collocentur, corpus ex omnibus illis gravibus compositum et a medio illo puncto suspensum quiescet.*

Axioma III. — *In vecte circulari semicirculo minori, cujus centrum est centrum terræ (hoc enim in nostro vecte semper intelligendum), si punctum suspensionis inæqualiter vectem dividat et ex utraque parte in punctis æqualium sectionum gravia æqualia collocentur, non manebit corpus ex omnibus illis gravibus compositum, sed inclinabitur vectis ex parte majoris portionis. — Hoc patet etiam ex vestris positionibus : quum enim totus vectis sit semicirculo minor, sinus minoris portionis erit minor sinu majoris portionis, ideoque non negabitis inclinationem fieri ex parte majoris portionis.*

His suppositis, exponatur figura continens vectem DEG (fig. 30) *et perficiantur reliqua juxta præparationem Archimedeam. Grave in* D, *dispositum per partes æquales in portiones* BC, CD, DE, EF, *gravitat super rectam* DN : *nam, suspensum a puncto* D, *per secundum axioma quiescit ; ergo, per primum, gravitat super* DN. *Igitur, sive totum sit in* D, *sive dis-*

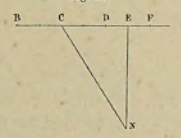
Fig. 30.



positum per partes æquales in portiones BC, CD, DE, EF, *semper super eamdem rectam* DN *gravitat. Similiter grave in* G, *sive totum sit in* G, *sive per partes æquales* FG, GH *disponatur, semper super eamdem rectam* GN *gravitabit. Quum autem gravia per partes æquales* BC, CD, DE, EF, FG, GH *disposita sint æqualia, gravitabit aggregatum totius gravis super rectam* EN : *ergo patet conclusio aut, per deductionem ad absurdum, inde facillime derivatur ope tertii axiomatis.*

Eadem certe erat Archimedis (1) *ratiocinatio : nam rectæ* BD (fig. 31) *centrum gravitatis, verbi gratia, in* C *constituit, ut probet gravia æqualia*

Fig. 31.



in punctis B, D *super rectam* CN *gravitare, quod ille supponit, quum in libra tantum* DEF *hoc verum sit, quæ ad rectam* EN *est perpendicularis, in reliquis falsum, quia ad angulos inæquales a rectis à centro terræ secantur. In nostro autem vecte hæc difficultas non occurrit, quum semper et in quocumque puncto rectæ a centro terræ eum normaliter secent.*

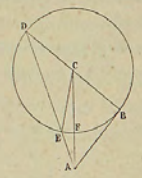
Sit libra DCB (fig. 32), *centrum terræ* A, *centrum libræ* C ; *compleatur circulus centro* C, *intervallo* CB *descriptus et* DEA, BA, CFA *jungantur. Jungatur et* CE ; *ponantur in punctis* B *et* D *pondera æqualia et sit angulus* ACD *major angulo* ACB : *Aio libram a puncto* C *suspensam ad partes* B *inclinari, idque per supposita ab Archimede.*

Pondus a puncto D *ad punctum* E *transferatur ; ex Archimede, idem est ac si pondus esset in puncto* D, *quia ponitur in recta punctum* D *et centrum terræ conjungente : si igitur intelligatur recta* CE *pondus in* E *retinere, manebunt, ex Archimede, brachia* CE *et* CB, *quum ponantur manere* CB *et* CD. *Igitur anguli* ECF, FCB *erunt æquales : triangulum enim æqu-*

(1) Cp. Archimède, *De planorum æquilibriis*, I, 6.

crure, in cujus extremis æqualia pondera collocantur, movetur semper donec perpendicularis horizonti, hoc est recta verticem et centrum terræ conjungens, angulum ad verticem bisecet, quod experientia testatur. Angulus autem ECB *duplus est anguli ad* D : *ergo angulus* FCB *angulo* D

Fig. 32.



est æqualis. Parallelæ igitur erunt CA *et* DA, *quod est absurdum : non ergo quiescit libra, sed ad partes* B *inclinatur, quia angulus* BCF *major est angulo* ECF, *ut patet.*

Voilà, en peu de mots, ma réplique pour le second levier, laquelle j'eusse plus étendue si le temps me le permettoit.

5. Que si le levier est plus grand que le demi-cercle comme CAB (*fig.* 33) duquel le point de suspension est A, les extrémités C, B,

Fig. 33.

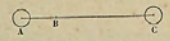


alors le levier ne soutiendra plus, mais sera pressé en haut par ces deux poids, de sorte qu'il faut prendre la proportion réciproque des

deux angles CND, DNB, après avoir prolongé la ligne AN. La démonstration en est aussi aisée que celle du premier cas.

6. Pour le premier levier, soit le centre de la terre B (fig. 34), les poids égaux A et C, et la ligne BC plus grande que BA. Si vous m'accordez que ce poids en C pèse plus qu'en A (quoique vous estimiez

Fig. 34.



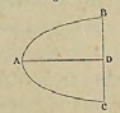
qu'il soit malaisé d'en déterminer la proportion), mes affaires sont faites : car il descendra donc, et la même raison ayant toujours lieu jusques à ce que la ligne CB soit égale à BA, il ne s'arrêtera pas plus tôt.

Et que cela se fasse par attraction ou autrement, la chose est indifférente. Toutefois je vous puis assurer que je puis prouver cette même proposition par des expériences que vous ne sauriez contester et que je vous envoierai au long, dès que la commodité me le permettra.

7. Cependant voici une de mes propositions géométriques, puisqu'il semble que vous ayez désiré d'en voir :

Sit parabole AB (fig. 35), *cujus vertex* A, *et circa rectam* DA *stabilem figura* DAB *circumvertatur, describetur conoides parabolicum Archime-*

Fig. 35.



deum, cujus proportio ad conum ejusdem basis et verticis erit sesquialtera. Quod si circa stabilem DB *figura* DAB *circumvertatur, fiet novum conoides cujus proportio ad conum ejusdem basis et verticis quærebatur.*

Eam nos esse ut 8 *ad* 5 *demonstravimus, nec res vacabat difficultate. Imo et centrum gravitatis ejusdem conoidis invenimus.*

8. J'ai trouvé beaucoup d'autres propositions géométriques, comme la restitution de toutes les propositions *de locis planis* (1) et autres; mais ce que j'estime plus que tout le reste est une méthode pour déterminer toutes sortes de problèmes plans ou solides, par le moyen de laquelle je trouve l'invention (2) *maximæ et minimæ in omnibus omnino problematibus*, et ce, par une équation aussi simple et aisée que celles de l'Analyse ordinaire.

9. Il y a infinies questions que je n'aurois jamais pu résoudre sans cela, comme les deux suivantes, que vous pouvez essayer si vous voulez (3) :

Datæ sphæræ inscribere conum omnium inscribendorum ambitu maximum.

Datæ sphæræ inscribere cylindrum omnium inscribendorum ambitu maximum.

J'entends par *ambitum*, non seulement *superficies conicas et cylindricas*, mais le circuit entier composé, au cône, du cercle de la base et de la superficie conique, et au cylindre, des deux cercles des bases et de la superficie cylindrique.

Il semble que ces deux questions sont nécessaires pour une plus grande connoissance des figures isopérimètres (4).

10. Cette méthode ne sert pas seulement à ces questions, mais à beaucoup d'autres et pour les nombres et pour les quantités.

Vous m'obligerez infiniment de me faire part des productions de votre esprit et de me croire etc.

(1) *Voir* Lettres I, 10 et VI, 10.
(2) *Voir* Tome I, p. 133.
(3) *Voir* Lettres I, 12, et VI, 9.
(4) Sujet dont s'occupait Roberval. *Voir* Lettre XIV, 11.

X.

FERMAT A MERSENNE.

MARDI 2 SEPTEMBRE 1636.

(*Fa*, p. 123-124.)

Mon Révérend Père,

1. La lettre dont vous me parlez dans votre dernière s'est sans doute égarée, car celle que je viens de recevoir est la seule qui m'est venue depuis cinq ou six semaines de votre part.

2. Sur le sujet de laquelle (1) je vous dirai que, quand nous parlons d'un nombre composé de trois quarrés seulement, nous entendons un nombre qui n'est ni quarré, ni composé de deux quarrés; et c'est ainsi que Diophante et tous ses interprètes l'entendent, lorsqu'ils disent qu'un nombre, composé de trois quarrés seulement en nombres entiers, ne peut jamais être divisé en deux quarrés, non pas même en fractions. Autrement et au sens que vous semblez donner à votre proposition, il n'y auroit que le seul nombre de 3 qui fût composé de trois quarrés seulement en nombres entiers; car :

Premièrement, tout nombre est composé d'autant de quarrés entiers qu'il a d'unités;

Secondement, vos nombres de 11 et 14 se trouvent composés chacun de cinq quarrés; le premier de 4, 4, 1, 1, 1; le second de 4, 4, 4, 1, 1.

Que si vous entendez que le nombre que vous demandez soit composé de trois quarrés seulement et non pas de quatre, en ce cas la question tient plus du hasard que d'une conduite assurée et, si vous m'en envoyez la construction, peut-être vous le ferai-je avouer.

(1) *Voir* Lettre VI, 7. — D'après Descartes (Lettres, éd. Clerselier, III, 66), l'auteur de la question, Sainte-Croix, demandait que les deux nombres à trouver et leur somme fussent composés de trois carrés à l'exclusion de quatre. Il n'y aurait dès lors, suivant Descartes, que trois solutions : 3, 3, 6; 3, 11, 14; 3, 21, 24.

De sorte que j'avois satisfait à votre proposition au sens de Diophante, qui semble être le seul admissible en cette sorte de questions.

Or, qu'un nombre, composé de trois quarrés seulement en nombres entiers, ne puisse jamais être divisé en deux quarrés, non pas même en fractions, personne ne l'a jamais encore démontré et c'est à quoi je travaille et crois que j'en viendrai à bout. Cette connoissance est de grandissime usage et il semble que nous n'avons pas assez de principes pour en venir à bout; M. de Beaugrand est en cela de mon avis. Si je puis étendre en ce point les bornes de l'Arithmétique, vous ne sauriez croire les propositions merveilleuses que nous en tirerons.

3. Pour la *Proposition géostatique*, elle est toute fondée sur ce principe seul, que deux graves égaux, joints par une ligne ferme et laissés en liberté, se joindront au centre de la terre par le point qui divise également la ligne qui les unit, c'est-à-dire que ce point de division s'unira au centre de la terre. Messieurs Pascal et de Roberval (1), après avoir reconnu que tout mon raisonnement est fondé là-dessus et, qu'accordant ce principe, ma proposition est sans difficulté, m'ont nié ce principe, que je prenois pour un axiome, le plus clair et le plus évident qu'on peut demander; obligez-moi de me dire si vous êtes de leur sentiment. Je l'ai pourtant démontré depuis peu par de nouveaux principes, tirés des expériences, qu'on ne me sauroit contester, et je le leur envoierai au plus tôt.

Je suis etc.

(1) *Voir* Lettre VIII, 1 et suiv.

XI.

FERMAT A ROBERVAL (1).

MARDI 16 SEPTEMBRE 1636.

(*Va*, p. 134-136.)

MONSIEUR,

1. Je me trouvai ces jours passés à la campagne lorsque je répondis à votre écrit, que j'avois pourtant laissé en cette ville. Depuis mon retour, je l'ai considéré plus exactement et vous envoie la réponse plus précise à tous ses points concernant le premier levier. Si vous ne goûtez pas mes raisons sur le second, vous m'obligerez beaucoup de m'envoyer la démonstration de votre proposition suivant l'opinion où vous êtes, que les graves gardent la proportion réciproque des perpendiculaires tirées du centre du levier sur les pendants, et de laquelle je douterai toujours jusques à ce que je l'aurai vue. Je vous puis pourtant assurer que je ne saurois démordre encore de la mienne et qu'il me semble que vous ne sauriez démontrer la vôtre, au moins par les principes que nous connoissons.

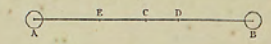
2. Le principe que je vous ai demandé pour l'établissement de mes propositions géostatiques est que, si deux poids égaux sont joints par une ligne droite ferme et de soi sans poids et, qu'étant ainsi disposés, ils puissent descendre librement, ils ne reposeront jamais jusques à ce que le milieu de la ligne s'unisse au centre commun des choses pesantes. Ce principe, qui vous a semblé plausible d'abord, a enfin choqué votre opinion sur ce principalement que nous ignorons la cause radicale qui fait que les corps graves descendent, sur quoi vous dites qu'il y a trois opinions différentes et que, de toutes les trois, les conséquences semblent différentes.

(1) Suite à la Lettre IX et seconde réponse à la Lettre VIII. Dans les *Varia*, l'article 7 suit immédiatement le n° 1. — La réplique de Roberval est perdue.

3. Je ne répète point vos mots ni vos raisons; je me contente d'y répondre et *primo* en la première opinion.

En votre figure (*fig.* 18), vous dites qu'il vous semble que, si le point D ou E convient avec le centre commun des choses pesantes,

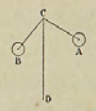
Fig. 18.



combien que l'un des poids en soit plus proche que l'autre, ils contrepèseront encore et demeureront en équilibre. Puisque, dites-vous (pour me servir de vos propres termes), ces deux poids sont égaux et ont tous deux même inclination de s'unir au centre commun des choses pesantes, l'un n'a aucun avantage sur l'autre pour le déplacer de son lieu.

Or, si ce raisonnement est bon, voyez-le dans la figure suivante (*fig.* 36), dans laquelle j'emploierai les mêmes mots.

Fig. 36.



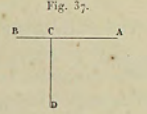
Soit le centre de la terre D, un point dans sa surface ou ailleurs C; soit jointe la ligne CD, et soit au point C attaché le levier BCA, duquel les bras BC, CA soient égaux et les poids B et A aussi égaux, l'angle BCA ferme. S'il n'y avoit point le poids en B, la ligne CA s'uniroit à la ligne CD, c'est-à-dire que le poids A s'approcheroit du centre D autant qu'il pourroit; et tout de même de la ligne BC.

Soit fait l'angle BCD moindre que DCA; par le précédent raisonnement, le levier s'arrêtera (ce qui est contre l'expérience), puisque les deux poids A et B sont égaux et ont tous deux même inclination de s'unir au centre D *sive* à la ligne CD, et l'un n'a aucun avantage sur

l'autre pour le déplacer de son lieu. Or, de même qu'en ce cas l'expérience nous fait voir que ces deux poids approcheront également du centre D et de la ligne CD, il ne faut pas douter qu'au premier cas ils n'approchent également du centre de la terre, et la raison de toutes ces deux propositions est, qu'ayant même inclination au centre et ne pouvant tous deux y descendre, à cause qu'ils s'entr'empêchent, ils y approchent du moins également : autrement la force de celui qui y approcheroit davantage seroit plus grande.

4. L'exemple du levier horizontal (*fig.* 37) ne fait rien à la question : car, pour marquer que les poids B et A n'ont pas leur inclina-

Fig. 37.



tion au point C, il ne faut qu'ôter la ligne CD, sur laquelle le levier s'appuie, et le levier ne restera pas de demeurer, s'il est pressé par les poids A et B horizontalement, de sorte que le point C n'est non plus considérable que tel autre de la ligne BA que vous prendrez. Et, cela étant, l'exemple est inutile, parce que la principale raison de mon principe dépend de l'inclination des graves au centre de la terre.

5. Ce que vous ajoutez, de deux poids qui seroient inégaux, joints comme dessus à une ligne droite ferme et de soi sans poids, n'est non plus recevable : car, vous accordant que, lorsque vous menez un plan perpendiculaire à la ligne qui joint les deux poids, comme vous faites en votre figure (1), il est certain qu'en ce cas il y a de chaque côté du centre une grandeur égale; il arrive pourtant cent cas auxquels, si vous coupez les deux poids par un autre plan passant par le centre, les

(1) *Voir fig.* 20, Lettre VIII, 6.

grandeurs qui seront de chaque côté seront inégales, et ainsi un même corps en même temps arrêtera et n'arrêtera pas.

Et n'importe de dire que ce plan doit être toujours perpendiculaire à la ligne qui joint les deux graves. Car vous savez qu'autour du centre tous endroits sont indifférens et *omnia intelliguntur sursum, omnia deorsum*.

Il faut donc nécessairement prendre le repos des poids, non pas de cette façon, mais de la proportion réciproque suivant mon sentiment.

Voilà, en peu de mots, la réponse à votre première opinion, que j'eusse pu étendre davantage et tirer même la démonstration de mon principe de l'expérience que je vous ai donnée, comme il vous sera aisé de voir.

6. Si la seconde opinion est vraie, mon principe est infaillible. Car en ce cas vous dites que le corps pèsera d'autant moins qu'il sera proche du centre, mais cette diminution ne sera pas en la raison des éloignemens. Or, puisqu'un corps pèse moins en ce cas à mesure qu'il est plus proche du centre, donc il sera toujours pressé par le plus éloigné, jusques à ce qu'ils soient également éloignés du centre.

En la troisième opinion les mêmes raisons sont bonnes.

Je serai bien aise que M. Pascal voie ma Lettre, si vous l'agréez.

7. Permettez-moi de changer de matière et de vous demander la démonstration de cette proposition que j'avoue franchement que je n'ai encore su trouver, quoique je sois assuré qu'elle est vraie (1) :

Summa quadratorum a duabus rectis rationalibus longitudine commen-

(1) La proposition que Fermat énonce dans le langage euclidien peut s'exprimer comme suit :

Si a et b sont rationnels et que l'on ait

$$a^2+b^2=2(a+b)x+x^2,$$

x et x^2 seront irrationnels.

L'*apotome* est proprement la différence de deux grandeurs incommensurables entre elles, mais dont les carrés sont rationnels (Euclide, X, 73); $x=\sqrt{(a+b)^2+a^2+b^2}-(a+b)$ sera dès lors une *apotome*, si le radical est incommensurable avec $a+b$. — *Voir* plus loin Lettre XIII, 8.

surabilibus, si ad duplum summæ laterum applicetur excedens figurâ quadratâ, latitudo excessûs erit apotome.

Vous ne sauriez croire combien la science du dixième Livre d'Euclide est défectueuse : je veux dire que cette connoissance n'a pas encore fait de grands progrès et qu'elle est pourtant de grandissime usage. J'y ai découvert beaucoup de nouvelles lumières, mais encore la moindre chose m'arrête, comme le théorème que je viens de vous écrire, qui semble d'abord plus aisé à démontrer qu'il n'est pas.

J'attends de vos nouvelles et suis etc.

XII.

FERMAT A MERSENNE.

< SEPTEMBRE OU OCTOBRE 1636. >

(A f^os 6-9, B f^os 12^vo-14^vo.)

REVERENDE PATER,

1. Quamvis id agam ut pro Œdipo Davum (1) restituam, et libentissime profitear quæstionem Domini de Sainte-Croix ad meam notitiam (2) non pervenisse, liceat tamen numeros ab ipso exhibi-

(1) Allusion au vers 194 de l'*Andria* de Térence :

Non hercle intellego. — Nonne hem. — Davos sum, non Œdipus.

(2) Il est malaisé de déterminer si la question dont il s'agit ici est bien celle dont il est parlé Lettres VI, 7, et X, 2, ainsi que plus loin, XII, 5, ou une autre des cinq questions numériques proposées par S^r Croix à Descartes en avril 1638, à savoir :

I. *Trouver un trigone qui, plus un trigone tétragone, fasse un tétragone, et de rechef, et que de la somme des côtés des tétragones résulte le premier des trigones et de la multiplication d'elle par son milieu le second. J'ai donné* 15 *et* 120. *J'attends que quelqu'un y satisfasse par d'autres nombres ou qu'il montre que la chose est impossible.*

II. *Trouver un trirectangle dont chacun des côtés soit l'aire d'un trirectangle. J'ai donné* 210, 720, 750. *J'attends etc.*

III. *Trouver un barlong ou tétragone plus sa pleure et tel que l'aggrégat du dit tétra-*

tos (¹) solutione problematis abs te propositi compensare, et quæstiones aliquot ἀμοιβαίας subjicere, quarum enodationem ad nos serius

gone et de son double tétragone fasse un tétragone dont la pleure soit le barlong ou tétragone plus sa pleure. J'ai donné 6. *J'attends etc.*

IV. (*Voir* ci-avant, Lettre VI, **7**, note.)

V. *On demande aussi un nombre dont les parties aliquotes fassent le double et, pour ce qu'on en a déjà trois qui sont* 120, 672 *et* 523776, *il est question de trouver le quatrième.*

Les renseignements tirés de la correspondance de Descartes sont contradictoires; dans une lettre à Mersenne du 22 juin 1638, il dit (éd. Clerselier, II, 88) :

« Je serai bien aise de savoir si les réponses de M. Fermat ont satisfait davantage » M. de Sainte-Croix que les miennes; mais pour moi, je trouve plaisant que, *de quatre » questions, n'y en ayant qu'une qu'il résout à peine* en donnant un nombre qui y satis- » fait, il ne laisse pas de faire des bravades sur ce sujet, disant qu'il ne se contente pas » de résoudre ces questions à la mode de M. de Sainte-Croix, etc., et en propose une » autre toute semblable et même qui est bien plus aisée. »

Le 30 juin 1638 (éd. Clerselier, III, 62), il écrit d'autre part à Mersenne :

« Je lui ai aussi proposé (à Gillot) la quatrième question de M. de Sainte-Croix qui est » de trouver deux nombres chacun desquels, comme aussi la somme de leur agrégat, ne » soit que de trois tétragones, à cause que vous me mandez que c'est *celle qui a semblé » à M. de Fermat la plus difficile.* »

On doit remarquer que la question II de Sainte-Croix à Descartes a d'abord été proposée par Fermat à Sainte-Croix qui la résolut (ci-après, Lettre XVIII, **3**), que des quatre autres, la question V avait été posée par Mersenne dans l'Épître dédicatoire de ses *Préludes de l'Harmonie universelle* en 1634 (*voir* Lettre III, **2**), avec l'indication du nombre 120. Fermat trouva le nombre 672 (Lettres XII, **4**, et XIII, **4**). Le troisième nombre 523776, que ne donne pas la méthode de Fermat (IV_B), paraît avoir été trouvé par Sainte-Croix à une date postérieure à l'impression de la *Seconde Partie de l'Harmonie universelle* de Mersenne (1637).

La question III, qui se traduit par l'équation

$$x^2 + 2(x^2)^2 = (x^2 + x)^2,$$

est très aisée à résoudre, et il est improbable que ce soit celle devant laquelle Fermat déclarait n'être pas un Œdipe. Il n'en est pas tout à fait de même pour la question I, dont l'énoncé, passablement obscur, semble devoir s'exprimer par les trois équations

$$\frac{x(x+1)}{2} + p^2 = y^2,$$

$$\frac{(y+z)(y+z+1)}{2} + p^2 = z^2,$$

$$y + z = \frac{x(x+1)}{2},$$

avec les conditions que x, y, z soient entiers et p^2 un entier de la forme $\frac{n(n+1)}{2}$.

(¹) Peut-être comme solution de la question II, proposée par Fermat à Sainte-Croix. *Voir* note précédente.

proventuram auguramur, quidquid polliceatur acutissimi vir ingenii.

2. Dum igitur difficilioribus numeris tentationem honestamus, ut ipse loquitur, ita proponimus (¹) :

1° *Invenire triangulum rectangulum numero, cujus area æquetur quadrato.*

2° *Datâ summâ solidi sub tribus lateribus trianguli rectanguli numero et ipsius hypotenusæ, invenire terminos intra quos area consistit.*

Nec moveat additio solidi et longitudinis; in problematis enim numericis, quantitates omnes sunt homogeneæ, ut omnes sciunt.

3° *Invenire duo quadratoquadratos quorum summa æquetur quadratoquadrato, aut duos cubos quorum summa sit cubus.*

4° *Invenire tres quadratos in proportione arithmetica, ea conditione ut differentia progressionis sit numerus quadratus.*

3. Quatuor problematis duo theoremata (²) adjungimus, quæ, a nobis inventa, a Dom°. de Sainte-Croix demonstrationem exspectant aut, si frustra speraverimus, a nobis ipsis nanciscentur. Sunt autem pulcherrima :

1° *Omnis numerus æquatur uni, duobus aut tribus triangulis,*

uni, 2, 3 aut 4..... quadratis,
uni, 2, 3, 4 aut 5..... pentagonis,
uni, 2, 3, 4, 5 aut 6..... hexagonis,
uni, 2, 3, 4, 5, 6 aut 7..... heptagonis,

et eo continuo in infinitum progressu.

Videtur supponere Diophantus secundam partem theorematis, eamque Bachetus experientiâ conatus est confirmare, sed demonstratio-

(¹) Des quatre problèmes proposés ici par Fermat, trois sont insolubles. *Voir* au Tome I les *Observations sur Diophante* : pour (1) et (4), l'*Obs.* XLV; pour (3), l'*Obs.* II.

(²) Pour le premier de ces deux théorèmes, *voir* Tome I, l'*Observation* XVIII *sur Diophante*; pour le second, *comparer l'Obs.* XXVII.

nem non attulit. Nos propositionem generalissimam et pulcherrimam primi, nisi fallor, deteximus et pro jure synallagmatis admitti, nescio an jure, postulamus.

2° *Octuplum cujuslibet numeri unitate deminutum componitur ex quatuor quadratis tantum, non solum in integris*, quod potuerunt alii vidisse, *sed etiam in fractis*, quod nos demonstraturos pollicemur.

Et ex hac propositione mira sane deducimus, quæ, si in promptu fuerint Dom°. de Sainte-Croix, saltem Bacheti ingenium et operam videntur inutiliter sollicitasse.

4. Priusquam propositionem de cubis a te propositam construamus, ad quæsitum (1) de numero 672 respondeo me unicum illum non credere proposito satisfacientem, sed hic unus post 120 in nostra methodo occurrit.

In hujusmodi autem quæstionibus nihil impedit quominus alius aliâ methodo alios numeros quæstioni satisfacientes nanciscatur : hoc si contigerit Dom°. de Sainte-Croix, libentissime ab eo accipiemus una cum methodo qua usus est. Sunt enim hujusmodi quæstiones pulcherrimæ et difficillimæ et a nemine, quod sciam, hactenus solutæ; infinitas autem similes peculiari nobis methodo jam construximus.

5. Quod ad quæstionem (2) de numeris 3 et 11 spectat, fatemur difficillimam nobis visam et adhuc, post multa tentamenta, ignorari. Et crediderim, donec contrarium appareat, ejus solutionem sorti potius quam arti deberi; sed malim falli me quam Dom. de Sainte-Croix. Ejus solutionem si dignetur impertiri, viam constructionis rogo adjungat.

6. Tuam de cubis quæstionem ita concipimus :

Datis quotlibet numeris in proportione quavis arithmetica, cujus differentia progressionis et numerus terminorum detur, invenire summam cuborum abs omnibus.

(1) *Voir* plus haut, page 64, note.
(2) *Voir* Lettres VI, 7 et X, 2.

7. Primus casus est quum primus terminus est unitas et differentia progressionis etiam unitas.

Exhibeantur numeri in hac progressione quotlibet :

1.2.3.4.5.6.7.8.9;

quadratum trianguli numerorum æquatur cubis abs omnibus. Ut in hoc exemplo, in quo sunt 9 numeri, triangulus numerorum est 45, cujus quadratus 2025 æquatur summæ cuborum a singulis.

Hæc autem propositio in hoc casu a Bacheto (1) et aliis est demonstrata; sequentes casus nos invenimus.

8. Sit primus terminus unitas et differentia progressionis numerus quivis, ut in hoc exemplo in quo 4 est differentia progressionis :

1.5.9.13.17,

sumo triangulum ultimi numeri differentia progressionis unitate deminuta aucti.

Est autem 210, et ejus quadratum

44100.

Ab eo detraho sequentes numeros :

1° Summam totidem cuborum ab unitate in progressione naturali ducentium exordium, quot sunt unitates in differentia progressionis unitate deminuta, eamque summam ductam in numerum terminorum.

Numerus autem, qui in hoc exemplo inde eruetur et quem diximus subtrahendum, est

180.

2° Detraho triplum summæ totidem quadratorum ab unitate in progressione naturali ducentium exordium, quot sunt unitates in differentia progressionis unitate deminuta, illudque ductum in summam numerorum progressionis datæ.

Numerus, qui in hoc exemplo inde eruetur et quem diximus subtrahendum, est

1890.

(1) Appendix ad librum de numeris polygonis, II, prop. 21.

3° Detraho triplum summæ totidem numerorum ab unitate in progressione naturali ducentium exordium, quot sunt unitates in differentia progressionis unitate deminuta, illudque ductum in summam quadratorum abs numeris progressionis datæ.

Numerus, qui in hoc exemplo inde eruetur et quem diximus subtrahendum, est

10170.

Summa numerorum auferendorum a numero 44100 est 12240, reliquum 31860 : quod si dividas per 4, differentiam progressionis, habebis summam cuborum abs numeris

1.5.9.13.17,

7965, et uniformi in infinitum methodo.

9. Sed nondum constat qua ratione inveniatur summa numerorum :

1.5.9.13.17,

neque quomodo summa quadratorum ab ipsis inveniatur : quod tamen ad secundam et tertiam operationem perficiendum est necessarium.

Primum illud præstitit Bachetus (1) in libello *De numeris multangulis* : secundum ita expedietur.

Sumatur summa tot quadratorum ab unitate in progressione naturali, quot sunt unitates in majore progressionis numero differentia progressionis unitate deminuta aucto.

Hoc autem est facile et ab Archimede (2) in libro *De Spiralibus* traditum.

Ab ea summa :

1° Detrahe summam totidem quadratorum in progressione naturali

(1) Commentaire de Bachet sur les propositions IV et V *Diophanti Alexandrini de multangulis numeris*.

(2) Archimède, *De lineis spiralibus*, prop. 10, donne effectivement la sommation

$$3\sum_{1}^{n} n^2 = n^3 + n^2 + \frac{n(n+1)}{2}.$$

ab unitate incipiente, quot sunt unitates in differentia progressionis unitate deminuta, eamque summam ductam in numerum terminorum.

2° Detrahe duplum summæ totidem numerorum ab unitate, quot sunt unitates in differentia progressionis unitate deminuta, illudque ductum in summam numerorum progressionis datæ.

His ablatis, reliquum, per differentiam progressionis divisum, dabit summam quadratorum ab omnibus.

Ex his duobus casibus reliqui omnes nullo aut minimo negotio elicientur juxta præcepta.

10. Sed hic hærere noluimus, verùm problema totius fortasse Arithmetices pulcherrimum construximus, quo non solum *in quavis progressione summam* quadratorum et cuborum *venamur*, sed *omnium omnino potestatum in infinitum methodo* generalissima, quadratoquadratorum, quadratocuborum, cubocuborum, etc.

11. Ut autem innotescat Dom°. de Sainte-Croix sphingem me aut Œdipum non exspectare, en problema in quadratoquadratorum progressu, quod ita potest theorematice enuntiari :

Exponantur quotlibet numeri in progressione naturali ab unitate ; si a quadruplo ultimi, binario aucto < et > in quadratum trianguli numerorum ducto, demas summam quadratorum a singulis, fiet quintuplum quadratoquadratorum a singulis.

Exemplum : Expositis numeris

1.2.3.4,

quadruplum ultimi binario auctum est 18, quod duci debet in 100, quadratum trianguli numerorum : fit

1800.

Ab eo producto deme summam quadratorum a singulis, quæ est

30.

Superest 1770, cujus quinta pars, 354, æquatur quadratoquadratis a singulis.

In qualibet progressione similiter problema construemus imitando constructionem præcedentem.

Methodum generalem in quibuslibet in infinitum potestatibus trademus, si visum fuerit aut tibi aut Dom°. de Sainte-Croix.

12. Interim addimus propositionem pulcherrimam à nobis inventam, quæ nobis lucem dedit ad hujusmodi propositiones inveniendas (1) :

In progressione naturali ultimus numerus
in proximè majorem facit duplum trianguli collateralis,
in triangulum numeri proximè majoris facit triplum pyramidis collateralis,
in pyramidem numeri proximè majoris facit quadruplum triangulotriangulo collateralis,
et eâ in infinitum uniformi methodo.

(1) *Voir* Tome I, l'*Observation* XLVI *sur Diophante*. — Il est très remarquable que cette proposition capitale, qui donne, de fait, la composition des coefficients du binôme, après avoir été ainsi communiquée en 1636 à Mersenne, à Sainte-Croix et à Roberval (*ci-après* Lettre XV, 3), soit restée assez ignorée pour que dix-huit ans après, Pascal, en la retrouvant sous une autre forme, n'ait eu aucun soupçon de la très grande antériorité de la découverte de Fermat.

On lit dans le *Traité des ordres numériques* (Œuvres de Blaise Pascal, édition de 1779, t. V, pp. 65-66), après la proposition XI :

« Les manières de tourner une même chose sont infinies : en voici un illustre exemple » et bien glorieux pour moi. Cette même proposition que je viens de rouler en plusieurs » sortes, est tombée dans la pensée de notre célèbre conseiller de Toulouse, M. de Fer» mat; et, ce qui est admirable, sans qu'il m'en eût donné la moindre lumière, ni moi à » lui, il écrivoit dans sa province ce que j'inventois à Paris, heure pour heure, comme » nos lettres écrites et reçues en même temps le témoignent. Heureux d'avoir concouru » en cette occasion, comme j'ai fait encore en d'autres d'une manière tout à fait étrange, » avec un homme si grand et si admirable, et qui, dans toutes les recherches de la plus » sublime géométrie, est dans le plus haut degré d'excellence, comme ses ouvrages, que » nos longues prières ont enfin obtenus de lui, le feront bientôt voir à tous les géomètres » de l'Europe, qui les attendent! La manière dont il a pris cette même proposition est » telle : »

» *En la progression naturelle qui commence par l'unité, un nombre quelconque étant* » *mené dans le prochainement plus grand produit le double de son triangle.* »

» *Le même nombre, étant mené dans le triangle du prochainement plus grand, pro-* » *duit le triple de sa pyramide.* »

» *Le même nombre, mené dans la pyramide du prochainement plus grand, produit le* » *quadruple de son triangulotriangulaire.* »

» *Et ainsi à l'infini, par une méthode générale et uniforme.* »

» Voilà comment on peut varier les énonciations. »

13. De triangulis rectangulis (1) propositio non satis perspicue, ut opinor, in tua epistola est concepta : solvetur a me fortasse, si clarius proposueris.

Addictissimus tibi,

FERMAT.

XIII.

FERMAT A ROBERVAL.

LUNDI 22 SEPTEMBRE 1636.

(*Va.*, p. 136-137.)

MONSIEUR,

1. Je surseoirai avec votre permission à vous écrire sur le sujet des propositions de Méchanique, jusques à ce que vous m'aurez fait la faveur de m'envoyer la démonstration des vôtres, ce que j'attends au plus tôt sur la promesse que vous m'en faites (2).

2. Sur le sujet de la méthode (3) *de maximis et minimis*, vous savez que, puisque vous avez vu celle que M. Despagnet vous a donnée, vous avez vu la mienne que je lui baillai, il y a environ sept ans, étant à Bordeaux.

Et en ce temps-là je me ressouviens que M. Philon ayant reçu une de vos lettres, dans laquelle vous lui proposiez de *trouver le plus grand cône de tous ceux qui auront la superficie conique égale à un cercle donné*, il me l'envoya et j'en donnai la solution à M. Prades pour vous la rendre. Si vous rappelez votre mémoire, vous vous en souviendrez peut-être, et que vous proposiez cette question comme difficile et ne

(1) Aucune autre allusion, dans la Correspondance qui nous reste de Fermat, n'est faite à cette proposition. Peut-être s'agit-il de la question I de Sainte-Croix à Descartes (*voir* plus haut pages 63-64, note), dont l'énoncé énigmatique prêtait facilement à confusion.

(2) Dans une réponse perdue à la lettre XI, Roberval annonçait sa lettre suivante, XIV.

(3) *Voir* Lettre IX, 8.

l'ayant pas encore trouvée. Si je rencontre parmi mes papiers votre lettre, que je gardai pour lors, je vous l'envoierai.

3. Si M. Despagnet ne vous a proposé ma méthode (1) que comme je la lui baillai pour lors, vous n'avez pas vu ses plus beaux usages; car je la fais servir, en diversifiant un peu :

1° Pour l'invention des propositions pareilles à celles du conoïde que je vous envoyai par ma dernière (2) :

2° Pour l'invention des tangentes des lignes courbes, sur lequel sujet je vous propose ce problème : *Ad datum punctum in conchoide Nicomedis invenire tangentem* (3) :

3° Pour l'invention des centres de gravité de toute sorte de figures, aux figures même différentes des ordinaires, comme en mon conoïde et autres infinies, de quoi je ferai voir des exemples quand vous voudrez (4).

4° Aux problèmes numériques auxquels il est question de parties aliquotes (5) et qui sont tous très difficiles.

4. C'est par ce moyen que je trouvai 672 duquel les parties sont doubles aussi bien que celles de 120 le sont de 120.

C'est aussi par là que j'ai trouvé des nombres infinis qui font la même chose que 220 et 284, c'est-à-dire que les parties du premier égalent le second et celles du second le premier. De quoi si vous voulez voir un exemple pour tâter la question, ces deux y satisfont :

17296 et 18416.

Je m'assure que vous m'avouerez que cette question et celles de sa sorte sont très malaisées; j'en envoyai il y a quelque temps la solution à M. de Beaugrand.

(1) Fermat paraît ici entendre, par sa méthode, le procédé de substituer $A + E$ à A dans une relation en A.
(2) *Voir* Lettre IX, 7, et plus loin XIII, 6.
(3) *Voir* Tome I, p. 161.
(4) *Voir* Tome I, p. 136, note 3.
(5) *Voir* Lettre IV, 3, et Pièces IV_A, IV_B.

J'ai aussi trouvé des nombres en proportion donnée ou qui surpassent d'un nombre donné leurs parties aliquotes; et plusieurs autres.

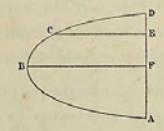
5. Voilà quatre sortes de propositions que ma méthode embrasse et que peut-être vous n'avez pas sues.

Sur le sujet du 1°, j'ai quarré infinies figures comprises de lignes courbes (1); comme, par exemple, si vous imaginez une figure comme la parabole, en telle sorte que les cubes des appliquées soient en proportion des lignes qu'elles coupent du diamètre. Cette figure approchera de la parabole et ne diffère qu'en ce qu'au lieu qu'en la parabole on prend la proportion des quarrés, je prends en celle-ci celle des cubes; et c'est pour cela que M. de Beaugrand, à qui j'en fis la proposition, l'appelle *parabole solide*.

Or j'ai démontré que cette figure est au triangle de même base et hauteur en proportion sesquialtère. Vous trouverez, en la sondant, qu'il m'a fallu suivre une autre voie que celle d'Archimède en la quadrature de la parabole et que je n'y fusse jamais venu par là.

6. Puisque vous avez trouvé ma proposition du conoïde excellente, la voici plus générale (*fig.* 38) :

Fig. 38.



Si circa rectam DA *parabole, cujus vertex* B *et axis* BF *et applicata* AF, *circumducatur, fiet conoides novæ speciei, quo secto bifariam, plano ad axem recto, dimidium ipsius ad conum ejusdem basis et altitudinis est ut* 8 *ad* 5.

(1) *Voir* Tome I, pages 255 à 266.

Si verò plano secetur ad axem recto inæqualiter, puta per punctum E, *segmentum conoidis* ABCE *ad conum ejusdem basis et altitudinis est*

ut quintuplum quadrati ED unà cum rectangulo AED bis et rectangulo sub DF in AE

ad quadrati ED quintuplum,

et vicissim segmentum conoidis DCE *est ad conum ejusdem basis et altitudinis*

ut quintuplum quadrati AE unà cum rectangulo AED bis et rectangulo sub DF in DE

ad quadrati AE quintuplum.

Pour la démonstration, outre les aides que j'ai tirées de ma méthode, je me suis servi des cylindres inscrits et circonscrits.

7. J'avois omis le principal usage de ma méthode qui est pour l'invention des lieux plans et solides; elle m'a servi particulièrement à trouver ce lieu plan que j'avois auparavant trouvé si difficile (1) :

Si a quotcumque datis punctis ad punctum unum inflectantur rectæ et sint species quæ ab omnibus fiunt dato spatio æquales, punctum continget positione datam circumferentiam.

Tout ce que je viens de vous dire ne sont qu'exemples, car je vous puis assurer que, sur chacun des points précédents, j'ai trouvé un très grand nombre de très belles propositions. Je vous envoierai la démonstration de celles que vous voudrez : permettez-moi néanmoins de vous prier de les essayer plutôt et de m'en donner votre jugement.

8. Au reste, depuis la dernière Lettre que je vous écrivis, j'ai trouvé la démonstration de la proposition que je vous faisois (2). Elle m'a donné grandissime peine et ne se présente pas d'abord.

Je vous conjure de me faire part de quelqu'une de vos pensées et de me croire, etc.

(1) *Voir* Tome I, page 37 (*Lieux plans d'Apollonius*, II, 3).
(2) *Voir* Lettre XI, 7.

XIV.

ROBERVAL A FERMAT (1).

SAMEDI 11 OCTOBRE 1636.

(*Va*, p. 138-141.)

MONSIEUR,

1. Je vous envoie la démonstration de la proposition fondamentale de notre Méchanique, ainsi que je vous l'ai promise. En quoi je suivrai l'ordre commun d'expliquer auparavant les définitions et principes desquels nous nous servons.

2. Nous appelons en général une *puissance* cette qualité par le moyen de laquelle quelque chose que ce soit tend ou aspire en un autre lieu que celui où elle est, soit en bas, en haut ou à côté, soit que cette qualité convienne naturellement à la chose ou qu'elle lui soit communiquée d'ailleurs. De laquelle définition il s'ensuit que tout poids est une espèce de puissance, puisque c'est une qualité par le moyen de laquelle les corps aspirent vers les parties inférieures.

Souvent nous appelons aussi du nom de *puissance* la même chose à laquelle la puissance convient (comme un corps pesant est appelé un *poids*), mais avec cette précaution que ce soit à l'égard de la vraie puissance, laquelle, augmentant ou diminuant, sera appelée *plus grande* ou *moindre puissance*, quoique la chose à quoi elle convient demeure toujours la même.

Si une puissance est pendue ou arrêtée à une ligne flexible et sans poids, laquelle ligne soit attachée par un bout à quelque arrêt, en sorte qu'elle soutienne la puissance tirant sans empêchement contre cette ligne, la puissance et la ligne prendront quelque position, en

(1) Réponse à la Lettre XIII. — Le texte de la présente a été, comme celui de la Lettre VIII, restitué d'après le manuscrit de la Bibliothèque Nationale, latin n° 7226, f^os 34 et suiv.

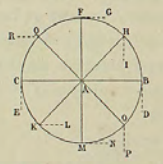
laquelle elles demeureront en repos, et la ligne sera droite par force. Soit icelle ligne appelée le *pendant* ou la *ligne de direction* de la puissance; et le point, par lequel la ligne est attachée à l'arrêt, soit appelé le *point d'appension*, lequel pourra être quelquefois au bras d'un levier ou d'une balance; et lors la ligne droite, menée du centre de l'appui du levier ou de la balance jusques au point d'appension, soit appelée la *distance* ou le *bras* de la puissance, laquelle distance ou bras nous supposons être une ligne ferme considérée de soi sans poids. Davantage, l'angle, compris du bras de la puissance et de la ligne de direction, soit appelé l'*angle de direction* de la puissance.

Premier axiome. — Après ces définitions, nous posons pour principe qu'au levier et à la balance, les puissances égales, tirant par des bras égaux et des angles de direction égaux, tireront également; et, si en cet état elles tirent l'une contre l'autre, elles feront équilibre; que si elles tirent ensemble ou de même part, l'effet sera doublé.

Si, les puissances étant égales et les angles de direction égaux, les bras sont inégaux, la puissance qui sera sur plus grand bras fera plus d'effet.

Comme en cette première figure (*fig.* 39), le centre de la balance

Fig. 39.



ou du levier étant A, si les bras AB et AC sont égaux et les angles ABD, ACE égaux, les puissances égales D, E tireront également et feront équilibre. De même, le bras AF étant égal à AB, l'angle AFG à l'angle ABD, et la puissance G à la puissance D, ces deux puissances G, D tireront également et, pour ce qu'elles tirent de même part, l'effet sera

doublé. Au contraire, la puissance G et la puissance E feront équilibre. Par le même principe, les puissances I, L contrepèseront si, étant égales, les bras AK, AH sont égaux et les angles AHI, AKL aussi égaux. Il en sera de même des puissances P et R, si le tout est disposé de même.

Et en ce cas nous ne mettons point d'autre différence entre les poids et les autres puissances, sinon que les poids tendent et aspirent tous vers le centre des choses pesantes, et les puissances peuvent être entendues aspirer vers toutes les parties de l'univers avec autant, plus ou moins de force que les poids. Ainsi les poids et leurs parties tirent par des lignes de direction qui toutes concourent à un même point, et les puissances et leurs parties peuvent être entendues tirer de telle sorte que toutes les lignes de direction soient parallèles entre elles.

Deuxième axiome. — En second lieu, nous supposons qu'une puissance et sa ligne de direction demeurant toujours en même position et le centre de la balance ou du levier de même, quel que puisse être le bras mené du centre de la balance à la ligne de direction, la puissance, tirant de soi toujours de même sorte, fera toujours même effet.

Comme en cette seconde figure (*fig.* 40), le centre de la balance étant A, la puissance B et sa ligne de direction BF, prolongée tant que

Fig. 40.



de besoin, à laquelle aboutissent les bras AG, AC, AF. En cet état, soit que la ligne BF soit liée au bras AF ou AC [ou AG] ou à un autre bras mené du centre à la ligne de direction AF, nous supposons que cette puissance B fera toujours un même effet sur la balance; et si, tirant par le bras AC, elle fait équilibre avec la puissance D tirant par le bras

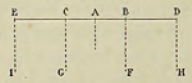
AE, lorsqu'elle tirera par le bras AF ou AG, elle fera encore équilibre avec la puissance D tirant par le bras AE.

Ce principe, quoiqu'il ne soit pas expressément dans les auteurs, il est néanmoins usurpé tacitement par tous ceux qui en ont eu affaire, et l'expérience le confirme constamment.

Troisième axiome. — En troisième lieu, nous posons que, si les bras d'une balance ou d'un levier sont directement posés l'un à l'autre et, qu'étant égaux, ils soutiennent des puissances égales desquelles les angles de direction soient droits, ces puissances pèseront également sur le centre de la balance, soit qu'elles soient proche du même centre, soit qu'elles en soient fort éloignées, soit que toutes deux soient ramassées au même centre.

Comme en la troisième figure (*fig.* 41), la balance étant ED, le centre A, les bras égaux AD, AE soutenant des puissances égales H, I,

Fig. 41.



desquelles les angles de direction ADH, AEI soient droits; nous supposons que ces puissances I, H pèseront de même sur le centre A que si elles étoient plus près du même centre sur les distances égales AB, AC, et encore de même que si ces mêmes puissances étoient ensemble pendues en A, ces angles de direction étant toujours droits.

Première proposition. — Ces principes posés, nous démontrerons facilement, imitant Archimède (1), que sur une balance droite, les puissances, desquelles et de toutes leurs parties les lignes de direction sont parallèles entre elles et perpendiculaires à la balance, contrepèseront et feront équilibre, quand les mêmes puissances seront entre elles en proportion réciproque de leurs bras. Ce que nous pensons vous être aussi facile qu'à nous.

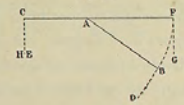
(1) Archimède, *De planorum æquilibriis*, I, 6 et 7.

En suite de quoi nous démontrerons cette proposition universelle, à laquelle nous butons.

Deuxième proposition. — En toute balance ou levier, si la proportion des puissances est réciproque à celle des lignes perpendiculaires menées du centre ou point de l'appui sur les lignes de direction des puissances, ces puissances, tirant l'une contre l'autre, feront équilibre et, tirant d'une même part, elles feront un pareil effet, c'est-à-dire qu'elles auront autant de force l'une que l'autre pour mouvoir la balance.

Soit en la quatrième figure (*fig.* 42) le centre de la balance A, le bras AB plus grand que le bras AC, et soient premièrement les lignes

Fig. 42.



de direction BD, CE perpendiculaires aux bras AB, AC, par lesquelles lignes tirent les puissances D, E, lesquelles seront des poids, si on veut, et qu'il y ait même raison de la puissance D à la puissance E que du bras AC au bras AB, les puissances tirant l'une contre l'autre. Je dis qu'elles feront équilibre sur la balance CAB.

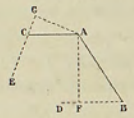
Car, soit prolongé le bras CA jusques en F, en sorte que AF soit égale à AB, et soit considérée CAF comme une balance droite de laquelle le centre soit A. Soient aussi entendues deux puissances G et H, desquelles et de toutes leurs parties les lignes de direction soient parallèles à la ligne CE; et que la puissance G soit égale à la puissance D et la puissance H égale à la puissance E, l'une, savoir G, tirant sur le bras AF et l'autre, savoir H, tirant sur le bras AC.

Lors, par la première proposition, les puissances G et H feront équilibre sur la balance CAF; mais, par le premier principe, la puissance D sur le bras AB fait le même effet que la puissance G sur le bras AF :

partant la puissance D sur le bras AB fait équilibre avec la puissance H sur le bras AC et, la puissance H tirant de même sorte sur le bras AC que la puissance E, par le même premier axiome, la puissance D sur le bras AB fera équilibre avec la puissance E sur le bras AC.

Maintenant, en la cinquième figure (*fig.* 43), soit le centre de la balance A, les bras AB, AC, les lignes de direction BD, CE qui ne

Fig. 43.



soient pas perpendiculaires aux mêmes bras, et les puissances D, E tirant par les mêmes lignes de direction; sur lesquelles lignes soient menées des perpendiculaires du centre A, savoir AF sur BD et AG sur EC; et que, comme la ligne AF est à AG, ainsi soit la puissance E à la puissance D, lesquelles puissances tirent l'une contre l'autre. Je dis qu'elles feront équilibre sur la balance CAB.

Car, soient entendues les lignes AF, AG comme les deux bras d'une balance GAF, sur lesquels tirent les puissances D, E par les lignes de direction FD, GE, ces puissances feront équilibre, par la première partie de cette seconde proposition; mais, par le second axiome, la puissance D sur le bras AF fait le même effet que sur le bras AB, et la puissance E sur le bras AG fait le même effet que sur le bras AC; partant, la puissance D sur le bras AB fait équilibre avec la puissance E sur le bras AC.

Il y a plusieurs cas suivant les chutes des perpendiculaires, mais il vous sera facile de voir que tous n'ont qu'une même démonstration. Il est aussi facile de démontrer que, si les puissances tirent de même part, elles feront même effet l'une que l'autre, et l'effet des deux ensemble sera double de celui d'une seule.

J'attends votre jugement sur cette démonstration et, si vous l'approuvez, nous communiquerons ensuite des conséquences qui en dépendent.

3. J'ai trouvé la démonstration (¹) de la somme des quarrés de deux côtés rationaux, commensurables en longueur, appliquée au double de la somme des côtés, excédant d'une figure quarrée. Mais, puisque vous l'avez aussi trouvée, je ne vous dirai ici que mon principal fondement qui est que, de deux nombres quelconques, la somme de deux fois le quarré du premier, deux fois le quarré du second et deux fois le produit des deux nombres, n'est pas un nombre quarré, d'autant que, prenant les moindres nombres de leur raison, un nombre simplement pris n'est pas quarré. Si nous avons tous deux un même moyen, ceci suffit; si vous en avez un autre, ce que vous reconnoîtrez par ce discours, vous me ferez faveur de me l'apprendre, et moi je vous écrirai le mien tout au long, si vous le désirez.

4. J'ai aussi trouvé la démonstration (²) de votre conoïde et celle de votre parabole solide et, en conséquence, celles d'une infinité d'autres pareilles, quarréquarrées, quarrésolides etc.

5. J'ai trouvé les tangentes de toutes ces figures : par exemple, en la parabole solide, la portion de l'axe, prise entre la tangente et le sommet, est double de la portion du même axe, prise entre le sommet et la ligne appliquée de l'attouchement à l'axe.

6. J'ai, par le même moyen, quarré la parabole géométriquement, autrement qu'Archimède.

7. Et je me trompe fort si je n'ai rencontré le même moyen que vous, me servant des lignes parallèles à l'axe et des portions de ces lignes prises entre les paraboles et la ligne qui touche les mêmes paraboles par le sommet, lesquelles portions se suivent en la raison de l'ordre naturel des nombres quarrés ou des nombres cubes etc. Or, la somme des quarrés est toujours plus que le tiers du cube qui a pour

(¹) *Voir* Lettre XI, 7.
(²) *Voir* Lettres IX, 7; XIII, 3 et 6.

côté le côté du plus grand quarré, et la même somme des quarrés, le plus grand étant ôté, est moindre que le tiers du même cube; la somme des cubes plus que le quart du quarréquarré et, le plus grand cube ôté, moins que le quart; etc. Si par ce discours vous reconnoissez que ce n'est pas votre moyen, j'en serai d'autant plus réjoui pour ce que nous en aurons deux, et vous me ferez la faveur de m'envoyer le vôtre, faisant le même de ma part.

8. Pour les tangentes de la conchoïde, je les ai considérées il y a longtemps, comme étant déterminations d'équations quarréquarrées. Sur ce sujet, il y a deux points en la conchoïde par lesquels on ne peut mener des tangentes : je vous prie de les considérer et vous trouverez une admirable propriété d'angles au sommet l'un de l'autre à la section d'une ligne droite et de la conchoïde (1).

9. J'estime vos propositions (2) des nombres et celle du lieu plan fort difficiles; ce que je saurai mieux quand j'aurai eu le loisir de les considérer, comme aussi les centres de gravité des figures susdites tant planes que solides, n'étant pas résolu pourtant de m'obstiner après; car j'aimerai mieux tenir de vous ce que vous en aurez, si vous l'avez agréable.

10. Je vous prie pourtant de me mander si le centre de gravité de votre demi-conoïde n'est pas ce point où l'axe est divisé de sorte que l'un des segments est à l'autre comme 11 à 4, pour ce qu'un léger raisonnement et non encore bien considéré m'a semblé me mener à cette raison (3).

11. Une autre fois je vous pourrai mander de nos propositions ainsi que vous le désirez. Pour cette heure, que je n'emploie à écrire ceci qu'un temps dérobé, je vous envoierai seulement celle-ci :

De deux cônes droits égaux et isopérimètres étant données les bases inégales ou les hauteurs inégales, trouver les cônes.

(1) *Voir* Lettre XIII, 3. — Roberval parle ici des points d'inflexion de la conchoïde.
(2) *Voir* Lettres XIII, 4 et 7.
(3) *Voir* ci-après Lettre XV, 5.

Quand je dis *isopérimètres*, j'entends les bases y comprises ou exceptées, comme vous voudrez.

Vous en aurez la solution quand il vous plaira, si vous ne voulez prendre la peine de la trouver vous-même, et je vous l'aurois envoyée dès maintenant, n'étoit que je crois que vous désirerez avoir le plaisir d'y penser.

Attendant que vous me fassiez la faveur de m'écrire, je demeurerai etc.

XV.

FERMAT A ROBERVAL.

MARDI 4 NOVEMBRE 1636.

(*Va*, p. 146-147; B f° 3 v°.)

MONSIEUR,

1. Me réservant à vous écrire une autre fois les défauts que j'ai trouvés dans votre démonstration (1) et dans votre Livre imprimé (2), que j'espère vous faire avouer par vos propres maximes, je me contenterai de répondre présentement aux autres points de votre Lettre.

2. Et premièrement vous saurez que nous avons concouru au même *medium* sur le sujet de la somme des deux quarrés rationaux, commensurables en longueur, appliquée au double de la somme des côtés, excédant d'une figure quarrée (3).

3. Vous vous êtes servi aussi d'un même *medium* (4) que moi en la quadrature des paraboles solides, quarréquarrées etc. à l'infini; mais vous supposez une chose [vraie] de laquelle vous n'avez possible

(1) Lettre XIV, 2. — Fermat annonce les objections contenues dans la Pièce XVI, ci-après.
(2) *Voir* Lettre VII, 4, note 1.
(3) *Voir* Lettre XIV, 3.
(4) *Voir* Lettre XIV, 7.

pas la démonstration précise, qui est que la somme des quarrés est plus grande que le tiers du cube qui a pour côté le côté du plus grand quarré; la somme des cubes plus que le quart du quarréquarré; la somme des quarréquarrés plus qu'un cinquième du quarrécube; etc.

Or, pour démontrer cela plus généralement, il faut, étant donné un nombre *in progressione naturali*, trouver la somme, non seulement de tous les quarrés et cubes, ce que les auteurs qui ont écrit ont déjà fait (1), mais encore la somme des quarréquarrés, quarrécubes etc., ce que personne que je sache n'a encore trouvé; et pourtant cette connoissance est belle et de grand usage et n'est pas des plus aisées.

J'en suis venu à bout avec beaucoup de peine. En voici un exemple :

Si quadruplum maximi numeri binario auctum ducas in quadratum trianguli numerorum, et a producto demas summam quadratorum a singulis, fiet summa quadratoquadratorum quintupla.

Il semble que Bachet, dans son Traité *De numeris multangulis* (2), n'a pas voulu tâter ces questions après avoir fait celle des quarrés et des cubes; je serai bien aise que vous vous exerciez pour trouver la méthode générale, pour voir si nous rencontrerons. En tout cas, je vous offre tout ce que j'y ai fait, qui est tout ce qu'on peut dire sur cette matière.

Voici cependant une très belle proposition, qui peut-être vous y servira; au moins c'est par son moyen que j'en suis venu à bout. C'est une règle que j'ai trouvée pour donner la somme, non seulement des triangles, ce qui a été fait par Bachet et les autres (3), mais encore des pyramides, *triangulotriangulorum* etc. à l'infini. Voici la proposition (4) :

Ultimum latus in latus proxime majus facit duplum trianguli.

(1) *Voir* Lettre XII, **10** et **11**.
(2) *Voir* Lettre XII, **7**, note 1.
(3) Bachet (*Appendix ad librum de numeris polygonis*, I, prop. 18) donne la sommation, non seulement des triangles, mais en général des polygones de même genre ayant pour côtés les nombres consécutifs à partir de l'unité.
(4) *Voir* Lettre XII, **12**.

Ultimum latus in triangulum lateris proxime majoris facit triplum pyramidis.

Ultimum latus in pyramidem lateris proxime majoris facit quadruplum triangulotrianguli.

Et eo in infinitum progressu.

Toutes ces propositions, quoique belles de soi, m'ont servi à trouver la quadrature que je suis bien aise que vous estimiez.

4. Je voudrois avoir assez de loisir pour vous envoyer les propositions des nombres (1) que vous trouvez si difficiles; elles le sont en effet : même Tartaglia (2) avoit cru qu'elles n'étoient point trouvables par art. J'en ai envoyé la construction au Père Mersenne; il vous la communiquera si vous la lui demandez.

5. Je vous envoierai aussi une autre fois le centre de gravité (3) de toutes ces nouvelles figures, avec la méthode générale pour le trouver. Vous savez cependant que celui du demi-conoïde divise l'axe en proportion de 11 à 5, non pas de 11 à 4, comme vous aviez cru, et que celui des nouvelles paraboles divise l'axe en proportion pareille à celle du parallélogramme, qui a pour hauteur l'axe et pour base celle de la figure, à la figure : ou, pour mieux dire, le diamètre de toute parabole est divisé en tel point [de son diamètre] par le centre de gravité, [en sorte] que le segment d'en bas est à celui d'en haut comme la figure au parallélogramme de même base et de même hauteur.

6. Puisque vous avez trouvé la démonstration de toutes mes propositions, vous m'obligerez beaucoup de prier le Père Mersenne de vous donner mes nouvelles hélices (4), desquelles les démonstrations vous seront aussi aisées que celles du conoïde et des paraboles. Il m'écrit qu'on doute de delà de leur vérité; vous la lui confirmerez, s'il vous

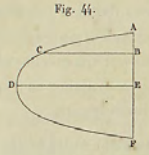
(1) *Voir* Lettre XIV, **9** et Pièces IV_A, IV_B.
(2) Comparer *La seconda parte del General Trattato di numeri et misure di Nicolo Tartaglia* (Venise, 1556), lib. I, cap. IV.
(3) *Voir* Tome I, p. 136. — Cp. Lettre XIV, **10**.
(4) *Voir* Pièces III_A, III_B.

plait, et désabuserez Monsieur de ... (1), qui semble ne les avoir pas crues.

7. Mais il n'en faut pas demeurer là, car, pour suppléer tout ce qui semble manquer dans l'Archimède :

Exponatur parabole ACDF (*fig.* 44), *cujus axis* DE, *basis* AF, CB *parallela* DE *et ideo perpendicularis ipsi* AF. *Circa rectam* DE *fixam figura*

Fig. 44.



ADE *conversa constituit conoides Archimedeum; circa* AE *fixam constituit nostrum conoides.*

Sed, si figura ACB *circa* AB *fixam convertatur, constituitur portio nostri conoidis; si autem circa* CB *fixam fiat conversio, quæritur proportio novi istius conoidis ad conum ejusdem basis et altitudinis.*

Hoc autem etiam perfecimus; imo mirabilius quiddam invenimus, ellipsoides cui si conum æqualem inveneris, dabimus circuli quadrationem. — Sed hæc aliàs.

8. Votre question des cônes (2) est si aisée qu'il seroit inutile de vous en écrire la solution.

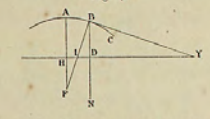
9. Pour les tangentes de la conchoïde (3), j'ai peur que vous aurez équivoqué; car voici ma proposition qui n'exclut aucun point, laquelle j'ai copié sans la vérifier sur mon manuscrit; peut-être que c'est moi qui aurai failli, je vous l'écrirai la première fois.

(1) Beaugrand? *Voir* Lettre XVIII, 4.
(2) *Voir* Lettre XIV, 11.
(3) *Voir* Lettre XIV, 8. — Cp. Tome I, p. 161.

Esto conchois ABC (fig. 45), *cujus polus* F, *intervallum* HA, *et in ea datum punctum* B.

Primum asserimus eam in interiora convexam repræsentandam, licet contrarium Pappo et Eutocio visum fuerit (1).

Fig. 45.



Deinde tangentem ita ducimus : Jungatur FIB *et perpendicularis* BD *demittatur; rectangulum* BFI, *unà cum quadrato* BD, *ad rectam* BD *applicentur et faciant latitudinem* DN; *fiat*

ut ID *ad* DN, *ita* BD *ad* DY.

Juncta YB *tanget conchoidem.*

J'attends votre réponse et suis etc.

XVI.

OBJECTA A DOMINO DE FERMAT

ADVERSUS PROPOSITIONEM MECHANICAM DOMINI DE RQBERVAL (2).

< DÉCEMBRE 1636 >

(*Va*, p. 141-142.)

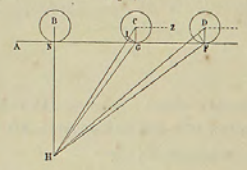
Si vera esset propositio mechanica Domini de Roberval, *in vecte quolibet pondera perpendiculis a centro vectis in lineas directionum demissis*

(1) Pappus, IV, 22 (éd. Hultsch, pp. 242 et 246), Eutocius (Comm. in lib. II de sphæra et cylindro : *Archimède*, éd. Heiberg, vol. III, pp. 117, 119, 120, 122) n'indiquent rien sur le sens de la concavité de la conchoïde : l'observation de Fermat ne porte donc que sur les figures fautives des manuscrits reproduites dans le Pappus de Commandin et dans les anciennes éditions d'Archimède (p. ex., celle de Rivault, Paris, 1615).
(2) Cette Pièce paraît avoir été envoyée à Carcavi, au commencement de décembre 1636 (*voir* Lettre XVII, 1) comme réplique à la Lettre XIV de Roberval.

esse reciproce proportionalia ad astruendam quietem, non posset subsistere proportio gravis ad potentiam in plano inclinato, quam in Libello suo (1) tradidit. Hoc perspicue demonstramus :

In prima figura (*fig.* 46), esto punctum in superficie telluris N, centrum terræ H. Junctâ NH, ducatur ANGF perpendicularis ipsi HN,

Fig. 46.



quam quidem ANGF ii qui sunt in puncto N vocant parallelam horizonti. Exponantur sphæræ quarum centra B, C, D, quæ tangant rectam, sive planum per ANGF, in punctis N, G, F.

Patet primum sphæram B a minima potentia moveri, idque Dominus de Roberval non diffitetur, et in puncto N collocatam manere, sed in nullo alio totius plani puncto idem accidit.

Perficiatur figura, ut hic vides. Recta HG, connectens punctum contactûs G et centrum terræ H, ad rectam CG facit angulum obtusum, ideoque sphæra C ad partes GN movebitur. Idem de sphæra D. Sit igitur potentia in Z retinens sphæram C per motum rectæ ANGF parallelum, aut, quod idem est, per rectam ZC. Intelligatur vectis cujus centrum fixum G; ducatur in HC perpendicularis GI.

Sphæræ C motus naturalis est per rectam CH; motus retinens per CZ, ad quam perpendicularis est GC : ergo, ex suppositis Domini de Roberval, est [reciproce]

ut recta GI ad rectam GC, ita potentia retinens in Z ad sphæram C.

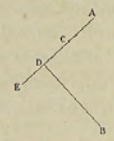
Quod erat demonstrandum.

(1) Il s'agit du *Traité de Méchanique* de Roberval. *Voir* Lettre VII, 4, note 1.

In sphæra autem D major requiretur potentia ad retinendum et, quo magis distabit a puncto N, eo majore potentia opus erit, quod est mirabile. Ex suppositione autem Domini de Roberval, nunquam in eodem plano variat proportio; quod quàm longe abeat a veritate, ipse viderit.

Sit centrum terræ B (*fig.* 47), planum inclinatum ACDE. In punctis A et C eamdem potentiam retinere, poterat fortasse non incongruum

Fig. 47.



videri Domino de Roberval. Sed, ducto perpendiculo BD, quum in puncto D sit quies et minima potentia retineat, quâ ratione constabit ipsius propositio?

In quolibet autem plano habet locum nostra demonstratio. Omne quippe planum alicui horizonti invenietur parallelum.

Hac propositione evertitur demonstratio Domini de Roberval et brevissimâ viâ ad ipsius hypotheses nova proportio detegitur.

Secundam figuram addideramus, quâ judicium nostrum de ipsius ultima propositione prodere sperabamus. Sed non suppetit tempus.

XVII.

FERMAT A ROBERVAL.

DIMANCHE 7 DÉCEMBRE 1636.

(*Va*, p. 147-148.)

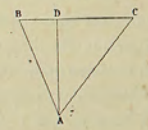
MONSIEUR,

1. Après vous avoir assuré que je n'ai jamais songé de soutenir une opinion contre mon sentiment et que je serois ravi que votre propo-

sition méchanique (1) fût vraie, afin que nous ne fussions plus en peine de sonder la nature par cet endroit, je m'en remettrai du surplus à la lettre que j'écris à M. de Carcavi, à laquelle j'ajouterai seulement que le dernier des principes dont vous vous servez pour l'établissement de votre proposition ne me semble du tout point admissible et que, sans aucun esprit de contradiction, j'estime que, pour établir la proportion des poids qui se meuvent librement, on ne doit pas avoir recours aux forces mouvantes, et qu'au contraire les poids libres doivent servir de règle à tous les autres mouvemens violents; et c'est en quoi je trouve que votre principe est défectueux, outre qu'il est apparemment faux, puisque celui dont je me sers en sa place ne peut, ce me semble, être contredit, et de cela j'en fais juge qui que ce soit.

Sit vectis BDC (fig. 48), *cujus medium* D, *centrum terræ* A; *sit autem recta* DA *vecti perpendicularis et sint æqualia pondera* B *et* C, *ad centrum*

Fig. 48.



terræ per rectas BA, CA *naturaliter annuentia; suspendatur autem vectis a puncto* D *et a quavis potentia retineatur : Aio idem ponderare* B *et* C *corpora ita constituta ac si ambo in puncto* D *ab eadem potentia detineantur.*

Car, puisque la ligne BC est sans poids et que la puissance qui est en D *abstrahit a centro*, où au contraire les poids B et C, *sive sint in punctis* B *et* C, *sive in puncto* D, *vergunt ad centrum motu opposito*, il s'ensuit clairement que la puissance qui retiendra les poids aux points B et C les retiendra aussi en D, et *vice versa*.

(1) *Voir* Lettre XIV, 2, et Pièce XVI.

Et n'importe d'alléguer qu'il semble que le mouvement qui se fait par des puissances parallèles à la ligne DA est aussi bien contraire au mouvement qui se fait *sursum* par la puissance qui retient en D : car,

1° Il n'est pas si probable de dire qu'un mouvement violent est contraire à un autre mouvement violent, comme de dire qu'un mouvement violent est contraire au mouvement naturel.

2° Le mouvement qui se fait sur les lignes parallèles à DA se fera sur des plans inclinés à l'horizon et desquels la proportion sera plus inconnue que le principe; de sorte que ou il vous faut avouer la vérité de mon principe ou démontrer le vôtre. Au premier cas, je vous démontrerai ma proposition de mon second levier, par vos propres maximes; j'estime que vous aurez grande difficulté au second.

Vous pouvez encore répondre qu'il n'est pas ici question des mouvemens qui se font sur des plans inclinés à l'horizon, parce que vous supposez, et je l'accorde aussi, qu'en tout mouvement, si la force qui retient tire à l'opposite, l'équilibre se fera lorsqu'elle sera égale à la force qui tire au contraire, et qu'ainsi, la puissance en D tirant à l'opposite, l'effet de votre principe s'en ensuivra.

Mais je réponds que votre réponse seroit bonne, si la puissance qui est en D étoit divisée et placée aux points B et C, et qu'elle tirât au contraire par les mêmes lignes que les forces, que vous supposez en C et B, meuvent. Mais cela n'étant pas, excusez mon incrédulité si elle ne se rend pas à vos raisons, lesquelles je souhaiterois plus fortes pour pouvoir librement me dédire de tout ce que j'ai fait sur ce sujet, vous protestant que jamais homme n'a été plus docile que moi et que, lorsque je reconnoîtrai mes fautes, je les publierai le premier avec toute franchise.

2. J'ai été bien aise de voir votre remarque sur la conchoïde (1), et vous prie de m'en donner la démonstration et vous souvenir que, lorsque je vous écrivis sur ce sujet, je le fis en doutant et sans examiner l'écrit que je transcrivis d'un livre où je l'avois mis il y avoit

(1) *Voir* Lettre XIV, 8.

quatre ans. La construction pourtant convient au problème et au point même de votre proposition, si elle est vraie, ce que j'attends que vous me confirmiez.

Je vous prie aussi me faire savoir votre sentiment sur les autres propositions que je vous ai envoyées et votre réponse sur les autres points de ma dernière Lettre (1) et me croire toujours etc.

XVIII.

FERMAT A ROBERVAL.

MARDI 16 DÉCEMBRE 1636.

(*Va*, p. 148-151.)

MONSIEUR,

1. Je viens de recevoir votre Lettre du 29 novembre (2), pour réponse à laquelle je vous dirai que, de la méthode que vous avez trouvée pour donner la somme des quarrécubes et quarréquarrés, je ne vois point qu'on en puisse tirer une règle générale pour l'invention de la somme *omnium potestatum in infinitum*, ce qui est requis à la solution de mon problème (3). Car vous dites seulement qu'il sera aisé de trouver les autres, après avoir vu celles dont vous baillez les exemples; mais je demande une méthode générale qui serve *ad omnes potestates*, comme Viète a trouvé celles des sections angulaires (4). Vous y songerez, s'il vous plaît, et j'en écrirai cependant l'invention et démonstration que vous verrez lorsqu'il vous plaira.

(1) Lettre XV.
(2) Cette Lettre, de Roberval à Fermat, est perdue.
(3) *Voir* Lettre XV, 3.
(4) Francisci Vietæ ad angulares sectiones theoremata καθολικώτερα demonstrata per Alexandrum Andersonum. — Pages 287 à 304 de l'édition des Elzevirs.

2. Pour ce qui est des nombres et de leurs parties aliquotes (1), j'ai trouvé une méthode générale pour soudre toutes les questions par algèbre, de quoi j'ai fait dessein d'écrire un petit Traité. Je crois que vous aurez maintenant vu la construction des deux que j'ai envoyés au Père Mersenne; car il m'écrit qu'il vous les baillera. Toutes ces questions sont très difficiles, comme vous savez, et n'ont été traitées par personne.

3. J'ai été bien aise d'être confirmé par votre lettre en l'opinion que j'avois déjà conçue de M. de < Sainte-Croix >. Il est pourtant vrai qu'il doit avoir grande expérience dans les nombres, car, lui ayant par l'entremise du Père Mersenne proposé une question que personne de ceux à qui je l'avois proposée n'avoit encore pu soudre, il m'a envoyé d'abord les nombres qui satisfont à la question, sans pourtant expliquer sa construction. La question est (2) :

Invenire tria triangula rectangula numero, quorum areæ constituant tria latera trianguli rectanguli numero, singulæ nempe areæ singulis lateribus sint æquales.

Je vous avouerai que ce problème me donne beaucoup plus de peine qu'à M. de < Sainte-Croix >. Il est vrai que les nombres que j'ai trouvés sont différents des siens et que peut-être ai-je tenu un chemin plus difficile, comme vous savez que ces questions ont infinies solutions. Peut-être serez-vous de mon avis, si vous essayez de satisfaire à la proposition.

4. Vous verrez aussi mes spirales (3), desquelles la démonstration vous sera connue tout aussitôt (car elle est pareille à celle des nouvelles figures (4) que j'ai quarrées ou auxquelles j'ai trouvé des cônes

(1) *Voir* Lettre XV, 4. — Les deux nombres envoyés au Père Mersenne sont les *amiables* 17296 et 18416 (*voir* IV$_A$ et IV$_B$).
(2) *Voir* Observation XXIX sur Diophante (Tome I, p. 321).
(3) *Voir* Lettre XV, 6.
(4) *Voir* Lettre XIV, 4.

égaux), et vous m'avouerez que ces propositions n'illustrent pas peu la Géométrie.

Si M. de Beaugrand n'a pas encore trouvé la démonstration de ces questions, vous m'obligerez de lui en faire part.

5. Je lui ai écrit l'invention du centre de gravité de toutes ces nouvelles figures (1) par une méthode particulière, qui ne suppose point la connoissance de la quadrature, ce qui vous semblera merveilleux jusques à ce que vous l'aurez vu. Il est vrai que je lui ai envoyé l'analyse seulement et non pas la composition que je vous éclaircirai une autre fois, parce qu'elle a ses difficultés et ne paroît pas d'abord par cette voie.

J'ai trouvé le centre de gravité de la parabole sans présupposer la quadrature, comme a fait Archimède, et ainsi on en peut tirer la quadrature par un simple corollaire.

6. Toutes ces propositions, ensemble celles des lieux plans, solides et *ad superficiem*, que j'ai achevées, et celles encore des parties aliquotes des nombres, dépendent de la méthode (2) dont M. Despagnet ne vous a pu faire voir qu'un seul cas, parce que, depuis que je n'ai eu l'honneur de le voir, je l'ai beaucoup étendue et changée.

7. Les tangentes des lignes courbes dépendent aussi de là, sur lequel sujet je vous proposerai de trouver une tangente à un point donné en la seconde conchoïde de Nicomède (3).

8. Au reste, je suis bien aise de ce que vous ayez trouvé la démon-

(1) *Voir* Lettre XV, **5**.

(2) *Voir* Lettre XIII, **3**.

(3) *Voir* Lettre XVII, **2**. — La seconde conchoïde de Nicomède (*Pappus*, éd. Hultsch, p. 244, l. 19) paraît correspondre à l'équation en coordonnées polaires : $\rho = \frac{a}{\cos\omega} - b$, en supposant $b < a$. (La troisième et la quatrième répondraient respectivement aux cas : $b = a$; $b > a$). Mais Fermat entend probablement ici la conchoïde du cercle. (*Comparez* Viète, *Supplementum Geometriæ*, édition des Elzevirs, page 240.)

stration, comme vous dites, de ce que, supposé qu'aux paraboles les segmens (1) de l'axe sont entre eux comme les parallélogrammes aux mêmes paraboles, il sera vrai aussi qu'étant tournées sur leurs axes, les centres des solides seront où l'axe est divisé en raison comme les cylindres aux solides (2).

Car, par la voie dont j'ai envoyé un exemple à M. de Beaugrand, et que je mettrai au long une autre fois, j'ai trouvé la démonstration de l'antécédent et, de celle du conséquent, que vous m'envoierez, s'il vous plaît, j'en tirerai la proportion des solides paraboliques à leurs cônes, qu'il seroit malaisé de trouver autrement (3). Car vous trouverez bien la proportion de ceux qui viennent *post quadrata alternatim*, comme quarréquarrés, cubocubes etc., de quoi vous baillez l'exemple au premier; mais *in parabolis cubicis, quadratocubicis et sic alternis in infinitum, methodus qua usi sumus non dat proportionem conoideôn ad conos; ex nostra autem methodo, in omnibus omnino conoidibus invenimus centrum gravitatis : ergo, ex tua propositione, dabitur proportio eorum ad conos.*

Je l'attends donc avec impatience, puisqu'elle doit servir à cet usage; si ce n'est que vous ayez trouvé la proportion des conoïdes cubiques, quadratocubiques, etc. à leurs cônes, ce que votre Lettre semble marquer, auquel cas je vous supplie m'envoyer lesdites proportions.

Ce n'est pas que je doute de la vérité de votre proposition; mais permettez-moi de vous dire que je me suis défié que vous en eussiez trouvé la démonstration et que j'ai cru seulement que vous en avez fait l'expérience aux conoïdes paraboliques des quarréquarrés, cubo-

(1) C'est-à-dire que le centre de gravité de l'aire $2\int_0^x y\,dx$ de la parabole $y^m = px$ divise l'abscisse x dans le rapport $m+1$ à m.

(2) C'est-à-dire que le centre de gravité du solide $\pi\int_0^x y^2\,dx$ engendré par la parabole $y^m = px$ divise l'abscisse x dans le rapport $m+2$ à m.

(3) D'après ce passage, Fermat n'aurait alors possédé la quadrature $\int \frac{a}{x^m}\,dx$ que dans le cas où m est pair.

cubes etc. *alternis*. Mais la connoissance que j'ai de votre savoir fait que j'espère que vous me détromperez.

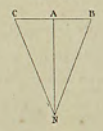
9. Pour ce qui est de la proportion (1) du solide qui se fait sur un diamètre de la parabole parallèle à l'axe, ma construction est différente de la vôtre : il seroit inutile de l'ajouter, puisqu'elles concluent toutes deux.

10. Je me trouve obligé d'ajouter un mot touchant votre proposition méchanique (2), parce que le Père Mersenne m'écrit qu'enfin j'ai acquiescé à votre opinion, ce que pourtant je ne saurois faire par les raisons que vous allez voir, et vous puis assurer que jamais je ne fus mieux confirmé en la proposition de mon second levier (3) que je le suis maintenant, car, pour celle du premier, il la faut établir par de nouveaux principes, puisque vous avez nié ceux que j'estimois si clairs.

Si votre principe, duquel je vous ai déjà écrit par ma dernière Lettre (4), est vrai, il s'ensuit manifestement qu'un même corps approchant du centre de la terre changera son poids.

In secunda figura (fig. 49) *sit vectis* CAB, *cujus medium* A *cum centro terræ* N *per rectam* AN, *ad vectem perpendicularem, iungatur. In*

Fig. 49.



punctis C *et* B *pondera* C *et* B *æqualia constituantur et similia, quæ ad centrum per rectas* CN, BN *annuant.*

(1) Proportion au cylindre ou au cône de même base et même hauteur, c'est-à-dire cubature.
(2) *Voir* Pièce XVI.
(3) *Voir* Pièce V, 2 et 5.
(4) *Voir* Lettre XVII, 1.

Si rectæ NC, NB *essent ad vectem perpendiculares, potentia in* A, *æqualis duobus ponderibus* B *et* C, *ex tuo principio detineret vectem. Sed, quum angulos* NCA, NBA *acutos efficiant, aut eadem aut minor aut major potentia requiretur in* A *ad æquilibrium.*

Si eadem potentia facit æquilibrium, verum erit principium quo in præcedenti ad te epistola usi sumus : quod si fatearis, statim vectem nostrum demonstrabimus.

Si major aut minor potentia æquilibrium constituit, ergo, in primo casu, quò minuentur magis anguli rectarum CN, BN *cum vecte, eò major requiretur ad æquilibrium potentia; in secundo casu, minor. Supra punctum* A *idem vectis, in eadem directionis linea, similiter ponatur, ut in figura; minuentur* (1) *anguli linearum* CN, BN, *ut patet : variabit igitur potentia æquilibrii in* A *constituta, ideoque pondus ex gravibus* B *et* C *compositum, pro diversa a terræ centro distantia, erit etiam diversum.*

Primam partem dilemmatis quominus fatearis, impedit tua propositio : quippe, hoc dato, corrueret. Fatearis igitur necesse est, aut potentiam in A *variare pro diversitate angulorum, aut eamdem semper esse in omni angulorum acutorum positione, sed tamen inæqualem potentiæ quæ detinet potentias ad vectem perpendiculares.*

Utrum libet concesseris, manifestissimâ demonstratione detegitur paralogismus, quem tuæ demonstrationi irrepsisse nec veritas quam quærimus patitur dissimulare, nec tu ipse poteris fortasse diffiteri.

11. *In prima figura* (fig. 50), *quæ est quarta tuæ propositionis* (2), *his verbis ita construis.*

« Soit le centre de la balance A etc. (*voir* page 79, ligne 10 à page 80, ligne 4).... équilibré avec la puissance E sur le bras AC. »

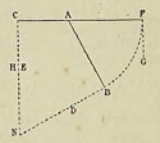
Hic vertitur cardo tuæ demonstrationis.

Et primo, si dixeris in omni angulorum acutorum positione eamdem

(1) Le texte semble corrompu, mais ne peut être rétabli sûrement, la figure originale faisant défaut. Si la droite CB est tracée au-dessus du point A (*supra*), les angles C et B augmentent (*augebuntur*) au lieu de diminuer. Avec *minuentur*, il faudrait *infra*, qui est la leçon la plus probable au lieu de *supra*, à moins que la figure ne fût retournée.
(2) *Comparez* en effet la *fig.* 42, qui est la quatrième de la Lettre XIV.

semper potentiam requiri ad æquilibrium, statim demonstrabo meam de vecte propositionem; fatearis igitur necesse est, variare potentiam prout anguli variant.

Fig. 50.



His positis, esto, si placet, in exposita figura centrum terræ N *in quod rectæ* CE, BD *dirigantur, et sint in punctis* E *et* D *pondera seu gravia in proportione data, quod quidem liberum esse tua innuit constructio.*

Imo huc tantum abs te tenditur ut, per potentias imaginarias ab omnibus omnino partibus παραλλήλως moventes, inveniatur proportio ponderum in vecte quiescente : aliter quippe, quum hujusmodi potentiæ nullibi in rerum natura reperiantur, inutiles prorsus essent.

In punctis H *et* G *construis potentias ponderibus* E *et* D *æquales, quæ ab omnibus ipsarum partibus παραλλήλως moveant. Potentiam deinde* H *potentiæ* E *æqualiter movere, concludis per primum tuorum axiomatum, quia nempe trahet* H *potentia per punctum* C *et rectam* HC *perpendicularem vecti; trahet etiam pondus* E *per eamdem rectam vecti perpendicularem : quum igitur æquales potentiæ per eamdem rectam et eumdem angulum moveant et circa eamdem a vectis centro distantiam, pondus* E *et imaginaria* H *potentia æqualiter trahunt.*

Id, verisimile quum sit, veritatem intimam quærentibus non potest non videri falsissimum. Pondus in E *sit sphæricum, verbi gratia; omnes omnino ipsius partes ad centrum* N *tendunt per rectas in eodem* N *centro concurrentes et vectem* AC, *si continuentur, ad angulos acutos secantes : ergo potentiæ, abs* C *utrimque æqualiter remotæ, intelligentur vectem ad angulos acutos suis motibus secantes. Contra, quum partes omnes potentiæ* H *παραλλήλως moveant, intelligentur potentiæ, abs* C *utrimque æqualiter remotæ, ad angulos rectos vectem suis motibus secantes.*

Quum igitur partes omnes potentiæ H *simul sumptæ æquentur partibus omnibus potentiæ seu ponderis* E *simul sumptis* (*tota enim potentia* H *toti ponderi* E *æquatur*), *patet, ex jam traditis, potentiarum* H, E *in punctis* H *et* E *inæqualem esse motum; quod igitur de potentia* H *concludit demonstratio, perperam ad pondus* E *porrigit.*

12. S'il me restoit du temps ou du papier, j'ajouterois, suivant votre desir, la démonstration des cônes isopérimètres (1). Ce sera une autre fois, me réservant encore de vous écrire quelque chose de plus recherché sur les Méchaniques, à la charge que vous m'obligerez de croire que je n'aurois garde de m'opiniâtrer après une proposition, si je ne la croyois véritable, et que je la quitterai un moment après que de nouvelles raisons l'emporteront sur les miennes.

Je suis etc.

(1) *Voir* Lettres XIV, 11 et XV, 8.

ANNEE 1637.

XIX.

FERMAT A ROBERVAL.

< FÉVRIER 1637 >

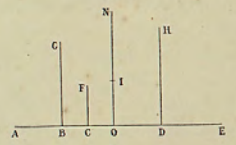
(*Fa*, p. 151-152.)

MONSIEUR,

1. Je trouve assez de loisir pour vous envoyer encore la construction du lieu plan : *Si a quotcumque etc.* (1), que je tiens une des plus belles propositions de la Géométrie, et je crois que vous serez de mon avis.

Sint data quotlibet puncta, quinque verbi gratia, A, G, F, H, E (fig. 51)

Fig. 51.



(nam propositio est generalis), *quæritur circulus ad cujus circumferentiam in quolibet puncto inflectendo rectas a datis punctis, quadrata omnium sint æqualia spatio dato.*

(1) *Voir* Tome I, p. 37, la proposition V du Livre II des *Lieux plans d'Apollonius*. — Cp. Lettre XIII, 7. — La présente semble n'être qu'un fragment d'une Lettre perdue.

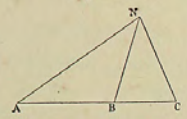
Jungantur puncta quævis A et E per rectam AE, in quam ab aliis punctis datis cadant perpendiculares GB, HD, FC. Omnium rectarum, punctis datis vel occursu perpendicularium et puncto A terminatarum, sumatur pars conditionaria, quintans, verbi gratia, in hac specie : quintans ergo rectarum AB, AC, AD, AE simul sumptarum esto AO, et a puncto O excitetur perpendicularis infinita ON, a qua resecetur OI pars conditionaria (quintans nempe pro numero punctorum datorum) perpendicularium GB, FC, HD, et intelligantur jungi rectæ AI, GI, FI, HI, EI. Quadrata istarum quinque erunt minora spatio dato : demantur igitur a spatio dato et supersit, verbi gratia, Z planum, cujus quintans (pars nempe conditionaria) sumatur et in quadratum M redigatur. Circulus, centro I, intervallo M descriptus satisfaciet proposito : hoc est, quodcumque punctum sumpseris in ipsius circumferentia, rectarum a datis punctis ad illud punctum ductarum quadrata erunt æqualia spatio dato.

Adderem demonstrationem, sed longa sane est, et malim vestrum amborum sollicitare genium ad eam inveniendam.

2. Non solum autem has propositiones, sed omnes omnino *de locis planis* absolvi, imo locos quamplurimos adinveni, de quibus nihil scripserat Apollonius, qui tamen sunt pulcherrimi, verbi gratia (1) :

Datis tribus punctis in recta A, B, C (fig. 52), *invenire circuli circum-*

Fig. 52.



ferentiam, in qua sumendo quodlibet punctum, ut N, *quadrata* AN, NB *superent quadratum* NC *spatio dato.*

(1) *Voir* Tome I, p. 31, la seconde addition de Fermat à la proposition I du Livre II des *Lieux plans*.

De *locis solidis* et *ad superficiem* multa quoque jam sunt detecta.

Casus loci plani superioris, non addo, nam patebunt statim. — *Si puncta data sint tantum tria et constituant triangulum, centrum circuli localis erit centrum gravitatis illius trianguli*, et hæc propositio singularis satis est mira.

3. Sed hic non moror. Propositionem universalissimam ita constituo et jam construxi (1) :

Si a datis quotlibet punctis inflectantur rectæ, et exponantur omnium species in data proportione crescentes aut deficientes, erunt species ita auctæ aut deminutæ dato spatio æquales.

Exemplum : Sint data tria puncta in superiori figura A, B, C, et quærendus circulus in cujus circumferentia sumendo quodlibet punctum, ut N, quadrati NA dimidium, verbi gratia, quadrati BN duplum et quadrati CN triplum simul juncta conficiunt spatium datum, et demonstratio ad quamlibet proportionem et quotlibet puncta porrigenda.

Hanc propositionem, pulcherrimam sane, videtur non vidisse Apollonius.

XX.

ROBERVAL A FERMAT.

SAMEDI 4 AVRIL 1637.

(*Va*, p. 152-153.)

MONSIEUR,

1. Quoique j'eusse reçu dès lundi dernier votre démonstration du lieu plan (2), néanmoins mes occupations, tant publiques que particulières, ne me permirent point de la considérer jusques à jeudi que je la présentai de votre part à l'assemblée de nos mathématiciens, qui étoit, ce jour-là, chez M. de Montholon, conseiller, où elle fut reçue, considérée, admirée avec étonnement des esprits, et votre nom élevé jusques au ciel, avec charge particulière à moi de vous remercier au nom de la Compagnie et vous prier de m'envoyer tout d'une main la composition du lieu solide (1) avec une brève démonstration, afin de faire imprimer les deux ou sous votre nom ou sans nom, comme vous le voudrez; en quoi nous aurons le soin d'étendre plus au long ce qui semblera trop concis pour le public.

Cependant, il y eut débat à qui auroit votre écrit pour en tirer copie, chacun m'enviant le bonheur de la communication que j'ai avec vous; mais M. le président Pascal, à qui le premier je l'avois mis entre les mains et qui l'avoit lu à la Compagnie, donna arrêt en sa faveur, se fondant sur la maxime : *qui tenet, teneat*, et pour faire droit aux parties intéressées, se chargea lui-même de leur en fournir copie, ordonnant que puis après l'original me seroit remis entre les mains.

Je leur avois dès auparavant communiqué la construction et un nommé M. Le Pailleur avoit trouvé la démonstration particulière pour trois et pour quatre points, si différente de la vôtre que c'est une chose étrange. Il y avoit apparence qu'avec le temps il eût trouvé une démonstration générale; mais il confesse que cette recherche le tuoit et qu'il vous a une particulière obligation de l'avoir délivré d'une peine presque insupportable.

2. Pour moi, je ne me puis promettre aucun loisir que trois mois ne soient passés, pour être délivré de mes leçons publiques et, quand j'aurois ce loisir, je ne serois pas assuré de trouver le lieu solide, lequel je prévois très difficile. C'est pourquoi, dès maintenant, je vous ferai, si vous voulez, une ample déclaration de mon impuissance, afin que, sans me tenter plus longtemps, et qu'ayant égard aux prières d'une telle Compagnie que celle dont je vous parle, vous nous fassiez

(1) Généralisation de la proposition V du Livre II des *Lieux plans*.

(2) *Voir* Lettre XIX, 1. — Roberval, dans une Lettre perdue, avait demandé la démonstration de l'énoncé donné par Fermat.

(1) Le lieu solide *ad tres et quatuor lineas*. *Voir* Lettre XXI, 2.

part de votre invention, qui est telle que le grand géomètre (1) des siècles passés se glorifioit particulièrement d'y avoir ajouté la perfection, en ayant reçu l'invention de ceux qui l'avoient précédé. Jugez combien vous avez occasion de vous glorifier de l'avoir trouvée en un temps auquel elle étoit en même état que si elle n'avoit jamais été connue.

3. Il m'est enfin paru quelque lumière pour le centre de gravité des paraboles, en considérant les centres des parallélogrammes circonscrits comme s'ils étoient tous posés sur une même base, différant seulement en hauteur. Mais, comme ces lumières me viennent au matin en me levant et qu'il faut du loisir pour les éclaircir, je ne me puis pas promettre d'en venir à bout si tôt. Si vous me délivrez de cette peine, je vous en aurai l'obligation entière.

Je suis etc.

XXI.

FERMAT A ROBERVAL (2).

LUNDI 20 AVRIL 1637.

(*Va*, p. 153-154.)

MONSIEUR,

1. Je ne pus pas vous écrire par le dernier courrier, à cause des occupations auxquelles je me trouvai engagé; je prends maintenant la plume pour vous témoigner que je suis beaucoup obligé à ces Messieurs à qui vous avez fait voir ma proposition, auxquels vous assurerez, s'il vous plaît, que j'estime beaucoup plus leur approbation que mon ouvrage. Leur savoir est si connu que je ne puis m'empêcher d'être glorieux d'avoir écrit et inventé quelque chose qui leur plaise. Je ne prétends pas par là vous exclure du nombre; au contraire, les marques de votre savoir m'étant plus particulièrement connues, je juge par là quels doivent être ceux qui conferent avec vous.

(1) Apollonius, préface du Livre I des *Coniques* (page 8 de l'édition Halley).
(2) Réponse à la Lettre précédente.

2. Au reste, je vous eusse envoyé les lieux solides *ad tres et quatuor lineas*, n'étoit que j'ai cru que M. de Beaugrand ne fera pas difficulté de bailler à M. de Carcavi le lieu *ad tres lineas*, que je lui envoyai, il y a longtemps, avec la démonstration (1). Dès que vous aurez celui-là, je vous envoierai l'autre. Si j'avois retenu copie de celui *ad tres lineas*, je n'eusse pas fait difficulté de vous l'envoyer; mais, ne l'ayant plus, j'ai voulu ménager la peine qu'il m'eût fallu prendre à le refaire, à laquelle je me porterai pourtant, si M. de Beaugrand ne le baille pas.

3. Vous verrez entre les mains de M. de Carcavi les deux Livres *De locis planis* (2), que j'avois promis depuis longtemps à M. de Beaugrand et que j'ai à dessein envoyé un courrier plus tôt que je ne lui avois fait espérer, afin que vous puissiez cependant les voir. Vous m'obligerez de m'en écrire avec franchise votre sentiment; je ne doute pas que la chose n'eût pu se polir davantage, mais je suis le plus paresseux de tous les hommes.

Je serai bien aise que vous m'écriviez aussi quelles de ces propositions vous étoient connues et quelles non, et en cas que vous en ayez vu quelqu'une, principalement du deuxième Livre, si elles étoient pareilles à celles que vous verrez. Car il y a huit ans que le deuxième Livre est écrit et en ce temps j'en baillai deux copies, l'une à M. Despagnet, conseiller au parlement de Bordeaux, et l'autre à M. de ...., si bien que peut-être quelqu'une de ces propositions aura été divulguée. Peut-être vous-même ou quelqu'autre de ceux de votre Compagnie en ont fait une partie.

Éclaircissez-moi de tout au vrai et vous m'obligerez beaucoup et sur-

(1) C'est la Pièce publiée Tome I, pages 87-89. La démonstration du lieu *ad quatuor lineas* est perdue.
(2) *Voir* Tome I, pages 3 à 51.

tout que votre jugement suive toutes ces propositions, s'il vous plait; je l'attends pour réponse à celle-ci.

4. Au reste, quoi qu'on juge digne d'impression de moi, je ne veux pas que mon nom y paroisse.

Je me réserve à vous entretenir plus amplement une autre fois; cependant vous saurez qu'outre les lieux plans et solides qui sont dans Pappus, j'en ai trouvé grande quantité de très beaux et dignes de remarque, que je n'ai pourtant osé mêler avec ceux d'Apollonius. J'en ai plus de cent propositions très belles et particulièrement des lieux solides et *ad superficiem*, mais le loisir me manque.

Je n'ai pas voulu faire le grammairien en expliquant au menu le texte de Pappus; il suffit que j'aie pris son sens, comme je crois que vous m'avouerez.

J'attends votre réponse et suis etc.

XXII.

FERMAT A MERSENNE.

< SEPTEMBRE 1637 >

(D, III, 37.)

MON RÉVÉREND PÈRE,

1. Vous me demandez mon jugement sur le Traité de Dioptrique de M. Descartes (1): il est vrai que le peu de temps que M. de Beaugrand

(1) Le premier Volume publié par Descartes : — *Discours | de la Methode | pour bien conduire sa raison, et chercher | la verité dans les sciences. | Plus | la Dioptrique | les Meteores | et | la Geometrie | qui sont des essais de cette Methode. — A Leyde | De l'Imprimerie de Ian Maire | CIↃ.IↃ.CXXXVII. Avec Priuilege.* — ne parvint en France et ne fut distribué (par Mersenne) que vers la fin de 1637. Mais, avant l'achèvement de l'impression et à l'appui de la demande du privilège, qui fut accordé le 4 mai, Descartes avait envoyé un exemplaire au Minime, qui le communiqua par parties à différentes personnes. C'est ainsi qu'il prit l'avis de Fermat sur la *Dioptrique*, qui paraît cependant avoir

m'a donné pour le parcourir semble me dispenser de l'obligation de vous satisfaire exactement et par le menu, outre que, la matière étant de soi très subtile et très épineuse, je n'ose pas espérer que des pensées informes et non encore bien digérées puissent vous donner une grande satisfaction. Mais d'ailleurs, quand je considère que la recherche de la vérité est toujours louable, et que nous trouvons souvent à tâtons et parmi les ténèbres ce que nous cherchons, j'ai cru que vous ne trouveriez pas mauvais que je tâchasse à vous débrouiller une mienne imagination sur ce sujet, laquelle, étant encore obscure et embarrassée, j'éclaircirai peut-être davantage une autre fois, si mes fondemens sont approuvés, ou si je ne change pas moi-même d'avis.

2. La connoissance des réfractions a toujours été recherchée, mais inutilement. Alhasen et Vitellion (1) y ont travaillé sans avancer beaucoup; et ceux qui sont venus depuis ont très bien remarqué que tout se réduisoit à établir une certaine proportion, par le moyen de laquelle, une réfraction étant connue, on pût aisément trouver toutes les autres; de sorte que tous les fondemens de la Dioptrique doivent consister en ce point, c'est-à-dire en la convenance et au rapport qu'une réfraction connue a à toutes les autres.

Cela supposé, il a été nécessaire que ceux qui ont voulu établir les principes de la Dioptrique aient cherché cette convenance et ce rapport.

été envoyée à Toulouse par Beaugrand sans son aveu. En tout cas, il ressort de la fin de la présente Lettre que les autres parties ne furent pas dès lors communiquées à Fermat, et qu'il ignorait même qu'elles dussent être réunies en un seul Ouvrage.

La date réelle de cette Lettre est très incertaine; nous l'avons supposée du mois de septembre, la réplique de Descartes (Lettre XXIII ci-après) étant certainement de la première quinzaine d'octobre. Mais il se peut très bien que Mersenne ait gardé, même plusieurs mois, la Lettre de Fermat.

Au reste, ce dernier n'avait pas été prévenu que sa critique serait communiquée à l'auteur de la *Dioptrique* et il se plaignit à Mersenne quand il eut connaissance de l'indiscrétion de celui-ci (*Lettres de Descartes*, éd. Clerselier, III, 55, p. 298).

(1) OPTICÆ THESAVRVS. — Alhazeni Arabis libri septem, nunc primùm editi. Ejusdem liber de crepusculis et nubium ascensionibus. Item Vitellionis Thuringopoloni libri X. — Omnes instaurati, figuris illustrati et aucti, adjectis etiam in Alhazenum commentariis a Federico Risnero. — Cum privilegio Cæsareo et Regis Galliæ ad sexennium. Basileæ, per Episcopios, M.D.LXXII.

Maurolic, abbé de Messine, en son Traité posthume *De lumine et umbra* (1), a soutenu que les angles qu'on appelle d'incidence sont proportionaux à ceux qu'on nomme de réfraction. Si cette proposition étoit vraie, elle suffiroit pour nous marquer les vraies figures que doivent avoir les corps diaphanes qui produisent tant de merveilles; mais, pour ce qu'elle n'a pas été bien démontrée par Maurolic, et que l'expérience même semble la convaincre de faux, il en est resté assez à M. Descartes pour exercer son esprit, et pour nous découvrir de nouvelles lumières dans ces corps, qui, pour en être seuls capables, n'ont pas laissé de produire jusques à présent de grandes obscurités.

Son Traité de la Dioptrique est divisé en plusieurs discours, desquels les principaux sont, ce me semble, les deux premiers, qui parlent de la lumière et de la réfraction, pource qu'ils contiennent les fondemens de la Science, dont on voit ensuite les belles conclusions et conséquences qu'il en tire.

3. Voici à peu près son raisonnement (2) : La lumière n'est autre chose que l'inclination que les corps lumineux ont à se mouvoir; or, cette inclination au mouvement doit probablement suivre les mêmes lois que le mouvement même; et partant, nous pouvons régler les effets de la lumière par la connoissance que nous pouvons avoir de ceux du mouvement.

Il considère ensuite le mouvement d'une balle dans la réflexion et dans la réfraction, et pour ce qu'il seroit inutile et ennuyeux de copier ici tout son discours, je me contenterai de vous marquer simplement les observations que j'y ai faites.

4. Je doute premièrement, et avec raison, ce me semble, si l'inclination au mouvement doit suivre les lois du mouvement même, puis-

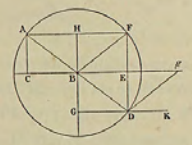
(1) Abbatis Francisci Maurolyci Messanensis. Photismi de lumine, et umbra ad perspectivam, et radiorum incidentiam facientes. — Diaphanorum partes, seu Libri tres : in quorum primo de perspicuis corporibus, in secundo de Iride, in tertio de organi visualis structura, et conspicilliorum formis agitur. — Problemata ad perspectivam, et Iridem pertinentia. — Omnia nunc primum in lucem edita. — Neapoli, ex Typographia Tarquinii Longi. M.DC.XI. Superiorum permissu.

(2) Page 8 de l'édition originale du Traité de Descartes.

qu'il y a autant de différence de l'un à l'autre que de la puissance à l'acte; outre qu'en ce sujet, il semble qu'il y a une particulière disconvenance, en ce que le mouvement d'une balle est plus ou moins violent, à mesure qu'elle est poussée par des forces différentes, là où la lumière pénètre en un instant les corps diaphanes et semble n'avoir rien de successif. Mais la Géométrie ne se mêle point d'approfondir davantage les matières de la Physique.

5. En la figure (*fig.* 53) par laquelle il explique la raison de la réflexion, page 15 de la Dioptrique (1), il dit que la détermination à se

Fig. 53.



mouvoir vers quelque côté peut, aussi bien que le mouvement et généralement que toute autre quantité, être divisée en toutes les parties desquelles on peut imaginer qu'elle est composée, et qu'on peut aisément imaginer que celle de la balle qui se meut d'A vers B, est composée de deux autres, dont l'une la fait descendre de la ligne AF vers la ligne CE et l'autre en même temps la fait aller de la gauche AC vers la droite FE, en sorte que ces deux, jointes ensemble, la conduisent jusques à B, suivant la ligne droite AB.

Cela posé, il en tire la conséquence de l'égalité des angles d'incidence et de réflexion, qui est le fondement de la Catoptrique.

Pour moi, je ne saurois admettre son raisonnement pour une preuve et démonstration légitime. Car, par exemple, en la figure ci-jointe (*fig.* 54), en laquelle AF n'est plus parallèle à CB, et où l'angle CAF

(1) Nous reproduisons la figure donnée par Clerselier dans son édition des *Lettres de Descartes*, tome III, page 171. Dans l'édition originale de la *Dioptrique*, les lignes BG, GDK, D*g* ne sont pas tracées.

est obtus, pourquoi ne pouvons-nous pas imaginer que la détermination de la balle qui se meut d'A vers B est composée de deux autres, dont l'une la fait descendre de la ligne AF vers la ligne CE, et l'autre la fait avancer vers AF? Car il est vrai de dire qu'à mesure que la balle descend dans la ligne AB, elle s'avance vers AF, et que cet avancement

Fig. 54.



doit être mesuré par les perpendiculaires tirées, des divers points qui peuvent être pris entre A et B, sur la ligne AF. Et ceci pourtant se doit entendre lorsque AF fait un angle aigu avec AB; autrement, s'il étoit droit ou obtus, la balle n'avanceroit pas vers AF, comme il est aisé de comprendre.

Cela supposé, par le même raisonnement de l'auteur, nous conclurons que le corps poli CE n'empêche que le premier mouvement, ne lui étant opposé qu'en ce sens-là; de sorte que, ne donnant point d'empêchement au second, la perpendiculaire BH étant tirée, et HF faite égale à HA, il s'ensuit que la balle doit réfléchir au point F, et ainsi l'angle FBE sera plus grand que ABC.

Il est donc évident que, de toutes les divisions de la détermination au mouvement, qui sont infinies, l'auteur n'a pris que celle qui lui peut servir pour sa conclusion; et partant il a accommodé son *medium* à sa conclusion, et nous en savons aussi peu qu'auparavant. Et certes, il semble qu'une division imaginaire, qu'on peut diversifier en une infinité de façons, ne peut jamais être la cause d'un effet réel.

Nous pouvons, par un même raisonnement, refuter la preuve de ses fondemens de Dioptrique, puisqu'ils sont établis sur un pareil discours.

6. Voilà mon sentiment sur ces nouvelles propositions, dont les conséquences qu'il en tire, lorsqu'il traite de la figure que doivent avoir les lunettes, sont si belles, que je souhaiterois que les fondemens sur lesquels elles sont établies fussent mieux prouvés qu'ils ne sont pas; mais j'appréhende que la vérité leur manque aussi bien que la preuve.

J'avois fait dessein de vous discourir ensuite de mes pensées sur ce sujet; mais, outre que je ne puis encore me satisfaire moi-même exactement, j'attendrai toutes les expériences que vous avez faites ou que vous ferez à ma prière, sur les diverses proportions des angles d'inclination et ceux de réfraction. Vous m'obligerez beaucoup de m'en faire part au plus tôt, et je vous promets, en revanche, de vous dire de nouvelles choses sur cette matière.

Tout ce que je viens de vous dire n'empêche pas que je n'estime beaucoup l'esprit et l'invention de l'auteur; mais il faut de commune main chercher la vérité, que je crois nous être encore cachée sur ce sujet.

7. Vous m'avez encore envoyé deux Discours (1), l'un contre M. de Beaugrand, et l'autre de M. Desargues. J'avois vu déjà le second, qui est agréable et fait de bon esprit. Pour le premier, il ne peut pas être mauvais, si nous en retranchons les paroles d'aigreur; car la cause de M. de Beaugrand est tout-à-fait déplorée. Je lui écrivis les mêmes raisons de votre imprimé à lui-même, dès qu'il m'eut envoyé son Livre.

(1) Le Discours de Desargues doit être son premier opuscule sur la perspective : *Exemple de l'une des manières universelles du S. G. D. L., touchant la pratique de la perspective sans employer aucun tiers point, de distance ny d'autre nature qui soit hors du champ de l'ouvrage. A Paris, en May* 1636, *avec Privilège* (Bibl. Nat. imprimés V 122, Inventaire V 1527), reproduit, sous un titre inexact, pages 53-84 du premier Volume des *Œuvres de Desargues* (éd. Poudra, Paris, Leiber, 1864).

Le Discours contre Beaugrand est l'Ouvrage : *Eselaircissement d'une partie des Paralogismes ou fautes contre les loix du raisonnement et de la demonstration que Monsieur de Beaugrand a commis en sa pretendue Demonstration de la première partie de la quatriesme proposition de son Liure intitulé Geostatique. Adressé au mesme Monsieur de Beaugrand. Par Cuy de la Brosse, Escuier Conseiller et Medecin ordinaire du Roy, et Intendant du Iardin Royal des Plantes Medecinales de Paris. — A Paris. Chez Iacques Dugast, rue S. Jean de Beauuais, à l'Olivier de Robert Estienne et en sa boutique dans la court du Palais, place du Change.* M.DC.XXXVII (Bibl. Nat. imprimés V $\frac{1}{12}$, Inventaire V 1538).

J'attends la faveur que vous me faites espérer de voir par votre moyen les autres Livres de M. Descartes et le Livre de Galilée *De motu* (1).

Je suis, mon Révérend Père, votre très humble serviteur,

FERMAT.

XXIII.

DESCARTES A MERSENNE POUR FERMAT (2).

< OCTOBRE 1637 >

(D, III, 39.)

MON RÉVÉREND PÈRE,

1. Vous me mandez qu'un de vos amis, qui a vu la Dioptrique, y

(1) Il s'agit de l'Ouvrage : *Discorsi e dimostrazioni matematiche intorno a due nuove scienze attenenti alla Mecanica e i movimentali locali, del Signor Galileo Galilei, filosofo e matematico primario del serenissimo Grand Duca di Toscana. — Con una Appendice del centro di gravità di alcuni solidi.* — qui était alors sous presse à Leyde, chez les Elzevirs, et qui ne parut que l'année suivante, en 1638.

(2) Réponse à la Lettre précédente. La date indiquée dans les annotations manuscrites de l'exemplaire des *Lettres de Descartes* de la Bibliothèque de l'Institut, qui a été utilisé par Cousin pour son édition, est celle du 3 décembre 1637. Mais cette réponse de Descartes fut adressée par lui à Mersenne en même temps que sa Lettre (Clerselier, III, 38), qui commence ainsi :

« Mon Révérend Père, j'ai été bien aise de voir la lettre de M. de Fermat et je vous » en remercie; mais le défaut qu'il trouve en ma démonstration n'est qu'imaginaire et » montre assez qu'il n'a regardé mon Traité que de travers. Je réponds à son objection » dans un papier séparé, afin que vous lui puissiez envoyer, si bon vous semble, et si » vous avez envie par charité de le délivrer de la peine qu'il prend de rêver encore sur » cette matière.... »

Or, dans la même Lettre, Descartes dit avoir reçu « ces jours passés » quelques objections de *Fromondus*, auxquelles il a répondu dès le lendemain. Comme la lettre de Libert Froidmont est datée du 13 septembre 1637 et qu'elle fut transmise à Descartes le 15 septembre par *Plempius* (Domela Nieuwenhuis, *Commentatio de R. Cartesii commercio cum philosophis belgicis*, Louvain, 1828, p. 95), il faut adopter pour les réponses de Descartes à Plempius et à Fromondus (éd. Clerselier, II, 7 et 8) la date du 3 octobre donnée par l'édition latine d'Amsterdam des Lettres de Descartes, et non pas celle du 27 novembre supposée par l'annotateur anonyme de l'exemplaire de l'Institut.

Dès lors, notre Lettre XXIII doit avoir été écrite du 5 au 12 octobre 1637.

trouve quelque chose à objecter, et premièrement qu'il doute *si l'inclination au mouvement doit suivre les mêmes lois que le mouvement, puisqu'il y a autant de différence de l'un à l'autre que de la puissance à l'acte* (1).

Mais je me persuade qu'il a formé ce doute sur ce qu'il s'est imaginé que j'en doutois moi-même, et qu'à cause que j'ai mis ces mots en la page 8, ligne 24 : « *car il est bien aisé à croire que l'inclination* (2) *à se mouvoir doit suivre en ceci les mêmes lois que le mouvement* », il a pensé que, disant qu'une chose est aisée à croire, je voulois dire qu'elle n'est que probable. En quoi il s'est fort éloigné de mon sentiment; car je répute presque pour faux tout ce qui n'est que vraisemblable, et quand je dis qu'une chose est aisée à croire, je ne veux pas dire qu'elle est probable seulement, mais qu'elle est si claire et si évidente, qu'il n'est pas besoin que je m'arrête à la démontrer; comme en effet on ne peut douter avec raison que les lois que suit le mouvement, qui est l'acte, comme il dit lui-même, ne s'observent aussi par l'inclination à se mouvoir, qui est la puissance de cet acte. Car, bien qu'il ne soit pas toujours vrai que ce qui a été en la puissance soit en l'acte, il est néanmoins du tout impossible qu'il y ait quelque chose en l'acte qui n'ait pas été en la puissance.

2. Pour ce qu'il dit ensuite (3), *qu'il semble y avoir ici une particulière disconvenance, en ce que le mouvement d'une balle est plus ou moins violent, à mesure qu'elle est poussée par des forces différentes, là où la lumière pénètre en un instant les corps diaphanes, et semble n'avoir rien de successif*, je ne comprends point son raisonnement.

Car il ne peut mettre cette disconvenance en ce que le mouvement d'une balle peut être plus ou moins violent, vu que l'action que je prends pour la lumière peut aussi être plus ou moins forte; ni non plus en ce que l'un est successif et l'autre non, car je pense avoir assez

(1) *Voir* Lettre XXII, 4.

(2) Le texte de la Dioptrique porte : *l'action ou inclination*.

(3) *Voir* Lettre XXII, 4.

fait entendre, par la comparaison du bâton d'un aveugle, et par celle du vin qui descend dans une cuve, que, bien que l'inclination à se mouvoir se communique d'un lieu à l'autre en un instant, elle ne laisse pas de suivre le même chemin par où le mouvement successif se doit faire, qui est tout ce dont il est ici question.

3. Il ajoute après cela un discours qui me semble n'être rien moins qu'une démonstration (1). Je ne veux pas répéter ici ses mots, pour ce que je ne doute point que vous n'en ayez gardé l'original; mais je dirai seulement que, de ce que j'ai écrit que la détermination à se mouvoir peut être divisée (j'entends divisée réellement, et non point par imagination) en toutes les parties dont on peut imaginer qu'elle est composée, il n'a eu aucune raison de conclure que la division de cette détermination, qui est faite par la superficie CBE (*fig.* 54), qui est une superficie réelle, à savoir celle du corps poli CBE, ne soit qu'imaginaire. Et il a fait un paralogisme très manifeste en ce que, supposant la ligne AF n'être pas parallèle à la superficie CBE, il a voulu qu'on pût, nonobstant cela, imaginer que cette ligne désignoit le côté auquel cette superficie n'est point du tout opposée, sans considérer que, comme il n'y a que les seules perpendiculaires, non sur cette AF tirée de travers par son imagination, mais sur CBE, qui marquent en quel sens cette superficie CBE est opposée au mouvement de la balle, aussi n'y a-t-il que les parallèles à cette même CBE qui marquent le sens auquel elle ne lui est point du tout opposée.

4. Mais, afin qu'on voie mieux la différence qui est entre nos deux raisonnemens, je les veux appliquer à une autre matière. J'argumente en cette sorte :

Premièrement, le triangle ABC (*fig.* 55) peut être divisé en toutes les parties dont on peut imaginer qu'il est composé. *Secondement*, or on peut aisément imaginer qu'il a été composé des quatre triangles égaux ADE, FED, EFB, DCF. *Troisièmement*, et ensuite il est aisé à

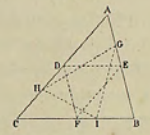
(1) *Voir* Lettre XXII, 5.

entendre que les trois lignes DE, EF, FD marquent les endroits où ces quatre triangles doivent se joindre pour le composer. Donc, si on tire ces trois lignes, il sera réellement et véritablement divisé par elles en quatre triangles égaux.

Voici maintenant la façon dont il argumente, ou du moins dont il veut que j'aie argumenté :

Le triangle ABC peut être divisé en toutes les parties dont on peut imaginer qu'il est composé. Or on peut imaginer qu'il est composé des

Fig. 55.



quatre triangles inégaux AHG, IGH, HCI, IBG. Donc, si on tire les trois lignes DE, EF et FD, elles diviseront ce triangle en quatre autres qui seront inégaux.

Je m'assure que quiconque voudra entendre raison ne dira point que ces deux argumens soient semblables.

5. Mais, de quelque qualité que soient les objections qu'on voudra faire contre mes écrits, vous m'obligerez, s'il vous plaît, de me les envoyer toutes, et je ne manquerai pas d'y répondre, au moins si elles ou leurs auteurs en valent tant soit peu la peine, et s'ils trouvent bon que je les fasse imprimer lorsque j'en aurai ramassé pour remplir un juste volume. Car je n'aurois jamais fait si j'entreprenois de satisfaire en particulier à un chacun.

Je suis, etc.

XXIV.

FERMAT A MERSENNE (1).

< DÉCEMBRE 1637 >

(D. III, 40).

MON RÉVÉREND PÈRE,

1. J'ai vu dans la Lettre de M. Descartes, que vous avez pris la peine de m'envoyer, des réponses succinctes qu'il fait aux objections que j'avois formées contre sa Dioptrique, auxquelles j'eusse plus tôt répondu si mes occupations nécessaires ne m'eussent empêché de le faire, de quoi M. de Carcavi sera mon garant. Je vous proteste d'abord que ce n'est point par envie ni par émulation que je continue cette petite dispute, mais seulement pour découvrir la vérité; de quoi j'estime que M. Descartes ne me saura pas mauvais gré, d'autant plus que je connois son mérite très éminent, et que je vous en fais ici une déclaration très expresse. J'ajouterai, auparavant que d'entrer en matière, que je ne désire pas que mon écrit soit exposé à un plus grand jour

(1) Le texte de cette Lettre a été revisé sur la copie faite à Vienne par Despeyrous d'après les originaux de Clerselier (Bibl. Nat. MS. français nouv. acq. 3280, fol. 29 à 34). Elle répond à la Lettre XXIII qui précède.

Sa date est fixée au 25 janvier 1638 par l'annotateur de l'exemplaire des *Lettres de Descartes* de la Bibliothèque de l'Institut (*Œuvres de D.*, éd. Cousin, VI, p. 381), et de fait Mersenne ne l'adressa à Descartes que le 12 février 1638. Mais il la lui avait annoncée dès la fin de décembre 1637, en même temps qu'il lui envoyait des écrits mathématiques de Fermat (*voir* ci-après Lettre XXV, 2e note). C'est, en effet, à la présente Pièce XXIV que se rapporte le passage suivant d'une Lettre de Descartes à Mersenne (éd. Clerselier, III, p. 429) à dater de janvier 1638 :

« Je n'ai pas tant de desir de voir la démonstration de M. de Fermat contre ce que j'ai écrit de la réfraction, que je vous veuille prier de me l'envoyer par la poste, mais, lorsqu'il se présentera commodité de me l'adresser par mer, avec quelques balles de marchandise, je ne serai pas marri de la voir, avec la Géostatique et le Livre de la Lumière de M. de la Chambre et tout ce qui sera de pareille étoffe; non que je ne fusse bien aise de voir promptement ce qu'écrivent les autres pour ou contre mes opinions ou de leur invention, mais les ports de lettres sont excessifs. »

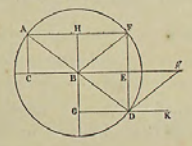
que celui que peut souffrir un entretien familier, de quoi je me confie à vous.

2. Je tranche en quatre mots notre dispute sur la réflexion, laquelle pourtant je pourrois faire durer davantage, et prouver que l'auteur a accommodé son *medium* à sa conclusion, de la vérité de laquelle il étoit auparavant certain; car, quand je lui nierois que sa division des déterminations au mouvement n'est pas celle qu'il faut prendre, puisque nous en avons d'infinies, je le réduirois à la preuve d'une proposition qui lui seroit très malaisée. Mais, puisque nous ne doutons pas que les réflexions ne se fassent à angles égaux, il est superflu de disputer de la preuve, puisque nous connoissons la vérité; et j'estime que je ferai mieux, sans marchander, de venir à la réfraction, qui sert de but à la Dioptrique.

3. Je reconnois, avec M. Descartes, que la force ou puissance mouvante est différente de la détermination, et, par conséquent, que la détermination peut changer sans que la force change, et au contraire.

L'exemple du premier cas se voit en la figure de la 15e page de la Dioptrique, où la balle poussée du point A au point B (*fig.* 53) se détourne au point F, de sorte que la détermination à se mouvoir dans la ligne AB change, sans que la force qui continue son mouvement soit diminuée ou changée.

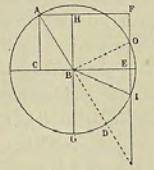
Fig. 53.



Nous pouvons nous servir de la figure de la page 17 pour le second cas (*fig.* 56). Car, si nous imaginons que la balle soit poussée du point H jusques au point B, puis qu'elle tombe perpendiculairement

sur la toile CBE, il est évident qu'elle la traversera dans la ligne BG, et ainsi sa force mouvante s'affoiblira, et son mouvement sera retardé sans que la détermination change, puisqu'elle continue son mouvement dans la même ligne HBG.

Fig. 56.



4. Je reviens maintenant à la démonstration de la réfraction sur la même figure de la page 17.

« *Considérons* (1) », dit l'auteur, « *que des deux parties, dont on peut imaginer que cette détermination est composée, il n'y a que celle qui faisoit tendre la balle de haut en bas qui puisse être changée en quelque façon par la rencontre de la toile, et que, pour celle qui la faisoit tendre vers la main droite, elle doit toujours demeurer la même qu'elle a été, à cause que cette toile ne lui est aucunement opposée en ce sens-là.* »

5. Je remarque d'abord que l'auteur ne s'est pas souvenu de la différence qu'il avoit établie entre la détermination et la force mouvante ou la vitesse du mouvement. Car il est bien vrai que la toile CBE affoiblit le mouvement de la balle, mais elle n'empêche pas qu'elle ne continue sa détermination de haut en bas, et, quoique ce soit plus lentement qu'auparavant, on ne peut pas dire que, parce que le mouvement de la balle est affoibli, la détermination qui la fait aller de haut en bas soit changée. Au contraire, sa détermination à se mouvoir dans la ligne BI est aussi bien composée, au sens de l'auteur, de celle qui la fait aller de haut en bas et de celle qui la fait aller de la gauche à la

(1) Texte de la Dioptrique : *Et considérons aussi que etc.*

droite, comme la première détermination à se mouvoir dans la ligne AB.

6. Mais donnons que la détermination vers BG, ou de haut en bas, pour parler comme l'auteur, soit changée; nous en pouvons conclure que la détermination vers BE, ou de gauche à droite, est aussi changée. Car, si la détermination vers BG est changée, c'est pource qu'à comparaison du premier mouvement, la balle qui maintenant se détourne et prend le chemin de BI, avance moins à proportion vers BG que vers BE qu'elle ne faisoit auparavant; or, par ce que nous supposons qu'elle avance à proportion moins vers BG que vers BE qu'elle ne faisoit auparavant, nous pouvons aussi dire qu'elle avance à proportion davantage vers BE que vers BG qu'elle faisoit auparavant; si le premier nous fait comprendre que la détermination vers BG est changée, le second nous peut bien faire concevoir que la détermination vers BE est aussi changée, puisque le changement est aussi bien causé par l'augmentation que par la diminution.

7. Mais donnons encore que la détermination de haut en bas soit changée, et non pas celle de gauche à droite, et examinons la conclusion de l'auteur, duquel voici les mots :

« *Puisque la balle ne perd rien* (1) *du tout de la détermination qu'elle avoit à s'avancer vers le côté droit, en deux fois autant de temps qu'elle en a mis à passer depuis la ligne* AC *jusques à* HB, *elle doit faire deux fois autant de chemin vers ce même côté.* »

8. Voyez comme il retombe dans sa première faute, ne distinguant pas la détermination de la force du mouvement; et pour mieux vous le faire entendre, appliquons son raisonnement à un autre cas.

Supposons, en la même figure, que la balle soit poussée du point H au point B. Il est certain qu'elle continuera son mouvement dans la ligne BG et que sa détermination ne change point; mais aussi son mouvement est plus lent dans la ligne BG qu'il n'étoit auparavant, et

(1) Texte de la Dioptrique, page 17 : *Et puisqu'elle ne perd rien etc.*

néanmoins, si le raisonnement de l'auteur étoit vrai, nous pourrions dire :

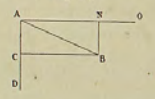
Puisque la balle ne perd rien du tout de la détermination qu'elle avoit à s'avancer vers HBG (car c'est toute la même), donc, en autant de temps qu'auparavant, elle fera autant de chemin.

Vous voyez que cette conclusion est absurde, et que, pour rendre l'argument bon, il faudroit que la balle ne perdit rien de sa détermination ni de sa force, et partant, voilà un paralogisme très manifeste.

9. Mais, pour détruire pleinement la proposition, il faut examiner deux sortes de mouvements composés qui se font sur deux lignes droites.

Considérons, par exemple (*fig.* 57), les deux lignes DA et AO, qui comprennent l'angle DAO de quelque grandeur que vous voudrez, et

Fig. 57.



imaginons un grave au point A, qui descende dans la ligne ACD en même temps que la ligne s'avance vers AN, à telle condition qu'elle fasse toujours un même angle avec AO, et que le point A de la même ligne ACD soit toujours dans la ligne AN. Si les deux mouvements, de la ligne ACD vers AO et du même grave dans la ligne ACD, sont uniformes comme nous les pouvons supposer, il est certain que ce mouvement composé conduira toujours le grave dans une ligne droite, comme AB, dans laquelle si vous prenez un point, comme B, duquel vous tiriez les lignes BN et BC parallèles aux lignes DA et AO, lorsque le grave sera au point B, en un temps égal, s'il n'y eût eu que le mouvement sur ACD, il eût été au point C, et s'il n'y eût eu que l'autre mouvement tout seul, il eût été au point N; et la proportion de la force qui le conduit sur AD à la force qui le conduit vers AO sera comme AC à AN, c'est-à-dire comme BN à BC.

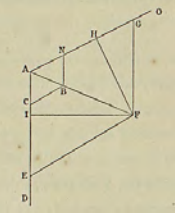
C'est de cette sorte de mouvements composés que se servent Archimède et les autres anciens en la composition de leurs hélices, desquelles la principale propriété est que les deux forces mouvantes ne s'empêchent point mutuellement, ains demeurent toujours les mêmes. Mais, pource que ce mouvement composé ne vient pas si bien dans l'usage, il le faut considérer d'une autre façon et en faire une spéculation particulière.

10. Supposons en la même figure un grave au point A, lequel en même temps est poussé par deux forces, dont l'une le pousse vers AO et l'autre vers AD, si bien que la ligne de direction du premier mouvement est AO, et celle du second est AD. S'il n'y avait que la première force toute seule, le grave se trouveroit toujours sur AO, et sur AD s'il n'y avoit que la seconde; mais, puisque ces deux forces s'empêchent et se résistent mutuellement, supposons (et il faut se souvenir que nous supposons aussi tous ces mouvements uniformes, car autrement le mouvement composé ne se feroit pas sur des lignes droites) que dans une minute d'heure, par exemple, la seconde force fait que le grave s'éloigne de sa direction AO selon la longueur NB, qu'il faut décrire parallèle à AD; car le grave qui est emporté sur AD par la seconde force, se trouvant empêché par la première, se portera toujours et s'avancera d'A vers D par des parallèles à AD. Supposons aussi que, dans la même minute d'heure, la première force fait que le grave s'éloigne de sa direction AD selon la longueur CB parallèle, par la précédente raison, à la ligne AO. Il est tout certain que dans une minute d'heure le grave se trouvera au point B, qui est le concours des deux lignes BN et BC. Le mouvement composé se fera donc sur la ligne AB, et nous pourrons dire que le grave parcourra la ligne AB dans une minute.

11. Supposons maintenant (*fig.* 58) que l'angle DAO soit changé et soit, par exemple, plus grand. En la figure suivante, les mêmes choses étant posées comme auparavant, je dis que, dans une minute d'heure, le grave s'éloignera de sa direction AO selon la ligne BN égale à celle que nous avons appelée de même en la précédente figure. Car, puisque

les forces sont les mêmes, la seconde diminuera également la détermination de la première, et fera, en temps égal, éloigner le grave de sa direction autant comme auparavant, pource que c'est toujours la même résistance. Nous conclurons la même chose de la ligne BC.

Fig. 58.



Le mouvement composé se fera donc ici sur la ligne AB, et la ligne AB sera parcourue comme devant en une minute d'heure; mais, pource que, dans les deux triangles ANB de la première et seconde figure, les côtés AN et NB de la première figure sont égaux à ceux de la seconde, et que les angles ANB qu'ils comprennent sont inégaux, il s'ensuit que les bases AB seront inégales (et par conséquent le mouvement composé sera moins vite en la seconde qu'en la première), et qu'il y aura telle proportion de la vitesse du mouvement composé en la première figure à la vitesse du mouvement composé en la seconde, que de la longueur de la ligne AB en la première à la longueur de la ligne AB en la seconde.

12. Je prends maintenant un point à discrétion dans la ligne AB, comme F, duquel je tire les lignes FE, FG parallèles à AO et à AD.

FE est à CB comme FA à AB, c'est-à-dire FG à BN,

comme la construction nous marque : donc

FE est à FG comme CB à BN.

Or, en la précédente figure, les lignes BN et BC sont égales, chacune à la sienne, aux lignes BN et BC de cette seconde figure, et nous pouvons, par un même raisonnement, prendre un point à discrétion dans la ligne AB de la première figure, pour en tirer une pareille conclusion à la précédente. Donc, quelque point que vous preniez dans la ligne AB, soit de la première, soit de la seconde figure, les parallèles seront entre elles comme CB à BN, c'est-à-dire toujours en même proportion.

Du point F tirons les perpendiculaires FH, FI sur les lignes AO et AD. Au parallélogramme GAEF, les angles AGF, AEF seront égaux comme étant opposés : donc les triangles GFH et EFI sont équiangles, et par conséquence,

comme EF est à FG, ainsi FI est à FH.

Or

FI est à FH comme le sinus de l'angle DAF est au sinus de l'angle OAF,

et par conséquent, faisant, si vous voulez, une même construction en la première figure, vous conclurez, pour éviter prolixité, que le sinus de l'angle DAB est au sinus de l'angle OAB en la première figure, comme le sinus de l'angle DAF au sinus de l'angle OAF en la seconde figure (1).

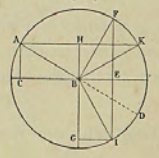
13. Cela ainsi supposé et démontré, considérons la figure de la page 20 de la Dioptrique (*fig.* 59), en laquelle l'auteur suppose que la balle, ayant été premièrement poussée d'A vers B, est poussée de rechef, étant au point B, par la raquette CBE, qui sans doute, au sens de l'auteur, pousse vers BG; de sorte que de ces deux mouvements, dont l'un pousse vers BD et l'autre vers BG, il s'en fait un troisième qui conduit la balle dans la ligne BI.

14. Imaginons ensuite une seconde figure pareille à celle-là, en

(1) On voit que désormais Fermat reconnaît pleinement, pour la composition des forces concourantes, le principe du parallélogramme qu'il avait mis en doute dans sa discussion avec Roberval sur la Géostatique (*voir* notamment Pièce XVI).

laquelle la force de la balle et celle de la raquette soient les mêmes, et que l'angle DBG soit seulement plus grand en cette seconde figure. Il est certain, par les démonstrations que nous venons de faire, qu'il y aura telle proportion du sinus de l'angle GBI au sinus de l'angle IBD, en la figure de l'auteur, que du sinus de l'angle GBI au sinus de l'angle IBD, en cette seconde figure que nous imaginons être décrite

Fig. 59.



et que nous omettons pour éviter la longueur, là où, si les propositions de l'auteur étoient vraies, il y auroit telle proportion du sinus de l'angle GBD au sinus de l'angle GBI, en la figure de l'auteur, que du sinus de l'angle GBD au sinus de l'angle GBI, en cette seconde figure que nous avons imaginée. Or, puisque cette proportion est différente de l'autre, il s'ensuit qu'elle ne peut pas subsister (1).

15. D'ailleurs la principale raison de la démonstration de l'auteur est fondée sur ce qu'il croit que le mouvement composé sur BI est toujours également vite, quoique l'angle GBD, compris sous les lignes de direction des deux forces mouvantes, vienne à changer : ce qui est faux, comme nous avons déjà pleinement démontré.

16. Ce n'est pas que je veuille assurer qu'en l'application qu'il fait

(1) Ainsi Fermat conclut que, si l'on doit, avec Descartes, considérer le mouvement suivant le rayon réfracté comme résultant du mouvement suivant le rayon incident et d'une action suivant la normale, la proportionalité doit exister non pas entre les sinus des angles d'incidence et de réfraction, $\sin i$ et $\sin r$, mais entre $\sin(i-r)$ et $\sin r$. A cet effet, il suppose implicitement l'action normale indépendante de l'incidence. L'hypothèse de Descartes est au contraire que la composante parallèle à la surface d'incidence garde la même valeur avant et après la réfraction. Il est clair qu'*a priori* on ne peut décider entre ces deux suppositions.

de la figure de la page 20 à la réfraction, il faille garder ma proportion et non pas la sienne; car je ne suis pas assuré si ce mouvement composé doit servir de règle à la réfraction, sur laquelle je vous dirai une autre fois plus au long mes sentiments.

17. J'attendrai la réponse (1) à cette Lettre, puisque vous me la faites espérer, et serai toujours, mon Révérend Père, votre très humble serviteur.

L'excuse que vous avez vue au commencement de ma lettre me servira encore sur ce que je ne vous ai point écrit de ma main.

(1) Descartes, n'ayant reçu la Lettre XXIV qu'au moment où il avait à défendre contre Roberval sa propre critique de la méthode des tangentes de Fermat (*voir* ci-après Lettre XXV, 1re note), ajouta le même jour (22 février 1638) à son courrier pour Mersenne une Lettre spéciale sur la Dioptrique, adressée à Mydorge (éd. Clerselier, III, 42). Mais cette réplique, qu'on trouvera dans le *Supplément* à la présente édition, ne fut communiquée à Fermat que vers le mois de juin 1638, alors que s'arrangeait le différend sur la méthode des tangentes. Descartes ne se montrant pas disposé à satisfaire davantage Fermat sur la question de la réfraction, la discussion en fut également suspendue pour n'être reprise que vingt ans après, entre Fermat et Clerselier. La présente Lettre XXIV fit alors l'objet d'une réfutation spéciale (*ci-après* Pièce XCIV) composée par Rohault.