DE SOLUTIONE

PROBLEMATUM GEOMETRICORUM

PER CURVAS SIMPLICISSIMAS

ET UNICUIQUE PROBLEMATUM GENERI PROPRIE CONVENIENTES,

DISSERTATIO TRIPARTITA.

PARS I.

Ut constet Cartesium in Geometricis etiam hominem esse, quod paradoxum merito forsan quis dixerit, videant subtiliores Cartesiani an mendum contineat linearum curvarum in certas classes aut gradus Cartesiana distributio, et an probabilior et commodior secundum veras Analyseos Geometricæ leges debeat assignari. Quod sine dispendio famæ tanti et tam celebris viri exsecuturos nos censemus, quum Cartesii et Cartesianorum omnium intersit veritatem, cujus fautores se non immerito jactant acerrimos, licet ipsorum placitis aliquantisper adversetur, omnibus aut (si generale hoc nimis) Geometris saltem et Analystis fieri manifestam.

Problematum geometricorum in certas classes distributio, non solum veteribus, sed et recentioribus necessaria visa est Analystis. Proponatur videlicet

A + D æquari B,

aut

A quadratum + B in A æquari Z plano.

Hæ duæ æquationes quarum prior radicem aut latus ignotum suis ter-

minis non excedit, posterior autem lateris ignoti secundam potestatem sive quadratum continet, primum et simplicius problematum genus constituunt. Ea vero sunt problemata quæ plana Geometris dici consueverunt.

Secundum problematum genus illud est in quo quantitas ignota ad tertiam vel ad quartam potestatem, hoc est ad cubum vel ad quadratoquadratum, pertingit. Ratio autem cur duæ potestates proximæ, licet diversi gradus sint, unum tamen tantum constituant problematum genus, hæc est, quod æquationes quadraticæ reducuntur ad simplices aut laterales facili, quæ et veteribus et novis cognita est, methodo, ideoque per regulam et circinum nullo negotio resolvuntur. Æquationes autem quarti gradus sive quadratoquadraticæ reducuntur ad æquationes tertii gradus sive cubicas beneficio novæ, quam Vieta et Cartesius prodiderunt, methodi. Huic enim operi Vieta subtilem illam et sibi peculiarem climacticam paraplerosin destinavit, ut apud eum videre est cap. 6 libelli *De emendatione æquationum*, nec absimili in pari casu usus est artificio Cartesius (1), licet aliis verbis illud enunciet.

Similiter quoque cubocubicam æquationem ad quadratocubicam sive æquationem sexti gradus ad æquationem quinti deprimet, licet aliquanto difficilius, Vietæus aut Cartesianus Analysta (2). Ex eo autem quod in prædictis casibus, in quibus una tantum ignota quantitas invenitur, æquationes graduum parium ad æquationes graduum imparium proxime minorum deprimuntur, idem omnino contingere in æquationibus in quibus duæ ignotæ quantitates reperiuntur confidenter pronunciavit Cartesius paginâ 323 Geometriæ linguâ gallicâ ab ipso conscriptæ (3).

(1) Viète, édition Schooten, pages 140 et suivantes. — Descartes (*Géométrie*), édition de 1637, pages 383 et suivantes; édition de 1886 (Paris, Hermann), pages 65 et suivantes.

(2) Cette assertion est singulière : Fermat a-t-il cru, d'après le passage de Descartes rapporté dans la note qui suit, que son rival possédait le secret d'une pareille réduction?

(3) Descartes (*Géométrie*, édition de 1637, p. 323) : « Au reste, je mets les lignes courbes qui font monter cette équation jusqu'au quarré de quarré, au même genre que

Hujusmodi vero sunt æquationes omnes linearum curvarum constitutivæ : in his enim non solum prædicta reductio vel depressio non succedet, ut Cartesius affirmabat, sed eam omnino impossibilem Analystæ experientur. Proponatur, verbi gratia, æquatio paraboles quadratoquadraticæ constitutiva, in qua

A quadratoquadratum æquatur Z solido in E;

qua ratione æquatio hæc quarti gradus deprimetur ad tertium? quo utentur remedio climacticæ parapleroseos artifices?

Quantitatibus autem ignotis characteres vocalium juxta Vietam assignamus : hæc enim levia et prorsus arbitraria cur immutarit Cartesius (1), non video.

Ut autem pateat disquisitionem hanc aut animadversionem non esse otiosam et inutilem, suppetit methodus universalis qua problemata quæcumque ad certum curvarum gradum reducimus.

Proponatur namque problema in quo quantitas ignota ad tertiam vel ad quartam potestatem ascendat, illud per sectiones conicas quæ sunt secundi gradus expediemus; sed si æquatio ad quintam vel ad sextam potestatem ascendat, tunc solutionem per curvas tertii gradus possumus exhibere; si æquatio ad septimam vel ad octavam potestatem ascendat, solutionem per curvas quarti gradus exhibebimus, et sic uniformi in infinitum methodo. Unde evidens fit non hic de nomine tantum, sed de re agitari quæstionem.

Proponatur in exemplum

$$A\,cub.\,cub. + B\,pl.\,sol.\ \text{in A} \quad \text{æquari} \quad Z\,sol.\,sol.,$$

aut, si velis,

$$A\,qu.\,cub. + B\,pl.\,pl.\ \text{in A} \quad \text{æquari} \quad Z\,pl.\,sol.;$$

celles qui ne la font monter que jusqu'au cube; et celles dont l'équation monte au quarré de cube, au même genre que celles dont elle ne monte qu'au sursolide, et ainsi des autres; dont la raison est qu'il y a règle générale pour réduire au cube toutes les difficultés qui vont au quarré de quarré, et au sursolide toutes celles qui vont au quarré de cube; de façon qu'on ne doit pas les estimer plus composées. » (Page 20 de l'édition de 1886.)

(1) On sait que Descartes fut le premier à désigner les inconnues par les dernières lettres de l'alphabet; c'est également à lui que remonte l'emploi, en Algèbre, dans les Ouvrages imprimés, des minuscules italiques.

in utroque hoc casu problema solvemus per curvas tertii gradus seu cubicas, quod et fecit Cartesius (1). Sed si proponatur

$$A\,qu.\,cub.\,cub. + B\,pl.\,pl.\,sol.\ \text{in A} \quad \text{æquari} \quad Z\,pl.\,sol.,\,sol.,$$

aut

$$A\,qu.\,qu.\,cub. + B\,sol.\,sol.\ \text{in A} \quad \text{æquari} \quad Z\,pl.\,pl.\,sol.,$$

tunc problema solvemus per curvas quarti gradus seu quadratoquadraticas, quod nec fecit nec fieri posse existimavit Cartesius (2), quum in hoc casu ad curvas quinti vel sexti gradus necessario recurrendum crediderit. Puriorem certe Geometriam offendit qui ad solutionem cujusvis problematis curvas compositas nimis et graduum elatiorum assumit, omissis propriis et simplicioribus, quum jam sæpe et a Pappo (3) et a recentioribus determinatum sit non leve in Geometria peccatum esse quando problema ex improprio solvitur genere. Quod ne accidat, corrigendus est Cartesius et singula problemata suis, hoc est propriis et naturalibus, sedibus restituenda.

Sed et pag. 322 (4) idem Cartesius diserte asserit curvas ex intersectione regulæ et alterius aut rectæ aut curvæ oriundas esse semper ela-

(1) *Géométrie de Descartes*, édition de 1637, pages 403 et suivantes; édition de 1886, pages 80 et suivantes.

(2) *Géométrie de Descartes*, édition de 1637, page 389 : « Si la quantité inconnue a trois ou quatre dimensions, le problème pour lequel on la cherche est solide, et si elle en a cinq ou six, il est d'un degré plus composé, et ainsi des autres. » (Page 71 de l'édition de 1886.)

Le reproche spécial adressé ici à Descartes par Fermat n'est certainement pas fondé : Descartes a bien eu le tort de considérer comme d'un seul GENRE n les courbes de degré $2n-1$ et $2n$; mais, pour résoudre un problème de degré $2n-1$ ou $2n$, il ne demandait que des courbes de *degré n*. *Voir* page 308 de l'édition de la *Géométrie* de 1637, page 10 de l'édition de 1886. Fermat a été induit en erreur en croyant retrouver partout dans le langage de Descartes les conséquences de l'idée erronée qu'il se proposait de relever.

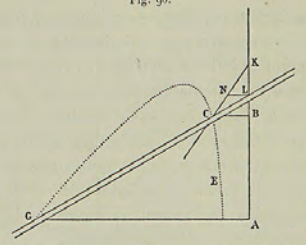
(3) PAPPUS, Livre IV, 59; édition Hultsch, page 270, lignes 27 et suivantes.

(4) Édition de 1886, page 20 : « Mais si au lieu d'une de ces lignes courbes du premier genre, c'en est une du second qui termine le plan CNKL, on en décrira par son moyen une du troisième, ou si c'en est une du troisième, on en décrira une du quatrième, et ainsi à l'infini. »

Descartes suppose que le plan CNKL se meut parallèlement à lui-même, le point L parcourant la droite fixe AB. La courbe décrite est le lieu de l'intersection de la droite GL, déterminée par le point fixe G et le point mobile L, avec une courbe CK donnée sur le plan mobile. Si l'on suppose que les x soient parallèles à AB, les y à AG, que l'équation de la courbe donnée, en prenant L pour origine des axes, soit $F(x, y) = 0$; si enfin l'on

tioris gradus aut generis, quam est recta aut curva in figura pag. 321 (*fig.* 90), ex qua derivantur. Intelligatur, si placet, in locum ipsius rectæ CNK, in dicta figura pag. 321, substitui parabolen cubicam cujus vertex sit punctum K et axis indefinitus KLBA, et cætera construantur

Fig. 90.



ad mentem Cartesii. Patet æquationem dictæ parabolæ cubicæ constitutivam esse sequentem

A cub. ex una parte, et *B quad.* in *E* ex altera.

Experiere autem statim curvam EC ex hujusmodi positione provenientem ad æquationem tantum quadratoquadraticam ascendere : ergo curva quadratoquadratica est elatioris gradus aut generis quam curva cubica, secundum prædictam Cartesii definitionem, quum tamen contrarium pag. 323 (1) expresse idem Cartesius definierit, curvam nempe

pose AG $= a$, il est aisé de voir que l'équation de la courbe décrite sera, en prenant A pour origine,

$$F\left(\frac{xy}{a-y}, y\right) = 0.$$

Or, l'assertion de Descartes revient à dire que, si l'équation de la courbe donnée est du degré $2n-1$ ou $2n$, l'équation de la décrite sera du degré $2n+1$ ou $2n+2$. Il est singulier que, au lieu de relever ce *lapsus* évident, Fermat se soit au contraire attaché à montrer que, dans tel cas particulier, le degré de la courbe décrite pouvait être encore moins élevé que celui indiqué par Descartes.

(1) *Voir* la note 3 de la page 119.

quadratoquadraticam et curvam cubicam esse unius et ejusdem gradus aut generis.

Methodum autem nostram qua omnia in infinitum problemata, ea nempe quorum æquationes tertiam et quartam potestatem continent, ad secundum curvarum gradum : quæ quintam et sextam potestatem, ad tertium : quæ septimam et octavam, ad quartum reducimus, et eo in infinitum ordine, exhibere non differemus quotiescumque id voluerint quibus piaculum videtur errores quoscumque vel etiam Cartesianos in præjudicium veritatis dissimulare.

Nec moveat problemata quæ ad secundam potestatem ascendunt et quæ ejusdem cum problematis primi gradus sint speciei et plana dicuntur, circulis, hoc est curvis secundi gradus, indigere; suum enim et proprium huic objectioni responsum non deerit, quum methodum nostram generalem omnia omnino problemata per curvas convenientes absolventem proferemus.

DISSERTATIONIS

PARS II.

Ut datæ publice fidei satisfiat, methodum generalem ad solvenda quæcumque problemata per curvas proprias et convenientes exhibemus. Prædictum est jam in prima Dissertationis parte problemata duorum graduum inter se proximorum, tertii verbi gratia et quarti, quinti et sexti, septimi et octavi, noni et decimi, etc., unicum tantum curvarum gradum respicere : problemata nempe quæ ad tertiam vel quartam potestatem ascendunt, solvi per curvas secundi gradus; ea vero quæ ad quintam vel ad sextam potestatem ascendunt, solvi per curvas tertii gradus; etc. in infinitum.

Modus autem operandi talis est : Data quævis æquatio, in qua unica tantum reperitur ignota quantitas, reducatur primo ad gradum elatiorem sive parem; deinde ab adfectione sub latere omnino liberetur. Quo peracto remanebit æquatio inter quantitatem cognitam vel homogeneum datum ex una parte, et aliquod homogeneum incognitum,

cujus singula membra a quadrato lateris incogniti adficientur, ex altera. Homogeneum istud incognitum æquetur quadrato cujus latus effingendum eo artificio ut, in æquatione ipsius quadrati cum homogeneo incognito, elatiores quantum fieri poterit lateris ignoti gradus evanescant. Cavendum etiam ut singula lateris quadratici sic effingendi homogenea a radice vel latere ignoto adficiantur, et ultimum tandem ex illis a secunda etiam radice incognita adficiatur. Orientur tandem beneficio divisionis simplicis ex una parte, et extractionis lateris quadrati ex altera, duæ æquationes linearum curvarum problemati dato convenientium constitutivæ, et earum intersectio solutionem problematis exhibebit, eâ qua dudum usi sumus in solutione problematum per locos methodo.

Exemplum proponatur, si placet,

$$A\,cub.\,cub. + B\text{ in }A\,qu.\,cub. + Z\,pl.\text{ in }A\,qu.\,qu.$$
$$+ D\,sol.\text{ in }A\,cub. + M\,pl.\,pl.\text{ in }A\,qu. \quad \text{æquari} \quad N\,sol.\,sol. :$$

problemata quippe omnia quæ ad quintam vel ad sextam potestatem ascendunt ad hanc formam reduci possunt. Nihil enim hoc aliud est quam vel quintam potestatem ad sextam evehere vel eam deinde ab ultima adfectione sub A vel latere liberare, quæ omnia et Vieta (1) et Cartesius (2) abunde docuerunt.

Effingatur itaque quadratum a latere

$$A\,cub. + B\text{ in }A\text{ in }E$$

et æquetur priori primum illius æquationis parti. Fiet itaque

$$A\,cub.\,cub. + B\text{ in }A\,qu.\,qu.\text{ in }E\text{ bis} + B\,qu.\text{ in }A\,qu.\text{ in }E\,qu.$$
$$\text{æquale} \quad A\,cub.\,cub. + B\text{ in }A\,qu.\,cub. + Z\,pl.\text{ in }A\,qu.\,qu.$$
$$+ D\,sol.\text{ in }A\,cub. + M\,pl.\,pl.\text{ in }A\,qu.$$

et, deleto utrimque $A\,cub.\,cub.$ et reliquis per $A\,qu.$ divisis, quod ex

(1) Viète, *De emendatione æquationum*, cap. I (éd. Schooten, p. 132).
(2) Descartes, *Géométrie*, page 383 de l'édition de 1637, page 65 de l'édition de 1886.

cautione adjecta methodo semper liberum est, remanebit æquatio inter

$$B\text{ in }A\,cub. + Z\,pl.\text{ in }A\,qu. + D\,sol.\text{ in }A + M\,pl.\,pl. \quad \text{ex una parte,}$$

et

$$B\text{ in }A\,qu.\text{ in }E\text{ bis} + B\,qu.\text{ in }E\,qu. \quad \text{ex altera.}$$

Hæc autem æquatio, ut patet, dat curvam tertii gradus.

Quia autem, ut constituatur duplicata æqualitas et commode ad solutionem problematis deveniatur, æquandum etiam est quadratum a latere $A\,cub. + B\text{ in }A\text{ in }E$ posteriori prioris æquationis parti, hoc est $N\,sol.\,sol.$, ergo, per extractionem lateris quadrati, latus quadraticum $N\,sol.\,sol.$, quod facile datur et dicatur, si placet, $N\,sol.$, æquabitur

$$A\,cub. + B\text{ in }A\text{ in }E,$$

quod est latus quadrati priori æquationis primum datæ parti æqualis. Habemus igitur hanc secundam æquationem

$$\text{inter } N\,sol. \quad \text{et} \quad A\,cub. + B\text{ in }A\text{ in }E,$$

quæ dabit pariter curvam tertii gradus. Quis deinde non videt intersectionem duarum curvarum jam inventarum dare valorem ipsius A, hoc est problematis propositi solutionem?

Si problema ad septimam vel ad octavam potestatem ascendat, statuetur primo sub forma octavæ potestatis, deinde ab adfectione sub latere omnino liberabitur. Hoc peracto, esto itaque, post legitimam ex jam præscripta methodo reductionem,

$$A\,qu.\,cub.\,cub. + B\text{ in }A\,qu.\,qu.\,cub. + D\,pl.\text{ in }A\,cub.\,cub.$$
$$+ N\,sol.\text{ in }A\,qu.\,cub. + M\,pl.\,pl.\text{ in }A\,qu.\,qu.$$
$$+ G\,pl.\,sol.\text{ in }A\,cub. + R\,sol.\,sol.\text{ in }A\,qu. \quad \text{æquale} \quad Z\,pl.\,sol.\,sol.$$

Effingetur quadratum cuilibet istius æquationis parti æquandum a latere

$$A\,qu.\,qu. + B\,\tfrac{1}{2}\text{ in }A\,cub. + D\,pl.\text{ in }A\text{ in }E.$$

Secundum autem hujus lateris quadratici homogeneum eo artificio effinximus ut duæ elatiores lateris vel radicis A potestates in æquatione omnino evanescant, quod perfacile est. Quadratum igitur illius lateris

si æques priori æquationis propositæ parti, deletis communibus et reliquis per A *qu.* divisis, orietur æquatio curvæ quarti gradus constitutiva ex una parte.

Deinde, post extractionem lateris quadrati ex altera æquationis primum propositæ parte, latus Z *pl. sol. sol.*, quod P *pl. pl.* dicere licet, æquabitur

$$A\,qu.\,qu. + B\,\tfrac{1}{2}\text{ in A}\,cub. + D\,pl.\text{ in A in E};$$

hæc vero æquatio dabit etiam aliam quarti gradus curvam, et harum duarum curvarum intersectio dabit valorem A, hoc est problematis propositi solutionem.

Notandum porro in problematis quæ ad nonam aut decimam potestatem ascendunt, ita effingendum latus quadrati ut in eo sint quatuor ad minus homogenea quorum beneficio evanescant tres elatiores lateris ignoti gradus; in problematis autem quæ ad undecimam aut duodecimam potestatem ascendunt, latus effingendi quadrati constare debere quinque ad minus homogeneis, ita formandis ut eorum beneficio quatuor elatiores lateris ignoti gradus evanescant. Perpetua autem et facillima methodo, hanc lateris quadrati effingendi formam per solam et simplicem divisionem vel applicationem, ut verbis geometricis et in re pure geometrica utamur, expediri Analystæ experiendo deprehendent, et characterum + et — variatio nullum methodo præjudicium est allatura.

Quum autem problemata quæ ad secundam potestatem ascendunt per extractionem lateris quadrati reducantur ad primam, ut notum est, per lineas primi gradus, hoc est rectas, expedientur, et vana evadet quam in priore Dissertationis istius parte metueramus objectio, quum extractionem radicis quadraticæ tanquam notam et obviam in quolibet problematum genere ex nostra methodo usurpandam supposuerimus.

Non latebit igitur deinceps accurata et simplicissima problematum geometricorum per locos proprios a curvis variæ, prout expedit, speciei oriundos, resolutio et constructio. Variare autem curvas salvo semper et retento naturali problematis genere, liberum erit Analystis, et semper problemata octavi aut septimi gradus per curvas quarti,

problemata decimi aut noni per curvas quinti, problemata duodecimi et undecimi per curvas sexti et sic uniformi in infinitum methodo expedientur; quum contra per Cartesium problemata octavi aut septimi gradus curvis quinti aut sexti indigeant, problemata decimi aut noni curvis septimi aut octavi, problemata duodecimi aut undecimi curvis noni aut decimi et sic in infinitum. Quod quam longe a simplicitate et veritate geometrica absit, videant ipsi Cartesiani, aut, si ita visum fuerit, contradicant.

Veritatem enim tantum inquirimus et, si in scriptis tanti viri alicubi delitescat, eam libenti statim animo et amplectemur et agnoscemus. Tanta me sane, ut verbis alienis utar, hujus portentosissimi ingenii incessit admiratio, ut pluris faciam Cartesium errantem quam multos κατορθοῦντας.

DISSERTATIONIS

PARS III.

Hæc ad generalem doctrinam fortasse sufficiant : quæ enim problemata Cartesius per gradus curvarum elatiores determinat expedienda, ea nos generali methodo ad curvarum gradum duplo minorem feliciter depressimus. Quod ita tamen intelligi debere pronunciamus, ut id saltem auxilium omnes omnino quæstiones admittant : majus quippe infiniti casus speciales non recusant. Juvat itaque ulterius exspatiari et Analysin Cartesianam non solum ad terminos duplo minores, sed ad quadruplo, sextuplo, decuplo, centuplo, etc. in infinitum aliquando minores deprimere, ut tanto magis error Cartesianus detegatur et proprium statim ab Analysi remedium consequatur : potestates autem per numeros ipsarum exponentes designare in gradibus elatioribus, deinceps commodius erit.

Proponatur invenire sex continue proportionales inter duas datas.

Sint duæ datæ B et D; prima inveniendarum ponatur A : fiet

æquatio inter A^7 et B^6D.

Hæc æquatio secundum Cartesium per curvas quinti tantum aut sexti gradus solvi potest. Nos eam per curvas quarti gradus in secunda hujus Dissertationis parte, sicut reliquas etiam ejusdem naturæ, generaliter resolvimus. Sed nihil vetat quominus eam per curvas tertii gradus resolvamus.

Æquentur quippe singuli æquationis termini homogeneo sequenti A^3E^2D : æquabitur ex una parte A^7 et, divisis omnibus per A^4, manebit æquatio inter E^2D et A^3 quæ dat, ut patet, curvam tertii gradus. Ex altera vero parte A^4E^2D æquabitur B^6D, et, omnibus per D divisis et reliquis subquadratice depressis, manebit æquatio inter A^2E et B^3 quæ dabit etiam curvam tertii gradus. Harum autem duarum curvarum intersectio dabit valorem A, hoc est problematis propositi per curvas tertii gradus solutionem.

Sed proponatur *inter duas datas invenire duodecim medias proportionales continue*,

æquatio erit inter A^{13} et $B^{12}D$;

eam autem Cartesius tantum per curvas undecimi aut duodecimi gradus solvi posse existimavit. Nos generaliter, ut similes quasvis ejusdem gradus, eam in secunda hujus Dissertationis parte per curvas septimi gradus solvi posse docuimus. Sed ulterius inquirenti occurrit statim elegans per curvas quinti gradus solutio, imo et datur per curvas quarti, ut infra videre est.

Æquentur primum singula hujus æquationis membra homogeneo A^8E^4D, ex una parte nempe A^{13}, et ex altera $B^{12}D$. In prima, omnibus per A^8 divisis, fiet æquatio inter A^5 et E^4D quæ dat curvam quinti gradus, ut patet. In secunda, omnibus per D divisis et per quartam potestatem sive quadratoquadratum depressis, remanebit æquatio inter A^2E et B^3, quæ dat curvam tertii gradus. Per duas itaque curvas quarum una est quinti gradus, altera tertii, problema propositum expedimus.

Sed idem etiam problema facilius, hoc est per curvas quarti gradus, construere possumus : æquentur singula æquationis membra A^3E^3D. Fiet illinc, post divisionem per A^9, A^4 æquale E^3D, quæ æquatio dat curvam quarti gradus; istinc vero, omnibus per D divisis et deinde per

tertiam potestatem sive cubum depressis, fiet æquatio inter A^3E et B^4 quæ dabit etiam curvam quarti gradus. Problema itaque per duas quarti gradus curvas facillime construimus.

Qui hæc exempla viderit, non poterit dubitare quin *inventio triginta mediarum continue proportionalium* per curvas septimi, imo et per curvas sexti possit expediri. Æquatio

nempe inter A^{31} et $B^{30}D$

communi termino $A^{21}E^6D$ æquabitur, unde problema per curvas septimi gradus expedietur; aut communi termino $A^{22}E^5D$ æquabitur, unde manabit solutio per curvas sexti gradus.

Sic inventio 72 mediarum solvetur per curvas noni gradus, et patet ex præmissis posse assignari rationem, inter gradum problematis et gradum curvarum illud solventis, omni data ratione majorem. Quod quum viderint Cartesiani, non dubito quin necessitati et admonitionis et emendationis nostræ subscribant.

Advertendum autem immutandam sæpe esse ipsam æquationis formam, ut commodam per partes aliquotas divisionem homogenea ipsa recipiant, quod semel monuisse sufficiet.

Proponatur videlicet *inventio decem mediarum* et sit

æquatio inter A^{11} et $B^{10}D$.

Ducatur quodlibet ex homogeneis in rectam datam, verbi gratia Z, ut sit

æquatio inter $A^{11}Z$ et $B^{10}DZ$;

ita enim ad numerum 12 pervenietur cujus ope facillima per partes aliquotas evadet reductio aut depressio. Æquetur videlicet quodlibet ex homogeneis A^8E^4 : illinc orietur

æquatio inter A^3Z et E^4,

quæ dat curvam quarti gradus; istinc vero, beneficio extractionis lateris quadratoquadratici, inter A^2E et latus quadratoquadraticum homogenei dati $B^{10}DZ$, quod, si placet, sit N solidum, quæ æquatio dat curvam

tertii gradus, atque ita invenientur decem mediæ per duas curvas quarum altera est quarti, altera vero tertii gradus : quod per levem illam prioris æquationis immutationem facillime sumus exsecuti.

Nec moror infinita alia quæ Analystis ars ipsa abunde suppeditabit compendia; hoc tantum adjungo ea omnia quæ superius diximus non solum locum habere, quum potestas ignota nullum aliud sub gradibus inferioribus adfectum continet homogeneum, sed etiam si aliqua ex homogeneis a gradibus potestati proximioribus adficiantur : ut, si

$$A^{12} + NA^{11} + MA^{10} + RA^{9} \text{ æquetur } B^{12}D,$$

solutio hujus quæstionis perinde facilis reddetur, communi adsumpto æquationis homogeneo quo supra usi sumus, nempe A^9E^3D, ac si inveniendæ duodecim mediæ inter duas datas proponerentur. Simili autem in æquationibus ab altioribus gradibus adfectis utemur artificio.

Notandum tamen, in æquationibus in quibus una tantum reperitur ignota quantitas ex una parte, exponentem potestatis illius puræ debere esse numerum primum ut ab eo gradus illius problematis designetur. Si enim exponens ille sit numerus compositus, problema ad gradus numerorum qui eum metiuntur statim devolvetur.

Quærantur, exempli gratia, octo mediæ continue proportionales inter duas datas, fiet

$$\text{æquatio inter } A^9 \text{ et } B^8D,$$

quo casu, quum numerus 9 sit compositus, a numero 3 bis mensuratus, inferetur problema esse tertii gradus : quod quidem ita se habet. Si enim inter duas datas reperiantur duæ mediæ, et rursus inter primam et secundam, secundam et tertiam, tertiam et quartam reperiantur similiter duæ mediæ, fient octo mediæ inter duas primum propositas lineas.

Si quærantur quatuordecim mediæ inter duas datas, æquatio, quæ est inter A^{15} et $B^{14}D$, indicabit problema devolvi ad alia duo problemata, quorum unum est tertii gradus, alterum quinti.

Unde apparet exponentem puræ potestatis debere esse numerum

primum ut vere gradum problematis exprimat et designet. Quum autem *numeros a binario quadratice in se ductos et unitate auctos esse semper numeros primos* (1) apud me constet et jamdudum Analystis illius theorematis veritas fuerit significata, nempe esse primos 3, 5, 17, 257, 65 537, etc. in infinitum, nullo negotio inde derivabitur methodus cujus beneficio *problema* construemus *cujus gradus ad gradum curvarum ipsius solutioni inservientium rationem habeat data quavis majorem.*

Proponatur namque inter duas datas invenire 256 medias continue proportionales : fiet

$$\text{æquatio inter } A^{257} \text{ et } B^{256}D,$$

et singuli termini æquabuntur sequenti $A^{240}E^{16}D$, et mox quæstio per curvas 17^{i} gradus expedietur.

Si quærantur mediæ 65 536, quæstio per curvas 257^{i} gradus solvetur, et sic in infinitum gradus majoris numeri deprimetur ad gradum numeri proxime minoris. Inter duos autem proximos rationem in infinitum augeri quis non videt?

An vero errasse Cartesium ulterius Cartesiani dissimulabunt? ego sane ἐπέχω et quid statuendum hac de re sit sollicitus et tacitus expecto.

(1) C'est la célèbre proposition, que $2^{2^n}+1$ est un nombre premier, dont Euler a reconnu la fausseté pour $n = 5$, c'est-à-dire pour le nombre qui suit immédiatement le dernier donné par Fermat.

I.

METHODUS

AD

DISQUIRENDAM MAXIMAM ET MINIMAM [1].

Omnis de inventione maximæ et minimæ doctrina duabus positionibus in notis innititur et hac unica præceptione :

Statuatur quilibet quæstionis terminus esse A (sive planum, sive solidum aut longitudo, prout proposito satisfieri par est) et, inventâ maximâ aut minimâ in terminis sub A, gradu $<$ aut gradibus $>$, ut libet, involutis, ponatur rursus idem qui prius terminus esse $A + E$, iterumque inveniatur maxima aut minima in terminis sub A et E gradibus, ut libet, coefficientibus. Adæquentur, ut loquitur Diophantus [2], duo homogenea maximæ aut minimæ æqualia et, demptis communibus (quo peracto, homogenea omnia ex parte alterutra ab E vel ipsius gradibus afficiuntur), applicentur omnia ad E vel ad elatiorem ipsius gradum, donec aliquod ex homogeneis, ex parte utravis,

(1) Cet écrit, envoyé, par l'intermédiaire de Mersenne, à Descartes, qui le reçut vers le 10 janvier 1638, devint dès lors, entre Fermat et l'auteur de la *Géométrie*, le principal thème de la polémique déjà ouverte à propos de la *Dioptrique*.

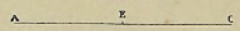
Le second alinéa se retrouve intégralement vers la fin de l'écrit IV suivant. Les additions entre crochets — *aut gradibus* (ligne 3 de l'alinéa); *sub* (page 134, ligne 2) — sont empruntées à cette seconde rédaction et ne doivent pas avoir figuré dans la première. Les seules autres divergences correspondent aux leçons suivantes du texte postérieur : page 134, lignes 1, 2, 3 « *Elisis.. homogeneis..... involutis, reliqua* » — ligne 4 : « *istius ultimæ* ».

(2) Diophante emploie (V, 14 et 17), dans un but spécial et pour désigner une égalité approximative, les termes de παριστής et de πάρισον, que Xylander et Bachet ont traduits par *adæqualitas* et *adæquale*.

affectione sub E omnino liberetur. Elidantur deinde utrimque homogenea sub E aut $<$sub$>$ ipsius gradibus quomodolibet involuta, et reliqua æquentur, aut, si ex una parte nihil superest, æquentur sane, quod eodem recidit, negata affirmatis. Resolutio ultimæ istius æqualitatis dabit valorem A, quâ cognitâ, maxima aut minima ex repetitis prioris resolutionis vestigiis innotescet.

Exemplum subjicimus : *Sit recta* AC (*fig.* 91) *ita dividenda in* E *ut rectangulum* AEC *sit maximum.*

Fig. 91.



Recta AC dicatur B. Ponatur pars altera ipsius B esse A : ergo reliqua erit $B - A$, et rectangulum sub segmentis erit B in $A - Aq.$, quod debet inveniri maximum. Ponatur rursus pars altera ipsius B esse $A + E$: ergo reliqua erit $B - A - E$, et rectangulum sub segmentis erit

$$B \text{ in } A - Aq. + B \text{ in } E - A \text{ in } E \text{ bis} - Eq.,$$

quod debet adæquari superiori rectangulo

$$B \text{ in } A - Aq.$$

Demptis communibus,

$$B \text{ in } E \quad \text{adæquabitur} \quad A \text{ in } E \text{ bis} + Eq.,$$

et, omnibus per E divisis,

$$B \quad \text{adæquabitur} \quad A \text{ bis} + E.$$

Elidatur E,

$$B \quad \text{æquabitur} \quad A \text{ bis}.$$

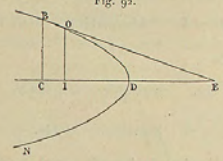
Igitur B bifariam est dividenda ad solutionem propositi; nec potest generalior dari methodus.

DE TANGENTIBUS LINEARUM CURVARUM.

Ad superiorem methodum inventionem tangentium ad data puncta in lineis quibuscumque curvis reducimus.

Sit data, verbi gratia, *parabole* BDN (*fig.* 92), cujus vertex D, diameter DC, et punctum in ea datum B, ad quod ducenda est recta BE tangens parabolen et in puncto E cum diametro concurrens.

Fig. 92.



Ergo, sumendo quodlibet punctum in recta BE, et ab eo ducendo ordinatam OI, a puncto autem B ordinatam BC, major erit proportio

CD ad DI quam quadrati BC ad quadratum OI,

quia punctum O est extra parabolen; sed, propter similitudinem triangulorum,

ut BC quadratum ad OI quadratum, ita CE quadratum ad IE quadratum :

major igitur erit proportio

CD ad DI quam quadrati CE ad quadratum IE.

Quum autem punctum B detur, datur applicata BC, ergo punctum C; datur etiam CD : sit igitur CD æqualis D datæ. Ponatur CE esse A; ponatur CI esse E.

Ergo

$$D \text{ ad } D - E \text{ habebit majorem proportionem}$$
$$\text{quam } Aq. \text{ ad } Aq. + Eq. - A \text{ in } E \text{ bis}.$$

Et, ducendo inter se medias et extremas,

$$D \text{ in } Aq. + D \text{ in } Eq. - D \text{ in } A \text{ in } E \text{ bis} \quad \text{majus erit quam} \quad D \text{ in } Aq. - Aq. \text{ in } E.$$

Adæquentur igitur juxta superiorem methodum : demptis itaque communibus,

$$D \text{ in } Eq. - D \text{ in } A \text{ in } E \text{ bis} \quad \text{adæquabitur} \quad - Aq. \text{ in } E,$$

aut, quod idem est,

$$D \text{ in } Eq. + Aq. \text{ in } E \quad \text{adæquabitur} \quad D \text{ in } A \text{ in } E \text{ bis.}$$

Omnia dividantur per E : ergo

$$D \text{ in } E + Aq. \quad \text{adæquabitur} \quad D \text{ in } A \text{ bis.}$$

Elidatur D in E : ergo

$$Aq. \quad \text{æquabitur} \quad D \text{ in } A \text{ bis,}$$

ideoque

$$A \quad \text{æquabitur} \quad D \text{ bis.}$$

Ergo CE probavimus duplam ipsius CD, quod quidem ita se habet.

Nec unquam fallit methodus; imo ad plerasque quæstiones pulcherrimas potest extendi; ejus enim beneficio centra gravitatis (1) in figuris lineis curvis et rectis comprehensis et in solidis invenimus, et multa alia, de quibus fortasse aliàs, si otium suppetat.

De quadraturis spatiorum sub lineis curvis et rectis contentorum, imo et de proportionibus solidorum ab eis ortorum ad conos ejusdem basis et altitudinis, fuse jam cum Domino de Roberval egimus (2).

II.

CENTRUM GRAVITATIS PARABOLICI CONOIDIS,

EX EADEM METHODO (3).

Esto parabolicus conois CBAV (*fig.* 93), cujus axis IA, basis circulus circa diametrum CIV. Quæritur centrum gravitatis perpetuâ et con-

(1) *Voir* ci-après sous le numéro II.

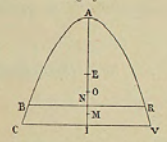
(2) *Voir* les lettres de Fermat à Roberval des 22 septembre, 4 novembre et 16 décembre 1636.

(3) Cet écrit paraît être celui que Fermat adressa, pour Roberval, à Mersenne, avec sa lettre du 20 avril 1638. Mersenne en envoya l'énoncé à Descartes, le 1er mai suivant, sans prendre soin de supprimer les derniers mots, malgré l'allusion directe qu'ils renfermaient.

stanti, qua maximam et minimam et tangentes linearum curvarum investigavimus, methodo, ut novis exemplis et novo usu, eoque illustri, pateat falli eos qui fallere methodum existimant.

Ut posset parari analysis, axis IA dicatur B; ponatur centrum gravitatis esse O, et rectam AO ignotam dici A; secetur axis IA quovis plano, ut BN, et ponatur IN esse E : ergo NA erit $B - E$.

Fig. 93.



Constat in hac figura et similibus (parabolis aut parabolicis) centra gravitatum, in portionibus abscissis per parallelas basi, in eadem proportione dividere axes (quod, in parabole ab Archimede (1) demonstratum, porrigitur non dissimili ratiocinio ad parabolas omnes et parabolicos conoides, ut patet) : ergo centrum gravitatis portionis cujus axis NA, baseos semidiameter BN, ita dividet AN in puncto, verbi gratia, E,

ut ratio NA ad AE sit eadem rationi IA ad AO.

Erit igitur, in notis,

$$\text{ut } B \text{ ad } A, \quad \text{ita } B - E \text{ ad portionem axis AE,}$$

quæ idcirco æquabitur

$$\frac{B \text{ in } A - A \text{ in } E}{B},$$

et ipsa OE, quæ est intervallum inter duo centra gravitatis, æquabitur

$$\frac{A \text{ in } E}{B}.$$

Ponatur portionis reliquæ CBRV centrum gravitatis esse M, quod

(1) Archimède, *De æquiponderantibus*, II, prop. VII.

necessario debet esse inter puncta N et I, intra figuram, per petitionem 9 Archimedis *De æquiponderantibus* (1), quum figura CBRV sit in easdem partes cava. Sed

ut portio CBRV ad portionem BAR, ita est EO ad OM,

quum O sit centrum gravitatis totius figuræ CAV, et puncta E et M sint centra gravitatis partium; portio autem CAV ad portionem BAR est, in nostro conoide Archimedeo (2), ut quadratum IA ad quadratum NA, hoc est, in notis,

ut $Bq.$ ad $Bq. + Eq. - B$ in E bis :

ergo, dividendo,

portio CBRV est ad portionem BAR

ut B in E bis $- Eq.$ ad $Bq. + Eq. - B$ in E bis.

Demonstravimus autem

ut portio CBRV ad portionem BAR, ita esse OE ad OM :

erit igitur in notis

ut B in E bis $- Eq.$ ad $Bq. + Eq. - B$ in E bis, ita OE sive $\frac{A \text{ in } E}{B}$ ad OM,

quæ proinde æquabitur

$$\frac{Bq. \text{ in } A \text{ in } E + A \text{ in } Ec. - B \text{ in } A \text{ in } Eq. \text{ bis}}{Bq. \text{ in } E \text{ bis} - B \text{ in } Eq.}.$$

Quum autem punctum M, ex demonstratis, sit inter puncta N et I, ergo recta OM erit minor rectâ OI; recta autem OI in notis est $B - A$:

(1) « Petit. IX. Cujuscumque figuræ si fuerit ambitus in easdem partes cavus, centrum » gravitatis figuræ intus esse », page 158 de l'édition Archimedis *Opera quæ extant, novis demonstrationibus commentariisque illustrata* per Davidem Rivaltum a Flurantia Cænomanum etc. — Parisiis, apud Claudium Morellum, via Jacobæa, ad insigne Fontis, M. DC. XV.

(2) Archimède, *De conoïdibus et sphæroïdibus*, prop. XXVI.

deducta est igitur quæstio ad methodum et adæquanda

$$B - A \text{ cum } \frac{Bq. \text{ in } A \text{ in } E + A \text{ in } Ec. - B \text{ in } A \text{ in } Eq. \text{ bis}}{Bq. \text{ in } E \text{ bis} - B \text{ in } Eq.}$$

et, omnibus ductis in denominatorem et abs E divisis, adæquabuntur

$$Bc. \text{ bis} - Bq. \text{ in } A \text{ bis} - Bq. \text{ in } E + B \text{ in } A \text{ in } E$$

et

$$Bq. \text{ in } A + A \text{ in } Eq. - B \text{ in } A \text{ in } E \text{ bis}.$$

Quandoquidem nihil est utrimque commune, elidantur homogenea omnia abs E affecta, et æquentur reliqua : fiet

$$Bc. \text{ bis} - Bq. \text{ in } A \text{ bis} \quad \text{æqualis} \quad Bq. \text{ in } A,$$

ideoque

$$A \text{ ter} \quad \text{æquabitur} \quad B \text{ bis}.$$

Erit igitur

IA ad AO ut 3 ad 2

et

AO ad OI ut 2 ad 1.

Quod erat inveniendum (1).

Non dissimili methodo in quibuslibet parabolis in infinitum et parabolicis conoidibus inveniuntur centra gravitatum. Quemadmodum autem, verbi gratia, *in nostro conoide parabolico circa applicatam axi converso* indaganda sint centra gravitatis, non vacat in præsens indicare : sufficit aperuisse me in hoc nostro conoide centrum gravitatis dividere axem in portiones quæ servant proportionem 11 ad 5 (2).

(1) Ces relations étaient connues, d'après Archimède, *De iis quæ vehuntur in aquâ*, Livre II, prop. 2 et suivantes. Elles étaient d'ailleurs démontrées dans la proposition 29 de l'Ouvrage : *Federici Commandini Urbinatis liber de centro gravitatis solidorum. Cum privilegio in annos* X. *Bononiæ ex officina Alexandri Benacii*. M. D. LXV, publié en même temps que la restitution, par Commandin, du Traité précité d'Archimède, où elles sont seulement supposées.

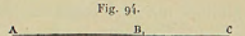
(2) Ce rapport avait déjà été indiqué à Roberval dans la lettre de Fermat du 4 novembre 1636.

III.

AD EAMDEM METHODUM.

Volo meâ methodo *secare lineam* AC (*fig.* 94) *datam ad punctum* B, *ita ut solidum contentum sub quadrato* AB *et linea* BC *sit maximum* omnium solidorum eodem modo descriptorum secando lineam AC in quovis alio puncto.

Fig. 94.



Ponamus in notis algebraicis lineam AC vocari B, et lineam AB incognitam A; BC erit $B - A$: oportet igitur solidum $Aq.$ in $B - Ac.$ satisfacere quæstioni.

Sumamus iterum, loco A, $A + E$: solidum, quod fiet ex quadrato $\overline{A + E}$ et ex $B - E - A$, erit

$$B \text{ in } Aq. + B \text{ in } Eq. + B \text{ in } A \text{ in } E \text{ bis} - Ac. - A \text{ in } Eq. \text{ ter} - Aq. \text{ in } E \text{ ter} - Ec.$$

Id comparo primo solido

$$Aq. \text{ in } B - Ac.,$$

tanquam essent æqualia, licet revera æqualia non sint, et hujusmodi comparationem vocavi adæqualitatem, ut loquitur Diophantus (sic enim interpretari possum græcam vocem παρισότης (1) qua ille utitur). Deinde e duobus solidis demo quod iis est commune, scilicet

$$B \text{ in } Aq. - Ac.;$$

quo peracto, nihil ex una parte superest, et superest ex alia

$$B \text{ in } Eq. + B \text{ in } A \text{ in } E \text{ bis} - A \text{ in } Eq. \text{ ter} - Aq. \text{ in } E \text{ ter} - Ec.$$

Comparanda sunt ergo homogenea notata signo + cum iis quæ notan-

(1) *Voir* la note 2 de la page 133.

tur signo —, et iterare comparationem [adæqualitatem] (1) oportet inter

$$B \text{ in } Eq. + B \text{ in } A \text{ in } E \text{ bis ex una parte,}$$
$$\text{et } A \text{ in } Eq. \text{ ter} + Aq. \text{ in } E \text{ ter} + Ec. \text{ ex altera.}$$

Totum dividamus per E : comparatio [adæqualitas] erit inter

$$B \text{ in } E + B \text{ in } A \text{ bis} \quad \text{et} \quad A \text{ in } E \text{ ter} + Aq. \text{ ter} + Eq.$$

Hac divisione peracta, si omnia homogenea dividi possunt per E, iteranda erit divisio per E, donec reperiatur aliquod ex homogeneis quod hujusmodi divisionem non admittat, id est, ut Vietæis (2) verbis utar, quod non afficiatur ab E. Sed quia, in exemplo proposito, comperimus divisionem iterari non posse, hic standum est.

Deinde utrimque deleo homogenea quæ afficiuntur ab E : superest

$$\text{ex una parte } B \text{ in } A \text{ bis, et ex alia } Aq. \text{ ter,}$$

inter quæ non amplius facere oportet, ut antea, comparationes fictas et adæqualitates, sed veram æquationem. Dividamus totum per A : ergo

$$B \text{ bis erit æqualis } A \text{ ter,}$$

et

$$B \text{ erit ad } A \text{ ut } 3 \text{ ad } 2.$$

Redeamus ad nostram quæstionem et dividamus AC in puncto B ita ut

$$\text{AC sit ad AB ut } 3 \text{ ad } 2 :$$

dico solidum quadrati AB in BC esse maximum omnium quæ describi possunt in eadem linea AC, in qualibet alia sectione.

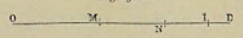
(1) Le texte véritable est douteux : Fermat n'a dû écrire que l'un des deux mots, *comparationem* ou *adæqualitatem*, qu'il employait comme synonymes; l'autre serait une glose du copiste ou du possesseur de l'original. Même remarque pour *comparatio* et *adæqualitas*, quatre lignes plus bas.

(2) En réalité, Fermat étend singulièrement ici le sens donné au mot *affectio* par Viète (*voir* notamment *In Artem Analyticen Isagoge*, cap. III, 9, p. 3 de l'édition de Schooten). Viète en effet entend par là la présence, à la suite de la *potestas* (puissance de l'inconnue, sans coefficient), de termes de degré moins élevé. Ainsi, pour lui, x^n serait une *potestas pura* (si $x \geq 2$); tout polynôme entier en x (ayant l'unité pour coefficient du terme de degré le plus élevé) et s'annulant avec x, une *potestas affecta*.

Ut pateat hujus methodi certitudo, desumam exemplum e libro Apollonii *De determinata sectione*, qui, ut refert Pappus initio septimi libri, difficiles determinationes habebat (1); et eam quæ sequitur difficillimam esse existimo, quam ut inventam supponit Pappus septimo libro, nec enim illam veram esse demonstrat, sed, ut veram supponens, alias inde consequentias deducit. Hoc loco Pappus vocat minimam proportionem μοναχὸν καὶ ἐλάχιστον, *minimam et singularem*, ideo scilicet quia, si proponatur quæstio circa magnitudines datas, duobus semper locis satisfit quæstioni, sed, in minimo aut maximo termino, unicus est qui satisfaciat locus : ideirco Pappus vocat *minimam et singularem*, id est unicam, proportionem omnium quæ proponi possunt minimam. Commandinus hoc loco dubitat quid per μοναχός intelligat Pappus, et veritatem quam modo explicui ignoravit (2). Sed ecce propositionem :

Sit recta data OMID (*fig.* 95), *et in ea quatuor puncta* O, M, I, D *data. Dividenda est portio* MI *in puncto* N *ita ut rectanguli* OND *sit ad rectangulum* MNI *proportio minor quam proportio cujuslibet rectanguli paris* OND *ad quodvis aliud par* MNI.

Fig. 95.



Supponamus in notis lineam OM datam vocari B, lineam DM datam Z, et MI datam G; fingamus nunc MN, quod quærimus, vocari A : ergo rectangulum OND in notis erit

$$B \text{ in } Z - B \text{ in } A + Z \text{ in } A - Aq.,$$

(1) Pappus, éd. Commandin, fol. 159 recto, ligne 14; éd. Hultsch, page 644, ligne 3.

(2) Pappus, éd. Commandin (cf. éd. Hultsch, page 758, ligne 1), prop. 61 :

Fol. 196 recto : « LEMM. XXI. Tribus datis rectis lineis AB BC CD, si fiat ut rectangu- » lum ABD ad rectangulum ACD, ita quadratum ex BE ad quadratum ex EC, singularis » proportio, et minima est rectanguli AED ad rectangulum BEC. »

Fol. 196 verso A : « COMMENTARIUS. *Græcus codex* ὁ μοναχὸς λόγος καὶ ἐλάχιστός ἐστιν » ὁ τοῦ ὑπὸ αιδ πρὸς τὸ ὑπὸ βεγ. *quibus verbis quid significetur, quidque per monachos,* » *et epitagma in his lemmatibus intelliget, satis percipi non potest, cum Apollonii libris* » *careamus, in quos ea conscripta sunt.* »

Les lettres A, B, E, C, D de Commandin correspondent respectivement aux lettres O, M, N, I, D de Fermat.

et rectangulum MNI

$$G \text{ in } A - Aq.$$

Oportet igitur proportionem

$$B \text{ in } Z - B \text{ in } A + Z \text{ in } A - Aq. \quad \text{ad} \quad G \text{ in } A - Aq.$$

esse minimam omnium quæ fieri possunt qualibet alia divisione lineæ MI.

Sumamus iterum, loco A, $A + E$, et habebimus proportionem

$$B \text{ in } Z - B \text{ in } A - B \text{ in } E + Z \text{ in } A + Z \text{ in } E - Aq. - Eq. - A \text{ in } E \text{ bis}$$
$$\text{ad} \quad G \text{ in } A + G \text{ in } E - Aq. - Eq. - A \text{ in } E \text{ bis},$$

quam primæ comparare per adæqualitatem oportebit, id est : multiplicare primum terminum per quartum ex una parte, et secundum per tertium ex alia, et simul hæc duo producta comparare.

Productum

$$B \text{ in } Z - B \text{ in } A + Z \text{ in } A - Aq., \quad \text{qui prior est terminus,}$$

per

$$G \text{ in } A + G \text{ in } E - Aq. - Eq. - A \text{ in } E \text{ bis}, \quad \text{qui est ultimus terminus,}$$

facit

$$\begin{aligned} &B \text{ in } Z \text{ in } G \text{ in } A - G \text{ in } B \text{ in } Aq. + G \text{ in } Z \text{ in } Aq. - G \text{ in } Ac. \\ &+ B \text{ in } Z \text{ in } G \text{ in } E - B \text{ in } A \text{ in } G \text{ in } E + Z \text{ in } A \text{ in } G \text{ in } E - Aq. \text{ in } G \text{ in } E \\ &- B \text{ in } Z \text{ in } Aq. + B \text{ in } Ac. - Z \text{ in } Ac. + Aqq. \\ &- B \text{ in } Z \text{ in } Eq. + B \text{ in } A \text{ in } Eq. - Z \text{ in } A \text{ in } Eq. + Aq. \text{ in } Eq. \\ &- B \text{ in } Z \text{ in } A \text{ in } E \text{ bis} + B \text{ in } Aq. \text{ in } E \text{ bis} - Z \text{ in } Aq. \text{ in } E \text{ bis} + Ac. \text{ in } E \text{ bis}. \end{aligned}$$

Productum autem

$$G \text{ in } A - Aq., \quad \text{secundi termini,}$$

per

$$B \text{ in } Z - B \text{ in } A - B \text{ in } E + Z \text{ in } A + Z \text{ in } E - Aq. - Eq. - A \text{ in } E \text{ bis},$$
$$\text{tertium terminum,}$$

facit

$$B \text{ in } Z \text{ in } G \text{ in } A - G \text{ in } B \text{ in } Aq. - G \text{ in } B \text{ in } A \text{ in } E + G \text{ in } Z \text{ in } Aq.$$
$$+ G \text{ in } Z \text{ in } A \text{ in } E - G \text{ in } Ac. - G \text{ in } A \text{ in } Eq. - G \text{ in } Aq. \text{ in } E \text{ bis}$$
$$- B \text{ in } Z \text{ in } Aq. + B \text{ in } Ac. + B \text{ in } Aq. \text{ in } E - Z \text{ in } Ac.$$
$$- Z \text{ in } Aq. \text{ in } E + Aqq. + Aq. \text{ in } Eq. + Ac. \text{ in } E \text{ bis}.$$

Comparo hæc duo producta per adæqualitatem; demamus quod ipsis commune est, et residum dividamus per E : supererit,

ex una parte, $B \text{ in } Z \text{ in } G - Aq. \text{ in } G - B \text{ in } Z \text{ in } E + B \text{ in } A \text{ in } E$
$- Z \text{ in } A \text{ in } E - B \text{ in } Z \text{ in } A \text{ bis} - Z \text{ in } Aq. \text{ bis} + B \text{ in } Aq. \text{ bis},$

et

ex alia, $- G \text{ in } A \text{ in } E - G \text{ in } Aq. \text{ bis} + B \text{ in } Aq. - Z \text{ in } Aq.$

Deleamus omnia homogenea inter quæ iterum reperitur E : supererit

$B \text{ in } Z \text{ in } G - Aq. \text{ in } G - B \text{ in } Z \text{ in } A \text{ bis} - Z \text{ in } Aq. \text{ bis} + B \text{ in } Aq. \text{ bis}$
æquale $- G \text{ in } Aq. \text{ bis} + B \text{ in } Aq. - Z \text{ in } Aq.,$

et, transponendo,

$- B \text{ in } Aq. + Z \text{ in } Aq. - G \text{ in } Aq. + B \text{ in } Z \text{ in } A \text{ bis}$
erit æquale $B \text{ in } Z \text{ in } G.$

Istius æquationis resolutione reperiemus valorem lineæ A, id est valorem MN, et consequenter punctum N, et inveniemus veritatem propositionis Pappi (1), qui docet, ad reperiendum punctum N, oportere facere

ut rectangulum OMD ad rectangulum OID,
ita quadratum MN ad quadratum NI;

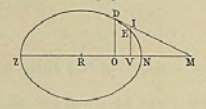
æquationis enim resolutio nos ad eamdem constructionem deducit.

Ut tandem *tangentibus* applicetur hæc methodus, sic procedere possum :

Sit, verbi gratia, *ellipsis* ZDN (*fig.* 96), cujus axis sit ZN et centrum R. Sumamus punctum, ut D, in ejus circumferentia, a quo ducamus lineam DM quæ tangat ellipsin; ducamus præterea applicatam DO et supponamus $<$ in $>$ notis algebraicis OZ datam vocari B, et ON datam vocari G; fingamus OM, quam quærimus incognitam, vocari A

(1) *Voir*, dans la note 2 de la page 142, la traduction par Commandin du texte de Pappus et la correspondance indiquée pour les lettres.

Fig. 96.



(intelligimus autem per OM portionem axis contentam inter punctum O et concursum tangentis).

Quoniam DM tangit ellipsin, si ducamus lineam IEV, parallelam DO, per punctum V sumptum ad libitum inter O et N, certum est lineâ IEV secari tangentem DM et ellipsin quoque, ut in punctis E et I; et, quia linea DM tangit ellipsin, omnia puncta præter D erunt extra ellipsin : ergo linea IV erit major lineâ EV. Erit igitur major proportio

quadrati DO ad quadratum EV quam quadrati DO ad quadratum IV;

sed

ut quadratum DO ad quadratum EV,

ita, proprietate ellipsis,

rectangulum ZON est ad rectangulum ZVN,

et

ut quadratum DO ad quadratum IV, ita quadratum OM ad quadratum VM :

major est igitur proportio

rectanguli ZON ad rectangulum ZVN
quam quadrati OM ad quadratum VM.

Fingamus $<$OV$>$, sumptam ad libitum, æqualem E :

rectangulum ZON erit B in G;
rectangulum ZVN erit $B \text{ in } G - B \text{ in } E + G \text{ in } E - Eq.$;
quadratum OM erit $Aq.$;
quadratum VM erit $Aq. + Eq. - A \text{ in } E$ bis.

Erit igitur major proportio

$$B \text{ in } G \text{ ad } B \text{ in } G - B \text{ in } E + G \text{ in } E - Eq.$$
$$\text{quam } Aq. \text{ ad } Aq. + Eq. - A \text{ in } E \text{ bis},$$

et consequenter, si multiplicetur prior terminus per ultimum et secundus per tertium,

$$B \text{ in } G \text{ in } Aq. + B \text{ in } G \text{ in } Eq. - B \text{ in } G \text{ in } A \text{ in } E \text{ bis},$$

productum scilicet prioris termini per ultimum, erit majus

$$B \text{ in } G \text{ in } Aq. - B \text{ in } E \text{ in } Aq. + G \text{ in } E \text{ in } Aq. - Aq. \text{ in } Eq.$$

Oportet igitur, juxta meam methodum, comparare hæc duo producta per adæqualitatem; demamus quod iis commune est et dividamus residuum per E : supererit,

$$\text{ex una parte, } B \text{ in } G \text{ in } E - B \text{ in } G \text{ in } A \text{ bis},$$
$$\text{et, ex alia, } - B \text{ in } Aq. + G \text{ in } Aq. - Aq. \text{ in } E.$$

Deleamus homogenea quæ aliquid habent lineæ E : supererit,

$$\text{ex una parte, } - B \text{ in } G \text{ in } A \text{ bis}, \quad \text{et, ex alia, } - B \text{ in } Aq. + G \text{ in } Aq.$$

Quos duos terminos juxta methodum æquare oportet; et, transponendo terminos, ut par est, inveniemus

$$B \text{ in } A - G \text{ in } A \quad \text{æquale} \quad B \text{ in } G \text{ bis}.$$

Vides hanc resolutionem eamdem esse cum Apolloniana (1) : nam, mea constructione, ad reperiendam tangentem, oportet facere

$$\text{ut } B - G \text{ ad } G, \quad \text{ita } B \text{ bis ad } A,$$

id est

$$\text{ut ZO} - \text{ON ad ON}, \quad \text{ita ZO bis ad OM};$$

sed, Apollonianâ, oportet facere

$$\text{ut ZO ad ON}, \quad \text{ita ZM ad MN} :$$

duæ autem illæ constructiones, ut patet, in idem recidunt.

(1) Apollonius, *Coniques*, I, 34.

Plura possem alia exempla addere, tum primi, tum secundi casûs meæ methodi, sed hæc sufficiunt et eam esse generalem ac nunquam fallere satis probant. Demonstrationem regulæ non adjicio nec plerosque alios usus qui illius perfectionem confirmare possent, nec inventionem centrorum gravitatis, asymptotôn, quorum exemplum misi doctissimo Domino de Roberval (1).

IV.

METHODUS DE MAXIMA ET MINIMA (2).

Dum *syncriseos* et *anastrophes* Vietææ (3) methodum expenderem, earumque usum in deprehendenda æquationum correlatarum constitutione accuratius explorarem, subiit animum nova ad inventionem maximæ et minimæ exinde derivanda methodus, cujus ope dubia quælibet ad διορισμόν pertinentia, quæ veteri et novæ molestiam exhibuere Geometriæ, facillime profligantur.

Maximæ quippe et minimæ sunt unicæ et singulares, quod et Pappus (4) monuit et jam veteres norunt, licet Commandinus quid

(1) Fermat semble ne faire allusion ici qu'à l'Écrit II qui précède. Cet Écrit fut effectivement envoyé à Roberval, par l'intermédiaire de Mersenne, en avril 1638; il n'y a au contraire, dans la correspondance connue de Fermat, aucun indice sur une application de sa méthode à la recherche des asymptotes.

(2) Cet important morceau a été conservé par une copie de Mersenne, aujourd'hui perdue elle-même, mais dont il subsiste deux transcriptions de la main d'Arbogast : l'une au net (Manuscrit du prince Boncompagni), l'autre en brouillon (Bibl. Nat., *Fonds français*, 3280, nouv. acq.), qui a servi à M. Ch. Henry pour le texte qu'il a donné : *Recherches sur les manuscrits de Pierre de Fermat* (Rome, 1880), pages 180-183.

(3) Viète, *De recognitione æquationum*, cap. 16, et *De emendatione æquationum*, cap. 3 (éd. Schooten, p. 104 et suiv., 134 et suiv.). La *syncrisis* de Viète correspond à la recherche de la composition des coefficients d'une équation en fonction des racines de cette équation; l'*anastrophe* a pour objet l'abaissement du degré (impair) d'une équation, quand on connaît une racine de la transformée obtenue en changeant le signe de l'inconnue.

Dans tout ce fragment, au reste, Fermat emploie les expressions techniques de Viète et applique les procédés de ce dernier.

(4) *Voir* plus haut, page 142.

per μοναχός intelligeret Pappus, ignorare se non diffitetur. Inde sequitur, ab utraque puncti determinationis constitutivi parte, posse sumi æquationem unam ancipitem et, ex duabus utrimque sumptis, effici duas æquationes ancipites correlatas æquales et similes.

Proponatur in exemplum *recta B ita secta ut rectangulum sub ipsius segmentis sit maximum* (1). Punctum proposito satisfaciens rectam datam bifariam secat, ut patet, et maximum rectangulum æquatur quadranti *B* quadrati; nec ex alia quavis rectæ illius sectione orietur rectangulum æquale quadranti *B* quadrati.

At, si *recta eadem B* proponatur *secanda eâ conditione ut rectangulum sub ejus segmentis sit æquale Z plano* (quod supponendum minus quadrante *B* quadrati), tunc duo puncta proposito satisfacient, quæ quidem a puncto maximi rectanguli intercipiuntur.

Sit enim alicujus rectæ *B* segmentum *A*, fiet

$$B \text{ in } A - A \text{ quad. æquale } Z \text{ plano,}$$

quæ æquatio est anceps et rectam *A* de duobus lateribus explicari posse indicat. Sit igitur æquatio correlata

$$B \text{ in } E - E \text{ quad. æquale } Z \text{ plano;}$$

ex methodo Vietæa comparentur hæ duæ æquationes :

$$B \text{ in } A - B \text{ in } E \text{ æquabitur } A \text{ quad.} - E \text{ quad.,}$$

et, omnibus per $A - E$ divisis, fiet

$$B \text{ æqualis } A + E,$$

ipsæque *A* et *E* erunt inæquales.

Si sumatur aliud planum, loco *Z* plani, quod sit majus quam *Z* planum, sed minus quadrante *B* quadrati, tunc rectæ *A* et *E* minus inter se different quam superiores, quum puncta divisionis magis accedent ad punctum rectanguli maximi constitutivum, semperque, auctis divisionum rectangulis, ipsarum *A* et *E* differentia minuetur, donec per

(1) *Voir* plus haut la même question traitée, page 134.

ultimam maximi rectanguli divisionem evanescat, quo casu μοναχή vel unica continget solutio, quum duæ æquales < fient > quantitates, hoc est, *A* æquabitur *E*.

Quum igitur, in duabus superioribus æquationibus correlatis, per methodum Vietæam, *B* æquabitur $A + E$, si *E* æquetur ipsi *A* (quod contingere semper in puncto maximæ vel minimæ constitutivo apparet), ergo, in casu proposito,

$$B \text{ æquabitur } A \text{ bis :}$$

hoc est, si recta *B* bifariam secetur, rectangulum sub ipsius segmentis erit maximum.

Esto aliud exemplum : *Recta B ita secanda est, ut solidum sub quadrato unius ex segmentis in alterum sit maximum* (1).

Ponatur unum segmentum esse *A*; ergo

$$B \text{ in } A \text{ quad.} - A \text{ cub. erit maximum.}$$

Æquatio correlata æqualis et similis est

$$B \text{ in } E \text{ quad.} - E \text{ cub.}$$

Comparentur juxta methodum Vietæ : ergo

$$B \text{ in } A \text{ quad.} - B \text{ in } E \text{ quad. æquabitur } A \text{ cub.} - E \text{ cub.,}$$

et, omnibus per $A - E$ divisis,

$$B \text{ in } A + B \text{ in } E \text{ æquabitur } A \text{ quad.} + A \text{ in } E + E \text{ quad..}$$

quæ est constitutio æquationum correlatarum.

Ut quæratur maxima, fiat *E* æqualis ipsi *A* : ergo

$$B \text{ in } A \text{ bis æquabitur } A \text{ quad. ter,}$$

hoc est,

$$B \text{ bis æquabitur } A \text{ ter.}$$

Constat propositum.

Quia tamen operosa nimis et plerumque intricata est divisionum

(1) *Voir* plus haut la même question traitée, page 140.

illa per binomia practice, conveniens visum est latera æquationum correlatarum inter se per ipsorum differentiam comparari ut, ea ratione, unicà ad differentiam illam applicatione totum opus absolvatur.

Esto

$$Bq.\text{ in }A - Ac.\ \textit{æquandum maximo solido.}$$

Correlata, juxta superioris præcepta methodi, æquatio debuit sumi

$$Bq.\text{ in }E - Ec.$$

Sed, quoniam E (perinde atque A) est incerta quantitas, nihil vetat quominus vocetur $A + E$: erit igitur

$$Bq.\text{ in }A + Bq.\text{ in }E - Ac. - Ec. - Aq.\text{ in }E\text{ ter} - Eq.\text{ in }A\text{ ter},$$

ex una parte ; ex altera

$$Bq.\text{ in }A - Ac.$$

Demptis æqualibus, patet æquationem integram in homogenea ab E adfecta iri devolutam, quia in utraque æquatione reperitur A : nempe

$$Bq.\text{ in }E \quad \text{æquabitur} \quad Ec. + Aq.\text{ in }E\text{ ter} + Eq.\text{ in }A\text{ ter},$$

et, omnibus ipsi E applicatis,

$$Bq. \quad \text{æquabitur} \quad Eq. + Aq.\text{ ter} + A\text{ in }E\text{ ter},$$

quæ est constitutio duarum hujusmodi æquationum correlatarum.

Ad inveniendam maximam, latera duarum æquationum inter se debent æquari, ut satisfiat methodi prædictæ præceptis, ex qua posterior hæc et modum et rationem ipsam operandi desumpsit.

Æquanda igitur sunt inter se A et $A + E$: ergo E dabit nihilum. Quum igitur $Bq.$, ex jam inventa æquationum correlatarum constitutione, æquetur

$$Eq. + Aq.\text{ ter} + A\text{ in }E\text{ ter},$$

ergo elidi debent homogenea omnia ab E adfecta, utpote nihilum repræsentantia : et manebit

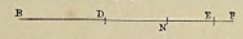
$$Bq. \quad \text{æquale} \quad Aq.\text{ ter},$$

quæ æquatio dabit maximum solidum quæsitum.

Ut autem plenius innotescat utriusque hujus nostræ methodi usum esse generalem, dispiciamus novas æquationum correlatarum species de quibus < tacet > Vieta, ex libro Apollonii *De determinata sectione* (propositione apud Pappum 61 Libri VII), cujus determinationes ipse Pappus innuit et profitetur difficiles (1).

Sit recta BDEF (*fig.* 97), *in quâ data puncta* B, D, E, F. *Intra puncta* D *et* E *sumendum punctum* N, *ut rectangulum* BNF *ad rectangulum* DNE *habeat minimam rationem.*

Fig. 97.



Recta DE vocetur B, DF vocetur Z, BD vocetur D; ponatur DN esse A : ergo

ratio $D\text{ in }Z - D\text{ in }A + Z\text{ in }A - Aq.$ ad $B\text{ in }A - Aq.$ est minima.

Ratio correlata similis et æqualis esto

$$D\text{ in }Z - D\text{ in }E + Z\text{ in }E - Eq. \quad \text{ad} \quad B\text{ in }E - Eq.,$$

juxta priorem methodum. Factum itaque sub mediis æquabitur facto sub extremis : hoc est, ex una parte,

$$D\text{ in }Z\text{ in }B\text{ in }E - D\text{ in }Z\text{ in }Eq. - D\text{ in }A\text{ in }B\text{ in }E + D\text{ in }A\text{ in }Eq. + Z\text{ in }A\text{ in }B\text{ in }E - Z\text{ in }A\text{ in }Eq. - Aq.\text{ in }B\text{ in }E + Aq.\text{ in }Eq.,$$

ex altera parte,

$$D\text{ in }Z\text{ in }B\text{ in }A - D\text{ in }Z\text{ in }Aq. - D\text{ in }E\text{ in }B\text{ in }A + D\text{ in }E\text{ in }Aq. + Z\text{ in }E\text{ in }B\text{ in }A - Z\text{ in }E\text{ in }Aq. - Eq.\text{ in }B\text{ in }A + Eq.\text{ in }Aq.$$

Demptis communibus et facta congrua metathesi,

$$D\text{ in }Z\text{ in }B\text{ in }A - D\text{ in }Z\text{ in }B\text{ in }E + D\text{ in }E\text{ in }Aq. - D\text{ in }A\text{ in }Eq. - Z\text{ in }E\text{ in }Aq. + Z\text{ in }A\text{ in }Eq. + Aq.\text{ in }B\text{ in }E - Eq.\text{ in }B\text{ in }A$$

æquabitur $D\text{ in }Z\text{ in }Aq. - D\text{ in }Z\text{ in }Eq.$

(1) *Voir* plus haut la même question traitée, page 142.

Singulis æquationis partibus per $A - E$ divisis (quod quidem, bina ex homogeneis correlata sigillatim inter se conferendo, facillimum : ut puta

D in Z in B in $A - D$ in Z in B in E abs $A - E$ divisum dat D in Z in B;

similiter

D in E in $Aq. - D$ in A in $Eq.$ abs $A - E$ divisum dat D in A in E;

et sic de cæteris : homogenea enim inter se correlata satis facile disponuntur ad hujusmodi divisionem admittendam), fiet igitur, post divisionem,

$$D \text{ in } Z \text{ in } B + D \text{ in } A \text{ in } E - Z \text{ in } A \text{ in } E + B \text{ in } A \text{ in } E$$
$$\text{æquale} \quad D \text{ in } Z \text{ in } A + D \text{ in } Z \text{ in } E,$$

quæ tandem æqualitas æquationum correlatarum constitutionem exhibebit.

At, si ex hujusmodi constitutione quæratur minima, debet E, juxta methodum, æquari A : igitur

D in Z in $B + D$ in $Aq. - Z$ in $Aq. + B$ in $Aq.$ æquabitur D in Z in A bis;

hujus æquationis resolutio dabit valorem A, ex quo minima ratio quæsita statim patebit.

Nec morabitur Analystam ultimæ istius æqualitatis ambiguitas : prodet quippe se, vel invito, latus utile. Imo et in æquationibus ambiguis quæ plura duobus habent latera, non deerit solitum ab utraque hac nostra methodo, sagaci tantisper Analystæ, præsidium.

Ex supradictæ quæstionis processu, patet priorem illam methodum intricatam nimis ut plurimum evadere, propter crebras illas divisionum per binomia iterationes. Recurrendum ergo ad posteriorem, quæ tamen, licet ex priori, ut jam dictum est, deducta, miram certe facilitatem et compendia innumera peritioribus abunde suppeditabit Analystis, imo et ad inventionem tangentium, centrorum gravitatis, asymptotôn, aliorumque id genus, longe expeditior alterâ illâ evadet et elegantior.

Confidenter itaque sicut olim, ita et nunc pronuntiamus semper et legitimam, non autem fortuitam (ut quibusdam visum) (1), maximæ et minimæ disquisitionem hoc unico et generali contineri epitagmate :

Statuatur etc. (*voir* page 133, ligne 7, à page 134, ligne 6; *comparer* page 133, note 1) ... innotescet.

Si qui adhuc supersunt qui methodum hanc nostram debitam sorti pronuntiant,

Hos cupiam similes tentando excudere sortes (2).

Qui hanc methodum non probaverit, ei proponitur :

Datis tribus punctis, quartum reperire, a quo si ducantur tres rectæ ad data puncta, summa trium harum rectarum sit minima quantitas.

V.

AD METHODUM DE MAXIMA ET MINIMA APPENDIX (3).

Quia plerumque in progressu quæstionum occurrunt asymmetriæ, non dubitabit Analysta triplicatas aut ulterioris etiam, si libeat, gradûs positiones usurpare : earum quippe beneficio multiplices et intricati ut plurimum vitabuntur ascensus. Hujusce artificii methodus ita procedit ut exempla infra scripta declarabunt.

Sit semicirculus cujus diameter AB (*fig.* 98) *et in eam perpendicularis* DC. *Quæritur maximum rectarum* AC *et* CD *aggregatum.*

Diameter vocetur B; ponatur recta AC esse A : ergo

CD erit *latus* (B in $A - A$ quad.).

(1) Allusion à la lettre de Descartes à Mersenne pour Fermat, du 18 janvier 1638 : « Car premièrement la sienne [la règle de Fermat] est telle que, sans industrie et par hasard, on peut aisément tomber dans le chemin qu'il faut tenir pour la rencontrer. »

(2) Ce vers latin n'est tiré d'aucun classique ; peut-être est-il de Fermat lui-même.

(3) Morceau inédit, publié sur la copie d'Arbogast, qui porte la mention « *d'après le manuscrit de Fermat* ».

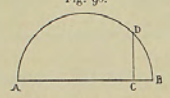
Eo itaque deducitur quæstio ut

$$A + lat.(B \text{ in } A - A \text{ quad.})$$

sit maxima quantitas.

Quia, ex præceptis methodi, æquationes adæquandæ nimium sunt

Fig. 98.



scansuræ, ponatur maxima illa quantitas esse O : Vietæam enim ignotarum quantitatum per vocales expressionem cur respuamus?

Ergo

$$A + lat.(B \text{ in } A - A \text{ quad.}) \quad \text{æquabitur} \quad O,$$

ideoque

$$O - A \quad \text{æquabitur} \quad lateri(B \text{ in } A - A \text{ quad.}),$$

et, omnibus in quadratum ductis,

$$O \text{ quad.} + A \text{ quad.} - O \text{ in } A \text{ bis} \quad \text{æquabitur} \quad B \text{ in } A - A \text{ quad.}$$

Hoc peracto, ita instituenda est transpositio ut maximus sub O gradus unam æquationis partem solus occupet, ut eâ nempe ratione possit de maxima determinari, quo tendit artificium. Per translationem hujus modi,

$$B \text{ in } A - A \text{ quad. bis} + O \text{ in } A \text{ bis} \quad \text{æquabitur} \quad O \text{ quad.}$$

Quum igitur, ex hypothesi, O sit maxima quantitas, ergo O quadratum erit quadratum maximæ quantitatis, ideoque maximum : ergo

$$B \text{ in } A - A \text{ quad. bis} + O \text{ in } A \text{ bis (quæ omnia æquantur } O \text{ quadrato)}$$

sunt maxima quantitas; quæ æquatio, quum vacet asymmetriâ, perinde ex methodo resolvatur ac si O quantitas esset nota. Ergo

$$B \text{ in } A - A \text{ quad. bis} + O \text{ in } A \text{ bis}$$

adæquabitur

$$B \text{ in } A + B \text{ in } E - A \text{ quad. bis} - E \text{ quad. bis} - A \text{ in } E \text{ quater} + O \text{ in } A \text{ bis} + O \text{ in } E \text{ bis.}$$

Sublatis communibus, et reliquis ipsi E applicatis,

$$B + O \text{ bis} \quad \text{adæquabitur} \quad E \text{ bis} + A \text{ quater.}$$

Expungatur E *bis* ex methodo : ergo

$$B + O \text{ bis} \quad \text{æquabitur} \quad A \text{ quater,}$$

ideoque

$$A \text{ quater} - B \quad \text{æquabitur} \quad O \text{ bis,}$$

et

$$A \text{ bis} - \text{dimid. } B \quad \text{æquabitur} \quad O.$$

Hac æqualitate ex methodo stabilita, redeundum ad priorem, in qua ponebamus

$$A + lat.(B \text{ in } A - A \text{ quad.}) \quad \text{æquari} \quad O.$$

Quum igitur inventa sit

$$O \quad \text{æqualis} \quad A \text{ bis} - \text{dimid. } B,$$

ergo

$$A \text{ bis} - \text{dimid. } B \quad \text{æquabitur} \quad A + lat.(B \text{ in } A - A \text{ quad.}),$$

ideoque

$$A - \text{dimid. } B \quad \text{æquabitur} \quad lat.(B \text{ in } A - A \text{ quad.}),$$

omnibusque in quadratum ductis,

$$A \text{ quad.} + B \text{ quad.} \frac{1}{4} - B \text{ in } A \quad \text{æquabitur} \quad B \text{ in } A - A \text{ quad.,}$$

et tandem

$$B \text{ in } A - A \text{ quad.} \quad \text{æquabitur} \quad B \text{ quad.} \frac{1}{8};$$

quæ ultima æqualitas dabit valorem A in quæsita determinatione.

Hoc artificio uti possumus ad *inventionem coni maximi ambitûs sphæræ inscribendi* (1).

Sit sphæræ datæ diameter AD (*fig.* 99). Conus quæsitus habeat altitudinem AC, latus AB, semidiametrum baseos BC. Rectangulum AB

(1) Question proposée par Fermat à Mersenne dans sa lettre du 26 avril 1636.

in BC una cum BC quadrato continebit maximum spatium, ex Archimede (1).

Diameter vocetur B; recta AC, A : ergo

AB erit *latus* (B in A) et BC erit *latus* (B in A — A quad.).

Rectangulum AB in BC una cum BC quadrato erit

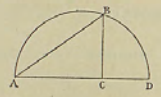
latus (B quad. in A quad. — B in A cub.) + B in A — A quad.

Hæc omnia æquantur maximo spatio : esto *O plano*. Ergo

O pl. + A quad. — B in A æquabitur *lateri* (B quad. in A quad. — B in A cub.).

Omnia ducantur quadratice, etc.; tandem devenietur, ex superiori methodo, ad æquationem *O plani*, cujus beneficio prima æqualitas jam exposita resolvetur.

Fig. 99.



Non deerit tamen, hoc in exemplo, solutio ex methodo absque triplicata æqualitate : eo enim potest deduci quæstio ut, datâ rectâ AB in triangulo CBA, quæratur maxima proportio rectanguli CBA una cum CB quadrato ad quadratum AD, quo casu methodus vulgaris sufficit.

Recta AB data vocetur B; ponatur CB esse A : ergo AC erit potentiâ B quad. — A quad. Sed

ut AC quadratum ad AB quadratum, ita AB quadratum ad AD quadratum;

ergo

$$\text{AD quad. erit } \frac{B \text{ quad. quad.}}{B \text{ quad.} - A \text{ quad.}},$$

ad quæ rectangulum B in $A + A$ quadrato debet habere maximam proportionem : hoc enim quærimus.

(1) Archimède, *De sphæra et cylindro*, I, 15, donne la mesure de la surface latérale du cône.

Omnia ducantur in

$$B \text{ quad.} - A \text{ quad.};$$

ergo ratio

B quad. quad. ad B cub. in $A + B$ quad. in A quad. — B in A cub. — A quad. quad.

est minima. Sed B quad. quad. est quantitas data : rectæ enim B datæ potestas est : ergo

B cub. in $A + B$ quad. in A quad. — B in A cub. — A quad. quad.

est maxima quantitas.

Ex methodo

B cub. + B quad. in A bis æquabitur B in A quad. ter + A cub. quater,

quæ æquatio ad sequentem statim deprimitur

A quad. quater — B in A æquale B quad.,

ideoque patebit solutio quæstionis.

Nec pluribus in re perspicua immoramur : constat nempe, per triplicatas aut quadruplicatas, imo et ulterius etiam, si libeat, promotas hypostases, evanescere omnino asymmetrias et si quæ alia remorantur Analystam impedimenta.

Elegantius tamen et fortasse magis γεωμετρικῶς quæstiones de maxima et minima speciales tangentium beneficio resolvuntur, licet et ipsæ tangentes ab universali methodo deriventur.

Hujus rei unicum, quod multorum instar erit, proponatur exemplum :

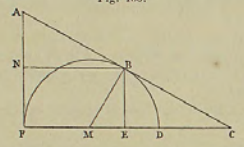
In semicirculo FBD (*fig.* 100) *ductâ perpendiculari* BE, *quæritur maximum sub* FE < *in* > EB *rectangulum*.

Si quæratur rectangulum FEB æquale dato, ex nostra methodo, quærenda esset hyperbole sub angulo AFC eâ conditione ut rectangula similia FEB essent æqualia dato, punctaque intersectionum hyperboles et semicirculi quæsitum adimplerent; sed, quoniam rectangulum FEB maximum quærimus, quærenda hyperbole sub angulo AFC (asym-

ptotis AF, FC), quæ semicirculum non jam secet, sed tangat, ut in B : puncta enim contactûs maximas et minimas determinant quantitates.

Sit factum. Quum igitur hyperbole in puncto B tangat semicirculum, ergo recta, in puncto B semicirculum tangens, tanget et hyperbolen.

Fig. 100.



Sit illa recta ABC. Quum in hyperbole per B transeunte ducta sit tangens cum asymptotis in punctis A et C concurrens, ergo, ex Apollonio (1), rectæ AB, BC sunt æquales, ideoque æquales rectæ FE, EC, et AF dupla BE sive AN. Est autem, propter circulum, BA æqualis AF : ergo BA est dupla AN et, in triangulo simili, posito centro M, semidiameter MB dupla ME. Datur autem semidiameter : ergo et punctum E.

Et generalis ad inventionem maximæ et minimæ geometrica est quæstionum ad tangentes abductio; nec ideo minoris facienda universalis methodus, quum ejus ope et maxima et minima et ipsæ tangentes indigeant.

VI.

AD EAMDEM METHODUM (2).

Doctrinam tangentium antecedit jamdudum tradita *Methodus de inventione maximæ et minimæ*, cujus beneficio terminantur quæstiones

(1) Apollonius, *Coniques*, II, 3.

(2) Cette pièce, imprimée dans les *Varia* (p. 69 à 73), est la seule pour laquelle il subsiste un original de Fermat (Bibl. Nat., *Fonds français*, n° 3280, nouv. acq., fol. 112 à 117), d'ailleurs sans titre.

omnes dioristicæ, et famosa illa problemata, quæ apud Pappum (1), in præfatione Libri VII, difficiles determinationes habere dicuntur, facillime determinantur.

Lineæ curvæ, in quibus tangentes inquirimus, proprietates suas specificas vel per lineas tantum rectas absolvunt, vel per curvas rectis aut aliis curvis quomodo libet implicatas.

Priori casui jam satisfactum est præcepto quod, quia concisum nimis, difficile sane, sed tamen <legitimum> (2) tandem repertum est.

Consideramus nempe in plano cujuslibet curvæ rectas duas positione datas, quarum altera diameter, si libeat, altera applicata nuncupetur. Deinde, jam inventam tangentem supponentes ad datum in curva punctum, proprietatem specificam curvæ, non in curva amplius, sed in invenienda tangente, per adæqualitatem consideramus et, elisis (quæ monet doctrina de maxima et minima) homogeneis, fit demum æqualitas quæ punctum concursûs tangentis cum diametro determinat, ideoque ipsam tangentem.

Exemplis, quæ olim multiplicia dedimus, addatur, si placet *tangens cissoidis* cujus Diocles (3) traditur inventor.

Esto circulus duabus diametris AG, BI (*fig.* 101) normaliter sectus, et sit cissois IHG in qua, sumpto quolibet puncto, ut H, ducenda est a puncto H tangens ad cissoidem.

Sit factum, et ducta tangens HF secet rectam CG in F. Ponatur recta DF esse *A* et, sumpto quolibet puncto inter D et F, ut E, ponatur recta DE esse *E*.

(1) *Voir* plus haut, page 142, note 1.

(2) Le mot *legitimum* manque sur l'original de Fermat, ce qui prouve assez que cet original est lui-même défectueux. L'éditeur des *Varia* a restitué, pour l'adjectif manquant, *sufficiens*, expression qui n'est guère de la langue de Fermat et dont l'omission s'explique moins bien.

(3) La courbe connue sous le nom de *cissoïde* se trouve définie et donnée comme employée par Dioclès, dans le commentaire d'Eutocius sur la proposition d'Archimède, *De sphæra et cylindro*, II, 2, éd. Torelli = II, 1, éd. Heiberg (Vol. III, p. 78 et suiv.). Le nom de *cissoïde* est emprunté à Proclus (*Commentaire sur le premier livre d'Euclide*), qui en parle comme d'une courbe fermée et présentant des points de rebroussement.

Quum igitur, ex proprietate specifica cissoidis, recta

MD sit ad DG ut DG ad DH,

fiat jam in terminis analyticis per adæqualitatem

ut NE ad EG, ita EG ad portionem rectæ EN

quæ intercipitur inter punctum E et tangentem et est EO.

Vocetur

AD data, Z; DG data, N; DH data, R;

DF quæsita, ut diximus, A; DE sumpta ad libitum, E :

ergo

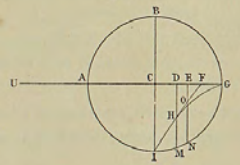
EG vocabitur $N-E$;

EO vocabitur $\frac{R \text{ in } A - R \text{ in } E}{A}$;

EN vocabitur *latus* $(Z \text{ in } N - Z \text{ in } E + N \text{ in } E - Eq.)$.

Quum igitur, ex præcepto, proprietas specifica debeat considerari,

Fig. 101.



non amplius in curva, sed in tangente, ideoque faciendum sit

ut NE ad EG, ita EG ad EO, quæ applicatur tangenti,

ergo, in terminis analyticis, faciendum

ut *latus* $(Z \text{ in } N - Z \text{ in } E + N \text{ in } E - Eq.)$ ad $N-E$,

ita $N-E$ ad $\frac{R \text{ in } A - R \text{ in } E}{A}$,

et, quadratis singulis terminis ad vitandam asymmetriam, fiet

ut $Z \text{ in } N - Z \text{ in } E + N \text{ in } E - Eq.$ ad $Nq. + Eq. - N \text{ in } E \text{ bis}$,

ita $Nq. + Eq. - N \text{ in } E \text{ bis}$ ad $\frac{Rq. \text{ in } Aq. + Rq. \text{ in } Eq. - Rq. \text{ in } A \text{ in } E \text{ bis}}{Aq.}$.

Ducantur singula homogenea in A quadratum, et deinde quod fit sub extremis adæquetur, ex præceptis artis, ei quod fit a medio. Elisis deinde superfluis, ut monet methodus, tandem orietur æqualitas inter

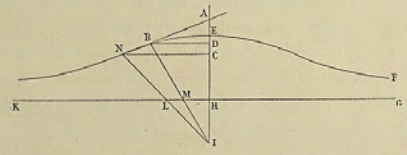
$Z \text{ in } A \text{ ter} + N \text{ in } A$ ex una parte, et $Z \text{ in } N \text{ bis}$ ex altera.

Construetur igitur tangens hoc pacto : Producatur semidiameter circuli dati CA ad punctum U, et fiat AU recta æqualis AC. Rectangulum ADG ad rectam UD applicetur et faciat latitudinem DF. Juncta FH tanget cissoidem.

Indicemus etiam *modum agendi in conchoide Nicomedea*, sed indicemus tantum, ne prolixior evadat sermo.

Esto conchois Nicomedea, ut construitur apud Pappum et Eutocium (1) figura sequens (*fig.* 102). Polus est punctum I, recta KG est

Fig. 102.



asymptotos curvæ, recta IHE perpendicularis ad asymptoton, punctum N datum in curva, ad quam ab eo puncto ducenda est tangens NBA, concurrens cum IE in puncto A.

Sit factum, ut supra. Ducatur NC parallela KG. Ex proprietate specifica curvæ, recta LN est æqualis rectæ HE. Sumatur quodlibet punc-

(1) Pappus (éd. Hultsch), livre III, pages 58 et suivantes, livre IV, pages 242 et suivantes; Eutocius, Commentaire sur Archimède *De sph. et cyl.*, II (éd. Heiberg, vol. III, p. 117).

tum inter C et E, ut D, a quo rectæ CN parallela ducatur DB, occurrens tangenti in puncto B. Quia igitur proprietas specifica debet considerari in tangente, jungatur BI, occurrens rectæ KG in M et, ex præceptis artis, recta MB adæquetur rectæ HE : orietur tandem quæsita æqualitas.

Quod ut procedat,

CA, ut supra, vocetur A; recta CD vocetur E; recta EH data vocetur Z,

et reliquæ datæ suis nominibus designentur.

Invenietur facillime recta MB in terminis analyticis, quæ si adæquetur, ut dictum, rectæ HE, solvetur quæstio.

Hæc de priore casu videntur sufficere. Licet enim praxes infinitæ suppetant, quæ prolixitates evitant, ex iis tamen nullo negotio deduci possunt.

Secundo casui, quem difficilem judicabat Dominus Descartes (1), cui nihil difficile, elegantissimâ et non insubtili methodo fit satis.

Quamdiu rectis tantum lineis homogenea implicabuntur, quærantur ipsa et designentur per præcedentem formulam. Imo et, vitandæ asymmetriæ causa, aliquando, si libuerit, applicatæ ad tangentes ex superiore methodo inventas pro applicatis ad ipsas curvas sumantur; et demum (quod operæ pretium est) portiones tangentium jam inventarum pro portionibus curvæ ipsis subjacentis sumantur, et procedat adæqualitas ut supra monuimus : proposito nullo negotio satisfiet.

Exemplum in curva Domini de Roberval assignamus.

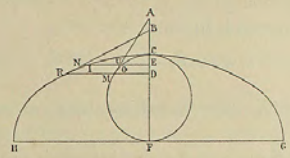
Sit curva HRIC (*fig.* 103), cujus vertex C, axis CF; et, descripto semicirculo COMF, sumatur punctum quodlibet in curva, ut R, a quo ducenda est tangens RB.

Ducatur a puncto R recta RMD, perpendicularis in CDF, quæ secet semicirculum in M. Ea igitur curvæ proprietas specifica est ut recta RD sit æqualis portioni circuli CM et applicatæ DM. Ducatur in puncto M,

(1) Comparer la lettre de Roberval à Fermat, du 4 août 1640, et celle de Descartes à Fermat (éd. Clerselier, III, 64), du 25 septembre 1638.

ex præcedente methodo, tangens MA ad circulum : eadem nempe procederent si curva COM esset alterius naturæ.

Fig. 103.



Ponatur factum quod quæritur, et sit :

recta DB quæsita æqualis A;
DA, inventa ex constructione, æqualis B;
MA, itidem inventa, vocetur D;
MD data vocetur R; RD data vocetur Z;
CM, portio circumferentiæ data, vocetur N;
DE, recta utcumque assumpta, vocetur E,

et a puncto E ducatur EOUIN parallela rectæ RMD.

Fiat

$$\text{ut } A \text{ ad } A - E, \quad \text{ita } Z \text{ ad } \frac{Z \text{ in } A - Z \text{ in } E}{A},$$

quæ idcirco æquabitur rectæ NIUOE.

Igitur recta $\frac{Z \text{ in } A - Z \text{ in } E}{A}$ debet adæquari (propter proprietatem specificam curvæ quæ in tangente consideranda est) rectæ OE una cum curva CO; curva autem CO æquatur curvæ CM minus curva MO : ergo recta $\frac{Z \text{ in } A - Z \text{ in } E}{A}$ debet adæquari rectæ OE et curvæ CM minus curva MO. Ut autem hi tres termini ad terminos analyticos reducantur, pro recta OE, ad vitandam asymmetriam ex superiori cautione, sumatur recta EU applicata tangenti, et pro curva MO sumatur portio tangentis MU, cui ipsa MO adjacet.

Ad inveniendam autem EU in terminis analyticis, fiet

$$\text{ut } B \text{ ad } B-E, \quad \text{ita } R \text{ ad } \frac{R\text{ in }B - R\text{ in }E}{B},$$

quæ idcirco æquabitur ipsi EU.

Ad inveniendam deinde MU, fiet

$$\text{ut } B \text{ ad } D, \quad \text{ita } E \text{ ad } \frac{D\text{ in }E}{B},$$

quæ idcirco, propter similitudinem triangulorum, ut supra, æquabitur ipsi MU.

Curva autem CM vocata est N : igitur in terminis analyticis fiet adæqualitas inter

$$\frac{Z\text{ in }A - Z\text{ in }E}{A} \text{ ex una parte, et } \frac{R\text{ in }B - R\text{ in }E}{B} + N - \frac{D\text{ in }E}{B} \text{ ex altera.}$$

Ducantur omnia in B in A, consistet adæqualitas inter

$$Z\text{ in }B\text{ in }A - Z\text{ in }B\text{ in }E \quad \text{et} \quad R\text{ in }B\text{ in }A - R\text{ in }A\text{ in }E + B\text{ in }N\text{ in }A - D\text{ in }A\text{ in }E.$$

Quum autem, ex proprietate curvæ,

$$Z \text{ æquetur } R + N,$$

ergo

$$Z\text{ in }B\text{ in }A \text{ ex una parte æquatur } R\text{ in }B\text{ in }A + B\text{ in }N\text{ in }A \text{ ex altera;}$$

ideoque, ablatis communibus, reliqua comparentur,

$$Z\text{ in }B\text{ in }E \text{ nempe cum } R\text{ in }A\text{ in }E + D\text{ in }A\text{ in }E.$$

Fiat divisio per E; et, quia nullum est hoc casu homogeneum superfluum, nulla fieri debet elisio. Æquetur igitur

$$Z\text{ in }B \text{ cum } R\text{ in }A + D\text{ in }A :$$

fiet igitur

$$\text{ut } R + D \text{ ad } B, \quad \text{ita } Z \text{ ad } A.$$

Constructio : Ad construendum igitur problema, si fiat

ut aggregatum rectarum MA, MD ad rectam DA, ita RD ad DB,

juncta BR tanget curvam CR.

Quia vero

ut summa rectarum MA, MD ad DA, ita MD ad DC,

ut facile est demonstrare, ideo faciendum erit

ut MD ad DC, ita RD ad BD,

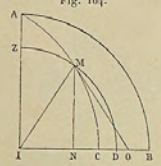
sive, ut elegantior evadat constructio, junctæ rectæ MC ducenda erit parallela RB.

Eadem methodo species omnes illius curvæ tangentes suas nanciscentur : constructionem generalem olim dedimus (1).

Quoniam vero quæsitum est *de tangente quadratariæ sive quadratricis Dinostrati* (2), ita construimus ex præceptis præcedentibus.

Sit quadrans circuli AIB (*fig.* 104), quadrataria AMC in qua, ad datum punctum M, ducenda est tangens.

Fig. 104.



Junctâ MI, centro I, intervallo IM, quadrans ZMD describatur et, ductâ perpendiculari MN, fiat

ut MN ad IM, ita portio quadrantis MD ad rectam IO (3);

juncta MO tanget quadratariam. Hæc sufficiant.

(1) En 1638 (*voir* plus haut la note 1 de la page 162). Cette construction générale, applicable aux cycloïdes allongées ou raccourcies, est perdue.

(2) Pappus (éd. Hultsch), livre IV, pages 250 et suivantes. Proclus (*Commentaire sur le premier livre d'Euclide*) attribue à Hippias l'invention de la quadratrice.

(3) L'original, comme les *Varia*, donne :

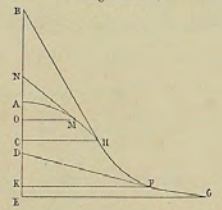
« ut IM ad MN, ita portio quadrantis MD ad rectam NO » ;

mais toute la ligne se trouve en surcharge d'une autre main, qui a corrigé le texte de Fermat, en sorte qu'on ne peut plus le discerner.

Quia tamen sæpius curvatura mutatur, ut in conchoide Nicomedea, quæ pertinet ad priorem casum, et in omnibus speciebus curvæ Domini de Roberval (primâ exceptâ) quæ pertinet ad secundum, ut perfecte curva possit delineari, investiganda sunt ex arte puncta inflexionum, in quibus curvatura ex convexa fit concava vel contra : cui negotio eleganter inservit doctrina de maximis et minimis, hoc præmisso lemmate generali :

Esto, in sequenti figura (*fig.* 105) (1), *curva* AHFG, *cujus curvatura in puncto* H, *verbi gratia, mutetur. Ducatur tangens* HB, *applicata* HC. *Angulus* HBC *erit minimus omnium quos tangentes cum axe* ACD, *sive infra, sive supra punctum* H, *efficiunt,* ut facile est demonstrare.

Fig. 105.



Sumatur enim, supra H punctum, punctum M; tangens occurret axi inter A et B, ut in N : igitur angulus ad N major erit angulo ad B. Similiter, si infra punctum H sumatur punctum F, punctum D, in quo concurrit tangens FD cum axe, erit inferius puncto B, et tangens DF occurret tangenti BH ad partes F et H : igitur angulus ad D erit major angulo ad B.

Casus omnes non persequimur, sed modum tantum investigandi indicamus, quum curvarum formæ infinitas species exhibeant.

Ut igitur, verbi gratia, in exposito diagrammate, punctum H inveniatur, quæratur primum, ex superiore methodo, ad punctum quodlibet curvæ utcumque sumptum, proprietas tangentis. Hac inventa, quæratur, per doctrinam de maximis et minimis, punctum H a quo, ducendo perpendicularem HC et tangentem HB, recta HC ad CB habeat minimam proportionem : ea enim statione angulus ad B erit minimus. Dico punctum H, ita inventum, esse initium mutationis in curvatura.

(1) La figure manque dans les *Varia*.

Ex prædicta methodo de maximis et minimis derivantur artificio singulari inventiones centrorum gravitatis, ut alias indicavi Domino de Roberval (1).

Sed et coronidis loco possunt etiam et, *datâ curvâ, inveniri ipsius asymptoti,* quæ in curvis infinitis miras exhibent proprietates. Sed hæc, si libuerit, fusius aliquando explicabimus et demonstrabimus.

VII.

PROBLEMA MISSUM AD REVERENDUM PATREM MERSENNUM

10a die Novembris 1642 (2).

Invenire cylindrum maximi ambitûs in data sphæra.

Detur sphæra cujus diameter AD (*fig.* 106), centrum C. Quæritur cylindrus maximi ambitûs in ea inscribendus.

Sit factum, et cylindri quæsiti basis esto DE, latus EA (huic enim positioni aptari potest cylindrus, propter angulum in semicirculo rectum). Ambitus cylindri similis est quadrato DE et rectangulo DEA bis :

(1) *Voir* plus haut, page 136.

(2) Ce titre est tiré du manuscrit de la Bibliothèque Nationale, *Fonds latin,* 11197; il n'existe pas dans les manuscrits du prince Boncompagni, où l'on trouve une ancienne copie du morceau, en dehors de celle d'Arbogast. Fermat avait proposé à Mersenne ce problème, dès le 20 avril 1636, en même temps que celui du cône inscrit de surface maximum (*voir* ci-dessus, p. 155). La solution, envoyée six ans après, est d'ailleurs purement synthétique.

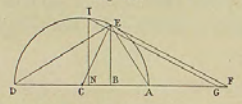
Tout le morceau a été publié par M. Ch. Henry (*Recherches sur les manuscrits de Pierre de Fermat*), pages 195-196, d'après la première source seulement.

Quærendum itaque maximum quadrati DE et rectanguli DEA bis aggregatum.

Quadratum DE æquatur rectangulo ADB (demissâ perpendiculari EB), et rectangulum DEA æquatur rectangulo sub AD in BE. Quærimus igitur maximum rectanguli ADB et rectanguli sub AD in BE bis aggregatum et, omnibus ipsi AD rectæ datæ applicatis, quæritur maximum rectarum DB et BE bis aggregatum.

Hoc autem est facile : fiat enim CB dimidia BE aut, quod idem est, sit BC quinta pars potentiâ quadrati CE dati, punctum E satisfaciet proposito.

Fig. 106.



Ducatur enim tangens EF cum diametro productâ in puncto F conveniens : Aio summam rectarum DB, BE bis esse maximam.

Quum enim CB sit dimidia BE, ergo BE erit dimidia BF; ergo BF erit æqualis duplæ BE : tota igitur DF rectis DB et BE bis erit æqualis. Sed et patet aggregatum rectarum DB, BE bis esse maximum.

Sumatur enim quodvis punctum in semicirculo, <ut>I, a quo demittatur perpendicularis IN.

A puncto autem I ducatur IG parallela tangenti, occurrens diametro in puncto G. Punctum G erit inter puncta F et D : alioqui parallela GI non occurret semicirculo.

Est

ut FB ad BE, ita GN ad NI,

propter parallelismum; sed FB est dupla BE : ergo GN est dupla NI, ideoque GN est æqualis NI bis, et tota GD aggregato rectarum DN et NI bis. Quum igitur GD (cui æquatur aggregatum DN, NI bis) sit minor rectâ DF (cui æquatur rectarum DB, BE bis aggregatum), ergo rectarum DB, BE bis aggregatum est maximum, et cylindrus quæsitus habet basim DE et latus EA.

Probabitur ex supra dictis rectam DE ad EA ita esse ut majus segmentum rectæ extremâ ac mediâ ratione sectæ ad minus.

Sed et *cylindrum dati ambitûs* eâdem viâ *invenire et construere* possumus.

Statim quippe deducetur quæstio ad quærendam rectarum DN, NI bis summam æqualem datæ rectæ. Sit recta data DG (quæ quidem ex superiori determinatione non potest esse major rectâ DF). Fiat rectæ FE parallela recta GI : punctum I satisfaciet quæstioni et quandoque duos cylindros exhibebit, quandoque unicum, propositioni satisfacientes.

Quum enim punctum G erit inter F et A, duo cylindri præstabunt propositum; si vero punctum G sit in A aut ulterius, unicus tantum cylindrus præstabit quæstionem (1).

(1) Le manuscrit *Fonds latin* 11197, seul des trois sources, ajoute à cette solution les trois corollaires suivants, qu'on doit attribuer à Mersenne plutôt qu'à Fermat :

« Corollarium primum. — *Tangens* EF *æqualis est diametro* AD.

» Quia enim, in triangulo CEF rectangulo ad E, ex angulo E deducta est ad basim CF perpendicularis EB, erunt similia triangula CEF, CEB et EFB; sed BC est dimidia ipsius BE, ex constructione : ergo CE dimidia est ipsius EF. Est autem et CE dimidia diametri AD : ergo EF æqualis est ipsi AD.

» Corollarium secundum. — Ex præcedente corollario deducitur elegans *constructio problematis* et multo facilior, quæ talis est.

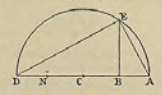
» Sumatur in circumferentia circuli AED punctum quodcumque E, ex quo deducatur recta EF tangens circulum, quæ sit æqualis diametro circuli AED; et sic dabitur punctum F, ex quo per centrum C ducatur FCD secans circumferentiam in A et D punctis. Jungantur EA, ED; erit AE altitudo cylindri maximi quæsiti et DE diameter basis ipsius cylindri.

» Demonstratio facilis est.

» Corollarium tertium. — Notatu dignum est DE *esse ad* EA *in ratione majoris segmenti ad minus rectæ mediâ ac extremâ ratione divisæ.*

» Fiat enim CN (*fig.* 107) æqualis CB : ergo ND æquabitur BA, et BN ipsi BE. Porro quadratum ex DE æquale est rectangulo ADB sive duobus rectangulis : primo ADN (hoc est DAB), et rectangulo ex AD in NB (hoc est ex AD in BE); sed rectangulum DAB æquatur

Fig. 107.

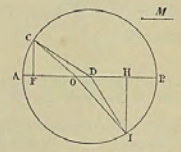


VIII.

ANALYSIS AD REFRACTIONES (1).

Esto circulus ACBI (*fig.* 108), cujus diameter AFDB separet duo media diversæ naturæ, quorum rarius sit ex parte ACB, densius ex parte AIB. Ponatur centrum circuli punctum D, in quod incidat radius CD a puncto C dato. Quæritur radius diaclasticus DI, hoc est punctum I ad quod vergit radius refractus.

Fig. 108.



Ducantur ad diametrum perpendiculares rectæ CF, IH. Quum datum sit punctum C et diameter AB, necnon et centrum D, datur pariter punctum F et recta FD.

Sit ratio mediorum, sive ratio resistentiæ medii densioris ad resistentiam medii rarioris, ut recta data DF ad datam extrinsecus rectam *M*, quæ quidem minor erit rectâ DF, quum resistentia medii rarioris sit minor resistentiâ medii densioris, ex axiomate plus quam naturali.

Mensurandi igitur veniunt motus, qui fiunt per rectas CD et DI, beneficio rectarum *M* et DF : hoc est, motus, qui fit per duas rectas, repræsentatur comparative per summam duorum rectangulorum, quorum unum fit sub CD et recta *M*, et alterum sub DI et recta DF.

Eo itaque deducetur quæstio, ut ita secetur diameter AB in puncto H ut, ductâ ab eo perpendiculari HI et junctâ DI, summa duorum rectangulorum sub CD et *M* et sub DI et DF contineat minimum spatium.

Quod ut secundum nostram methodum, quæ jam apud Geometras invaluit et ab Herigono (1) in *Cursu* suo *mathematico* ante annos plus minus viginti relata est, investigemus, radius CD datus vocetur *N*; radius DI erit item *N*; recta DF vocetur *B* et ponatur recta DH esse *A*. Oportet igitur *N* in *M* + *N* in *B* esse minimam quantitatem (2).

Intelligatur quævis recta DO, ad libitum sumpta, esse æqualis ignotæ *E*, et jungantur rectæ CO, OI.

Quadratum rectæ CO, in terminis analyticis, erit

$$Nq. + Eq. - B \text{ in } E \text{ bis};$$

quadrato ex AE; rectangulum vero ex AD in BE æquatur rectangulo AED. Hoc est rectangulo ex linea composita AED in AE; erit igitur

ut tota linea AED ad DE, ita DE ad AE :

ergo AED recta secta est in E in extrema ac media ratione, estque DE majus segmentum, AE vero minus. Quod erat probandum.

« De hoc problemate vide Tractatum Domini de Roberval *De conis et cylindris sphæræ inscriptis et circumscriptis* : ibi enim verus est ejus locus. »

Le titre du Traité, auquel il est ainsi renvoyé, se retrouve dans une Lettre de Roberval à Hevelius, de 1650, qu'a publiée M. C. Henry (*Huygens et Roberval*, Leyde, 1879, p. 38).

(1) Ce morceau, tiré de la Correspondance de Descartes, fut envoyé par Fermat à M. de la Chambre, en même temps que la Lettre du 1er janvier 1662.

(1) Dans le *Supplementum Cursus mathematici* de Pierre Hérigone (Paris, 1642; deuxième édition, 1644), qui forme le sixième Volume de l'Ouvrage, on trouve en effet, comme proposition XXVI et sous le titre *De maximis et minimis*, l'application de la méthode de Fermat à la solution des questions suivantes :

1. *Invenire maximum rectangulum contentum sub duobus segmentis propositæ rectæ lineæ* (*voir* plus haut, p. 134).

2. *Indagare maximum rectangulum comprehensum sub media et differentia extremarum trium proportionalium.*

3. *Datam lineam secare in duo segmenta quæ habeant aggregatum suorum quadratorum omnium minimum.*

4. *Invenire maximum conorum rectorum sub æqualibus conicis superficiebus contentum.*

En outre de ces solutions, dans lesquelles Hérigone emploie d'ailleurs, comme dans tout son Ouvrage, son système particulier de notations algébriques, il donne, toujours d'après Fermat, la construction de la tangente en un point donné de la *parabole* (*voir* plus haut, p. 135), de l'*ellipse* (*voir* p. 145) et de l'*hyperbole*. Il ajoute enfin (p. 68) :

« Nec unquam fallit methodus, ut asserit ejus inventor, qui est doctissimus Fermat, consiliarius in parlamento Tolosano, excellens geometra nec ulli secundus in arte analytica : qui optime etiam restituit omnia *loca plana Apollonii Pergæi*, quæ in hac urbe vidimus manu scripta in manibus plurimorum, quibus subnexa est etiam ab eodem auctore *Ad locos planos et solidos Isagoge*. »

Ce passage d'Hérigone a été reproduit par Samuel Fermat dans l'édition des *Varia* (à la dernière des pages non numérotées du commencement); mais, dans sa préface, il lui assigne à tort la date de 1634, qui est celle du premier Volume du *Cursus mathematicus*.

(2) Dans tout ce morceau, on a rétabli la notation de Viète au lieu de celle de Descartes suivie par Clerselier.

quadratum vero rectæ OI erit

$$Nq. + Eq. + A \text{ in } E \text{ bis} :$$

ergo rectangulum sub CO in M erit in iisdem terminis

$$\textit{latus quad.}(Mq. \text{ in } Nq. + Mq. \text{ in } Eq. - Mq. \text{ in } B \text{ in } E \text{ bis});$$

rectangulum vero sub IO in B erit

$$\textit{latus quad.}(Bq. \text{ in } Nq. + Bq. \text{ in } Eq. + Bq. \text{ in } A \text{ in } E \text{ bis}).$$

Hæc duo rectangula debent, ex præceptis artis, adæquari duobus rectangulis M in N et B in N.

Ducantur omnia quadratice, ut tollatur asymmetria; deinde, ablatis communibus et termino asymmetro ex una parte collocato, fiat novus ductus quadraticus. Quo peracto, demptis communibus et reliquis per E divisis, ac tandem elisis homogeneis ab E affectis, juxta præcepta methodi quæ dudum omnibus innotuit, et facto parabolismo, fit tandem simplicissima æquatio inter A et M : hoc est, a primo ad ultimum abruptis omnibus asymmetriarum obicibus, recta DH in figura fit æqualis rectæ M.

Unde patet punctum diaclasticum ita inveniri si, ductis rectis CD et CF, fiat ut resistentia medii densioris ad resistentiam medii rarioris, sive

ut B ad M, ita recta FD ad rectam DH,

et a puncto H excitetur recta HI ad diametrum perpendicularis et circulo occurrens in puncto I, quo refractio verget : ideoque radius a medio raro ad densum pertingens frangetur versus perpendicularem, quod congruit omnino et generaliter invento theoremati Cartesiano, cujus accuratissimam demonstrationem a principio, nostro derivatam exhibet superior analysis.

IX.

<SYNTHESIS AD REFRACTIONES> [1].

Proposuit doctissimus Cartesius refractionum rationem experientiæ, ut aiunt, consentaneam; sed, eam ut demonstraret, postulavit et necesse omnino fuit ipsi concedi, luminis motum facilius et expeditius fieri per media densa quam per rara, quod lumini ipsi naturali adversari videtur.

Nos itaque, dum a contrario axiomate — motum nempe luminis facilius et expeditius per media rara quam per densa procedere — veram refractionum rationem deducere tentamus, in ipsam tamen Cartesii proportionem incidimus. An autem contrariâ omnino viâ eidem veritati occurri possit ἀπαραλογίστως, videant et inquirant subtiliores et severiores Geometræ; nos enim, missâ matæotechniâ, satius existimamus veritate ipsa indubitanter potiri, quam superfluis et frustatoriis contentionibus et jurgiis diutius inhærere.

Demonstratio nostra unico nititur postulato : *naturam operari per modos et vias faciliores et expeditiores.* Ita enim αἴτημα concipiendum censemus, non, ut plerique, *naturam per lineas brevissimas semper operari.*

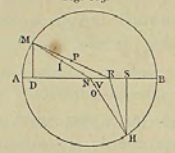
Ut enim Galilæus [2], dum motum naturalem gravium speculatur, rationem ipsius non tam spatio quam tempore metitur, pari ratione non brevissima spatia aut lineas, sed quæ expeditius, commodius et breviori tempore percurri possint, consideramus.

(1) Ce second morceau sur la loi de la réfraction, confondu avec le précédent dans la Correspondance de Descartes, en est évidemment distinct : c'est le travail que Fermat promet à M. de la Chambre à la fin de sa lettre du 1er janvier 1662, si celui-ci le lui réclame, et c'est également à cette pièce que se réfère particulièrement Clerselier, dans sa lettre à Fermat du 20 mai 1662. D'après la copie de Clerselier, l'envoi à M. de la Chambre aurait eu lieu en février 1662.

(2) *Discorsi e dimostrazioni matematiche intorno à due nove scienze attenenti alla Mecanica ed i movimenti locali*, del Sigr Galileo Galilei (Leyde, Elzévirs, 1638). — Les nouvelles pensées de Galilée, etc., traduit de l'italien en français (Paris, Pierre Rocolet *ou* Henry Guenon, 1639).

Hoc supposito, supponantur duo media diversæ naturæ in prima figura (*fig.* 109), in qua circulus AHBM, cujus diameter ANB separat illa duo media, quorum unum a parte M est rarius, alterum a parte H est densius; et a puncto M versus H inflectantur quælibet rectæ MNH, MRH occurrentes diametro in punctis N et R.

Fig. 109.



Quum velocitas mobilis per MN, quæ est in medio raro, sit major, ex axiomate aut postulato, velocitate ejusdem mobilis per NH, et motus supponantur uniformes in quolibet videlicet medio, ratio temporis motûs per MN ad tempus motûs per NH componitur, ut notum est omnibus, ex ratione MN ad NH et ex reciproca ratione velocitatis per NH ad velocitatem per MN.

Si fiat igitur

ut velocitas per MN ad velocitatem per NH, ita recta MN ad NI,
tempus motûs per MN ad tempus motûs per NH erit ut IN ad NH.

Pari ratione demonstrabitur, si fiat

ut velocitas per medium rarius ad velocitatem per medium densius,
ita MR ad RP,
tempus motûs per MR ad tempus motûs per RH esse ut PR ad RH.

Unde sequitur

tempus motûs per duas MN, NH esse ad tempus motûs per duas MR, RH
ut summa duarum IN, NH ad summam duarum PR, RH.

Quum igitur natura lumen a puncto M versus punctum H dirigat, debet investigari punctum, ut N, per quod *per inflexionem aut refractionem brevissimo tempore* a puncto M ad punctum H perveniat : probabile namque est naturam, quæ operationes suas quam citissime urget, eo sponte collimaturam. Si itaque summa rectarum IN, NH, quæ est mensura motûs per inflexam MNH, sit minima quantitas, constabit propositum.

Hoc autem ex theoremate Cartesiano deduci vera, non fucata, Geometria statim demonstrabit; proposuit quippe Cartesius :

Si a puncto M *ducatur radius* MN, *et ab eodem puncto* M *demittatur perpendicularis* MD, *fiat autem*

ut velocitas major ad minorem, ita DN *ad* NS,

a puncto autem S *excitetur perpendicularis* SH *et jungatur radius* NH, *lumen a medio raro in punctum* N *incidens refringi in medio denso versus perpendicularem ad punctum* H.

Huic vero theoremati Geometria nostra, ut constabit ex sequenti propositione pure geometrica, non refragatur.

Esto circulus AHBM, cujus diameter ANB, centrum N, in cujus circumferentia sumpto quovis puncto M, jungatur radius MN et demittatur in diametrum perpendicularis MD. Detur pariter ratio DN ad NS et sit DN major ipsâ NS. A puncto S excitetur ad diametrum perpendicularis SH occurrens circumferentiæ in puncto H, a quo jungatur centro N radius HN. Fiat

ut DN ad NS, ita radius MN ad rectam NI :

Aio summam rectarum IN, NH esse minimam : hoc est, si sumatur, exempli gratia, quodlibet punctum R ex parte semidiametri NB, et jungantur rectæ MR, RH, fiat autem

ut DN ad NS, ita MR ad RP,

summam rectarum PR et RH esse majorem summâ rectarum IN et NH.

Quod ut demonstremus, fiat

ut radius MN ad rectam DN, ita recta RN ad rectam NO,

et

ut DN ad NS, ita fiat NO ad NV.

Ex constructione patet rectam NO minorem esse rectâ NR, quia recta DN est minor radio MN; patet etiam rectam NV minorem esse rectâ NO, quum recta NS sit minor rectâ ND.

His positis, quadratum rectæ MR æquatur quadrato radii MN, quadrato rectæ NR et rectangulo sub DN in NR bis, ex Euclide; sed, quum sit, ex constructione,

ut MN ad DN, ita NR ad NO,

ergo rectangulum sub MN in NO æquatur rectangulo sub DN in NR, ideoque rectangulum sub MN in NO bis æquatur rectangulo sub DN in NR bis : quadratum igitur rectæ MR æquatur quadratis MN et NR et rectangulo sub MN in NO bis.

Quadratum autem rectæ NR est majus quadrato rectæ NO, quum recta NR sit major rectâ NO : ergo quadratum rectæ MR est majus quadratis rectarum MN, NO et rectangulo sub MN in NO bis. At hæc duo quadrata, MN, NO, una cum rectangulo sub MN in NO bis, sunt æqualia quadrato quod fit ab MN, NO tanquam ab una recta : ergo recta MR est major summâ duarum rectarum MN et NO.

Quum autem, ex constructione, sit

ut DN ad NS, ita MN ad NI et ita NO ad NV,

ergo erit

ut DN ad NS,
ita summa rectarum MN, NO ad summam rectarum IN et NV.

Est autem etiam

ut DN ad NS, ita MR ad RP :

ergo

ut summa rectarum MN, NO ad summam rectarum IN, NV,
ita recta MR ad RP.

Est autem recta MR major summâ rectarum MN, NO : ergo et recta PR est major summâ rectarum IN, NV.

Superest probandum rectam RH esse majorem rectâ HV; quo peracto, constabit summam rectarum PR, RH esse majorem summâ rectarum IN, NH.

In triangulo NHR, quadratum RH æquatur quadratis HN, NR muletatis rectangulo sub SN in NR bis, ex Euclide. Quum autem sit, ex constructione,

ut MN radius (sive NH ipsi æqualis) ad DN, ita NR ad NO,
ut autem DN ad NS, ita NO ad NV,

ergo, ex æquo, erit

ut HN ad NS, ita NR ad NV.

Rectangulum ergo sub HN in NV æquale est rectangulo sub NS in NR, ideoque rectangulum sub HN in NV bis æquatur rectangulo sub SN in NR bis : quare quadratum HR æquatur quadratis HN, NR muletatis rectangulo $<$ sub $>$ HN $<$ in $>$ NV bis.

Quadratum vero NR probatum est majus esse quadrato NV : ergo quadratum HR majus est quadratis HN, NV muletatis rectangulo $<$ sub $>$ HN $<$ in $>$ NV bis. Sed quadrata HN, NV muletata rectangulo $<$ sub $>$ HN $<$ in $>$ NV bis æqualia sunt, ex Euclide, quadrato rectæ HV : ergo quadratum HR quadrato HV majus est, ideoque recta HR major rectâ HV. Quod secundo loco fuit probandum.

Quod si punctum R sumatur ex parte semidiametri AN, licet rectæ MR, RH sint in directum et rectam lineam constituant, ut in secunda figura (*fig.* 110), — demonstratio enim est generalis in quolibet casu — idem continget : hoc est, rectarum PR, RH summa erit major summâ rectarum IN, NH.

Fiat, ut supra,

ut MN radius ad DN, ita RN ad NO,

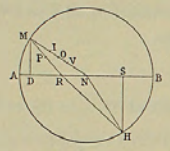
et

ut DN ad NS, ita NO ad NV :

patet rectam RN esse majorem rectâ NO, rectam vero NO esse majorem rectâ NV.

Quadratum MR æquatur quadratis MN, NR mulctatis rectangulo DNR bis sive, ex superiori ratiocinio, rectangulo MNO bis. Quum autem quadratum NR sit majus quadrato NO, ergo quadratum MR erit majus quadratis MN, NO mulctatis rectangulo MNO bis; sed quadrata MN, NO, mulctata rectangulo MNO bis, æquantur quadrato

Fig. 110.



rectæ MO : ergo quadratum rectæ MR quadrato rectæ MO majus erit, ideoque recta MR erit etiam major rectâ MO.

Quum autem sit, ex constructione,

ut DN ad NS, ita MN ad IN et ita NO ad NV,

ergo

ut MN ad IN, erit NO ad NV,

et, vicissim,

ut MN ad NO, ita erit NI ad NV,

et, dividendo,

ut MO ad ON, ita IV ad VN,

et, vicissim,

ut MO ad IV, ita ON ad NV, sive DN ad NS, sive MR ad RP.

Probatum est autem MR ipsâ MO esse majorem : ergo PR rectâ IV major erit. Superest ergo probandum, ut ex omni parte constet propositum, rectam RH esse majorem summâ duarum rectarum HN et NV; quod ex prædictis est facillimum.

Quadratum enim RH æquatur quadratis HN, NR una cum rectangulo sub SN in NR bis sive, ex prædemonstratis, una cum rectangulo sub HN in NV bis; quadratum autem NR est majus quadrato NV : ergo

quadratum HR majus est quadratis HN, NV una cum rectangulo sub HN in NV bis. Unde sequitur rectam RH, ex superius demonstratis, esse majorem summâ rectarum HN, NV.

Patet itaque rectas PR, RH (sive unicam rectam PRH quando id contingit) esse semper majores duabus rectis IN, NH. Quod erat demonstrandum.

NOVUS SECUNDARUM
ET
ULTERIORIS ORDINIS RADICUM
IN ANALYTICIS USUS.

Reductio secundarum et ulterioris ordinis radicum ad primas, quæ maximi est in Algebraicis momenti, unicam pro fundamento agnoscit duplicatæ æqualitatis analogiam, eamque, quoties opus fuerit, iterandam progressus ipse quæstionis ostendit.

Proponatur

A cubus + E cubo æquari Z solido;

item

B in A + E quad. + D in E æquari N quad.

Ut secunda radix devolvatur ad primam, hæc sunto præcepta :

Quæcumque a secunda radice adficientur homogenea in unam æquationis partem transeunto : ut, in superiori exemplo, quum

A*c*. + E*c*. æquetur Z*s*.,

ergo

Z*s*. — A*c*. æquabitur E*c*.

Similiter, quum

B in A + E*q*. + D in E æquetur N*q*.,

ergo

N*q*. — B in A æquabitur E*q*. + D in E.

In utraque igitur æquatione homogenea abs E (sive abs secunda radice) adfecta unam æquationis partem constituunt; si igitur duplicata

ejusmodi æqualitas ad analogiam revocetur, erit

ut $Zs. - Ac.$ ad $Ec.$, ita $Nq. - B$ in A ad $Eq. + D$ in E.

Quum itaque factum sub extremis comparabitur facto sub mediis, tanquam ipsi æquale, omnia homogenea divisionem admittent per E (sive per secundam radicem); ut patet, quia secundus et quartus terminus abs E adficiuntur.

Erit nempe

$$Zs. \text{ in } Eq. - Ac. \text{ in } Eq. + Zs. \text{ in } D \text{ in } E - Ac. \text{ in } D \text{ in } E$$
$$\text{æquale} \quad Nq. \text{ in } Ec. - B \text{ in } A \text{ in } Ec.$$

Omnia dividantur toties per E, donec aliquod ex homogeneis adfectione sub E omnino liberetur : erit

$$Zs. \text{ in } E - Ac. \text{ in } E + Zs. \text{ in } D - Ac. \text{ in } D$$
$$\text{æquale} \quad Nq. \text{ in } Eq. - B \text{ in } A \text{ in } Eq.$$

Quo peracto, nova hæc æquatio uno ad minus gradu depressior erit (quoad secundam radicem) quam elatior ex duabus primum propositis : patet nempe elatiorem ex duabus primum propositis adfici sub cubo E, istius vero nullam abs E adfectionem excedere Eq.

Nec tamen sic quiescendum, sed iteranda duplicatæ æqualitatis analogia, donec adfectio secundæ radicis fiat tantum sub latere, ut asymmetria omnis evanescat.

Præparetur itaque ultima hæc æquatio juxta modum præscriptum, ut homogenea sub E quomodocumque adfecta unam æquationis partem faciant. Erit itaque

$$Zs. \text{ in } D - Ac. \text{ in } D \quad \text{æquale}$$
$$Nq. \text{ in } Eq. - B \text{ in } A \text{ in } Eq. - Zs. \text{ in } E + Ac. \text{ in } E.$$

Sed, ex duabus primum propositis, quæ depressior est, exhibet æquationem sequentem, ut diximus :

$$Nq. - B \text{ in } A \quad \text{æquale} \quad Eq. + D \text{ in } E.$$

Revocetur rursum ad analogiam duplicata ista æqualitas : erit itaque

$Zs. \text{ in } D - Ac. \text{ in } D$ ad $Nq. \text{ in } Eq. - B \text{ in } A \text{ in } Eq. - Zs. \text{ in } E + Ac. \text{ in } E$
ut $Nq. - B \text{ in } A$ ad $Eq. + D \text{ in } E$

Quum itaque factum sub extremis æquabitur facto sub mediis, tanquam ipsi æquale, omnia homogenea poterunt dividi per E, ut supra demonstratum est : erit nempe

$$Zs. \text{ in } D \text{ in } Eq. + Zs. \text{ in } Dq. \text{ in } E - Ac. \text{ in } D \text{ in } Eq. - Ac. \text{ in } Dq. \text{ in } E$$
$$\text{æquale} \quad Nqq. \text{ in } Eq. - Nq. \text{ in } B \text{ in } A \text{ in } Eq. - Nq. \text{ in } Zs. \text{ in } E$$
$$+ Nq. \text{ in } Ac. \text{ in } E - B \text{ in } A \text{ in } Nq. \text{ in } Eq.$$
$$+ Bq. \text{ in } Aq. \text{ in } Eq. + B \text{ in } Zs. \text{ in } A \text{ in } E - B \text{ in } Aqq. \text{ in } E,$$

et, omnibus abs E divisis, fiet tandem

$$Zs. \text{ in } D \text{ in } E + Zs. \text{ in } Dq. - Ac. \text{ in } D \text{ in } E - Ac. \text{ in } Dq.$$
$$\text{æquale} \quad Nqq. \text{ in } E - Nq. \text{ in } B \text{ in } A \text{ in } E - Nq. \text{ in } Zs. + Nq. \text{ in } Ac.$$
$$- B \text{ in } A \text{ in } Nq. \text{ in } E + Bq. \text{ in } Aq. \text{ in } E + B \text{ in } Zs. \text{ in } A - B \text{ in } Aqq.$$

Quo peracto, nova hæc æquatio unius adhuc gradûs depressionem (quoad secundam radicem) lucrata est, ut hic patet : quum enim homogenea sub E adfecta in unam æquationis partem transierint, fiet

$$Zs. \text{ in } Dq. - Ac. \text{ in } Dq. + Nq. \text{ in } Zs. - Nq. \text{ in } Ac. - B \text{ in } Zs. \text{ in } A + B \text{ in } Aqq.$$
$$\text{æquale} \quad Nqq. \text{ in } E - Nq. \text{ in } B \text{ in } A \text{ in } E - B \text{ in } A \text{ in } Nq. \text{ in } E$$
$$+ Bq. \text{ in } Aq. \text{ in } E - Zs. \text{ in } D \text{ in } E + Ac. \text{ in } D \text{ in } E.$$

Neque ulterius progrediendum, quum jam secunda radix sub latere tantum appareat, ideoque, solo applicationis beneficio, ipsius E relatio ad primam radicem manifestabitur : ut hic

$$\frac{Zs. \text{ in } Dq. - Ac. \text{ in } Dq. + Nq. \text{ in } Zs. - Nq. \text{ in } Ac. - B \text{ in } Zs. \text{ in } A + B \text{ in } Aqq.}{Nqq. - Nq. \text{ in } B \text{ in } A - Nq. \text{ in } B \text{ in } A + Bq. \text{ in } Aq. - Zs. \text{ in } D + Ac. \text{ in } D}$$
æquabitur E,

quo tendendum erat.

Ut igitur duæ primum propositæ radices in unam transeant, resu-

matur ex duabus prioribus æquationibus quam volueris; depressior tamen idonea magis, ne altius ascendat æquatio.

Quum itaque in una ex æquationibus primum propositis

B in A + E*q*. + D in E æquetur N*q*.,

loco ipsius E subrogetur jam agnitus ejus valor per relationem vel ad terminos cognitos vel ad priorem radicem, quæ in exemplo proposito est A; et rursum sub hac nova specie ordinetur æquatio. Manifestum est evanuisse omnino secundam radicem et in æquationem ab omni asymmetria liberam itum esse, methodumque esse generalem.

Si enim plures duobus terminis proponantur incogniti, methodus iterata tertias, si opus fuerit, radices ad primas et secundas, deinde secundas ad primas, etc., eodem prorsus artificio reducet.

APPENDIX AD SUPERIOREM METHODUM (1).

Superiori methodo debetur perfecta et absoluta asymmetriarum in Algebraicis expurgatio; neque enim symmetrica climactismus Vietæa (2), quæ unicum hactenus ad asymmetrias fuit remedium, efficax satis et sufficiens inventa est.

Proponatur quippe

lat. cub. (B in A*q*. — Ac.) + lat. quad. (A*q*. + Z in A)
+ lat. quad. quad. (Dc. in A — A*qq*.) + lat. quad. (G in A — A*q*.)
æquari rectæ N.

Qua ratione ab asymmetriis hujusmodi extricabit se et quæstionem suam analysta Vietæus? An non potius, dum crescet labor, crescet difficultas, et tandem, fatigatus et delusus, novum ab Analytice lumen exposcet?

(1) *Voir* la lettre de Fermat à Carcavi, du 20 août 1650, lettre qui accompagnait l'envoi de tout le Traité. *Voir* également le billet de Fermat dans la lettre de Descartes (éd. Clerselier, III, 83) du 18 décembre 1648, billet qui semble aussi avoir été adressé primitivement à Carcavi.

(2) Viète, *De emendatione æquationum*, cap. V (éd. Schooten, p. 140).

Hoc sane luculenter superior methodus subministrat : unicum exemplum, idque brevissimum, adjungimus; recluso enim semel fundamento, cætera apertissime manifestantur.

Proponatur

lat. cub. (Z in A*q*. — Ac.) + lat. cub. (Ac. + B*q*. in A) æquari D.

Ita primum ordinetur æquatio ut unica ex asymmetriis unam illius partem faciat : fiat nempe

D — lat. cub. (Ac. + B*q*. in A) æqualis lat. cub. (Z in A*q*. — Ac.).

Hoc peracto, omnes termini asymmetri a secundis et ulterioribus, si opus fuerit, radicibus denominentur, excepto eo quem unicum in unam æquationis partem rejecimus : fingatur, verbi gratia,

lat. cub. (Ac. + B*q*. in A) esse E.

Hac enim via ad eam, quam injungit superior methodus, duplicatæ æqualitatis analogiam deveniemus : erit nempe

D — E æqualis lat. cub. (Z in A*q*. — Ac.),

et, omnibus in cubum ductis,

Dc. + D in E*q*. ter — D*q*. in E ter — Ec. æquabitur Z in A*q*. — Ac.

Sed, ex hypothesi,

Ec. æquatur Ac. + B*q*. in A.

Ergo oritur duplicata æqualitas et in utraque, juxta methodum, termini abs secunda radice adfecti in unam æquationis partem sunt conjiciendi : erit nempe

Z in A*q*. — Ac. — Dc. æqualis D in E*q*. ter — D*q*. in E ter — Ec.;

item

Ac. + B*q*. in A æqualis Ec.

Iteretur toties operatio donec secunda radix ad primam revocetur;

quo peracto, loco ipsius E, novus ipsius valor usurpetur et sub hac nova specie quævis ex prioribus æqualitatibus ordinetur : omnia constabunt.

Nec inutilia adjungo, aut moror in superfluis : quis enim non videt singulos terminos asymmetros posse eadem ratione, si non sufficiant secundæ radices, tertiis, quartis, etc. in infinitum insigniri? Quo casu, quartam, sive ultimam, radicem tanquam secundam considerabis; reliquas vero tantisper vel pro primis vel pro terminis cognitis habebis, donec ultima illa omnino evanuerit sive ad primas, secundas et tertias reducta fuerit. Simili prorsus artificio tertias reduces ad secundas et primas, ac denique secundas ad primas, ut jam sæpius inculcavimus.

Nulla est ergo asymmetria quam non cogat exsulare hæc methodus, cujus usus præsertim eximius, imo et necessarius, in numerosa potestatum resolutione. Statim enim nempe atque asymmetriæ evanuerint, non deerit Vietæum (1) in arithmeticis quæstionibus artificium et, si veris explicari numeris quæstio non possit, proximæ quantumvis libuerit suppetent solutiones, quum tamen proximas veris solutiones nullo pacto, quamdiu duraverint asymmetriæ, consequi possis.

Sed et ulterius inquirenti obtulit se mira ad locorum superficialium plenam et perfectam notitiam exinde derivanda methodus, quæ et iis problematis inservit, in quibus dantur ab initio plura quam requirat ipsa problematis construendi determinatio.

Quod ut clarius intelligas, sunt quædam problemata quæ unicam tantum agnoscunt positionem ignotam, quæ vocari possunt determinata, ad differentiam inter ipsa et problemata localia constituendam. Sunt alia quædam quæ duas positiones ignotas habent et ad unicam tantum nunquam possunt reduci : ea problemata sunt localia.

In prioribus illis unicum tantum punctum inquirimus, in istis lineam; sed, si problema propositum tres ignotas positiones admittat,

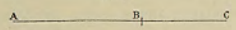
(1) Fermat fait allusion au Traité *De numerosa potestatum purarum atque adfectarum ad exegesin resolutione* de Viète (éd. Schooten, p. 162-228).

problema hujusmodi non jam punctum duntaxat, aut lineam tantum, sed integram superficiem quæstioni idoneam investigat : indeque oriuntur loci ad superficiem, etc. in reliquis. Sicut autem in prioribus data ipsa sufficiunt ad determinationem quæstionis, ita in secundis unum datum deest ad determinationem, in tertiis vero duo tantum data determinationem possunt complere.

At contra potest fieri ut, quemadmodum in his casibus data aut sufficiant aut desint, ita in plerisque aliis data ipsa superflua sint et abundent : exemplo res fiet evidens.

In recta AC (*fig.* 94) data, datur rectangulum ABC; datur etiam differentia quadratorum AB et BC.

Fig. 94.



In hoc casu plura patet offerri data quam determinatio ideoque solutio ipsius quæstionis exposcat. Frequentissimus tamen horum problematum, in Physicis præsertim et apud artifices, est usus, eaque omnia per applicationem simplicem beneficio nostræ methodi expediuntur, neque recurrendum ad extractionem radicum, licet æquationes ad quasvis potestates ascendant.

Proponatur, verbi gratia, in quadam quæstione,

A *cub.* + B *quad.* in A æquari Z *quad.* in D;

item etiam, quum ex hypothesi quæstio supponatur esse abundans (has enim quæstiones *abundantes*, sicut locales *deficientes*, appellare consuevimus),

G *sol.* in A — A *quad. quad.* æquari B *quad.* in N *pl.*

Duplicata hæc æqualitas ad analogiam revocetur et, ex præscripta methodo, consideretur unica nostra radix ignota, quæ in hoc exemplo est A, sicut in præcedentibus secundam aut ulterioris ordinis radicem consideravimus, et toties, juxta methodum, iteretur operatio donec adfectio sub A per simplicem applicationem possit expediri, sive non

tam ad primas radices quam ad terminos omnino notos reduci. Patebit solutio problematis simplicissima, nec analystam deinceps æquationes quadraticæ, cubicæ, quadratoquadraticæ, etc. remorabuntur.

Lubet et, coronidis loco, famosi illius problematis :

Datis ellipsi et puncto extra ipsius planum, superficiem conicam, cujus vertex sit punctum datum et basis ellipsis data, ita plano secare ut sectio sit circulus,

solutionem, quæ huic methodo debetur, indicare, eamque simplicissimam.

Eo deducunt quæstionem Geometræ ut, sumptis quinque punctis ad libitum in ellipsi et junctis rectis a vertice conicæ superficiei ad puncta illa, per junctas quinque rectas circulum describant; inveniuntque problema hoc pacto esse solidum. Sed, quum puncta in ellipsi sint infinita, si loco quinque punctorum sumantur sex, fiet problema abundans et orietur necessario duplicata æqualitas, quæ tandem ignotam quantitatem per simplicem applicationem patefaciet.

Eadem ratione, si detur quæcumque linea curva in plano aut etiam superficies localis, cujuscumque tandem gradûs sint, invenientur diametri et axes figurarum; imo et in superficie locali exhibebuntur omnes omnino curvæ loci superficialis constitutivæ, etc.

Exponatur, verbi gratia, superficies conica, cujus vertex sit punctum datum, basis vero parabole aut ellipsis cubica aut quadratoquadratica aut ulterioris in infinitum gradus. Potest hujusmodi superficies conica, beneficio istius methodi, ita secari ut in ea exhibeatur quælibet curva quæ, ex constitutione figuræ, in ea superficie potest describi, et problematis solutio semper evadet simplicissima.

Nihil addimus de tangentibus curvarum (1) et plerisque aliis hujus methodi usibus : fient quippe obvii nec sedulam indagatoris analytici meditationem effugient.

(1) *Voir* plus haut, page 153.

〈 AD ADRIANI ROMANI PROBLEMA 〉 (1).

Viro Clarissimo Christiano HUGGENIO P. F. S. T. (2).

Dum Francisci Vietæ (3) celebre illud *Ad problema Adriani Romani responsum* accuratius anno superiore examinarem, et in verba capitis sexti incidissem quibus profitetur subtilis ille mathematicus haud scire se « an ipsemet » Adrianus « ejus quam proposuit æquationis genesim et symptomata pernoverit », subvenire cepit an ipsemet quoque Vieta æquationis illius famosæ satis generalem tradiderit aut invenerit solutionem.

Proponentis quippe Adriani Romani verba hæc sunt, emendante Vieta (4) :

Detur in numeris algebricis

45 (1) − 3795 (3) + 9 5634 (5) − 113 8500 (7)
+ 781 1375 (9) − 3451 2075 (11) + 1 0530 6075 (13) − 2 3267 6280 (15)
+ 3 8494 2375 (17) − 4 8849 4125 (19) + 4 8384 1800 (21) − 3 7865 8800 (23)
+ 2 3603 0652 (25) − 1 1767 9100 (27) + 4695 5700 (29) − 1494 5040 (31)
+ 376 4565 (33) − 74 0259 (35) + 11 1150 (37) − 1 2300 (39)
+ 945 (41) − 45 (43) + 1 (45) *æqualis numero dato;*

quæritur valor radicis.

(1) Ce morceau, qui, comme le précédent, concerne les travaux de Fermat sur Viète, a été publié par M. Ch. Henry (*Recherches, etc.*, p. 211-213) d'après le manuscrit Huygens 30 de l'Université de Leyde.

(2) *Lisez* : Petrus Fermatius, senator Tolosanus.

(3) Viète, édition Schooten ou des Elzévirs, pages 305-324.

(4) De fait, Fermat ne cite exactement ici ni l'énoncé d'Adrien Romain, dont il a toutefois conservé les notations, ni la formule adoptée par Viète, page 308.

Sane perquam eleganter et doctissime, suo more, quæstionem propositam abduxit Vieta ad sectiones angulares et tabulam feliciter construxit, pag. 318 editionis Elzevirianæ (1), ad quotlibet in infinitum terminos, methodo qua usus est, facile extendendam, cujus beneficio dignoscitur quænam æquationes ad speciales angulorum sectiones pertineant.

Si enim, in sedibus numerorum imparium, sumatur primo

$$1\,C - 3\,N \quad \text{æqualis} \quad \text{numero dato}$$

qui non sit major binario, reducitur quæstio ad trisectionem anguli. Si deinde

$$1\,QC - 5\,C + 5\,N \quad \text{æquetur} \quad \text{numero dato}$$

qui non sit etiam binario major, reducitur quæstio ad quintusectionem anguli. Si

$$1\,QQC - 7\,QC + 14\,C - 7\,N \quad \text{æquetur} \quad \text{numero dato}$$

qui non sit item binario major, reducitur quæstio ad septusectionem; et si tabulam in infinitum extendas, juxta methodum a Vieta præscriptam, terminus æquationis ab Adriano propositæ erit quadragesimus quintus tabulæ, et quæstionem ad inveniendam quadragesimam quintam anguli dati partem deducet.

Verùm observandum est in his omnibus æquationibus contingere, ut iis solum ipsarum casibus inserviant sectiones angulares et methodus Vietæ, in quibus numerus datus, cui proponitur æquandus quilibet in numeris algebricis tabulæ terminus, binarium non excedit, ut jam diximus : si enim numerus datus sit binario major, silet statim omne sectionum angularium mysterium et ad quæstionis propositæ solutionem inefficax dignoscitur.

Proposuerat tamen generaliter Adrianus *dato termino posteriore, inve-*

(1) Théorème V du Traité de Viète : la Table, poussée seulement jusqu'au neuvième terme, et qui se trouve à la page 319, donne en fait le développement de $2\cos nx$ suivant les puissances de $2\sin x$, si n est pair, ou de $2\cos x$, si n est impair. Le premier membre de l'équation d'Adrien Romain est précisément le développement de $2\cos 45x$ suivant les puissances de $2\cos x$.

niendum esse priorem : aliunde igitur quam a Vieta et a sectionibus angularibus petendum auxilium.

Proponatur, in primo casu, $1\,C - 3\,N$ æquari numero qui non sit binario major, reducitur quæstio ad trisectionem, ut jam indicavimus. Sed, si $1\,C - 3\,N$ æquetur 4 vel alteri cuilibet numero binario majori, tunc æquationis propositæ solutionem per methodum Cardani analystæ expediunt. An autem, in ulterioribus in infinitum casibus, solutiones per radicum extractionem fieri possint, nondum ab analystis tentatum fuit; quidni igitur in hac parte Algebram liceat promovere, tuis præcipue, Huggeni Clarissime, auspiciis, quem in his scientiis adeo conspicuum eruditi omnes merito venerantur (1)?

Proponatur itaque

$$1\,QC - 5\,C + 5\,N \quad \text{æquari} \quad \text{numero } 4$$

vel alteri cuilibet binario majori. Obmutescet in hoc casu methodus Vietæ; hoc itaque, ut generaliter Adriano proponenti satisfiat, confidenter pronuntiamus : in omnibus omnino tabulæ prædictæ casibus, quoties numerus datus est binario major, solutiones propositæ quæstionis per extractionem radicum commodissime dari posse.

Observavimus quippe, imo et demonstravimus, in omnibus illis casibus, quæstiones posse deduci, sicut in cubicis ad quadraticas a radice cubica, ex methodo Cardani et Vietæ (2), sic in quadratocubicis ad quadraticas a radice quadratocubica, in quadratoquadratocubicis ad quadraticas a radice quadratoquadratocubica, et ita uniformi in infinitum progressu.

Sit

$$1\,C - 3\,N \text{ æqualis } 4,$$

(1) Lors de l'envoi par Fermat de ce travail (en 1661?), Huygens était déjà célèbre, non seulement pour ses découvertes astronomiques et son application du pendule aux horloges, mais pour ses travaux de Mathématique pure, quoiqu'on n'eût imprimé de lui que les *Theoremata de quadratura hyperboles, ellipsis et circuli* (1651) et le Traité *De ratiociniis in ludo aleæ* (1657).

(2) On sait qu'en fait la méthode de Viète (*De emendatione æquationum*, cap. VI) n'est pas précisément identique à celle de Cardan ou plutôt de Ferrari (*Hieronymi Cardani Ars magna sive de regulis algebraicis*, 1545).

verbi gratia. Norunt omnes radicem quæsitam, ex methodo prædicta, æquari

radici cubicæ binomii $2+\sqrt{3}$ + radice cubica apotomes $2-\sqrt{3}$.

Sed proponatur, in exemplo Vietæ et Adriani,

$$1\,QC-5\,C+5\,N \quad \text{æquari} \quad 4,$$

vel alteri cuilibet numero binario majori.

Fingemus, perpetuâ et ad omnes tabulæ casus producendâ in infinitum methodo, radicem quæsitam esse $\frac{1\,Q+1}{1\,N}$, cujus beneficio resolvendo hypostases, evanescent semper homogenea simplici per extractionem radicum quæstionis resolutioni contraria; et, in hoc casu ad exemplum præcedentis, radix proposita æquabitur

radici quadratocubicæ binomii $2+\sqrt{3}$
+ radice quadratocubica apotomes $2-\sqrt{3}$.

Si

$$1\,QQC-7\,QC+14\,C-7\,N,$$

qui est numerus tabulæ septimus apud Vietam (ad exponentem namque maximæ potestatis, qui est in hoc casu 7, respicimus), æquetur similiter numero 4, fingatur, ut supra, radix quæsita esse $\frac{1\,Q+1}{1\,N}$: evanescent pariter in hoc casu homogenea omnia solutioni per extractiones radicum adversa, et radix quæsita æquabitur

radici quadratoquadratocubicæ binomii $2+\sqrt{3}$
+ radice quadratoquadratocubica apotomes $2-\sqrt{3}$;

et sic in infinitum.

Quod tu, Vir Eruditissime, non solum experiendo deprehendes, sed et demonstrando, quandocumque libuerit, assequeris : ea enim est æquationum ex tabula Vietæ derivandarum specifica proprietas, ut semper ipsarum solutiones, in iis casibus in quibus homogeneum

comparationis est binario majus, simplices omnino extractionis radicum beneficio evadant.

Vel igitur numerus datus, termino tabulæ analyticæ æquandus, est binarius vel minor binario vel eodem binario major.

Primo casu semper radix proposita est ipse binarius.

Secundo devolvitur quæstio proposita secundum Vietam ad angulares sectiones.

Tertio per nostram methodum jam expositam, hoc est per extractionem radicum, facile expeditur.

Sit itaque numerus ille analyticus Adriani superius expositus

$$45\,①-379\,⑤ \text{ etc.} \quad \text{æqualis} \quad \text{numero } 4,$$

radix quæsita erit

radix quadragesimæ quintæ potestatis binomii $2+\sqrt{3}$
+ radice quadragesimæ quintæ potestatis apotomes $2-\sqrt{3}$.

Nec amplius in re perspicua et jam satis exemplificata immorandum, nisi quod monendum superest : extractionem radicis quadragesimæ quintæ potestatis, sive inventionem quadraginta quatuor mediarum proportionalium inter duas quantitates datas, expediri facillime per extractionem radicis cubicæ bis factam et extractionem radicis quadratocubicæ semel : quod numeri 5 et 9, qui numerum 45 metiuntur, satis indicant : 5 enim ad radicem quadratocubicam refertur et 9 ad radicem cubicam bis sumptam : ternarius enim, qui est cubi exponens, bis ductus novenarium producit.

Ideoque, per inventionem duarum mediarum proportionalium inter duas bis factam et inventionem quatuor mediarum inter duas semel, inveniuntur quadraginta quatuor mediæ et quæstioni nostræ satisfit, quemadmodum Vieta inventionem sectionis anguli in 45 partes, quæ est quæstio vel æquatio Adriani, ad æquationem cubicam bis factam et ad quadratocubicam semel, sive ad duplicem trisectionem et ad unicam quintusectionem, abduxit.

Nihil de multiplicibus æquationis vel quæstionis propositæ solutionibus adjungimus; primogenitam tantum repræsentamus, de reliquis, quarum operosior est disquisitio, aliàs fortasse, si otium suppetat, fusius acturi.

Vale, Vir Clarissime, et me ama.

〈 AD BON. CAVALIERII QUÆSTIONES RESPONSA 〉 [1].

Dudum est ex quo, ad similitudinem *paraboles* Archimedeæ, *reliquas in infinitum quadravimus in quibus abscissæ a diametro sunt inter se ut quævis applicatarum potestates*. Hanc scientiam, primis jam olim a nobis adinventam, Domino de Beaugrand aliisque communicavimus; fatendum tamen Dominum de Roberval, qui nobis indicantibus hujusmodi quæstiones est aggressus, earum solutiones suopte ingenio, quod perspicax et in his scientiis felicissimum habet, reperiisse.

Sed et pariter quoque centra gravitatum in his figuris et ab ipsis compositis deteximus, idque methodo nobis peculiari [2], cujus etiam beneficio tangentes in lineis quibuscumque curvis, ipsarumque

(1) Inédit, d'après deux copies, sans titre (l'une ancienne, l'autre d'Arbogast), dans les manuscrits du prince Boncompagni. — Ce morceau, adressé à Cavalieri par l'intermédiaire de Mersenne avant 1644, résume les premiers travaux de Fermat sur les quadratures et cubatures, travaux dont il n'a d'ailleurs développé plus tard qu'une partie dans son dernier Traité : *De æquationum localium transmutatione, etc.*

Mersenne a reproduit presque textuellement la plus grande partie de ce morceau dans la *Præfatio ad Mechanica*, IV, de ses *Cogitata Physicomathematica*, où, venant de parler des quadratures obtenues par Roberval, qu'il appelle *noster Geometra*, il s'exprime ainsi sur les travaux de Fermat :

« Generalem etiam regulam vir alius summus invenit quâ prædicta solvit, non solùm quando partes diametri cum applicatarum potestatibus conferuntur, sed etiam cùm quælibet partium diametri potestates cum quibuslibet potestatibus applicatarum comparantur : quæ quia satis commodè figurâ præcedenti possunt eo modo intelligi quo ipse voluit, me requirente, Bonaventuræ Cavalliero Geometræ subtilissimo innotescere, iisdem Lector noster perfruatur. »

Il termine comme suit la reproduction du texte de Fermat (d'ailleurs sur la même figure) :

« Si vero figura circumvolvatur circa EF, solidum quæratur, non simplex, uti superiora, sed compositum, cujus rationem ad cylindrum ambiens, et centrum gravitatis vir idem summus, et noster Geometra dudum eruêre : a quibus tam omnium curvarum tangentes, quàm areas, solida, et centra gravitatis omnium figurarum curvis, et rectis comprehensarum, posses accipere. »

(2) *Voir* plus haut, page 136.

asymptotos, imo et quæcumque ad inventionem maximæ et minimæ pertinent problemata, feliciter construximus.

Sed ad rem : quærit eruditissimus Bonaventura Cavalieri *quid de prædictis quadrationibus sit definiendum*. Huic operi regulam generalem aptavimus, cujus ope non tantum quando partes diametri cum potestatibus applicatarum conferuntur, solutionem damus, sed et quum quælibet partium diametri potestates cum quibuslibet applicatarum potestatibus comparantur : ita enim generaliter pronuntiamus.

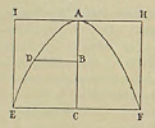
Sit figura quævis parabolica, si placet, EAF (*fig.* III), sitque, exempli causa,

ut cubus CA ad cubum BA,
ita quadratoquadratum EC ad quadratoquadratum DB.

Sumo exponentes potestatum tam in applicatis quam in diametro. Exponens quadratoquadrati est 4 in applicatis, exponens cubi in diametro est 3.

Aio igitur parallelogrammum EH esse ad figuram EAF ut summa

Fig. III.



exponentium ambarum potestatum ad exponentem potestatis applicatarum. Erit igitur in hoc exemplo

parallelogrammum ambiens ad figuram EAF ut 7 ad 4.

Hinc patet, si sit, verbi gratia,

ut quadratoquadratum EC ad quadratoquadratum DB,
ita CA simpliciter ad AB,

quum exponens lateris sit unitas, ideo

parallelogrammum ad figuram hoc casu esse ut 5 ad 4.

Nec est dissimilis in omnibus omnino hujusmodi figuris in infinitum progressus.

Verum igitur est quod dubitanter proponebat Vir doctissimus, nempe quum potestates applicatarum cum longitudine tantum portionum diametri, sive, ut loquuntur analystæ, cum latere conferuntur :

parallelogrammum esse
- trianguli duplum,
- ad parabolen ut 3 ad 2,
- ad parabolen cubicam ut 4 ad 3,
- ad quadratoquadraticam ut 5 ad 4,
- etc., in infinitum.

Sed *si, manente recta* CA, *figura circumducatur ut fiat solidum, invenietur proportio cylindri* EH *ad hujusmodi solidum*, hoc pacto :

Summa dupli exponentis potestatis in diametro et exponentis potestatis in applicatis semel sumpti, ad exponentem potestatis in applicatis est ut cylindrus ad solidum.

Exemplum : esto

ut cubus EC ad cubum DB, ita quadratum CA ad quadratum BA.

Exponens quadrati in diametro est 2, cujus duplum 4; junctum 3, exponenti potestatis in applicatis semel sumpto, facit 7 : est igitur

ut 7 ad 3 (exponentem potestatis in applicatis), ita cylindrus ad solidum.

Quo posito, secundæ quæstioni fit satis.

Centra gravitatum, in omnibus hujusmodi figuris, tam planis quam solidis, secant diametros in proportione vel parallelogrammi ad figuram planam, vel cylindri ad solidum.

Sed, *si figura circumvolvatur circa* EF, fit jam solidum non simplex, ut superiora, sed compositum. Ejus tamen proportio ad cylindrum ambientem facillime ex simplicibus accuratus Geometra derivabit, imo et ipsam centri gravitatis positionem. Quæ tamen omnia, si placeat Domino Bonaventuræ, demonstrative et prolixius exsequemur.

Dum quærit *an curvæ ultra triangulum et parabolen* (1) *possint esse conicæ sectiones*, non videtur meminisse singularum proprietatis : tam enim hoc < est > impossibile quam sectionem sphæræ per planum dare parabolas aut hyperbolas aut ellipses.

Ut, horum vice, problemata quædam ex Italia communicet, ex animo rogamus.

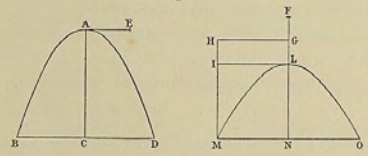
(1) Cavalieri n'avait sans doute posé la question que sur les courbes dont il est parlé plus haut.

〈 AD LALOVERAM PROPOSITIONES 〉 (1).

I.

Sit (*fig.* 112) parabole BAD, cujus axis AC, applicata BC, rectum latus AE. Quæritur ratio curvæ AB ad rectam BC.

Fig. 112.



Esto hyperbole MLO, cujus centrum G, transversum latus FL æquale rectæ AE quæ est rectum datæ paraboles latus; axis hyperboles sit LN,

(1) Ce morceau figure comme *Pars prior* de l'*Appendix secunda* (p. 391 à 395) dans l'Ouvrage : *Veterum Geometria promota in septem de Cycloide libris, et in duabus adjectis Appendicibus. — Autore* Antonio Lalovera *Societatis Jesu. — Tolosæ, apud Arnaldum Colomerium, Regis et Academiæ Tolosanæ Typographum.* M.DC.LX. *Cum privilegio.*

L'attribution à Fermat est justifiée par le préambule ci-après de l'*Appendix secunda* (p. 390-391) :

« Quod olim fecit Conon ille apud Archimedem laudatissimus, cùm aliquot reconditæ tunc Geometriæ theorematum à se primùm repertorum nudam propositionem ad Amicos privatim misit demonstratione penes se pressâ; fortasse quia (quod sæpe evenit) illam è mentis arcano in adversaria nondum transtulerat : hoc ipsum alter sæculi nostri Conon D. de Fermat cùm sæpe aliàs, tum nuperrimè de argumento summè arduo præstitit. Postremas ego istas propositiones, quoniam mirificè illustrant ea quæ de quadraticibus ungularibus in quinto, et de spiralibus lineis in sexto libro scripsi, huic operi attexere (quod singulari ejus modestiæ inopinatum profectò accidet) non dubito : fieri enim nequit quin iis inspectis, quilibet alius meis ausis faveat et de publicâ hac ad Geometrica inventa acces-

rectum vero illius latus sit æquale lateri transverso, ut nempe rectangulum quodvis FNL sit æquale quadrato applicatæ MN. Ad punctum G excitetur perpendicularis GH æqualis rectæ BC in parabola; deinde, ductis rectis HM et LI, ipsis GN et GH parallelis, per punctum M, in quo recta HM occurrit hyperbolæ, ducatur applicata MN.

Aio quadrilaterum MHGL, cujus tria latera sunt rectæ MH, HG, GL, quartum vero latus curva hyperboles ML, esse ad rectangulum IG ut curva parabolica AB est ad rectam BC.

II.

Data sit (*fig.* 113) parabole BAD, cujus axis AC, applicata BC, rectum latus AE; circa applicatam BC volvatur spatium parabolicum BAC. Quæritur dimensio superficiei curvæ illius solidi.

Exponatur hyperbole MNH, cujus axis HI, transversum latus HF æquale quartæ parti lateris recti paraboles, sive rectæ AE; rectum vero illius hyperboles latus sit æquale transverso, ut nempe rectangulum

sione non summopere gaudeat. Ista si pro meis evulgare decrevissem, Vir quidem modestissimus, qui non sibi sed Geometriæ famam quærit, æquissimo rem tulisset animo : id tamen alienissimum à me semper fuit; nec existimo Geometræ gravius quicquam objici posse, quàm quod alicui exprobari aliquando audivi, *totus non es tuus, totus es alienus; et hac ipsa ratione qua Geometra es,*

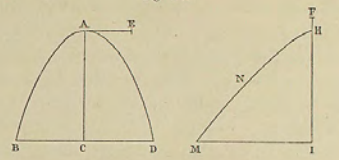
Calvus cùm fueris, eris comatus.

Hunc autem jamdiu esse morem Viro Clariss. ut sua per Amicorum manus Geometrica tacitè spargat, luculenter testatur R. P. Mersenn. prop. 47. Hydr., pag. 193 : *taceo*, inquit, *varios illos περὶ ἐπαφῶν, de maximis et minimis, de tangentibus, de locis planis, solidis et ad sphæram, quos Clariss. Senator Tolosanus D. Fermatius huc ad nos misit.* Plura alia ejus inventa commemorat in præfat. ad Mechanica n. 4, in Ballisticis pag. 57, in Analysi pag. 385. Hinc factum est ut in ore summorum etiam in Italia Geometrarum Torricellii et Cavalerii semper fuerit, quod testatur doctissimus Bullialdus in præfatione opusculi *de Porismatibus* (a). Cæterùm non res tantum, sed verba etiam ipsa sunt integerrimi Senatoris; quibus omnibus de meo adjicio in posteriore parte innumeras curvilinearum figurarum, in quibus est Nicomedea conchoides, quadraturas : quæ omnia si vera esse comprobabuntur, ex totâ istâ appendice confirmabitur illud, quod quidam dixit : *hac tempestate in Geometricis inventum et superatum feliciter esse Bonæ Spei promontorium illud, unde expedita existat navigatio ad inaccessas antè tetragonismorum præsertim regiones.* »

(a) *Voir* plus haut (p. 78) la note 2 de la page 77.

quodvis FIH sit æquale quadrato applicatæ IM. Fiat recta HI æqualis rectæ AC axi paraboles, et ducatur applicata IM. A rectangulo sub CA

Fig. 113.



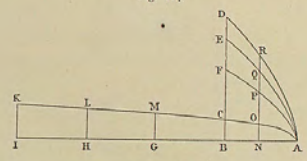
in curvam parabolicam BA auferatur spatium hyperbolicum IMH; reliquum quadretur.

Diagonia illius quadrati erit radius circuli <æqualis> superficiei curvæ solidi quod fit a rotatione spatii ABC circa applicatam BC.

III.

Sit semiparabole quævis AC (*fig.* 114), cujus vertex A, axis AB; ab ea curva formentur aliæ curvæ infinitæ, ut AF, AE, AD, etc.

Fig. 114.



Ita autem formantur : in curva AF, applicata BF est æqualis curvæ parabolicæ CA et, sumpto similiter quovis puncto N, a quo ducatur applicata NP, applicata NP est etiam æqualis curvæ parabolicæ AO. In curva EA, applicata EB æquatur curvæ secundi gradûs FA, et illius applicata QN æquatur portioni <ejusdem curvæ> secundi gradûs PA. Item in curva AD, applicata BD æquatur curvæ tertii gradûs EA, appli-

cata vero NR portioni ejusdem curvæ tertii gradûs QA : et sic in infinitum.

Aio omnes hujusmodi in infinitum curvas rationem habere datam ad parabolas primarias, hoc est simplices; enuntiari quippe potest generale theorema hoc pacto :

Continuetur parabole primaria AC in infinitum per puncta, verbi gratia, M, L, K, et illius axis similiter ad puncta quotlibet G, H, I producatur; fiant rectæ BG, GH, HI singulæ æquales axi AB, et ducantur applicatæ GM, HL, IK.

Curva parabolica AM est ad curvam secundi gradûs AF ut applicata GM ad applicatam BC.

Curva parabolica AL est ad curvam tertii gradûs AE ut recta HL ad BC rectam.

Curva parabolica AK est ad curvam quarti gradûs AD ut applicata KI ad rectam BC.

Et sic in infinitum.

Si vero intelligantur AMG, AFB circa applicatas GM, BF rotari, superficies curva ex rotatione spatii AMG circa rectam GM erit ad superficiem ex rotatione spatii AFB circa rectam BF ut cubus rectæ GM ad cubum rectæ BC.

Similiter superficies curva ex rotatione spatii ALH circa HL erit ad superficiem curvam ex rotatione spatii AEB circa rectam BE ut cubus rectæ HL ad cubum rectæ BC.

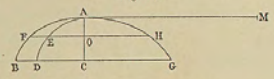
Et sic in infinitum.

IV.

Esto figura semicycloides BA (*fig.* 115, 116), a qua formetur alia curva DA eâ conditione ut applicatæ BC, CD; FO, EO sint inter se semper in eadem ratione data. Demonstrarunt Geometræ (1) semicycloidem BA esse duplam rectæ AC, quæ est diameter circuli cycloidem producentis. Quæritur relatio curvarum AD ad alias lineas aut curvas aut rectas.

Ita autem generaliter definimus : Si hæ novæ curvæ sint intra cycloidem et diametrum circuli generantis, ut contingit in figura quarta (*fig.* 115), omnes hæ curvæ AD earumque portiones erunt æquales

Fig. 115.



curvis parabolicis; quod si novæ curvæ sint exteriores cycloidi, ut in figura quinta (*fig.* 116), omnes hæ curvæ AD earumque portiones datam habebunt rationem ad summam rectarum et circumferentiarum circularium.

Enuntiari potest in figura quarta (*fig.* 115) generalis propositio hoc pacto : Fiat

ut differentia quadratorum BC et CD ad quadratum CD,
ita quadrupla rectæ AC ad rectam AM,

et per punctum A tanquam verticem describatur parabole cujus rectum latus sit AM et axis AC; occurrat autem parabole rectæ BDC productæ in puncto G, rectæ vero FEO in puncto H. Ratio curvæ AG parabolicæ ad curvam AD erit data, eadem nempe potestate quæ est quadrati BC ad differentiam quadratorum BC, CD.

Eadem vero erit ratio portionum AH et AE.

Ratio vero superficierum curvarum quæ oriuntur ex rotatione spatii ACG circa applicatam CG et ex rotatione spatii ADC circa rectam DC eadem est quæ curvarum AG et AD. Similiter in portionibus AOH, AEO circa rectas OH et OE rotatis.

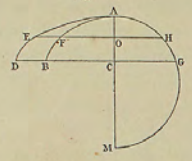
In figura autem quinta (*fig.* 116), in qua curva AD est exterior cycloidi AB, fiat

ut differentia quadratorum CB, CD ad quadratum CD,
ita recta AC ad AM

(1) Fermat et Roberval sur l'énoncé de Wren (*Histoire de la Roulette* dans les *Œuvres de Pascal*, t. V, p. 172-173). La démonstration de Fermat est perdue; Lalouvère (p. 183) en dit : « Hujus rei demonstrationem more antiquorum à Geometra celeberrimi nominis Tolosano subtilissimè elaboratam legi. »

rectæ AC in directum positam; super rectâ AM describatur semicirculus, quem rectæ DBC, EFO secent in punctis G et H. Ratio curvæ

Fig. 116.



AD <ad> summam curvæ circularis AG et rectæ GC dabitur : erit nempe

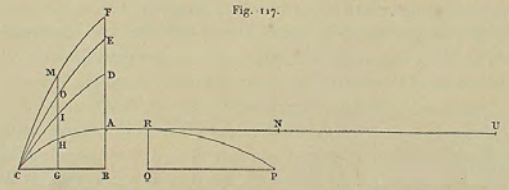
ut quadratum BC ad differentiam quadratorum DC, CB,
ita potestate summa lineæ circularis AG et rectæ GC ad curvam AD,

et similiter summa lineæ circularis AH et rectæ HO in eadem erit ratione ad curvam AE.

V.

Sit in figura sexta (*fig.* 117) parabole AC, cujus vertex A, axis AB,

Fig. 117.



applicata CB; a curva parabolica CA deriventur aliæ in infinitum curvæ CD, CE, CF, simili qua in figura tertia (*fig.* 114) usi sumus methodo, nisi quod in hac terminum applicatæ servamus, in illa vero terminum axis eumdem semper retinemus.

Ducatur nempe GHIOM (*fig.* 117) axi AB parallela : ea erit natura

curvarum hujus speciei, ut recta BD, quæ secat in D curvam CID secundi gradûs, sit æqualis curvæ parabolicæ AC, recta item GI sit æqualis CH portioni parabolicæ; recta autem BE quæ secat <in E> curvam tertii gradûs COE, sit æqualis curvæ DIC secundi gradûs; et sic de cæteris in infinitum, earumque portionibus.

Aio omnes hujusmodi curvas, CD, EC, FC in infinitum, æquales esse curvis parabolicis primariis seu simplicibus, diversis tamen a parabolis quæ æquantur curvis juxta methodum tertiæ figuræ generatis. En itaque theorema generale :

Exponatur parabole RP, cujus axis RQ æqualis axi AB prioris parabolæ, rectum vero latus RU sit duplum recti lateris AN : Aio parabolen RP ita descriptam æqualem esse curvæ CID.

Si vero, manente axe RQ æquali AB, rectum latus RU fiat triplum recti lateris AN, tunc curva parabolica RP erit æqualis curvæ COE.

Si vero, manente semper axe RQ æquali axi AB, rectum latus RU fiat quadruplum recti lateris AN, tunc curva parabolica RP erit æqualis curvæ CMF.

VI.

Si autem circa rectas AB, BD, BE, BF rotentur spatia ACB, DCB, ECB, FCB in infinitum, dantur circuli æquales omnibus et singulis superficiebus curvis solidorum inde oriundorum, eâdem omnino facilitate qua in conoide parabolico, ex parabola AC circa axem AB descripto, circulum curvæ ipsius superficiei æqualem repræsentamus. Ejus vero constructionem non adjungeremus, quum jam ab aliis (1) inventam audierimus (licet eorum scripta hac de re ad nos non pervenerint), nisi quod nostra hæc constructio ad methodum generalem in omnibus conoidibus circa axes BD, BE, BF novarum istarum curvarum in infinitum producendis facillime producitur.

(1) Roberval (d'après Mersenne, *Cogitata physico-mathematica*, 1644, p. 99); Huygens, dans une Lettre à Carcavi du 16 janvier 1659 (comparer *Œuvres de Pascal*, édition de 1779, t. V, p. 403 et 455; *Lettre de A. Dettonville à Monsieur Huygues de Zulichem, en luy envoyant la dimension des Lignes de toutes sortes de Roulettes, lesquelles il montre estre égales à des Lignes Eliptiques*. A Paris, M.DC.LIX).

In figura sexta (*fig.* 117) circa rectam BD rotetur curva CD, superficies curva inde oriunda hoc pacto invenitur :

Fiat, ex superiore methodo, curva parabolica RP æqualis curvæ CID; circa rectam RQ rotetur parabole RP. Superficies conoidis parabolici RPQ ad superficiem conoidis DICB erit ut applicata PQ ad applicatam CB.

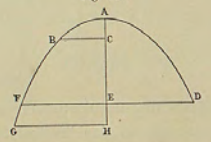
Si PR parabole juxta præcedentem methodum fiat æqualis curvæ COE, conoides parabolicum RPQ dabit superficiem curvam quæ ad superficiem curvam conoidis EOCB erit ut applicata PQ ad applicatam CB.

Et sic in infinitum.

VII.

Sit in figura septima (*fig.* 118) parabole FBAD, cujus axis EA, applicata FE. Quæritur dimensio superficiei curvæ solidi quod fit a spatio ABFE circa axem AE rotato.

Fig. 118.



Fiat AC æqualis quartæ parti recti lateris et applicetur CB; fiat EH æqualis AC et applicetur GH; quadretur CBGH (hoc autem est facile ex Archimede).

Diagonia quadrati spatio CBGH æqualis est radius circuli æqualis superficiei curvæ conoidis FAD circa axem AE.

VIII.

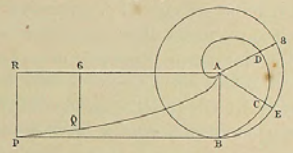
Videat subtilis ille Geometra (1), qui nuper æqualitatem helicis et paraboles demonstravit, an potuerit universalius concipi theorema et

(1) *Lettre de A. Dettonville à Monsieur A. D. D. S., en lui envoyant la démonstration à la manière des anciens de l'égalité des lignes Spirale et Parabolique.* A Paris, M.DC.LVIII. — *Œuvres de Pascal*, t. V, pages 426 à 452.

helices infinitæ cum infinitis parabolis eleganter comparari, sequentis propositionis beneficio generaliter, si libuerit, enuntiandæ et exemplificandæ.

Proponatur (*fig.* 119) helix cujuscumque in infinitum speciei in figura 38 libelli Dettonvillani (1), in qua potestas quævis radii AB ad

Fig. 119.



potestatem similem rectæ AC sit in ratione potestatis cujuslibet circumferentiæ totius BE8B ad potestatem similem portionis pericericæ E8B.

Exponatur separatim parabole cujus semibasis sive ultima applicatarum RP æquetur radio AB, axis vero AR portioni circumferentiæ totius BE8B, cujus numerator æquetur exponenti potestatis diametri AB, denominator verò æquetur aggregato exponentium potestatum diametri AB et circumferentiæ BE8B; denique potestates applicatarum in parabola, quarum exponens æquatur aggregato exponentium potestatum diametri AB et circumferentiæ BE8B, sint inter se ut potestates portionum axis, quarum exponens est æqualis exponenti circumferentiæ BE8B.

Aio helicem ita effictam parabolæ ita constructæ fore semper et in quocumque casu æqualem.

Exempli gratia, proponatur primum helix Archimedea et parabole

(1) La figure que nous reproduisons d'après Lalouvère ne présente pas toutes les complications de celle de Pascal. Fermat cite d'ailleurs le Volume : *Lettres de A. Dettonville contenant quelques-unes de ses Inventions de Géométrie*, — à Paris, chez Guillaume Desprez, rue Saint-Jacques, à l'Image Saint-Prosper, M.DC.LIX, — Volume qui réunit, sous neuf paginations successives, mais avec des planches de figures formant une seule série, les différents écrits publiés sous le nom de Dettonville.

simplex et sit

ut radius AB ad rectam AC,
ita circumferentia tota BE8B ad ejusdem portionem E8B.

Construatur separatim parabole AQP, cujus ultima applicatarum sive basis RP sit æqualis radio AB; axis autem AR sit æqualis portioni circumferentiæ BE8B, cujus numerator sit æqualis exponenti potestatis diametri AB, qui in hoc casu est 1; denominator verò æquetur summæ exponentium potestatum diametri et circumferentiæ, hoc est binario : nam exponens potestatis peripheriæ in hoc casu est etiam 1. Sit itaque AR axis æqualis dimidio circumferentiæ helicis constitutivæ; sit autem in parabola ut potestas applicatæ RP, cujus exponens æquatur summæ exponentium diametri et circumferentiæ, hoc est, in hoc casu, numero 2, ad potestatem similem applicatæ 6Q, ita potestas rectæ AR, cujus exponens æquatur exponenti circumferentiæ BE8B, sive 1 in hoc casu, ad similem potestatem rectæ A6, hoc est : sit

ut quadratum rectæ RP ad quadratum rectæ 6Q,
ita recta RA ad rectam 6A.

Curva parabolica PQA erit æqualis helici BCDA.

Esto jam

ut quadratum AB ad quadratum AC,
ita tota circumferentia BE8B ad portionem E8B :

exponens potestatis diametri AB in hoc casu est 2, circumferentiæ vero, 1. Parabole ita construetur juxta prædictum canonem :

Applicata RP æquabitur radio AB, axis AR æquabitur bessi vel duobus trientibus circumferentiæ BE8B et erit

ut cubus RP ad cubum 6Q, ita recta RA ad rectam 6A.

Hujusmodi vero parabole helici correlatæ æqualis erit.

Esto deinde

ut recta AB ad rectam AC,
ita cubus circumferentiæ BE8B ad cubum portionis E8B.

In parabola, applicata RP æquabitur radio AB, axis vero AR æquabitur

quadranti circumferentiæ BE8B, et erit

ut quadratoquadratum RP ad quadratoquadratum 6Q,
ita cubus RA ad cubum 6A.

Hæc autem parabole huic helici erit æqualis.

Denique sit in helice

ut quadratum radii AB ad quadratum rectæ AC,
ita cubus circumferentiæ BE8B ad cubum portionis E8B.

In parabola huic helici correlata et æquali, applicata RP erit æqualis, ut semper, radio AB, recta vero RA erit æqualis duabus quintis partibus circumferentiæ BE8B, et erit in parabola

ut quadratocubus applicatæ RP ad quadratocubum applicatæ 6Q,
ita rectæ AR cubus ad cubum rectæ 6A.

Nec dissimilis in helicibus et parabolis cujuslibet speciei invicem comparandis in infinitum erit methodus. Helicis autem, sive deminutæ sive auctæ, portiones cum portionibus paraboles correlatæ nullo negotio comparabuntur. Unde sequitur dari intra circulum infinitas numero helices specie et quantitate diversas; imo dantur infinitæ ipsâ circumferentiâ majores : quod inter miracula geometrica potest numerari. Nulla tamen datur quæ non sit minor aggregato circumferentiæ et radii, et nulla etiam quæ non sit radio major (1).

(1) Après ce fragment, le texte de Lalouvère continue par un *Scholium* commençant par ces mots : « *Hactenus Viri Clarissimi propositiones non minus arduæ quam nove* » et finissant par ceux-ci : « *nisi nefas putaremus quicquam hocce in loco demere vel addere tam præclaris Viri doctissimi inventis* ».

On lit encore dans le même Ouvrage (Livre II) :

Page 21 : « *Cyclocylindricam figuram primi nominis* vocamus eam quæ intelligitur in superficie cylindri recti describi eo modo quo circulus in plano, nempe si, pede circini extremo manente in dato superficiei cylindricæ puncto, ipse circinus circumducatur notans in superficie cylindricâ lineam donec ad idem punctum circuitu peracto redeat, quoties iste reditus fuerit possibilis. Circini autem crura si deducta fuerint intervallo diametri baseos cylindri, vocetur *cyclocylindrica primaria* et antonomasticè *cyclocylindrica*; si alio quovis intervallo, dicatur *cyclocylindrica secundaria*. Quod si figatur extra illam superficiem, *nominis secundi* appellabitur.... »

Page 29 : « De hac figurâ quadrandâ ut cogitarem fecit Clarissimus D. de Fermat; postea

enim quàm primum hujus operis librum vulgavi (a), nescio qua se dante occasione significavit mihi invenisse se solidi, motu cujuslibet cyclocylindricæ primi nominis circa basim geniti, proportionem cum cylindro circa eandem basim genito motu rectanguli cujus unum latus sit eadem basis, alterum æquet axem cyclocylindricæ. Ubi primùm solus fui, cœpi mecum cogitare quid istud rei foret, reperique tandem post aliquot dies non tantùm proportionem illam, quam mihi vir optimus non expresserat, sed etiam quadraturam cyclocylindricæ primariæ primi nominis. Hoc, cùm iterum illum alloquerer, ipsi denuntiavi, deque meo inventu pro sua qua me licet immerentem complectitur benevolentia, et pro studio illo quo artium omnium incrementa mirificè fovet, mihi amplè gratulatus est. Aliquot post diebus literis ad D. Carcavi datis inserui quantum hac in re deberem integerrimo illi Senatori, quanti facerem subtilissimam quam mihi tunc communicarat demonstrationem circa proportionem cylindri et solidi... »

Et toujours sur le même sujet, page 34 : « Doctissimus D. de Fermat, methodo subtilitatis prorsus mirabilis, istam proportionem in quacunque primi nominis cyclocylindricâ mihi demonstravit : quam quidem methodum suis in operibus, quæ totâ Europâ enixè expetuntur, edet, uti spes est, Amicorum omnium precibus tandem victus. »

(a) C'est-à-dire après le 21 juillet 1658, mais avant le 4 septembre 1658, date de la réponse faite par Pascal à la lettre Lalouvère à Carcavi. Il faut entendre au reste, pour la question imaginée par Fermat, que la surface du cylindre est développée sur un plan.

DE LINEARUM CURVARUM
CUM LINEIS RECTIS COMPARATIONE
DISSERTATIO GEOMETRICA (1).

Nondum, quod sciam (2), lineam curvam pure geometricam rectæ datæ geometræ adæquarunt. Quod enim a subtili illo mathematico Anglo nuper inventum et demonstratum est : *cycloidem nempe primariam diametri circuli ipsam generantis esse quadruplam*, hoc suam, ex sententia doctissimorum geometrarum (3), videtur habere limitatio-

(1) Cette Dissertation, comme l'Appendice qui suit, a été imprimée du vivant de Fermat, sous le même titre, suivi des indications « Autore M.P.E.A.S. — Tolosæ, apud Arnaldum Colomerium, Regis et Academiæ Tolosanæ Typographum, MDCLX. » et avec une pagination spéciale, à la suite du Traité de Lalouvère sur la cycloïde (*voir* plus haut, p. 199, note 1). La réimpression des *Varia* ne diffère que par la correction des fautes indiquées par les errata de l'édition anonyme et par la substitution de majuscules aux minuscules pour les lettres des figures.

(2) On ne peut mettre en doute l'assertion de Fermat; au moment de l'impression de cet Écrit, il connaît donc la rectification de la cycloïde par Wren, rendue publique en 1658 à l'occasion des problèmes proposés sur cette courbe par Pascal; au contraire, il ignore, non seulement, bien entendu, la découverte de William Neil (reportée à l'année 1657, mais publiée en 1673 seulement par Wallis, *Philosophical Transactions*, p. 6146-6149), mais encore, ce qui peut surprendre réellement, la Lettre de Henri Van Heuraet insérée pages 517-520 de l'édition latine de la *Géométrie* de Descartes par Schooten (Amsterdam, Elzévirs, 1659). Il n'est guère douteux que Fermat n'ait eu bientôt après connaissance de cette Lettre et qu'il ne soit alors applaudi d'avoir caché son nom en publiant un travail pour lequel il avait incontestablement été devancé. Il ne s'agit pas d'ailleurs ici d'une ancienne découverte que Fermat aurait tenue secrète plus ou moins longtemps; sa Dissertation est de fait une réplique au petit Traité de Pascal (Dettonville), de l'*Égalité des lignes spirale et parabolique*, du 10 décembre 1658. Cependant Fermat n'en semble pas moins être le premier qui ait considéré la courbe $y^3 = ax^3$, en généralisant la notion de parabole. *Voir* plus haut, page 195.

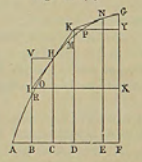
(3) *Lettre de A. Dettonville à Monsieur Hagguens de Zulichem*; Paris, 1659. — *Œuvres de Pascal* (éd. de 1779), tome V, page 413 : « A quoi M. de Sluze ajouta cette belle re-

nem : ii quippe hanc esse legem et ordinem naturæ pronuntiant ut non sinat inveniri rectam curvæ æqualem, quin prius supposita fuerit alia recta alteri curvæ æqualis. Quod quidem in exemplo cycloidis ab ipsis allato ita se habere deprehendunt, nec nos diffitemur, quum constet descriptionem cycloidis indigere æqualitate alterius curvæ cum recta, hoc est, circumferentiæ circuli cycloidem generantis cum recta quæ est basis ipsius cycloidis. Sed quam vera sit hæc, quam statuunt, lex naturæ, et quam periculosum ab uno aut altero experimento statim ad axioma properare, infra patebit : nos enim *curvam vere geometricam, et ad cujus constructionem nulla talis alterius curvæ cum recta æqualitas præcessisse supponatur, rectæ datæ æqualem esse* demonstrabimus et paucis, quantum fieri potuerit, totum negotium absolvemus.

PROPOSITIO I.

Sit, in figura prima (*fig.* 120), *curva quævis* AHMG *in easdem partes cava, exempli causa, una ex parabolis infinitis in qua tangentes extra*

Fig. 120 (1).



curvam cum base AF *et axe* FG *concurrant, et sumatur in hujusmodi curvâ quodvis punctum* H *per quod ducatur tangens* IHK, *in qua sumptis ex utraque parte punctis* K *et* I, *demittantur perpendiculares* IB, KD *in basim* AF, *quæ secent curvam in punctis* R *et* M : *Aio portionem tangentis* HI *portione curvæ* RH *esse minorem, portionem autem ejusdem tangentis* HK *portione curvæ* HM *esse majorem.*

marque dans sa réponse du mois de septembre dernier, qu'on devoit encore admirer sur cela l'ordre de la nature, qui ne permet point qu'on trouve une droite égale à une courbe, qu'après qu'on a déjà supposé l'égalité d'une droite à une courbe. »

Quum enim, ex hypothesi, tangens KI occurrat basi AF extra curvam, ergo angulus CHI, qui fit ab intersectione perpendicularis in basim HC et tangentis HI, erit minor recto, ideoque a puncto H demissa perpendicularis in rectam BI cadet in punctum V supra puncta B, R, I. Patet itaque rectam HV minorem esse rectâ HI; item rectam HI minorem esse rectâ quæ puncta H et R conjungit : ergo, a fortiori, recta HI minor erit portione curvæ HR, quam recta ab H ad R ducta subtendit. Quod primo loco fuit demonstrandum.

Aio jam portionem KH portione curvæ HM esse majorem.

A puncto K ducatur ad eamdem curvam tangens KN, et demittatur perpendicularis NE. Ex prædemonstratis, probatum est rectam KN esse minorem portione curvæ NM; sed, ex Archimede (1), summa tangentium HK, KN est major totâ portione curvæ HN : ergo portio tangentis HK portione curvæ HM major erit. Quod secundo loco fuit ostendendum.

Nec moveat tangentem a puncto K ultra punctum G aliquando occurrere curvæ : hoc enim casu aliud punctum inter K et M sumi poterit, et omnia ad præcedentem demonstrationem aptari.

INDE SEQUITUR, si a punctis K et I ducantur perpendiculares ad axem, curvam in punctis O et P secantes, hoc casu tangentem HI curvâ HO esse majorem, tangentem vero HK curvâ HP esse minorem.

Si enim imaginemur inverti figuram ita ut axis in locum baseos, basis in locum axis transferatur, non solum similis in hoc casu, sed eadem omnino erit demonstratio.

PATET AUTEM, ex ipsa constructione, si rectæ BC et CD sint æquales, portiones tangentis HI et HK esse item inter se æquales, quod tamen summopere notandum.

PROPOSITIO II.

Ad dimensionem linearum curvarum non utimur inscriptis et cir-

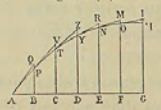
(1) ARCHIMÈDE, *De sphæra et cylindro*, I, λαμβανόμενον 2 : édition Heiberg, volume I, pages 8-10.

cumscriptis more Archimedeo (1), sed circumscriptis tantum ex portionibus tangentium compositis : duas enim series tangentium exhibemus, quarum una major est curvâ, altera minor. Demonstrationes autem multo faciliorem et elegantiorem per circumscriptas solas evadere analystæ experientur.

Possibile igitur, ut vult methodus Archimedea, *pronuntiamus cuilibet ex curvis jam prædictis circumscribere duas figuras ex rectis constantes, quarum una superet curvam intervallo quovis dato minore, altera autem superetur a curva intervallo etiam dato minore.*

Exponatur curva aliqua ex prædictis in secunda figura (*fig.* 121). Secetur basis AG in quotlibet portiones æquales AB, BC, CD, DE, EF,

Fig. 121 (2).



FG, et a punctis B, C, D, E, F erigantur perpendiculares BQ, CV, DZ, ER, FM, quæ occurrant curvæ in punctis P, T, Y, N, O; ducantur item tangentes AQ, PV, TZ, YR, NM, OI.

Ex prima propositione patet tangentem AQ portione curvæ AP esse majorem; item tangentem PV portione curvæ PT esse majorem, et sic de reliquis, tandemque etiam ultimam OI portione curvæ OH esse majorem. Ergo figura, constans ex omnibus istis tangentium AQ, PV, TZ, YR, NM, OI portionibus, curvâ ipsâ major erit.

At exponatur eadem curva in tertia figura (*fig.* 122), cujus basis AG in eumdem portionum æqualium numerum dividatur in punctis B, C, D, E, F; a punctis B, C, D, E, F, ut supra, erigantur perpendiculares BR, CQ, DO, EL, FI, quæ occurrant curvæ in punctis S, P, N, M, K; a puncto autem S (in hac tertia figura) ducatur tangens ST, occurrens

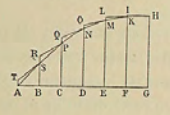
(1) Archimède, *Circuli dimensio*, prop. 1; mais la méthode d'Archimède est surtout développée dans le Traité *De sphæra et cylindro*, où elle est appliquée à la mesure des surfaces du cône, du cylindre et de la sphère.

perpendiculari AT; deinde a punctis P, N, M, K, H ducantur tangentes PR, NQ, MO, KL, HI, occurrentes perpendicularibus BS, CP, DN, EM, FK in punctis R, Q, O, L, I.

Ex prima propositione patet tangentem ST portione curvæ AS esse minorem; item tangentem PR portione curvæ PS esse minorem, et sic deinceps, tandemque ultimam IH (quæ parallela est basi) portione curvæ KH esse minorem. Ergo figura, constans ex omnibus istis tangentium ST, PR, NQ, MO, KL, HI portionibus, curvâ ipsâ minor erit.

Quum autem, ex corollario propositionis primæ, partes tangentium ab eodem puncto curvæ utrimque productarum et portionibus baseos hinc inde æqualibus oppositarum sint inter se æquales, patet (quum

Fig. 122 (3).



secundæ et tertiæ figuræ curvæ supponantur æquales aut eadem potius, licet vitandæ confusionis causâ duas figuras descripserimus) tangentem ST *tertiæ figuræ* æqualem esse tangenti PV *secundæ figuræ*. Quum enim punctum S in tertia figura idem omnino sit cum puncto P secundæ figuræ et portiones baseos AB, BC in utraque figura sint inter se æquales, portiones tangentium ex utraque parte ipsis oppositarum, nempe recta ST in tertia figura et recta PV in secunda, inter se æquales erunt.

Probabitur similiter tangentem PR tertiæ figuræ æqualem esse tangenti TZ secundæ, et sic de cæteris; quo peracto, constabit primam tantum secundæ figuræ et ultimam tertiæ nulli ex portionibus figuræ contrariæ æqualem esse : excessus igitur, quo figura secunda superat tertiam, est idem quo tangens AQ secundæ figuræ superat tangentem IH tertiæ figuræ. Sed recta IH, propter parallelas, æquatur portioni baseos FG sive AB (supponuntur enim omnes baseos portiones æquales in utraque figura) : ergo figura secunda, ex tangentibus curvâ majori-

bus composita, superat figuram tertiam, ex tangentibus curvâ minoribus compositam, eo ipso quo in secunda figura tangens AQ superat portionem baseos AB, ipsius oppositam intervallo.

Si igitur velimus duas figuras curvæ circumscribere, alteram majorem curvâ, alteram verò minorem, quæ se invicem excedant intervallo minore quocumque dato, facillima erit constructio. Quum enim, ex *Methodo tangentium* jam cognita, detur tangens ad punctum A (*fig.* 121),

Fig. 121 (2).

dabitur angulus QAB; sed angulus QBA est rectus : ergo datur triangulum QAB specie, datur itaque ratio rectæ AQ ad AB. Cavendum itaque est ut divisio baseos ita instituatur ut differentia rectarum AQ et AB sit minor quâcumque rectâ datâ : quod ita assequemur, si quæramus duas rectas in data ratione quæ se invicem excedant rectâ datâ quæ sit minor eâ quæ data est. Hoc autem problema est facile, et curandum deinde ut portio quælibet baseos, AB, non sit major minore duarum quæ dicto problemati satisfaciunt.

Quum igitur hac ratione invenerimus duas figuras curvæ circumscriptas, alteram majorem, alteram minorem dictâ curvâ, quæ se invicem excedunt intervallo minore quocumque dato, a fortiori major ex circumscriptis superabit curvam intervallo adhuc minore, et minor ex circumscriptis superabitur a curva intervallo adhuc minore.

Patet itaque ex nostra hac methodo per duplicem circumscriptionem commodum præberi aditum ad methodum Archimedeam, quum agitur de dimensione linearum curvarum. Quod semel monuisse et demonstrasse sufficiet.

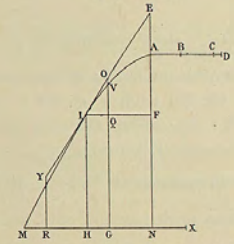
His positis, secure pronuntio inveniri posse curvam vere geometricam datæ rectæ æqualem : ea vero est una ex infinitis parabolis, quas olim spe-

culati sumus (1), **illa nempe in qua cubi applicatarum ad axem sunt inter se ut quadrata portionum axis. De quo ne dubitent geometræ, ita breviter demonstro.**

Propositio III (2).

Sit in quarta figura (*fig.* 123) *parabole, quam jam indicavimus,* MIVA, *cujus vertex* A, *axis* AN, *et in qua, sumpto quovis puncto* I *et ductis*

Fig. 123 (4).



perpendicularibus seu applicatis ad axem rectis MN, IF, *cubus rectæ* MN *sit ad cubum rectæ* IF *ut quadratum rectæ* NA *ad quadratum rectæ* FA, *idque semper contingat; probandum est curvam* MIA *rectæ datæ æqualem esse.*

Fiat

ut quadratum axis AN ad quadratum applicatæ NM,
ita recta NM ad rectam AD ipsi AN perpendicularem.

Patet rectam AD esse rectum dictæ paraboles latus, hoc est :

solidum sub AD in quadratum rectæ AN æquari cubo applicatæ NM,

item, sumpto quovis alio puncto, ut I,

solidum sub AD in quadratum AF æquari cubo applicatæ IF;

quod non eget demonstratione : in facilibus enim non immoramur.

(1) *Voir* plus haut, page 195.

(2) L'énoncé qui suit est en réalité celui de la proposition IV; l'objet de la proposition III se borne à un lemme déterminant la longueur de la tangente dans la parabole $y^3 = ax^2$.

Ducatur tangens ad punctum I, et sit illa IOE, quæ cum axe AN in puncto E concurrat. Ex *Methodo tangentium* constat rectam FA rectæ AE esse duplam, ideoque

rectam FE ad rectam AF esse ut 3 ad 2,
quadratum vero rectæ EF esse ad quadratum rectæ AF ut 9 ad 4.

A recta AD abscindatur nona ipsius pars CD, et reliqua CA bisecetur in B : erit igitur

DA ad AB ut 9 ad 4, sive ut quadratum EF ad quadratum AF.

Solidum itaque sub AD in quadratum AF æquale erit solido sub quadrato FE in rectam AB; sed solidum sub AD in quadratum AF est æquale cubo rectæ IF : ergo solidum sub recta AB in quadratum EF est æquale eidem cubo rectæ IF. Est ergo

ut quadratum EF ad quadratum IF, ita recta IF ad rectam AB,

et, componendo, summa quadratorum EF et FI, hoc est unicum

quadratum tangentis IE est ad quadratum IF,
ut summa rectarum IF et AB ad AB.

Si autem ducatur a puncto I perpendicularis ad basim, recta IH et alia quævis perpendicularis GQVO occurrens applicatæ IF in Q, curvæ in V et tangenti in O, propter similitudinem triangulorum, erit

ut IO ad IQ sive ipsi æqualem HG,
ita tangens IE ad applicatam IF,

et

ut quadratum IO ad quadratum HG, ita quadratum IE ad quadratum IF.

Ut autem

quadratum IE ad quadratum IF,
ita summa rectarum IF et AB ad rectam AB.

Ergo

quadratum IO *ad quadratum* HG *erit semper*
ut summa rectarum IF *et* AB *ad rectam* AB.

Quod demonstrare oportuit.

Inde sequitur, si rectæ MN ponatur in directum recta NX rectæ AB æqualis, esse semper

ut quadratum tangentis IO ad quadratum rectæ HG,

vel ut quadratum tangentis IY ex altera parte ad quadratum rectæ oppositæ RH (utrobique enim, propter parallelas, eadem est ratio),

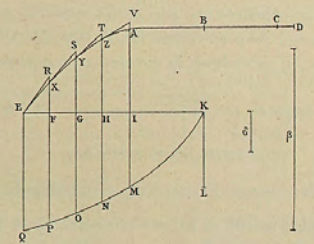
ita rectam HX ad rectam NX.

Recta enim HX æqualis est summæ rectarum IF et AB, et recta NX est æqualis AB. Hoc autem patet ex constructione : recta enim HN, propter parallelas, æqualis est rectæ IF, et reliqua NX facta est æqualis rectæ AB.

Propositio IV.

Exponatur in quinta figura (*fig.* 124) nostra hæc parabole AXE, cujus sit ea, ut diximus, natura ut cubi applicatarum sint inter se in ratione quadratorum portionum axis. Sit ejus axis AI, basis aut semibasis EI.

Fig. 124 (5).



Ex datis axe AI et applicatâ IE invenitur, ut superius diximus, rectum latus AD, a quo abscissâ nonâ ipsius parte CD, et reliquâ AC bifariam divisâ in B, secetur basis EI in quotlibet libuerit portiones æquales EF, FG, GH, HI, et a punctis F, G, H excitentur perpendiculares FX, GY, HZ, curvæ occurrentes in punctis X, Y, Z. Ad puncta autem E, X,

Y, Z ducantur tangentes ER, XS, YT, ZV, occurrentes perpendicularibus FX, GY, HZ, IA productis, in punctis R, S, T, V. Ponatur rectæ EI in directum recta IK æqualis rectæ AB.

Patet, ex præcedente propositione et ipsius corollario,

quadratum tangentis ZV ad quadratum rectæ HI
esse ut rectam HK ad rectam KI;

similiter

ut quadratum tangentis YT ad quadratum rectæ GH,
ita rectam GK ad rectam KI;

item

quadratum tangentis XS ad quadratum rectæ FG
ut rectam FK ad rectam KI;

denique

ut quadratum tangentis ER ad quadratum rectæ EF,
ita rectam EK ad rectam KI.

His positis, a puncto K excitetur KL perpendicularis ad rectam EK, et fiat recta KL æqualis rectæ KI sive AB; intelligatur jam per punctum K, tanquam verticem, axem autem KE, describi parabole simplex sive Archimedea, cujus rectum latus sit KL, et sit illa parabole KMQ, ad quam excitentur perpendiculares EQ, FP, GO, HN, IM, quæ erunt, ut patet, applicatæ paraboles et in directum positæ perpendicularibus FX, GY, etc.

Quadratum tangentis ZV, ut jam diximus, est ad quadratum rectæ HI,

ut recta HK ad rectam KI;

sed, ut recta HK ad rectam KI, ita, singulis in rectam KL ductis,

rectangulum sub HK in KL ad rectangulum sub IK in KL;

rectangulum verò sub HK in KL, ex natura paraboles Archimedeæ, æquatur quadrato applicatæ HN, et rectangulum sub IK in KL æquatur quadrato rectæ KL, quum rectæ IK, KL factæ fuerint æquales. Erit igitur

ut quadratum HN ad quadratum KL,
ita quadratum tangentis ZV ad quadratum rectæ HI,

ideoque

ut recta HN ad KL, ita tangens ZV ad rectam HI.

Similiter probabimus esse

ut tangentem YT ad rectam GH, ita applicatam GO ad KL;

item

ut tangentem XS ad rectam FG, ita applicatam FP ad KL;

denique

ut tangentem ER ad rectam EF, ita esse applicatam EQ ad KL.

Quum igitur sit

ut tangens ZV ad rectam HI, ita applicata HN ad KL,

rectangulum sub extremis æquabitur rectangulo sub mediis, ideoque

rectangulum sub NH in HI æquabitur
rectangulo sub KL in tangentem ZV.

Similiter

rectangulum sub OG in GH æquabitur
rectangulo sub KL in tangentem YT;

item

rectangulum sub PF in FG æquabitur
rectangulo sub KL in tangentem XS;

denique

rectangulum sub EQ in EF æquabitur
rectangulo sub KL in tangentem ER.

Quid autem pluribus in re proclivi et jam ad methodum Archimedeam sponte sua vergente immoramur? Per inscriptas enim et circumscriptas in segmento parabolico figuras, rectangula omnia QEF, PFG, OGH, NHI segmentum ipsum parabolicum EQMI designabunt. Omnes autem tangentes ER, XS, YT, ZV, per iteratam secundum nostræ præcepta methodi circumscriptionem, curvam ipsam EXYZA etiam designabunt : ergo segmentum parabolicum EQMI æquatur rectangulo sub KL in curvam EXA. Datur autem in rectilineis segmentum parabolicum

EQMI (quadravit enim parabolen Archimedes (1), ideoque ipsius segmenta) : ergo rectangulum sub KL in curvam EXA etiam datur. Datur autem recta KL : ergo datur curva EXA et ipsi alia recta potest constitui æqualis. Quod erat demonstrandum.

Si quibusdam tamen hæc demonstratio brevitate nimiâ laborare videatur, eam integram, insistendo vestigiis Archimedeis, non gravamur separatim adjungere, ut eam legant et examinent qui superiora non sufficere existimabunt.

Probandum est segmentum parabolicum EQMI rectangulo sub data KL in curvam EXA æquale esse.

Fiat, ex Archimede, segmentum illud parabolicum EQMI æquale rectangulo sub data recta KL in datam rectam β. Si probaverimus rectam β æqualem esse curvæ EXA, constabit propositum.

Aio itaque rectam β curvæ EXA esse æqualem : si enim æqualis non est, erit vel major vel minor.

Sit primo recta β major quam curva EXA, et sit earum excessus, si fieri potest, recta δ.

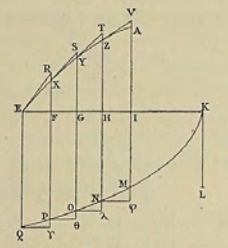
Ex propositione secundâ hujus, possumus curvæ EXA circumscribere figuram ex portionibus tangentium compositam, quæ superet curvam intervallo minore rectâ δ. Fiat igitur illa circumscriptio et in figura separata (*fig.* 125), quam etiam quintam romano charactere notavimus, circumscripta illa constet ex portionibus tangentium ER, XS, YT, ZV.

Circumscripta illa, ex prædemonstratis, est major curvâ EXA; sed et recta β posita est major eâdem curvâ : quum ergo circumscripta superet curvam minore intervallo quam recta β superet eamdem curvam, ergo circumscripta minor est rectâ β. Rectangulum itaque sub recta KL in circumscriptam est minus rectangulo sub KL in rectam β; at rectangulum sub KL in β factum est æquale segmento parabolico EQMI : ergo rectangulum sub KL in circumscriptam est minus dicto segmento parabolico EQMI.

(1) Archimède, *Quadratura paraboles*, prop. 17; édition Heiberg, vol. II, page 334.

Probavimus autem rectangulum sub KL in portionem tangentis ER æquari rectangulo sub QE in EF; item rectangulum sub KL in XS æquari rectangulo sub PF in FG; item rectangulum sub KL in YT æquari rectangulo sub OG in GH; denique rectangulum sub KL in ZV

Fig. 125 (V).



æquari rectangulo sub NH in HI : ergo rectangulum sub KL in totam circumscriptam est æquale summæ rectangulorum sub QE in EF, sub PF in FG, sub OG in GH et sub NH in HI. Si autem in rectas FP, GO, HN, IM (quæ sensim decrescunt quo propius accedunt ad verticem paraboles) continuatas demittantur perpendiculares (seu parallelæ basi) a punctis Q, P, O, N rectæ Qγ, Pθ, Oλ, Nφ, patet

rectangulum QEFγ	æquale esse	rectangulo sub QE in EF;
item rectangulum θF	æquari	rectangulo sub PF in FG,
rectangulum λG	æquari	rectangulo sub OG in GH,
denique rectangulum φH	æquari	rectangulo sub NH in HI.

Ergo rectangulum sub KL in circumscriptam est æquale rectangulis γE, θF, λG, φH.

Sed probavimus rectangulum sub KL in circumscriptam esse minus segmento parabolico EQMI : ergo summa rectangulorum γE, θF, λG, φH erit minor dicto segmento parabolico EQMI. Quod est absurdum : illa enim rectangula constituunt figuram ex rectangulis compositam

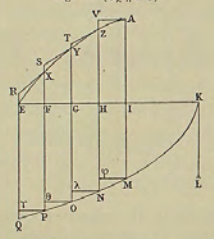
et segmento parabolico, ut patet, circumscriptam, ideoque ipso segmento majorem.

Recta itaque β non est major curvâ EXA; sed neque minorem esse probabimus.

Sit enim recta β minor curvâ EXA, si fieri potest, et curva superet rectam β intervallo δ.

Circumscribatur in figura separata (*fig.* 126), quam etiam quin-

Fig. 126 (σχῆμα ε).



tam charactere græco notavimus, figura constans ex portionibus tangentium curvâ EXA minor, sed quam tamen ipsa curva superet intervallo minore ipso δ; et sit illa figura constans ex portionibus tangentium XR, YS, ZT, AV.

Quum itaque curva sit major β intervallo δ, et eadem curva superet circumscriptam intervallo minore ipso δ, ergo circumscripta erit major rectâ β, ideoque rectangulum sub KL in circumscriptam erit majus segmento parabolico EQMI.

Sed rectangulum sub KL in circumscriptam æquatur, ex prædemonstratis, rectangulis sub PF in FE, sub OG in GF, sub NH in HG et sub MI in IH : est enim

ut XR ad FE, ita FP ad KL,

ideoque

rectangulum sub KL in XR æquatur rectangulo sub PF in FE,

et sic de reliquis.

Quum igitur rectangulum sub KL in circumscriptam sit majus segmento parabolico EQMI, ergo summa rectangulorum, sub PF in FE, sub OG in GF, sub NH in HG et sub MI in HI, est major dicto segmento parabolico. Sed omnia illa rectangula, ductis perpendicularibus (seu basi parallelis) rectis Pγ, Oθ, Nλ, Mφ, quæ omnes cadent in applicatas intra parabolen (prout enim applicatæ magis distant a vertice, eo magis semper augentur), erunt æqualia rectangulis PE, OF, NG, MH; ergo summa omnium illorum rectangulorum, PE, OF, NG, MH, erit major segmento parabolico. Quod est absurdum : rectangula enim illa, PE, OF, NG, MH, componunt figuram ex rectangulis compositam et ipsi segmento parabolico inscriptam, ideoque ipso minorem.

Recta itaque β non est minor curvâ EXA; quum igitur nec sit major, nec minor, erit ipsi curvæ æqualis. Quod prolixius, ut omnis removeatur scrupulus, fuit demonstrandum.

Ex jam demonstratis patet eâdem facilitate demonstrari posse segmentum parabolicum quodvis EQPF, a priore abscissum, rectangulo sub data KL in curvam EX æquale esse; ideoque, si detur in basi quodvis punctum, ut F, quum ex Archimede segmentum parabolicum EQPF in rectilineis detur, dari etiam et rectangulum sub KL data in portionem curvæ EX; datur autem recta KL : ergo et curva EX. Dato itaque quovis puncto in base, ut F, dari portionem curvæ ipsi oppositam, et rectam posse assignari huic æqualem, manifestum est.

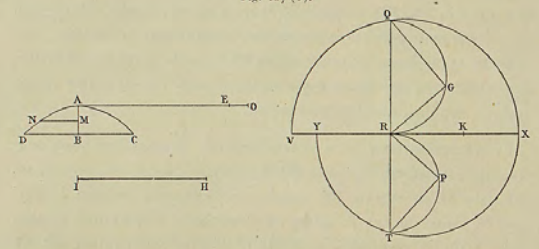
Nec moveat, ad rectam illam curvæ EXA æqualem inveniendam, construendam videri parabolen simplicem, quo casu problema solidum evaderet. Quum enim supponatur ad veritatem tantum inquirendam et demonstrationem rite conficiendam paraboles illius descriptio, nihil vetat quominus calculum ipsum, dissimulatâ illâ imaginariâ paraboles descriptione, per rectas et circulos et expediamus et exhibeamus. Is autem calculus, nisi fallor, talis est :

Esto in figura sexta (*fig.* 127) curva parabolica DAC, ejus naturæ ut cubi applicatarum DB et NM sint inter se ut quadrata portionum axis BA et AM; dentur autem altitudo AB et semibasis BD, aut

tota DBC : Aio dari rectam curvæ DAC æqualem (quod jam probatum est) in calculo vere geometrico.

Sit rectum istius paraboles latus recta AO, quam datam esse ex datis axe et applicatâ, ex supra dictis, constat. A recta AO auferatur nona ipsius pars EO; reliquæ vero AE fiat æqualis recta YK, cui in directum ponatur KX æqualis semibasi (seu applicatæ) DB. Super recta YX tanquam diametro describatur semicirculus YTX et, rectâ YK bisectâ in puncto R, excitetur perpendicularis RT, semicirculum secans in T.

Fig. 127 (6).



Rectæ RT fiat æqualis recta RV, et super recta VX tanquam diametro describatur semicirculus VQX, ad cujus circumferentiam a puncto R excitetur perpendicularis RQ. Super rectis TR, RQ describantur semicirculi TPR, RGQ, et ipsis applicentur rectæ TP, RG, quæ singulæ sint ipsi RY æquales. Junctis autem rectis RP, QG, aio rationem curvæ parabolicæ DAC ad basim DBC esse eamdem quæ est dupli quadrati rectæ QG ad triplum quadratum rectæ RP, ideoque esse datam.

Fiat itaque ut triplum quadratum rectæ RP ad duplum quadratum rectæ QG, ita recta DC ad rectam IH; recta illa IH, quæ data est ex constructione, æqualis erit curvæ parabolicæ DAC.

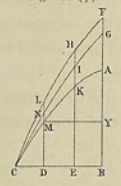
Quod si cum præcedente demonstratione non conveniat, ab ipsa erit emendandum.

Si hæc non sufficiant ad obtinendum a geometris ut nostra hæc curva

parabolica inter admiranda Geometriæ collocetur, illud fortasse ab ipsis quæ mox sequentur impetrabunt. Quid enim mirabilius quam ex una hac curva derivari et formari alias numero infinitas, non solum ab ipsa, sed inter se, specie differentes, quæ tamen singulæ rectis datis æquales esse demonstrentur? Propositio generalis hæc est :

Sit, in septima figura (*fig.* 128), *curva nostra parabolica* CMA, *cujus altitudo* AB, *semibasis* CB, *et ab ea curva formentur aliæ in infinitum*

Fig. 128 (7).



hac ratione ut, ductis perpendicularibus ad basim rectis DMNL, EKIH *utcumque, secantibus curvam in punctis* M, K, *nova curva* CNIG, *ex hac formanda, sit ejus naturæ ut recta* DN *sit semper æqualis portioni prioris curvæ, nempe* CM, *ipsam respicienti; item recta* EI *sit æqualis portioni prioris curvæ* CMK *et sic in omnibus aliis quibuslibet perpendicularibus : hæc nova curva* CNIG *erit diversæ a priore speciei* (1).

Formetur pariter ab ipsâ tertia curva CLHF, *in qua rectæ* DL, EH *sint semper æquales portionibus curvis* CN *et* CNI *secundæ curvæ; et a tertia pari ratione formetur quarta, a quarta quinta, a quinta sexta, et eo progrediantur in infinitum ordine.*

Aio omnes istas curvas CNIG, CLHF *et reliquas in infinitum, perinde ac primam parabolicam* CMKA, *rectis datis æquales esse.*

Notandum autem istas omnes in infinitum curvas esse pure geome-

(1) Fermat n'a pas reconnu que, loin d'être différentes de la parabole primitive, toutes les courbes qui en sont ainsi dérivées successivement peuvent lui être superposées à la suite d'une simple translation.

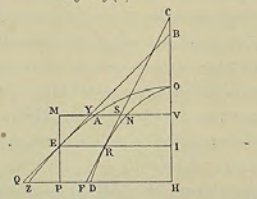
tricas, nec in illis itaque ad legem illam et ordinem naturæ de quibus initio hujus Dissertationis locuti sumus recurrendum. Licet enim rectæ DN et EI curvis CM et CMK supponantur æquales, eædem tamen ipsæ non tam suppositæ sunt quam ex prædictis demonstratæ esse pariter rectis æquales : dato quippe quolibet puncto D, quum ex præcedentibus detur recta æqualis portioni curvæ CM, ergo recta DN, quæ curvæ CM ex constructione ponitur æqualis, ut recta vere data, non ut æqualis curvæ, considerari debet; et sic de reliquis. Curva igitur supra descripta CNIG vere geometrica est; quam postquam æqualem esse rectæ datæ demonstraverimus, sequetur tertiam curvam ab ea formandam, nempe CLHF, esse quoque pure geometricam, et sic omnes alias in infinitum.

Demonstratio difficilis non erit, si prius præmiserimus generalem, quæ huic operi omnino inservit, propositionem :

Propositio VI.

Esto, in figura octava (*fig.* 129), *quælibet curva, ejusdem cum præcedentibus naturæ,* ONR, *cujus vertex* O, *axis vel applicata* OVI (*eadem*

Fig. 129 (8).



enim semper est demonstratio); *et ab ea formetur alia curva* OAE, *cujus ea sit proprietas ut applicatæ sint æquales portionibus abscissis a priore curva : exempli gratia, applicata* VA *sit æqualis curvæ* ON, *applicata* IE *sit æqualis curvæ* OR, *et sic de reliquis. Ad datum punctum, in nova hac curva, ducetur tangens hoc pacto : sit datum punctum* E; *ducatur applicata* EI, *secans priorem curvam in* R; *ducatur recta* RC *tangens in dicto puncto* R *priorem curvam et occurrens axi in puncto* C; *fiat*

ut RC *ad* CI, *ita recta* IE *ad rectam* IB,

et jungatur EB : *Aio rectam* EB *tangere novam curvam* EAO *in puncto* E.

Sumpto enim quovis puncto in axe, ut V, et ductâ applicatâ VNA, quæ secet priorem curvam in N, tangentem RC in S, secundam curvam in A, rectam vero EB in Y, si probaverimus rectam VY semper esse majorem applicatâ VA, recta EB non secabit novam curvam a parte verticis.

Hoc autem facillime probamus : Recta VA est æqualis curvæ ON sive differentiæ inter curvas OR, NR; at recta RS est minor curvâ RN, per consectarium primæ propositionis : ergo differentia inter curvam OR et rectam RS est major differentiâ inter eamdem curvam OR et curvam RN. Sed recta VY est æqualis differentiæ inter curvam OR et rectam RS, *ut mox probabimus :* ergo recta VY, occurrens rectæ EB, erit major rectâ VA, occurrente curvæ OAE. Unde patet omnia puncta rectæ EB versus verticem esse extra curvam, ideoque recta EB curvam ab ea parte non secabit.

Imo nec inferius : Sumatur enim quodvis punctum, ut H, a quo ducatur applicata HZ, secans priorem curvam in D, tangentem RC productam in F, secundam curvam in Z, et rectam EB productam in Q. Si probemus rectam HQ, in quocumque casu, majorem esse rectâ HZ, patebit omnia puncta rectæ EB, etiam inferius sumpta, extra curvam jacere, unde patebit dictam rectam EB tangere secundam curvam in dicto puncto E.

Recta HZ est æqualis, ex constructione, curvæ OD, hoc est summæ curvarum OR, RD; quum autem recta RF sit portio tangentis RC inferius sumpta, erit, ex consectario primæ hujus, recta RF major curvâ RD, ideoque summa curvæ OR et rectæ RF erit major summâ ejusdem curvæ OR et curvæ RD. Summa autem curvæ OR et rectæ RF est æqualis, *ut mox probabimus,* rectæ HQ; summa vero curvarum OR, RD est æqualis rectæ HZ, ex constructione : ergo recta HQ semper

et in omni casu major erit applicatâ HZ, ideoque recta EB in dicto puncto E tanget secundam curvam.

Probandum autem reliquimus differentiam curvæ OR et rectæ RS æquari rectæ VY.

Ducatur recta EM parallela axi et occurrat rectæ VY productæ in M.

Ex constructione est

ut EI ad IB, ita RC ad CI;

sed

ut EI ad IB, ita YV ad VB, et ita YM ad ME;

ut autem RC ad CI, ita RS ad VI :

ergo

ut YM ad ME, ita RS ad VI.

Sunt autem rectæ ME, VI æquales, propter parallelas : ergo rectæ YM, RS erunt æquales. Sunt autem æquales etiam rectæ EI, VM : ergo differentia inter rectas EI et MY erit recta VY. Sed recta EI, ex constructione, æquatur curvæ OR : ergo differentia inter curvam OR et rectam MY (sive ipsi æqualem RS) æquabitur rectæ YV. Quod primo erat probandum.

Nec dissimili ratiocinio procedet demonstratio infra applicatam EI : Ductâ enim rectâ EP parallelâ axi, probabimus rectam QP æqualem esse rectæ RF.

Est enim

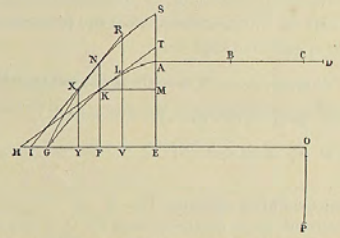
ut EI ad IB, hoc est QH ad HB, hoc est QP ad PE,
ita recta RC ad CI, hoc est RF ad IH;

sunt autem æquales PE, IH : ergo et rectæ QP, RF. Recta autem HQ æquatur rectis HP, PQ, quarum prior HP æquatur rectæ IE sive curvæ OR, posterior autem PQ æquatur, ex demonstratis, rectæ RF : ergo summa curvæ OR et rectæ RF est æqualis rectæ HQ. Quod secundo loco fuit probandum.

Patet itaque rectam EB in puncto E secundam curvam tangere, quod erat demonstrandum.

Sit jam (1), in nona figura (*fig.* 130), curva nostra parabolica GKA, cujus altitudo AE, semibasis GE, rectum latus AD, cujus nona pars, ut supra, sit CD, et recta AC bifariam secetur in B. A priori hac curvâ formetur alia, versus punctum G, quæ sit GNS, occurrens axi prioris in S, et novæ hujus curvæ proprietas hæc sit ut, sumpto quovis puncto,

Fig. 130 (9).



ut F, et erectâ perpendiculari FKN occurrente duabus curvis in K et N, recta FN sit semper æqualis curvæ prioris portioni GK. Ducatur parallela basi KM, et ad idem punctum K ducatur recta TKH tangens priorem et occurrens axi in T et basi in H; per punctum vero N, in secunda curva, ducatur tangens RNXI occurrens basi in I, et a punctis quibuslibet, in ea ex utraque parte sumptis, ut R et X, demittantur in basim perpendiculares XY et RV.

Ex præcedentibus patet quadratum tangentis KT in priore curva ad quadratum FE, sive

quadratum KL ad quadratum FV esse semper
ut rectam FE, una cum recta AB, ad ipsam AB;

sed

ut quadratum KT ad quadratum FE sive ad quadratum KM,
ita quadratum KH ad quadratum HF (propter parallelas) :

(1) Ici commence la démonstration d'un nouveau lemme qui devrait être compté comme proposition VII, ce qui figure ci-après sous ce dernier titre n'étant, en fait, que la démonstration ajournée de la proposition V (page 227), dont le numérotage a été omis.

ergo

quadratum KH est ad quadratum HF ut recta FE, una cum AB, ad AB.

Ut autem quadratum KH ad quadratum HF,

ita, ex præcedente propositione,

quadratum rectæ FN ad quadratum rectæ FI :

quum enim latera, ex vi illius propositionis, sint proportionalia, erunt proportionalia et quadrata. Ergo

quadratum NF ad quadratum FI est ut recta FE, una cum AB, ad AB,

et componendo, quadrata duo NF et FI, sive unicum

quadratum NI erit ad quadratum FI ut FE, una cum AB bis, ad AB.

Sed

ut quadratum NI ad quadratum FI,
ita quadratum RN ad quadratum rectæ FV ex una parte,
et ita quadratum rectæ NX ad quadratum rectæ FY ex altera :

ergo, sumpto quovis puncto in secunda hac curva, ut N, erit semper

ut quadratum portionis tangentis ad illud punctum ductæ ex alterutra parte
ad quadratum portionis basis ipsi oppositæ,
ita summa rectæ FE, una cum AB bis, ad AB.

Si igitur basi GE ponatur in directum recta EO rectæ AB dupla, et ad punctum O erigatur perpendicularis OP ipsi AB æqualis, erit semper ut quadratum portionis NR, in hac secunda curva, ad quadratum portionis basis FV, vel ut quadratum portionis tangentis NX ad quadratum portionis basis FY, ita recta FO ad rectam OP.

His ita se habentibus, patet cæteras in infinitum curvas, modo quem supra indicavimus describendas, ejus esse naturæ ut :

In tertia, verbi gratia, quadratum portionis tangentis ad quadratum portionis basis ipsi oppositæ sit ut portio basis FE initium sumens a puncto F, in quo cadit perpendicularis a puncto contactûs in basim demissa, una cum recta AB *ter* sumptâ, ad ipsam AB;

In quarta curva, erit ut quadratum portionis tangentis ad quadratum portionis basis ipsi oppositæ ut recta FE, una cum AB *quater* sumptâ, ad ipsam AB;

Et sic de reliquis in infinitum.

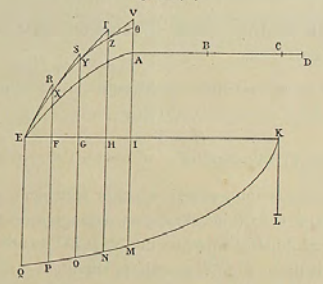
Eadem enim semper demonstratio, ut evidens est, in omnibus casibus locum habet.

Nec difficilis, hoc supposito, ad theorema generale erit aditus.

Propositio VII.

Esto, in figura decima (*fig.* 131), curva nostra parabolica EA, cujus axis AI, semibasis IE. Ab ea formetur secunda curva EXYZΘ, cujus ea

Fig. 131 (10).



sit natura, ut supra diximus, ut quævis applicata FX sit æqualis portioni prioris curvæ ab applicata illa, seu mavis vocare perpendicularem, abscissæ. Dividatur basis in quotlibet partes æquales EF, FG, GH, HI, et ducantur a punctis F, G, H perpendiculares secantes novam hanc secundam curvam in punctis X, Y, Z. Sit prioris curvæ rectum latus AD, a quo abscindatur nona pars CD, et reliqua AC bisecetur in B. Rectæ AB bis sumptæ fiat æqualis recta IK quæ sit in directum basi, et ad punctum K erigatur perpendicularis KL æqualis rectæ AB.

Per punctum K et axem KE intelligatur describi parabole simplex (sive Archimedea), cujus rectum latus KL, et sit illa parabole KMOQ. A punctis E, F, G, H, I ducantur perpendiculares ad axem et occurrentes huic parabolæ in punctis Q, P, O, N, M.

Ex corollario præcedentis, quum curva EXθ sit secunda curva a priore derivata seu formata eâ ratione quam jam sæpius explicuimus, sequitur, sumpto in ea quolibet puncto, ut Y, et ductâ portione tangentis YT, esse

ut quadratum YT ad quadratum GH, ita rectam KG ad rectam KL.

Sed, ut recta GK ad rectam KL, ita, singulis in rectam KL ductis,

rectangulum GKL ad quadratum KL;

ex natura autem paraboles simplicis, rectangulum GKL æquatur quadrato applicatæ GO : ergo

quadratum YT est ad quadratum GH ut quadratum GO ad quadratum KL,

ideoque

ut recta YT ad rectam GH, ita recta GO ad rectam KL.

Rectangulum itaque sub extremis æquatur rectangulo sub mediis : rectangulum ergo sub GO in GH æquatur rectangulo sub KL in YT.

Si igitur ducantur aliæ tangentes ER, XS et ZV, occurrentes perpendicularibus in punctis R, S, V, probabitur similiter

rectangulum sub QE in EF æquari rectangulo sub KL in ER;

item

rectangulum sub PF in FG æquari rectangulo sub KL in XS;

et sic de reliquis in infinitum.

Unde tandem, per abductionem ad methodum Archimedeam pari quod, in quarta propositione hujus, indicavimus artificio, conficietur et concludetur segmentum parabolicum EQMI æquari rectangulo sub

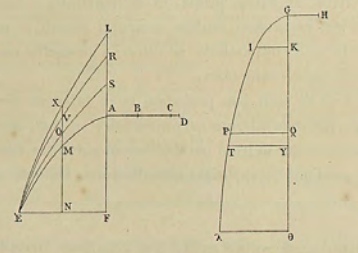
KL in secundam curvam EXθ; sicut et singula segmenta parabolica, EQPF verbi gratia, rectangulo sub KL in portionem curvæ EX, vel segmentum EQOG rectangulo sub KL in portionem curvæ EXY, et sic in infinitum.

Dantur autem in rectilineis hæc omnia segmenta parabolica, ex vi quadraturæ paraboles ab Archimede demonstratæ, et datur etiam recta KL : ergo dantur tam tota secunda curva EXθ quam ipsius portiones EX, EY etc., per rectas perpendiculares ad puncta F, G < etc. > data abscissæ.

Ad tertiæ curvæ cum rectâ datâ æqualitatem, similis fiet constructio, nisi quod recta IK ponetur *tripla* rectæ AB; in quarta curva, eadem IK ponetur *quadrupla* rectæ AB, et tandem generalis inter omnes istas in infinitum curvas a priore derivandas ita statuetur ratio : erunt nempe singulæ inter se ut segmenta parabolica ejusdem paraboles et ejusdem altitudinis, quæ a vertice paraboles distabunt per rectum latus toties sumptum quotæ erunt in ordine curvæ inter se comparandæ.

Exempli gratia, sit, in undecima figura (*fig.* 132), curva nostra

Fig. 132 (11).



parabolica EMA, cujus axis AF, semibasis EF, rectum latus AD, a quo demptâ nonâ parte CD, reliqua AC bisecetur in B; et a primâ illâ curvâ formetur secunda EOS ejus naturæ ut, sumpto quolibet puncto in

base N, recta NO, perpendicularis ad basim et occurrens curvis in M et O, sit æqualis portioni prioris curvæ EM. A secunda formetur tertia EVR, in qua recta NV sit æqualis portioni secundæ curvæ EO; item a tertia EVR formetur quarta EXL, in qua recta NX sit æqualis portioni tertiæ curvæ EV. Exponatur separatim parabole simplex sive Archimedea, cujus axis infinitus GKQY, vertex G, rectum latus GH æquale rectæ AB. Quæritur ratio, verbi gratia, quartæ curvæ EXL ad primam EMA.

Quia prior ex ipsis est quarta ordine, ab axe abscindenda est GY quadrupla recti lateris GH, deinde ponenda ipsi in directum recta Y0 æqualis semibasi EF, et ducendæ applicatæ rectæ YT, 0λ. Quia verò posterior ex duabus comparandis est prima ordine, abscindenda est ab axe recta GK recto lateri semel tantum æqualis, deinde ipsi ponenda in directum recta KQ semibasi etiam EF æqualis, et ducendæ applicatæ KI, QP.

Erit, ex demonstratis et canone generali ab illis deducto, ut segmentum parabolicum YTλ0 ad segmentum parabolicum KIPQ, ita quarta curva EXL ad primam EMA. Sed ratio segmentorum parabolicorum inter se data est, ex Archimede : ergo et ratio curvarum inter se data erit. Data est autem prima, ex demonstratis : datur igitur et quarta, et ipsi recta data æqualis assignari potest, et perpetua illa ratio, remotâ, si libet, parabolâ, ad phrasim geometricam ope regulæ tantum et circini accommodari.

Quod autem de totis jam probatum et in canonem deductum est, idem de portionibus illarum curvarum inter se comparandis contingere, beneficio segmentorum parabolicorum portiones semibasis ipsis curvarum portionibus oppositas pro altitudine habentium, quis non videt?

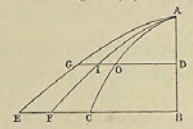
Nihil autem nec de solidis ex dictis in infinitum curvis conficiendis, nec de superficiebus ipsorum curvis, nec de centris gravitatum aut linearum istarum aut dictorum solidorum aut superficierum curvarum, adjungimus, quum methodi hac de re generales a summis et insignibus

geometris (1) jam vulgatæ ista omnia, post cognitam specificam curvæ datæ proprietatem, ignorari non sinant, licet in multis casibus propriam ab unoquoque adjungi operi industriam non inutile futurum existimemus.

Sed antequam manum de tabula tollam, succurrit examinanda sequens propositio :

Sit, in figura duodecima (*fig.* 133), *curva nostra parabolica* COA, *cujus vertex* A, *axis* AB, *semibasis* CB. *Ab ea formentur aliæ curvæ infinitæ, modo quem jam explicuimus, non ex parte baseos ut supra, sed ex*

Fig. 133 (12).



parte verticis. Sint illæ curvæ a prima effingendæ AIF, AGE *etc. in infinitum eâ conditione ut, sumpto quovis puncto in axe* D *et ductâ ad axem perpendiculari* DOIG *secante curvas in punctis* O, I, G, *recta* DI *sit in secunda curva semper æqualis portioni primæ curvæ* AO, *item recta* DG *in tertia curva sit semper æqualis portioni secundæ curvæ* AI, *et sic in infinitum. Hujusmodi omnes curvæ non solum specie inter se et a prima* AOC *different, sed etiam ab iis quas ex parte baseos supra effinximus. Quæritur ergo an curvæ illæ omnes* AIF, AGE *etc., sic in infinitum effingendæ, datis rectis an vero aliis curvis sint æquales.*

Inquirant illud Geometræ et miraculum augeri experientur : sane, si methodi, quibus utuntur ad dimensionem curvarum, sint generales

(1) Fermat fait ici allusion aux travaux de Pascal et de Roberval, aussi bien qu'aux siens propres. Quant aux courbes dont il va parler désormais, elles diffèrent bien de la parabole $y^3 = ax^2$ (développée de la parabole ordinaire), mais elles peuvent encore toutes être superposées à une seule d'entre elles par une simple translation. En tout cas, la rectification de cette nouvelle courbe, qui est la développée de l'hyperbole équilatère, appartient sans conteste à Fermat.

et sufficientes, quod ipsis affirmantibus in dubium revocare non ausim, primo statim obtutu rem factam habebunt et a labore superfluo geometram jam fatigatum liberabunt.

Si quid autem in superioribus demonstrationibus concisum nimis invenerint, id aut suppleant rogo, aut condonent.

APPENDIX AD DISSERTATIONEM

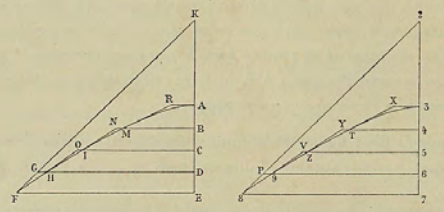
DE LINEARUM CURVARUM CUM LINEIS RECTIS COMPARATIONE.

Ut ultimæ, quam in Dissertatione proposuimus, quæstioni satisfiat, præmittendæ videntur propositiones sequentes :

Propositio I.

Sint, in figura prima (*fig.* 134), *duæ curvæ* AIF, 3Z8, *quarum axes* AE, 37 *sint inter se æquales. Ducantur autem ad axes applicatæ quotlibet quæ, in utraque figura, æquali a vertice intervallo distent.*

Fig. 134 (1).



Sint, exempli gratia, applicatæ prioris BM, CI, DH, EF; posterioris verò applicatæ sint 4T, 5Z, 69, 78; et sit rectæ AB, quæ designat intervallum applicatæ BM a vertice, æqualis recta 43, quæ designat inter-

vallum etiam applicatæ 4T a vertice. Sit pariter CA æqualis 53; item DA æqualis 63; denique EA, quod jam supposueramus, æqualis 73.

Si singulæ ex applicatis sint semper ad abscissas per tangentes ab axe in ratione correlatarum,

hoc est : si, ductis tangentibus ad puncta F, H, I, M ex una parte et ad puncta 8, 9, Z, T ex altera, semper contingat ut applicata FE, verbi gratia, sit ad rectam KE, quam tangens FK abscindit ab axe, in eadem ratione quæ est applicatæ 87 ad rectam 72, quam tangens 82 ab axe pariter abscindit; item applicata DH sit ad abscissam ab axe per tangentem quæ ducitur ad punctum H ut applicata 69 ab abscissam ab axe per tangentem ad punctum 9 ductam; et sic de reliquis;

aio duas istas curvas AIF, 3Z8 *esse inter se æquales, imo et similes ideoque easdem, et applicatas unius figuræ applicatis alterius quæ a vertice æqualiter distant esse pariter æquales.*

Ductis enim ad puncta H, I, M, in prima figura, portionibus tangentium HO, IN, MR, quæ occurrant applicatis in punctis O, N, R; item, ductis portionibus tangentium, in secunda figura, 9V, ZY, TX, quæ occurrant applicatis in punctis V, Y, X, ex suppositione

ut FE ad EK (in prima figura), ita est 87 ad 72 (in secunda).

Sed anguli ad puncta E et 7 sunt recti : ergo triangula FEK, 872 sunt similia;

ut ergo FK ad KE, ita 82 ad 72.

Sed

ut FK ad KE,

ita (productâ applicatâ DH ad punctum G) recta FG ad rectam DE,

et

ut 82 ad 72,

ita (productâ applicatâ 69 ad punctum P) recta 8P ad 67 :

ergo

ut recta FG ad rectam DE, ita recta 8P ad 67.

Sunt autem rectæ DE, 67 æquales, quum rectæ EA et 73, item rectæ

DA et 63 sint inter se æquales : ergo et portiones tangentium FG, 8P erunt inter se æquales.

Similiter probabimus portionem tangentis HO æqualem esse portioni tangentis 9V; item portionem tangentis IN æqualem esse portioni tangentis ZY; denique portionem tangentis MR æqualem esse portioni tangentis TX.

Quum ergo series tangentium in prima figura sit æqualis seriei tangentium in secunda, per abductionem ad impossibile more Archimedeo facile concluditur curvam AIF curvæ 3Z8 æqualem esse, quod primo loco fuit probandum; imo et pariter concluditur portiones curvæ correlatas esse inter se æquales : portionem nempe FH portioni 89, portionem curvæ HI portioni 9Z, et sic de reliquis.

Superest probandum applicatas pariter unius figuræ applicatis alterius esse æquales.

Quum, ex suppositione, applicatæ sint semper ad abscissas ab axe per tangentes in eadem utrobique ratione, ergo anguli GFE, P87, qui fiunt ab intersectione tangentium et applicatarum, erunt inter se æquales; item anguli OHD et V96; item anguli NIC et YZ5; denique anguli RMB et XT4. Quum ergo portiones omnes prioris curvæ, FH, HI, IM, MA, sint æquales portionibus posterioris, 89, 9Z, ZT, T3, singulæ singulis, imo et earumdem portionum sit eadem utrobique inclinatio (inclinationem enim curvarum metiuntur tangentes, quæ in utraque figura æquales semper, ut probavimus, conficiunt angulos), ergo curvæ AMIHF, 3TZ98 non solum sunt inter se æquales, sed etiam similes : unde, si intelligantur altera alteri superponi, congruent omnino, ideoque non solum axes sed applicatas æquales, aut easdem potius, habebunt. Quod secundo loco fuit demonstrandum.

Propositio II.

Sint duæ, in secunda figura (*fig.* 135), *parabolæ ejusdem naturæ* AOD, XIG, quarum axes sint AC, XF, semibases DC, GF, et sit, verbi gratia,

ut cubus DC ad cubum applicatæ BO,
ita quadratum CA ad quadratum BA,

et similiter

ut cubus GF ad cubum applicatæ IY,
ita quadratum FX ad quadratum YX

(licet enim propositio sit generalis, a parabola nostra non discedimus); *sit autem ut axis unius ad semibasem, ita etiam axis alterius ad semibasem*, nempe

ut axis CA ad semibasem DC, ita axis XF ad semibasem GF :

Aio duas hasce parabolas esse inter se in ratione axium vel semibasium, hoc est

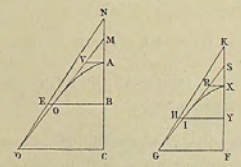
curvam AOD esse ad curvam XIG ut est axis AC ad axem XF,
vel ut semibasis CD ad semibasem GF :

hæ quippe duæ rationes, ex suppositione, sunt eædem.

Demonstratio est in promptu.

Secetur enim uterque axis in quotlibet partes æquales. Duas tan-

Fig. 135 (2).



tum, ad vitandam confusionem et prolixitatem, assumemus : secetur ergo bifariam axis AC in B et axis FX in Y et, ductis applicatis BO, YI, ducantur ad puncta D, O tangentes DN, OM, quarum prior occurrat applicatæ BO in puncto E, posterior vero rectæ AV, applicatis parallelæ, in puncto V; item, in altera figura, ducantur ad puncta G, I tangentes GK, IS, occurrentes applicatæ YI et ipsi parallelæ XR in punctis H, R.

Ex suppositione est

ut DC ad CA, ita GF ad FX;

sed, ex natura istius paraboles,

recta CA est ad CN abscissam per tangentem ut 2 ad 3;

item

recta FX est etiam ad rectam FK per tangentem abscissam ut 2 ad 3 :

ergo, ex æquo, est

ut DC ad CN, ita GF ad FK.

Sunt ergo æquiangula triangula DNC, GKF : ergo

ut DN ad NC, ita GK ad KF.

Sed

ut DN ad NC, ita DE ad CB,

et

ut GK ad KF, ita GH ad FY :

ergo

ut DE ad CB, ita GH ad FY.

Similiter probabitur esse

ut OV ad BA, ita IR ad XY.

Quum ergo portiones axium, AB, BC ex una parte et XY, YF ex altera, sint inter se æquales, ergo

ut omnes tangentium portiones DE, OV ad totum axem AC,
ita omnes tangentium portiones GH, IR ad totum axem XF.

Omnes autem portiones tangentium DE et OV et plures, si opus sit, beneficio abductionis ad impossibile, ut jam sæpius et indicatum et probatum est, designant totam curvam DOA; item omnes portiones tangentium GH, IR et plures etiam, si opus sit, designant totam curvam GIX : ergo

ut curva DOA ad axem AC, ita curva GIX ad axem XF,

et, vicissim et convertendo, erit

axis AC ad axem XF sive basis DC (ex suppositione) ad basim GF
ut curva DOA ad curvam GIX.

Quod erat demonstrandum.

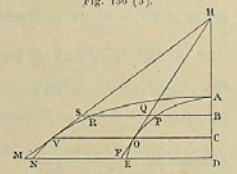
PROPOSITIO III.

Esto, in tertia figura (*fig.* 136), *curva* AO, cujus axis AC, basis CO, *et ab ea intelligatur formari alia curva ejusdem et axis et verticis, in qua applicatæ sint semper in ratione applicatarum prioris curvæ* : sit nempe

ut basis CO ad basim CV,
ita applicata BP prioris curvæ ad applicatam BR posterioris curvæ
et ita applicata DE ad applicatam DN,

et sic in infinitum; *si ad punctum quodlibet prioris curvæ, ut* O, *ducatur tangens* OH *cum axe conveniens in puncto* H, *et continuetur* CO *donec occurrat secundæ curvæ in* V, *aio rectam, quæ puncta* V *et* H *conjungit, tangere secundam curvam, et semper contingere ut tangentes correlatæ in utraque curva ad idem punctum axi occurrant.*

Fig. 136 (3).



Ducantur enim applicatæ BPR, DEN, occurrentes curvis in punctis P, R, E, N et rectis OH, VH productis in punctis Q, S, F, M.

Si probaverimus rectam BS, supra rectam CV ductam, semper majorem esse rectâ BR, item rectam DM, inferius ductam, esse etiam semper majorem applicatâ DN, patebit rectam MVSH tangere secundam curvam in puncto V.

Ex constructione

ut CO ad CV, ita est applicata BP ad applicatam BR;

sed, propter parallelas COV, BQS, quæ secantur a tribus rectis CH, OH, VH ad idem punctum vergentibus, est etiam

ut CO ad CV, ita recta BQ ad rectam BS :

ergo

ut recta BP ad rectam BR, ita est recta BQ ad rectam BS,

et, vicissim,

ut recta BP ad rectam BQ, ita est recta BR ad rectam BS.

Quum autem recta OQH tangat priorem curvam in puncto O, recta BQ erit major rectâ BP : ergo etiam recta BS erit major rectâ BR. Quod primo loco fuit probandum.

Nec dissimilis in applicata inferius sumptâ erit demonstratio : ex suppositione enim est

ut CO ad CV, ita DE ad DN,

et, propter parallelas, est etiam

ut CO ad CV, ita DF ad DM :

ergo

ut DE ad DN, ita est DF ad DM.

Est autem DE minor DF : ergo et DN ipsâ DM minor erit.

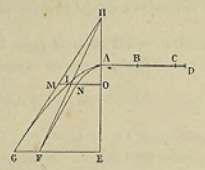
Recta itaque MVSH in puncto V tangit secundam curvam.

Lemma ad id quod sequitur.

Sit, in quarta figura (*fig.* 137), parabole nostra GIA, cujus axis AE, semibasis EFG, tangens GH. Constituatur ad eumdem axem AE alia parabole ejusdem naturæ FNA, cujus semibasis EF sit potestate *subdupla* prioris semibasis EG, et semper contingat applicatam quamvis, ut NO, applicatæ OI ad priorem curvam esse pariter potestate subduplam. Sit rectum prioris GIA paraboles latus recta AD, cujus nona pars

sit CD, et reliqua AC bisecetur in B. Ducatur ad secundam parabolen tangens ad punctum F recta FH, quæ in eodem puncto H cum axe conveniet, non solum ex vi propositionis præcedentis, sed quia, ex natura

Fig. 137 (4).



istarum parabolarum, in utràque recta EA est ad rectam EH ut 2 ad 3, ex superius demonstratis.

Aio

quadratum FE esse ad quadratum EH
ut est dimidia rectæ AB ad rectam EG.

Jam enim, in propositione III Dissertationis, demonstratum est

quadratum GE esse ad quadratum EH ut est recta AB ad rectam EG :

ergo, sumptis antecedentium dimidiis, erit

ut quadratum EF,

quod supposuimus esse dimidium quadrati GE,

ad quadratum EH, ita dimidia rectæ AB ad rectam GE.

Probabimus pariter, si recta FE sit potestate subtripla rectæ GE, hoc est, si quadratum FE sit subtriplum quadrati GE, esse

ut quadratum FE ad quadratum EH,
ita tertiam partem rectæ AB ad rectam GE;

et sic de subquadruplo, subquintuplo et reliquis in infinitum.

Quum autem, in ratione *subdupla*, probaverimus esse

ut quadratum FE ad quadratum EH, ita dimidiam AB ad rectam GE,

ergo, componendo, erit ut summa quadratorum FE, EH, sive ut unicum

quadratum FH ad quadratum EH,
ita dimidia AB una cum GE ad ipsam GE.

Si vero recta EF sit potestate *subtripla* rectæ GE, erit

ut quadratum FH ad quadratum EH,
ita tertia pars AB una cum GE ad ipsam GE.

Si recta EF sit potestate *subquadrupla* rectæ GE, erit

ut quadratum FH ad quadratum EH,
ita quarta pars AB una cum EG ad ipsam EG ;

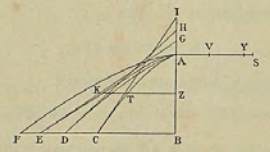
et sic in infinitum et in quacumque applicata idem continget.

Propositio IV.

His præmissis, theorema generale haud difficulter detegimus.

Sit, in figura quinta (*fig.* 138), parabole nostra AC, cujus axis AB, semibasis BC, et ab ea formentur aliæ in infinitum curvæ AD, AE, AF,

Fig. 138 (5).

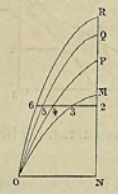


quarum ea sit proprietas ut, ductâ quâlibet applicatâ BCDEF, recta BD sit semper æqualis priori curvæ CA, recta BE æqualis secundæ curvæ AD, recta BF æqualis tertiæ curvæ AE, idque semper in omnibus ad illas curvas applicatis contingat : Aio omnes illas et singulas in infinitum curvas AD, AE, AF etc. esse semper datis lineis rectis æquales, perinde ac curvas quas in Dissertatione, diversâ et dissimili ex parte baseos methodo, construximus.

Theorema generale ita se habet :

Exponatur separatim (*fig.* 139) eadem parabole O3M æqualis omnino et similis ipsi AC, cujus ideo axis MN æqualis est axi AB et semibasis ON semibasi BC (separatim enim, ad vitandam confusionem, figuram construendam duximus). Fiat recta NP rectæ NM potestate dupla, recta NQ ejusdem NM potestate tripla, recta NR ejusdem NM potestate quadrupla, et sic in infinitum. Manente autem eadem semibasi ON,

Fig. 139 (5).



construantur parabolæ per vertices P, Q, R ejusdem cum parabola O3M vel AC naturæ, et sint illæ O4P, O5Q, O6R etc. Aio parabolen O4P curvæ AD esse æqualem, parabolen vero O5Q curvæ AE esse æqualem, denique parabolen O6R curvæ AF esse æqualem, et sic in infinitum.

Quum in nostris parabolis O4P, O5Q, O6R, ductâ applicatâ 23456, sit semper, ex natura dictarum parabolarum,

ut cubus rectæ ON ad cubum rectæ 42,
ita quadratum rectæ sive axis NP ad quadratum P2;

item

ut cubus ON ad cubum 52, ita quadratum NQ ad quadratum Q2;

denique

ut cubus ON ad cubum 62, ita quadratum NR ad quadratum R2,

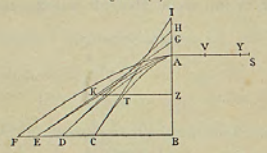
patet, ex prædemonstratis in Dissertatione, singulas ex istis parabolis rectis datis æquales esse : ergo, post demonstrationem theorematis

nostri generalis, constabit singulas quoque ex curvis AD, AE, AF rectis datis æquales esse.

Demonstratio autem theorematis generalis hæc est :

Sit rectum paraboles istius latus recta AS (*fig.* 138), a qua si demas nonam partem SY, reliquam biseces in puncto V, et ad puncta C, D, E

Fig. 138 (5).



ducantur tangentes ad novas curvas, CI, DH, EG, quæ occurrant axi in punctis I, H, G.

Ex demonstratis in tertia Dissertationis propositione,

quadratum BC est ad quadratum BI ut recta AV ad rectam BC,

et, componendo,

quadratum CI est ad quadratum BI ut recta AV una cum BC ad BC.

Sed ex propositione VI Dissertationis,

ut est quadratum tangentis CI ad quadratum BI,
ita quadratum rectæ BD se habet ad quadratum rectæ BH,

quam abscindit tangens DH : ergo

ut quadratum BD ad quadratum BH, ita recta AV una cum BC ad BC,

et, componendo,

ut quadratum tangentis DH ad quadratum BH,
ita recta AV una cum BC bis sumptâ ad ipsam BC.

Sed

ut quadratum tangentis DH ad quadratum HB, ita,

ex eadem Dissertationis propositione,

quadratum BE est ad quadratum rectæ BG a tangente EG abscissæ :

ergo

ut quadratum rectæ BE ad quadratum rectæ BG,
ita est recta AV una cum BC bis sumptâ ad ipsam BC.

Similiter probabitur, si ducatur ad curvam EA applicata ZTK secans curvam AC in T, et intelligatur ad punctum K duci tangens ad curvam AKE, esse pariter

ut quadratum KZ ad quadratum rectæ

quam tangens per punctum K ducta ab axe abscindit,

ita rectam AV una cum ZT bis sumptâ ad ipsam ZT,

et sic semper continget.

Exponatur separatim ad vitandam confusionem eadem curva AKE, quæ sit in figura separata (*fig.* 140) βφλ. Basis λδ sit itaque æqualis

Fig. 138 (5).

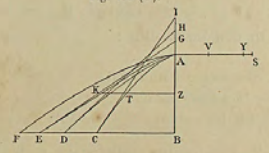
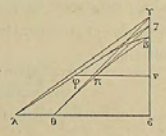


Fig. 140 (5).



basi EB, tangens λγ tangenti EG, axis δβ axi BA, abscissa per tangentem ab axe δγ abscissæ BG, applicata νφ applicatæ ZK. Ab hac curva λφβ formetur alia ipsâ minor θπβ, ea conditione ut applicatæ novæ istius curvæ sint semper subduplæ potestate applicatarum prioris : verbi gratia, recta δθ sit subdupla potestate rectæ δλ; itèm applicata νπ sit subdupla potestate rectæ νφ; et sic de reliquis. Ducantur in hac nova curva, tangentes ad puncta θ, π, rectæ θγ, πγ.

Ex præcedente tertia propositione patet tangentes θγ, λγ ad idem punctum γ cum axe concurrere; item tangentes ad puncta φ, π ductas

ad idem etiam punctum, verbi gratia 7, cum axe concurrere, quum applicatæ utriusque figuræ sint in eadem semper inter se ratione.

Exponatur adhuc separatim (*fig.* 141) parabole ejusdem cum para-

Fig. 139 (5).

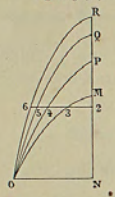
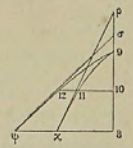


Fig. 141 (5).



bolis OM, OP etc. (*fig.* 139) naturæ, cujus axis 98 sit æqualis axi MN sive AB sive $\beta\delta$, semibasis autem 8χ sit subdupla potestate semibaseos NO sive BC; et sit illa $\chi 11\,9$, a qua formetur alia $9\,12\,\psi$, cujus idem sit axis 98, applicata vero 8ψ sit æqualis curvæ $\chi 11\,9$, item applicata 10 11 12 sit æqualis curvæ 11 9, et sic de reliquis.

Probandum primo curvas $0\pi\beta$ et $\psi 12\,9$ esse easdem, hoc est, omnino æquales et similes. Quod sic demonstrabitur :

Probavimus

quadratum BE esse ad quadratum BG,
sive quadratum $\lambda\delta$ ad quadratum $\delta\gamma$,
ut rectam AV una cum CB bis sumptâ ad rectam CB:

ergo, sumptis antecedentium dimidiis, quum posuerimus rectam 0δ esse potestate subduplam rectæ $\delta\lambda$, quadratum rectæ 0δ erit dimidium quadrati $\lambda\delta$, ideoque

ut quadratum 9δ ad quadratum $\delta\gamma$,
ita dimidia AV una cum CB erit ad ipsam CB.

Similiter probabimus in alia qualibet applicata, ut $\pi\nu$, esse

quadratum $\pi\nu$ ad quadratum $\nu 7$
ut dimidiam AV una cum ZT ad ipsam ZT;

et sic de reliquis.

Disquirendum jam an eadem proprietas curvæ $\psi 12\,9$ conveniat. Quod ita fiet :

In curva $\chi 11\,9$, cujus semibasis $\chi 8$ est potestate subdupla semiba-

Fig. 138 (5).

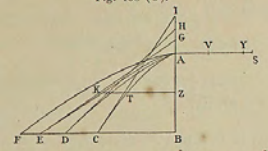
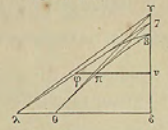


Fig. 140 (5).



seos BC et axis 89 æqualis axi AB, ex lemmate superiori, ductis tangentibus ad puncta χ, ψ rectis $\chi\rho$, $\psi\sigma$,

quadratum $\chi 8$ est ad quadratum 8ρ ut dimidia rectæ AV ad rectam CB;

recta enim $\chi 8$ est potestate subdupla rectæ CB : ergo, componendo,

quadratum $\chi\rho$ est ad quadratum 8ρ
ut dimidia AV una cum CB ad ipsam CB.

Similiter, si intelligatur recta 910 æqualis rectæ AZ, hoc est si puncta 10 et Z æqualiter a vertice distent,

quadratum tangentis ad punctum 11 ductæ erit ad quadratum abscissæ ab axe
ut dimidia AV una cum recta ZT ad ipsam ZT.

Sed,

ut quadratum $\chi\rho$ ad quadratum 8ρ, ita,

ex propositione VI Dissertationis, est

quadratum applicatæ $\psi 8$ ad quadratum a tangente abscissæ 8σ,

(et, similiter,

ut quadratum tangentis ad punctum 11 ductæ
ad quadratum abscissæ ab axe,
ita quadratum applicatæ 12 10
ad quadratum abscissæ ab axe per tangentem ad punctum 12 ductam) :

ergo

ut quadratum $\psi 8$ ad quadratum 8σ, ita dimidia AV una cum BC ad BC.

Sed in alia figura (*fig.* 140) probavimus

quadratum applicatæ $\theta\delta$ esse ad quadratum abscissæ a tangente $\delta\gamma$
ut est dimidia AV una cum BC ad CB :

ergo, in duabus curvis $\psi 129$, $0\pi\beta$, erit

ut $\psi 8$ ad abscissam 8σ, ita applicata $\theta\delta$ ad abscissam $\delta\gamma$,

et in omnibus aliis punctis idem semper continget, et eodem modo probabimus nempe applicatam, verbi gratia,

$10\,12$ esse ad abscissam a tangente ad punctum 12 ducta ut est $\pi\nu$ ad $\nu\gamma$,

et sic de reliquis.

Per primam itaque propositionem hujus Appendicis, quum curvæ $9\,12\psi$, $0\pi\beta$ habeant eumdem axem, et applicatæ sint ad abscissas ab axe per tangentes utrobique in eadem correlatarum ratione, illæ curvæ erunt inter se æquales, et ipsæ etiam ipsarum semibases, et omnes

Fig. 138 (5).

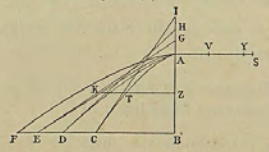
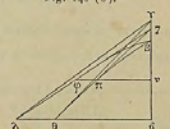


Fig. 140 (5).



similiter applicatæ a vertice æquidistantes. Ex constructione autem semibasis $\psi 8$ est æqualis curvæ $\chi 119$: ergo curva $\chi 119$ est æqualis rectæ 0δ. Recta autem 0δ est potestate subdupla rectæ $\delta\lambda$ ex constructione : ergo curva parabolica $\chi 119$ est potestate subdupla rectæ $\delta\lambda$. Recta autem $\delta\lambda$ est æqualis rectæ BE et recta BE supposita est, in constructione curvarum a primaria AC derivatarum, æqualis esse curvæ AD : ergo parabole $\chi 119$ est subdupla potestate curvæ AD. Sed eadem curva $\chi 119$ est subdupla potestate paraboles O4P : basis enim $\chi 8$ est facta potestate subdupla bascos BC sive NO, et similiter axis 89 sive AB sive NM est potestate subduplus axis NP; quum ergo parabolæ

O4P, $\chi 119$ sint ejusdem naturæ et tam axis quam basis paraboles $\chi 119$ sint potestate subduplæ axis et bascos paraboles O4P, ergo et ipsa parabole $\chi 119$, ex propositione II hujus Appendicis, erit subdupla paraboles O4P. Quum ergo, ut jam probavimus, eadem parabole $\chi 119$ sit subdupla tam paraboles O4P quam curvæ AD, curva AD et ipsa parabole O4P erunt inter se æquales. Quod erat demonstrandum.

Nec dissimili, ad probandum curvam AE æqualem esse parabolæ O5Q, utendum artificio.

Quum enim

quadratum BE esse ad quadratum BG
ut est recta AV una cum BC bis sumptâ ad ipsam BC

probatum fuerit, ergo, componendo et ulterius progrediendo, erit

quadratum tangentis EG ad quadratum rectæ BG
ut recta AV una cum BC ter sumptâ ad ipsam BC.

Est autem, ex prædemonstratis in sexta propositione Dissertationis,

ut quadratum EG ad quadratum BG, ita quadratum BF
ad quadratum abscissæ ab axe per tangentem ad punctum F ductam :

ergo

quadratum BF erit ad quadratum illius abscissæ
ut est recta AV una cum BC ter ad BC.

In reliquis imitabimur omnino et sequemur vestigia demonstrationis

Fig. 139 (5).

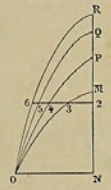
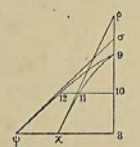


Fig. 141 (5).



præcedentis, nisi quod in figura separata (*fig.* 140), postquam $\lambda\delta$

fuerit facta æqualis ipsi BF, recta $\delta 0$ fiet subtripla potestate ipsius BF vel $\delta\lambda$, curva $\lambda\varphi\beta$ curvæ FA fiet æqualis, curva $0\pi\beta$ ejus erit naturæ ut omnes applicatæ sequantur rationem basium $\lambda\delta$, 0δ. In alia autem figura separata (*fig.* 141) in qua curvæ $9\,11\chi$ et $9\,12\psi$, recta 98 erit æqualis, ut supra, rectæ MN vel AB vel $\beta\delta$, basis vero 8χ fiet subtripla potestate baseos ON vel CB, et fiet $\chi\,11\,9$ parabole ejusdem cum parabolis CTA vel O3M naturæ; a qua quum formabitur curva $\psi\,12\,9$, cujus applicatæ 8ψ, $10\,12$ sint, ut supra, æquales curvis $\chi 9$, $11\,9$, probabimus, ut supra, curvam $\beta\pi 0$ et curvam $9\,11\chi$ esse inter se æquales et similes, hoc est, easdem.

Unde concluditur bases 0δ et $\psi 8$ esse æquales, ideoque basim $\psi 8$ sive curvam $9\,11\chi$ esse potestate subtriplam rectæ $\delta\lambda$ sive BF sive curvæ AE; est autem etiam, ex prædemonstratis, parabole $\chi\,11\,9$ subtripla potestate paraboles O5Q : ergo curva AE et parabole O5Q erunt inter se æquales.

Eodem ratiocinio in ulterioribus casibus utemur et generalem nostri theorematis veritatem evincemus.

Qui autem superiorem Dissertationem et hanc ad ipsam Appendicem accuratius legerint, præcipua methodi nostræ fundamenta statim agnoscent, et ex eis deduci facillimam curvarum dimensionem deprehendent.

DE ÆQUATIONUM LOCALIUM TRANSMUTATIONE ET EMENDATIONE

AD MULTIMODAM

CURVILINEORUM INTER SE VEL CUM RECTILINEIS COMPARATIONEM,

CUI ANNECTITUR

PROPORTIONIS GEOMETRICÆ

IN QUADRANDIS INFINITIS PARABOLIS ET HYPERBOLIS

USUS.

In unica paraboles quadratura proportionem geometricam usurpavit Archimedes (1); in reliquis quantitatum heterogenearum comparationibus, arithmeticæ duntaxat proportioni sese adstrinxit. An ideo quia proportionem geometricam minus τετραγωνίζουσαν est expertus? An vero quia peculiare ab illa proportione petitum artificium, ad quadrandam primariam parabolen, ad ulteriores derivari vix potest? Nos certe hujusmodi proportionem quadrationum feracissimam et agnoscimus et experti sumus, et inventionem nostram, quæ eâdem omnino methodo et parabolas et hyperbolas quadrat, recentioribus geometris haud illibenter impertimur.

Unico, quod notissimum est, proportionis geometricæ attributo tota hæc methodus innititur; theorema hoc est :

Datâ quâvis proportione geometricâ, cujus termini decrescant in infinitum, est ut differentia terminorum progressionem constituentium ad

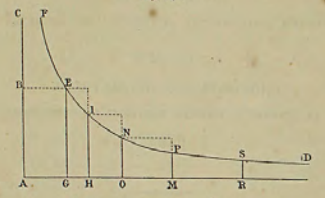
(1) Archimède, *Quadratura paraboles*, prop. 23 et 24.

minorem terminum, ita maximus progressionis terminus ad reliquos omnes in infinitum sumptos.

Hoc posito, proponantur primo hyperbolæ quadrandæ.

Hyperbolas autem definimus infinitas diversæ speciei curvas, ut DSEF (*fig.* 142), quarum hæc est proprietas ut, positis in quolibet

Fig. 142.



angulo dato RAC ipsarum asymptotis rectis AR, AC, in infinitum, si placet, non secus ac ipsa curva extendendis, et ductis uni asymptotôn parallelis rectis quibuslibet GE, HI, ON, MP, RS etc., sit ut potestas quædam rectæ AH ad potestatem similem rectæ AG, ita potestas rectæ GE, vel similis vel diversa a præcedente, ad potestatem ipsi homogeneam rectæ HI. Potestates autem intelligimus, non solum quadrata, cubos, quadratoquadrata etc., quarum exponentes sunt 2, 3, 4 etc., sed etiam latera simplicia, quorum exponens est unitas.

Aio itaque omnes in infinitum hujusmodi hyperbolas, unicâ demptâ quæ Apolloniana (1) *est sive primaria, beneficio proportionis geometricæ, uniformi et perpetua methodo quadrari posse.*

Exponatur, si placet, hyperbole cujus ea sit proprietas ut sit semper

ut quadratum rectæ HA ad quadratum rectæ AG,
ita recta GE ad rectam HI,

(1) Le nom d'*hyperbole*, comme ceux d'*ellipse* et de *parabole*, n'a pas été adopté avant Apollonius.

et

ut quadratum OA ad quadratum AH, ita recta HI ad rectam ON,

etc. Aio spatium infinitum cujus basis GE, et curva ES ex uno latere, ex alio verò asymptotos infinita GOR, æquari spatio rectilineo dato.

Fingantur termini progressionis geometricæ in infinitum extendendi, quorum primus sit AG, secundus AH, tertius AO, etc. in infinitum, et ad sese per approximationem tantum accedant quantum satis sit ut, juxta methodum Archimedeam, parallelogrammum rectilineum sub GE in GH quadrilineo mixto GHIE adæquetur, ut loquitur Diophantus (1), aut fere æquetur; item, ut priora ex intervallis rectis proportionalium, GH, HO, OM et similia, sint fere inter se æqualia, ut commode per ἀπαγωγὴν εἰς ἀδύνατον, per circumscriptiones et inscriptiones, Archimedea demonstrandi ratio institui possit : quod semel monuisse sufficiat, ne artificium quibuslibet geometris jam satis notum inculcare sæpius et iterare cogamur.

His positis, quum sit

ut AG ad AH, ita AH ad AO, et ita AO ad AM,

erit pariter

ut AG ad AH, ita intervallum GH ad HO, et ita intervallum HO ad OM,

etc.

Parallelogrammum autem sub EG in GH erit
ad parallelogrammum sub HI in HO
ut parallelogrammum sub HI in HO
ad parallelogrammum sub NO in OM :

quum enim ratio parallelogrammi sub GE in GH ad parallelogrammum sub HI in HO componatur ex ratione rectæ GE ad rectam HI et ex ratione rectæ GH ad rectam HO, sit autem

ut GH ad HO, ita AG ad AH,

ut præmonuimus, ergo ratio parallelogrammi sub EG in GH ad paral-

(1) *Voir* plus haut, page 133, note 2.

lelogrammum sub HI in HO componitur ex ratione GE ad HI et ex ratione AG ad AH. Sed

ut GE ad HI, ita, ex constructione, HA quadratum ad quadratum GA,

sive, propter proportionales,

ita recta AO ad rectam GA :

ergo ratio parallelogrammi sub EG in GH ad parallelogrammum sub HI in HO componitur ex ratione AO ad AG et AG ad AH. Sed ratio AO ad AH componitur ex illis duabus : ergo parallelogrammum sub GE in GH est ad parallelogrammum sub HI in HO ut OA ad HA, sive ut HA ad AG.

Similiter probabitur parallelogrammum sub HI in HO esse ad parallelogrammum sub ON in OM ut AO ad HA.

Sed tres rectæ quæ constituunt rationes parallelogrammorum, rectæ nempe AO, HA, GA, sunt proportionales ex constructione : ergo parallelogramma in infinitum sumpta, sub GE in GH, sub HI in HO, sub ON in OM, etc., erunt semper continue proportionalia in ratione rectæ HA ad GA. Est igitur, ex theoremate hujus methodi constitutivo,

ut GH, differentia terminorum rationis,
ad minorem terminum GA,
ita primus parallelogrammorum progressionis terminus,
hoc est parallelogrammum sub EG in GH,
ad reliqua in infinitum parallelogramma,

hoc est, ex adæquatione Archimedea, ad figuram sub HI, asymptoto HR et curva IND in infinitum extendenda, contentam.

Sed ut HG ad GA, ita, sumptâ communi latitudine rectâ GE, parallelogrammum sub GE in GH ad parallelogrammum sub GE in GA : est igitur

ut parallelogrammum sub GE in GH
ad figuram illam infinitam cujus basis HI,
ita idem parallelogrammum sub GE in GH
ad parallelogrammum sub GE in GA.

Ergo parallelogrammum sub GE in GA, quod est spatium rectilineum datum, adæquatur figuræ prædictæ; cui si addas parallelogrammum sub GE in GH, quod propter minutissimos τεμαχισμοὺς evanescit et abit in nihilum, superest verissimum et Archimedeâ (licet prolixiore) demonstratione facillime firmandum : parallelogrammum AE, in hac hyperboles specie, æquari figuræ sub base GE, asymptoto GR et curva ED in infinitum producenda, contentæ.

Nec operosum ad omnes omnino hujusmodi hyperbolas, unâ, ut diximus, demptâ, inventionem extendere. Sit enim ea *alterius*, si placet, *hyperboles* proprietas,

ut sit GE ad HI ut cubus rectæ HA ad cubum rectæ GA,

et sic de reliquis.

Expositâ ex more infinitâ proportionalium, ut supra, serie, fient proportionalia parallelogramma EH, IO, MN, ut supra, in infinitum : in hoc verò casu, parallelogrammum primum erit ad secundum, secundum ad tertium, etc. ut recta AO ad GA; quod statim compositio proportionum manifestabit. Erit igitur

ut parallelogrammum EH ad figuram, ita recta OG ad GA

et, sumptâ communi latitudine GE,

ita parallelogrammum sub OG in GE ad parallelogrammum sub GE in GA :

est igitur

ut parallelogrammum sub OG in GE ad parallelogrammum sub GE in GA,
ita parallelogrammum sub GE in GH ad figuram,

et, vicissim,

ut parallelogrammum sub OG in GE ad parallelogrammum sub GE in GH,
ita parallelogrammum sub GE in GA ad figuram.

Ut autem

parallelogrammum sub OG in GE ad parallelogrammum sub HG in GE,
ita OG ad GH, sive 2 ad 1, ex adæquatione :

intervalla enim basi proxima facta sunt, ex constructione, fere æqualia inter se. Ergo, in hac hyperbole, parallelogrammum EGA, quod est æquale spatio rectilineo dato, est duplum figuræ sub base GE, asymptoto GR, curva ESD in infinitum producenda, contentæ.

Similis in quibuslibet aliis casibus habebit locum demonstratio, nisi quod in primaria (sive Apolloniana et simplici) hyperbole deficit eâ solâ ratione methodus, quia in hac parallelogramma EH, IO, NM sunt semper inter se æqualia; atque ideo, quum termini progressionis constitutivi sint inter se æquales, nulla inter eos est differentia quæ totum in hoc negotio conficit mysterium.

Demonstrationem, qua probatur spatia in hyperbole communi parallelogrammis contenta esse semper inter se æqualia, non adjungimus, quum statim per se ipsa se prodat et ex hac unica proprietate, quæ asserit in ea specie esse

ut GE ad HI, ita HA ad GA,

facillime derivetur.

Eadem ratione parabolæ omnes omnino quadrantur, nec est ulla quæ ab artificio nostræ methodi, ut fit in hyperbolis, possit esse immunis.

Unicum in parabole, si lubet, primariâ et Apollonianâ adjiciemus exemplum, cujus exemplo reliquæ omnes, in quibuslibet in infinitum parabolis, demonstrationes expedientur.

Sit semiparabole primaria AGRC (*fig.* 143), cujus diameter CB, semibasis AB; sumptis autem applicatis IE, ON, GM etc., sit semper

ut quadratum AB ad quadratum IE, ita recta BC ad CE,

et

ut quadratum IE ad quadratum ON, ita recta CE ad CN,

et sic in infinitum ex proprietate specifica paraboles Apollonianæ.

Intelligantur, ex more methodi, rectæ BC, EC, NC, MC, HC, etc. in infinitum continue proportionales : erunt etiam, ut superius probatum est, proportionalia parallelogramma AE, IN, OM, GH, etc. in infinitum. Ut cognoscatur ratio parallelogrammi AE ad parallelogrammum IN, recurrendum ex methodo ad compositionem proportionum.

Componitur autem

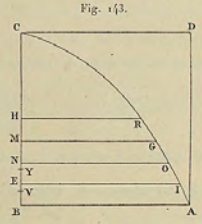
ratio parallelogrammi AE ad parallelogrammum IN
ex ratione AB ad IE et ex ratione BE ad EN.

Quum autem sit

ut AB quadratum ad IE quadratum, ita BC ad CE,

si inter BC et CE sumatur media proportionalis CV, item inter EC et

Fig. 143.



NC media proportionalis YC, erunt continue proportionales rectæ BC, VC, EC, YC, NC et

ut BC ad EC, ita erit BC quadratum ad VC quadratum;

sed

ut BC ad EC, ita quadratum AB ad quadratum EI :

ergo

ut AB quadratum ad EI quadratum,
ita erit BC quadratum ad VC quadratum,

et

ut AB ad IE, ita erit BC ad VC.

Ratio igitur parallelogrammi AE ad parallelogrammum IN componetur

ex ratione BC ad VC, sive VC ad CE, sive EC ad YC,
et ex ratione BE ad EN, sive, ex superius demonstratis (1), BC ad CE.

(1) *Voir* plus haut la démonstration pour les hyperboles.

ratio autem quæ componitur ex his duabus rationibus,

BC nempe ad CE, et CE ad CY

est eadem quæ ratio BC ad CY : igitur

parallelogrammum AE est ad parallelogrammum IN ut BC ad YC,

ideoque, ex theoremate methodi constitutivo,

parallelogrammum AE erit ad figuram IRCHE ut recta BY ad rectam YC,

ideoque

ut idem parallelogrammum AE ad totam figuram AIGRCB,
ita recta BY ad totam diametrum BC.

Ut autem BY ad totam diametrum BC, ita, sumptâ communi latitudine AB,

parallelogrammum sub AB in BY ad parallelogrammum sub AB in BC,

sive parallelogrammum BD (ductâ AD, diametro parallelâ, occurrente tangenti CD in D) : ergo

ut parallelogrammum AE ad totam figuram semiparabolicam ARCB,
ita parallelogrammum sub AB in BY ad parallelogrammum BD,

et, vicissim,

ut parallelogrammum AE ad parallelogrammum sub AB in BY,
ita figura ad parallelogrammum BD.

Ut autem

parallelogrammum AE ad parallelogrammum sub AB in BY,

ita, propter communem latitudinem,

recta BE ad BY;

ergo

ut BE ad BY, ita figura ad parallelogrammum <BD>,

et, convertendo,

ut BY ad BE, ita parallelogrammum BD ad figuram ARCB.

Est autem BY ad BE (propter adæqualitatem et sectiones minutissimas, quod rectas BV, VE, EY, intervalla proportionalium repræsentantes, fere inter se supponit æquales) ut 3 ad 2 : ergo

parallelogrammum BD ad figuram est ut 3 ad 2,

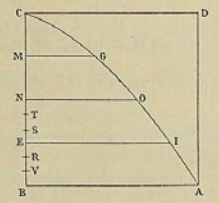
quæ ratio congruit τετραγωνισμῷ paraboles Archimedeo, licet ab eo geometrica proportio aliâ ratione fuerit usurpata; methodum autem variare et diversam ab Archimede viam sectari necessum habuimus, quia sterilem proportionis geometricæ ad quadrandas cæteras in infinitum parabolas applicationem deprehensam iri, insistendo vestigiis tanti viri, non dubitamus.

Demonstratio autem et regulæ generales ex nostra methodo fere in omnibus omnino parabolis statim patebunt : sit enim, ut nullus amplius supersit dubitandi locus, parabole ea de qua mentionem fecit *Dissertatio* nostra *de linearum curvarum cum lineis rectis comparatione* (1), curva AIGC (*fig.* 144), cujus basis AB, diameter BC, et sit

ut cubus applicatæ AB ad cubum applicatæ IE,
ita quadratum rectæ BC ad quadratum rectæ EC,

et reliqua ponantur ut supra, series nempe proportionalium rectarum

Fig. 144.



BC, EC, NC, MC, etc., item series proportionalium parallelogrammorum AE, IN, OM, etc. in infinitum.

(1) *Voir* plus haut, page 217, ligne 1.

Inter BC et EC sumantur duæ mediæ proportionales VC, RC; item inter EC et CN sumantur etiam duæ mediæ proportionales SC, TC.

Constat, ex constructione, quum

ratio BC ad CE sit eadem rationi EC ad NC,

fore quoque continue proportionales rectas BC, VC, RC, EC, SC, TC, NC. Est autem

ut AB cubus ad cubum IE, ita BC quadratum ad EC quadratum,
sive recta BC ad rectam NC;

quum autem sint, ut supra probavimus, septem continue proportionales, BC, VC, RC, EC, SC, TC, NC, ergo prima, tertia, quinta et septima erunt etiam continue proportionales, ideoque erit

BC ad RC ut RC ad SC et ut SC ad NC:

ut igitur

prima BC ad quartam NC, ita cubus primæ BC ad cubum secundæ RC.

Sed

ut BC ad NC, ita probavimus esse cubum AB ad cubum IE:

ergo

ut cubus AB ad cubum IE, ita cubus BC ad cubum RC,

ideoque

ut AB ad IE, ita BC ad RC.

Quum igitur ratio parallelogrammi AE ad parallelogrammum IN componatur

ex ratione AB ad IE et ex ratione BE ad EN, sive BC ad EC,

ergo eadem parallelogrammorum ratio componetur

ex ratione BC ad RC et BC ad EC.

Ut autem

BC, prima proportionalium, ad EC quartam,
ita RC tertia ad TC sextam:

ergo parallelogrammi AE ad parallelogrammum IN ratio componitur

ex ratione BC ad RC et RC ad TC,

hoc est

parallelogrammum AE est ad parallelogrammum IN ut BC ad TC.

Parallelogrammum igitur AE, ex prædemonstratis, est ad figuram IGCE

ut recta BT ad TC,

ideoque

ut parallelogrammum AE ad totam figuram AICB,
ita recta BT ad rectam BC,

sive, sumpta communi latitudine AB,

ita parallelogrammum sub AB in BT ad parallelogrammum sub AB in BC;

et, vicissim et convertendo,

parallelogrammum BD est ad figuram AICB
ut parallelogrammum sub AB in BT ad parallelogrammum sub AB in BE,

sive, propter communem latitudinem AB,

ut recta BT ad rectam BE.

Recta autem BT continet quinque intervalla : TS, SE, ER, RV, VB, quæ inter se, propter nostram methodum logarithmicam, censentur æqualia; recta autem BE continet tria ex iis intervallis, nempe ER, RV, VB : ergo

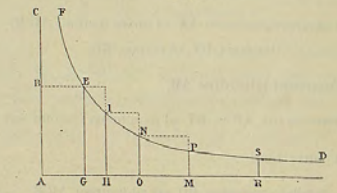
parallelogrammum BD est ad totam figuram in hoc casu ut 5 ad 3.

Canon vero *universalis* inde nullo negotio elicietur : *patet nempe fore semper parallelogrammum* BD *ad figuram* AICB *ut aggregatum exponentium potestatum applicatæ et diametri ad exponentem potestatis applicatæ* : ut in hoc exemplo videre est, in quo potestas applicatæ AB est cubus, cujus exponens 3; potestas autem diametri est quadratum, cujus exponens 2 : ergo debet esse, ut jam demonstravimus et per-

petuo constabit, ut summa 3 et 2, hoc est 5, ad 3 exponentem applicatæ.

In *hyperbolis* autem canon non minori facilitate invenietur universalis : erit enim semper in quacumque hyperbole, si recurras ad primam figuram (*fig.* 142), *parallelogrammum* BG *ad figuram in infinitum protensam* RGED *ut differentia exponentium potestatum applicatæ et diametri ad exponentem potestatis applicatæ.*

Fig. 142.



Sit enim, exempli gratia,

ut cubus HA ad cubum GA, ita quadratum GE ad quadratum HI.

Differentia exponentium cubi et quadrati (hæc est 3 et 2) erit 1; exponens autem potestatis applicatæ, hoc est quadrati, est 2 : ergo, in hoc casu, parallelogrammum erit ad figuram ut 1 ad 2.

Quod attinet ad centra gravitatis et tangentes tam hyperbolarum quam parabolarum, inventio dudum, ex nostra *Methodo de maximis et minimis* derivata, geometris recentioribus innotuit, hoc est ante viginti, plus minus, annos (1); quod celebriores totius Galliæ mathematici non gravabuntur fortasse exteris indicare, ne hac de re in posterum dubitent.

Ex supradictis mirum quantam opus tetragonismicum consequatur accessionem : infinitæ enim exinde figuræ, curvis contentæ de quibus

(1) *Voir* plus haut, page 171, note 1.

nihil adhuc nec veteribus nec novis geometris in mentem venit, facillimam sortiuntur quadraturam; quod in quasdam regulas breviter contrahemus.

Sit curva cujus proprietas det æquationem sequentem :

$$Bq. - Aq. \quad \text{æquale} \quad Eq.$$

(apparet autem statim hanc curvam esse circulum); certum est potestatem ignotam, $Eq.$, posse reduci, per applicationem seu parabolismum, ad latus.

Possumus enim supponere

$$Eq. \quad \text{æquari} \quad B \text{ in } U,$$

quum sit liberum quantitatem ignotam U, in notam B ductam, æquare quadrato E etiam ignotæ.

Hoc posito,

$$Bq. - Aq. \quad \text{æquabitur} \quad B \text{ in } U;$$

homogeneum autem B *in* U ex tot quantitatibus homogeneis componi potest quot sunt in parte æquationis correlativâ; iisdemque signis hujusmodi homogenea debent notari. Supponatur igitur

$$B \text{ in } U \quad \text{æquari} \quad B \text{ in } I - B \text{ in } Y;$$

ex more enim Vietæo, vocales semper pro quantitatibus ignotis sumimus; ergo

$$Bq. - Aq. \quad \text{æquatur} \quad B \text{ in } I - B \text{ in } Y.$$

Æquentur singula membra partis unius singulis membris partis alterius : sit nempe

$$Bq. \quad \text{æquale} \quad B \text{ in } I;$$

ergo dabitur

$$I \quad \text{æqualis} \quad B.$$

Æquetur deinde

$$-Aq., \quad -B \text{ in } Y,$$

hoc est

$$Aq., \quad B \text{ in } Y;$$

erit extremum punctum rectæ Y ad parabolen primariam. Omnia igitur in hoc casu ad quadratum reduci possunt, ideoque, si omnia *Equadrata* ad rectam lineam datam applices, fiet solidum rectilineum datum et cognitum (1).

Proponatur deinde curva cujus hæc sit æquatio :

$$Ac. + B \text{ in } Aq. \quad \text{æqualis} \quad Ec.$$

$Ec.$ applicetur ad planum datum et sit, verbi gratia, æqualis $Bq.$ in U. Quia autem recta U ex pluribus quantitatibus ignotis componi potest, sit

$$Ac. + B \text{ in } Aq. \quad \text{æqualis} \quad Bq. \text{ in } I + Bq. \text{ in } Y.$$

Æquentur singula inter se membra, hoc est

$$Ac. \quad \text{æquetur} \quad Bq. \text{ in } I;$$

orietur inde parabole sub cubo et latere.

Æquetur deinde

$$B \text{ in } Aq. \quad \text{secundo membro} \quad Bq. \text{ in } Y;$$

orietur inde parabole sub quadrato et latere, hoc est primaria.

Quadrantur autem singulæ ex his parabolis; ergo aggregatum *Ecuborum* ad rectam datam applicatorum producit planoplanum quantitatibus ejusdem gradus rectilineis commode æquandum.

Si sint plura in æquationibus membra, imo et sub plerisque utriusque quantitatis ignotæ gradibus involuta, ad eamdem ut plurimum methodum, reductionum legitimarum ope, poterunt aptari.

Ex his patet, si in priori æquatione, in qua

$$Bq. - Aq. \quad \text{æquavimus} \quad Eq.,$$

(1) C'est-à-dire que, si l'on a

$$e^2 = b^2 - a^2,$$

et que b, par exemple, soit la *recta linea data*, $\int_0^b e^2 da$ est une quantité (du troisième degré) que l'on sait déterminer. C'est dans le même sens qu'il faut interpréter les expressions analogues qui suivent.

loco ipsius $Eq.$, ponamus B *in* U, posse nos aggregatum omnium U, ad rectam datam applicatarum, considerare tanquam planum et quadrare : omnes enim U nihil aliud sunt quam omnia *Equadrata* divisa per B rectam datam.

Item, in secunda æquatione, omnes U nihil aliud sunt quam omnes *Ecubi* divisi per B *quadratum* datum.

Igitur, tam in prima quam in secunda figura, omnes U faciunt figuram æqualem spatio rectilineo dato.

Hoc autem opus fit per synæresim et expeditur, ut patet, per parabolas; sed non minus quadrationum ferax est opus per diæresim, quod per hyperbolas, aut solas aut parabolis mixtas, commode pariter expeditur.

Proponatur, si placet, curva ab æquatione sequenti oriunda :

$$\frac{Bcc. + Bqc. \text{ in } A + Acc.}{Aqq.} \quad \text{æqualis} \quad Eq.$$

Ex jam suppositis $Eq.$ potest fingi æquale B *in* U, sive, ut tria hinc et inde membra sint in utraque parte æquationis,

$$B \text{ in } U \quad \text{potest æquari} \quad B \text{ in } O + B \text{ in } I + B \text{ in } Y.$$

Quo peracto,

$$\frac{Bcc. + Bqc. \text{ in } A + Acc.}{Aqq.} \quad \text{æquabitur} \quad B \text{ in } O + B \text{ in } I + B \text{ in } Y,$$

et, æquando singula membra singulis,

$$\frac{Bcc.}{Aqq.} \quad \text{æquabitur} \quad B \text{ in } O;$$

et, omnibus in $Aqq.$ ductis,

$$Bcc. \quad \text{æquabitur} \quad Aqq. \text{ in } B \text{ in } O;$$

et, omnibus abs B divisis,

$$Bqc. \quad \text{æquabitur} \quad Aqq. \text{ in } O,$$

quæ est æquatio ad unam ex hyperbolis, ut patet : æquationes enim

hyperbolarum constitutivæ continent, ex una parte, quantitatem datam; ex alia vero, id quod fit sub potestatibus duarum quantitatum ignotarum.

Secundum membrum æquationis dat

$$\frac{Bqc.\text{ in }A}{Aqq.} \quad \text{sive} \quad \frac{Bqc.}{Ac.} \quad \text{æqualis} \quad B\text{ in }I,$$

et, omnibus in $Ac.$ ductis et abs B divisis, fit

$$Bqq. \quad \text{æquale} \quad Ac.\text{ in }I,$$

quæ est æquatio alterius hyperboles a priore diversæ.

Denique tertium membrum est

$$\frac{Acc.}{Aqq.}, \quad \text{hoc est} \quad Aq. \quad \text{æquale} \quad B\text{ in }Y,$$

quæ est æquatio ad parabolen.

Patet itaque in præcedente æquatione omnes U ad rectam datam applicatas æquari spatio rectilineo dato : summa enim duarum hyperbolarum quadrationi obnoxiarum et unius paraboles dat spatium æquale rectilineo vel quadrato dato.

Nihil autem vetat quominus singula membra numeratoris separatim denominatori applicemus, ut jam factum est : eodem enim res recidit quo si integrum numeratorem ex tribus membris compositum eidem denominatori semel applicemus. Ita enim singula æquationis membra singulis homogenei correlati possunt commode comparari.

Proponatur etiam

$$\frac{Bqc.\text{ in }A - Bcc.}{Ac.} \quad \text{æquari} \quad Ec.$$

Fingatur $Ec.$ æquari $Bq.$ in U, sive, propter duo membra homogenei correlati,

$$Bq.\text{ in }I - Bq.\text{ in }Y.$$

Fiet

$$\frac{Bqc.\text{ in }A}{Ac.} \quad \text{sive} \quad \frac{Bqc.}{Aq.} \quad \text{æqualis} \quad Bq.\text{ in }I,$$

et, omnibus in $Aq.$ ductis et abs $Bq.$ divisis, fiet

$$Bc. \quad \text{æqualis} \quad Aq.\text{ in }I,$$

quæ est æquatio ad unam ex hyperbolis quadrandis.

Ponatur deinde secundum homogenei membrum

$$\frac{Bcc.}{Ac.} \quad \text{æquari} \quad Bq.\text{ in }Y.$$

Igitur, omnibus in $Ac.$ ductis et abs $Bq.$ divisis, fiet

$$Bqq. \quad \text{æquale} \quad Ac.\text{ in }Y,$$

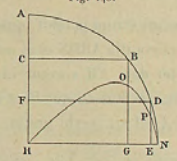
quæ est æquatio unius ex hyperbolis quadrationi obnoxiis constitutiva.

Datur igitur, recurrendo ad primam æquationem, in rectilineis summa omnium *E cuborum* in hac specie ad certam rectam datam applicatorum.

Sed et ulterius progredi et opus tetragonismicum promovere nihil vetat (1).

Sit in quarta figura (*fig.* 145) curva quælibet ABDN, cujus basis HN,

Fig. 145.



diameter HA, applicatæ ad diametrum CB, FD, et applicatæ ad basim BG, DE; et decrescant semper applicatæ a base ad verticem, ut hic HN est major FD et FD major est CB et sic semper.

(1) Ce qui suit correspond à l'enseignement de l'intégration par parties et de l'intégration par changement de variable.

Figura composita ex quadratis HN, FD, CB ad rectam AH applicatis (hoc est solidum sub CB quadrato in CA et sub FD quadrato in FC et sub NH quadrato in HF) æqualis est semper figuræ sub rectangulis BG in GH, DE in EH, bis sumptis et ad basim HN applicatis (hoc est solido sub BG in GH bis in GH et sub DE in EH bis in EG) etc. utrimque in infinitum.

In reliquis autem in infinitum potestatibus, eâdem facilitate fit reductio homogeneorum ad diametrum ad homogenea ad basim. Quæ observatio curvarum infinitarum hactenus ignotarum detegit quadrationem.

Omnes enim cubi HN, FD, CB, ad rectam AH similiter applicati, æquales sunt aggregato productorum ex BG in GH quadratum et ex DE in EH quadratum, ad rectam HN, similiter ut supra, applicatorum et ter sumptorum : hoc est planoplanum sub CB cubo in CA et sub DF cubo in FC et sub HN cubo in HF æquatur summæ planoplanorum ex BG in GH quadratum in HG et ex DE in EH quadratum in EG, ter sumptæ.

Aggregatum vero quadratoquadratorum HN, FD, CB ad rectam AH applicatorum æquatur quadruplo summæ planoplanorum sub BG in GH cubum et sub DE in EH cubum, ad rectam HN, similiter ut supra, applicatorum.

Inde emanant infinitæ, ut statim patebit, quadraturæ.

Esto enim, si placet, curva illa ABDN ejus naturæ ut, data base HN et diametro HA, diameter data AH vocetur in terminis analyticis B, ipsa verò HN, basis data, vocetur D, quælibet applicata FD vocetur E et quælibet HF vocetur A; et sit, verbi gratia, æquatio curvæ constitutiva

$$Bq. - Aq. \quad \text{æquale} \quad Eq.,$$

quod in circulo ita se habet.

Quum ergo, ex prædicto theoremate universali, omnia *E quadrata* ad rectam B applicata sint æqualia omnibus productis ex HG in GB < bis sumptis et > ad basim HN sive ad D applicatis; sint autem

omnia *E quadrata*, ad B applicata, æqualia [spatio] (1) rectilineo dato, ut superius probatum est : ergo omnia producta ex HG in GB, bis sumpta et ad basim D applicata, continent [spatium] rectilineum datum. Ergo, sumendo dimidium, omnia producta ex HG in GB ad basim D applicata erunt æqualia [spatio] rectilineo dato.

Ut autem facillima et nullis asymmetriis involuta fiat translatio prioris curvæ ad novam, ita constanti artificio, quæ est nostra methodus, operari debemus.

Sit quodlibet ex productis ad basim applicandis, HE in ED. Quum igitur FD sive HE, ipsi parallela, vocetur in analysi E, et FH sive DE, ipsi parallela, vocetur A, ergo productum sub HE in ED vocabitur E in A. Ponatur illud productum E in A, quod sub duabus ignotis et indefinitis rectis comprehenditur, æquari B in U, sive producto ex B data in U ignotam, et intelligatur EP, in directum ipsi DE posita, æquari U. Ergo

$$\frac{B \text{ in } U}{E} \quad \text{æquabitur} \quad A.$$

Quum autem $Bq. - Aq.$ æquetur, ex proprietate specifica prioris curvæ, ipsi $Eq.$, ergo subrogando, in locum A, ipsius novum valorem

$$\frac{B \text{ in } U}{E},$$

fiet

$$Bq. \text{ in } Eq. - Bq. \text{ in } Uq. \quad \text{æquale} \quad Eqq.,$$

sive, per antithesim,

$$Bq. \text{ in } Eq. - Eqq. \quad \text{æquale} \quad Bq. \text{ in } Uq.,$$

quæ est æquatio novæ HOPN curvæ ex priore oriundæ constitutiva, in qua, quum omnia producta ex B in U dentur, ut jam probatum est, si omnia ad B applicentur, dabitur summa omnium U ad basim applicatarum, hoc est, dabitur planum HOPN < in > rectilineis, ideoque ipsius quadratura.

(1) Il faudrait *solido*. Le mot *spatio* a pu être écrit par inadvertance ou ajouté à tort sur l'original. De même pour les répétitions *spatium* et *spatio* qui suivent.

Sit, secundi exempli gratia, æquatio prioris curvæ constitutiva

$$B \text{ in } Aq. - Ac. \quad \text{æquale} \quad Ec.$$

Summa omnium *E cuborum* ad diametrum *B* applicatorum dabitur, ideoque summa omnium productorum ex quadratis HE in ED ad basim applicatorum. Productum autem ex HE quadrato in ED fit, in terminis analyticis, *Eq. in A*, quod fingatur æquari *Bq. in U*, et recta EP, ut supra, æquatur *U*. Ergo

$$\frac{Bq. \text{ in } U}{Eq.} \quad \text{æquabitur} \quad A.$$

Si igitur, in locum A, subrogemus jam agnitum illius valorem

$$\frac{Bq. \text{ in } U}{Eq.},$$

et omnia juxta Analyseos præcepta exsequamur, fiet

$$Bqc. \text{ in } Uq. \text{ in } Eq. - Ecc. \quad \text{æquale} \quad Bcc. \text{ in } Uc.,$$

quæ est æquatio novæ HOPN curvæ ex priore oriundæ constitutiva, in qua, quum omnia producta *Bq. in U* ad basim *D* applicata dentur, omnibus per *Bq.* datum divisis, dabitur summa omnium *U* ad basim *D* applicatarum, ideoque quadratura figuræ HOPN.

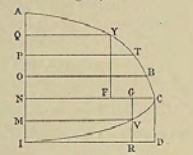
Et est generalis, ad omnes omnino casus extendenda in infinitum, methodus. Notandum porro et accurate advertendum in translationibus curvarum, quarum applicatæ ad diametrum versus basim decrescunt, aliam omnino viam analystis ineundam, a præcedenti diversam.

Sit enim in quinta figura (*fig.* 146) prior curva IVCBTYA, cujus diameter AI, applicatæ MV, NC, OB, PT, QY, et ejus curvæ ea sit natura ut applicatæ versus basim semper decrescant, donec ad basim perveniant, ita ut MV sit minor quam NC; rursus autem ita curva versus A, per tramitem CBYA, inflectatur, ut CN sit major quam BO, BO major quam PT, PT major quam QY, etc.; ita ut omnium applicatarum maxima sit CN.

Si in hoc casu quæramus translationem quadratorum MV, NC ad

basim, ea non comparabimus productis sub IR in RV, ut supra, quia jam, ex theoremate generali, suppositum est omnia quadrata MV, NC æquari productis sub VG in GN, quum CN, maxima applicatarum, possit et debeat considerari ut basis respectu curvæ cujus vertex I.

Fig. 146.



Quadrata igitur MV, NC, in curva quarum applicatæ decrescunt versus basim, comparabuntur in hoc casu productis < ex > GV in GN, hoc est, ut ad terminos analyticos æquatio in hac figura perveniat, si MI vel RV vocetur *A*, et ipsa MV sive RI vocetur *E*, ipsaque CD sive GR (quæ ductæ, per terminum maximæ applicatarum, ipsi diametro parallelæ, est æqualis ideoque facile ex nostris methodis invenienda) rectæ datæ *Z* æqualis supponatur, fiet

$$\text{productum ex GV in GN} \quad \text{æquale} \quad \text{producto ex } Z \text{ in } E - A \text{ in } E,$$

ideoque omnia quadrata MV, NC, usque ad maximam applicatam, comparabuntur productis

$$Z \text{ in } E - A \text{ in } E$$

ad basim ID applicandis.

Reliqua vero quadrata CN, BO, PT comparabuntur productis ex YF in FN, quæ in terminis analyticis æquivalebunt

$$A \text{ in } E - Z \text{ in } E.$$

Quibus ita stabilitis, facillime ex priore curva nova versus basim derivabitur, idemque in aliis omnino applicatarum potestatibus erit observandum.

Ut autem pateat novas ex nostra hac methodo emergere quadraturas,

de quibus nondum recentiorum quisquam est aliquid subodoratus, proponatur præcedens curva, cujus æquatio

$$\frac{Bqc.\text{ in }A - Bcc.}{Ac.} \quad \text{æqualis} \quad Ec.$$

Dantur omnes *E cubi* in rectilineis, ut jam probatum est. Quibus ad basim translatis, fiet, ex superiori methodo,

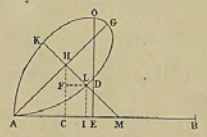
$$\frac{Bq.\text{ in }U}{Eq.} \quad \text{æquale} \quad A,$$

et, omnibus secundum artem novo ipsius A valori accommodatis, evadet tandem nova æquatio quæ dabit curvam ex parte basis; cujus æquatio dabit

$$Ec. + Uc. \quad \text{æqualis} \quad B \text{ in } E \text{ in } U,$$

quæ est curva Schotenii (1), cujus constructionem tradit in Sectione 25 *Miscellanearum*, pag. 493. Figura itaque curvæ AKOGDLA (*fig.* 147) quæ apud illum autorem delineatur, ex superioribus præceptis quadrationem suam commode nanciscetur.

Fig. 147.



Notandum autem ex curvis, in quibus aggregatum potestatum applicatarum datur, formari non solum curvas ad basim quadrationi obnoxias, sed etiam alias curvas ad diametrum facile quadrandas.

(1) Francisci a Schooten *Exercitationum Mathematicarum libri quinque* (Leyde, Jean Elzevir, 1657). La *fig.* 147 est reproduite d'après Schooten, qui donne sur cette courbe, d'après J. Hudde, une construction de la plus grande largeur KL. Il est singulier que ni Schooten ni Fermat n'aient fait mention de Descartes comme ayant proposé le premier cette courbe, à laquelle Roberval donna le nom de *galand* (nœud de ruban) et qui est ordinairement désignée maintenant sous celui de *folium de Descartes*.

Si enim in quarta figura (*fig.* 145) supponatur æquatio curvæ constitutiva, ut superius diximus,

$$Bq. - Aq. \quad \text{æquale} \quad Eq.,$$

non solum ex ea derivabitur nova curva ad basim, cujus æquatio est

$$Bq. \text{ in } Eq. - Eqq. \quad \text{æquale} \quad Bq. \text{ in } Uq.,$$

sed etiam nova curva ad diametrum, æquando potestatem applicatæ, quæ est $Eq.$, producto B *in* U.

Dabuntur enim omnia producta B *in* U ad diametrum applicata et, omnibus per B divisis, dabuntur omnes U diametro applicatæ, ideoque quadratura curvæ novæ ex priore versus diametrum oriundæ, cujus æquatio erit

$$Bq. - Aq. \quad \text{æquale} \quad B \text{ in } U;$$

unde statim apparet novam illam curvam versus diametrum esse parabolen.

Hujusmodi autem transmutationum beneficio, non solum ex primoribus curvis oriuntur novæ, sed itur, nullo negotio, a parabolis ad hyperbolas et ab hyperbolis ad parabolas, ut experientiâ constabit.

Sicut autem a curvis, in quibus dantur potestates applicatarum, fit, præcedentis ope analyseos, translatio ad curvas, in quibus latera applicatarum in rectilineis dantur, ita ex curvis in quibus dantur latera applicatarum, devenitur facile ad curvas, in quibus potestates applicatarum dantur.

Cujus rei exemplum esto curva, cujus æquatio

$$Bq. \text{ in } Eq. - Eqq. \quad \text{æquale} \quad Bq. \text{ in } Uq.$$

In hac enim æquatione, ut jam probatum est, dantur omnes U. Ponatur

$$U \quad \text{æqualis esse} \quad \frac{A \text{ in } E}{B},$$

et, subrogando in locum ipsius U, novum ipsi assignatum valorem, $\frac{A \text{ in } E}{B}$, fiet

$$Bq. \text{ in } Eq. - Eqq. \quad \text{æquale} \quad Aq. \text{ in } Eq.$$

et, omnibus abs $Eq.$ divisis, remanebit

$$Bq. - Eq. \quad \text{æquale} \quad Aq.$$

sive

$$Bq. - Aq. \quad \text{æquale} \quad Eq.$$

Dabuntur igitur in hac nova curva, quam apparet esse circulum, omnia *E quadrata*.

Quod si, ex prima curva in qua dantur latera applicatarum, quæratur nova in qua dentur cubi applicatarum, eâdem methodo utendum, modo potestates ignotarum conditionarias usurpemus.

Proponatur enim curva quam superius ex alia deduximus, et sit illius æquatio

$$Bqc. \text{ in } Uq. \text{ in } Eq. - Ecc. \quad \text{æqualis} \quad Bcc. \text{ in } Uc.$$

Probatum est in illa dari aggregatum omnium U, hoc est, latera applicatarum. Ut itaque ex eâ nova curva derivetur, in qua omnes cubi applicatarum dentur, ponatur

$$U \quad \text{æquari} \quad \frac{Eq. \text{ in } A}{Bq.},$$

et in locum U substituatur novus iste quem ipsi assignavimus valor, fiet tandem, operando secundum præcepta artis, æquatio

$$\text{inter} \quad B \text{ in } Aq. - Ac. \quad \text{et} \quad Ec.,$$

quæ dabit curvam in qua omnes $Ec.$, cubos applicatarum repræsentantes, dabuntur.

Ex hac autem methodo non solum dantur et inveniuntur quadrationes infinitæ, nondum geometris cognitæ, sed multæ etiam pariter infinitæ deteguntur curvæ, quarum quadraturæ, supponendo simpliciores quadraturas, ut circuli, ut hyperboles, ut aliarum, expediuntur.

Exempli gratia, in æquatione circuli, in qua

$$Bq. - Aq. \quad \text{æquatur} \quad Eq.,$$

dantur quidem in rectilineis omnes applicatarum potestates, quarum exponentes signantur numero pari, ut omnia quadrata, omnia quadratoquadrata, omnes cubocubi, etc.; sed potestates applicatarum, quarum exponentes signantur numero impari, ut omnes *E cubi*, omnes *E quadratocubi*, dantur tantum in rectilineis, supponendo ipsam circuli quadraturam. Quod non est operosum demonstrare et in praxin redigere, tanquam corollarium methodi præcedentis.

Plerumque autem usuvenit ut iterandæ vel bis vel etiam sæpius sint operationes ad inquirendam curvæ propositæ dimensionem.

Proponatur, exempli gratia, curva cujus æquatio sequens speciem determinet :

$$Bc. \quad \text{æqualis} \quad Aq. \text{ in } E + Bq. \text{ in } E.$$

Si dantur omnes E, ergo dantur omnia sub recta data (B videlicet) in E rectangula. Rectangulum B *in* E, invertendo superiorem, de qua egimus in principio Dissertationis, methodum, æquetur quadrato, Oq. Ergo

$$\frac{Oq.}{B} \quad \text{æquabitur} \quad E$$

et, substituendo, in locum E, novum hunc ipsi assignatum valorem, fiet

$$Bqq. \quad \text{æquale} \quad Aq. \text{ in } Oq. + Bq. \text{ in } Oq.$$

Et hæc sit prima operatio, quæ est inversa ejus quam initio hujus Dissertationis præmisimus, et quæ novam curvam exprimit, in qua inquirendum restat an dentur omnia Oq. Recurrendum igitur ad secundam methodum, cujus beneficio ex quadratis applicatarum latera novæ curvæ inquirimus.

Ponatur $\frac{B \text{ in } U}{O}$, ex superiore quam secundo loco exhibuimus methodo, æquari A et, substituendo, in locum A, ipsi jam assignatum ex nostra methodo valorem, fiet

$$Bqq. - Bq. \text{ in } Oq. \quad \text{æquale} \quad Bq. \text{ in } Uq.$$

et, omnibus per $Bq.$ divisis, evadet tandem

$$Bq. - Oq. \quad \text{æquale} \quad Uq.,$$

quæ æquatio dat circulum, et in ea omnes U dantur, supponendo quadraturam circuli.

Recurrendo igitur ad priorem curvam, in qua

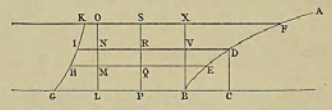
$$Bc. \quad \text{ponitur æquari} \quad Aq.\,\text{in}\,E + Bq.\,\text{in}\,E,$$

patet spatium ab ea curva oriundum per quadraturam circuli posse quadrari, idque per duas curvas a priore diversas analysis nostra breviter et facile expedivit.

Hæc vero omnia et ad inventionem rectarum curvis æqualium et ad pleraque alia non satis hactenus indagata problemata inservire statim experiendo ἀγχίνους analysta deprehendet.

Sit in sexta figura (*fig.* 148) parabole primaria ADB, cujus axis CB,

Fig. 148.



applicata CD æqualis axi CB et recto lateri BV, fiantque BP, PL, LG singulæ æquales axi CB et ipsi in directum. Sumatur in curva quodvis punctum, ut F, et, datis infinitis BX, PS, LO ipsi CD parallelis, ducatur FXSOK parallela axi, occurrens rectis < BX >, PS, LO in punctis < X >, S et O; et fiat ut summa rectarum FX, XS sive

ut tota FS ad SO, ita SO ad OK;

et, sumptis similiter punctis D, E, fiat

ut DR ad RN, ita RN ad NI,

et

ut EQ ad QM, ita QM ad MH;

et intelligatur curva infinita per puncta G, H, I, K etc. incedens, cujus asymptotos erit recta infinita LO.

Curva hæc GHIK est ea cujus species a superiori æquatione determinatur, in qua

$$Bc. \quad \text{æquatur} \quad Aq.\,\text{in}\,E + Bq.\,\text{in}\,E.$$

Aio itaque, ex jam tradita operationum analytica iteratione, spatium KIHGLMNO, in infinitum versus puncta K, O extendendum, æquale esse circulo, cujus diameter est axis BC, < bis sumpto >.

Hanc vero quæstionem, ab erudito geometra nobis propositam, ita statim expedivimus : eadem methodo spatium a Dioclea comprehensum quadravimus, vel ad circuli quadraturam reduximus (1).

Sed elegans imprimis operationum iteratio evadit, quum ab altioribus applicatarum potestatibus ad depressiores, vel contra a depressioribus ad altiores, analysis ipsa transcurrit : cui methodo præsertim debeatur inquisitio summæ applicatarum in quacumque curvâ propositâ, et multa alia problemata tetragonismica.

Proponatur, verbi gratia, curva cujus æquatio

$$Bq. - Aq. \quad \text{æquale} \quad Eq.,$$

quam statim apparet esse circulum. Quæritur summa cuborum applicatarum, hoc est, summa *E cuborum*.

Si dantur omnes *E cubi*, ergo, per præcedentes secundum potestatis conditionem methodos, ex ea curva potest alia ad basim derivari, in qua dabitur summa applicatarum. Ponatur igitur ex methodo

$$\frac{Bq.\,\text{in}\,O}{Eq.} \quad \text{æquari} \quad A :$$

ergo, substituendo, in locum *A*, jam assignatum ipsi valorem, fiet ex methodo

$$Bq.\,\text{in}\,Eqq. - Ecc. \quad \text{æquale} \quad Bqq.\,\text{in}\,Oq.,$$

quæ est æquatio curvæ, in qua omnes *O* dantur ex suppositione quam fecimus, in prima curva dari omnes *E cubos*.

Quum igitur in hac nova curva omnes *O* dentur, ex ea derivetur tertia, in qua quærantur quadrata applicatarum, non vero cubi, ut in priore curvâ jam suppositum est. Fingatur igitur ex nostra, quæ in

(1) *Voir* le fragment qui suit le présent Traité. Quant à la question qui précède, on ignore quel géomètre l'a proposée à Fermat.

quadratis, ut jam supra diximus, usurpatur, methodo,

$$\frac{E \text{ in } U}{B} \quad \text{æquari} \quad O:$$

ergo

$$Bq. \text{ in } Eqq. - Ecc. \quad \text{æquabitur} \quad Bq. \text{ in } Eq. \text{ in } Uq.$$

et, omnibus abs $Eq.$ divisis, fiet

$$Bq. \text{ in } Eq. - Eqq. \quad \text{æquale} \quad Bq. \text{ in } Uq.;$$

et in hac curva omnia *E quadrata* dantur.

Si igitur ex hac curva quæramus aliam in qua omnes applicatæ dentur, ponatur, si placet,

$$Eq. \quad \text{æquale} \quad B \text{ in } Y:$$

ergo, in ultima hac æquatione,

$$B \text{ in } Y - Yq. \quad \text{æquabitur} \quad Uq.$$

et, quum in superiore dentur omnia *E quadrata*, dabuntur in ista omnia rectangula B in Y, ideoque omnes Y.

Quum ergo omnes Y dentur in hac ultima curva, quæ est circulus, ut patet (igitur eâ tantum conditione dantur, si supponas dari circuli quadraturam), regrediendo igitur ab hac ultimâ, in qua desinit nostra analysis, curvâ ad priorem, patet omnes applicatarum ad circulum cubos dari, supponendo circuli quadraturam.

Idem de quadratocubis, de quadratoquadratocubis et cæteris in infinitum gradûs imparis potestatibus demonstrare est in promptu; sed multiplicatur numerus curvarum, prout altior est, de qua inquirimus, potestas.

Nec est difficilis ab analysi ad synthesin et ad verum quadrandæ figuræ calculum regressus.

Sæpius autem contingit et miraculi instar est per plurimas numero curvas incedendum et exspatiandum esse analystæ, ut ad simplicem æquationis localis propositæ dimensionem perveniatur.

Proponatur, exempli causa (1),

$$\frac{B^7 \text{ in } A - B^8}{A^6} \quad \text{æquari} \quad Eq.$$

Quum supponatur dari quadratura figuræ ex hac æquatione oriundæ, dabuntur omnes A, ergo omnia B in A, quæ si æques quadrato ignoto, $Oq.$, dabuntur omnia $Oq.$, et

$$A \quad \text{æquabitur} \quad \frac{Oq.}{B},$$

ideoque fiet æquatio

$$\text{inter} \quad \frac{B^{12} \text{ in } Oq. - B^{11}}{O^{12}} \quad \text{et} \quad Eq.$$

Ex hac nova curva, aliâ methodo de qua toties egimus, deducetur tertia in qua, quia dantur omnia *O quadrata*, ponatur

$$\frac{B \text{ in } U}{O} \quad \text{æquari} \quad E:$$

ergo fiet æquatio

$$\text{inter} \quad \frac{B^{10} \text{ in } Oq. - B^{12}}{O^{10}} \quad \text{et} \quad Uq.,$$

unde deducetur *tertia* curva (2), in qua dabuntur omnes O, ideoque omnes U.

Si dantur omnes U, ergo ex prima methodo dantur omnia sub B in U rectangula. Sit

$$B \text{ in } U \quad \text{æquale} \quad Yq.,$$

(1) Pour ce qui suit, jusqu'à la fin du Traité, on a reproduit la notation exponentielle telle qu'elle se trouve dans les *Varia*, où d'ailleurs elle n'apparaît pas plus tôt. Il est cependant douteux que Fermat, après avoir affecté jusque-là de conserver la notation de Viète, l'ait abandonnée sans faire une remarque analogue à celle qu'il a inscrite dans un Traité de la même époque (*voir* plus haut, p. 127, lignes 4 à 6 en remontant) pour une occasion où l'emploi des exposants s'imposait davantage à lui; il est surtout douteux qu'il ait appliqué ici la nouvelle notation aussi systématiquement que l'indiqueraient les *Varia*. En outre, dans cette fin du Traité, on peut soupçonner d'autres remaniements du texte. *Voir* la note qui suit.

(2) Les *Varia*, au lieu de *tertia*, portent *quarta*; tous les noms de nombre qui suivent, et qui sont inscrits en *italiques* dans le texte, sont de même augmentés d'une unité. On peut admettre une inadvertance de Fermat; mais il est également possible que son texte ait été corrigé à tort et même défiguré par l'addition de gloses dont l'auteur aura voulu numéroter successivement les différentes courbes dont il est question.

ideoque

$$\frac{Yq.}{B} \quad \text{æquabitur} \quad U,$$

et fiet æquatio

$$\text{inter} \quad \frac{B^{12} \text{ in } Oq. - B^{11}}{O^{10}} \quad \text{et} \quad Y^2,$$

unde orietur *quarta* curva, in qua dabuntur omnia *Y quadrata*.

Ex illâ, solitâ methodo, deducatur alia curva et fiat

$$\frac{B \text{ in } I}{Y} \quad \text{æqualis} \quad O.$$

Omnibus secundum præcepta Analyseos peractis, fiet

$$B^5 \text{ in } Y^3 \text{ in } Iq. - B^4 \text{ in } Y^6 \quad \text{æquale} \quad I^6,$$

unde orietur *quinta* curva, in quâ dabuntur omnes *Y*, ideoque omnes *I*.

Ex ea, contrariâ quam jam sæpius inculcavimus methodo, quæratur alia curva in qua dentur quadrata applicatarum, et sit

$$\frac{I \text{ in } A}{B} \quad \text{æqualis} \quad Y$$

(nihil enim vetat defectu vocalium ad priores supra usurpatas recurrere); fiet

$$Bq. \text{ in } A^4 - A^6 \quad \text{æquale} \quad Bq \text{ in } I^2,$$

unde orietur curva *sexta* in qua omnia *I quadrata* dabuntur.

Reducantur ad latera, notâ et sæpius iteratâ superius methodo, et fiat

$$Iq. \quad \text{æquale} \quad B \text{ in } E;$$

ergo omnia *B in E* dabuntur et inde deducetur *septima* curva, in qua

$$Bq. \text{ in } A^4 - A^6 \quad \text{æquabitur} \quad B^2 \text{ in } Eq.,$$

in eaque dabuntur omnes *E*, ideoque omnes *A*.

Ex ea deducatur alia curva, in qua dentur quadrata applicatarum, et ex methodo ponatur

$$\frac{A \text{ in } O}{B} \quad \text{æquari} \quad E:$$

ergo

$$Bq. \text{ in } A^4 - A^6 \quad \text{æquabitur} \quad Bq. \text{ in } Aq. \text{ in } Oq.$$

et, omnibus abs $Aq.$ divisis, fiet æquatio

$$\text{inter} \quad Bq. \text{ in } Aq. - A^4 \quad \text{et} \quad Bq. \text{ in } Oq.,$$

in qua omnia *A quadrata* dabuntur et erit *octava* curva ab ea æquatione determinata.

Quum igitur in ea omnia *A quadrata* dentur, deducatur ex eâ alia tandem curva, in qua dentur latera, et sit

$$Aq. \quad \text{æquale} \quad B \text{ in } U;$$

fiet

$$B \text{ in } U - Uq. \quad \text{æquale} \quad Oq,$$

quæ ultima æqualitas dabit *nonam* curvam, in qua omnes *U* dabuntur.

At hæc ultima curva est circulus, ut patet, et in ea omnes *U* non dantur, nisi supposita circuli quadratura : ergo recurrendo ad primam curvæ propositæ constitutionem, dabitur illius quadratura, supponendo ipsam ultimæ istius curvæ sive circuli quadraturam. Beneficio igitur *novem* curvarum inter se diversarum ad notitiam prioris pervenimus.

< DE CISSOIDE FRAGMENTUM > [1].

Esto cissois EAPS (*fig.* 149) in semicirculo LVABE, cujus centrum H, diameter LE, perpendicularis ad diametrum radius HA, asymptotos infinita cissoidis recta LR ad diametrum perpendicularis.

Aio spatium contentum sub EL, cissoide infinita EAPS et asymptoto

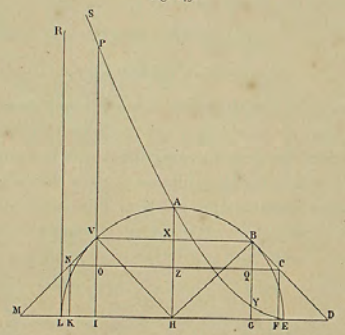
(1) Fragment publié par M. Ch. Henry (*Pierre de Carcavy etc.*, p. 38-40), d'après le manuscrit de la Bibliothèque de Leyde, fonds Huygens, n° 30. Il suit la lettre de Carcavi à Huygens du 1er janvier 1662, et porte comme titre : *De M. de Carcavy, qui l'avoit de M. de Fermat*, avec la remarque de Huygens : « *J'ay demonstré cette Proposition 4 ans auparavant.* » La copie ne paraît pas très fidèle.

infinita LR, esse triplum semicirculi LAE, ideoque, si alterâ semicirculi parte eadem fiat constructio, ambo spatia culminantia in puncto E esse tripla totius circuli.

Demonstratio non est operosa, imo satis elegans.

Sumantur duo puncta I et G in diametro, utcumque æqualiter a centro distantia, ita ut rectæ HI, HG sint æquales, ideoque rectæ LI, GE. A punctis I et G excitentur perpendiculares occurrentes cissoidi

Fig. 149.



in punctis P, Y et circulo in punctis V et B. Jungantur radii HV, HB et a punctis V et B ducantur tangentes VM, BD, occurrentes diametro in punctis M et D. Sumatur minima quævis, ultra punctum I, recta IK et, ultra punctum G, recta GF ipsi IK æqualis, et a punctis K et F excitentur perpendiculares ad diametrum rectæ KN, FC occurrentes tangentibus in punctis N et C, a quibus demittantur perpendiculares NO, CQ in rectas VI, BG.

His ita constitutis, patet spatium cissoidale æquari omnibus rectangulis sub PI < in > IK et sub YG < in > GF, utcumque ubilibet sumptis, bases ipsis KI, GF æquales habentibus et altitudines an-

gulis rectis ad cissoidem similiter applicatas. Est autem, ex natura cissoidis,

ut VI ad IE, ita IE ad IP;

sed IE est æqualis rectis IH et HE sive HV : ergo est

ut IV ad summam rectarum IH, HV, ita IE ad IP.

Sed, propter similitudinem triangulorum HVI, VMI, VNO, est

ut IV ad summam rectarum HI, HV,
ita recta NO ad summam rectarum NV, VO :

ergo

ut NO sive KI est ad NV plus VO, ita est recta IE ad rectam IP.

Rectangulum igitur sub IP < in > IK æquatur rectangulo sub IE in NV plus rectangulo sub IE in VO.

Ex alia autem parte, est, ex natura cissoidis,

ut BG ad GE, ita GE ad GY;

sed GE est æqualis rectæ HE sive HB minus HG : ergo est

ut BG ad BH minus HG, ita GE ad GY.

Ut autem BG ad BH minus HG, ita, propter similitudinem triangulorum, ex jam demonstratis,

recta QC sive GF est ad BC minus BQ,

ideoque rectangulum sub YG in GF æquabitur rectangulo sub GE in BC minus rectangulo sub GE in BQ.

Ex constructione autem, quum rectæ HI, HG sint æquales, item rectæ KI, GF, patet reliquas æquari, nempe VN ipsi BC, VO ipsi BQ; unde patet duo rectangula correlativa, sub PI in IK et sub YG in GF sive in eamdem IK, æqualia esse rectangulis sub IE in NV, plus GE in BC sive LI in NV, plus IE in VO, minus GE in BQ sive in VO. Rectangula autem duo sub IE in NV et sub LI in NV æquantur unico rectangulo sub diametro LE in NV; rectangulum vero IE in VO minus GE in VO

æquatur rectangulo sub IG in VO sive rectangulo sub IH sive VX in VO bis : ergo summa rectangulorum sub PI in IK et sub GY in eamdem IK æquatur rectangulo sub diametro EL in VN et rectangulo sub VX in VO bis.

Rectangula autem omnia sub diametro et portionibus tangentium VN in quadrante circuli LVA ductarum repræsentant rectangulum sub diametro in quadrantem LVA, hoc est duplum semicirculi LAE; rectangula autem omnia sub VX in VO bis sive, ductâ OZQ parallelâ diametro, rectangula omnia sub VX in XZ bis repræsentant totum semicirculum LAE.

Ergo spatium cissoidale, quod æquatur duobus illis rectangulorum seriebus, æquatur triplo semicirculi, ut patet.

OBSERVATIONS SUR DIOPHANTE.