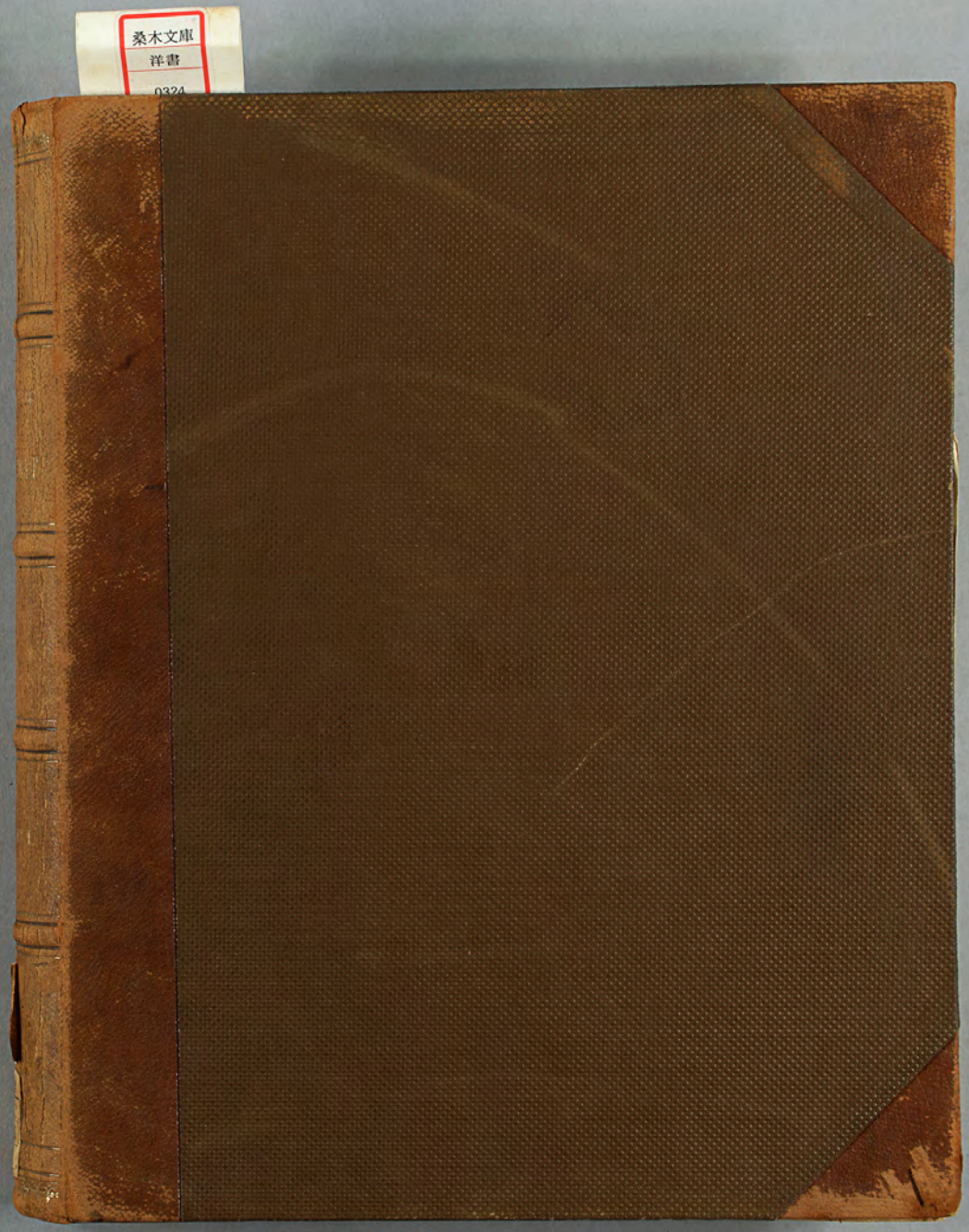

桑木文庫
洋書
0324

桑木文庫
洋書
0324

物理
08
F
31

九州帝國大學理學部
8273
物理學教室

理学部 洋 遡及
022232002004761
九州大学蔵書

802141

ŒUVRES
DE FERMAT.

13564 PARIS. — IMPRIMERIE GAUTHIER-VILLARS ET FILS.
Quai des Grands-Augustins, 55.

ŒUVRES
DE FERMAT

PUBLIÉES PAR LES SOINS DE

MM. PAUL TANNERY ET CHARLES HENRY

SOUS LES AUSPICES

DU MINISTÈRE DE L'INSTRUCTION PUBLIQUE.

TOME PREMIER.

ŒUVRES MATHÉMATIQUES DIVERSES. — OBSERVATIONS SUR DIOPHANTE.

PARIS,
GAUTHIER-VILLARS ET FILS, IMPRIMEURS-LIBRAIRES
DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,
Quai des Grands-Augustins, 55.

M DCCC XCI

FERMAT

Paris GAUTHIER-VILLARS, & FILS Editeurs.
Imp. Chardon-Wittmann, Paris.

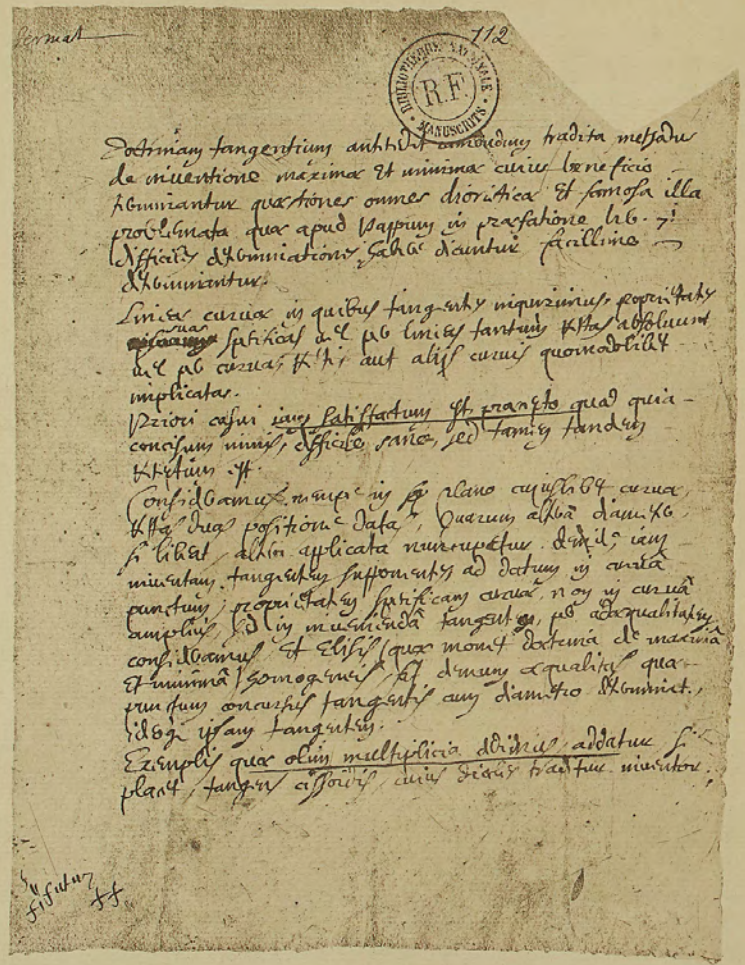
VARIA OPERA
MATHEMATICA
D. PETRI DE FERMAT,
SENATORIS TOLOSANI.

Accesserunt selectæ quædam ejusdem Epistolæ, vel ad ipsum à plerisque doctissimis viris Gallicè, Latinè, vel Italicè, de rebus ad Mathematicas disciplinas, aut Physicam pertinentibus scriptæ.

TOLOSÆ,
Apud JOANNEM PECH, Comitiorum Fuxensium Typographum, juxta Collegium PP. Societatis JESU.

M. DC. LXXIX.

大阪帝國大學圖書館
昭和19.4.25
130618



Doctrinam tangentium antehac excogitatam, traditam methodo de inventione maximæ et minimæ cuius beneficio plerumque quæstiones omnes difficiles et famosa illa problemata quæ apud Pappum in præfatione lib. 7ⁱ Collectionum Mathematicarum fatentur se diutius afflixisse resolvuntur.

Lineæ curvæ in quibus tangentes inquirimus, proprietate quadam specifica determinatæ vel per lineas tantum rectas vel per absolutum vel per curvas vel his aut aliis curvis quomodolibet implicatas.

Priori casui unus satisfactum est tractatu quod quia concisum nimis, difficile sane, sed tamen tandem hactenus est.

Consideramus magnitudinis in plano cuiuslibet curvæ, vel duas positione datas, quarum altera diametros libet, alteri applicata ducatur. Deinde inquirimus tangentes supponendo ad datum in curva punctum, proprietatem illam curvæ notam in curva amplius, deinde in inquirenda tangente, per æqualitatem consideramus et eliciemus quæ mouet doctrina de maximis et minimis, semper vel de unius æqualitate quæ punctum concursus tangentis cum diametro determinat, idque in plano tangentium.

Exemplis quæ olim multiplicia adhibuimus, addatur si placet, tangentes asymptotis, curvis datis tactus inveniendos.

Fermat ff

TABLE DES MATIÈRES

DU PREMIER VOLUME (¹).

Pages

AVERTISSEMENT IX

PREMIÈRE PARTIE.

ŒUVRES MATHÉMATIQUES DIVERSES.

Lieux plans d'Apollonius.

Apollonii Pergæi libri duo de locis planis restituti. Liber primus ..... V 3
Liber secundus ..... V 29

Contacts sphériques.

De contactibus sphæricis ..... V 52

Fragments géométriques.

Solutio problematis a Domino Pascal propositi ..... P 70
Porismata duo ..... P 74
Porismatum Euclideorum renovata doctrina et sub forma Isagoges recentioribus Geometris exhibita ..... V 76
Propositio D. de Fermat circa parabolen ..... V 84
Loci ad tres lineas demonstratio ..... M 87

Lieux plans et solides.

Ad locos planos et solidos Isagoge ..... V 91
Appendix ad Isagogen topicam, continens solutionem problematum solidorum per locos ..... V 103

(¹) Les lettres majuscules placées devant les renvois indiquent que la pièce est tirée : V des *Varia Opera*, D du Diophante de 1670, C des *Lettres de Descartes*, P des *Œuvres de Pascal*, L du traité de Lalouvère sur la Cycloïde, M de sources manuscrites.

Pages

Lieux en surface.

Isagoge ad locos ad superficiem, carissimo Domino de Carcavi..... M 111

Dissertation tripartie.

De solutione problematum geometricorum per curvas simplicissimas et unicuique problematum generi proprie convenientes, dissertatio tripartita.... V 118

Maxima et minima.

I. Methodus ad disquirendam maximam et minimam..... V 133
De tangentibus linearum curvarum..... V 134
II. Centrum gravitatis parabolici conoidis, ex eadem methodo..... V 136
III. Ad eamdem methodum : *Volo meâ methodo etc*..... V 140
IV. Methodus de maxima et minima..... M 147
V. Ad methodum de maxima et minima appendix..... M 153
VI. Ad eamdem methodum : *Doctrinam tangentium etc*..... V 158
VII. Problema missum ad Reverendum Patrem Mersennum 10ª die Novembris 1642..... M 167
VIII. Analysis ad refractiones..... C 170
IX. Synthesis ad refractiones..... C 173

Méthode d'élimination.

Novus secundarum et ulterioris ordinis radicum in Analyticis usus..... V 181
Appendix ad superiorem methodum..... V 184

Problème d'Adrien Romain.

Ad Adriani Romani problema. Viro clarissimo Christiano Huggenio P. F. S. T. M 189

Questions de Cavalieri.

Ad Bon. Cavalierii quæstiones responsa..... M 195

Propositions à Laloubère.

Ad Laloveram propositiones..... L 199

Dissertation M. P. E. A. S.

De linearum curvarum cum lineis rectis comparatione, dissertatio geometrica. V 211
Appendix ad dissertationem de linearum curvarum cum lineis rectis comparatione..... V 238

Méthodes de quadrature.

De æquationum localium transmutatione et emendatione, ad multimodam curvilineorum inter se vel cum rectilineis comparationem, cui annectitur proportionis geometricæ in quadrandis infinitis parabolis et hyperbolis usus... V 255
De cissoide fragmentum..... M 285

DEUXIÈME PARTIE.

OBSERVATIONS SUR DIOPHANTE.

Pages

Observationes Domini Petri de Fermat..... D

I. Ad definitionem VI Cl. Gasparis Bacheti Porismatum Libr. III.... » 291
II. Ad quæstionem VIII Diophanti Alexandrini Arithmeticorum Lib. II. » »
III. Ad quæstion. X Lib. II..... » »
IV. Ad quæstion. X Libr. III..... » 292
V. Ad quæstion. XI Libr. III..... » »
VI. Ad quæstion. XVII Libr. III..... » »
VII. Ad commentarium in quæstion. XXII Lib. III..... » 293
VIII. Ad commentarium in quæstion. II Libr. IV..... » 297
IX. Ad eumdem commentarium..... » 298
X. Ad commentarium in quæstion. XI Libr. IV..... » 300
XI. Ad quæstion. XII Libr. IV..... » »
XII. Ad commentarium in eamdem quæstionem..... » 301
XIII. Ad quæstion. XVII Libr. IV..... » »
XIV. Ad quæstion. XVIII Libr. IV..... » 302
XV. Ad quæstion. XX Libr. IV..... » »
XVI. Ad quæstion. XXI Libr. IV..... » 303
XVII. Ad quæstion. XXIII Libr. IV..... » 304
XVIII. Ad commentarium in quæstion. XXXI Libr. IV..... » 305
XIX. Ad quæstion. XXXV Libr. IV..... » 306
XX. Ad commentarium in quæstion. XLIV Libr. IV..... » »
XXI. Ad commentarium in quæstion. XLV Libr. IV..... » 307
XXII. Ad quæstion. III Libr. V..... » 308
XXIII. Ad quæstion. VIII Libr. V..... » 309
XXIV. Ad quæstion. IX Lib. V..... » 312
XXV. Ad commentarium in quæstion. XII Libr. V..... » »
XXVI. Ad eumdem commentarium..... » 313
XXVII. Ad commentarium in quæstion. XIV Libr. V..... » 314
XXVIII. Ad quæstion. XIX Libr. V..... » 315
XXIX. Ad quæstion. XXIV Libr. V..... » 318
XXX. Ad quæstion. XXV Libr. V..... » 321
XXXI. Ad quæstion. XXX Libr. V..... » 326
XXXII Ad quæstion. XXXI Libr. V..... » 327
XXXIII. Ad quæstion. XXXII Libr. V..... » »
XXXIV. Ad commentarium in quæstion. III Libr. VI..... » »
XXXV. Ad quæstion. VI Libr. VI..... » 329
XXXVI. Ad quæstion. VII Libr. VI..... » 330
XXXVII. Ad quæstiones VIII et IX Libr. VI..... » 331
XXXVIII. Ad quæstiones X et XI Libr. VI..... » »
XXXIX. Ad quæstion. XIII Libr. VI..... » 332
XL. Ad quæstion. XIV Libr. VI..... » 333
XLI. Ad quæstiones XV et XVII Libr. VI..... » »

			Pages
XLII.	Ad quæstion. XIX Libr. VI	D	333
XLIII.	Ad commentarium in quæstion. XXIV Libr. VI	»	334
XLIV.	Ad eumdem commentarium	»	336
	Appendix	»	338
XLV.	Ad problema XX commentarii in ultimam quæstionem Arithmeticorum Diophanti	»	340
XLVI.	Ad commentarium in proposition. IX Diophanti De multangulis numeris	»	341
XLVII.	Ad proposition. XXVII Bacheti Appendicis de numeris polygonis Libr. II	»	
XLVIII.	Ad proposition. XXXI Bacheti Appendicis Libr. II	»	342

APPENDICE.

I.	Dédicace du Diophante de 1670	D	345
II.	Préface du Diophante de 1670	D	347
III.	Dédicace des Varia Opera	V	350
	Pièces de vers latins annexées à la dédicace :		
	1° *Aurea Pierio etc*	V	352
	2° *Dum Paderæ fontes etc*	V	353
	3° *Ode. Nunc corda mulceus etc*	V	354
IV.	Préface des Varia Opera	V	355
V.	Éloge de Monsieur de Fermat, Conseiller au Parlement de Tolose. Du Iournal des Sçavans, du Lundy 9 février 1665	DV	359
VI.	Observation de Monsieur de Fermat sur Synesius	DV	362
VII.	Lettre de P. Fermat à M. de Ranchin. — Observations sur Polyen.	DV	366
VIII.	Lettre de Samuel Fermat à Pellisson	DV	373
IX.	Lettre de P. Fermat à Boulliau (24 novembre 1655). — Observations sur Frontin (*Camusat*)		380
X.	Lettre de Huet aux Fermat. — Caen, 3 décembre 1659	M	386
XI.	Lettre de P. Fermat à Huet. — Toulouse, 27 décembre 1659	M	388
XII.	« Cede Deo, seu Christus moriens », poésie de P. Fermat dédiée à Balzac	V	390
XIII.	Notes critiques de P. Fermat sur les Harmoniques de Manuel Bryenne.	M	394
Variantes et notes critiques			413
Errata			436
Table de concordance entre l'édition des Œuvres de Fermat de 1679 et la présente édition			437
PLANCHES : Portrait de Fermat et fac-similé du titre des *Varia opera*.			IV-V
Fac-similé de l'écriture de Fermat			XIX

FIN DE LA TABLE DES MATIÈRES DU TOME PREMIER.

AVERTISSEMENT.

I.

Bibliographie des travaux de Fermat avant les publications de son fils.

Lorsque, le 12 janvier 1665, dans le cinquième mois de sa soixante-quatrième année, Pierre de Fermat mourut à Castres, où l'avait appelé son service de conseiller au parlement de Toulouse, il était tenu pour le plus grand géomètre de l'Europe (1), mais ce n'était guère par la voie de l'imprimerie que son nom s'était répandu dans le monde savant.

Lui-même n'avait d'ailleurs fait imprimer qu'une seule dissertation géométrique, et encore avait-il gardé l'anonyme (2); cet opuscule parut en 1660, comme annexe d'un volume publié à Toulouse, sur la cycloïde, par le Père jésuite Lalouvère. Ce dernier faisait en même temps connaître, comme étant dues à Fermat (mais publiées sans son aveu), diverses propositions intéressantes sur lesquelles l'attention n'a jamais, que nous sachions, été appelée depuis lors (3).

Dans l'éloge que Lalouvère fait à cette occasion de son illustre concitoyen, il rappelle (4) diverses mentions de ses travaux insérées par Mersenne dans les *Cogitata physico-mathematica* de 1644, et il cite l'une de ces mentions énumérant un certain nombre de traités manuscrits envoyés par Fermat à ses amis de Paris (5). Des autres, l'une (*præfat. ad Mechanica*, n° 4), sans désigner expressément Fermat, reproduisait la plus grande partie

(1) Lettre de Pascal à Fermat, du 10 août 1660 (n° 108 de la Correspondance de Fermat, dont la publication suivra celle du présent volume).

(2) *Voir* ci-après page 211, note 1, et page 199, note 1.

(3) *Voir* ci-après pages 199 suiv.

(4) *Voir* ci-après page 200, note.

(5) Ce texte de Mersenne (lequel fait partie d'un *Mogni Galilæi et nostrorum Geometrarum Elogium utile*) est exactement le suivant :

« Taceo varios illos περὶ ἐπαφῶν, de maximis et minimis, de tangentibus, de locis planis, solidis, et ad sphæram pereruditos, quos clarissimus Senator Tholosanus D. Fermatius hue

d'une lettre transmise à Cavalieri par l'intermédiaire de Mersenne (1); la seconde (*in Ballisticis*, p. 57) donnait des détails, tirés de lettres aujourd'hui perdues, sur les travaux de Fermat relatifs aux spirales (2); la troisième enfin (*in Analysi*, page 385) précédait les énoncés des propositions des *Lieux plans d'Apollonius*, d'après la restitution du géomètre de Toulouse (3).

Dans ses Ouvrages antérieurs (depuis 1636) ou postérieurs, Mersenne a encore fait d'autres emprunts à la Correspondance de Fermat; mais alors le plus souvent il emploie des périphrases qui ne permettent pas toujours de distinguer sûrement ce qui appartient aux divers géomètres avec lesquels il était en relation. On ne pourra donc que rapprocher, des diverses lettres de Fermat, certains extraits des œuvres de Mersenne concernant les mêmes sujets (1).

ad nos misit. » (F. Marini Mersenni Minimi Cogitata physico-mathematica. In quibus tam naturæ quàm artis effectus admirandi certissimis demonstrationibus explicantur. Parisiis, sumptibus Antonii Bertier, viâ Iacobeâ. M.DC.XLIV. Cum privilegio Regis. — première pagination, p. 193.)

(1) *Voir* ci-après, page 195, note 1.

(2) *Voir*, dans le second volume, l'appendice au n° 3 de la Correspondance.

(3) Universæ Geometriæ mixtæque Mathematicæ synopsis et bini refractionum demonstratarum tractatus. Studio et Operâ F. M. Mersenni M. Parisiis, apud Antonium Bertier, viâ Iacobeâ, sub signo Fortunæ. M.DC.XLIV. Cum privilegio Regis.

En analysant la collection de Pappus, Mersenne avait déjà (p. 383) donné les énoncés du Traité des *Contacts sphériques* de Fermat (*ci-après*, pages 52 suiv.) :

« Sexdecim Problematibus tractatum hunc (de tactionibus) Vieta comprehendit in Apollonio Gallo, sed cùm in planis substiterit, illum ad Sphærica Problemata Clarissimus Fermatius 15 Problematibus extendit, quæ Vietæis subjungemus. »

Page 385, parlant des Porismes d'Euclide, Mersenne dit :

« Huius autem tractatus Restitutio Clarissimi Domini Fermatij postulat opem, qui 2 sequentes de locis planis libros adeò fœliciter redintegravit. »

Les énoncés des *Lieux plans* d'Apollonius (*voir* ci-après, pages 3 suiv.) suivent sur les pages 386 à 388. Mersenne ajoute enfin :

« Omitto locos ad superficiem cuius Isagogem vir idem Cl. amicis communem fecit, et alia quæ utinam ab eo tandem impetremus. »

(1) En dehors des citations qui précèdent, Mersenne a nommé Fermat :

1° Page 9 de la première préface de l'*Harmonie universelle contenant la théorie et la pratique de la musique* (*voir* n° 4 de la Correspondance de Fermat).

2° Dans la *Seconde partie de l'Harmonie universelle*, Paris, 1637, livre VIII, p. 61 (*voir* n° 2 de la Correspondance).

3° Page 215 des *Novarum observationum physicomathematicarum F. Marini Mersenni Minimi* (Tomus III. Quibus accessit Aristarchus Samius de mundi systemate. Parisiis, sumptibus Antonii Bertier, viâ Iacobeâ sub signo Fortunæ. M.DC.XLVII. Cum privilegio Regis), dans le récit d'un voyage au midi de la France.

« Cùm autem vivos potiùs quàm mortuos (a) quærerem, unus abfuit Clarissimus Fermatius, Geometrarum Coryphæus; quem tamen Burdigalam redux, ductore integerrimo, doctissimoque senatore, Domino d'Espagnet, velut avulsum Bergeraco, triduo amplexus sum (a). Vin scire quo loco? Ubi S. Emilio Brito denatus est anno 767. Ubi coemeterium templo satis amplo ex unico lapide construeto incumbit; ubi latomus quisque excisos à prædicti Domini lapidicina, quovis die, 10 lapides parallelogrammos excindit, et quadrat, quorum latitudo 1, longitudo 2 pedum; cùmque centum lapides quadravit, 7 libras recipit. »

(a) Mersenne parlait auparavant de tombeaux qu'il avait vus à Toulouse.

(1) L'accusation d'indélicatesse que formule ici Desargues à mots couverts paraît dirigée contre Beaugrand, lequel l'avait attaqué dans une lettre imprimée du 20 juillet 1640 (*Œuvres de Desargues*, t. II, p. 378).

(2) Francisci à Schooten Leydensis, de Organica Conicarum Sectionum in plano Des-

La plus ancienne mention imprimée d'un opuscule manuscrit de Fermat n'est, au reste, point due à Mersenne; elle concerne la *Methodus ad disquirendam maximam et minimam* (*ci-après*, pages 133-136), et doit être cherchée dans le *Brouillon projet d'exemple d'une manière universelle du S. G. D. L. touchant la pratique du trait à preuves pour la coupe des pierres en l'Architecture*, imprimé à Paris en août 1640.

« Puisqu'un reste de page et l'occasion y convient, afin qu'après ce Brouil-
» lon il n'y ait plus en cecy d'abusez que ceux qui le voudront bien estre, on
» ne doit pas croire à tout esprit, n'y à toute apparence; à tout esprit, en
» croyant que tous ceux qui font en particulier une grande monstre de plu-
» sieurs belles pensées en soient toujours les autheurs, on void escrite à la
» main une belle maniere de trouver les touchantes aux courbes, ensuitte des
» plus grands et plus petits, laquelle est avérée estre de monsieur de Fermat,
» très digne conseiller de parlement de Tholoze, et la premiere descouverte
» de la ligne qu'engendre un point en la diametrale d'un cercle roulant sur
» une droicte est de monsieur de Roberval, très digne professeur royal aux
» mathématiques (1). A toute apparence, etc. » (*Œuvres de Desargues* réunies et analysées par M. Poudra, Paris, Leiber, 1864, tom. I, pages 354-355.)

Cette même méthode de Fermat, sur laquelle l'attention avait d'ailleurs été appelée par le bruit d'une polémique à ce sujet entre lui et Descartes, fut exposée sous son nom par P. Hérigone en 1642 (*voir* ci-après, page 171, note 1), lequel mentionna également ses traités manuscrits des *Lieux plans d'Apollonius* et de l'*Introduction aux lieux plans et solides*.

En 1646, la réputation du conseiller au parlement de Toulouse est assez établie pour qu'un étranger, Fr. van Schooten, le cite entre Descartes et Roberval au premier rang des géomètres (2).

(a) Ce passage a été reproduit jusqu'à ce dernier mot parmi les mentions honorifiques de Fermat insérées par son fils en tête des Diophante de 1670 et des Varia de 1679.

On verra ci-après (page 77, note 2) en quels termes élogieux Boulliau parlait de Fermat dans ses *Exercitationes geometricæ* de 1657, à l'occasion de son opuscule manuscrit sur les Porismes d'Euclide.

La même année, les rééditeurs des *Deipnosophistes d'Athénée*, Jean-Antoine Huguetan et Marc-Antoine Ravaud à Lyon, inséraient, sous les initiales P. F. S. T., une remarque critique (1) qui prouvait que la sagacité du célèbre géomètre s'exerçait également avec fruit dans le domaine de l'érudition.

Mais ce fut l'année suivante que, pour la première fois, des lettres de Fermat parurent sous son nom :

1° D'abord une série importante dans le *Commercium epistolicum de Quæstionibus quibusdam Mathematicis nuper habitum inter Nobilissimos Viros : D. Gulielmum Vice comitem* Brouncker, *Anglum; D. Kenelmum* Digby, *item Equitem Anglum; D.* Fermatium, *in suprema Tholosatum Curia Iudicem Primarium; D.* Freniclum, *Nobilem Parisinum; una cum D. Joh.* Wallis *Geomet. Prof. Oxonii; D. Franc. a* Schooten, *Math. Prof. Lugduni Batavorum; Aliisque.* (Edidit Johannes WALLIS, S. Th. D. in celeberrima Oxoniensi Academia Geometriæ Professor Savilianus. — Oxonii, Excudebat A. Lichfield. Acad. Typograph., Impensis Tho. Robinson. — M.DC.LVIII) — n^os 79, 80, 81, 82, 83, 84, 85, 91, 96 de la Correspondance.

2° Une longue lettre adressée à Gassend dans le tome VI *Petri Gassendi Opera omnia in VI Tomos divisa.* (Lugduni, sumptibus Laurentii Anisson et Joan. Bapt. Devenet. M.DC.LVIII) — n° 62 de la Correspondance.

En 1658 encore, dans l'*Histoire de la Roulette* (anonyme) (2) et en janvier 1659, dans les *Lettres de A. Dettonville, contenant quelques-unes de ses inventions de Géométrie* (3), le nom de Fermat apparaît avec quelques indications sur ses travaux, de même que dans le *Traité des ordres numériques*, trouvé en 1662 imprimé dans les papiers de Pascal, sans qu'il eût encore été publié (4).

En 1664 enfin, Saporta insérait, dans sa traduction du *Traité de la mesure des eaux courantes de Castelli*, une Observation de Fermat sur un passage de Synesius (5).

Telles furent, du vivant de Fermat, les rares publications auxquelles donnèrent lieu ses écrits et les mentions imprimées que nous avons pu trouver de ses travaux. Après sa mort et avant les volumes édités par son fils, nous n'avons à signaler que l'*Éloge de Monsieur de Fermat* (6), inséré dans le *Journal des Savants* du 9 février 1665, et dû au moins à l'inspiration, sinon à la plume de Carcavi, et, en 1667, la publication par Clerselier du dernier volume des *Lettres de M^r Descartes*, lequel contient une importante correspondance entre Fermat, Mersenne et Descartes d'une part, Fermat, Clerselier, Rohaut et La Chambre de l'autre (7).

criptione, Tractatus Geometris, Opticis, præsertim verò Gnomonicis et Mechanicis utilis. Cui subnexa est Appendix de Cubicarum Æquationum resolutione. Lugd. Batav. Ex officinâ Elzeviriorum A° 1646. (Reproduit comme Livre IV des *Exercitationes Mathematicæ* de 1657 : préface, page 302.)

« Aliarum autem linearum curvarum superioris generis descriptiones quod attinet, eas in medium afferre non fuit nostri instituti, cum maluerimus meritò eximiis Viris, D. des Cartes, D. de Fermat, Senatori Tholosano, et D. Robervallo, Mathematum in Academia Parisiensi Regio Professori, relinquere. Qui præterea earum tangentes, quadrationes et centra invenêre, quibus Geometriam mirifice ditare valeant, et (meo judicio) vix lucem visura sunt, nisi Philomathematicorum precibus et persuasionibus ab iis in Reip. Literariæ bonum extorqueantur. »

(1) *Voir* ci-après, page 378, note 1.

(2) *Œuvres de Pascal*, 1779, t. V, p. 165 et 172. — *Voir* au n° 29 de la Correspondance de Fermat, et ci-après, page 202, note 1.

(3) *Œuvres de Pascal*, t. V, p. 228, dans la lettre de Carcavi à Dettonville : « On a bien envoyé celle des problèmes que vous aviez déclarés être les plus faciles, savoir : » le centre de gravité de la ligne courbe et la dimension des surfaces des solides, laquelle » M. Wren nous envoya dans ses lettres du 12 octobre et M. de Fermat aussi dans les » siennes, où il donne une méthode fort belle et générale pour les dimensions des surfaces » rondes. » — Ce travail de Fermat est perdu.

(4) *Œuvres de Pascal*, t. V, pages 65-67. — *Voir* au n° 12 de la Correspondance de Fermat.

(5) *Voir* ci-après, pages 362 suiv. et n° 118 de la Correspondance de Fermat (pour la dédicace de Saporta).

(6) *Voir* ci-après pages 359 suiv.

(7) N^os de la Correspondance de Fermat 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 32, 34, 67, 86, 90, 93, 94, 95, 97, 99, 112, 113, 114, 115. *Voir* également ci-après les deux pièces p. 170 et 173. — Les *Lettres de M. Descartes* peuvent également donner lieu à nombre d'extraits intéressant Fermat, quoique tirés de lettres qui ne lui étaient pas destinées.

II.

Le Diophante de Samuel Fermat (1670).

En 1670, Samuel Fermat fit paraître, à ses frais et sans privilège, une édition in-folio de Diophante sous le titre :

DIOPHANTI | ALEXANDRINI | ARITHMETICORVM | LIBRI SEX, ET DE NVMERIS MVLTANGVLIS | LIBER VNVS.
CVM COMMENTARIIS C. G. BACHETI V. C.
et observationibus D. P. de FERMAT Senatoris Tolosani.
Accessit Doctrinæ Analyticæ inuentum nouum, collectum ex varijs eiusdem D. de FERMAT Epistolis (1).
TOLOSÆ, | Excudebat BERNARDUS BOSC, è Regione Collegij Societatis Iesu.
M. DC. LXX.

Dans cette édition, le feuillet du titre est suivi de cinq autres non paginés qui contiennent :

Pages 1 à 3, une dédicace à Colbert (*voir* ci-après *Appendice*, p. 345 suiv.);

Pages 4 et 5, une préface *Lectori Benevolo* (*App.*, p. 347 suiv.);

Pages 6 à 7, l'ÉLOGE DE MONSIEUR DE FERMAT, *Conseiller au Parlement de Tolose. Du Iournal des Sçavans, du Lundy 9 Février* 1665 (*App.*, p. 359 suiv.);

Page 7 (ligne 22) et page 8, OBSERVATION DE MONSIEUR DE FERMAT *sur Synesius, rapportée à la fin de la traduction du liure de la mesure des eaux courantes, de Benedetto Castelli* (*App.*, p. 362 suiv.);

Page 9, deux extraits de Lettres de Descartes à Fermat, tirées de l'édition de Clerselier :

LETTRE DE MONSIEVR DESCARTES A MONSIEVR DE FERMAT, pag. 347, tom. 3 des Lettres de Monsieur Descartes.

AVTRE LETTRE DE MONSIEVR DESCARTES A MONSIEVR DE FERMAT, pag. 348, tom. 3 des Lettres de monsieur Descartes.

(*Voir* ces lettres dans le second volume de cette édition, sous les nos 32 et 34 de la Correspondance de Fermat.)

(1) Au-dessous une vignette signée *Rabault fecit* et représentant Orphée, avec l'inscription : OBLOQVITVR NVMERIS SEPTEM DISCRIMINA VOCVM.

Page 10, trois extraits sous les titres :

P. HÉRIGONE, tom. 6. Cursus Mathematici, p. 68. *De Maximis et Minimis* (*voir* ci-après, p. 171, note 1).

D. ISMAEL BVLLIALDVS Exercitatione de Porismatibus (*voir* ci-après, p. 77, note 2).

R. P. MARINVS MERSENNVS ORDINIS MINIMORVM Reflectionum Physicomathematicarum, pag. 215 (*voir* plus haut, page XI, note *a*).

Après ces feuillets non numérotés, viennent trois paginations différentes :

La première contient d'abord, de 1 à 36, un Traité intitulé :

DOCTRINÆ ANALYTICÆ INVENTVM NOVVM, *Collectum à R. P. Iacobo de Billy, S. I. Sacerdote, ex varijs Epistolis quas ad eum diversis temporibus misit D. P. de Fermat Senator Tolosanus.*

Une traduction de ce Traité sera publiée dans un volume de *Complément* à la présente édition.

Suit, pages 37 à 64, d'après l'édition de Diophante donnée par Bachet en 1621, le Traité :

CLAVDII GASPARIS BACHETI SEBVSIANI IN DIOPHANTVM PORISMATVM LIBER PRIMVS (p. 37). Liber Secundus (p. 44). Liber tertius (p. 53).

La seconde pagination (1 à 341) reproduit l'édition de Bachet, texte grec, traduction latine et commentaires, pour les six livres des *Arithmétiques de Diophante.*

La troisième reproduit de même (pages 1 à 18) l'édition de Bachet pour le livre *Des nombres polygones de Diophante* et (pages 19 à 42) pour le Traité :

CLAVDII GASPARIS BACHETI SEBVSIANI APPENDICIS AD LIBRVM DE NVMERIS POLYGONIS LIBER PRIMVS (p. 19). LIBER SECVNDVS (p. 29).

Au bas de la page 42 se trouve l'annotation suivante :

« Ne vacarent paginæ sequentes, placuit has Epistolas adjicere varijs refertas D. P. de FERMAT in quosdam Græcos authores obseruationibus, quarum nonnullæ ad Mathematicas pertinent disciplinas. »

Suivent les deux lettres :

P. 43 à 45 : VIRO CLARISSIMO D. DE RANCHIN P. FERMAT S. P. D. (ci-après *Appendice*, p. 366 suiv.).

P. 46 à 48 : VIRO D. DE PELLISSON S. FERMAT S. P. D. (*App.*, p. 373 suiv.).

Comme reproduction de l'édition de Bachet, celle de Samuel Fermat est passablement fautive; l'intérêt qu'elle offre provient donc essentiellement des annotations que Pierre Fermat avait inscrites sur les marges d'un exemplaire aujourd'hui perdu du Diophante de Bachet, annotations que son fils a reproduites à leur place, en caractères italiques et chacune sous le titre : OBSERVATIO D. P. F, la seconde seule sous celui : OBSERVATIO DOMINI PETRI DE FERMAT.

Ce sont ces *Observations sur Diophante* qui constituent la seconde Partie du présent volume. On leur a naturellement adjoint, sous des caractères différents, les textes auxquels elles se rapportent spécialement.

III.

L'édition des Varia Opera (1679)

Neuf ans plus tard, Samuel Fermat publiait des Œuvres de son père l'édition que nous désignons sous le nom de *Varia*, et dont le frontispice, ainsi que le portrait de Fermat placé en regard, se trouve reproduit en tête du présent Volume.

Cette édition a été réimprimée en 1861, par héliotypie, avec l'addition au bas de la page de titre :

Novo invento usi iterum expresserunt R. Friedlaender et Filius.
BEROLINI, MDCCCLXI.

mais sans le portrait de Fermat.

La Table de concordance qui termine ce Volume donne le détail des pièces contenues dans l'édition de 1679, avec les renvois à la présente, qui pourra la remplacer absolument.

Samuel Fermat s'abstint volontairement de reproduire les lettres de son père déjà publiées par Clerselier dans la Correspondance de Descartes. Il y renvoie d'ailleurs par une note de la page 156 :

« Ceux qui ont le troisième Tome des Lettres de M. Descartes y pourront voir plus au long les objections de M. de Fermat contre la Dioptrique de M. Descartes et divers écrits sur ce sujet depuis la page 167. jusques à la page 350. »

Il reproduisit, au contraire, la plupart des lettres à Digby que Wallis avait déjà fait connaître; on ne conçoit donc guère pourquoi il a omis deux de ces lettres et une troisième à Frenicle.

Quant aux pièces inédites qu'il publiait, il ne semble avoir eu, comme originaux, qu'un nombre relativement restreint de lettres adressées à Fermat. Pour le reste, il n'a certainement possédé, en thèse générale, que des copies plus ou moins fautives, et qu'il n'obtint d'ailleurs qu'à grand'peine.

Il est difficile de croire que Carcavi, après ce qu'il avait fait insérer dans l'Éloge de Fermat du *Journal des Savants*, ait refusé à son fils les copies des pièces qu'il possédait, au moins de celles qui étaient détaillées dans l'Éloge précité. Il n'en est pas moins certain que, s'il n'opposa pas un refus absolu, il ne donna pas copie de tous les opuscules qu'il avait entre les mains, et qu'il ne voulut rien communiquer des nombreuses lettres que Fermat lui avait personnellement adressées.

Parmi les correspondants de Fermat qui vivaient encore, lorsque son fils s'occupa de réunir ses écrits, Roberval seul paraît avoir directement répondu aux demandes de communication. Mais il choisit avec soin, pour sa plus grande gloire personnelle, ce qu'il envoya, et, loin de fournir des copies fidèles, refondit complètement, par exemple, la lettre du 16 août 1636, autrefois écrite en son nom et en celui d'Étienne Pascal (1).

La plus grande partie des autres lettres publiées par S. Fermat semble provenir de copies réunies par l'érudit Thoinard qui, d'après la correspondance de Samuel et de son ami Justel, montra un louable et rare empressement.

IV.

Les autographes de Fermat.

Après la publication des *Varia*, les collectionneurs qui conservaient des pièces inédites de Fermat purent, comme Jacques Ozanam ou Auzout, en user pour leur compte particulier; mais, à part deux exceptions, rien de nouveau ne fut imprimé jusqu'en 1839.

En 1734, Camusat publia dans le Tome premier de l'*Histoire critique des Journaux par M. C***, à Amsterdam, chez J.-F. Bernard*, une lettre latine de Fermat à Ismaël Bouillau (ci-après, *Appendice*, p. 380 et suiv.).

Lors de la préparation de l'édition des *Œuvres de Blaise Pascal*, 1779,

(1) N° 8 de la Correspondance. — Un trait curieux de l'histoire des papiers de Roberval est que, parmi les écrits de lui qui ont été insérés dans les anciens *Mémoires de l'Académie des Sciences*, figure sous son nom, tome VI (pages 241 à 246 de l'édition de 1730), l'*Appendix ad Isagogen Topicam* de Fermat, déjà publiée dans les *Varia* (*ci-après*, p. 103 suiv.).

Bossut retrouva, dans les papiers conservés par la famille de l'auteur des *Pensées*, quelques autographes de Fermat qu'il comprit dans ce qu'il publia (1). Depuis, ces autographes ont été perdus ou dispersés dans des collections particulières, sauf trois, qui se trouvent reliés dans un recueil des opuscules mathématiques de Pascal, conservé à la Réserve des imprimés de la Bibliothèque Nationale, sous la cote V-848-3.

D'autres originaux de lettres écrites à Mersenne étaient, avant la Révolution, conservées dans le Tome IV d'un recueil formé à la Bibliothèque des Minimes et qu'Arbogast a pu utiliser, comme on le verra plus loin.

La Bibliothèque Nationale possède seulement, comme autographes de Fermat appartenant au département des manuscrits :

1° Une lettre au Père de Billy (n° 102) dans le manuscrit fonds latin 8600, f° 13. Publiée par Libri dans le *Journal des Savants* de septembre 1839, d'après une copie d'Arbogast.

2° L'original de l'opuscule *Doctrinam tangentium* (*ci-après* p. 158 et suiv.), fonds français, nouv. acq. n° 3280, f° 112-116. Imprimé dans les *Varia* d'après une copie. — Même MS., f° 108-109, une lettre à Huet (*ci-après*, p. 386).

3° Trois lettres et un mémoire adressé au chancelier Séguier (n°s 64, 65, 66, 111) : fonds français n° 17388, f° 74; n° 17390, f° 113 à 115; n° 17398, f° 433. Publiés, comme la lettre à Huet, par M. Charles Henry (*Recherches sur les manuscrits de Pierre de Fermat*, 1880, p. 63 à 72 et 77).

4° Dans le manuscrit fonds grec n° 2460, les annotations sur Manuel Bryenne, dont nous devons la découverte à M. Henri Omont et qui sont publiées ci-après, pages 394 et suiv.

La Bibliothèque de l'Université de Leyde conserve dans la Collection Huygens n° 30 deux lettres autographes de Fermat au mathématicien hollandais. En les publiant (*Recherches*, etc., p. 77 et suiv., 211 et suiv.), M. Charles Henry a devancé la splendide édition des *Œuvres complètes de Christiaan Huygens, publiées par la Société hollandaise des Sciences*, qui contient d'ailleurs d'autres matériaux à utiliser pour la Correspondance de Fermat (2).

(1) *Voir* ci-après, pages 70 et 74 et en outre les n°s 69, 71, 73, 74, 100, 107 de la Correspondance. — L'autographe du n° 71 a passé à la vente Fillon le 16 février 1877. Ceux de la Bibliothèque Nationale sont les originaux du n° 100 et des deux pièces imprimées dans le présent Volume, pages 70 et 74. Mais, ne les ayant découverts que tout récemment, nous n'avons pu les utiliser que pour les Variantes à la fin du Volume.

(2) L'une de ces lettres, concernant le problème d'Adrien Romain, est insérée dans le présent Volume, pages 189 suiv., l'autre est classée sous le n° 109 de la Correspondance de Fermat. Quant à la troisième lettre signée Fermat et publiée par M. Ch. Henry (*Recherches*, etc., p. 78-79) avec une pièce de vers en l'honneur d'Huygens, il a été reconnu par M. P. Tannery qu'elle ne pouvait avoir été écrite que par Samuel de Fermat; le savant éditeur des Œuvres de Huygens, M. Bierens de Haan, a constaté sur l'autographe la vérité de nos conjectures.

Nous donnons ci-contre un *fac-similé* de la première page de l'écrit *Doctrinam tangentium etc.* Il pourra servir au besoin à reconnaître l'écriture de Fermat. S'il est difficile d'espérer actuellement la découverte de lettres ou d'opuscules autographes, l'impossibilité n'en est nullement démontrée; mais il est un autre ordre de recherches sur lequel nous appelons l'attention des érudits.

Fermat, qui n'avait point de cahiers de notes et ne conservait pas de manuscrits, inscrivait des remarques sur les marges des livres qui lui appartenaient, et il devait le faire, quelle que fût la nature de ses livres. Or il est difficile de croire qu'il y ait eu destruction complète de tous les Ouvrages qui ont fait partie de la bibliothèque d'un homme qui n'était pas seulement un mathématicien de premier ordre, mais qui s'intéressait à toutes les questions scientifiques et qui était un humaniste très distingué. Il semble donc que l'examen de l'écriture des notes inscrites sur les exemplaires des Ouvrages du temps pourrait amener la constatation de leur passage entre les mains de Fermat et conduire à des découvertes intéressantes (1).

Il est à remarquer que les recherches faites dans ce sens à Toulouse n'ont amené que la découverte, par Libri, à la Bibliothèque de la Ville, d'un exemplaire de la première édition du *Dialogue de Galilée* des *Massimi Sistemi* (2). Sur le premier feuillet de garde est écrite (au-dessus d'une note de Carcavi : « Ce billet est de Monsieur de Fermat, Conseiller au Parlement, qui m'a fait présent de ce livre ») la dédicace suivante :

« Peut-estre croirés-vous que pour me mettre en reputation et *per purgar*, » comme on dit, *la mala fama*, je pretens m'eriger en donneur de livres.

(1) Rappelons à ce sujet que des recherches méthodiques de ce genre, instituées en Italie, par les soins de M. Favaro, ont abouti pour la publication des *Œuvres de Galilée* à des résultats précieux. Si le défaut d'un point de départ, comme était le catalogue de la bibliothèque de Galilée, retrouvé par le savant professeur de l'Université de Padoue, nous a empêchés d'entreprendre de pareilles recherches pour Fermat, nous n'en espérons pas moins que notre appel sera entendu. Nous accueillerons avec reconnaissance toutes les communications qui nous seraient faites à ce sujet et nous pourrons les publier dans un volume complémentaire à la présente édition.

(2) Dialogo di Galileo Galilei, Linceo matematico sopraordinario dello studio di Pisa, e filosofo, e matematico primario del Serenissimo Gr. Duca di Toscana. Dove nei congressi di quattro giornate si discorre sopra i due Massimi sistemi del Mondo Tolemaico, e Copernicano. Con privilegi. In Fiorenza, par Gio. Batista Landini. MDCXXXII. Con Licenza de Superiori (Bibl. de Toulouse $\frac{183}{E}$ nouv. classement; ancien n° 2217).

» Vous en croirés ce qu'il vous plaira, mais si c'estoit par hasard vostre » pensée, apprenés donc, Monsieur, que vous n'avés pas touché au but. Je » ne songe, en vous offrant les Dialogues italiens du Systeme de Galilée, qu'à » faire une action de justice et à vous rendre maistre de l'ouvrage d'un auteur » qui ne passeroit, s'il vivoit, que pour vostre disciple (1). Recevés donc ce » present comme vous estant deu, et ne me considerés point en ce rencontre » comme un adroit negotiateur, mais comme un bon juge qui rejette comme » une tentation l'idée de vostre grande et fameuse bibliothèque et ne se sou- » vient que de la passion qu'il a d'estre tout à Vous. »

V.

Le premier projet d'édition complète et les papiers de Libri.

A défaut des autographes de Fermat, on possède diverses copies, plus ou moins anciennes, de pièces ou de lettres soit déjà publiées, soit inédites.

L'attention fut pour la première fois appelée sur ces copies, lorsque Libri, dans un article du *Journal des Savants* de septembre 1839, annonça qu'il venait d'acquérir d'un libraire de Metz, par l'intermédiaire du capitaine d'artillerie (depuis général) Didion, un lot de manuscrits provenant de la bibliothèque de Français et ayant antérieurement appartenu à Arbogast. D'après les détails qu'il donnait sur le contenu de ces manuscrits, en particulier sur les matériaux inédits réunis et copiés par Arbogast, d'après ce qu'un article subséquent (*Journal des Savants*, mai 1841) révéla sur les conditions défectueuses dans lesquelles s'était faite l'édition de 1679, aucun assentiment ne pouvait être refusé à l'idée de réunir, dans une publication d'ensemble, les Œuvres déjà imprimées ou encore inédites du grand géomètre de Toulouse. Villemain, alors Ministre de l'Instruction publique, prit l'initiative d'un projet de loi, présenté le 28 avril 1843, pour faire cette publication aux frais de l'État. Lorsque ce projet eut été consacré par le vote des deux Chambres, Libri fut naturellement chargé, en 1844, de diriger la nouvelle édition, et on lui adjoignit un jeune mathématicien, Despeyrous (mort, le 6 août 1883, professeur à la Faculté des Sciences de Toulouse). La collaboration n'aboutit

(1) Pour comprendre ce singulier éloge, il faut savoir que, quoique Carcavi n'ait rien publié sur la matière, il n'en avait pas moins profondément spéculé sur les systèmes astronomiques. Son action en faveur de la conception de Copernic, pour prudente qu'elle ait été, fut certainement très efficace dans le milieu scientifique où il vivait à Paris. Le langage de Fermat atteste, d'ailleurs, que les idées de son ami étaient indépendantes de celles de Galilée.

guère qu'à un résultat (*Journal des Savants*, novembre 1845), une mission de Despeyrous pour recherches à Vienne, Libri ayant constamment refusé de lui donner communication des pièces inédites qu'il avait entre les mains, et prétextant d'un autre côté de nombreuses occupations comme motifs de retards dans l'accomplissement de la tâche qu'il prétendait se réserver. Le 6 juin 1846, une lettre du Ministre de l'Instruction publique, alors Salvandy, le relevait de cette tâche; bientôt après commençait, sur les détournements de livres et de manuscrits dont on le soupçonnait, la longue enquête secrète qui devait aboutir, le 4 février 1848, au dépôt du rapport du juge d'instruction Boucly.

Immédiatement après la révolution de 1848, Libri quittait la France et emportait dix-huit caisses de livres et manuscrits; les papiers qui purent être saisis à son domicile échurent à la Bibliothèque Nationale, où tous ceux qui concernaient Fermat furent réunis dans le manuscrit fonds français, nouv. acq., n° 3280; la publication projetée fut abandonnée et l'idée n'en devait pas être reprise avant trente ans.

En 1879, à la suite d'études entreprises à Paris et d'enquêtes dans les principales bibliothèques de l'Europe, M. Charles Henry publia dans le *Bulletin Boncompagni* un travail que nous avons déjà eu l'occasion de citer d'après le tirage à part :

Recherches sur les manuscrits de Pierre de Fermat, suivies de fragments inédits de Bachet et de Malebranche, par Charles Henry. — Extrait du Bullettino di bibliografia e di storia delle scienze matematiche e fisiche. Tome XII, Luglio, Agosto, Settembre, Ottobre 1879. — *Rome, imprimerie des Sciences mathématiques et physiques, Via Lata, n°* 3, 1880. — (216 pages gr. in-4°.)

A la suite de cette publication, le prince Baldassare Boncompagni fit connaître, dans une lettre adressée, le 27 mai 1881, à M. Charles Henry, qu'il avait acquis deux manuscrits renfermant les pièces inédites énumérées par Libri en 1839 et qu'il était disposé à les communiquer aux savants qui voudraient entreprendre une nouvelle édition des Œuvres de Fermat. Ces deux manuscrits, qui seront minutieusement décrits plus loin, comme étant une des bases essentielles de notre travail, furent dès lors reconnus comme ayant effectivement été possédés par Libri et comme correspondant à ce qu'il avait signalé de plus important dans son acquisition de Metz. Mais Libri n'ayant jamais fait connaître exactement quelles pièces de Fermat il avait entre les mains, ayant d'autre part inséré dans le *Catalogue of the Manuscripts at Ashburnham-place* des mentions qui pouvaient faire croire à l'existence, dans le fonds cédé par lui au célèbre collectionneur anglais, de très nombreuses

pièces intéressant la publication projetée à nouveau, il était essentiel de vérifier ce qui en était.

Cette vérification ne put être faite avant l'acquisition, par la Bibliothèque Nationale, du fonds Libri de la collection Ashburnham. Elle a en grande partie déçu les espérances que l'on avait pu concevoir (1); on n'a retrouvé, sous le n° 1848 de Libri (2), qu'une seule chemise de pièces provenant de Fermat. Le dépouillement de ces pièces, que, grâce à l'obligeance de M. Léopold Delisle, nous avons pu faire dès le commencement de l'année 1888 et avant le classement nouveau, nous a fait reconnaître :

1° Une seule pièce non connue d'ailleurs (*voir* ci-après, page 87, note 1), sur le lieu à trois lignes;

2° D'anciennes copies de l'*Ad locos planos et solidos isagoge*, avec l'*Appendix* (page 91, note 1) de la *Methodus ad disquirendam maximam et minimam* (page 133) et du *Novus secundarum et ulterioris ordinis radicum in analyticis usus* (page 181), opuscules déjà imprimés dans les *Varia Opera;*

3° Une copie d'une lettre de Fermat à Carcavi, laquelle se trouve plus complète dans le manuscrit de la Nationale, fonds latin 11196, n° 68 de la Correspondance. — (Publiée par M. Ch. Henry, *Recherches*, etc., pages 193 à 195.)

Des anciennes copies, celle de l'*Isagoge* est d'ailleurs seule à offrir un véritable intérêt.

VI.

Le manuscrit Arbogast-Boncompagni.

Parmi les autres sources manuscrites qui ont été utilisées pour cette édition, nous devons signaler, en premier lieu, les deux volumes très importants appartenant au prince Baldassare Boncompagni, à Rome, lequel les a généreusement mis à notre disposition.

Le premier de ces manuscrits, que nous désignerons par la lettre A, est un volume haut de 27^{cm}, large de $21^{cm},5$, comportant une reliure italienne récente en basane blanche décorée de filets d'or, laquelle présente au dos une

(1) Notamment le n° 1805 du *Catalogue* précité n'a pas été retrouvé; Libri ne paraît pas l'avoir livré à lord Ashburnham; dans le n° 1860, malgré les indications du même catalogue, rien de Fermat n'a été trouvé.

(2) Ce numéro était représenté par trois portefeuilles où étaient classées des feuilles séparées. Les pièces sont aujourd'hui réparties entre les manuscrits : fonds latin, nouv. acq. 2339, 2340, 2341; fonds français, nouv. acq. 5175, 5176. Celles relatives à Fermat se trouvent dans le premier de ces cinq manuscrits.

vitole imprimée : *Fermat, Opuscules et lettres.* Outre deux feuillets de garde (en tête et à la fin), on compte, dans ce volume, 83 feuillets numérotés au crayon de 1 à 82 (le n° 50 manquant, et, deux feuillets étant numérotés : 12 *bis* et 13 *bis*, ainsi que le mentionne, au reste, une annotation au crayon sur le second feuillet de garde). Ce numérotage au crayon a été fait dans la bibliothèque du prince Boncompagni.

Sur le feuillet 1 est écrit de la main de Libri :

Lettres de Fermat | par ordre | comme dans la liste de de' (sic) *Arbogast | plus la lettre au père Billy et celle à Carcavi. | Plus une copie de la lettre imprimée (anonyme) de Frenicle* [corrigé de « *Fermat* »] *à Digby | où il est fait mention d'un | autre écrit imprimé précédemment* (1657) | *par Frenicle* [corrigé de « *Fermat* »].

Puis, de la même main, mais d'une écriture plus récente, de même que les corrections indiquées ci-dessus :

(*Voyez Comm. ep. de Wallis.*)

En haut de la page est la signature « F. Lepelle de Bois-Gallais », et sur tous les feuillets suivants le visa correspondant : F. L. B. G.; ce qui permet d'établir que l'ensemble a été vendu, à Londres, par Libri en pièces détachées. Le prince Boncompagni l'a acquis, déjà relié, du comte Giacomo Manzoni, le 17 janvier 1876.

F° 2 commence (finit f° 5) de la main d'Arbogast, qui remplit tout le reste du volume, l'*Indication des opuscules mathématiques et lettres de Fermat qui se trouvent en manuscrit dans le Tom. IV des lettres écrites au P. Mersenne par des savans conservé à la Bibliothèque des ci-devant Minimes à Paris* (1).

(1) Nous reproduisons cette liste, qui a été déjà publiée, avec quelques incorrections, par Libri dans le *Journal des Savants* de septembre 1839. On remarquera qu'elle comporte 14 numéros pour les opuscules et 20 pour les lettres, en dehors de quelques pièces ne concernant pas Fermat.

« N° 1. Le traité des contacts sphériques, en latin, sans titre, 31 pages in-folio, très belle écriture, peu serrée, et les figures faites en grand. Cette copie (a) ne diffère pas de l'opuscule imprimé dans les *Opera Varia* en 1679. Il y a sur la première page : *Opus D. de Fermat.*

N° 2. *Isagoge ad locos ad superficiem*, en latin, in-4°, 17 pages; belle copie et très lisible.

Cet opuscule, duquel Fermat faisait beaucoup de cas, n'a jamais été imprimé.

N° 3. *Ad methodum de maximâ et minimâ appendix.* Commence par ces mots : *Quia pleraumque in progressu quæstionum occurrunt asymmetriæ, etc.*, et finit par ceux-ci : *et*

(a) « Cette copie » a été corrigé de « Cet opuscule ».

C'est ce que Libri appelle *la liste d'Arbogast*, et l'on trouve effectivement, à la suite et par ordre, les 20 lettres de cette liste, toutes inédites, qui occupent les feuillets 6 à 44 du manuscrit.

ipsæ tangentes indigeant; 3 pag. in-folio; copie d'une main inconnue. Cet opuscule n'a pas [a] été imprimé.

N° 4. Opuscule sur la méthode des tangentes, commence par ces mots : *Doctrinam tangentium antecedit jamdudum habita methodus de inventione maximæ, etc.*, et finit par ceux-ci : *fusius aliquando explicabimus et demonstrabimus;* 14 pag. in-folio, belle copie, écriture peu serrée. Cet opuscule a été imprimé dans les *Opera Varia*.

N° 5. *Ad methodum de maximâ et minimâ appendix;* 4 pages $\frac{1}{2}$ in-4°, écriture de Fermat. C'est le même opuscule que n° 3.

Suivent 10 pages in-folio, écriture de Mersenne, très serrée, souvent difficile à lire. Ces pages contiennent de suite [b], savoir :

N° 6. *De maximis et minimis*, par Fermat, commence par ces mots : *Outre le papier envoyé à R. et P., pour suppléer, etc.;* $\frac{1}{2}$ pag. in-folio, dont nous n'avons pu lire les trois dernières lignes (inédit); il paraît que c'est l'extrait d'une lettre à Mersenne.

N° 7. *Méthode des maximis expliquée et envoyée par M. F. à* [c] *M. des C.*, commence par ces mots : *La méthode générale pour trouver les tangentes, etc.*, et finit par ceux-ci : *aux cônes de même base et de même hauteur;* 3 pag. in-folio (inédit).

N° 8. Extrait d'une lettre de M. Fermat. Commence par ces mots : *N'importe de dire qu'il faut faire deux opérations.* Cette lettre, dont on trouve [d] plus bas le commencement de l'original, roule sur la méthode des tangentes, en réponse [e] aux objections de Descartes [f].

Le commencement de la lettre manque dans cet extrait, mais il y a [g] 2 lignes $\frac{1}{2}$ de plus à la fin [h] que dans le fragment original, qui finissent par ces mots : *Je crois qu'il y trouvera plus de facilité qu'en la sienne.* $\frac{1}{2}$ pag. in-folio (inédit).

N° 9. *Appendix ad Isagogem topicam continens solutiones problematum solidorum per locos*, commence par ces mots : *Patuit methodus, etc.*, et finit par ceux-ci : *per rectas et circulos expedire;* 2 pag. in-folio (imprimé dans les *Opera Varia*).

N° 10. Opuscule sur la méthode des tangentes, commence par ces mots : *Doctrinam tangentium antecedit, etc.;* le même que n° 4, 2 pag. $\frac{1}{2}$ in-folio (imprimé).

N° 11. *Des nombres des parties aliquotes de F.* Commence ainsi : *Propos.* [i]. *Tout nombre impair non quarré est différent d'un quarré, etc.*, et finit par ces mots : *sont beaucoup éloignez l'un de l'autre;* $\frac{3}{4}$ pag. in-folio (inédit) : remarquable par la méthode qui s'y trouve pour [j] trouver les nombres premiers. Il paraît que cette pièce est l'extrait d'une lettre de Fermat à Mersenne ou à Frenicle.

N° 12. *Pour les nombres premiers de M. Ferm. à Fren.*, commence par ces mots : *Soit*

(a) Le mot *encore* a été rayé après *pas*.
(b) Ces mots *de suite* ont été ajoutés en interligne.
(c) Avant « *M. F. à* », sont les mots rayés « *Fermat à* ».
(d) Après le mot *trouve*, est écrit, puis rayé, « *le com.* ».
(e) Après le mot *réponse*, est écrit, puis rayé, « *à D.* ».
(f) La phrase suivante commence par les mots *Ici manque*, rayés.
(g) Le mot *deux* a été rayé devant le chiffre.
(h) Les mots *à la fin* sont ajoutés en marge.
(i) Ce mot *Propos.* avait d'abord été écrit après « *de F.* ». Il y est rayé.
(j) Ce mot *pour* est déjà écrit, puis rayé, après *méthode*.

La lettre à Billy annoncée par Libri ne se trouve, au contraire, qu'à la fin du volume (f° 82), copiée par Arbogast avec ce titre :

Lettre de Fermat au P. Billy. Se trouve aux manuscrits de la Bibliothèque Nationale à Paris, n° 8600; c'est la seule lettre de Fermat qui soit dans ce recueil de lettres adressées au P. Billy.

F° 45-48 on trouve, au contraire, l'*Extrait d'une lettre de Fermat à Car-*

par exemple la progression double, etc., finit par ceux-ci : *peine à me dédire;* $\frac{1}{2}$ pag. in-fol. (inédit). Il paraît que c'est l'extrait d'une lettre de Fermat à Frenicle.

On trouve présentement sur deux demi-feuilles séparées, pliées chacune in-4°, écriture de Mersenne, serrée, souvent difficile à lire, savoir :

N° 13. Exposition détaillée et [a] démonstration de la méthode des *maximis* et *minimis*, avec la manière dont l'Auteur y est parvenu. Cette [b] opuscule est sans titre. Son commencement est : *Dum syncriseos et anastrophes Vietææ methodum expenderem, etc.*, il finit par ces [c] mots : *summa trium harum* [d] *rectarum sit minima quantitas;* 4 pages in-4°. Cette pièce, une des plus importantes des œuvres de Fermat [e], n'a jamais été imprimée.

N° 14. *Ad methodum de minimâ et maximâ appendix.* C'est la même pièce que n°s 5 et 3. Elle est ici sur 3 pages in-4°.

Suivent les lettres originales de Fermat, savoir (toutes ces lettres sont *inédites*) [f] :

1re lettre à Mersenne, en latin, sans date, *Reverende pater, quamvis id agam ut pro Œdipo damnum* [g] *restituam, etc.*, 4 pages in-folio, écriture de Fermat.

2e lettre à Mersenne, Tolose, 26 avril 1636; 2 pages in-folio, écriture de Fermat.

3e lettre à Mersenne, Tolose, 25 décembre 1640; 5 pages in-4°, écriture de Fermat.

4e lettre à Mersenne, du 15 juin 1641; $1\frac{1}{2}$ pages in-4°, écriture de Fermat.

5e lettre à Mersenne, Tolose, 13 janv. 1643; 2 pages in-4°, écriture de Fermat.

6e lettre à Mersenne, Tolose, 16 févr. 1643; 2 pages in-4°, écriture de Fermat.

7e lettre à Mersenne, Tolose, 7 avril 1643; 3 pages in-4°, écriture de Fermat.

8e lettre à Mersenne, Tolose, 10 août 1638; 2 pages in-4°.

9e lettre à ..... *Copie de la lettre de M. Fermat, du 26 décembre* 1638. Commence ainsi : 1° *Pour les nombres, je peux trouver par ma méthode, etc.*, et finit par : *de Géométrie qui vallent celle-ci;* écriture de Mersenne, $1\frac{1}{4}$ page in-4°. Cette copie, ou cet extrait de la lettre de Fermat faite par Mersenne, est écrite sur ce qui restait de blanc à la lettre précédente. L'écriture est difficile à lire.

10e pièce ou lettre, sans inscription, commence par ces mots : *Dudum est ex quo ad*

(a) Le mot *la* a été rayé après *et*.
(b) Arbogast avait d'abord voulu écrire *Cette pièce*. Les trois premières lettres du mot *pièce* se trouvent, en effet, rayées après *Cette*, qui n'a pas été corrigé.
(c) Le mot *ceux*, rayé, précède *ces*.
(d) Le mot *harum* est déjà écrit, puis rayé, avant *trium*.
(e) Les mots *de Fermat* sont écrits en interligne à la place des mots *du recueil*, qui sont rayés.
(f) Les mots entre parenthèses ont été ajoutés après coup. Arbogast avait d'abord écrit « (*inédit*) » après la notice des lettres 1 2, 3, à la fin pour la première, avant « *écriture de Fermat* » pour les deux autres. Il a rayé ensuite ces mentions.
(g) Lisez *Dæum*.

cavi. — d'après la copie de Bouillaud, conservée dans les Manuscrits de Bouillaud. Lettres de différentes personnes ..... Bibliothèque nationale.

La chemise de cette lettre avec le titre *Lettre à Carcavi* de la main de Libri est actuellement le f° 95 du manuscrit de la Nationale : *Fonds français n° 3280 nouv. acq.* (*voir* plus haut, page XXI) que nous désignerons par la lettre A_1.

Enfin la copie par Arbogast de la lettre imprimée de Frenicle manque, de même, dans le manuscrit A et occupe les folios 96-98 de A_1.

Au folio 49 de A, qui est une chemise portant le titre : *Isagoge ad locos ad superficiem*, Libri a écrit au-dessous de cette mention :

Opuscules mathématiques de Fermat inédits. Ce sont les n^os 2, 3, 6, 7, 11, 12, 13 de la liste d'Arbogast.

Le n° 10 est ajouté, au crayon bleu, à cette nomenclature.

On trouve, en effet, dans leur ordre régulier, les opuscules en question sur les f^os 51 à 81 du manuscrit dont le contenu se trouve ainsi épuisé.

Il convient de remarquer que le n° 10 n'est nullement inédit. Libri n'avait pas eu primitivement l'intention de le comprendre dans le recueil devenu aujourd'hui la propriété du prince Boncompagni; c'est même certainement

similitudinem paraboles, etc.; et finit par ceux-ci : *ex animo rogamus;* 3 ½ pages in-4°, écriture de Fermat (inédite). Il paraît que c'est une réponse de Fermat à des questions faites par Cavalieri, et qu'il a (a) envoyé cette réponse à Mersenne, pour la faire parvenir soit à Cavalieri, soit à Toricelli (b).

11. Fragment de (c) lettre à Mersenne; commence ainsi : *J'avois déjà fait un mot d'écrit pour m'expliquer, etc.,* finit par ces mots : *habeat minimam proportionem, dabitur;* 2 pages in-4°, sans date (c'est le commencement de la lettre dont le n° 8 est un extrait; cet extrait, sans contenir le commencement, a 2 ½ lignes de plus à la fin), écriture de Fermat.

12. *Invenire cylindrum maximi ambitûs in datâ sphærâ.* Cette solution géométrique est sans figure, sur 2 pages in-4°, écriture de Fermat, elle (d) appartient à la lettre suivante.

13e lettre à Mersenne, du 10 nov. 1642; 1 ½ page in-4°, écriture de Fermat (e).

14e lettre à Mersenne, Tolose, 1 sept. 1643; 2 pages in-4°, écriture de Fermat.

15. Fragment final d'une lettre à Mersenne, Tolose, 15 juillet 1636; 1 ½ pages in-4°; écriture de Fermat.

Ici se trouve sur 1 page in-4° une lettre de Picot à Mersenne, sans date, qui contient

(a) Le mot *a* est en interligne.
(b) Arbogast avait ajouté la mention : *Écriture de F.*, qu'il a rayée.
(c) Les mots *fragment de* sont ajoutés en interligne.
(d) Le mot *paroît* est rayé après *elle*.
(e) Libri a ajouté en marge : *avec 11.*

par mégarde qu'il l'a emporté à Londres en 1848, tandis qu'il laissait à Paris des pièces qu'il aurait voulu, au contraire, conserver pour ce recueil.

Des opuscules inédits de la liste d'Arbogast, les n^os 6, 7, 11, 12, qui sont en français, figureront dans la Correspondance de Fermat sous les n^os 26, 31, 37, 43. Les autres se trouvent dans le présent Volume.

Quant aux 20 lettres inédites, les n^os 10 et 12 sont insérés ci-après, pages 195 et 167; pour les autres, la correspondance sera la suivante avec notre édition :

N^os de la liste d'Arbogast.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	11	13	14	15	16	17	18	19	20
N^os de la Correspondance de Fermat.....	12	1	45	47	52	55	56	33	36	30	51	60	6	54	46	28	59	35

VII.

Le manuscrit Vicq-d'Azyr-Boncompagni.

Nous désignerons par la lettre B le second manuscrit que le prince Boncompagni a bien voulu nous communiquer et qu'il a acquis dans les mêmes conditions que le précédent.

la solution de Descartes touchant le centre de percussion. Cette solution est imprimée dans les lettres de Descartes.

16e lettre à Mersenne, sans date, commence ainsi : *Je vous rends mille grâces, etc.;* 2 pag. in-4°, écriture de Fermat.

17e lettre à Mersenne, Tolose, 26 mars 1641; 1 ½ page in-4°, écriture de Fermat (a).

18e lettre à Mersenne, sans date, commence ainsi : *J'ai appris par votre lettre que ma réplique à M. Descartes, etc.;* 2 ½ pages in-4°, écriture de Fermat.

19e lettre à Mersenne, sans date, commence par ces mots : *Vous m'écrivez que la proposition de mes questions impossibles, etc.;* 3 pag. in-4°, écriture de Fermat.

Ici se trouve un mémoire latin sur la métallurgie et la docimasie.

20e lettre à Mersenne, 22 oct. 1638; 9 pages in-4°, écriture de Fermat; le commencement, qui traite d'affaires particulières, manque; importante (b).

Fin.

N^a. — A la suite des lettres de Fermat se trouvent 168 pages in-4° de lettres de Letenneur à Mersenne; elles roulent particulièrement sur les objections de Fabry et de Cazré

(a) Libri a ajouté en marge, puis rayé : *avec n° 5.*
(b) Le mot *Cette* se trouve écrit, puis rayé, avant *importante.*

C'est un Volume haut de 29^{cm}, large de 21^{cm},5, relié en peau de porc et portant au dos l'inscription :

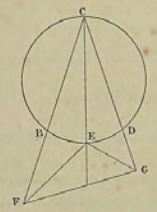
Copie | de lettres | de | Fermat | de | Descartes | et Traduction | d'un Discours | de | Galilée.

Sur le plat de la couverture est au milieu le chiffre 1, en haut, à gauche, le chiffre 4. Ces deux mêmes chiffres sont reproduits au milieu du premier feuillet (de garde).

Lorsque le Volume s'est trouvé entre nos mains, nous avons également reconnu, sur le même plat, quelques traces de lettres effacées. L'emploi du tannin nous a permis de revivifier, en haut, l'inscription « *Au Citoyen*

contre les démonstrations de Galilée sur la descente des graves; quelques observations sur la dispute entre Roberval et Descartes. Letenneur marque qu'il est allé voir de Beaune à Blois et que *superat præsentia famam;* il fait le récit de l'entretien qu'il eut avec lui, quoiqu'il fût très malade, et qu'on lui eût coupé le pied, il communique à Mersenne le problème suivant qui venait de lui être proposé, et dont il n'avait pu encore trouver la solution.

Un cercle étant donné comme BCD, et une ligne FG dehors, tirer de ses extrémités F,



G deux lignes droites à la circonférence convexe ou concave comme en E ou en C, dont l'angle soit coupé en deux parties égales par le diamètre.

Ces lettres contiennent peu de choses intéressantes; on peut en tirer quelques faits ou quelques anecdotes concernant l'histoire des sciences. On y voit, par exemple, que le jeune Huygens avoit fait un écrit avant ou en 1647 pour défendre et démontrer, à sa manière, les propositions de Galilée sur la descente des graves.

Toutes ces lettres sont de 1647 et 1648.

Avant les lettres de Fermat, on trouve à la tête de (^{a}) ce volume une longue lettre de Tho. Hobbes à Mersenne, du (^{b}) 5 nov. 1640, en 56 pages in-folio. »

(^{a}) Les mots *à la tête de* sont une correction du mot *dans*.
(^{b}) Le mot *du* est ajouté en interligne.

Mauduyt » d'une écriture passablement fine et, vers le milieu, la note suivante :

N. B. 2 ventôse
Ce volume faisoit
partie du paquet de
papiers trouvés chez
Vicq d'Azir, après sa
mort, et renvoyés à la
Bibliothèque de la
ci-devant Académie
des Sciences comme
lui appartenant.

Cette note, qui est de la main facilement reconnaissable d'Arbogast, n'avait pas été écrite directement sur la couverture, mais bien sur un carré de papier collé dessus. Ce carré de papier a probablement été enlevé par Libri, entre les mains duquel le Volume est passé, comme le prouvent surabondamment les annotations qu'il y a inscrites en marge des lettres de Descartes.

Quoique ce Volume soit passé entre les mains d'Arbogast, il ne l'a pas utilisé pour ses copies, comme le montre la collation des pièces identiques de A et de B.

Ce dernier manuscrit comprend 118 feuillets numérotés (au crayon), mais c'est en réalité un recueil factice et nous n'avons à décrire que la partie qui concerne Fermat et qui vient en tête.

Cette partie comprend trois cahiers, le premier de 8 feuillets, le deuxième et le troisième de 12; les trois derniers feuillets sont entièrement blancs.

Le n° 2 inscrit au bas de la première page du premier cahier et la forme du début, sans titre et tout au haut de la page, prouvent l'existence antérieure d'un autre cahier précédent, qui est aujourd'hui perdu. Toutefois les traces d'encre qui se sont produites, au moment de la reliure, sur le feuillet de garde et le revers de la couverture, montrent que la perte a précédé la formation du recueil factice.

L'écriture est du dix-septième siècle, serrée et peu lisible.

Voici le détail des pièces contenues dans ce manuscrit; les unes sont des extraits de lettres déjà imprimées dans les *Varia;* d'autres sont des copies de lettres figurant dans la liste d'Arbogast; quelques-unes enfin ne sont pas connues d'ailleurs.

1. F° 2ro. Extraict d'une lettre du IIII^{me} no^{bre} 1636 à M. de Roberval pour la quadrature de la parabole (*Varia*) = n° 15 de la Correspondance de Fermat.
2. F° 2vo. Extraict d'autre lettre du mesme du 4 juin 1648 au R. P. M. = n° 63.
3. F° 2vo. Extraict d'autre lettre du XX^{me} febvrier 1639 au R. P. M. = n° 37.

4. F° 3^vo. Extraict d'autre lettre du 1^e avril 1640 au R. P. M. (en partie dans les *Varia*), = n° 38.
5. F° 5^vo. Autre lettre au R. P. M. (*Varia*) = n° 40.
6. F° 6^vo. Autre lettre au mesme = n° 39.
7. F° 7^vo. Extraict d'autre lettre du 18^e octobre 1640 à M. F. (*Varia*) = n° 44.
8. F° 8^vo. Extraict d'autre lettre (*Varia*) = n° 42.
9. F° 9^vo. Extraict d'une lettre du 31 may 1643 à M. D. F. = n° 58.
10. F° 10^vo. Copie de lettre du 22^me octobre 1638 (20^e lettre de la liste d'Arbogast) = n° 35.
11. F° 12^vo. Epistola D^mi de Fermat ad R. P. Mersennum (Arbogast, 1^re lettre) = n° 12.
12. F° 14^vo. (Arbogast, 16^e lettre) = n° 54.
13. F° 15^vo. (Arbogast, 4^e lettre) = n° 47.
14. F° 15^vo. (Arbogast, 2^e lettre) = n° 1.
15. F° 17^vo. (Arbogast, 13^e lettre) = n° 31.
16. F° 17^vo. (Arbogast, 12^e lettre), *ci-après*, page 167.
17. F° 18^vo. (Arbogast, 10^e lettre), *ci-après*, page 195.
18. F° 19^vo. (Arbogast, 3^e lettre) = n° 45.
19. F° 21^vo. (Arbogast, 18^e lettre) = n° 28.
20. F° 22^vo. (Arbogast, 7^e lettre) = n° 56.
21. F° 22^bis. (Arbogast, 19^e lettre *en partie*) = n° 59.
22. F° 22^ter. (Arbogast, 14^e lettre) = n° 60.
23. F° 23^vo. (Arbogast, 6^e lettre) = n° 55.
24. F° 24^vo. (Arbogast, 17^e lettre) = n° 46.
25. F° 24^vo. (Arbogast, 8^e lettre) = n° 33.
26. F° 25^vo. (Arbogast, 9^e lettre) = n° 36.
27. F° 25^vo. (Arbogast, 15^e lettre) = n° 6.
28. F° 26^vo. (Arbogast, 11^e lettre) = n° 30.
29. F° 26^vo. Lettre de M^r Fermat (à Frenicle) = n° 48.
30. F° 28^vo. Frenicle respond (tiré d'une lettre imprimée dans les *Varia*) = n° 49.
31. F° 28^vo. Copie d'une lettre du père Mersenne et de la responce de M^r de S^t Martin con^er du Grand Conseil.
32. F° 29^vo. Lettre de Mons^r Pujos au père Mersenne.

Ces deux dernières pièces seront publiées dans le Volume de *Complément*.

VIII.

Les manuscrits de la Nationale, etc.

Les autres manuscrits utilisés par nous, appartenant à des bibliothèques publiques et ayant déjà été étudiés par M. Charles Henry dans ses *Recherches*, n'ont pas besoin d'une description aussi complète que les précédents.

Nous n'avons d'ailleurs à nous étendre un peu longuement que sur le n° 3280 fonds français nouv. acq., désigné par nous sous la lettre A_1 et formé, comme nous l'avons dit, avec les papiers relatifs à Fermat qui ont été saisis en 1848 chez Libri.

Nous avons déjà noté plus haut l'existence, dans ce manuscrit, de l'original : *Doctrinam tangentium etc.*, et de deux feuillets ayant fait partie du recueil d'Arbogast; ce sont là des pièces que Libri a certainement laissées par mégarde en France, tandis qu'il négligeait le reste de « l'énorme cahier » qu'il a dit avoir acquis à Metz.

Ce reste occupe les feuillets 91 à 98 et 120 à 192 du manuscrit A_1, où il est facile de reconnaître l'écriture d'Arbogast. On peut y distinguer :

1° Divers brouillons des copies au net contenues dans le manuscrit A, savoir la lettre n° 9 et les opuscules 13, 6, 7, 11, 12 de la liste d'Arbogast (textes publiés par M. Ch. Henry, *Recherches*, 2^e partie, n^os 15, 17, 18, 19, 21, 22);

2° Des copies ou extraits de quelques pièces déjà imprimées dans les *Varia*;

3° Des extraits (ou notes tirées) des Ouvrages de Descartes (en particulier de ses Lettres), Fagnano, Mersenne, Wallis, Hérigone, Viète, Albert Girard, Euler, Lagrange;

4° Des essais de démonstrations sur diverses questions traitées par Fermat;

5° Des notes bibliographiques sur divers manuscrits de la Nationale ou sur des Ouvrages mathématiques imprimés;

6° Une copie, tirée de l'un de ces manuscrits, de la *Proposition de M. de Roberval qui sert à trouver les centres de gravité envoyée à M. Fermat le 1^er avril* 1645.

En somme, Arbogast ne semble pas, malgré ses recherches sérieusement poursuivies, être arrivé à découvrir aucune autre pièce inédite de Fermat que celles du manuscrit A.

En dehors de documents qui n'intéressent guère que l'histoire du projet de publication sous le gouvernement de Louis-Philippe, le manuscrit A_1 contient encore les copies faites à Vienne par Despeyrous (f^os 25 à 90) de la correspondance entre Fermat et Clerselier, etc., d'après les minutes de ce dernier et des copies faites par ou pour lui.

La Bibliothèque Nationale nous a encore fourni, abstraction faite des originaux mentionnés plus haut, quelques copies anciennes éparses dans divers manuscrits :

Fonds latin 7226 : f^os 34 et suiv. Copies de lettres de Roberval à Fermat du 11 octobre 1636 et du 16 août 1636, déjà imprimées dans les *Varia*, mais la seconde avec un texte complètement refondu.

Fonds latin 11196 : f^os 46 à 53. *Novus secundarum et ulterioris ordinis*

radicum in analyticis usus (*ci-après*, p. 181) — f° 54. Lettre de Fermat à Carcavi (*voir* plus haut, sur les papiers du fonds Libri).

Fonds latin 11197 : f^os 17 à 20. Copie de la lettre n° 12 de la liste d'Arbogast (*ci-après*, p. 167) — f° 20v°. Extrait de la lettre de Fermat à Mersenne du 3 juin 1636 (la première lettre des *Varia*).

Fonds français 20945, Cahier 17 : f° 65. Copie de la lettre de Fermat à Pascal du 29 août 1654 (imprimée dans les *Œuvres de Pascal*) — f° 78. Copie d'une lettre sans adresse ni nom d'auteur, mais que M. Ch. Henry a reconnue comme écrite par Fermat à Carcavi et qu'il a publiée (*Recherches*, pages 197 à 200, n° 76 de la Correspondance).

La Bibliothèque de l'Université de Leyde possède, dans le manuscrit n° 997 Burmann Q. 22, copie de deux lettres échangées entre Huet et Fermat (*ci-après*, pages 386 et 388) publiées par M. Ch. Henry (1) (*Recherches*, pages 73-77).

Nous avons déjà signalé les autographes de Fermat que possède la même bibliothèque dans la collection Huygens. La correspondance de Carcavi de cette collection a été publiée par M. Ch. Henry soit dans ses *Recherches* (pages 213 à 216), soit dans son *Pierre de Carcavy* [pages 14 à 40 du tirage à part (2)]. Elle renferme d'importants extraits des lettres de Fermat à Carcavi; l'un d'eux est publié ci-après, page 285, les autres formeront les n^os 77, 78, 101, 103, 106, 110 de la Correspondance de Fermat.

IX.

Plan de la nouvelle édition.

Telles sont les sources imprimées et manuscrites qui ont été à notre disposition pour la préparation de la présente édition; il nous reste à exposer

(1) La lettre de Huet est également copiée dans le manuscrit de la Nationale, fonds latin 11433. Nous avons dit que l'original de celle de Fermat subsiste dans notre manuscrit A_F, f^os 108 et 109.

(2) Pierre de Carcavy, intermédiaire de Fermat, de Pascal et de Huygens, bibliothécaire de Colbert et du Roi, directeur de l'Académie des Sciences, par M. Charles Henry. — Extrait du *Bullettino di bibliografia e di storia delle scienze matematiche e fisiche*, tomo XVII, maggio, giugno 1884. — Rome, imprimerie des Sciences Mathématiques et Physiques, Via Lata n° 3, 1884.

le plan qui a été adopté par la Commission de publication (1) et à expliquer certaines dispositions particulières.

L'édition doit comprendre trois Volumes : le premier renfermant d'une part les *Œuvres mathématiques diverses*, et de l'autre les *Observations sur Diophante*, les deux suivants seront consacrés à la *Correspondance de Fermat* qui sera classée par ordre chronologique et contiendra aussi bien les lettres qu'il a écrites que celles qu'il a reçues.

Tous les opuscules de Fermat étant en latin, un écrit de lui en français appartient nécessairement à sa correspondance; mais il a rédigé dans la langue savante même un certain nombre de lettres, plus soignées que les autres, plus exclusivement mathématiques ou qu'il pensait devoir être, plus que les autres, copiées et communiquées. Comme d'autre part ses opuscules affectent parfois la forme épistolaire, et qu'ils n'étaient pas destinés à une autre publicité que ses lettres écrites en latin, comme aussi les fragments isolés composés dans cette langue ont été au moins envoyés par lui avec ses lettres, quand ils n'en ont point été simplement extraits, on peut parfois hésiter pour classer une pièce latine, soit dans les opuscules, soit dans la correspondance.

Pour se mettre en garde contre tout reproche d'arbitraire à cet égard, il eût fallu pouvoir affecter le premier Volume à tous les écrits latins de Fermat; mais cette solution n'était guère praticable, car il arrive à notre géomètre de passer, dans la même lettre et parfois sur le même sujet, d'une langue à l'autre. On serait également tombé dans le grave inconvénient de détruire assez souvent l'unité d'un groupe de lettres et de rompre le fil chronologique de la correspondance.

On a donc préféré se borner à conserver le cadre général des *Varia Opera*, en y rattachant tous les morceaux qui y ont paru trouver une place plus naturelle que dans la Correspondance, où ils auraient été isolés et la plupart à une date incertaine.

L'ordre chronologique des opuscules ne pouvant d'ailleurs dans bien des

(1) La publication des Œuvres de Fermat a fait l'objet d'une proposition de loi présentée le 16 février 1882; cette loi a été votée par la Chambre le 13 mai, par le Sénat le 4 juillet, et promulguée le 13 juillet 1882. L'impression a été confiée à MM. Gauthier-Villars et fils, imprimeurs-éditeurs, qui se sont chargés de ce travail moyennant une souscription à 200 exemplaires.

La principale cause du retard apporté à la publication est due à l'espérance, aujourd'hui reconnue comme illusoire, de trouver des matériaux importants dans les manuscrits de lord Ashburnham (fonds Libri), manuscrits dont il n'a pas été possible de prendre connaissance avant l'acquisition de ce fonds par la Bibliothèque Nationale.

cas être rigoureusement établi, il fallait adopter un ordre méthodique. Celui des *Varia*, n'ayant aucune valeur réelle, ne pouvait servir de point de départ; on s'est arrêté aux principes suivants :

Constituer une série de groupes dont l'ordre représentât le développement des idées de Fermat, tel qu'il apparaît du moins si l'on prend dans chaque groupe l'écrit le plus ancien et si l'on range cet ensemble par ordre de dates;

Adopter dans l'intérieur de chaque groupe le classement chronologique pour les opuscules les plus importants; rejeter à la fin du groupe les fragments (généralement mal datés) et les ranger par ordre de questions.

On reconnaîtra facilement dans la Table des matières ci-avant les groupes qui ont été ainsi formés et qui, au reste, étaient déjà tous représentés dans les *Varia Opera;* on peut les dénommer comme suit : 1° Géométrie à la manière des anciens; 2° Géométrie analytique (inventée et développée indépendamment de Descartes); 3° Méthodes des maxima et minima et des tangentes (origine du calcul différentiel); 4° Théorie des équations (notamment une méthode d'élimination générale); 5° Quadratures (origine du calcul intégral).

La langue dont s'est servi Fermat et la désuétude où sont tombés, même dans le latin que lisent encore les mathématiciens, un grand nombre des termes techniques dont il se sert, ont paru rendre désirable une traduction française; la Commission a jugé qu'il serait préférable de ne la publier qu'à part des Œuvres de Fermat dans un Volume spécial de *Complément,* où l'on donnera également des traductions : d'une part, de l'*Inventum novum* rédigé par le P. de Billy d'après les lettres que lui avait adressées Fermat et publié dans le *Diophante* de 1670; de l'autre, du *Commercium epistolicum* de Wallis; aucun de ces deux Ouvrages n'a, en effet, de titres suffisants pour figurer dans les Œuvres mathématiques ou dans la Correspondance de Fermat, et leur réimpression n'offre pas d'intérêt véritable; leur connaissance est cependant indispensable pour l'histoire scientifique de Fermat.

Le *Complément* comprendra encore, dans le même but historique, les nombreux extraits que l'on peut tirer, relativement au géomètre de Toulouse, des lettres de Descartes et divers autres témoignages des contemporains, en particulier de Mersenne.

Enfin, la Commission a jugé que les éditeurs devaient limiter leurs notes au minimum indispensable pour l'intelligence du texte (renvois compris) et les renseignements bibliographiques; mais elle a décidé la rédaction de trois index : l'un des noms propres; le deuxième de la langue mathématique de Fermat; le troisième des matières.

X.

Remarques pour la lecture du texte.

Le présent Volume ne contenant que des écrits latins, nous n'avons à parler aujourd'hui que des règles qui ont été admises pour la constitution du texte en cette langue.

L'édition des *Varia* est d'une singulière incorrection; les originaux font défaut, à une seule exception près, qui permet d'ailleurs (*voir* page 159 note 2) de constater que Fermat les écrivait assez précipitamment pour ne pas éviter certains *lapsus calami;* enfin les copies laissent également plus ou moins à désirer.

Dans ces conditions, on a supposé que le texte de Fermat devait, avant toutes choses, être correct, soit pour le sens, soit pour la langue, et partout où il a paru corrompu, on s'est efforcé de le restituer en se conformant le plus possible aux indications des sources et aux habitudes de l'auteur. Diverses additions, soit de mots, soit de membres de phrase omis, ont paru nécessaires; elles ont été faites entre crochets d'intercalation $< >$. Les crochets [ ] indiquent, au contraire, les passages suspects d'interpolation, genre de corruption auquel les copies n'ont pas échappé par suite des notes qui y ont été ajoutées.

On n'a tenu aucun compte de la ponctuation des *Varia,* qui est aussi défectueuse que possible, ni même de la division en alinéas que comporte cette édition. Les sources manuscrites ont été seulement consultées sous ce rapport. On a cherché avant tout à rendre la lecture facile, en adoptant une ponctuation régulière et conforme à nos habitudes modernes, et en multipliant les alinéas.

Une autre innovation a été introduite dans le même but : la mise à la ligne de tout ce qui est équation ou peut être considéré comme tel. Il est à peine utile de dire que cette disposition typographique n'est pas en général indiquée par les sources; mais nous n'avons eu aucun scrupule à l'adopter, et nous pensons qu'elle pourrait être utilement imitée en général dans les rééditions des anciens auteurs mathématiques.

En ce qui concerne les notations et abréviations, nous avons cherché à déterminer pour chaque opuscule le mode qui semblait avoir été le plus généralement suivi par Fermat, et nous y avons conformé tout ce qui en différait. Il est à remarquer que, dans les anciennes copies et dans les *Varia,*

on n'a attaché aucune importance à l'emploi de notations que Fermat, fidèle aux errements de Viète, a généralement évitées; mais, d'autre part, on ne doit nullement supposer qu'il ait suivi dans tous ses écrits régulièrement le même système d'abréviations. La règle que nous avons adoptée nous a paru concilier ce qui était dû au respect des anciennes notations et à la facilité de la lecture; car, pour celle-ci, il est en tout cas essentiel que l'on ne passe pas brusquement d'un genre d'abréviation à un autre.

Pour l'orthographe latine, nous avons adopté celle qui est encore aujourd'hui la plus usuelle, malgré les dernières tentatives de réforme; tout d'abord nous avons distingué l'*i* et le *j*, l'*u* et le *v* comme le faisaient déjà les Elzevirs (1), par exemple dans l'édition de Viète de 1646; puis, pour chaque mot particulier, tout en ayant grand soin de restituer certaines formes que Fermat paraît avoir affectionnées et que les copistes ont d'ordinaire négligées, nous avons adopté l'orthographe la plus usuelle, et seulement pour les cas ambigus, nous avons cherché l'usage le plus fréquent dans les sources relatives à chaque opuscule. Cependant, pour la facilité de la lecture, nous n'avons pas hésité à substituer partout *quum* à *cum*, qui semble pourtant bien avoir été l'orthographe de Fermat.

En tout cas, pour que l'édition nouvelle pût entièrement remplacer les *Varia* dans toute recherche sur ce point, l'orthographe de l'ancienne édition, ainsi que celle des autres sources, a été notée scrupuleusement, en même temps que les corrections, dans les variantes rejetées à la fin du Volume. Ces variantes contiennent également quelques notes critiques et remarques qui complètent les annotations mises au bas des pages du texte.

L'accentuation a été indiquée partout où elle a paru utile pour faciliter la lecture; on a suivi à cet égard le modèle donné par Friedrich Hultsch dans sa traduction de Pappus.

Les pièces qui figurent dans l'Appendice ont été réimprimées sans aucun changement, à part quelques corrections indiquées en notes.

M. Paul Tannery s'est plus spécialement chargé de l'établissement du texte et de la rédaction des notes de ce premier Volume : M. Charles Henry s'est plus particulièrement occupé de recueillir et de collationner les documents.

Sans l'offre gracieuse du prince Baldassare Boncompagni, sans sa singulière complaisance pour nous, la présente édition n'aurait pu être entre-

(1) Le *Diophante* et les *Varia* de Samuel Fermat offrent à cet égard des divergences et des irrégularités; mais en général la distinction n'est pas faite dans le premier de ces Ouvrages : elle l'est au contraire dans le second.

prise; le monde savant lui en doit une reconnaissance dont nous ne pouvons être ici que les trop faibles interprètes; nous devons aussi un tribut de remerciements à nombre de personnes qui ont bien voulu nous prêter leur concours et nous fournir divers renseignements; nous avons tout particulièrement à nommer M. Léopold Delisle, administrateur de la Bibliothèque Nationale, qui a facilité nos recherches avec tant de bienveillance; M. Henri Omont, bibliothécaire au département des manuscrits du même établissement, à qui nous devons, entre autres choses, la découverte d'une pièce inédite, imprimée dans l'Appendice; M. Bierens de Haan, M. Antonio Favaro qui dirigent respectivement, l'un à Leyde, l'autre à Padoue, les rééditions des Œuvres de Huygens et de Galilée et qui nous ont assuré leur précieux concours pour des collations que nous ne pouvons faire nous-mêmes; enfin M. de la Ville de Mirmont, de la Faculté de Bordeaux, qui a bien voulu rechercher pour nous la provenance de quelques citations classiques faites par Fermat sans nom d'auteur.

ŒUVRES MATHÉMATIQUES DIVERSES.

APOLLONII PERGÆI

LIBRI DUO DE LOCIS PLANIS RESTITUTI.

< LIBER PRIMUS. >

Loci plani quid sint, notum est satis superque : hac de re scripsisse libros duos Apollonium testatur Pappus (1), eorumque propositiones singulas initio libri septimi tradit, verbis tamen aut obscuris aut sane interpreti minus perspectis (græcum enim codicem (2) videre non licuit). Hanc scientiam, totius, ut videtur, Geometriæ pulcherrimam, ab oblivione vindicamus et Apollonium *de locis planis* disserentem Apolloniis Gallis, Batavis et Illyricis (3) audacter opponimus, certam

(1) Pappi Alexandrini mathematicæ collectiones a Federico Commandino Urbinate in latinum conversæ et commentariis illustratæ. — Pisauri, apud Hieronymum Concordiam, MDLXXVIII. — (D'autres tirages à Venise *apud Franciscum de Franciscis Senensem*, 1589, et à Pesaro, 1602.)

C'est à cette traduction de Commandin que Fermat a emprunté textuellement les énoncés (ci-après entre guillemets) des propositions qu'il a cherché à restituer. *Voir*, dans les variantes, la correspondance établie sous la rubrique *Co*.

(2) Le texte grec de la préface du Livre VII de Pappus a été édité pour la première fois, en 1706, par Halley (*Apollonii Pergæi de sectione rationis libri duo ex Arabico MSto latine versi*, etc., Oxford). Mais pour apprécier la valeur de la divination de Fermat, il faut recourir à l'édition complète : *Pappi Alexandrini Collectionis quæ supersunt e libris manu scriptis edidit latina interpretatione et commentariis instruxit Fridericus* Hultsch. Berlin, Weidmann, 1876-1877-1878 (Vol. II, pages 662-669 pour le texte des propositions, et pages 852 à 865 pour les lemmes relatifs aux *Lieux plans* d'Apollonius).

(3) Francisci Vietæ *Apollonius Gallus* seu exsuscitata Apollonii Pergæi περὶ ἐπαφῶν Geo-

gerentes fiduciam non alibi præclarius quam hoc in opere, Geometriæ miracula elucere. Quod ut statim fatearis, hic exordior.

Propositiones libri primi hæ sunt :

PROPOSITIO I.

« *Si duæ lineæ agantur, vel ab uno dato puncto, vel a duobus, et vel* » *in rectam lineam, vel parallelæ, vel datum continentes angulum, vel* » *inter se datam proportionem habentes, vel datum comprehendentes spa-* » *tium : contingat autem terminus unius locum planum positione datum,* » *et alterius terminus locum planum positione datum continget, interdum* » *quidem ejusdem generis, interdum vero diversum, et interdum similiter* » *positum ad rectam lineam, interdum contrario modo.* »

Hæc propositio in propositiones octo dividi commode potest, et quævis ex iis in multiplices casus : obscuritatem interpreti præbuisse videtur interpunctionum defectus; imo et Pappus ipse hoc loco propter nimiam brevitatem videtur non vacavisse obscuritate. Singula, dum secamus in octantes, ita revelamus :

1. PROPOSITIO. — *Si a dato puncto in rectam lineam duæ lineæ agantur, datam habentes proportionem, et terminus unius contingat locum* < *planum* > *positione datum* (*hoc est : aut rectam, aut circumferentiam circuli positione datam*), *alterius terminus continget rectam aut circuli circumferentiam positione datam.*

Esto datum punctum A (*fig.* 1), per quod agantur in directum rectæ AB, AF, in proportione data, et sit, verbi gratia, punctum B in

metria. — Ad V. C. Adrianum Romanum Belgam. — Paris, Leclerc, 1600. — (Reproduit pages 325-346 de l'édition des Œuvres de Viète par Schooten. Leyde, Elzévirs, 1646.)

Wilebrordi Snellii R(odolphi) F(ilio) : περὶ λόγου ἀποτομῆς καὶ περὶ χωρίου ἀποτομῆς resuscitata Geometria. Leyde, Plantin, 1607. — *Apollonius Batavus* seu exsuscitata Apollonii Pergæi περὶ διωρισμένης τομῆς Geometria. Leyde, Dorp, 1608.

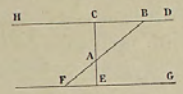
Marini Ghetaldi, Patritii Ragusensis : *Apollonius redivivus* seu restituta Apollonii Pergæi inclinationum Geometria. — Supplementum *Apollonii Galli* seu exsuscitata Apollonii Pergæi tactionum Geometriæ pars reliqua. — Venise, 1607.

On peut ajouter le *Supplementum Apollonii redivivi* publié par Alexander Anderson à Paris, en 1612.

recta linea HCBD positione data : Aio punctum F esse quoque ad rectam positione datam.

A puncto A demissâ in rectam HD perpendiculari AC, dabitur punctum C. Producatur CA ad E, et fiat ratio CA ad AE æqualis datæ; dabitur igitur recta AE et punctum E. Per punctum E, parallela rectæ HD

Fig. 1.



ducatur GEF; dabitur positione, et in ea erit punctum F, quia omnes rectæ per datum punctum parallelas secantes in eamdem rationem dividuntur. Patet ergo quamcumque rectam, per punctum A transeuntem et datis positione parallelis terminatam, in datam secari proportionem.

Esto deinde datum punctum B (*fig.* 2) et circulus positione ICN,

Fig. 2.

cujus centrum A. Jungatur BA, in puncto I circumferentiam secans, et producatur IB ad BE, ut sit ratio IB ad BE æqualis datæ. Continuetur in F, et fiat

AI ad EF ut IB ad BE,

et centro F, intervallo FE, describatur circumferentia circuli EDZ, quam patet, ex constructione, positione dari : Aio rectas omnes, per punctum datum B transeuntes et utrimque circumferentiis datorum positione circulorum terminatas, in datam secari rationem.

Ductâ enim, verbi gratia, CBD, jungantur CA, DF; est

ut IB ad BE, ita AI ad EF;

ergo

ut tota BA ad BF, ita AI sive AC ad EF sive FD;

et sunt æquales anguli ABC, FBD ad verticem. Patet itaque triangula esse similia, atque ideo

ut CB ad BD, ita BA ad BF, hoc est in ratione data.

Quum igitur a dato puncto B ducantur in directum duæ rectæ, BC, BD, verbi gratia, in data ratione, quarum BC tangit circumferentiam positione datam, tanget quoque BD aliam circumferentiam positione datam.

Si producantur rectæ donec ad concavas circulorum circumferentias pertingant, idem eveniet.

Monemus porro nos minima quæque in demonstrationibus non docere, quum statim pateant, imo et casus diversos non persequi, quum ex adductis minimo possint negotio derivari.

2. Propositio. — *Si a dato puncto ducantur in directum duæ rectæ, datum continentes spatium, contingat autem terminus unius locum planum positione* < *datum* > (1), *tanget pariter et terminus alterius.*

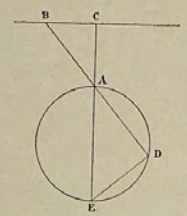
Esto datum punctum A (*fig.* 3), data primum recta BC positione, in quam demittatur perpendicularis AC; dabitur ergo et punctum C. Producatur, et fiat spatio dato æquale rectangulum CAE. Super diametro AE descripto circulo ADE, aio rectas omnes, per punctum A ductas et illinc rectâ, hinc circumferentiâ circuli (quem patet dari positione) terminatas, ita ad punctum A secari ut rectangulum sub partibus æquetur spatio dato.

Nam sit, verbi gratia, recta DAB. Junctâ DE, quum sit angulus ADE in semicirculo rectus, et anguli BAC, DAE ad verticem æquales, erunt

(1) Le mot *datum* a été restitué ici et ailleurs, partout où il a paru improbable que Fermat l'ait consciemment sous-entendu. Mais il faut observer que Pappus dit souvent seulement Θέσει et Commandin *positione*, pour signifier *donné de position*; Fermat avait donc pu prendre la même habitude.

triangula DAE, ACB similia, atque ideo rectangulum BAD rectangulo CAE dato æquale.

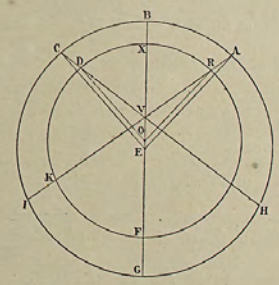
Fig. 3.



Quum igitur per punctum A ducantur duæ rectæ AB, AD in directum, et terminus unius, nempe AB, tangat rectam BC positione datam, tanget et terminus alterius locum planum, hoc est circulum ADE, positione datum.

Sed detur punctum V (*fig.* 4) et circulus BIGH positione, cujus

Fig. 4.



centrum E. Jungatur EV et producatur in B; dabitur VB. Producatur in F, ut sit rectangulum BVF æquale dato, cui etiam æquetur rectangulum GVX. Super diametro XF, circulus describatur XKF, quem

quidem dari positione patet : Aio rectas, per punctum V transeuntes et duobus circulis terminatas, ita secari in V ut rectangulum sub segmentis dato æquale efficiant.

Ducatur enim, verbi gratia, AVKI : aio rectangulum AVK æquari dato.

Sumatur centrum circuli minoris O; recta autem AVKI secet eumdem circulum in R; jungantur rectæ RO, AE. Posuimus rectangulum GVX æquari BVF; erit ergo

ut GV ad VB ut FV ad VX,

et componendo, et sumendo antecedentium dimidia, et per conversionem rationis,

ut EB sive EA ad EV, ita OX sive OR ad OV.

Et habent duo triangula OVR, VEA communem angulum EVA; erunt ergo similia, et

ut AV ad RV, ita AE ad RO, sive EB ad OX, <et> VE ad VO.

Quum ergo

ut EB ad OX, ita VE ad VO,

ergo

ut EB ad OX, ita reliqua VB ad reliquam VX,

atque ideo

ut AV ad RV, ita BV ad XV.

Similiter probabimus

ut GV ad VF, ita IV ad KV;

erit igitur vicissim

ut GV ad VI, ita FV ad VK.

Ut autem

FV ad VK, ita VR ad VX

(quia rectangula KVR, FVX in circulo sunt æqualia), et

ut VR ad VX, ita probavimus esse VA ad VB;

erit igitur

ut FV ad VK, ex una parte, ita VA ad VB.

Rectangulum igitur KVA rectangulo FVB dato æquale.

Ex alia vero parte erit

ut GV ad IV, ita VR ad VX,

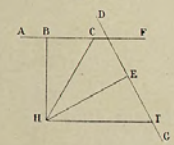
atque ideo rectangulum IVR rectangulo GVX dato æquale.

Quum igitur per punctum V ducantur duæ lineæ in directum AV et VK, comprehendentes spatium datum, et terminus unius, nempe VA, contingat circulum positione datum, tanget et terminus alterius locum planum, hoc est circulum XKF, positione datum.

3. Propositio. — *Si a dato <puncto> ducantur duæ lineæ, datum continentes angulum et datam proportionem habentes, contingat autem terminus unius locum planum positione <datum>, continget et terminus alterius.*

Esto primo datum punctum H (*fig.* 5) et recta linea AF positione,

Fig. 5.



in quam demissa perpendicularis HB dabitur. Fiat angulo dato æqualis angulus BHE et sit BH ad HE in ratione data; dabitur recta HE positione, et punctum E. A puncto E ad rectam HE excitata perpendicularis infinita DEG dabitur positione. Sumatur quodlibet punctum in recta AF, ut C, et junctâ HC, fiat angulo dato æqualis CHI : Aio rectam HC ad HI esse in ratione data.

Nam, quum sint æquales anguli BHE, CHI, dempto communi CHE,

erunt æquales BHC, EHI; et sunt anguli ad B et E recti : sunt igitur similia triangula HBC, HEI et

ut HB ad HC, ita HE ad HI,

et vicissim

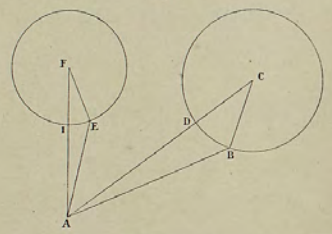
ut HB ad HE, ita HC ad HI

habet rationem datam.

Quum igitur, a dato puncto H, ductæ fuerint duæ lineæ HC, HI, in dato angulo CHI et in data ratione, et altera, nempe HC, ad punctum C contingat rectam positione <datam>, continget et terminus alterius locum planum, nempe rectam DG, quam dari positione probatum est.

Sed tangatur circulus : esto punctum A (*fig.* 6), datus circulus

Fig. 6.



positione IE, cujus centrum F. Jungatur FA secans circulum in I, et fiat angulus <IAD> æqualis dato, et ratio IA<ad>AD data; dabitur AD positione, et punctum D. Producatur et fiat

ut IA ad AD, ita IF ad DC.

Centro C descripto circulo DB, quem patet dari positione, sumatur quodvis punctum in priore circulo, ut E, et junctâ EA, fiat angulo dato æqualis EAB, et sit punctum B in secundo circulo : Aio esse AE ad BA in ratione data.

Jungantur FE, BC. Probabimus, ut supra, æquales angulos FAE, CAB

et similitudinem triangulorum FAE, CAB; iisdem rationibus, quibus jam in priore propositione ejusque secunda figura usi sumus, arguemus, eritque

AF ad EA ut AC ad AB,

et vicissim

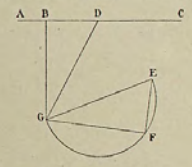
ut AF ad AC, hoc est ut AI ad AD, ita AE ad AB.

Dabitur ergo ratio AE ad AB, et patet tum sensus, tum consequentia propositionis.

4. Propositio. — *Si a dato puncto ducantur duæ lineæ, datum continentes angulum et datum comprehendentes spatium, contingat autem terminus unius locum planum positione datum, continget et terminus alterius.*

Sit datum punctum G (*fig.* 7), recta positione data AC, in quam

Fig. 7.



ducatur perpendicularis GB; esto angulus datus BGE, et spatium datum sub BG in GE. Super GE describatur semicirculus GEF, et sumpto in recta positione data quovis puncto, ut D, junctâque DG, fiat angulo dato æqualis DGF : Aio rectangulum sub DG in GF æquari dato.

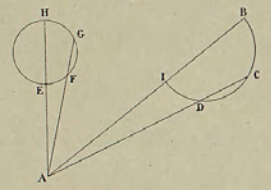
Jungatur FE. Probabimus, ut in propositione præcedente, æqualitatem angulorum BGD, EGF. Sed recti ad B et F sunt æquales; non latebit igitur triangulorum BGD, EGF similitudo, neque rectangulorum BG in GE, et GD in GF æqualitas, neque veritas propositionis.

Si igitur, etc.

Sed sit datum punctum A (*fig.* 8), et circulus positione HGE.

Ducatur, per ipsius centrum, AEH secans circumferentiam in punctis E, H. Sit angulus datus HAB, et spatium datum rectangulum sub HA in AI, vel <sub> EA in AB. Super recta IB descripto semicirculo (1), quem quidem patet dari positione, satisfiet quæstioni : nam ductâ GFA,

Fig. 8.



verbi gratia, et facto angulo GADC, dato æquali, aio rectangulum GAD, vel FAC, æquari dato.

Nam quum rectangula HAI, EAB æquentur, erit

ut HA ad AE, ita AB ad AI.

Ex propositionis verò superioris ratiocinio patet æqualitas angulorum HAG, BAC et ex priore propositione facile deducetur esse

ut HA ad GA, ita BA ad AC.

Sed

ut HA ad GA, ita FA ad AE;

ergo

ut FA ad AE, ita BA ad AC,

rectangulumque FAC rectangulo BAE dato est æquale.

Deinde est

ut BA ad AC, ita AD ad AI,

rectangulumque GAD rectangulo HAI dato æquale. Constat itaque ex omni parte propositum.

Si igitur, etc.

(1) *Voir* plus loin page 18, ligne 7 en remontant : « Observandum autem, etc. »

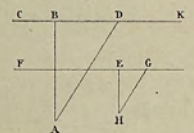
Hoc in casu sumpsimus punctum A extra circulum positione datum, in secundo verò casu secundæ propositionis, intra circulum posueramus.

Quatuor propositiones præcedentes punctum unum datum assumunt, sequentes duo.

5. Propositio. — *Si a duobus punctis datis duæ lineæ parallelæ agantur, rationem habentes datam, contingat autem terminus unius locum planum positione datum, continget et terminus alterius.*

Sunto <data> duo puncta A et H (*fig.* 9), recta positione CBDK, in quam demittatur perpendicularis AB, cui parallela ducatur HE, et

Fig. 9.



sit ratio AB ad HE data. Dabitur punctum E, per quod ductâ FEG perpendiculari ad HE et rectæ positione datæ parallelâ, aio omnes parallelas, a punctis A, H ductas et rectis CD, FG positione datis terminatas, esse in proportione data AB ad HE.

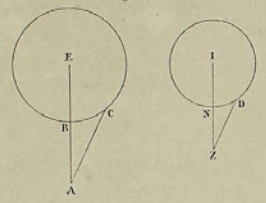
Erunt enim anguli BAD, EHG æquales, et recti ad B et E; similia ergo triangula BAD, EHG, et reliqua facilia.

Quum igitur a datis duobus punctis A et H ductæ fuerint parallelæ AD, HG, in ratione data, quarum AD est ad datam rectam positione, erit et HG ad rectam positione datam, ideoque ad locum planum.

In hac figura (*fig.* 10) sint data puncta A et Z, et circulus positione BC, cujus centrum E. Jungatur AE, occurrens circulo in B, et huic parallela ducatur ZN, fiatque ratio AB ad ZN æqualis datæ. Producatur ZN in I, et fiat ratio BE ad NI æqualis etiam datæ. Centro I, intervallo IN, descriptus circulus dabitur positione et quæstioni satisfaciet.

Nam, ductis parallelis AC, ZD, circulis ad puncta C, D occurrentibus, erit ratio AC ad ZD æqualis datæ; esse enim angulos BAC, NZD

Fig. 10.

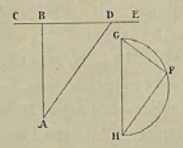


æquales, jam primus hujus propositionis casus evicit; reliquum præstabit secundum < tertiæ > propositionis epitagma.

6. Propositio. — *Si a duobus punctis datis duæ parallelæ agantur, datum comprehendentes spatium, contingat autem terminus unius locum planum positione datum, continget et terminus alterius.*

Sint data duo puncta A et H (*fig.* 11), recta positione CE, in quam < demittatur > perpendicularis AB, cui parallela ducatur HG, et

Fig. 11.



rectangulo dato sit æquale rectangulum sub AB < in > (1) HG; dabitur recta HG, super qua descriptus semicirculus (2) HFG quæstionem perficiet.

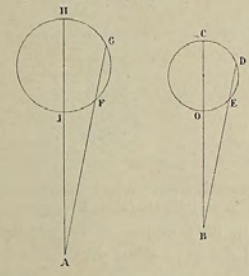
(1) La locution abrégée « sub AB, HG » se trouve déjà chez Viète.
(2) *Voir* la Note de la page 12.

Ductis enim ubicumque parallelis AD, HF, et junctâ GF, patebit demonstrationes superiores retractanti triangulorum BAD, GHF similitudo, ideoque rectangulum sub AD in HF æquale dato sub BA in HG concludetur.

Quum igitur a duobus punctis, etc.

In secundo casu, sint data puncta A et B (*fig.* 12), et circulus positione IFGH, per cujus centrum transeat AIH, cui parallela ducatur BC.

Fig. 12.



et sit rectangulum sub AI < in > BC æquale dato, eidemque æquale rectangulum sub AH in BO. Super recta OC descriptus semicirculus præstat propositum.

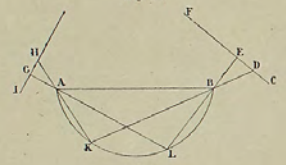
Nam, ductis parallelis AFG, BED, erunt anguli HAG, CBD æquales, et rectangulum sub AG in BE æquale dato, eidemque rectangulum sub AF in BD; nec absimilis est ei, quæ in secundo epitagmate propositionis quartæ prodita est, demonstratio.

7. Propositio. — *Si duæ lineæ agantur a datis duobus punctis, datum continentes angulum et datam habentes proportionem, contingat autem terminus unius locum planum positione datum, continget et terminus alterius.*

Sunto < data > duo puncta A et B (*fig.* 13), recta positione IGH.

Super BA describatur portio circuli ALB, capiens angulum æqualem dato. A puncto A ducatur in rectam IH perpendicularis AG, qua producta donec circumferentiæ occurrat in L, producatur LBE, et fiat AG ad BE in ratione data. Perpendicularis ad BE agatur FEDC, et sumatur quodlibet punctum in portionis circumferentia, ut K, a quo ducantur per puncta A et B rectæ KAH, KBD, occurrentes rectis IH, FC in punctis H et D : Aio AH ad BD esse in ratione data AG ad BE.

Fig. 13.



Quum enim hoc ita se habeat, erunt triangula AGH, BED similia, ideoque anguli GAH, EBD, eisque ad verticem KAL, KBL æquales; quod quidem ita se habet quum eidem circuli portioni insistant, et proclivis est ab analysi ad synthesin regressus.

Quum igitur a datis duobus punctis A et B ductæ fuerint duæ rectæ AH, BD, datum continentes angulum HKD $<$ datamque habentes proportionem $>$, et terminus ipsius AH contingat rectam IH positione datam, continget et terminus BD rectam FC, quam dari positione evicit constructio.

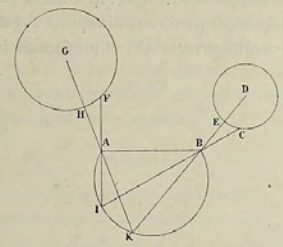
Sed sint data puncta A, B (*fig.* 14), circulus positione HF. Super recta AB describatur portio circuli AKB, capiens angulum dato æqualem. Centrum circuli HF esto G. Jungatur AHG, producatur donec portioni occurrat in K, et ducatur KBE, et sit ratio AH ad BE data. Producatur BE in D, donec HG ad DE sit pariter in ratione data. Centro D descriptus circulus dabitur positione, et dabit solutionem quæstionis.

Ductis quippe IAF, IBC, erunt anguli ad A et B æquales, et reliquum

propositi non est laboriosum; statimque patet AF ad BC esse in ratione data, imo et ad circumferentias concavas productas idem præstare.

Quum igitur, etc.

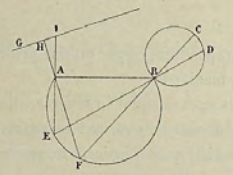
Fig. 14.



8. Propositio. — *Si a duobus punctis datis ducantur duæ lineæ, datum continentes angulum et datum comprehendentes spatium, contingat autem terminus unius locum planum positione datum, continget et terminus alterius.*

Sint data duo puncta A et B (*fig.* 15), recta positione GI. Super AB describatur portio circuli capiens angulum datum. Ducta perpendicu-

Fig. 15.

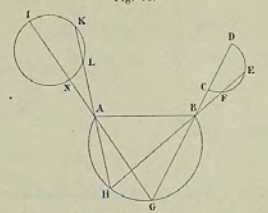


laris AH in GI continuetur in F, et juncta FB producatur in C, sitque spatium datum AH in BC. Super recta BC descriptus circulus faciet quod proponitur.

Erit quippe, sumpto quovis puncto in portione E, et junctis EAI, EBD, rectangulum sub AI < in > BD æquale dato; nec differt ab expositis aliis casibus demonstratio.

Sed sint data duo puncta A, B (*fig.* 16), datus positione circulus IKL, et super AB descripta portio circuli capiens angulum dato æqualem. Ducatur per centrum recta ANI et producatur in G; junctaque

Fig. 16.



GB producatur, et fiat rectangulum sub AI in BC æquale dato, eidemque æquale rectangulum sub AN in BD. Super CD descriptus semicirculus satisfaciet proposito.

Hoc est : sumpto quolibet puncto ut H, et reliquis ut supra constructis, ut in figura, erit rectangulum sub AK in BF æquale dato, eidemque rectangulum sub AL in BE; nec est diversa demonstratio a præcedentibus.

Constat itaque propositum, eaque ratione prior Apollonii seu Pappi propositio redditur manifesta.

Observandum autem casus quos in semicirculis tantum expressimus in circulis integris locum habere, sed et casus multiplices ex varia datorum positione oriri, quos otiosiores ex præcedentibus facili opera et proclivi ratiocinio deducent.

Subjicit Pappus : Locum planum quem secunda ex rectis contingit, *interdum* esse *ejusdem generis, interdum vero diversum*. Hoc patet, quia in prima propositione, verbi gratia, est ejusdem generis : nam, si prior

sit ad rectam, est quoque ad rectam posterior, si ad circulum, similiter ad circulum; in secundæ vero priore parte et aliis quibusdam casibus, est diversi generis.

Addit deinde aliquando *similiter* poni *ad rectam lineam, interdum contrario modo*. Quo loco verba « *ad rectam lineam* » (1), quæ nullum sensum admittunt, censeo delenda, et ita locum interpretor, ut aliquando secundus locus priori contrario modo ponatur : verbi gratia, si prior sit ad convexum circuli, secundus ad concavum, etc., cujus rei exempla priores propositiones suppeditabunt.

Propositio II.

« *Si rectæ lineæ positione datæ unus terminus datus sit, et alter circum-* » *ferentiam concavam positione datam continget.* »

Hæc verba si ita legantur, falsa est propositio (2); reponendum igitur loco, verbi gratia, « *positione datæ* » — *magnitudine datæ;* — critque sensus ut, *datâ circuli diametro et centro, extremitas diametri sit ad circulum positione datum*. Cujus rei veritas quum per se pateat, cur diutius hîc immoremur?

Propositio III.

« *Si a duobus punctis datis inflectantur rectæ lineæ datum angulum* » *continentes, commune ipsorum punctum continget circumferentiam* » *concavam positione datam.* »

Hæc propositio per se patet : dari enim, super recta linea duo puncta jungente, portionem circuli capientem angulum datum, docuit Euclides in *Elementis*.

Propositio IV.

« *Si trianguli spatii, magnitudine dati, basis positione et magnitudine* » *data sit, vertex ipsius rectam lineam positione datam continget* », paral-

(1) Les mots du texte grec πρὸς τὴν εὐθεῖαν (Hultsch, p. 664, l. 5) peuvent être conservés avec l'explication donnée par Fermat.

(2) Fermat a deviné le texte grec (Hultsch, p. 664, l. 10). Cette proposition et les deux suivantes ne sont pas d'Apollonius; Pappus les donne comme ajoutées par Charmandre.

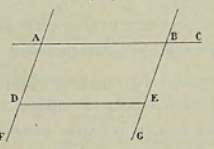
lelam nempe basi datæ, cujus inventione ex I *Elementorum* facile deduces omnia.

PROPOSITIO V.

« *Si rectæ lineæ, magnitudine datæ et cuipiam positioni datæ æqui-* » *distantis, unus terminus contingat rectam lineam positione datam,* » *et alius terminus rectam lineam positione datam continget.* »

Datæ rectæ lineæ DE (*fig.* 17) magnitudine et rectæ AC, positione datæ, æquidistantis unus terminus, ut D, contingat rectam AF posi-

Fig. 17.



tione datam. Si per punctum E duxeris BEG ipsi AF parallelam, constabit propositum.

Erunt quippe rectæ omnes, inter has duas parallelas interceptæ et rectæ AC, positione datæ, æquidistantes, inter se æquales : quod ipsa constructio manifestat.

Si igitur alter terminus cujuslibet sit ad rectam AF, erit alius ad BG, ut vult propositio, quam etiam licet porrigere levi negotio ad circulos.

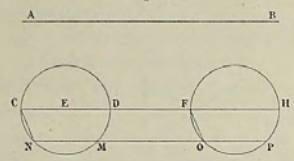
Sit enim data AB (*fig.* 18) positione, cui æquidistet recta NO magnitudine data, cujus punctum N sit ad circumferentiam circuli CNM positione dati : Aio punctum O esse ad circulum positione datum.

Esto E centrum circuli CNM, et ducta diameter, ipsi NO parallela, continuetur in F, donec recta CF æquetur NO datæ : dabitur recta CF positione et magnitudine. Producatur, et fiat FH æqualis CD. Super FH descriptus circulus præstabit propositum.

Erit quippe punctum O ad ipsius circumferentiam. Quum enim

punctum O sit ad circumferentiam circuli FOP, erunt rectæ CN, FO æquales et parallelæ, quum æquales et parallelas CF, NO conjungant. Erunt igitur anguli NCD, OFH æquales; quod quidem ita se habet,

Fig. 18.



quum rectæ CD, FH sint æquales, et a rectis NM, OP æqualiter distent.

Poterit igitur propositio Pappi universalius ita concipi :

Si rectæ lineæ, magnitudine datæ et cuipiam positione datæ æquidistantis, unus terminus contingat locum planum positione datum, et alius terminus locum planum positione datum continget.

PROPOSITIO VI.

« *Si a puncto quodam ad positione datas duas rectas lineas parallelas,* » *vel inter se convenientes ducantur rectæ lineæ in dato angulo, vel datam* » *habentes proportionem vel quarum una simul cum ea, ad quam altera* » *proportionem habet datam, data fuerit, continget punctum rectam* » *lineam positione datam.* »

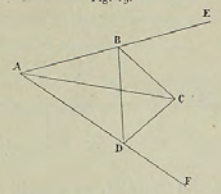
Hujus propositionis duæ sunt partes, quarum *prior* hæc est.

Sint duæ rectæ positione datæ AE, AF (*fig.* 19), in puncto A concurrentes, et a puncto C demittantur rectæ CB, CD, in datis angulis CBA, CDA, et sint rectæ BC, CD in data proportione : Aio punctum C esse ad rectam lineam positione datam.

Jungantur AC, BD. In quadrangulo ABCD dantur tres anguli ABC, ADC, BAD : datur igitur angulus BCD. Datur etiam ratio BC ad CD ex hypothesi : ergo datur specie triangulum BDC et anguli CBD, CDB.

Reliqui igitur ABD, ADB dantur, ideoque specie triangulum ABD : datur igitur ratio AB ad BD. Sed ex demonstratis datur ratio BD ad BC (quum probatum sit triangulum BDC specie dari) : ergo datur ratio AB

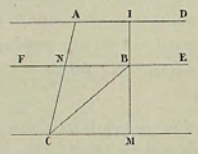
Fig. 19.



ad BC. Datur autem BA positione, et punctum A : datur igitur positione recta AC, et in ea sumpto quovis puncto et ab eo demissis, in datis angulis, rectis in rectas datas, probabitur semper demissas esse in data proportione.

Alter casus est si rectæ datæ sint parallelæ : Sint rectæ CA, CB (*fig.* 20), in datis angulis CAD, CBF, in proportione data. Angulus CNB

Fig. 20.



datur; est enim æqualis, propter parallelas, dato CAD. Datur igitur specie triangulum CNB et ratio CN ad CB; datur autem ex hypothesi ratio CB ad CA : ergo ratio CN ad CA data est, ideoque probatur facile punctum C esse in recta data positione.

Constructio. — Per punctum quodvis, ut B, trajiciatur perpendicularis IBM : dabitur IB. Fiat

ut AN ad NC, ita IB ad BM.

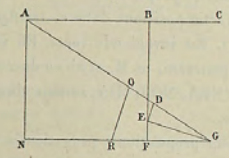
Per punctum M ducta duabus datis parallela satisfaciet quæstioni, nec est operosa demonstratio.

Si igitur a puncto quodam ad positione datas duas rectas lineas, parallelas vel inter se convenientes, ducantur rectæ lineæ $<$ in $>$ datis angulis, habentes datam proportionem, continget punctum rectam lineam positione datam.

Secunda pars ita se habet :

Dentur rectæ AC, AG (*fig.* 21), in puncto A concurrentes. Ponatur

Fig. 21.



AN super rectam AC in dato angulo CAN. Fiat AN æqualis datæ, et ipsi AC parallela ducatur NG. Angulus alius datus sit ROG. Per primam partem hujus ducatur recta GE, in qua sumpto quovis puncto, ut E, rectæ ED, EF, ipsis RO, AN parallelæ, sint in ratione data : dabitur GE positione, ex superius demonstratis. Producatur FE in B : dabitur FB magnitudine; est enim æqualis datæ AN, propter parallelas.

Quodcumque igitur punctum sumpseris in recta GE, ut E, a quo in rectas AC, AG demiseris rectas ED, EB in angulis datis, recta BE una cum EF, ad quam ED habet rationem datam, data erit : quod vult propositio (1).

Si igitur a puncto quodam ad positione $<$ datas $>$ duas rectas lineas, inter se convenientes, ducantur rectæ lineæ in datis angulis, quarum

(1) Fermat omet ici le cas du parallélisme des droites données AC, AG.

una simul cum ea, ad quam altera habet proportionem datam, data fuerit, continget punctum rectam lineam positione datam.

Propositio VII.

« *Si sint quotcumque rectæ lineæ positione datæ, atque ad ipsas a quo-*
» *dam puncto ducantur rectæ lineæ in datis angulis, sit autem quod data*
» *linea et ducta continetur, unà cum contento data linea et altera ducta,*
» *æquale ei quod data et alia ducta et reliquis* (1) *continetur, punctum*
» *rectam lineam positione datam continget.* »

Hæc propositio est ampliatio præcedentis et quod de duabus lineis est superius demonstratum in prima parte propositionis VI, hic in quotcumque locum habere proponitur.

Exponantur tres rectæ positione datæ et triangulum constituentes AB, BC, CA (*fig.* 22). Est invenienda recta, EK verbi gratia, in qua sumendo quodlibet punctum, ut M, et ab eo ducendo rectas MR, MO, MI in angulis datis MRA, MOB, MIA, summa duarum OM et MI sit ad MR in ratione data.

Per primam partem propositionis præcedentis inveniatur recta in qua sumendo quodlibet punctum et ab eo ducendo rectas ad rectas AB,

(1) Ces deux mots *et reliquis* de la version de Commandin sont incompréhensibles; Hultsch traduit le grec καὶ τῶν λοιπῶν ὁμοίως (p. 666, l. 5) par *et sic in ceteris*, ce qui concorde assez avec la divination de Fermat. Mais le sens probable est plus vague et ne permet guère de préciser à quel point s'étaient arrêtées les recherches d'Apollonius.

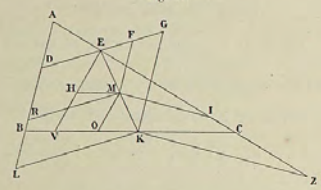
La généralisation véritable de la proposition VI est évidemment que le lieu du point est une droite toutes les fois qu'il y a une relation linéaire *quelconque* entre les distances (obliques) de ce point à des droites données en nombre quelconque. On peut donner ce sens à la proposition VII du texte de Pappus; mais, à entendre ce texte littéralement, il semble que, d'une part, dans cette relation linéaire, il ne supposait pas de terme constant; que, de l'autre, il égalait la somme de deux des termes à la somme de tous les autres. Fermat a bien fait la première hypothèse; mais, au lieu de la seconde, il a supposé un terme égal à la somme de tous les autres.

Dans l'*Ad locos planos et solidos Isagoge*, Fermat remarque la possibilité de généraliser la proposition de Pappus, telle qu'il l'a restituée; cette généralisation doit, sans doute, correspondre à l'hypothèse qui égale la somme d'un nombre quelconque de termes à la somme de tous les autres, mais toujours en ne supposant pas de terme constant.

Puis, au même endroit, Fermat égale, au contraire, à un terme constant la somme de tous les termes variables; mais il ne paraît pas avoir conçu la relation linéaire sous sa forme la plus générale.

BC, ductæ sint in ratione data : dabitur positione recta quæsita. Punctum igitur, in quo concurret cum AC, dabitur : esto E, a quo ducantur EV, ED ipsis MO, MR parallelæ; ergo ex constructione VE ad ED habebit rationem datam. Eadem methodo, sumptis AB, AC rectis, inveniatur punctum K, a quo ductæ KL, KZ in datis angulis, ipsis nempe MR, MI parallelæ, sint in ratione data. Erit igitur similiter KZ ad KL in

Fig. 22.



ratione data. Jungatur EK : quodcumque punctum in ea sumpseris præstabit propositum.

Sumatur M, verbi gratia, ex jam constructis. Fiat MF parallela BA, et MH parallela BC. Probandum est summam duarum OM, MI esse ad MR ut VE ad ED, in ratione nempe data.

Fiat adhuc KG parallela BA. Ponatur verum esse quod intendimus probare : ergo vicissim erit

ut MR ad ED, ita summa duarum MI, MO ad EV,

et, dividendo, erit

ut differentia MR et DE ad DE,
ita differentia qua duæ OM, MI superant EV ad EV.

Quum autem MF sit parallela BA, EF erit differentia rectarum MR et DE, et quum MH sit parallela BC, EH erit differentia rectarum VE, MO, ideoque differentia rectarum IM et EH æquabitur excessui quo duæ MO, MI superant rectam VE. Ex demonstratis igitur erit

EF ad DE ut differentia rectarum IM, EH ad EV,

et vicissim

EF erit ad differentiam rectarum IM, EH ut ED ad EV.

Erit igitur, convertendo,

differentia rectarum IM, EH ad EF in ratione data EV ad ED.

Ex constructione autem, expositis tribus EH, EF, MI, est

VE ad EH ut KE ad EM;

est etiam

KZ ad MI in eadem ratione KE ad EM;

est etiam, quum KG sit parallela BA,

GE ad EF in eadem ratione KE ad EM.

Igitur tres rectæ VE, KZ, EG sunt in ratione trium HE, MI, EF : est igitur

ut differentia duarum EV, KZ ad EG, ita differentia duarum MI, EH ad EF.

Sed probavimus differentiam duarum MI, EH ad EF habere rationem datam EV ad ED : igitur differentia duarum EV, KZ ad EG habebit rationem datam EV ad ED, et vicissim

differentia duarum EV, KZ ad EV erit ut EG ad ED,

et, componendo,

KZ erit ad EV ut GD ad ED.

Sed (propter parallelas KG, BA) KL æquatur DG : igitur vicissim erit

ut KZ ad KL, ita EV ad ED,

quod quidem ita se habere jam ex ipsa constructione innotuerat.

Constat itaque veritas pulcherrimæ propositionis, nec est difficilis aut absimilis ad ulteriores casus et quotlibet lineas porrigenda constructio et demonstratio. Semper enim, beneficio constructionis in duabus lineis, expedietur problema in tribus lineis : beneficio constructionis in tribus lineis, expedietur problema in quatuor lineis :

beneficio constructionis in quatuor, expedietur problema in quinque : et simili omnino ac uniformi in infinitum methodo.

PROPOSITIO VIII ET ULTIMA.

« *Si ab aliquo puncto ad positione datas parallelas ducantur rectæ lineæ* » *in datis angulis, quæ ad puncta in ipsis data abscindant rectas lineas,* » *vel proportionem habentes, vel spatium continentes datum, vel ita ut* » *species ab ipsis ductis, vel excessus specierum æqualis sit spatio dato,* » *punctum continget positione datas rectas lineas.* »

Hujus propositionis, si vera esset, quatuor essent partes, sed eam *in ratione data* veram duntaxat (1) deprehendimus. Valeant igitur reliqua de spatio contento sub duabus, et de summa aut differentia quadratorum ab ipsis, et tanquam commentitia aut huc aliunde translata rejiciantur.

Proponatur itaque sic emendatum theorema :

Si ab aliquo puncto ad positione datas parallelas ducantur rectæ lineæ in datis angulis, quæ ad puncta in ipsis data abscindant rectas lineas proportionem habentes datam, punctum continget positione datam rectam lineam.

Constructio sic procedet : Sint datæ parallelæ AB, GC (*fig.* 23), puncta in ipsis data A et F, angulus unus ex datis BAH, alter GFH. Quum puncta A et F dentur, et anguli ad ipsa, dabuntur rectæ AH, FH positione, ideoque punctum concursus H; dabitur etiam punc-

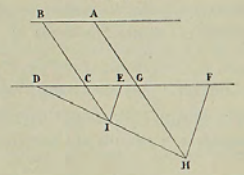
(1) La traduction de Commandin était trop peu intelligible pour que Fermat ait pu reconnaître le véritable sens du texte de Pappus (Hultsch, p. 666, l. 7 à 13); il lui aurait fallu entendre les mots *vel spatium continentes datum, vel ita ut species ab ipsis ductis, vel excessus specierum æqualis sit spatio dato* comme se rapportant non pas aux *rectæ lineæ*, c'est-à-dire aux abscisses AB, EF, mais bien aux *rectæ lineæ* IB, IE.

Avec l'interprétation de Fermat, pour les trois hypothèses où l'on suppose constant : soit $AB \times EF$, soit $\overline{AB}^2 + \overline{EF}^2$, soit $\overline{EF}^2 - \overline{AB}^2$, le lieu du point I est évidemment une conique (hyperbole ou ellipse), ainsi que, du reste, Fermat l'a indiqué dans l'*Ad locos planos et solidos Isagoge*.

Avec le sens qu'il faut donner au texte de Pappus, que $IB \times IE$, ou $\overline{IB}^2 + \overline{IE}^2$, ou $\overline{IB}^2 - \overline{IE}^2$ soit constant, le lieu est évidemment une parallèle aux droites données AB, GC.

tum G, in quo AH secat parallelam GC. Recta GF in puncto D ita secetur ut GD ad DF sit in ratione data : dabitur punctum D. Jungatur DH; dabitur igitur positione DH : Aio rectam DH præstare propositum, hoc est : sumpto in ea quolibet puncto, ut I, et ab eo ductis IB, IE in angulis datis, abscissam AB ad datum punctum A ad abscissam EF ad datum punctum F esse in ratione data GD ad DF.

Fig. 23.



Secet BI parallelam GF in C. Erit ex constructione IB parallela HA, quum fuerit demissa in angulo dato, hoc est, ipsi HAB æquali. Erit etiam IE parallela HF : GC igitur, propter parallelas, æquatur AB. Probandum superest

ut GC ad EF, ita GD ad DF,

et vicissim

ut GC ad GD, ita EF ad DF.

Hoc autem perspicuum est :

ut enim HI ad HD, ita GC ad GD,

et

ut eadem HI ad HD, ita EF ad FD.

Esse igitur GC ad EF in ratione data fit perspicuum.

Sunt plures casus tam istius quam præcedentium propositionum : quos invenire et addere quum sit facile, cur in his diutius immoremur?

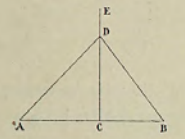
LIBER SECUNDUS [1].

PROPOSITIO I [2].

« *Si a datis punctis rectæ lineæ inflectantur, et sint quæ ab ipsis fiunt* » *dato spatio differentia, punctum positione datas rectas lineas con-* » *tinget.* »

Sint data duo puncta A et B (*fig.* 24), et sit datum quodlibet spatium quadrato AB minus. Dividatur AB in C, ita ut quadratum AC qua-

Fig. 24.



dratum CB superet dato spatio, et educatur perpendicularis infinita CE,

(1) Il semble que Fermat ait composé ce second Livre avant le premier, et même assez longtemps avant (voir *Lettre à Roberval*, du 20 avril 1637). C'est ce qui peut expliquer pourquoi, dans l'édition des *Varia*, on trouve, avant *Liber II*, un titre spécial : *Apollonii Pergæi propositiones de locis planis restitutæ*.

Et en effet, pour l'intelligence du texte obscur où Pappus résume l'objet du Traité d'Apollonius, Fermat devait naturellement chercher à s'aider des lemmes, au nombre de huit (propositions 119 à 126 de la version, par Commandin, du Livre VII), donnés comme relatifs aux *Lieux plans*; or ces lemmes concernent exclusivement le second Livre d'Apollonius.

(2) Aux indications que portent les lemmes de Pappus, on reconnaît que le résumé qu'il donne ne suit pas exactement l'ordre d'Apollonius; ainsi cette proposition I devait faire partie du second lieu du Livre II. Mais Fermat ne s'est aucunement proposé de restituer dans sa forme l'œuvre du géomètre de Perge, et, en cela, le but de sa divination diffère de l'objet des travaux plus récents, comme celui de Robert Simson (Glascow, 1749).

in qua sumatur quodlibet punctum D, et jungantur DA, BD : Aio quadratum AD superare quadratum DB dato.

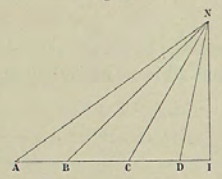
Quod quidem patet, quum quadratum AD eodem superet quadratum DB, quo quadratum AC superat quadratum CB (1).

Si spatium datum sit majus quadrato AB, punctum C extra lineam AB cadet.

Ad hanc propositionem pertinere possunt duæ sequentes (2) :

Sint data quatuor puncta A, B, C, D (*fig.* 25) *in recta linea, et sit* AB *æqualis* CD. *Sumatur aliud quodcumque punctum, ut* N, *et jungantur*

Fig. 25.



quatuor rectæ NA, NB, NC, ND : *Aio duo quadrata* AN, ND *superare duo quadrata* BN, NC *rectangulo sub* AB *in* BD *bis.*

Nam ducatur perpendicularis NI, et primùm punctum I extra rectam lineam AD cadat. Patet igitur excessum quadratorum AN, ND super duo quadrata BN, NC, propter omnibus commune quadratum NI, esse id quo duo quadrata AI, ID superant duo quadrata BI, CI. Sed quadrata duo AI, DI, per 4^{am} II, æquantur quadrato DI bis, quadrato AD, et rectangulo ADI bis; quadrata vero BI, CI, per eamdem propositionem, æquantur quadrato DI bis, quadratis BD, CD, et rectangulis sub BD in DI bis, et CD in DI bis, sive, loco horum duorum

(1) C'est l'objet du second lemme de Pappus (prop. 120 de Commandin).

(2) Dans l'*Ad locos planos et solidos Isagoge*, Fermat indique la généralisation des six premières propositions du Livre II *de Locis planis*, pour un nombre quelconque de points donnés choisis sans aucune condition.

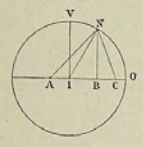
rectangulorum, uni rectangulo AD in DI bis, propterea quod AB est æqualis CD : excessus igitur quadratorum AI, ID super BI, CI est idem qui AD quadrati super quadrata BD, CD sive AB. Sed, per 4^{am} propositionem II, quadratum AD duo quadrata AB, BD superat rectangulo sub AB in BD bis. Constat ergo propositum.

Reliquos casus non adjungo neque in hac propositione neque in sequentibus, nam, licet sit facile, esset tædiosum.

Si a tribus punctis in recta linea constitutis inflectantur rectæ, et sint duo quadrata tertio majora spatio dato, punctum positione datam circumferentiam continget.

Sint data tria puncta A, B, C (*fig.* 26) in recta linea, et datum quod-

Fig. 26.



libet spatium rectangulo ABC bis majus. Fiat AI æqualis BC, et spatium datum sit æquale rectangulo ABC bis et quadrato IV. Centro I, intervallo IV, circulus VNO describatur in cujus circumferentia punctum quodlibet sumatur, ut N, junganturque NA, NB, NC ad data puncta : Aio duo quadrata AN, NC quadratum NB dato spatio superare.

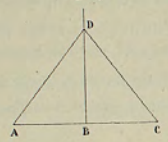
Nam jungatur IN : ergo ex superiore propositione patet duo quadrata AN, NC æquari duobus quadratis IN, BN et rectangulo ABC bis; ergo duo quadrata AN, NC superant quadratum NB quadrato IN et rectangulo ABC bis, et constat propositum.

Propositio II.

« *Si a duobus punctis inflectantur rectæ, et sint in proportione data,* » *punctum continget vel rectam lineam vel circumferentiam.* »

Sint data duo puncta A et C (*fig.* 27), et sit primum data ratio æqualitatis. Dividatur AC bifariam in B, et excitetur perpendicularis BD. Patet quodcumque punctum in ipsa sumatur, ut D, fore rectas AD, DC æquales.

Fig. 27

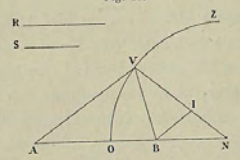


Sed sit data ratio inæqualitatis, et sint duo data puncta A, B (*fig.* 28), ratio ut R ad S. Fiat

ut R quad. ad S quad., ita AN ad NB.

Inter AN, NB sumatur media NO, cujus intervallo describatur circulus OVZ, et in ipsius circumferentia sumatur quodcumque punctum, ut V, junganturque VA, VB : Aio esse in data ratione R ad S.

Fig. 28.



Nam, junctâ VN, ipsi VA parallela sit BI :

ut AN ad NO sive NV, < ita NV > ad NB,

et sunt circa eumdem angulum ANV; similia igitur duo triangula ANV, BVN, et angulus VAB angulo BVI æqualis. Sed et AVB, VBI, propter parallelas, æquales sunt; ergo similia triangula AVB, VBI, et est

AV ad VB ut VB ad BI,

et

ut VB ad BI, < ita NV ad NB, et AN ad NV.

Est igitur

ut VB quad. ad BI quad. >, id est AN ad NB (1),

id est R quad. ad S quad., ita AV quad. ad VB quad.

Est ergo

AV ad VB ut R ad S,

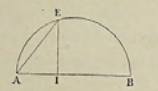
et patet propositum.

PROPOSITIO III.

« *Si sit positione data recta linea, et in ipsa datum punctum, a quo* » *ducatur quædam linea terminata, a termino autem ipsius ducatur et ad* » *positionem* (2), *et sit quod fit a ducta æquale ei, quod a data, et ab-* » *scissa, vel et ad punctum datum, vel ad alterum datum in linea data* » *positione, terminus ipsius positione datam circumferentiam continget.* »

Sit data recta AB (*fig.* 29) positione, et in ipsa datum punctum A. Oportet invenire circuli circumferentiam in qua sumendo quodlibet

Fig. 29.



punctum, ut E, et demittendo perpendicularem EI, quadratum AE sit æquale rectangulo sub data qualibet recta et AI (per quam debemus intelligere in hac propositione *abscissam ad datum punctum*).

Sit recta data AB. Super AB describatur semicirculus; patet, ex constructione, AB in AI æquari quadrato AE.

Sed alius casus est difficilior quando videlicet recta abscinditur ad aliud punctum quam A, ut in hoc exemplo.

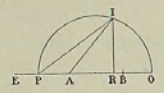
(1) C'est la réciproque qui est démontrée dans le premier lemme de Pappus (prop. 119), concernant le premier lieu d'Apollonius.

(2) Fermat a deviné le sens de ces mots inintelligibles : il faudrait « *ducatur perpendicularis ad positione datam* ».

Sint data duo puncta A, B (*fig.* 30), et præterea punctum E in eadem recta linea; recta vero data sit AB. Oportet invenire circuli circumferentiam, ut PIO, in qua sumendo quodlibet punctum, ut I, et demittendo perpendicularem IR, quadratum AI æquetur rectangulo sub recta AB data et recta ER.

Rectangulum BAE ad rectam BA applicetur excedens figura quadrata et faciat latitudinem AP, cui fiat æqualis BO. Super PO descriptus semicirculus præstabit propositum.

Fig. 30.



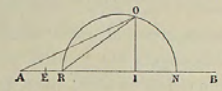
Nam quadratum AI æquatur quadrato AR et quadrato RI; quadratum vero RI æquatur rectangulo PRO, et rectangulum PRO rectangulis ARB, OAP hoc est BPA hoc est BAE, *ut mox demonstrabitur :* quadratum ergo AI æquatur quadrato AR, rectangulo ARB, et rectangulo BAE. Sive quadratum AI æquatur rectangulo BAR (nam huic rectangulo æquantur quadratum AR et rectangulum ARB) et rectangulo BAE; et adhuc hæc duo rectangula faciunt unum rectangulum sub BA in ER, quod proinde quadrato AI est æquale.

Probandum superest rectangulum PRO duobus rectangulis ARB et PBO æquale esse. — Nam, ducendo inter se partes, rectangulum PRO est æquale singulis rectangulis PA in RB, PA in BO (hoc est BO quadrato), AR in RB, AR in BO (id est PA in AR). Sed duo, PA in AR et PA in RB, æquantur PA in AB, sive AB in BO; una cum BO quadrato, æquantur AOB hoc est PBO; ergo rectangulum ARB, una cum rectangulo PBO, facit rectangulum PRO. Quod erat demonstrandum.

Diversos casus non prosequor, sed ex jam dictis facillimum erit : videtur tamen alius hujus propositionis casus non omittendus, quando videlicet punctum E ultra A ut superius non invenitur.

Sint data duo puncta A et E (*fig.* 31), et recta data AB, et sit invenienda circuli circumferentia, ut NOR, ita ut, sumendo quodlibet in ipsa punctum, ut O, et demittendo OI perpendicularem, quadratum AO sit æquale rectangulo sub BA in EI.

Fig. 31.



Rectangulum BAE ad rectam BA applicetur deficiens figura quadrata in R, et ipsi AR fiat æqualis BN. Super RN descriptus semicirculus præstabit propositum.

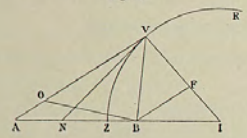
Demonstratio vero non est absimilis ei quam in priore casu attulimus.

PROPOSITIO IV.

« *Si a duobus punctis datis rectæ lineæ inflectantur, et sit quod ab una* » *efficitur eo, quod ab altera, dato majus quam in proportione, punctum* » *positione datam circumferentiam continget.* »

Sint duo puncta A et B (*fig.* 32), ratio data AI ad BI, spatium datum BAN (1). Inter NI et IB media sit IZ (2), cujus intervallo describatur circulus ZVR, in quo sumatur quodlibet punctum, ut V, et jungantur VA, VB : Aio quadratum AV quadrato VB majus esse quam in proportione data, IA ad BI, spatio dato BAN.

Fig. 32.



(1) Le troisième lemme de Pappus (prop. 121), relatif au second lieu, a pour effet de démontrer que AN doit être plus petit que AI.

(2) Les lemmes 5 et 6 de Pappus (prop. 123 et 124) ont pour objet de prouver que le point Z et son symétrique par rapport au centre I appartiennent au lieu cherché.

Nam fiat ipsi æquale rectangulum VAO, et jungantur OB, NV, VI, et ipsi AV parallela BF. Probandum est rectangulum AVO ad quadratum VB esse ut AI ad IB.

Est

ut NI ad IZ id est VI, ita VI ad IB,

et sunt circa eumdem angulum; ergo duo triangula NIV, VBI sunt similia, et angulus VNB angulo BVF æqualis. Sed angulus VNB angulo VOB est æqualis in eadem sectione, quum quatuor puncta N, B, V, O sint in circulo, propter æqualia rectangula BAN, VAO; ergo angulus VOB angulo BVF est æqualis. Sed et angulus OVB angulo VBF, propter parallelas; ergo duo triangula OBV, BVF sunt similia, et

ut OV ad BV, ita VB ad BF.

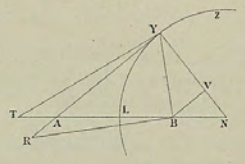
Addatur utrimque communis ratio AV ad VB; ergo ratio composita ex AV ad VB et ex VB ad BF, hoc est ratio AV ad BF, id est AI ad IB, erit eadem rationi < compositæ ex > AV ad VB et OV ad VB, hoc est rectanguli AVO ad quadratum VB. Quod demonstrare oportebat.

Videtur Pappus omisisse hoc loco propositionem huic similem quæ ita se habet :

Si a duobus punctis datis rectæ lineæ inflectantur, et sit quod ab una efficitur eo, quod ab altera, dato minus quam in proportione, punctum positione datam circumferentiam continget.

Sint data duo puncta A et B (*fig.* 33), ratio AN ad NB, spatium BAT.

Fig. 33.



Inter TN, NB esto media NL, cujus intervallo describatur circuli cir-

cumferentia LYZ, in qua sumpto quolibet puncto Y, jungantur YA, YB : Aio quadratum YA, una cum rectangulo BAT dato, ad quadratum YB esse ut AN ad NB.

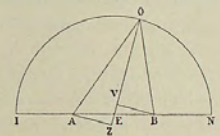
Nam fiat YAR æquale BAT, et jungantur TY, RB, YN, et ipsi AY parallela BV. Propter BAT, YAR æqualia rectangula, probabitur angulus YTB angulo YRB æqualis, et reliqua ut in superiore demonstratione.

PROPOSITIO V.

« *Si a quotcumque datis punctis ad punctum unum inflectantur rectæ* » *lineæ, et sint species, quæ ab omnibus fiunt, dato spatio æquales, punc-* » *tum continget positione datam circumferentiam.* »

Sint data duo primum puncta A, B (*fig.* 34), quæ per rectam AB conjungantur. Bifariam scindatur in E; centro E, intervallo quocumque,

Fig. 34.



ut EI, circulus describatur, ut ION : Dico, quodcumque punctum in ipsius circumferentia sumpseris, ut O, evenire ut quadrata AO, OB simul quadratorum IE, AE sint dupla (1).

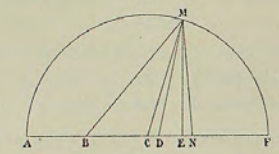
Nam, junctâ rectâ EO, in ipsam, BV, AZ perpendiculares demittantur. In triangulo AEO quadratum AO æquatur quadratis AE, EO et rectangulo OEZ bis; in triangulo OEB quadrata OE, EB æquantur quadrato OB, et rectangulo OEV bis sive OEZ bis (quum EV sit æqualis EZ, propter æquales AE, EB) : ergo, jungendo æqualia æqualibus, quadrata AO, OB et rectangulum OEZ bis æquantur quadratis AE, EB (sive qua-

(1) C'est le quatrième lemme de Pappus (prop. 122), sur le troisième lieu d'Apollonius: la démonstration de Fermat est différente.

drato EA bis), et quadrato EO bis (id est quadrato IE bis), una cum rectangulo OEZ bis. Auferatur utrimque OEZ bis; supererit verum quod asserebamus, et constat propositum in primo casu.

Sint data tria puncta B, D, E (*fig.* 35) in recta linea, et sit recta BD rectâ DE major; differentiæ inter BD et DE sit tertia pars CD. Centro C,

Fig. 35.



intervallo quocumque, ut CA, describatur semicirculus AMF : Aio quodcumque punctum in ipsius circumferentia sumpseris, ut M, eamdem semper fore summam trium quadratorum MB, MD, ME.

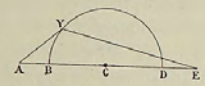
Nam jungantur MB, MC, MD, ME; ipsi vero CD fiat æqualis EN, et jungatur MN. Quum BD superet DE triplâ CD sive triplâ EN, ergo DN, una cum dupla CD, æquabitur BD; et CN, una cum CD, æquabitur BD. Auferatur utrimque CD; ergo CN æquabitur BC. Quum CD sit æqualis EN, per secundam hujus Libelli propositionem (1), idem erit semper excessus quadratorum CM, MN super duo quadrata DM, ME. Sed CM quadratum est semper idem : ergo duo quadrata DM, ME semper vel quadrato MN æqualia erunt vel in idem excedent vel in idem deficient. Addatur utrimque quadratum MB : ergo tria quadrata MB, MD, ME duobus quadratis BM, MN vel semper æqualia erunt vel in idem excedent vel in idem deficient. Sed BM, MN quadrata idem semper conflant spatium, ex superiori propositione, propter æqualitatem rectarum BC, CN : ergo quadrata BM, DM, EM idem semper spatium conficiunt. Quod erat demonstrandum.

(1) Fermat désigne ainsi sa proposition (p. 30, *fig.* 25), comme s'il avait fait un numérotage en dehors de celui des propositions de Pappus.

Demonstratio generalis ejusdem propositionis. — Exponantur primo duo puncta A et E (*fig.* 36), jungatur AE et bifariam dividatur in C; planum datum sit Z, quod necessario debet esse non minus quadratis duobus AC, CE, ut patet.

Si sit æquale illis duobus quadratis, punctum C tantum proposito satisfaciet, nec erit aliud punctum a quo junctarum ad puncta A, E quadrata simul sumpta æquentur Z plano.

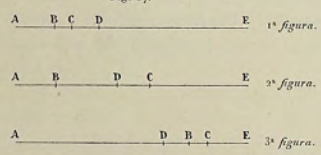
Fig. 36.



Si sit majus duobus quadratis AC, CE, excessûs dimidium æquetur quadrato CB. Centro C, intervallo CB, descriptus circulus satisfaciet proposito. Quod, tanquam a Pappo (1) demonstratum et ab aliis et proclive nimis, omittemus, ne in facilibus diutius immoremur.

Lemma ad generalem methodum. — Exponantur in 1a, 2a et 3a figura quotlibet puncta data A, B, C, E (*fig.* 37), et pro numero punctorum

Fig. 37.



sumatur rectarum, puncto A et reliquis datis terminatarum, pars conditionaria AD, quadrans nempe in hoc exemplo. Sit igitur AD pars quarta rectarum AB, AC, AE; puncti D diversa est positio prout variant casus : *Aio rectas, punctis datis et puncto* D *a parte puncti* A *termi-*

(1) *Voir* la note de la page 37.

nâtas, æquari rectis, punctis datis et puncto D *a parte puncti* E *terminatis :*

In 1a nempe figura, rectam ED æquari rectis AD, BD, CD;

In 2a figura, rectas ED, CD æquari rectis BD, AD;

Et in 3a figura, rectas ED, CD, BD æquari < rectæ > AD.

In 3a figura, ex hypothesi, quater AD æquatur rectis AB, AC, AE. Dematur utrimque AD ter : remanebit illinc AD semel; sed auferre AD ter ab ipsis AB, AC, AE, idem est atque auferre AD semel ab unaquaque ipsarum AB, AC, AE, quo peracto remanebunt istinc BD, CD, ED æquales AD. Quod erat demonstrandum.

Si darentur quinque puncta, AD quinquies esset conferenda cum quatuor rectis, punctis datis et puncto A terminatis : denique uniformi procederetur in infinitum methodo.

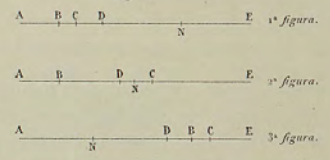
In 2a figura, AD quater æquatur rectis AB, AC, AE. Auferatur utrimque AD ter et addatur BD; remanebunt AD, BD æquales ED, CD.

In 1a figura, AD quater æquatur rectis AB, AC, AE. Addatur utrimque BD, CD et dematur AD ter; remanebunt rectæ AD, BD, CD æquales rectæ DE.

Nec dissimilis est in quotlibet in infinitum punctis methodus, idemque concludetur quacumque ratione varient casus.

Lemma alterum. — Exponatur in 1a figura constructio præcedens, et sumatur in eadem recta punctum N (*fig.* 38), utcumque : *Aio quadrata*

Fig. 38.



rectarum, punctis datis et puncto N *terminatarum, superare quadrata rectarum, punctis datis et puncto* D *terminatarum, quadrato* DN *toties*

sumpto quot sunt puncta data, quater nempe in hoc exemplo : — 2a et 3a figura varios casus repræsentant.

In 1a figura, quadrata AN, BN, CN superant quadrata AD, BD, CD, si unumquodque unicuique conferas, quadrato DN ter et rectangulis AD in DN bis, BD in DN bis, CD in DN bis; quadrata igitur AN, BN, CN æquantur quadratis AD, BD, CD, quadrato DN ter, et rectangulis AD in DN bis, DB in DN bis, et CD in DN bis : illud autem patet ex genesi quadrati a binomia radice affirmata effecti (1). Ex alia autem parte, quadratum EN æquatur quadratis ED, ND, minus ED in DN bis, illudque patet ex genesi quadrati a binomia radice negata effecti. Ergo quadrata quatuor AN, BN, CN, EN æquantur quadratis quatuor AD, BD, CD, ED, quadrato DN quater, rectangulis AD in DN bis, BD in DN bis, CD in DN bis, minus ED in DN bis. Si igitur probaverimus rectangula negata æquivalere affirmatis, manebit veritas propositionis stabilita : nempe quadrata AN, BN, CN, EN superare quadrata AD, BD, CD, ED quadrato DN quater.

Probandum igitur rectangulum ED in DN bis æquari rectangulis AD in DN bis, BD in DN bis, CD in DN bis, et, omnibus ad DN < bis > applicatis, rectam ED æquari rectis AD, BD, CD. Quod quidem ita se habere, superius lemma demonstravit.

Varios casus non moramur. — Si sint quinque puncta, quadrata, punctis datis et puncto N terminata, superabunt quadrata, punctis datis et puncto D terminata, quintuplo quadrati DN : nec differt a tradito casu ulterior demonstratio.

Inde patet summam quadratorum, puncto D terminatorum, esse minimam.

Dum tibi loquimur, scrupulosam nimis casuum observationem non adjungimus; conclusio secundi lemmatis semper eo deducetur, ut probentur rectangula omnia ex una parte affirmata æquari negatis ex altera, ideoque res ad primum lemma deducetur.

Propositio prima generalis. — Exponatur superior figura, et sint data

(1) Viète, *Ad logisticam speciosam notæ priores,* prop. XI (éd. Schooten, p. 16-18).

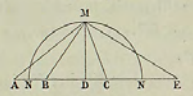
quatuor puncta in recta AE : A, B, C, E. Esto AD quarta pars (conditionaria nempe) rectarum AB, AC, AE, et sit datum Z planum. *Proponitur invenire circulum in quo sumendo quodlibet punctum et ab eo jungendo rectas ad puncta data, quadrata junctarum simul sumpta æquentur spatio dato.*

Z planum debet esse majus quatuor quadratis AD, BD, CD, ED, ut locum habeat propositio, ex superius demonstratis.

Æquetur igitur quatuor illis quadratis et præterea quadruplo quadrati DN. Centro D, intervallo DN, descriptus circulus præstabit propositum.

Nam sumatur primo punctum N ex utravis parte (*fig.* 39). Demonstratum est secundo lemmate quadrata AN, BN, CN, EN æquari qua-

Fig. 39.



dratis AD, BD, CD, ED et præterea quadrato DN quater. At quadrata AD, BD, CD, ED, una cum quadrato DN quater, æquantur Z plano; ergo quadrata quatuor AN, BN, CN, EN æquantur Z plano, hoc est spatio dato. Quod erat demonstrandum.

Excitetur deinde perpendicularis DM et jungantur AM, BM, CM, EM : Aio quatuor illa quadrata æquari spatio dato Z plano.

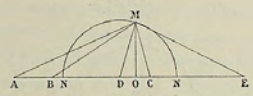
Nam

quadratum AM æquatur quadrato AD et quadrato DM,
quadratum BM æquatur quadrato BD et quadrato DM,
quadratum CM æquatur quadrato CD et quadrato DM,
quadratum EM æquatur quadrato ED et quadrato DM;

ergo quatuor quadrata AM, BM, CM, EM æquantur quadratis quatuor AD, BD, CD, ED, una cum quadrato DM (sive DN) quater. At quadrata AD, BD, CD, ED, una cum quadrato DN quater, æquantur Z plano seu spatio dato; ergo quadrata quatuor AM, BM, CM, EM æquantur spatio dato. Quod erat demonstrandum.

Sed sumatur ubicumque punctum M (*fig.* 40), a quo demittatur perpendicularis MO. — Similiter probabitur quadrata AM, BM, CM, EM æquari < quadrato OM quater, una cum > quadratis AO, BO, CO, EO quæ, ex secundo lemmate, æquantur quadratis AD, BD, CD, ED et præterea quadrato OD quater. Ergo quadrata quatuor AM, BM, CM, EM æquantur quadratis AD, BD, CD, ED, una cum quadrato OD quater et

Fig. 40.



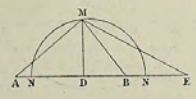
præterea quadrato OM quater. Sed quadratum OD quater, una cum quadrato OM quater, æquatur quadrato DM quater, sive quadrato DN quater : sunt enim DM, DN ex centro æquales inter se. Igitur quadrata AM, BM, CM, EM æquantur quadratis AD, BD, CD, ED, una cum quadrato DN quater, ideoque spatio dato Z plano sunt æqualia. Quod erat demonstrandum.

Si compleantur circuli, eadem demonstratio in aliis semicirculis locum habebit et ad quotlibet puncta eadem facilitate et argumentatione extendetur; semper enim toties sumentur quadrata DM, DN, DO, quot erunt puncta, nec fallet ratiocinatio.

Inde sequitur corollarium cujus usus in sequenti propositione.

Exponantur quotlibet puncta data, verbi gratia, tria A, B, E (*fig.* 41) et inveniendus circulus < sit > NM, in quo sumendo quodlibet punc-

Fig. 41.

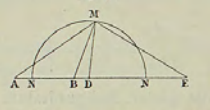


tum, ut M, et jungendo rectas AM, BM, EM, quadrati AM duplum (verbi gratia), una cum quadratis BM, EM, æquetur spatio dato.

Eo casu sumenda est ad constructionem recta AD pars quarta rectarum AB, AE, quia hoc casu punctum A gerit vicem duorum punctorum, et idem est ac si diceretur : datis punctis quatuor A, A, B, E, invenire circulum NM, in quo sumendo quodlibet punctum, ut M, quadrata quatuor AM, AM, BM, EM æquentur spatio dato.

Idem est intelligendum in alio quovis puncto et alia qualibet ratione multiplici. — Nam proponatur quadratum AM (*fig.* 42), una cum qua-

Fig. 42.

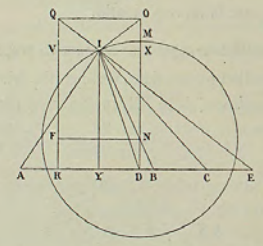


drato BM bis et quadrato EM, æquari spatio dato, sumenda est AD quarta pars rectarum AB bis et AE.

Quod advertisse et monuisse fuit necesse, nec indiget res majori explicatione.

Propositio altera. — Exponantur quotlibet puncta data in recta AE (*fig.* 43), quatuor, verbi gratia, A, B, C, E, *et punctum* Q *extra rectam*

Fig. 43.



AE. Quæritur circulus, ut MI, in quo sumendo quodlibet punctum, ut I, quadrata AI, BI, CI, EI, QI æquentur spatio dato.

Demittatur in rectam AE perpendicularis QR, et rectarum AR, AB, AC, AE sumatur pars conditionaria (quintans nempe in hac specie in qua dantur quinque puncta) AD, et excitata perpendiculari DO, demittatur in ipsam perpendicularis QO. Rectæ QR sumatur pars conditionaria (quintans nempe) RF sive DN, et sit spatium datum æquale quinque quadratis AD, RD, BD, CD, ED et præterea Z plano. Z planum æquetur < quadrato > DN quater (pro numero nempe punctorum in recta AE datorum), quadrato NO, et præterea quadrato NM (1) quinquies (pro numero omnium punctorum datorum) : Aio circulum centro N, intervallo NM, descriptum præstare propositum.

Sumatur in eo quodlibet punctum, ut I, et junctis AI, BI, CI, EI, QI, ducatur VIX parallela AE, et IY parallela OD. Patet quadratum DI quater, una cum quadrato OI, æquari Z plano, ex corollario præcedentis propositionis : punctum enim D gerit vicem quatuor punctorum. Quum igitur DN sit quintans OD, patet quadratum DI quater, una cum quadrato OI, æquari quadrato DN quater, quadrato ON, et quintuplo quadrati NM. Sed, per constructionem, quadratum DN quater, una cum quadrato ON et quintuplo quadrati NM, æquatur Z plano; ergo quadratum DI quater, una cum quadrato OI, æquatur Z plano.

Sed quadratum DI quater æquatur quadrato DX quater et quadrato XI quater, et quadratum OI æquatur quadrato OX et quadrato XI; ergo Z planum æquatur quadrato DX (sive IY) quater, quadrato XO (sive VQ) semel, et quadrato XI quinquies. Addantur utrimque quadrata quinque AD, RD, BD, CD, ED, fiet inde : spatium datum, hæc enim quinque quadrata cum Z plano, ex hypothesi, æquantur spatio dato; inde vero : quinque quadratis AI, BI, CI, EI, QI, quæ proinde æquabuntur spatio dato.

Hoc ut constet, ex secundo lemmate, quadrata AD, RD, BD, CD, ED, una cum quadrato DY quinquies, æquabuntur quadratis AY, RY, BY, CY, EY. Igitur quadrata AD, RD, BD, CD, ED, addita quadrato IY quater, VQ semel, et DY quinquies, æquabuntur quadratis AY, RY,

(1) Les lemmes 7 et 8 de Pappus (prop. 123 et 126) peuvent être rapportés à la détermination du point M.

BY, CY, EY, una cum IY quater et VQ semel. Singulis quadratis AY, BY, CY, EY addatur quadratum IY, fient quadrata AI, BI, CI, EI æqualia quadratis AY, BY, CY, EY et præterea quadrato IY quater; igitur quadrata AD, RD, BD, CD, ED, addita quadrato IY quater, VQ semel, et DY quinquies, æquabuntur quadratis AI, BI, CI, IE et præterea quadrato RY et quadrato VQ semel. Sed quadratum RY sive VI, una cum quadrato QV, æquatur quadrato QI; igitur quadrata AR, RD, BD, CD, $<$ED$>$, addita quadrato IY quater, VQ semel, et DY quinquies, æquabuntur quadratis AI, BI, CI, EI et QI.

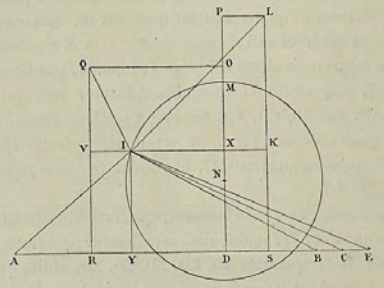
At probatum est quadrata illa omnia æquari spatio dato; ergo quadrata quinque AI, BI, CI, EI et QI æquantur spatio dato. Quod erat demonstrandum.

Inde facillime deducitur spatium datum æquari quadratis AN, BN, CN, EN, QN et quintuplo quadrati NM, quod tanquam facile prætermittimus.

Imo et ad quodlibet puncta producetur artificium eadem ratione.

Si enim dentur duo puncta Q et L (*fig.* 44) extra lineam, perfecta con-

Fig. 44.



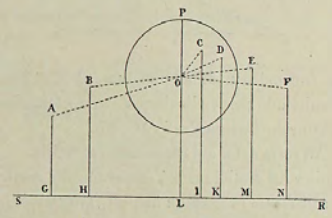
structione, ut vides, sumetur AD sextans rectarum AR, AS, AB, AC, AE; rectarum QR et LS sextans DN sumetur. Spatium datum fiet æquale

quadratis AD, RD, SD, BD, CD, ED, et præterea quadrato DN quater, NO semel, NP semel, et NM sexies; et reliqua perficientur eadem ratione, semperque punctum D vicem geret omnium punctorum in recta AE datorum, et puncta P, O vicem gerent datorum punctorum Q et L; et cætera in infinitum uniformi methodo conserventur, et demonstrabuntur.

Sed quoniam multiplices casus oriuntur ex diversa rectæ assumptæ, duo vel plura puncta contingentis, positione, dum puncta reliqua diversas ex parte qualibet rectæ assignatæ sortiuntur positiones, licet unicuique casui sua competant compendia, placet in artis specimen *generalius ostendere et construere*.

Dentur quotlibet puncta A, B, C, D, E, F (*fig.* 45), sive in eadem recta, sive in diversis. Sumatur in eodem plano recta quævis SR, ita

Fig. 45.



ut omnia puncta data sint ex una parte rectæ SR. Demissis perpendicularibus AG, BH, CI, DK, EM, FN, sumatur rectarum GH, GI, GK, GM et GN pars conditionaria $<$GL$>$, sextans nempe in hoc casu. Excitetur perpendicularis LO, a quo resecetur LO pars conditionaria, sextans nempe, rectarum AG, BH, CI, KD, EM, FN, et sit spatium datum æquale quadratis AO, BO, CO, DO, EO, FO et sextuplo quadrati OP; circulus centro O, intervallo OP, descriptus satisfaciet propositioni. — Nec difficilis est inventio ei qui superiores noverit.

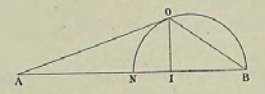
PROPOSITIO VI.

« *Si a duobus punctis datis inflectantur rectæ lineæ; a puncto autem ad* » *positione ductam lineam abscissa a recta linea positione data ad datum* » *punctum, et sint species ab inflexis æquales ei, quod a data, et abscissa* » *continetur, punctum ad inflexionem positione datam circumferentiam* » *continget.* »

Descripsi propositionem quemadmodum reperitur apud Pappum ex versione Federici Commandini, sed vel in textu græco vel in interpretatione mendum esse non dubito : sensum propositionis exponam (1).

Sint duo puncta A et B (*fig.* 46). Oportet invenire circumferentiam,

Fig. 46.



ut NOB, in qua sumendo quodlibet punctum, ut O, et jungendo rectas OA, OB, et demittendo perpendicularem OI, rectangulum sub recta data in AI æquetur duobus quadratis AO, OB.

Sit primum AB recta data, qui casus satis est facilis.

Sumatur ipsius AB dimidium BN, superque BN semicirculus describatur : Aio satisfacere proposito : hoc est, si sumatur, verbi gratia, punctum O, rectangulum BAI duobus quadratis AO, OB æquale esse.

Nam AO quadratum æquatur AI quadrato et IO quadrato. Si a rectangulo BAI auferatur quadratum AI et quadratum IO sive rectangulum < sub > BI in IN, superest rectangulum sub BI in AN sive in NB,

(1) La version de Commandin est inintelligible; le sens du texte de Pappus paraît être le suivant, plus général que celui adopté ici par Fermat :

Soient donnés deux points A et B, une longueur a, une droite OX et un point O sur cette droite, enfin une direction telle que OY, à laquelle soit parallèle MP passant par un point P de OX, le lieu du point M sera un cercle si

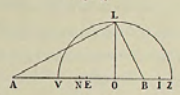
$$\overline{AM}^2 + \overline{MB}^2 = a \times OP.$$

quod probandum est esse æquale quadrato BO, et patet ex constructione ita se habere.

Secundus casus est quando recta data major est rectâ AB, cujus constructionem dabimus, modo recta data sit minor duplâ AB.

Sint data duo puncta A et B (*fig.* 47), et recta AI, duplâ AB minor ex hypothesi. Oportet facere quod proponitur.

Fig. 47.



Recta AB bifariam secetur in N, et fiat NE ipsius BI dimidia, quod ex constructione licet. Rectangulum IBN ad rectam BE applicetur excedens figura quadrata, et faciat latitudinem rectam EV, cui fiat æqualis recta BZ, et super VZ describatur semicirculus VLZ : Aio satisfacere proposito.

Nam, junctis LA, LB et demissa perpendiculari LO, cujus primus casus sit inter E et B, patet, ex demonstratis ad propositionem III Apollonii (1), rectangulum EOB, una cum rectangulo VEZ sive NBI, æquari quadrato OL. Addatur utrimque quadratum OB : rectangulum EBO, una cum NBI, æquabitur quadrato LO et quadrato OB. Duplicetur : rectangulum EBO bis, una cum rectangulo NBI bis sive solo ABI, æquabuntur quadratis LO, OB, bis. < Addatur utrimque rectangulum sub NE in OB bis : rectangula EBO bis et NE in OB bis >, sive AB in BO semel, una cum AB in BI, æquabuntur quadratis LO, OB, bis, una cum rectangulo sub NE in OB bis sive IBO semel, ex constructione. Utrimque auferatur quadratum OB : supererit AOB, una cum ABI, æquale quadrato LO bis, quadrato OB semel, et rectangulo IBO. Utrimque IB in BO auferatur, nempe illinc ex rectangulo ABI : supererit AO in OB, una cum AO in BI, sive solum rectangulum IOA æquale quadrato LO bis et quadrato OB semel. Addatur utrimque quadratum AO : erit rectan-

(1) Dans le présent livre, p. 34.

gulum IAO quadratis AO, OB, una cum LO quadrato bis, æquale, id est duobus tantum quadratis AL et LB. Quod erat faciendum.

Casus alios prætermitto.

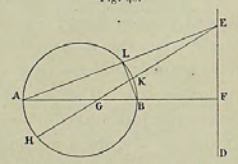
Propositio VII.

« *Si in circulo positione dato sit datum punctum, perque ipsum agatur* » *quædam recta linea, et in ipsa punctum extra sumatur; sit autem quod* » *fit a linea ducta usque ad punctum intra datum æquale ei quod a tota* » *et extra sumpta, vel soli, vel una cum eo quod duabus, quæ intra cir-* » *culum, portionibus continetur : punctum extra sumptum positione datam* » *rectam lineam continget.* »

Hæc propositio duas habet partes, quarum prior est apud ipsum Pappum (1), propos. 159 libri VII, secunda per additionem æqualium ex priore derivari facile potest : Pappi igitur demonstrationem tantum adducemus.

« Sit circulus circa diametrum AB (*fig.* 48), et AB producatur,

Fig. 48.



» sitque ad quamlibet rectam lineam DE perpendicularis. Rectangulo » autem AFB æquale ponatur quadratum ex FG : Dico, si quodcumque » sumatur punctum, ut E, atque ab eo ad punctum G recta linea » ducta producatur ad H, rectangulum etiam HEK quadrato ex EG » æquale esse. »

(1) Cette proposition de Pappus est le 33e lemme sur les *Porismes* d'Euclide. Fermat la reproduit textuellement d'après Commandin, mais en y intercalant le commentaire de ce dernier [alinéa mis entre crochets] et sauf une simplification apportée par lui à ce commentaire [texte en italique] : *voir* les variantes.

» Jungantur AE, BL. Erit angulus ad L rectus; sed id rectus qui » ad F; rectangulum igitur AEL est æquale et rectangulo AFB et qua- » drato ex FE. »

[« Quoniam enim angulus ALB rectus est æqualis recto AFE, *sunt* » *quatuor puncta* L, B, F, E *in circulo ac propterea* rectangulum FAB » æquale rectangulo EAL. Quadratum autem ex AE est æquale duobus » quadratis ex AF, FE; sed quadrato ex AE æqualia sunt utraque rec- » tangula AEL, EAL, et similiter quadrato ex AF æqualia utraque » rectangula AFB, FAB; ergo rectangula AEL, EAL æqualia sunt rec- » tangulis AFB, FAB, et quadrato ex FE. Quorum rectangulum FAB » est æquale rectangulo EAL : reliquum igitur rectangulum AEL rec- » tangulo AFB et quadrato ex FE æquale erit. »]

« Rectangulum autem AEL æquale est rectangulo HEK, et rectan- » gulum AFB quadrato ex FG : ergo rectangulum HEK quadratis ex EF, » FG, hoc est quadrato ex EG, est æquale. »

Propositio VIII et ultima.

« *Et si hoc quidem punctum contingat positione datam rectam lineam,* » *circulus autem non ponatur, quæ sunt ad utrasque partes dati puncti,* » *contingent positione eamdem datam circumferentiam.* »

Hæc propositio est conversa præcedentis et ex ea facile elici potest hujus demonstratio, si contraria via utamur.

Determinationes et casus non adjungimus, quia ex constructione et demonstratione satis patent.

DE CONTACTIBUS SPHÆRICIS.

Apollonii Pergæi doctrinam περὶ ἐπαφῶν restituit eleganter Apollonius Gallus aut sub illius nominis larva Franciscus ille Vieta Fontenæensis (1), cujus miræ in Mathematicis lucubrationes Veteri Geometriæ felices præstitere suppetias. Verum qui materiam hanc contactuum, quæ hactenus substitit in planis, ulterius promoverit et ad sphærica problemata evehere sit ausus, adhuc, quod sciam, exstitit nemo; præclara tamen inde problemata deduci et ad elegantem sublimiorum problematum constructionem facillime derivari patebit statim. Quærenda itaque sphæra quæ per data puncta transeat aut sphæras et data plana contingat. Quindecim problematis totum negotium absolvetur.

Problema I.

Datis quatuor punctis, sphæram invenire quæ per data transeat.

Dentur quatuor puncta N, O, M, F (*fig.* 49), per quæ sphæra describenda est.

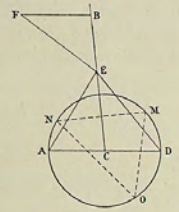
Sumptis ad libitum tribus N, O, M, circa triangulum NOM, quod in uno esse plano constat ex Elementis, describatur circulus NAOM, quem et magnitudine et positione dari perspicuum est. Esse autem circulum NAOM in superficie inveniendæ sphæræ patet ex eo quod, si sphæra plano secetur, sectionem dat circulum; at per tria puncta N, M, O unicus tantum circulus describi potest quem jam construximus : quum igitur tria puncta N, O, M sint in superficie sphæræ quæsitæ, ergo

(1) *Voir* plus haut, page 3, note 3.

planum trianguli NOM sphæram quæsitam secat secundum circulum NAOM, quem ideo in superficie sphæræ esse concludimus.

Sit ipsius centrum C, a quo ad planum circuli excitetur perpendicularis CEB; patet in recta CB esse centrum sphæræ quæsitæ. A puncto F in rectam CB demittatur perpendicularis FB, quam et positione et magnitudine dari perspicuum est. A puncto C ducatur ACD ipsi FB

Fig. 49 (1).



parallela; erit igitur angulus BCA rectus. Sed et recta BC est perpendicularis ad planum circuli; ergo recta ACD est in plano circuli, et datur positione; dantur itaque puncta A, D, in quibus cum circulo concurrit.

Ponatur jam factum esse, et centrum inveniendæ sphæræ esse E, quod quidem in recta CB reperiri jam diximus ex Theodosio (2). Junctæ rectæ FE, AE, ED erunt æquales, quum tria puncta, nempe F ex hypothesi et A et D ex demonstratis, sint in superficie sphærica. At tres rectæ FE, AE, ED sunt in eodem plano : quum enim rectæ FB, ACD sint parallelæ, erunt in eodem plano; sed et recta CB, ideoque tres FE,

(1) On a conservé, pour les figures de ce Traité, qui représentent des constructions dans l'espace, le mode de tracés suivi dans l'édition des *Varia*, quelque différentes que soient à cet égard les habitudes modernes.

(2) Theodosii Tripolitæ Sphæricorum Libri tres, nusquam antehac græce excusi. Iidem latine redditi per Joannem Penam, Regium Mathematicum. — Ad illustrissimum principem Carolum Lotharingum cardinalem. — Paris, André Wechel, 1558. — (Fermat cite ici le corollaire de I, 2.)

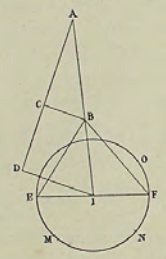
AE, DE. Si igitur circa tria puncta data A, F, D describatur circulus, ejus centrum E erit in recta CB, ac proinde et sphæræ quæsitæ centrum et sphæra ipsa non latebunt.

Problema II.

Datis tribus punctis et plano, invenire sphæram quæ per data puncta transeat et planum datum contingat.

Dentur tria puncta N, O, M (*fig.* 50), per quæ circulus descriptus MEON; erit ad superficiem sphæricam quæsitam, ex jam demonstratis, et in excitata ad planum circuli recta IBA invenietur centrum sphæræ

Fig. 50.



quam quærimus. Concurrat recta IBA cum plano dato in puncto A; dabitur igitur punctum A positione. A centro circuli MEON demittatur perpendicularis in planum datum ID; dabitur igitur punctum D, ideoque et recta AD positione et magnitudine, et pariter rectæ ID et IA. Dabitur igitur planum trianguli ADI positione; datur autem et planum circuli MON positione : ergo communis illorum planorum sectio FIE dabitur positione, ideoque dabuntur puncta E et F in circulo.

Sit factum et centrum sphæræ quæsitæ punctum B. Jungantur rectæ BE, BF, et rectæ ID parallela ducatur BC. Quum triangulum ADI et recta EIF sint in eodem plano, ergo rectæ EB, BF, BC erunt in eodem plano;

sed recta ID est perpendicularis ad planum datum : ergo recta BC, ipsi parallela, est etiam perpendicularis ad planum datum. Quum igitur sphæra describenda planum AD datum contingere debeat, ergo ab ipsius centro demissa in planum perpendicularis BC dabit punctum contactus C; rectæ igitur BC, BE, BF erunt æquales et probatum est eas esse in eodem plano positione dato, in quo et recta AD.

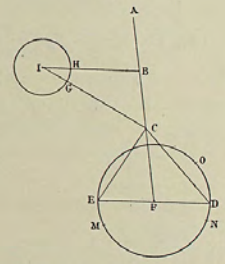
Eo itaque deducta est quæstio ut, datis duobus punctis E et F et recta AD in eodem plano, quæratur circulus qui per data duo puncta transeat et rectam datam contingat : cui problemati satisfecit Apollonius Gallus (1); dabitur igitur centrum sphæræ B et omnia constabunt.

Problema III.

Datis tribus punctis et sphæra, invenire sphæram quæ per data puncta transeat et sphæram datam contingat.

Dentur tria puncta M, N, O (*fig.* 51), et sphæra IG; datur cir-

Fig. 51.



culus MON in sphæra quæsita. Ad planum circuli erecta perpendicularis FCB, ut supra, continebit centrum sphæræ quam quærimus. A centro I sphæræ datæ demittatur in rectam FB perpendicularis IB, quæ

(1) Probl. II (Viète, édition Schooten, page 326).

dabitur positione et magnitudine. A centro F ipsi parallela ducatur ED, quæ erit ex jam demonstratis in plano circuli; et dabuntur puncta E et D.

Sit factum et centrum sphæræ quæsitæ C : ergo rectæ IC, CE, CD erunt in eodem plano, quod et datum est, quum dentur puncta I, E, D. Contactus autem duarum sphærarum est in recta ipsarum centra connectente : ergo tanget sphæra quæsita sphæram datam in puncto G; recta igitur IC superabit rectas CE, CD radio IG. Centro I, intervallo radii sphærici dati, describatur circulus in plano dato rectarum IC, CE, ED; transibit igitur per punctum G, et circulus ille positione et magnitudine dabitur; sed et puncta E et D in eodem plano.

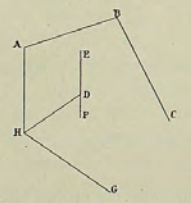
Eo itaque deducta est quæstio ut ex Apollonio Gallo (1) quæratur methodus qua, datis duobus punctis et circulo in eodem plano, inveniatur circulus qui per data duo puncta transeat et circulum datum contingat.

Problema IV.

Datis quatuor planis, invenire sphæram quæ data quatuor plana contingat.

Dentur quatuor plana AH, AB, BC, HG (*fig.* 52), quæ a sphæra quæsita contingi oporteat.

Fig. 52.

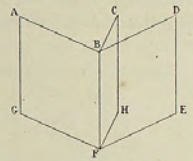


Sint duo plana AF, FD (*fig.* 53) quæ ab eadem sphæra contingantur. Bisecetur ipsorum inclinatio per planum BFHC; patet centrum

(1) Probl. VIII (Viète, édition Schooten, p. 333).

sphæræ quæ duo plana AF, FD contingit, esse in plano bisecante, ut videatur inutile in re tam proclivi diutius immorari. Si plana AF, FD essent parallela, sphæræ centrum esset in plano ipsis parallelo et intervallum ipsorum bisecante.

Fig. 53.



Hoc posito, propter plana CB, BA (*fig.* 52) positione data, < est centrum sphæræ quæsitæ ad planum positione datum, > quod nempe datorum CB, BA planorum inclinationem datam bisecat. Sed, propter duo plana BA, AH, est idem centrum sphæræ quæsitæ ad aliud planum positione datum; ergo communis sectio duorum planorum positione datorum, quorum alterum inclinationem planorum CB, BA, alterum inclinationem planorum BA, AH bisecat, dabit rectam positione datam, in qua inveniendæ sphæræ centrum erit. Sit illa recta FE; sed, propter duo plana AH, HG, est etiam centrum sphæræ quæsitæ ad aliud planum positione datum, cujus concursus cum recta FE positione data dabit punctum D, quod patet esse sphæræ quæsitæ centrum; et reliqua constabunt.

Problema V.

Datis tribus planis et puncto, invenire sphæram quæ per punctum datum transeat et plana data contingat.

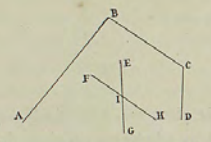
Sint data tria plana AB, BC, CD (*fig.* 54) et punctum H : quærenda sphæra quæ, data tria plana contingens, transeat per punctum H.

Sit factum : tria plana data, ex præcedentis propositionis ratiocinio, dabunt rectam positione datam, quæ sedes erit centri sphærici quæsiti.

Sit illa GE, in quam a puncto dato H demittatur perpendicularis HI, quæ et positione et magnitudine dabitur. Producatur ad F, ut sit IF æqualis IH; dabitur punctum F.

Quum autem sphæræ quæsitæ centrum sit in recta GE, ad quam ducta est perpendicularis HF bifariam secta in I, cujus unum ex extremis H est ad superficiem sphæricam ex hypothesi, erit et alterius extremum F etiam ad sphæricam superficiem. Imo et circulus, centro I,

Fig. 54.



intervallo IH descriptus in plano recto ad rectam GE, erit ad superficiem sphæræ; datur autem ille circulus positione et magnitudine. Dato autem circulo sphærico positione et magnitudine et aliquo plano ut AB, datur, ex facili propositionis secundæ hujus consectario, sphæra ad cujus superficiem sit circulus datus et quæ planum datum contingat; deducta est itaque quæstio ad secundam hujus, nec reliqua latebunt.

Problema VI.

Datis tribus planis et sphæra, invenire sphæram quæ datam sphæram et plana data contingat.

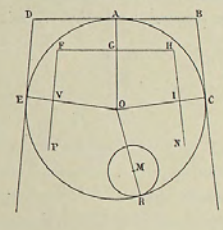
Dentur tria plana ED, DB, BC (*fig.* 55) et sphæra RM. Construenda est sphæra quæ datam sphæram et tria pariter plana contingat.

Sit factum et sphæra ERCA satisfaciat proposito, sphæram nempe in puncto R et plana in punctis E, A, C contingens. Sphæræ ERCA centrum sit O; junctæ RO, EO, AO, CO erunt æquales. Sed et recta OR transibit per datæ sphæræ centrum M, et rectæ EO, OA, OC erunt perpendiculares ad plana data DE, DB, BC. Fiant rectæ OM æquales rectæ

OV, OG, OI, et per puncta V, G, I intelligantur duci plana VP, GH, IN, datis ED, DB, BC parallela.

Quum recta OR æqualis sit OE, et ablata OM ablatæ OV, erit reliqua RM reliquæ VE æqualis; datur autem magnitudine RM, quum sit radius sphæræ datæ: datur igitur et VE magnitudine. Quum autem OE sit perpendicularis ad planum DE, erit etiam perpendicularis ad planum PV, plano DE parallelum; recta igitur VE erit intervallum planorum DE et PV. Sed datur VE magnitudine ex demonstratis; ergo datur planorum DE, PV intervallum. Sunt autem parallela hæc duo plana

Fig. 55.



et datur DE positione ex hypothesi; datur igitur et PV positione. Similiter probabitur plana GH, IN dari positione, et rectas OV, OG, OI ad ipsa esse perpendiculares et æquales rectæ OM. Sphæra igitur, centro O, intervallo OM descripta, plana PV, GH, IN positione data contingit. Datur autem punctum M, quum sit centrum sphæræ datæ.

Eo itaque deducta est quæstio ut, datis tribus planis PV, GH, IN et puncto M, inveniatur sphæra quæ per datum punctum M transeat et data plana PV, GH, IN contingat: hoc est, deducitur quæstio ad præcedentem.

Nec absimili in sequentibus artificio, quum nulla in datis puncta reperientur, sed sphæræ tantum aut plana, in locum unius ex sphæris punctum datum substituetur.

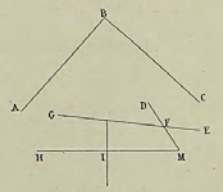
PROBLEMA VII.

Datis duobus punctis et duobus planis, invenire sphæram quæ per data puncta transeat et plana data contingat.

Dentur duo plana AB, BC (*fig.* 56), et duo puncta H, M. Quærenda sphæra quæ per puncta H et M transeat et plana AB, BC contingat.

Jungatur recta HM et bisecetur in I; punctum I dabitur. Per punctum I trajiciatur planum ad rectam HM rectum. Quum sphærica superficies puncta H, M contineat, certum est centrum sphæræ esse in plano ad rectam HM normali et per punctum I transeunte. Datur autem hoc planum positione, quum recta HM et punctum I sint data positione; ergo centrum sphæræ, propter puncta H et M, est ad planum datum.

Fig. 56.



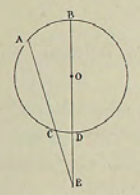
Sed et propter plana AB, BC, ut jam superius demonstravimus, est ad aliud planum datum : ergo est ad rectam positione datam. Sit illa GE, in quam demissa ab uno ex punctis datis M recta MF < perpendicularis > dabitur positione et magnitudine; et continuatâ in D, ut sit FD æqualis ME, erit punctum D datum et, ex superius demonstratis, erit etiam ad sphæricam superficiem. Dantur itaque tria puncta H, M, D, per quæ sphæra quæsita transit; datur etiam planum AB, quod ab eadem sphæra contingi debet : deducta est itaque quæstio ad problema secundum hujus.

Priusquam progrediamur ulterius, præmittenda lemmata quædam facillima.

LEMMA I. — Sit circulus BCD (*fig.* 57), extra quem sumpto quolibet puncto E, trajiciatur per centrum recta EDOB. Ducatur quælibet ECA; patet ex Elementis rectangulum AEC æquari rectangulo BED.

Sit jam sphæra circa centrum O, cujus maximus circulus sit ACDB; si ab eodem puncto E per quodlibet punctum superficiei sphæricæ trajiciatur recta ECA, donec sphæræ ex altera parte occurrat, rectangulum AEC erit similiter æquale rectangulo BED.

Fig. 57.



Si enim intelligatur circa rectam immobilem BDE converti et circulus et recta ECA simul, non immutabuntur rectæ EC et EA, quum puncta C et A circulos describant ad axem rectos, nec idcirco rectangulum AEC; erit itaque in quocumque plano æquale rectangulo BED.

LEMMA II. — Sint duo circuli in eodem plano ADE, HLO (*fig.* 58). Per centra ipsorum trajiciatur recta ACMP, et fiat

ut radius AC ad radium HM, ita recta CP ad rectam MP,

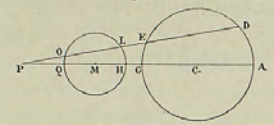
et a puncto P ducatur ad libitum recta POLED, ambos circulos secans in punctis O, L, E, D. Demonstravit Apollonius Gallus (1) rectangula APQ, GPH esse æqualia, et ipsorum cuilibet æquari rectangula DPO, EPL.

In sphæricis idem quoque verum esse sequentium problematum

(1) VIÈTE (édition Schooten, pages 334-335, lemmes I et II) démontre seulement, de fait, que APQ = DPO et GPH = EPL. Mais l'égalité APQ = GPH se déduit aisément de l'hypothèse $\frac{AC}{HM} = \frac{CP}{MP}$.

interest; patet autem ex eo quod, si circa axem AP immobilem tam circuli duo quam recta POLED eodem tempore convertantur, non immutabuntur rectæ PO, PL, PE, PD, propter allatam in superiori lem-

Fig. 58.



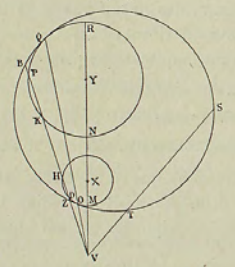
mate rationem, nec idcirco rectangula; et in quocumque plano constabit propositum.

Lemma III. — Sint duæ sphæræ datæ YN, XM (*fig.* 59), per quarum centra trajiciatur recta RYNXMV, et fiat

ut radius YN ad radium XM, ita recta YV ad rectam VX.

A puncto V ducatur in quolibet plano recta VTS, et sit rectangulum

Fig. 59.



SVT æquale rectangulo RVM. Si describatur sphæra quævis quæ per puncta T, S transeat et unam ex duabus datis contingat, alteram quoque continget.

Sit enim sphæra OTS, per puncta T et S descripta et sphæram MX

in puncto O contingens, aio sphæram YN etiam a sphæra OTS contactam iri.

Producatur recta VO, donec sphæræ OTS occurrat in Q : rectangulum igitur QVO, ex primo lemmate, est æquale SVT. Sed rectangulum SVT, ex constructione, est æquale rectangulo RVM cui, ex secundo lemmate, est æquale rectangulum sub VO et rectâ per puncta V et O ad superficiem sphæricam sphæræ YN productâ : ergo punctum Q est ad superficiem sphæræ YN; commune igitur est et superficiei sphæræ YN et superficiei sphæræ OTS.

Aio has duas sphæras in puncto eodem Q se contingere. Ducatur enim a puncto V quælibet recta in quolibet plano $<$ per quodlibet punctum $>$ sphæræ OTS, et sit, verbi gratia, VZ, quæ producta secet sphæras tres in punctis Z, D, H, K, P, B. Rectangulum ZVB in sphæra OTS, per primum et secundum lemma, est æquale DVP rectangulo, sphæris duabus XM et YN terminato. Sed DV est major rectâ VZ; quum enim sphæra OTS tangat exterius sphæram XM in puncto O, recta secans sphæram OTS prius ipsi occurret quam sphæræ XM. Quum ergo probatum sit rectangulum DVP æquari rectangulo ZVB, et recta ZV sit minor rectâ DV, ergo recta PV erit minor rectâ BV; punctum igitur B extra sphæram YN cadet.

Simili ratiocinio concludetur omnia puncta sphæræ ambientis exterius cadere, præter punctum Q. Tangit igitur sphæra OTS sphæram YN; quod erat demonstrandum.

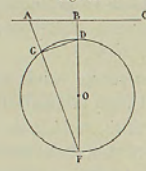
Nec absimilis aut difficilior in contactibus interioribus et in omnibus casibus demonstratio.

Lemma IV. — Sit planum AC (*fig.* 60) et sphæra DGF, cujus centrum O. Per centrum O ducatur FODB perpendicularis ad planum, et a puncto F ducatur recta quævis ad planum, sphæram secans in G et planum in A. Aio rectangulum AFG æquari rectangulo BFD.

Nam secentur sphæra et planum datum per planum trianguli ABF, et fiat circulus GFD in sphæra, in plano autem recta ABC. Quum recta FB sit perpendicularis ad planum AC, erit etiam perpendicularis ad

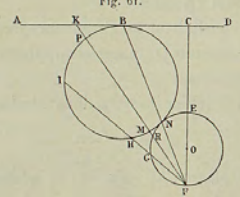
rectam AC. Habemus igitur circulum DGF et rectam AC in eodem plano, et rectam FDB, per centrum circuli transeuntem, ad AC perpendicularem. Jungatur GD; anguli ad G et ad B sunt recti : ergo quadrilaterum ABDG est in circulo, ideoque rectangulum AFG æquale est rectangulo BFD. Quod etiam in quavis alia sphæræ sectione similiter demonstrabitur.

Fig. 60.



Lemma V. — Sit planum ABD (*fig.* 61) et sphæra EGF, cujus centrum O. Per centrum O trajiciatur recta FOEC perpendicularis ad planum, et in quovis alio plano ducatur recta FGHI, sitque rectangulum IFH æquale rectangulo CFE. Si per puncta I, H describatur sphæra quæ planum AC contingat, eadem sphæra tanget sphæram EGF.

Fig. 61.



Intelligatur construi sphæra IHB, quæ, per puncta I et H transiens, tangat planum AC in puncto B : Aio sphæram EGF contingi a sphæra IHB.

Jungatur recta FB et rectangulo CFE fiat æquale rectangulum BFN; punctum N, per præcedentem, erit ad superficiem sphæræ EGF.

Sed et rectangulum CFE, ex constructione, est æquale rectangulo IFH; rectangula igitur IFH, BFN sunt æqualia, ideoque punctum N est etiam ad superficiem sphæræ IBH.

Probandum jam sphæram EGF a sphæra IBH in puncto N contingi : quod quidem facile est. A puncto enim F, per quodlibet punctum sphæræ EGF, ducatur recta FR, quæ sphæram IBH in M et P et planum AC in K secet. Rectangulum KFR, ex præcedente lemmate, æquatur rectangulo CFE, cui ex constructione æquatur rectangulum IFH, ideoque PFM. Rectangula igitur KFR et PFM sunt æqualia; sed recta KF est major rectâ FP, quia sphæra IBH tangit planum AC in B : ergo recta FR est minor rectâ FM. Punctum igitur R est extra sphæram IBH.

Idem de quocumque alio puncto, in quovis plano, sphæræ EGF, ex utraque puncti N parte, probabitur; manifestum itaque sphæram EGF a sphæra IBH in puncto N contingi.

Hæc lemmata, licet sint facilia, pulcherrima tamen sunt, tertium præsertim et quintum : in tertio quippe infinitæ sunt sphæræ quæ per puncta T et S transeuntes sphæram XM contingunt, sed omnes illæ in infinitum tangent quoque ex demonstratis sphæram YN; in quinto autem lemmate infinitæ sunt sphæræ quæ, per puncta I et H transeuntes, planum AC contingunt, sed omnes illæ pariter in infinitum sphæram EGF ex demonstratis contingent. His suppositis, reliqua problemata facile exsequemur.

Problema VIII.

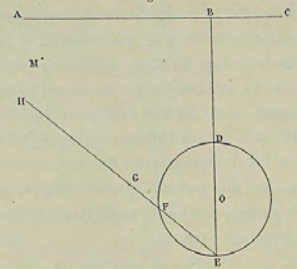
Datis duobus punctis, plano et sphæra, invenire sphæram quæ per data puncta transeat et sphæram ac planum datum contingat.

Sit datum planum ABC (*fig.* 62), sphæra DFE et puncta H, M. Per centrum sphæræ datæ O in planum ABC datum demittatur perpendicularis EODB; jungatur HE, et rectangulo BED fiat æquale rectangulum HEG; dabitur itaque punctum G.

Datis tribus punctis H, G et M et plano ABC, quæratur sphæra, per secundum problema hujus, quæ per data tria puncta transeat et planum ABC datum contingat.

Sphæra illa satisfaciet proposito : transit quippe per data duo puncta H et M, et planum ABC tangit ex constructione; sed et sphæram DFE contingit, ex quinto lemmate. Nam quum rectangulum HEG æquetur

Fig. 62.

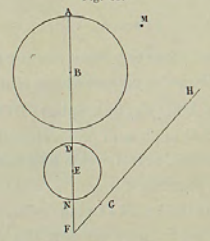


rectangulo BED, omnis sphæra quæ, per data duo H et G puncta transiens, planum ABC tangit, sphæram quoque DEF contingit.

Problema IX.

Datis duobus punctis et duabus sphæris, invenire sphæram quæ per data duo puncta transeat et sphæras datas contingat.

Fig. 63.



Sint datæ duæ sphæræ AB, DE (*fig.* 63) et puncta data H et M. Tra-

jiciatur recta AF per centra sphærarum datarum, et

ut radius AB ad radium DE, ita fiat recta BF ad FE;

dabitur punctum F. Fiat rectangulo NFA æquale rectangulum HFG; dabitur punctum G.

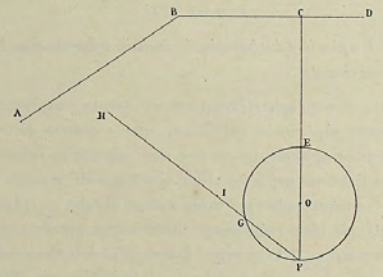
Jam datis tribus M, G, H punctis et sphæra DN, quæratur sphæra quæ per data tria puncta transeat et sphæram DN datam contingat, cui problemati satisfaciet tertium problema hujus : continget quoque sphæram <AB> ex tertio lemmate, ideoque proposito satisfaciet.

Problema X.

Dato puncto, duobus planis et sphæra, invenire sphæram quæ per datum punctum transeat et sphæram ac data duo plana contingat.

Sint duo plana AB, BD (*fig.* 64), sphæra EGF, punctum H. Per punctum O, centrum sphæræ datæ, in quodlibet ex planis demittatur perpendicularis CEOF, et rectangulo CFE fiat æquale rectangulum HFI.

Fig. 64.



Datis duobus punctis H et I et duobus planis AB, BD, quæratur, per septimum problema hujus, sphæra quæ per data duo puncta transeat et duo plana data contingat : continget quoque ex quinto lemmate sphæram, et proposito satisfaciet.

PROBLEMA XI.

Dato puncto, plano et duabus sphæris, invenire sphæram quæ per datum punctum transeat et planum ac sphæras duas datas contingat.

Deducetur statim quæstio simili præcedentibus ratiocinio ad problema VIII, *Datis duobus punctis, plano et sphæra*, idque beneficio lemmatis V. Quod si libeat uti lemmate III, deducetur quæstio pariter ad idem problema, alio medio et alia constructione.

PROBLEMA XII.

Dato puncto et tribus sphæris, invenire sphæram quæ per datum punctum transeat et sphæras datas contingat.

Huic quoque figuram non assignamus : statim quippe, beneficio lemmatis III, deducetur quæstio ad problema IX, *Datis duobus punctis et duabus sphæris etc.*

PROBLEMA XIII.

Datis duobus planis et duabus sphæris, invenire sphæram quæ data plana et sphæras contingat.

Sit factum. Si ergo sphæricæ superficiei inventæ imaginemur aliam ejusdem centri superficiem parallelam, quæ a quæsita distet per radium minoris ex sphæris, tanget hæc nova superficies sphærica plana quæ a datis distabunt per intervallum ejusdem radii minoris ex sphæris; tanget quoque sphæram cujus radius distabit a radio majoris sphæræ datæ per idem radii minoris intervallum, quæque erit majori sphæræ concentrica. Dabitur ergo; dabuntur et duo plana datis parallela et per radium minoris ex sphæris ab ipsis distantia. Transibit et hæc nova superficies sphærica per centrum minoris ex sphæris datis, quod quidem datum est; pari igitur quo usi jam sumus in problemate VI artificio, deducetur quæstio ad problema X, *Dato puncto, duobus planis et sphæra, invenire etc.*

PROBLEMA XIV.

Datis tribus sphæris et plano, invenire sphæram quæ sphæras et planum datum contingat.

Simili qua usi sumus via in præcedente et sexto problemate, deducetur quæstio ad problema XI, *Dato puncto, plano, et duabus sphæris etc.*

PROBLEMA XV.

Datis quatuor sphæris, invenire sphæram quæ datas contingat.

Sit factum : et, qua usus est methodo Apollonius Gallus (1) ut problema de tribus circulis ad problema de puncto et duobus circulis deduceret, eadem et simili præcedentibus famosum hoc et nobile problema ad XII, *Datis tribus sphæris et puncto*, deducemus.

Constabit ex omni parte propositum, et illustre accedet Apollonio Gallo complementum. Casus varios, determinationes, et minuta negleximus, ne in immensum excresceret sphæricus de contactibus tractatus.

(1) Probl. X (VIÈTE, édition Schooten, p. 356).

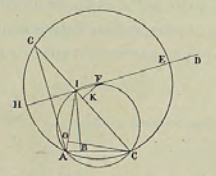
FRAGMENTS GÉOMÉTRIQUES.

SOLUTIO PROBLEMATIS A DOMINO PASCAL PROPOSITI [1].

Proposuit Dominus Pascal hoc problema : *Dato trianguli angulo ad verticem et ratione quam habet perpendiculum ad differentiam laterum, invenire speciem trianguli.*

Exponatur recta quævis data AC (*fig.* 65), super quam portio cir-

Fig. 65.



culi AIFC capax anguli dati describatur. Eo quæstionem deduximus ut, data basi AC, angulo verticis AIC, et ratione quam habet perpendiculum ad differentiam laterum, quæratur triangulum.

Ponatur jam factum esse et triangulum quæsitum esse AIC. Demittatur perpendiculum IB et, diviso arcu AFC bifariam in F, jungantur

[1] Cette pièce et la suivante ont été publiées par Bossut, l'éditeur des *Œuvres de Pascal*, 1779 (t. IV, p. 449-454), avec la note suivante : *On a trouvé, parmi les papiers de Pascal, ces deux porismes et le problème suivant, écrits de la main de Fermat; on croit que le lecteur les verra ici avec d'autant plus de plaisir qu'ils n'avoient pas encore été imprimés.*

Nous avons interverti l'ordre des deux pièces, pour rapprocher les deux porismes du Traité de Fermat sur ce sujet. Il est certain, au reste, que l'auteur du problème est Étienne Pascal (le père).

AF, FC [1] et, juncta IF, demittantur in rectas AI, IC perpendiculares CO, FK. Deinde centro F, intervallo AF, describatur circulus AHGEC, cui rectæ CI, IF continuatæ occurrant in punctis G, H, E; denique jungatur GA.

Angulus AFC ad centrum duplus est anguli AGC ad circumferentiam; sed angulus AIC æquatur angulo AFC in eadem portione : igitur angulus AIC duplus est anguli AGC. Sed angulus AIC æquatur duobus angulis AGC, IAG : igitur anguli IGA, IAG sunt æquales, ideoque rectæ IA, IG. Sed, quum a centro F in rectam GC cadat perpendicularis FK, æquales sunt GK, KC, ideoque KI est dimidia differentia inter rectas CI, IG, hoc est inter rectas CI, IA.

Data est autem ratio perpendiculi IB ad differentiam laterum CI, IA : ergo datur ratio BI ad IK et, singulis in rectam AC ductis, data est ratio rectanguli sub AC in BI ad rectangulum sub AC in IK. Sed rectangulum sub AC in BI æquatur rectangulo sub AI in CO; est enim utrumque duplum trianguli AIC : ergo ratio rectanguli sub AI in CO ad rectangulum sub AC in IK data est.

Datur autem ex hypothesi angulus AIC et rectus est COI ex constructione : ergo datur specie triangulum COI; ratio igitur CO ad CI data est, ideoque rectanguli sub AI in CO ad rectangulum sub AI in IC ratio datur. Sed probavimus rationem rectanguli sub AI in CO ad rectangulum sub AC in IK dari : ergo datur ratio rectanguli AIC ad rectangulum sub AC in IK.

Jam in triangulo AFC datur angulus AFC ex hypothesi : ergo angulus FAC datur, cui æqualis CIF idcirco dabitur. Est autem rectus angulus FKI : ergo triangulum FIK datur specie, ideoque rectæ KI ad IF ratio data est, ideoque rectanguli $<$sub$>$ AC in IK ad rectangulum sub AC in IF datur ratio. Probatum est autem dari rationem rectanguli AI in IC ad rectangulum AC in IK : ergo datur ratio rectanguli AI in IC ad rectangulum AC in IF. Est autem rectangulum CIG æquale rectangulo CIA, quia rectæ IG, IA sunt æquales, et rectan-

[1] Dans les deux figures données par Bossut, les lignes auxiliaires AF, FC sont effectivement tracées; on les a supprimées, pour rendre moins compliquées les *fig.* 65 et 66.

gulo CIG æquatur rectangulum HIE : ergo ratio rectanguli HIE ad rectangulum sub AC in IF data est.

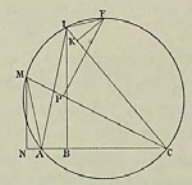
Sit data ratio ED ad AC; quum igitur AC sit data, dabitur ED, quæ ponatur rectæ HE in directum ut in figura prima. Rectangulum igitur HIE ad rectangulum AC in IF est in ratione data ED ad AC; sed, ut DE ad AC, ita DE in IF ad AC in IF : igitur, ut rectangulum HIE est ad rectangulum AC in IF, ita rectangulum DE in IF ad rectangulum AC in IF : rectangulum igitur DE in IF æquatur rectangulo HIE.

Probatum est triangulum AFC dari specie; sed datur basis AC magnitudine : ergo datur AF, ideoque dupla ipsius EH datur.

Æqualibus rectangulis DE in IF et HIE addatur rectangulum sub DE in IH : fiet rectangulum sub DE in FH æquale rectangulo DIH. Datur autem rectangulum sub DE in FH, quia utraque rectarum DE, FH datur : datur igitur rectangulum DIH et ad datam magnitudinem DH applicatur deficiens figura quadrata; ergo recta IH datur, ideoque reliqua IF. Datur autem punctum F positione : ergo datur et punctum I et totum triangulum AIC.

Non est difficilis ab analysi ad synthesin regressus; sed, ut omne dubium tollatur, probatur facillime triangulum quæsitum esse simile invento AIC in secunda figura (*fig.* 66) : triangulum autem AIC ex

Fig. 66.



utravis parte puncti F verticem habere potest in æquali a puncto F utrimque distantia; erit enim idem specie et magnitudine, et positio variabit.

Si enim triangulum quæsitum non est simile invento, manente eadem

basi, ejus vertex vel ibit inter puncta F et I, vel inter puncta I et A; ex utravis parte nihil interest, nam de parte FC idem secundum triangulum AIC pari demonstratione concludit.

Sit primum vertex inter A et I et triangulum quæsitum ponatur, si fieri potest, simile triangulo AMC. Jungatur FM et demittatur perpendicularis FP. Erit ratio perpendiculi MN ad MP data ex hypothesi, ideoque æqualis rationi IB ad IK quam probavimus datæ æqualem : quod est absurdum.

Quum enim in triangulo FMP angulus ad M æquatur angulo ad I trianguli IFK, erunt similia triangula FIK, FMP. Sed FM est major FI : ergo MP est major IK. Est autem MN minor IB : non igitur eadem potest esse ratio MN ad MP quæ IB ad IK.

Si punctum M sit inter I et F, probabitur augeri perpendiculum et minui differentiam laterum, idque eadem argumentatione, ideoque variare proportionem. Si punctum M sit in portione FC, utemur secundo triangulo AIC et erit eadem demonstratio, ut inutile sit diutius in his casibus immorari.

Constat igitur triangulum quæsitum invento AIC esse simile, et patet proposito esse satisfactum.

Proponitur, si placet, tam Domino Pascal quam Domino Roberval solvendum hoc problema :

Ad datum punctum in helice Baliani (1) *invenire tangentem.*

Quænam autem sit hujusmodi helix novit Dominus Roberval.

Hujus problematis a nobis soluti solutionem a viris eruditissimis exspectamus aut, si maluerint, ipsis impertiemur, imo et generalem de linearum curvarum contactibus methodum.

Sed ne a præsenti materia triangulari vacuis manibus discessisse videamur, proponi possunt hæ quæstiones :

Data basi, angulo verticis, et aggregato perpendiculi et differentiæ laterum, invenire triangulum.

(1) *Voir* la Lettre de Fermat à Mersenne, du 3 juin 1636.

Data basi, angulo verticis, et differentia perpendiculi et differentiæ laterum, invenire triangulum.

Data basi, angulo verticis, et rectangulo sub differentia laterum in perpendiculum, invenire triangulum;

Data basi, angulo verticis, et summa quadratorum perpendiculi et differentiæ laterum, invenire triangulum;

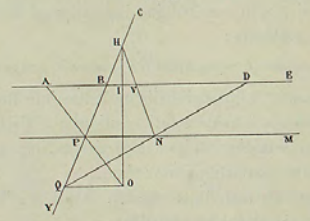
et multæ similes, quarum enodationes facilius inventuros viros doctissimos existimo, quam de contactu helicis Baliani propositum problema aut theorema.

Sed observandum in quæstionibus de triangulis, quoties problema poterit solvi per plana, non recurrendum ad solida. Quod quum norint viri doctissimi, supervacuum fortasse subit addidisse.

PORISMATA DUO (1).

Porisma I. — *Datis positione duabus rectis* ABE, YBC (*fig.* 67) *sese in puncto* B *secantibus, datis etiam punctis* A *et* D *in recta* ABE, *quæruntur*

Fig. 67.



duo puncta, exempli gratia, O *et* N, *a quibus si ad quodlibet rectæ* YBC

(1) Cette pièce, conservée, comme la précédente, dans des papiers de Pascal aujourd'hui perdus, est un premier essai de l'opuscule suivant, où l'on retrouvera les deux mêmes propositions, comme *Porisma primum* et *Porisma quintum*.

punctum, ut H, *recta* OHN *inflectatur, rectam* ABD *in punctis* I *et* V *secans, rectangulum sub* AI *in* DV *æquetur spatio dato, videlicet rectangulo sub* AB *in* BD.

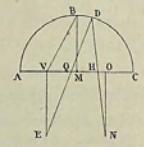
Ita procedit porismatica Euclidis constructio et generalissimam problematis solutionem repræsentabit.

Sumatur punctum quodvis O. Jungatur recta AO secans rectam YBC in puncto P. A puncto O ducatur recta OQ ipsi ABD parallela et rectæ YBC occurrens in Q. Ducatur etiam infinita PNM eidem ABD parallela, et juncta QD secet rectam PNM in puncto N. Aio duo puncta O et N adimplere propositum.

Sumpto quippe ubilibet in recta YBC puncto H, et ductis rectis OH, NH rectæ ABD occurrentibus in punctis I et V, rectangulum sub AI in DV in quibuslibet omnino casibus (tres tantum triplex (1) figura repræsentat) rectangulo < sub > AB in BD æquale erit.

Porisma II. — *Dato circulo* ABDC (*fig.* 68), *cujus diameter* AC, *centrum* M, *quæruntur duo puncta, ut* E *et* N, *a quibus si ad quodvis circumferentiæ punctum, ut* D, *inflectatur recta* EDN, *diametrum in punctis* Q *et* H *secans, summa quadratorum* QD *et* DH *ad triangulum* QDH *habeat rationem datam, idemque in qualibet inflexione generaliter et perpetuo contingat.*

Fig. 68.



A centro M excitetur ad diametrum perpendicularis MB. Fiat ratio data eadem quæ quadruplæ rectæ BV ad rectam VM. A puncto V exci-

(1) Bossut a reproduit, en effet, trois figures dont nous ne donnons ci-dessus que la première; les deux autres en diffèrent en ce que le point arbitraire H est pris, dans la seconde, entre P et B; dans la troisième, entre P et Q.

tetur VE ad diametrum perpendicularis et ipsi VB æqualis. Sumptâ rectâ MO ipsi MV æquali, fiat ON æqualis et parallela rectæ VE : Dico puncta quæsita esse puncta E et N.

Sumpto quippe quovis in circumferentia puncto, ut D, et junctis ED, ND rectis diametrum in punctis Q et H secantibus, summa quadratorum QD et DH ad triangulum QDH erit, in quocumque casu, in ratione data, hoc est in ratione quadruplæ BV ad rectam VM.

Non solum proponitur inquirenda istius porismatis demonstratio, sed videant etiam subtiliores mathematici an duo alia puncta præter E et N possint problemati proposito satisfacere, et utrum solutiones quæstionis sicut in primo porismate suppetant infinitæ. Si nihil respondeant, Geometriæ in hac parte laboranti non dedignabimur opitulari.

PORISMATUM EUCLIDEORUM

RENOVATA DOCTRINA ET SUB FORMA ISAGOGES RECENTIORIBUS GEOMETRIS EXHIBITA.

Enumeravit Pappus initio libri septimi libros veterum Geometrarum ad τόπον ἀναλυόμενον pertinentes : qui omnes quum temporis injuria perierint, exceptis unico Datorum Euclidis libello et quatuor prioribus Conicorum Apollonii, elaborandum neotericis Geometris maxime fuit ut damnum operum, quæ tentavit « edax abolere vetustas », aliquantisper resarcirent. Et primo quidem subtilissimus ille, nec unquam satis laudatus Franciscus Vieta Apollonii Περὶ ἐπαφῶν libros unico, quem Apollonium Gallum inscripsit, libello feliciter restituit; cujus exemplo se ad eamdem provinciam Marinus Ghetaldus et Wilebrordus Snellius accingere non dubitarunt, nec defuit proposito eventus : libros enim Apollonii Λόγου ἀποτομῆς, Χωρίου ἀποτομῆς, Διωρισμένης τομῆς et Νεύσεων, illorum beneficio vix amplius desideramus. Sequebantur Loci plani, Loci solidi, et Loci ad superficiem. At huic quoque parti

non ignoti nominis Geometræ (1) succurrerunt, eorumque opera, manuscripta licet et adhuc inedita, latere non potuerunt.

Sed supererat tandem intentata ac velut desperata Porismatum Euclideorum doctrina. Eam quamvis « opus artificiosissimum ac perutile ad resolutionem obscuriorum problematum » Pappus asserat, nec superioris nec recentioris ævi Geometræ vel de nomine cognoverunt, aut quid esset solummodo sunt suspicati. Nobis tamen in tantis tenebris dudum cæcutientibus, et qua ratione in hac materia Geometriæ opitularemur elaborantibus, tandem

se clara videndam
Obtulit et pura per noctem in luce refulsit;

nec debuit inventi novantiqui specimen posteris invideri. Postquam enim Suevicum sidus (2) omnibus disciplinis illuxit, frustra scientiarum arcana tanquam mysteria quædam abscondemus : nihil quippe impervium perspicacissimo incomparabilis Reginæ ingenio, nec fas censemus occultare doctrinam quam vel unico duntaxat aut inspirantis aut mandantis nutu, quandocumque libuerit, detectam iri vix possumus dubitare. Ut autem clarius se prodat totum Porismatum negotium,

(1) Fermat fait ici allusion à ses propres travaux, *Apollonii Pergaei libri duo de locis planis restituti, Ad locos planos et solidos Isagoge, Isagoge ad locos ad superficiem.* Quant à ceux des géomètres antérieurs qu'il mentionne, *voir* plus haut, page 3, note 3.

(2) La date de cet opuscule semble indiquée par ce qu'en dit Boullian (*Ismaelis Bullialdi Exercitationes geometricæ tres* : I *circa demonstrationes per inscriptas et circumscriptas figuras;* II *circa conicarum sectionum quasdam propositiones;* III *de porismatibus. — Astronomiæ Philolaicæ fundamenta, etc.* — Parisiis, apud Sebastianum Cramoisy Regis et Reginæ architypographum et Gabrielem Cramoisy, via Jacobæa, sub Ciconiis, MDCLVII. Cum privilegio Regis), au début de son Essai sur les Porismes.

Voici le passage qui en a été reproduit dans les *Varia*, douzième page non numérotée :

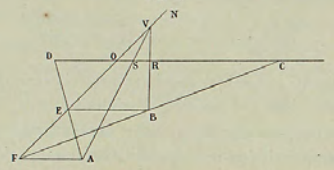
« Hanc de porismatibus scriptiunculam data mihi occasione composui, quum *ante biennium* vir illustrissimus ac amplissimus Dominus de Fermat, in suprema Curia Tolosana Senator integerrimus et in judiciis exercendis peritissimus, rerum mathematicarum doctissimus, propositiones quasdam subtilissimas et porismata, quæ tam theorematice quam problematice proponi possunt, ad amicos suos huc misisset. Ex Pappi unius monumentis et Collectionibus Mathematicis porismatum naturam et usum discere possumus, quum ex veteribus qui hanc Geometriæ partem attigerunt, præter ipsum nullus supersit. Illius tamen sententia legenti statim obvia non est, textusque corruptione et applicationis porismatum defectu obscurior procul dubio evadit. Interea, dum tanto viro sua edere libuerit, nostra, qualiacumque tandem sint, publici juris facere placuit, ut alios ad eorumdem

celebriores quasdam propositiones porismaticas selegimus, easque Geometris et considerandas et examinandas confidenter exhibemus, ut mox quid sit Porisma et cui maxime inserviat usui innotescat.

Porisma primum.

Sint duæ rectæ ON, OC (*fig.* 69), quæ angulum constituant in puncto O et sint ipsæ positione datæ; dentur et puncta A et B. A punctis B et

Fig. 69.



A ducantur rectæ BE, AF ipsi OC parallelæ et occurrentes rectæ NO productæ in punctis E et F; jungatur recta AE, quæ rectæ CO productæ occurrat in D; jungatur itidem recta FB, quæ eidem rectæ CO occurrat

investigationem impelleremus, ipsumque amplissimum Dominum de Fermat ad sua edenda, utinam et ad alia sublimis intellectus sui θεωρήματα cum omnibus communicanda, excitaremus. Is enim est quem omnes Europæ Mathematici suspiciunt; quem a subtilissimis ætatis nostræ Geometris, Bonaventura Cavaliero Bononiæ et Evangelista Toricello Florentiæ, summis laudibus in cœlum ferri, ejusque inventa mirabilia prædicari auribus meis audivi; quem etiam virum, tam eximiis virtutibus clarum, multaque eruditione ornatum ac in rebus mathematicis oculatissimum, toto pectore veneror ac colo. »

L'opuscule de Fermat sur les Porismes n'aurait donc pas été connu à Paris avant 1654. La dédicace à la reine Christine de Suède est d'ailleurs expliquée par le passage suivant d'une lettre du 25 septembre 1651, adressée à Nicolas Heinsius par Bernard Médon, conseiller au présidial de Toulouse et ami de Fermat (*Syllogæ epistolarum a viris illustribus scriptarum tomi quinque, collecti et digesti per Petrum Burmannum*. Leyde, 1727, t. V, p. 613, l. 24) :

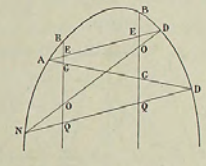
« Salutat te amplissimus Fermat, a quo circa mathematicas scientias, quas melius quam quisquam mortalium possidet, nil extorqueri unquam poterit, nisi Reginarum præstantissima Christina velit aliquando post hujus ævi literatorum omnium vota, post Franciæ Cancellarii preces, sua etiam jussa adjungere, quibus, ut puto, non surdus esset. Si tua cura posset id fieri, faceres toti Europæ rem pergratissimam. Vale iterum et, quod facis, me constanter ama. »

in C; et ad quodvis punctum rectæ ON, ut V, verbi gratia, inflectantur rectæ AV, BV, ita ut recta AV occurrat rectæ OC in puncto S, recta autem BV eidem OC occurrat in puncto R. Rectangulum sub CR in DS æquale semper erit rectangulo sub CO in OD, ideoque spatio dato.

Porisma secundum.

Exponatur parabole quævis NAB (*fig.* 70), cujus diametri quælibet sint BEO. Sumantur in curva duo quævis puncta A et N, a quibus in-

Fig. 70.

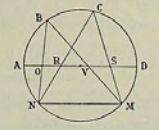


flectantur ad aliud quodvis curvæ punctum, ut D, rectæ ADN, quæ in diametris puncta E, O, G, Q signent. In eadem diametro abscindentur semper duæ rectæ quæ eamdem servabunt rationem : erit nempe ut OB ad BE, ita QB ad GB, idque in infinitum.

Porisma tertium.

Esto circulus cujus diameter recta AD (*fig.* 71), cui parallela ut-

Fig. 71.



cumque ducatur NM, circulo in punctis N et M occurrens, et sint data puncta N et M. Inflectatur utcumque recta NBM, quæ secet diametrum

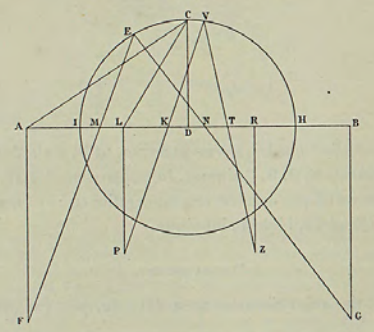
in punctis O et V. Aio datam esse rationem rectanguli sub AO in DV ad rectangulúm sub AV in DO : ideoque, si inflectatur NCM secans diametrum in punctis R, S, erit semper ut rectangulum sub AO in DV ad rectangulum sub AV in DO, ita rectangulum sub AR in DS ad rectangulum sub AS in DR.

Nec difficile est propositionem ad ellipses, hyperbolas et oppositas sectiones extendere.

Porisma quartum.

Exponatur circulus ICH (*fig.* 72), cujus diameter IDH data, cen-

Fig. 72.



trum D, radius ad diametrum normalis CD. Sumantur in diametro productâ puncta B et A data, et sint rectæ AI, BH æquales.

Fiat

ut DI ad IA, ita DL ad LI,

et sit recta DR æqualis DL; dabuntur puncta R et L. Jungatur recta CA, cui æqualis ponatur AF ad diametrum perpendicularis, eidemque fiat BG æqualis et parallela. Inflectatur quævis recta ad circulum a punctis F et G, ut FEG, quæ diametrum secet in punctis M et N. Aio

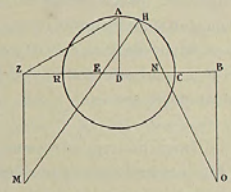
summam duorum quadratorum RM, LN æquari semper eidem spatio dato.

Iisdem positis, in secundo casu, jungatur recta CL, cui æqualis ponatur LP ad diametrum perpendicularis, eidemque æqualis et parallela fiat RZ. Si a duobus punctis Z et P inflectatur quælibet ad circumferentiam recta, ut PVZ, secans diametrum in punctis K et T, quadratorum AT et BK aggregatum æquabitur semper alteri spatio dato.

Porisma quintum.

Esto circulus RAC (*fig.* 73), cujus diameter RDC data, centrum D, radius DA ad diametrum normalis. Sumantur utcumque puncta Z et B data in diametro a centro D æquidistantia, et, junctâ AZ, fiat æqualis

Fig. 73.



ZM ad diametrum perpendicularis, eidemque æqualis et parallela ducatur BO. Inflectatur quævis ad circumferentiam recta MHO quæ diametrum in punctis E et N secet. Erit semper ratio quadratorum EH, HN simul sumptorum ad triangulum EHN data, eadem nempe quæ rectæ AZ ad quartam partem rectæ ZD.

Ex adductis porismatibus (quorum propositiones elegantissimas et pulcherrimas esse quis diffiteatur?) haud difficulter indaganda se prodit ipsa porismatum natura. Enunciari nempe posse, secundum Pappum, vel ut theoremata vel ut problemata statim patet; nos sane ut theoremata enunciavimus, sed nihil vetat quominus in problemata transformentur.

Exempli causa, sic quintum porisma concipi potest : *Dato circulo* RAC *cujus diameter* RC, *quærantur duo puncta, ut* M *et* O, *a quibus si inflectatur quævis ad circumferentiam recta ut* MHO, *faciat semper rationem quadratorum ab abscissis* EH, HN *ad triangulum* EHN *datam.* Nec latet ex supradicto theoremate constructio : si enim ponatur recta AZ esse ad quartam partem ZD in ratione data, omnia constabunt, eâdemque ratione in reliquis et omnibus omnino porismatibus theoremata in problemata facile transibunt.

Quod autem innuit Pappus ex sententia juniorum geometrarum porisma deficere hypothesi a locali theoremate (1), id sane totam porismatis naturam specifice revelat, neque alio fere auxilio quam eo quod hæc verba subministrarunt, hujusce abdita materiæ penetravimus.

Quum locum investigamus, lineam rectam aut curvam inquirimus nobis tantisper ignotam, donec locum ipsum inveniendæ lineæ designaverimus; sed quum ex supposito loco dato et cognito alium locum venamur, novus iste locus porisma vocatur ab Euclide : qua ratione locos ipsos porismatum unam speciem et esse et vocari verissime Pappus subjunxit.

Exemplo unico definitionem nostram astruemus in figura quinti porismatis : Datâ rectâ RC, si quæratur curva quælibet, ut RAC, cujus ea sit proprietas ut a quolibet ipsius puncto, ut A, demissa perpendicu-

(1) C'est-à-dire que, d'après cette définition, le porisme serait un théorème énonçant la propriété d'un lieu, sans que la détermination complète de ce lieu soit donnée dans l'énoncé. Cette détermination reste donc à trouver, en même temps que la propriété est à démontrer.

Au temps d'Euclide, le nom de *porisme* paraît avoir été employé pour désigner spécialement les propositions où il s'agissait de *trouver*, tandis que, dans les théorèmes, il s'agissait de *démontrer*, dans les problèmes de *construire*. Euclide a appliqué ce terme de *porisme* à un ensemble de propositions relatives à la matière devinée par Michel Chasles, dans sa célèbre restitution (*Les trois livres de Porismes d'Euclide*, etc. Paris, Mallet-Bachelier, 1860), mais il ne voulait probablement pas spécialiser particulièrement le sens de l'expression.

L'intention que lui prête Fermat un peu plus bas est donc improbable, et elle restreint trop le sens général du mot *porisme*, sans d'ailleurs désigner en aucune façon la nature réelle des propositions traitées par Euclide.

laris AD faciat quadratum AD æquale rectangulo RDC, inveniemus curvam RAC esse circuli circumferentiam. Sed si ex dato jam loco illo alium investigemus, problema, verbi gratia, porismatis quinti, novus iste locus et infiniti alii quos periti sagacitas analystæ repræsentabit et ex jam cognito eliciet, porisma dicetur.

Quum autem, ut jam diximus, porismata ipsi sint loci, errorem latini Pappi interpretis ex græco textu emendabimus eo loco ubi *porismatum opus perutile* ait *ad resolutionem obscuriorum problematum ac eorum generum quæ haud comprehendunt eam quæ multitudinem præbet naturam :* quæ ultima verba quum nullum fere sensum admittant, ad ipsum autorem recurrendum cujus verba in manuscriptis codicibus ita se habent : πορίσματα ἐστὶ πολλοῖς ἄθροισμα φιλοτεχνότατον εἰς τὴν ἀνάλυσιν τῶν ἐμβριθεστέρων προβλημάτων καὶ τῶν γενῶν ἀπερίληπτον τῆς φύσεως παρεχομένης πλῆθος (1).

Ait igitur *porismata conferre ad analysin obscuriorum problematum et generum,* hoc est problematum generalium : ex dictis enim apparet porismatum propositiones esse generalissimas. Deinde subjungit : *quum natura multitudinem quæ vix potest animo comprehendi subministret :* quibus verbis infinitas illas et miraculo proximas ejusdem problematis indicat solutiones.

Huic autem vel theorematum vel problematum inventioni non deest peculiaris a puriore Analysi derivanda methodus, cujus ope non solum quinque præcedentia porismata sed pleraque alia et invenimus et construximus et demonstravimus, et si hæc paucula, quæ isagogica tantum et accuratioris operis prodroma emittimus, doctis arrideant, tres totos

(1) Voici comment Chasles (p. 14) traduit ce texte, assez obscur et mal assuré :

« Les Porismes... collection ingénieuse d'une foule de choses qui servent à la solution des problèmes les plus difficiles et que la nature fournit avec une inépuisable variété. »

Dans cette traduction, les mots *d'une foule* devraient être supprimés. Après *servent,* il faudrait ajouter *à beaucoup* (par opposition à *tous*). Enfin, après *difficiles,* il faudrait dire : *et quoique la nature les fournisse avec une inépuisable variété,* en liant avec ce qui suit : *il n'a rien été ajouté à cet Ouvrage d'Euclide.*

Telle est du moins l'opinion de Heiberg. Le savant éditeur de Pappus, Hultsch (p. 648, l. 18 à 21), regarderait, au contraire, comme interpolés les mots *à beaucoup* et ceux qui suivent la phrase grecque citée par Fermat.

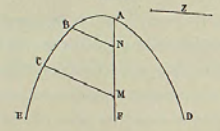
Porismatum libros aliquando restituemus, imo et Euclidem ipsum promovebimus et porismata in coni sectionibus et aliis quibuscumque curvis mirabilia sane et hactenus ignota detegemus (1).

PROPOSITIO D. DE FERMAT CIRCA PARABOLEN (2).

Proposui *per data quatuor puncta parabolen describere*. Duplex est casus, utrique lemma sequens præmittendum.

Sit parabole in 1a fig. ECBAD (*fig.* 74), cujus diameter AF detur positione; dentur etiam duo puncta B et C, per quæ transit parabole;

Fig. 74.



dentur denique anguli applicatarum ad diametrum AF. Aio parabolen positione dari.

Applicentur ordinatim BN et CM; a puncto dato B in AF positione

(1) *Voir*, sur cet opuscule, le jugement de Chasles (p. 3, 4, 22). Il est certain que l'essai de Fermat doit être considéré comme tout autre chose que comme une tentative de restitution des Porismes d'Euclide, soit dans la forme des énoncés, encore incertaine aujourd'hui, soit pour le fond du sujet traité. Il faut y voir plutôt une indication de questions offrant quelque analogie avec celles abordées par Euclide.

Chasles n'a qu'un seul porisme, CXXVI (p. 230), qui se rapporte à l'un de ceux de Fermat, le troisième. Comme il le fait remarquer d'ailleurs, le second porisme de Fermat, où figure une parabole, est étranger à l'ordre d'idées d'Euclide, lequel se borne aux droites et aux cercles. Enfin, avec le troisième, il n'y a guère que le premier que l'on pourrait considérer comme rentrant dans un des vingt-neuf genres énumérés par Pappus.

Au lieu donc, comme l'a fait Chasles, de chercher ici, en s'aidant des lemmes de Pappus, à retrouver des propositions rentrant dans ces vingt-neuf genres, Fermat a voulu plutôt, dans ce spécimen, montrer que ces genres pouvaient être multipliés indéfiniment.

(2) Cette pièce est insérée dans les *Varia* au milieu de lettres d'octobre 1636.

datam ducitur BN in dato angulo (positum quippe est dari angulum applicatarum) : ergo datur punctum N; similiter datur punctum M et rectæ BN, CM positione et magnitudine. Ex natura paraboles est

ut quadratum CM ad quadratum BN, ita MA ad NA,

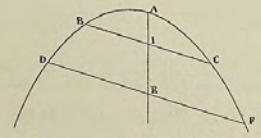
si ponas A esse verticem paraboles sive extremum diametri; ergo datur ratio MA ad NA, et dividendo datur ratio MN ad NA. Datur autem recta MN, quia duo puncta M, N dantur; datur igitur NA et punctum A. Si fiat

ut AN data ad NB datam, ita NB ad Z,

dabitur Z rectum paraboles latus. Dato igitur vertice A, Z recto latere, AF diametro positione, angulo applicatarum, datur positione parabole, ex 52, I Apollonii.

Hoc supposito, facillime construitur primus casus in 2a fig. (*fig.* 75), in qua dentur quatuor puncta D, B, C, F, quæ si jungas per rectas BC, CF, FD, DB, vel neutra oppositarum erit alteri parallela, vel, ut in hoc casu, erit BC, verbi gratia, parallela DF.

Fig. 75.



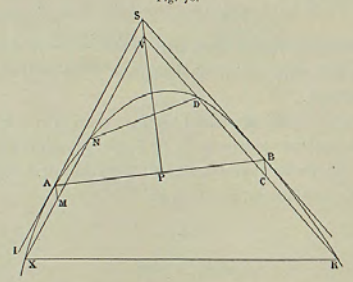
Bifariam utraque dividatur in punctis I et E et sit factum : ergo juncta IE erit diameter paraboles, quum æquidistantes bifariam dividat. Dantur autem puncta I et E : ergo IE positione datur et angulus DEI. Quum igitur diameter IE positione detur, dentur etiam angulus applicatarum et duo puncta B et D per quæ transit parabole, dabitur positione parabole DBACF.

In secundo casu major est difficultas, quum neutra rectarum duo ex punctis datis conjungentium alteri est æquidistans. In 3a fig. sint data

quatuor puncta X, N, D, R (*fig.* 76), quæ per rectas XR, RD, DN, NX conjungantur, et neutra oppositarum sit alteri æquidistans.

Ponatur jam factum esse, et descriptam parabolen XANDBR proposito satisfacientem. Concurrant productæ XN, RD, in puncto V et, bifariam divisis XN, RD in punctis M et C, ducantur ad ipsas diametri MA, CB, occurrentes parabolæ in punctis A et B, a quibus rectæ IAS, SB ipsis XV, VR ducantur æquidistantes et concurrant in puncto S. Juncta AB bifariam dividatur in P et jungatur SP.

Fig. 76.



His ita constructis, patet, quum per verticem diametri MA ducatur IAS æquidistans applicatæ XN, rectam IAS tangere parabolen in A; probabitur similiter rectam SB tangere eamdem parabolen in B : ergo, per 17, III Apollonii erit

ut rectangulum XVN ad rectangulum RVD,
ita quadratum AS ad quadratum SB.

Datur autem ratio rectanguli XVN ad rectangulum RVD, quum dentur quatuor puncta X, N, D, R : ergo datur ratio quadrati AS ad quadratum SB, ideoque rectæ AS ad rectam SB. Datur autem angulus ASB, quia propter parallelas æquatur angulo XVR dato : ergo in triangulo ASB datur angulus ad verticem S et ratio laterum AS, SB, ideoque

triangulum ASB datur specie; igitur datur angulus SAB et ratio SA ad AB. Quum autem AP sit dimidia AB, datur etiam ratio SA ad AP : in triangulo igitur SAP datur angulus ad A, et ratio laterum SA, AP; datur igitur specie et angulus PSA datur.

Hoc posito, quum recta SP rectam AB puncta contactuum conjungentem bifariam dividat, erit diameter paraboles, ex 29, II Apollonii; in parabola autem omnes diametri sunt inter se æquidistantes : ergo diameter MA rectæ SP æquidistabit, ideoque angulus IAM æquabitur angulo ASP. Probavimus autem dari angulum ASP : ergo dabitur angulus IAM et ipsi alternus propter parallelas NMA. Datur autem punctum M, quia rectam NX positione et magnitudine datam bifariam dividit : ergo datur diameter MA positione; datur etiam angulus applicatarum AMN, et dantur duo puncta N et D per quæ transit parabole : datur igitur parabole positione ex lemmate, et est facilis ab analysi ad synthesim regressus.

Patet autem duas parabolas in hoc secundo casu propositum adimplere : concurrent enim rectæ DN et XR, quas posuimus non esse parallelas; hoc casu eâdem argumentatione nova construetur parabole proposito satisfaciens.

< LOCI AD TRES LINEAS DEMONSTRATIO > (1).

Exponantur tres rectæ positione datæ triangulum constituentes : AM, MB, BA (*fig.* 77), et sit quodvis punctum O a quo ad rectas datas ducantur rectæ OE, OI, OD in angulis OEM, OIM, ODB datis. Sit autem

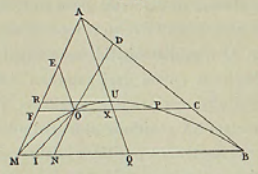
(1) Ce morceau inédit est publié d'après une copie du XVIIe siècle, classée dans la chemise « Fermat » du portefeuille 1848 I de la collection Ashburnham. Cette copie, sur une feuille double, sans titre, porte à la fin, d'une autre écriture du temps, la mention : *Pour Monsr Carcavi rue Michel Leconte au milieu*, et, en haut, de la main de Libri, l'attribution à Fermat. Cette attribution est corroborée par la Lettre de Fermat à Roberval, du 20 avril 1637, d'après laquelle le titre a été composé.

La question traitée est énoncée dans Pappus (éd. Hultsch), page 678, lignes 15 et suivantes.

ratio rectanguli EOD ad quadratum OI data : Aio punctum O esse ad unam ex coni sectionibus.

Dividatur MB bifariam in Q et, junctâ AQ, ducantur per punctum O rectæ FOC, ON ipsis MB, MA parallelæ.

Fig. 77.



Tria triangula OEF, ODC, OIN sunt specie data : nam ex hypothesi dantur anguli OEF, ODC, OIN; datur etiam EFO quia, propter parallelas, dato AMB est æqualis; datur et OCD quia æqualis dato MBA; denique datur ONI, quum detur ONB ipsi AMB propter parallelas æqualis. Datur igitur ratio OE ad OF; datur item ratio OD ad OC : ergo ratio rectanguli EOD ad rectangulum FOC datur. Datur autem, ex hypothesi, ratio rectanguli EOD ad quadratum OI : ergo ratio rectanguli FOC ad quadratum OI datur. Datur autem ratio quadrati OI ad quadratum ON, propter datum specie triangulum OIN : ergo ratio rectanguli FOC ad quadratum ON, sive FM ipsi æquale, datur.

Si secetur AQ in U ita ut, ductâ UR parallelâ MB, quadratum UR ad quadratum RM sit in ratione data rectanguli FOC ad quadratum FM (hoc autem est facile, quum angulus MRU detur), et per punctum U describatur, circa diametrum AQ, coni sectio quam rectæ MA, AB in punctis M, B contingant (id autem est facillimum et ex < vario > (1) puncti U situ erit aut parabole aut hyperbole aut ellipsis : superflua, præsertim tibi, non addimus) : Aio coni sectionem sic descriptam per punctum O transire.

(1) Le mot *vario* a été restitué à la place d'une lacune de cinq lettres environ dans le manuscrit.

Nam transeat ex alia parte per punctum P. Tanget recta UR sectionem, quum sit parallela ordinatæ MB; quum igitur sectio transeat per punctum O, erit

rectangulum PFO ad quadratum FM ut quadratum UR ad quadratum RM,

ex decima sexta propositione III Apollonii. Ut autem

quadratum UR ad quadratum RM, ita est rectangulum FOC ad quadratum FM,

ex constructione : rectangulum igitur PFO rectangulo FOC æquale erit, ideoque recta FO rectæ PC.

Quod quidem ita se habet : nam, quum AQ dividat bifariam MB, erit recta FX rectæ XC æqualis; propter sectionem vero, recta OX est æqualis XP : reliqua igitur FO reliquæ PC æquatur.

Nec est difficilis ab analysi ad synthesim, per demonstrationem ducentem ad impossibile, regressus.

AD LOCOS PLANOS ET SOLIDOS

ISAGOGE [1].

De locis quamplurima scripsisse veteres, haud dubium : testis Pappus initio Libri septimi [2], qui Apollonium de locis planis, Aristæum de solidis scripsisse asseverat. Sed aut fallimur, aut non proclivis satis ipsis fuit locorum investigatio; illud auguramur ex eo quod locos quamplurimos non satis generaliter expresserunt, ut infra patebit.

Scientiam igitur hanc propriæ et peculiari analysi subjicimus, ut deinceps generalis ad locos via pateat.

Quoties in ultima æqualitate duæ quantitates ignotæ reperiuntur, fit locus loco et terminus alterius ex illis describit lineam rectam aut curvam. Linea recta unica et simplex est, curvæ infinitæ : circulus, parabole, hyperbole, ellipsis, etc.

Quoties quantitatis ignotæ terminus localis describit lineam rectam aut circulum, fit locus planus; at quando describit parabolen, hyperbolen vel ellipsin, fit locus solidus; si alias curvas, dicitur locus

(1) Le texte de cet important Traité est très défiguré dans l'édition des *Varia Opera* de 1679, en particulier par l'adoption de la notation cartésienne des exposants. L'*Isagoge*, qui renferme les éléments de la Géométrie analytique moderne, et notamment une discussion de l'équation générale du second degré à deux inconnues, a cependant été rédigée et même, d'après l'article du *Journal des Savants* du 9 février 1665, communiquée par Fermat avant l'apparition de la *Géométrie* de Descartes. D'un autre côté, il est aisé de se convaincre que Fermat est toujours resté fidèle aux errements de Viète et n'a jamais fait usage dans ses écrits de la notation des exposants, sauf pour des cas exceptionnels, comme lorsqu'il faisait allusion aux travaux de Descartes.

L'existence, dans le portefeuille 1848 I de la collection Ashburnham, d'une ancienne copie de l'*Isagoge* a permis de rétablir en toute sûreté la notation employée par Fermat et d'éliminer certaines additions faites à son texte sur le manuscrit qui avait servi pour l'édition des *Varia*.

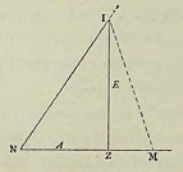
(2) Pappus, éd. Hultsch, page 636, lignes 22 et 23.

linearis. De hoc nihil adjungemus, quia facillime ex planorum et solidorum investigatione linearis loci cognitio derivabitur, mediantibus reductionibus.

Commode autem institui possunt æquationes, si duas quantitates ignotas ad datum angulum constituamus (quem ut plurimum rectum sumemus), et alterius ex illis positione datæ terminus unus sit datus; modò neutra quantitatum ignotarum quadratum prætergrediatur, locus erit planus aut solidus, ut ex dicendis clarum fiet.

Recta data positione sit NZM (*fig.* 78), cujus punctum datum N; NZ

Fig. 78.



æquetur quantitati ignotæ *A*, et ad angulum datum NZI elevata recta ZI sit æqualis alteri quantitati ignotæ *E*.

$$D \text{ in } A \quad \text{æquetur} \quad B \text{ in } E :$$

punctum I erit ad *lineam rectam* positione datam.

Erit enim

$$\text{ut } B \text{ ad } D, \quad \text{ita } A \text{ ad } E.$$

Ergo ratio *A* ad *E* data est, et datur angulus ad Z, triangulum igitur NIZ specie, et angulus INZ; datur autem punctum N et recta NZ positione : ergo dabitur NI positione, et est facilis compositio.

Ad hanc æqualitatem reducentur omnes, quarum homogenea partim sunt data, partim ignotis *A* et *E* admixta, vel in datas ductis vel simpliciter sumptis.

$$Zpl. - D \text{ in } A \quad \text{æquetur} \quad B \text{ in } E.$$

Fiat

$$D \text{ in } R \quad \text{æquale} \quad Zpl.;$$

erit

$$\text{ut } B \text{ ad } D, \quad \text{ita } R - A \text{ ad } E.$$

Fiat MN æqualis *R* : dabitur punctum M, ideoque MZ æquabitur $R - A$. Dabitur ergo ratio MZ ad ZI; sed datur angulus ad Z, ergo triangulum IZM specie, et concludetur rectam MI junctam dari positione, ideoque punctum I erit ad rectam positione datam. Idemque nullo negotio concludetur in qualibet æqualitate cujus homogenea quædam afficientur ab *A* vel *E*.

Et est simplex hæc et prima locorum æqualitas, cujus beneficio invenientur loci omnes ad lineam rectam : verbi gratia, septima propositio Libri I *Apollonii de locis planis* (1), quæ generalius jam poterit enuntiari et construi.

Huic æqualitati subest pulcherrima propositio sequens, quam nos illius ope deteximus :

Si sint quotcumque rectæ lineæ positione datæ atque ad ipsas a quodam puncto ducantur rectæ in datis angulis, sit autem quod sub ductis et datis efficitur dato spatio æquale, punctum rectam lineam positione datam continget.

Infinitas omittimus, quæ Apollonianis merito possent opponi.

Secundus hujusmodi æqualitatum gradus est, quando

$$A \text{ in } E \quad \text{æq.} \quad Zpl.,$$

quo casu punctum I est ad *hyperbolen*.

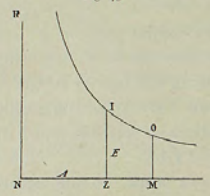
Fiat NR (*fig.* 79) parallela ZI; sumatur in NZ quodlibet punctum, ut M, a quo ducatur MO parallela ZI; et fiat rectangulum NMO æquale *Zpl.*

Per punctum O, circa asymptotos NR, NM, describatur hyperbole :

(1) *Voir* plus haut, page 24, note 1.

dabitur positione et transibit per punctum I, quum ponatur rectangulum A in E, sive NZI, æquale NMO.

Fig. 79.



Ad hanc æqualitatem reducentur omnes quarum homogenea partim sunt data, vel ab A aut E aut A in E affecta.

Ponatur

$$Dpl. + A \text{ in } E \quad \text{æq.} \quad R \text{ in } A + S \text{ in } E.$$

Igitur, ex artis præceptis,

$$R \text{ in } A + S \text{ in } E - A \text{ in } E \quad \text{æquabitur} \quad Dpl.$$

Effingatur rectangulum abs duobus lateribus, in quo homogenea

$$R \text{ in } A + S \text{ in } E - A \text{ in } E$$

reperiantur : erunt duo latera

$$A - S \quad \text{et} \quad R - E$$

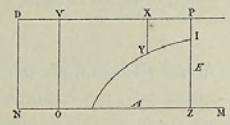
et rectangulum sub ipsis æquabitur R in $A + S$ in $E - A$ in $E - R$ in S.

Si igitur a $Dpl.$ abstuleris R in S, rectangulum sub $\overline{A - S}$ in $\overline{R - E}$ æquabitur $Dpl. - R$ in S.

Fiat NO (*fig.* 80) æqualis S, et ND, parallela ZI, fiat æqualis R; per punctum D ducatur DP parallela NM, < per punctum O > OV parallela ND, et ZI producatur in P.

Quum NO æquetur S, et NZ, A, ergo $A - S$ æquabitur OZ sive VP; similiter, quum ND, sive ZP, æquetur R, et ZI, E, ergo $R - E$ æquabitur PI : rectangulum igitur sub VP in PI æquatur dato $Dpl. - R$ in S. Ergo punctum I erit ad hyperbolen, cujus asymptoti PV, VO.

Fig. 80.



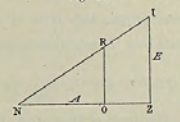
Rectangulo enim $Dpl. - R$ in S æquetur, sumpto quovis puncto X et ductâ parallelâ XY, rectangulum VXY, et per punctum Y, circa asymptotos PV, VO, hyperbole describatur : per punctum I transibit, nec est difficilis in quibuslibet casibus analysis aut constructio.

Sequens æqualitatum localium gradus est, quum $Aq.$ vel æquatur $Eq.$, vel est in ratione data ad $Eq.$, vel etiam $Aq. + A$ in E est ad $Eq.$ in data ratione; denique hic casus omnes æquationes comprehendit intra metam quadratorum, quarum homogenea omnia vel a quadrato A, vel a quadrato E, vel a rectangulo A in E afficiuntur.

His omnibus casibus punctum I est ad *lineam rectam*, cujus rei demonstratio facillima.

Sit NZ quad. + NZ in ZI ad ZI quad. in ratione data (*fig.* 81).

Fig. 81.



Ducatur quævis parallela OR; quadratum NO + NO in OR erit ad OR quadratum in eadem ratione, ut est facillimum demonstrare. Punctum igitur I erit ad rectam positione < datam >.

[Sumatur enim quodvis punctum, ut O, et fiat data ratio quadrati

NO + NO in OR ad OR quadratum. Juncta NR dabitur positione et satisfaciet proposito] (1), idemque continget in quibuslibet æquationibus, quarum omnia homogenea a potestatibus ignotarum vel rectangulo sub ipsis afficientur, ut inutile sit singulos casus scrupulosius percurrere.

Si potestatibus ignotarum vel rectangulis sub ipsis admisceantur homogenea, partim omnino data, partim sub data recta in alteram ignotarum, difficilior evadet constructio : singulos casus construimus breviter et demonstramus.

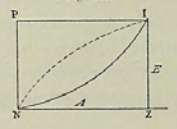
Si

$$Aq. \quad \text{æquatur} \quad D \text{ in } E,$$

punctum I est ad *parabolen*.

Fiat NP parallela ZI (*fig.* 82), et circa diametrum NP describatur

Fig. 82.



parabole, cujus rectum latus recta D data, et applicatæ sint parallelæ NZ : punctum I erit ad parabolen hanc positione datam.

Ex constructione rectangulum sub D in NP æquabitur quadrato PI, hoc est, rectangulum sub D in IZ æquabitur quadrato NZ, ideoque :

$$D \text{ in } E \quad \text{æquabitur} \quad Aq.$$

Ad hanc æquationem facillime reducentur omnes in quibus $Aq.$ miscetur homogeneis sub datis in E, aut $Eq.$ homogeneis sub datis in A,

(1) La démonstration mise entre crochets est suspecte à divers titres; si elle n'a pas été interpolée, on ne peut guère la considérer que comme un reste d'une première rédaction de Fermat.

idemque continget, licet homogenea omnino data æquationibus misceantur.

Sit

$$Eq. \quad \text{æquale} \quad D \text{ in } A.$$

In præcedenti figura, vertice N, circa diametrum NZ, describatur parabole, cujus rectum latus sit D, et applicatæ rectæ NP parallelæ : præstabit propositum, ut patet.

Ponatur

$$Bq. - Aq. \quad \text{æq.} \quad D \text{ in } E.$$

Ergo

$$Bq. - D \text{ in } E \quad \text{æquabitur} \quad Aq.$$

Applicetur $Bq.$ ad D et sit æquale D in R. Ergo

$$D \text{ in } R - D \text{ in } E \quad \text{æquabitur} \quad Aq.,$$

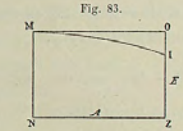
ideoque

$$D \text{ in } (R - E) \quad \text{æquabitur} \quad Aq.$$

Ideoque hæc æquatio reducetur ad præcedentem : recta quippe $R - E$ succedet ipsi E.

Fiat quippe (*fig.* 83) NM parallela ZI et æqualis R, et per punctum M ducatur MO parallela NZ : datur punctum M, et recta MO positione. In

Fig. 83.



hac constructione, OI æquatur $R - E$: ergo D in OI æquatur NZ quad., sive MO quad. Vertice M, circa diametrum MN, descripta parabole, cujus rectum latus D, et applicatæ ipsi NZ parallelæ, præstabit propositum, ut patet ex constructione.

Si

$$Bq. + Aq. \quad \text{æq.} \quad D \text{ in } E,$$
$$D \text{ in } E - Bq. \quad \text{æquabitur} \quad Aq.,$$

etc. ut supra. Similiter omnes æquationes ab E et $Aq.$ affectæ construentur.

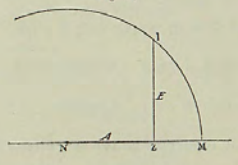
Sed $Aq.$ miscetur sæpe $Eq.$ et homogeneis omnino datis.

$$Bq. - Aq. \quad \text{æquetur} \quad Eq. :$$

punctum I est ad *circulum* positione datum, quando angulus NZI est rectus.

Fiat NM (*fig.* 84) æqualis B; circulus centro N, intervallo NM, descriptus præstabit propositum, hoc est : quodcumque punctum sump-

Fig. 84.



seris in ipsius circumferentia, ut I, quadratum ZI æquabitur quadrato NM (sive $Bq.$) — quadrato NZ (sive $Aq.$), ut patet.

Ad hanc æquationem reducentur omnes affectæ ab $Aq.$ et $Eq.$, et ab A vel E in datas ductis, modò angulus NZI sit rectus, et præterea coefficientes $Aq.$ æquentur coefficientibus $Eq.$

Sit

$$Bq. - D \text{ in } A \text{ bis} - Aq. \quad \text{æquale} \quad Eq. + R \text{ in } E \text{ bis}.$$

Addatur utrimque $Rq.$, ut $E + R$ succedat E : fiet

$$Rq. + Bq. - D \text{ in } A \text{ bis} - Aq. \quad \text{æquale} \quad Eq. + Rq. + R \text{ in } E \text{ bis}.$$

Ipsis $Rq.$ et $Bq.$ addatur $Dq.$, ut $D + A$ succedat ipsi A, et summa quadratorum $Rq.$, $Bq.$, et $Dq.$ æquetur $Pq.$ Ergo

$$Pq. - Dq. - D \text{ in } A \text{ bis} - Aq. \quad \text{æquabitur} \quad Rq. + Bq. - D \text{ in } A \text{ bis} - Aq.;$$

nam ex constructione

$$Pq. - Dq. \quad \text{æquatur} \quad Rq. + Bq.$$

Si igitur loco ipsius $A + D$ sumpseris A et loco $E + R$ sumpseris E, fiet

$$Pq. - Aq. \quad \text{æquale} \quad Eq.,$$

et reducetur æquatio ad præcedentem.

Simili ratiocinatione similes æquationes reducentur, et hac via omnes propositiones secundi Libri *Apollonii De locis planis* (1) construximus, et sex priores in quibuslibet punctis habere locum demonstravimus : quod sane mirabile est et ab Apollonio fortasse ignorabatur.

Sed

$$Bq. - Aq. \text{ ad } Eq. \text{ habeat rationem datam,}$$

punctum I erit ad *ellipsin*.

Fiat MN æqualis B, et per verticem M, diametrum NM, centrum N, describatur ellipsis, cujus applicatæ sint rectæ ZI parallelæ et quadrata applicatarum ad rectangulum sub segmentis diametri habeant rationem datam : punctum I erit ad hujusmodi ellipsin. Etenim quadratum NM — quadrato NZ æquatur rectangulo sub diametri segmentis.

Ad hanc reducentur similes in quibus $Aq.$ ex una parte opponetur $Eq.$ sub contraria affectionis nota et sub coefficientibus diversis. Nam si coefficientes sint eædem et angulus sit rectus, locus erit ad circulum, ut jam diximus; licet igitur coefficientes sint eædem, modò angulus non sit rectus, locus erit ad ellipsin, et, licet immisceantur æquationibus homogenea sub datis et A vel E, fiet reductio eo quod jam usurpavimus artificio.

Si

$$Aq. + Bq. \text{ est ad } Eq. \text{ in data ratione,}$$

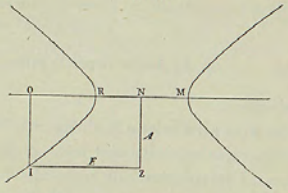
punctum I est ad *hyperbolen*.

Fiat NO (*fig.* 85) parallela ZI; data ratio sit eadem quæ $Bq.$ ad quadratum NR : dabitur ergo punctum R. Circa diametrum RO, per ver-

(1) *Voir* plus haut, pages 29 et 30, note 2.

ticem R, centrum N, describatur hyperbole, cujus applicatæ sint parallelæ NZ, et rectangulum sub toto diametro et RO unà cum RO quadrato ad quadratum OI sit in data ratione, NR quadrati ad $Bq.$ Ergo, componendo, rectangulum sub MOR (positâ MN æquali NR) unà cum quadrato NR erit ad quadratum OI unà cum $Bq.$ in ratione data, NR quadrati ad $Bq.$ Sed rectangulum MOR, unà cum NR quadrato, æqua-

Fig. 85.



tur NO quadrato, sive ZI quadrato, sive $Eq.$; et quadratum OI unà cum $Bq.$ æquatur quadrato NZ (sive $Aq.$) unà cum $Bq.$: ergo est

ut $Eq.$ ad $Bq. + Aq.$, ita NR quad. ad $Bq.$

et, convertendo,

$Bq. + Aq.$ est ad $Eq.$ in ratione data.

Punctum igitur I est ad hyperbolen positione datam.

Eodem quo jam usi sumus artificio, ad hanc æqualitatem reducentur omnes quæ ab $Aq.$ et $Eq.$ afficiuntur unà cum datis, sive simpliciter, sive misceantur ipsis homogenea sub A vel E in datas, modò $Aq.$ habeat eamdem ex altera parte affectionis notam, quam $Eq.$ Nam, si sint diversæ, propositio concludetur per circulos vel ellipses.

Difficillima omnium æqualitatum est quando ita miscentur $Aq.$ et $Eq.$ ut nihilominus homogenea quædam ab A in E afficiantur unà cum datis, etc.

$Bq. - Aq.$ bis æquetur A in E bis $+ Eq.$

Addatur utrimque $Aq.$, ut $A + E$ sit latus alterius ex homogeneis : ergo

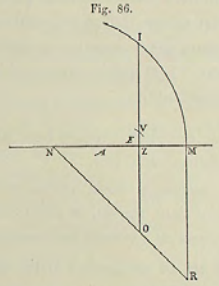
$Bq. - Aq.$ æquabitur $Aq. + Eq. + A$ in E bis.

Pro $A + E$ sumatur E, si placet, et ex præcedentibus circulus MI (*fig.* 86) præstet propositum, hoc est :

MN quad. (sive $Bq.$) — NZ quad. (sive $Aq.$)
æquetur quadrato ZI (sive quadrato abs $A + E$).

Fiat VI æqualis NZ, sive A : ergo ZV æquatur E. In hac autem quæstione punctum V, sive extremum rectæ E, tantum inquirimus : videndum ergo et demonstrandum ad quam lineam sit punctum V.

Fig. 86.



Fiat MR parallela ZI et æqualis MN, et jungatur NR, ad quam producta IZ incidat ad punctum O. Quum MN æquetur MR, ergo NZ æquabitur ZO; sed NZ æquatur VI : ergo tota VO toti ZI est æqualis, ideoque

quadratum MN — quadrato NZ æquatur quadrato VO.

Datur autem triangulum NMR specie : ergo quadrati NM ad quadratum NR datur ratio, ideoque et quadrati NZ ad quadratum NO dabitur ratio. Ratio igitur

quadrati MN — quadrato NZ ad quadratum NR — quadrato NO

datur; probavimus autem

quadratum OV æquari quadrato MN — quadrato NZ :

ergo ratio quadrati NR — NO quadrato ad quadratum OV datur. Dantur autem puncta N et R, et angulus NOZ : ergo punctum V, ex superius demonstratis, est ad ellipsin.

Non absimili methodo ad superiores casus reducentur reliqui, in quibus homogenea sub *A* in *E* homogeneis partim datis, partim sub *Aq.* aut *Eq.* immiscebuntur, aut etiam sub *A* et *E* in datas ductis, cujus rei disquisitio facillima : semper enim beneficio trianguli specie noti construetur quæstio.

Breviter igitur et dilucide complexi sumus quidquid de locis planis et solidis inexplicatum veteres reliquere, constabitque deinceps ad quem locum pertinebunt casus omnes propositionis ultimæ Libri I *Apollonii de locis planis* (1), et omnia omnino ad hanc materiam spectantia nullo negotio detegentur.

Sed libet coronidis loco pulcherrimam hanc propositionem adjungere, cujus facilitas statim innotescet.

Si, positione datis quotcumque lineis, ab uno et eodem puncto ad singulas ducantur rectæ in datis angulis, et sint species ab omnibus ductis dato spatio æquales, punctum contingit positione datum solidum locum.

Unico exemplo fit via ad practicen : Datis duobus punctis N, M (*fig.* 87), inveniendus locus a quo si jungas rectas IN, IM, quadrata rectarum IN, IM ad triangulum INM datam habeant rationem.

Recta NM æquetur *B*, et recta ZI, ad angulos rectos, dicatur *E* terminus; NZ dicatur *A* : ergo, ex artis præceptis,

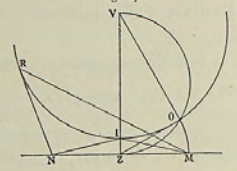
$$Aq.\text{bis} + Bq. - B \text{ in } A \text{ bis} + Eq.\text{bis} \quad \text{ad rectangulum } B \text{ in } E$$

habebit rationem datam et, resolvendo hypostases ex jam traditis præceptis, ita procedet constructio :

(1) *Voir* plus haut, p. 27, la note sur le sens qu'il faut attribuer à cette proposition d'Apollonius.

NM bifariam secetur in Z; a puncto Z excitetur perpendicularis ZV, et fiat data ratio eadem quæ ZV quadruplæ ad NM; descripto semicirculo VOZ super VZ (1) applicetur ZO æqualis ipsi ZM, et junctâ VO, centro V, intervallo VO, describatur circulus OIR, in quo sumatur

Fig. 87.



quodlibet punctum, ut R, et jungantur rectæ RN, RM : Aio quadrata RN, RM ad triangulum RNM esse in data ratione.

Hæc inventio, si libros duos *de locis planis* a nobis dudum restitutos præcessisset, elegantiores sane evasissent localium theorematum constructiones : nec tamen præcocis licet et immaturi partûs nos adhuc pœnitet, et informes ingenii fœtus posteris non invidere scientiæ ipsius quadamtenus interest, cujus opera primo rudia et simplicia novis inventis et roborantur et augescunt. Imo et studiosorum interest latentes ingenii progressus et artem sese ipsam promoventem penitus habere perspectam.

APPENDIX AD ISAGOGEN TOPICAM,

CONTINENS SOLUTIONEM PROBLEMATUM SOLIDORUM PER LOCOS.

Patuit methodus qua lineæ locales deteguntur : inquirendum restat qua ratione problematum solidorum solutio possit ex supradictis ele-

(1) *Construisez :* ZO, æqualis ipsi ZM, applicetur semicirculo VOZ, descripto super VZ. Fermat veut dire que, dans le demi-cercle VOZ, il faut inscrire une corde ZO égale à ZM.

gantissime derivari. Hoc ut fiat, coarctanda illa quantitatum ignotarum extra limites suos evagandi licentia; infinita enim sunt puncta quibus quæstioni propositæ satisfit in locis.

Commodissime igitur per duas æqualitates locales quæstio determinatur : secant quippe se invicem duæ lineæ locales positione datæ, et punctum sectionis, positione datum, quæstionem ex infinito ad terminos præscriptos adigit.

Exemplis breviter et dilucide res explicatur. Proponatur

$$Ac. + B \text{ in } Aq. \quad \text{æquari} \quad Zpl. \text{ in } B.$$

Commode utraque æqualitatis pars potest æquari solido B in A in E, ut per divisionem istius solidi, illinc per A, hinc per B, res deducatur ad locos.

Quum igitur

$$Ac. + B \text{ in } Aq. \quad \text{æquetur} \quad B \text{ in } A \text{ in } E,$$

ergo

$$Aq. + B \text{ in } A \quad \text{æquabitur} \quad B \text{ in } E,$$

et erit, ut patet ex nostra methodo, extremitas ipsius E ad parabolen positione datam.

Deinde quum

$$Zpl. \text{ in } B \quad \text{æquetur} \quad B \text{ in } A \text{ in } E,$$

ergo

$$Zpl. \quad \text{æquabitur} \quad A \text{ in } E,$$

et erit, ex nostra methodo, extremitas ipsius E ad hyperbolen positione datam.

Sed jam probavimus esse ad parabolen positione datam : ergo dabitur positione, et est facilis ab analysi ad synthesin regressus.

Nec dissimilis est methodus in omnibus æquationibus cubicis : constitutis enim ex una parte solidis omnibus ab A affectis, ex altera solido omnino dato vel etiam cum solidis ab A vel $Aq.$ affectis, poterit fingi æqualitas superiori similis.

Proponatur exemplum in æquationibus quadratoquadraticis :

$$Aqq. + Bs. \text{ in } A + Zq. \text{ in } Aq. \quad \text{æquetur} \quad Dpp.$$

Ergo

$$Aqq. \quad \text{æquabitur} \quad Dpp. - Bs. \text{ in } A - Zq. \text{ in } Aq.$$

Æquentur hæc duo homogenea $Zq.$ in $Eq.$

Quum igitur

$$Aqq. \quad \text{æquetur} \quad Zq. \text{ in } Eq.,$$

ergo, per subdivisionem quadraticam,

$$Aq. \quad \text{æquabitur} \quad Z \text{ in } E,$$

et erit extremitas E ad parabolen positione datam.

Deinde, quum

$$Dpp. - Bs. \text{ in } A - Zq. \text{ in } Aq. \quad \text{æquetur} \quad Zq. \text{ in } Eq.,$$

omnibus per $Zq.$ divisis,

$$\frac{Dpp. - Bs. \text{ in } A}{Zq.} - Aq. \quad \text{æquabitur} \quad Eq.,$$

et erit, ex nostra methodo, extremitas E ad circulum positione datum. Sed est et ad parabolen positione datam : ergo datur.

Non dissimili methodo solventur quæstiones omnes quadratoquadraticæ : expurgabuntur enim, methodo Vietæ (Cap. I, *De emendatione*) (1), ab affectione sub cubo et, quadratoquadrato ignoto ab una parte, reliquis homogeneis ab altera constitutis, per parabolen, circulum vel hyperbolen solvetur quæstio.

Proponatur ad exemplum *inventio duarum mediarum in continua proportione*.

Sint duæ rectæ, B major, D minor, inter quas duæ mediæ proportionales sunt inveniendæ. Fiet

$$Ac. \quad \text{æqualis} \quad Bq. \text{ in } D,$$

si major mediarum ponatur A.

(1) *Voir* page 132 de l'édition de Schooten. Il s'agit de la méthode aujourd'hui vulgaire.

Æquentur singula homogenea B in A in E : illinc fiet

$$Aq. \quad \text{æquale} \quad B \text{ in } E,$$

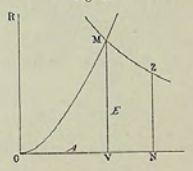
istinc

$$A \text{ in } E \quad \text{æquale} \quad B \text{ in } D,$$

ideoque quæstio per hyperboles et paraboles intersectionem perficietur.

Exponatur enim recta quævis positione data OVN (*fig.* 88), in qua detur punctum O. Sint rectæ datæ B et D, inter quas duæ mediæ pro-

Fig. 88.



portionales inveniendæ : ponatur recta OV æquari A, et recta VM, ipsi OV ad rectos angulos, æquari E.

Ex priori æqualitate, qua

$$Aq. \quad \text{æquatur} \quad B \text{ in } E,$$

constat per punctum O tanquam verticem describendam parabolen, cujus rectum latus sit B, diameter ipsi VM parallela, et applicatæ ipsi OV $<$ parallelæ $>$; transibit igitur hæc parabole per punctum M.

Ex secunda æqualitate, qua

$$B \text{ in } D \quad \text{æquatur} \quad A \text{ in } E,$$

sumatur punctum ubi libet in recta OV, ut N, a quo excitetur perpendicularis NZ, et fiat rectangulum ONZ æquale rectangulo B in D. Excitetur etiam perpendicularis OR. Circa asymptotos RO, OV describenda hyperbole per punctum Z, ex nostra methodo locali, dabitur positione et transibit per punctum M.

Sed parabole etiam quam supra descripsimus dabitur positione et per idem punctum M transit : datur igitur punctum M positione, a quo si demittatur perpendicularis MV, dabitur punctum V, et recta OV, major duarum continue proportionalium quas quærimus.

Inventæ igitur sunt duæ mediæ per intersectionem paraboles et hyperboles.

Si ad quadratoquadrata lubeat quæstionem extendere, omnia ducantur in A :

$$Aqq. \quad \text{æquabitur} \quad Bq. \text{ in } D \text{ in } A.$$

Æquentur singula homogenea, juxta superiorem methodum, $Bq.$ in $Eq.$; fient duæ æqualitates, nempe

$$Aq. \quad \text{æq.} \quad B \text{ in } E \quad \text{et} \quad D \text{ in } A \quad \text{æq.} \quad Eq.,$$

quæ singulæ dabunt parabolen positione datam. Fiet igitur constructio mesolabii per intersectionem duarum parabolarum hoc casu.

Prior constructio et posterior sunt apud Eutocium in Archimedem (1), et huic methodo facile redduntur obnoxiæ.

Abeant igitur *climacticæ* illæ *parapleroses* Vietææ (2), quibus æquationes quadratoquadraticas reducit ad quadraticas per medium cubicarum abs radice plana. Pari enim elegantia, facilitate et brevitate solvuntur, ut jam patuit, perinde quadratoquadraticæ ac cubicæ quæstiones, nec possunt, opinor, elegantius.

Ut pateat elegantia hujus methodi, en *constructionem omnium problematum cubicorum et quadratoquadraticorum per parabolen et circulum.*

Ponatur

$$Aqq. - Zs. \text{ in } A \quad \text{æquari} \quad Dpp.;$$

ergo

$$Aqq. \quad \text{æquabitur} \quad Zs. \text{ in } A + Dpp.$$

(1) Commentaire sur le Traité *de la sphère et du cylindre*, II, 2, dans les Œuvres d'Archimède; édition Torelli, page 142; édition Heiberg, vol. III, pages 93-99. Ces deux constructions sont attribuées par Eutocius à Ménechme, l'inventeur présumé des coniques.

(2) *De emendatione æquationum*, Cap. VI, pages 140 et suivantes de l'édition de Schooten. Il s'agit de la solution algébrique des équations du quatrième degré.

Fingatur quadratum abs $Aq. - Bq.$ aut alio quovis quadrato : fiet quadratum

$$Aqq. + Bqq. - Bq. \text{ in } Aq. \text{ bis.}$$

Addantur ad supplementum singulis æqualitatis partibus

$$Bqq. - Bq. \text{ in } Aq. \text{ bis :}$$

fiet

$$Aqq. + Bqq. - Bq. \text{ in } Aq. \text{ bis} \quad \text{æquale}$$
$$Bqq. - Bq. \text{ in } Aq. \text{ bis} + Zs. \text{ in } A + Dpp.$$

Sit

$$Bq. \text{ bis} \quad \text{æquale} \quad Nq.,$$

et singulis homogeneis, sive partibus æqualitatis, æquetur $Nq.$ in $Eq.$: fiet illinc, per subdivisionem quadraticam,

$$Aq. - Bq \quad \text{æquale} \quad N \text{ in } E,$$

ideoque punctum extremum E erit ad parabolen, ex nostra methodo ; istinc fiet

$$\frac{Bqq.}{Nq.} - Aq. + \frac{Zs. \text{ in } A}{Nq.} + \frac{Dpp.}{Nq.} \quad \text{æquale} \quad Eq.,$$

ideoque, ex nostra methodo, punctum extremum E erit ad circulum.

Descriptione igitur paraboles et circuli solvitur quæstio.

Hæc methodus facillime ad omnes casus tam cubicos quam quadratoquadraticos extenditur. Curandum enim tantum ut ex una parte sit $Aqq.$, ex altera quælibet homogenea, modo non afficiantur ab $Ac.$; at, per expurgationem Vietæam, omnes æquationes quadratoquadraticæ ab affectione sub cubo liberantur : ergo eadem erit in omnibus methodus.

Quum autem æquationes cubicæ liberentur ab affectione sub quadrato per methodum Vietæam (1), homogeneis omnibus in A ductis, fiet æquatio quadratoquadratica cujus nullum ex homogeneis afficietur sub cubo, ideoque solvetur per superiorem methodum.

Id solum in secunda æqualitate curandum est ut $Aq.$ ex una parte,

(1) *De emendatione æquationum*, Cap. I, pages 130 et suivantes de l'édition de Schooten.

ex altera $Eq.$, sub contraria affectionis nota reperiantur, quod est semper facillimum.

Sit enim in alio casu, ut omnia percurramus,

$$Aqq. \quad \text{æquale} \quad Zpl. \text{ in } Aq. - Zs. \text{ in } D.$$

Fingatur quodvis quadratum abs $Aq.$ — quovis quadrato dato, ut $Bq.$, fiet

$$Aqq. + Bqq. - Bq. \text{ in } Aq. \text{ bis.}$$

Adjiciatur utrique æqualitatis parti, ad supplementum,

$$Bqq. - Bq. \text{ in } Aq. \text{ bis}$$

fiet

$$Aqq. + Bqq. - Bq. \text{ in } Aq. \text{ bis} \quad \text{æquale} \quad Bqq. - Bq. \text{ in } Aq. \text{ bis} + Zpl. \text{ in } Aq. - Zs. \text{ in } D.$$

Ut igitur commoda fiat divisio, in secunda æqualitate sumenda differentia inter $Bq.$ *bis* et $Zpl.$, quæ sit, verbi gratia, $Nq.$, et utraque æqualitatis pars æquanda $Nq.$ in $Eq.$, ut illinc fiat

$$Aq. - Bq. \quad \text{æquale} \quad N \text{ in } E,$$

istinc,

$$\frac{Bqq.}{Nq.} - Aq. - \frac{Zs. \text{ in } D}{Nq.} \quad \text{æquale} \quad Eq.$$

Advertendum deinde $Bq.$ *bis* debere præstare Z *plano*, alioquin $Aq.$ non afficeretur signo defectus et pro circulo inveniremus hyperbolen. Cui promptum remedium : $Bq.$ enim ad libitum sumimus, ideoque ipsius duplum majus Z *plano* nullius est negotii sumere. Constat autem, ex methodo locali, circulum creari semper ex æqualitate, in cujus parte altera quadratum unum ignotum afficitur signo +, in altera aliud quadratum ignotum signo —.

Si sumas ad hoc exemplum inventionem duarum mediarum, erit

$$Ac. \quad \text{æqualis} \quad Bq. \text{ in } D,$$

et

$$Aqq. \quad \text{æquale} \quad Bq. \text{ in } D \text{ in } A.$$

Adjiciatur utrimque $Bqq. - Bq.$ in $Aq.$ bis :

$Aqq. + Bqq. - Bq.$ in $Aq.$ bis æquabitur $Bqq. + Bq.$ in D in $A - Bq.$ in $Aq.$ bis.

Sit

$$Bq. \text{ bis } \text{æquale } Nq.,$$

et singulæ æqualitatis partes æquentur $Nq.$ in $Eq.$: fiet illinc

$$Aq. - Bq. \quad \text{æquale} \quad N \text{ in } E,$$

ideoque extremum E erit ad parabolen; istinc fiet

$$Bq.\tfrac{1}{2} + D\tfrac{1}{2} \text{ in } A - Aq. \quad \text{æquale} \quad Eq.,$$

ideoque extremum E erit ad circulum.

Qui hæc adverterit, frustra quæstionem mesolabii, trisectionis angularis et similes, tentabit deducere ex planis, hoc est, per rectas et circulos expedire.

ISAGOGE
AD LOCOS AD SUPERFICIEM,

Carissimo Domino de CARCAVI (1).

Isagogen ad locos planos et solidos perficit tradenda τόπων πρὸς ἐπιφάνειαν ἐπίδειξις. Hanc veteres indicarunt tantum, sed neque generalibus præceptis docuerunt, neque aliquo saltem nobili exemplo adumbrarunt, nisi in iis forsitan sepultæ jamdiu Geometriæ monumentis deliteant, in quibus tot præclara veterum inventa cum blattis et tineis colluctantur dudum aut omnino evanuerunt.

Generalem tamen huic materiæ methodum non defuturam brevissima dissertatio patefaciet : pluribus enim singulas, quas summatim tradidimus huc usque in Geometricis, inventiones aliquando, si suppetet otium, illustrabimus.

Quæ igitur in lineis topicis symptomata quæsivimus et demonstravimus, eadem in superficiebus planis, sphæricis, conicis, cylindricis et conoideôn aut sphæroideôn quorumlibet inquirere nihil vetat, si præmittantur lemmata singulorum hujusmodi locorum constitutiva (2).

(1) Cet opuscule, jusqu'à présent inédit, et qui contient le premier essai connu sur la théorie générale des surfaces du second degré, est publié d'après une copie d'Arbogast, faite elle-même de seconde main.

(2) Fermat, dont le point de départ est le Livre d'Archimède *De conoïdibus et sphæroïdibus*, a bien reconnu la nécessité de généraliser la notion de la surface cylindrique, ainsi que celles des conoïdes (paraboloïdes elliptiques et hyperboloïdes à deux nappes) et sphéroïdes (ellipsoïdes) d'Archimède, qui n'avait traité que des surfaces de révolution; mais il n'a pas soupçonné l'existence du paraboloïde hyperbolique ni de l'hyperboloïde à une nappe. Son erreur apparaît au lemme 5.

Proponatur ergo pro locis ad superficiem planam lemma sequens :

1. *Si superficies quæpiam planis quotlibet in infinitum secetur, et communis sectio omnium in infinitum secantium planorum* < *et dictæ superficiei* > *sit linea recta, superficies primum posita erit planum.*

Pro locis ad superficiem sphæricam :

2. *Si superficies quæpiam planis quotlibet in infinitum secetur, et communis sectio planorum omnium secantium et dictæ superficiei sit circulus, superficies illa erit sphæra.*

Pro locis ad superficiem sphæroidis :

3. *Si superficies quæpiam planis quotlibet in infinitum secetur, et communis sectio omnium secantium planorum et dictæ superficiei sit quandoque circulus, quandoque ellipsis, et nihil præterea, superficies illa erit sphærois.*

Pro locis ad conoides parabolicos aut hyperbolicos :

4. *Si superficies quæpiam planis quotlibet in infinitum secetur, et communes sectiones (ut supra) sint quandoque circulus, quandoque ellipsis, quandoque parabole aut hyperbole, et nihil præterea, superficies primum posita erit conois parabolicus aut hyperbolicus.*

Pro locis ad conicas superficies :

5. *Si superficies quæpiam planis quotlibet in infinitum secetur, et communes sectiones sint quandoque lineæ rectæ, quandoque circuli, quandoque ellipses, quandoque parabolæ aut hyperbolæ, et nihil præterea, superficies primum posita erit conus.*

Pro locis ad superficiem cylindricam :

6. *Si superficies quæpiam planis quotlibet in infinitum secetur, et communes sectiones sint quandoque lineæ rectæ, quandoque circuli, quandoque ellipses, et nihil præterea, superficies primum posita erit cylindrus.*

Quia tamen sæpissime occurrunt loci in quibus sectiones sunt lineæ rectæ, parabolæ aut hyperbolæ et nihil præterea (quod ipsa statim quæstionis analysis indicabit), conveniens < est > et necessaria omnino huic disputationi *nova cylindrorum constitutio, in quibus bases inter se parallelæ sint parabolæ aut hyperbolæ, et latera, bases hujusmodi connectentia, sint lineæ rectæ, inter se parallelæ*, ut accidit in cylindris communibus. Ita enim fiet ut nulla omnino cylindrorum hujusmodi per planum sectio det circulos aut ellipses, eruntque aut scaleni aut recti ad imitationem communium, prout analysis topica propositæ quæstionis exposcet.

Hos autem cylindros problemata ipsa topica necessarios innuunt : quod addendum, ne videatur otiosa hujusmodi σχήματος expositio et inventio.

Imo et priusquam ulterius pergas, non omnino satisfacit huic operi Archimedea sphæroideôn et conoideôn constructio (1) : scalenos enim, perinde ac rectos, quæstiones ipsæ repræsentabunt.

Ex præmissis sequuntur pulcherrimi primo *ad superficiem sphæricam* loci :

Si a quotcumque punctis datis in quibuslibet planis ad punctum unum inflectantur rectæ, et sint quadrata quæ ab omnibus fiunt dato spatio æqualia, punctum ad inflexionem erit ad superficiem sphæricam sive sphæram positione datam. — Sphæram enim vocare possumus, ad imitationem Euclidis et veterum Geometrarum qui κύκλον non ipsius circuli τὸ ἐμβαδόν, sed circumferentiam ipsam appellarunt : superficiem sane hujusmodi punctum quampiam describet.

Exponatur quodvis planum positione datum et in illo, juxta præcepta locorum planorum et solidorum alias tradita, quæratur locus ad quem a punctis datis inflexarum quadrata æquentur spatio dato.

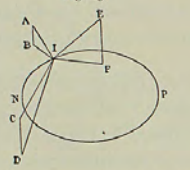
Hoc autem est facile : sit factum et locus in plano exposito sit curva NIP (*fig.* 89). In illud planum, a punctis A, E, C datis ex hypothesi, demittantur normales AB, EF, CD. Quum igitur planum hoc sit positione datum, dabuntur in illud a punctis A, E, C datis demissæ

(1) *Voir* la note 2 de la page 111 et la Préface du Traité d'Archimède *Des conoïdes et sphéroïdes* (éd. Torelli, pages 257 à 259; éd. Heiberg, vol. I, pages 274 et suiv.).

normales AB, EF, CD; dabuntur et puncta B, F, D in quibus dictæ normales plano exposito occurrunt. Sumatur in quæsita linea locali NIP quodvis punctum, ut I, et jungantur rectæ AI, BI, EI, IF, CI, DI.

Quum igitur a punctis datis A, C, E ad punctum I lineæ localis pertingant rectæ AI, EI, CI, earum quadrata comprehendunt spatium datum. Si igitur ab eis quadratis auferas normalium AB, EF, CD quadrata, quæ jam probavimus data esse, supererunt quadrata BI, FI, DI,

Fig. 89.



quorum summa proinde data est. Dantur etiam in exposito plano puncta B, F, D, ut similiter probatum est. Quum itaque a punctis B, F, D, datis in eodem plano, inflectantur rectæ ad locum in eodem etiam plano, et sint quadrata inflexarum, ut BI, FI, DI, æqualia spatio dato, patebit, ex Apolloniano (1) pridem restituto theoremate, locum NIP esse circulum positione datum, similisque omnino analysis in quovis alio plano exposito locum habebit.

Quum igitur plana omnia exposita dent circulos locales in infinitum, ergo superficies primum quæsita, ex vi secundi lemmatis, erit sphæra.

Quum enim superficiem localem proposito satisfacientem quæramus, quid vetat imaginari superficiem quæsitam plano exposito sectam? At sectio circulus esse duntaxat potest; quum enim circulus, ut jam demonstravimus, satisfaciat loco cui etiam superficies integra satisfacere debet, patet circulum in dicta superficie locali necessario collocandum. Constat igitur superficiem localem in specie proposita, dum planis secatur, dare infinitos circulos ac proinde esse sphæram.

(1) *Voir* plus haut *Apollonii de locis planis* Libr. II, prop. V, page 37.

Eâdem ratione demonstrabuntur et sequentes loci :

Si a quotcumque punctis in uno vel diversis planis ad punctum unum inflectantur rectæ, et quadrata, quæ ab aliquibus inflexarum fiunt, ad quadrata quæ a reliquis, sint vel in data ratione vel in data differentia vel dato majora aut minora quam in ratione, punctum ad inflexionem erit ad sphæram positione datam.

Non dissimili artificio pulcherrima in infinitum superficiei sphæricæ symptomata detegentur.

Si sint quotlibet plana positione data, et a puncto quodam in data plana demittantur rectæ in angulis datis, quarum quadrata omnia simul sumpta æquentur spatio dato, punctum erit ad superficiem sphæroidis positione dati.

Fiat analysis et exponatur, ut docet methodus, planum quodlibet positione datum, in quo (juxta præcepta locorum planorum et solidorum quæ in uno duntaxat plano olim expendebamus) quæratur linea localis a cujus puncto quolibet in plana data demissarum in angulis datis quadrata æquentur spatio dato.

Facillima statim evadet constructio : quum enim planum expositum detur positione non secus ac plana data, ergo et communes plani expositi et datorum sectiones similiter dantur. Commodam igitur in analyticis denominationem accipiunt rectæ a quovis puncto plani expositi in plana data demissæ. Harum quadrata si jungas et æques spatio dato, exhibebit analysis in plano exposito circulos tantum aut ellipses locales, neque in quovis alio plano positione dato alium methodus locum poterit exhibere, ut ipse analyseos progressus indicabit.

Patet itaque, ex tertio lemmate, locum quæsitum, quum circulos det tantum aut ellipses, esse sphæroiden.

Si quadratorum hujusmodi pars quævis assignata ad reliquam sit in data differentia vel in data ratione vel dato major aut minor quam in ratione, fient superficies aut sphæroidis aut conoidis aut conicæ aut cylindricæ etc., prout positio datorum planorum expostulabit, idque statim solerti analyseos filo deprehendetur.

Verbi gratia, si sint in data ratione, fient superficies, ut plurimum, conoideòn; si vero communes sectiones planorum datorum ad unum punctum concurrant, fient superficies mere conicæ; et, si sectiones planorum datorum sint inter se parallelæ, fient superficies mere cylindricæ, hoc est, vel nostrorum vel communium cylindrorum.

Usus omnia statim patefaciet : generalia quippe summatim tradenda sunt, nec frequentibus nimis exemplis methodi perspicuitas obruenda.

Ultimum plano locali destinavimus exemplum, quod primam fortasse sedem debuerat occupare.

Si sint quotlibet plana positione data, et a puncto quovis in dicta plana demittantur rectæ in datis angulis, et sit rectarum omnium demissarum summa æqualis rectæ datæ, punctum erit ad planum positione datum.

Secentur quippe, ex superiori methodo, plana data a plano quolibet positione dato, et in eo, juxta methodum locorum planorum jam traditam, quæratur locus propositioni satisfaciens. Erit ille linea recta, ut constabit ex analysi, et in quibuscumque per plana sectionibus idem continget. Patet igitur, ex primo lemmate, locum quæsitum esse superficiem planam.

Si hujusmodi rectarum pars quævis assignata ad reliquam sit in data differentia vel ratione, vel datâ major quam in ratione, punctum erit similiter ad superficiem planam positione datam.

Imo et in superioribus quæstionibus, si plana essent inter se parallela, superficies localis esset plana, quod vix erat ut admoneremus.

Coronidis loco addere libet et huic etiam aptare operi insigne illud, de loco ad tres $<$ et $>$ quatuor lineas Apollonii (1), ἐπιχείρημα.

(1) Pappi Alexandrini Collectionis quæ supersunt (éd. Hultsch, Berlin, 1876-1878), Livre VII, pages 674-681.

Pappus (p. 678, l. 15 à 25) définit le lieu à trois ou quatre lignes, à propos d'un passage de la Préface des *Coniques* d'Apollonius, qu'il reproduit et qu'il discute. Au reste, l'invention du problème est antérieure au géomètre de Perge et doit remonter au moins à Aristée l'ancien, qui en avait probablement abordé l'analyse dans ses Livres perdus *Des lieux solides;* Apollonius reprochait à Euclide de n'avoir, dans ses *Coniques*, donné qu'une synthèse incomplète.

La question était redevenue célèbre depuis l'apparition de la *Géométrie* de Descartes, où elle joue un rôle capital; *voir* notamment pages 324 et suivantes de l'édition originale (*Discours de la Méthode pour bien conduire sa raison et chercher la vérité dans les sciences. Plus la Dioptrique, les Météores et la Géométrie qui sont des essais de cette méthode.* A Leyde, de l'imprimerie de Jan Maire, CIↃ IↃC XXXVII. Avec privilège); pages 21 à 28 de l'édition de Paris, Hermann, 1886. Mais Fermat avait lui-même abordé dès longtemps ce problème : *voir* plus haut, pages 87 à 89.

Si sint tria plana positione data, et a puncto quodam in dicta plana demittantur rectæ in datis angulis, et sit quod fit a duabus ductis rectangulum ad quadratum reliquæ in ratione data, punctum erit vel ad planum vel ad sphæram vel ad sphæroiden vel ad conoides vel etiam ad superficies conicam aut cylindricam (veterem aut novam), prout plana data positionem sortita fuerint.

Nec absimilis *in quatuor planis* inventio, ut cuilibet obvium.

Casus, determinationes, infinita problemata localia seu mavis theoremata, quæ brevitatis causa omisimus, lemmatum præmissorum demonstrationes, et reliqua quæ diligentius forsan fuerant explicanda, sedulus et accuratus Geometra, cui hæc venerint in manus, facillime supplebit, neque latebit deinceps arduæ, ut videbatur, materiæ proclivis intelligentia.

Tolosæ, 6 januarii 1643.