MÉMOIRE

SUR

LES VALEURS GÉNÉRALES DES EXPRESSIONS

$\operatorname{arc\,tang} z$, $\operatorname{arc\,cot} z$, $\operatorname{arc\,sin} z$, $\operatorname{arc\,cos} z$, $\operatorname{arc\,séc} z$, $\operatorname{arc\,coséc} z$

I. — *Formules qui déterminent ces valeurs et les font dépendre des logarithmes principaux de certaines quantités géométriques.*

D'après ce qui a été dit dans l'avant-dernier article, si l'on désigne par z une quantité positive ou négative, on aura

$$\operatorname{arc\,tang} z = \frac{1}{2i}\,\mathrm{l}\,\frac{1+zi}{1-zi}, \tag{1}$$

ou, ce qui revient au même, eu égard à la formule (8) de la page 263,

$$\operatorname{arc\,tang} z = \frac{\mathrm{l}(1+zi)-\mathrm{l}(1-zi)}{2i}. \tag{2}$$

De plus, comme un arc, dont z serait la cotangente, aurait pour tangente $\frac{1}{z}$, on trouvera encore généralement

$$\operatorname{arc\,cot} z = \operatorname{arc\,tang} \frac{1}{z}. \tag{3}$$

Ajoutons que si z, offrant une valeur numérique inférieure à l'unité, représente le sinus d'un arc compris entre les limites $-\frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{2}$, cet arc aura pour cosinus la quantité positive $\sqrt{1-z^2}$, et pour tangente le rapport

$$\frac{z}{\sqrt{1-z^2}}.$$

On aura donc encore

$$\text{arc}\sin z = \text{arc}\,\text{tang}\,\frac{z}{\sqrt{1-z^2}}. \tag{4}$$

Enfin, on aura évidemment, pour une valeur numérique de z inférieure à l'unité,

$$\text{arc}\cos z = \frac{\pi}{2} - \text{arc}\sin z, \tag{5}$$

et, pour une valeur numérique de z supérieure à l'unité,

$$\text{arc}\,\text{séc}\,z = \text{arc}\cos\frac{1}{z}, \tag{6}$$

$$\text{arc}\,\text{coséc}\,z = \text{arc}\sin\frac{1}{z}. \tag{7}$$

Les formules (1) ou (2), (3), (4), (5), (6), (7) fournissent un moyen très simple de fixer le sens qu'on doit attacher aux expressions

$$\text{arc}\,\text{tang}\,z,\quad \text{arc}\cot z,\quad \text{arc}\sin z,\quad \text{arc}\cos z,\quad \text{arc}\,\text{séc}\,z,\quad \text{arc}\,\text{coséc}\,z,$$

dans le cas où z cesse d'être une quantité algébrique. En effet, les valeurs de ces expressions pourront toujours être facilement obtenues si l'on convient d'étendre les formules dont il s'agit au cas où z se transforme en une quantité géométrique quelconque. Cette convention, que nous adopterons désormais, permettra, eu égard à la formule (1), de réduire la détermination des valeurs cherchées à la détermination des logarithmes principaux de certaines quantités géométriques. Si l'on veut, en particulier, obtenir la valeur générale de $\text{arc}\sin z$ exprimée à l'aide d'un ou de plusieurs logarithmes principaux, il suffira de joindre à la formule (1) la formule (4), de laquelle on tirera

$$\text{arc}\sin z = \frac{1}{2i}\,\mathrm{l}\,\frac{1+\dfrac{z}{\sqrt{1-z^2}}\,i}{1+\dfrac{1}{\sqrt{1-z^2}}\,i},$$

ou, ce qui revient au même,

$$\text{arc}\sin z = \frac{1}{2i}\,\mathrm{l}\,\frac{\sqrt{1-z^2}+zi}{\sqrt{1-z^2}-zi}. \tag{8}$$

D'ailleurs, l'argument principal de $1-z^2$ étant compris entre les limites $-\pi$, $+\pi$, le radical $\sqrt{1-z^2}$ offrira un argument principal compris entre les limites $-\frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{2}$, par conséquent, une partie algébrique positive; et, comme des deux quantités opposées

$$-zi,\quad +zi,$$

l'une jouit nécessairement de la même propriété, on pourra encore en dire autant de l'une des deux quantités géométriques

$$\sqrt{1-z^2}+zi,\quad \sqrt{1-z^2}-zi,$$

dont le produit se réduit à la quantité positive 1. Donc, en vertu du théorème I de la page 265 [1], on aura

$$\mathrm{l}\,\frac{\sqrt{1-z^2}+zi}{\sqrt{1-z^2}-zi} = \mathrm{l}\left[\sqrt{1-z^2}+zi\right] - \mathrm{l}\left[\sqrt{1-z^2}-zi\right].$$

Ajoutons que de cette dernière formule, jointe à l'équation

$$\mathrm{l}\left[\sqrt{1-z^2}+zi\right] + \mathrm{l}\left[\sqrt{1-z^2}-zi\right] = 0,$$

on tirera

$$\frac{1}{2}\,\mathrm{l}\,\frac{\sqrt{1-z^2}+zi}{\sqrt{1-z^2}-zi} = \mathrm{l}\left[\sqrt{1-z^2}+zi\right] = -\,\mathrm{l}\left[\sqrt{1-z^2}-zi\right].$$

Par conséquent, on pourra encore présenter l'équation (8) sous l'une ou l'autre des deux formes

$$\text{arc}\sin z = \frac{1}{i}\,\mathrm{l}\left[\sqrt{1-z^2}+zi\right], \tag{9}$$

$$\text{arc}\sin z = -\frac{1}{i}\,\mathrm{l}\left[\sqrt{1-z^2}-zi\right]. \tag{10}$$

Il est bon de rappeler que le coefficient de i dans un logarithme népérien principal est toujours un argument compris entre les limites $-\pi$, $+\pi$. Cela posé, on conclura immédiatement des formules (1),

(1) *Œuvres de Cauchy*, ce tome, p. 305.

(3), (4) et (7) que, dans la valeur générale de chacune des expressions

$$\operatorname{arc\,tang} z,\quad \operatorname{arc\,cot} z,\quad \operatorname{arc\,sin} z,\quad \operatorname{arc\,coséc} z,$$

la partie algébrique sera toujours un arc renfermé entre les limites $-\frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{2}$, par conséquent, un arc dont le cosinus sera positif. On conclura, au contraire, des formules (5) et (6) que, dans la valeur générale de chacune des expressions

$$\operatorname{arc\,cos} z,\quad \operatorname{arc\,séc} z,$$

la partie algébrique sera toujours un arc renfermé entre les limites 0, π, par conséquent, un arc dont le sinus sera positif.

II. — *Sur les quantités géométriques* $\operatorname{arc\,tang} z$, $\operatorname{arc\,cot} z$, $\operatorname{arc\,sin} z$, $\operatorname{arc\,cos} z$, $\operatorname{arc\,séc} z$, $\operatorname{arc\,coséc} z$, *considérées comme fonctions inverses.*

Les définitions admises dans le paragraphe précédent satisfont à une condition qu'il importait de remplir, et réduisent les quantités géométriques

$$\operatorname{arc\,tang} z,\quad \operatorname{arc\,cot} z,\quad \operatorname{arc\,sin} z,\quad \operatorname{arc\,cos} z,\quad \operatorname{arc\,séc} z,\quad \operatorname{arc\,coséc} z$$

à des fonctions de z inverses de celles qui ont été désignées sous les noms de tangente, cotangente, sinus, cosinus, sécante et cosécante. Ainsi, par exemple, on prouvera sans peine que la fonction de z représentée par la notation $\operatorname{arc\,tang} z$, est inverse de celle qui a été nommée *tangente*, ou, en d'autres termes, que la fonction $\operatorname{arc\,tang} z$ a pour tangente la variable z. On y parviendra en effet comme il suit :

Posons, pour abréger,

$$Z = \operatorname{arc\,tang} z. \tag{1}$$

On aura encore, eu égard à l'équation (1) du paragraphe I,

$$Z = \frac{1}{2i}\,l\frac{1+zi}{1-zi},$$

par conséquent

$$\frac{1+zi}{1-zi} = e^{2Zi},$$

et

$$z = \frac{1}{i}\,\frac{e^{2Zi}-1}{e^{2Zi}+1} = \frac{1}{i}\,\frac{e^{Zi}-e^{-Zi}}{e^{Zi}+e^{-Zi}}. \tag{2}$$

Mais, d'autre part, on aura, en vertu des équations (3) de l'article précédent,

$$\cos Z = \frac{e^{Zi}+e^{-Zi}}{2},\qquad \sin Z = \frac{e^{Zi}-e^{-Zi}}{2i},$$

par conséquent

$$\operatorname{tang} Z = \frac{\sin Z}{\cos Z} = \frac{1}{i}\,\frac{e^{Zi}-e^{-Zi}}{e^{Zi}+e^{-Zi}}.$$

Donc la formule (2) donnera simplement

$$z = \operatorname{tang} Z. \tag{3}$$

Or, des formules (1) et (3), comparées l'une à l'autre, il résulte qu'en vertu des définitions admises dans le paragraphe I, la notation $\operatorname{arc\,tang} z$ satisfait à la condition qu'il convenait de remplir, et représente une fonction inverse de la fonction $\operatorname{tang} z$.

Si à l'équation (1) on substituait la suivante

$$Z = \operatorname{arc\,cot} z, \tag{4}$$

alors, eu égard à la formule (3) du paragraphe I, on aurait encore

$$Z = \operatorname{arc\,tang}\frac{1}{z},$$

par conséquent

$$\frac{1}{z} = \operatorname{tang} Z = \frac{\sin Z}{\cos Z} = \frac{1}{\cos Z},$$

et

$$z = \cot Z. \tag{5}$$

On en conclurait qu'en vertu des définitions admises dans le paragraphe I, $\operatorname{arc\,cot} z$ est une fonction inverse de $\cot z$.

Supposons maintenant

$$Z = \operatorname{arc\,sin} z. \tag{6}$$

Alors en vertu des équations (9) et (10) du paragraphe I, on aura

$$\mathrm{l}[\sqrt{1-z^2}+z\mathrm{i}]=Z\mathrm{i}, \qquad \mathrm{l}[\sqrt{1-z^2}-z\mathrm{i}]=-Z\mathrm{i},$$

par conséquent

$$\sqrt{1-z^2}+z\mathrm{i}=e^{Z\mathrm{i}}, \qquad \sqrt{1-z^2}-z\mathrm{i}=e^{-Z\mathrm{i}};$$

puis de ces dernières formules, combinées entre elles par voie de soustraction, l'on tirera

$$2z\mathrm{i}=e^{Z\mathrm{i}}-e^{-Z\mathrm{i}};$$

par conséquent

$$z=\frac{e^{Z\mathrm{i}}-e^{-Z\mathrm{i}}}{2\mathrm{i}},$$

ou, ce qui revient au même,

$$z=\sin Z. \tag{7}$$

On en conclura qu'en vertu des définitions admises, $\arcsin z$ est une fonction inverse de $\sin z$.

Si l'on supposait

$$Z=\operatorname{arc}\cos z, \tag{8}$$

alors, eu égard à l'équation (5) du paragraphe I, on trouverait

$$Z=\frac{\pi}{2}-\arcsin z,$$

par conséquent

$$\arcsin z=\frac{\pi}{2}-Z,$$

et

$$z=\sin\left(\frac{\pi}{2}-Z\right),$$

ou, ce qui revient au même, eu égard à la seconde des formules (29) de l'article précédent,

$$z=\cos Z. \tag{9}$$

On en conclurait qu'en vertu des définitions admises, $\operatorname{arc}\cos z$ est une fonction inverse de $\cos z$.

Enfin, si l'on supposait

$$Z=\operatorname{arc}\operatorname{séc} z, \tag{10}$$

on aurait encore, eu égard à la formule (6) du paragraphe I,

$$Z=\operatorname{arc}\cos\frac{1}{z},$$

par conséquent

$$\frac{1}{z}=\cos Z=\frac{1}{\operatorname{séc} Z},$$

et

$$z=\operatorname{séc} Z; \tag{11}$$

et, après avoir ainsi reconnu que $\operatorname{arc}\operatorname{séc} z$ est une fonction inverse de $\operatorname{séc} z$, on prouverait par un raisonnement semblable que $\operatorname{arc}\operatorname{coséc} z$ est une fonction inverse de $\operatorname{coséc} z$.

III. — *Sur les formules qui mettent en évidence la partie algébrique et le coefficient de* i, *dans chacune des expressions* $\operatorname{arc}\operatorname{tang} z,\quad \operatorname{arc}\cot z,\quad \arcsin z,\quad \ldots.$

Si dans les expressions

$$\operatorname{arc}\operatorname{tang} z,\quad \operatorname{arc}\cot z,\quad \arcsin z,\quad \operatorname{arc}\cos z,\quad \operatorname{arc}\operatorname{séc} z,\quad \operatorname{arc}\operatorname{coséc} z,$$

on réduit z à la forme

$$z=x+y\mathrm{i}, \tag{1}$$

x et y étant deux quantités algébriques, chacune de ces expressions pourra être réduite à une forme semblable, et, pour opérer une telle réduction, il suffira de joindre aux formules établies dans le paragraphe I la formule (30) de la page 271 [1]. Entrons à ce sujet dans quelques détails.

Si à la formule (1) on joint l'équation (2) du paragraphe I, on trouvera

$$\operatorname{arc}\operatorname{tang} z=\frac{\mathrm{l}(1-y+x\mathrm{i})-\mathrm{l}(1+y-x\mathrm{i})}{2\mathrm{i}}. \tag{2}$$

[1] *Œuvres de Cauchy*, ce tome, p. 313.

D'ailleurs, en remplaçant, dans la formule (30) de la page 271, y par x et x par $1-y$, ou y par $-x$ et x par $1+y$, on aura

$$\mathrm{l}(1-y+x\mathrm{i}) = \frac{1}{2}\mathrm{l}[x^2+(1-y)^2] + \mathrm{i}\frac{x}{\sqrt{x^2}}\arccos\frac{1-y}{\sqrt{x^2+(1-y)^2}},$$

$$\mathrm{l}(1+y-x\mathrm{i}) = \frac{1}{2}\mathrm{l}[x^2+(1+y)^2] - \mathrm{i}\frac{x}{\sqrt{x^2}}\arccos\frac{1+y}{\sqrt{x^2+(1+y)^2}}.$$

Par conséquent, la formule (2) donnera

$$(3)\quad \operatorname{arc\,tang} z = \frac{1}{2}\frac{x}{\sqrt{x^2}}\left[\arccos\frac{1+y}{\sqrt{x^2+(1+y)^2}} + \arccos\frac{1-y}{\sqrt{x^2+(1-y)^2}}\right] + \frac{\mathrm{i}}{2}\,\frac{\mathrm{l}[x^2+(1+y)^2] - \mathrm{l}[x^2+(1-y)^2]}{2}.$$

Si à l'équation (2) du paragraphe I, on substituait l'équation (1) [*ibidem*], alors, en ayant égard à la formule

$$\frac{1+z\mathrm{i}}{1-z\mathrm{i}} = \frac{1-y+x\mathrm{i}}{1+y-x\mathrm{i}} = \frac{(1+x\mathrm{i})^2-y^2}{(1+y)^2+x^2} = \frac{1-x^2-y^2+2x\mathrm{i}}{(1+y)^2+x^2}$$

et à l'équation (30) de la page 271, on trouverait d'abord

$$(4)\qquad \operatorname{arc\,tang} z = \frac{1}{2\mathrm{i}}\,\mathrm{l}\frac{1-y+x\mathrm{i}}{1+y-x\mathrm{i}},$$

puis

$$(5)\quad \operatorname{arc\,tang} z = \frac{1}{2}\frac{x}{\sqrt{x^2}}\arccos\frac{1-x^2-y^2}{\sqrt{x^2+(1+y)^2}\sqrt{x^2+(1-y)^2}} + \frac{\mathrm{i}}{4}\,\mathrm{l}\frac{x^2+(1+y)^2}{x^2+(1-y)^2}.$$

En comparant l'une à l'autre les valeurs de $\operatorname{arc\,tang} z$, données par les formules (3) et (5), on trouve

$$(6)\quad \arccos\frac{1+y}{\sqrt{x^2+(1+y)^2}} + \arccos\frac{1-y}{\sqrt{x^2+(1-y)^2}} = \arccos\frac{1-x^2-y^2}{\sqrt{x^2+(1+y)^2}\sqrt{x^2+(1-y)^2}}.$$

Au reste, pour établir directement la formule (6), il suffit d'observer que les arcs

$$\arccos\frac{1+y}{\sqrt{x^2+(1+y)^2}},\quad \arccos\frac{1-y}{\sqrt{x^2+(1-y)^2}}$$

ont pour sinus respectifs les deux rapports

$$\frac{\sqrt{x^2}}{\sqrt{x^2+(1+y)^2}},\quad \frac{\sqrt{x^2}}{\sqrt{x^2+(1-y)^2}},$$

qu'en conséquence la somme de ces arcs a pour cosinus le rapport

$$\frac{(1+y)(1-y)-x^2}{\sqrt{x^2+(1+y)^2}\sqrt{x^2+(1-y)^2}},$$

et que, d'ailleurs, les deux arcs dont il s'agit étant les arguments principaux des binomes

$$1-z\mathrm{i},\quad 1+z\mathrm{i},$$

dont la somme est positive, doivent, en vertu du premier théorème de la page 261, offrir pour somme un argument compris entre les limites $-\pi$, π.

Supposons maintenant que l'on veuille mettre en évidence la partie réelle et le coefficient de i, non plus dans $\operatorname{arc\,tang} z$, mais dans $\arcsin z$, et réduire ainsi l'expression $\arcsin z$, à la forme $X+Yi$, X, Y étant deux quantités algébriques. Il suffira de réduire à une forme semblable l'un des binomes

$$\sqrt{1-z^2}+z\mathrm{i},\quad \sqrt{1-z^2}-z\mathrm{i},$$

ou le rapport de ces binomes; puis, de recourir aux formules (9), (10) ou (8) du paragraphe I, en ayant d'ailleurs égard à l'équation (30) de la page 271. Ajoutons qu'on arrivera encore aux mêmes conclusions en opérant comme il suit :

Si l'on pose

$$(7)\qquad \arcsin z = Z = X + Y\mathrm{i},$$

X, Y étant deux quantités algébriques, on aura, en vertu de la formule (7) du paragraphe II,

$$z = \sin Z,$$

ou, ce qui revient au même,

$$x + y\mathrm{i} = \sin(X+Y\mathrm{i}) = \frac{e^Y+e^{-Y}}{2}\sin X + \mathrm{i}\,\frac{e^Y-e^{-Y}}{2}\cos X;$$

puis on en conclura

$$(8) \qquad x = \frac{e^Y + e^{-Y}}{2}\sin X, \qquad y = \frac{e^Y - e^{-Y}}{2}\cos X.$$

Si d'ailleurs on pose, pour abréger,

$$(9) \qquad \frac{e^Y + e^{-Y}}{2} = u, \qquad \frac{e^Y - e^{-Y}}{2} = v,$$

les équations (8) donneront

$$(10) \qquad \sin X = \frac{x}{u}, \qquad \cos X = \frac{y}{v},$$

et de ces dernières, combinées avec la formule

$$\cos^2 X + \sin^2 X = 1,$$

on tirera

$$(11) \qquad \frac{x^2}{u^2} + \frac{y^2}{v^2} = 1.$$

Mais, d'autre part, on tirera des formules (9)

$$(12) \qquad u^2 - v^2 = 1,$$

ou, ce qui revient au même,

$$(13) \qquad u^2 = v^2 + 1,$$

et l'équation (11), jointe à la formule (13), donnera

$$\frac{x^2}{v^2+1} + \frac{y^2}{v^2} = 1,$$

par conséquent

$$v^4 - (x^2 + y^2 - 1)v^2 - y^2 = 0.$$

Donc, v^2 ne pouvant être qu'une quantité positive, on aura

$$(14) \qquad v^2 = \frac{x^2 + y^2 - 1}{2} + \sqrt{\left(\frac{x^2 + y^2 - 1}{2}\right)^2 + y^2},$$

et la formule (13) donnera

$$(15) \qquad u^2 = \frac{x^2 + y^2 + 1}{2} + \sqrt{\left(\frac{x^2 + y^2 - 1}{2}\right)^2 + y^2}.$$

Enfin, comme, eu égard à la première des formules (9), u sera nécessairement positif, on tirera de l'équation (15)

$$(16) \qquad u = \left[\frac{x^2 + y^2 + 1}{2} + \sqrt{\left(\frac{x^2 + y^2 - 1}{2}\right)^2 + y^2}\right]^{\frac{1}{2}}.$$

Observons maintenant qu'en vertu d'une remarque faite à la fin du paragraphe I, la partie algébrique X de $Z = \arcsin z$ sera toujours un angle compris entre les limites $-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}$. Donc la première des formules (10) donnera

$$(17) \qquad X = \arcsin\frac{x}{u};$$

et la seconde devra fournir une valeur positive de $\cos X$; en d'autres termes, y et v devront être des quantités de même signe. Donc la formule (14) donnera

$$(18) \qquad v = \frac{y}{\sqrt{y^2}}\left[\frac{x^2 + y^2 - 1}{2} + \sqrt{\left(\frac{x^2 + y^2 - 1}{2}\right)^2 + y^2}\right]^{\frac{1}{2}},$$

et, puisqu'on tirera des formules (9),

$$e^Y = u + v,$$

on aura encore

$$(19) \qquad Y = \mathrm{l}(u + v).$$

Ajoutons que des formules (17) et (19), jointes à l'équation (7), on tirera définitivement

$$(20) \qquad \arcsin z = \arcsin\frac{x}{u} + i\,\mathrm{l}(u + v),$$

les valeurs de u, v étant déterminées par les formules (16) et (18).

Remarquons encore qu'en vertu de l'équation (12), présentée sous la forme

$$(u - v)(u + v) = 1,$$

$u - v$, $u + v$ seront deux quantités géométriques conjuguées, et, par suite, cette équation donnera [*voir* la formule (32) de la page 254 (1)]

$$\mathrm{l}(u - v) + \mathrm{l}(u + v) = 0,$$

(1) *Œuvres de Cauchy*, ce tome, p. 291.

ou, ce qui revient au même,

$$l(u+v) = -l(u-v).$$

Donc la formule (20) pourra s'écrire comme il suit :

$$\text{arc sin } z = \text{arc sin}\frac{x}{u} - i\,l(u-v). \tag{21}$$

De l'équation (20) ou (21), jointe à l'équation (5) du paragraphe I, on déduira immédiatement celle qui met en évidence, dans un arc $\cos z$, la partie algébrique et le coefficient de i. En opérant ainsi, on trouvera

$$\text{arc cos } z = \text{arc cos}\frac{x}{u} - i\,l(u+v), \tag{22}$$

ou, ce qui revient au même,

$$\text{arc cos } z = \text{arc cos}\frac{x}{u} + i\,l(u-v). \tag{23}$$

Enfin, si l'on veut mettre en évidence la partie réelle et le coefficient de i, non plus dans chacune des expressions

$$\text{arc tang } z, \quad \text{arc sin } z, \quad \text{arc cos } z,$$

mais dans chacune des suivantes,

$$\text{arc cot } z, \quad \text{arc coséc } z, \quad \text{arc séc } z,$$

il suffira d'avoir égard aux formules (3), (6), (7) du paragraphe I, par conséquent il suffira de remplacer, dans les formules (3) ou (5), (20) ou (21), (22) ou (23),

$$z = x + yi \quad \text{par} \quad \frac{1}{z} = \frac{x - yi}{r^2},$$

la valeur de r étant

$$r = \sqrt{x^2 + y^2};$$

en d'autres termes, il suffira de substituer, dans les valeurs trouvées de

$$\text{arc tang } z, \quad \text{arc sin } z, \quad \text{arc cos } z,$$

$\frac{x}{r^2}$ à x et $-\frac{y}{r^2}$ à y.

Soit maintenant z' la quantité géométrique conjuguée à z, en sorte que l'on ait

$$z' = x - yi.$$

Pour passer de z à z' et de arc tang z à arc tang z', il suffira de remplacer dans le second membre de la formule (3) ou (5), y par $-y$, ou, ce qui revient au même, i par $-$i. Donc

$$\text{arc tang } z \quad \text{et} \quad \text{arc tang } z'$$

seront deux quantités géométriques conjuguées l'une à l'autre. De plus, comme, en vertu de la remarque faite à la page 259, les radicaux

$$\sqrt{1-z^2}, \quad \sqrt{1-z'^2}$$

seront encore deux quantités géométriques conjuguées, on pourra en dire autant, non seulement des rapports

$$\frac{z}{\sqrt{1-z^2}}, \quad \frac{z'}{\sqrt{1-z'^2}},$$

mais aussi des expressions

$$\text{arc tang}\frac{z}{\sqrt{1-z^2}}, \quad \text{arc tang}\frac{z'}{\sqrt{1-z'^2}},$$

ou, ce qui revient au même, des expressions

$$\text{arc sin } z, \quad \text{arc sin } z',$$

et, par suite, eu égard aux formules (3), (5), (6), (7) du paragraphe I, les quantités géométriques

$$\text{arc cot } z', \quad \text{arc cos } z', \quad \text{arc séc } z', \quad \text{arc coséc } z'$$

seront respectivement conjuguées aux quantités géométriques

$$\text{arc cot } z, \quad \text{arc cos } z, \quad \text{arc séc } z, \quad \text{arc coséc } z.$$

En terminant ce paragraphe, j'observerai que les formules (20), (22) et (3) coïncident avec les formules (107), (130) et (159) de la onzième leçon de mon *Calcul différentiel* (¹), ou plutôt avec celles dans lesquelles elles se transforment quand on remplace le radical $\sqrt{-1}$

(¹) *Œuvres de Cauchy*, série II, t. IV, p. 420.

par la lettre i. Seulement, la formule (159) de cette onzième leçon était la formule (3) restreinte au cas où la valeur numérique de y ne surpasse pas l'unité.

IV. — *Sur certaines valeurs singulières des expressions*

$$\operatorname{arc\,tang} z,\quad \operatorname{arc\,cot} z,\quad \operatorname{arc\,sin} z,\quad \ldots.$$

Le principe auquel il parait convenable de recourir pour déterminer les valeurs singulières des fonctions se trouve énoncé à la page 45 de mon *Analyse algébrique* [1], dans les termes suivants :

« Lorsque, pour un système de valeurs attribuées aux variables qu'elle renferme, une fonction d'une ou de plusieurs variables n'admet qu'une seule valeur, cette valeur unique se déduit ordinairement de la définition même de la fonction. S'il se présente un cas particulier dans lequel la définition donnée ne puisse plus fournir immédiatement la valeur de la fonction que l'on considère, on cherche la limite ou les limites vers lesquelles cette fonction converge, tandis que les variables s'approchent indéfiniment des valeurs particulières qui leur sont assignées; et, s'il existe une ou plusieurs limites de cette espèce, elles sont regardées comme autant de valeurs de la fonction dans l'hypothèse admise. Nous nommons *valeurs singulières* de la fonction proposée, celles qui se trouvent déterminées, comme on vient de le dire; telles sont, par exemple, celles qu'on obtient, en attribuant aux variables des valeurs infinies, et souvent aussi celles qui correspondent à des solutions de continuité. »

Si, en partant de ce principe, on cherche la valeur singulière du rapport $\frac{a}{x}$ dans le cas où, la constante a étant réelle et distincte de zéro, la variable x supposée réelle s'évanouit, on reconnaîtra, comme je l'ai remarqué à la page 46 de mon *Analyse algébrique*, que cette valeur singulière est double et se réduit à $\pm\infty$. D'ailleurs le principe énoncé peut être appliqué à une fonction quelconque de variables réelles x, y,

[1] *Œuvres de Cauchy*, série II, t. III, p. 51.

ou même de la quantité géométrique

$$z = x + y\mathrm{i};$$

par exemple, aux fonctions

$$\mathrm{l}(z),\quad \operatorname{arc\,tang} z,\quad \operatorname{arc\,cot} z,\quad \operatorname{arc\,sin} z,\quad \ldots.$$

Si l'on considère, en particulier, la fonction $\mathrm{l}(z)$, et si l'on cherche la valeur singulière de cette fonction correspondante à une valeur négative $-r$ de la variable z, le principe énoncé fournira l'équation (16) de la page 250, c'est-à-dire la formule

$$\mathrm{l}(-r) = \mathrm{l}(r) \pm \pi\mathrm{i},$$

dans laquelle le double signe devra être réduit au signe $+$ ou au signe $-$, suivant que la quantité négative $-r$ sera censée représenter la limite vers laquelle convergera, pour des valeurs infiniment petites du nombre ε, l'un ou l'autre des deux binomes

$$-r+\varepsilon\mathrm{i},\quad -r-\varepsilon\mathrm{i}.$$

Considérons maintenant la fonction arc tang$z$. Lorsqu'on y posera

$$z = x + y\mathrm{i}, \tag{1}$$

x, y étant réels, on pourra déduire généralement sa valeur de l'équation (3) du précédent paragraphe, c'est-à-dire de la formule

$$\begin{aligned} \operatorname{arc\,tang} z = {} & \frac{1}{2}\frac{x}{\sqrt{x^2}}\left[\operatorname{arc\,cos}\frac{1+y}{\sqrt{x^2+(1+y)^2}} + \operatorname{arc\,cos}\frac{1-y}{\sqrt{x^2+(1-y)^2}}\right] \\ & + \frac{\mathrm{i}}{2}\,\frac{\mathrm{l}[x^2+(1+y)^2] - \mathrm{l}[x^2+(1-y)^2]}{2}, \end{aligned} \tag{2}$$

en vertu de laquelle la valeur cherchée sera ordinairement unique et finie. Toutefois, cette valeur pourra ou devenir infinie, ou se présenter sous une forme indéterminée, non seulement pour des valeurs infinies de x ou y, mais encore pour des valeurs finies de ces deux variables, savoir, lorsque, x étant nul, le premier au moins des trois rapports

$$\frac{x}{\sqrt{x^2}},\quad \frac{1+y}{\sqrt{x^2+(1-y)^2}},\quad \frac{1-y}{\sqrt{x^2+(1-y)^2}}$$

se présentera sous la forme $\frac{0}{0}$. Dans cette dernière hypothèse, où l'on aura simplement

$$z = y\mathrm{i},$$

la formule (2) ne cessera pas de fournir pour arc tang z une valeur unique et finie, si la valeur numérique de y est inférieure à l'unité, attendu qu'alors les deux arcs compris dans la formule s'évanouiront, ce qui réduira la valeur cherchée à

$$\frac{\mathrm{i}}{2}\,\mathrm{l}\,\frac{1+y}{1-y}.$$

Mais, si l'on a simultanément

$$x = 0, \qquad y^2 > 1,$$

alors, l'un des rapports

$$\frac{1+y}{\sqrt{x^2+(1+y)^2}}, \quad \frac{1-y}{\sqrt{x^2+(1-y)^2}}$$

étant réduit à l'unité, l'autre à -1, les arcs dont ces rapports sont les cosinus se réduiront, l'un à 0, l'autre à π; et, comme, pour des valeurs infiniment petites de x, le rapport

$$\frac{x}{\sqrt{x^2}}$$

convergera vers la limite 1 ou -1, suivant que ces valeurs seront positives ou négatives, on tirera de la formule (2)

$$\operatorname{arc\,tang}(y\mathrm{i}) = \pm\frac{\pi}{2} + \frac{\mathrm{i}}{4}\,\mathrm{l}\left(\frac{y+1}{y-1}\right)^2,$$

ou, ce qui revient au même,

(3) $$\operatorname{arc\,tang}(y\mathrm{i}) = \pm\frac{\pi}{2} + \frac{\mathrm{i}}{2}\,\mathrm{l}\,\frac{y+1}{y-1},$$

le double signe $\pm$ devant être réduit au signe $+$ ou au signe $-$, suivant que la quantité géométrique $y\mathrm{i}$ sera considérée comme la limite vers laquelle convergera, pour des valeurs infiniment petites du nombre ε, l'un ou l'autre des deux binomes

$$\varepsilon + y\mathrm{i}, \quad -\varepsilon + y\mathrm{i}.$$

Enfin, si l'on avait, simultanément,

$$x = 0, \qquad y^2 = 1,$$

et, par suite,

$$y = \pm 1;$$

alors, des deux rapports

$$\frac{1+y}{\sqrt{x^2+(1+y)^2}}, \quad \frac{1-y}{\sqrt{x^2+(1-y)^2}}$$

l'un se réduirait à l'unité, tandis que l'autre se présenterait sous la forme indéterminée

$$\frac{0}{0}.$$

D'ailleurs, ces mêmes rapports étant respectivement égaux aux deux produits

$$\frac{1+y}{\sqrt{(1+y)^2}}\,\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{x}{1+y}\right)^2}}, \quad \frac{1-y}{\sqrt{(1-y)^2}}\,\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{x}{1-y}\right)^2}},$$

celui qui se présenterait sous la forme $\frac{0}{0}$ pourrait être censé avoir pour valeur l'une quelconque des quantités algébriques comprises entre les limites -1, $+1$, cette valeur dépendant des signes attribués aux quantités infiniment petites

$$x, \quad 1 \pm y,$$

et de la limite vers laquelle convergerait le rapport de ces quantités, tandis que x convergerait vers la limite 0, et y vers la limite -1 ou $+1$. Cela posé, en désignant par

$$\mathrm{M}(-1, 1)$$

l'une quelconque des quantités algébriques comprises entre les limites -1, $+1$, et en supposant $y = 1$ ou $y = -1$, on devra remplacer la formule (3) par l'une des formules

(4) $$\operatorname{arc\,tang}\mathrm{i} = \frac{\pi}{2}\,\mathrm{M}(-1, 1) + \infty.\mathrm{i},$$

(5) $$\operatorname{arc\,tang}(-\mathrm{i}) = \frac{\pi}{2}\,\mathrm{M}(-1, 1) - \infty.\mathrm{i}.$$

Il est bon d'observer que, si, en supposant x nul, on attribue à y une valeur infinie positive ou négative, on tirera de la formule (3)

$$\text{arc tang}\, z = \pm \frac{\pi}{2}, \tag{6}$$

la valeur de z étant $z = \pm \infty . \mathrm{i}$. Ajoutons que, si, en supposant la valeur de x distincte de zéro, on attribue à chacune des variables x, y ou à une seule d'entre elles, une valeur infinie positive ou négative, on tirera de la formule (2) : 1° si $x > 0$,

$$\text{arc tang}\, z = \frac{\pi}{2}; \tag{7}$$

2° si $x < 0$,

$$\text{arc tang}\, z = -\frac{\pi}{2}. \tag{8}$$

Les valeurs singulières que nous avons obtenues pour la fonction arc tang z, et les valeurs correspondantes de la variable z, pourraient encore se déduire avec la plus grande facilité, non seulement de l'équation (5) du paragraphe III, mais aussi de l'équation (2) du paragraphe I, c'est-à-dire de la formule

$$\text{arc tang}\, z = \frac{\mathrm{l}(1+z\mathrm{i}) - \mathrm{l}(1-z\mathrm{i})}{2\mathrm{i}}. \tag{9}$$

Veut-on trouver, par exemple, les valeurs finies de z, pour lesquelles la fonction arc tang z, sans devenir infinie, cesse d'être complètement déterminée. Ces valeurs ne pourront être que l'une de celles qui réduisent à une quantité négative l'un des binomes

$$1 + z\mathrm{i}, \quad 1 - z\mathrm{i}$$

placés sous le signe l, dans le second membre de la formule (2). Or cette dernière condition ne pourra être évidemment remplie que dans le cas où le produit $z\mathrm{i}$ sera réduit à une quantité algébrique supérieure, abstraction faite du signe, à l'unité, c'est-à-dire dans le cas où l'on aura

$$z = y\mathrm{i},$$

et, de plus,

$$y^2 > 1.$$

D'ailleurs, en adoptant la valeur précédente de z, on déduit immédiatement l'équation (3) de l'équation (9) jointe à la formule

$$\mathrm{l}(-r) = \mathrm{l}(r) \pm \pi \mathrm{i}.$$

Les valeurs singulières de la fonction arc tang z étant connues, on déduira aisément de la formule

$$\text{arc cot}\, z = \text{arc tang}\, \frac{1}{z}$$

les valeurs singulières de la fonction arc cot z. Parmi ces dernières, on devra remarquer celle qui répond à une valeur singulière du rapport $\frac{1}{z}$, par conséquent, à une valeur nulle de z, et qui est donnée par la formule

$$\text{arc cot}\, z = \pm \frac{\pi}{2},$$

le double signe $\pm$ devant être réduit au signe $+$, si la valeur zéro de z est considérée comme une quantité géométrique dont la partie algébrique serait positive, et au signe $-$, dans le cas contraire.

Cherchons maintenant les valeurs singulières de la fonction arc sin z. On les déduira sans peine de l'équation (20) du précédent paragraphe, c'est-à-dire de la formule

$$\text{arc sin}\, z = \text{arc sin}\, \frac{x}{u} + \mathrm{i}\, \mathrm{l}(u+v), \tag{10}$$

dans laquelle on a

$$u = \left[\frac{x^2+y^2+1}{2} + \sqrt{\left(\frac{x^2+y^2-1}{2}\right)^2 + y^2}\right]^{\frac{1}{2}}, \tag{11}$$

$$v = \frac{y}{\sqrt{y^2}}\left[\frac{x^2+y^2-1}{2} + \sqrt{\left(\frac{x^2+y^2-1}{2}\right)^2 + y^2}\right]^{\frac{1}{2}}. \tag{12}$$

En effet, il suit de la formule (10), jointe aux équations (11), (12), que, pour des valeurs finies des variables x, y, la fonction arc sin z acquerra généralement une valeur unique et finie, à moins que l'on n'ait

$$y = 0.$$

Ajoutons que, dans ce cas-là même, la valeur de arc sin z ne cessera pas d'être unique, et se réduira simplement à arc sin x, si l'on a simultanément

$$y = 0, \qquad x^2 < 1.$$

Mais si l'on a, simultanément,

$$y = 0, \qquad x^2 > 1,$$

les formules (11), (12) donneront

$$u = \sqrt{x^2}, \qquad v = \pm\sqrt{x^2 - 1},$$

et, par suite, l'équation (10) donnera

$$\arcsin x = \arcsin \frac{x}{\sqrt{x^2}} + i\, l\left(x^2 \pm \sqrt{x^2+1}\right), \tag{13}$$

le double signe $\pm$ devant être réduit au signe $+$ ou au signe $-$, suivant que la valeur x de la variable z sera considérée comme la limite vers laquelle converge, pour des valeurs infiniment petites du nombre ε, le premier ou le second des deux binomes

$$x + \varepsilon i, \quad x - \varepsilon i.$$

On peut observer qu'en vertu de la formule identique

$$\left(\sqrt{x^2} + \sqrt{x^2-1}\right)\left(\sqrt{x^2} - \sqrt{x^2-1}\right) = 1,$$

on aura

$$l\left(\sqrt{x^2} + \sqrt{x^2-1}\right) + l\left(\sqrt{x^2} - \sqrt{x^2-1}\right) = 0,$$

ou, ce qui revient au même,

$$l\left(\sqrt{x^2} - \sqrt{x^2-1}\right) = -\,l\left(\sqrt{x^2} + \sqrt{x^2-1}\right),$$

et qu'en conséquence la formule (13) peut s'écrire comme il suit :

$$\arcsin x = \arcsin + \frac{x}{\sqrt{x^2}} \pm i\, l\left(\sqrt{x^2} + \sqrt{x^2-1}\right). \tag{14}$$

J'avais déjà remarqué, dans la onzième leçon de mon *Calcul différentiel* [p. 126 (1)], qu'en supposant

$$x^2 > 1, \qquad y = 0,$$

on réduit, dans la valeur de

$$\arcsin\left(x + y\sqrt{-1}\right),$$

la partie réelle à

$$\arcsin \frac{x}{\sqrt{x^2}},$$

et le coefficient de $\sqrt{-1}$ à la quantité

$$\pm\, l\left[\sqrt{x^2} + \sqrt{x^2-1}\right],$$

qui, à cause du double signe, cesse d'être complètement déterminée. Cette circonstance m'avait alors engagé à *m'abstenir d'employer la notation* arc sin x, dans le cas où, x étant réel, on a $x^2 > 1$. M. Björling a eu raison de croire qu'il ne fallait pas se laisser arrêter par cette considération. En adoptant, sur ce point, l'opinion qu'il a émise, et qui d'ailleurs est conforme au principe rappelé en tête de ce paragraphe, on obtient immédiatement une équation qui se réduit à la formule (14), quand on y pose $\sqrt{-1} = i$.

Si, en supposant $y = 0$, on attribuait à x une valeur infinie, on tirerait de la formule (14), pour $x = \infty$,

$$\arcsin(\infty) = \frac{\pi}{2} \pm i\, l(\infty), \tag{15}$$

et pour $x = -\infty$,

$$\arcsin(-\infty) = -\frac{\pi}{2} \pm i\, l(\infty). \tag{16}$$

Enfin, si, en supposant y distinct de zéro, on attribuait à chacune des variables x, y ou à une seule d'entre elles, une valeur infinie positive ou négative, alors dans la formule (10) on aurait encore $l(u+v) = \pm\, l(\infty)$; mais le rapport $\frac{x}{u}$ conserverait une valeur finie

(1) *Œuvres de Cauchy*, série II, t. IV, p. 420.

qui coïnciderait avec celle du rapport

$$\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{x}{\sqrt{x^2}}\left[1+\left(\frac{y}{x}\right)^2\right]^{-\frac{1}{2}} = \pm\left[1+\left(\frac{y}{x}\right)^2\right]^{-\frac{1}{2}},$$

et dépendrait, en conséquence, du rapport $\frac{y}{x}$, son signe étant le même que le signe de x.

Les valeurs singulières de la fonction arc sin z étant connues, on obtiendra celles de la fonction arc cos z à l'aide de la formule

$$\text{arc cos}\, z = \frac{\pi}{2} - \text{arc sin}\, z,$$

puis, celles de arc séc z et arc coséc z à l'aide des formules

$$\text{arc séc}\, z = \text{arc cos}\, \frac{1}{z}, \qquad \text{arc coséc}\, z = \text{arc sin}\, \frac{1}{z}.$$

MÉMOIRE

SUR LES DIVERS ARCS

QUI ONT POUR SINUS OU COSINUS, POUR TANGENTE OU COTANGENTE, POUR SÉCANTE OU COSÉCANTE UNE QUANTITÉ GÉOMÉTRIQUE DONNÉE

Soit z une quantité géométrique liée aux quantités algébriques x, y par la formule

$$z = x + y\mathrm{i}.$$

D'après ce qui a été dit dans l'article précédent, à une valeur donnée de z correspondra généralement une valeur unique et finie Z de l'une quelconque des fonctions de z représentées par les notations

$$\text{arc sin}\, z, \quad \text{arc cos}\, z, \quad \text{arc tang}\, z, \quad \text{arc cot}\, z, \quad \text{arc séc}\, z, \quad \text{arc coséc}\, z;$$

et, de plus, ces fonctions pourront être considérées comme inverses de celles que représentent les notations

$$\sin z, \quad \cos z, \quad \text{tang}\, z, \quad \cot z, \quad \text{séc}\, z, \quad \text{coséc}\, z,$$

en sorte que la valeur trouvée Z exprimera une racine de l'une des équations

$$\sin Z = z, \quad \cos Z = z, \quad \text{tang}\, Z = z, \quad \cot Z = z, \quad \text{séc}\, Z = z, \quad \text{coséc}\, Z = z.$$

Mais, évidemment, chacune de ces dernières équations admettra, outre la racine Z, une infinité d'autres racines parmi lesquelles on devra ranger les divers termes de la progression arithmétique

$$\ldots,\quad Z-4\pi,\quad Z-2\pi,\quad Z,\quad Z+2\pi,\quad Z+4\pi,\quad \ldots,$$

indéfiniment prolongée dans les deux sens. Nous nous proposons ici de rechercher toutes les racines de chacune des équations dont il s'agit. En d'autres termes, nous nous proposons de trouver tous les arcs qui ont pour sinus ou cosinus, pour tangente ou cotangente, pour sécante ou cosécante une valeur donnée de z. On y parvient sans peine en commençant, ainsi qu'on va le faire, par la recherche des arcs dont le sinus s'évanouit.

I. — *Sur les diverses racines des équations* $\sin\zeta = 0$, $\cos\zeta = 0$.

En désignant par la lettre π le rapport de la circonférence au diamètre, et par la lettre k une quantité entière, positive, nulle ou négative, on a généralement

$$\sin k\pi = 0;$$

par conséquent l'équation

$$\sin\zeta = 0 \tag{1}$$

a pour racine l'une quelconque des valeurs de ζ, comprises dans la formule

$$\zeta = k\pi, \tag{2}$$

c'est-à-dire l'un quelconque des divers termes de la progression géométrique

$$\ldots,\quad -3\pi,\quad -2\pi,\quad -\pi,\quad 0,\quad \pi,\quad 2\pi,\quad 3\pi,\quad \ldots,$$

indéfiniment prolongée dans les deux sens. J'ajoute que ces divers termes sont les seules valeurs algébriques ou même géométriques de ζ, qui soient propres à vérifier l'équation (1). Effectivement, comme on a

$$\sin\zeta = \frac{e^{\zeta i} - e^{-\zeta i}}{2i},$$

l'équation (1) donnera

$$e^{\zeta i} = e^{-\zeta i},$$

ou, ce qui revient au même,

$$e^{2\zeta i} = 1.$$

Donc, en vertu de l'équation (1), le produit $2\zeta i$ devra se réduire à

l'un quelconque des logarithmes népériens de l'unité. Mais on a vu (p. 285) que les divers logarithmes népériens de l'unité se réduisent aux diverses valeurs du produit

$$2k\pi i,$$

k étant une quantité entière. Donc l'équation (1) donnera

$$2\zeta i = 2k\pi i,$$

k étant une quantité entière; et, par suite,

$$\zeta = k\pi.$$

Si à l'équation (1) on substituait la suivante,

$$\cos\zeta = 0, \tag{3}$$

il suffirait, pour résoudre cette dernière, d'observer que l'on a généralement

$$\cos\zeta = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \zeta\right) = -\sin\left(\zeta - \frac{\pi}{2}\right).$$

En conséquence, les diverses valeurs de ζ, propres à vérifier l'équation (1), seront encore celles qui vérifieront la formule

$$\sin\left(\zeta - \frac{\pi}{2}\right) = 0. \tag{4}$$

Or ces diverses valeurs de ζ seront données par la formule

$$\zeta - \frac{\pi}{2} = k\pi,$$

de laquelle on tire

$$\zeta = k\pi + \frac{\pi}{2}, \tag{5}$$

k étant une quantité entière quelconque.

II. — *Sur les diverses racines des équations* $\sin\mathfrak{z} = z$, $\cos\mathfrak{z} = z$.

Supposons maintenant que, z étant une quantité géométrique quelconque, l'on demande les diverses racines de l'équation

$$\sin\mathfrak{z} = z. \tag{1}$$

L'une de ces racines sera précisément la fonction Z de z représentée par arc sin z, de sorte qu'en posant

$$Z = \arcsin z,$$

on aura

$$\sin Z = z.$$

Donc l'équation (1) pourra être présentée sous la forme

$$\sin \mathfrak{z} = \sin Z,$$

ou, ce qui revient au même, sous la forme

$$\sin \mathfrak{z} - \sin Z = 0.$$

D'ailleurs, en vertu de la seconde des formules (44) de la page 322, on aura

$$\sin \mathfrak{z} - \sin Z = 2 \sin \frac{\mathfrak{z} - Z}{2} \cos \frac{\mathfrak{z} + Z}{2}.$$

Donc l'équation (1) donnera

$$\sin \frac{\mathfrak{z} - Z}{2} \cos \frac{\mathfrak{z} + Z}{2} = 0,$$

et, pour la vérifier, il faudra supposer ou

(2) $$\sin \frac{\mathfrak{z} - Z}{2} = 0$$

ou

(3) $$\cos \frac{\mathfrak{z} + Z}{2} = 0.$$

Mais, en vertu des principes établis dans le paragraphe I, les diverses valeurs de $\mathfrak{z}$, propres à vérifier les équations (2) et (3), seront données par les deux formules

$$\frac{\mathfrak{z} - Z}{2} = k\pi, \qquad \frac{\mathfrak{z} + Z}{2} = k\pi + \frac{\pi}{2},$$

ou, ce qui revient au même, par les deux formules

(4) $$\mathfrak{z} = Z + 2k\pi,$$

(5) $$\mathfrak{z} = (2k+1)\pi - Z,$$

k étant une quantité entière quelconque. Donc les diverses racines de l'équation (1) seront précisément les valeurs de $\mathfrak{z}$ fournies par les équations (4) et (5), que l'on peut encore écrire comme il suit :

(6) $$\mathfrak{z} = 2k\pi + \arcsin z,$$

(7) $$\mathfrak{z} = (2k\pi + 1)\pi - \arcsin z.$$

En raisonnant de la même manière, et en ayant égard à la seconde des formules (43) de la page 322, on reconnaîtra que l'équation

(8) $$\cos \mathfrak{z} = z$$

a pour racine, non seulement la quantité géométrique Z, déterminée par la formule

$$Z = \arccos z,$$

mais encore les diverses valeurs de $\mathfrak{z}$, propres à vérifier les deux équations

(9) $$\sin \frac{\mathfrak{z} - Z}{2} = 0,$$

(10) $$\sin \frac{\mathfrak{z} + Z}{2} = 0,$$

c'est-à-dire les diverses valeurs de $\mathfrak{z}$ comprises dans les deux formules

(11) $$\mathfrak{z} = 2k\pi + Z,$$

(12) $$\mathfrak{z} = 2k\pi - Z,$$

ou, ce qui revient au même, dans les deux formules

(13) $$\mathfrak{z} = 2k\pi + \arccos z,$$

(14) $$\mathfrak{z} = 2k\pi - \arccos z,$$

k étant une quantité entière quelconque. On arriverait aussi à la même conclusion en observant que pour résoudre l'équation (8) il suffit de résoudre l'équation (1), après y avoir écrit $\frac{\pi}{2} - \mathfrak{z}$ à la place de la lettre $\mathfrak{z}$.

III. — *Sur les diverses racines des équations* $\operatorname{tang}\mathfrak{z} = z$, $\cot\mathfrak{z} = z$.

Supposons maintenant que, z étant une quantité géométrique quelconque, l'on demande les diverses racines de l'équation

$$(1)\qquad \operatorname{tang}\mathfrak{z} = z.$$

L'une de ces racines sera précisément la fonction Z de z représentée par arc tang$z$, de sorte qu'en posant

$$Z = \operatorname{arc\,tang} z,$$

on aura

$$\operatorname{tang} Z = z.$$

Donc l'équation (1) pourra être présentée sous la forme

$$\operatorname{tang}\mathfrak{z} = \operatorname{tang} Z,$$

ou, ce qui revient au même, sous la forme,

$$\operatorname{tang}\mathfrak{z} - \operatorname{tang} Z = 0.$$

Mais on aura d'ailleurs

$$\operatorname{tang}\mathfrak{z} - \operatorname{tang} Z = \frac{\sin\mathfrak{z}}{\cos\mathfrak{z}} - \frac{\sin Z}{\cos Z} = \frac{\sin(\mathfrak{z} - Z)}{\cos\mathfrak{z}\cos Z},$$

par conséquent

$$\operatorname{tang}\mathfrak{z} - \operatorname{tang} Z = \sin(\mathfrak{z} - Z)\operatorname{séc}\mathfrak{z}\operatorname{séc} Z.$$

Donc l'équation (1) donnera

$$\sin(\mathfrak{z} - Z)\operatorname{séc}\mathfrak{z}\operatorname{séc} Z = 0.$$

et, pour la vérifier, il faudra supposer ou

$$(2)\qquad \sin(\mathfrak{z} - Z) = 0$$

ou

$$(3)\qquad \operatorname{séc}\mathfrak{z}\operatorname{séc} Z = 0.$$

Mais, en vertu des principes établis dans le paragraphe I, les diverses valeurs de $\mathfrak{z}$, propres à vérifier l'équation (2), seront données par la

formule

$$\mathfrak{z} - Z = k\pi,$$

ou, ce qui revient au même, par la formule

$$\mathfrak{z} = Z + k\pi,$$

que l'on pourra encore écrire comme il suit,

$$(4)\qquad \mathfrak{z} = \operatorname{arc\,tang} z + k\pi,$$

k étant une quantité entière quelconque.

Quant à l'équation (3), elle ne pourra se vérifier que si l'on a

$$(5)\qquad \operatorname{séc} Z = 0$$

ou

$$(6)\qquad \operatorname{séc}\mathfrak{z} = 0.$$

Mais, d'autre part, en vertu de la formule (10) de l'avant-dernier article, on aura

$$\operatorname{séc}^2 Z = 1 + \operatorname{tang}^2 Z = 1 + z^2$$

et

$$\operatorname{séc}^2\mathfrak{z} = 1 + \operatorname{tang}^2\mathfrak{z} = 1 + z^2,$$

Donc l'équation (5) ou (6) ne pourra se vérifier que dans le cas où l'on aura

$$1 + z^2 = 0,$$

ou, ce qui revient au même,

$$z^2 = -1,$$

et, par suite,

$$(7)\qquad z = \pm i.$$

D'ailleurs, dans ce dernier cas, l'équation (1), réduite à la forme

$$\operatorname{tang}\mathfrak{z} = \pm i,$$

donnera

$$\operatorname{tang}^2\mathfrak{z} = -1,$$

ou, ce qui revient au même,

$$\operatorname{séc}^2\mathfrak{z} = 0;$$

elle entraînera donc la formule (6), que l'on pourra écrire comme il suit :

$$\cos\mathfrak{z}=\frac{1}{0}. \tag{8}$$

Il y a plus : comme on a

$$\cos\mathfrak{z}=\frac{e^{\mathfrak{z}i}+e^{-\mathfrak{z}i}}{2},$$

l'équation (8) donnera

$$\frac{e^{\mathfrak{z}i}+e^{-\mathfrak{z}i}}{2}=\frac{1}{0}; \tag{9}$$

et, comme à une valeur finie de l'exposant $\mathfrak{z}i$ correspond toujours une valeur finie de chacune des exponentielles

$$e^{\mathfrak{z}i},\quad e^{-\mathfrak{z}i},$$

il est clair qu'on ne pourra satisfaire à la formule (9) en attribuant à la quantité géométrique $\mathfrak{z}$ une valeur finie. Donc, dans le cas dont il s'agit, les diverses racines de l'équation (1) deviendront infinies, y compris celle que nous avons désignée par arc tang z. Cette conclusion s'accorde avec les résultats obtenus dans le dernier paragraphe de l'article précédent. On doit même remarquer que, dans le cas où l'on a $z=\pm i$, la valeur de arc tang z, devenue tout à la fois indéfinie et indéterminée, est une valeur singulière, déterminée par la formule (4) ou (5) de la page 332.

En définitive, si on laisse de côté le cas où l'on a $z=\pm i$, et où les diverses racines de l'équation (1) deviennent infinies, les valeurs de ces diverses racines seront toutes fournies par l'équation (4).

Si l'équation (1) était remplacée par la suivante,

$$\cot\mathfrak{z}=z, \tag{10}$$

on pourrait présenter cette dernière sous la forme

$$\operatorname{tang}\mathfrak{z}=\frac{1}{z}; \tag{11}$$

et, de ce qui vient d'être dit, l'on conclurait immédiatement que les diverses racines de l'équation (11) sont, en général, les diverses

valeurs de $\mathfrak{z}$ données par la formule

$$\mathfrak{z}=\operatorname{arc\,tang}\frac{1}{z}+k\pi,$$

ou, ce qui revient au même, par la formule

$$\mathfrak{z}=\operatorname{arc\,cot} z+k\pi. \tag{12}$$

Toutefois, cette formule cesse d'être applicable dans le cas où l'on a $z=\pm i$, et où les diverses racines de l'équation (11) deviennent infinies.

IV. — *Sur les diverses racines des équations* $\operatorname{séc}\mathfrak{z}=z$, $\operatorname{coséc}\mathfrak{z}=z$.

Après avoir obtenu, par la méthode exposée dans le paragraphe II, les diverses racines des équations

$$\sin\mathfrak{z}=z,\qquad \cos\mathfrak{z}=z,$$

on obtiendra sans peine les diverses racines des équations

$$\operatorname{coséc}\mathfrak{z}=z, \tag{1}$$
$$\operatorname{séc}\mathfrak{z}=z, \tag{2}$$

en présentant ces dernières équations sous les formes

$$\sin\mathfrak{z}=\frac{1}{z},\qquad \cos\mathfrak{z}=\frac{1}{z}.$$

On reconnaîtra ainsi que les diverses racines de l'équation (1) sont données par les deux formules

$$\mathfrak{z}=2k\pi+\operatorname{arc\,coséc} z, \tag{3}$$
$$\mathfrak{z}=(2k+1)\pi-\operatorname{arc\,coséc} z, \tag{4}$$

et les diverses racines de l'équation (2) par les deux formules

$$\mathfrak{z}=2k\pi+\operatorname{arc\,séc} z, \tag{5}$$
$$\mathfrak{z}=2k\pi-\operatorname{arc\,séc} z. \tag{6}$$

V. — *Résumé.*

Soit $\mathfrak{z}$ une quantité géométrique propre à vérifier, comme racine, l'une des équations

$$\sin\mathfrak{z} = z,\quad \cos\mathfrak{z} = z,\quad \operatorname{tang}\mathfrak{z} = z,\quad \cot\mathfrak{z} = z,\quad \operatorname{séc}\mathfrak{z} = z,\quad \operatorname{coséc}\mathfrak{z} = z,$$

et nommons Z celle des valeurs de $\mathfrak{z}$ qui se trouve représentée par l'une des notations

$$\operatorname{arc}\sin z,\quad \operatorname{arc}\cos z,\quad \operatorname{arc}\operatorname{tang} z,\quad \operatorname{arc}\cot z,\quad \operatorname{arc}\operatorname{séc} z,\quad \operatorname{arc}\operatorname{coséc} z.$$

Les diverses valeurs de $\mathfrak{z}$, ou, en d'autres termes, les diverses racines de l'équation proposée, seront en nombre infini et de deux espèces. Les unes seront toujours données par la formule

$$\mathfrak{z} = 2k\pi + \mathrm{Z}, \tag{1}$$

k désignant une quantité entière, positive, nulle ou négative : et, pour déduire de celles-ci les autres racines, il suffira généralement de remplacer, dans le second membre de la formule (1), la quantité Z par la quantité $-\mathrm{Z}$, s'il s'agit de résoudre l'une des équations

$$\cos\mathfrak{z} = z,\qquad \operatorname{coséc}\mathfrak{z} = z; \tag{2}$$

par la quantité $\pi - \mathrm{Z}$, s'il s'agit de résoudre l'une des équations

$$\sin\mathfrak{z} = z,\qquad \operatorname{coséc}\mathfrak{z} = z; \tag{3}$$

enfin, par la quantité $\pi + \mathrm{Z}$, s'il s'agit de vérifier l'une des équations

$$\operatorname{tang}\mathfrak{z} = z,\qquad \cot\mathfrak{z} = z. \tag{4}$$

Cela posé, les racines cherchées, ou, en d'autres termes, les diverses valeurs de $\mathfrak{z}$ seront fournies, dans le premier cas, par la formule

$$\mathfrak{z} = 2k\pi + \mathrm{Z}, \tag{5}$$

dans le second cas, par la formule

$$\mathfrak{z} = \left(2k + \frac{1}{2}\right)\pi \pm \left(\frac{\pi}{2} - \mathrm{Z}\right), \tag{6}$$

et, dans le troisième cas, par la formule

$$\mathfrak{z} = k\pi + \mathrm{Z}, \tag{7}$$

la quantité k étant ici substituée à l'une des équations entières $2k$, $2k+1$. Ajoutons que, dans le cas particulier où l'on a $z = \pm i$, les diverses racines deviennent infinies, ce qui rend illusoire la formule (7).

MÉMOIRE

SUR LES

FONCTIONS DES QUANTITÉS GÉOMÉTRIQUES

Lorsqu'en adoptant les principes établis dans les articles précédents, on substitue aux *expressions imaginaires* les *quantités géométriques*, les *variables imaginaires* ne sont autre chose que des *quantités géométriques variables*. Reste à savoir comment doivent être définies les *fonctions* de variables imaginaires. Cette dernière question a souvent embarrassé les géomètres ; mais toute difficulté disparaît, lorsqu'en se laissant guider par l'analogie, on étend aux fonctions de quantités géométriques les définitions généralement adoptées pour les fonctions de quantités algébriques. On arrive ainsi à des conclusions singulières au premier abord, et néanmoins très légitimes, que j'indiquerai en peu de mots.

Deux variables réelles, ou, en d'autres termes, deux quantités algébriques variables sont dites *fonctions* l'une de l'autre, quand elles varient simultanément, de telle sorte que la valeur de l'une détermine la valeur de l'autre. Si les deux variables sont censées représenter les abscisses de deux points assujettis à se mouvoir sur une même droite, la position de l'un de ces points déterminera la position de l'autre, et réciproquement.

Soit, maintenant, z une quantité géométrique qui représente l'*affixe* d'un point A assujetti à se mouvoir dans un certain plan (p. 245). Nommons r le *module*, et p l'*argument* de la quantité géométrique z, c'est-à-dire le rayon vecteur mené, dans le plan dont il s'agit, d'une origine fixe O au point mobile A, et l'angle polaire formé par ce rayon vecteur avec un axe polaire OX. Soient, enfin, x, y les coordonnées rectangulaires du point A, mesurées à partir de l'origine O sur l'axe polaire OX, et sur un axe perpendiculaire OY. Non seulement on aura

$$x = r\cos p, \qquad y = r\sin p$$

et

$$z = r_p; \tag{1}$$

mais, de plus, en posant

$$\mathrm{i} = 1_{\frac{\pi}{2}},$$

on trouvera (p. 216)

$$z = x + y\mathrm{i}. \tag{2}$$

Pareillement, si l'on nomme

Z l'affixe d'un point mobile B;

R, P le module et l'argument de Z, ou, ce qui revient au même, les coordonnées polaires du point B;

X, Y les coordonnées rectangulaires du même point, on aura non seulement

$$Z = R_P, \tag{3}$$

mais encore

$$Z = X + Y\mathrm{i}. \tag{4}$$

Cela posé, si, comme on doit naturellement le faire, on étend aux fonctions de quantités géométriques variables les définitions généralement adoptées pour les fonctions de quantités algébriques, Z devra être censé *fonction* de z, lorsque la valeur de z déterminera la valeur de Z. Or, il suffira pour cela que X et Y soient des fonctions déterminées de x et y. Alors aussi la position du point mobile A déterminera toujours la position du point mobile B.

Les propriétés que possède une fonction peuvent être de deux espèces différentes. En effet, ces propriétés peuvent subsister pour des

valeurs quelconques de la variable dont cette fonction dépend. Mais il peut arriver aussi que certaines propriétés subsistent seulement pour certaines valeurs de la variable, par exemple s'il s'agit d'une variable réelle x, pour les valeurs de x comprises entre deux limites données a, b, et, s'il s'agit d'une variable imaginaire z, pour toutes les valeurs de z propres à représenter les affixes de points renfermés dans une certaine aire plane S que limite un certain contour.

Les propriétés des fonctions étant généralement exprimées par des équations ou par des formules, il suit de ce qu'on vient de dire que certaines équations ou formules subsistent seulement entre certaines limites. Cette conclusion s'accorde avec une remarque sur laquelle j'ai insisté dans mon *Analyse algébrique* (Introduction, iij), savoir, *que la plupart des formules algébriques subsistent uniquement sous certaines conditions et pour certaines valeurs des quantités qu'elles renferment.* Ainsi, par exemple, $z = r_p$ étant une quantité géométrique variable, ou, en d'autres termes, une variable imaginaire, l'équation

$$\frac{1}{1-z} = 1 + z + z^2 + \ldots \tag{5}$$

ne sera généralement vraie que pour un module r de z inférieur à l'unité, c'est-à-dire pour des valeurs de z propres à représenter les affixes de points situés à l'intérieur du cercle qui a l'origine pour centre et l'unité pour rayon. Si l'on supposait précisément $r = 1$, la série

$$1, \quad z, \quad z^2, \quad \ldots,$$

dont la somme constitue le second membre de la formule (5), serait divergente, à moins toutefois que l'on n'eût $z = -1$. D'ailleurs, dans ce dernier cas, les deux membres de la formule (5) devront être évidemment remplacés par les limites vers lesquelles ils convergent, tandis que z s'approche indéfiniment de l'unité, et il est clair que ces limites se réduiront pour le premier membre à l'infini positif ou négatif, ou même imaginaire, et pour le second membre à l'infini positif seulement.

Dans ce qui précède, nous nous sommes borné à considérer des fonctions d'une seule variable. Mais il est évident qu'une fonction peut dépendre de plusieurs variables, chacune de ces variables étant, ou une quantité algébrique, ou une quantité géométrique. Ajoutons qu'une telle fonction peut offrir des propriétés qui subsistent, ou pour toutes les valeurs, ou seulement pour certaines valeurs des diverses variables qu'elle renferme.

Observons encore qu'une fonction d'une ou de plusieurs variables peut être ou explicite ou implicite.

Lorsque des fonctions d'une ou de plusieurs variables se trouvent immédiatement exprimées au moyen de ces variables, elles sont nommées *fonctions explicites*. Mais lorsqu'on donne seulement les relations entre les fonctions et les variables, c'est-à-dire les équations auxquelles ces quantités doivent satisfaire, tant que ces équations ne sont pas résolues, les fonctions, n'étant pas immédiatement exprimées au moyen des variables, sont appelées *fonctions implicites*. Pour les rendre explicites, il suffit de résoudre, lorsque cela se peut, les équations qui les déterminent.

Souvent le résultat d'une opération effectuée sur une quantité peut avoir plusieurs valeurs différentes les unes des autres. Lorsqu'on veut désigner indistinctement une quelconque de ces valeurs, on peut, comme nous l'avons fait dans l'*Analyse algébrique*, recourir à des notations dans lesquelles la quantité soit entourée de doubles traits, ou de doubles parenthèses, en réservant la notation usuelle pour la valeur la plus simple, ou pour celle qui paraît mériter davantage d'être remarquée. Ces conventions étant admises, une fonction explicite, représentée par l'une des notations usuelles, offrira généralement, pour chaque valeur de la variable dont elle dépend, une valeur unique qui pourra toutefois devenir multiple dans certains cas particuliers. Ainsi, par exemple, chacune des fonctions

$$1+z+z^2,\quad (1+z)^3,\quad e^z,\quad \sin z,\quad \cos z,\quad \ldots$$

offrira généralement, pour chaque valeur de la variable z, une valeur

unique et finie; et l'on pourra encore en dire autant des fonctions

$$\frac{1}{z},\quad \mathrm{l}(z),\quad \operatorname{arc\,tang} z,\quad \operatorname{arc\,cot} z,\quad \operatorname{arc\,sin} z,\quad \ldots.$$

Toutefois, ces dernières fonctions offriront, pour certaines valeurs particulières de z, des valeurs multiples. Telle sera la valeur infinie de $\frac{1}{z}$, positive, ou négative, ou même imaginaire, correspondante à une valeur nulle de z. Telle sera encore la valeur *singulière* de arc cot z, correspondante à $z=0$, et donnée par la formule

$$\operatorname{arc\,cot} z = \pm\frac{\pi}{2},$$

dans laquelle le double signe doit être réduit au signe $+$ ou au signe $-$, suivant que la partie algébrique de la variable imaginaire z passe par des valeurs positives ou négatives avant d'atteindre la limite zéro (p. 343). Quant aux fonctions implicites, elles pourront admettre des valeurs multiples correspondantes, non seulement à des valeurs particulières, mais encore à des valeurs quelconques des variables. Ainsi, par exemple, la fonction Z de z, déterminée par l'équation

$$Z^2+z^2=1, \tag{6}$$

admet deux valeurs distinctes, savoir :

$$Z=(1-z^2)^{\frac{1}{2}} \quad \text{et} \quad Z=-(1-z^2)^{\frac{1}{2}}. \tag{7}$$

Il arrive souvent que les diverses valeurs d'une fonction implicite sont en nombre infini. On peut citer comme exemple la fonction Z déterminée par l'équation

$$\cos Z = z, \tag{8}$$

de laquelle on tire (p. 351)

$$Z = 2k\pi \pm \operatorname{arc\,cos} z, \tag{9}$$

k étant une quantité entière quelconque.

Nous désignerons sous le nom de *type* une expression analytique propre à représenter généralement, ou la valeur unique d'une fonction explicite, ou l'une des valeurs diverses d'une fonction implicite. Cette définition étant admise, la fonction Z, déterminée par l'équation (6), admettra deux types distincts, que présentent les formules (7); et la fonction Z, déterminée par l'équation (8), offrira une infinité de types, tous compris dans la formule (9).

Les intégrales définies prises entre des limites variables, et celles qui renferment des paramètres variables, doivent être rangées au nombre des fonctions explicites. Très souvent, les valeurs de ces intégrales sont déterminées par des formules qui subsistent uniquement sous certaines conditions. Ainsi, par exemple, x étant une variable réelle, l'équation

(10) $$\int_0^\infty \frac{\sin(\alpha x)}{\alpha}\, d\alpha = \frac{\pi}{2}$$

subsiste uniquement pour des valeurs positives de x, et doit être remplacée, quand x est négatif, par la formule

(11) $$\int_0^\infty \frac{\sin(\alpha x)}{\alpha}\, d\alpha = -\frac{\pi}{2};$$

tandis que la moyenne arithmétique entre les deux quantités $-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}$, c'est-à-dire zéro, est précisément la valeur de l'intégrale

$$\int_0^\infty \frac{\sin(\alpha x)}{\alpha}\, d\alpha,$$

correspondante à une valeur nulle de x. Ainsi encore, z étant une quantité géométrique variable, ou, en d'autres termes, une variable imaginaire, liée aux variables réelles x, y par l'équation (2), la formule

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-z\alpha^2}\, d\alpha = \left(\frac{\pi}{z}\right)^{\frac{1}{2}}$$

subsiste uniquement pour des valeurs positives de la partie réelle x de la variable z. Enfin, si l'on nomme r le module et p l'argument

de z, en sorte qu'on ait $z = r_p$, la formule

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{dp}{1-z} = 2\pi$$

subsistera uniquement pour un module r de z inférieur à l'unité, c'est-à-dire pour toute valeur de z propre à représenter l'affixe d'un point situé dans l'intérieur du cercle qui a l'unité pour rayon. On aura pour $r = 1$, c'est-à-dire pour toute valeur de z correspondante à un point situé sur la circonférence du cercle dont il s'agit,

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{dp}{1-z} = \pi,$$

et pour $r > 1$, c'est-à-dire pour toute valeur de z correspondante à un point situé hors du même cercle,

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{dp}{1-z} = 0$$

MÉMOIRE

SUR

LES FONCTIONS CONTINUES

DE QUANTITÉS ALGÉBRIQUES OU GÉOMÉTRIQUES

I. — *Considérations générales.*

Parmi les caractères que les fonctions peuvent offrir, l'un de ceux qui, en raison de leur importance, méritent une attention sérieuse, est bien certainement la *continuité*, telle que je l'ai définie dans mon *Analyse algébrique*. A la vérité, la définition des fonctions continues, donnée dans cet ouvrage, et généralement adoptée aujourd'hui par les géomètres, s'y trouvait spécialement appliquée aux fonctions réelles ou imaginaires des variables réelles, c'est-à-dire des quantités algébriques variables. Mais rien n'empêche d'étendre la même définition au cas où les variables sont des quantités géométriques, comme je l'expliquerai tout à l'heure.

II. — *Sur les fonctions continues de quantités algébriques.*

Commençons par rappeler les principes établis en 1821 dans mon *Analyse algébrique*, et reproduits en 1829 dans mes *Leçons sur le Calcul différentiel.*

« On dit qu'une quantité (algébrique) variable devient *infiniment* *petite*, lorsque sa valeur numérique décroît indéfiniment, de manière à converger vers la limite zéro (*Analyse algébrique*, p. 26) (¹).

» Une quantité infiniment petite se nomme encore un *infiniment petit* (*Préliminaires du Calcul différentiel*, p. 4) (²).

» Les notions relatives à la continuité ou à la discontinuité des fonctions doivent être placées parmi les objets qui se rattachent à la considération des infiniment petits (*Analyse algébrique*, p. 34) (³).

» Soit $f(x)$ une fonction (réelle) de la variable (réelle) x, et supposons que, pour chaque valeur de x intermédiaire entre deux limites données, cette fonction admette constamment une *valeur unique et finie*. Si, en partant d'une valeur de x comprise entre ces limites, on attribue à la variable x un accroissement infiniment petit α, la fonction elle-même recevra pour accroissement la différence

$$f(x+\alpha)-f(x),$$

qui dépendra en même temps de la nouvelle variable α et de la valeur de x. Cela posé, la fonction $f(x)$ sera, entre les deux limites assignées à la variable x, fonction *continue* de cette variable, si, pour chaque valeur de x intermédiaire entre ces limites, la valeur numérique de la différence

$$f(x+\alpha)-f(x)$$

décroît indéfiniment avec celle de α. En d'autres termes, *la fonction $f(x)$ restera continue par rapport à x entre les limites données, si, entre ces limites, un accroissement infiniment petit de la variable produit toujours un accroissement infiniment petit de la fonction elle-même* (*Analyse algébrique*, p. 34 et 35).

» On dit encore que *la fonction $f(x)$ est, dans le voisinage d'une valeur particulière, attribuée à la variable x, fonction continue de cette variable*, toutes les fois qu'elle est continue entre deux limites de x, même très rapprochées, qui renferment la valeur dont il s'agit (*Analyse algébrique*, p. 35).

(¹), (²) *Œuvres de Cauchy*, série II, t. III, p. 37 et 43; (³) Série II, t. IV, p. 273.

» Enfin lorsqu'une fonction cesse d'être continue dans le voisinage d'une valeur particulière de la variable x, on dit qu'elle est alors *discontinue*, et qu'il y a, pour cette valeur particulière, *solution de continuité* (*Analyse algébrique*, p. 35) ».

Les définitions précédentes sont reproduites en termes équivalents, ou même identiques, dans les Préliminaires de mon *Calcul différentiel* (p. 6).

Ces définitions étant admises, il sera facile de reconnaître, non seulement si une fonction explicite et réelle de la variable réelle x est ou n'est pas continue entre deux limites données, mais encore entre quelles limites une telle fonction reste continue.

« Ainsi, par exemple, la fonction $\sin x$, admettant pour chaque valeur particulière de la variable x une valeur unique et finie, sera continue entre deux limites quelconques de cette variable, attendu que la valeur numérique de $\sin\frac{\alpha}{2}$, et, par suite, celle de la différence

$$\sin(x+\alpha)-\sin x = 2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\left(x+\frac{\alpha}{2}\right),$$

décroissent indéfiniment avec celle de α, quelle que soit d'ailleurs la valeur finie qu'on attribue à x (*Analyse algébrique*, p. 35).

» Si (en désignant par a une constante réelle, par A un nombre constant, et par $\mathrm{L}x$ le logarithme réel de x pris dans le système dont la base est A), on envisage, sous le rapport de la continuité, les fonctions simples

$$a+x,\quad a-x,\quad ax,\quad \frac{a}{x},\quad x^a,\quad A^x,\quad \mathrm{L}x,$$

on trouvera que chacune de ces fonctions reste continue entre deux limites finies de la variable x, toutes les fois qu'étant constamment réelle entre ces deux limites, elle ne devient pas infinie dans l'intervalle (*Analyse algébrique*, p. 35 et 36).

» Par suite, chacune de ces fonctions sera continue dans le voisinage d'une valeur finie attribuée à la variable x, si cette valeur se trouve comprise, pour les fonctions

$$\left.\begin{array}{l} a+x \\ a-x \\ ax \\ A^x \\ \sin x \\ \cos x \end{array}\right\} \text{entre les limites } x=-\infty,\ x=\infty;$$

pour la fonction

$$\frac{a}{x}\left\{\begin{array}{l} 1^{\circ} \text{ entre les limites } x=-\infty,\ x=0, \\ 2^{\circ} \text{ entre les limites } x=0, \quad x=\infty; \end{array}\right.$$

pour les fonctions

$$\left.\begin{array}{l} x^a \\ \mathrm{L}(x) \end{array}\right\} \text{entre les limites } x=0,\ x=\infty;$$

enfin pour les fonctions

$$\left.\begin{array}{l} \arcsin x \\ \arccos x \end{array}\right\} \text{entre les limites } x=-1,\ x=1.$$

(*Analyse algébrique*, p. 36.)

» Il est bon d'observer que, dans le cas où l'on suppose

$$a=\pm m,$$

m désignant un nombre entier, la fonction simple x^a est toujours continue dans le voisinage d'une valeur finie de la variable x, à moins que cette valeur ne soit nulle, a étant égal à $-m$ (*Analyse algébrique*, p. 37). »

Lorsqu'une fonction devient infinie pour une valeur finie de la variable, un accroissement infiniment petit attribué à cette valeur cesse évidemment de produire un accroissement infiniment petit de la fonction elle-même, et, par suite, il y a solution de continuité. Ainsi, par exemple, chacune des fonctions

$$\frac{a}{x} \quad \text{et} \quad x^{-m}$$

(m étant un nombre entier), devient discontinue en devenant infinie pour

$$x=0.$$

Cela posé, pour qu'une fonction de la variable réelle x reste continue dans le voisinage d'une valeur donnée de x, il est nécessaire qu'à cette valeur de x corresponde une valeur *finie* de la fonction. Mais est-il pareillement nécessaire que, pour la valeur donnée de x et pour chacune des valeurs voisines, la fonction acquière une valeur *unique* représentée par un seul type $f(x)$? A la rigueur, cette question pourrait être résolue négativement; et, dans le cas où il s'agit d'une fonction implicite qui offre diverses valeurs représentées par divers *types*, ou, en d'autres termes, d'une fonction liée à la variable x par une équation qui admet plusieurs racines, on pourrait dire que cette fonction implicite est *continue entre des limites données de x*, lorsque entre ces limites, un accroissement infiniment petit attribué à x produit toujours un accroissement infiniment petit de l'un quelconque des types. Mais il est plus simple de considérer chacun de ces types comme une fonction déterminée de x; et pour énoncer clairement l'hypothèse admise, il suffit de dire que chacune des valeurs de la fonction implicite est une fonction explicite de x, qui reste continue entre les limites assignées à cette variable.

Ainsi, par exemple, si l'on nomme y une fonction implicite de x, déterminée par l'équation

$$x^2+y^2=1, \tag{1}$$

les deux valeurs qu'admettra cette fonction implicite, pour une valeur réelle de x, comprise entre les limites

$$x=-1, \qquad x=1,$$

seront deux fonctions explicites représentées par les deux types

$$\sqrt{1-x^2}, \quad -\sqrt{1-x^2},$$

et dont chacune restera continue entre les limites données.

Ainsi encore, si l'on nomme y une fonction implicite de x déterminée par l'équation

$$\text{tang}\,y = x, \tag{2}$$

les valeurs qu'admettra cette fonction implicite, pour une valeur réelle de x, seront les fonctions explicites représentées par les divers termes de la progression arithmétique

$$\begin{gathered} \ldots,\quad -2\pi + \text{arc tang}\,x,\quad -\pi + \text{arc tang}\,x,\quad \text{arc tang}\,x,\\ \pi + \text{arc tang}\,x,\quad 2\pi + \text{arc tang}\,x,\quad \ldots, \end{gathered}$$

et chacune de ces fonctions explicites restera continue entre des limites quelconques de la variable, par conséquent entre les limites

$$x = -\infty, \qquad x = \infty.$$

Il n'est pas sans intérêt de rapprocher l'une de l'autre les notions de continuité dans les fonctions et de continuité dans les courbes. C'est ce que nous allons essayer de faire en peu de mots.

Concevons que, dans un plan donné, on construise une courbe dont les coordonnées rectilignes, rapportées à des axes rectangulaires ou obliques, soient la variable réelle x et une fonction réelle y de cette variable. Si l'ordonnée y, considérée comme fonction de l'abscisse x, est *explicite* et *continue* entre deux limites données

$$x = x_{\prime}, \qquad x = x_{\prime\prime},$$

la courbe sera certainement continue entre deux points qui auront pour abscisses $x_{\prime}$, $x_{\prime\prime}$. Il y a plus ; elle offrira entre ces deux points, une seule branche correspondante à la valeur unique de la fonction y. Si, au contraire, la fonction y demeurant explicite, devient discontinue entre les limites données, pour certaines valeurs particulières $x_1, x_2, \ldots$ de l'abscisse x, la courbe deviendra elle-même discontinue et se décomposera en diverses branches que limiteront des ordonnées correspondantes à ces valeurs particulières de x. Enfin, si l'ordonnée y, considérée comme fonction de x, est implicite et déterminée par une équation qui admette plusieurs racines, chacune de ces racines,

quand l'équation sera résolue, deviendra une fonction explicite, continue ou discontinue, à laquelle répondra ou une seule branche de courbe, ou le système de plusieurs branches que limiteront les ordonnées correspondantes aux solutions de continuité. Donc alors des branches distinctes pourront répondre, non seulement à des valeurs diverses, mais encore à une valeur unique de l'abscisse x. D'ailleurs, dans le cas où, entre deux limites données de x, chaque valeur de la fonction implicite y est une fonction continue de x, et représente en conséquence une seule branche de courbe, il peut arriver que les diverses branches correspondantes aux diverses valeurs de y se joignent par leurs extrémités, de manière à former une courbe continue. C'est ce qui aura lieu, par exemple, si l'ordonnée y est déterminée par l'équation (1). Alors, en effet, les deux valeurs de y, savoir

$$\sqrt{1-x^2}, \qquad -\sqrt{1-x^2},$$

resteront, comme on l'a dit, fonctions continues de x entre les limites

$$x = -1, \qquad x = 1,$$

et les deux branches de courbe correspondantes à ces deux valeurs seront deux demi-circonférences de cercle qui se joindront par leurs extrémités, de manière à reproduire la circonférence entière. C'est ce qui aura lieu encore si l'ordonnée y est déterminée par l'équation

$$\sin y = x; \tag{3}$$

car la courbe continue que représente l'équation (3) peut être considérée comme composée de plusieurs branches qui se joignent par leurs extrémités, chaque branche ayant pour ordonnée, entre les limites

$$x = -1, \qquad x = 1,$$

l'une des valeurs de y comprises dans les deux progressions

$$\begin{gathered} \ldots,\quad -4\pi + \text{arc sin}\,x,\quad -2\pi + \text{arc sin}\,x,\quad \text{arc sin}\,x,\quad 2\pi + \text{arc sin}\,x,\\ 4\pi + \text{arc sin}\,x,\quad \ldots;\\ \ldots,\quad -3\pi - \text{arc sin}\,x,\quad -\pi - \text{arc sin}\,x,\quad \pi - \text{arc sin}\,x,\quad 3\pi - \text{arc sin}\,x,\quad \ldots. \end{gathered}$$

Comme on vient de le remarquer, quand on exprime, en fonction de l'abscisse x, l'ordonnée y d'une courbe continue, cette ordonnée admet souvent diverses valeurs représentées par diverses fonctions explicites de x. Mais alors on peut aussi représenter chacune des coordonnées x, y par une fonction toujours continue d'une autre variable s. Il suffit pour cela que la lettre s désigne ou l'arc de la courbe continue, mesuré dans un sens déterminé à partir d'une origine fixe, ou une quantité qui croisse constamment avec cet arc. Ainsi, par exemple, si l'on nomme s un arc mesuré sur la circonférence de cercle que représente l'équation (1), à partir du point où cette circonférence coupe l'axe des x et dirigé dans le premier instant, du côté des ordonnées positives, les coordonnées x, y de cette même circonférence pourront être représentées par des fonctions de l'arc s, toujours continues, et liées à cet arc par les équations

$$x = \cos s, \qquad y = \sin s.$$

Quand la courbe que l'on considère est, comme dans le cas précédent, une courbe fermée et rentrante sur elle-même, les coordonnées x, y, exprimées en fonction de l'arc s, sont évidemment des fonctions périodiques qui reprennent les mêmes valeurs au moment où l'extrémité de l'arc s, après avoir parcouru le périmètre entier de la courbe, retrouve la position qu'elle occupait d'abord.

III. — *Sur les fonctions continues de quantités géométriques.*

Désignons par la lettre z une variable imaginaire, ou, en d'autres termes, une quantité géométrique variable dont r soit le module, et p l'argument. Posons d'ailleurs

$$x = r \cos p, \qquad y = r \sin p.$$

La variable

$$z = r_p = x + yi \tag{1}$$

sera propre à représenter l'affixe d'un point mobile A, qui aura pour

coordonnées polaires les variables réelles p, r, et pour coordonnées rectangulaires les variables réelles x, y.

Soit maintenant

$$Z = R_P = X + Yi \tag{2}$$

une autre variable imaginaire, ou, en d'autres termes, une autre quantité géométrique variable, propre à représenter l'affixe d'un autre point mobile B qui a pour coordonnées polaires les variables réelles P, R, et pour coordonnées rectangulaires les variables réelles X, Y. Comme on l'a dit, dans le précédent article, Z sera fonction de z, si le mouvement du point A entraîne le mouvement du point B, ou, ce qui revient au même, si les variables réelles X, Y sont fonctions de variables réelles x, y. D'ailleurs, certaines propriétés de Z considérée comme fonction de z pourront subsister uniquement pour certaines valeurs de z comprises entre certaines limites, par exemple pour les valeurs de z propres à représenter les affixes de points renfermés dans une certaine aire S. Ajoutons que les lignes droites ou courbes qui limiteront l'aire S seront entièrement arbitraires. On pourra, pour fixer les idées, supposer l'aire S limitée extérieurement par un certain contour PQR composé de lignes droites ou courbes; et l'on pourra aussi la supposer comprise entre deux contours de cette espèce KLM, PQR, qui lui serviraient de limite intérieure et extérieure.

Considérons maintenant d'une manière spéciale, parmi les propriétés que les fonctions peuvent offrir, celle qui fait le sujet principal de cet article, et que l'on nomme la continuité. Pour les fonctions des variables imaginaires, comme pour les fonctions des variables réelles, cette propriété se rattache à la considération des infiniment petits. Entrons à cet égard dans quelques détails.

Une variable imaginaire est appelée *infiniment petite*, lorsqu'elle converge vers la limite zéro [*Analyse algébrique*, p. 250 (1)]. Cela posé, pour que la variable imaginaire

$$z = r_p = x + yi$$

soit infiniment petite, il suffira évidemment que les variables réelles x,

(1) *Œuvres de Cauchy*, série II, t. IV, p. 212.

y soient infiniment petites, et, par suite, il suffira que le module

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

soit infiniment petit. Réciproquement, si le module r est infiniment petit, les variables x, y seront elles-mêmes infiniment petites, et, par suite, on pourra en dire autant de la variable imaginaire z.

Soit maintenant

$$Z = f(z)$$

une fonction de la variable imaginaire z, et supposons que, pour chaque valeur de z propre à représenter l'affixe d'un point renfermé dans l'aire S, cette fonction admette constamment une *valeur unique et finie*. Si, en partant d'une telle valeur de z, on attribue à la variable z un accroissement infiniment petit ζ, la fonction elle-même recevra pour accroissement la différence

$$f(z+\zeta) - f(z),$$

qui dépendra en même temps de la nouvelle variable ζ et de la valeur de z. Cela posé, la fonction $f(z)$ sera entre les limites assignées à la variable z, c'est-à-dire, pour toutes valeurs de z renfermées dans l'aire S, fonction *continue* de z, si, pour chacune de ces valeurs, le module de la différence

$$f(z+\zeta) - f(z)$$

devient infiniment petit avec le module de ζ. En d'autres termes, *la fonction $f(z)$ de la variable imaginaire z restera continue par rapport à cette variable entre les limites données, si, entre ces limites, un accroissement infiniment petit de la variable z produit toujours un accroissement infiniment petit de la fonction elle-même.*

De plus, étant donnée une valeur particulière de z propre à représenter l'affixe d'un point déterminé A, la fonction $f(z)$ sera dite *fonction continue de la variable imaginaire z, dans le voisinage de la valeur particulière attribuée à z*, si elle est continue pour toutes les valeurs de z propres à représenter les affixes de points situés dans l'intérieur d'une aire même très petite qui renferme le point A.

Enfin, lorsqu'une fonction $f(z)$ de la variable imaginaire z cessera d'être continue dans le voisinage d'une valeur particulière de z, on dira que, pour cette valeur, elle est *discontinue*, et offre une *solution de continuité*.

Ces définitions étant admises, considérons d'abord une fonction explicite de la variable z, cette fonction étant exprimée à l'aide des notations usuelles. Comme je l'ai remarqué dans le précédent article, cette fonction explicite offrira généralement, pour chaque valeur finie de z une valeur unique complètement déterminée, et dès lors il sera facile de reconnaître, non seulement si elle est ou n'est pas continue entre des limites données, mais encore entre quelles limites elle reste continue.

Ainsi, par exemple, la fonction

$$\sin z = \frac{e^{zi} - e^{-zi}}{2i},$$

qui admet pour chaque valeur particulière de z une valeur unique et finie, sera continue entre deux limites quelconques de la variable z, attendu que le module de

$$\sin \frac{\zeta}{2} = \frac{e^{\frac{1}{2}\zeta i} - e^{-\frac{1}{2}\zeta i}}{2i},$$

et, par suite, le module de la différence

$$\sin(z+\zeta) - \sin z = 2 \sin \frac{\zeta}{2} \cos\left(z + \frac{\zeta}{2}\right),$$

décroissent indéfiniment avec le module de ζ, quelle que soit d'ailleurs la valeur finie que l'on attribue à z.

Si, en désignant par c une constante réelle ou imaginaire, et par A un nombre constant, on envisage, sous le rapport de la continuité les six fonctions simples

$$c+z, \quad c-z, \quad cz, \quad A^z, \quad \sin z, \quad \cos z,$$

on reconnaîtra que chacune d'elles reste continue par rapport à z entre des limites quelconques. On pourra encore en dire autant de toute fonction entière de la variable z.

Au contraire, une fonction rationnelle, mais non entière, de z deviendra discontinue pour les valeurs de z qui la rendront infinie. Ainsi, par exemple, la fonction

$$\frac{c}{z}$$

deviendra discontinue, en devenant infinie, pour $z = 0$; mais elle sera continue dans le voisinage de toute valeur finie de z distincte de zéro.

Le nombre des valeurs de z, pour lesquelles une fonction $f(z)$ devient discontinue en devenant infinie, peut être ou fini ou même infini. Ce nombre est toujours fini lorsque $f(z)$ se réduit à une fonction rationnelle de z. Il deviendrait infini si $f(z)$ était une fonction rationnelle de $\sin z$ et $\cos z$. Ainsi, par exemple, la fonction

$$\operatorname{tang} z = \frac{\sin z}{\cos z} = \frac{1}{i} \cdot \frac{e^{zi} - e^{-zi}}{e^{zi} + e^{-zi}}$$

devient discontinue, en devenant infinie, pour toutes les valeurs de z comprises dans la progression arithmétique

$$\ldots, \quad -\frac{5\pi}{2}, \quad -\frac{3\pi}{2}, \quad -\frac{\pi}{2}, \quad \frac{\pi}{2}, \quad \frac{3\pi}{2}, \quad \frac{5\pi}{2}, \quad \ldots,$$

par conséquent pour une infinité de valeurs de z, propres à représenter les affixes de points équidistants, séparés les uns des autres, et situés sur l'axe polaire.

Il arrive souvent qu'une fonction explicite Z de la variable imaginaire z devient discontinue, même sans cesser d'être finie, pour une infinité de valeurs de z propres à représenter les affixes de tous les points situés sur certaines lignes, ou certaines portions de lignes droites ou courbes, que nous appellerons *lignes d'arrêt*.

Ainsi, par exemple, si l'on envisage, sous le rapport de la continuité les deux fonctions

$$z^{\frac{1}{2}}, \quad lz,$$

la lettre caractéristique l indiquant un logarithme népérien, on reconnaîtra que ces deux fonctions deviennent discontinues, toutes les fois que les variables réelles x, y, liées à la variable imaginaire z par

l'équation

$$z = x + yi,$$

vérifient les conditions

$$(3) \qquad x = \text{ou} < 0, \qquad y = 0.$$

Donc alors, il existe une seule ligne d'arrêt, qui n'est autre que l'axe polaire, indéfiniment prolongée, à partir de l'origine du côté des abscisses négatives.

Ainsi encore, si l'on envisage, sous le rapport de la continuité, la fonction

$$\operatorname{arc\,tang} z = \frac{l(1 + zi) - l(1 - zi)}{2i},$$

on reconnaîtra qu'elle devient discontinue, toutes les fois que, dans la variable imaginaire $z = x + yi$, les variables x, y vérifient les conditions

$$(4) \qquad x = 0, \qquad y^2 = \text{ou} > 1.$$

Donc alors, il existe deux lignes d'arrêt qui se réduisent à deux parties distinctes de l'axe des ordonnées, indéfiniment prolongé, dans le sens des ordonnées positives, à partir du point dont l'ordonnée est 1, et dans le sens des ordonnées négatives, à partir du point dont l'ordonnée est -1.

Les extrémités des lignes d'arrêt seront nommées *point d'arrêt :* tels sont, par exemple, le pôle, ou, en d'autres termes, l'origine, dans la ligne d'arrêt correspondante à chacune des fonctions

$$z^{\frac{1}{2}}, \quad lz,$$

et les deux points situés sur l'axe des ordonnées à la distance 1 de l'origine, dans les deux lignes d'arrêt correspondantes à la fonction arc tang z.

Dans les cas semblables à ceux que nous avons traités jusqu'ici, c'est-à-dire quand une fonction de la variable imaginaire z est une fonction explicite représentée par l'une des notations usuelles, il ne dépend pas du calculateur de faire disparaître les solutions de continuité que la fonction peut offrir. Ces solutions de continuité sont, en effet, une conséquence immédiate des conventions à l'aide desquelles on a fixé le sens des notations adoptées. Il est donc certain, comme je l'ai dit ailleurs (*Journal de Liouville*, t. II, p. 323), *que la nature des conventions a une influence marquée sur le caractère des fonctions considérées comme continues, de sorte qu'en passant d'un système de conventions à un autre, on peut rendre discontinues des fonctions qui étaient continues, et réciproquement.*

Parmi les fonctions explicites, représentées à l'aide des notations usuelles, on doit distinguer celles qui ne cessent d'être continues qu'en devenant infinies. Nous les appellerons *monodromes*. Une fonction pourra d'ailleurs être monodrome, seulement pour les valeurs de z correspondantes aux points intérieurs d'une certaine aire S renfermée dans un certain contour PQR, ou entre deux contours donnés KLM, PQR. Dans tous les cas, le mot monodrome paraît exprimer assez bien la propriété de la fonction que l'on considère, puisque celle-ci varie par degrés insensibles, en acquérant à chaque instant une *valeur unique*, tandis que le point mobile A correspondant à l'affixe z *court* çà et là, sans sortir de l'aire S, ou tourne autour des points singuliers correspondants à des valeurs infinies de la fonction.

On peut citer, comme exemples de fonctions monodromes, non seulement les deux fonctions

$$\frac{c}{z},\quad \operatorname{tang} z,$$

mais encore les fonctions rationnelles de z, de e^z, de $\sin z$, de $\cos z$, etc.

Ainsi qu'on vient de l'expliquer, pour mettre en évidence la nature et les propriétés d'une fonction explicite Z de la variable imaginée z, il est surtout nécessaire d'avoir égard aux diverses positions que peut prendre le point mobile A qui a z pour affixe. Parlons maintenant des positions que peut prendre le point mobile B dont l'affixe est Z. Tandis que le point parcourra en tous sens le plan des affixes, le point B pourra décrire ou ce plan tout entier, ou seulement une portion de ce même plan. Dans le dernier cas, la portion décrite sera ce que nous nommerons la *région* correspondante à la fonction explicite z, et les lignes droites ou courbes qui serviront de limites à cette région, seront appelées *lignes terminales*. Ces lignes terminales correspondront évidemment aux lignes d'arrêt, de telle sorte qu'au moment où le point mobile A dont z est l'affixe atteindra une ligne d'arrêt, le point mobile B dont Z est l'affixe atteindra une ligne terminale.

Si l'on considère, par exemple, la fonction explicite

$$z^{\frac{1}{2}},$$

on reconnaîtra, non seulement que cette fonction devient discontinue au moment où le point mobile A atteint la ligne d'arrêt représentée par la formule (3), c'est-à-dire l'axe des x, indéfiniment prolongé à partir du pôle du côté des x négatives, mais encore que les valeurs diverses de cette fonction explicite sont les affixes de points situés du côté des x positives, et qu'en conséquence cette fonction représente l'affixe d'un point mobile B compris dans une *région* spéciale, savoir, dans la partie du plan des xy qui, s'étendant à l'infini du côté des x positives, a pour ligne terminale l'axe des ordonnées.

Si à la fonction $z^{\frac{1}{2}}$ on substituait la suivante :

$$\mathrm{l}z,$$

qui devient encore discontinue au moment où le plan mobile A rencontre l'axe des x, du côté des x négatives, la région parcourue par le point mobile B, ou, en d'autres termes, la région correspondante à la fonction $\mathrm{l}z$ cesserait de s'étendre à l'infini du côté des x positives, et se réduirait à la portion du plan des affixes, comprise entre deux terminales parallèles à l'axe des y et situées de part et d'autre de cet axe à la distance π.

Enfin, si l'on considérait la fonction

$$\operatorname{arc\,tang} z = \frac{\mathrm{l}(1+z\mathrm{i}) - \mathrm{l}(1-z\mathrm{i})}{2\mathrm{i}},$$

qui devient discontinue au moment ou le point mobile A rencontre l'axe des y, à une distance du pôle égale ou supérieure à l'unité, la région parcourue par le point mobile B, c'est-à-dire, en d'autres termes, la région correspondante à la fonction arc tang z, se réduirait à la portion du plan des affixes comprise entre deux lignes terminales parallèles à l'axe des y et situées de part et d'autre de cet axe à la distance $\frac{\pi}{2}$.

Il arrive souvent que deux fonctions explicites d'une variable imaginaire z sont égales entre elles pour certaines valeurs de cette variable, et inégales pour d'autres valeurs. Ainsi, par exemple, si c représente une valeur particulière de la variable z, les deux fonctions explicites

$$z^{\frac{1}{2}}, \quad c^{\frac{1}{2}}\left(\frac{z}{c}\right)^{\frac{1}{2}}$$

seront égales entre elles, quand les arguments principaux de c et de z fourniront une somme comprise entre les limites $-\pi$, $+\pi$. On ne doit donc pas s'étonner de voir correspondre à ces deux fonctions des lignes terminales distinctes, et à ces lignes terminales des lignes d'arrêt distinctes. Si, pour fixer les idées, on nomme ϖ l'argument principal de la constante c, et si cet argument est positif, alors, pour obtenir la ligne terminale et la ligne d'arrêt correspondante à la fonction

$$c^{\frac{1}{2}}\left(\frac{z}{c}\right)^{\frac{1}{2}},$$

il suffira de faire tourner autour du pôle la ligne terminale et la ligne d'arrêt correspondantes à la fonction $z^{\frac{1}{2}}$, en imprimant à ces dernières lignes un mouvement de rotation direct, de telle sorte que le rayon vecteur mené de l'origine à un de leurs points décrive un angle égal à ϖ.

Supposons à présent que l'on considère non plus une fonction explicite, mais une fonction implicite Z de la variable imaginaire z. Cette fonction pourra être déterminée, ou isolément par une équation

unique, ou avec d'autres fonctions implicites, par un système d'équations dont le nombre devra être égal à celui des fonctions elles-mêmes. Dans l'un et l'autre cas, Z admettra, pour chaque valeur de z, une ou plusieurs valeurs qui pourront devenir ou infinies, ou égales entre elles, pour certaines valeurs particulières de la variable z. Les points dont ces valeurs particulières de z seront les affixes prendront le nom de *points singuliers*.

Soient maintenant

$$z_{\prime}, \quad z_{\prime\prime}, \quad z_{\prime\prime\prime}$$

diverses valeurs successivement attribuées à la variable imaginaire z, et

$$Z_{\prime}, \quad Z_{\prime\prime}, \quad Z_{\prime\prime\prime}, \quad \ldots$$

des valeurs correspondantes d'une fonction explicite ou implicite Z, en sorte que $Z_{\prime}$ désigne une des valeurs de Z correspondantes à la valeur $z_{\prime}$ de z; $Z_{\prime\prime}$ une des valeurs de Z correspondantes à la valeur $z_{\prime\prime}$ de z; et ainsi de suite. Soient d'ailleurs

$$A_{\prime}, \quad A_{\prime\prime}, \quad A_{\prime\prime\prime}, \quad \ldots$$

les points qui ont pour affixes les quantités géométriques

$$z_{\prime}, \quad z_{\prime\prime}, \quad z_{\prime\prime\prime}, \quad \ldots;$$

et soient encore

$$B_{\prime}, \quad B_{\prime\prime}, \quad B_{\prime\prime\prime}, \quad \ldots$$

les points qui ont pour affixes les quantités géométriques

$$Z_{\prime}, \quad Z_{\prime\prime}, \quad Z_{\prime\prime\prime}, \quad \ldots.$$

Enfin concevons que, le nombre des points $A_{\prime}$, $A_{\prime\prime}$, $A_{\prime\prime\prime}$, ..., devenant infini, leur système se réduise à une courbe continue $A_{\prime}A_{\prime\prime}A_{\prime\prime\prime}\ldots$, décrite par un point mobile A correspondant à une affixe variable z. Le système des points $B_{\prime}$, $B_{\prime\prime}$, $B_{\prime\prime\prime}$, ... pourra, dans certains cas, c'est-à-dire, pour certaines formes de la fonction Z, ou des équations qui la déterminent, et pour certaines formes de la courbe continue $A_{\prime}A_{\prime\prime}A_{\prime\prime\prime}\ldots$, se réduire lui-même à une courbe continue $B_{\prime}B_{\prime\prime}B_{\prime\prime\prime}\ldots$, décrite par un point mobile B correspondant à une affixe variable z. Alors la courbe continue $A_{\prime}A_{\prime\prime}A_{\prime\prime\prime}\ldots$ sera ce que nous nommerons le *chemin* (1) du point A, et la courbe continue $B_{\prime}B_{\prime\prime}B_{\prime\prime\prime}\ldots$ sera le *chemin* correspondant du point B.

La nature d'une fonction implicite Z, c'est-à-dire, en d'autres termes, la nature de l'équation ou des équations qui déterminent Z, peut être telle, qu'à une courbe continue $A_{\prime}A_{\prime\prime}A_{\prime\prime\prime}\ldots$, considérée comme chemin du point mobile A, corresponde toujours une autre courbe continue $B_{\prime}B_{\prime\prime}B_{\prime\prime\prime}\ldots$, propre à représenter le chemin du point mobile B, quelle que soit d'ailleurs, parmi les valeurs de Z correspondantes à $z = z_{\prime}$, celle que l'on prendra pour l'affixe $Z_{\prime}$ du point $B_{\prime}$. Il peut arriver aussi que cette condition, étant généralement remplie, cesse de l'être dans le seul cas où les affixes de quelques-uns des points $B_{\prime}$, $B_{\prime\prime}$, $B_{\prime\prime\prime}$, ... deviennent infinies, et où, par suite, la courbe $B_{\prime}B_{\prime\prime}B_{\prime\prime\prime}\ldots$ se trouve remplacée par le système de plusieurs courbes dont chacune reste continue, mais s'étend à l'infini. Dans l'une et l'autre hypothèse, si le chemin $A_{\prime}A_{\prime\prime}A_{\prime\prime\prime}\ldots$ du point mobile A ne renferme aucun point singulier, le chemin correspondant $B_{\prime}B_{\prime\prime}B_{\prime\prime\prime}$ du point mobile B, partant d'une position donnée $B_{\prime}$, dans laquelle il avait pour affixe la valeur $Z_{\prime}$ de Z, sera toujours une courbe continue; et alors, ce dernier chemin n'étant jamais interrompu, n'offrant aucune solution de continuité, la fonction Z sera dite *évodique* (de ευοδοσ, *pervius*; ευοδια, *facilis via*).

Ajoutons qu'une fonction implicite Z de la variable imaginaire z sera évodique seulement *entre certaines limites*, c'est-à-dire pour les valeurs de z propres à représenter les affixes de points situés dans l'intérieur d'une certaine aire S, si la condition ci-dessus énoncée ne se vérifie que dans le cas où le chemin $A_{\prime}A_{\prime\prime}A_{\prime\prime\prime}\ldots$ du point mobile A est une courbe continue renfermée tout entière dans l'intérieur de l'aire S.

Concevons à présent que l'on parvienne à résoudre l'équation ou les

(1) Le nom de *chemin*, appliqué à la courbe que décrit le point A, a été, si je ne me trompe, employé pour la première fois par M. Puiseux, dans un remarquable Mémoire qui a pour titre : *Recherches sur les fonctions algébriques*. (*Voir* M. Liouville, *Journal de Mathématiques*, t. XV, p. 396.)

équations qui servent à déterminer une fonction implicite Z de la variable imaginaire z, et à exprimer les diverses valeurs de cette fonction à l'aide des notations usuelles. Ces diverses valeurs deviendront des fonctions explicites de z, et chacune des fonctions explicites ainsi obtenues admettra généralement, pour chaque valeur finie de z, une valeur unique complètement déterminée. Mais ces mêmes fonctions pourront devenir discontinues pour des valeurs particulières de z, qui les rendront infinies; comme aussi pour des valeurs de z propres à représenter des affixes de points situés sur certaines lignes que nous avons appelées *lignes d'arrêt*. D'ailleurs, à ces lignes d'arrêt dont chacune limite la course du point mobile A, à l'instant où l'une des fonctions explicites ci-dessus mentionnées cessent d'être continue, correspondront d'autres lignes que nous avons appelées *lignes terminales*, et qui limiteront, dans les mêmes circonstances, la course du point mobile B.

Cela posé, considérons spécialement le cas où la fonction implicite Z est du nombre de celles que nous avons nommées fonctions évodiques; et soit, dans cette hypothèse, $A_{\prime}A_{\prime\prime}A_{\prime\prime\prime}\ldots$ une courbe continue qui représente un chemin attribué au point mobile A dont l'affixe est z; soit encore $B_{\prime}B_{\prime\prime}B_{\prime\prime\prime}\ldots$ le chemin correspondant que devra prendre le point mobile B, dont l'affixe est Z, en partant d'une position donnée $B_{\prime}$, dont l'affixe est une valeur particulière de Z. Le chemin $B_{\prime}B_{\prime\prime}B_{\prime\prime\prime}\ldots$ se réduira lui-même soit à une seule courbe continue, soit au système de deux ou de plusieurs courbes continues qui pourront offrir des parties communes. Il se réduira effectivement à une seule courbe continue, si le chemin $A_{\prime}A_{\prime\prime}A_{\prime\prime\prime}\ldots$ ne renferme *aucun point singulier*. Mais cette courbe unique sera remplacée par le système de deux ou plusieurs courbes qui s'étendront à l'infini, si le chemin $A_{\prime}A_{\prime\prime}A_{\prime\prime\prime}\ldots$ renferme des points singuliers dont les affixes fournissent des valeurs infinies de Z, et la courbe ou les courbes dont il s'agit se ramifieront toujours à partir de points singuliers qui correspondraient à des valeurs de z pour lesquelles deux ou plusieurs des valeurs de la fonction implicite Z deviendraient égales entre elles. Ajoutons que, dans la première hypothèse, c'est-à-dire quand le chemin $A_1A_2A_3\dots$ ne renfermera aucun point singulier, l'affixe Z du point mobile B, dont le chemin $B_1B_2B_3\dots$ sera une seule courbe continue, pourra être représentée tantôt par une fonction explicite de z, tantôt par une autre, attendu que chacune des fonctions explicites qui exprimeront les diverses valeurs de Z devra être remplacée par une autre fonction explicite à partir de l'instant où le point mobile B, après avoir eu la première fonction pour affixe, atteindra une ligne terminale correspondante à cette même fonction. On doit en conclure que, dans le cas où une fonction évodique Z admet diverses valeurs, les diverses fonctions explicites propres à les représenter correspondent, dans le plan des affixes, à diverses *régions* séparées les unes des autres par certaines *lignes terminales*. D'ailleurs, au moment où le point B, dont l'affixe est Z, atteindra une de ces lignes terminales, le point A, dont l'affixe est z, atteindra une ligne *d'arrêt* correspondante.

Vérifions ces remarques sur quelques exemples, et d'abord supposons la fonction implicite

$$Z = R_P = X + Y\mathrm{i},$$

liée à la variable imaginaire

$$z = r_p = x + y\mathrm{i},$$

par l'équation

$$Z^2 = z. \tag{5}$$

La résolution de cette équation fournira pour valeurs de Z deux fonctions explicites de z, données par les formules

$$Z = z^{\frac{1}{2}}, \tag{6}$$

$$Z = -z^{\frac{1}{2}}. \tag{7}$$

Ces deux fonctions explicites deviendront égales entre elles, et s'évanouiront toutes deux pour une valeur nulle de la variable z; par conséquent, le point dont l'affixe est nulle, c'est-à-dire le pôle, sera un *point singulier*. D'ailleurs, chacune des fonctions explicites

$$z^{\frac{1}{2}}, \quad -z^{\frac{1}{2}},$$

quoique généralement continue, deviendra discontinue pour toute valeur réelle, mais négative de y, attendu que si, en attribuant à x une valeur négative $-r$, on fait converger y vers la limite zéro, la fonction $z^{\frac{1}{2}}$ convergera elle-même vers la limite $r^{\frac{1}{2}}\mathrm{i}$, quand y sera supposé positif, et vers la limite $-r^{\frac{1}{2}}\mathrm{i}$, quand y sera supposé négatif. En d'autres termes, chacune des fonctions explicites $z^{\frac{1}{2}}$, $-z^{\frac{1}{2}}$ deviendra discontinue pour toute valeur de z propre à représenter l'affixe d'un point situé sur l'axe des x, du côté des x négatives, et par conséquent sur la *ligne* d'arrêt qui, représentée par les formules (3), a pour extrémité l'origine. De plus, à cette ligne d'arrêt qui limite la course du point mobile A à l'instant où l'une des fonctions $z^{\frac{1}{2}}$, $-z^{\frac{1}{2}}$ cesse d'être continue, correspondra une ligne terminale qui limitera au même instant la course du point mobile B; et cette dernière ligne, qui sera précisément l'axe des ordonnées, séparera l'une de l'autre, dans le plan des affixes, les deux régions qui seront occupées l'une par les points dont les affixes seront les diverses valeurs de la fonction explicite $z^{\frac{1}{2}}$, l'autre par les points dont les affixes seront les diverses valeurs de la fonction explicite $-z^{\frac{1}{2}}$. Enfin la fonction implicite Z, liée à la variable imaginaire z par l'équation (3), sera certainement évodique. Car, si l'on exprime Z non plus en fonction de la variable z, mais en fonction du module r et de l'angle p, liés à z par la formule

$$z = r_p = re^{p\mathrm{i}}, \tag{8}$$

on obtiendra l'équation

$$Z = r^{\frac{1}{2}} e^{\frac{1}{2}p\mathrm{i}}, \tag{9}$$

dans laquelle il suffira de faire varier p entre les limites $-\infty$, $+\infty$, ou même entre les limites -2π, $+2\pi$, pour que le second membre devienne propre à représenter une valeur quelconque de Z. Or, si, en partant d'une certaine position correspondante à des valeurs déterminées de r et p, le point mobile A, dont l'affixe est z, décrit une courbe continue $A_1A_2A_3\dots$, on pourra satisfaire à la formule (8) par des valeurs de r et p qui varieront avec z par degrés insensibles; et à ces valeurs de r, p répondra évidemment, en vertu de la formule (9), une valeur de la fonction implicite Z, qui variera elle-même par degrés insensibles avec la variable z. Donc alors le point mobile B, dont Z sera l'affixe, décrira, comme le point A, une courbe continue $B_{,}B_{,,}B_{,,,}\ldots$.

En résumé, la fonction implicite Z, liée à z par l'équation (5), est une fonction évodique qui, pour chaque valeur de z, acquiert deux valeurs distinctes; et ces deux valeurs peuvent être réduites aux deux fonctions explicites

$$z^{\frac{1}{2}}, \quad -z^{\frac{1}{2}},$$

dont chacune devient discontinue, en devenant l'affixe d'un point situé sur l'axe des ordonnées, au moment où la variable z devient elle-même l'affixe d'un point situé sur l'axe des x, du côté des x négatives. En conséquence, la partie de l'axe des abscisses, sur laquelle se comptent les abscisses négatives, et l'axe des ordonnées, sont la ligne d'arrêt et la ligne terminale qui servent à limiter simultanément la course du point A, dont l'affixe est la variable z, et la course du point B, dont l'affixe est l'une des fonctions explicites $z^{\frac{1}{2}}$, $-z^{\frac{1}{2}}$. De ces deux lignes, la seconde, c'est-à-dire l'axe des ordonnées, est précisément celle qui sépare l'une de l'autre les régions occupées par les points dont les affixes sont de la forme $z^{\frac{1}{2}}$ et de la forme $-z^{\frac{1}{2}}$.

Si à l'équation (2) on substituait la suivante :

$$Z^2 + z^2 = 1, \tag{10}$$

la fonction implicite Z serait encore une fonction évodique qui, pour chaque valeur de z, offrirait généralement deux valeurs distinctes, ces deux valeurs étant les fonctions explicites déterminées par les formules

$$Z = \quad (1 - z^2)^{\frac{1}{2}}, \tag{11}$$

$$Z = -(1 - z^2)^{\frac{1}{2}}. \tag{12}$$

D'ailleurs, chacune de ces fonctions explicites devient discontinue au

moment où z devient l'affixe d'un point situé sur l'axe des x à une distance de l'origine plus grande que l'unité, et, à ce moment, chacune des formules (11), (12) fournit deux valeurs de Z égales aux signes près, mais affectées de signes contraires, qui représentent les affixes de deux points situés sur l'axe des ordonnées. Donc, dans le cas présent, les deux valeurs de Z, déterminées par les formules (11), (12), correspondent encore à deux régions séparées l'une de l'autre par l'axe des ordonnées; et à cet axe, considéré comme ligne terminale, correspondent deux lignes d'arrêt représentées par les formules

$$x^2 = \text{ou} > 1, \qquad y = 0. \tag{13}$$

Ajoutons que les extrémités de ces deux lignes d'arrêt sont précisément les deux points d'arrêt dont les coordonnées sont fournies par les équations

$$x^2 = 1, \qquad y = 0, \tag{14}$$

c'est-à-dire les deux points situés sur l'axe des abscisses, à la distance 1 de l'origine.

Si à l'équation (10) on substituait la suivante :

$$Z^2(1 - z^2) = -1, \tag{15}$$

la fonction implicite Z serait encore une fonction évodique qui, pour chaque valeur de z, offrirait deux valeurs distinctes, ces valeurs étant les fonctions explicites déterminées par les formules

$$Z = \quad (-1 + z^2)^{-\frac{1}{2}}, \tag{16}$$

$$Z = -(-1 + z^2)^{-\frac{1}{2}}. \tag{17}$$

Alors aussi à ces deux fonctions explicites correspondraient encore deux régions, séparées l'une de l'autre par l'axe des ordonnées; mais ces deux fonctions deviendraient discontinues au moment où z serait l'affixe d'un point situé sur l'axe des x, à une distance de l'origine plus petite que l'unité. Donc alors, à l'axe des ordonnées, considéré comme ligne terminale, correspondrait une seule ligne d'arrêt, représentée par les formules

$$x^2 = \text{ ou } < 1, \qquad y = 0. \tag{18}$$

Ajoutons que les extrémités de cette ligne d'arrêt seraient encore les deux points d'arrêt dont les coordonnées sont fournies par les équations (14). Mais les valeurs de Z, correspondantes à ces points d'arrêt, sont nulles quand on part de l'équation (10), et infinies quand on part de l'équation (15).

Enfin, si l'on supposait la fonction implicite Z liée à la variable imaginaire z par l'équation

$$e^Z = z, \tag{19}$$

Z offrirait, pour chaque valeur de z, une infinité de valeurs distinctes, représentées par les fonctions explicites qui constituent les divers termes de la progression arithmétique

$$\ldots, \quad -4\pi i + lz, \quad -2\pi i + lz, \quad lz, \quad 2\pi i + lz, \quad 4\pi i + lz, \quad \ldots. \tag{20}$$

D'ailleurs, en vertu de la formule (19), Z serait encore une fonction évodique de z. Car si l'on exprime Z, non plus en fonction de z, mais en fonction du module r et de l'angle p liés à z par la formule (8), on obtiendra l'équation

$$Z = l(r) + pi, \tag{21}$$

dans laquelle il suffira de faire varier p entre les limites $-\infty$, $+\infty$, pour que le second membre devienne propre à représenter une valeur quelconque de Z. Or, si en partant d'une certaine position correspondante à des valeurs déterminées de r et p, le point A, dont l'affixe est z, décrit une courbe continue $AA'A''\ldots$, on pourra satisfaire à la formule (8) en attribuant à r et p des valeurs qui varient avec z par degrés insensibles; et à ces valeurs de r, p répondra évidemment, en vertu de la formule (21), une valeur de la fonction implicite Z, qui variera elle-même, par degrés insensibles, avec la variable z, si la courbe $AA'A''\ldots$ ne renferme pas le point d'arrêt dont l'affixe se réduit à zéro, c'est-à-dire l'origine des coordonnées.

D'autre part, chacune des fonctions explicites qui constituent les

divers termes de la série (20) deviendra discontinue au moment où z deviendra l'affixe d'un point situé sur la ligne d'arrêt que représentent les formules (3), c'est-à-dire d'un point situé sur l'axe des x, du côté des x négatives; et à ce moment, ces fonctions elles-mêmes deviendront les affixes de points situés sur des lignes terminales qui se réduiront à des droites équidistantes et parallèles à l'axe des x, la distance de deux droites voisines étant égale à 2π.

Donc, en définitive, la fonction Z, liée à z par l'équation (19), sera une fonction évodique qui, pour chaque valeur de z, offrira une infinité de valeurs distinctes correspondantes à une infinité de régions dont chacune sera comprise entre deux des droites parallèles que nous venons de mentionner.

Il importe d'observer que, dans le cas où à une même valeur de la variable imaginaire z correspondent diverses valeurs de la fonction implicite Z, ces diverses valeurs, exprimées à l'aide des notations usuelles, et ainsi converties en fonctions explicites, peuvent généralement revêtir une infinité de formes distinctes. D'ailleurs, si l'on compare l'un à l'autre deux systèmes de fonctions explicites dont chacun est propre à représenter les diverses valeurs de Z, on reconnaîtra que ces fonctions, prises deux à deux, peuvent coïncider entre certaines limites, sans être généralement égales entre elles; et qu'à deux semblables systèmes de fonctions explicites correspondent, pour l'ordinaire deux systèmes de lignes d'arrêt et deux systèmes de lignes terminales.

Ainsi, par exemple, si la fonction implicite Z est liée à la variable imaginaire z par l'équation (5), les deux valeurs qu'admettra cette fonction pourront être supposées déterminées non seulement par les formules (6) et (7), mais encore par une infinité d'autres formules, et en particulier par les suivantes :

$$Z = c^{\frac{1}{2}}\left(\frac{z}{c}\right)^{\frac{1}{2}}, \tag{22}$$

$$Z = -c^{\frac{1}{2}}\left(\frac{z}{c}\right)^{\frac{1}{2}}, \tag{23}$$

c désignant une constante quelconque réelle ou imaginaire.

D'ailleurs, d'après une remarque précédemment faite, si l'on nomme ϖ l'argument principal de la constante c supposée imaginaire, il suffira, pour obtenir la ligne d'arrêt et la ligne terminale correspondantes aux fonctions explicites que déterminent les formules (22), (23), de faire tourner autour du pôle la ligne d'arrêt et la ligne terminale correspondantes aux fonctions que déterminent les formules (6) et (7), en imprimant à ces dernières lignes un mouvement de rotation direct si ϖ est positif, ou rétrograde si ϖ est négatif, de telle sorte que le rayon vecteur, mené de l'origine à un de leurs points, décrive un angle égal à ϖ.

Il est bon d'observer qu'à une fonction implicite Z, déterminée par une équation unique ou par un système d'équations simultanées, correspond un système unique de points singuliers, par conséquent un système unique de points d'arrêt servant d'extrémités aux lignes d'arrêt, quelles que soient d'ailleurs ces dernières lignes. Ainsi, par exemple, à la fonction implicite Z, déterminée par l'équation (5), correspond un seul point d'arrêt qui coïncide avec l'origine, et dont l'affixe est la valeur o de z, pour laquelle les deux valeurs de Z, fournies par les formules (6) et (7), ou par les formules (22) et (23), deviennent égales entre elles.

MÉMOIRE SUR LES DIFFÉRENTIELLES

DE

QUANTITÉS ALGÉBRIQUES OU GÉOMÉTRIQUES

ET SUR

LES DÉRIVÉES DES FONCTIONS DE CES QUANTITÉS

Dans le *Mémoire sur l'Analyse infinitésimale* (¹), placé en tête du troisième volume de cet ouvrage, sont exposés les principes qui me paraissent devoir servir de base au calcul différentiel. Je vais indiquer aujourd'hui les conséquences qui se déduisent de ces principes, quand à la notion de variables imaginaires on substitue celles de quantités géométriques variables.

I. — *Sur les différentielles de quantités algébriques ou géométriques.*

En substituant, dans le Mémoire sur l'Analyse infinitésimale, les mots *quantités géométriques* aux mots *expressions imaginaires*, on obtient à la place des définitions et formules données dans ce Mémoire, celles que je vais transcrire :

Les différentielles de plusieurs quantités algébriques ou géométriques variables sont d'autres quantités algébriques ou géométriques dont les rapports sont rigoureusement égaux aux limites des rapports entre les accroissements simultanés et infiniment petits des variables proposées.

La définition précédente suppose évidemment qu'en vertu des équations qui lient entre elles les quantités algébriques ou géométriques dont il s'agit, ces quantités varient les unes avec les autres par degrés

(¹) *Œuvres de Cauchy*, série II, t. XIII, p. 9.

insensibles, ou, en d'autres termes, que ces quantités, considérées comme fonctions de quelques-unes d'entre elles, en sont des fonctions continues, du moins dans le voisinage des valeurs attribuées aux variables considérées comme indépendantes.

Nous indiquerons, suivant l'usage, les accroissements simultanés finis ou infiniment petits des variables, à l'aide de la lettre caractéristique Δ, et leurs différentielles à l'aide de la lettre caractéristique d.

Il importe d'observer que, dans le cas même où chacun des rapports entre les accroissements infiniment petits des variables proposées converge vers une limite unique et finie, la définition précédente ne détermine pas complètement les différentielles de ces variables, mais seulement les rapports qui existent entre ces différentielles. On pourra donc toujours disposer arbitrairement, au moins de la différentielle d'une variable.

D'ailleurs, la différentielle ou les différentielles qui resteront arbitraires, pourront être supposées ou constantes ou variables, et, dans le dernier cas, il suffirait de les faire converger vers la limite zéro pour les transformer, avec les autres différentielles, en quantités infiniment petites. Mais cette transformation n'offrirait aucun avantage, et tout au contraire, il peut être souvent utile d'attribuer aux différentielles des valeurs finies. En conséquence, nous continuerons à regarder les différentielles comme des quantités finies, ainsi que nous l'avons fait dans le Mémoire déjà cité.

De plus, nous attribuerons aux quantités diverses, comme il paraît convenable de le faire, des différentielles de même nature que leurs accroissements. En conséquence, les différentielles de quantités algébriques seront des quantités algébriques, et les différentielles de quantités géométriques seront des quantités géométriques.

Enfin, comme dans le Mémoire cité, nous appellerons *variable primitive* une quantité algébrique variable qui aura pour différentielle l'unité. Cette variable primitive pourra d'ailleurs être ou l'une des variables indépendantes proposées, ou une variable nouvelle avec laquelle on fera varier toutes les autres.

La considération de la variable primitive simplifie l'énoncé de la définition que nous avons donnée des différentielles. En effet, soient t la variable primitive, et $\Delta t = \iota$ un accroissement infiniment petit attribué à cette variable. *La différentielle* $\mathrm{d}s$ *d'une variable quelconque* s *sera évidemment la limite du rapport entre les accroissements infiniment petits* Δs *et* ι *de cette variable et de la variable primitive.*

En partant de cette définition, on établira sans peine, comme dans le Mémoire cité, les règles relatives à la différentiation des quantités soit algébriques, soit géométriques.

Ainsi, par exemple, a, b, c désignant des quantités algébriques ou géométriques constantes, et s, u, v, w, ... des quantités algébriques ou géométriques variables, l'équation linéaire

$$s = au + bv + cw + \ldots \tag{1}$$

entrainera la formule

$$\mathrm{d}s = a\,\mathrm{d}u + b\,\mathrm{d}v + c\,\mathrm{d}w + \ldots. \tag{2}$$

En conséquence, l'équation linéaire

$$z = x + y\mathrm{i}, \tag{3}$$

qui sert à exprimer l'affixe z d'un point mobile A en fonction des coordonnées rectangulaires x, y de ce même point, entrainera la formule

$$\mathrm{d}z = \mathrm{d}x + \mathrm{i}\,\mathrm{d}y. \tag{4}$$

Concevons maintenant que, x, y, z, ... étant des variables dépendantes ou indépendantes les unes des autres, on nomme s une fonction de ces variables. Désignons d'ailleurs, à l'aide des notations

$$\mathrm{d}_x s, \quad \mathrm{d}_y s, \quad \mathrm{d}_z s, \quad \ldots,$$

les *différentielles partielles* de s successivement considéré comme fonction de x, comme fonction de y, comme fonction de z, ... Alors, en raisonnant comme dans le volume III [p. 27 et 28 (1)], on obtiendra

(1) *Œuvres de Cauchy*, série II, t. XIII, p. 31 et suiv.

la formule

$$ds = d_x s + d_y s + d_z s + \ldots, \tag{5}$$

en vertu de laquelle la *différentielle totale* ds sera la somme des différentielles partielles $d_x s$, $d_y s$, $d_z s$, ...

II. — *Sur les dérivées des fonctions de quantités algébriques.*

Soient x une quantité algébrique variable, ou, en d'autres termes, une variable réelle, et

$$X = f(x)$$

une fonction réelle ou imaginaire de cette variable. Soient encore Δx un accroissement fini ou infiniment petit attribué à la variable x, et ΔX l'accroissement correspondant que prendra la fonction X. Si l'on assigne à x une valeur telle que, dans le voisinage de cette valeur de x, la fonction X demeure finie et continue, alors à une valeur infiniment petite de l'accroissement Δx correspondra une valeur infiniment petite de l'accroissement ΔX; mais tandis que les deux accroissements Δx, ΔX s'approcheront indéfiniment l'un et l'autre de la limite zéro, leur rapport $\frac{\Delta X}{\Delta x}$ s'approchera lui-même, pour l'ordinaire, d'une limite finie et déterminée, qui pourra être finie ou infinie. Cette limite est ce que l'on nomme la *dérivée* de la fonction X ou $f(x)$. On la représente à l'aide de la lettre caractéristique D, par la notation [1]

$$DX \quad \text{ou} \quad Df(x),$$

ou, encore mieux, par la notation

$$D_x X \quad \text{ou} \quad D_x f(x),$$

dans laquelle la lettre x, placée au bas de la lettre caractéristique D, avertit le lecteur qu'il s'agit d'une dérivée prise par rapport à la variable x. Ajoutons que la dérivée de X, relative à x, se confond

[1] Suivant la notation de Lagrange, la dérivée de la fonction X ou $f(x)$ s'indique à l'aide d'un trait par

$$X', \quad \text{ou} \quad f'(x).$$

évidemment, d'après sa définition même, avec le *rapport différentiel*, de X à x, c'est-à-dire avec le rapport $\frac{dX}{dx}$ des différentielles dX, dx. On a donc identiquement

$$\frac{dX}{dx} = D_x X, \tag{1}$$

et

$$dX = D_x X\, dx. \tag{2}$$

Concevons, pour fixer les idées, que la fonction réelle ou imaginaire X de la variable réelle x soit l'une de celles qui peuvent être exprimées à l'aide des notations usuelles. Sa dérivée sera, pour l'ordinaire, une quantité complètement déterminée. Toutefois, elle pourra cesser d'être déterminée, et acquérir deux ou trois valeurs distinctes, ou même une infinité de valeurs diverses, pour certaines valeurs particulières assignées à la variable x. Ainsi, par exemple, si l'on pose

$$X = x \sin \frac{1}{x},$$

la dérivée de X deviendra indéterminée pour $x = 0$, et acquerra dans cette hypothèse, une valeur égale à celle de la fonction $\sin \frac{1}{x}$, par conséquent, représentée par une quantité réelle comprise entre les limites -1, $+1$.

En général, on peut dire que, parmi les fonctions d'une variable réelle, les unes sont complètement déterminées, tandis que les autres cessent de l'être, au moins pour certaines valeurs particulières de la variable.

Concevons maintenant que, $x, y, z, \ldots$ étant des quantités algébriques variables, dépendantes ou indépendantes les unes des autres, on nomme s une fonction réelle ou imaginaire de ces variables. Désignons d'ailleurs, à l'aide des notations

$$D_x s, \quad D_y s, \quad D_z s, \quad \ldots,$$

les dérivées partielles de s successivement considérée comme fonction de x, comme fonction de y, comme fonction de z, ... Alors, en raisonnant comme dans le volume III [p. 27, 28 et 29 ([1])], on établira non seulement la formule (5) du paragraphe I, savoir

$$ds = d_x s + d_y s + d_z s + \ldots,$$

mais encore les équations

$$d_x s = D_x s\, dx, \qquad d_y s = D_y s\, dy, \qquad d_z s = D_z s\, dz, \qquad \ldots, \tag{3}$$

et l'on en conclura

$$ds = D_x s\, dx + D_y s\, dy + D_z s\, dz + \ldots. \tag{4}$$

Il est généralement facile d'obtenir les dérivées, et par suite les différentielles des fonctions rélles ou imaginaires de quantités algébriques, quand ces fonctions sont exprimées à l'aide des notations usuelles.

Supposons, en particulier, que l'on demande la quantité géométrique 1_p, considérée comme fonction de l'argument p, et, pour abréger, désignons par la lettre ϖ un accroissement infiniment petit Δp attribué à cet argument. La dérivée cherchée sera la limite du rapport

$$\frac{1_{p+\varpi} - 1_p}{\varpi} = 1_p \frac{1_\varpi - 1}{\varpi}; \tag{5}$$

elle sera donc égale au produit de 1_p par quantité géométrique qui représentera la limite du rapport

$$\frac{1_\varpi - 1}{\varpi}. \tag{6}$$

D'ailleurs, dans le cercle décrit du pôle comme centre avec le rayon 1, ϖ sera la mesure de l'arc compris entre les deux rayons qui, partant du pôle, seront représentés par des quantités géométriques 1, 1_ϖ, et la différence $1_\varpi - 1$ de ces deux quantités représentera, en grandeur comme en direction, la corde de ce même arc. Par suite, l'expression (6) aura pour module le rapport numérique de cette corde à l'arc et, pour argument l'angle obtus formé par la même corde avec l'axe polaire. D'autre part, tandis que l'arc s'approchera indéfiniment de zéro, le rapport numérique de la corde à l'arc convergera vers la limite 1, et l'angle obtus formé par la corde avec l'axe polaire vers la limite $\frac{\pi}{2}$, qui représente un angle droit. Donc, l'expression (6) aura pour limite

[1] *Œuvres de Cauchy*, série II, t. XIII, p. 31 et suiv.

$$1_{\frac{\pi}{2}} = i,$$

et la limite de l'expression (5), ou la dérivée de 1_p, sera le produit de 1_p par $1_{\frac{\pi}{2}} = i$, ou, ce qui revient au même, $1_{p+\frac{\pi}{2}}$, en sorte qu'on aura

$$D_p 1_p = 1_{p+\frac{\pi}{2}}. \tag{7}$$

Si, dans cette dernière équation, l'on substitue à l'expression 1_p, sa valeur tirée de la formule (11) de la page 216, savoir

$$1_p = \cos p + i \sin p;$$

on trouvera

$$D_p \cos p + i\, D_p \sin p = \cos\left(p + \frac{\pi}{2}\right) + i \sin\left(p + \frac{\pi}{2}\right), \tag{8}$$

et, par suite,

$$D_p \cos p = \cos\left(p + \frac{\pi}{2}\right), \qquad D_p \sin p = \sin\left(p + \frac{\pi}{2}\right), \tag{9}$$

ou, ce qui revient au même,

$$D_p \cos p = -\sin p, \qquad D_p \sin p = \cos p. \tag{10}$$

Ainsi, en partant de la formule (7), on se trouve ramené aux équations connues qui fournissent les dérivées du cosinus et du sinus d'un arc; et réciproquement on pourrait, de ces équations, ou, ce qui revient au même, des formules (9), déduire immédiatement l'équation (8), par conséquent, la formule (7). Ajoutons que de l'équation (7), jointe aux formules

$$d 1_p = D_p 1_p dp, \qquad 1_{p+\frac{\pi}{2}} = 1_p 1_{\frac{\pi}{2}} = 1_p i,$$

on tirera

$$\mathrm{d}\iota_p = \iota_p \mathrm{i}\, \mathrm{d}p. \tag{11}$$

Supposons maintenant que l'on demande non plus la dérivée ou la différentielle de ι_p, mais les dérivées partielles et la différentielle de la quantité géométrique r_p considérée comme fonction du module r et de l'argument p. Comme on aura

$$r_p = \iota_p r,$$

on en tirera, eu égard à la formule (7),

$$\mathrm{D}_p r_p = \iota_{p+\frac{\pi}{2}} r, \qquad \mathrm{D}_r r_p = \iota_p, \tag{12}$$

et de ces formules, jointes aux équations

$$\mathrm{d}\iota_p = \mathrm{D}_p \iota_p \, \mathrm{d}p + \mathrm{D}_r \iota_p \, \mathrm{d}r, \qquad \iota_{p+\frac{\pi}{2}} = \mathrm{i}\, \iota_p,$$

on tirera

$$\mathrm{d}r_p = \iota_p(\mathrm{d}r + \mathrm{i} r\, \mathrm{d}p). \tag{13}$$

Si, pour abréger, on désigne par la lettre z la quantité géométrique r_p, et si d'ailleurs on nomme x, y les coordonnées rectangulaires du point dont l'affixe est z, le pôle étant pris pour origine, et l'axe polaire pour axe des x, on aura

$$z = x + y\mathrm{i} = r_p; \tag{14}$$

et de cette dernière formule, jointe à l'équation (13) et à l'équation (14) du paragraphe précédent, on tirera

$$\mathrm{d}z = \mathrm{d}x + \mathrm{i}\, \mathrm{d}y = \iota_p(\mathrm{d}r + \mathrm{i} r\, \mathrm{d}p). \tag{15}$$

III. — *Sur les dérivées des fonctions de quantités géométriques.*

Soient

$$z = x + y\mathrm{i} \tag{1}$$

et

$$Z = X + Y\mathrm{i} \tag{2}$$

deux quantités géométriques variables, propres à représenter les affixes de deux points A et B qui, dans un certain plan, ont pour coordonnées rectangulaires, le premier les variables réelles x, y, le second les variables réelles X, Y. Comme je l'ai dit dans l'avant-dernier article, Z devra être censé fonction de z, si, la valeur de z étant donnée, on peut en déduire celle de Z, ou, en d'autres termes, si, la position du point A étant donnée, on peut en déduire celle du point B; et il suffira pour cela que les variables réelles X, Y soient des fonctions déterminées des variables réelles x, y.

Concevons maintenant que l'on désigne, à l'aide de la lettre caractéristique Δ placée devant les variables

$$x, \quad y, \quad z, \quad X, \quad Y, \quad Z,$$

des accroissements finis ou infiniment petits attribués à ces mêmes variables. Supposons, d'ailleurs, que Z reste fonction continue de z, du moins pour des valeurs de z comprises entre certaines limites. Pour de telles valeurs de z, à des accroissements infiniment petits Δx, Δy de x, y correspondront des accroissements infiniment petits Δz, ΔZ de z, Z; et la *dérivée* de la variable Z considérée comme fonction de z ne sera autre chose que la limite dont s'approchera indéfiniment le rapport

$$\frac{\Delta Z}{\Delta z},$$

tandis que Δx, Δy s'approcheront indéfiniment de zéro. Cette dérivée sera désignée, comme dans le cas où z est réel, à l'aide de la lettre caractéristique D, par la notation $\mathrm{D}_z Z$. D'autre part, les quatre différentielles

$$\mathrm{d}x, \quad \mathrm{d}y, \quad \mathrm{d}z, \quad \mathrm{d}Z$$

des quantités algébriques variables x, y, et des quantités géométriques variables z, Z, seront quatre quantités nouvelles, les deux premières algébriques, les deux dernières géométriques, dont les rapports seront précisément égaux aux limites des rapports entre les accroissements infiniment petits

$$\Delta x, \quad \Delta y, \quad \Delta z, \quad \Delta Z$$

de ces mêmes variables. Cela posé, la dérivée de Z, relative à z, se confondra évidemment avec le rapport différentiel de Z à z, c'est-à-dire avec le rapport

$$\frac{dZ}{dz}$$

des différentielles dZ, dz, en sorte qu'on aura

$$D_z Z = \frac{dZ}{dz}. \tag{3}$$

Si, dans la formule (3), on substitue à la différentielle dz, sa valeur tirée de la formule (1), savoir

$$dz = dx + i\,dy,$$

et à la différentielle dZ, sa valeur fournie par une équation semblable à la formule (4) du paragraphe II, savoir

$$dZ = D_x Z\,dx + D_y Z\,dy,$$

on trouvera

$$D_z Z = \frac{D_x Z\,dx + D_y Z\,dy}{dx + i\,dy}. \tag{4}$$

Si, d'ailleurs, on pose

$$\frac{dy}{dx} = \operatorname{tang}\varpi, \tag{5}$$

ou, ce qui revient au même,

$$\frac{dx}{\cos\varpi} = \frac{dy}{\sin\varpi}, \tag{6}$$

l'équation (4) donnera

$$D_z Z = \frac{D_x Z\cos\varpi + D_y Z\sin\varpi}{\cos\varpi + i\sin\varpi}; \tag{7}$$

puis, en ayant égard aux formules

$$1_\varpi = \cos\varpi + i\sin\varpi, \qquad 1_\varpi 1_{-\varpi} = 1,$$

on tirera de l'équation (7),

$$D_z Z = 1_{-\varpi}(D_x Z\cos\varpi + D_y Z\sin\varpi). \tag{8}$$

Il est bon d'observer que dans les formules (4), (7), (8), les dérivées partielles $D_x Z$, $D_y Z$ varient généralement avec la position du point mobile A, et se réduisent à des fonctions des deux coordonnées rectangulaires x, y de ce même point, ou, ce qui revient au même, à des fonctions de l'affixe z. D'autre part, tandis que les coordonnées x, y varieront par degrés insensibles, le point A décrira généralement une courbe continue; et si par ce point on mène une droite qui forme, avec l'axe polaire, un angle ϖ propre à vérifier la formule (5), la direction de cette droite, appelée *tangente*, sera ce qu'on nomme la *direction* de la courbe au point dont il s'agit. Si la ligne décrite par le point A se réduit à une droite, la tangente ne différera pas de cette même droite. Cela posé, il suit immédiatement de la formule (4), (7) ou (8) que la dérivée de Z, considérée comme fonction de z, dépend en général, non seulement de la position du point A sur la ligne qu'il décrit, mais encore de la direction de cette ligne. Si cette direction devient parallèle à l'axe des x ou à l'axe des y, on aura

$$dy = 0 \quad \text{ou} \quad dx = 0,$$

et la dérivée de Z, prise par rapport à z, sera, dans la première hypothèse,

$$D_x Z; \tag{9}$$

dans la seconde hypothèse,

$$\frac{D_y Z}{i} = -i\,D_y Z; \tag{10}$$

comme on pourrait aussi le conclure de la formule (7) ou (8), en posant dans cette formule

$$\varpi = 0 \quad \text{ou} \quad \varpi = \frac{\pi}{2}.$$

Concevons maintenant que la fonction Z, supposée explicite, ou rendue explicite par la résolution de l'équation ou des équations qui la détermineraient, soit *monodrome*, du moins entre certaines limites de z; c'est-à-dire qu'entre ces limites elle conserve une valeur unique, en restant fonction continue de z, par conséquent de x et de y, tant qu'elle ne devient pas infinie. Concevons encore que les dérivées partielles du premier ordre

$$\mathrm{D}_x Z,\quad \mathrm{D}_y Z$$

satisfassent à la même condition; c'est-à-dire qu'entre les limites données de z, chacune de ces dérivées partielles soit monodrome. Alors la dérivée

$$\mathrm{D}_z Z$$

conservera entre les limites données de z, et tant qu'elle ne deviendra pas infinie, une valeur unique en restant fonction continue de la variable imaginaire z et de l'angle ϖ. Ajoutons qu'en vertu de la formule (7) ou (8), cette dérivée deviendra indépendante de l'angle ϖ, si les deux valeurs particulières de cette dérivée, représentées par les expressions (9) et (10), deviennent égales entre elles. Alors, en effet, on aura

$$\frac{\mathrm{D}_y Z}{\mathrm{i}} = \mathrm{D}_x Z, \tag{11}$$

par conséquent

$$\mathrm{D}_y Z = \mathrm{i}\, \mathrm{D}_x Z, \tag{12}$$

et l'équation (7) ou (8) donnera

$$\mathrm{D}_z Z = \mathrm{D}_x Z, \tag{13}$$

quelle que soit d'ailleurs la valeur du rapport $\frac{dy}{dx}$, ou, ce qui revient au même, de l'angle ϖ. Donc alors la dérivée

$$\mathrm{D}_z Z$$

deviendra indépendante de la direction de la ligne que décrira le point mobile A, et se réduira simplement à une fonction des variables réelles x, y, ou, ce qui revient au même, à une fonction de la variable imaginaire z. D'ailleurs, pour que cette réduction s'effectue, il est évidemment nécessaire que la dérivée

$$\mathrm{D}_z Z$$

conserve la même valeur quand la direction de la ligne décrite par le point A devient parallèle à l'axe des x, et quand elle devient parallèle à l'axe des y; en conséquence, il est nécessaire que les dérivées partielles de Z, relative à x et à y, savoir $\mathrm{D}_x Z$ et $\mathrm{D}_y Z$, satisfassent à la condition exprimée par la formule (12).

Dans le cas spécial que nous venons d'indiquer, la dérivée $\mathrm{D}_z Z$ sera, aussi bien que Z, du moins entre des limites données de z, une fonction *monodrome* de cette variable.

Au reste, pour que la dérivée $\mathrm{D}_z Z$ soit une fonction monodrome de la variable imaginaire z, entre des limites données de z, il n'est pas nécessaire qu'entre ces limites, la fonction Z soit elle-même monodrome : il suffit que les deux dérivées partielles du premier ordre

$$\mathrm{D}_x Z,\quad \mathrm{D}_y Z,$$

étant monodromes entre les limites dont il s'agit, satisfassent à l'équation (12).

Nous appellerons *monogène* une fonction dont la dérivée sera monodrome. En vertu de la remarque précédente, une fonction de la variable imaginaire z pourra être monogène entre des limites données de z, sans être constamment monodrome entre ces mêmes limites.

Ainsi, par exemple, si l'on pose

$$Z = \mathrm{l}z, \tag{14}$$

ou, ce qui revient au même,

$$Z = \mathrm{l}(x + y\mathrm{i}), \tag{15}$$

on aura encore, eu égard à la formule (30) de la page 271,

$$Z = \frac{1}{2}\mathrm{l}(x^2 + y^2) + \mathrm{i}\frac{y}{\sqrt{y^2}} \arccos \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \tag{16}$$

par conséquent,

$$\mathrm{D}_x Z = \frac{1}{x + y\mathrm{i}} = \frac{1}{z}, \qquad \mathrm{D}_y Z = \frac{\mathrm{i}}{x + y\mathrm{i}} = \frac{\mathrm{i}}{z}; \tag{17}$$

et, comme les valeurs précédentes de $\mathrm{D}_x Z$, $\mathrm{D}_y Z$ seront, entre des limites quelconques de la variable

$$z = x + yi,$$

des fonctions monodromes de cette variable qui vérifieront la condition (12), la dérivée $D_z Z$ de $Z = lz$, déterminée par la formule (7) ou (8), devra être aussi constamment une fonction monodrome de z, ce qu'il est aisé de vérifier, puisque l'on aura

$$D_z Z = D_x Z = \frac{1}{z}. \tag{18}$$

Par suite, la fonction lz sera constamment monogène. Toutefois, cette fonction lz, qui restera elle-même monodrome tandis que l'on fera varier x entre les limites 0, ∞, cessera d'être monodrome quand x deviendra négatif, puisque alors, en vertu de la formule (16), elle passera brusquement de la valeur

$$\frac{1}{2} l(x^2) - \pi i.$$

à la valeur

$$\frac{1}{2} l(x^2) + \pi i,$$

tandis que y passera, en décroissant, d'une valeur négative à une valeur positive.

MÉMOIRE SUR LA DIFFÉRENTIATION

DES

FONCTIONS EXPLICITES OU IMPLICITES

D'UNE OU DE PLUSIEURS QUANTITÉS GÉOMÉTRIQUES

Les principes établis dans l'article précédent permettent d'obtenir facilement les différentielles des fonctions d'une ou de plusieurs quantités géométriques, quand ces fonctions se trouvent exprimées à l'aide des notations usuelles. De plus, en partant de ces principes, on reconnaît aisément que les formules et les propositions relatives à la différentiation des fonctions de variables réelles continuent généralement de subsister quand ces variables deviennent imaginaires. Ainsi, par exemple, Z étant fonction d'une variable imaginaire z, on aura, comme on l'a déjà remarqué dans l'article précédent,

$$dZ = D_z Z\, dz; \tag{1}$$

et Z étant une fonction de plusieurs variables imaginaires $u, v, w, \ldots$, on aura généralement

$$dZ = D_u Z\, du + D_v Z\, dv + D_w Z\, dw + \ldots. \tag{2}$$

Les formules (1) et (2) fournissent les règles connues pour la détermination des fonctions de fonctions et des fonctions composées.

La différentiation des fonctions entières d'une variable imaginaire z s'effectue de la même manière et conduit aux mêmes formules que dans le cas où cette variable est réelle. Ainsi, par exemple, x étant un nombre entier quelconque, et $a, b, c, \ldots$ des constantes imaginaires, on aura, pour des valeurs imaginaires, comme pour des valeurs réelles de z,

$$\mathrm{d}z^n = nz^{n-1}\,\mathrm{d}z, \tag{3}$$
$$\mathrm{d}z^{-n} = -nz^{-n-1}\,\mathrm{d}z, \tag{4}$$
$$\mathrm{d}(a+bz+cz^2+\ldots+kz^n) = (b+2cz+\ldots+nkz^{n-1})\,\mathrm{d}z, \tag{5}$$

et, par suite,

$$\mathrm{D}_z z^n = nz^{n-1}, \tag{6}$$
$$\mathrm{D}_z z^{-n} = -nz^{-n-1}, \tag{7}$$
$$\mathrm{D}_z(a+bz+cz^2+\ldots+kz^n) = b+2cz+\ldots+nkz^{n-1}. \tag{8}$$

La même remarque s'applique aux fonctions rationnelles d'une variable imaginaire z. Leurs différentielles et leurs dérivées, exprimées en fonctions de z, sont précisément celles qu'on obtiendrait si z était réel.

Considérons maintenant l'exponentielle e^z et posons

$$z = x + y\mathrm{i},$$

x, y étant réels; on aura

$$e^z = e^{x+y\mathrm{i}} = e^x e^{y\mathrm{i}},$$

ou, ce qui revient au même,

$$e^z = e^x 1_y,$$

puis on en conclura, eu égard à la formule (2),

$$\mathrm{d}e^z = e^x\,\mathrm{d}1_y + 1_y\,\mathrm{d}e^x;$$

et de cette dernière équation, combinée avec les formules

$$\mathrm{d}e^x = e^x\,\mathrm{d}x, \qquad \mathrm{d}1_y = 1_y\mathrm{i}\,\mathrm{d}y, \qquad \mathrm{d}z = \mathrm{d}x + \mathrm{i}\,\mathrm{d}y,$$

on tirera

$$\mathrm{d}e^z = e^z\,\mathrm{d}z, \tag{9}$$

par conséquent

$$\mathrm{D}_z e^z = e^z. \tag{10}$$

Donc *la dérivée de l'exponentielle e^z est cette exponentielle même*, quelle que soit la valeur réelle ou imaginaire de z.

En partant de la formule (9), on déterminera sans peine les différentielles et les dérivées des exponentielles qui auraient pour base un nombre autre que e, comme aussi des fonctions entières ou même rationnelles d'exponentielles quelconques. Ainsi, par exemple, A étant un nombre quelconque, et a étant le logarithme népérien de a, on déduira de l'équation (9), jointe à la formule

$$\mathrm{A}^z = e^{az},$$

les équations

$$\mathrm{d}\mathrm{A}^z = \mathrm{A}^z\,\mathrm{l}\mathrm{A}\,\mathrm{d}z, \tag{11}$$
$$\mathrm{D}_z\mathrm{A}^z = \mathrm{A}^z\,\mathrm{l}\mathrm{A}. \tag{12}$$

De même, de l'équation (9), jointe aux formules

$$\cos z = \frac{e^{zi}+e^{-zi}}{2}, \qquad \sin z = \frac{e^{zi}-e^{-zi}}{2i},$$

on déduira immédiatement les différentielles et les dérivées de $\cos z$ et $\sin z$, considérées comme fonctions entières de l'exponentielle e^{zi}, et l'on trouvera ainsi

$$\mathrm{d}\cos z = -\sin z\,\mathrm{d}z, \qquad \mathrm{d}\sin z = \cos z\,\mathrm{d}z, \tag{13}$$
$$\mathrm{D}_z\cos z = -\sin z, \qquad \mathrm{D}_z\sin z = \cos z. \tag{14}$$

Enfin, des formules qui précèdent, jointes à l'équation (2), on déduira sans peine les différentielles et les dérivées d'une infinité de fonctions explicites d'une ou de plusieurs variables imaginaires.

Concevons, pour fixer les idées, que

$$Z = X + Y\mathrm{i}$$

représente une fonction de la variable imaginaire

$$z = x + y\mathrm{i},$$

x, y, X, Y étant des variables réelles. Pour que l'on puisse déduire de la formule (2), et de celles qui la suivent, les valeurs de la différentielle $\mathrm{d}Z$ et de la dérivée

$$\mathrm{D}_z Z = \frac{\mathrm{d}Z}{\mathrm{d}z},$$

il suffira que les variables imaginaires z, Z puissent être considérées comme liées l'une à l'autre et à certaines variables auxiliaires

$$u,\quad v,\quad w,\quad \ldots,$$

de telle sorte que les diverses variables étant rangées dans un certain ordre indiqué par la suite

$$Z,\quad \ldots,\quad u,\quad v,\quad w,\quad \ldots,\quad z, \tag{15}$$

l'une quelconque d'entre elles, u par exemple, soit équivalente à une certaine fonction rationnelle des variables suivantes :

$$v,\quad w,\quad \ldots,\quad z,$$

et des exponentielles

$$e^v,\quad e^w,\quad \ldots,\quad e^z,$$

ou de quelques-unes de ces variables et de ces exponentielles. Dans cette hypothèse, la différentielle de u, considérée comme fonction de v, w, ..., z, sera fournie par une équation de la forme

$$du = \mathrm{D}_v u\, dv + \mathrm{D}_w u\, dw + \ldots + \mathrm{D}_z u\, dz; \tag{16}$$

la différentielle de Z, considérée comme fonction de ..., u, v, w, ..., z, sera fournie par une équation analogue; et, si de cette dernière on élimine les valeurs des différentielles

$$\ldots,\quad du,\quad dv,\quad dw,\quad \ldots,$$

données par la formule (16) et les formules de même espèce, l'équation résultante de l'élimination déterminera le rapport différentiel de Z à z, ou, en d'autres termes, la dérivée de Z considérée comme fonction de la seule variable z, par conséquent la valeur cherchée de $\mathrm{D}_z Z$. D'ailleurs, cette valeur de $\mathrm{D}_z Z$ sera généralement, ainsi que Z, une fonction continue de la variable z, dans le voisinage d'une valeur finie attribuée à z; ou du moins les seules valeurs finies de z, pour lesquelles cette condition ne sera pas remplie, seront des *valeurs singulières*, propres à représenter les affixes de certains points isolés et séparés les uns des autres. La circonstance particulière que nous venons

de signaler se présenterait par exemple, si l'on supposait

$$Z = 1 + u,\qquad u = e^v,\qquad v = \frac{1}{z}, \tag{17}$$

et, par suite,

$$Z = 1 + e^{\frac{1}{z}}. \tag{18}$$

Alors la fonction Z et sa dérivée

$$\mathrm{D}_z Z = -\frac{1}{z^2} e^{\frac{1}{z}}, \tag{19}$$

resteraient finies et continues dans le voisinage de toute valeur finie de z distincte de zéro; mais Z et $\mathrm{D}_z Z$ deviendraient simultanément discontinues pour une valeur nulle de z, et les limites dont s'approcheraient ces deux fonctions, tandis que la variable $z = x + yi$ s'approcherait indéfiniment de zéro, pourraient être ou finies ou infinies. Ces limites seraient effectivement 1 et 0, si l'on supposait $y = 0$, $x < 0$, elles seraient ∞ et $-\infty$, si l'on supposait $y = 0$, $x > 0$.

Si à la première des équations (17) on substituait la suivante :

$$Z = \frac{1}{1+u}, \tag{20}$$

on aurait

$$Z = \frac{1}{1 + e^{\frac{1}{z}}}, \tag{21}$$

$$\mathrm{D}_z Z = +\frac{1}{z^2}\,\frac{e^{\frac{1}{z}}}{\left(1 + e^{\frac{1}{z}}\right)^2}, \tag{22}$$

et les deux fonctions Z, $\mathrm{D}_z Z$ deviendraient discontinues, non seulement pour une valeur nulle de z, mais encore pour les valeurs singulières de z propres à vérifier la condition

$$e^{\frac{1}{z}} = -1, \tag{23}$$

c'est-à-dire pour toutes les valeurs de z données par la formule

$$z = \pm \frac{i}{(2n+1)\pi}, \tag{24}$$

n étant un nombre entier quelconque.

Supposons maintenant que les termes de la suite (15), étant rangés dans un ordre quelconque, soient liés entre eux par des équations dont les premiers membres soient des fonctions rationnelles de ces mêmes termes et des exponentielles

$$e^Z, \quad \dots, \quad e^u, \quad e^v, \quad e^w, \quad \dots, \quad e^z,$$

les seconds membres étant réduits à zéro. En vertu de ces équations, quelques-unes des variables

$$Z, \quad \dots, \quad u, \quad v, \quad w, \quad \dots, \quad z$$

seront des fonctions implicites des autres; et si le nombre des équations est égal au nombre des variables diminué de l'unité, Z sera une fonction implicite de z. Cela posé, il suffira évidemment de différentier les diverses équations, puis d'éliminer

$$du, \quad dv, \quad dw, \quad \dots$$

des équations différentielles ainsi formées, pour obtenir une équation finale qui déterminera la différentielle dZ et la dérivée

$$D_z Z = \frac{dZ}{dz},$$

de Z considérée comme fonction de z. D'ailleurs, la valeur trouvée de $D_z Z$ sera généralement, ainsi que Z, une fonction continue de z, dans le voisinage d'une valeur finie attribuée à z, ou du moins les seules valeurs finies de Z, pour lesquelles cette condition ne sera pas remplie, seront des valeurs singulières propres à représenter les affixes de certains points isolés et séparés les uns des autres.

Si, pour fixer les idées, on suppose Z lié à z par une seule équation

$$U = 0, \tag{25}$$

dont le premier membre U soit une fonction rationnelle des variables z, Z et des exponentielles e^z, e^Z, on trouvera, en différentiant cette équation,

$$D_Z U\, dZ + D_z U\, dz = 0, \tag{26}$$

et, par suite,

$$\frac{dZ}{dz} = -\frac{D_z U}{D_Z U},$$

ou, ce qui revient au même,

$$D_z Z = -\frac{D_z U}{D_Z U}. \tag{27}$$

Supposons, par exemple, Z lié à z par l'équation

$$e^Z = z, \tag{28}$$

que l'on peut encore écrire comme il suit :

$$e^Z - z = 0.$$

On trouvera, en différentiant cette équation,

$$e^Z\, dZ - dz = 0,$$

et, par suite,

$$\frac{dZ}{dz} = e^{-Z} = \frac{1}{z},$$

ou, ce qui revient au même,

$$D_z Z = \frac{1}{z}. \tag{29}$$

Il est bon d'observer que, dans le cas où le nombre des variables imaginaires représentées par

$$Z, \quad \dots, \quad u, \quad v, \quad w, \quad \dots, \quad z$$

surpasse d'une unité le nombre des équations auxquelles ces variables sont assujetties, on peut obtenir la différentielle dZ, et, par suite, la dérivée $D_z Z$ de Z considéré comme fonction de z, ou en différentiant comme on vient de le dire, les équations données, ou en tirant d'abord de ces équations supposées résolubles la valeur de Z, et en différentiant cette valeur présentée sous la forme

$$Z = X + Yi.$$

Si, pour fixer les idées, on suppose Z lié à z par l'équation (28), la fonction implicite Z admettra une infinité de valeurs distinctes qui seront toutes comprises dans la formule

$$Z = c + \mathrm{l}z, \tag{30}$$

la constante c désignant l'un quelconque des termes de la progression arithmétique

$$\ldots,\quad -4\pi i,\quad -2\pi i,\quad 0,\quad 2\pi i,\quad 4\pi i,\quad \ldots$$

Par suite, la dérivée de Z considéré comme fonction de z se réduira toujours à la dérivée de

$$\mathrm{l}z = \frac{1}{2}\mathrm{l}(x^2+y^2) + i\frac{y}{\sqrt{y^2}}\arccos\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}. \tag{31}$$

D'ailleurs cette dernière dérivée sera, comme on l'a déjà remarqué dans l'article précédent,

$$D_z \mathrm{l}z = \frac{1}{z}. \tag{32}$$

Donc, en supposant Z déterminé par l'équation (28), on aura, comme l'indique la formule (29),

$$D_z Z = \frac{1}{z}.$$

Observons, toutefois, que le calcul est plus simple quand on déduit directement la formule (29) de l'équation (28), sans recourir aux équations (30) et (31).

On voit, par cet exemple, que pour obtenir la dérivée d'une fonction explicite Z de la variable z, dans le cas où cette fonction coïncide avec l'une des valeurs d'une fonction implicite déterminée par une ou plusieurs équations, il peut être avantageux de différentier directement l'équation ou les équations données.

En partant de la formule (32), on obtient aisément les dérivées d'un grand nombre de fonctions explicites qui peuvent être exprimées en logarithmes népériens. Ainsi, par exemple, comme on a [p. 325]

$$\operatorname{arc\,tang} z = \frac{\mathrm{l}(1+zi) - \mathrm{l}(1-zi)}{2i}, \tag{33}$$

on en conclura

$$D_z \operatorname{arc\,tang} z = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1+zi} + \frac{1}{1-zi}\right);$$

par conséquent,

$$D_z \operatorname{arc\,tang} z = \frac{1}{1+z^2}. \tag{34}$$

De même encore, comme, en désignant par a une constante arbitrairement choisie, on a identiquement [vol. III, p. 381] (1)

$$z^a = e^{a\mathrm{l}z}, \tag{35}$$

on en conclura

$$D_z z^a = e^{a\mathrm{l}(z)}\, a\, D_z \mathrm{l}(z) = a\frac{z^a}{z},$$

ou, ce qui revient au même,

$$D_z z^a = a z^{a-1}. \tag{36}$$

On trouvera, en particulier,

$$D_z z^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} z^{-\frac{1}{2}}, \tag{37}$$

puis on en conclura, en remplaçant z par $1 - z^2$,

$$D_z (1-z^2)^{\frac{1}{2}} = -\frac{z}{\sqrt{1-z^2}}. \tag{38}$$

Enfin, comme on aura [p. 327]

$$\arcsin z = \frac{1}{i}\mathrm{l}\left[\sqrt{1-z^2} + zi\right], \tag{39}$$

on tirera de cette dernière équation, jointe aux formules (32) et (38),

$$D_z \arcsin z = \frac{1}{\sqrt{1-z^2}}. \tag{40}$$

Les fonctions explicites qui, comme arc tang z, z^a, arc sin z, ..., s'expriment en logarithmes népériens, peuvent être aussi considérées comme représentant certaines valeurs de fonctions implicites déterminées par des équations dont les deux membres renferment uniquement des fractions rationnelles et des exponentielles népériennes. Ainsi, par exemple, arc tang Z est une des valeurs de Z propres à

(1) *Œuvres de Cauchy*, série II, t. XIII, p. 427.

vérifier l'équation

$$e^{2Zi} = \frac{1+zi}{1-zi}; \tag{41}$$

z^a est une des valeurs de Z fournies par le système des deux équations

$$Z = e^{au}, \qquad e^{u} = z; \tag{42}$$

enfin, arc sin z est une des valeurs de Z fournies par le système des équations

$$e^{Zi} = u + zi, \qquad u^2 = 1 - z^2. \tag{43}$$

Cela posé, on ne doit pas être surpris de voir que les formules (34) et (36) peuvent être déduites directement des équations (41) et (42).

MÉMOIRE

SUR

LES CLEFS ALGÉBRIQUES

Je nomme *clefs algébriques* des variables qui n'apparaissent que passagèrement en des formules où leurs produits sont définitivement remplacés par des quantités qui peuvent être arbitrairement choisies. Ces variables méritent doublement le nom de clefs, puisque leur intervention permet, non seulement d'introduire avec facilité dans le calcul des quantités qui se glissent à leur suite, et auxquelles elles ouvrent la porte pour ainsi dire, mais encore de résoudre promptement un grand nombre de questions diverses.

On peut d'ailleurs employer, comme clefs algébriques, toutes sortes de quantités variables, même celles que l'on nomme *différentielles* et *variations*.

I. — *Considérations générales. Notations.*

Considérons, d'une part, m variables

$$\alpha, \quad \beta, \quad \gamma, \quad \ldots, \quad \eta;$$

d'autre part, n fonctions linéaires et homogènes de ces variables, représentées par

$$\lambda, \quad \mu, \quad \nu, \quad \ldots, \quad \varsigma,$$

en sorte qu'on ait

$$\left\{\begin{array}{l} \lambda = a_1\alpha + b_1\beta + c_1\gamma + \ldots + h_1\eta, \\ \mu = a_2\alpha + b_2\beta + c_2\gamma + \ldots + h_2\eta, \\ \nu = a_3\alpha + b_3\beta + c_3\gamma + \ldots + h_3\eta, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \varsigma = a_n\alpha + b_n\beta + c_n\gamma + \ldots + h_n\eta, \end{array}\right. \tag{1}$$

$a_1, b_1, c_1, \ldots, h_1;\ a_2, b_2, c_2, \ldots, h_2;\ a_3, b_3, c_3, \ldots, h_3;\ a_n, b_n, c_n, \ldots, h_n$ étant des coefficients constants. Le produit

$$\lambda\mu\nu\ldots\varsigma \tag{2}$$

de ces fonctions multipliées l'une par l'autre dans un ordre déterminé pourra être décomposé en produits partiels dont chacun renfermera un coefficient constant avec n facteurs variables égaux ou inégaux; et l'on pourra, dans chaque produit partiel, conserver la trace de l'ordre dans lequel les multiplications sont effectuées, en écrivant le premier le facteur variable qui appartient à la fonction λ; puis, à la suite de celui-ci, le facteur variable qui appartient à la fonction μ, ...; puis à la dernière place, le facteur variable qui appartient à la fonction ς. De plus, après avoir ainsi décomposé le produit (2) en plusieurs termes, on pourra, dans chaque terme, remplacer le produit des facteurs variables par une quantité arbitrairement choisie, et même substituer deux quantités distinctes à deux produits qui ne différeront entre eux que par l'ordre des facteurs. En vertu des substitutions de cette nature le produit (2) se transformera en une quantité nouvelle que nous appellerons *produit symbolique*, et que nous désignerons par la notation

$$|\lambda\mu\nu\ldots\varsigma|, \tag{3}$$

en renfermant le produit donné entre deux traits verticaux. Nous indiquerons les substitutions elles-mêmes sous le nom de *transmutations*, et chacune des quantités substituées par le produit auquel on la substitue, renfermé encore entre deux traits. Enfin, nous nommerons *clefs algébriques* les variables $\alpha, \beta, \gamma, \ldots, \eta$ qui, momentanément admises dans le calcul, disparaissent quand on passe du produit (2) au produit (3), et nous dirons que ce dernier produit a pour *facteurs symboliques* les fonctions linéaires $\lambda, \mu, \nu, \ldots, \varsigma$.

Supposons, pour fixer les idées, que l'on ait $m = 2$, $n = 2$, en sorte que les formules (1) se réduisent aux deux équations

$$\begin{cases} \lambda = a_1\alpha + b_1\beta, \\ \mu = a_2\alpha + b_2\beta. \end{cases} \tag{4}$$

On aura, dans cette hypothèse,

$$\lambda\mu = a_1a_2\alpha^2 + a_1b_2\alpha\beta + b_1a_2\beta\alpha + b_1b_2\beta^2; \tag{5}$$

par conséquent,

$$|\lambda\mu| = a_1a_2|\alpha^2| + a_1b_2|\alpha\beta| + b_1a_2|\beta\alpha| + b_1b_2|\beta^2|; \tag{6}$$

et, si l'on assujettit les clefs α, β aux transmutations

$$|\alpha^2| = 1, \quad |\alpha\beta| = 2, \quad |\beta\alpha| = 3, \quad |\beta^2| = 4, \tag{7}$$

on trouvera

$$|\lambda\mu| = a_1a_2 + 2a_1b_2 + 3b_1a_2 + 4b_1b_2. \tag{8}$$

Ajoutons que la valeur du produit symbolique $|\lambda\mu|$ sera modifiée si l'on échange entre eux les deux facteurs λ, μ. En effet, en supposant toujours les clefs α, β assujetties aux transmutations (7), on trouvera

$$|\mu\lambda| = a_2a_1 + 2a_2b_1 + 3b_2a_1 + 4b_2b_1. \tag{9}$$

Comme on le voit, en multipliant l'une par l'autre des fonctions linéaires de clefs algébriques, on construit en quelque sorte un *moule* dans lequel des quantités arbitrairement choisies viennent prendre les places d'abord occupées par les divers produits de ces mêmes clefs. Le produit symbolique ainsi obtenu dépend tout à la fois et des coefficients des clefs dans les fonctions linéaires données, et des quantités substituées, ou, en d'autres termes, de la nature des transmutations. On conçoit, qu'en raison de cette nature, un produit symbolique peut acquérir des propriétés qui facilitent notablement la démonstration d'un théorème ou la solution d'un problème; et l'habileté du calculateur consiste à choisir les transmutations qui lui permettent d'atteindre avec moins de travail le but qu'il s'est proposé.

Si, en adoptant les notations ci-dessus mentionnées, on nomme $\varkappa$ un produit de clefs algébriques rangées dans un certain ordre, la substitution d'une quantité déterminée $\mathfrak{k}$ au produit $\varkappa$ sera indiquée par la formule

$$|\varkappa| = \mathfrak{k}. \tag{10}$$

Si, dans cette formule, on voulait supprimer les traits entre lesquels est renfermé le produit $\varkappa$, on devrait en même temps, pour éviter toute méprise, substituer au signe $=$ un signe différent, par exemple le signe $\asymp$ que j'ai déjà employé pour cet usage dans les *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*. Alors, à la place de la formule (10), on obtiendrait celle-ci

$$\varkappa \asymp \mathrm{k}. \tag{11}$$

II. — *Décomposition des sommes alternées, connues sous le nom de* résultantes, *en facteurs symboliques.*

Les sommes alternées que nous avons déjà considérées dans le second volume de cet ouvrage (p. 160) [1], peuvent être facilement décomposées en produits symboliques.

En effet, considérons d'abord la somme alternée s, formée avec les quatre termes du tableau

$$\left\{\begin{array}{ll} a_1, & b_1, \\ a_2, & b_2, \end{array}\right. \tag{1}$$

et fournie par l'équation

$$s = \mathrm{S}(\pm a_1 b_2) = a_1 b_2 - a_2 b_1. \tag{2}$$

Si l'on donne pour coefficients à deux clefs algébriques α, β dans deux fonctions linéaires λ, μ, les termes que renferment la première et la seconde ligne horizontale du tableau (1), on aura non seulement

$$\left\{\begin{array}{l} \lambda = a_1\alpha + b_1\beta, \\ \mu = a_2\alpha + b_2\beta, \end{array}\right. \tag{3}$$

mais encore

$$|\lambda\mu| = a_1 a_2 |\alpha^2| + a_1 b_2 |\alpha\beta| + b_1 a_2 |\beta\alpha| + b_1 b_2 |\beta^2|; \tag{4}$$

et, pour que le produit symbolique $|\lambda\mu|$ se réduise à la résultante s, il suffira évidemment de poser

$$|\alpha^2| = 0, \qquad |\alpha\beta| = 1, \qquad |\beta\alpha| = -1, \qquad |\beta^2| = 0. \tag{5}$$

[1] *Œuvres de Cauchy*, série II, t. XII, p. 173.

Sous cette condition, l'on aura

$$s = |\lambda\mu|; \tag{6}$$

et λ, μ seront les *facteurs symboliques* de la résultante s.

Si, aux formules (5) on substituait les suivantes :

$$|\alpha^2| = 0, \qquad |\beta\alpha| = -|\alpha\beta|, \qquad |\beta^2| = 0, \tag{7}$$

alors, à la place de l'équation (6), on obtiendrait la formule

$$|\lambda\mu| = s\,|\alpha\beta|,$$

ou

$$s = \frac{|\lambda\mu|}{|\alpha\beta|}, \tag{8}$$

dans laquelle il suffirait de poser $|\alpha\beta| = 1$ pour retrouver l'équation (6). Remarquons d'ailleurs que la seconde des formules (7) peut s'écrire comme il suit :

$$|\alpha\beta| + |\beta\alpha| = 0, \tag{9}$$

et que la formule (9) donne $|\alpha^2| = 0$ ou $|\beta^2| = 0$ quand on y suppose $\beta = \alpha$. Donc, en définitive, les transmutations (7) sont toutes trois comprises dans la formule (9). Donc il suffit de recourir à cette formule et à celles qui s'en déduisent, pour obtenir l'équation (8), et, par suite, pour décomposer en facteurs symboliques la somme alternée s, c'est-à-dire la résultante algébrique formée avec les quatre termes du tableau (1).

Considérons maintenant la somme alternée s formée avec les divers termes du tableau

$$\left\{\begin{array}{lllll} a_1, & b_1, & c_1, & \ldots, & h_1, \\ a_2, & b_2, & c_2, & \ldots, & h_2, \\ a_3, & b_3, & c_3, & \ldots, & h_3, \\ \ldots, & \ldots, & \ldots, & \ldots, & \ldots, \\ a_n, & b_n, & c_n, & \ldots, & h_n, \end{array}\right. \tag{10}$$

et fournie par l'équation

$$s = \mathrm{S}(\pm a_1 b_2 c_3 \ldots h_n) = a_1 b_2 c_3 \ldots h_n - \ldots. \tag{11}$$

le nombre des lettres $a, b, c, \ldots, h$ étant égal à n. Représentons d'ailleurs par

$$\alpha,\quad \beta,\quad \gamma,\quad \ldots,\quad \eta$$

n clefs algébriques distinctes, et par

$$\lambda,\quad \mu,\quad \nu,\quad \ldots,\quad \varsigma$$

n fonctions linéaires de ces mêmes clefs. Si l'on donne à ces clefs pour coefficients, dans les fonctions linéaires $\lambda, \mu, \nu, \ldots, \varsigma$, les termes que renferment la première, la deuxième, la troisième, etc., la dernière ligne horizontale du tableau (5), c'est-à-dire si l'on pose

$$(12)\qquad \begin{cases} \lambda = a_1\alpha + b_1\beta + c_1\gamma + \ldots + h_1\eta, \\ \mu = a_2\alpha + b_2\beta + c_2\gamma + \ldots + h_2\eta, \\ \nu = a_3\alpha + b_3\beta + c_3\gamma + \ldots + h_3\eta, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \varsigma = a_n\alpha + b_n\beta + c_n\gamma + \ldots + h_n\eta; \end{cases}$$

le produit symbolique

$$(13)\qquad |\lambda\mu\nu\ldots\varsigma| = a_1 b_2 c_3 \ldots h_n |\alpha\beta\gamma\ldots\eta| + \ldots$$

sera évidemment une fonction linéaire du produit

$$a_1 b_2 c_3 \ldots h_n,$$

et de tous ceux qu'on peut obtenir en multipliant l'un par l'autre n facteurs distincts ou non distincts, pris dans la suite

$$a,\quad b,\quad c,\quad \ldots,\quad h,$$

et en plaçant, au bas de ces facteurs écrits à la suite les uns des autres, les indices $1, 2, 3, \ldots, n$. Ajoutons que, si l'on représente par k l'un quelconque de ces produits et par $k|\varkappa|$ le terme proportionnel à k dans le second membre de la formule (13), il suffira, pour obtenir le produit $\varkappa$, d'effacer dans le produit k les indices placés au bas des lettres, et d'y substituer partout la lettre α à la lettre a, la lettre β à la lettre b, etc., la lettre η à la lettre h.

D'autre part, pour que le produit k soit l'un de ceux que contient la résultante s, il est nécessaire qu'il renferme une seule fois chacune des

lettres

$$a,\quad b,\quad c,\quad \ldots,\quad h;$$

et, lorsque cette condition sera remplie, le produit k pourra être, dans la résultante s, affecté du signe + ou du signe —. Il y sera, en effet, affecté du signe +, si, pour passer du produit

$$a_1 b_2 c_3 \ldots h_n$$

au produit k, il faut opérer entre les lettres $a, b, c, \ldots, h$, prises deux à deux, un nombre pair d'échanges, et du signe — dans le cas contraire. Donc, pour réduire le produit symbolique $|\lambda\mu\nu\ldots\varsigma|$, déterminé par la formule (13), à la résultante s, on devra poser

$$(14)\qquad |\varkappa| = 0,$$

quand l'une quelconque des lettres

$$\alpha,\quad \beta,\quad \gamma,\quad \ldots,\quad \eta$$

entrera deux ou plusieurs fois comme facteur dans le produit $\varkappa$, et poser, au contraire,

$$(15)\qquad |\varkappa| = 1,$$

ou

$$(16)\qquad |\varkappa| = -1,$$

quand le produit $\varkappa$ renfermera une seule fois chacune des lettres

$$\alpha,\quad \beta,\quad \gamma,\quad \ldots,\quad \eta,$$

la formule (15) étant relative au cas où l'on sera obligé d'opérer entre ces lettres prises deux à deux un nombre pair d'échanges, pour passer du produit $|\alpha\beta\gamma\ldots\eta|$ au produit $|\varkappa|$. Sous ces conditions, la formule (13) donnera

$$(17)\qquad s = |\lambda\mu\nu\ldots\varsigma|;$$

et, par conséquent, $\lambda, \mu, \nu, \ldots, \varsigma$ seront les facteurs symboliques de la résultante s.

Si, en conservant la formule (14), on remplaçait les formules (15) et (16) par les suivantes

$$|\varkappa| = \ \ |\alpha\beta\gamma\ldots\eta|, \tag{18}$$

$$|\varkappa| = -|\alpha\beta\gamma\ldots\eta|, \tag{19}$$

alors, à la place de l'équation (17), on obtiendrait la formule

$$|\lambda\mu\nu\ldots\varsigma| = s\,|\alpha\beta\gamma\ldots\eta|,$$

ou

$$s = \frac{|\lambda\mu\nu\ldots\varsigma|}{|\alpha\beta\gamma\ldots\eta|}, \tag{20}$$

dans laquelle il suffirait de poser

$$|\alpha\beta\gamma\ldots\eta| = 1, \tag{21}$$

pour retrouver l'équation (17).

Au reste, pour déduire les formules (14), (18) et (19) des transmutations de la forme

$$|\beta\alpha| = -|\alpha\beta|, \tag{22}$$

il suffit d'admettre que les transmutations de cette forme continuent de subsister quand on introduit une ou plusieurs fois de suite dans les deux membres, entre les traits verticaux, de nouveaux facteurs auxquels on assigne les mêmes places, et qu'elles continuent encore de subsister quand les divers facteurs ne sont pas tous distincts les uns des autres.

Ainsi, par exemple, si les clefs que l'on considère se réduisent à trois,

$$\alpha,\ \beta,\ \gamma,$$

on pourra évidemment, avec ces trois clefs, former les six produits symboliques

$$\left\{\begin{matrix} |\alpha\beta\gamma|, & |\beta\gamma\alpha|, & |\gamma\alpha\beta|, \\ |\alpha\gamma\beta|, & |\beta\alpha\gamma|, & |\gamma\beta\alpha|. \end{matrix}\right. \tag{23}$$

Alors aussi les transmutations de la forme (22) seront au nombre de

trois, savoir :

$$|\gamma\beta| = -|\beta\gamma|, \quad |\alpha\gamma| = -|\gamma\alpha|, \quad |\beta\alpha| = -|\alpha\beta|. \tag{24}$$

Or, si dans chacune de ces dernières transmutations on introduit la clef qu'elle ne renferme pas entre les traits verticaux en lui assignant dans chaque membre ou la première ou la dernière place, on trouvera dans le premier cas,

$$|\alpha\gamma\beta| = -|\alpha\beta\gamma|, \quad |\beta\alpha\gamma| = -|\beta\gamma\alpha|, \quad |\gamma\beta\alpha| = -|\gamma\alpha\beta|; \tag{25}$$

dans le second cas,

$$|\gamma\beta\alpha| = -|\beta\gamma\alpha|, \quad |\alpha\gamma\beta| = -|\gamma\alpha\beta|, \quad |\beta\alpha\gamma| = -|\alpha\beta\gamma|. \tag{26}$$

On aura donc

$$|\alpha\beta\gamma| = |\beta\gamma\alpha| = |\gamma\alpha\beta| = -|\alpha\gamma\beta| = -|\beta\alpha\gamma| = -|\gamma\beta\alpha|; \tag{27}$$

et, par suite, en nommant $|\varkappa|$ l'un quelconque des produits (23), on trouvera

$$|\varkappa| = |\alpha\beta\gamma|, \tag{28}$$

ou

$$|\varkappa| = -|\alpha\beta\gamma|, \tag{29}$$

suivant que le produit $|\varkappa|$ se déduira du produit $|\alpha\beta\gamma|$ à l'aide d'un nombre pair ou impair d'échanges opérés entre les trois clefs α, β, γ prises deux à deux. Ajoutons que, si les formules (24) et celles qui s'en déduisent continuent de subsister quand ces formules renferment deux ou trois facteurs égaux entre eux, elles entraîneront avec elles les transmutations

$$|\alpha^2| = 0, \quad |\beta^2| = 0, \quad |\gamma^2| = 0; \tag{30}$$

$$\left\{\begin{matrix} |\beta^2\gamma| = 0, & |\gamma^2\alpha| = 0, & |\alpha^2\beta| = 0, \\ |\gamma\beta^2| = 0, & |\gamma\alpha^2| = 0, & |\beta\alpha^2| = 0, \end{matrix}\right. \tag{31}$$

c'est-à-dire les transmutations de la forme

$$|\varkappa| = 0, \tag{32}$$

$|\varkappa|$ étant le produit symbolique de trois facteurs dont deux au moins se confondent l'un avec l'autre, et chacun de ces facteurs étant l'une des trois clefs

$$\alpha,\quad \beta,\quad \gamma.$$

On vient de voir avec quelle facilité s'opère la décomposition des sommes alternées en facteurs symboliques. Cette décomposition une fois opérée, on peut s'en servir avec avantage pour découvrir ou pour démontrer les principales propriétés des sommes alternées. D'ailleurs, les transmutations auxquelles nous avons été conduits par le calcul, ont des formes spéciales comprises elles-mêmes dans des formes plus générales qui méritent d'être remarquées, et qui seront indiquées dans le paragraphe suivant.

III. — *Transmutations géométriques et homogènes. Transmutations et clefs anastrophiques.*

Étant données n clefs diverses

$$\alpha,\quad \beta,\quad \gamma,\quad \ldots,\quad \eta,$$

soient

$$|\theta|,\quad |\iota|,\quad |\varkappa|,\quad \ldots$$

divers produits symboliques dont chacun ait pour facteurs quelques-unes de ces clefs. Les transmutations auxquelles on assujettit les clefs $\alpha, \beta, \gamma, \ldots, \eta$, pourront être de deux espèces différentes. En effet, chacune de ces transmutations pourra ou fournir immédiatement la valeur k d'un produit symbolique $|\varkappa|$, et se réduire ainsi à la forme

$$(1)\qquad |\varkappa| = \mathrm{k},$$

ou établir une certaine relation entre divers produits symboliques $|\theta|$, $|\iota|$, $|\varkappa|$, ... On doit surtout remarquer les transmutations qui fournissent les *rapports géométriques* de ces produits, pris deux à deux, et qui seront nommées, pour cette raison, *transmutations géométriques*. Considérons, pour fixer les idées, une transmutation géométrique qui

fournisse le rapport r de deux produits symboliques $|\varkappa|$, $|\iota|$. Cette transmutation pourra s'écrire comme il suit :

$$(2)\qquad |\varkappa| = r|\iota|,$$

et le rapport r prendra le nom de *module*. Cela posé, il est clair qu'à chaque transmutation géométrique correspondront généralement deux modules *inverses* l'un de l'autre. Car le module r étant le rapport géométrique de $|\varkappa|$ à $|\iota|$, le *module inverse* $\frac{1}{r}$ ou r^{-1} représentera le rapport inverse de $|\iota|$ à $|\varkappa|$, et la transmutation (2) pourra encore être présentée sous sa forme

$$(3)\qquad |\iota| = r^{-1}|\varkappa|.$$

Cette même transmutation sera nommée *réciproque*, si la formule (2) continue de subsister quand on échange entre eux les produits symboliques $|\iota|$, $|\varkappa|$, c'est-à-dire si l'on a non seulement

$$|\varkappa| = r|\iota|,$$

mais, *réciproquement*,

$$(4)\qquad |\iota| = r|\varkappa|.$$

Dans cette dernière hypothèse, la formule (4) devant se confondre avec la formule (3), les deux modules r, r^{-1} deviendront égaux entre eux, et l'on aura en conséquence

$$r = r^{-1},$$

ou, ce qui revient au même,

$$(5)\qquad r^2 = 1,$$

puis on en conclura ou

$$(6)\qquad r = 1,$$

ou

$$(7)\qquad r = -1.$$

Les formules (2), (3), (4) seront réduites, dans le premier cas, à la transmutation

$$|\kappa| = |\iota|; \tag{8}$$

dans le second cas, à la transmutation

$$|\kappa| = -|\iota|, \tag{9}$$

que l'on pourra encore écrire comme il suit

$$|\kappa| + |\iota| = 0. \tag{10}$$

Si, dans une transmutation géométrique

$$|\kappa| = r|\iota|,$$

les produits symboliques $|\kappa|$, $|\iota|$, que renferment les deux membres, se réduisent à un seul et même produit symbolique $|\kappa|$, le module r sera nécessairement l'unité, et la transformation réduite à la forme

$$|\kappa| = |\kappa|, \tag{11}$$

sera ce que nous nommerons une transmutation *identique*.

Si les produits $|\kappa|$, $|\iota|$ sont distincts, mais composés des mêmes facteurs, chacun des facteurs étant l'une des clefs

$$\alpha, \quad \beta, \quad \gamma, \quad \ldots, \quad \eta,$$

et si ces deux produits ne diffèrent l'un de l'autre que par l'ordre dans lequel ces facteurs sont écrits, la transmutation

$$|\kappa| = r|\iota|$$

sera dite *homogène*, quel que soit le module r. Elle sera *homogène et réciproque* si le module r se réduit à l'une des deux quantités -1, $+1$.

Le *degré* d'une transmutation homogène sera le degré même des produits dont elle détermine le rapport géométrique, c'est-à-dire le nombre m des clefs employées comme facteurs dans chaque produit. La transmutation sera dite *binaire*, lorsqu'on aura $m = 2$; *ternaire*, lorsqu'on aura $m = 3$; *quaternaire*, lorsqu'on aura $m = 4$; etc.

Ainsi, par exemple, les clefs données étant α, β, γ, etc., les transmutations homogènes

$$|\beta\alpha| = |\alpha\beta|, \qquad |\beta\alpha| = -|\alpha\beta|$$

seront binaires ou du second degré; les suivantes

$$|\gamma\alpha\beta| = |\alpha\beta\gamma|, \qquad |\alpha\alpha\beta| = -|\alpha\beta\alpha|, \qquad \ldots,$$

seront ternaires ou du troisième degré; etc.

Avant d'aller plus loin, il sera bon d'examiner attentivement les divers produits symboliques

$$|\theta|, \quad |\kappa|, \quad |\iota|,$$

que l'on peut former avec m facteurs distincts arbitrairement choisis parmi les clefs

$$\alpha, \quad \beta, \quad \gamma, \quad \ldots, \quad \eta,$$

et de comparer ces divers produits à l'un d'entre eux pris pour type, par exemple au produit symbolique $|\varkappa|$, dans lequel les diverses lettres qui représentent ces mêmes facteurs se trouveraient rangées dans l'ordre indiqué par l'alphabet.

Soit $|\theta|$ l'un quelconque des produits en question. Lorsqu'une clef placée avant une autre clef dans l'alphabet, ou, ce qui revient au même, dans le produit $|\varkappa|$ sera, au contraire, placée après elle dans le produit $|\theta|$, nous dirons que le produit $|\theta|$ offre une *inversion* relative au système de ces deux clefs. Le nombre total des inversions, dans le produit $|\theta|$, sera évidemment égal ou inférieur au nombre des combinaisons que l'on peut former avec m lettres prises deux à deux, c'est-à-dire au rapport

$$\frac{m(m-1)}{2},$$

et pourra d'ailleurs être pair ou impair. En d'autres termes, le nombre des inversions, divisé par 2, donnera pour reste 0 ou 1. Ce reste sera ce que nous nommerons l'*indice* du produit $|\theta|$. Cela posé, on pourra partager en deux classes les divers produits symboliques formés avec m facteurs distincts, et ranger chacun de ces produits dans la *première classe* ou dans la seconde, suivant qu'il aura pour indice zéro ou l'unité.

Soient maintenant

$$|\iota|, \quad |\varkappa|$$

deux produits symboliques distincts formés avec les m facteurs donnés. On pourra déduire le produit $|\varkappa|$ du produit $|\iota|$, soit à l'aide d'un seul échange opéré entre deux clefs, soit à l'aide de plusieurs échanges de cette espèce, et même supposer chaque échange opéré entre deux clefs juxtaposées, c'est-à-dire entre deux clefs dont l'une suit immédiatement l'autre dans le produit symbolique $|\iota|$. En effet, à l'aide de semblables échanges successivement opérés, on pourra toujours, dans le produit symbolique $|\iota|$, amener une clef quelconque à une place quelconque. On pourra, par exemple, amener à la première place la clef qui occupe effectivement cette place dans le produit $|\varkappa|$; on pourra ensuite amener à la seconde place la clef qui, dans $|\varkappa|$, occupe cette seconde place, etc.; et continuer ainsi jusqu'à ce que du produit symbolique $|\varkappa|$ on ait déduit le produit symbolique $|\iota|$. D'ailleurs, lorsque dans un produit de m clefs distinctes on échange entre elles deux clefs juxtaposées, un tel échange fait évidemment naître ou disparaître une seule inversion; par conséquent, il fait passer ce produit de la première classe à la seconde, ou de la seconde classe à la première. Donc les produits $|\iota|$, $|\varkappa|$ appartiendront l'un à la première classe, l'autre à la seconde, si on peut les déduire l'un de l'autre par un nombre impair d'échanges successivement opérés entre les clefs juxtaposées; ils seront de même classe si le nombre des échanges de cette espèce, à l'aide desquels on peut déduire $|\varkappa|$ de $|\iota|$, est un nombre pair.

Si l'on considérait, dans le produit $|\iota|$, deux clefs α, β, dont la seconde β occuperait, à la suite de α, non plus la première, mais la $l^{\text{ième}}$ place, il suffirait, pour échanger ces deux clefs entre elles, d'amener à l'aide de l échanges successivement opérés entre des clefs juxtaposées, la clef α à la place primitivement occupée par la clef β, puis de ramener la clef β de la place précédente à celle que la clef α occupait d'abord, à l'aide de $l-1$ autres échanges opérés encore entre

des clefs juxtaposées. Le nombre total des échanges effectués dans l'un et l'autre cas étant $2l-1$, par conséquent, un nombre impair, nous devons conclure que les produits symboliques $|\iota|$, $|\varkappa|$ seront toujours de classes distinctes, s'ils se déduisent l'un de l'autre à l'aide d'un seul échange opéré entre deux clefs, quelles que soient d'ailleurs les places contiguës ou non contiguës occupées par les deux clefs dans chacun des deux produits.

Par suite aussi, le nombre des échanges à l'aide desquels on pourra déduire l'un de l'autre deux produits $|\iota|$, $|\varkappa|$ de m facteurs distincts, sera toujours, quelles que soient les clefs échangées entre elles, un nombre pair si ces deux produits sont de même classe, ou, ce qui revient au même, si la différence de leurs indices est zéro; un nombre impair si les deux produits sont de classes différentes, ou ce qui revient au même, si la différence de leurs indices est l'unité.

Concevons maintenant qu'après avoir formé les divers produits symboliques qui peuvent être construits avec m clefs distinctes, on égale entre eux tous ces produits, pris les uns avec le signe $+$, les autres avec le signe $-$, suivant qu'ils appartiennent à la première classe ou à la seconde. La formule ainsi obtenue déterminera les rapports géométriques de tous ces produits; et, si l'on nomme $|\iota|$, $|\varkappa|$ deux quelconques d'entre eux, on aura

$$|\varkappa| = (-1)^l |\iota|, \tag{12}$$

l étant la différence entre les indices des deux produits, $|\iota|$, $|\varkappa|$. En d'autres termes, ces deux produits seront liés l'un à l'autre par une transmutation homogène et réciproque, dont le module r sera

$$r = (-1)^l. \tag{13}$$

L'exposant l de -1 dans ce module, c'est-à-dire la différence entre les indices des deux produits, toujours équivalente à zéro ou à l'unité, sera l'*indice* de la transmutation qui se réduira évidemment à la formule (8) si l'on a $l=0$, à la formule (9) si l'on a $l=1$.

Parmi les transmutations comprises dans l'équation (12), on doit remarquer la transmutation qu'on obtient dans les deux produits $|\varkappa|$, $|\iota|$ se déduisant l'un de l'autre à l'aide d'un seul échange opéré entre deux clefs, et qui est toujours de la forme

$$|\varkappa| = -|\iota|.$$

Telle sera, par exemple, la transmutation binaire

$$|\beta\alpha| = -|\alpha\beta|.$$

Telle sera encore la transmutation

$$|\alpha\delta\gamma\beta\varepsilon| = -|\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon|,$$

dans laquelle les deux produits symboliques $|\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon|$, $|\alpha\delta\gamma\beta\varepsilon|$ se déduisent l'un de l'autre à l'aide d'un seul échange opéré entre les deux clefs β, δ. Une telle transmutation sera nommée *anastrophique*, son principal caractère étant l'espèce d'inversion (αναστροφη, *inversio, seu conversio in contrariam partem*), qui résulte pour un produit symbolique $|\iota|$ d'un échange opéré entre deux clefs. Pour bien voir en quoi consiste cette inversion, il suffit d'observer que la valeur d'un produit symbolique peut être représentée, comme toute autre quantité, par une longueur portée, à partir d'un point fixe, sur une certaine droite, dans une certaine direction lorsque cette valeur est positive, dans une direction inverse ou contraire lorsque cette valeur est négative; et qu'une transmutation anastrophique fait correspondre à un échange opéré entre deux clefs ou, ce qui revient au même, à l'*inversion* du système des deux lettres qui désignent ces clefs dans un produit symbolique, une autre *inversion*, savoir le changement de direction de la longueur qui représente le produit symbolique, et qui se trouve, après l'échange, dirigée en sens *inverse*.

Lorsqu'on ne peut, du produit symbolique $|\iota|$, déduire le produit $|\varkappa|$, formé avec les mêmes clefs, à l'aide d'un seul échange opéré entre deux de ces clefs, on peut du moins passer d'un produit à l'autre à l'aide de plusieurs semblables échanges. Alors, pour que les produits $|\iota|$, $|\varkappa|$ vérifient la formule (12), il suffit évidemment de les assujettir, avec les produits intermédiaires successivement obtenus, aux trans-

mutations anastrophiques dont chacune exprime que deux produits consécutifs offrent la même valeur numérique, l'un des deux étant égal à l'autre précédé du signe —.

Ainsi, par exemple, pour que les trois clefs

$$\alpha,\quad \beta,\quad \gamma$$

vérifient la transmutation

$$|\alpha\beta\gamma| = |\gamma\alpha\beta|,$$

il suffit qu'elles vérifient les deux transmutations anastrophiques

$$|\alpha\beta\gamma| = -|\alpha\gamma\beta|,\qquad -|\alpha\gamma\beta| = |\gamma\alpha\beta|$$

formées avec les deux produits $|\alpha\beta\gamma|$, $|\gamma\alpha\beta|$ et le produit intermédiaire $|\alpha\gamma\beta|$.

De ce qu'on vient de dire, il résulte que, pour assujettir un système de n clefs

$$\alpha,\quad \beta,\quad \gamma,\quad \ldots,\quad \eta$$

à toutes les transmutations homogènes et réciproques de la forme indiquée par l'équation (12), il suffit de les assujettir aux diverses transmutations anastrophiques que l'on peut former avec des facteurs distincts arbitrairement choisis parmi ces mêmes clefs.

Jusqu'ici nous avons supposé que, dans une transmutation anastrophique

$$|\varkappa| = -|\iota|,$$

les diverses clefs étaient distinctes l'une de l'autre. Supposons maintenant qu'il en soit autrement, et que des deux clefs échangées entre elles, la seconde ne diffère pas de la première. Alors les produits symboliques $|\iota|$, $|\varkappa|$ ne différeront pas l'un de l'autre, et la transmutation anastrophique donnera

$$|\varkappa| = -|\varkappa|;$$

ou, ce qui revient au même,

$$2|\varkappa| = 0,$$

et, par suite,

$$|\varkappa| = 0. \tag{14}$$

Donc, lorsque dans le produit $|\varkappa|$ les diverses clefs employées comme facteurs ne sont pas toutes distinctes les unes des autres, la transmutation (14) peut être envisagée comme une transmutation anastrophique dans laquelle les deux facteurs échangés entre eux sont représentés par la même lettre. Ainsi, par exemple, les deux transmutations

$$|\alpha\alpha\beta| = 0, \qquad |\alpha\beta\alpha| = 0,$$

se confondent avec les deux formules

$$|\alpha\alpha\beta| = -|\alpha\alpha\beta|, \qquad |\alpha\beta\alpha| = -|\alpha\beta\alpha|,$$

c'est-à-dire avec les deux transmutations anastrophiques dans lesquelles les deux clefs échangées entre elles sont représentées l'une et l'autre par la lettre α. Ajoutons que, dans les transmutations de cette espèce, on peut sans inconvénient écrire sous la forme de puissance un produit de facteurs consécutifs égaux entre eux. Ainsi, en particulier, la transmutation

$$|\alpha\alpha\alpha\beta\beta\gamma| = 0$$

pourra être présentée sous la forme

$$|\alpha^3\beta^2\gamma| = 0.$$

Les notions précédentes étant admises, considérons un système de clefs assujetties à vérifier les diverses transmutations anastrophiques que l'on peut former avec des produits symboliques de facteurs distincts ou non distincts, arbitrairement choisis parmi ces mêmes clefs. Ce système et ces clefs seront nommés *anastrophiques*. Cela posé, si le système des clefs

$$\alpha, \quad \beta, \quad \gamma, \quad \ldots, \quad \eta$$

est anastrophique, tout produit symbolique dans lequel une même clef entrera une ou plusieurs fois comme facteur, offrira une valeur nulle. Quant aux produits symboliques qu'on pourra former avec des clefs déterminées, prises dans le système, mais distinctes les unes des autres, ils offriront tous la même valeur numérique, leurs signes étant semblables ou contraires, suivant qu'ils seront de même classe ou de classes différentes. On connaîtra donc les rapports géométriques

des divers produits symboliques dans lesquels entreront les mêmes clefs supposées distinctes les unes des autres. Mais les transmutations anastrophiques, qui établiront ces rapports, permettront de choisir arbitrairement l'un des produits symboliques construits avec des facteurs donnés. Il convient d'ailleurs d'effectuer ce choix de manière à simplifier les formules. C'est ce que nous avons déjà fait dans le paragraphe II, où les clefs

$$\alpha, \quad \beta, \quad \gamma, \quad \ldots, \quad \eta$$

que renferment les facteurs symboliques d'une somme alternée, peuvent être considérées comme des clefs anastrophiques assujetties à vérifier, non seulement les transmutations anastrophiques dans lesquelles elles entrent comme facteurs, mais aussi la condition

$$|\alpha\beta\gamma\ldots\eta| = 1.$$

En supposant que

$$|\theta|, \quad |\iota|, \quad |\varkappa|, \quad \ldots,$$

représentent des produits symboliques de degrés égaux ou inégaux, on peut, après avoir multiplié l'un par l'autre deux ou plusieurs de ces produits, remplacer le résultat par le produit unique qu'on obtiendrait si l'on supprimait les traits verticaux qui séparent deux produits écrits à la suite l'un de l'autre. La transmutation qu'on formera de cette manière sera nommée transmutation *conjonctive*. Telles sont, par exemple, les transmutations

$$|\alpha^2||\beta| \simeq |\alpha^2\beta|, \qquad |\alpha\beta||\gamma\delta||\varepsilon| \simeq |\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon|, \qquad |\alpha\beta\gamma|\delta\varepsilon \simeq |\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon|, \qquad \ldots,$$

dans lesquelles $|\beta|$ ne diffère pas de β, ni $|\varepsilon|$ de ε.

Cela posé, pour qu'un système donné de clefs

$$\alpha, \quad \beta, \quad \gamma, \quad \ldots, \quad \eta$$

soit anastrophique, il suffit évidemment que ces clefs vérifient, d'une part, les transmutations anastrophiques binaires, c'est-à-dire les transmutations qui se présentent sous l'une des deux formes

$$(15) \qquad |\beta\alpha| = -|\alpha\beta|,$$

$$(16) \qquad |\alpha^2| = 0;$$

d'autre part, les diverses transmutations conjonctives formées avec ces mêmes clefs. En effet, pour que les clefs $\alpha, \beta, \gamma, \ldots, \eta$ soit anastrophiques, il suffit qu'elles vérifient les transmutations anastrophiques dans lesquelles deux facteurs consécutifs sont échangés entre eux, et l'une quelconque de ces transmutations anastrophiques pourra toujours être déduite d'une transmutation anastrophique du second degré, jointe à deux transmutations conjonctives. Ainsi, par exemple, pour établir l'équation

$$|\alpha\gamma\beta\delta\varepsilon| = -|\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon|,$$

il suffira de joindre à la transmutation anastrophique binaire

$$|\gamma\beta| = -|\beta\gamma|$$

les deux transmutations conjonctives

$$|\alpha||\gamma\beta||\delta\varepsilon| = |\alpha\gamma\beta\delta\varepsilon|, \qquad |\alpha||\beta\gamma||\delta\varepsilon| = |\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon|.$$

Concevons à présent qu'étant données n clefs anastrophiques

$$\alpha, \quad \beta, \quad \gamma, \quad \ldots, \quad \eta,$$

on désigne, à l'aide des lettres

$$\lambda, \quad \mu, \quad \nu, \quad \ldots, \quad \varsigma,$$

n fonctions linéaires de ces mêmes clefs. Soient d'ailleurs

$$|\mathrm{I}|, \quad |\mathrm{K}|,$$

deux produits symboliques formés avec m facteurs arbitrairement choisis, non plus parmi les clefs $\alpha, \beta, \gamma, \ldots, \eta$, mais parmi les termes de la suite $\lambda, \mu, \nu, \ldots, \varsigma$. Enfin, supposons que les produits $|\mathrm{I}|$, $|\mathrm{K}|$, dont les facteurs sont les mêmes, se déduisent l'un de l'autre à l'aide d'un seul échange opéré entre ces facteurs. On pourra décomposer $|\mathrm{I}|$ et $|\mathrm{K}|$ en produits partiels qui, pris deux à deux, se correspondront et revêtiront les formes

$$\mathcal{A}|\iota|, \quad \mathcal{A}|\varkappa|,$$

$\mathcal{A}$ désignant un coefficient constant, et $|\iota|$, $|\varkappa|$ deux produits symboliques formés tous deux avec les clefs $\alpha, \beta, \gamma, \ldots, \eta$ rangées dans un ordre tel, que $|\varkappa|$ se déduise de $|\iota|$ à l'aide d'un seul échange opéré

entre ces clefs. Or, les clefs $\alpha, \beta, \gamma, \ldots, \eta$ étant supposées anastrophiques, on aura

$$|\varkappa| = -|\iota|;$$

par conséquent,

$$\mathcal{A}|\varkappa| = -\mathcal{A}|\iota|.$$

Donc les produits symboliques $|\mathrm{I}|$, $|\mathrm{K}|$ se composeront de termes qui, pris deux à deux, seront égaux, aux signes près, mais affectés de signes contraires, et l'on aura encore

$$|\mathrm{K}| = -|\mathrm{I}|. \tag{17}$$

Ainsi, par exemple, dans l'hypothèse admise, les termes de la suite

$$\lambda, \quad \mu, \quad \nu, \quad \ldots, \quad \varsigma$$

vérifieront les transmutations anastrophiques

$$|\mu\lambda| = -|\lambda\mu|, \qquad |\lambda\nu\mu| = -|\lambda\mu\nu|, \qquad \ldots.$$

Il y a plus : la formule (17), qui subsistera quels que soient les facteurs échangés entre eux dans les produits $|\mathrm{I}|$ et $|\mathrm{K}|$, s'étendra, dans l'hypothèse admise, tout comme la transmutation anastrophique

$$|\varkappa| = -|\iota|,$$

au cas même où les deux facteurs échangés entre eux seront représentés par la même lettre, et donnera dans ce cas

$$|\mathrm{K}| = -|\mathrm{K}|,$$

ou, ce qui revient au même,

$$2|\mathrm{K}| = 0,$$

et, par suite,

$$|\mathrm{K}| = 0. \tag{18}$$

On aura, par exemple,

$$|\lambda\lambda| = 0, \qquad |\lambda\lambda\mu| = 0, \qquad \ldots,$$

ou, ce qui revient au même,

$$|\lambda^2| = 0, \qquad |\lambda^2\mu| = 0, \qquad \ldots.$$

Cela posé, la suite

$$\lambda, \quad \mu, \quad \nu, \quad \ldots, \quad \varsigma$$

composée de termes qui vérifieront les transmutations de la forme (17) ou (18), c'est-à-dire les transmutations anastrophiques formées avec des produits symboliques de facteurs arbitrairement choisis parmi ces termes, pourra être considérée comme représentant un nouveau système de clefs anastrophiques. En conséquence, on pourra énoncer la proposition suivante :

Théorème. — *Si, avec n clefs anastrophiques*

$$\alpha, \quad \beta, \quad \gamma, \quad \ldots, \quad \eta$$

on construit n fonctions linéaires

$$\lambda, \quad \mu, \quad \nu, \quad \ldots, \quad \varsigma,$$

ces fonctions constitueront encore un système de clefs anastrophiques.

IV. — *Sur les fonctions représentées par des produits symboliques de clefs anastrophiques.*

Dans le paragraphe II de ce Mémoire, la recherche des facteurs symboliques des sommes alternées nous a mis sur la trace des clefs anastrophiques. En suivant une marche inverse, nous allons déduire de la considération de ces mêmes clefs, non seulement la notion des sommes alternées connues sous le nom de *résultantes*, mais encore leurs principales propriétés.

Soient

$$\alpha, \quad \beta, \quad \gamma, \quad \ldots, \quad \eta$$

n clefs anastrophiques, et

$$\lambda, \quad \mu, \quad \nu, \quad \ldots, \quad \varsigma$$

n fonctions linéaires de ces clefs, déterminées par les équations (12) du paragraphe II, c'est-à-dire par les formules

$$(1) \qquad \begin{cases} \lambda = a_1\alpha + b_1\beta + c_1\gamma + \ldots + h_1\eta, \\ \mu = a_2\alpha + b_2\beta + c_2\gamma + \ldots + h_2\eta, \\ \nu = a_2\alpha + b_3\beta + c_3\gamma + \ldots + h_2\eta, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \varsigma = a_n\alpha + b_n\beta + c_n\gamma + \ldots + h_n\eta. \end{cases}$$

Le produit symbolique

$$|\lambda\mu\nu\ldots\varsigma|,$$

décomposé en produits partiels, ne pourra offrir aucun terme dans lequel entre deux ou plusieurs fois, comme facteur, l'une des clefs

$$\alpha, \quad \beta, \quad \gamma, \quad \ldots, \quad \eta,$$

par conséquent aucun terme dans lequel reparaisse deux ou plusieurs fois l'une des lettres

$$a, \quad b, \quad c, \quad \ldots, \quad h;$$

mais il renfermera, outre le produit partiel

$$a_1 b_2 c_3 \ldots h_n |\alpha\beta\gamma\ldots\eta|,$$

tous ceux qu'on peut en déduire, soit à l'aide d'un échange opéré d'une part entre deux clefs, d'autre part entre celles des lettres

$$a, \quad b, \quad c, \quad \ldots, \quad h,$$

qui correspondent à ces deux clefs, soit à l'aide de plusieurs échanges de cette espèce. D'ailleurs, comme un échange opéré entre deux clefs dans un produit de la forme

$$|\alpha\beta\gamma\ldots\eta|$$

a pour effet unique de changer le signe de ce produit, on doit évidemment, de ce qu'on vient de dire, conclure que l'on aura

$$(2) \qquad |\lambda\mu\nu\ldots\varsigma| = s\,|\alpha\beta\gamma\ldots\eta|,$$

s étant la somme qu'on obtient quant au produit

$$(3) \qquad a_1 b_2 c_3 \ldots h_n$$

on ajoute ceux qu'on peut en déduire à l'aide d'un ou plusieurs échanges opérés entre les lettres $a, b, c, \ldots, h$, chacun de ces derniers produits étant pris avec le signe $+$ ou avec le signe $-$, suivant que le nombre des échanges est pair ou impair. Or la somme ainsi formée est précisément la somme alternée qu'on nomme la *résultante du tableau*.

$$(4) \qquad \begin{cases} a_1, & b_1, & c_1, & \ldots, & h_1, \\ a_2, & b_2, & c_2, & \ldots, & h_2, \\ a_3, & b_3, & c_3, & \ldots, & h_3, \\ \ldots, & \ldots, & \ldots, & \ldots, & \ldots, \\ a_n, & b_n, & c_n, & \ldots, & h_n, \end{cases}$$

et, pour réduire le produit symbolique $|\lambda\mu\gamma\ldots\varsigma|$ à cette même somme, il suffit de poser

$$|\alpha\beta\gamma\ldots\eta| = 1, \tag{5}$$

ce qui réduit l'équation (2) à la formule

$$s = |\lambda\mu\nu\ldots\varsigma|, \tag{6}$$

déjà obtenue dans le paragraphe II.

Le *degré* de la résultante s n'est autre chose que le degré du produit (3) et des produits de même espèce, c'est-à-dire le nombre n des facteurs renfermés dans chacun de ces produits.

Si la résultante s est du second degré, la formule (6) donnera

$$s = |\lambda\mu| = a_1 b_2 - a_2 b_1. \tag{7}$$

Si la résultante s est du troisième degré, on trouvera

$$s = |\lambda\mu\nu| = a_1 b_2 c_3 - a_1 b_3 c_2 + a_2 b_3 c_1 - a_2 b_1 c_3 + a_3 b_1 c_2 - a_3 b_2 c_1. \tag{8}$$

En général, si l'on désigne par la notation

$$S(\pm a_1 b_2 c_3 \ldots h_n)$$

la somme qu'on obtient en ajoutant au produit (3) ceux qui s'en déduisent à l'aide d'échanges opérés entre les lettres $a, b, c, \ldots$, prises deux à deux, chacun de ces produits étant pris avec le signe $+$ ou avec le signe $-$, suivant que le nombre des échanges est pair ou impair, la formule (6) donnera

$$s = |\lambda\mu\nu\ldots\varsigma| = S(\pm a_1 b_2 c_3 \ldots h_n). \tag{9}$$

Parmi les produits dont se compose la résultante s, le produit (3), c'est-à-dire le produit des termes rangés, dans le tableau (4), sur la diagonale qui renferme le premier terme a_1, mérite d'être remarqué. Nous le nommerons *produit principal*. Les diverses lettres qui entrent dans ce produit, et les divers indices écrits au bas de ces lettres caractérisent, dans le tableau (4), d'une part les termes situés dans les diverses lignes verticales, d'autre part les termes situés dans les diverses lignes horizontales. Un échange opéré, dans le produit principal $a_1 b_2 c_3 \ldots h$, entre deux lettres que renferment deux lignes verticales données, a le même effet qu'un échange opéré entre les indices qu'elles portent; et chacun des produits qui se déduisent du produit principal, à l'aide de semblables échanges, renferme nécessairement un seul terme pris dans chaque ligne verticale du tableau (4), et un seul terme pris dans chaque ligne horizontale. D'ailleurs, ces produits peuvent être partagés en deux classes, chaque produit étant de *première* ou de *seconde classe*, suivant qu'il se déduit du produit principal par un nombre pair ou impair d'échanges; et la résultante s est simplement la somme qu'on obtient quand, aux produits de première classe pris avec le signe $+$, on ajoute les produits de seconde classe pris avec le signe $-$.

Lorsqu'on échange deux lettres entre elles ou deux indices entre eux, non plus dans le produit principal, mais dans la résultante s, on voit chaque produit partiel, et, par conséquent, la résultante elle-même, changer de signe. Donc la résultante s change de signe lorsqu'on échange entre elles deux lignes verticales ou deux lignes horizontales du tableau (4).

Lorsqu'en faisant tourner le tableau (4) autour de la diagonale qui renferme le premier terme a_1, on échange entre elles les lignes verticales et horizontales de ce tableau, chaque classe comprend toujours les mêmes produits; et, par suite, l'échange opéré entre les deux espèces de lignes n'altère ni le produit principal formé avec les termes situés sur la diagonale autour de laquelle tourne le tableau (14), ni la résultante s. Donc la résultante s du tableau (4) est aussi la résultante du suivant :

$$\left\{\begin{array}{lllll} a_1, & a_2, & a_3, & \ldots, & a_n, \\ b_1, & b_2, & b_3, & \ldots, & b_n, \\ c_1, & c_2, & c_3, & \ldots, & c_n, \\ \ldots, & \ldots, & \ldots, & \ldots, & \ldots, \\ h_1, & h_2, & h_3, & \ldots, & h_n; \end{array}\right. \tag{10}$$

et, dans l'équation

$$s = |\lambda\mu\nu\ldots\varsigma|, \tag{6}$$

qui transforme cette résultante en un produit symbolique, on peut supposer les facteurs $\lambda, \mu, \nu, \ldots, \varsigma$ liés aux clés anastrophiques $\alpha, \beta, \gamma, \ldots, \eta$, ou par les formules (1), ou par les suivantes :

$$
\left\{
\begin{aligned}
\lambda &= a_1\alpha + a_2\beta + a_3\gamma + \ldots + a_n\eta,\\
\mu &= b_1\alpha + b_2\beta + b_3\gamma + \ldots + b_n\eta,\\
\nu &= c_1\alpha + c_2\beta + c_3\gamma + \ldots + c_n\eta,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
\varsigma &= h_1\alpha + h_2\beta + h_3\gamma + \ldots + h_n\eta.
\end{aligned}
\right.
\tag{11}
$$

La formule (6) suppose les clefs $\alpha, \beta, \gamma, \ldots, \eta$ assujetties à la condition (5). Si l'on écartait cette condition, alors, comme on l'a déjà remarqué dans le paragraphe II, la formule (1) donnerait

$$
s = \frac{|\lambda\mu\nu\ldots\varsigma|}{|\alpha\beta\gamma\ldots\eta|}. \tag{12}
$$

Cette dernière équation renferme un théorème qu'on peut énoncer comme il suit :

Théorème I. — *Soient*

$$\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \ldots,\ \eta$$

et

$$\lambda,\ \mu,\ \nu,\ \ldots,\ \varsigma$$

deux systèmes de clefs anastrophiques liés entre eux par des équations qui déterminent les clefs $\lambda, \mu, \nu, \ldots, \varsigma$ en fonctions linéaires des clefs $\alpha, \beta, \gamma, \ldots, \eta$. La résultante algébrique s du tableau formé avec les coefficients de ces dernières clefs sera le rapport des produits symboliques $|\lambda\mu\nu\ldots\varsigma|$, $|\alpha\beta\gamma\ldots\eta|$.

Soit maintenant

$$\mathrm{A},\ \mathrm{M},\ \mathrm{N},\ \ldots,\ \Sigma$$

un troisième système de clefs anastrophiques lié au second système par des équations linéaires qui déterminent les clefs $\mathrm{A}, \mathrm{M}, \mathrm{N}, \ldots, \Sigma$ en fonctions linéaires des clefs $\alpha, \mu, \nu, \ldots, \varsigma$; et nommons s la résultante du tableau formé avec les coefficients de ces dernières clefs dans

les fonctions dont il s'agit. On aura encore

$$
\mathrm{s} = \frac{|\mathrm{AMN}\ldots\Sigma|}{|\lambda\mu\nu\ldots\varsigma|}. \tag{13}
$$

Mais, d'autre part, si dans les équations qui déterminent $\mathrm{A}, \mathrm{M}, \mathrm{N}, \ldots, \Sigma$ en fonctions linéaires des clefs $\lambda, \mu, \nu, \ldots, \varsigma$ on substitue les valeurs de ces dernières clefs exprimées en fonctions linéaires de $\alpha, \beta, \gamma, \ldots, \eta$, on obtiendra de nouvelles équations qui détermineront immédiatement $\mathrm{A}, \mathrm{M}, \mathrm{N}, \ldots, \Sigma$ en fonctions linéaires de $\alpha, \beta, \gamma, \ldots, \eta$. Soit $\mathfrak{S}$ la résultante du tableau formé avec les coefficients de $\alpha, \beta, \gamma, \ldots, \eta$ pris dans ces nouvelles équations. On aura encore

$$
\mathfrak{S} = \frac{|\mathrm{AMN}\ldots\Sigma|}{|\alpha\beta\gamma\ldots\eta|}. \tag{14}
$$

Or, des formules (12), (13), (14), on tire

$$
\mathrm{s}s = \mathfrak{S}, \tag{15}
$$

et la formule (15) renferme évidemment un théorème qu'on peut énoncer comme il suit :

Théorème II. — *Soient*

$$s,\ \mathrm{s}$$

les résultantes algébriques de deux tableaux dont chacun renferme n^2 termes rangés sur n lignes verticales et sur n lignes horizontales. Soient encore

$$
\begin{matrix}
\alpha, & \beta, & \gamma, & \ldots, & \eta\\
\lambda, & \mu, & \nu, & \ldots, & \varsigma\\
\mathrm{A}, & \mathrm{M}, & \mathrm{N}, & \ldots, & \Sigma
\end{matrix}
$$

trois systèmes de clefs anastrophiques liés entre eux par deux systèmes d'équations qui déterminent : 1° les clefs $\lambda, \mu, \nu, \ldots, \varsigma$ en fonctions linéaires de $\alpha, \beta, \gamma, \ldots, \eta$; 2° les clefs $\mathrm{A}, \mathrm{M}, \mathrm{N}, \ldots, \Sigma$ en fonctions linéaires de $\lambda, \mu, \nu, \ldots, \varsigma$. Enfin, supposons que les termes du premier tableau soient les coefficients de $\alpha, \beta, \gamma, \ldots \eta$ dans le premier système d'équations, et que, pareillement, les termes du second tableau soient *les coefficients de* $\lambda, \mu, \nu, \ldots, \varsigma$ *dans le second système d'équations. Le produit des deux résultantes algébriques* s, s *sera encore une résultante algébrique, savoir la résultante du tableau qui aura pour termes les coefficients des clefs* $\alpha, \beta, \gamma, \ldots, \eta$ *dans* $\Lambda, \mathrm{M}, \mathrm{N}, \ldots, \Sigma$ *exprimés en fonctions linéaires de ces mêmes clefs.*

Concevons, pour fixer les idées, que les résultantes s, s se rapportent à deux systèmes de quantités dont les unes, désignées par des lettres italiques, soient celles que renferme le tableau (4) ou (10), les autres étant désignées par des lettres romaines et renfermées dans le tableau

$$(16)\qquad \left\{\begin{array}{lllll} \mathrm{a}_1, & \mathrm{b}_1, & \mathrm{c}_1, & \ldots, & \mathrm{h}_1, \\ \mathrm{a}_2, & \mathrm{b}_2, & \mathrm{c}_2, & \ldots, & \mathrm{h}_2, \\ \mathrm{a}_3, & \mathrm{b}_3, & \mathrm{c}_3, & \ldots, & \mathrm{h}_3, \\ \ldots, & \ldots, & \ldots, & \ldots, & \ldots, \\ \mathrm{a}_n, & \mathrm{b}_n, & \mathrm{c}_n, & \ldots, & \mathrm{h}_n. \end{array}\right.$$

En prenant les termes du tableau (16) pour coefficients de $\lambda, \mu, \nu, \ldots, \varsigma$ dans les valeurs de $\Lambda, \mathrm{M}, \mathrm{N}, \ldots, \Sigma$, on aura

$$(17)\qquad \left\{\begin{array}{l} \Lambda = \mathrm{a}_1\lambda + \mathrm{b}_1\mu + \mathrm{c}_1\nu + \ldots + \mathrm{h}_1\eta, \\ \mathrm{M} = \mathrm{a}_2\lambda + \mathrm{b}_2\mu + \mathrm{c}_2\nu + \ldots + \mathrm{h}_2\eta, \\ \mathrm{N} = \mathrm{a}_3\lambda + \mathrm{b}_3\mu + \mathrm{c}_3\nu + \ldots + \mathrm{h}_3\eta, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \Sigma = \mathrm{a}_n\lambda + \mathrm{b}_n\mu + \mathrm{c}_n\nu + \ldots + \mathrm{h}_n\eta; \end{array}\right.$$

puis, en substituant dans ces dernières équations les valeurs de $\lambda, \mu, \nu, \ldots, \varsigma$ tirées des formules (11), et en posant, pour abréger,

$$(18)\qquad \mathrm{k}_{l,m} = \mathrm{a}_l a_m + \mathrm{b}_l b_m + \mathrm{c}_l c_m + \ldots + \mathrm{h}_l h_m,$$

quels que soient d'ailleurs les nombres entiers l, m, on trouvera

$$(19)\qquad \left\{\begin{array}{l} \Lambda = k_{1,1}\alpha + k_{1,2}\beta + k_{1,3}\gamma + \ldots + k_{1,n}\eta, \\ \mathrm{M} = k_{2,1}\alpha + k_{2,2}\beta + k_{2,3}\gamma + \ldots + k_{2,n}\eta, \\ \mathrm{N} = k_{3,1}\alpha + k_{3,2}\beta + k_{3,3}\gamma + \ldots + k_{3,n}\eta, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \Sigma = k_{n,1}\alpha + k_{n,2}\beta + k_{n,3}\gamma + \ldots + k_{n,n}\eta. \end{array}\right.$$

Donc, en vertu du théorème II, le produit $s\mathrm{s}$ des deux résultantes

algébriques s, s sera la résultante algébrique $\mathcal{S}$ des termes renfermés dans le tableau

$$(20)\qquad \left\{\begin{array}{lllll} k_{1,1}, & k_{1,2}, & k_{1,3}, & \ldots, & k_{1,n}, \\ k_{2,1}, & k_{2,2}, & k_{2,3}, & \ldots, & k_{2,n}, \\ k_{3,1}, & k_{3,2}, & k_{3,3}, & \ldots, & k_{3,n}, \\ \ldots, & \ldots, & \ldots, & \ldots, & \ldots, \\ k_{n,1}, & k_{n,2}, & k_{n,3}, & \ldots, & k_{n,n}; \end{array}\right.$$

et l'on aura généralement

$$(21)\qquad S(\pm k_{1,1}k_{2,2}\ldots k_{n,n}) = S(\pm \mathrm{a}_1\mathrm{b}_2\ldots\mathrm{h}_n)\,S(\pm a_1 b_2\ldots h_n).$$

On trouvera, en particulier, pour $n = 2$,

$$(22)\qquad k_{1,1}k_{2,2} - k_{1,2}k_{2,1} = (\mathrm{a}_1\mathrm{b}_2 - \mathrm{a}_2\mathrm{b}_1)(a_1 b_2 - a_2 b_1),$$

ou, ce qui revient au même,

$$(23)\qquad \begin{array}{l} (\mathrm{a}_1 a_1 + \mathrm{b}_1 b_1)(\mathrm{a}_2 a_2 + \mathrm{b}_2 b_2) \\ \quad - (\mathrm{a}_1 a_2 + \mathrm{b}_1 b_2)(\mathrm{a}_2 a_1 + \mathrm{b}_2 b_1) = (\mathrm{a}_1\mathrm{b}_2 - \mathrm{a}_2\mathrm{b}_1)(a_1 b_2 - a_2 b_1). \end{array}$$

Concevons, à présent, que l'on veuille composer une résultante algébrique $\mathcal{S}$, non plus avec tous les termes du tableau (20), mais seulement avec quelques-uns d'entre eux, dont le nombre soit m^2, savoir avec ceux que renferment m lignes verticales et m lignes horizontales déterminées. On pourra encore exprimer cette résultante à l'aide d'une équation analogue à la formule (14), par le rapport entre deux produits symboliques du degré m, formés le premier avec quelques-unes des clefs $\Lambda, \mathrm{M}, \mathrm{N}, \ldots, \Sigma$, le second avec quelques-unes des clefs $\alpha, \beta, \gamma, \ldots, \eta$, les clefs dont il s'agit étant celles qui, dans les formules (19), appartiennent aux mêmes lignes verticales ou horizontales que les termes du tableau (20) renfermés dans la résultante $\mathcal{S}$. Effectivement, pour déduire des équations (19) la résultante $\mathcal{S}$ sous la forme indiquée, il suffira évidemment d'annuler celles des clefs anastrophiques $\alpha, \beta, \gamma, \ldots \eta$ dont les coefficients seront tous distincts des termes renfermés dans $\mathcal{S}$. Ainsi, par exemple, si l'on veut réduire $\mathcal{S}$ à la résultante

$$k_{1,1}k_{2,2} - k_{1,2}k_{2,1}$$

formée avec les lettres que contiennent les deux premières lignes verticales et les deux premières lignes horizontales du tableau (20), il suffira d'annuler les clefs

$$\alpha, \quad \beta, \quad \gamma, \quad \ldots, \quad \eta,$$

à l'exception des deux premières, et alors les équations (19), réduites aux formules

$$\left\{ \begin{aligned} \mathrm{A} &= k_{1,1}\alpha + k_{1,2}\beta, \\ \mathrm{M} &= k_{2,1}\alpha + k_{2,2}\beta, \end{aligned} \right. \tag{24}$$

donneront

$$\mathcal{S} = \frac{|\mathrm{AM}|}{|\alpha\beta|}. \tag{25}$$

Pareillement, si l'on veut réduire $\mathcal{S}$ à la résultante des termes compris dans les trois premières lignes horizontales et dans les trois premières lignes verticales du tableau (20), il suffira d'annuler les clefs anastrophiques

$$\alpha, \quad \beta, \quad \gamma, \quad \ldots, \quad \eta,$$

à l'exception des trois premières, et alors les équations (19), réduites aux formules

$$\left\{ \begin{aligned} \mathrm{A} &= k_{1,1}\alpha + k_{1,2}\beta + k_{1,3}\gamma, \\ \mathrm{M} &= k_{2,1}\alpha + k_{2,2}\beta + k_{2,3}\gamma, \\ \mathrm{N} &= k_{3,1}\alpha + k_{3,2}\beta + k_{3,3}\gamma, \end{aligned} \right. \tag{26}$$

donneront

$$\mathcal{S} = \frac{|\mathrm{AMN}|}{|\alpha\beta\gamma|}. \tag{27}$$

Cela posé, on pourra généralement énoncer la proposition suivante :

Théorème III. — *Supposons qu'après avoir effacé dans le tableau* (20) *tous les termes non compris dans m lignes verticales et m lignes horizontales déterminées, on cherche la résultante $\mathcal{S}$ des termes conservés. Il suffira, pour l'obtenir, d'effacer, dans les deux termes du rapport*

$$\frac{|\mathrm{AMN}\ldots\Sigma|}{|\alpha\beta\gamma\ldots\eta|},$$

d'une part, quelques-unes des fonctions linéaires de $\alpha, \beta, \gamma, \ldots, \eta$

représentées par A, M, N, …, Σ, *savoir celles qui ne renferment aucun des termes conservés; d'autre part, quelques-unes des clefs* $\alpha, \beta, \gamma, \ldots, \eta$, *savoir celles qui, dans les formules* (19), *n'ont jamais pour coefficients ces mêmes termes, puis d'annuler, dans les valeurs de* $\lambda, \mu, \nu, \ldots, \varsigma$ *données par les formules* (11), *les clefs effacées dans le produit symbolique* $|\alpha\beta\gamma\ldots\eta|$.

En s'appuyant sur le théorème précédent, on pourra facilement exprimer la résultante $\mathcal{S}$ supposée du degré m, non plus par le produit unique $\mathbf{s}s$ des résultantes construites avec les termes des tableaux (4) et (16), comme dans le cas où l'on avait $m = n$, mais par une somme de produits de résultantes du degré m, formées chacune avec les termes compris à la fois dans n lignes verticales et dans m lignes horizontales de l'un de ces tableaux. Ainsi, par exemple, si l'on suppose $m = 3$, $n = 2$, les deux premières des équations (17), réduites aux formules

$$\left\{ \begin{aligned} \mathrm{A} &= \mathbf{a}_1\lambda + \mathbf{b}_1\mu + \mathbf{c}_1\nu, \\ \mathrm{M} &= \mathbf{a}_2\lambda + \mathbf{b}_2\mu + \mathbf{c}_2\nu, \end{aligned} \right. \tag{28}$$

donneront

$$|\mathrm{AM}| = \mathbf{s}\,|\mu\nu| + \mathbf{s}'\,|\nu\lambda| = \mathbf{s}''\,|\lambda\mu|,$$

les valeurs de $\mathbf{s}$, $\mathbf{s}'$, $\mathbf{s}''$ étant

$$\mathbf{s} = \mathbf{b}_1\mathbf{c}_2 - \mathbf{b}_2\mathbf{c}_1, \qquad \mathbf{s}' = \mathbf{c}_1\mathbf{a}_2 - \mathbf{c}_2\mathbf{a}_1, \qquad \mathbf{s}'' = \mathbf{a}_1\mathbf{b}_2 - \mathbf{a}_2\mathbf{b}_1.$$

Mais, d'autre part, les équations (11), réduites aux formules

$$\left\{ \begin{aligned} \lambda &= a_1\alpha + a_2\beta, \\ \mu &= b_1\alpha + b_2\beta, \\ \nu &= c_1\alpha + c_2\beta, \end{aligned} \right. \tag{29}$$

par l'annulation de γ, donneront

$$|\mu\nu| = s\,|\alpha\beta|, \qquad |\nu\lambda| = s'\,|\alpha\beta|, \qquad |\lambda\mu| = s''\,|\alpha\beta|,$$

les valeurs de s, s', s'' étant

$$s = b_1c_2 - b_2c_1, \qquad s' = c_1a_2 - c_2a_1, \qquad s'' = a_1b_2 - a_2b_1.$$

Donc, en définitive, on aura

$$|\mathrm{AM}| = (\mathbf{s}s + \mathbf{s}'s' + \mathbf{s}''s'')\,|\alpha\beta|,$$

et la formule (25) donnera

$$\mathfrak{S} = \mathrm{s}s + \mathrm{s}'s' + \mathrm{s}''s''. \tag{30}$$

Donc, en substituant à chaque résultante sa valeur, on aura

$$\begin{aligned} &(\mathrm{a}_1 a_1 + \mathrm{b}_1 b_1 + \mathrm{c}_1 c_1)(\mathrm{a}_2 a_2 + \mathrm{b}_2 b_2 + \mathrm{c}_2 c_2) \\ &- (\mathrm{a}_1 a_2 + \mathrm{b}_1 b_2 + \mathrm{c}_1 c_2)(\mathrm{a}_2 a_1 + \mathrm{b}_2 b_1 + \mathrm{c}_2 c_1) \\ = \; &(\mathrm{b}_1\mathrm{c}_2 - \mathrm{b}_2\mathrm{c}_1)(b_1 c_2 - b_2 c_1) + (\mathrm{c}_1\mathrm{a}_2 - \mathrm{c}_2\mathrm{a}_1)(c_1 a_2 - c_2 a_1) \\ &+ (\mathrm{a}_1\mathrm{b}_2 - \mathrm{a}_2\mathrm{b}_1)(a_1 b_2 - a_2 b_1). \end{aligned} \tag{31}$$

La valeur de $\mathfrak{S}$ que fournit l'une quelconque des formules (25), (27), etc., pourra toujours être ainsi décomposée en produits partiels, par une équation de la forme

$$\mathfrak{S} = \mathrm{s}s + \mathrm{s}'s' + \mathrm{s}''s'' + \ldots, \tag{32}$$

et l'on pourra ainsi déduire du théorème III celui que nous allons énoncer :

Théorème IV. — *Concevons que, dans chacun des tableaux* (4) *et* (16), *on efface tous les termes non compris dans m lignes horizontales, ces lignes pouvant occuper des places différentes dans les deux tableaux, puis ajoutons entre eux les produits binaires qu'on obtiendra en multipliant respectivement les divers termes d'une ligne horizontale conservée dans le tableau* (4) *par les termes correspondants d'une ligne horizontale conservée dans le tableau* (16). *La somme ainsi formée et les sommes semblables seront représentées dans le tableau* (20) *par divers termes compris dans m lignes horizontales et m lignes verticales déterminées. Nommons* $\mathfrak{S}$ *la résultante de ces derniers termes. Soient d'ailleurs* s *la résultante du degré m formée avec les termes qui occupent m places arbitrairement choisies dans les lignes horizontales conservées du tableau* (4), *et s la résultante formée avec les termes correspondants du tableau* (16). *Le produit* ss, *ajouté à tous les produits du même genre, donnera pour somme la résultante* $\mathfrak{S}$.

Parmi les propriétés que possèdent les résultantes algébriques, on doit remarquer celles qu'expriment les théorèmes II et IV, ou, ce qui

revient au même, les formules (15) et (32). Ces formules, que j'ai données pour la première fois dans le 17[e] cahier du *Journal de l'École Polytechnique* [*voir* aussi dans le même cahier un Mémoire de M. Binet], sont d'ailleurs des conséquences immédiates des théorèmes I et II compris dans la formule (12), qui, dans le cas où l'on pose $|\alpha\beta\gamma\ldots\eta| = 1$, se réduit à l'équation (6). Ils se rattachent donc intimement à la décomposition des résultantes en facteurs symboliques représentés par des fonctions linéaires de clefs anastrophiques.

En appliquant à des cas spéciaux les formules établies dans ce paragraphe, on en obtient d'autres qu'il sera bon de mentionner et que nous allons rappeler en peu de mots.

Si le tableau (4) coïncide avec le tableau (16), les formules (15) et (30) donneront, la première,

$$\mathfrak{S} = \mathrm{s}^2; \tag{33}$$

la seconde,

$$\mathfrak{S} = \mathrm{s}^2 + \mathrm{s}'^2 + \mathrm{s}''^2 + \ldots, \tag{34}$$

et, en conséquence, la résultante algébrique $\mathfrak{S}$ se trouvera réduite à un carré parfait ou à la somme de plusieurs carrés. Alors aussi, on tirera en particulier de la formule (23)

$$(a_1^2 + b_1^2)(a_2^2 + b_2^2) - (a_1 a_2 + b_1 b_2)^2 = (a_1 b_2 - a_2 b_1)^2, \tag{35}$$

ou, ce qui revient au même,

$$(a_1^2 + b_1^2)(a_2^2 + b_2^2) = (a_1 a_2 + b_1 b_2)^2 + (a_1 b_2 - a_2 b_1)^2. \tag{36}$$

et, de la formule (31),

$$\begin{aligned} &(a_1^2 + b_1^2 + c_1^2)(a_2^2 + b_2^2 + c_2^2) - (a_1 a_2 + b_1 b_2 + c_1 c_2)^2 \\ &= (b_1 c_2 - b_2 c_1)^2 + (c_1 a_2 - c_2 a_1)^2 + (a_1 b_2 - a_2 b_1)^2. \end{aligned} \tag{37}$$

En réduisant a_1, b_1; a_2, b_2, à des nombres entiers, on tire de l'équation (20) un théorème connu, savoir qu'*une somme de deux carrés, multipliée par une autre somme de deux carrés, donne encore pour produit une somme de deux carrés*. Quant à la formule (37), elle est précisément celle qu'on obtient lorsqu'on projette sur trois plans rectangulaires la surface d'un triangle dont les trois sommets ont pour coordonnées respectives les quantités

$$a_1,\ b_1,\ c_1,\qquad a_2,\ b_2,\ c_2,\qquad a_3,\ b_3,\ c_3,$$

et qu'on égale le carré de cette surface à la somme des carrés de ses trois projections.

Si des trois systèmes de clefs anastrophiques

$$\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \ldots,\ \eta;\quad \lambda,\ \mu,\ \nu,\ \ldots,\ \varsigma;\quad \Lambda,\ \mathrm{M},\ \mathrm{N},\ \ldots,\ \Sigma,$$

le troisième coïncide avec le premier, les équations (17), réduites à la forme

$$(38)\qquad \left\{\begin{array}{l} \alpha = \mathrm{a}_1\lambda + \mathrm{b}_1\mu + \mathrm{c}_1\nu + \ldots + \mathrm{h}_1\eta, \\ \beta = \mathrm{a}_2\lambda + \mathrm{b}_2\mu + \mathrm{c}_2\nu + \ldots + \mathrm{h}_2\eta, \\ \gamma = \mathrm{a}_3\lambda + \mathrm{b}_3\mu + \mathrm{c}_3\nu + \ldots + \mathrm{h}_3\eta, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \eta = \mathrm{a}_n\lambda + \mathrm{b}_n\mu + \mathrm{c}_n\nu + \ldots + \mathrm{h}_n\eta, \end{array}\right.$$

ne devront pas différer de celles qui se déduiraient des formules (1) résolues par rapport à $\alpha, \beta, \gamma, \ldots, \eta$. Dans le même cas, la formule (15) donnera

$$(39)\qquad ss = 1,$$

et l'on pourra, en conséquence, énoncer la proposition suivante :

Théorème V. — *Soient*

$$\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \ldots,\ \eta;\quad \lambda,\ \mu,\ \nu,\ \ldots,\ \varsigma$$

deux systèmes composés chacun de n variables, et supposons les variables $\lambda, \mu, \nu, \ldots, \varsigma$ *représentées par des fonctions linéaires et homogènes de* $\alpha, \beta, \gamma, \ldots, \eta$. *On pourra, pour l'ordinaire, exprimer aussi* $\alpha, \beta, \gamma, \ldots, \eta$ *en fonctions linéaires et de* $\lambda, \mu, \nu, \ldots, \varsigma$ *et les deux tableaux formés : 1° avec les coefficients de* $\alpha, \beta, \gamma, \ldots, \eta$ *dans les valeurs de* $\lambda, \mu, \nu, \ldots, \varsigma$; *2° avec les coefficients de* $\lambda, \mu, \nu, \ldots, \varsigma$ *dans les valeurs de* $\alpha, \beta, \gamma, \ldots, \eta$, *auront pour résultantes algébriques deux quantités dont le produit sera l'unité.*

La résultante algébrique des termes que comprend un tableau donné peut être présentée sous une forme remarquable, lorsque, dans ce tableau, chacune des lignes horizontales ou verticales est composée de termes qui forment une progression géométrique. Supposons, pour fixer les idées, que le tableau (4) se réduise au suivant :

$$(40)\qquad \left\{\begin{array}{lllll} A, & B, & C, & \ldots, & H, \\ Aa, & Bb, & Cc, & \ldots, & Hh, \\ Aa^2, & Bb^2, & Cc^2, & \ldots, & Hh^2, \\ \ldots, & \ldots & \ldots, & \ldots, & \ldots, \\ Aa^{n-1}, & Bb^{n-1}, & Cc^{n-1}, & \ldots, & Hh^{n-1}, \end{array}\right.$$

dans lequel chaque ligne verticale est composée de termes qui forment une progression géométrique, la raison de cette progression étant a dans la première ligne verticale, b dans la seconde, ... La résultante s des termes que renferme le tableau (40) sera, en vertu de la formule (9),

$$(41)\qquad s = ABC\ldots H\,\mathrm{S}(\pm a^0 b^1 c^2 \ldots h^{n-1}).$$

Si chacune des quantités $A, B, C, \ldots, H$ se réduit à l'unité, ou, ce qui revient au même, si le tableau (40) se réduit au suivant :

$$(42)\qquad \left\{\begin{array}{lllll} 1, & 1, & 1, & \ldots, & 1, \\ a, & b, & c, & \ldots, & h, \\ a^2, & b^2, & c^2, & \ldots, & h^2, \\ \ldots, & \ldots, & \ldots, & \ldots, & \ldots, \\ a^{n-1}, & b^{n-1}, & c^{n-1}, & \ldots, & h^{n-1}, \end{array}\right.$$

on aura simplement

$$(43)\qquad s = \mathrm{S}(\pm a^0 b^1 c^2 \ldots h^{n-1}),$$

et cette dernière valeur de s, considérée comme fonction de l'une quelconque des quantités $a, b, c, \ldots, h$ sera une fonction entière du degré $n-1$. D'ailleurs, un échange opéré entre deux de ces quantités, par exemple entre a et b, changera s en $-s$. Donc s s'évanouira si l'on pose $b = a$; et si l'on pose

$$b = a + r,$$

s s'évanouira pour une valeur nulle de r. Donc, dans cette dernière supposition, la résultante s, réduite à une fonction entière des quantités $a, c, \ldots, h$ et de la différence

$$r = b - a,$$

ne renfermera aucun terme indépendant de r, et sera de la forme

$$s = rR,$$

R étant une fonction entière de $a, c, \ldots, h, r$, ou, ce qui revient au même, de $a, b, c, \ldots, h$. Ainsi la résultante s, déterminée par la formule (43), a pour facteur algébrique la différence $b - a$. On prouvera de même qu'elle a pour facteur chacune des différences

$$(44)\qquad \left\{\begin{array}{llll} b-a, & c-a, & \ldots, & h-a, \\ & c-b, & \ldots, & h-b, \\ & & \ldots, & \ldots\ldots, \\ & & & h-g, \end{array}\right.$$

que l'on forme en retranchant l'une de l'autre les quantités

$$a,\quad b,\quad c,\quad \ldots,\quad h,$$

combinées deux à deux de toutes les manières possibles. Donc, si l'on nomme k le produit des différences comprises dans le tableau (44), la formule (43) donnera

$$s = Kk,$$

K étant ou un nombre constant ou une fonction entière de a, b, $c, \ldots, h$. J'ajoute que, de ces deux hypothèses, la première est seule admissible. En effet, comme dans le tableau (44), $n - 1$ termes, savoir ceux que contient la première ligne, renferment la quantité a, le produit k considéré comme fonction de a sera, ainsi que s, du degré $n - 1$. Donc le coefficient K devra être indépendant de a; on prouvera de même qu'il est indépendant de b_1, de c, etc., de h. K sera donc un nombre. Pour obtenir ce nombre équivalent au rapport $\frac{s}{k}$, il suffira d'observer que le produit principal

$$(45)\qquad a^0 b^1 c^2 \ldots h^{n-1},$$

formé avec les termes situés dans le tableau (42) sur la diagonale qui renferme le premier terme 1, se présente une seule fois, pris avec le signe $+$, non seulement dans le développement de la résultante

$$s = S(\pm a^0 b^1 c^2 \ldots h^n),$$

mais aussi dans le développement du produit k des différences comprises dans le tableau (44), attendu que, dans ce dernier développement, le seul produit partiel de la forme

$$bc^2 \ldots h^{n-1}$$

est évidemment celui que l'on trouve en réduisant chacune de ces différences à son premier terme. Donc le nombre K ne pourra différer de l'unité, et la formule (43) donnera

$$s = k,$$

ou, ce qui revient au même,

$$(46)\qquad s = (b-a) \times (c-a)(c-b) \times \ldots \times (h-a)(h-b)\ldots(h-g).$$

Par suite aussi, la formule (41) donnera

$$(47)\qquad s = ABC\ldots H(b-a) \times (c-a)(c-b) \times \ldots \times (h-a)(h-b)\ldots(h-g).$$

En conséquence, on peut énoncer la proposition suivante :

Théorème VI. — *Lorsque les termes avec lesquels se forme une résultante du degré n sont, dans chaque ligne verticale du tableau qui la renferme, en progression géométrique, il suffit, pour obtenir cette résultante, de multiplier le produit des termes*

$$A,\quad B,\quad C,\quad \ldots,\quad H,$$

compris dans la première ligne horizontale de ce tableau, par le produit des différences que fournissent les rapports

$$a,\quad b,\quad c,\quad \ldots,\quad h$$

des progressions géométriques auxquelles appartiennent ces mêmes termes, quand on retranche successivement chacun de ces rapports de tous ceux qui le suivent.

V. — *Méthodes diverses pour la détermination des résultantes algébriques.*

Soit toujours s la résultante du tableau

$$(1)\quad \begin{cases} a_1, & b_1, & c_1, & \ldots, & h_1, \\ a_2, & b_2, & c_2, & \ldots, & h_2, \\ a_3, & b_3, & c_3, & \ldots, & h_3, \\ \ldots, & \ldots, & \ldots, & \ldots, & \ldots, \\ a_n, & b_n, & c_n, & \ldots, & h_n, \end{cases}$$

en sorte qu'on ait

$$(2)\qquad s = S(\pm a_1 b_2 c_3 \ldots h_n).$$

Le calcul direct des produits partiels, dont la lettre S indique la somme et dont le nombre N est déterminé par la formule

$$(3)\qquad N = 1.2.3\ldots n,$$

deviendra évidemment très pénible pour de grandes valeurs de n. Mais l'emploi des clefs anastrophiques offre divers moyens d'éviter ce calcul dans la détermination de s.

En premier lieu, pour déduire s de la formule

$$(4)\qquad s = \frac{|\lambda\mu\nu\ldots\varsigma|}{|\alpha\beta\gamma\ldots\eta|},$$

dans laquelle on a

$$(5)\quad \begin{cases} \lambda = a_1\alpha + b_1\beta + c_1\gamma + \ldots + h_1\eta, \\ \mu = a_2\alpha + b_2\beta + c_2\gamma + \ldots + h_2\eta, \\ \nu = a_3\alpha + b_3\beta + c_3\gamma + \ldots + h_3\eta, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \varsigma = a_n\alpha + b_n\beta + c_n\gamma + \ldots + h_n\eta, \end{cases}$$

il suffira de multiplier successivement l'un par l'autre les facteurs λ, μ, ν, $\ldots$, ς, en assujettissant les clefs α, β, γ, $\ldots$, η aux transmutations anastrophiques binaires et aux transmutations conjonctives des divers degrés. Si, pour abréger, l'on désigne, à l'aide des notations

$$(a, b),\quad (a, b, c),\quad \ldots,\quad (a, b, c, h),$$

les résultantes algébriques

$$S(\pm a_1 b_2),\quad S(\pm a_1 b_2 c_3),\quad \ldots,\quad S(\pm a_1 b_2 c_3 \ldots h_n),$$

et à l'aide de notations semblables les résultantes semblables déduites des précédentes par des échanges opérés entre les lettres $a, b, c, \ldots, h$; si d'ailleurs on range les facteurs que renferme chaque produit symbolique dans l'ordre indiqué par l'alphabet, on aura successivement

$$(6)\quad \begin{cases} |\lambda\mu| = (a, b)|\alpha\beta| + (a, c)|\alpha\gamma| + \ldots + (b, c)|\beta\gamma| + \ldots, \\ |\lambda\mu\nu| = (a, b, c)|\alpha\beta\gamma| + (a, b, d)|\alpha\beta\delta| + \ldots + (b, c, d)|\beta\gamma\delta| + \ldots, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ |\lambda\mu\nu\ldots\varsigma| = (a, b, c, \ldots, h)|\alpha\beta\gamma\ldots\eta|, \end{cases}$$

et l'on reconnaitra que, pour déterminer les coefficients

$$(a, b),\quad (a, c),\quad \ldots,\quad (b, c),\quad \ldots,\quad (a, b, c),\quad \ldots,\quad (a, b, c, \ldots, h),$$

dont le dernier est précisément la résultante s, il suffit de recourir à des équations de la forme

$$(7)\quad \begin{cases} (a, b) = a_1 b_2 - b_1 a_2, \\ (a, b, c) = (a, b)c_3 - (a, c)b_3 + (b, c)a_3, \\ (a, b, c, d) = (a, b, c)d_4 - (a, b, d)c_4 + (a, c, d)b_4 - (b, c, d)a_4, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ (a, b, c, \ldots, g, h) = (a, b, c, \ldots, g)h_n + \ldots + (-1)^{n-1}(b, c, \ldots, g, h)a_n. \end{cases}$$

Lorsqu'on opère ainsi, le calcul de la résultante s exige la formation de produits composés chacun, non plus de n facteurs, mais de deux facteurs seulement, et le nombre $\mathfrak{N}$ de ces produits, déterminé par la formule

$$(8)\quad \begin{aligned} \mathfrak{N} &= n\left[\frac{n-1}{1} + \frac{(n-1)(n-2)}{1.2} + \ldots + \frac{(n-1)(n-2)}{1.2} + \frac{n-1}{1} + 1\right] \\ &= n(2^{n-1} - 1), \end{aligned}$$

croît beaucoup moins rapidement que le nombre $N = 1, 2, 3, \ldots, n$.

Lorsque les divers termes du tableau (1) sont connus et donnés en nombres, on peut se dispenser d'écrire les équations (7) et autres semblables, et se borner à déduire, de multiplications successives, la valeur du produit $|\lambda\mu\nu\ldots\varsigma|$ qui, divisé par $|\alpha\beta\gamma\ldots\eta|$, donne pour quotient la résultante s.

Supposons, pour fixer les idées, que le tableau (1) se réduise au suivant :

$$\begin{matrix} 1, & 2, & 3, \\ 3, & 1, & 2, \\ 2, & 3, & 1, \end{matrix}$$

on aura

$$\begin{aligned} \lambda &= \alpha + 2\beta + 3\gamma, \\ \mu &= 3\alpha + \beta + 2\gamma, \\ \nu &= 2\alpha + 3\beta + \gamma; \end{aligned}$$

et, par suite,

$$\begin{aligned} |\lambda\mu| &= (1-2.3)|\alpha\beta| + (2-3.3)|\alpha\gamma| + (2.2-3)|\beta\gamma| = -5|\alpha\beta| - 7|\alpha\gamma| + |\beta\gamma|, \\ |\lambda\mu\nu| &= (-5+7.3+2)|\alpha\beta\gamma| = 18|\alpha\beta\gamma|, \\ s &= \frac{|\lambda\mu\nu|}{|\alpha\beta\gamma|} = 18. \end{aligned}$$

Pour déduire la résultante s de la formule (4), il n'est pas nécessaire de construire chacun des produits

$$|\lambda\mu|, \quad |\lambda\mu\nu|, \quad |\lambda\mu\nu\rho|, \quad \ldots;$$

il suffit de multiplier l'un par l'autre, dans l'ordre qu'indique l'alphabet, d'abord les facteurs $\lambda, \mu, \nu, \ldots, \varsigma$ pris deux à deux ou trois à trois, etc., puis les produits binaires ou ternaires, etc., ainsi formés, de manière à obtenir facilement le produit $|\lambda\mu\nu\ldots\varsigma|$. Ainsi, par exemple, si l'on a $n = h$, alors, pour obtenir le produit final $|\lambda\mu\nu\rho|$, et, par suite, la résultante s, il suffira de former les deux produits binaires $|\lambda\mu|$, $|\nu\rho|$, puis de les multiplier l'un par l'autre. Quelquefois, cette méthode est préférable à celle qui consiste dans la formation successive des trois produits $|\lambda\mu|$, $|\lambda\mu\nu|$, $|\lambda\mu\nu\rho|$. Concevons, pour fixer les idées, que l'on demande la résultante s d'un tableau de la forme

$$\begin{matrix} a, & b, & c, & d, \\ d, & a, & b, & c, \\ c, & d, & a, & b, \\ b, & c, & d, & a, \end{matrix}$$

on aura

$$\begin{aligned} \lambda &= a\alpha + b\beta + c\gamma + d\delta, \\ \mu &= d\alpha + a\beta + b\gamma + c\delta, \\ \nu &= c\alpha + d\beta + a\gamma + b\delta, \\ \rho &= b\alpha + c\beta + d\gamma + a\delta; \end{aligned}$$

et, par suite,

$$\begin{aligned} |\lambda\mu| = {} & (a^2 - bd)|\alpha\beta| + (ab - cd)|\alpha\gamma| + (ac - d^2)|\alpha\delta| \\ & + (b^2 - ac)|\beta\gamma| + (bc - ad)|\beta\delta| + (c^2 - bd)|\gamma\delta|. \end{aligned}$$

De plus, comme pour déduire ν de λ, ou ρ de μ, et, par suite, $|\nu\rho|$, de $|\lambda\mu|$, il suffira d'échanger entre elles, d'une part les clefs α, γ, d'autre part les clefs β, δ, la formule qui précède entraînera la suivante :

$$\begin{aligned} |\nu\rho| = {} & (a^2 - bd)|\gamma\delta| + (ab - cd)|\gamma\alpha| + (ac - d^2)|\gamma\beta| \\ & + (b^2 - ac)|\delta\alpha| + (bc - ad)|\delta\beta| + (c^2 - bd)|\alpha\beta|. \end{aligned}$$

Après avoir ainsi obtenu les valeurs des deux produits symboliques $|\lambda\mu|$, $|\nu\rho|$, on pourra, de ces deux produits multipliés l'un par l'autre, tirer immédiatement la valeur du produit symbolique $|\lambda\mu\nu\rho|$, par conséquent celle de

$$s = \frac{|\lambda\mu\nu\rho|}{|\alpha\beta\gamma\delta|},$$

et l'on trouvera définitivement

$$s = (a^2 - bd)^2 + (c^2 - bd)^2 - (b^2 - ac)^2 - (d^2 - ac)^2 + 2(ab - cd)(bc - ad).$$

Lorsque, dans la formule (4), le facteur λ dépend uniquement de la clef α, c'est-à-dire lorsque la première des équations (5) se réduit à

$$\lambda = a_1\alpha,$$

la formule (4) donne simplement

$$s = a_1 \frac{|\mu\nu\ldots\varsigma|}{|\beta\gamma\ldots\eta|},$$

et l'on peut, dans les valeurs de $\mu, \nu, \ldots, \varsigma$ remplacer α par zéro. En s'appuyant sur ces remarques, on démontre aisément les propositions suivantes :

Théorème I. — *Étant donnés deux systèmes anastrophiques*

$$\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \ldots,\ \eta \quad \text{et} \quad \lambda,\ \mu,\ \nu,\ \ldots,\ \varsigma,$$

composés chacun de n clefs, et liés l'un à l'autre par les équations (5), *concevons que l'on exprime* $\alpha, \beta, \gamma, \ldots, \eta$ *en fonctions linéaires de clefs nouvelles*

$$\varphi,\ \chi,\ \psi,\ \ldots,\ \upsilon,$$

dont le nombre soit égal ou supérieur à $n-1$, *mais de manière à vérifier l'équation de condition*

$$\lambda = 0. \tag{9}$$

La résultante s, déterminée par la formule (4), *sera équivalente au produit du coefficient de* α *dans* λ *par le rapport géométrique des valeurs nouvelles qu'acquerront les deux produits symboliques*

$$|\mu\nu\ldots\varsigma|, \quad |\beta\gamma\ldots\eta|.$$

Corollaire. — Les nouvelles clefs $\varphi, \chi, \psi, \ldots, \upsilon$, dont le nombre doit être égal ou supérieur à $n-1$, pourraient n'être pas distinctes des clefs $\beta, \gamma, \ldots, \eta$, et alors, à la place du premier théorème, on obtiendrait le suivant :

Théorème II. — *La résultante s, déterminée par la formule* (4), *est égale au produit du coefficient de* α *dans* λ *par la valeur qu'acquiert le rapport*

$$\frac{|\mu\nu\ldots\varsigma|}{|\beta\gamma\ldots\eta|},$$

lorsque, dans ce rapport, on exprime $\mu, \nu, \ldots, \varsigma$, *en fonction des* $n-1$ *clefs* $\beta, \gamma, \ldots, \eta$, *à l'aide des formules* (5) *jointes à l'équation* (9).

Supposons, pour fixer les idées, $n = 3$. Alors la résultante

$$\begin{aligned} s &= a_1 b_2 c_3 - a_1 b_3 c_2 + a_2 b_3 c_1 - a_2 b_1 c_3 + a_3 b_1 c_2 - a_3 b_2 c_1 \\ &= (a_1 b_2 - a_2 b_1) c_3 - (a_1 c_2 - a_2 c_1) b_3 + (b_1 c_2 - b_2 c_1) a_3 \end{aligned} \tag{10}$$

pourra être, en vertu du second théorème, présentée sous la forme

$$s = a_1 \left(b_2 - \frac{b_1}{a_1} a_2\right) \left[c_3 - \frac{c_1}{a_1} a_3 - \frac{c_2 - \frac{c_1}{a_1} a_2}{b_2 - \frac{b_1}{a_1} a_2} \left(b_3 - \frac{b_1}{a_1} a_3\right) \right]; \tag{11}$$

on pourra donc la déterminer en calculant trois rapports géométriques, savoir :

$$\frac{b_1}{a_1}, \quad \frac{c_1}{a_1}, \quad \frac{c_2 - \frac{c_1}{a_1} a_2}{b_2 - \frac{b_1}{a_1} a_2},$$

cinq produits binaires et un seul produit ternaire. Généralement, à l'aide du second théorème, on pourra déterminer une résultante du degré n, en calculant des rapports géométriques dont le nombre sera

$$1 + 2 + \ldots + (n-1) = \frac{n(n-1)}{2},$$

des produits binaires dont le nombre sera

$$1^2 + 2^2 + \ldots + (n-1)^2 = \frac{n(n-1)(2n-1)}{2.3}, \qquad \ldots,$$

et un seul produit composé de n facteurs.

Il est bon d'observer que de la formule (11) on tire immédiatement la suivante :

$$s = \frac{(a_1 b_2 - a_2 b_1)(a_1 c_3 - a_3 c_1) - (a_1 c_2 - a_2 c_1)(a_1 b_3 - a_3 b_1)}{a_1}, \tag{12}$$

qui peut être facilement réduite à la formule (10).

Observons encore que la transmutation anastrophique

$$|\lambda^2| = 0$$

donnera

$$a_1 \Phi + b_1 \mathrm{X} + c_1 \Psi + \ldots + h_1 \mathrm{U} = 0, \tag{13}$$

si l'on pose

$$\Phi = |\alpha\lambda|, \qquad \mathrm{X} = |\beta\lambda|, \qquad \Psi = |\gamma\lambda|, \quad \ldots, \qquad \mathrm{U} = |\eta\lambda|, \tag{14}$$

ou, ce qui revient au même,

$$\left\{ \begin{aligned} \Phi &= 0 + b_1 |\alpha\beta| + c_1 |\alpha\gamma| + \ldots + h_1 |\alpha\eta|, \\ \mathrm{X} &= -a_1 |\alpha\beta| + 0 + c_1 |\beta\gamma| + \ldots + h_1 |\beta\eta|, \\ \Psi &= -a_1 |\alpha\gamma| - b_1 |\beta\gamma| + 0 + \ldots + h_1 |\gamma\eta|, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \mathrm{U} &= -a_1 |\alpha\eta| - b_1 |\beta\eta| - c_1 |\gamma\eta| - \ldots + 0, \end{aligned} \right. \tag{15}$$

Or, si dans ces dernières formules on remplace les produits symboliques

$$|\alpha\beta|,\quad |\alpha\gamma|,\quad \ldots,\quad |\alpha\eta|,\quad |\beta\gamma|,\quad \ldots,\quad |\beta\eta|,\quad \ldots,$$

dont le nombre est $\frac{n(n-1)}{2}$, par autant de clefs nouvelles et anastrophiques

$$\varphi,\quad \chi,\quad \psi,\quad \ldots,\quad \upsilon,$$

alors Φ, X, Ψ, ..., U seront des fonctions linéaires de ces clefs qui, prises pour valeurs de $\alpha, \beta, \gamma, \ldots, \eta$, vérifieront la formule (13). Alors aussi, en attribuant à $\alpha, \beta, \gamma, \ldots, \eta$ ces mêmes valeurs dans les facteurs $\mu, \nu, \ldots, \varsigma$, on tirera du second théorème

$$s = a_1 \frac{|\mu\nu\ldots\varsigma|}{|\mathrm{X}\Psi\ldots\mathrm{U}|}. \tag{16}$$

On peut d'ailleurs annuler plusieurs des nouvelles clefs et réduire ainsi leurs valeurs à $n-1$. On doit surtout remarquer le cas où l'on n'attribue des valeurs distinctes de zéro qu'à celles qu'on substitue aux $n-1$ produits symboliques

$$|\alpha\beta|,\quad |\beta\gamma|,\quad |\gamma\delta|,\quad \ldots,\quad |\zeta\eta|.$$

Dans ce cas particulier, les formules (15) donneront

$$\Phi = b_1\varphi,\qquad \mathrm{X} = c_1\chi - a_1\varphi,\qquad \Psi = d_1\psi - b_1\chi,\qquad \ldots,\qquad \mathrm{U} = -g_1\upsilon, \tag{17}$$

et l'on aura, par suite,

$$|\mathrm{X}\Psi\ldots\mathrm{U}| = (-1)^{n-1} a_1 b_1 \ldots g_1 |\varphi\chi\ldots\upsilon|. \tag{18}$$

Donc alors la formule (16) donnera

$$s = (-1)^{n-1} \frac{1}{b_1\ldots g_1} \frac{|\mu\nu\ldots\varsigma|}{|\varphi\chi\ldots\upsilon|}, \tag{19}$$

pourvu que dans les fonctions de $\alpha, \beta, \gamma, \ldots, \eta$, représentées par $\mu, \nu, \ldots, \varsigma$, on pose

$$\alpha = b_1\varphi,\qquad \beta = c_1\chi - a_1\varphi,\qquad \gamma = d_1\psi - b_1\chi,\qquad \ldots,\qquad \eta = -g_1\upsilon. \tag{20}$$

Si, pour fixer les idées, on suppose $n = 3$, la formule (19) donnera

$$s = \frac{(a_2b_1 - a_1b_2)(b_3c_1 - b_1c_3) - (b_2c_1 - b_1c_2)(a_3b_1 - a_1b_3)}{b_1}. \tag{21}$$

VI. — *Usage des clefs anastrophiques dans l'élimination.*

Les clefs anastrophiques peuvent être employées avec avantage dans un grand nombre de questions, et spécialement quand il s'agit d'éliminer plusieurs inconnues entre des équations données.

Considérons d'abord n inconnues

$$x,\quad y,\quad z,\quad \ldots,\quad w,$$

liées entre elles par n équations linéaires; et soient

$$X = 0,\qquad Y = 0,\qquad Z = 0,\qquad \ldots,\qquad W = 0, \tag{1}$$

ces équations dans lesquelles $X, Y, Z, \ldots, W$ représenteront des fonctions linéaires de $x, y, z, \ldots, w$. Si ces fonctions sont homogènes, les équations (1) détermineront seulement les rapports des inconnues, dont l'une quelconque pourra être choisie arbitrairement, et l'élimination des inconnues fournira entre leurs coefficients une équation de condition qu'on obtiendra sans peine, en opérant comme on va le dire.

Observons, en premier lieu, que des équations (1) respectivement multipliées par n facteurs variables,

$$\alpha,\quad \beta,\quad \gamma,\quad \ldots,\quad \eta,$$

puis ajoutées l'une à l'autre, on déduira immédiatement une équation nouvelle

$$\Omega = 0, \tag{2}$$

dont le premier membre

$$\Omega = \alpha X + \beta Y + \gamma Z + \ldots + \eta W \tag{3}$$

sera encore une fonction linéaire de $x, y, z, \ldots, w$, et pourra, en conséquence, être présenté sous la forme

$$\Omega = \lambda x + \mu y + \nu z + \ldots + \varsigma w, \tag{4}$$

$\lambda, \mu, \nu, \ldots, \varsigma$ étant des fonctions linéaires de $\alpha, \beta, \gamma, \ldots, \eta$. Remarquons d'ailleurs que la formule (2) peut être substituée au système des équations (1), et que, pour déduire l'une quelconque des équations (1) de la formule (2), il suffit d'y remplacer l'un des facteurs variables α, β, γ, ..., η par l'unité, en annulant tous les autres.

Concevons maintenant que les n facteurs variables α, β, γ, ..., η soient des clefs anastrophiques. Les fonctions linéaires de $\alpha, \beta, \gamma, \ldots, \eta$, représentées par λ, μ, ν, ..., ς, seront encore des clefs anastrophiques; et comme on aura, par suite,

$$|\lambda^2| = 0, \qquad |\mu^2| = 0, \qquad \ldots, \qquad |\varsigma^2| = 0,$$

on pourra évidemment éliminer de l'équation (2), l'inconnue x, en multipliant Ω par λ, l'inconnue y, en multipliant Ω par μ, ..., l'inconnue w, en multipliant Ω par ς. Donc, pour éliminer toutes les inconnues, à l'exception d'une seule, il suffira de multiplier la fonction Ω par les coefficients des autres inconnues dans cette même fonction. On éliminera, par exemple, y, z, ..., w de la formule (2), en multipliant Ω par le produit $\mu\nu\ldots$, ς, ou ce produit par Ω. On obtiendra ainsi l'équation

$$(5) \qquad |\Omega\mu\nu\ldots\rho| = 0,$$

que la formule (4) réduira effectivement à

$$(6) \qquad x|\lambda\mu\nu\ldots\varsigma| = 0;$$

et, puisque la valeur de x peut être arbitrairement choisie, la formule (6) entraînera la suivante :

$$(7) \qquad |\lambda\mu\nu\ldots\varsigma| = 0,$$

qui sera précisément l'équation de condition à laquelle devront satisfaire les coefficients des inconnues dans les valeurs données de X, Y, Z, ..., W.

Si, pour fixer les idées, on suppose ces coefficients représentés par les divers termes du tableau (1) du paragraphe précédent, en sorte que l'on ait

$$(8) \qquad \left\{\begin{array}{l} X = a_1 x + b_1 y + c_1 z + \ldots + h_1 w, \\ Y = a_2 x + b_2 y + c_2 z + \ldots + h_2 w, \\ Z = a_3 x + b_3 y + c_3 z + \ldots + h_3 w, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ W = a_n x + b_n y + c_n z + \ldots + h_n w, \end{array}\right.$$

les valeurs de λ, μ, ν, ..., ς seront fournies par les équations (5) du même paragraphe; et comme on aura

$$|\lambda\mu\nu\ldots\varsigma| = |\alpha\beta\gamma\ldots\eta|\,\mathrm{S}(\pm a_1 b_2 c_3 \ldots h_n),$$

l'équation (7) donnera

$$(9) \qquad \mathrm{S}(\pm a_1 b_2 c_3 \ldots h_n) = 0.$$

D'ailleurs, pour obtenir cette dernière équation, il suffira évidemment de poser

$$(10) \qquad XYZ\ldots W = 0,$$

en considérant x, y, z, ..., w comme des clefs anastrophiques, puisque, dans cette hypothèse, on aura

$$|XYZ\ldots W| = |xyz\ldots w|\,\mathrm{S}(\pm a_1 b_2 c_3 \ldots h_n).$$

On peut donc énoncer le théorème suivant :

Théorème. — *Si n inconnues vérifient n équations linéaires et homogènes, il suffira d'égaler à zéro le produit symbolique de leurs premiers membres, en considérant ces inconnues comme des clefs anastrophiques, pour obtenir l'équation de condition à laquelle devront satisfaire les coefficients de ces inconnues dans les équations données.*

Supposons maintenant que les équations linéaires données cessent d'être homogènes. Chacune d'elles sera, non plus de la forme

$$ax + by + cz + \ldots + hw = 0.$$

mais de la forme

$$ax + by + cz + \ldots + hw = k,$$

ou, ce qui revient au même, de la forme

$$ax + by + cz + \ldots + hw - k = 0.$$

a, b, c, ..., h, k étant des quantités constantes. Alors, aussi, la formule (4) sera remplacée par la suivante :

$$(11) \qquad \Omega = \lambda x + \mu y + \nu z + \ldots + \varsigma w - \omega,$$

ω étant une nouvelle fonction linéaire de $\alpha, \beta, \gamma, \ldots, \eta$; et l'équation (5) donnera

$$x|\lambda\mu\nu\ldots\varsigma| - |\omega\mu\nu\ldots\varsigma| = 0,$$

par conséquent,

$$x = \frac{|\omega\mu\nu\ldots\varsigma|}{|\lambda\mu\nu\ldots\varsigma|}. \tag{12}$$

Si l'on désigne par $k_1, k_2, \ldots, k_n$ les valeurs que prend successivement la constante k dans la première, la seconde, etc., la dernière des équations données, on aura

$$\left\{\begin{aligned} \omega &= k_1\alpha + k_2\beta + k_3\gamma + \ldots + k_n\eta, \\ |\omega\mu\nu\ldots\varsigma| &= |\alpha\beta\gamma\ldots\eta|\,S(\pm k_1 b_2 c_3 \ldots h_n), \end{aligned}\right. \tag{13}$$

et, en substituant dans la formule (12) les valeurs des produits symboliques qu'elle renferme, on retrouvera l'équation connue

$$x = \frac{S(\pm k_1 b_2 c_3 \ldots h_n)}{S(\pm a_1 b_2 c_3 \ldots h_n)}. \tag{14}$$

Lorsque les équations linéaires proposées sont numériques, l'emploi des clefs anastrophiques permet de calculer directement les valeurs des inconnues, sans que l'on soit obligé de recourir aux formules générales, c'est-à-dire à l'équation (14) et aux équations analogues.

Concevons, pour fixer les idées, qu'il s'agisse de résoudre les équations

$$\left\{\begin{aligned} x + 2y + 3z &= 1, \\ 3x + y + 2z &= 3, \\ 2x + 3y + z &= 5. \end{aligned}\right. \tag{15}$$

De ces équations respectivement multipliées par α, β, γ, puis ajoutées l'une à l'autre, on tirera

$$\lambda x + \mu y + \nu z = \omega, \tag{16}$$

les valeurs de λ, μ, ν, ω étant

$$\begin{aligned} \lambda &= \alpha + 3\beta + 2\gamma, \\ \mu &= 2\alpha + \beta + 3\gamma, \\ \nu &= 3\alpha + 2\beta + \gamma, \\ \omega &= \alpha + 3\beta + 5\gamma, \end{aligned}$$

et la valeur de x sera

$$x = \frac{|\omega\mu\nu|}{|\lambda\mu\nu|}. \tag{17}$$

On trouvera d'ailleurs

$$|\mu\nu| = |\alpha\beta| - 7|\alpha\gamma| - 5|\beta\gamma|;$$

puis en posant, pour plus de commodité, $|\alpha\beta\gamma| = 1$,

$$\begin{aligned} |\omega\mu\nu| &= -5 + 3.7 + 5 = 21, \\ |\lambda\mu\nu| &= -5 + 3.7 + 2 = 18, \end{aligned}$$

et, par suite,

$$x = \frac{21}{18} = \frac{7}{6}.$$

La valeur de x étant ainsi déduite de la formule (17), on pourra tirer de la formule (16), multipliée par ν, la valeur de y. En opérant de la sorte, et posant pour abréger, $\gamma = 0$, $|\alpha\beta| = 1$, on trouvera

$$y = \frac{|\omega\nu| - |\lambda\nu|x}{|\mu\nu|},$$

puis

$$|\mu\nu| = 1, \qquad |\lambda\nu| = |\omega\nu| = -7;$$

par conséquent,

$$y = -7(1 - x) = \frac{7}{6}.$$

Enfin la dernière des formules (15) donnera

$$z = 5 - 2x - 3y = -\frac{5}{6}.$$

On aura donc, en définitive,

$$x = y = \frac{7}{6}, \qquad z = -\frac{5}{6}.$$

Supposons maintenant que l'on veuille éliminer une ou plusieurs variables entre des équations qui cessent d'être linéaires. Les clefs anastrophiques fourniront encore un moyen facile d'opérer l'élimination. Ainsi, par exemple, pour éliminer x entre les équations

$$a + bx + cx^2 = 0, \qquad a' + b'x + c'x^2 = 0, \tag{18}$$

on ajoutera l'une à l'autre ces équations respectivement multipliées par deux binomes de la forme

$$\alpha + \beta x, \qquad \gamma + \delta x.$$

On trouvera ainsi

$$\lambda + \mu x + \nu x^2 + \rho x^3 = 0, \tag{19}$$

λ, μ, ν, ρ étant des fonctions linéaires et homogènes des variables α, β, γ, δ; puis, en considérant ces variables comme des clefs anastrophiques, on tirera de la formule (19), multipliée par le produit $\mu\nu\rho$,

$$|\lambda\mu\nu\rho| = 0. \tag{20}$$

Cette dernière formule sera précisément l'équation résultante de l'élimination de x entre les équations (18).

En général, pour éliminer x entre deux équations algébriques dont l'une serait du degré m, l'autre du degré n, il suffira d'ajouter entre elles ces équations respectivement multipliées par deux polynomes dont le premier serait du degré $n-1$, le second du degré $m-1$, puis d'égaler à zéro le produit symbolique des coefficients des diverses puissances de x dans l'équation finale obtenue, comme on vient de le dire, en considérant les coefficients que renferment les polynomes multiplicateurs comme autant de clefs anastrophiques.

On peut voir, dans les *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences* pour 1853 [1], d'autres applications de la théorie des clefs sur laquelle nous reviendrons dans d'autres articles.

---

[1] *Œuvres de Cauchy*, série I, t. XII, p. 12 et 21.

FIN DU TOME XIV.

TABLE DES MATIÈRES DU TOME XIV.

FIN DE LA TABLE DES MATIÈRES DU TOME XIV.

PARIS. — IMPRIMERIE GAUTHIER-VILLARS
Quai des Grands-Augustins, 55.
103806

PARIS. — IMPRIMERIE GAUTHIER-VILLARS
Quai des Grands-Augustins, 55
103806-37