NOTE SUR L'EMPLOI

DES

THÉORÈMES RELATIFS AUX VALEURS MOYENNES DES FONCTIONS

DANS L'INTÉGRATION DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES ET AUX DÉRIVÉES PARTIELLES

Supposons d'abord l'inconnue ϖ déterminée en fonction du temps t par une équation différentielle de la forme

$$D_t^2 \varpi = k^2 \varpi, \tag{1}$$

k étant une quantité constante. Si l'on nomme ϖ_0, ϖ_1 les valeurs de ϖ et $D_t\varpi$ correspondant à une valeur nulle de t, l'intégrale générale de l'équation (1) sera

$$\varpi = \frac{e^{kt} + e^{-kt}}{2}\varpi_0 + \frac{e^{kt} - e^{-kt}}{2k}\varpi_1,$$

ou, ce qui revient au même,

$$\varpi = D_t \mathop{\mathrm{M}}_{\alpha=-1}^{\alpha=1} te^{kt\alpha}\varpi_0 + \mathop{\mathrm{M}}_{\alpha=-1}^{\alpha=1} te^{kt\alpha}\varpi_1. \tag{2}$$

Si d'ailleurs la quantité k^2 est la somme des carrés de plusieurs autres quantités $u_1, u_2, \ldots, u_n$, en sorte qu'on ait

$$k^2 = u_1^2 + u_2^2 + \ldots + u_n^2, \tag{3}$$

on pourra dans la formule (2), remplacer l'exponentielle $e^{kt\alpha}$ par une autre dans laquelle l'exposant soit réduit à une fonction linéaire de $u_1, u_2, \ldots, u_n$. En effet, supposons d'abord que n soit un nombre impair. Alors, en désignant par

$$\alpha_1,\quad \alpha_2,\quad \ldots,\quad \alpha_n$$

n variables auxiliaires, et posant

$$(4)\qquad \omega = u_1\alpha_1 + u_2\alpha_2 + \ldots + u_n\alpha_n,\qquad \rho^2 = \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \ldots + \alpha_n^2,$$

on tirera de l'équation (2), combinée avec la formule (21) du précédent Mémoire,

$$(5)\qquad \begin{aligned}\varpi = {} & \frac{\pi^{\frac{1}{2}}}{2\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} D_t \mathop{\mathbf{M}}_{\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n}^{\rho=1} \iota D_\iota^{\frac{n-3}{2}}\left[\iota^{\frac{n-2}{2}} e^{\omega t\sqrt{-1}}\right]\varpi_0 \\ & + \frac{\pi^{\frac{1}{2}}}{2\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \mathop{\mathbf{M}}_{\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n}^{\rho=1} \iota D_\iota^{\frac{n-3}{2}}\left[\iota^{\frac{n-2}{2}} e^{\omega t\sqrt{-1}}\right]\varpi_1,\end{aligned}$$

ι devant être réduit à l'unité, après les différentiations indiquées par la caractéristique D_ι. Si n était pair, ou, ce qui revient au même, si, n étant impair, k^2 était de la forme

$$(6)\qquad k^2 = u_1^2 + u_2^2 + \ldots + u_{n-1}^2,$$

il suffirait, pour revenir au cas précédent, de joindre à la formule (3) l'équation

$$(7)\qquad u_n = 0,$$

en vertu de laquelle la valeur de ω serait réduite à

$$(8)\qquad \omega = u_1\alpha_1 + u_2\alpha_2 + \ldots + u_{n-1}\alpha_{n-1}.$$

Concevons maintenant que, $x, y, z, \ldots$ étant de nouvelles variables indépendantes, k^2 se transforme en une fonction de $D_x, D_y, D_z, \ldots$ entière et du second degré, représentée par $F(D_x, D_y, D_z)$. L'équation (1), ou, en d'autres termes, la formule

$$(9)\qquad D_t^2\varpi = F(D_x, D_y, D_z, \ldots)\varpi,$$

sera une équation aux dérivées partielles, linéaire et du second ordre,

qui déterminera l'inconnue ϖ considérée comme fonction de $x, y, z, \ldots, t$, quand on connaîtra les valeurs initiales de ϖ et $D_t\varpi$. Soient $\varpi_0(x, y, z, \ldots)$, $\varpi_1(x, y, z, \ldots)$ ces valeurs initiales. L'intégrale générale de l'équation (1) ou (9) sera représentée par la formule symbolique

$$(10)\qquad \varpi = D_t \mathop{\mathbf{M}}_{\alpha=-1}^{\alpha=1} t e^{kt\alpha}\varpi_0(x, y, z, \ldots) + \mathop{\mathbf{M}}_{\alpha=-1}^{\alpha=1} t e^{kt\alpha}\varpi_1(x, y, z, \ldots),$$

analogue à l'équation (2). Soient d'ailleurs

$$u = D_x,\qquad v = D_y,\qquad w = D_z,\qquad \ldots.$$

On aura

$$(11)\qquad k^2 = F(u, v, w, \ldots);$$

et, si n désigne le nombre des variables $x, y, z, \ldots$, la valeur de k^2 déterminée par l'équation (11) pourra être généralement réduite à la forme

$$(12)\qquad k^2 = u_1^2 + u_2^2 + \ldots + u_n^2,$$

$u_1, u_2, \ldots, u_n$ étant des fonctions linéaires de $u, v, w, \ldots$, en sorte qu'on aura

$$(13)\qquad \left\{\begin{array}{l} u_1 = a_1 u + b_1 v + c_1 w + \ldots + l_1, \\ u_2 = a_2 u + b_2 v + c_2 w + \ldots + l_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ u_n = a_n u + b_n v + c_n w + \ldots + l_n, \end{array}\right.$$

$a_1, b_1, c_1, \ldots, l_1$; $a_2, b_2, c_2, \ldots, l_2$; $\ldots$; $a_n, b_n, c_n, \ldots, l_n$ étant des coefficients qui seront tous réels si la fonction $F(x, y, z, \ldots)$ est du nombre de celles qui restent positives pour des valeurs quelconques de $x, y, z, \ldots$. Admettons cette dernière hypothèse. Alors, pour déduire de la formule (5) l'intégrale générale de l'équation (1), il suffira de remplacer dans cette formule ϖ_0 et ϖ_1 par $\varpi_0(x, y, z, \ldots)$ et $\varpi_1(x, y, z, \ldots)$. D'autre part, en vertu des formules (13) jointes à la première des équations (4), on aura

$$(14)\qquad \omega = \alpha u + \beta v + \gamma w + \ldots + \lambda,$$

les valeurs de $\alpha, \beta, \gamma, \ldots, \lambda$ étant

$$(15)\qquad \begin{cases} \alpha = a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 + \ldots + a_n\alpha_n, \\ \beta = b_1\alpha_1 + b_2\alpha_2 + \ldots + b_n\alpha_n, \\ \lambda = l_1\alpha_1 + l_2\alpha_2 + \ldots + l_n\alpha_n. \end{cases}$$

Enfin, en désignant par $\varpi(x, y, z, \ldots)$ une fonction arbitraire de x, $y, z, \ldots,$ on aura, en vertu du théorème de Taylor, eu égard à la formule (14),

$$(16)\qquad e^{\omega t\sqrt{\iota}}\varpi(x, y, z, \ldots) = e^{\lambda t\sqrt{\iota}}\varpi(x + \alpha t\sqrt{\iota}, y + \beta t\sqrt{\iota}, \ldots).$$

Donc l'intégrale générale de l'équation (9) sera

$$(17)\qquad \begin{aligned} \varpi = {} & \frac{\pi^{\frac{1}{2}}}{2\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} D_t \underset{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n}{\overset{\rho=1}{\mathbf{M}}} t D_\iota^{\frac{n-3}{2}}\left[\iota^{\frac{n-2}{2}} e^{\lambda t\sqrt{\iota}}\varpi_0(x + \alpha t\sqrt{\iota}, y + \beta t\sqrt{\iota}, \ldots)\right] \\ & + \frac{\pi^{\frac{1}{2}}}{2\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \underset{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n}{\overset{\rho=1}{\mathbf{M}}} t D_\iota^{\frac{n-3}{2}}\left[\iota^{\frac{n-2}{2}} e^{\lambda t\sqrt{\iota}}\varpi_1(x + \alpha t\sqrt{\iota}, y + \beta t\sqrt{\iota}, \ldots)\right], \end{aligned}$$

ι devant être réduit à l'unité après les différentiations indiquées par la caractéristique D_ι.

La formule (17) conduit aisément à la connaissance des lois des phénomènes dont l'étude exige l'intégration d'équations semblables à la formule (9). Supposons, pour fixer les idées, que $x, y, z, \ldots$ représentent des coordonnées d'une ou plusieurs sortes. Supposons encore que l'équation (9) soit homogène, et que, par suite, $l_1, l_2, \ldots, l_n, \gamma$ s'évanouissent. Supposons enfin que les valeurs de l'inconnue ϖ et de sa dérivée soient insensibles au premier instant pour des valeurs de $x, y, z, \ldots$ sensiblement différentes de zéro. Alors, en vertu de la formule (17), la valeur de ϖ ne sera sensible au bout du temps t que pour des valeurs de $x, y, z, \ldots$ qui vérifieront sensiblement les formules

$$(18)\qquad x + \alpha t = 0, \qquad y + \beta t = 0, \qquad z + \gamma t = 0, \qquad \ldots.$$

Soient, d'ailleurs,

$$(19)\qquad \alpha_1 = \mathrm{a}_1\alpha + \mathrm{b}_1\beta + \mathrm{c}_1\gamma + \ldots, \qquad \alpha_2 = \mathrm{a}_2\alpha + \mathrm{b}_2\beta + \mathrm{c}_2\gamma + \ldots,$$

les valeurs de $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ tirées des formules (15). L'équation

$$(20)\qquad \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \ldots + \alpha_n^2 = 1,$$

jointe aux formules (18), (19), donnera

$$(21)\qquad \begin{aligned} & (\mathrm{a}_1 x + \mathrm{b}_1 y + \mathrm{c}_1 z + \ldots)^2 + (\mathrm{a}_2 x + \mathrm{b}_2 y + \mathrm{c}_2 z + \ldots)^2 + \ldots \\ & \qquad + (\mathrm{a}_n x + \mathrm{b}_n y + \mathrm{c}_n z \ldots)^2 = t^2, \end{aligned}$$

et l'équation (21) devra être vérifiée sensiblement, au bout du temps t, par tous les systèmes des valeurs $x, y, z, \ldots$ pour lesquelles l'inconnue ϖ conservera une valeur sensible.

Si λ cessait de s'évanouir, les conclusions auxquelles nous venons de parvenir ne subsisteraient, en général, que pour des valeurs peu considérables de t.

Si la formule (9) se réduit à l'équation du mouvement des fluides élastiques, la formule (17) reproduira l'intégrale connue de cette équation, et la formule (21) sera l'équation de la surface sphérique mobile qui représentera l'onde sonore.

MÉMOIRE

SUR

LES QUANTITÉS GÉOMÉTRIQUES.

La théorie des équivalences algébriques, à laquelle se rapporte un des précédents Mémoires, n'est pas la seule qui puisse être utilement substituée à la théorie des expressions imaginaires. On peut encore, avec avantage, remplacer ces expressions par les *quantités géométriques*, dont l'emploi donne à l'algèbre non seulement une clarté, une précision nouvelle, mais encore une plus grande généralité. Entrons, à ce sujet, dans quelques détails.

La théorie des expressions imaginaires a été, à diverses époques, envisagée sous divers points de vue. Dès l'année 1806, M. l'abbé Buée et M. Argand, en partant de cette idée que $\sqrt{-1}$ est un signe de perpendicularité, avaient donné des expressions imaginaires une interprétation géométrique, contre laquelle des objections spécieuses ont été proposées. Plus tard, M. Argand et d'autres auteurs, particulièrement MM. Français, Faure, Mourey, Vallès, etc., ont publié des recherches [1] qui avaient pour but de développer ou de modifier l'interprétation dont il s'agit. Dans mon *Analyse algébrique*, publiée en 1821, je m'étais contenté de faire voir qu'on peut rendre

[1] Une grande partie des résultats de ces recherches avait été, à ce qu'il paraît, obtenue, même avant le siècle présent et dès l'année 1786, par un savant modeste, M. Henri-Dominique Truel, qui, après les avoir consignés dans divers manuscrits, les a communiqués, vers l'année 1810, à M. Augustin Normand, constructeur de vaisseaux au Havre.

rigoureuse la théorie des expressions et des équations imaginaires, en considérant ces expressions et ces équations comme *symboliques*. Mais, après de nouvelles et mûres réflexions, le meilleur parti à prendre me paraît être d'abandonner entièrement l'usage du signe $\sqrt{-1}$, et de remplacer la théorie des expressions *imaginaires* par la théorie des quantités que j'appellerai *géométriques*, en mettant à profit les idées émises et les notations proposées non seulement par les auteurs déjà cités, mais aussi par M. de Saint-Venant, dans un Mémoire digne de remarque, sur les *sommes algébriques*. C'est ce que j'essaierai d'expliquer dans les paragraphes suivants, qui offriront une sorte de résumé des travaux faits sur cette matière, reproduits dans un ordre méthodique, avec des modifications utiles, sous une forme simple et nouvelle en quelques points.

I. — *Définitions, notations.*

Menons, dans un plan fixe, et par un point fixe O pris pour *origine* ou *pôle*, un axe polaire OX. Soient d'ailleurs r la distance de l'origine O à un autre point A du plan fixe, et p l'angle polaire, positif ou négatif, décrit par un rayon mobile, qui, en tournant autour de l'origine O dans un sens ou dans un autre, passe de la position OX à la position OA.

Nous appellerons *quantité géométrique*, et nous désignerons par la notation r_p le rayon vecteur OA dirigé de O vers A. La longueur de ce rayon, représentée par la lettre r, sera nommée la *valeur numérique* ou le *module* de la quantité géométrique r_p; l'angle p, qui indique la direction du rayon vecteur OA, sera l'*argument* ou l'*azimut* de cette même quantité. Deux quantités géométriques seront *égales* entre elles, lorsqu'elles représenteront le même rayon vecteur. Donc, puisqu'un tel rayon revient toujours à la même position, quand on le fait tourner autour de l'origine dans un sens ou dans un autre, de manière que chacun de ses points décrive une ou plusieurs circonférences du cercle, il est clair que si l'on désigne par k une quantité

entière quelconque, positive, nulle ou négative, et par π le rapport de la circonférence au diamètre, une équation de la forme

$$R_P = r_p$$

entraînera toujours les deux suivantes :

$$R = r, \qquad P = p + 2k\pi,$$

et, par suite, les formules

$$\cos P = \cos p, \qquad \sin P = \sin p.$$

Enfin, nous conviendrons de mesurer les longueurs absolues sur l'axe polaire OX, en sorte qu'on aura identiquement

$$r_0 = r.$$

Quant à la quantité géométrique r_π [1], elle se mesurera aussi bien que r_0, sur l'axe polaire OX, mais en sens inverse, et, par suite, la notation r_π pourra être censée représenter ce qu'on nomme, en algèbre, une *quantité négative*.

Cela posé, la notion de *quantité géométrique* comprendra, comme cas particulier, la notion de *quantité algébrique*, positive ou négative, et, à plus forte raison, la notion de *quantité arithmétique* ou de *nombre*, renfermée elle-même, comme cas particulier, dans la notion de quantité algébrique.

Ajoutons que, pour plus de généralité, on pourra désigner encore, sous le nom de *quantité géométrique*, et à l'aide de la notation r_p, une longueur r mesurée dans le plan fixe donné, à partir d'un point quelconque, mais dans une direction qui forme avec l'axe fixe OX, ou avec un axe parallèle, l'angle polaire p. Alors le point à partir duquel se mesurera la longueur r, et le point auquel elle aboutira, seront l'*origine* et l'*extrémité* de cette longueur.

---

(1) En général, les notations

$$r_p, \quad r_{p+\pi}$$

représenteront deux longueurs mesurées sur la même droite, mais dans des *directions opposées*.

II. — *Sommes, produits et puissances entières des quantités géométriques.*

Après avoir défini les quantités géométriques, il est encore nécessaire de définir les diverses fonctions de ces quantités, spécialement leurs sommes, leurs produits et leurs puissances entières, en choisissant des définitions qui s'accordent avec celles que l'on admet dans le cas où il s'agit simplement de quantités algébriques. Or, cette condition sera remplie, si l'on adopte les conventions que nous allons indiquer.

Étant données plusieurs quantités géométriques,

$$r_p,\quad r'_{p'},\quad r''_{p''},\quad \ldots$$

représentées en grandeur et en direction par les rayons vecteurs

$$\mathrm{OA},\quad \mathrm{OA}',\quad \mathrm{OA}'',\quad \ldots$$

qui joignent le pôle O aux points A, A′, A″, ..., concevons que l'on mène par l'extrémité A du rayon vecteur OA une droite AB égale et parallèle au rayon vecteur OA′, puis, par le point B une droite BC égale et parallèle au rayon vecteur OA″, ...: et joignons le pôle O au dernier sommet K de la portion de polygone OABC...HK construite comme on vient de le dire. On obtiendra le dernier côté OK d'un polygone fermé dont les premiers côtés seront OA, AB, BC, ..., HK. Or, ce dernier côté OK sera ce que nous appellerons la *somme* des quantités géométriques données, et ce que nous indiquerons par la juxtaposition de ces quantités, liées l'une à l'autre par le signe +, comme on a coutume de le faire pour une somme de quantités algébriques. En conséquence, si l'on nomme R la valeur numérique du rayon vecteur OK, et P l'angle polaire formé par ce rayon avec l'axe polaire, on aura

$$R_P = r_p + r'_{p'} + r''_{p''} + \ldots. \tag{1}$$

Observons d'ailleurs que les côtés OA, AB, BC, ..., HK, du polygone ABCD...HK, peuvent être censés représenter eux-mêmes les

quantités géométriques désignées par les notations $r_p, r'_{p'}, r''_{p''}, \ldots$. Donc, *pour obtenir la somme de plusieurs quantités géométriques, il suffit de porter, l'une après l'autre, les diverses longueurs qu'elles représentent, dans les directions indiquées par les divers arguments, en prenant pour origine de chaque longueur nouvelle l'extrémité de la longueur précédente, puis de joindre l'origine de la première longueur à l'extrémité de la dernière, par une droite qui représentera en grandeur et en direction la somme cherchée.*

Si l'on projette orthogonalement les divers côtés du polygone OABC...HK sur l'axe polaire, la projection algébrique du dernier côté OK sera évidemment la somme des projections algébriques de tous les autres, ou, ce qui revient au même, la somme des projections algébriques des rayons vecteurs OA, OA′, OA″, ... Donc l'équation (1) entraînera la suivante :

$$R\cos P = r\cos p + r'\cos p' + r''\cos p'' + \ldots. \tag{2}$$

On trouvera de même en projetant les divers côtés du polygone OABC...HK, non plus sur l'axe polaire, mais sur un axe fixe, perpendiculaire à celui-ci :

$$R\sin P = r\sin p + r'\sin p' + r''\sin p'' + \ldots. \tag{3}$$

Les équations (2) et (3) fournissent le moyen de déterminer aisément le module R et l'argument P de la somme de plusieurs quantités géométriques.

Si l'on considère seulement deux rayons vecteurs OA, OA′, représentés en grandeur et en direction par les quantités géométriques r_p, $r'_{p'}$, la somme de ces dernières sera, en vertu de la définition admise, une troisième quantité géométrique propre à représenter en grandeur et en direction la diagonale OK du parallélogramme construit sur les rayons vecteurs donnés. En d'autres termes, elle sera le troisième côté d'un triangle qui aura pour premier côté le rayon vecteur OA, le second côté AK étant égal et parallèle au rayon vecteur OA′. D'ailleurs, dans ce triangle, le côté OK, représenté en grandeur par le module de la somme $r_p + r'_{p'}$, sera compris entre la somme et la différence des deux autres côtés, représentés en grandeur par les modules r et r'. On peut donc énoncer la proposition suivante :

Théorème I. — *Le module de la somme de deux quantités géométriques est toujours compris entre la somme et la différence de leurs modules.*

Il est bon d'observer que le module de la somme de deux quantités géométriques r'_p, $r'_{p'}$ pourrait atteindre les limites qui lui sont assignées par le théorème précédent, et se réduirait effectivement à la somme ou à la différence des modules r, r', si les rayons vecteurs OA, OA′ étaient dirigés suivant une même droite, dans le même sens ou en sens opposés.

Le théorème I entraîne évidemment le suivant :

Théorème II. — *Le module de la somme de plusieurs quantités géométriques ne peut surpasser la somme de leurs modules.*

On peut, au reste, déduire directement ce théorème II de cette seule considération, que dans un polygone fermé OABC...HK, le dernier côté OK ne peut surpasser la somme de tous les autres.

Ce que nous nommerons le *produit* de plusieurs quantités géométriques, ce sera une nouvelle quantité géométrique qui aura pour module le produit de leurs modules, et pour argument la somme de leurs arguments. Nous indiquerons le produit de plusieurs quantités géométriques,

$$r_p, \quad r'_{p'}, \quad r''_{p''}, \quad \ldots,$$

à l'aide des notations que l'on emploie dans le cas où il s'agit de quantités algébriques, par exemple, en plaçant ces quantités à la suite les unes des autres, sans les faire précéder d'aucun signe. Cela posé, on aura, d'après la définition énoncée,

$$r_p r'_{p'} r''_{p''} \ldots = (r r' r'' \ldots)_{p+p'+p''+\ldots} \tag{4}$$

On sait que, pour multiplier par un facteur donné la somme de plusieurs nombres ou de plusieurs quantités algébriques, il suffit de

multiplier chaque terme de la somme par le facteur dont il s'agit. La somme R_p de plusieurs quantités géométriques $r_p, r'_{p'}, \ldots$ jouit de la même propriété. Pour le prouver, il suffit de voir que l'équation (1) continuera de subsister, si l'on multiplie les divers termes

$$R_p, \quad r_p, \quad r'_{p'}, \quad r''_{p''}, \quad \ldots$$

par un facteur géométrique ρ_{ϖ}. Or, en premier lieu, si le module ρ se réduit à l'unité, il suffira, pour effectuer la multiplication dont il s'agit, d'ajouter l'argument ϖ à chacun des arguments $P, p, p', p'', \ldots$. Mais cette opération revient à faire tourner autour de l'origine chacun des rayons vecteurs

$$R_p, \quad r_p, \quad r'_{p'}, \quad \ldots,$$

et, par suite, le polygone OABC...HK, dont la construction fournit la valeur de R_p, en faisant décrire à chaque rayon vecteur l'angle ϖ; elle laissera donc subsister l'équation (1), qui deviendra

$$R_{P+\varpi} = r_{p+\varpi} + r'_{p'+\varpi} + r''_{p''+\varpi} + \ldots. \tag{5}$$

En second lieu, on pourra, sans altérer les directions des côtés du polygone OABC...HK, le transformer en un polygone semblable, en faisant varier ses côtés dans le rapport de 1 à ρ, et l'on pourra ainsi, de la formule (5), déduire l'équation

$$(R\rho)_{P+\varpi} = (r\rho)_{p+\varpi} + (r'\rho)_{p'+\varpi} + \ldots,$$

qui peut être présentée sous la forme

$$r_{\varpi} R_P = \rho_{\varpi} r_p + \rho_{\varpi} r'_{p'} + \ldots. \tag{6}$$

On peut donc énoncer la proposition suivante :

Théorème III. — *Pour multiplier la somme*

$$r_p + r'_{p'} + \ldots$$

de plusieurs quantités géométriques $r_p, r'_{p'} \ldots$ par le facteur géométrique ρ_{ϖ}, il suffit de multiplier chacun des termes qui la composent par ce même facteur.

Ce théorème une fois établi, on en déduit immédiatement la proposition plus générale dont voici l'énoncé :

Théorème IV. — *Le produit de plusieurs sommes de quantités géométriques est la somme des produits partiels que l'on peut former avec les divers termes de ces mêmes sommes, en prenant un facteur dans chacune d'elles.*

Soit maintenant m un nombre entier quelconque. Le produit de m facteurs égaux à la quantité géométrique r_p est ce que nous appellerons la $m^{\text{ième}}$ *puissance* de cette quantité, et ce que nous indiquerons, suivant l'usage adopté pour les quantités algébriques, par la notation

$$r_p^m.$$

Cela posé, l'équation (4) entraînera évidemment la formule

$$r_p^m = (r^m)_{mp}; \tag{7}$$

et l'on étendra sans peine aux puissances entières de quantités géométriques les propositions connues et relatives aux puissances entières de quantités algébriques. Ainsi, par exemple, en désignant par m, n deux nombres entiers, on aura

$$r_p^m r_p^n = r_p^{m+n}, \tag{8}$$

$$(r_p^m)^n = r_p^{mn}. \tag{9}$$

Ainsi encore, on conclura du théorème IV que la formule de Newton, relative au développement de la puissance entière d'un binome, subsiste dans le cas même où ce binome est la somme de deux quantités géométriques.

Deux quantités géométriques seront dites *opposées* l'une à l'autre, lorsque leur somme sera nulle, et *inverses* l'une de l'autre, lorsque leur produit sera l'unité. D'après ces définitions, la quantité géométrique $r_{p+\pi}$ ou $-r_p$ sera l'opposée de r_p. De plus, si l'on étend les formules (7), (8) au cas même où l'exposant m devient nul ou négatif, on aura identiquement

$$r_p^0 = 1,$$

et la quantité géométrique r_p^{-1} ne sera autre chose que l'inverse de r_p. Pareillement, r_p^{-m} sera l'inverse de r_p^m, et l'on aura

$$r_p^{-m} = (r^{-m})_{-mp}. \tag{10}$$

Suivant l'usage adopté pour les quantités algébriques, une quantité géométrique pourra quelquefois être représentée par une seule lettre.

III. — *Différences, quotients et racines de quantités géométriques.*

Pour les quantités géométriques comme pour les quantités algébriques, la soustraction, la division, l'extraction des racines ne seront autre chose que les opérations inverses de l'addition, de la multiplication, de l'élévation aux puissances. Par suite, les résultats de ces opérations inverses, désignés sous les noms de différences, de quotients, de racines, se trouveront complètement définis. Ainsi, en particulier :

La *différence* entre deux quantités géométriques sera ce qu'il faut ajouter à la seconde pour obtenir la première ;

Le *quotient* d'une quantité géométrique par une autre sera le facteur qui, multiplié par la seconde, reproduit la première ;

La *racine* $n^{\text{ième}}$ d'une quantité géométrique, n étant un nombre entier quelconque, sera un facteur dont la $n^{\text{ième}}$ puissance reproduira la quantité dont il s'agit.

De ces définitions on déduira immédiatement les propositions suivantes :

Théorème I. — *Pour soustraire une quantité géométrique, il suffit d'ajouter la quantité opposée.*

Théorème II. — *Pour diviser par une quantité géométrique, il suffit de multiplier par la quantité inverse.*

Les différences et quotients de quantités géométriques s'indiqueront à l'aide des notations usitées pour les quantités algébriques. Ainsi la différence des deux quantités géométriques R_P, r_p, sera désignée par la notation

$$R - r_p,$$

et le rapport ou quotient qu'on obtient en divisant la première par la seconde, sera exprimé par la notation

$$\frac{R_p}{r_p}.$$

Lorsque, dans une somme ou différence de quantités géométriques, quelques-unes s'évanouiront, on pourra se dispenser de les écrire. Donc, la somme et la différence des quantités géométriques o et r_p pourront être représentées simplement par $+r_p$ et $-r_p$; et l'on aura, eu égard au théorème I,

$$+r = r_p, \qquad -r = r_{p+\pi}.$$

Si, dans la dernière des deux formules précédentes, on pose $p = 0$, elle donnera

$$r_\pi = -r_0 = -r.$$

Soit maintenant ρ_ϖ la racine $n^{\text{ième}}$ de r_p : l'équation

$$\rho_\varpi^n = r_p \tag{1}$$

donnera

$$(\rho^n)_{n\varpi} = r_p,$$

et, par suite (*voir* le § I),

$$\rho^n = r, \qquad n\varpi = p + 2k\pi, \tag{2}$$

k désignant une quantité entière, positive, nulle ou négative; puis on en conclura

$$\rho = r^{\frac{1}{n}}, \qquad \varpi = \frac{p}{n} + \frac{2k\pi}{n}, \tag{3}$$

$$\rho_\varpi = \left(r^{\frac{1}{n}}\right)_{\frac{p}{n}+\frac{2k\pi}{n}}. \tag{4}$$

En vertu de la seconde des formules (3), l'angle polaire

$$\varpi = \frac{p}{n} + \frac{2k\pi}{n}$$

pourra être un terme quelconque de la progression arithmétique dont la raison serait $\frac{2\pi}{n}$, l'un des termes étant $\frac{p}{n}$. Il en résulte qu'une même quantité géométrique r_p offrira n racines du degré n, toutes comprises dans la formule

$$\left(r^{\frac{1}{n}}\right)_{\frac{p}{n}+\frac{2k\pi}{n}}, \tag{5}$$

et représentées par des rayons vecteurs égaux, menés du pôle à n points qui diviseront une même circonférence en parties égales. Ajoutons que, l'expression (5) reprenant exactement la même valeur, lorsqu'on fait croître ou décroître le rapport $\frac{k}{n}$ d'une ou de plusieurs unités, par conséquent, lorsqu'on fait croître ou décroître k de n ou d'un multiple de n, il suffira, pour obtenir les diverses valeurs de cette expression, de prendre successivement pour k les divers termes de la suite

$$0, \quad 1, \quad 2, \quad \ldots, \quad n-1. \tag{6}$$

Si p se réduit à zéro, et r à l'unité, on aura simplement

$$r_p = 1_0 = 1.$$

Alors les diverses valeurs de l'expression (5), réduites à la forme

$$1_{\frac{2k\pi}{n}}, \tag{7}$$

ne seront autre chose que les racines $n^{\text{ièmes}}$ de l'unité, représentées par les divers termes de la suite

$$1_0 = 1, \quad 1_{\frac{2\pi}{n}}, \quad 1_{\frac{4\pi}{n}}, \quad \ldots, \quad 1_{\frac{2(n-1)\pi}{n}}. \tag{8}$$

Il est bon d'observer que, parmi ces termes, deux au plus se réduiront à des quantités algébriques, savoir : le premier terme $1_0 = 1$, et, quand n sera pair, le terme $1_\pi = -1$, que l'on obtiendra en posant $k = \frac{n}{2}$. De plus, comme on aura

$$\frac{2(n-1)\pi}{n} = 2\pi - \frac{2\pi}{n}, \qquad \frac{2(n-2)\pi}{n} = 2\pi - \frac{4\pi}{n}, \qquad \ldots,$$

et, par conséquent,

$$1_{\frac{2(n-1)\pi}{n}} = 1_{-\frac{2\pi}{n}}, \qquad 1_{\frac{2(n-2)\pi}{n}} = 1_{-\frac{4\pi}{n}}, \qquad \ldots,$$

il est clair que les diverses racines de l'unité pourront être représentées non seulement par les divers termes de la suite (8), mais encore, si n est impair, par les termes de la suite

$$(9) \qquad 1_{-\frac{(n-1)\pi}{n}}, \quad \ldots, \quad 1_{-\frac{4\pi}{n}}, \quad 1_{-\frac{2\pi}{n}}, \quad 1, \quad 1_{\frac{2\pi}{n}}, \quad 1_{\frac{4\pi}{n}}, \quad \ldots, \quad 1_{\frac{(n-1)\pi}{n}},$$

et, si n est pair, par les termes de la suite

$$(10) \qquad 1_{-\frac{(n-2)\pi}{n}}, \quad \ldots, \quad 1_{-\frac{4\pi}{n}}, \quad 1_{-\frac{2\pi}{n}}, \quad 1, \quad 1_{\frac{2\pi}{n}}, \quad 1_{\frac{4\pi}{n}}, \quad \ldots, \quad 1_{\frac{(n-2)\pi}{n}}, \quad -1.$$

Si, par exemple, on attribue successivement à n les valeurs

$$2, \quad 3, \quad 4, \quad 5, \quad \ldots,$$

on trouvera pour *racines carrées* de l'unité les deux quantités algébriques

$$-1, \quad +1;$$

pour *racines cubiques* de l'unité, la seule quantité algébrique 1, et les deux quantités géométriques

$$1_{-\frac{2\pi}{3}}, \quad 1_{\frac{2\pi}{3}};$$

pour *racines quatrièmes* de l'unité, les deux quantités algébriques $1, -1$, et les deux quantités géométriques

$$1_{-\frac{\pi}{2}}, \quad 1_{\frac{\pi}{2}},$$

liées entre elles par la formule

$$1_{-\frac{\pi}{2}} = -1_{\frac{\pi}{2}},$$

etc.

Si, dans l'expression (5), on posait $k=0$, cette expression, réduite à

$$\left(r^{\frac{1}{n}}\right)_{\frac{p}{n}},$$

représenterait une seule des racines $n^{\text{ièmes}}$ de r_p. Or, il suffira de multiplier celle-ci par l'une des valeurs de $1_{\frac{2k\pi}{n}}$, c'est-à-dire, par l'une quelconque des racines $n^{\text{ièmes}}$ de l'unité, pour reproduire l'expression (5), propre à représenter l'une quelconque des racines $n^{\text{ièmes}}$ de r_p, attendu que l'on aura généralement

$$\left(r^{\frac{1}{n}}\right)_{\frac{p}{n}+\frac{2k\pi}{n}} = \left(r^{\frac{1}{n}}\right)_{\frac{p}{n}} 1_{\frac{2k\pi}{n}}.$$

On peut donc énoncer la proposition suivante :

Théorème III. — *Pour obtenir les diverses racines $n^{\text{ièmes}}$ d'une quantité géométrique, il suffit de multiplier successivement l'une quelconque d'entre elles par les diverses racines $n^{\text{ièmes}}$ de l'unité.*

IV. — *Fonctions entières. Équations algébriques.*

Nous appellerons *fonction entière* d'une quantité géométrique, une somme de termes proportionnels à des puissances entières et positives de cette quantité. Le degré de la puissance la plus élevée sera le *degré* de la fonction. Cela posé, si l'on désigne par z une quantité géométrique variable, et par Z une fonction de z entière et du degré n, la forme générale de la fonction Z sera

$$(1) \qquad Z = a + bz + cz^2 + \ldots + gz^{n-1} + hz^n,$$

$a, b, c, \ldots, g, h$, désignant des coefficients constants, dont chacun pourra être une quantité géométrique. Ajoutons que l'on pourra encore écrire l'équation (1) comme il suit :

$$(2) \qquad Z = z^n(h + gz^{-1} + \ldots + cz^{-n+2} + bz^{-n+1} + az^{-n}).$$

Si n se réduisait à zéro, la fonction entière Z se réduirait à la constante a. Dans toute autre hypothèse, la fonction Z sera variable avec z, et son module deviendra infini avec le module de z. En effet, posons

$$z = r_p, \qquad Z = R_P;$$

soit, de plus, h le module de la constante h, et concevons que le module r de z vienne à croître indéfiniment; on verra décroître indéfiniment les modules de $z^{-1}, z^{-2}, \ldots, z^{-n}$, et, par suite, le polynome

$$h + gz^{-1} + \ldots + az^{-n}$$

s'approchera indéfiniment de la limite h. Donc, pour de très grandes valeurs de r, le module de ce polynome différera très peu du module h de la constante h, et le module R de Z, eu égard à la formule (2), différera très peu du module de hz^n, c'est-à-dire du produit

$$\mathrm{h}\, r^n.$$

Donc le module R de Z deviendra indéfiniment grand avec le module r de z; et *à une valeur finie du module R de la fonction Z ne pourra jamais correspondre qu'une valeur finie du module r de la variable Z.*

Concevons maintenant que l'on attribue à la variable z une valeur finie, puis à cette valeur finie un accroissement

$$\zeta = \rho_\varpi,$$

dont le module ρ soit très petit; et en désignant cet accroissement par Δz, nommons ΔZ l'accroissement correspondant de la fonction Z. Pour obtenir $Z + \Delta Z$, il suffira de remplacer z par $z + \zeta$, dans le second membre de l'équation (1), où chaque terme pourra être développé, à l'aide de la formule du binome, en une suite ordonnée selon les puissances entières et ascendantes de ζ. En opérant ainsi et réunissant les termes semblables, on obtiendra le développement de $Z + \Delta Z$ en une suite de termes proportionnels aux puissances entières de ζ, d'un degré inférieur ou égal à n. Si, de cette suite, on retranche la fonction Z représentée par le terme indépendant de ζ, on obtiendra un reste qui sera divisible algébriquement par ζ, et qui représentera le développement de ΔZ. Nommons ζ^m la plus petite des puissances de ζ, comprises dans ce développement. Le quotient que produira la division de ΔZ par ζ^m, sera une fonction entière de ζ qui se réduira, pour une valeur nulle de ζ, à une limite finie et différente de zéro.

Soient $\mathfrak{R}_{\mathfrak{p}}$ ce quotient, et $\mathcal{R}_{\mathfrak{T}}$ la limite dont il s'agit. On aura non seulement

$$\zeta^m = (\rho^m)_{m\varpi},$$

mais encore

$$\Delta Z = \mathfrak{R}_{\mathfrak{p}}\zeta^m = (\mathfrak{R}\rho^m)_{\mathfrak{p}+m\varpi},$$

et pour des valeurs décroissantes de ρ, l'argument $\mathfrak{P} + m\varpi$ de ΔZ convergera vers la limite $\mathfrak{T} + m\varpi$. Cela posé, nommons A et B les extrémités de deux rayons vecteurs qui, partant du pôle O, soient représentés en grandeur et en direction par les deux quantités géométriques

$$Z, \quad Z + \Delta Z.$$

La longueur AB, représentée géométriquement par ΔZ, et numériquement par le module $\mathfrak{R}\rho^m$, se mesurera dans une direction qui formera l'angle $\mathfrak{P} + m\varpi$ avec l'axe polaire. Si, d'ailleurs, on fait croître le module ρ à partir de zéro, le point B, d'abord appliqué sur le point A, décrira un arc dont la droite AB sera la corde; et la tangente menée à cet arc par le point A formera, avec l'axe polaire, un angle égal non plus à la somme $\mathfrak{P} + m\varpi$, mais à sa limite $\mathfrak{T} + m\varpi$. Or, évidemment, la distance OB sera plus petite que la distance OA, si le point B est intérieur à la circonférence de cercle décrite du pôle O comme centre avec le rayon OA; et l'on peut ajouter que cette dernière condition sera certainement remplie, pour de très petites valeurs du module ρ, si la tangente menée par le point A à l'arc AB forme un angle obtus avec le prolongement du rayon OA, ou, en d'autres termes, si l'angle polaire Π, déterminé par la formule

$$\Pi = \mathfrak{T} + m\varpi - \mathrm{P}, \tag{3}$$

offre un cosinus négatif; ce qui aura lieu, par exemple, si l'on a $\Pi = \pi$. Mais, après avoir choisi arbitrairement pour Π un angle dont le cosinus soit négatif, on pourra toujours satisfaire à l'équation (3), en attribuant à ϖ une valeur convenable, puisque, pour y parvenir, il suffira de prendre

$$\varpi = \frac{\Pi + \mathrm{P} - \mathfrak{T}}{m}. \tag{4}$$

Donc, en définitive, si le module R de Z, correspondant à une valeur finie de la variable z, n'est pas nul, on pourra modifier cette valeur de manière à faire décroître le module R. En conséquence, la plus petite valeur que pourra prendre le module R ne pourra différer de zéro. Mais quand R s'évanouira, la valeur de z, d'après ce qui a été dit plus haut, devra rester finie, et, puisqu'une telle valeur vérifiera l'équation

$$Z = 0,$$

on pourra énoncer la proposition suivante :

Théorème I. — *Soient z une quantité géométrique variable, et Z une fonction entière de z. On pourra toujours satisfaire, par une ou plusieurs valeurs finies de z, à l'équation*

$$Z = 0. \tag{5}$$

Une valeur finie de z, qui vérifie l'équation (5), est ce qu'on nomme une *racine* de cette équation. Soit z' une telle racine, la fonction Z s'évanouira avec la différence $z - z'$; et si le degré n de cette fonction surpasse l'unité, elle sera le produit de $z - z'$ par une autre fonction entière qui devra s'évanouir à son tour pour une nouvelle valeur z'' de z, et sera, en conséquence, divisible par $z - z''$. En continuant ainsi, on finira par établir la proposition suivante :

Théorème II. — *Soit z une quantité géométrique variable, et*

$$Z = a + bz + cz^2 + \ldots + gz^{n-1} + hz^n$$

une fonction entière de z du degré n. L'équation

$$Z = 0$$

admettra n racines; et si l'on nomme

$$z', \quad z'', \quad \ldots, \quad z^{(n)}$$

ces mêmes racines, on aura identiquement, quel que soit z,

$$Z = h(z - z')(z - z'')\ldots(z - z^{(n)}), \tag{6}$$

en sorte que la fonction z sera le produit de la constante h par les facteurs linéaires

$$z - z', \quad z - z'', \quad \ldots, \quad z - z^{(n)}.$$

Il est bon d'observer que, dans le cas où l'équation (5) se vérifie, le terme hz^n de la fonction z équivaut à la somme de tous les autres, prise en signe contraire. Donc alors le module $\mathrm{h}r^n$ de ce terme doit être égal ou inférieur à la somme des modules de tous les autres; et si l'on nomme b, c, ..., g, h les modules des coefficients $b, c, \ldots, g, h$, on doit avoir

$$\mathrm{a} + \mathrm{b}r + \mathrm{c}r^2 + \ldots + \mathrm{g}r^{n-1} - \mathrm{h}r^n = \text{ ou } > 0. \tag{7}$$

Or, cette dernière condition peut s'écrire comme il suit :

$$\frac{\mathrm{a}}{r^n} + \frac{\mathrm{b}}{r^{n-1}} + \frac{\mathrm{c}}{r^{n-2}} + \ldots + \frac{\mathrm{g}}{r} - \mathrm{h} = \text{ ou } > 0. \tag{8}$$

D'ailleurs, le premier membre de la formule (8) varie, en décroissant, par degrés insensibles, et passe de la limite ∞ à la limite $-\mathrm{h}$, tandis que r croit et varie par degrés insensibles en passant de zéro à l'infini. Donc ce premier membre s'évanouira pour une certaine valeur de r qui vérifiera l'équation

$$\mathrm{a} + \mathrm{b}r + \mathrm{c}r^2 + \ldots + \mathrm{g}r^{n-1} - \mathrm{h}r^n = 0; \tag{9}$$

et si l'on nomme I la racine positive unique de l'équation (9), la condition (7) ou (8) donnera $r < \mathrm{I}$. On peut donc énoncer la proposition suivante :

Théorème III. — *Les mêmes choses étant admises que dans le théorème II, chacune des racines de l'équation proposée offrira un module inférieur à la racine positive unique de l'équation auxiliaire qu'on obtient lorsqu'on remplace, dans la proposée, chaque terme par son module, en affectant du signe — le terme qui renferme la plus haute puissance de l'inconnue, et tous les autres du signe +.*

Lorsque, dans la fonction entière z, tous les termes s'évanouissent, à l'exception des termes extrêmes a et hz^n, la formule (5), réduite à l'*équation binome*

$$a + hz^n = 0, \tag{10}$$

donne

$$z^n = -\frac{a}{h}, \tag{11}$$

et ses diverses racines ne sont autres que les racines $n^{\text{ièmes}}$ du rapport $-\frac{a}{h}$.

V. — *Sur la résolution des équations algébriques.*

Considérons toujours une équation algébrique

$$Z = 0, \tag{1}$$

dont le premier membre

$$Z = a + bz + cz^2 + \ldots + gz^{n-1} + hz^n \tag{2}$$

soit une fonction entière de la variable

$$z = r_p,$$

les coefficients $a, b, c, \ldots, g, h$ pouvant être eux-mêmes des quantités géométriques. Comme on l'a prouvé dans le précédent paragraphe, cette équation admettra généralement n racines, c'est-à-dire que l'on pourra généralement assigner à z, n valeurs pour lesquelles la fonction Z s'évanouira. *Résoudre* l'équation, c'est déterminer ces racines en commençant par l'une quelconque d'entre elles; et la condition à laquelle une méthode de résolution devra satisfaire, sera de fournir chaque racine avec telle approximation que l'on voudra. Or le caractère d'une racine est de réduire à zéro la fonction Z avec son module R; et si des valeurs successives de z correspondent à des valeurs de R qui décroissent sans cesse, en s'approchant indéfiniment de la limite zéro, ces valeurs de z formeront une série dont le terme général convergera vers une racine de l'équation (1). Donc, pour résoudre cette équation, il suffira de faire décroître indéfiniment le module R, et l'on pourra considérer comme appropriée à ce but toute méthode qui permettra de substituer à une valeur finie quelconque de z une autre valeur qui fournisse un module sensiblement plus petit de la fonction Z. D'ailleurs, si, de ces deux valeurs de z, la première n'est pas nulle, on pourra considérer la seconde comme composée de deux parties dont l'une serait précisément la première valeur de z, à laquelle s'ajouterait une valeur particulière d'une variable nouvelle qui aurait commencé par être nulle. Donc on peut admettre comme méthode de résolution tout procédé qui permet d'assigner à une variable z comprise dans une fonction entière Z, une valeur à laquelle corresponde un module R de Z sensiblement inférieur au module du terme constant a, qu'on obtient en posant, dans cette fonction, $z = 0$.

Cela posé, concevons que, la valeur générale de Z étant donnée par l'équation (2), on considère d'abord le cas où le coefficient b de z diffère de zéro. Si la variable z passe d'une valeur nulle à une valeur très peu différente de zéro, la fonction Z passera de la valeur a à une valeur peu différente de a, et représentée approximativement par le binome

$$a + bz.$$

Si, d'ailleurs, le module de a est très petit relativement au module de b, l'équation (1) offrira, pour l'ordinaire, une racine très rapprochée de zéro, et cette racine se confondra sensiblement avec celle de l'équation binome

$$a + bz = 0, \tag{3}$$

ou, ce qui revient au même, avec la quantité géométrique ρ_ϖ déterminée par la formule

$$\rho_\varpi = -\frac{a}{b}. \tag{4}$$

On pourra donc alors prendre ordinairement la quantité ρ_ϖ pour *valeur approchée* de l'une des racines de l'équation (1), et c'est en cela que consiste la *méthode d'approximation linéaire* ou *newtonienne*. Toutefois, la valeur ρ_ϖ attribuée à la variable z ne pourra être admise comme valeur approchée d'une racine qu'autant qu'elle fournira un module R de Z inférieur au module de a.

Si, en posant

$$z = \rho_{\varpi}, \tag{5}$$

on obtient un module de Z supérieur au module de a, on pourra substituer à la valeur précédente de z une autre valeur de la forme

$$z = r_{\varpi}, \tag{6}$$

r étant inférieur à ρ, et convenablement choisi. Effectivement, soient

$$\mathrm{a},\quad \mathrm{b},\quad \mathrm{c},\quad \ldots,\quad \mathrm{g},\quad \mathrm{h}$$

les modules des coefficients

$$a,\quad b,\quad c,\quad \ldots,\quad g,\quad h.$$

Le module de

$$a + bz,$$

qui se réduisait à

$$\mathrm{a} - \mathrm{b}\rho = 0$$

lorsqu'on prenait $z = \rho_{\varpi}$, deviendra

$$\mathrm{a} - \mathrm{b}r > 0, \tag{7}$$

lorsqu'on posera $z = r_{\varpi}$; alors aussi le module de la somme

$$cz^2 + \ldots + gz^{n-1} + hz^n$$

sera, en vertu du théorème II du paragraphe II, égal ou inférieur à la quantité positive

$$\mathrm{c}r^2 + \ldots + \mathrm{g}r^{n-1} + \mathrm{h}r^n,$$

et par suite le module du polynome

$$Z = a + bz + cz^2 + \ldots + gz^{n-1} + hz^n$$

sera égal ou inférieur à la quantité positive

$$\mathrm{a} - \mathrm{b}r + \mathrm{c}r^2 + \ldots + \mathrm{g}r^{n-1} + \mathrm{h}r^n,$$

ou, ce qui revient au même, à la différence

$$\mathrm{a} - r(\mathrm{b} - \mathrm{c}r - \ldots - \mathrm{g}r^{n-2} - \mathrm{h}r^{n-1}). \tag{8}$$

Donc le module R de Z sera inférieur au module a de la constante a, si l'on détermine z à l'aide de l'équation (6), en assujettissant le module r à vérifier non seulement la condition (7), mais encore la

suivante :

$$\mathrm{b} - \mathrm{c}r - \ldots - \mathrm{g}r^{n-2} - \mathrm{h}r^{n-1} > 0. \tag{9}$$

D'ailleurs, si l'on nomme r la racine positive unique de l'équation

$$\mathrm{b} - \mathrm{c}r - \ldots - \mathrm{g}r^{n-2} - \mathrm{h}r^{n-1} = 0, \tag{10}$$

il suffira, pour satisfaire simultanément aux conditions (7) et (9), que le module r devienne inférieur au plus petit des deux nombres ρ et r. En conséquence, on peut énoncer la proposition suivante :

Théorème I. — *Soient*

$$Z = a + bz + cz^2 + \ldots + gz^{n-1} + hz^n$$

une fonction entière de la variable $z = r_p$, *et*

$$\mathrm{a},\quad \mathrm{b},\quad \mathrm{c},\quad \ldots,\quad \mathrm{g},\quad \mathrm{h}$$

les modules des coefficients

$$a,\quad b,\quad c,\quad \ldots,\quad g,\quad h.$$

Supposons, d'ailleurs, que, les coefficients a, b *n'étant pas nuls, on nomme* ρ_{ϖ} *la racine de l'équation binome*

$$a + bz = 0,$$

et r *la racine positive unique de l'équation*

$$\mathrm{b} - \mathrm{c}r - \ldots - \mathrm{g}r^{n-2} - \mathrm{h}r^{n-1} = 0.$$

Pour rendre le module de la fonction Z *inférieur au module de son premier terme* a, *il suffira de poser* $\mathrm{p} = \varpi$, *et d'attribuer au module* r *de* z *une valeur inférieure au plus petit des deux nombres* ρ, r.

Nous avons ici supposé que, dans la fonction Z, le coefficient de z ne se réduisait pas à zéro. Mais ce coefficient et d'autres encore pourraient s'évanouir. Admettons cette hypothèse, ou, ce qui revient au même, supposons la fonction Z déterminée, non plus par l'équation (2), mais par une équation de la forme

$$Z = a + bz^l + cz^m + \ldots + hz^n, \tag{11}$$

les nombres l, m, ..., n formant une suite croissante. Alors, si le module de a était très petit relativement au module de b, on pourrait, dans une première approximation, réduire pour l'ordinaire l'équation algébrique

$$Z = 0$$

à l'équation binome

$$a + b z^l = 0. \tag{12}$$

De plus, en raisonnant comme ci-dessus, on établirait à la place du théorème I, la proposition suivante :

Théorème II. — *Soient*

$$Z = a + b z^l + c z^m + \ldots + h z^n$$

une fonction entière de la variable $z = r_p$, *et*

$$\mathrm{a},\quad \mathrm{b},\quad \mathrm{c},\quad \ldots,\quad \mathrm{h}$$

les modules des coefficients

$$a,\quad b,\quad c,\quad \ldots,\quad h.$$

Supposons, d'ailleurs, que les nombres l, m, ..., n *forment une suite croissante, et que, les coefficients* a, b *n'étant pas nuls, on nomme* ρ_ϖ *l'une quelconque des racines de l'équation binome*

$$a + b z^l = 0, \tag{12}$$

et r *la racine positive unique de l'équation*

$$\mathrm{b} - \mathrm{c}\, r^{m-l} - \ldots - \mathrm{h}\, r^{n-l} = 0. \tag{13}$$

Pour rendre le module de la fonction Z *inférieur au module de son premier terme* a, *il suffira de poser* $p = \varpi$, *et d'attribuer au module* r *de* z *une valeur inférieure au plus petit des deux nombres* ρ, r.

En s'appuyant sur les théorèmes I et II, on pourra, d'une valeur nulle de z, déduire une série d'autres valeurs auxquelles correspondront des valeurs sans cesse décroissantes du module R de la fonction Z. Si ces valeurs décroissantes de R s'approchent indéfini-

ment de zéro, les valeurs correspondantes de z convergeront vers une limite qui sera certainement une racine de l'équation (1). Mais il peut arriver aussi que les valeurs de R successivement obtenues décroissent sans s'approcher indéfiniment de zéro. C'est ce que l'on reconnaîtra sans peine en essayant d'appliquer les théorèmes énoncés à la résolution d'équations très simples, par exemple d'équations du second degré.

En effet, considérons le cas où, Z étant du second degré l'on aurait,

$$Z = a + b z + c z^2. \tag{14}$$

Supposons, d'ailleurs, que a, b, c étant les modules de a, b, c, on ait

$$a = \mathrm{a},\qquad b = -\mathrm{b},\qquad c = \mathrm{c}.$$

La valeur de Z deviendra

$$Z = \mathrm{a} - \mathrm{b} z + \mathrm{c} z^2; \tag{15}$$

et les racines ρ_ϖ, r des équations

$$\mathrm{a} - \mathrm{b} z = 0,\qquad \mathrm{b} - \mathrm{c} r = 0$$

seront

$$\rho_\varpi = \frac{\mathrm{a}}{\mathrm{b}},\qquad \mathrm{r} = \frac{\mathrm{b}}{\mathrm{c}},$$

de sorte qu'on aura encore

$$\rho = \frac{\mathrm{a}}{\mathrm{b}},\qquad \mathrm{r}_\varpi = \mathrm{r}.$$

Si, d'ailleurs, ρ est supérieur à r, ou, ce qui revient au même, si l'on a

$$\mathrm{a}\mathrm{c} - \mathrm{b}^2 > 0; \tag{16}$$

alors, pour obtenir un module de Z inférieur au module a, il suffira, en vertu du théorème I, de poser

$$z = \theta \mathrm{r}, \tag{17}$$

θ désignant un nombre entier inférieur à l'unité, mais qui pourra varier arbitrairement entre les limites 0, 1 ; et comme, en posant

$$z = \theta \mathrm{r} + \zeta, \tag{18}$$

on trouvera

$$Z = \mathrm{a}' - \mathrm{b}'\zeta + c\zeta^2, \tag{19}$$

les valeurs de a', b' étant

(20) $$a' = a - \theta(1-\theta)br, \qquad b' = (1-2\theta)b;$$

il est clair qu'à la valeur zéro de ζ, ou, ce qui revient au même, à la valeur θr de z correspondra un module de Z, inférieur au module a, et représenté par a'. Il y a plus : comme des formules (20), jointes à la condition (16), on tirera

(21) $$a'c - b'^2 > 0,$$

il suffira d'appliquer le théorème I à la valeur générale de Z, que détermine non plus l'équation (15), mais l'équation transformée (19), pour démontrer que le module de Z décroîtra encore si la nouvelle variable ζ passe de la valeur zéro à la valeur

$$\theta\frac{b'}{c} = \theta\Theta r,$$

Θ étant déterminé par la formule

$$\Theta = 1 - 2\theta,$$

ou, ce qui revient au même, si la variable z passe de la valeur θr à la valeur $\theta r(1+\Theta)$. En continuant ainsi, on reconnaitra que, pour obtenir des valeurs décroissantes du module de Z, il suffit de prendre pour valeurs successives de z les divers termes de la suite

(22) $$0, \quad \theta r, \quad \theta r(1+\Theta), \quad \theta r(1+\Theta+\Theta^2), \quad \ldots.$$

Or le terme général de cette suite converge vers la limite

$$\theta r(1+\Theta+\Theta^2+\ldots) = \frac{\theta}{1-\Theta}r = \frac{1}{2}r,$$

et comme, en supposant remplie la condition (16), on trouve, pour $z = \frac{1}{2}r = \frac{1}{2}\frac{b}{c}$,

$$Z = a - \frac{1}{4}\frac{b^2}{c} > \frac{3}{4}a,$$

il est clair que, dans cette hypothèse, la limite vers laquelle converge le terme général de la série (22) ne peut être une racine de l'équation du second degré

(23) $$a - bz + cz^2 = 0.$$

On arriverait aux mêmes conclusions en formant la série des valeurs décroissantes du module R de Z, qui correspondraient aux valeurs successives de la variable z, et l'on reconnaîtrait ainsi que le terme général de cette nouvelle série, au lieu de s'approcher indéfiniment de zéro, converge vers la limite

$$a - (1-\theta)rb(1+\Theta^2+\Theta^4+\ldots) = a - \frac{\theta(1-\theta)}{1-\Theta^2}br = a - \frac{1}{4}br,$$

par conséquent vers la limite $a - \frac{1}{4}\frac{b^2}{c}$, supérieure à $\frac{3}{4}a$.

La limite vers laquelle converge le terme général de la série (22) n'étant pas une racine de l'équation (21), on pourrait être tenté de regarder le calcul de cette limite comme inutile à la résolution de cette équation. Mais cette opinion serait une erreur; car si l'on décompose la variable z en deux parties dont la première soit la limite trouvée, ou en d'autres termes, si l'on pose

$$z = \frac{1}{2}r + \zeta,$$

il suffira de substituer à la variable z la nouvelle variable ζ, pour réduire l'équation (23) à l'équation binome

(24) $$a' + c\zeta^2 = 0,$$

la valeur a' étant

$$a' = a - \frac{1}{4}\frac{b^2}{c}.$$

D'ailleurs, les deux racines de l'équation (24) ne sont autres que les deux racines carrées du rapport $-\frac{a'}{c}$.

Généralement, si, au lieu d'une équation du second degré, on considère une équation de degré quelconque, la série des valeurs de z, successivement déduites des règles que nous avons énoncées, et correspondant à des valeurs décroissantes du module R de Z, pourra converger vers une limite qui, n'étant pas une racine de l'équation donnée, ne fasse pas évanouir le module R. Mais alors il suffira d'attribuer à cette limite un accroissement représenté par une nouvelle variable ζ; puis de substituer ζ à z, pour obtenir, à la place de l'équation donnée, une équation transformée, de laquelle on pourra déduire, par l'application des mêmes règles, une nouvelle série de valeurs de ζ, et par conséquent une nouvelle série de valeurs de z, correspondant à de nouvelles valeurs décroissantes du module R.

En continuant de la sorte, c'est-à-dire en déduisant, s'il est nécessaire, des règles énoncées plusieurs séries de valeurs de z, en déterminant d'ailleurs avec une approximation suffisante les limites vers lesquelles convergent les termes généraux de ces séries, et en transformant l'équation donnée par l'introduction de variables nouvelles qui, ajoutées à ces limites, reproduisent la variable z, on pourra non seulement diminuer sans cesse, mais encore rapprocher indéfiniment de zéro le module R; par conséquent, on finira par résoudre l'équation donnée avec une approximation aussi grande que l'on voudra. Il y a plus : cette méthode de résolution peut encore servir à démontrer l'existence des racines. Lorsqu'on veut l'employer à cet usage, il n'est pas absolument nécessaire de considérer les équations auxiliaires (3) et (10), ou (12) et (13); il suffit d'observer que l'on satisfait aux conditions requises, par exemple aux conditions (7) et (9), en attribuant au module r de z une valeur infiniment petite; et l'on se trouve ainsi ramené au théorème I du paragraphe IV, par une démonstration qui est précisément celle qu'en a donnée M. Argand dans un article que renferme le volume IV des *Annales* de M. Gergonne, pages 135 et suivantes [1]. C'est encore à cette démonstration que se réduit celle que M. Legendre a proposée pour le même théorème dans la seconde édition de la *Théorie des nombres*. D'ailleurs M. Legendre observe qu'en diminuant continuellement le module d'une fonction entière par des opérations semblables, répétées convenablement, on parviendra, en définitive, à une valeur de ce module aussi petite que l'on voudra; il présente, en conséquence, ce décroissement graduel comme

(1) J'ai en ce moment sous les yeux un exemplaire de l'ouvrage dont cet article offre le résumé. Cet ouvrage, qui a pour titre : *Essai sur une manière de représenter les quantités imaginaires dans les constructions géométriques*, porte la date de 1806. Le nom de l'auteur, *Robert Argand, de Genève*, est écrit à la main.

méthode de résolution pour les équations algébriques, et surtout comme propre à fournir une première valeur approchée d'une racine d'une telle équation. Mais le moyen qu'il propose pour conduire le calculateur à ce but laisse beaucoup à désirer, et consiste à faire décroître le module de la fonction entière Z, en attribuant à la variable z une valeur égale au produit d'un coefficient très petit, par la racine de l'équation (3), ou par une racine de l'équation (12). Du reste, il n'explique pas comment on doit s'y prendre pour obtenir un coefficient d'une petitesse telle, que le module Z décroisse effectivement, et ne parle pas de l'équation (10) ou (13), qui permet de répondre à cette question. Ajoutons que, même en ayant égard à l'équation (10) ou (13), et en suivant la méthode ci-dessus tracée, on peut être exposé à un travail long et pénible, si l'on n'a pas soin de choisir convenablement les quantités que la méthode laisse indéterminées; par exemple, le nombre désigné par θ dans la formule (18). Supposons, pour fixer les idées, que l'équation (23) se réduise à la suivante :

$$2 - z + z^2 = 0.$$

Alors, le rapport $\frac{\mathrm{b}}{\mathrm{c}}$ ou r étant réduit à l'unité, le $n^{\text{ième}}$ terme de la série (22) sera

$$\theta(1 + \Theta + \Theta^2 + \ldots + \Theta^{n-2}) = \theta\frac{1 - \Theta^{n-1}}{1 - \Theta} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\Theta^{n-1},$$

et convergera, pour des valeurs croissantes de n, vers la limite $\frac{1}{2}\cdot$ Mais il s'approchera très lentement de cette limite, si l'on attribue au nombre θ une valeur peu différente de zéro, à laquelle correspondra une valeur de Θ peu différente de l'unité. Donc alors on devra prolonger fort loin la série (22), avant d'obtenir un terme sensiblement égal à cette limite; et l'on peut ajouter que les valeurs de R, correspondantes aux valeurs successives de z, décroîtront très lentement. A la vérité, dans le cas présent, on peut déterminer directement la limite cherchée. Mais il n'en sera plus de même quand l'équation donnée sera d'un degré supérieur au second; et généralement le calcul des valeurs successives de z deviendra pénible, si le module R décroît très lentement tandis que l'on passe d'une valeur de z à la suivante : ce qui obligera le calculateur d'effectuer une longue suite d'opérations avant que ce module devienne sensiblement nul.

On évitera ces inconvénients, ou, du moins, on les atténuera notablement si, en appliquant à une fonction entière Z le théorème I ou II, on attribue à la variable z un module r qui, sans dépasser la plus petite des limites indiquées ρ et r, fasse décroître, autant qu'il sera possible, le module de Z. D'ailleurs, lorsque le coefficient de z dans Z étant différent de zéro, on attribue à la variable z, avec l'argument ϖ, un module égal et inférieur au plus petit des nombres ρ, r, le module de Z ne dépasse pas la somme (8), savoir :

$$\mathrm{a} - r(\mathrm{b} - \mathrm{c}r - \ldots - \mathrm{g}r^{n-2} - \mathrm{h}r^{n-1}), \tag{8}$$

dont la valeur minimum, inférieure à a, correspond à la valeur maximum du produit

$$r(\mathrm{b} - \mathrm{c}r - \ldots - \mathrm{g}r^{n-2} - \mathrm{h}r^{n-1}). \tag{25}$$

Enfin, le produit (25), dont les deux facteurs s'évanouissent, le premier quand on pose $r = 0$, le second quand on pose $r = \mathrm{r}$, aura pour *maximum* une valeur positive correspondante à une valeur ι de r, qui vérifiera la condition

$$\iota < \mathrm{r}.$$

Cela posé, la quantité ι, inférieure à r, sera la valeur de r à laquelle correspondra la valeur *minimum* de la somme (8), que le module de Z ne dépassera point si l'on a $r < \rho$. On se trouvera donc naturellement conduit à substituer, dans le théorème I, ι à r; on pourra même réduire le module r de z à celle des deux quantités ρ, ι qui fournira le plus petit module de Z; et l'on obtiendra ainsi, pour la résolution des équations algébriques, la méthode nouvelle et très simple qui fera l'objet de l'article suivant.

MÉTHODE NOUVELLE

POUR LA

RÉSOLUTION DES ÉQUATIONS ALGÉBRIQUES

Soit toujours

$$Z = a + bz + cz^2 + \ldots + gz^{n-1} + hz^n \tag{1}$$

une fonction entière de la variable

$$z = r_p.$$

Comme on l'a expliqué dans le Mémoire précédent, on pourra résoudre une équation algébrique quelconque à l'aide de tout procédé qui fournira pour la variable z une valeur à laquelle correspondra un module R de la fonction Z, sensiblement inférieur au module a du premier terme a.

Cela posé, considérons d'abord le cas où, la valeur de Z étant donnée par l'équation (1), le coefficient b de z diffère de zéro. Alors une méthode de résolution très simple pourra évidemment se déduire du théorème que nous allons énoncer.

Théorème I. — *Soient*

$$Z = a + bz + cz^2 + \ldots + gz^{n-1} + hz^n \tag{1}$$

une fonction entière de la variable $z = r_p$, et

$$\mathrm{a},\ \mathrm{b},\ \mathrm{c},\ \ldots,\ \mathrm{g},\ \mathrm{h},$$

les modules des coefficients

$$a,\ b,\ c,\ \ldots,\ g,\ h.$$

Supposons d'ailleurs que, les coefficients a, b n'étant pas nuls, on nomme ρ_ϖ la racine de l'équation binome

$$a + bz = 0, \tag{2}$$

et τ la valeur de r pour laquelle le produit

$$r(\mathrm{b} - \mathrm{c}r - \ldots - \mathrm{g}r^{n-2} - \mathrm{h}r^{n-1}) \tag{3}$$

devient un maximum, *ou, ce qui revient au même, la racine positive unique de l'équation*

$$\mathrm{b} - 2\mathrm{c}r - \ldots - (n-1)\mathrm{g}r^{n-2} - n\mathrm{h}r^{n-1} = 0. \tag{4}$$

Pour rendre le module de la fonction Z inférieur au module de son premier terme a, il suffira de réduire ce module R à la plus petite des deux valeurs qu'on obtient quand on pose successivement

$$z = \rho_\varpi, \qquad z = \tau_\varpi.$$

Démonstration. — Lorsque, l'argument de z étant égal à ϖ, le module de z est égal ou inférieur à ρ, le module du binome $a + bz$ se réduit à la différence

$$\mathrm{a} - \mathrm{b}r;$$

par conséquent, le module de Z ne surpasse pas la somme

$$\mathrm{a} - \mathrm{b}r + \mathrm{c}r^2 + \ldots + \mathrm{g}r^{n-1} + \mathrm{h}r^n. \tag{5}$$

D'autre part, le produit (3), qui croîtra en passant d'une valeur nulle à sa valeur maximum, tandis que r croîtra depuis zéro jusqu'à τ, sera toujours positif dans cet intervalle. Donc, pour $r =$ ou $< \tau$, on aura

$$\mathrm{c}r^2 + \ldots + \mathrm{g}r^{n-1} + \mathrm{h}r^n < \mathrm{b}r. \tag{6}$$

Or il résulte immédiatement de cette dernière formule que, si l'on réduit le module r au plus petit des deux nombres ρ, τ, la somme (5), et à plus forte raison le module R de Z, offriront des valeurs inférieures au module a. Donc le plus petit des modules de Z, correspondant aux valeurs ρ_ϖ, τ_ϖ de z, sera certainement inférieur au module a.

Corollaire. — Il est bon d'observer que, si l'on considère le produit (3) comme fonction de r, ce produit, qui croît toujours avec r quand on fait varier r entre les limites 0, τ, offrira dans cet intervalle une dérivée toujours positive. Donc, pour $r < \tau$, on aura toujours

$$\mathrm{b} - 2\mathrm{c}r - \ldots - (n-1)\mathrm{g}r^{n-1} - n\mathrm{h}r^{n-1} > 0,$$

ou, ce qui revient au même,

$$\mathrm{b}r - 2\mathrm{c}r^2 - \ldots - (n-1)\mathrm{g}r^{n-1} - n\mathrm{h}r^n > 0;$$

puis on en conclura

$$\mathrm{b}r - \mathrm{c}r^2 - \ldots - \mathrm{g}r^{n-1} - \mathrm{h}r^n > \mathrm{c}r^2 + \ldots + (n-2)\mathrm{g}r^{n-1} + (n-1)\mathrm{h}r^n. \tag{7}$$

Or, en vertu de cette dernière formule, qui entraîne évidemment avec elle la condition (6), le module a surpassera la somme (5) d'une quantité supérieure au nombre α déterminé par la formule

$$\alpha = \mathrm{c}r^2 + \ldots + (n-2)\mathrm{g}r^{n-1} + (n-1)\mathrm{h}r^n. \tag{8}$$

Donc, par suite, le module R de Z deviendra inférieur à la différence $\mathrm{a} - \alpha$, si l'on pose $z = r_\varpi$ en prenant pour r le plus petit des deux nombres ρ, τ; et, à plus forte raison, si l'on réduit le module R à la plus petite des deux valeurs qu'il acquiert quand on pose successivement $z = \rho_\varpi$, $z = \tau_\varpi$.

Ajoutons que le nombre α ne s'évanouira jamais, si ce n'est dans le cas particulier où, les coefficients $c, \ldots, g, h$ s'évanouissant tous simultanément, le polynome Z se trouverait réduit au binome $a + bz$. D'ailleurs, dans ce cas particulier, l'équation algébrique $Z = 0$ se réduirait précisément à l'équation binome $a + bz = 0$, dont la racine est $z = \rho_\varpi = -\frac{a}{b}$.

Considérons maintenant le cas où dans la fonction Z, le coefficient de z s'évanouirait; ou, ce qui revient au même, supposons cette fonction déterminée, non plus par la formule (1), mais par une équation de la forme

$$Z = a + bz^l + cz^m + \ldots + hz^n.$$

Alors, au théorème I, on pourra substituer la proposition suivante :

Théorème II. — *Soient*

$$(9) \qquad Z = a + bz^l + cz^m + \ldots + hz^n,$$

une fonction entière de la variable $z = r_p$, *et*

$$\mathrm{a}, \quad \mathrm{b}, \quad \mathrm{c}, \quad \ldots, \quad \mathrm{h},$$

les modules des coefficients

$$a, \quad b, \quad c, \quad \ldots, \quad h.$$

Supposons d'ailleurs que les nombres $l, m, \ldots, n$ *forment une suite croissante, et que, les coefficients* a, b, *n'étant pas nuls, on nomme* ρ_ϖ, *l'une quelconque des racines de l'équation binome*

$$(10) \qquad a + bz^l = 0.$$

Enfin, soit ι *la valeur de* r, *pour laquelle le produit*

$$(11) \qquad r^l(b - cr^{m-l} - \ldots - hr^{n-l})$$

devient un maximum, *ou, ce qui revient au même, la racine positive unique de l'équation*

$$(12) \qquad l\mathrm{b} - m\mathrm{c}r^{m-l} - \ldots - n\mathrm{h}r^{n-l} = 0.$$

Pour rendre le module de la fonction Z *inférieur au module de son premier terme* a, *il suffira de réduire ce module à la plus petite des deux valeurs qu'il obtient quand on pose successivement*

$$z = \rho_\varpi, \qquad z = \iota_\varpi.$$

Démonstration. — Lorsque, l'argument de z étant égal à ϖ, le module de z est égal ou inférieur à ρ, le module du binome $a + bz^l$ se réduit à la différence

$$\mathrm{a} - \mathrm{b}r^l;$$

par conséquent, le module de Z ne surpasse pas la somme

$$(13) \qquad \mathrm{a} - \mathrm{b}r^l + \mathrm{c}r^m + \ldots + \mathrm{h}r^n.$$

D'autre part, le produit (11), qui croîtra en passant d'une valeur nulle à sa valeur maximum, tandis que r croîtra depuis zéro jusqu'à ι, sera toujours positif dans cet intervalle. Donc, pour $r =$ ou $< \iota$, on aura

$$(14) \qquad \mathrm{c}r^m + \ldots + \mathrm{h}r^n < \mathrm{b}r^l.$$

Or, il résulte immédiatement de cette dernière formule que, si l'on réduit le module r au plus petit des deux nombres ρ, ι, la somme (13) et à plus forte raison le module de Z, offriront des valeurs inférieures au module a. Donc le plus petit des modules de Z correspondants aux valeurs ρ_ϖ, ι_ϖ de z, sera certainement inférieur au module a.

Corollaire. — Il est bon d'observer que, si l'on considère le produit (11) comme une fonction de r, ce produit, qui croît toujours avec r entre les limites 0, ι, offrira dans cet intervalle une dérivée toujours positive. Donc, pour $r < \iota$, on aura toujours

$$(15) \qquad l\mathrm{b}r^{l-1} - m\mathrm{c}r^{m-1} - \ldots - n\mathrm{h}r^{n-1} > 0,$$

ou, ce qui revient au même,

$$l\mathrm{b}r^l - m\mathrm{c}r^m - \ldots - n\mathrm{h}r^n > 0;$$

puis on en conclura

$$(16) \qquad \mathrm{b}r^l - \mathrm{c}r^m - \ldots - \mathrm{h}r^n > \left(\frac{m}{l} - 1\right)\mathrm{c}r^m + \ldots + \left(\frac{n}{l} - 1\right)\mathrm{h}r^n.$$

Or, en vertu de cette dernière formule, qui entraine évidemment avec elle la condition (14), le module a surpassera la somme (13) d'une quantité supérieure au nombre α déterminé par la formule

$$(17) \qquad \alpha = \left(\frac{m}{l} - 1\right)\mathrm{c}r^m + \ldots + \left(\frac{n}{l} - 1\right)\mathrm{h}r^n.$$

Donc, par suite, le module R de Z deviendra inférieur à la quantité $\mathrm{a} - \alpha$, si l'on pose $z = r_\varpi$, en prenant pour r le plus petit des deux nombres ρ, ι, et à plus forte raison si l'on réduit le module R à la plus petite des deux valeurs qu'il acquiert quand on pose successivement $z = \rho_\varpi$, $z = \iota_\varpi$. Ajoutons que le nombre α ne s'évanouira jamais, si ce n'est dans le cas particulier où, les coefficients $c, \ldots, g, h$ s'évanouissant tous simultanément, le polynome Z se trouverait réduit au binome $a + bz^l$. D'ailleurs dans ce cas particulier, l'équation $Z = 0$ se réduirait précisément à l'équation binome $a + bz^l = 0$, dont les racines se confondent avec les racines de degré l du rapport $-\frac{a}{b}$, l'une d'elles étant ρ_ϖ.

L'application du théorème I ou II aux fonctions entières, qui représentent les premiers membres d'une équation algébrique et de ses transformées successives, fournit, pour la résolution de cette équation, une méthode et des formules précises qui ne renferment plus de quantités indéterminées et arbitraires, analogues au nombre θ du Mémoire précédent. A la vérité, pour déduire cette méthode des principes exposés dans le Mémoire précédent, il suffit d'attribuer aux indéterminées dont il s'agit des valeurs spéciales, en prenant, par exemple, $\theta = \frac{1}{2}$. Mais comme ces valeurs spéciales sont précisément celles qui font décroître plus rapidement le module de la fonction entière donnée, ou, du moins, certains nombres que ce module ne dépasse point, elles seront aussi généralement celles qui rendront les approximations plus rapides.

Supposons, pour fixer les idées, que l'on applique la nouvelle méthode à la formule (23) de la page 177 [1], c'est-à-dire à l'équation du second degré

$$\mathrm{a} - \mathrm{b}z + \mathrm{c}z^2 = 0,$$

en supposant toujours

$$\mathrm{ac} - \mathrm{b}^2 > 0.$$

On trouvera

$$\rho_\varpi = \frac{\mathrm{a}}{\mathrm{b}}, \qquad \iota_\varpi = \iota = \frac{1}{2}\frac{\mathrm{b}}{\mathrm{c}}, \qquad \alpha = \mathrm{c}\iota^2;$$

puis, en prenant

$$z = \iota + \zeta,$$

et faisant, pour abréger, $\mathrm{a}' = \mathrm{a} - \alpha$, on obtiendra immédiatement la transformée

$$\mathrm{a}' + \mathrm{c}\zeta^2 = 0,$$

dont les deux racines coïncident avec les racines carrées du rapport $-\frac{\mathrm{a}'}{\mathrm{c}}$. On retrouvera donc aussi l'équation (24) de la page 199; et, ce qu'il importe de remarquer, on aura été conduit à cette équation, non plus par la recherche de la limite vers laquelle converge le terme général d'une série formée avec des valeurs successives de la variable z, mais par la détermination d'une seule valeur de cette même variable.

(1) *Voir* ce Tome, p. 198.

S'il arrivait que la fonction Z offrît, à la suite de son premier terme a, un ou plusieurs autres termes dont les coefficients fussent sensiblement nuls, on pourrait, en se servant du théorème I ou II pour déterminer un module de Z inférieur à celui de a, faire abstraction de ces mêmes termes, sauf à constater ensuite que le module trouvé de Z, quand on a égard aux termes omis, reste inférieur au module de a. Cette remarque permet d'employer la nouvelle méthode à la résolution d'une équation numérique donnée, dans le cas même où l'application rigoureuse des théorèmes I et II aux premiers membres des transformées de cette équation ferait décroître très lentement, après un certain nombre d'opérations, les modules de ces premiers membres.

On sait que l'on peut toujours ramener la résolution d'une équation algébrique au cas où cette équation n'offre pas de racines égales. D'ailleurs, lorsque à l'aide de la nouvelle méthode on sera parvenu à une valeur très approchée ω d'une racine simple d'une équation algébrique

$$Z = 0,$$

alors, en posant

$$z = \omega + \zeta, \tag{18}$$

on transformera Z en une fonction de ζ dans laquelle le terme constant sera sensiblement nul, tandis que le coefficient de ζ différera sensiblement de zéro. Quant au coefficient de ζ^n, il se réduira précisément au coefficient de z^n dans la fonction Z. Donc, dans l'hypothèse admise, on trouvera

$$Z = \mathfrak{a} + \mathfrak{b}\zeta + \mathfrak{c}\zeta^2 + \ldots + \mathfrak{g}\zeta^{n-2} + h\zeta^n, \tag{19}$$

$\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \ldots, \mathfrak{g}$ désignant de nouveaux coefficients dont le premier $\mathfrak{a}$ offrira un module très petit, tandis que le module de $\mathfrak{b}$ différera sensiblement de zéro. Donc alors, en vertu du théorème I, il faudra, pour rendre le module de Z inférieur au module de $\mathfrak{a}$, poser

$$\mathfrak{a}+\mathfrak{b}\zeta=0, \tag{20}$$

ou, ce qui revient au même,

$$\zeta=-\frac{\mathfrak{a}}{\mathfrak{b}}; \tag{21}$$

et, par suite, la nouvelle valeur approchée de la racine simple qui différait peu de ω, sera celle que détermine la formule

$$z=\omega-\frac{\mathfrak{a}}{\mathfrak{b}}. \tag{22}$$

Ainsi *la nouvelle méthode, appliquée à la résolution d'une équation algébrique qui n'offre pas de racines égales, finira par coïncider, après un certain nombre d'opérations, avec la méthode linéaire ou newtonienne.*

ADDITION AU MÉMOIRE PRÉCÉDENT

La méthode que nous avons appliquée dans le Mémoire précédent à la réduction du module d'une fonction entière de la variable z, peut subir une modification qu'il est bon de connaitre, et que nous allons indiquer.

Soient toujours

$$Z=a+bz+cz^2+\ldots+gz^{n-1}+hz^n=R_p$$

une fonction entière de la variable $z=r_p$, et

$$\mathrm{a},\quad \mathrm{b},\quad \mathrm{c},\quad \ldots,\quad \mathrm{g},\quad \mathrm{h}$$

les modules des coefficients

$$a,\quad b,\quad c,\quad \ldots,\quad g,\quad h.$$

Soit encore

$$\rho_\varpi=-\frac{a}{b}$$

la racine unique de l'équation linéaire

$$a+bz=0,$$

en sorte qu'on ait

$$\rho=\frac{\mathrm{a}}{\mathrm{b}},$$

et posons

$$Q=c+\ldots+gz^{n-3}+hz^{n-2},$$
$$\mathrm{C}=\mathrm{c}+\ldots+\mathrm{g}\rho^{n-3}+\mathrm{h}\rho^{n-2}.$$

On aura

$$Z=a+bz+Qz^2. \tag{1}$$

Cela posé, lorsqu'on prendra $z=r_\varpi$, le module r étant égal ou inférieur à ρ, on obtiendra évidemment un module de Q égal ou inférieur à C, et, par suite, un module de Z égal ou inférieur à la somme

$$\mathrm{a} - \mathrm{b}r + \mathrm{C}r^2. \tag{2}$$

Or, la valeur minimum de cette somme, savoir,

$$\mathrm{a} - \frac{1}{4}\frac{\mathrm{b}^2}{\mathrm{C}},$$

est inférieure, quand b ne s'évanouit pas, au module a, et correspond à un module ι de z déterminé par la formule

$$\iota = \frac{\mathrm{b}}{2\mathrm{C}}.$$

Donc, si l'on a $\iota < \rho$, ou, ce qui revient au même,

$$\mathrm{C} > \frac{1}{2}\frac{\mathrm{b}^2}{\mathrm{a}}, \tag{3}$$

il suffira de poser $\zeta = \iota_{\varpi}$ pour obtenir un module de Z inférieur à a. Si, au contraire, on a $\iota > \rho$, ou, ce qui revient au même,

$$\mathrm{C} < \frac{1}{2}\frac{\mathrm{b}^2}{\mathrm{a}},$$

il suffira de poser $z = \rho_{\varpi}$ pour obtenir un module de Z inférieur à

$$\mathrm{C}\rho^2 = \mathrm{C}\frac{\mathrm{a}^2}{\mathrm{b}^2},$$

et, par conséquent, à

$$\frac{1}{2}\mathrm{a}.$$

Ainsi, en résumé, on peut énoncer la proposition suivante :

Théorème I. — *Soit*

$$Z = a + bz + cz^2 + \ldots + gz^{n-1} + hz^n$$

une fonction entière de la variable z. Soient encore a, b, c, ..., g, h *les modules des coefficients a, b, c, ..., g, h [a et b étant supposés distincts de zéro], et ρ_{ϖ} la racine unique de l'équation linéaire*

$$a + bz = 0;$$

enfin, prenons

$$\mathrm{C} = \mathrm{c} + \ldots + \mathrm{g}\rho^{n-3} + \mathrm{h}\rho^{n-2}$$

et

$$\iota = \frac{\mathrm{b}}{2\mathrm{C}}.$$

Il suffira de poser $\zeta = \rho_{\varpi}$ si l'on a $\rho < \iota$, et $\zeta = \iota_{\varpi}$ si l'on a $\rho > \iota$, pour abaisser le module R de Z au-dessous d'une limite inférieure au module a *de a; savoir, dans le premier cas, au-dessous de la limite* $\frac{1}{2}\mathrm{a}$, *et, dans le second cas, au-dessous de la limite* $\mathrm{a} - \frac{\mathrm{b}^2}{4\mathrm{C}}$.

Il pourrait arriver qu'un ou plusieurs des coefficients b, c, ... se réduisent à zéro. Alors, à l'aide de raisonnements semblables à ceux dont nous avons fait usage, on obtiendrait, à la place du théorème I, la proposition suivante :

Théorème II. — *Soit*

$$Z = a + bz^l + cz^m + \ldots + hz^n$$

une fonction entière de la variable z. Soient encore a, b, c, ..., h *les modules des coefficients a, b, c, ..., h, et ρ_{ϖ} l'une des racines de l'équation binome*

$$a + bz^l = 0;$$

enfin, prenons

$$\mathrm{C} = \mathrm{c} + \ldots + \mathrm{h}\rho^{n-m}$$

et

$$\iota = \left(\frac{l}{m}\frac{\mathrm{b}}{\mathrm{C}}\right)^{\frac{1}{m-l}}.$$

Il suffira de poser $z = \rho_{\varpi}$, si l'on a $\rho < \iota$, et $z = \iota_{\varpi}$, si l'on a $\rho < \iota$, pour abaisser le module R de Z au-dessous d'une limite inférieure au module a *de a, savoir, dans le premier cas, au-dessous de la limite* $\frac{l}{m}\mathrm{a}$ [1], *et, dans le second cas, au-dessous de la limite* $\mathrm{a} - \frac{m-1}{m}\mathrm{b}\iota^l$,

---

[1] La limite dont il s'agit se présente d'abord sous la forme $\mathrm{C}\rho^m$; mais l'équation

$$\mathrm{b}l = m\mathrm{C}\iota^{m-l}$$

Les deux théorèmes que nous venons d'établir fournissent, pour la réduction du module d'une fonction entière quelconque, et, par suite, pour la résolution des équations de tous les degrés, une méthode facilement applicable, puisqu'en la suivant, on a seulement à résoudre des équations linéaires ou des équations binomes. Ajoutons qu'après un certain nombre d'opérations, cette méthode nouvelle finit toujours par coïncider avec la méthode linéaire ou newtonienne, quand on a réduit, comme on peut toujours le faire, l'équation proposée à n'avoir que des racines inégales entre elles.

---

jointe à la condition $\rho < \iota$, donne

$$\mathrm{b}\,l > m\,\mathrm{C}\rho^{m-l},$$

et, comme on a d'ailleurs

$$\mathrm{a} = \mathrm{b}\rho^{l},$$

on tire des deux dernières formules, combinées entre elles par voie de multiplication,

$$\mathrm{a}\,l > m\,\mathrm{C}\rho^{m};$$

par conséquent,

$$\mathrm{C}\rho^{m} < \frac{l}{m}\,\mathrm{a}.$$

MÉMOIRE

SUR

QUELQUES DÉFINITIONS GÉNÉRALEMENT ADOPTÉES

EN ARITHMÉTIQUE ET EN ALGÈBRE

Comme je l'ai remarqué dans l'*Analyse algébrique*, quelques définitions généralement adoptées en arithmétique et en algèbre, spécialement la définition d'un *produit* et la définition d'une *puissance*, ne peuvent être bien comprises qu'à l'aide de développements et d'explications qui font disparaître ce que ces définitions offrent, au premier abord, de vague et d'indéterminé. En effet, dire que, *pour obtenir un produit, il faut opérer sur le multiplicande, comme on opère sur l'unité pour obtenir le multiplicateur*, c'est donner de ce produit une définition qui, pour devenir claire et précise, exige que l'on explique quelles sont les opérations à effectuer.

D'autre part, comme Euler l'a montré, l'arithmétique et l'algèbre s'appuient sur deux notions fondamentales, qui se présentent naturellement à l'esprit, dès que l'on veut comparer deux grandeurs entre elles, savoir, les notions de *rapport arithmétique* et de *rapport géométrique*.

En effet, deux grandeurs de même espèce peuvent être comparées entre elles sous deux points de vue différents.

La mesure de la seconde grandeur comparée à la première, est un *nombre* qui représente le *rapport* [1] *géométrique* de l'une à l'autre. L'*inverse* de ce nombre ou de ce rapport est la mesure de la première

---

[1] Lorsque le mot *rapport* est employé seul, il désigne généralement, comme l'on sait, un rapport géométrique.

grandeur comparée à la seconde. Lorsque les deux grandeurs sont égales, leur rapport direct ou indirect se réduit à l'unité de nombre.

L'augmentation ou la diminution qu'il faut faire subir à la première grandeur pour obtenir la seconde, est une *quantité positive* ou *négative* qui représente le *rapport arithmétique* de la seconde à la première. La *quantité opposée* est la diminution ou l'augmentation qu'il faut faire subir à la seconde grandeur pour obtenir la première. Lorsque deux grandeurs sont égales, leur rapport arithmétique est une grandeur *nulle*, dont la mesure est le nombre *zéro*.

Ces notions de rapport arithmétique et de rapport géométrique étant une fois admises, les quatre opérations fondamentales de l'arithmétique et de l'algèbre, savoir, l'addition, la soustraction, la multiplication, la division, peuvent être aisément définies en termes clairs et précis. En effet, on peut dire que la *soustraction* et la *division* se bornent à déterminer les rapports *arithmétique* et *géométrique* de deux grandeurs, l'*addition* et la *multiplication*, à déterminer l'une des grandeurs, quand on connait l'autre avec le rapport arithmétique ou géométrique de l'une à l'autre.

On peut aussi, de la notion de rapport arithmétique ou géométrique, passer immédiatement, comme l'on sait, à celle des proportions et des progressions, puis à la notion des puissances des nombres et de leurs degrés ou exposants. Les définitions et les théorèmes que l'on obtient alors étant bien connus, je me bornerai à les rappeler en peu de mots.

Une *proportion arithmétique* ou *géométrique* n'est autre chose que l'*égalité de deux rapports arithmétiques* ou *géométriques*.

Une *progression arithmétique* ou *géométrique* est une suite dans laquelle le rapport arithmétique ou géométrique de chaque terme au précédent, se réduit à un nombre ou à une quantité constante, que l'on nomme le *rapport* ou la *raison* de la progression dont il s'agit.

De la définition même des progressions arithmétiques et géométriques, on déduit immédiatement les propositions suivantes :

Théorème I. — *Dans toute progression arithmétique dont un terme se réduit à zéro, le terme suivant est la raison même de la progression. De plus, le rapport arithmétique de deux termes est encore un terme de la progression; et, pour obtenir le rapport arithmétique d'un terme quelconque à l'un des termes précédents, il suffit d'ajouter la raison à elle-même autant de fois qu'il y a d'unités dans le nombre des termes intermédiaires.*

Théorème II. — *Dans toute progression géométrique dont un terme se réduit à l'unité, le terme suivant est la raison même de la progression. De plus, le rapport géométrique de deux termes est encore un terme de la progression; et, pour obtenir le rapport géométrique d'un terme quelconque à l'un des termes précédents, il suffit de multiplier la raison par elle-même autant de fois qu'il y a d'unités dans le nombre des termes intermédiaires.*

De ces deux théorèmes on tire encore le suivant :

Théorème III. — *Étant données une progression arithmétique dont un terme se réduit à zéro, et une progression géométrique dont un terme se réduit à l'unité, si l'on fait correspondre aux termes de l'une les termes de l'autre, de telle sorte qu'au terme zéro de la progression arithmétique, corresponde le terme* 1 *de la progression géométrique, alors le rapport arithmétique entre deux termes de la progression arithmétique et le rapport géométrique entre les deux termes correspondants de la progression géométrique, seront deux nouveaux termes qui appartiendront respectivement aux deux progressions indéfiniment prolongées, et qui correspondront encore l'un à l'autre.*

Concevons, en particulier, que, la raison de la progression arithmétique étant réduite à l'unité, la raison de la progression géométrique soit une quantité positive représentée par la lettre A. Les divers termes de la progression arithmétique se réduiront aux quantités entières

$$\ldots,\quad -3,\quad -2,\quad -1,\quad 0,\quad 1,\quad 2,\quad 3,\quad \ldots, \tag{1}$$

et les termes correspondants de la progression géométrique seront

$$\ldots,\quad \frac{1}{AAA},\quad \frac{1}{AA},\quad \frac{1}{A},\quad 1,\quad A,\quad AA,\quad AAA,\quad \ldots. \tag{2}$$

Alors aussi, n étant l'un quelconque des termes de la progression arithmétique, le terme correspondant de la progression géométrique sera ce que l'on nomme la *puissance entière* de A, du *degré* marqué par l'*exposant* n, et ce que l'on désigne par la notation A^n. Cela posé, on aura non seulement

$$A^0 = 1, \tag{3}$$

mais encore

$$\ldots,\quad A^1 = A,\quad A^2 = AA,\quad A^3 = AAA,\quad \ldots, \tag{4}$$

et

$$\ldots,\quad A^{-1} = \frac{1}{A},\quad A^{-2} = \frac{1}{AA},\quad A^{-3} = \frac{1}{AAA},\quad \ldots \tag{5}$$

En vertu des formules (4) et (5), si n est positif et représente en conséquence un nombre entier, la $n^{\text{ième}}$ puissance de A, représentée par la notation A^n, ne sera autre chose que le produit de n facteurs égaux à A, et l'on aura, de plus,

$$A^{-n} = \frac{1}{A^n}.$$

Ajoutons que, si m, n représentent deux quantités entières quelconques, on aura, en vertu du troisième théorème,

$$\frac{A^m}{A^n} = A^{m-n}. \tag{6}$$

Donc le *rapport géométrique de deux puissances entières de* A *est encore une puissance entière dont l'exposant se réduit au rapport arithmétique des exposants des deux premières.*

Supposons maintenant que, n étant un nombre entier quelconque, on choisisse le nombre a de manière à vérifier l'équation

$$a^n = A; \tag{7}$$

alors a sera ce que l'on nomme la *racine* $n^{\text{ième}}$ de A, et ce que l'on représente par la notation $\sqrt[n]{A}$. Posons d'ailleurs pour abréger,

$$\alpha = \frac{1}{n},$$

et concevons qu'aux progressions (1), (2) on substitue les suivantes :

$$\ldots,\quad -3\alpha,\quad -2\alpha,\quad -\alpha,\quad 0,\quad \alpha,\quad 2\alpha,\quad 3\alpha,\quad \ldots, \tag{8}$$

$$\ldots,\quad a^{-3},\quad a^{-2},\quad a^{-1},\quad 1,\quad a,\quad a^2,\quad a^3,\quad \ldots. \tag{9}$$

Les termes

$$\ldots,\quad -3n\alpha,\quad -2n\alpha,\quad -n\alpha,\quad \alpha,\quad n\alpha,\quad 2n\alpha,\quad 3n\alpha,\quad \ldots \tag{10}$$

de la progression (8) se réduiront évidemment à ceux qui composent la progression (1), et les termes correspondants de la progression (9) à ceux qui composent la progression (2), c'est-à-dire aux puissances entières de A. On a été conduit, par cette remarque, à généraliser la notion des puissances des nombres, en l'étendant au cas où les degrés de ces puissances cessent d'être des quantités entières; et à dire qu'un terme quelconque de la progression (9) est la *puissance* de A du *degré* marqué par le terme correspondant à la progression (8). D'ailleurs, ν étant un terme quelconque de la progression (8), on est convenu d'indiquer encore, à l'aide de la notation A^ν, la puissance de A du degré marqué par l'exposant ν. Cela posé, comme l'exposant de a dans un terme de la progression (9) est le produit du terme correspondant de la progression (8), par le nombre entier $n = \frac{1}{\alpha}$, on aura toujours

$$A^\nu = a^{n\nu}. \tag{11}$$

On trouvera par exemple, en posant $\nu = \frac{1}{n}$,

$$A^{\frac{1}{n}} = a = \sqrt[n]{A}, \tag{12}$$

puis, en désignant par m un entier quelconque, distinct de n,

$$A^{\frac{m}{n}} = a^m = (\sqrt[n]{A})^m, \tag{13}$$

et

$$A^{-\frac{m}{n}} = a^{-m} = \frac{1}{a^m} = \frac{1}{A^{\frac{m}{n}}}. \tag{14}$$

Ainsi, les puissances de A, des degrés marqués par les exposants $\frac{1}{n}$,

$\frac{m}{n}$, $-\frac{m}{n}$ ne seront autre chose que la racine $n^{\text{ième}}$ de A, la $m^{\text{ième}}$ puissance de cette racine, et le nombre inverse de cette puissance. De plus a^m étant le produit de n facteurs égaux à a, il est clair que a^{mn} représentera le produit de mn facteurs égaux à a, par conséquent le produit de m facteurs égaux à $a^n = A$, ou bien encore le produit de n facteurs égaux à $a^m = A^{\frac{m}{n}}$. Donc, par suite, on aura

$$\left(A^{\frac{m}{n}}\right)^n = A^m; \tag{15}$$

donc, si l'on pose

$$B = A^{\frac{m}{n}}, \tag{16}$$

on aura encore

$$B^n = A^m, \tag{17}$$

en sorte que les équations (16), (17) fourniront toujours la même valeur pour le nombre B. Enfin, en désignant par μ, ν deux quelconques des termes de la progression (8), on aura, en vertu du troisième théorème,

$$\frac{a^{n\mu}}{a^{n\nu}} = a^{n(\mu-\nu)};$$

ou, ce qui revient au même,

$$\frac{A^\mu}{A^\nu} = A^{\mu-\nu}. \tag{18}$$

Comme on peut, sans changer la valeur d'une fraction, multiplier ses deux termes par un même facteur, il en résulte qu'un nombre fractionnaire quelconque μ peut être présenté sous diverses formes. Mais on démontre aisément qu'à ces diverses formes répond une seule valeur de A^μ. En effet, soient m, n les nombres entiers dont le rapport géométrique $\frac{m}{n}$ représente le nombre fractionnaire μ réduit à sa plus simple expression. Les fractions équivalentes au rapport $\frac{m}{n}$ seront de la forme $\frac{km}{kn}$, k pouvant être un nombre entier quelconque. D'ailleurs,

si l'on pose

$$B = A^{\frac{m}{n}},$$

on en conclura, comme ci-dessus,

$$B^n = A^m,$$

puis, en élevant les deux membres à la puissance entière du degré k,

$$B^{kn} = A^{km},$$

ou, ce qui revient au même,

$$B = A^{\frac{km}{kn}}.$$

On aura donc

$$A^{\frac{km}{kn}} = A^{\frac{m}{n}}. \tag{19}$$

Ajoutons que de l'équation (19) on tirera

$$\frac{1}{A^{\frac{km}{kn}}} = \frac{1}{A^{\frac{m}{n}}},$$

ou, ce qui revient au même,

$$A^{-\frac{km}{kn}} = A^{-\frac{m}{n}}. \tag{20}$$

Or, il suit immédiatement des formules (19) et (20), qu'à un exposant fractionnaire μ, positif ou même négatif, correspond toujours une seule valeur de A^μ. Ajoutons qu'en vertu de la formule (18), *le rapport géométrique de deux puissances fractionnaires de* A *est encore une puissance fractionnaire dont l'exposant se réduit au rapport arithmétique des exposants des deux premières.*

Il suit évidemment de la formule (7), que la raison A de la progression (2), et la raison a de la progression (9), sont toutes deux supérieures ou toutes deux inférieures à l'unité. Les deux progressions sont *croissantes* dans le premier cas, *décroissantes* dans le second; *par conséquent les puissances entières et fractionnaires d'un nombre donné* A *croissent ou décroissent pour des valeurs croissantes de l'exposant, suivant que ce nombre est supérieur ou inférieur à l'unité.*

Concevons maintenant que, dans la formule (7), le nombre n devienne de plus en plus grand. Il est aisé de voir que la valeur de a, déterminée par cette formule, s'approchera indéfiniment de l'unité.

En effet, il suit de cette formule même, 1° que les deux nombres a, A seront tous deux supérieurs ou tous deux inférieurs à l'unité ; que l'on aura

$$\frac{A-1}{a-1} = \frac{a^n-1}{a-1} = 1 + a + a^2 + \ldots + a^{n-1}. \tag{21}$$

De plus, on tirera de la formule (21), 1° en supposant $A > 1$, et, par suite, $a > 1$,

$$\frac{A-1}{a-1} > n; \tag{22}$$

par conséquent,

$$a - 1 < \frac{A-1}{n},$$

et

$$a < 1 + \frac{A-1}{n}; \tag{23}$$

2° en supposant $A < 1$, et, par suite, $a < 1$,

$$\frac{1-A}{1-a} < n, \tag{24}$$

par conséquent,

$$1 - a > \frac{1-A}{n},$$

et

$$a < 1 - \frac{1-A}{n}. \tag{25}$$

Or, il résulte évidemment de la formule (23) ou (25), que le nombre a s'approchera indéfiniment de l'unité, si, en attribuant au nombre A une valeur constante, on fait croître indéfiniment le nombre entier n.

Soit maintenant b un nombre quelconque, entier ou fractionnaire, ou même irrationnel. Si ce nombre n'est pas un des termes de la progression (9), il sera du moins compris entre deux termes consécutifs

$$a^\lambda, \quad a^{\lambda+1},$$

que l'on pourra aussi présenter sous les formes

$$A^{\lambda\alpha}, \quad A^{(\lambda+1)\alpha},$$

et qui pourront être censés exprimer deux valeurs approchées du nombre b. D'ailleurs n venant à croître indéfiniment, le rapport

$$\frac{a^{\lambda+1}}{a^\lambda} = a,$$

et, à plus forte raison, le rapport

$$\frac{b}{a^\lambda} = \frac{b}{A^{\lambda\alpha}}$$

se rapprocheront indéfiniment de l'unité. Donc alors $A^{\lambda\alpha}$ convergera vers une limite égale à b. Mais, si l'on appelle μ la limite vers laquelle convergera, dans la même hypothèse, le produit $\lambda\alpha$, on devra naturellement représenter, par la notation A^μ, la limite vers laquelle convergera la puissance fractionnaire $A^{\lambda\alpha}$. Donc, en adoptant cette dernière convention, on aura

$$b = A^\mu.$$

On pourra donc alors représenter un nombre quelconque b par une expression de la forme A^μ, μ étant une quantité positive ou négative, entière ou fractionnaire, ou même irrationnelle. Ajoutons que, si la valeur numérique de μ est irrationnelle, la progression (9) ne renfermera jamais le nombre b ou A^μ, mais seulement des valeurs approchées de ce nombre. Dans le même cas, A^μ sera ce qu'on nomme une *puissance irrationnelle* de A. Le *degré* ou *l'exposant* de cette puissance sera la quantité irrationnelle μ.

Remarquons, enfin, que l'équation (18), qui subsiste pour des valeurs fractionnaires quelconques des exposants μ et ν, continuera nécessairement de subsister, si ces exposants, après s'être approchés indéfiniment de certaines limites irrationnelles, atteignent ces mêmes limites. On peut donc étendre la formule

$$\frac{A^\mu}{A^\nu} = A^{\mu-\nu} \tag{26}$$

au cas où les exposants μ, ν deviennent irrationnels, et, en conséquence on peut énoncer la proposition suivante :

Théorème IV. — *Le rapport géométrique entre deux puissances quelconques d'un nombre donné* A *est encore une puissance de* A *dont l'exposant se réduit au rapport arithmétique des exposants des deux premières.*

L'équation (26) peut encore être présentée sous une autre forme, qu'il est bon de rappeler, et qu'on obtient en exprimant la différence $\mu - \nu$ par une seule lettre. En effet, si l'on pose

$$\mu - \nu = x,$$

et si d'ailleurs on substitue à la lettre ν la lettre y, on aura $\mu = x + y$, et l'équation (26) réduite à la formule

$$\frac{A^{x+y}}{A^y} = A^x$$

donnera

$$A^{x+y} = A^x A^y. \tag{27}$$

Alors aussi, à la place du quatrième théorème, on en obtiendra un autre qui, au fond, sera le même, et s'énoncera comme il suit :

Théorème V. — *Le produit de deux puissances quelconques d'un nombre donné* A *est encore une puissance de* A *qui a pour exposant la somme des exposants des deux premières.*

Le théorème IV ou V exprime la propriété la plus remarquable des puissances d'un nombre, et même cette propriété suffit pour les caractériser, en sorte qu'on peut énoncer la propriété suivante :

Théorème VI. — *Supposons que, x étant une quantité quelconque positive ou négative, on se serve de la notation $[x]$ pour désigner une autre quantité qui varie avec x par degrés insensibles. Si l'on a, pour des valeurs quelconques des quantités x, y,*

$$[x][y] = [x+y], \tag{28}$$

on aura aussi

$$[x] = [1]^x. \tag{29}$$

Démonstration. — On tirera successivement de la formule (5), en désignant par $x, y, z, \ldots, u, v, w$, des quantités quelconques

$$[x][y][z] = [x+y][z] = [x+y+z],$$

et, généralement,

$$[x][y][z]\ldots[u][v][w] = [x+y+z+\ldots+u+v+w];$$

puis, en désignant par n le nombre des quantités $x, y, z, \ldots, u, v, w$, et supposant toutes ces quantités égales entre elles,

$$[x]^n = [nx]. \tag{30}$$

D'ailleurs, on tirera de l'équation (30), 1° en posant $x = 1$,

$$[n] = [1]^n; \tag{31}$$

3° et en posant $x = \frac{1}{n}$,

$$\left[\frac{1}{n}\right]^n = [1],$$

et, par conséquent,

$$\left[\frac{1}{n}\right] = [1]^{\frac{1}{n}}; \tag{32}$$

2° en désignant par m un nombre entier distinct de n, et posant $x = \frac{1}{m}$,

$$\left[\frac{n}{m}\right] = \left[\frac{1}{m}\right]^n;$$

par conséquent, eu égard à la formule (32),

$$\left[\frac{n}{m}\right] = [1]^{\frac{n}{m}}; \tag{33}$$

puis, en faisant varier la fraction $\frac{m}{n}$ de manière à ce qu'elle s'approche indéfiniment d'un nombre donné ν, on tirera de la formule (33)

$$[\nu] = [1]^\nu. \tag{34}$$

On trouvera, en particulier, en posant $\nu = 0$, dans la formule (34)

$$[0] = 1. \tag{35}$$

Enfin, en posant dans la formule (28)

$$x = \nu, \qquad y = -\nu,$$

on en tirera

$$[r][-r] = 1;$$

par conséquent,

$$[-r] = \frac{1}{[r]} = \frac{1}{[1]^r} = [1]^{-r}; \tag{36}$$

et il résulte évidemment des formules (34), (36), que si l'on attribue à x une valeur réelle quelconque $\pm\nu$, on aura

$$[x] = [1]^x.$$

MÉMOIRE SUR QUELQUES THÉORÈMES

CONCERNANT

LES MOYENNES ARITHMÉTIQUES ET GÉOMÉTRIQUES

LES PROGRESSIONS, ETC.

I. — *Notions relatives aux moyennes arithmétiques et géométriques.*

La *moyenne arithmétique* entre n quantités données est la $n^{ième}$ partie de leur somme.

La *moyenne géométrique* entre n nombres donnés est la $n^{ième}$ racine de leur produit.

D'autre part, *la somme de n quantités est évidemment comprise entre les produits qu'on obtient quand on multiplie par n la plus petite et la plus grande de ces quantités.*

Pareillement, *le produit de n nombres est compris entre les $n^{ièmes}$ puissances du plus petit et du plus grand de ces nombres.*

Donc, par suite, *la moyenne arithmétique entre plusieurs quantités est toujours renfermée entre la plus petite et la plus grande de ces quantités.*

Pareillement, *la moyenne géométrique entre plusieurs nombres est toujours renfermée entre le plus petit et le plus grand de ces nombres.*

En partant de ces principes, on établira divers théorèmes d'algèbre qui seront successivement énoncés dans les paragraphes suivants :

II. — *Sur les progressions géométriques, et sur les moyennes arithmétiques entre leurs termes.*

Considérons d'abord une progression géométrique dont le premier terme soit l'unité, et dont la raison r soit une quantité positive quelconque. Les divers termes, dont nous supposerons le nombre représenté par la lettre n, seront respectivement

$$1, \quad r, \quad r^2, \quad \ldots, \quad r^{n-1};$$

et, si l'on désigne par s_n la somme de ces termes, on aura

$$s_n = 1 + r + r^2 + \ldots + r^{n-1} = \frac{1-r^n}{1-r}. \tag{1}$$

D'ailleurs, le plus petit et le plus grand des termes dont il s'agit seront les deux termes extrêmes

$$r, \quad r^{n-1}.$$

Donc, en vertu des principes exposés dans le paragraphe I, la somme S_n sera comprise entre les produits qu'on obtient, quand on multiplie ces deux termes par n, et l'on pourra énoncer la proposition suivante :

Théorème I. — *La somme*

$$s_n = \frac{1-r^n}{1-r}$$

des n termes de la progression géométrique

$$1, \quad r, \quad r^2, \quad \ldots, \quad r^{n-1}$$

est comprise entre les limites

$$n \quad \text{et} \quad nr^{n-1}.$$

Nous avons ici supposé que le premier terme de la progression géométrique donnée était l'unité. Supposons maintenant que ce premier terme soit une quantité quelconque k, la raison étant toujours positive et représentée par r. Les divers termes de la progression deviendront

$$k, \quad kr, \quad kr^2, \quad \ldots, \quad kr^{n-1},$$

et leur somme que je représenterai par S_n sera évidemment égale à ks_n. Elle sera donc comprise entre les limites nk, nkr^{n-1}, et à la place du théorème I, on obtiendra la proposition suivante :

Théorème II. — *r étant un nombre quelconque, et k une quantité quelconque positive ou négative, la somme*

$$S_n = k\frac{1-r^n}{1-r}$$

des n termes de la progression géométrique

$$k, \quad kr, \quad kr^2, \quad \ldots, \quad kr^{n-1},$$

est comprise entre les limites

$$nk, \quad nkr^{n-1}.$$

Si l'on divise la somme S_n des termes de la progression géométrique donnée par leur nombre n, on obtiendra la moyenne arithmétique entre ces mêmes termes. En vertu du deuxième théorème, cette moyenne arithmétique, que je désignerai par R_n, et que détermine la formule

$$R_n = \frac{S_n}{n},$$

sera comprise entre les deux termes extrêmes

$$k, \quad kr^{n-1}$$

de la progression géométrique. Si l'on suppose, en particulier, $k = 1$, on aura $S_n = s_n$, par conséquent,

$$R_n = \frac{s_n}{n},$$

ou, ce qui revient au même,

$$R_n = \frac{1 + r + r^2 + \ldots + r^{n-1}}{n} = \frac{1}{n}\frac{1-r^n}{1-r}, \tag{2}$$

et la quantité R_n, c'est-à-dire la moyenne arithmétique entre les divers termes de la progression géométrique

$$1, \quad r, \quad r^2, \quad \ldots, \quad r^{n-1},$$

sera comprise entre les termes extrêmes

$$1, \quad r^{n-1}.$$

La moyenne arithmétique R_n, déterminée par la formule (2), possède encore une propriété remarquable dont l'énoncé fournit le théorème suivant :

Théorème III. — *Si le nombre entier n vient à croître, la moyenne arithmétique*

$$R_n = \frac{1}{n}\,\frac{1-r^n}{1-r},$$

entre les divers termes de la progression géométrique

$$1, \quad r, \quad r^2, \quad \ldots, \quad r^{n-1},$$

croîtra ou décroîtra suivant que la raison r sera supérieure ou inférieure à l'unité.

Démonstration. — Soit

$$m = n + l$$

un nombre entier supérieur à n, en sorte que l soit positif. On aura non seulement

$$R_n = \frac{1+r+r^2+\ldots+r^{n-1}}{n},$$

mais encore

$$R_{n+l} = \frac{1+r+r^2+\ldots+r^{n+l-1}}{n+l},$$

ou, ce qui revient au même,

$$R_{n+l} = \frac{1+r+r^2+\ldots+r^{n-1}}{n+l} + \frac{r^n+r^{n+1}+\ldots+r^{n+l-1}}{n+l},$$

par conséquent

$$R_{n+l} - R_n = \frac{r^n+r^{n+1}+\ldots+r^{n+l-1}}{n+l} - \frac{l}{n}\,\frac{1+r+\ldots+r^{n-1}}{n+l},$$

ou, ce qui revient au même,

$$(3) \qquad \frac{R_{n+l}-R_n}{l} = \frac{r^n}{n+l}\Delta,$$

la valeur de Δ étant

$$(4) \qquad \Delta = \frac{1+r+\ldots+r^{l-1}}{l} - \frac{r^{-1}+r^{-2}+\ldots+r^{-n}}{n}.$$

Or, l'unité étant inférieure aux puissances positives et supérieure aux puissances négatives de r, quand on a $r > 1$, et il est clair que, dans cette hypothèse, les deux moyennes arithmétiques dont la différence équivaut à Δ en vertu de la formule (4), seront, la première supérieure, la seconde inférieure à l'unité. On aura donc alors

$$\Delta > 0 \qquad \text{et, par suite,} \qquad R_{n+l} > R_n.$$

Mais le contraire aura lieu, si l'on suppose $r < 1$, et, dans ce dernier cas, les formules (4) et (3) donnent

$$\Delta < 0 \qquad \text{et, par conséquent,} \qquad R_{n+l} < R_n.$$

III. — *Sur les progressions arithmétiques, et sur les moyennes géométriques entre leurs termes.*

Considérons maintenant une progression arithmétique dont tous les termes soient positifs. Si l'on nomme a le premier terme, b la raison, n le nombre des termes, ceux-ci seront respectivement

$$a, \quad a+b, \quad \ldots, \quad a+(n-2)b, \quad a+(n-1)b;$$

et, en nommant P_n le produit de tous ces termes, on aura

$$(1) \qquad P_n = a(a+b)\ldots[a+(n-2)b][a+(n-1)b].$$

D'ailleurs le plus petit et le plus grand des termes dont il s'agit seront les deux termes extrêmes

$$a, \quad a+(n-1)b.$$

Donc, en vertu des principes exposés dans le paragraphe I, le produit P_n sera compris entre les $n^{\text{ièmes}}$ puissances de ces deux termes, et l'on pourra énoncer la proposition suivante :

Théorème I. — *Le produit P_n des n termes de la progression arithmé-*

tique

$$a, \quad a+b, \quad \ldots, \quad a+(n-2)b, \quad a+(n-1)b,$$

supposés tous positifs, est compris entre les limites

$$a^n, \quad [a+(n-1)b]^n.$$

Au reste, on peut obtenir deux limites plus rapprochées qui comprennent entre elles le produit P_n en suivant la marche que je vais indiquer.

Je remarquerai d'abord que, si l'on désigne la somme de deux nombres par k, et leur différence par l, ces deux nombres auront pour valeurs respectives les deux expressions

$$\frac{k+l}{2}, \quad \frac{k-l}{2},$$

et pour produit l'expression

$$\frac{k^2-l^2}{4}$$

qui décroît sans cesse pour des valeurs croissantes de l. Ce produit sera donc inférieur ou tout au plus égal à $\left(\frac{k}{2}\right)^2$, c'est-à-dire au carré de la demi-somme des deux nombres, et deviendra le plus petit possible, quand la différence l sera la plus grande possible.

Cela posé, concevons que l'on multiplie le produit P_n par lui-même, après avoir renversé l'ordre des facteurs. Le carré P_n^2 ainsi obtenu pourra être considéré comme le produit de n facteurs, dont chacun serait fourni par la multiplication de deux termes placés à égales distances des extrêmes dans la progression

$$a, \quad a+b, \quad \ldots, \quad a+(n-2)b, \quad a+(n-1)b,$$

c'est-à-dire par la multiplication des deux termes de la forme

$$a+mb, \quad a+(n-m-1)b,$$

m étant un nombre entier égal ou inférieur à n. D'ailleurs, d'après la remarque faite tout à l'heure, le produit de deux semblables termes

sera toujours inférieur au carré de leur demi-somme

$$a+\frac{n-1}{2}b,$$

et toujours égal ou supérieur au produit des termes extrêmes

$$a, \quad a+(n-1)b.$$

Donc, par suite, P_n^2 sera compris entre les limites inférieure et supérieure

$$a^n[a+(n-1)b]^n, \quad \left(a+\frac{n-1}{2}b\right)^{2n},$$

et le produit P_n lui-même entre les racines carrées de ces limites. On pourra donc énoncer encore la proposition suivante :

Théorème II. — *Le produit P_n des termes de la progression arithmétique*

$$a, \quad a+b, \quad \ldots, \quad a+(n-2)b, \quad a+(n-1)b,$$

supposés tous positifs, est compris entre les limites inférieure et supérieure :

$$a^{\frac{n}{2}}[a+(n-1)b]^{\frac{n}{2}}, \quad \left(a+\frac{n-1}{2}b\right)^n.$$

Corollaire 1. — Si l'on suppose a et b réduits à l'unité, on conclura du deuxième théorème que le produit

$$1.2.3\ldots n$$

est compris entre les limites inférieure et supérieure

$$n^{\frac{n}{2}}, \quad \left(\frac{n+1}{2}\right)^n.$$

Corollaire 2. — Si l'on suppose

$$a=1 \quad \text{et} \quad b=-\frac{1}{m},$$

m étant un nombre entier égal ou supérieur à n, on conclura du deuxième théorème que le produit

$$\left(1-\frac{1}{m}\right)\left(1-\frac{2}{m}\right)\cdots\left(1-\frac{n-1}{m}\right)$$

est compris entre les limites inférieure et supérieure

$$\left(1-\frac{n-1}{m}\right)^{\frac{n}{2}},\quad \left(1-\frac{n-1}{2m}\right)^{n}.$$

On aura donc

$$(2)\qquad \left(1-\frac{1}{m}\right)\left(1-\frac{2}{m}\right)\cdots\left(1-\frac{n-1}{m}\right) > \left(1-\frac{n-1}{m}\right)^{\frac{n}{2}}.$$

D'autre part, si l'on pose

$$r = 1-\frac{n-1}{m},$$

n étant égal ou inférieur à m, le nombre r sera inférieur à l'unité. On aura, par suite, en vertu du théorème I du paragraphe II,

$$\frac{1-r^n}{1-r} \text{ ou } \leqq n,$$

ou même, si n est un nombre pair,

$$(3)\qquad \frac{1-r^{\frac{n}{2}}}{1-r} = \text{ ou } < \frac{n}{2}.$$

Il y a plus : si n est un nombre impair supérieur à l'unité, on aura nécessairement $n > 2$, et le troisième théorème du paragraphe II donnera, pour $r < 1$,

$$\frac{1}{n}\,\frac{1-r^n}{1-r} < \frac{1}{2}\,\frac{1-r^2}{1-r},$$

par conséquent,

$$\frac{1-r^n}{1-r^2} < \frac{n}{2};$$

puis, en remplaçant dans cette dernière formule r par $r^{\frac{1}{2}}$, on trouvera

$$\frac{1-r^{\frac{n}{2}}}{1-r} < \frac{n}{2}.$$

Donc, si n désigne l'un quelconque des nombres entiers supérieurs à l'unité, la formule (3), que l'on peut encore écrire comme il suit,

$$(4)\qquad r^{\frac{n}{2}} = \text{ ou } > 1-\frac{n}{2}(1-r)$$

subsistera généralement pour $r < 1$. Elle subsistera donc alors pour

$$r = 1-\frac{n-1}{m},$$

de sorte qu'on aura

$$(5)\qquad \left(1-\frac{n-1}{m}\right)^{\frac{n}{2}} = \text{ ou } < 1-\frac{n(n-1)}{2m}.$$

Or, des formules (2) et (5) réunies, on déduit immédiatement la proposition suivante :

Théorème III. — *m, n étant deux nombres entiers dont le second n surpasse l'unité, en demeurant inférieur à $m+1$, le produit*

$$\left(1-\frac{1}{m}\right)\left(1-\frac{2}{m}\right)\cdots\left(1-\frac{n-1}{m}\right)$$

des n termes de la progression arithmétique

$$1,\quad 1-\frac{1}{m},\quad 1-\frac{2}{m},\quad \ldots,\quad 1-\frac{n-1}{m}$$

ne pourra s'abaisser au-dessous de la limite inférieure

$$1-\frac{n(n-1)}{2m},$$

qu'il atteindra seulement dans le cas particulier où l'on aura $n=2$.

Si l'on extrait la racine $n^{\text{ième}}$ du produit P_n déterminé par la formule (1), on obtiendra la moyenne géométrique entre les divers termes de la progression arithmétique

$$a,\quad a+b,\quad \ldots,\quad a+(n-2)b,\quad a+(n-1)b.$$

En nommant A_n cette moyenne géométrique, on déduira immédiatement du théorème II la proposition suivante :

Théorème IV. — *La moyenne géométrique*

$$A_n = \{a(a+b)\ldots[a+(n-1)b]\}^{\frac{1}{n}}$$

entre les termes de la progression arithmétique

$$a,\quad a+b,\quad \ldots,\quad a+(n-2)b,\quad a+(n-1)b,$$

supposés tous positifs, est comprise entre les limites inférieure et supérieure

$$a^{\frac{1}{2}}[a+(n-1)b]^{\frac{1}{2}},\quad a+\frac{n-1}{2}b.$$

Si l'on suppose a et b réduits à l'unité, alors, à la place du théorème IV, on obtiendra la proposition suivante :

Théorème V. — *La moyenne géométrique*

$$[1.2.3\ldots n]^{\frac{1}{n}}$$

entre les nombres entiers

$$1,\quad 2,\quad 3,\quad \ldots,\quad n$$

est comprise entre les limites inférieure et supérieure

$$n^{\frac{1}{2}},\quad \frac{n+1}{2}.$$

IV. — *Conséquences diverses des principes établis dans les paragraphes précédents.*

On peut, des principes établis dans les paragraphes précédents, déduire diverses conséquences qui méritent d'être remarquées. Ainsi, en particulier, si, en désignant par r un nombre quelconque, et par n un nombre entier, l'on pose

$$R_n=\frac{1}{n}\,\frac{1-r^n}{1-r},$$

si, d'ailleurs, on nomme m un autre entier inférieur à n, alors, en vertu du troisième théorème du paragraphe II, on aura, pour $r<1$,

$$R_n<R_m,$$

ou, ce qui revient au même,

$$\frac{R_n}{R_m}<1,$$

et pour $r>1$,

$$R_n>R_m,$$

ou, ce qui revient au même,

$$\frac{R_n}{R_m}>1.$$

Comme on aura d'ailleurs, dans l'un ou l'autre cas,

$$\frac{R_n}{R_m}=\frac{m}{n}\,\frac{1-r^n}{1-r^m}=\frac{m}{n}\,\frac{r^n-1}{r^m-1},$$

on devra conclure que, si n surpasse m, on aura, pour $r<1$

$$(1)\qquad \frac{1-r^n}{1-r^m}<\frac{n}{m},$$

et, pour $r>1$,

$$(2)\qquad \frac{r^n-1}{r^m-1}>\frac{n}{m}.$$

Si, maintenant, on remplace, dans les formules (1) et (2), r par $r^{\frac{1}{m}}$, ces formules seront réduites, la première à

$$(3)\qquad \frac{1-r^{\frac{n}{m}}}{1-r}<\frac{n}{m};$$

la seconde à

$$(4)\qquad \frac{r^{\frac{n}{m}}-1}{r-1}>\frac{n}{m}.$$

Enfin rien n'empêchera de concevoir que, dans la formule (3) ou (4), la fraction $\frac{n}{m}$, devenue variable, s'approche indéfiniment d'un certain nombre ν rationnel ou irrationnel, mais supérieur à l'unité, et alors, en remplaçant $\frac{n}{m}$ par ν, on trouvera encore, pour $r<1$,

$$(5)\qquad \frac{1-r^\nu}{1-r}<\nu,$$

et, pour $r>1$,

$$(6)\qquad \frac{r^\nu-1}{r-1}>\nu.$$

Ajoutons que, si l'on remplace r par $\frac{1}{r}$, on tirera, 1° de la formule (5), pour $\frac{1}{r}<1$, $r>1$,

$$(7)\qquad \frac{r^\nu-1}{r-1}<\nu r^{\nu-1};$$

2° de la formule (6), pour $\frac{1}{r} > 1$, $r < 1$,

$$\frac{1-r^\nu}{1-r} > \nu r^{\nu-1} \tag{8}$$

Or, il suit évidemment des formules (5) et (8), ou (6) et (7), que le rapport

$$\frac{1-r^\nu}{1-r}$$

sera toujours compris entre les limites

$$\nu \quad \text{et} \quad \nu r^{\nu-1},$$

si le nombre ν est supérieur à l'unité.

Au reste, en raisonnant toujours de la même manière, on arriverait encore aux mêmes conclusions, si la fraction $\frac{n}{m}$ et la limite ν de cette fraction étaient supposées non plus supérieures, mais inférieures à l'unité. Seulement alors, le théorème III du paragraphe II donnerait, pour $r < 1$,

$$R_n > R_m,$$

pour $r > 1$,

$$R_n < R_m;$$

et, par suite, dans les diverses formules obtenues, on devrait remplacer le signe $<$ par le signe $>$, et réciproquement.

Cela posé, on pourra énoncer la proposition suivante :

THÉORÈME I. — *r et ν étant deux nombres quelconques, le rapport*

$$\frac{r^\nu - 1}{r-1} = \frac{1-r^\nu}{1-r}$$

sera compris entre les limites

$$\nu \quad \text{et} \quad \nu r^{\nu-1}.$$

Concevons maintenant que, x, y étant des nombres distincts, on pose

$$y = rx;$$

on en conclura

$$y^\nu = r^\nu x^\nu$$

et l'on aura, par suite,

$$y - x = (r-1)x, \qquad y^\nu - x^\nu = (r^\nu - 1)x^\nu,$$
$$\frac{y^\nu - x^\nu}{y-x} = \frac{r^\nu - 1}{r-1} x^{\nu-1}.$$

Donc, eu égard au premier théorème, le rapport

$$\frac{y^\nu - x^\nu}{y-x}$$

sera compris entre les limites

$$\nu x^{n-1}, \quad \nu r^{\nu-1} x^{\nu-1},$$

dont la seconde coïncide avec le produit $\nu y^{\nu-1}$; et l'on pourra énoncer la proposition suivante :

THÉORÈME II. — *x, y, ν étant trois nombres quelconques, le rapport*

$$\frac{y^\nu - x^\nu}{y-x}$$

sera toujours compris entres les limites

$$\nu x^{\nu-1}, \quad \nu y^{\nu-1}.$$

Si, en désignant par Δx un accroissement attribué à la variable x, et par $\Delta(x^\nu)$ l'accroissement correspondant de x^ν, on pose

$$y = x + \Delta x,$$

on aura

$$y^\nu = x^\nu + \Delta(x^\nu),$$

et, par suite,

$$\frac{y^\nu - x^\nu}{y-x} = \frac{\Delta(x^\nu)}{\Delta x},$$

puis, en faisant converger Δx vers la limite zéro, on conclura du deuxième théorème que la limite du rapport des différences $\frac{\Delta(x^\nu)}{\Delta x}$ est le produit $\nu x^{\nu-1}$. D'ailleurs cette limite est précisément ce qu'on nomme le *rapport différentiel* de x^ν à x, ou la dérivée de x^ν différentié par rapport à x, et ce que l'on désigne par la notation

$$\frac{d(x^\nu)}{dx} \quad \text{ou} \quad \mathrm{D}_x(x^\nu).$$

Ainsi l'on peut, du deuxième théorème, déduire immédiatement la formule

$$\frac{d(x^\nu)}{dx} = \mathrm{D}_x(x^\nu) = \nu x^{\nu-1}, \tag{9}$$

de laquelle on tire

$$d(x^\nu) = \nu x^{\nu-1}\,dx. \tag{10}$$

Réciproquement, de la formule (10), supposée connue, on pourrait revenir au second théorème, en s'appuyant sur une proposition énoncée dans le deuxième Volume de cet Ouvrage. En effet, si, en attribuant à x une valeur constante, on fait varier y à partir de $y = x$, les différences

$$y - x, \quad y^\nu - x^\nu$$

seront deux grandeurs coexistantes qui s'évanouiront simultanément; et leur rapport différentiel, représenté par la notation

$$\frac{d(y^n)}{dy},$$

se confondra, en vertu de la formule (9), avec le produit $\nu y^{\nu-1}$. Or, ce produit, qui se réduira simplement à $\nu x^{\nu-1}$, quand on posera $y = x$, croîtra ou décroîtra sans cesse, tandis que l'on fera croître la valeur numérique de la différence $y - x$. Donc les valeurs extrêmes de ce produit, représentées par

$$\nu x^{\nu-1}, \quad \nu y^{\nu-1},$$

devront, en vertu d'un théorème énoncé à la page 190 du deuxième Volume [1], comprendre entre elles le rapport

$$\frac{y^\nu - x^\nu}{y - x}$$

des deux grandeurs coexistantes

$$y - x, \quad y^\nu - x^\nu.$$

---

[1] *Œuvres de Cauchy*, S. II, t. XII, p. 217.

MÉMOIRE

SUR

LA QUANTITÉ GÉOMÉTRIQUE $\mathrm{i} = 1_{\frac{\pi}{2}}$

ET SUR

LA RÉDUCTION D'UNE QUANTITÉ GÉOMÉTRIQUE QUELCONQUE À LA FORME $x + y\mathrm{i}$

Soient r, p les *coordonnées polaires* d'un point A renfermé dans un certain plan, r étant le rayon vecteur OA mesuré à partir du *pôle* O sur une droite qui forme avec l'*axe polaire* OX l'*angle polaire* p. D'après ce qui a été dit à la page 158 [1], le rayon vecteur OA sera représenté en grandeur et en direction par la *quantité géométrique* r_p, dont r sera le *module*, et p l'*argument*.

Cela posé, l'argument p pourra être l'un quelconque des angles décrits par un rayon vecteur mobile qui, d'abord dirigé suivant l'axe polaire, tournerait autour du pôle, de manière à prendre définitivement la direction OP. Or, ces angles forment évidemment une progression arithmétique, dont la raison équivaut à quatre angles droits mesurés par la circonférence dont le rayon est l'unité, c'est-à-dire par le nombre 2π. Mais, parmi ces mêmes angles, un seul est renfermé entre les limites $-\pi$, $+\pi$, les autres se déduisant de celui-ci par l'addition ou la soustraction des divers multiples de 2π. Ajoutons que, si l'argument p est considéré comme positif quand le rayon vecteur

---

[1] *Œuvres de Cauchy*, ce tome, p. 176.

mobile a tourné dans un certain sens avant de parvenir à la position OP, le même argument deviendra négatif, quand le rayon vecteur mobile aura tourné en sens contraire. Le mouvement de rotation sera *direct* dans la première hypothèse, et *rétrograde* dans la seconde.

Enfin, lorsque le signe $+$ ou $-$, qui sert à indiquer l'addition ou la soustraction, sera placé devant r_p, l'expression

$$+r_p \quad \text{ou} \quad -r_p$$

ainsi obtenue représentera la longueur r mesurée à partir du pôle dans la direction qui forme avec l'axe polaire l'angle p, ou dans la direction opposée, en sorte qu'on aura [page 164] [1]

$$(1) \qquad +r_p = r_p, \qquad -r_p = r_{p+\pi} = r_{p-\pi}.$$

Dans le cas particulier où le module r se réduit à l'unité, la quantité géométrique r_p, réduite à la forme 1_p, représente la longueur 1 mesurée à partir du pôle dans la direction qui forme avec l'axe polaire l'angle p. Si à cette direction on substituait la direction opposée, alors, à la place de la quantité géométrique 1_p, on obtiendrait la quantité opposée

$$(2) \qquad 1_{p+\pi} = 1_{p-\pi} = -1_p.$$

Si la direction donnée coïncide avec celle de l'axe polaire, ou avec la direction opposée, la quantité géométrique 1_p sera réduite à l'une des quantités algébriques

$$1_0 = 1, \qquad 1_\pi = 1_{-\pi} = +1.$$

Si, au contraire, la droite sur laquelle se mesure la longueur 1 devient perpendiculaire à l'axe polaire, alors l'expression 1_p se trouvera réduite à l'une des quantités géométriques

$$1_{\frac{\pi}{2}}, \quad 1_{-\frac{\pi}{2}} = -1_{\frac{\pi}{2}}.$$

La première de ces quantités, c'est-à-dire la longueur 1, mesurée dans la direction que prend un rayon vecteur mobile doué d'un mouvement de rotation direct, et primitivement dirigé suivant l'axe polaire, au moment où il devient pour la première fois perpendiculaire à cet axe,

[1] *Œuvres de Cauchy*, ce tome, p. 184.

sera dorénavant désignée par la lettre i. Eu égard à cette convention, l'on aura

$$(3) \qquad \mathrm{i} = 1_{\frac{\pi}{2}}, \quad -\mathrm{i} = -1_{\frac{\pi}{2}} = 1_{-\frac{\pi}{2}},$$

et

$$\mathrm{i}^2 = \left(1_{\pm\frac{\pi}{2}}\right)^2 = 1_{\pm\pi},$$

ou, ce qui revient au même,

$$(4) \qquad \mathrm{i}^2 = -1.$$

Donc les quantités géométriques i et $-$i représenteront les racines carrées de -1; et, comme on tirera de la formule (4),

$$\mathrm{i}^4 = (-1)^2,$$

par conséquent

$$(5) \qquad \mathrm{i}^4 = 1,$$

il est clair que i et $-$i représenteront encore les deux racines quatrièmes et non algébriques de l'unité. Cette conclusion ne diffère pas au fond de la remarque faite à la page 167 [1].

En résumé, i et $-$i sont les deux racines de l'équation binome

$$(6) \qquad z^2 = -1,$$

à laquelle il est impossible de satisfaire tant que l'on prend pour z une quantité algébrique, puisque le carré de toute quantité positive ou négative est nécessairement positif. Si l'équation (6) devient résoluble, dans le cas où l'on prend pour z une quantité géométrique, cela tient à ce que la définition donnée en algèbre du produit de deux quantités se généralise quand ces quantités cessent d'être algébriques, et permet au produit

$$zz = z^2$$

de deux facteurs égaux d'acquérir une valeur négative.

Concevons maintenant que l'on détermine la position du point A, non plus à l'aide des coordonnées polaires r et p, mais à l'aide de deux coordonnées rectangulaires x et y mesurées à partir du pôle : 1° sur

[1] *Œuvres de Cauchy*, ce tome, p. 186.

l'axe polaire; 2° sur une perpendiculaire à cet axe. Supposons, d'ailleurs, que l'on compte les x positives dans la direction correspondant à une valeur nulle de l'angle polaire p, et les y positives dans la direction correspondant à l'angle polaire $\frac{\pi}{2}$. Les coordonnées x, y, ou, ce qui revient au même, les projections algébriques du rayon vecteur r sur les axes des x et des y, se réduiront, pour $r = 1$, à ce qu'on nomme le *cosinus* et le *sinus* de l'angle polaire p; et, comme, pour passer de ce cas particulier au cas où r acquiert une valeur quelconque, il suffit de faire varier x et y dans le rapport de 1 à r, on aura généralement

$$x = r\cos p, \qquad y = r\sin p. \tag{7}$$

Il est facile d'exprimer la quantité géométrique r_p en fonction des coordonnées rectangulaires x, y : et, d'abord, il est clair que, si l'une de ces coordonnées s'évanouit, la valeur numérique de l'autre sera précisément la valeur du rayon r. Dans la même hypothèse, l'expression 1_p se réduira évidemment à 1 ou à -1, si le rayon r se mesure dans le sens des x positives ou des x négatives; à i ou à $-$i, si r se mesure dans le sens des y positives ou des y négatives. On en conclut aisément que la quantité géométrique

$$r_p = 1_p r, \tag{8}$$

exprimée en fonction des coordonnées x, y, sera représentée en grandeur et en direction par l'abscisse x, si l'on a $y = 0$, et par le produit yi, si l'on a $x = 0$.

Si des deux coordonnées x, y aucune ne s'évanouit, alors

$$x \quad \text{et} \quad y\mathrm{i}$$

représenteront évidemment, en grandeur et en direction, non plus la longueur r mesurée sur une droite correspondant à l'angle polaire p, mais seulement les projections algébriques de cette longueur sur les axes des x et des y. Quant à la longueur elle-même, elle sera la diagonale du rectangle construit sur les deux projections. Elle sera donc

[page 160] la somme des deux quantités géométriques x, yi, en sorte qu'on aura

$$r_p = x + y\mathrm{i}. \tag{9}$$

Si le rayon r se réduit à l'unité, on aura

$$x = \cos p, \qquad y = \sin p. \tag{10}$$

Donc alors la formule (9) donnera

$$1_p = \cos p + \mathrm{i}\sin p. \tag{11}$$

Si, au contraire, le rayon r diffère de l'unité, on tirera de la formule (9) jointe aux équations (7), ou bien encore de la formule (8) jointe à la formule (11),

$$r_p = r(\cos p + \mathrm{i}\sin p). \tag{12}$$

Concevons maintenant que, r, p étant les coordonnées rectangulaires, et x, y les coordonnées polaires du point A, on pose, pour abréger,

$$z = r_p = x + y\mathrm{i}, \tag{13}$$

la quantité géométrique z sera ce que nous appellerons l'*affixe* de ce point. Si l'on désigne par R, P les coordonnées polaires, par X, Y les coordonnées rectangulaires, et par Z l'affixe d'un second point B, on aura encore

$$Z = R_P = X + Y\mathrm{i}. \tag{14}$$

Si les deux points coïncident, on aura non seulement

$$Z = z, \tag{15}$$

ou, ce qui revient au même,

$$X + Y\mathrm{i} = x + y\mathrm{i}, \tag{16}$$

mais encore

$$X = x, \qquad Y = y. \tag{17}$$

Réciproquement, si l'équation (15) se vérifie, les points A, B coïncideront, et, par suite, la formule (15) ou (16) entraînera les équations (17). On peut donc énoncer la proposition suivante :

Théorème I. — *Lorsque deux quantités géométriques sont égales, l'équation qui exprime leur égalité peut être remplacée par deux équations entre quantités algébriques, savoir : par les équations qu'on obtient, quand on égale entre elles, dans les quantités géométriques données, les parties purement algébriques, puis les quantités algébriques qui représentent les coefficients de i.*

Observons encore que l'équation (15), présentée sous la forme

$$R_P = r_p, \tag{18}$$

donnera [*voir* la page 158]

$$R = r, \tag{19}$$
$$P = p + 2k\pi, \tag{20}$$

k étant une quantité quelconque, et, par suite,

$$\cos P = \cos p, \qquad \sin P = \sin p. \tag{21}$$

Comme on aura d'ailleurs

$$1_P = \cos P + \mathrm{i} \sin P, \tag{22}$$

il est clair que des formules (11) et (22), jointes aux équations (21), on tirera

$$1_P = 1_p. \tag{23}$$

On arriverait encore à la même conclusion, en divisant par $R = r$ les deux membres de l'équation (18) présentée sous la forme

$$1_P R = 1_p r.$$

En résumé, la position d'un point dans un plan peut être complètement déterminée, non seulement par le système de deux coordonnées rectangulaires, mais aussi par l'affixe de ce même point; en sorte que l'égalité de deux affixes entraîne la coïncidence des points correspon-

dants avec l'égalité de leurs abscisses, de leurs ordonnées, et de leurs distances au pôle.

Nous appellerons *points conjugués* deux points placés symétriquement par rapport à l'axe polaire, ou, ce qui revient au même, deux points situés à égales distances de cet axe sur une droite perpendiculaire à l'axe. Nous appellerons encore *quantités géométriques* conjuguées celles qui représenteront les affixes de deux points conjugués. Cela posé, deux quantités géométriques conjuguées offriront évidemment, avec des modules égaux, des arguments égaux au signe près, mais affectés de signes contraires, et si l'une est de la forme

$$r_p = x + y\mathrm{i} = r(\cos p + \mathrm{i} \sin p), \tag{24}$$

l'autre sera de la forme

$$r_{-p} = x - y\mathrm{i} = r(\cos p - \mathrm{i} \sin p). \tag{25}$$

Comme on aura d'ailleurs

$$r_p r_{-p} = r^2, \tag{26}$$

on pourra énoncer la proposition suivante :

Théorème II. — *Le produit de deux quantités géométriques conjuguées est le carré du module de chacune d'elles.*

Remarquons encore que des formules (24), (25), (26), on tire

$$r^2 = (x + y\mathrm{i})(x - y\mathrm{i}), \tag{27}$$

puis, en ayant égard à la formule (4),

$$r^2 = x^2 + y^2. \tag{28}$$

L'équation (5) exprime simplement que le *carré du rayon vecteur r est la somme des carrés de ses deux projections*, et reproduit ainsi le théorème de géométrie suivant lequel, dans un triangle rectangle, *le carré de l'hypoténuse équivaut à la somme des carrés des autres côtés.* Ajoutons que l'on tire de la formule (27)

$$\frac{1}{x + y\mathrm{i}} = \frac{x - y\mathrm{i}}{r^2} = \frac{x - y\mathrm{i}}{x^2 + y^2}; \tag{29}$$

et que l'équation (29) réduit immédiatement à la forme $X - Y\mathrm{i}$ le rapport de l'unité à la quantité géométrique $x + y\mathrm{i}$, ou, ce qui revient au même, la quantité géométrique inverse de $x + y\mathrm{i}$.

Si le module r des deux quantités géométriques r_p, r_{-p} se réduisait à l'unité, elles deviendraient respectivement

$$1_p = \cos p + \mathrm{i} \sin p, \qquad 1_{-p} = \cos p - \mathrm{i} \sin p.$$

Les principes exposés dans le Mémoire sur les quantités géométriques permettent d'effectuer aisément, sur ces quantités réduites à la forme r_p, les diverses opérations de l'Algèbre; spécialement l'addition, la soustraction, la multiplication, la division, et l'élévation à des puissances entières. Pour effectuer les mêmes opérations sur les quantités géométriques réduites à la forme $x + y\mathrm{i}$, il suffira évidemment d'appliquer les règles auxquelles on aurait recours, si les quantités données étaient algébriques, en ayant égard aux formules (4) et (29), et en se rappelant que, *diviser par une quantité géométrique, c'est multiplier par la quantité inverse*. [*Voir* la page 164 [1].] On trouvera, par exemple,

$$(x + y\mathrm{i}) + (x' + y'\mathrm{i}) + \ldots = x + x' + \ldots + (y + y' + \ldots)\mathrm{i}; \tag{30}$$

$$x' + y'\mathrm{i} - (x + y\mathrm{i}) = x' - x + (y' - y)\mathrm{i}; \tag{31}$$

$$(x + y\mathrm{i})(x' + y'\mathrm{i}) = xx' - yy' + (xy' + x'y)\mathrm{i}; \tag{32}$$

$$\frac{x' + y'\mathrm{i}}{x + y\mathrm{i}} = \frac{(x - y\mathrm{i})(x' + y'\mathrm{i})}{x^2 + y^2} = \frac{xx' + yy' + (xy' - x'y)\mathrm{i}}{x^2 + y^2}, \tag{33}$$

puis, en désignant par n un nombre entier quelconque, et appliquant au développement de $(x + y\mathrm{i})^n$ la formule de Newton, on trouvera encore

$$\begin{aligned}(x + y\mathrm{i})^n = x^n - \frac{n(n-1)}{1.2} x^{n-2} y^2 + \ldots \\ + \left(\frac{n}{1} x^{n-1} y - \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3} x^{n-3} y^3 + \ldots\right)\mathrm{i}.\end{aligned} \tag{34}$$

Eu égard à l'équation (34), on pourra aisément réduire à la forme $X + Y\mathrm{i}$ une *fonction entière* Z de la quantité géométrique $z = x + y\mathrm{i}$,

[1] *Œuvres de Cauchy*, ce tome, p. 178

c'est-à-dire une expression de la forme

$$Z = a + bz + cz^2 + \ldots + gz^{n-1} + hz^n, \tag{35}$$

les coefficients $a, b, c, \ldots, g, h$ étant des quantités quelconques algébriques ou géométriques. Ajoutons que l'on pourra réduire encore à la forme $X + Y\mathrm{i}$ une *fonction rationnelle* de z, c'est-à-dire le rapport de deux fonctions entières de z, en ayant égard non seulement à la formule (34), mais aussi à l'équation (33).

MÉMOIRE SUR LES AVANTAGES

QUE PRÉSENTE

L'EMPLOI DES QUANTITÉS GÉOMÉTRIQUES

DANS LA TRIGONOMÉTRIE RECTILIGNE.

Comme on l'a vu dans l'article précédent, les deux quantités géométriques

$$1_p,\quad 1_{-p}$$

sont liées au sinus et au cosinus de l'angle p par les formules

$$(1)\qquad 1_p = \cos p + i \sin p, \quad 1_{-p} = \cos p - i \sin p,$$

dont la seconde est ce que devient la première quand on change p en $-p$. D'ailleurs, de ces deux formules on tire immédiatement les suivantes :

$$(2)\qquad \cos p = \frac{1_p + 1_{-p}}{2}, \qquad \sin p = \frac{1_p - 1_{-p}}{2i},$$

qui servent à exprimer le cosinus et le sinus de l'angle p, à l'aide des seules quantités géométriques 1_p, 1_{-p}; et l'on peut ajouter que les équations (1), (2) fournissent le moyen le plus court d'établir un grand nombre de formules de trigonométrie rectiligne. Entrons à ce sujet dans quelques détails.

D'abord, il est clair que les propriétés des expressions de la forme 1_p feront connaître, eu égard aux formules (1), des propriétés correspondantes des sinus et des cosinus. Ainsi, par exemple, l'équation

$$(3)\qquad 1_p 1_{-p} = 1$$

pourra s'écrire comme il suit,

$$(\cos p + i \sin p)(\cos p - i \sin p) = 1,$$

et se réduira définitivement à la formule

$$\cos^2 p + \sin^2 p = 1, \tag{4}$$

qui exprime la relation existante entre le sinus et le cosinus d'un angle quelconque p. Pareillement, l'équation

$$1_{p+p'} = 1_p 1_{p'} \tag{5}$$

donnera

$$\cos(p + p') + i \sin(p + p') = (\cos p + i \sin p)(\cos p' + i \sin p'),$$

ou, ce qui revient au même,

$$\begin{aligned} &\cos(p + p') + i \sin(p + p') \\ &\quad = \cos p \cos p' - \sin p \sin p' + i(\sin p \cos p' + \sin p' \cos p), \end{aligned}$$

et pourra être remplacée [page 217] par le système des deux formules

$$\left\{ \begin{aligned} \cos(p + p') &= \cos p \cos p' - \sin p \sin p', \\ \sin(p + p') &= \sin p \cos p' + \sin p' \cos p, \end{aligned} \right. \tag{6}$$

qui servent à exprimer le cosinus et le sinus de la somme de deux arcs en fonction des cosinus et des sinus de ces mêmes arcs. Si l'on veut obtenir les cosinus et les sinus, non plus de la somme, mais de la différence des arcs donnés, il suffira de remplacer p' par $-p'$ dans les formules (6), desquelles on tirera

$$\left\{ \begin{aligned} \cos(p - p') &= \cos p \cos p' + \sin p \sin p', \\ \sin(p - p') &= \sin p \cos p' - \sin p' \cos p. \end{aligned} \right. \tag{7}$$

Enfin, n étant un nombre entier quelconque, l'équation

$$1_{np} = (1_p)^n \tag{8}$$

sera l'expression la plus simple du théorème de Moivre, puisque, en vertu de cette équation, l'on aura

$$\cos np + i \sin np = (\cos p + i \sin p)^n. \tag{9}$$

Si, après avoir développé le second membre de la formule (9) suivant les puissances ascendantes de i, on égale entre elles, dans les deux membres, les quantités purement algébriques, puis les quantités qui représenteront les coefficients de i, on retrouvera les formules connues

$$\left\{ \begin{aligned} \cos np &= \cos^n p - \frac{n(n-1)}{1.2} \cos^{n-2} p \sin^2 p + \ldots, \\ \sin np &= \frac{n}{1} \cos^{n-1} p \sin p - \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3} \cos^{n-3} p \sin^3 p + \ldots, \end{aligned} \right. \tag{10}$$

que l'on peut encore écrire comme il suit :

$$\left\{ \begin{aligned} \cos np &= \cos^n p \left[1 - \frac{n(n-1)}{1.2} \tan^2 p + \ldots \right], \\ \sin np &= \cos^n p \left[\frac{n}{1} \tan p - \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3} \tan^3 p + \ldots \right]. \end{aligned} \right. \tag{11}$$

D'ailleurs on tirera immédiatement des équations (11)

$$\operatorname{tang} np = \frac{\frac{n}{1} \operatorname{tang} p - \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3} \operatorname{tang}^3 p + \ldots}{1 - \frac{n(n-1)}{1.2} \operatorname{tang}^2 p + \ldots}. \tag{12}$$

Les formules (10) développent le cosinus et le sinus de l'arc np en fonctions entières du sinus et du cosinus de l'arc p. Si l'on veut, au contraire, développer les $n^{\text{ièmes}}$ puissances de $\cos p$ et de $\sin p$ en séries de termes proportionnels aux cosinus et aux sinus des multiples de p, il suffira de recourir aux formules (2), desquelles on tirera

$$\cos^n p = \left(\frac{1_p + 1_{-p}}{2} \right)^n, \qquad \sin^n p = \left(\frac{1_p - 1_{-p}}{2i} \right)^n. \tag{13}$$

En développant les seconds membres des équations (13), et ayant égard à la formule (5), on trouvera

$$\left\{ \begin{aligned} \cos^n p &= \frac{1_{np} + \frac{n}{1} 1_{(n-2)p} + \ldots + \frac{n}{1} 1_{-(n-2)p} + 1_{-np}}{2^n}, \\ \sin^n p &= \frac{1_{np} - \frac{n}{1} 1_{(n-2)p} + \ldots + \left[\ldots - \frac{n}{1} 1_{-(n-2)p} + 1_{-np} \right] (-1)^n}{2^n i^n}. \end{aligned} \right. \tag{14}$$

De ces dernières équations, on peut immédiatement revenir aux formules connues. On en tire, en effet, eu égard aux formules (1), pour des valeurs paires de n,

$$
(15)\quad \left\{
\begin{aligned}
\cos^n p &= \frac{\cos np + \frac{n}{1}\cos(n-2)p + \ldots + \frac{1}{2}\,\dfrac{n(n-1)\ldots\left(\frac{n}{2}+1\right)}{1.2\ldots\frac{n}{2}}}{2^{n-1}},\\
\sin^n p &= \frac{\cos np - \frac{n}{1}\cos(n-2)p + \ldots + (-1)^{\frac{n}{2}}\frac{1}{2}\,\dfrac{n(n-1)\ldots\left(\frac{n}{2}+1\right)}{1.2\ldots\frac{n}{2}}}{(-1)^{\frac{n}{2}}2^{n-1}},
\end{aligned}
\right.
$$

et, pour des valeurs impaires de n,

$$
(16)\quad \left\{
\begin{aligned}
\cos^n p &= \frac{\cos np + \frac{n}{1}\cos(n-2)p + \ldots + \dfrac{n(n-1)\ldots\left(\frac{n+1}{2}\right)}{1.2\ldots\frac{n-1}{2}}\cos p}{2^{n-1}},\\
\sin^n p &= \frac{\sin np - \frac{n}{1}\sin(n-2)p + \ldots + (-1)^{\frac{n-1}{2}}\dfrac{n(n-1)\ldots\left(\frac{n+1}{2}\right)}{1.2\ldots\frac{n-1}{2}}\sin p}{(-1)^{\frac{n-1}{2}}2^{n-1}}.
\end{aligned}
\right.
$$

Lorsque, dans l'équation (5), on prend

$$p' = -\frac{p}{2},$$

on en tire

$$1_{\frac{p}{2}} = 1_p 1_{-\frac{p}{2}};$$

par conséquent,

$$(17)\qquad 1_p = \frac{1_{\frac{p}{2}}}{1_{-\frac{p}{2}}} = \frac{\cos\frac{p}{2} + \mathrm{i}\sin\frac{p}{2}}{\cos\frac{p}{2} - \mathrm{i}\sin\frac{p}{2}}.$$

Si, d'ailleurs, on pose

$$t = \operatorname{tang}\frac{p}{2} = \frac{\sin\frac{p}{2}}{\cos\frac{p}{2}},$$

on aura

$$\sin\frac{p}{2} = t\cos\frac{p}{2},$$

et, par suite, la formule (17) donnera

$$(18)\qquad 1_p = \frac{1+t\mathrm{i}}{1-t\mathrm{i}}.$$

En vertu de cette dernière formule, toute fonction entière, ou même rationnelle de 1_p, pourra être transformée en une fonction rationnelle de

$$t = \operatorname{tang}\frac{p}{2}.$$

Il y a plus : comme, en vertu de l'équation (3), jointe à la formule (18), on aura

$$(19)\qquad 1_{-p} = \frac{1-t\mathrm{i}}{1+t\mathrm{i}},$$

il est clair que toute fonction rationnelle de 1_p et de 1_{-p} pourra encore être transformée en une fonction rationnelle de t. On trouvera, par exemple, en ayant égard aux équations (2),

$$(20)\qquad \cos p = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \qquad \sin p = \frac{2t}{1+t^2}.$$

Étant données deux directions déterminées par deux angles polaires p, p', on peut demander la valeur de la quantité positive Π propre à représenter l'angle aigu ou obtus, mais inférieur à deux droits, qui se trouve compris entre ces mêmes directions. Or, il est clair que cette quantité se réduira toujours à l'un des quatre angles compris dans les deux formules

$$2k\pi \pm (p'-p),$$

k ou $-k$ étant un nombre entier. Donc, par suite, on aura

$$(21)\qquad \cos\Pi = \cos(p'-p) = \frac{1_{p'-p} + 1_{p-p'}}{2},$$

ou, ce qui revient au même,

$$(22)\qquad \cos\Pi = \frac{1_{p'}1_{-p} + 1_p 1_{-p'}}{2}.$$

Telle est l'équation qui sert à exprimer la valeur de $\cos \Pi$ à l'aide des quantités géométriques 1_p, $1_{p'}$ et de leurs conjuguées 1_{-p}, $1_{-p'}$.

Dans ce qui précède, nous nous sommes bornés à considérer des quantités géométriques dont les modules étaient réduits à l'unité. La considération de celles qui offrent des modules distincts de l'unité fournit aussi des démonstrations très simples de diverses formules de trigonométrie rectiligne, comme nous allons le faire voir.

Soient d'abord r, r' deux rayons vecteurs mesurés à partir du pôle dans les directions que déterminent les angles polaires p, p'; et nommons A, B les extrémités de ces rayons vecteurs. Si l'on multiplie le rayon vecteur r par le cosinus de la quantité positive Π propre à représenter l'angle aigu ou obtus compris entre les deux rayons, le produit ainsi obtenu $r \cos \Pi$ représentera la *projection algébrique* du rayon vecteur r sur le rayon vecteur r'. Pareillement, $r' \cos \Pi$ représentera la projection algébrique du rayon vecteur r. Cela posé, le produit de l'un des rayons par la projection algébrique de l'autre sera

$$rr' \cos \Pi.$$

Or, en multipliant par rr' les deux membres de la formule (22), on trouvera

$$rr' \cos \Pi = \frac{r'_{p'} r_{-p} + r_p r'_{-p'}}{2}; \tag{23}$$

et les quatre quantités géométriques

$$r_p, \quad r'_{p'}, \quad r_{-p}, \quad r'_{-p'}$$

seront évidemment les affixes des deux points A, B et de ceux qui leur sont conjugués. En conséquence, on pourra énoncer la proposition suivante :

Théorème. — *Deux rayons vecteurs étant mesurés à partir du pôle dans deux directions données, le produit du premier rayon par la projection algébrique du second rayon sur le premier, et le produit du second rayon par la projection algébrique du premier sur le second, seront égaux à la demi-somme des deux produits dont chacun a pour facteurs les affixes*

de l'extrémité de l'un des rayons et du point conjugué à l'extrémité de l'autre.

Corollaire. — Souvent on désigne à l'aide de la notation $(\widehat{r, r'})$ l'angle aigu ou obtus compris entre les deux rayons vecteurs r, r' mesurés dans deux directions données. Si l'on adopte cette notation, la formule (23) deviendra

$$rr' \cos(\widehat{r, r'}) = \frac{r'_{p'} r_{-p} + r_p r'_{-p'}}{2}, \tag{24}$$

et l'on en tirera

$$r'_{p'} r_{-p} + r_p r'_{-p'} = 2 rr' \cos(\widehat{r, r'}). \tag{25}$$

Soit, maintenant, R_p la somme des deux quantités géométriques r_p, $r'_{p'}$. D'après ce qui a été dit à la page 160 [1], la quantité géométrique R_p représentera, en grandeur et en direction, la diagonale OC du parallélogramme qui aura pour côtés les rayons vecteurs OA, OB, et pour sommets, d'une part le point O, d'autre part, les trois points A, B, C dont les affixes sont respectivement

$$r_p, \quad r'_{p'}, \quad R_p.$$

D'ailleurs, si à ces trois derniers points on substitue leurs conjugués, c'est-à-dire les trois points dont les affixes sont

$$r_{-p}, \quad r'_{-p'}, \quad R_{-p},$$

on obtiendra un second parallélogramme égal au premier, ces deux parallélogrammes étant deux figures symétriques par rapport à l'axe polaire. Donc R_{-p} sera encore la somme des deux quantités géométriques r_{-p}, $r'_{-p'}$; et l'équation

$$R_p = r_p + r'_{p'} \tag{26}$$

entraînera la suivante,

$$R_{-p} = r_{-p} + r'_{-p'}. \tag{27}$$

Or, des formules (26) et (27), combinées entre elles par voie de mul-

---

[1] *Œuvres de Cauchy*, ce tome, p. 176.

tiplication, on tire, eu égard à l'équation (25), la formule connue

$$R^2 = r^2 + r'^2 + 2rr'\cos(\widehat{r, r'}). \tag{28}$$

Soient, maintenant,

$$r_p, \quad r'_{p'}, \quad r''_{p''}, \quad \ldots$$

des quantités géométriques en nombre quelconque, et

$$A, \quad A', \quad A'', \quad \ldots$$

les points dont elles représentent les affixes. Pour obtenir la somme R_p de ces quantités géométriques, il suffira, d'après ce qui a été dit [page 160], de mener par l'extrémité A du rayon vecteur OA, une droite AB égale et parallèle au rayon vecteur OA', puis par le point B une droite BC égale et parallèle au rayon vecteur OA'', etc., puis enfin de joindre le pôle O à l'extrémité K de la dernière des droites successivement tracées, et de fermer ainsi le polygone OABC ... HK par un dernier côté OK qui représentera, en grandeur et en direction, la somme cherchée. D'ailleurs, si aux sommets A, B, C, ..., H, K, on substitue les points conjugués à ces mêmes sommets, alors, à la place du polygone OABC ... HK, on obtiendra celui auquel on peut le superposer en faisant subir au plan qui le renferme une demi-révolution autour de l'axe polaire; et il est clair que, dans le nouveau polygone, le dernier côté, représenté en grandeur et en direction par R_{-p}, sera la somme, non plus des quantités géométriques données

$$r_p, \quad r'_{p'}, \quad r''_{p''}, \quad \ldots$$

mais de leurs conjuguées

$$r_{-p}, \quad r'_{-p'}, \quad r''_{-p''}, \quad \ldots.$$

Donc l'équation

$$R_p = r_p + r'_{p'} + r''_{p''} + \ldots \tag{29}$$

entrainera la suivante

$$R_{-p} = r_{-p} + r'_{-p'} + r''_{-p''} + \ldots. \tag{30}$$

Or, des équations (29) et (30), combinées entre elles par voie de multiplication, on déduira immédiatement, eu égard à l'équation (25), la formule connue

$$\begin{aligned} R^2 = r^2 + r'^2 + r''^2 + \ldots + 2rr'\cos(\widehat{r, r'}) &+ 2rr''\cos(\widehat{r, r''}) + \ldots \\ &+ 2r'r''\cos(\widehat{r', r''}) + \ldots \\ &+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned} \tag{31}$$

Parmi les formules auxquelles on parvient quand on considère des quantités géométriques dont le module diffère de l'unité, on doit remarquer encore l'équation qui fournit la somme des n premiers termes d'une progression géométrique. Si, pour plus de simplicité, on suppose le premier terme réduit à l'unité, et si l'on représente la raison par r_p, l'équation dont il s'agit sera

$$1 + r_p + r_p^2 + \ldots + r_p^{n-1} = \frac{1 - r_p^n}{1 - r_p}. \tag{32}$$

Cette équation subsistant, quelles que soient les valeurs du module r et de l'argument p, on peut y remplacer p par $-p$. On trouvera ainsi

$$1 + r_{-p} + r_{-p}^2 + \ldots + r_{-p}^{n-1} = \frac{1 - r_{-p}^n}{1 - r_{-p}}. \tag{33}$$

D'autre part, on a

$$(1 - r_p)(1 - r_{-p}) = 1 - 2r\cos p + r^2.$$

Par conséquent on peut, dans les formules (32) et (33), remplacer les rapports

$$\frac{1}{1 - r_p}, \quad \frac{1}{1 - r_{-p}}$$

par les rapports

$$\frac{1 - r_{-p}}{1 - 2r\cos p + r^2}, \quad \frac{1 - r_p}{1 - 2r\cos p + r^2}.$$

Cela posé, les formules (32) et (33) donneront

$$1 + r_p + r_p^2 + \ldots + r_p^{n-1} = \frac{1 - r_{-p} - r_p^n + r^2 r_p^{n-1}}{1 - 2r\cos p + r^2}, \tag{34}$$

$$1 + r_{-p} + r_{-p}^2 + \ldots + r_{-p}^{n-1} = \frac{1 - r_p - r_{-p}^n + r^2 r_{-p}^{n-1}}{1 - 2r\cos p + r^2}. \tag{35}$$

Chacune de ces dernières équations se partage en deux autres, lorsqu'on égale entre elles, dans les deux membres, les parties purement algébriques et celles qui constituent les coefficients de i. Alors, en ayant égard aux formules

$$(36)\qquad \begin{cases} r_p^n = 1_{np}\, r^n = r^n(\cos np + \mathrm{i}\sin np), \\ r_{-p}^n = 1_{-np}\, r^n = r^n(\cos np - \mathrm{i}\sin np), \end{cases}$$

on trouve

$$(37)\qquad \begin{aligned} &1 + r\cos p + r^2\cos 2p + \ldots + r^{n-1}\cos(n-1)p \\ &\quad = \frac{1 - r\cos p - r^n\cos np + r^{n+1}\cos(n-1)p}{1 - 2r\cos p + r^2}, \end{aligned}$$

et

$$(38)\qquad \begin{aligned} &r\sin p + r^2\sin 2p + \ldots + r^{n-1}\sin(n-1)p \\ &\quad = \frac{r\sin p - r^n\sin np + r^{n+1}\sin(n-1)p}{1 - 2r\cos p + r^2}. \end{aligned}$$

Lorsqu'on suppose

$$r < 1,$$

le module r^n de r_p^n décroît pour des valeurs croissantes de n, et devient infiniment petit, tandis que le nombre n devient infiniment grand. Donc, alors, en vertu de la formule (32), la somme des n premiers termes de la progression géométrique

$$(39)\qquad 1,\quad r_p,\quad r_p^2,\quad r_p^3,\quad \ldots,$$

s'approche indéfiniment, pour des valeurs croissantes de n, de la limite

$$(40)\qquad s = \frac{1}{1 - r_p}.$$

C'est ce qu'on exprime en disant que la progression géométrique se réduit, pour $r < 1$, à une série convergente qui a pour somme la limite s. Alors aussi, les formules (32), (33) donnent

$$(41)\qquad 1 + r_p + r_p^2 + \ldots = \frac{1}{1 - r_p},$$

$$(42)\qquad 1 + r_{-p} + r_{-p}^2 + \ldots = \frac{1}{1 - r_{-p}},$$

et les formules (37), (38) donnent

$$(43)\qquad 1 + r\cos p + r^2\cos 2p + \ldots = \frac{1 - r\cos p}{1 - 2r\cos p + r^2},$$

$$(44)\qquad r\sin p + r^2\sin 2p + \ldots = \frac{r\sin p}{1 - 2r\cos p + r^2}.$$

Il est bon d'observer qu'en vertu de l'équation (41), jointe à la première des formules (36), 1_{np} sera le coefficient de r^n dans le développement du rapport $\frac{1}{1 - r_p}$ en une série ordonnée suivant les puissances ascendantes et entières du module r. Donc, par suite, 1_{np} sera le coefficient de $\frac{1}{r}$, dans le développement du rapport

$$\frac{1}{(1 - r_p)\, r^{n+1}},$$

et, en adoptant les notations du calcul des résidus, on tirera de la formule (41)

$$(45)\qquad 1_{np} = \mathcal{E}\,\frac{1}{(1 - r_p)\,((r^{n+1}))},$$

ou, ce qui revient au même,

$$(46)\qquad 1_{np} = \mathcal{E}\,\frac{1 - r_{-p}}{(1 - 2r\cos p + r^2)\,((r^{n+1}))}.$$

Si, dans les deux membres de cette dernière formule, on égale entre elles les quantités purement algébriques et celles qui représentent les coefficients de i, on trouvera

$$(47)\qquad \cos np = \mathcal{E}\,\frac{1 - r\cos p}{(1 - 2r\cos p + r^2)\,((r^{n+1}))},$$

et

$$(48)\qquad \sin np = \mathcal{E}\,\frac{r\sin p}{(1 - 2r\cos p + r^2)\,((r^{n+1}))}.$$

On pourrait d'ailleurs déduire immédiatement les formules (47) et (48) des équations (43), (44). Ajoutons que les équations (47) et (48) pourront encore être présentées sous les formes

$$\cos np = \mathcal{E}\,\frac{1}{2}\left(1 + \frac{1-r^2}{1-2r\cos p + r^2}\right)\frac{1}{((r^{n+1}))}, \tag{49}$$

$$\sin np = \sin p\,\mathcal{E}\,\frac{r}{1-2r\cos p + r^2}\,\frac{1}{((r^{n+1}))}. \tag{50}$$

Nous avons rappelé plus haut les deux équations qui se déduisent immédiatement du théorème de Moivre, et qui transforment le cosinus et le sinus de l'arc np en fonctions entières du cosinus de l'arc p. Si, au théorème de Moivre, on substitue l'équation (46), ou, ce qui revient au même, les équations (49) et (50), on pourra en déduire immédiatement celles qui transforment $\cos np$ et $\frac{\sin np}{\sin p}$ en fonctions entières de $\cos p$. Effectivement, comme on a

$$\frac{1}{1-2r\cos p + r^2} = \mathop{\mathrm{S}}_{m=0}^{m=\infty} \frac{(2r\cos p)^m}{(1+r^2)^{m+1}}, \tag{51}$$

on conclura des formules (49) et (50) que le coefficient des $\cos^m p$ se réduit, dans le développement de $\cos np$, à

$$2^{m-1}\,\mathcal{E}\,\frac{1-r^2}{(1+r^2)^{m+1}}\,\frac{1}{((r^{n-m+1}))}, \tag{52}$$

et, dans le développement du rapport $\frac{\sin np}{\sin p}$, à

$$2^m\,\mathcal{E}\,\frac{1}{(1+r^2)^{m+1}}\,\frac{1}{((r^{n-m}))}. \tag{53}$$

D'ailleurs l'expression (52) se réduit, pour $m = n$, ou, ce qui revient au même, pour une valeur nulle de $n - m$, à 2^{n-1}, pour une valeur impaire de $n - m$ à zéro, et pour une valeur paire, mais positive, de $n - m$, à

$$(-1)^{\frac{n-m}{2}}\,\frac{m(m+1)\ldots\frac{n+m-2}{2}}{1.2\ldots\frac{n-m}{2}}\,\frac{n}{m}\,2^{m-1}. \tag{54}$$

Au contraire, l'expression (53) se réduit, pour $n = m + 1$, ou, ce qui revient au même, pour une valeur nulle de $n - m - 1$ à 2^{n-1}, pour

une valeur paire de $n - m$ à zéro, et pour une valeur impaire de $n - m$ plus grande que l'unité, à

$$(-1)^{\frac{n-m-1}{2}}\,\frac{(m+1)(m+2)\ldots\frac{n+m-1}{2}}{1.2\ldots\frac{n-m-1}{2}}\,2^m. \tag{55}$$

Cela posé, les équations (49) et (50) reproduiront immédiatement les formules connues

$$\cos np = 2^{n-1}\left[\cos^n p - \frac{n}{4}\cos^{n-2} p + \frac{n}{4}\,\frac{n-3}{8}\cos^{n-4} p \right.$$
$$\left. - \frac{n}{4}\,\frac{n-3}{8}\,\frac{n-4}{12}\cos^{n-6} + \ldots\right], \tag{56}$$

$$\sin np = 2^{n-1}\sin p\left[\cos^{n-1} p - \frac{n-2}{4}\cos^{n-3} p + \frac{n-2}{4}\,\frac{n-3}{8}\cos^{n-5} p + \ldots\right]. \tag{57}$$

Si, dans l'équation (56), on pose $n = 3$, on retrouvera la formule

$$\cos 3p = 4\cos^3 p - 3\cos p, \tag{58}$$

qui fournit le moyen de ramener la résolution d'une équation du troisième degré, quand les trois racines sont réelles, au problème de la trisection d'un angle donné [*voir* l'*Analyse algébrique*].

MÉMOIRE

SUR LES

FONCTIONS ENTIÈRES D'UN DEGRÉ INFINI

ET EN PARTICULIER SUR LES EXPONENTIELLES

I. — *Considérations générales.*

On sait que les puissances à exposants variables, autrement appelées *exponentielles*, peuvent être considérées comme des fonctions entières composées d'un nombre infini de termes. Ainsi, par exemple, pour définir l'exponentielle e^z, e étant la base des logarithmes népériens, et z une quantité algébrique variable, il suffirait de dire que e^z est la somme de la série toujours convergente

$$1, \quad \frac{z}{1}, \quad \frac{z^2}{1.2}, \quad \frac{z^3}{1.2.3}, \quad \ldots,$$

ou bien encore, la limite vers laquelle converge, pour des valeurs croissantes du nombre entier m, la fonction entière

$$\left(1+\frac{z}{m}\right)^m.$$

Il y a plus : lorsqu'on adopte une telle définition, il est naturel de l'étendre au cas même où la variable z cesse d'être algébrique ; et l'on se trouve ainsi conduit, par la considération des fonctions entières de degré infini, à la notion des exponentielles à exposants quelconques.

Il convient de donner quelques développements à cette proposition, et de montrer comment elle se lie aux principes établis dans les articles précédents. C'est ce que je vais essayer de faire en peu de mots.

II. — *Sur les fonctions entières d'un degré infini.*

Soit $z = r_p$ une quantité géométrique variable dont r désigne le module et p l'argument. Une fonction entière de z ne sera autre chose [page 167] (¹) qu'une somme de termes proportionnels à des puissances entières et positives de z, le degré de la puissance la plus élevée étant ce qu'on nomme le *degré de la fonction*. Par suite, la forme générale d'une fonction de z, entière et du degré n, sera

$$a + bz + cz^2 + \ldots + gz^{n-1} + hz^n,$$

$a, b, c, \ldots, g, h$ désignant des coefficients constants dont chacun pourra être une quantité géométrique.

Concevons maintenant que les divers termes dont se compose la fonction entière appartiennent à la série,

$$(1) \qquad a_0, \quad a_1 z, \quad a_2 z^2, \quad \ldots, \quad a_n z^n, \quad \ldots$$

indéfiniment prolongée. Si l'on désigne par s_n la somme des n premiers termes de cette série, on aura

$$(2) \qquad s_n = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots + a_{n-1} z^{n-1};$$

et s_n, s_{n+1} seront deux fonctions entières de z, la première du degré $n - 1$, la seconde du degré n. Si, d'ailleurs, n vient à croître indéfiniment, la somme s_n pourra converger ou ne pas converger vers une limite fixe. Dans le premier cas, la série sera dite *convergente*, et la *somme* de la série, c'est-à-dire la limite s de s_n, déterminée par la formule

$$(3) \qquad s = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots,$$

(¹) *Œuvres de Cauchy*, ce tome, p. 186.

sera ce qu'on peut appeler une *fonction entière d'un degré infini*. Dans le second cas, la série sera *divergente*, et n'aura pas de somme.

D'autre part, si l'on nomme a_n le module de a_n, et a la limite ou la plus grande des limites vers lesquelles converge, pour des valeurs croissantes de n, l'expression

$$\sqrt[n]{\mathrm{a}_n} = \mathrm{a}_n^{\frac{1}{n}},$$

a sera le *module* de la série

$$(4) \qquad a_0, \quad a_1, \quad a_2, \quad \ldots$$

dont le terme général est a_n; $\mathrm{a}r$ sera le module de la série (1) dont le terme général est $a^n z_n$ [tome III, pages 388 et suivantes (¹)]; et la série (1) sera *convergente* ou *divergente*, suivant que le module $\mathrm{a}r$ sera inférieur ou supérieur à l'unité, ou, ce qui revient au même, suivant que le module r de z sera inférieur ou supérieur à $\frac{1}{\mathrm{a}}$. En conséquence la série (1) sera toujours divergente si l'expression $(\mathrm{a}_n)^{\frac{1}{n}}$, croissant indéfiniment avec n, a pour limite l'infini, puisque alors $\frac{1}{\mathrm{a}}$ deviendra

$$\frac{1}{\infty} = 0.$$

C'est ce qui arrivera, par exemple, si a_n et, par suite, a_n se réduisent au produit

$$1.2.3\ldots n,$$

puisque alors on aura [*voir* la page 206 (²)]

$$(\mathrm{a}_n)^{\frac{1}{n}} = (1.2\ldots n)^{\frac{1}{n}} > \sqrt{n},$$

et, par conséquent,

$$\mathrm{a} = \lim (\mathrm{a}_n)^{\frac{1}{n}} = \infty.$$

Au contraire, la série (1) sera toujours convergente si l'expression $(\mathrm{a}_n)^{\frac{1}{n}}$, décroissant indéfiniment pour des valeurs croissantes de n, a

(¹) *Œuvres de Cauchy*, Série II, t. XIII, p. 437.
(²) *Œuvres de Cauchy*, ce tome, p. 236.

pour limite zéro, puisque alors $\frac{1}{\mathrm{a}}$ deviendra

$$\frac{1}{0}=\infty.$$

C'est ce qui arrivera, par exemple, si a_n et, par suite, a_n se réduisent au rapport

$$\frac{1}{1.2\ldots n},$$

puisque alors on aura

$$(\mathrm{a}_n)^{\frac{1}{n}}=\frac{1}{(1.2\ldots n)^{\frac{1}{2}}}<\frac{1}{\sqrt{n}},$$

et, par suite,

$$\mathrm{a}=\lim(\mathrm{a}_n)^{\frac{1}{n}}=0.$$

Donc la série

$$(5) \qquad 1,\quad \frac{z}{1},\quad \frac{z^2}{1.2},\quad \frac{z^3}{1.2.3},\quad \ldots,$$

dont le terme général est

$$\frac{z^n}{1.2\ldots n},$$

ne cesse jamais d'être convergente; et à une valeur finie quelconque, algébrique ou géométrique, de la variable z correspond toujours une fonction entière s, d'un degré infini, propre à représenter la somme de cette série, et déterminée par la formule

$$(6) \qquad s=1+\frac{z}{1}+\frac{z^2}{1.2}+\ldots.$$

Si le module a de la série (4) offrait non plus une valeur nulle ou infinie, mais une valeur finie différente de zéro, la somme s de la série (1), ou, ce qui revient au même, la fonction entière de z, représentée par le second membre de l'équation (3), subsisterait pour $r<\frac{1}{\mathrm{a}}$, et disparaîtrait pour $r>\frac{1}{\mathrm{a}}$. Ainsi, par exemple, en sommant la progression géométrique

$$(7) \qquad 1,\quad z,\quad z^2,\quad \ldots$$

dont le terme général est z^n, on obtiendra la fonction entière

$$(8) \qquad 1+z+z^2+\ldots$$

qui subsistera, et sera équivalente au rapport $\frac{1}{1-z}$, tant que le module r de z sera inférieur à l'unité. Mais la fonction entière $1+z+z^2+\ldots$ cessera d'exister si la progression (7) est divergente, ou ce qui revient au même, si le module r de z est supérieur à l'unité.

III. — *Sur la limite vers laquelle converge,*
pour des valeurs croissantes de m, l'expression $\left(1+\frac{z}{m}\right)^m$.

Soient z une quantité géométrique variable, et m un nombre entier quelconque. On aura, en vertu de la formule de Newton,

$$(1) \qquad (1+z)^m=1+mz+\frac{m(m-1)}{1.2}z^2+\ldots+\frac{m(m-1)}{1.2}z^{m-2}+mz^{m-1}+z^m,$$

et, par suite,

$$(2) \qquad \left(1+\frac{z}{m}\right)^m=1+z+\left(1-\frac{1}{m}\right)\frac{z^2}{1.2}+\left(1-\frac{1}{m}\right)\left(1-\frac{2}{m}\right)\frac{z^3}{1.2.3}+\ldots+\frac{z^m}{m^m}.$$

Dans le second membre de la formule (2), le terme général, ou proportionnel à z^n, se réduit, pour $n>m$, à zéro, et pour $n=$ ou $<m$, à

$$(3) \qquad \left(1-\frac{1}{m}\right)\left(1-\frac{2}{m}\right)\cdots\left(1-\frac{n-1}{m}\right)\frac{z^n}{1.2\ldots n},$$

c'est-à-dire au produit de la quantité

$$(4) \qquad \left(1-\frac{1}{m}\right)\left(1-\frac{2}{m}\right)\cdots\left(1-\frac{n-1}{m}\right),$$

par le terme général

$$\frac{z^n}{1.2\ldots n}$$

de la série

$$(5) \qquad 1,\quad \frac{z}{1},\quad \frac{z^2}{1.2},\quad \frac{z^3}{1.2.3},\quad \ldots$$

D'ailleurs, en vertu de la formule (5) de la page 207 [1], la quantité (4), toujours inférieure à l'unité, ne peut s'abaisser, quand m surpasse n, au-dessous de la différence

$$1-\frac{n(n-1)}{2m}. \tag{6}$$

Donc, si l'on fait croître m indéfiniment, en laissant n invariable, l'expression (3), c'est-à-dire le terme général du développement de la puissance

$$\left(1+\frac{z}{m}\right)^m,$$

convergera vers une limite équivalente au terme général de la série (5). Il est naturel d'en conclure que cette puissance elle-même sera équivalente à la somme de la série (5), et que, si pour abréger, on désigne cette somme à l'aide de la notation $[z]$, en posant

$$[z]=1+\frac{z}{1}+\frac{z^2}{1.2}+\frac{z^3}{1.2.3}+\ldots, \tag{7}$$

on aura, en faisant converger le nombre entier m vers la limite ∞,

$$\lim\left(1+\frac{z}{m}\right)^m=[z]. \tag{8}$$

Il importe d'ailleurs d'établir cette conclusion d'une manière rigoureuse. On y parvient aisément comme il suit :

Le coefficient numérique du rapport

$$\frac{z^n}{1.2\ldots n},$$

dans le second membre de la formule (2), étant toujours compris entre les limites

$$1, \quad 1-\frac{n(n-1)}{2m}$$

pour $n =$ ou $< m$, et toujours nul pour $n > m$, il est clair que, si l'on représente le coefficient dont il s'agit par $1-\alpha_n$, α_n sera un nombre qui vérifiera, pour $n =$ ou $< m$, la condition

$$\alpha_n = \text{ ou } < \frac{n(n-1)}{2m}, \tag{9}$$

[1] *Œuvres de Cauchy*, ce tome, p. 237.

et, pour $n > m$, la condition

$$\alpha_n = 1,$$

de laquelle on tirera, en supposant $m > 1$, et, par suite, $n > 2$,

$$\alpha_n = 1 < \frac{n-1}{2} < \frac{n}{m}\,\frac{n-1}{2}. \tag{10}$$

Cela posé, la formule (2) deviendra

$$\begin{aligned}\left(1+\frac{z}{m}\right)^m &= 1+z+(1-\alpha_2)\frac{z^2}{1.2}+(1-\alpha_3)\frac{z^3}{1.2.3}+\ldots\\ &= 1+\frac{z}{2}+\frac{z^2}{1.2}+\ldots-\alpha_2\frac{z^2}{1.2}-\alpha_3\frac{z^3}{1.2.3}-\ldots,\end{aligned}$$

ou, ce qui revient au même, eu égard à l'équation (7),

$$\left(1+\frac{z}{m}\right)^m=[z]+\delta, \tag{11}$$

la valeur de δ étant

$$\delta=\alpha_2\frac{z^2}{1.2}+\alpha_3\frac{z^3}{1.2.3}+\ldots=\mathop{\mathrm{S}}_{n=2}^{n=\infty}\alpha_n\frac{z^n}{1.2\ldots n}. \tag{12}$$

D'ailleurs le coefficient α_n ne pouvant, en vertu des formules (9) et (10), surpasser le rapport $\frac{n(n-1)}{2m}$, il est clair que, si l'on nomme r le module de z, le module du produit

$$\alpha_n\frac{z^n}{1.2\ldots n}$$

sera, pour une valeur quelconque de n, toujours égal ou inférieur à la quantité

$$\frac{n(n-1)}{2m}\,\frac{r^n}{1.2\ldots n}=\frac{r^2}{2m}\,\frac{r^{n-2}}{1.2\ldots(n-2)}.$$

Donc on tirera de la formule (12)

$$\operatorname{mod}\delta<\frac{r^2}{2m}\left(1+\frac{r}{1}+\frac{r^2}{1.2}+\ldots\right),$$

ou, ce qui revient au même,

$$\operatorname{mod}\delta<\frac{r^2}{2m}[r]. \tag{13}$$

Or, il suit évidemment de la formule (13) que si, en attribuant à la variable z et par conséquent à son module r une valeur finie quelconque on fait croître indéfiniment le nombre entier m, le module de δ convergera vers la limite zéro. Donc, dans la même hypothèse, la valeur de $\left(1+\frac{z}{m}\right)^m$ déterminée par la formule (11) convergera vers la limite $[z]$, et l'on se trouvera ainsi ramené à l'équation (8).

Si à la variable z, supposée indépendante du nombre m, on substitue une variable

$$\zeta = \rho_{\varpi}$$

qui dépende de ce nombre, et qui, pour des valeurs croissantes de m, converge, avec son module ρ, vers la limite zéro, alors, à la place de la formule (11), on obtiendra la suivante

$$(14)\qquad \left(1+\frac{\zeta}{m}\right)^m = [\zeta] - \varepsilon,$$

ε étant une quantité géométrique dont le module vérifiera la condition

$$(15)\qquad \operatorname{mod}\varepsilon < \frac{\rho^2}{2m}[\rho].$$

D'ailleurs, tandis que ρ s'approchera indéfiniment de zéro, la quantité

$$[\rho] = 1 + \frac{\rho}{1} + \frac{\rho^2}{1.2} + \ldots,$$

toujours inférieure à

$$1 + \rho + \rho^2 + \ldots = \frac{1}{1-\rho},$$

s'approchera indéfiniment de l'unité, et le produit $\rho^2[\rho]$ de zéro. Donc, si ζ dépend de m, et si, en faisant croître indéfiniment le nombre m, on voit le module ρ de ζ converger vers la limite zéro, ε et son module convergeront vers la même limite en vertu de la formule (15); et, comme le module de

$$[\zeta] = 1 + \frac{\zeta}{1} + \frac{\zeta^2}{1.2} + \ldots$$

sera inférieur à $[\rho]$, par conséquent à $\frac{1}{1-\rho}$, la limite de $[\zeta]$ sera l'unité.

Donc la formule (14) donnera

$$(16)\qquad \lim\left(1+\frac{\zeta}{m}\right)^m = 1.$$

IV. — *Sur les exponentielles.*

Soient z, z' deux quantités géométriques distinctes, et m un nombre entier qui croisse indéfiniment. On trouvera

$$(1)\qquad \left(1+\frac{z}{m}\right)\left(1+\frac{z'}{m}\right) = 1 + \frac{z+z'}{m} + \frac{zz'}{m^2}.$$

Par suite, en considérant $\frac{1}{m}$ comme une quantité infiniment petite du premier ordre, et en négligeant, dans le second membre de la formule (1), le terme infiniment petit du second ordre $\frac{zz'}{m^2}$, on aura sensiblement

$$\left(1+\frac{z}{m}\right)\left(1+\frac{z'}{m}\right) = 1 + \frac{z+z'}{m}.$$

On aura, au contraire, en toute rigueur

$$(2)\qquad \left(1+\frac{z}{m}\right)\left(1+\frac{z'}{m}\right) = \left(1+\frac{z+z'}{m}\right)\left(1+\frac{\zeta}{m}\right),$$

si l'on choisit ζ de manière à vérifier la condition

$$\frac{zz'}{m^2} = \left(1+\frac{z+z'}{m}\right)\frac{\zeta}{m},$$

ou, ce qui revient au même, si l'on pose

$$(3)\qquad \zeta = \frac{1}{m}\,\frac{zz'}{1+\frac{z+z'}{m}}.$$

Or, en vertu de la formule (3), ζ sera une quantité géométrique qui dépendra du nombre m, et qui convergera vers la limite zéro, quand ce nombre croîtra indéfiniment. Cela posé, on tirera évidemment de la formule (2) : 1° en élevant les deux membres à la $m^{\text{ième}}$ puissance,

$$(4)\qquad \left(1+\frac{z}{m}\right)^m\left(1+\frac{z'}{m}\right)^m = \left(1+\frac{z+z'}{m}\right)^m\left(1+\frac{\zeta}{m}\right)^m;$$

2° en faisant croître indéfiniment le nombre m, et ayant égard aux formules (8) et (16) du paragraphe III,

$$[z][z'] = [z + z'].$$

On peut donc énoncer la proposition suivante :

Théorème I. — *Si l'on désigne par z, z' deux quantités géométriques distinctes, et par $[z]$ la somme de la série toujours convergente*

$$(5) \qquad 1, \quad \frac{z}{1}, \quad \frac{z^2}{1.2}, \quad \frac{z^3}{1.2.3}, \quad \ldots,$$

dont le terme général est $\frac{z^n}{1.2\ldots n}$, *on aura*

$$(6) \qquad [z][z'] = [z + z'].$$

Corollaire. — En attribuant à z, z' des valeurs purement algébriques, et raisonnant comme dans un précédent article [pages 199 et 200 ([1])], on tirera de la formule (5) l'équation

$$(7) \qquad [z] = [1]^z.$$

D'ailleurs la quantite ici désignée par le symbole $[1]$, c'est-à-dire la somme

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{2.3.4} + \ldots = 2,7182818\ldots$$

est précisément le nombre qui sert de base aux logarithmes népériens et que l'on représente ordinairement par la lettre e. Donc la formule (5) donnera

$$[z] = e^z.$$

On peut donc énoncer la proposition suivante :

Théorème II. — *Si l'on désigne par z une quantité purement algébrique il suffira, pour obtenir la somme $[z]$ de la série*

$$1, \quad \frac{z}{1}, \quad \frac{z^2}{1.2}, \quad \frac{z^3}{1.2.3}, \quad \ldots$$

d'élever le nombre

$$e = 2,7182818\ldots$$

([1]) *Œuvres de Cauchy*, ce tome, p. 225.

à la puissance dont le degré est marqué par l'exposant z; de sorte qu'on aura

$$(8) \qquad [z] = e^z.$$

Corollaire. — Si dans la formule (8) on remplace z par az, a étant une quantité algébrique positive ou négative, on trouvera

$$(9) \qquad [az] = e^{az}.$$

Si d'ailleurs on pose

$$(10) \qquad e^a = \mathrm{A},$$

A sera une quantité positive, supérieure ou inférieure à l'unité, suivant que l'exposant a sera positif ou négatif; et comme, en élevant à la puissance z les deux membres de l'équation (10), on trouvera

$$e^{az} = \mathrm{A}^z,$$

la formule (10) entrainera la suivante,

$$(11) \qquad [az] = \mathrm{A}^z.$$

Les puissances à exposants variables, renfermées dans les formules (8), (11), et représentées par les notations

$$e^z, \quad \mathrm{A}^z$$

sont ce qu'on appelle des *exponentielles*. L'exposant z de chacune de ces puissances est ce qu'on nomme le *logarithme* de l'exponentielle e^z ou A^z dans le *système* dont la base est le nombre e ou A. Le logarithme qui correspond à une valeur donnée de l'exponentielle, dans un système de logarithmes donnés, dépend évidemment de cette valeur même et de la base du système. On sait que Néper, inventeur des logarithmes, en publiant sa découverte dans l'ouvrage intitulé : *Mirifici logarithmorum canonis Descriptio*, adopta d'abord le système correspondant à la base e. C'est pour ce motif que l'on donne aux logarithmes calculés dans le système dont la base est e, le nom de *logarithmes népériens*, et à l'exponentielle e^z le nom *d'exponentielle népérienne*.

Cela posé, il suit du deuxième théorème, joint à la formule (8) du paragraphe III, que, dans le cas où z désigne une quantité algébrique, l'exponentielle népérienne e^z coïncide non seulement avec la somme de la série

$$1,\quad \frac{z}{1},\quad \frac{z^2}{1.2},\quad \frac{z^3}{1.2.3},\quad \dots,$$

mais encore avec la limite vers laquelle converge, pour des valeurs croissantes du nombre entier m, l'expression

$$\left(1+\frac{z}{m}\right)^m.$$

Donc, pour des valeurs algébriques de z, l'exponentielle népérienne e^z pourrait être définie à l'aide de l'une quelconque des deux formules

$$(12)\qquad e^z = 1+\frac{z}{1}+\frac{z^2}{1.2}+\frac{z^3}{1.2.3}+\dots;$$

$$(13)\qquad e^z = \lim\left(1+\frac{z}{m}\right)^m.$$

Il y a plus; rien n'empêche d'étendre ces deux formules au cas même où l'exposant z est une quantité géométrique, et de considérer alors chacune d'elles comme propre à fournir une définition de l'exponentielle népérienne e^z.

Quant à l'exponentielle A^z, dont la base A est un nombre quelconque, il suffit, pour la définir généralement, quelle que soit la valeur algébrique ou géométrique de l'exposant z, d'étendre la formule (11), au cas même où cet exposant cesse d'être une quantité algébrique. Cette extension étant admise, la définition générale de l'exponentielle A^z sera fournie par l'équation

$$(14)\qquad A^z = e^{az},$$

ou, ce qui revient au même, par l'équation

$$(15)\qquad A^z = 1+\frac{az}{1}+\frac{a^2z^2}{1.2}+\frac{a^3z^3}{1.2.3}+\dots,$$

a étant une quantité algébrique choisie de manière que l'on ait

$$(16)\qquad A = e^a.$$

En d'autres termes, a sera simplement le logarithme népérien du nombre A.

V. — *Propriétés diverses des exponentielles.*

L'exponentielle népérienne e^z n'étant autre chose que la somme $[z]$ de la série convergente

$$1,\quad \frac{z}{1},\quad \frac{z^2}{1.2},\quad \frac{z^3}{1.2.3},\quad \dots,$$

il est clair que la formule

$$[z][z'] = [z+z'],$$

établie dans le paragraphe IV, pourra s'écrire comme il suit :

$$(1)\qquad e^z e^{z'} = e^{z+z'}.$$

On trouvera de même, en désignant par A une quantité algébrique positive ou négative, et remplaçant z par az, z' par az',

$$(2)\qquad e^{az}e^{az'} = e^{a(z+z')};$$

puis en posant

$$e^a = A,$$

on réduira l'équation (2) à la formule

$$(3)\qquad A^z A^{z'} = A^{z+z'}.$$

Il résulte des formules (2) et (3) que, pour opérer la multiplication de deux exponentielles relatives à la même base e ou A, il suffit d'ajouter les exposants. Lorsque z, z' se réduisent à des quantités algébriques, e^z, $e^{z'}$ ou A^z, $A^{z'}$ représentent des nombres dont z, z' sont les logarithmes. Alors les formules (1) et (3) mettent en évidence la propriété fondamentale des logarithmes, savoir, que, pour obtenir le logarithme du produit de deux nombres, il suffit d'ajouter entre eux les logarithmes de ces nombres.

Supposons maintenant que z soit une quantité géométrique, en sorte qu'on ait

$$z = x + y\mathrm{i},$$

x, y étant les coordonnées rectangulaires du point dont l'affixe est z. La formule (1) donnera

$$(4) \qquad e^z = e^x e^{y\mathrm{i}}.$$

D'ailleurs, en vertu de la formule (13) du paragraphe V, on aura

$$(5) \qquad e^{y\mathrm{i}} = \lim \left(1 + \frac{y\mathrm{i}}{m}\right)^m,$$

puis en posant, pour abréger,

$$(6) \qquad 1 + \frac{y\mathrm{i}}{m} = \rho_\varpi = 1_\varpi \rho,$$

on tirera de l'équation (5)

$$(7) \qquad e^{y\mathrm{i}} = \lim \rho_{m\varpi} = \lim \rho \lim 1_{m\varpi}.$$

On satisfait à l'équation (6), ou ce qui revient au même aux deux suivantes

$$(8) \qquad 1 = \rho \cos\varpi, \qquad \frac{y}{m} = \rho \sin\varpi,$$

en prenant

$$(9) \qquad \varpi = \operatorname{arc\,tang} \frac{y}{m}, \qquad \rho = \frac{1}{\cos\varpi};$$

et alors, pour des valeurs indéfiniment croissantes du nombre entier m, on voit l'argument ϖ converger vers la limite zéro, le module ρ vers la limite 1, et le produit

$$m\varpi = y \frac{\varpi}{\operatorname{tang}\varpi}$$

vers la limite y. Donc la formule (7) donnera généralement

$$(11) \qquad e^{y\mathrm{i}} = 1_y,$$

ou, ce qui revient au même,

$$(12) \qquad e^{y\mathrm{i}} = \cos y + \mathrm{i} \sin y.$$

L'équation (12), découverte par Euler, sert à exprimer en fonction des lignes trigonométriques, $\cos y$, $\sin y$, *l'exponentielle trigonométrique* $e^{y\mathrm{i}}$. La formule (11) est l'équation d'Euler, réduite à la forme la plus simple.

VI. — *Sur les exponentielles trigonométriques.*

Soient p un angle quelconque et m un nombre entier. Si l'on fait croitre ce nombre indéfiniment, ou, ce qui revient au même, si on le fait converger vers la limite ∞, on aura, en vertu de la formule (13) du paragraphe IV,

$$(1) \qquad e^{p\mathrm{i}} = \lim \left(1 + \frac{p}{m}\mathrm{i}\right)^m.$$

Si d'ailleurs on pose

$$(2) \qquad 1 + \frac{p}{m}\mathrm{i} = \rho_\varpi = \rho(\cos\varpi + \mathrm{i}\sin\varpi),$$

on en conclura

$$(3) \qquad 1 = \rho\cos\varpi, \qquad \frac{p}{m} = \rho\sin\varpi;$$

et il est clair que si l'on attribue au nombre m une valeur très considérable, de manière à rendre très petite la valeur numérique de $\frac{p}{m}$, on vérifiera les équations (3) en prenant

$$(4) \qquad \rho = \left(1 + \frac{p^2}{m^2}\right)^{\frac{1}{2}}, \qquad \varpi = \operatorname{arc\,tang} \frac{p}{m}.$$

Enfin, comme on tirera des formules (1) et (2)

$$e^{p\mathrm{i}} = \lim (\rho_\varpi)^m = \lim (\rho^m)_{m\varpi},$$

le module et l'argument de l'exponentielle $e^{p\mathrm{i}}$ seront évidemment les limites vers lesquelles convergeront, pour des valeurs croissantes de m, les quantités

$$(5) \qquad \rho^m = \left(1 + \frac{p^2}{m^2}\right)^{\frac{m}{2}} \quad \text{et} \quad m\varpi.$$

Mais, m venant à croitre indéfiniment, le rapport $\frac{p^2}{m}$ s'approchera indéfiniment de zéro; par suite, la quantité

$$\left[1+\frac{\left(\frac{p^2}{m}\right)}{m}\right]^m=\left(1+\frac{p^2}{m^2}\right)^m$$

et sa racine carrée

$$\left(1+\frac{p^2}{m^2}\right)^{\frac{m}{2}}$$

s'approcheront indéfiniment de l'unité. Alors aussi, ϖ venant à s'approcher indéfiniment de zéro, on verra le rapport $\frac{\varpi}{\operatorname{tang}\varpi}$ converger vers la limite 1, et le produit

$$m\varpi=p\frac{\varpi}{\operatorname{tang}\varpi}$$

vers la limite p. Donc, en résumé, l'exponentielle $e^{p\mathrm{i}}$ a pour module l'unité, et pour argument l'angle p; et l'on a identiquement

$$(6)\qquad e^{p\mathrm{i}}=1_p=\cos p+\mathrm{i}\sin p.$$

Il suit de cette dernière formule que, dans l'exponentielle $e^{p\mathrm{i}}$, la partie purement algébrique et le coefficient de i se confondent avec les deux lignes trigonométriques appelées le *cosinus* et le *sinus* de l'argument p. C'est pour ce motif que nous donnons à $e^{p\mathrm{i}}$ le nom *d'exponentielle trigonométrique*.

Nous avons remarqué, dans le paragraphe IV, que l'on a pour toute valeur finie de z

$$e^z=1+\frac{z}{1}+\frac{z^2}{1.2}+\frac{z^3}{1.2.3}+\ldots.$$

Si donc, dans l'équation précédente, on pose $z=p\mathrm{i}$, et, par suite,

$$e^z=e^{p\mathrm{i}}=\cos p+\mathrm{i}\sin p,$$

on trouvera

$$(7)\qquad \cos p+\mathrm{i}\sin p=1+\frac{p}{1}\mathrm{i}-\frac{p^2}{1.2}-\frac{p^3}{1.2.3}\mathrm{i}+\ldots,$$

et il suffira d'égaler entre elles, dans les deux membres de l'équa-

tion (7), d'une part, les parties algébriques, d'autre part, les coefficients de i, pour retrouver les formules connues

$$(8)\qquad \cos p=1-\frac{p^2}{1.2}+\frac{p^4}{1.2.3.4}-\ldots,\qquad \sin p=\frac{p}{1}-\frac{p^3}{1.2.3}+\ldots,$$

qui servent à développer $\cos p$ et $\sin p$ suivant les puissances ascendantes de l'angle p.

Remarquons en finissant que, si l'on représente par x, y, les coordonnées rectangulaires, et par z l'affixe d'un point situé dans un certain plan, en sorte qu'on ait

$$z=x+y\mathrm{i},$$

l'équation (4) du paragraphe IV, savoir :

$$(9)\qquad e^z=e^xe^{y\mathrm{i}},$$

donnera, eu égard à la formule (6),

$$(10)\qquad e^z=e^x1_y.$$

Donc l'exponentielle

$$e^z=e^{x+y\mathrm{i}}$$

aura pour module le nombre e^x et pour argument la quantité y.

Si la quantité géométrique z' était conjuguée à z, en sorte qu'on eût

$$z'=x-y\mathrm{i},$$

alors, à la place de l'équation (9), on obtiendrait la suivante :

$$(11)\qquad e^{z'}=e^xe^{-y\mathrm{i}},$$

que l'on pourrait encore écrire comme il suit :

$$(12)\qquad e^{z'}=e^x1_{-y};$$

en vertu des formules (9) et (11) jointes à l'équation (6), les exponentielles e^z, $e^{z'}$ seraient, ainsi que z et z', deux quantités géométriques conjuguées.

MÉMOIRE

SUR LES

DIVERS LOGARITHMES D'UNE QUANTITÉ GÉOMÉTRIQUE

Soit z une quantité géométrique. Les divers *logarithmes* de z, dans le système qui aura pour *base* un nombre donné A, seront les diverses valeurs d'une quantité géométrique Λ déterminée par l'équation

$$\mathrm{A}^{\Lambda} = z. \tag{1}$$

Si, en réduisant le nombre A à la base

$$e = 2,7182818\ldots$$

des *logarithmes népériens*, on désigne par λ l'un quelconque des logarithmes népériens de z, on aura simplement

$$e^{\lambda} = z. \tag{2}$$

Soient maintenant r le module et p l'argument de z, en sorte qu'on ait

$$z = r_p = 1_p r = r\cos p + \mathrm{i}\, r \sin p;$$

et posons

$$x = r\cos p, \qquad y = r\sin p.$$

A chaque valeur de

$$z = x + y\mathrm{i}$$

correspondra un système unique de valeurs algébriques de x, y, propres à représenter les coordonnées rectangulaires du point dont z sera l'affixe. Au contraire, à chaque valeur de z correspondra une infinité de valeurs de l'argument p; et, comme ces valeurs se réduiront aux divers termes d'une progression arithmétique dont la raison sera la circonférence 2π, l'une d'elles sera généralement comprise entre les limites $-\pi$, $+\pi$. Si on la représente par la lettre ρ, la valeur générale de p sera

$$p = \rho + 2k\pi, \tag{3}$$

k désignant une quantité entière quelconque, positive, nulle ou négative.

Concevons à présent que l'on pose

$$\lambda = \alpha + \beta i,$$

α, β étant des quantités algébriques. On en conclura

$$e^\lambda = e^{\alpha+\beta i} = e^\alpha e^{\beta i} = 1_\beta e^\alpha.$$

Donc la quantité géométrique e^λ aura pour module e^α, pour argument β, et, en vertu de ce qui a été dit précédemment (p 217) ([1]), l'équation (2), que l'on pourra écrire comme il suit

$$1_\beta e^\alpha = 1_p r,$$

donnera

$$e^\alpha = r, \qquad 1_\beta = 1_p = 1_\rho.$$

Donc, si l'on désigne, à l'aide de la lettre caractéristique l, et par la notation $\mathrm{l}(r)$, le logarithme algébrique et népérien du nombre r, on aura

$$\alpha = \mathrm{l}(r), \qquad \beta = \rho + 2k\pi,$$

k désignant une quantité entière, et

$$\lambda = \mathrm{l}(r) + (\rho + 2k\pi)i. \tag{4}$$

En d'autres termes on aura

$$\lambda = \mathrm{l}(r) + pi, \tag{5}$$

la valeur de l'argument p étant l'une quelconque de celles que détermine la formule (3).

Il est bon d'observer que l'arc désigné, dans les formules précé-

([1]) *Œuvres de Cauchy*, ce tome, p. 246.

dentes, par la lettre ρ, est, de tous ceux qui ont pour cosinus $\frac{x}{r}$ et pour sinus $\frac{y}{r}$, le plus petit, abstraction faite du signe, et, par conséquent, celui qui s'évanouit quand la quantité géométrique z se réduit au module r. Par suite, si l'on pose $p = \rho$ dans la formule (5), on obtiendra celui des logarithmes népériens de z, qui se réduit à $\mathrm{l}(r)$ quand z se réduit à r, et qui, pour ce motif, sera généralement désigné par la notation $\mathrm{l}(z)$. Cela posé, on aura

$$\mathrm{l}(z) = \mathrm{l}(r) + \rho i, \tag{6}$$

et la formule (4) donnera

$$\lambda = \mathrm{l}(z) + \mathrm{I}, \tag{7}$$

la valeur de I étant

$$\mathrm{I} = 2k\pi i. \tag{8}$$

Si l'on réduit la quantité géométrique z à l'unité, on aura

$$\mathrm{l}(z) = \mathrm{l}(1) = 0,$$

et les diverses valeurs de λ se réduiront aux diverses valeurs de I fournies par l'équation (8). Ces diverses valeurs de I ne seront donc autre chose que les divers logarithmes népériens de l'unité, et il suffira d'ajouter ceux-ci à $\mathrm{l}(z)$ pour obtenir les divers logarithmes népériens de z.

Si la quantité géométrique z s'évanouit avec son module r, le logarithme népérien $\mathrm{l}(r)$ se réduira simplement à $-\infty$, c'est-à-dire à l'infini négatif; et la formule (6) donnera

$$\mathrm{l}(0) = -\infty + \rho i, \tag{9}$$

l'angle ρ restant indéterminé, et pouvant être arbitrairement choisi entre les limites $-\pi$, $+\pi$. On peut remarquer que, dans la même hypothèse, la dérivée de $\mathrm{l}(z)$, savoir, $\frac{1}{z}$, acquiert un module infini, l'argument restant indéterminé.

Enfin, si la quantité géométrique z se réduit à la quantité algébrique et négative $-r$, on aura

$$1_p = 1_\rho = -1,$$

par conséquent

$$1_\rho = 1_{\pm\pi};$$

et pour satisfaire à cette dernière formule, sans attribuer à ρ une valeur située hors des limites $-\pi$, $+\pi$, il faudra supposer, ou $\rho = \pi$, ou $\rho = -\pi$. L'équation (6) donnera, dans la première supposition,

$$(10)\qquad l(-r) = l(r) + \pi i,$$

dans la seconde

$$(11)\qquad l(-r) = l(r) - \pi i;$$

et il est clair que l'on pourrait, dans la détermination du logarithme népérien désigné par $l(-r)$, hésiter entre les formules (10) et (11). Pour faire disparaître toute incertitude, j'ai proposé, dans le troisième volume (p. 380) [1], d'adopter de préférence la formule (10). Mais on pourrait aussi, sans inconvénient grave, admettre que la fonction $l(z)$, dans laquelle le coefficient de i devient indéterminé, quand z s'évanouit, offre pour ce même coefficient deux valeurs distinctes, quant au signe, et données par les formules (10) et (11), dans le cas où, z étant réduit à $-r$, l'argument ρ cesse d'être renfermé entre les limites $-\pi$, $+\pi$, et où cet argument peut être censé atteindre l'une ou l'autre limite au gré du calculateur. Il y a plus, on sera naturellement conduit à la formule (10), si la quantité négative $-r$ entre dans le calcul comme limite d'une variable dans laquelle le coefficient de i se réduit à une quantité positive infiniment petite. On sera, au contraire, naturellement conduit à la formule (11), si la quantité $-r$ est la limite d'une variable dans laquelle le coefficient de i se réduit à une quantité négative infiniment petite. Ainsi, en définitive, il paraît convenable de ne point s'arrêter *à priori* à l'une des formules (10), (11) plutôt qu'à l'autre, et de laisser le calculateur libre de se déterminer dans le choix qu'il fera de l'une ou de l'autre, par des considérations

[1] *Œuvres de Cauchy*, série II, t. XIII, p. 426.

puisées dans la nature même de la question qu'il se proposera de résoudre.

L'opinion que je viens d'exprimer se trouve corroborée par la remarque suivante :

Si, dans la formule (6), on pose $r = 1$, et, par suite, $z = 1_p$, on trouvera

$$(12)\qquad l(1_p) = pi.$$

Cela posé, l'équation (6) donnera

$$(13)\qquad l(z) = l(r_p) = l(r) + l(1_p).$$

D'ailleurs il est naturel d'étendre les formules (12) et (13) au cas même où l'on a $1_p = -1$, et, par suite, $p = \pm\pi$. En admettant cette extension, on tirera de la formule (13)

$$(14)\qquad l(-r) = l(r) + l(-1),$$

et de la formule (12)

$$(15)\qquad l(-1) = \pm\pi i.$$

Or, de l'équation (14) jointe à l'équation (15) on déduira immédiatement ou la formule (10) ou la formule (11), suivant que l'on réduira le double signe renfermé dans l'équation (15) au signe + ou au signe —. En d'autres termes, si l'on pose $z = -r$, l'équation (6) sera remplacée par celle-ci

$$(16)\qquad l(-r) = l(r) \pm \pi i.$$

Remarquons encore que dans l'équation (15) ou (16) le double signe répond aux deux limites vers lesquelles converge l'argument p, tandis que dans l'expression

$$z = x + yi,$$

on pose $x = -1$, ou $x = -r$, en faisant converger la quantité positive ou négative y vers la limite zéro, tout comme dans l'équation

$$\frac{1}{0} = \pm\infty$$

(voir l'*Analyse algébrique*, p. 45), le double signe répond aux deux limites $+\infty$, $-\infty$ vers lesquelles converge l'expression

$$\frac{1}{x},$$

tandis que la quantité positive ou négative x s'approche indéfiniment de zéro.

Remarquons enfin que, si l'on désigne par z' la quantité géométrique conjuguée à z, en sorte qu'on ait non seulement

$$z = x + y\mathrm{i} = r_p,$$

mais encore

$$z' = x - y\mathrm{i} = r_{-p},$$

les deux fonctions de z désignées par les notations

$$\mathrm{l}(z),\quad \mathrm{l}(z'),$$

dont la première est définie par la formule (6) de la page 248 [1], seront deux quantités géométriques *conjuguées*. Ainsi, en vertu des conventions adoptées, $\mathrm{l}(z')$ sera conjuguée à $\mathrm{l}(z)$, tout comme $e^{z'}$ à e^{z}. Ajoutons que, si l'on fait converger les quantités conjuguées

$$z = r_p \quad \text{et} \quad z' = r_{-p}$$

vers la limite commune $-r$, en faisant converger p vers la limite π,

$$\mathrm{l}(z),\quad \mathrm{l}(z')$$

convergeront vers les limites

$$\mathrm{l}(r) + \pi\mathrm{i},\quad \mathrm{l}(r) - \pi\mathrm{i},$$

qui sont précisément les deux quantités conjuguées dont chacune peut être considérée comme une valeur de $\mathrm{l}(-r)$.

Revenons maintenant au cas où A est un nombre quelconque, et nommons a le logarithme algébrique et népérien de A, en sorte qu'on ait

$$a = \mathrm{l}(A),$$

et, par suite,

$$(17) \qquad A = e^{a}.$$

On aura encore

$$A^{A} = e^{aA}.$$

Donc l'équation (1) donnera

$$(18) \qquad e^{aA} = z = e^{\mathrm{l}(z)}.$$

[1] *Œuvres de Cauchy*, ce tome, p. 285.

En divisant par $e^{\mathrm{l}(z)}$ le premier et le dernier membre de la formule (18), on trouvera

$$(19) \qquad e^{aA - \mathrm{l}(z)} = 1.$$

Donc, la différence $aA - \mathrm{l}(z)$ sera l'un des logarithmes de l'unité, c'est-à-dire l'une des valeurs de I, et la valeur générale de A sera déterminée par l'équation

$$aA - \mathrm{l}(z) = \mathrm{I},$$

de laquelle on tirera

$$(20) \qquad A = \frac{\mathrm{l}(z) + \mathrm{I}}{a},$$

ou, ce qui revient au même, eu égard à la formule (7),

$$(21) \qquad A = \frac{\lambda}{a}.$$

On se trouve ainsi ramené au théorème connu dont voici l'énoncé :

Pour obtenir les divers logarithmes de z dans le système dont la base est le nombre A, il suffit de diviser les divers logarithmes népériens de z par le logarithme réel et népérien du nombre A.

Si l'on désigne à l'aide de la lettre caractéristique L, et par la notation $\mathrm{L}(r)$, le logarithme du nombre r dans le système dont la base est le nombre A, alors, en posant comme ci-dessus $a = \mathrm{L}(A)$, on aura

$$(22) \qquad \mathrm{L}(r) = \frac{\mathrm{l}(r)}{a}.$$

Il suffit d'étendre cette dernière formule au cas où le nombre r se trouve remplacé par une quantité géométrique z, pour obtenir l'équation

$$(23) \qquad \mathrm{L}(z) = \frac{\mathrm{l}(z)}{a},$$

qui sert à définir généralement la fonction $\mathrm{L}(z)$.

Les définitions que j'ai ici données de $\mathrm{l}(z)$ et de $\mathrm{L}(z)$ diffèrent de celles qui ont été adoptées par M. Björling, dans le cas seulement où l'argument représenté par la lettre p se trouve renfermé entre les limites $-\pi$, $-\frac{\pi}{2}$. Suivant cet auteur, dont les intéressantes recherches ont été déjà mentionnées dans le tome III (p. 387) [1], on devrait prendre pour valeur de ρ dans la formule (6) un angle qui, toujours inférieur à la limite $\frac{\pi}{2} + \pi$, ne s'abaissât jamais au-dessous de la limite $\frac{\pi}{2} - \pi$. Ajoutons que M. Björling a donné à la fonction $\mathrm{l}(z)$ ou $\mathrm{L}(z)$ le nom de *logarithme principal*. Nous conserverons ce nom; mais nous substituerons aux définitions données par M. Björling celles que fournissent les formules (6) et (10), quand on attribue à l'argument ρ une valeur numérique inférieure ou tout au plus égale à π. Il en résultera que les logarithmes principaux de deux quantités géométriques conjuguées seront encore deux quantités géométriques conjuguées.

Les deux fonctions de z, représentées par $\mathrm{l}(z)$ et $\mathrm{L}(z)$, jouissent, quand z se réduit à un nombre, de propriétés connues. Ces propriétés ne subsistent plus que sous certaines conditions, quand z est ou une quantité négative ou une quantité géométrique.

Ainsi, par exemple, si dans les équations

$$\mathrm{l}(rr') = \mathrm{l}(r) + \mathrm{l}(r'), \tag{24}$$
$$\mathrm{L}(rr') = \mathrm{L}(r) + \mathrm{L}(r'), \tag{25}$$

qui se vérifient généralement quand r, r' sont deux nombres quelconques, on remplace ces nombres par deux quantités géométriques z, z', on obtiendra les deux formules

$$\mathrm{l}(zz') = \mathrm{l}(z) + \mathrm{l}(z'), \tag{26}$$
$$\mathrm{L}(zz') = \mathrm{L}(z) + \mathrm{L}(z'), \tag{27}$$

qui ne seront pas toujours exactes. Si, pour fixer les idées, on suppose

$$z = r_p, \qquad z' = r'_{p'},$$

chacun des arguments p, p' étant compris entre les limites $-\pi$, $+\pi$; les formules (26), (27), dont la première jointe à l'équation (23) entraine la seconde, subsisteront quand la somme $p + p'$ sera comprise elle-même entre les limites $-\pi$, $+\pi$. Mais comme, pour réduire la

[1] *Œuvres de Cauchy*, série II, t. XIII, p. 435.

somme $p + p'$ à une quantité dont la valeur numérique ne surpasse pas le nombre π, on se verra obligé de faire croître ou décroître cette somme du nombre 2π, si elle est inférieure à $-\pi$, ou supérieure à π, on devra, eu égard à l'équation (6), remplacer l'équation (26) par la formule

$$\mathrm{l}(zz') = \mathrm{l}(z) + \mathrm{l}(z') + 2\pi i, \tag{28}$$

si la somme $p + p'$ est comprise entre les limites $-\pi$, -2π, et par la formule

$$\mathrm{l}(zz') = \mathrm{l}(z) + \mathrm{l}(z') - 2\pi i, \tag{29}$$

si la somme $p + p'$ est comprise entre les limites π, 2π.

Dans le cas particulier où z' se réduit à -1, on a simplement

$$zz' = -z.$$

Alors aussi, à la place de la formule (28) ou (29), on obtiendra l'équation

$$\mathrm{l}(-z) = \mathrm{l}(z) - \pi i, \tag{30}$$

si l'argument p de z est compris entre les limites 0, π, et l'équation

$$\mathrm{l}(-z) = \mathrm{l}(z) + \pi i, \tag{31}$$

si p est compris entre les limites 0, $-\pi$.

Si z, z' sont deux quantités géométriques conjuguées, les arguments p, p', réduits à des arcs renfermés entre les limites $-\pi$, $+\pi$, seront nécessairement égaux au signe près, mais affectés de signes contraires. On aura donc alors

$$p + p' = 0;$$

et, comme on aura aussi

$$r' = r, \qquad zz' = r_p r_{-p} = r^2,$$

l'équation (26) donnera

$$\mathrm{l}(z) + \mathrm{l}(z') = \mathrm{l}(r^2) = 2\,\mathrm{l}(r). \tag{32}$$

MÉMOIRE

SUR

LES PUISSANCES OU EXPONENTIELLES

DONT LES EXPOSANTS ET LES BASES SONT DES QUANTITÉS GÉOMÉTRIQUES

Soient z et u deux quantités constantes ou variables. Si ces quantités sont algébriques et positives, ou, en d'autres termes, si elles se réduisent à des nombres, on aura identiquement

$$z = e^{\mathrm{l}(z)}; \tag{1}$$

et, en élevant les deux membres de l'équation (1) à la puissance du degré u, on trouvera

$$z^u = e^{u\,\mathrm{l}(z)}. \tag{2}$$

D'ailleurs, pour que l'équation (2) s'étende au cas où z et u sont des quantités géométriques, il suffit d'admettre que, dans ce dernier cas, on se sert de cette équation même pour définir généralement la *puissance* ou *exponentielle* z^u dont la *base* est z, et l'*exposant* u. C'est ce que nous ferons désormais. Nous obtiendrons ainsi une définition de z^u qui comprendra évidemment comme cas particulier, non seulement la définition précédemment donnée [page 242] d'une exponentielle dont la base A est un nombre quelconque, mais aussi la définition donnée [page 163] d'une puissance entière d'une quantité géométrique. Effectivement, si la quantité géométrique u se réduit à un nombre entier n, et si d'ailleurs on pose

$$z = r_p,$$

p étant compris entre les limites $-\pi$, $+\pi$, l'équation (2) réduite à la suivante

$$z^n = e^{n\,\mathrm{l}(z)},$$

et combinée avec la formule

$$\mathrm{l}(z) = \mathrm{l}(r) + p\mathrm{i},$$

donnera

$$(3) \qquad z^n = e^{n\,\mathrm{l}(r) + np\mathrm{i}}.$$

D'ailleurs, eu égard à la formule (1) de la page 242, on aura

$$e^{n\,\mathrm{l}(r)+np\mathrm{i}} = e^{n\,\mathrm{l}(r)} e^{np\mathrm{i}} = r^n 1_{np} = (r^n)_{np}.$$

Donc l'équation (3) donnera simplement

$$z^n = (r^n)_{np},$$

ou, ce qui revient au même,

$$(4) \qquad (r_p)^n = (r^n)_{np}.$$

Or cette dernière formule coïncide avec l'équation (7) de la page 143, c'est-à-dire avec la formule à laquelle on est conduit lorsqu'on étend la définition généralement admise de la $n^{\text{ième}}$ puissance d'une quantité au cas même où cette quantité cesse d'être algébrique, en considérant une telle puissance comme le produit de n facteurs égaux entre eux.

Si, dans l'équation (2), la quantité géométrique z s'évanouit avec son module r, alors, la partie algébrique $\mathrm{l}(r)$ de $\mathrm{l}(z)$ étant réduite à $-\infty$, la valeur de z^u sera nulle si la partie algébrique de u est positive, et infinie si la partie algébrique de u est négative.

Si la quantité géométrique z se réduit à la quantité algébrique et négative $-r$, alors, comme il a été dit à la page 250, on pourra prendre pour valeur de z l'une ou l'autre des deux expressions

$$\mathrm{l}(r) + \pi\mathrm{i}, \quad \mathrm{l}(r) - \pi\mathrm{i},$$

et l'équation (2) fournira pour valeur correspondante de

$$(-r)^u$$

l'un ou l'autre des produits

$$1_{\pi u} r^u, \quad 1_{-\pi u} r^u.$$

Il y a plus; on sera naturellement conduit à la formule

$$(5) \qquad (-r)^u = 1_{\pi u} r^u,$$

si la quantité $-r$ entre dans le calcul comme limite d'une variable dans laquelle le coefficient de i se réduit à une quantité positive infiniment petite. On sera, au contraire, naturellement conduit à la formule

$$(6) \qquad (-r)^u = 1_{-\pi u} r^u,$$

si la quantité $-r$ est la limite d'une variable dans laquelle le coefficient de i se réduit à une quantité négative infiniment petite. Ainsi, en définitive, il parait convenable de ne point s'arrêter *a priori* à l'une des formules (5), (6) plutôt qu'à l'autre, et de laisser le calculateur libre de se déterminer dans le choix qu'il fera de l'une ou de l'autre par des considérations puisées dans la nature même de la question qu'il s'agira de résoudre.

En réunissant dans une seule formule les équations (5) et (6), on aura

$$(7) \qquad (-r)^u = 1_{\pm\pi u} r^u.$$

Si l'on pose en particulier $r = 1$, la formule (7) donnera

$$(8) \qquad (-1)^u = 1_{\pm\pi u}.$$

Par suite, la formule (7) entraînera la suivante,

$$(9) \qquad (-r)^u = (-1)^u r^u,$$

qui peut être substituée à chacune des équations (5) et (6).

Si l'on pose

$$u = \frac{1}{2},$$

la formule (8) donnera

$$(10)\qquad (-1)^{\frac{1}{2}} = \pm 1.$$

Ainsi, eu égard aux conventions admises, la notation $(-1)^{\frac{1}{2}}$ ou $\sqrt{-1}$ ne doit pas être uniquement employée pour représenter la quantité géométrique

$$\mathrm{i} = 1_{\frac{\pi}{2}}.$$

On peut aussi se servir de cette notation pour représenter la limite $-\mathrm{i}$ vers laquelle converge l'expression

$$(-1-\varepsilon\mathrm{i})^{\frac{1}{2}},$$

quand ε, étant positif, s'approche indéfiniment de zéro.

Observons maintenant que, si l'on pose comme ci-dessus

$$z = r_p,$$

l'argument p étant compris entre les limites $-\pi$, $+\pi$, on tirera généralement de l'équation (2), combinée avec la formule

$$\mathrm{l}(z) = \mathrm{l}(r) + p\mathrm{i},$$

et avec l'équation (1) de la page 242,

$$z^u = e^{u\mathrm{l}(r)} e^{up\mathrm{i}},$$

par conséquent

$$(11)\qquad z^u = r^u e^{up\mathrm{i}}.$$

La formule (11) pourrait servir aussi bien que la formule (2) à définir la fonction de z et u, représentée par la notation z^u.

La fonction de z et u, représentée par z^u, jouit, quand z ou u se réduit à un nombre, de propriétés connues. Parmi ces propriétés, quelques-unes continuent de subsister généralement, d'autres ne subsistent plus que sous certaines conditions, quand z et u sont deux quantités géométriques.

Ainsi, par exemple, eu égard à l'équation (2), la formule

$$(12)\qquad z^u z^{u'} = z^{u+u'}$$

subsistera généralement pour des valeurs quelconques des quantités géométriques u, u', non seulement quand z sera un nombre, mais encore quand z sera une quantité géométrique quelconque.

Au contraire, si dans l'équation

$$(13)\qquad (rr')^u = r^u r'^u,$$

qui se vérifie généralement quand r, r' sont deux nombres quelconques, on remplace ces nombres par des quantités géométriques z, z', on obtiendra la formule

$$(14)\qquad (zz')^u = z^u z'^u$$

qui ne sera pas toujours exacte. Effectivement, on aura, en vertu de l'équation (2),

$$(zz')^u = e^{u\mathrm{l}(zz')}$$
$$z^u z'^u = e^{u\mathrm{l}(z)} e^{u\mathrm{l}(z')} = e^{u[\mathrm{l}(z)+\mathrm{l}(z')]}.$$

Par suite l'équation (13) subsistera sous la même condition que la formule (26) de l'article précédent, c'est-à-dire dans le cas où les arguments p, p' de z et z', supposés tous deux compris entre les limites $-\pi$, $+\pi$, fourniront une somme $p+p'$ comprise entre les mêmes limites. Lorsque cette condition ne sera pas remplie, alors, en vertu de la formule (28) ou (29) de l'article précédent, jointe à l'équation

$$e^{p\mathrm{i}} = 1_p,$$

on aura

$$(15)\qquad (zz')^u = 1_{2\pi u} z^u z'^u,$$

si la somme $p+p'$ est comprise entre les limites $-\pi$, -2π, et

$$(16)\qquad (zz')^u = 1_{-2\pi u} z^u z'^u,$$

si la somme $p+p'$ est comprise entre les limites π, 2π.

Si l'on désigne par z' la quantité géométrique conjuguée à z, et par u' la quantité géométrique conjuguée à u, alors, en vertu des notations admises, aux trois quantités géométriques

$$\mathrm{l}(z),\quad u\,\mathrm{l}(z),\quad e^{u\mathrm{l}(z)} = z^u$$

correspondront les quantités géométriques conjuguées

$$\mathrm{l}(z'), \quad u'\mathrm{l}(z'), \qquad e^{u'\mathrm{l}(z')} = z'^{u'}.$$

Donc

$$z^u, \quad z'^u$$

seront deux quantités géométriques conjuguées.

L'équation (2) est précisément celle à l'aide de laquelle M. Björling a défini la fonction z^u. Mais, en vertu des conventions adoptées par cet auteur, p serait, dans l'équation (11), un angle qui, toujours inférieur à la limite $\frac{\pi}{2} + \pi$, ne s'abaisserait jamais au-dessous de la limite $\frac{\pi}{2} - \pi$. D'ailleurs, M. Björling a donné à l'expression z^u le nom de *puissance principale* du degré u. Nous conserverons ce nom, mais nous attribuerons à l'argument p de z, mis en évidence dans l'équation (11), une valeur numérique inférieure ou tout au plus égale à π. Il en résultera qu'en élevant deux quantités géométriques conjuguées à des puissances indiquées par des exposants conjugués, on obtiendra encore, pour puissances principales, des quantités géométriques conjuguées.

MÉMOIRE SUR LES ARGUMENTS

DE

DEUX QUANTITÉS GÉOMÉTRIQUES

DONT LA SOMME OU LE PRODUIT EST UNE QUANTITÉ ALGÉBRIQUE POSITIVE

I. — *Sur les arguments de deux quantités géométriques dont la somme est algébrique et positive.*

Considérons deux quantités géométriques dont la somme soit algébrique et positive. Soient d'ailleurs c la demi-somme, et

$$z = r_p$$

la demi-différence de ces deux quantités géométriques. Elles seront représentées par des binomes

$$c + z, \quad c - z;$$

et si l'on nomme ρ, ρ' leurs modules, ϖ, ϖ' leurs arguments, que nous supposerons tous deux compris entre les limites $-\pi$, π, on aura

$$(1) \qquad \begin{cases} \rho_\varpi = c + z = c + r_p, \\ \rho'_{\varpi'} = c - z = c - r_p, \end{cases}$$

par conséquent

$$(2) \qquad \begin{cases} \rho \cos\varpi = c + r\cos p, & \rho \sin\varpi = r\sin p, \\ \rho' \cos\varpi' = c - r\cos p, & \rho' \sin\varpi' = r\sin p. \end{cases}$$

On aura donc, d'une part,

$$(3) \qquad \rho\cos\varpi = c + r\cos p, \qquad \rho'\cos\varpi' = c - r\cos p;$$

et, d'autre part,

$$\rho \sin \varpi = -\rho' \sin \varpi' = r \sin p. \tag{4}$$

Observons maintenant qu'en vertu des formules (3) $\cos\varpi$, $\cos\varpi'$ seront positifs, si le module r de z est inférieur à la constante positive c. Donc alors, chacun des arguments ϖ, ϖ' étant compris entre les limites $-\frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{2}$, chacune des quantités

$$\varpi - \varpi', \quad \varpi + \varpi'$$

offrira une valeur numérique inférieure à π. J'ajoute que cette conclusion subsistera encore si le module r de z devient égal ou supérieur à l'unité. C'est en effet ce que l'on prouve aisément comme il suit.

D'abord il résulte de l'équation (4) que $\sin\varpi$, $\sin\varpi'$ sont des quantités affectées de signes contraires. Par suite, il en sera de même des arguments ϖ, ϖ', dont le plus grand offrira une valeur numérique égale à celle de la somme $\varpi + \varpi'$. Donc cette somme sera, comme chacun d'eux, renfermée entre les limites $-\pi$, $+\pi$.

De plus, si le module r, supposé d'abord inférieur à l'unité, vient à croître indéfiniment, mais par degrés insensibles, les angles ϖ, ϖ', dont les valeurs sont affectées de signes contraires, et la différence

$$\varpi - \varpi',$$

équivalente, au signe près, à la somme des valeurs numériques de ϖ et ϖ', varieront évidemment par degrés insensibles, jusqu'au moment où l'on aura, s'il est possible,

$$\varpi - \varpi' = \pm\pi,$$

par conséquent

$$\varpi' = \varpi \pm \pi.$$

Mais, dans ce dernier cas, on trouverait

$$\sin\varpi' = -\sin\varpi, \qquad \cos\varpi' = -\cos\varpi;$$

et la formule (4) donnerait

$$\rho' = \rho.$$

Par suite, on tirerait des formules (3)

$$\rho \cos\varpi - r\cos p = c = -c.$$

Cette dernière équation ne pouvant se vérifier que dans le cas où c serait nul, nous devons conclure que, dans le cas où c est positif, les arguments ϖ, ϖ' et leur différence $\varpi - \varpi'$ varieront pour des valeurs croissantes de r, par degrés insensibles, sans que jamais la valeur numérique de $\varpi - \varpi'$ puisse atteindre la limite π, qui surpasse cette valeur numérique quand on a $r < c$. On peut donc énoncer la proposition suivante :

Théorème I. — *Étant données deux quantités géométriques*

$$c + z, \quad c - z$$

dont la somme est une quantité algébrique et positive $2c$, *concevons que l'on réduise les arguments* ϖ, ϖ' *de ces deux quantités géométriques à des angles renfermés entre les limites* $-\pi$, $+\pi$. *Les angles*

$$\varpi + \varpi', \quad \varpi - \varpi'$$

seront eux-mêmes renfermés entre les limites $-\pi$, $+\pi$.

Il est bon d'observer qu'on peut encore arriver très simplement au théorème I à l'aide de considérations géométriques. En effet, construisons les trois points

$$A, \quad B, \quad C$$

dont les affixes sont respectivement

$$z, \quad -z, \quad c.$$

Le point C sera situé sur l'axe polaire, et le pôle O sera le milieu de la droite AB. D'ailleurs, on pourra supposer que des deux quantités géométriques

$$z, \quad -z,$$

la première est celle dans laquelle le coefficient de i est positif. Cette hypothèse étant admise, les arguments ϖ, $-\varpi'$ seront positifs et représenteront les angles formés par les droites BC, AC avec l'axe polaire OC, c'est-à-dire, en d'autres termes, les angles BCO, ACO. Donc la somme $\varpi - \varpi'$ des deux arguments ϖ, $-\varpi'$ représentera l'angle BCA du triangle qui a pour sommets les trois points A, B, C. Donc cette somme sera un angle positif inférieur à π, et l'on pourra en dire autant, *a fortiori*, de la valeur numérique de l'angle $\varpi + \varpi'$, équivalent, au signe près, à la différence des arguments ϖ, $-\varpi'$.

Du théorème premier, joint aux principes établis dans les deux articles précédents, on déduit encore les propositions suivantes :

Théorème II. — *Étant données deux quantités géométriques*

$$c + z, \quad c - z$$

dont la somme est une quantité algébrique et positive $2c$, *l'addition ou la soustraction de leurs logarithmes principaux, pris dans un système quelconque, donnera pour résultat le logarithme principal du produit ou du quotient de ces deux quantités géométriques.*

Théorème III. — *Étant données deux quantités géométriques*

$$c + z, \quad c - z$$

dont la somme est une quantité algébrique et positive $2c$, *la multiplication ou la division de leurs puissances principales d'un degré quelconque u donnera pour résultat les puissances principales et semblables du produit ou du quotient de ces deux quantités géométriques.*

En vertu du théorème II, et en désignant à l'aide de la lettre caractéristique l un logarithme népérien, on aura non seulement

$$\mathrm{l}(c+z) + \mathrm{l}(c-z) = \mathrm{l}(c^2 - z^2), \tag{5}$$

mais encore

$$\mathrm{l}(c+z) - \mathrm{l}(c-z) = \mathrm{l}\frac{c+z}{c-z}. \tag{6}$$

On trouvera, par exemple, en posant $c = 1$,

$$\mathrm{l}(1+z) + \mathrm{l}(1-z) = \mathrm{l}(1-z^2), \tag{7}$$

et

$$\mathrm{l}(1+z) - \mathrm{l}(1-z) = \mathrm{l}\frac{1+z}{1-z}. \tag{8}$$

En vertu du théorème II, et en désignant par u une quantité géométrique quelconque, on aura non seulement

$$(c+z)^u (c-z)^u = (c^2 - z^2)^u, \tag{9}$$

mais encore

$$\frac{(c+z)^u}{(c-z)^u} = \left(\frac{c+z}{c-z}\right)^u. \tag{10}$$

On trouvera, par exemple, en posant $c = 1$,

$$(1+z)^u (1-z)^u = (1-z^2)^u \tag{11}$$

et

$$\frac{(1+z)^u}{(1-z)^u} = \left(\frac{1+z}{1-z}\right)^u. \tag{12}$$

Si l'on pose, en particulier, $u = \frac{1}{2}$, les formules (9) et (10) donneront

$$(c+z)^{\frac{1}{2}} (c-z)^{\frac{1}{2}} = (c^2 - z^2)^{\frac{1}{2}}, \tag{13}$$

$$\frac{(c+z)^{\frac{1}{2}}}{(c-z)^{\frac{1}{2}}} = \left(\frac{c+z}{c-z}\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{14}$$

II. — *Sur les arguments de deux quantités géométriques dont le produit est algébrique et positif.*

Considérons deux quantités géométriques

$$z = r_p, \qquad z' = r'_{p'}$$

dont le produit se réduise à une constante algébrique et positive c. On aura

$$zz' = 1_{p+p'} rr';$$

et, par suite, l'équation

$$zz' = c$$

donnera

$$(1) \qquad rr' = c,$$
$$(2) \qquad 1_{p+p'} = 0.$$

Si, d'ailleurs, comme on peut généralement le supposer, chacun des arguments p, p' est renfermé entre les limites $-\pi$, $+\pi$, la somme $p+p'$ offrira une valeur numérique inférieure ou tout au plus égale à 2π; et même cette valeur numérique ne pourra s'élever jusqu'à la limite 2π que dans le cas où, z, z' étant réduits à des quantités négatives $-r$, $-r'$, on aurait

$$1_p = 1_{p'} = -1,$$

et, par suite,

$$p = \pm\pi, \qquad p' = \pm\pi'.$$

Ce cas excepté, l'équation (2) entraînera généralement la suivante :

$$(3) \qquad p+p' = 0 \quad \text{ou} \quad p' = -p,$$

de sorte que p, p' seront des angles égaux, au signe près.

Si l'une des quantités géométriques

$$z, \quad z'$$

offre pour partie algébrique une quantité positive, alors des arguments p, p', l'un sera compris entre les limites $-\frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{2}$, et l'autre, en vertu de l'équation (3), devra jouir encore de la même propriété. Donc alors la différence

$$p - p'$$

sera comprise entre les limites $-\pi$, $+\pi$. De cette remarque, jointe aux principes établis dans les deux articles précédents, on déduit immédiatement les propositions suivantes :

Théorème I. — *Soient z, z' deux quantités géométriques dont le produit se réduise à une quantité algébrique et positive c. Si l'une des quantités z, z' offre une partie algébrique positive, la différence de leurs logarithmes principaux, pris dans un système quelconque, sera le logarithme principal du rapport de l'une à l'autre, en sorte qu'on aura*

$$(4) \qquad l(z) - l(z') = l\left(\frac{z}{z'}\right).$$

Théorème II. — *Soient z, z' deux quantités géométriques dont le produit se réduise à une quantité algébrique et positive c. Si l'une des quantités z, z' offre une partie algébrique positive, le rapport de leurs puissances principales d'un degré quelconque n sera la puissance principale et semblable du rapport de ces deux quantités géométriques, en sorte qu'on aura*

$$(5) \qquad \frac{z^n}{z'^n} = \left(\frac{z}{z'}\right)^n.$$

MÉMOIRE

SUR

L'ARGUMENT PRINCIPAL D'UNE QUANTITÉ GÉOMÉTRIQUE

FORMULES DIVERSES SERVANT A EXPRIMER L'ARGUMENT PRINCIPAL D'UNE QUANTITÉ GÉOMÉTRIQUE EN FONCTION DE LA PARTIE ALGÉBRIQUE ET DU COEFFICIENT DE i

---

Soit

(1) $$z = r_p$$

une quantité géométrique, qui ait pour *module* le nombre r, et pour *argument* l'angle p. Si cet angle est, comme on peut toujours le supposer, renfermé entre les limites $-\pi$, π, il deviendra ce que nous appellerons l'*argument principal* de la quantité géométrique z. Si z se réduisait à une quantité algébrique négative, en sorte qu'on eût

$$z = -r,$$

l'argument principal p pourrait être censé atteindre ou la limite inférieure $-\pi$, ou la limite supérieure π, suivant que l'on considérerait $-r$ comme la limite vers laquelle convergerait, pour des valeurs infiniment petites du nombre ε, ou la première ou la seconde des deux quantités géométriques

$$-r-\varepsilon\mathrm{i}, \quad -r+\varepsilon\mathrm{i}.$$

Concevons maintenant que, dans la quantité géométrique z, on désigne la partie algébrique par x et le coefficient de i par y. On aura

(2) $$z = x + y\mathrm{i},$$

et, en égalant l'une à l'autre les valeurs de z données par les formules

(1), (2), on trouvera

$$x+y\mathrm{i}=r_p=1_p r=r(\cos p+\mathrm{i}\sin p).$$

par conséquent,

$$x=r\cos p,\qquad y=r\sin p. \tag{3}$$

Des équations (3) jointes aux formules

$$\cos^2 p+\sin^2 p=1,$$
$$\operatorname{tang} p=\frac{\sin p}{\cos p},$$

on tire, en premier lieu,

$$x^2+y^2=r^2,$$

et, par suite,

$$r=(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}; \tag{4}$$

en second lieu

$$\cos p=\frac{x}{r},\qquad \sin p=\frac{y}{r}, \tag{5}$$

la valeur de r étant donnée par l'équation (4), et

$$\operatorname{tang} p=\frac{y}{x}. \tag{6}$$

Enfin, comme on a

$$\cot p=\frac{1}{\operatorname{tang} p},$$
$$\operatorname{séc} p=\frac{1}{\cos p},\qquad \operatorname{coséc} p=\frac{1}{\sin p},$$

on trouvera encore

$$\cot p=\frac{x}{y}, \tag{7}$$
$$\operatorname{séc} p=\frac{r}{x},\qquad \operatorname{coséc} p=\frac{r}{y}. \tag{8}$$

Les équations (5), (6), (7), (8) subsistent pour toutes les valeurs que peut acquérir l'argument p de la quantité géométrique

$$z=x+y\mathrm{i}.$$

On peut d'ailleurs de ces mêmes équations déduire les formules

diverses dont chacune détermine non plus l'une quelconque de ces valeurs de p, mais l'argument principal de z, en fonction des deux quantités algébriques x, y.

En effet, conservons les notations adoptées dans mon *Analyse algébrique*, et admettons, en conséquence, que, x étant une quantité algébrique, l'on désigne par la notation

$$\operatorname{arc}\sin x \quad \text{ou} \quad \operatorname{arc}\operatorname{coséc} x \quad \text{ou} \quad \operatorname{arc}\operatorname{tang} x \quad \text{ou} \quad \operatorname{arc}\cot x,$$

l'arc qui ayant x pour sinus, ou pour cosécante, ou pour tangente, ou pour cotangente, est renfermé entre les limites $-\frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{2}$, la valeur numérique de x étant supposée inférieure à l'unité dans arc sin$x$, et supérieure à l'unité dans arc cosée x. Admettons, au contraire, que l'on désigne par la notation

$$\operatorname{arc}\cos x \quad \text{ou} \quad \operatorname{arc}\operatorname{séc} x$$

l'arc qui, ayant x pour cosinus ou pour sécante, est renfermé entre les limites 0, π. Puisque $\cos p$ et $\operatorname{séc} p$ sont des fonctions paires de p, qu'on n'altère point en changeant le signe de p, il est clair que, si p représente l'argument principal de z compris entre les limites $-\pi$, π, on tirera de la première des formules (5),

$$p=\pm\operatorname{arc}\cos\frac{r}{x},$$

et de la première des formules (8),

$$p=\pm\operatorname{arc}\operatorname{séc}\frac{r}{x}.$$

Ajoutons qu'en vertu de la seconde des formules (5), y sera positif ou négatif avec $\sin p$, suivant que p sera compris entre les limites 0, π ou 0, $-\pi$, c'est-à-dire, en d'autres termes, suivant que l'argument principal p sera positif ou négatif. Donc, dans les deux équations que nous venons d'obtenir, le double signe devra être réduit au signe de la quantité algébrique y; et l'argument principal p de la quantité géométrique

$$z=x+y\mathrm{i}$$

pourra être déterminé, dans tous les cas, par l'une quelconque des deux formules

$$p = \frac{y}{\sqrt{y^2}} \operatorname{arc\,cos} \frac{x}{r}, \tag{9}$$

$$p = \frac{y}{\sqrt{y^2}} \operatorname{arc\,séc} \frac{r}{x}, \tag{10}$$

la valeur de r étant donnée en fonction de x et de y par l'équation (4).

Il est bon d'observer qu'en vertu de la formule (9) ou (10), l'argument principal p offrira une valeur numérique inférieure ou supérieure à $\frac{\pi}{2}$, suivant que la valeur de x sera positive ou négative. Par suite, on tirera de la formule (6), si x est positif,

$$p = \operatorname{arc\,tang} \frac{y}{x}, \tag{11}$$

et, si x est négatif,

$$p = \operatorname{arc\,tang} \frac{y}{x} \pm \pi, \tag{12}$$

le signe $\pm$ devant être réduit au signe $+$ ou au signe $-$, suivant que y sera positif ou négatif. Ajoutons qu'un nombre qui se réduit à zéro pour $x > 0$, à l'unité pour $x < 0$, peut être représenté par l'expression algébrique

$$\frac{1}{2}\left(1 - \frac{x}{\sqrt{x^2}}\right),$$

et qu'en conséquence les équations (11), (12) se trouvent toutes deux comprises dans la formule générale

$$p = \operatorname{arc\,tang} \frac{y}{x} + \frac{\pi}{2} \frac{y}{\sqrt{y^2}} \left(1 - \frac{x}{\sqrt{x^2}}\right). \tag{13}$$

Enfin, comme les arcs

$$\operatorname{arc\,tang} \frac{y}{x}, \quad \operatorname{arc\,cot} \frac{x}{y}, \quad \operatorname{arc\,sin} \frac{y}{r}, \quad \operatorname{arc\,coséc} \frac{r}{y},$$

seront égaux, aux signes près, les signes des deux premiers étant semblables ou contraires aux signes des deux derniers, suivant que la

valeur de x sera positive ou négative, on aura identiquement

$$\operatorname{arc\,tang} \frac{y}{x} = \operatorname{arc\,cot} \frac{x}{y} = \frac{x}{\sqrt{x^2}} \operatorname{arc\,sin} \frac{y}{r} = \frac{x}{\sqrt{x^2}} \operatorname{arc\,coséc} \frac{r}{y};$$

et, par suite, on pourra substituer à l'équation (13) l'une quelconque des formules

$$p = \operatorname{arc\,cot} \frac{x}{y} + \frac{\pi}{2} \frac{y}{\sqrt{y^2}} \left(1 - \frac{x}{\sqrt{x^2}}\right), \tag{14}$$

$$p = \frac{x}{\sqrt{x^2}} \operatorname{arc\,sin} \frac{y}{r} + \frac{\pi}{2} \frac{y}{\sqrt{y^2}} \left(1 + \frac{x}{\sqrt{x^2}}\right), \tag{15}$$

$$p = \frac{x}{\sqrt{x^2}} \operatorname{arc\,coséc} \frac{r}{y} + \frac{\pi}{2} \frac{y}{\sqrt{y^2}} \left(1 - \frac{x}{\sqrt{x^2}}\right), \tag{16}$$

r étant toujours déterminé, en fonction de x et de y, par l'équation (4).

Les formules (13), (14) et celles qu'on obtient en substituant, dans les formules (9), (10), (15) et (16), la valeur de r donnée par l'équation (4), ne sont pas les seules qui servent à exprimer l'argument principal p de la quantité géométrique $z = x + yi$, en fonction des quantités algébriques x, y.

On peut encore, après avoir réduit l'équation

$$x + y\mathrm{i} = 1_p r = r e^{p\mathrm{i}} \tag{17}$$

à la forme

$$e^{p\mathrm{i}} = \frac{x + y\mathrm{i}}{r}, \tag{18}$$

en déduire immédiatement la valeur cherchée de p, en prenant les logarithmes principaux des deux membres. On trouve ainsi, en nommant p l'argument principal de z,

$$p\mathrm{i} = \mathrm{l}\left(\frac{x + y\mathrm{i}}{r}\right),$$

et, par suite,

$$p = \frac{1}{\mathrm{i}} \mathrm{l}\left(\frac{x + y\mathrm{i}}{r}\right), \tag{19}$$

ou, ce qui revient au même,

$$p = \frac{\mathrm{l}(x + y\mathrm{i}) - \mathrm{l}(r)}{\mathrm{i}}, \tag{20}$$

la valeur de r étant donnée, en fonction de x et y, par l'équation (4). D'ailleurs, si à la quantité géométrique $x + y\mathrm{i}$ on substitue la quantité conjuguée $x - y\mathrm{i}$, l'argument p changera de signe, et, à la place des équations (17), (18), (19), (20), on obtiendra les suivantes :

$$x - y\mathrm{i} = 1_{-p}\, r = r e^{-p\mathrm{i}}, \tag{21}$$

$$e^{-p\mathrm{i}} = \frac{x - y\mathrm{i}}{r}, \tag{22}$$

$$p = -\frac{1}{\mathrm{i}}\,\mathrm{l}\frac{x - y\mathrm{i}}{r}, \tag{23}$$

$$p = -\frac{\mathrm{l}(x - y\mathrm{i}) - \mathrm{l}(r)}{\mathrm{i}}. \tag{24}$$

Enfin, des formules (20), (24), combinées entre elles par voie d'addition, l'on tirera

$$2p = \frac{\mathrm{l}(x + y\mathrm{i}) - \mathrm{l}(x - y\mathrm{i})}{\mathrm{i}},$$

et, par conséquent,

$$p = \frac{\mathrm{l}(x + y\mathrm{i}) - \mathrm{l}(x - y\mathrm{i})}{2\mathrm{i}}. \tag{25}$$

Si l'on égale entre elles les deux valeurs de l'argument principal p fournies par les équations (13) et (25), on trouvera

$$\operatorname{arc\,tang}\frac{y}{x} = \frac{\mathrm{l}(x + y\mathrm{i}) - \mathrm{l}(x - y\mathrm{i})}{2\mathrm{i}} - \frac{\pi}{2}\,\frac{y}{\sqrt{y^2}}\left(1 - \frac{x}{\sqrt{x^2}}\right). \tag{26}$$

Si, dans cette dernière équation, l'on remplace x par 1 et p par x, on obtiendra la formule

$$\operatorname{arc\,tang} x = \frac{\mathrm{l}(1 + x\mathrm{i}) - \mathrm{l}(1 - x\mathrm{i})}{2\mathrm{i}}, \tag{27}$$

que l'on pourra encore écrire comme il suit

$$\operatorname{arc\,tang} x = \frac{1}{2\mathrm{i}}\,\mathrm{l}\frac{1 + x\mathrm{i}}{1 - x\mathrm{i}}. \tag{28}$$

Remarquons en outre que, si, dans l'équation

$$\mathrm{l}(z) = \mathrm{l}(r) + p\mathrm{i} \tag{29}$$

on substitue les valeurs de z, r et p données par les formules (1), (4) et (9), on trouvera

$$\mathrm{l}(x + y\mathrm{i}) = \frac{1}{2}\,\mathrm{l}(x^2 + y^2) + \mathrm{i}\frac{y}{\sqrt{y^2}}\arccos\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}. \tag{30}$$

MÉMOIRE

SUR

LES VALEURS GÉNÉRALES DES EXPRESSIONS

$\sin z$, $\cos z$, $\operatorname{séc} z$, $\operatorname{coséc} z$, $\operatorname{tang} z$, $\cot z$

D'après ce qui a été dit à la page 245 [1], si l'on désigne par z une quantité algébrique positive ou négative, on aura

$$e^{zi} = \cos z + i \sin z. \tag{1}$$

Si, dans la formule (1) on remplace z par $-z$, on trouvera

$$e^{-zi} = \cos z - i \sin z; \tag{2}$$

et l'on tirera immédiatement des formules (1) et (2)

$$\cos z = \frac{e^{zi} + e^{-zi}}{2}, \qquad \sin z = \frac{e^{zi} - e^{-zi}}{2i}. \tag{3}$$

On aura d'ailleurs

$$\operatorname{séc} z = \frac{1}{\cos z}, \qquad \operatorname{coséc} z = \frac{1}{\sin z}, \tag{4}$$

$$\operatorname{tang} z = \frac{\sin z}{\cos z}, \qquad \cot z = \frac{\cos z}{\sin z}. \tag{5}$$

Les formules (3), (4) et (5) fournissent un moyen très simple de fixer le sens qu'on doit attacher aux expressions

$$\sin z, \quad \cos z, \quad \operatorname{séc} z, \quad \operatorname{coséc} z, \quad \operatorname{tang} z, \quad \cot z,$$

dans le cas où z cesse d'être une quantité algébrique. En effet, les

[1] *Œuvres de Cauchy*, ce tome, p. 280.

valeurs de ces expressions pourront toujours être facilement obtenues si l'on convient d'étendre les formules dont il s'agit au cas où z se transforme en une quantité géométrique quelconque. Cette convention, que nous adopterons désormais, permettra d'exprimer les valeurs cherchées en exponentielles népériennes que l'on calculera sans peine à l'aide des formules (6) et (9) des pages 245 et 246.

Il est bon d'observer qu'en vertu des formules (3), (4), (5),

$$\cos z, \quad \text{séc}\, z$$

seront des fonctions paires de z, c'est-à-dire des fonctions qui ne seront pas altérées quand z sera remplacé par $-z$, et qu'au contraire

$$\sin z, \quad \text{coséc}\, z, \quad \text{tang}\, z, \quad \cot z$$

seront des fonctions impaires de z, c'est-à-dire des fonctions de z qui changeront de signe avec z; en sorte qu'on aura

$$\cos(-z) = \cos z, \qquad \text{séc}(-z) = \text{séc}\, z, \tag{6}$$

et

$$\left\{\begin{aligned} &\sin(-z) = -\sin z, &\quad \text{coséc}(-z) = -\text{coséc}\, z,\\ &\text{tang}(-z) = -\text{tang}\, z, &\quad \cot(-z) = -\cot z. \end{aligned}\right. \tag{7}$$

Si dans les équations (3) on pose

$$z = x + y\mathrm{i},$$

alors, en ayant égard aux formules

$$\begin{aligned} e^{z\mathrm{i}} &= e^{x\mathrm{i}-y} = e^{-y}(\cos x + \mathrm{i}\sin x),\\ e^{-z\mathrm{i}} &= e^{-x\mathrm{i}+y} = e^{y}\ (\cos x - \mathrm{i}\sin x), \end{aligned}$$

on trouvera

$$\left\{\begin{aligned} \cos z &= \frac{e^y + e^{-y}}{2}\cos x - \mathrm{i}\,\frac{e^y - e^{-y}}{2}\sin x,\\ \sin z &= \frac{e^y + e^{-y}}{2}\sin x + \mathrm{i}\,\frac{e^y - e^{-y}}{2}\cos x. \end{aligned}\right. \tag{8}$$

Ces dernières formules mettent en évidence, dans $\cos z$ et $\sin z$, la partie algébrique et le coefficient de i. Les formules qui joueront le même rôle relativement aux fonctions

$$\text{séc}\, z, \quad \text{coséc}\, z, \quad \text{tang}\, z, \quad \cot z,$$

se déduiront immédiatement des équations (4) et (5) jointes aux formules (8).

Soit maintenant z' la quantité géométrique conjuguée à z, en sorte qu'on ait

$$z' = x - y\mathrm{i}.$$

Pour obtenir les valeurs des expressions

$$\sin z', \quad \cos z',$$

il suffira de changer, dans les seconds membres des formules (8), le signe de y, ou, ce qui revient au même, le signe de i. Donc les deux quantités géométriques

$$\sin z', \quad \cos z'$$

seront respectivement conjuguées aux deux quantités géométriques

$$\sin z, \quad \cos z;$$

ce qu'il était facile de prévoir, d'après la forme des équations (3), dont les seconds membres ne sont pas altérés, quand on y remplace i par $-$i. Par suite aussi, les quantités géométriques

$$\text{séc}\, z', \quad \text{coséc}\, z', \quad \text{tang}\, z', \quad \cot z'$$

seront, eu égard aux formules (4) et (5), respectivement conjuguées aux quantités que représenteront les expressions

$$\text{séc}\, z, \quad \text{coséc}\, z, \quad \text{tang}\, z, \quad \cot z.$$

En joignant aux équations (3), (4), (5) l'équation (1) de la page 242, on étendra sans peine un grand nombre de formules trigonométriques relatives à un ou à plusieurs arcs, au cas où ces arcs deviennent des quantités géométriques; et d'abord il est clair que, si, après avoir multiplié chaque membre par i dans la seconde des formules (3), on la combine avec la première par voie d'addition ou de soustraction, l'on retrouvera précisément les formules (1) et (2). Celles-ci devront donc être étendues au cas où z représente une quantité géométrique quelconque, et l'on pourra en dire autant de l'équation

$$\cos^2 z + \sin^2 z = 1, \tag{9}$$

qui se déduit encore immédiatement des formules (3), ainsi que des formules (1) et (2) combinées entre elles par voie de multiplication.

Ajoutons que, si l'on divise par $\cos^2 z$ ou par $\sin^2 z$ les deux membres de la formule (9), on en tirera généralement, eu égard aux formules (4) et (5),

$$\text{séc}^2 z = 1 + \text{tang}^2 z \tag{10}$$

et

$$\text{coséc}^2 z = 1 + \cot^2 z. \tag{11}$$

Observons maintenant que, si l'on désigne par k une quantité entière quelconque positive, nulle ou négative, les diverses valeurs du produit $2k\pi i$ seront, en vertu de la remarque faite à la page 249, les divers logarithmes népériens de l'unité. On aura donc

$$e^{2k\pi i} = 1. \tag{12}$$

En combinant cette dernière équation, que fournit aussi la formule (6) de la page 245, avec la formule (1) de la page 242, on trouvera

$$e^{(z+2k\pi)i} = e^{zi}, \tag{13}$$

puis, en remplaçant z par $-z$, et k par $-k$,

$$e^{-(z+2k\pi)i} = e^{-zi}. \tag{14}$$

Cela posé, les formules (3) donneront

$$\cos(z + 2k\pi) = \cos z, \qquad \sin(z + 2k\pi) = \sin z; \tag{15}$$

et, par suite, on tirera encore des formules (4), (5),

$$\text{séc}(z + 2k\pi) = \text{séc}\, z, \qquad \text{coséc}(z + 2k\pi) = \text{coséc}\, z, \tag{16}$$
$$\text{tang}(z + 2k\pi) = \text{tang}\, z, \qquad \cot(z + 2k\pi) = \cot z. \tag{17}$$

Donc une des propriétés les plus remarquables des lignes trigonométriques

$$\sin z, \quad \cos z, \quad \text{séc}\, z, \quad \text{coséc}\, z, \quad \text{tang}\, z, \quad \cot z,$$

celle qui consiste en ce que chacune de ces lignes demeure invariable

quand on fait croître ou décroître l'arc z d'un multiple de la circonférence 2π, s'étend au cas où cet arc se transforme en une quantité géométrique quelconque.

Si à un multiple de la circonférence 2π on substitue un multiple impair de la demi-circonférence π, l'arc représenté, au signe près, par un tel multiple pourra être supposé de la forme

$$(2k+1)\pi,$$

k désigne toujours une quantité entière positive, nulle ou négative. D'ailleurs, en vertu de la formule (6) de la page 245, on aura

$$e^{(2k+1)\pi i} = -1, \tag{18}$$

et, par suite, eu égard à la formule (1) de la page 242,

$$e^{[z+(2k+1)\pi]i} = -e^{zi}, \qquad e^{-[z+(2k+1)\pi]i} = -e^{-zi}. \tag{19}$$

Cela posé, les formules (3) donneront

$$\cos[z + (2k+1)\pi] = \cos z, \qquad \sin[z + (2k+1)\pi] = -\sin z, \tag{20}$$

et l'on tirera des formules (4), (5),

$$\text{séc}[z + (2k+1)\pi] = -\text{séc}\, z, \qquad \text{coséc}[z + (2k+1)\pi] = -\text{coséc}\, z, \tag{21}$$
$$\text{tang}[z + (2k+1)\pi] = \text{tang}\, z, \qquad \cot[z + (2k+1)\pi] = \cot z. \tag{22}$$

Il est bon d'observer qu'en vertu des équations (15) et (16) jointes aux équations (20) et (21), on aura généralement

$$\cos(z + k\pi) = (-1)^k \cos z, \qquad \sin(z + k\pi) = (-1)^k \sin z, \tag{23}$$
$$\text{coséc}(z + k\pi) = (-1)^k\, \text{séc}\, z, \qquad \text{coséc}(z + k\pi) = (-1)^k\, \text{séc}\, z, \tag{24}$$

k désignant une quantité entière quelconque positive, nulle ou négative. Au contraire, en vertu des formules (17) jointes aux formules (22), on aura

$$\text{tang}(z + k\pi) = \text{tang}\, z, \qquad \cot(z + k\pi) = \cot z. \tag{25}$$

Ainsi les formules qui expriment que la tangente et la cotangente d'un arc ne varient pas, quand on fait croître ou décroître cet arc d'un multiple de la demi-circonférence π, s'étendent au cas où ce même arc se transforme en une quantité géométrique.

On peut généraliser de la même manière les relations qui existent entre les lignes trigonométriques de deux arcs dont l'un est le complément ou le supplément de l'autre.

On dit que de deux arcs z, z', l'un est le *complément* de l'autre, lorsque ces arcs satisfont à la condition

$$z + z' = \frac{\pi}{2}. \tag{26}$$

En supposant cette définition étendue au cas même où les arcs se transforment en quantités géométriques, on obtiendra toujours pour complément de l'arc z l'arc $\frac{\pi}{2} - z$; et, comme la formule (6) de la page 245 donnera

$$e^{\frac{\pi}{2}i} = i, \qquad e^{-\frac{\pi}{2}i} = -i, \tag{27}$$

on tirera de la formule (1) de la page 242

$$e^{\left(\frac{\pi}{2}-z\right)i} = i e^{-zi}, \qquad e^{-\left(\frac{\pi}{2}-z\right)i} = -i e^{zi}, \tag{28}$$

et des formules (3)

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - z\right) = \sin z, \qquad \sin\left(\frac{\pi}{2} - z\right) = \cos z. \tag{29}$$

Par suite aussi, l'on tirera des formules (4)

$$\text{séc}\left(\frac{\pi}{2} - z\right) = \text{coséc}\, z, \tag{30}$$

et des formules (5)

$$\text{tang}\left(\frac{\pi}{2} - z\right) = \cot z. \tag{31}$$

En renversant la dernière des formules (29) et les formules (30), (31), on obtient les suivantes

$$\cos z = \sin\left(\frac{\pi}{2} - z\right), \qquad \text{coséc}\, z = \text{séc}\left(\frac{\pi}{2} - z\right), \qquad \cot z = \text{tang}\left(\frac{\pi}{2} - z\right). \tag{32}$$

Celles-ci pourraient être considérées comme un moyen de définir généralement les trois lignes trigonométriques

$$\cos z, \quad \text{coséc}\, z, \quad \cot z.$$

Elles montrent que le *cosinus*, la *cosécante* et la *cotangente* de l'arc z sont toujours le *sinus*, la *sécante* et la *tangente* du complément de cet arc.

On dit que de deux arcs z, z', l'un est le *supplément* de l'autre, lorsque ces arcs satisfont à la condition

$$z + z' = \pi. \tag{33}$$

En supposant cette définition étendue au cas même où les arcs se transforment en quantités géométriques, on obtiendra toujours, pour supplément de l'arc z, l'arc $\pi - z$. D'ailleurs, si l'on pose $k = 1$, dans les formules (23), (24), (25), et si, en même temps, on y remplace z par $-z$, on tirera de ces formules jointes aux équations (6), (7),

$$\cos(\pi - z) = -\cos z, \qquad \sin(\pi - z) = \sin z, \tag{34}$$

$$\text{séc}(\pi - z) = -\text{séc}\, z, \qquad \text{coséc}(\pi - z) = \text{coséc}\, z, \tag{35}$$

$$\text{tang}(\pi - z) = -\text{tang}\, z, \qquad \cot(\pi - z) = \cot z. \tag{36}$$

Il résulte en particulier de ces formules que le sinus et la cosécante ne varient pas quand on remplace un arc par son supplément.

Supposons maintenant que z, z' soient deux quantités géométriques quelconques. On tirera des équations (3), combinées avec la formule (1) de la page 242,

$$\left\{\begin{aligned} \cos(z + z') &= \frac{e^{zi} e^{z'i} + e^{-zi} e^{-z'i}}{2}, \\ \sin(z + z') &= \frac{e^{zi'} e^{z'i} - e^{-zi'} e^{-z'i}}{2i}, \end{aligned}\right. \tag{37}$$

et, par suite, eu égard aux équations (1) et (2),

$$\left\{\begin{aligned} \cos(z + z') &= \cos z \cos z' - \sin z \sin z', \\ \sin(z + z') &= \sin z \cos z' + \sin z' \cos z. \end{aligned}\right. \tag{38}$$

Si, dans ces dernières formules, on remplace z par $-z$, elles donneront

$$(39)\qquad \begin{cases} \cos(z - z') = \cos z \cos z' + \sin z \sin z', \\ \sin(z - z') = \sin z \cos z' - \sin z' \cos z. \end{cases}$$

Donc les formules (6) et (7) de la page 221 continueront de subsister dans le cas où l'on remplace les arcs p et p' par deux quantités géométriques z et z'.

Ajoutons que des formules (38) et (39) on tire non seulement

$$(40)\qquad \begin{cases} \operatorname{tang}(z + z') = \dfrac{\operatorname{tang} z + \operatorname{tang} z'}{1 - \operatorname{tang} z \operatorname{tang} z'}, \\ \operatorname{tang}(z - z') = \dfrac{\operatorname{tang} z - \operatorname{tang} z'}{1 + \operatorname{tang} z \operatorname{tang} z'}, \end{cases}$$

mais aussi

$$(41)\qquad \begin{cases} \cos(z + z') + \cos(z - z') = 2 \cos z \cos z', \\ \cos(z - z') - \cos(z + z') = 2 \sin z \sin z', \end{cases}$$

$$(42)\qquad \begin{cases} \sin(z + z') + \sin(z - z') = 2 \sin z \cos z', \\ \sin(z + z') - \sin(z - z') = 2 \cos z \sin z'; \end{cases}$$

puis, en remplaçant z et z' par $\frac{z + z'}{2}$ et par $\frac{z - z'}{2}$,

$$(43)\qquad \begin{cases} \cos z + \cos z' = 2 \cos \dfrac{z + z'}{2} \cos \dfrac{z - z'}{2}, \\ \cos z' - \cos z = 2 \sin \dfrac{z + z'}{2} \sin \dfrac{z - z'}{2}, \end{cases}$$

$$(44)\qquad \begin{cases} \sin z + \sin z' = 2 \sin \dfrac{z + z'}{2} \cos \dfrac{z - z'}{2}, \\ \sin z - \sin z' = 2 \cos \dfrac{z + z'}{2} \sin \dfrac{z - z'}{2}. \end{cases}$$

Remarquons encore que de la formule (1) de la page 242 on tire

$$e^{z} e^{z'} e^{z''} = e^{z+z'} e^{z''} = e^{z+z'+z''},$$

et généralement

$$(45)\qquad e^{z} e^{z'} e^{z''} \ldots = e^{z+z'+z''+\ldots},$$

quel que soit le nombre n des quantités géométriques $z, z', z'', \ldots$. Si, dans l'équation (45), on suppose $z = z' = z'' = \ldots$, on trouvera

$$(46)\qquad (e^{z})^{n} = e^{nz}.$$

On aura, par suite,

$$(47)\qquad (e^{z\mathrm{i}})^{n} = e^{nz\mathrm{i}}, \qquad (e^{-z\mathrm{i}})^{n} = e^{-nz\mathrm{i}},$$

ou, ce qui revient au même,

$$(48)\qquad \begin{cases} (\cos z + \mathrm{i} \sin z)^{n} = \cos nz + \mathrm{i} \sin nz, \\ (\cos z - \mathrm{i} \sin z)^{n} = \cos nz - \mathrm{i} \sin nz; \end{cases}$$

et de ces deux dernières formules, combinées par voie d'addition et de soustraction, l'on conclura que les équations (10) de la page 221 peuvent être étendues au cas où l'arc p se transforme en une quantité géométrique z. La même remarque s'appliquera aux équations (11), (12) de la page 222 et aux équations (56), (57) de la page 231 [1].

[1] *Œuvres de Cauchy*, ce tome, p. 252 et suite.