# ŒUVRES

COMPLÈTES

# D'AUGUSTIN CAUCHY

PUBLIÉES SOUS LA DIRECTION SCIENTIFIQUE

DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES

ET SOUS LES AUSPICES

DE M. LE MINISTRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE.

IIe SÉRIE. — TOME XIV.

PARIS,
GAUTHIER-VILLARS, ÉDITEUR,
LIBRAIRE DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,
Quai des Grands-Augustins, 55.

MCMXXXVIII

# ŒUVRES

COMPLÈTES

# D'AUGUSTIN CAUCHY

PARIS. — IMPRIMERIE GAUTHIER-VILLARS
103806 Quai des Grands-Augustins, 55.

# ŒUVRES

COMPLÈTES

# D'AUGUSTIN CAUCHY

PUBLIÉES SOUS LA DIRECTION SCIENTIFIQUE

DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES

ET SOUS LES AUSPICES

DE M. LE MINISTRE DE L'INSTRUCTION PUBLIQUE.

## IIe SÉRIE. — TOME XIV.

PARIS,
GAUTHIER-VILLARS, ÉDITEUR,
LIBRAIRE DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,
Quai des Grands-Augustins, 55.

MCMXXXVIII

# SECONDE SÉRIE

I. — MÉMOIRES PUBLIÉS DANS DIVERS RECUEILS
AUTRES QUE CEUX DE L'ACADÉMIE

II. — OUVRAGES CLASSIQUES

III. — MÉMOIRES PUBLIÉS EN CORPS D'OUVRAGE

IV. — MÉMOIRES PUBLIÉS SÉPARÉMENT

IV

# MÉMOIRES

## PUBLIÉS SÉPARÉMENT

# EXERCICES D'ANALYSE

ET DE

# PHYSIQUE MATHÉMATIQUE

# EXERCICES D'ANALYSE

ET DE

# PHYSIQUE MATHÉMATIQUE,

PAR LE BARON AUGUSTIN CAUCHY,

Membre de l'Académie des Sciences de Paris, de la Société Italienne, de la Société royale de Londres, des Académies de Berlin, de Saint-Pétersbourg, de Prague, de Stockholm, de Gœttingue, de l'Académie Américaine, etc.

TOME QUATRIÈME

PARIS,

BACHELIER, IMPRIMEUR-LIBRAIRE

DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE, DU BUREAU DES LONGITUDES, ETC.,

QUAI DES AUGUSTINS, N° 55.

1847

# EXERCICES D'ANALYSE

ET DE

# PHYSIQUE MATHÉMATIQUE

---

## MÉMOIRE

SUR

## LES RÉSULTANTES QUE L'ON PEUT FORMER

SOIT AVEC LES COSINUS DES ANGLES COMPRIS ENTRE DEUX SYSTÈMES D'AXES,
SOIT AVEC LES COORDONNÉES DE DEUX OU TROIS POINTS

---

Les résultantes dont il s'agit se présentent d'elles-mêmes, comme on sait, dans la solution d'un grand nombre de problèmes. D'ailleurs, celles qui sont formées avec les coordonnées de deux ou trois points peuvent être immédiatement déduites de celles qui renferment les cosinus des angles compris entre deux systèmes d'axes. Ajoutons que l'on facilite la détermination de ces deux espèces de résultantes, en introduisant dans le calcul des quantités propres à indiquer le sens de certains mouvements de rotation, ainsi que je l'expliquerai tout à l'heure.

I. — *Des mouvements de rotation directs et rétrogrades.*

Considérons d'abord, dans un plan donné, diverses longueurs

$$r,\quad s,\quad t,\quad \ldots,$$

dont chacune sera mesurée dans une certaine direction, à partir d'une certaine origine O, et supposons que cette origine soit la même pour toutes ces longueurs. Si un rayon mobile, compté encore à partir du point O, tourne autour de ce point dans le plan donné, il offrira ce que nous appellerons un *mouvement de rotation* de $r$ en $s$, ou un *mouvement de rotation* de $s$ en $r$, selon qu'il passera, en décrivant l'angle $(\widehat{r,s})$, de la direction $r$ à la direction $s$, ou de la direction $s$ à la direction $r$. Pour distinguer plus facilement, dans le discours et dans les formules, ces deux mouvements l'un de l'autre, nous traçerons, dans le plan de l'angle $(\widehat{r,s})$, deux axes coordonnés des $x$ et $y$ qui passeront par l'origine O; et, en nommant x, y deux longueurs mesurées à partir de cette origine sur les demi-axes des $x$ et $y$ positives, nous appellerons mouvement de rotation *direct* celui qui s'effectuera dans le même sens que le mouvement de rotation de x en y, et mouvement *rétrograde*, celui qui s'effectuera en sens contraire. De plus, nous représenterons, dans ce Mémoire, par la simple notation

$$(r, s),$$

une quantité qui, ayant pour valeur numérique l'unité, sera positive ou négative, suivant que le mouvement de rotation de $r$ en $s$ sera direct ou rétrograde; en sorte qu'on aura, dans le premier cas,

$$(r, s) = 1,$$

dans le second cas,

$$(r, s) = -1.$$

Cela posé, les deux notations

$$(r, s), \quad (s, r)$$

représenteront, dans nos formules, deux quantités affectées de signes contraires, mais équivalentes, au signe près, à l'unité; en sorte qu'on aura

(1) $$(s, r) = -(r, s).$$



Ajoutons que, si l'on nomme

$$r', \quad s', \quad t', \quad \ldots$$

des longueurs mesurées à partir de l'origine O, dans des directions opposées à celles des longueurs

$$r, \quad s, \quad t, \quad \ldots,$$

on aura évidemment

(2) $$(r', s) = -(r, s),$$

et, par suite,

(3) $$(r, s) = -(r', s) = (r', s') = -(r, s').$$

Si les axes coordonnés sont rectangulaires, alors, les deux directions x, y étant perpendiculaires entre elles, une troisième direction $r$ formera toujours, avec les deux premières, deux angles

$$(\widehat{r, \mathrm{x}}), \quad (\widehat{r, \mathrm{y}}),$$

dont chacun offrira un cosinus égal, abstraction faite du signe, au sinus de l'autre; et, par suite,

$$\cos(\widehat{r, \mathrm{x}}), \quad \cos(\widehat{r, \mathrm{y}}),$$

auront pour valeurs numériques les quantités positives

$$\sin(\widehat{r, \mathrm{y}}), \quad \sin(\widehat{r, \mathrm{x}}).$$

D'ailleurs, $\cos(\widehat{r, \mathrm{x}})$ sera positif ou négatif, suivant que l'angle $(\widehat{r, \mathrm{x}})$ sera aigu ou obtus. Or, dans le premier cas, $r$ et x étant situés d'un même côté par rapport à l'axe des $y$, le mouvement de rotation de $r$ en y sera droit, comme le mouvement de rotation de x en y; et, par conséquent, on aura

$$(r, \mathrm{y}) = 1.$$

Dans le second cas, au contraire, $r$ et y étant situés de deux côtés opposés par rapport à l'axe des $y$, le mouvement de rotation de $r$ en y sera rétrograde, puisqu'il s'effectuera en sens inverse du mouvement de x en y; on aura donc

$$(r, y) = -1.$$

Donc, dans tous les cas, le signe de $\cos(\widehat{r, x})$ sera précisément le signe de $(r, y)$. On prouvera, de même, l'identité du signe de $\cos(\widehat{r, y})$ et du signe de $(x, r)$. Donc, pour obtenir des produits égaux aux cosinus

$$\cos(\widehat{r, x}), \quad \cos(\widehat{s, y}),$$

il suffira de multiplier leurs valeurs numériques

$$\sin(\widehat{r, y}), \quad \sin(\widehat{r, x}),$$

par les facteurs

$$(r, y), \quad (x, r),$$

en sorte qu'on aura

$$(4) \qquad \cos(\widehat{r, x}) = (r, y)\sin(\widehat{r, y}), \qquad \cos(\widehat{r, y}) = (x, r)\sin(\widehat{x, r}).$$

Supposons, maintenant, que les longueurs

$$r, \quad s, \quad t, \quad \ldots,$$

toujours mesurées à partir du point O, soient dirigées d'une manière quelconque dans l'espace. Le mouvement de rotation d'un rayon mobile qui, en décrivant l'angle $(\widehat{r, s})$, passera de $r$ en $s$, pourra être de deux espèces différentes, non seulement en lui-même, mais encore par rapport à la direction d'une longueur $t$ mesurée à partir du point O en dehors du plan $(r, s)$. En effet, ce mouvement pourra s'effectuer ou de *gauche à droite*, ou de *droite à gauche*, par rapport à la direction $t$, c'est-à-dire par rapport à un spectateur qui, ayant les pieds posés sur le plan $(r, s)$, serait appuyé contre le demi-axe, sur lequel se mesure la longueur $t$. Mais il importe d'observer que si le rayon mobile parcourt l'une après l'autre les trois faces de l'angle solide qui a pour arêtes $r$, $s$ et $t$, en tournant toujours dans le même sens autour du point O, de manière, par exemple, à décrire successivement les trois angles plans $(\widehat{r, s})$, $(\widehat{s, t})$, $(\widehat{t, r})$, les trois mouvements de rotation de $r$



en $s$ autour de $t$, de $s$ en $t$ autour de $r$, et de $t$ en $r$ autour de $s$, seront tous les trois de même espèce, c'est-à-dire qu'ils s'effectueront tous les trois de gauche à droite, ou tous les trois de droite à gauche, autour des directions $r, s, t$. Afin de pouvoir reconnaître plus aisément, dans le discours et dans le calcul, la nature des mouvements dont il s'agit, nous tracerons dans l'espace trois axes coordonnés des $x, y, z$ qui passeront par l'origine O; et en nommant

$$x, \quad y, \quad z$$

trois longueurs mesurées à partir de cette origine sur les demi-axes des $x$, $y$ et $z$ positives, nous appellerons *direct* ou *rétrograde* le mouvement de rotation de $r$ en $s$ autour de la direction $t$, suivant que ce mouvement sera ou ne sera pas de l'espèce des trois mouvements de rotation de x et y autour de z, de y en $z$ autour de x, et de z en x autour de y. De plus, nous représenterons, dans ce Mémoire, par la simple notation

$$(r, s, t),$$

une quantité qui, ayant pour valeur numérique l'unité, sera positive ou négative, suivant que le mouvement de rotation de $r$ en $s$ sera direct ou rétrograde; en sorte qu'on aura, dans le premier cas,

$$(r, s, t) = 1,$$

dans le second cas

$$(r, s, t) = -1.$$

Cela posé, les six notations

$$(r, s, t), \quad (s, t, r), \quad (t, r, s),$$
$$(r, t, s), \quad (s, r, t), \quad (t, s, r)$$

représenteront toujours, dans nos calculs, des quantités équivalentes, au signe près, à l'unité, et liées entre elles par la formule

$$(5) \quad (r, s, t) = (s, t, r) = (t, r, s) = -(r, t, s) = -(s, r, t) = -(t, s, r).$$

Ajoutons que, si l'on nomme

$$r', \quad s', \quad t', \quad \ldots$$

des longueurs mesurées à partir de l'origine O, dans des directions opposées à celles des longueurs

$$r,\quad s,\quad t,\quad \ldots,$$

on aura évidemment

$$(r',\, s,\, t) = -(r,\, s,\, t), \tag{6}$$

et, par suite,

$$(r,\, s,\, t) = -(r',\, s,\, t) = (r',\, s',\, t) = -(r',\, s',\, t') = \ldots. \tag{7}$$

Nous avons, dans ce qui précède, supposé que les diverses longueurs

$$r,\quad s,\quad t,\quad \ldots,\qquad x,\quad y,\quad z,\quad \ldots$$

se mesuraient toutes à partir d'une même origine. Pour plus de généralité, nous étendrons l'usage des notations ci-dessus indiquées, au cas même où les diverses longueurs seraient comptées à partir d'origines diverses, et alors nous attribuerons aux notations

$$(r,\, s),\quad (r,\, s,\, t),\quad (\widehat{r,\, s})$$

les valeurs qu'elles auraient, si les longueurs

$$r,\quad s,\quad t$$

étaient transportées parallèlement à elles-mêmes, de manière à offrir, pour origine commune, un point unique. Enfin, lorsqu'en supposant les longueurs $r$, $s$, $t$ mesurées à partir d'origines diverses, nous mentionnerons le plan de l'angle $(\widehat{r,s})$, ou bien encore l'angle solide construit avec les arêtes $r$, $s$, $t$, on devra toujours, par ces paroles, entendre, dans le premier cas, le plan de l'angle compris entre deux longueurs mesurées à partir d'une même origine, dans des directions parallèles à celles de $r$ et de $s$; et, dans le second cas, l'angle solide qui aurait pour arêtes trois longueurs mesurées à partir d'une même origine, dans des directions parallèles à celles de $r$, $s$ et $t$.

On peut, avec la plus grande facilité, déduire des équations (4),



jointes au théorème VI de la page 311 du III[e] volume (¹), les formules connues qui servent à déterminer le cosinus ou le sinus de la somme ou de la différence de deux arcs. En effet, soient

$$r,\quad s$$

deux longueurs mesurées dans un même plan, à partir d'une certaine origine O, et

$$x,\quad y$$

deux autres longueurs mesurées, à partir de la même origine, sur deux axes des $x$ et $y$ perpendiculaires entre eux. Le théorème VI de la page 311 du III[e] volume donnera

$$\cos(\widehat{r,\, s}) = \cos(\widehat{r,\, x})\cos(\widehat{s,\, x}) + \cos(\widehat{r,\, y})\cos(\widehat{s,\, y}). \tag{8}$$

Mais, eu égard à la seconde des formules (4), on aura

$$\cos(\widehat{r,\, y}) = (x,\, r)\sin(\widehat{r,\, x}),\qquad \cos(\widehat{s,\, y}) = (x,\, s)\sin(\widehat{s,\, x}).$$

Donc on tirera, de la formule (8),

$$\cos(\widehat{r,\, s}) = \cos(\widehat{r,\, x})\cos(\widehat{s,\, x}) + (x,\, r)(x,\, s)\sin(\widehat{r,\, x})\sin(\widehat{s,\, x}). \tag{9}$$

Concevons maintenant que l'on pose, pour abréger,

$$(\widehat{r,\, x}) = a,\qquad (\widehat{s,\, x}) = b.$$

Si les longueurs $r$, $s$ sont situées d'un même côté de l'axe des $x$, on aura évidemment

$$(\widehat{r,\, s}) = \pm(a - b),\qquad \cos(\widehat{r,\, s}) = \cos(a - b),$$
$$(x,\, r)(x,\, s) = 1,$$

et, par suite, la formule (9) donnera

$$\cos(a - b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b. \tag{10}$$

Si, au contraire, les deux longueurs $r$, $s$ sont situées de deux côtés

(¹) *Œuvres de Cauchy*, série II, t. XIII, p. 348.

différents de l'axe des $x$, on aura

$$\left(\widehat{r,s}\right)=a+b \quad \text{ou} \quad \left(\widehat{r,s}\right)=2\pi-(a+b), \qquad \cos\left(\widehat{r,s}\right)=\cos(a+b),$$
$$(\text{x}, r)(\text{x}, s)=-1,$$

et, par suite, la formule (9) donnera

$$\cos(a+b)=\cos a\cos b-\sin a\sin b. \tag{11}$$

D'ailleurs, les formules (10), (11), ainsi établies pour le cas où chacun des angles $a$, $b$ est positif et inférieur à $\pi$, continueront évidemment de subsister, si l'on y fait croître ou décroître chacun de ces angles d'un multiple quelconque de $\pi$. Elles subsisteront donc pour des valeurs quelconques, positives ou négatives, de $a$ et de $b$. Ajoutons que, si, dans les formules (10), (11), l'on remplace $a$ par $\frac{\pi}{2}-a$, on en tirera immédiatement

$$\sin(a+b)=\sin a\cos b+\sin b\cos a, \tag{12}$$
$$\sin(a-b)=\sin a\cos b-\sin b\cos a. \tag{13}$$

Avant de terminer ce paragraphe, nous allons indiquer encore une notation qui sera employée dans le cours de ce Mémoire, conjointement avec celles que nous venons d'établir, et qui d'ailleurs est, à peu près, celle dont Lagrange a fait usage, dans le tome II de la *Mécanique analytique* (art. 48, page 61). Afin de rendre les formules plus concises et plus faciles à retenir, nous désignerons généralement par

$$[r, s]$$

la surface du parallélogramme que l'on peut construire sur les deux côtés $r$, $s$, d'un angle plan $\left(\widehat{r,s}\right)$, réduits l'un et l'autre à l'unité, et par

$$[r, s, t]$$

le volume du parallélipipède que l'on peut construire sur les trois arêtes $r$, $s$, $t$, d'un angle solide, réduites elles-mêmes à l'unité.



D'ailleurs, on obtiendra sans peine les valeurs de

$$[r, s], \quad [r, s, t],$$

en opérant comme il suit :

Si, après avoir construit le parallélogramme dont les côtés sont $r$ et $s$, on prend $r$ pour base de ce parallélogramme, la hauteur sera représentée par le produit

$$s\sin\left(\widehat{r,s}\right).$$

Donc l'aire du parallélogramme sera proportionnelle, pour une valeur déterminée de l'angle $\left(\widehat{r,s}\right)$, au produit $rs$, et représentée par l'expression

$$rs\sin\left(\widehat{r,s}\right).$$

Si, dans cette expression, l'on réduit chacune des longueurs $r$, $s$ à l'unité, l'aire dont il s'agit deviendra

$$[r, s]=\sin\left(\widehat{r,s}\right). \tag{14}$$

Concevons maintenant qu'après avoir construit le parallélipipède dont les arêtes $r$, $s$, $t$ se coupent au point O, on élève, par ce point, des perpendiculaires aux plans des trois angles

$$\left(\widehat{s,t}\right), \quad \left(\widehat{t,r}\right), \quad \left(\widehat{r,s}\right),$$

et nommons

$$R, \quad S, \quad T$$

trois longueurs mesurées sur ces trois perpendiculaires, la première du même côté que l'arête $r$ par rapport au plan de l'angle $\left(\widehat{s,t}\right)$, la seconde du même côté que l'arête $s$ par rapport au plan de l'angle $\left(\widehat{t,r}\right)$, la troisième du même côté que l'arête $t$ par rapport au plan de l'angle $\left(\widehat{r,s}\right)$. Si l'on prend pour base de ce parallélipipède le parallélogramme qui a pour côtés $r$ et $s$, et pour aire le produit

$$rs\sin\left(\widehat{r,s}\right),$$

la hauteur correspondant à cette base sera évidemment

$$t\cos(\widehat{t,T}).$$

Donc le volume du parallélipipède sera, pour des valeurs déterminées des angles $(\widehat{r,s})$, $(\widehat{t,T})$, proportionnel au produit $rst$, et ce volume sera exprimé par le produit

$$rst\sin(\widehat{r,s})\cos(\widehat{t,T}).$$

Enfin, si l'on réduit chacune des longueurs $rst$ à l'unité, le volume trouvé deviendra

$$(15)\qquad [r,s,t]=\sin(\widehat{r,s})\cos(\widehat{t,T}).$$

On obtiendra de même, en échangeant les arêtes $r$, $s$, $t$ entre elles, deux autres valeurs de $[r,s,t]$ qui seront, avec la précédente, données par la formule

$$(16)\quad [r,s,t]=\sin(\widehat{s,t})\cos(\widehat{r,R})=\sin(\widehat{t,r})\cos(\widehat{s,S})=\sin(\widehat{r,s})\cos(\widehat{t,T}),$$

c'est-à-dire, en d'autres termes, par l'équation (6) de la page 320 du III[e] volume.

Lorsqu'on introduit dans le calcul les deux expressions

$$[r,s],\quad [r,s,t],$$

l'aire du parallélogramme qui a pour côtés $r$ et $s$, se trouve représentée par le produit

$$(17)\qquad rs[r,s];$$

et pareillement le volume du parallélipipède qui a pour arêtes les longueurs $r$, $s$, $t$, se trouve représenté par le produit

$$(18)\qquad rst[r,s,t].$$

Ajoutons que les aires du triangle et du parallélogramme, qui ont pour côtés $r$ et $s$, étant entre elles dans le rapport de 1 à 2, l'aire du triangle sera représentée par le produit

$$(19)\qquad \frac{1}{2}rs[r,s].$$



Pareillement les volumes du tétraèdre et du parallélipipède qui ont pour arêtes $r$, $s$ et $t$, étant entre eux dans le rapport de 1 à 6, le volume du tétraèdre sera représenté par le produit

$$(20)\qquad \frac{1}{6}rst[r,s,t].$$

En finissant, nous indiquerons un moyen très simple de résoudre une question qu'il ne sera pas inutile de traiter ici, et nous rechercherons ce que devient l'aire exprimée par la notation $[r,s]$, quand cette aire est projetée sur un nouveau plan par exemple, sur le plan de l'angle $(\widehat{u,v})$.

Supposons que, les longueurs

$$r,\quad s,\quad u,\quad v$$

étant toutes mesurées à partir de l'origine O, on nomme

$$\rho,\quad \varsigma$$

les projections absolues et orthogonales des longueurs

$$r,\quad s$$

sur le plan de l'angle $(\widehat{u,v})$; et soit $\iota$ l'angle aigu compris entre les plans des deux angles $(\widehat{r,s})$, $(\widehat{u,v})$, ou ce qu'on appelle l'inclinaison de l'un de ces plans sur l'autre. Si l'on projette sur le plan de l'angle $(\widehat{u,v})$ le parallélogramme qui a pour côtés $r$ et $s$, l'aire de la projection sera

$$\rho\varsigma\sin(\widehat{\rho,\varsigma}).$$

Mais, d'autre part, on aura évidemment

$$\rho=r\cos(\widehat{r,\rho}),\qquad \varsigma=s\cos(\widehat{s,\varsigma});$$

donc l'aire de la projection pourra être représentée généralement par le produit

$$(21)\qquad rs\cos(\widehat{r,\rho})\cos(\widehat{s,\varsigma})\sin(\widehat{\rho,\varsigma}).$$

En réduisant, dans ce produit, $r$ et $s$ à l'unité, on obtiendra la projection de l'aire $[r, s]$ sur le plan de l'angle $(\widehat{u, v})$. Cette dernière projection sera donc exprimée par le produit

$$\cos(\widehat{r, \rho})\cos(\widehat{s, \varsigma})\sin(\widehat{\rho, \varsigma}). \tag{22}$$

Ce n'est pas tout. L'aire du parallélogramme qui a pour côtés $r$ et $s$ étant représentée par le produit

$$rs\sin(\widehat{r, s}),$$

il suffira de diviser la projection de cette aire par cette aire même, ou, en d'autres termes, par le produit (21), pour obtenir le rapport

$$\frac{\cos(\widehat{r, \rho})\cos(\widehat{s, \varsigma})\sin(\widehat{\rho, \varsigma})}{\sin(\widehat{r, s})}; \tag{23}$$

et l'on obtiendra encore évidemment le même rapport si l'on réduit à moitié l'aire dont il s'agit et sa projection, en leur substituant l'aire du triangle qui a pour côtés $r$, $s$, et la projection de l'aire de ce triangle. D'ailleurs, rien n'empêche d'attribuer aux côtés $r$, $s$ des longueurs telles, que le troisième côté du triangle devienne parallèle au plan de l'angle $(\widehat{u, v})$, par conséquent à la droite suivant laquelle se coupent les plans des deux angles $(\widehat{r, s})$, $(\widehat{u, v})$; et si, en supposant cette condition remplie, on prend pour base du triangle ce troisième côté, il se projettera en toute grandeur sur le plan de l'angle $(\widehat{u, v})$, pour y devenir la base du triangle projeté. Alors, le triangle et sa projection offrant des bases égales, leurs aires seront entre elles dans le rapport des hauteurs correspondantes, et comme ces hauteurs seront mesurées sur des droites perpendiculaires aux deux bases, par conséquent, à la droite d'intersection des plans des deux angles $(\widehat{r, s})$, $(\widehat{u, v})$, le rapport de la seconde hauteur à la première sera précisément le cosinus de l'inclinaison des deux plans, c'est-à-dire de l'angle $\iota$. Donc, le rapport (23) sera précisément égal à $\cos\iota$, et l'on aura, par suite,

$$\cos(\widehat{r, \rho})\cos(\widehat{s, \varsigma})\sin(\widehat{\rho, \varsigma}) = \sin(\widehat{r, s})\cos\iota. \tag{24}$$



En vertu de la formule (24), la projection de l'aire $[r, s]$ sur le plan de l'angle $(\widehat{u, v})$ pourra être représentée non seulement par l'expression (22), mais encore par le produit

$$\sin(\widehat{r, s})\cos\iota, \tag{25}$$

ou, ce qui revient au même, par le produit

$$[r, s]\cos\iota. \tag{26}$$

Il y a plus : en substituant le produit (26) au produit (22) dans l'expression (21), on obtiendra la suivante :

$$rs[\widehat{r, s}]\cos\iota, \tag{27}$$

qui devra, comme l'expression (21), représenter la projection de l'aire

$$rs[\widehat{r, s}],$$

c'est-à-dire de l'aire du triangle dont les côtés sont $r$ et $s$. On se trouve ainsi ramené par un calcul très simple à cette proposition connue, que *l'aire d'un triangle tracé dans un plan est à sa projection sur un autre plan, dans le rapport de l'unité au cosinus de l'angle aigu compris entre les deux plans.*

La formule (24) coïncide évidemment avec l'équation (8) de la Note insérée à la page 131 du III^e volume (¹). Mais on doit observer que, dans cette Note, l'équation dont il s'agit, au lieu d'être démontrée directement, avait été déduite de la proposition même que nous venons de rappeler.

### II. — *Sur les résultantes formées avec les cosinus des angles compris entre deux systèmes d'axes.*

Considérons dans un plan ou dans l'espace deux systèmes d'axes rectangulaires ou obliques, chaque système étant composé de deux ou

(¹) *Œuvres de Cauchy*, série II, t. XIII, p. 149.

trois axes seulement. Supposons chacun de ces axes indéfiniment prolongé dans une direction déterminée, qui sera celle d'une certaine longueur portée à partir d'une certaine origine O, sur l'axe dont il s'agit. Enfin, nommons

$$r,\ s \quad \text{ou} \quad r,\ s,\ t$$

les longueurs ainsi mesurées, à partir d'une même origine, ou à partir d'origines diverses, sur les directions assignées aux deux ou trois axes qui composent le premier système, et

$$u,\ v \quad \text{ou} \quad u,\ v,\ w$$

les longueurs mesurées, à partir d'une même origine, ou à partir d'origines diverses, sur les directions assignées aux deux ou trois axes qui composent le second système. Les angles compris entre les axes du premier système et les axes du second système auront pour cosinus, si chaque système est composé de deux axes seulement, les quatre quantités comprises dans ce tableau

$$(1)\qquad \left\{\begin{array}{ll} \cos(\widehat{r,u}), & \cos(\widehat{r,v}), \\ \cos(\widehat{s,u}), & \cos(\widehat{s,v}); \end{array}\right.$$

et, dans le cas contraire, c'est-à-dire dans le cas où chaque système serait composé de trois axes, les neuf quantités

$$(2)\qquad \left\{\begin{array}{lll} \cos(\widehat{r,u}), & \cos(\widehat{r,v}), & \cos(\widehat{r,w}), \\ \cos(\widehat{s,u}), & \cos(\widehat{s,v}), & \cos(\widehat{s,w}), \\ \cos(\widehat{t,u}), & \cos(\widehat{t,v}), & \cos(\widehat{t,w}). \end{array}\right.$$

D'ailleurs, on pourra former une résultante à deux dimensions avec les quatre termes du tableau (1), et une résultante à trois dimensions avec les neuf termes du tableau (2). Pour abréger, nous désignerons ces deux résultantes à l'aide des notations

$$[r, s;\ u, v], \quad [r, s, t;\ u, v, w],$$

dont chacune offrira, comme on le voit, deux systèmes de quantités



séparées les unes des autres, non seulement par des virgules, mais aussi par le signe ; interposé entre les deux systèmes. Il est vrai qu'au premier abord on peut être tenté de trouver ces notations trop semblables à celles que nous avons adoptées dans le premier paragraphe; mais on verra, dans le paragraphe III, que cette similitude, loin d'être un inconvénient, est un avantage très réel, et que les expressions

$$[r, s], \quad [r, s, t]$$

se trouvent comprises, comme cas particuliers, dans les expressions plus générales

$$[r, s;\ u, v], \quad [r, s, t;\ u, v, w].$$

Les notations que nous venons de proposer étant admises, on aura généralement

$$(3)\qquad [r, s;\ u, v] = \cos(\widehat{r,u})\cos(\widehat{s,v}) - \cos(\widehat{r,v})\cos(\widehat{s,u}),$$

et

$$(4)\quad \begin{aligned}[t] &[r, s, t;\ u, v, w] \\ &\quad = \cos(\widehat{r,u})\cos(\widehat{s,v})\cos(\widehat{t,w}) - \cos(\widehat{r,u})\cos(\widehat{s,w})\cos(\widehat{t,v}) \\ &\quad\quad + \cos(\widehat{r,v})\cos(\widehat{s,w})\cos(\widehat{t,u}) - \cos(\widehat{r,v})\cos(\widehat{s,u})\cos(\widehat{t,w}) \\ &\quad\quad + \cos(\widehat{r,w})\cos(\widehat{s,u})\cos(\widehat{t,v}) - \cos(\widehat{r,w})\cos(\widehat{s,v})\cos(\widehat{t,u}). \end{aligned}$$

D'ailleurs, les deux résultantes

$$[r, s;\ u, v], \quad [r, s, t;\ u, v, w],$$

définies par les équations (3) et (4), jouissent de propriétés qu'il est utile de bien connaître, et que nous allons successivement énoncer.

Observons d'abord qu'en vertu des formules (3) et (4), chacune des résultantes

$$[r, s;\ u, v], \quad [r, s, t;\ u, v, w]$$

ne sera pas altérée, si l'on échange entre eux les deux systèmes d'axes, par conséquent les deux systèmes de longueurs

$$r,\ s \quad \text{et} \quad u,\ v$$

ou

$$r, \ s, \ t \quad \text{et} \quad u, \ v, \ w.$$

Mais chacune de ces résultantes changera de signe, sans changer de valeur numérique, si l'on échange entre elles deux longueurs mesurées sur deux axes appartenant au même système. On aura, par exemple,

$$[s, r; u, v] = -[r, s; u, v] \tag{5}$$

et

$$[s, r, t; u, v, w] = -[r, s, t; u, v, w]. \tag{6}$$

Observons encore que chacune des résultantes

$$[r, s; u, v], \quad [r, s, t; u, v, w]$$

changera toujours de signe, sans changer de valeur numérique, quand on y remplacera l'une quelconque des directions

$$r, \ s, \ t, \quad u, \ v, \ w$$

par la direction opposée. En effet, supposons que l'on substitue, par exemple, à la longueur $r$ une longueur $r'$, mesurée, comme la longueur $r$, à partir de l'origine O, mais dans une direction opposée à celle de $r$. Alors, dans les seconds membres des formules (3) et (4), les angles

$$(\widehat{r, u}), \quad (\widehat{r, v}), \quad (\widehat{r, w})$$

se trouveront remplacés par leurs suppléments

$$(\widehat{r', u}), \quad (\widehat{r', v}), \quad (\widehat{r', w});$$

et puisque deux angles, dont l'un est supplément de l'autre, offrent, avec le même sinus, deux cosinus égaux, aux signes près, mais affectés de signes contraires, il est clair que la substitution de $r'$ à $r$ aura pour effet unique de changer le signe de chaque terme dans les valeurs des résultantes

$$[r, s; u, v], \quad [r, s, t; u, v, w].$$



On aura donc, par suite,

$$[r', s; u, v] = -[r, s; u, v], \tag{7}$$

et

$$[r', s, t; u, v, w] = -[r, v, t; u, v, w]. \tag{8}$$

Remarquons encore que les angles dont les cosinus entrent comme facteurs dans la composition des divers termes des deux résultantes

$$[r, s; u, v], \quad [r, s, t; u, v, w],$$

ne varieront pas si l'on transporte parallèlement à lui-même chacun des axes sur lesquels se mesurent les longueurs

$$r, \ s, \ t, \quad u, \ v, \ w, \quad \ldots.$$

En conséquence, on peut énoncer la proposition suivante :

Théorème. — *Si les longueurs*

$$r, \ s, \ t, \quad u, \ v, \ w, \quad \ldots$$

*sont mesurées, à partir d'origines diverses, sur divers axes indéfiniment prolongés dans certaines directions, on n'altérera point les valeurs des résultantes*

$$[r, s; u, v], \quad [r, s, t; u, v, w]$$

*en transportant les axes dont il s'agit, parallèlement à eux-mêmes, sans changer leurs directions, de manière à donner pour origine commune aux diverses longueurs un point unique.*

Eu égard à ce théorème, nous supposerons, dans les paragraphes III et IV, les diverses longueurs

$$r, \ s, \ t, \ u, \ v, \ w, \ \ldots,$$

toutes mesurées à partir d'une seule origine O, qui sera le sommet commun des angles plans compris entre elles, et des angles solides dont les arêtes coïncideront avec trois de ces mêmes longueurs.

Nous venons de rappeler quelques-unes des propriétés des deux résultantes

$$[r, s; u, v], \quad [r, s, t; u, v, w].$$

Une autre propriété remarquable de ces mêmes résultantes c'est que la première ne sera point altérée si chacun des angles $(\widehat{r, s})$, $(\widehat{u, v})$ vient à tourner autour du point O, sans changer de valeur, dans le plan qui le renferme, et que pareillement la seconde ne sera point altérée si chacun des angles solides construits avec les arêtes $r$, $s$, $t$ ou $u$, $v$, $w$, tourne autour du point O, sans se déformer. Mais, pour établir plus aisément cette propriété, il convient d'examiner successivement le cas particulier dans lequel un des deux systèmes d'axes

$$r, \ s \quad \text{et} \quad u, \ v$$

ou

$$r, \ s, \ t \quad \text{et} \quad u, \ v, \ w,$$

se compose d'axes perpendiculaires entre eux; puis le cas général où les axes de chaque système comprennent entre eux des angles quelconques. C'est ce que nous ferons dans les deux paragraphes suivants.

### III. — *Détermination de la résultante construite avec les cosinus des angles que des axes quelconques forment avec d'autres axes perpendiculaires entre eux.*

Considérons d'abord, dans un plan donné, deux axes indéfiniment prolongés à partir d'un certain point O dans deux directions déterminées. Soient

$$r, \ s$$

deux longueurs mesurées dans ces deux directions à partir de l'origine O; et supposons, dans le plan de l'angle $(\widehat{r, s})$, la position d'un point quelconque rapportée à deux axes rectangulaires des $x$, $y$, qui passent eux-mêmes par l'origine O. Enfin nommons

$$\mathrm{x}, \ \mathrm{y}$$

deux longueurs mesurées, à partir de cette origine, sur les axes des $x$, $y$, indéfiniment prolongés dans le sens des coordonnées positives. Les



cosinus des quatre angles

$$(\widehat{r, \mathrm{x}}), \quad (\widehat{r, \mathrm{y}}),$$
$$(\widehat{s, \mathrm{x}}), \quad (\widehat{s, \mathrm{y}}),$$

que formeront les deux côtés de l'angle $(\widehat{r, s})$ avec les deux côtés de l'angle droit $(\widehat{\mathrm{x}, \mathrm{y}})$, par suite, la résultante

$$(1) \qquad [r, s; \mathrm{x}, \mathrm{y}] = \cos(\widehat{r, \mathrm{x}})\cos(\widehat{s, \mathrm{y}}) - \cos(\widehat{r, \mathrm{y}})\cos(\widehat{s, \mathrm{x}})$$

construite avec ces cosinus, pourront être évidemment exprimés à l'aide des sinus et cosinus des seuls angles

$$(\widehat{r, \mathrm{x}}), \quad (\widehat{s, \mathrm{y}}).$$

Si, pour plus de commodité, on commence par supposer les longueurs $r$, $s$, situées l'une et l'autre du côté des $y$ positives, c'est-à-dire, en d'autres termes, du même côté que y, par rapport à l'axe des $x$, alors chacun des angles

$$(\widehat{r, \mathrm{y}}), \quad (\widehat{s, \mathrm{y}})$$

étant aigu offrira un cosinus positif; et, comme la valeur numérique de ce cosinus sera le sinus de l'angle formé par la longueur $r$ ou $s$ avec une direction perpendiculaire à y, on aura

$$\cos(\widehat{r, \mathrm{y}}) = \sin(\widehat{r, \mathrm{x}}), \qquad \cos(\widehat{s, \mathrm{y}}) = \sin(\widehat{s, \mathrm{x}}).$$

Donc alors la formule (1) donnera

$$[r, s; \mathrm{x}, \mathrm{y}] = \cos(\widehat{r, \mathrm{x}})\sin(\widehat{s, \mathrm{x}}) - \sin(\widehat{r, \mathrm{x}})\cos(\widehat{s, \mathrm{x}}),$$

ou, ce qui revient au même, eu égard à la formule (11) du paragraphe I,

$$[r, s; \mathrm{x}, \mathrm{y}] = \sin\left[(\widehat{s, \mathrm{x}}) - (\widehat{r, \mathrm{x}})\right].$$

Mais alors aussi, la différence

$$(\widehat{s, \mathrm{x}}) - (\widehat{r, \mathrm{x}}),$$

égale, au signe près à l'angle $(\widehat{r,s})$, sera positive ou négative, avec son sinus, suivant que le mouvement de rotation de $r$ en $s$ sera direct ou rétrograde. Donc la dernière des formules obtenues pourra s'écrire comme il suit

$$(2) \qquad [r, s; \mathrm{x}, \mathrm{y}] = (r, s) \sin(\widehat{r,s}).$$

D'ailleurs l'équation (2), ainsi établie pour le cas où les longueurs $r$, $s$ seraient toutes deux situées du côté des $y$ positives, continuera de subsister, en vertu de la formule (7) du paragraphe II, jointe à la formule (2) du paragraphe I, si l'on substitue à l'une des directions $r$, $s$ la direction opposée $r'$ ou $s'$, située du côté des $y$ négatives, et, par suite encore, si l'on substitue en même temps $r'$ à $r$ et $s'$ à $s$. Donc la formule (2) subsistera pour deux longueurs dont chacune pourra être située, comme l'on voudra, ou du côté des $y$ positives, ou du côté des $y$ négatives. D'autre part, la quantité positive $\sin(\widehat{r,s})$ représente précisément ce que devient la surface du parallélogramme construit sur les côtés $r$, $s$ de l'angle $(\widehat{r,s})$, dans le cas où ces côtés sont tous deux égaux à l'unité, et l'expression

$$(r, s)$$

se réduit à $+1$ ou à $-1$, suivant que le mouvement de rotation de $r$ en $s$ est direct ou rétrograde, c'est-à-dire dirigé dans le sens du mouvement de rotation de $r$ en $s$, ou dans le sens opposé. Cela posé, la formule (2) entraînera évidemment la proposition suivante :

Théorème I. — *Étant donnés dans un plan, un angle droit $(\widehat{\mathrm{x},\mathrm{y}})$, et un angle aigu, droit ou obtus $(\widehat{r,s})$, qui ont pour sommet commun le point O; si l'on détermine les quatre cosinus des autres angles*

$$(\widehat{r,\mathrm{x}}), \quad (\widehat{r,\mathrm{y}}),$$
$$(\widehat{s,\mathrm{x}}), \quad (\widehat{s,\mathrm{y}}),$$

*que formeront les côtés $r$, $s$ de l'angle $(\widehat{r,s})$ avec les côtés x, y de l'angle*



*droit $(\widehat{\mathrm{x},\mathrm{y}})$, la résultante*

$$[r, s; \mathrm{x}, \mathrm{y}],$$

*construite avec ces quatre cosinus, sera positive ou négative, suivant que les mouvements de rotation de $r$ en $s$, et de x en y, s'effectueront dans le même sens ou en sens contraire; et cette résultante aura pour valeur numérique le sinus de l'angle $(\widehat{r,s})$, ou, ce qui revient au même, l'aire du parallélogramme que l'on peut construire sur les côtés $r$, $s$ réduits l'un et l'autre à l'unité.*

*Corollaire.* — La valeur numérique de la résultante

$$[r, s; \mathrm{x}, \mathrm{y}]$$

étant indépendante non seulement de la position qu'occupent, dans le plan donné, les axes rectangulaires sur lesquels se mesurent les deux longueurs x, y, mais encore du sens dans lequel s'effectue le mouvement de rotation de x en y, il est naturel de représenter cette valeur numérique par la simple notation

$$[r, s],$$

que l'on déduit de l'expression

$$[r, s; \mathrm{x}, \mathrm{y}],$$

en y effaçant les deux lettres x, y, employées pour indiquer deux directions dont il n'est plus nécessaire de faire une mention expresse. Alors l'équation (2) se trouve remplacée par les deux formules

$$(3) \qquad [r, s; \mathrm{x}, \mathrm{y}] = (r, s)\,[r, s],$$

$$(4) \qquad [r, s] = (\widehat{r,s}),$$

dont la seconde reproduit précisément l'une des notations admises dans le paragraphe I.

Supposons maintenant que, le sommet O de l'angle $(r, s)$ étant toujours pris pour origine des coordonnées, on rapporte la position d'un point quelconque de l'espace à trois axes rectangulaires des $x$, $y$, $z$, dont les deux premiers pourront être situés en dehors du plan de l'angle $(\widehat{r, s})$; et nommons

$$\mathrm{x}, \quad \mathrm{y}, \quad \mathrm{z}$$

trois longueurs mesurées, à partir de l'origine O, sur les trois axes des $x$, $y$, $z$, indéfiniment prolongés dans le sens des coordonnées positives. Si l'on détermine les cosinus des quatre angles

$$(\widehat{r, \mathrm{x}}), \quad (\widehat{r, \mathrm{y}}),$$
$$(\widehat{s, \mathrm{x}}), \quad (\widehat{s, \mathrm{y}}),$$

que formeront les côtés de l'angle $(\widehat{r, s})$ avec les côtés de l'angle droit $(\widehat{\mathrm{x}, \mathrm{y}})$, on pourra toujours construire avec ces cosinus une résultante

$$[r, s;\ \mathrm{x}, \mathrm{y}] = \cos(\widehat{r, \mathrm{x}})\cos(\widehat{s, \mathrm{y}}) - \cos(\widehat{r, \mathrm{y}})\cos(\widehat{s, \mathrm{x}})$$

Si d'ailleurs, après avoir projeté les longueurs

$$r, \quad s$$

sur le plan des $x$, $y$, on nomme

$$\rho, \quad \varsigma$$

deux longueurs nouvelles mesurées, à partir du point O, dans les directions mêmes des deux projections ou dans les directions opposées, on aura encore.

$$[\rho, \varsigma;\ \mathrm{x}, \mathrm{y}] = \cos(\widehat{\rho, \mathrm{x}})\cos(\widehat{\rho, \mathrm{y}}) - \cos(\widehat{\rho, \mathrm{y}})\cos(\widehat{\varsigma, \mathrm{y}}).$$

Mais, en vertu d'un théorème connu et relatif aux plans qui se coupent à angles droits [*voir* le théorème VII de la page 311 du IIIe volume [1]], on pourra, aux deux équations qui précèdent, joindre les formules

$$\frac{\cos(\widehat{r, \mathrm{x}})}{\cos(\widehat{\rho, \mathrm{x}})} = \frac{\cos(\widehat{r, \mathrm{y}})}{\cos(\widehat{\rho, \mathrm{y}})} = \cos(\widehat{r, \rho}),$$
$$\frac{\cos(\widehat{s, \mathrm{x}})}{\cos(\widehat{\varsigma, \mathrm{x}})} = \frac{\cos(\widehat{s, \mathrm{y}})}{\cos(\widehat{\varsigma, \mathrm{y}})} = \cos(\widehat{s, \varsigma}),$$

---

(1) *Œuvres de Cauchy*, série II, t. XIII, p. 349.



puisque les plans projetants, c'est-à-dire les plans des deux angles

$$(r, \rho), \quad (s, \varsigma)$$

seront tous deux perpendiculaires au plan de l'angle $(\widehat{\mathrm{x}, \mathrm{y}})$. Donc les deux équations dont il s'agit, combinées entre elles par voie de division, donneront

$$\frac{[r, s;\ \mathrm{x}, \mathrm{y}]}{[\rho, \varsigma;\ \mathrm{x}, \mathrm{y}]} = \cos(\widehat{r, \rho})\cos(\widehat{s, \varsigma}),$$

et l'on aura, en conséquence,

$$[r, s;\ \mathrm{x}, \mathrm{y}] = [\rho, \varsigma;\ \mathrm{x}, \mathrm{y}]\cos(\widehat{r, \rho})\cos(\widehat{s, \varsigma}). \tag{5}$$

Enfin, les directions $\rho$, $\varsigma$ étant comprises dans le plan de l'angle $(\widehat{\mathrm{x}, \mathrm{y}})$ on tirera de la formule (2)

$$[\rho, \varsigma;\ \mathrm{x}, \mathrm{y}] = (\rho, \varsigma)\sin(\widehat{\rho. \varsigma}),$$

et, par suite, la formule (5) donnera

$$[r, s;\ \mathrm{x}, \mathrm{y}] = (\rho, \varsigma)\sin(\widehat{\rho, \varsigma})\cos(\widehat{r, \rho})\cos(\widehat{s, \varsigma}). \tag{6}$$

Rien n'empêche de supposer que les deux lettres

$$\rho, \quad \varsigma$$

représentent en grandeur et en direction les projections absolues des longueurs

$$r, \quad s$$

sur le plan des $x$, $y$. Si, pour plus de commodité, on adopte cette supposition, les deux cosinus

$$\cos(\widehat{r, \rho}), \qquad \cos(\widehat{s, \varsigma})$$

seront tous deux positifs, et pour qu'ils représentent les projections absolues $\rho$, $\varsigma$ des longueurs $r$, $s$ sur le plan des $x$, $y$, il suffira que chacune de ces longueurs se réduise à l'unité. Alors, le parallélogramme construit sur ces deux projections $\rho$, $\varsigma$ offrira une aire évidemment exprimée par le produit

$$\sin(\widehat{\rho, \varsigma})\cos(\widehat{r, \rho})\cos(\widehat{s, \varsigma}),$$

puisque ce parallélogramme aura pour côtés

$$\cos(\widehat{r,\rho}),\quad \cos(\widehat{s,\varsigma}),$$

et pour hauteur le produit

$$\cos(\widehat{s,\varsigma})\sin(\widehat{\rho,\varsigma}),$$

quand on prendra pour base le premier côté $\cos(\widehat{r,\rho})$.

Quant au facteur $(\rho,\varsigma)$, il se réduira ou à $+1$, ou à $-1$, suivant que le mouvement de rotation de $\rho$ en $\varsigma$ sera direct ou rétrograde, c'est-à-dire dirigé dans le sens du mouvement de rotation de $\mathrm{x}$ en $\mathrm{y}$, ou dans le sens opposé. D'ailleurs, $\rho$ et $\varsigma$ étant, par hypothèse, les projections absolues de $r$ et de $s$ sur le plan des $x$, $y$ perpendiculaire à l'axe des $z$, il est clair que les mouvements de rotation de $\rho$ en $\varsigma$ et de $r$ en $s$ s'effectueront dans le même sens autour du demi-axe des $z$ positives, c'est-à-dire autour de la direction $\mathrm{z}$. Donc, si l'on adopte les définitions et notations proposées dans le paragraphe I, le mouvement de rotation de $\rho$ en $\varsigma$ sera direct ou rétrograde dans le plan des $x$, $y$, suivant que le mouvement de rotation de $r$ en $s$ autour de la direction $\mathrm{z}$ sera lui-même direct ou rétrograde dans l'espace, et l'on aura

$$(7)\qquad (\rho,\varsigma)=(r,s,\mathrm{z});$$

donc l'équation (6) pourra être présentée sous la forme

$$(8)\qquad [r,s;\,\mathrm{x},\mathrm{y}]=(r,s,\mathrm{z})\sin(\widehat{\rho,\varsigma})\cos(\widehat{r,\rho})\cos(\widehat{s,\varsigma}),$$

et l'on pourra énoncer la proposition suivante :

THÉORÈME II. — *Étant donnés, dans l'espace, un angle droit* $(\widehat{\mathrm{x},\mathrm{y}})$ *et un angle aigu, droit ou obtus* $(\widehat{r,s})$, *qui ont pour sommet commun le point* O; *si l'on distribue les cosinus des quatre angles*

$$(\widehat{r,\mathrm{x}}),\quad (\widehat{r,\mathrm{y}}),$$
$$(\widehat{s,\mathrm{x}}),\quad (\widehat{s,\mathrm{y}}),$$

*que formeront les côtés de l'angle* $(\widehat{r,s})$ *avec les côtés de l'angle droit*



$(\widehat{\mathrm{x},\mathrm{y}})$, *la résultante*

$$[r,s;\,\mathrm{x},\mathrm{y}],$$

*construite avec ces quatre cosinus, sera positive ou négative, suivant que les mouvements de rotation de* $r$ *en* $s$ *et de* $\mathrm{x}$ *en* $\mathrm{y}$ *autour d'une direction* $\mathrm{z}$ *perpendiculaire au plan de l'angle* $(\widehat{\mathrm{x},\mathrm{y}})$, *s'effectueront dans le même sens ou en sens contraire; et cette résultante aura pour valeur numérique l'aire du parallélogramme que l'on peut construire, dans le plan de l'angle* $(\widehat{\mathrm{x},\mathrm{y}})$, *sur les projections des côtés* $r$, $s$, *réduits l'un et l'autre à l'unité. On peut remarquer d'ailleurs que ce parallélogramme est la projection de celui que l'on pourrait construire dans l'espace sur les côtés en question.*

Concevons maintenant que, le même point O étant tout à la fois le sommet de l'angle $(\widehat{r,s})$ et de l'angle droit $(\widehat{\mathrm{x},\mathrm{y}})$, on nomme

$$l,\quad m,\quad n$$

trois longueurs mesurées à partir du point O, la première sur la droite d'intersection des plans des deux angles $(\widehat{\mathrm{x},\mathrm{y}})$, $(\widehat{r,s})$, et les deux dernières sur des perpendiculaires menées à cette droite dans les deux plans dont il s'agit. Supposons d'ailleurs, pour plus de commodité, chacune de ces perpendiculaires dirigée dans un sens tel, que les deux mouvements de rotation de $\mathrm{x}$ en $\mathrm{y}$ et de $l$ en $m$ soient de même espèce dans le plan de l'angle $(\widehat{\mathrm{x},\mathrm{y}})$, et que les deux mouvements de rotation de $r$ en $s$ et de $l$ en $n$ soient de même espèce dans le plan de l'angle $(\widehat{r,s})$. On pourra faire tourner l'angle droit $(\widehat{\mathrm{x},\mathrm{y}})$ dans le plan qui le renferme, de manière à l'appliquer sur l'angle droit $(\widehat{l,m})$, et à faire coïncider les deux directions

$$\mathrm{x},\quad \mathrm{y},$$

la première avec la direction $l$, la seconde avec la direction $m$. Cela posé, on conclura du théorème II, que la valeur générale de l'expression

$$[r,s;\,\mathrm{x},\mathrm{y}]$$

ne diffère pas de la valeur particulière qu'acquiert cette expression quand on y remplace x par $l$, et y par $m$. On aura donc généralement

$$[r, s;\ \mathrm{x}, \mathrm{y}] = [r, s;\ l, m],$$

ou ce qui revient au même,

$$[r, s;\ \mathrm{x}, \mathrm{y}] = \cos(\widehat{r, l})\cos(\widehat{s, m}) - \cos(\widehat{r, m})\cos(\widehat{s, l}).$$

Mais, d'autre part, le plan qui renfermera les deux directions $m$, $n$, dont chacune est perpendiculaire à la direction $l$, sera lui-même perpendiculaire à $l$, et, par suite, à tout plan qui contiendra $l$, par conséquent au plan de l'angle $(\widehat{r, s})$, ou, en d'autres termes, au plan des deux angles $(\widehat{r, n})$, $(\widehat{s, n})$. Donc le théorème relatif aux plans qui se coupent à angles droits, le théorème VII de la page 311 du III$^{e}$ volume donnera

$$\cos(\widehat{r, m}) = \cos(\widehat{r, n})\cos(\widehat{m, n}),$$
$$\cos(\widehat{s, m}) = \cos(\widehat{s, n})\cos(\widehat{m, n}).$$

En substituant ces valeurs de cos $(r, m)$, cos $(s, n)$ dans l'équation précédente

$$[r, s;\ \mathrm{x}, \mathrm{y}] = \cos(\widehat{r, l})\cos(\widehat{s, m}) - \cos(\widehat{r, m})\cos(\widehat{s, l}),$$

et en ayant égard à la formule

$$[r, s;\ l, n] = \cos(\widehat{r, l})\cos(\widehat{s, n}) - \cos(\widehat{r, n})\cos(\widehat{s, l}),$$

on trouvera

$$[r, s;\ \mathrm{x}, \mathrm{y}] = [r, s;\ l, n]\cos(\widehat{m, n}).$$

Enfin, puisque l'angle droit $(\widehat{l, n})$ sera renfermé dans le plan de l'angle $(\widehat{r, s})$, et que dans ce plan, les deux mouvements de rotation de $r$ en $s$ et de $l$ en $n$ auront, par hypothèse, la même direction, le théorème I donnera simplement

$$[r, s;\ l, n] = \sin(\widehat{r, s});$$



et, par suite, la valeur générale de la résultante $[r, s;\ \mathrm{x}, \mathrm{y}]$ pourra être réduite à

$$(9)\qquad [r, s;\ \mathrm{x}, \mathrm{y}] = \sin(\widehat{r, s})\cos(\widehat{m, n}).$$

Donc, puisque sin $(\widehat{r, s})$ représente l'aire $[r, s]$ du losange que l'on peut construire sur les côtés $r$, $s$ réduits chacun à l'unité, on aura encore, dans l'hypothèse admise,

$$(10)\qquad [r, s;\ \mathrm{x}, \mathrm{y}] = [r, s]\cos(\widehat{m, n}).$$

Il est bon d'observer que l'angle $(\widehat{m, n})$ compris entre des droites $m$, $n$ menées dans les plans des deux angles

$$(\widehat{\mathrm{x}, \mathrm{y}}),\quad (\widehat{r, s}),$$

perpendiculairement à la commune intersection $l$ de ces deux plans, est égal ou à l'angle aigu qui mesure l'inclinaison du second plan sur le premier, ou au supplément de cet angle aigu. Donc le cosinus de l'angle $(\widehat{m, n})$ doit être égal, au signe près, au cosinus de l'inclinaison mutuelle des deux plans dont il s'agit; et l'on peut encore énoncer la proposition suivante :

Théorème III. — *Les mêmes choses étant posées que dans le théorème* II, *la résultante*

$$[r, s;\ \mathrm{x}, \mathrm{y}]$$

*aura encore pour valeur numérique le produit du sinus de l'angle* $(\widehat{r, s})$ *par le cosinus de l'inclinaison mutuelle des plans des deux angles* $(\widehat{r, s})$ *et* $(\widehat{\mathrm{x}, \mathrm{y}})$.

D'ailleurs, comme on l'a déjà remarqué, le premier facteur de ce produit est précisément l'aire du parallélogramme que l'on peut construire sur les deux côtés $r$, $s$ réduits l'un et l'autre à l'unité.

*Corollaire.* — Si, en supposant que l'angle droit $(\widehat{\mathrm{x}, \mathrm{y}})$ et l'angle $(\widehat{r, s})$ ont pour sommet le même point O, on nomme $T$ une longueur mesurée, à partir de ce point, sur une perpendiculaire au plan de l'angle $(\widehat{r, s})$, l'angle $(\widehat{T, z})$, compris entre deux droites $T$, z respectivement perpendiculaires aux plans des deux angles $(\widehat{x, y})$, $(\widehat{r, s})$, sera évidemment égal ou à l'inclinaison mutuelle de ces deux plans, ou au supplément de cette inclinaison; et, par suite, les cosinus des deux angles :

$$(\widehat{m, n}),\quad (\widehat{T, z})$$

offriront la même valeur numérique. Si d'ailleurs on suppose les directions $T$ et z situées d'un même côté par rapport au plan de l'angle $(\widehat{r, s})$, les mouvements de rotation de $r$ en $s$ autour de la direction z, et de $r$ en $s$ autour de la direction $T$ s'effectueront dans le même sens; et l'on aura en conséquence

$$(r, s, z) = (r, s, T).$$

Donc alors la résultante

$$[r, s;\ x, y],$$

qui est, en vertu de la formule (8), une quantité affectée du signe de $(r, s, z)$, sera aussi une quantité affectée du signe de $(r, s, T)$; et ce signe sera encore, eu égard à l'équation (9), le signe de $\cos(\widehat{m, n})$. On aura donc, dans l'hypothèse admise

$$\cos(\widehat{m, n}) = (r, s, T)\cos(\widehat{T, z}). \tag{11}$$

Ajoutons que cette dernière formule continuera évidemment de subsister, si à la direction $T$ on substitue la direction opposée, puisque alors l'angle $(\widehat{T, z})$ étant remplacé par son supplément, les deux facteurs du produit

$$(r, s, T)\cos(\widehat{T, z})$$

changeront de signe. La formule (11) se trouvant ainsi établie pour tous les cas, l'équation (9) donnera généralement

$$[r, s;\ x, y] = (r, s, T)\sin(\widehat{r, s})\cos(\widehat{T, z}), \tag{12}$$



ou, ce qui revient au même,

$$[r, s;\ x, y] = (r, s, T)\,[r, s]\cos(\widehat{T, z}). \tag{13}$$

Si maintenant on échange entre elles les trois directions x, y, z, en observant que les trois mouvements de rotation de x en y autour de z, de y en z autour de x, et de z en x autour de y, sont tous trois de même espèce, on obtiendra, au lieu de l'équation (12), deux équations du même genre, qui seront comprises avec elle, dans la seule formule

$$\frac{[r, s;\ y, z]}{\cos(\widehat{T, x})} = \frac{[r, s;\ z, x]}{\cos(\widehat{T, y})} = \frac{[r, s;\ x, y]}{\cos(\widehat{T, z})} = (r, s, T)\sin(\widehat{r, s}). \tag{14}$$

Considérons, à présent, outre les axes rectangulaires des $x$, $y$, $z$, sur lesquels on suppose portées à partir de l'origine O les trois longueurs x, y, z, trois autres axes rectangulaires ou obliques, indéfiniment prolongés à partir du point O, dans des directions déterminées; et nommons

$$r,\ s,\ t$$

trois longueurs qui, ayant le point O pour origine, se mesurent dans ces trois directions. Les cosinus des neuf angles plans

$$\begin{matrix} (\widehat{r, x}), & (\widehat{r, y}), & (\widehat{r, z}), \\ (\widehat{s, x}), & (\widehat{s, y}), & (\widehat{s, z}), \\ (\widehat{t, x}), & (\widehat{t, y}), & (\widehat{t, z}) \end{matrix}$$

que formeront les directions $r$, $s$, $t$ avec les directions x, y, z, seront les éléments de calcul qui entreront dans la composition des trois résultantes à deux dimensions

$$\left\{\begin{aligned} [r, s;\ y, z] &= \cos(\widehat{r, y})\cos(\widehat{s, z}) - \cos(\widehat{r, z})\cos(\widehat{s, y}), \\ [r, s;\ z, x] &= \cos(\widehat{r, z})\cos(\widehat{s, x}) - \cos(\widehat{r, x})\cos(\widehat{s, z}), \\ [r, s;\ x, y] &= \cos(\widehat{r, x})\cos(\widehat{s, y}) - \cos(\widehat{r, y})\cos(\widehat{s, x}), \end{aligned}\right. \tag{15}$$

et de la résultante à trois dimensions

$$(16)\quad \begin{cases} [r, s, t; \mathrm{x}, \mathrm{y}, \mathrm{z}] = \cos(\widehat{r, \mathrm{x}})\cos(\widehat{s, \mathrm{y}})\cos(\widehat{t, \mathrm{z}}) - \cos(\widehat{r, \mathrm{x}})\cos(\widehat{s, \mathrm{z}})\cos(\widehat{t, \mathrm{y}}), \\ \qquad = \cos(\widehat{r, \mathrm{y}})\cos(\widehat{s, \mathrm{z}})\cos(\widehat{t, \mathrm{x}}) - \cos(\widehat{r, \mathrm{y}})\cos(\widehat{s, \mathrm{x}})\cos(\widehat{t, \mathrm{z}}), \\ \qquad = \cos(\widehat{r, \mathrm{z}})\cos(\widehat{s, \mathrm{x}})\cos(\widehat{t, \mathrm{y}}) - \cos(\widehat{r, \mathrm{z}})\cos(\widehat{s, \mathrm{y}})\cos(\widehat{t, \mathrm{x}}). \end{cases}$$

Or, en vertu des formules (15) et (16), on aura évidemment

$$(17)\quad [r, s, t; \mathrm{x}, \mathrm{y}, \mathrm{z}] = [r, s; \mathrm{y}, \mathrm{z}]\cos(\widehat{t, \mathrm{x}}) + [r, s; \mathrm{z}, \mathrm{x}]\cos(\widehat{t, \mathrm{y}}) + [r, s; \mathrm{x}, \mathrm{y}]\cos(\widehat{t, \mathrm{z}}).$$

D'ailleurs, si l'on nomme $T$ une longueur mesurée, à partir du point O, sur une perpendiculaire au plan de l'angle $(\widehat{r, s})$, les valeurs des expressions

$$[r, s; \mathrm{y}, \mathrm{z}],\quad [r, s; \mathrm{z}, \mathrm{x}],\quad [r, s; \mathrm{x}, \mathrm{y}]$$

pourront être déduites de la formule (14), et de cette formule combinée avec l'équation (17), on tirera la suivante :

$$\frac{[r, s, t; \mathrm{x}, \mathrm{y}, \mathrm{z}]}{\cos(\widehat{t, \mathrm{x}})\cos(\widehat{T, \mathrm{x}}) + \cos(\widehat{t, \mathrm{y}})\cos(\widehat{T, \mathrm{y}}) + \cos(\widehat{t, \mathrm{z}})\cos(\widehat{T, \mathrm{z}})} = (r, s, T)\sin(\widehat{r, s}).$$

Donc, en observant que, dans cette dernière, le dénominateur du premier membre est précisément égal à $\cos(\widehat{t, T})$, on trouvera

$$\frac{[r, s, t; \mathrm{x}, \mathrm{y}, \mathrm{z}]}{\cos(\widehat{t, T})} = (r, s, T)\sin(\widehat{r, s}),$$

et, par suite,

$$(18)\quad [r, s, t; \mathrm{x}, \mathrm{y}, \mathrm{z}] = (r, s, T)\sin(\widehat{r, s})\cos(\widehat{t, T}).$$

Si, pour plus de commodité, on suppose que la longueur $T$ soit située du même côté que la longueur $t$ par rapport au plan de l'angle $(\widehat{r, s})$, les deux mouvements de rotation de $r$ en $s$ autour de $t$, et de $r$ en $s$ autour de $T$, s'effectueront dans le même sens; en sorte qu'on aura

$$(r, s, T) = (r, s, t).$$



Alors aussi, dans l'équation (18) réduite à la formule

$$(19)\quad [r, s, t; \mathrm{x}, \mathrm{y}, \mathrm{z}] = (r, s, t)\sin(\widehat{r, s})\cos(\widehat{t, T}),$$

le facteur $\cos(\widehat{t, T})$ sera positif, puisque l'angle $(\widehat{t, T})$ sera aigu; et par suite, le produit

$$\sin(\widehat{r, s})\cos(\widehat{t, T})$$

représentera la valeur du parallélipipède que l'on peut construire sur les arêtes $r$, $s$, $t$, supposées toutes réduites à l'unité [*voir* le § I]. Quant au facteur

$$(r, s, t)$$

il se réduira ou à $+1$, ou à $-1$, suivant que le mouvement de rotation de $r$ en $s$ autour de $t$, étant direct ou rétrograde, sera ou ne sera pas de l'espèce du mouvement de rotation de x en y autour de z. Donc la formule (19) entraînera la proposition suivante :

Théorème IV. — *Étant donné dans l'espace un angle solide dont les arêtes* x, y, z, *mesurées à partir du point fixe* O, *sont perpendiculaires entre elles, et un autre angle solide dont les arêtes* $r$, $s$, $t$ *se coupent, au même point* O, *sous des angles quelconques, si l'on détermine les cosinus des neuf angles*

$$\begin{matrix} (\widehat{r, \mathrm{x}}), & (\widehat{r, \mathrm{y}}), & (\widehat{r, \mathrm{z}}), \\ (\widehat{s, \mathrm{x}}), & (\widehat{s, \mathrm{y}}), & (\widehat{s, \mathrm{z}}), \\ (\widehat{t, \mathrm{x}}), & (\widehat{t, \mathrm{y}}), & (\widehat{t, \mathrm{z}}), \end{matrix}$$

*que formeront les arêtes* $r$, $s$, $t$, *avec les arêtes* x, y, z, *la résultante*

$$[r, s, t; \mathrm{x}, \mathrm{y}, \mathrm{z}],$$

*construite avec ces neuf cosinus, sera positive ou négative, suivant que les mouvements de rotation de* x *en* y *autour de* z, *et de* $r$ *en* $s$ *autour de* $t$, *s'effectueront dans le même sens ou en sens contraire; et cette résultante aura pour valeur numérique le volume du parallélipipède, que l'on peut construire sur les arêtes* $r$, $s$, $t$ *réduites chacune à l'unité.*

*Corollaire.* — La valeur numérique de la résultante

$$[r, s, t;\ \mathrm{x}, \mathrm{y}, \mathrm{z}]$$

étant indépendante non seulement de la position qu'occupent, dans l'espace, les axes rectangulaires sur lesquels se mesurent les trois longueurs

$$\mathrm{x},\quad \mathrm{y},\quad \mathrm{z},$$

mais encore du sens dans lequel s'effectue le mouvement de rotation de x en y autour de z, il est naturel de représenter cette valeur numérique par la simple notation

$$[r, s, t],$$

que l'on déduit de l'expression

$$[r, s, t;\ \mathrm{x}, \mathrm{y}, \mathrm{z}],$$

en y effaçant les trois lettres x, y, z, employées pour indiquer trois directions dont il n'est plus nécessaire de faire une mention expresse. Alors l'équation (19) se trouve remplacée par le système des deux formules

$$[r, s, t;\ \mathrm{x}, \mathrm{y}, \mathrm{z}] = (r, s, t)\,[r, s, t], \tag{20}$$

$$[r, s, t] = \sin(\widehat{r, s})\cos(\widehat{t, T}), \tag{21}$$

dont la seconde reproduit précisément l'une des notations admises dans le paragraphe I. Ajoutons que, si l'on nomme

$$R,\quad S,\quad T$$

trois longueurs respectivement mesurées sur des perpendiculaires aux plans des trois angles

$$(\widehat{s, t}),\quad (\widehat{t, r}),\quad (\widehat{r, s}),$$

à partir du point commun aux trois arêtes

$$r,\quad s,\quad t,$$

et situées, par rapport à ces plans, des mêmes côtés que ces trois arêtes, on pourra joindre à l'équation (21) deux autres équations qui



seront comprises, avec elle, dans la seule formule

$$[r, s, t] = \sin(\widehat{s, t})\cos(\widehat{r, R}) = \sin(\widehat{t, r})\cos(\widehat{s, S}) = \sin(\widehat{r, s})\cos(\widehat{t, T}) \tag{22}$$

[*voir* le § I].

En terminant ce paragraphe, nous remarquerons qu'en vertu des théorèmes I, II et III, la valeur de la résultante

$$[r, s;\ \mathrm{x}, \mathrm{y}]$$

dépend uniquement de l'angle $(\widehat{r, s})$, de l'inclinaison du plan de cet angle sur le plan de $x$, $y$, et du sens dans lequel s'effectue, dans chacun de ces plans, le mouvement de rotation de $r$ en $s$ ou de x en y. Pareillement, il suit du théorème IV, que la valeur de la résultante

$$[r, s, t;\ \mathrm{x}, \mathrm{y}, \mathrm{z}]$$

dépend uniquement de la forme de l'angle solide qui a pour arêtes x, y, z, et du sens suivant lequel s'effectue chacun des mouvements de rotation de $r$ en $s$ autour de $t$, et de x en y autour de z. En conséquence, on peut énoncer la proposition suivante :

Théorème V. — *Les longueurs*

$$r,\quad s,\quad t;\qquad \mathrm{x},\quad \mathrm{y},\quad \mathrm{z}$$

*étant mesurées, à partir d'une même origine* O, *les trois premières dans des directions quelconques, les trois dernières sur des axes perpendiculaires entre eux, on n'altérera point la valeur de la résultante*

$$[r, s;\ \mathrm{x}, \mathrm{y}],$$

*en faisant tourner autour du point* O *chacun des angles*

$$(\widehat{r, s}),\quad (\widehat{\mathrm{x}, \mathrm{y}}),$$

*supposé d'ailleurs invariable, dans le plan qui le renferme, ni la valeur de la résultante*

$$[r, s, t;\ \mathrm{x}, \mathrm{y}, \mathrm{z}],$$

*en faisant tourner autour du point* O, *sans les déformer, les deux angles* *solides qui ont pour arêtes, d'une part, les longueurs* $r$, $s$, $t$; *et, d'autre part, les longueurs* x, y, z.

Les résultats auxquels nous sommes parvenus dans ce paragraphe étaient déjà connus. Mais les formules à l'aide desquelles on les exprimait, n'offraient pas toute la précision que l'on pouvait désirer, puisqu'elles renfermaient des doubles signes dont la détermination dépendait de certaines conditions qu'il était nécessaire de mentionner dans le discours, et d'énoncer à part. L'adoption des signes

$$(r, s), \quad (r, s, t)$$

propres à indiquer le sens des mouvements de rotation, et l'introduction de ces signes dans les formules font disparaître l'inconvénient que nous venons de signaler. Nous allons voir maintenant avec quelle facilité l'usage de ces mêmes signes permet d'établir des formules générales, qui déterminent complètement les valeurs des résultantes analogues à celles dont nous venons de nous occuper, mais relatives à deux systèmes quelconques d'axes rectangulaires ou obliques.

### IV. — *Détermination de la résultante construite avec les cosinus des angles que des axes donnés forment avec d'autres axes rectangulaires ou obliques.*

Considérons deux systèmes d'axes rectangulaires ou obliques, indéfiniment prolongés, à partir d'une même origine O, dans des directions déterminées sur lesquelles se mesurent, à partir du point O, pour le premier système, les longueurs

$$r, \ s \quad \text{ou} \quad r, \ s, \ t,$$

et, pour le second système, les longueurs

$$u, \ v \quad \text{ou} \quad u, \ v, \ w.$$

Si l'on suppose chaque système composé de deux axes seulement, les longueurs

$$r, \ s \quad \text{ou} \quad u, \ v,$$



mesurées sur les directions de ces deux axes, comprendront entre elles un angle plan

$$(\widehat{r,s}) \quad \text{ou} \quad (\widehat{u,v});$$

et les cosinus des quatre angles

$$(\widehat{r,u}), \quad (\widehat{r,v}),$$
$$(\widehat{s,u}), \quad (\widehat{s,v}),$$

que formeront les directions $r$, $s$ avec les directions $u$, $v$, seront les facteurs qui entreront dans la composition des divers termes de la résultante

$$[\widehat{r,s}; \widehat{u,v}] = \cos(\widehat{r,u})\cos(\widehat{s,v}) - \cos(\widehat{r,v})\cos(\widehat{s,u}). \tag{1}$$

Or la valeur de cette résultante pourra être présentée sous une forme très simple, si les deux angles

$$(\widehat{r,s}), \quad (\widehat{u,v})$$

étant renfermés dans un même plan, l'une des directions $r$, $s$ est perpendiculaire à l'une des directions $u$, $v$, en sorte qu'on ait, par exemple,

$$(\widehat{r,v}) = \frac{\pi}{2}.$$

En effet, supposons ces conditions remplies; alors on trouvera

$$\cos(\widehat{r,v}) = 0,$$

et, par suite, la formule (1) donnera

$$[r, s; u, v] = \cos(\widehat{r,u})\cos(\widehat{s,v}).$$

Or, la direction $v$ étant perpendiculaire à la direction $r$, on pourra, dans les formules (4) du paragraphe I, remplacer non seulement $r$ par $s$ ou par $u$, mais encore x et y par $r$ et $v$; et, par suite, en considérant comme direct le mouvement de rotation de $r$ en $v$, on aura

$$\cos(\widehat{u, r}) = (u, v)\sin(\widehat{u, v}), \qquad \cos(\widehat{s, v}) = (r, s)\sin(\widehat{r, s}).$$

Donc la valeur trouvée de $[r, s; u, v]$ pourra être réduite à

$$(2) \qquad [r, s; u, v] = (r, s)(u, v)\sin(\widehat{r, s})\sin(\widehat{u, v}).$$

Observons d'ailleurs que la formule (2) continuera évidemment de subsister, si l'on considère comme direct, non plus le mouvement de rotation de $r$ en $v$, mais le mouvement de rotation de $v$ en $r$; car, pour passer d'un cas à l'autre, il suffira de changer le signe de chacun des facteurs, ce qui n'altérera pas leur produit. Ajoutons qu'en vertu de la formule (5) du paragraphe II, jointe à la formule (1) du paragraphe I, l'équation (2) subsistera encore, si l'on y échange séparément ou simultanément $r$ avec $s$ et $u$ avec $v$. Elle subsistera donc non seulement quand $r$ sera perpendiculaire à $v$, mais encore toutes les fois que l'une des directions $r$, $s$ sera perpendiculaire à l'une des directions $u$, $v$. Il y a plus : on peut affirmer que la formule (2) subsiste généralement, quelles que soient dans le plan donné, c'est-à-dire dans le plan des deux angles $(\widehat{r, s})$, $(\widehat{u, v})$, les directions des longueurs

$$r, \quad s, \quad u, \quad v.$$

C'est effectivement ce que l'on démontrera sans peine, en opérant comme il suit.

Rapportons la position d'un point quelconque, dans le plan donné, à deux axes rectangulaires des $x$ et $y$, qui passent par l'origine commune O des quatre longueurs $r$, $s$, $u$, $v$; et nommons

$$x, \quad y$$

deux autres longueurs mesurées, à partir du point O, sur ces deux axes indéfiniment prolongés du côté des coordonnées positives. Chacun des quatre cosinus renfermés dans le tableau

$$\begin{matrix} \cos(\widehat{r, u}), & \cos(\widehat{r, v}), \\ \cos(\widehat{s, u}), & \cos(\widehat{s, v}), \end{matrix}$$



sera déterminé par une équation de la forme

$$(3) \qquad \cos(\widehat{r, u}) = \cos(\widehat{r, x})\cos(\widehat{u, x}) + \cos(\widehat{r, y})\cos(\widehat{u, y});$$

et, en conséquence, pour obtenir chacun de ces quatre cosinus, il suffira d'ajouter entre eux les deux termes renfermés dans une même ligne horizontale du tableau

$$\begin{matrix} \cos(\widehat{r, x}), & \cos(\widehat{r, y}), \\ \cos(\widehat{s, x}), & \cos(\widehat{s, y}), \end{matrix}$$

après les avoir respectivement multipliés par les termes correspondants de l'une des lignes horizontales du tableau

$$\begin{matrix} \cos(\widehat{u, x}), & \cos(\widehat{u, y}), \\ \cos(\widehat{v, x}), & \cos(\widehat{v, y}). \end{matrix}$$

Cela posé, en ayant égard au théorème général sur les produits des résultantes [*voir* le II[e] volume, page 167 (1)], et en appliquant ce théorème aux quatre équations semblables entre elles, qui seront de la forme de l'équation (3), on trouvera

$$(4) \qquad [r, s; u, v] = [r, s; x, y][u, v; x, y].$$

Or, à l'aide de l'équation (4), que l'on peut aussi présenter sous la forme

$$(5) \qquad [r, s; x, y] = \frac{[r, s; u, v]}{[u, v; x, y]},$$

on étendra facilement la formule (2) à tous les cas possibles. En effet, on pourra d'abord, en particularisant les directions $u$ et $v$, tirer de l'équation (5) la valeur de $[r, s; x, y]$. Si, pour fixer les idées, on suppose $v$ perpendiculaire à $r$, et $u$ à $y$, on tirera de la formule (2), déjà démontrée dans le cas où $r$ est perpendiculaire à $v$,

$$[r, s; u, v] = (r, s)(u, v)\sin(\widehat{r, s})\sin(\widehat{u, v});$$

(1) *Œuvres de Cauchy*, série II, t. XII, p. 191.

et, eu égard aux conditions

$$(\widehat{\mathrm{x}, \mathrm{y}}) = \frac{\pi}{2}, \qquad \sin(\widehat{\mathrm{x}, \mathrm{y}}) = 1, \qquad (\mathrm{x}, \mathrm{y}) = 1.$$

On trouvera de même, puisque $u$ est supposé perpendiculaire à y,

$$[u, v; \mathrm{x}, \mathrm{y}] = (u, v) \sin(\widehat{u, v});$$

puis, en substituant les valeurs ici trouvées des deux résultantes

$$[r, s; u, v], \quad [u, v; \mathrm{x}, \mathrm{y}],$$

dans le second membre de la formule (4), on obtiendra l'équation

$$(6) \qquad [r, s; \mathrm{x}, \mathrm{y}] = (r, s) \sin(\widehat{r, s}),$$

que l'on pourrait, au reste, comme on l'a vu dans le paragraphe III, établir directement. Enfin, si l'on substitue dans le second membre de l'équation (4), la valeur précédente de $[r, s; \mathrm{x}, \mathrm{y}]$, et la valeur semblable de $[u, v; \mathrm{x}, \mathrm{y}]$, qui seront encore données par la formule

$$[u, v; \mathrm{x}, \mathrm{y}] = (u, v) \sin(\widehat{u, v}),$$

quelle que soit la direction attribuée à $u$, on sera immédiatement ramené à l'équation (2), qui sera ainsi démontrée, quelles que soient, dans le plan donné, les directions des quatre longueurs

$$r, \quad s, \quad u, \quad v.$$

Il est bon d'observer que le produit

$$(r, s)(u, v),$$

renfermé dans le second membre de la formule (2), se réduit simplement à $+1$ ou à $-1$ selon que les mouvements de rotation de $r$ en $s$ et de $u$ en $v$ s'effectuent dans le même sens ou en sens contraire. Quant aux facteurs

$$\sin(\widehat{r, s}), \quad \sin(\widehat{u, v}),$$

ils représentent précisément les aires de deux parallélogrammes que



l'on peut construire sur les côtés des deux angles plans $(\widehat{r, s})$, $(\widehat{u, v})$, en supposant chacun de ces côtés réduit à l'unité.

Cela posé, la formule (23) entraînera évidemment la proposition suivante :

THÉORÈME I. — *Étant donnés, dans un plan, deux angles*

$$(\widehat{r, s}), \quad (\widehat{u, v}),$$

*si l'on détermine les quatre cosinus des autres angles*

$$(\widehat{r, u}), \quad (\widehat{r, v}),$$
$$(\widehat{s, u}), \quad (\widehat{s, v}),$$

*que formeront entre eux les côtés des deux angles donnés, la résultante*

$$[r, s; u, v],$$

*construite avec ces quatre cosinus, sera positive ou négative, selon que les mouvements de rotation de r en s et de u en v s'effectueront dans le même sens ou en sens contraire; et cette résultante aura pour valeur numérique le produit des sinus des deux angles donnés, ou, ce qui revient au même, le produit des aires des deux parallélogrammes que l'on peut construire sur les côtés de ces deux angles, en supposant ces côtés réduits à l'unité.*

*Corollaire.* — Si, comme nous l'avons déjà fait dans le paragraphe III, on désigne par

$$[r, s]$$

l'aire du parallélogramme qui a pour côtés les longueurs $r$, $s$ réduites à l'unité, on aura

$$[r, s] = \sin(\widehat{r, s}), \qquad [u, v] = \sin(\widehat{u, v}),$$

et la formule (2) pourra s'écrire comme il suit :

$$(7) \qquad [r, s; u, v] = (r, s)(u, v)[r, s][u, v].$$

Supposons maintenant que les deux angles

$$(\widehat{r, s}), \quad (\widehat{u, v}),$$

ayant pour sommet commun le point O, cessent d'être situés dans un même plan; puis, en prenant le point O pour origine des coordonnées, rapportons la position d'un point quelconque de l'espace à trois axes rectangulaires des $x$, $y$, $z$, dont les deux premiers soient renfermés dans le plan de l'angle $(u, v)$; et nommons

$$\mathrm{x},\quad \mathrm{y},\quad \mathrm{z}$$

trois longueurs mesurées à partir de l'origine O, sur ces trois axes indéfiniment prolongés dans le sens des coordonnées positives. Chacune des directions $u$, $v$ étant comprise dans le plan de l'angle droit $(\widehat{\mathrm{x}, \mathrm{y}})$, la formule (3) et celles qu'on en déduit en remplaçant séparément ou simultanément $r$ par $s$ et $u$ par $v$, continueront encore de subsister [*voir* le théorème VI de la page 311 du III<sup>e</sup> volume (¹)], et entraîneront encore avec elles l'équation (4), en sorte qu'on aura

$$(4)\qquad [r, s; u, v] = [r, s; \mathrm{x}, \mathrm{y}]\,[u, v; \mathrm{x}, \mathrm{y}].$$

De plus, l'angle $(u, v)$ étant compris dans le plan de l'angle droit $(\widehat{\mathrm{x}, \mathrm{y}})$, la formule (6) donnera

$$[u, v; \mathrm{x}, \mathrm{y}] = (u, v)\sin(\widehat{u, v}).$$

D'ailleurs, si l'on adopte les définitions et notations proposées dans le paragraphe I, le mouvement de rotation de $u$ en $v$ sera direct ou rétrograde dans le plan des $x$, $y$, suivant que le mouvement de rotation de $u$ en $v$ autour de la direction z sera direct ou rétrograde dans l'espace. On aura donc

$$(u, v) = (u, v, \mathrm{z});$$

et, par suite, la valeur trouvée de la résultante $[u, v; \mathrm{x}, \mathrm{y}]$ pourra être présentée sous la forme

$$(8)\qquad [u, v; \mathrm{x}, \mathrm{y}] = (u, v, \mathrm{z})\sin(u, v),$$

(¹) *Œuvres de Cauchy*, série II, t. XIII, p. 349.



Enfin si, pour plus de commodité, on suppose la direction y, c'est-à-dire la direction du demi-axe des $y$ positives, fixée de telle sorte que le mouvement de rotation de x en y s'effectue dans le sens du mouvement de rotation de $u$ en $v$, alors l'expression $(u, v)$ ou $(u, v, z)$ étant réduite à l'unité, on aura simplement

$$(9)\qquad [u, v; \mathrm{x}, \mathrm{y}] = \sin(\widehat{u, v}).$$

Quant à la valeur de la résultante $[r, s; \mathrm{x}, \mathrm{y}]$, elle pourra être déduite de l'une quelconque des formules (8) et (9) du paragraphe III. En effet, soient

$$\rho,\quad \varsigma$$

les projections absolues des longueurs $r, s$ sur le plan des deux angles $(\widehat{u, v})$, $(\widehat{\mathrm{x}, \mathrm{y}})$. Soient encore

$$l,\quad m,\quad n$$

trois longueurs mesurées à partir du point O, la première sur la droite d'intersection des deux angles $(\widehat{r, s})$, $(\widehat{u, v})$; la seconde sur une perpendiculaire menée à cette droite, dans le plan des deux angles $(\widehat{u, v})$, $(\widehat{\mathrm{x}, \mathrm{y}})$, et dirigée dans un sens tel, que le mouvement de rotation de $l$ en $m$ soit de l'espèce du mouvement de rotation de $x$ en $y$; la troisième sur une perpendiculaire menée à la droite $l$, dans le plan de l'angle $(\widehat{r, s})$, et dirigée dans un sens tel, que le mouvement de rotation de $l$ en $n$ soit de l'espèce du mouvement de rotation de $r$ en $s$. Enfin, soit $T$ une longueur mesurée, à partir du point O, sur une perpendiculaire au plan de l'angle $(\widehat{r, s})$. On aura, en vertu de la formule (8) du paragraphe III,

$$(10)\qquad [r, s; \mathrm{x}, \mathrm{y}] = (r, s, z)\sin(\widehat{\rho, \varsigma})\cos(\widehat{r, \rho})\cos(\widehat{s, \varsigma});$$

puis, en supposant que, dans le plan des $x$, $y$, les mouvements de rotation de x en y et de $u$ en $v$ sont de même espèce, on aura encore, en vertu de la formule (9) du paragraphe cité,

$$(11)\qquad [r, s; \mathrm{x}, \mathrm{y}] = \sin(\widehat{r, s})\cos(\widehat{m, n}).$$

Cela posé, si l'on substitue dans l'équation (4), avec la valeur de $[u, v; \mathrm{x}, \mathrm{y}]$ tirée de la formule (8), la valeur de $[r, s; \mathrm{x}, \mathrm{y}]$ tirée de la formule (10), ou, avec la valeur de $[u, v; \mathrm{x}, \mathrm{y}]$ tirée de la formule (9), la valeur de $(r, s; \mathrm{x}, \mathrm{y})$ tirée de la formule (11), on obtiendra l'une des équations

$$(12)\quad [r, s; u, v] = (r, s, z)\,(u, v, z)\sin(\widehat{u, v})\sin(\widehat{\rho, \varsigma})\cos(\widehat{r, \rho})\cos(\widehat{s, \varsigma}),$$

$$(13)\quad [r, s; u, v] = \sin(\widehat{r, s})\sin(\widehat{u, v})\cos(\widehat{m, n}).$$

Il est bon d'observer que, si l'on désigne, comme plus haut, par la notation $[r, s]$ l'aire du parallélogramme que l'on peut construire sur les côtés $r$, $s$ réduits l'un et l'autre à l'unité, la formule (13) donnera

$$(14)\qquad [r, s; u, v] = [r, s]\,[u, v]\cos(\widehat{m, n}).$$

Ajoutons que, dans la formule (12), le produit

$$\sin(\widehat{\rho, \varsigma})\cos(\widehat{r, \rho})\cos(\widehat{s, \varsigma})$$

représentera précisément la projection de la surface $[r, s]$ sur le plan de la surface $[u, v]$. Cela posé, les propositions qui se déduiront de la formule (12), puis de la formule (13) ou (14), et qui seront analogues aux théorèmes II et III du paragraphe III, pourront évidemment s'énoncer dans les termes suivants :

Théorème II. — *Étant donnés, dans l'espace, deux angles*

$$(\widehat{r, s}),\quad (\widehat{u, v}),$$

*si l'on détermine les quatre cosinus des autres angles*

$$(\widehat{r, u}),\quad (\widehat{r, v}),$$
$$(\widehat{s, u}),\quad (\widehat{s, v}),$$

*que formeront entre eux les côtés des deux angles donnés, la résultante*

$$[r, s; u, v],$$

*construite avec ces quatre cosinus, sera positive ou négative suivant que*



*les mouvements de rotation de $r$ en $s$, et de $u$ en $v$, autour d'une droite perpendiculaire au plan de l'un des angles $(\widehat{r, s})$, $(\widehat{u, v})$ s'effectueront dans le même sens ou en sens contraire.* De plus, si dans les plans des deux angles

$$(\widehat{r, s}),\quad (\widehat{u, v}),$$

on construit deux parallélogrammes qui aient pour côtés les longueurs $r$ et $s$, ou $u$ et $v$, réduites chacune à l'unité, la résultante $[r, s; u, v]$ aura pour valeur numérique le produit de l'aire du premier parallélogramme par la projection de l'aire du second sur le plan du premier.

Théorème III. — *Les mêmes choses étant posées que dans le théorème II, la résultante $[r, s; u, v]$ aura encore pour valeur numérique le produit qu'on obtient en multipliant les aires*

$$[r, s],\quad [u, v]$$

*des deux parallélogrammes ci-dessus mentionnés, par le cosinus de l'angle aigu que les plans de ces deux parallélogrammes forment entre eux.*

Il ne sera pas inutile d'indiquer une forme digne de remarque, sous laquelle on peut présenter la formule (14). Concevons que des deux angles

$$[\widehat{r, s}],\quad [\widehat{u, v}]$$

ayant pour sommet commun le point O, on élève, à partir de ce point, deux perpendiculaires aux plans de ces deux angles, et nommons

$$T,\quad W$$

deux longueurs mesurées sur les directions de ces perpendiculaires, dans des sens déterminés. En considérant comme direct le mouvement de rotation de x en y autour de la direction z, on aura [*voir* la formule (8) du § III]

$$\cos(\widehat{m, n}) = (r, s, T)\cos(\widehat{T, z}).$$

D'autre part, si les mouvements de rotation de x en y et de $u$ en $v$ autour de la direction z sont dirigés dans le même sens, comme le suppose la formule (14), on aura encore

$$(u, v, z) = (\mathrm{x}, \mathrm{y}, \mathrm{z}) = 1,$$

et, par suite,

$$\cos(\widehat{m, n}) = (r, s, T)(u, v, z)\cos(\widehat{T, z}).$$

Enfin, les directions $z$ et $W$ étant toutes deux, par hypothèse, perpendiculaires au plan de l'angle $(\widehat{u, v})$ ou $(\widehat{\mathrm{x}, \mathrm{y}})$, coïncideront ou seront opposées l'une à l'autre; et par suite, le produit

$$(u, v, z)\cos(T, z)$$

ne pourra être altéré par la substitution de $W$ à $z$, puisque cette substitution, si elle modifie les deux facteurs

$$(u, v, z), \quad \cos(T, z),$$

aura pour effet unique de changer le signe de chacun d'eux. On aura donc

$$(u, v, z)\cos(\widehat{T, z}) = (u, v, W)\cos(\widehat{T, W}),$$

et la valeur trouvée de $\cos(\widehat{m, n})$ pourra s'écrire comme il suit :

$$(15) \qquad \cos(\widehat{m, n}) = (r, s, T)(u, v, W)\cos(\widehat{T, W}).$$

Or, eu égard à cette dernière formule, l'équation (14) donnera

$$(16) \qquad [r, s; u, v] = (r, s, T)(u, v, W)[r, s][u, v]\cos(\widehat{T, W}).$$

Ajoutons que chacune des formules (12), (13), (14), (16) comprend évidemment, comme cas particulier, la formule (7).

Si, à partir du sommet de l'angle $(\widehat{r, s})$ on mesurait, dans une direction quelconque, une longueur $t$, alors, en faisant coïncider $u$ avec $r$, et $v$ avec $t$, on tirerait de la formule (13)

$$(17) \qquad [r, s; r, t] = \sin(\widehat{r, s})\sin(\widehat{r, t})\cos(\widehat{m, n}),$$



et comme on aurait

$$(\widehat{r, r}) = 0, \qquad \cos(\widehat{r, r}) = 1,$$

par conséquent,

$$[r, s; r, t] = \cos(\widehat{s, t}) - \cos(\widehat{r, s})\cos(\widehat{r, t}),$$

la formule (15) donnerait

$$(18) \qquad \cos(\widehat{s, t}) - \cos(\widehat{r, s})\cos(\widehat{r, t}) = \sin(\widehat{r, s})\sin(\widehat{r, t})\cos(\widehat{m, n}).$$

Mais alors aussi, $m$, $n$ étant deux longueurs mesurées perpendiculairement à $r$, dans les plans des deux angles $(\widehat{r, t})$, $(\widehat{r, s})$, la première du côté de $t$, la seconde du côté de $s$, l'angle plan $(\widehat{r, s})$ serait la mesure de l'angle dièdre adjacent à l'arête $r$, dans l'angle solide qui aurait pour arêtes $r$, $s$, $t$. Donc, en nommant $a$, $b$, $c$ les trois angles plans

$$(\widehat{s, t}), \quad (\widehat{t, r}), \quad (\widehat{r, s}),$$

et $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ les angles dièdres opposés à ces angles plans dans l'angle solide dont il s'agit, on verrait l'équation se réduire à la formule

$$\cos a - \cos b \cos c = \sin b \sin c \cos\alpha,$$

que l'on peut considérer comme l'équation fondamentale de la trigonométrie sphérique. Ainsi, cette équation fondamentale se trouve comprise, comme cas particulier, dans la formule (13).

Considérons à présent, dans l'espace, deux systèmes d'axes dont chacun se compose de trois axes indéfiniment prolongés, à partir d'un certain point O, dans des directions déterminées. Les longueurs

$$r, \ s, \ t \quad \text{ou} \quad u, \ v, \ w,$$

mesurées, à partir du point O, dans ces mêmes directions, pourront être regardées comme les trois arêtes d'un angle solide, et les cosinus des neuf angles plans

$$\begin{array}{ccc} (\widehat{r, u}), & (\widehat{r, v}), & (\widehat{r, w}), \\ (\widehat{s, u}), & (\widehat{s, v}), & (\widehat{s, w}), \\ (\widehat{t, u}), & (\widehat{t, v}), & (\widehat{t, w}) \end{array}$$

que formeront les directions $r, s, t$ avec les directions $u, v, w$, seront les facteurs qui entreront dans la composition des divers termes de la résultante

$$(19)\quad \begin{aligned}[r, s, t; u, v, w] = {} & \cos(\widehat{r, u})\cos(\widehat{s, v})\cos(\widehat{t, w}) - \cos(\widehat{r, u})\cos(\widehat{s, w})\cos(\widehat{t, v}) \\ & + \cos(\widehat{r, v})\cos(\widehat{s, w})\cos(\widehat{t, u}) - \cos(\widehat{r, v})\cos(\widehat{s, u})\cos(\widehat{t, w}) \\ & + \cos(\widehat{r, w})\cos(\widehat{s, u})\cos(\widehat{t, v}) - \cos(\widehat{r, w})\cos(\widehat{s, v})\cos(\widehat{t, u}).\end{aligned}$$

Or cette résultante pourra être présentée sous une forme très simple, si l'une des directions $u, v, w$ est perpendiculaire à deux des directions $r, s, t$, en sorte qu'on ait par exemple,

$$(\widehat{r, w}) = \frac{\pi}{2}, \qquad (\widehat{s, w}) = \frac{\pi}{2}.$$

En effet, supposons ces conditions remplies; alors on aura

$$\cos(\widehat{r, w}) = 0, \qquad \cos(\widehat{s, w}) = 0,$$

et, par suite, l'équation (19) donnera

$$(20)\qquad [r, s, t; u, v, w] = [r, s; u, v]\cos(\widehat{t, w});$$

puis, en désignant par

$$T, \quad W$$

deux longueurs mesurées, à partir du point O, sur des perpendiculaires aux plans des deux angles

$$(\widehat{r, s}), \quad (\widehat{u, v}),$$

on tirera de la formule (20), jointe à l'équation (16),

$$(21)\quad [r, s, t; u, v, w] = (r, s, T)(u, v, w)\sin(\widehat{r, s})\sin(\widehat{u, v})\cos(\widehat{t, w})\cos(\widehat{T, W}).$$

D'ailleurs, la direction $w$ étant, par hypothèse, perpendiculaire, ainsi que $T$, aux directions $r$ et $s$, se confondra ou avec la direction $T$, ou avec la direction opposée à $T$.



Donc, si dans le produit

$$\cos(\widehat{t, w})\cos(\widehat{T, W})$$

on échange entre elles les deux lettres $w$ et $T$, cet échange laissera intacte la valeur de ce produit, dont les deux facteurs ne pourront subir d'autre modification qu'un changement de signe opéré simultanément dans l'un et dans l'autre. On a donc

$$\cos(\widehat{t, w})\cos(\widehat{T, W}) = \cos(\widehat{t, T})\cos(\widehat{w, W}),$$

et, par suite, la formule (21) pourra s'écrire comme il suit :

$$(22)\quad \begin{aligned}&[r, s, t; u, v, w] \\ &\quad = (r, s, T)(u, v, W)\sin(\widehat{r, s})\sin(\widehat{u, v})\cos(\widehat{t, T})\cos(\widehat{w, W}).\end{aligned}$$

Supposons maintenant, pour plus de commodité, la longueur $T$ située, par rapport au plan de l'angle $(\widehat{r, s})$, du même côté que la longueur $t$, et la longueur $W$ située, par rapport au plan de l'angle $(\widehat{u, v})$, du même côté que la longueur $w$. Alors non seulement on aura

$$(r, s, T) = (r, s, t), \qquad (u, v, W) = (u, v, w);$$

mais de plus, en désignant, comme on l'a déjà fait, par $[r, s, t]$ la valeur du parallélipipède qui aurait pour arêtes les longueurs $r, s, t$ réduites chacune à l'unité, on aura, en vertu de la formule (21) du paragraphe III,

$$[r, s, t] = \sin(\widehat{r, s})\cos(t, T), \qquad [u, v, w] = \sin(\widehat{u, v})\cos(\widehat{w, W}).$$

Donc la formule (22) donnera

$$(23)\qquad [r, s, t; u, v, w] = (r, s, t)(u, v, w)[r, s, t][u, v, w].$$

On doit observer qu'en vertu de la formule (5) du paragraphe I, jointe à la formule (6) du paragraphe II, l'équation (23) ne sera point altérée, si l'on y échange séparément ou simultanément, d'une part, $r$ avec $s$ ou $t$, d'autre part, $w$ avec $u$ ou $v$. Donc l'équation (23) se vérifiera, non seulement quand $w$ sera perpendiculaire à $r$ et $s$, mais encore quand l'une quelconque des trois directions

$$u,\quad v,\quad w$$

sera perpendiculaire à deux quelconques des trois directions

$$r,\quad s,\quad t.$$

Il y a plus : on peut affirmer qu'elle subsistera généralement, quelles que soient les directions

$$r,\quad s,\quad t;\qquad u,\quad v,\quad w.$$

C'est du moins, ce que l'on démontrera sans peine, en opérant comme il suit.

Rapportons la position d'un point quelconque, dans l'espace, à trois axes rectangulaires des $x, y, z$ qui passent par l'origine commune O des six longueurs

$$r,\quad s,\quad t;\qquad u,\quad v,\quad w;$$

et nommons

$$\mathrm{x},\quad \mathrm{y},\quad \mathrm{z}$$

trois autres longueurs mesurées, à partir du point O, sur ces trois axes indéfiniment prolongés du côté des coordonnées positives. Chacun des neuf cosinus renfermés dans le tableau

$$\begin{array}{lll} \cos(\widehat{r, u}), & \cos(\widehat{r, v}), & \cos(\widehat{r, w}), \\ \cos(\widehat{s, u}), & \cos(\widehat{s, v}), & \cos(\widehat{s, w}), \\ \cos(\widehat{t, u}), & \cos(\widehat{t, v}), & \cos(\widehat{t, w}), \end{array}$$

sera déterminé par une équation de la forme

$$(24)\qquad \cos(\widehat{r, u}) = \cos(\widehat{r, \mathrm{x}})\cos(\widehat{u, \mathrm{x}}) + \cos(\widehat{r, \mathrm{y}})\cos(\widehat{u, \mathrm{y}}) + \cos(\widehat{r, \mathrm{z}})\cos(\widehat{s, \mathrm{z}});$$

et, conséquemment, pour obtenir chacun de ces quatre cosinus, il suffira d'ajouter entre eux les trois termes renfermés dans une même



ligne horizontale du tableau

$$\begin{array}{lll} \cos(\widehat{r, \mathrm{x}}), & \cos(\widehat{r, \mathrm{y}}), & \cos(\widehat{r, \mathrm{z}}), \\ \cos(\widehat{s, \mathrm{x}}), & \cos(\widehat{s, \mathrm{y}}), & \cos(\widehat{s, \mathrm{z}}), \\ \cos(\widehat{t, \mathrm{x}}), & \cos(\widehat{t, \mathrm{y}}), & \cos(\widehat{t, \mathrm{z}}), \end{array}$$

après les avoir respectivement multipliés par les termes correspondants de l'une des lignes horizontales du tableau

$$\begin{array}{lll} \cos(\widehat{u, \mathrm{x}}), & \cos(\widehat{u, \mathrm{y}}), & \cos(\widehat{u, \mathrm{z}}), \\ \cos(\widehat{v, \mathrm{x}}), & \cos(\widehat{v, \mathrm{y}}), & \cos(\widehat{v, \mathrm{z}}), \\ \cos(\widehat{w, \mathrm{x}}), & \cos(\widehat{w, \mathrm{y}}), & \cos(\widehat{w, \mathrm{z}}). \end{array}$$

Cela posé, en ayant égard au théorème général sur les produits des résultantes [*voir* le deuxième volume, page 167 (1)] et en appliquant ce théorème aux neuf équations semblables entre elles qui seront de la forme de l'équation (24), on trouvera

$$(25)\qquad [r, s, t; u, v, w] = [r, s, t; \mathrm{x}, \mathrm{y}, \mathrm{z}]\,[u, v, w; \mathrm{x}, \mathrm{y}, \mathrm{z}].$$

Or, à l'aide de l'équation (25), que l'on pourra aussi présenter sous la forme

$$(26)\qquad [r, s, t; \mathrm{x}, \mathrm{y}, \mathrm{z}] = \frac{[r, s, t; u, v, w]}{[u, v, w; \mathrm{x}, \mathrm{y}, \mathrm{z}]},$$

on étendra facilement la formule (23) à tous les cas possibles. En effet, on pourra d'abord, en particularisant les directions $u$, $v$, $w$, tirer de l'équation (26) la valeur de $[r, s, t; \mathrm{x}, \mathrm{y}, \mathrm{z}]$. Si, pour fixer les idées, on suppose la direction $w$ perpendiculaire aux deux directions $r$, $s$, et la direction $v$ perpendiculaire aux deux directions x, y, on tirera de la formule (23), déjà démontrée dans le cas où $w$ est perpendiculaire à $r$ et à $s$,

$$[r, s, t; u, v, w] = (r, s, t)(u, v, w)[r, s, t][u, v, w];$$

et, eu égard aux conditions

$$(\mathrm{x}, \mathrm{y}, \mathrm{z}) = 1, \qquad [\mathrm{x}, \mathrm{y}, \mathrm{z}] = 1,$$

on trouvera de même, puisque $v$ est supposé perpendiculaire à x et

(1) *Œuvres de Cauchy*, série II, t. XII, p. 191.

à y,

$$[u, v, w; x, y, z] = (u, v, w)[u, v, w];$$

puis, en substituant les valeurs ici trouvées de

$$[r, s, t; u, v, w], \quad [u, v, w; x, y, z]$$

dans le second membre de la formule (26), on obtiendra l'équation

$$[r, s, t; x, y, z] = (r, s, t)[r, s, t], \tag{27}$$

que l'on pourrait, au reste, comme on l'a vu dans le paragraphe III, établir directement. Enfin, si l'on substitue dans le second membre de l'équation (25), la valeur précédente de $[r, s, t; x, y, z]$, et la valeur semblable de $[u, v, w; x, y. z]$, qui sera encore donnée par la formule

$$[u, v, w; x, y, z] = (u, v, w)[u, v, w],$$

quelle que soit la direction attribuée à $v$, on sera immédiatement ramené à l'équation (23), qui sera ainsi démontrée, quelles que soient les directions

$$r, \quad s, \quad t; \qquad u, \quad v, \quad w.$$

Il est bon d'observer que le produit

$$(r, s, t)(u, v, w),$$

renfermé dans le second membre de la formule (23) se réduit à $+1$ ou à $-1$, selon que les mouvements de rotation de $r$ en $s$ autour de $t$, et de $u$ en $v$ autour de $w$, s'effectuent dans le même sens ou en sens contraire. Quant aux facteurs

$$[r, s, t][u, v, w],$$

ils représentent précisément les valeurs des deux parallélipipèdes que l'on peut construire, d'une part, sur les trois arêtes

$$r, \quad s, \quad t;$$

d'autre part, sur les trois arêtes

$$u, \quad v, \quad w,$$

en supposant chacune de ces six arêtes réduites à l'unité.





Cela posé, la formule (23) entrainera évidemment la proposition suivante :

Théorème IV. — *Étant donnés dans l'espace deux angles solides qui offrent le même sommet* O, *et qui ont pour arêtes, le premier les longueurs*

$$r, \quad s, \quad t,$$

*le second les longueurs*

$$u, \quad v, \quad w,$$

*si l'on détermine les cosinus des neuf angles*

$$\begin{array}{lll} (\widehat{r, u}), & (\widehat{r, v}), & (\widehat{r, w}), \\ (\widehat{s, u}), & (\widehat{s, v}), & (\widehat{s, w}), \\ (\widehat{t, u}), & (\widehat{t, v}), & (\widehat{t, w}), \end{array}$$

*que formeront les arêtes*

$$r, \quad s \quad t,$$

*avec les arêtes*

$$u, \quad v, \quad w,$$

*la résultante*

$$[r, s, t; u, v, w],$$

*construite avec ces neuf cosinus, sera positive ou négative, suivant que les mouvements de rotation de $r$ en $s$ autour de $t$, et de $u$ en $v$ autour de $w$, s'effectueront dans le même sens ou en sens contraire; et cette résultante aura pour valeur numérique le produit des valeurs des deux parallélipipèdes que l'on peut former, d'une part, sur les arêtes $r$, $s$, $t$; d'autre part, sur les arêtes $u$, $v$, $w$, en supposant chacune de ces six arêtes réduites à l'unité.*

Si les arêtes

$$u, \quad v, \quad w$$

du second angle solide se réduisent à des longueurs

$$R, \quad S, \quad T$$

mesurées sur des perpendiculaires aux trois faces du premier, c'est-à-dire, en d'autres termes, sur des perpendiculaires aux plans des trois angles

$$(\widehat{s,t}),\quad (\widehat{t,r}),\quad (\widehat{r,s}),$$

les cosinus des neuf angles formés par les arêtes du premier angle solide avec les arêtes du second seront les divers termes du tableau

$$\begin{array}{ccc} \cos(\widehat{r,R}), & 0, & 0, \\ 0, & \cos(\widehat{s,S}), & 0, \\ 0, & 0, & \cos(\widehat{t,T}), \end{array}$$

et, par suite, la résultante

$$[r, s, t; R, S, T]$$

sera réduite à son premier terme

$$\cos(\widehat{r,R})\cos(\widehat{s,S})\cos(\widehat{t,T})$$

Donc alors la formule (23) donnera

$$(28)\quad \cos(\widehat{r,R})\cos(\widehat{s,S})\cos(\widehat{t,T}) = (r, s, t)(R, S, T)[r, s, t][R, S, T].$$

Si, pour plus de commodité, on suppose les trois longueurs

$$R,\quad S,\quad T$$

dirigées de manière à former, avec les longueurs correspondantes

$$r,\quad s,\quad t,$$

trois angles aigus

$$(\widehat{r,R}),\quad (\widehat{s,S}),\quad (\widehat{t,T}),$$

ou, en d'autres termes, si les longueurs

$$R,\quad S,\quad T$$

se mesurent à partir de l'origine commune des longueurs

$$r,\quad s,\quad t,$$

la première du même côté que $r$ par rapport au plan de l'angle $(\widehat{s,t})$, la seconde du même côté que $s$ par rapport au plan de l'angle $(\widehat{t,r})$, la troisième du même côté que $t$ par rapport au plan de l'angle $(\widehat{r,s})$, alors,



$$(r, s, t)(R, S, T)$$

étant deux quantités de même signe, on aura

$$(r, s, t)(R, S, T) = 1,$$

et l'équation (28), réduite à la forme

$$(29)\qquad \cos(\widehat{r,R})\cos(\widehat{s,S})\cos(\widehat{t,T}) = [r, s, t][R, S, T]$$

coïncidera précisément avec la formule (17) de la page 323 du troisième volume ([1]).

En terminant ce paragraphe, nous remarquerons qu'en vertu des théorèmes I, II, III, la valeur de la résultante

$$[r, s; u, v]$$

dépend uniquement des deux angles $(\widehat{r,s})$, $(\widehat{u,v})$, de l'inclinaison mutuelle de leurs plans, et du sens suivant lequel s'effectue, dans chacun de ces plans, le mouvement de rotation de $r$ en $s$, ou de $u$ en $v$. Pareillement, il suit du théorème IV, que la valeur de la résultante

$$[r, s, t; u, v, w]$$

dépend uniquement des formes des deux angles solides qui ont pour arêtes, d'une part, les trois longueurs $r$, $s$, $t$; d'autre part, les trois longueurs $u$, $v$, $w$, et du sens suivant lequel s'effectue chacun des mouvements de rotation de $r$ en $s$ autour de $t$, et de $u$ en $v$ autour de $w$. En conséquence, on peut énoncer la proposition suivante :

Théorème V. — *Les longueurs*

$$r,\quad s,\quad t;\qquad u,\quad v,\quad w$$

*étant mesurées à partir d'une même origine* O, *dans des directions quelconques, on n'altérera point la valeur de la résultante*

$$[r, s; u, v]$$

([1]) *Œuvres de Cauchy*, série II, t. XIII, p. 362.

*en faisant tourner autour du point* O *chacun des angles*

$$[\widehat{r, s}],\quad [\widehat{u, v}],$$

*supposé d'ailleurs invariable dans le plan qui le renferme, ni la valeur de la résultante*

$$[r, s, t;\ u, v, w],$$

*en faisant tourner autour du point* O, *sans les déformer, les deux angles solides qui ont pour arêtes, d'une part, les longueurs* $r, s, t$, *et, d'autre part, les longueurs* $u, v, w$.

### V. — *Sur les résultantes formées avec les coordonnées rectangulaires ou obliques de deux ou trois points.*

Supposons la position d'un point quelconque P rapportée dans l'espace à trois axes coordonnés des $x, y, z$; et nommons

$$\mathrm{x},\ \mathrm{y},\ \mathrm{z}$$

trois longueurs mesurées, à partir de l'origine O des coordonnées, sur ces demi-axes, indéfiniment prolongés dans le sens des coordonnées positives. Soit, d'ailleurs, $r$ la distance de l'origine au point P, dont les coordonnées sont $x, y, z$. Si ces coordonnées se rapportent à des axes rectangulaires, elles seront précisément les projections algébriques et orthogonales du rayon $r$ sur les directions $\mathrm{x}, \mathrm{y}, \mathrm{z}$. Elles seront donc liées à $r$ [*voir* le troisième volume, page 144 (1)] par les formules

$$x = r\cos(\widehat{r, \mathrm{x}}),\qquad y = r\cos(\widehat{r, \mathrm{y}}),\qquad z = r\cos(\widehat{r, \mathrm{z}}).$$

Soient maintenant

$$r,\ s,\ t$$

trois rayons vecteurs menés de l'origine O à trois points divers P, P′, P″; et, pour mieux reconnaître les coordonnées de chacun de ces points, désignons-les à l'aide de la lettre $r$, ou $s$, ou $t$, placée comme

(1) *Œuvres de Cauchy*, série II, t. XIII, p. 156.



indice au bas de la lettre $x$, $y$, ou $z$, en sorte que $x_r$, $y_r$, $z_r$ désignent spécialement les trois coordonnées de l'extrémité du rayon $r$. Les extrémités des trois rayons

$$r,\ s,\ t$$

auront pour coordonnées les neuf quantités

$$(1)\qquad \left\{\begin{array}{lll} x_r, & y_r, & z_r, \\ x_s, & y_s, & z_s, \\ x_t, & y_t, & z_t, \end{array}\right.$$

respectivement équivalentes aux neuf produits

$$(2)\qquad \left\{\begin{array}{lll} r\cos(\widehat{r, \mathrm{x}}), & r\cos(\widehat{r, \mathrm{y}}), & r\cos(\widehat{r, \mathrm{z}}); \\ s\cos(\widehat{s, \mathrm{x}}), & s\cos(\widehat{s, \mathrm{y}}), & s\cos(\widehat{s, \mathrm{z}}); \\ t\cos(\widehat{t, \mathrm{x}}), & t\cos(\widehat{t, \mathrm{y}}), & t\cos(\widehat{t, \mathrm{z}}). \end{array}\right.$$

D'ailleurs, ces produits se réduiront aux cosinus

$$(3)\qquad \left\{\begin{array}{lll} \cos(\widehat{r, \mathrm{x}}), & \cos(\widehat{r, \mathrm{y}}), & \cos(\widehat{r, \mathrm{z}}), \\ \cos(\widehat{s, \mathrm{x}}), & \cos(\widehat{s, \mathrm{y}}), & \cos(\widehat{s, \mathrm{z}}), \\ \cos(\widehat{t, \mathrm{x}}), & \cos(\widehat{t, \mathrm{y}}), & \cos(\widehat{t, \mathrm{z}}), \end{array}\right.$$

si les longueurs

$$r,\ s,\ t$$

se réduisent toutes à l'unité. Donc alors la résultante à deux dimensions

$$(4)\qquad x_r y_s - x_s y_r$$

formée avec celles des coordonnées de P et de P′, qui se mesurent sur les axes des $x$ et $y$, et la résultante à trois dimensions

$$(5)\qquad x_r y_s z_t - x_r y_t z_s + x_s y_t z_r - x_s y_r z_t + x_t y_r z_s - x_t y_s z_r,$$

formée avec les neuf coordonnées des trois points P, P′, P″, se réduiront aux deux résultantes que, dans les paragraphes précédents, nous avons représentées par les notations

$$[r, s;\ \mathrm{x}, \mathrm{y}],\quad [r, s, t;\ \mathrm{x}, \mathrm{y}, \mathrm{z}].$$

Mais, si du cas particulier où l'on suppose les trois longueurs $r$, $s$, $t$ réduites à l'unité, on veut revenir au cas général où ces longueurs offrent des valeurs quelconques, il suffira de substituer le tableau (3) au tableau (2); il suffira donc de faire varier chaque terme de la résultante (4) ou (5), et, par conséquent, cette résultante elle-même, dans un rapport équivalent au produit $rs$ ou $rst$. On aura donc, dans le cas général,

$$x_r y_s - x_s y_r = rs[r, s; \mathrm{x}, \mathrm{y}], \tag{6}$$

et

$$x_r y_s z_t - x_r y_t z_s + x_s y_t z_r - x_s y_r z_t + x_t y_r z_s - x_t y_s z_r = rst[r, s, t; \mathrm{x}, \mathrm{y}, \mathrm{z}]. \tag{7}$$

Il ne reste plus qu'à substituer, dans ces dernières formules, les valeurs de $[r, s; \mathrm{x}, \mathrm{y}]$ et de $[r, s, t; \mathrm{x}, \mathrm{y}, \mathrm{z}]$ obtenues dans le paragraphe III.

Supposons d'abord les deux points P, P′ situés dans le plan des $x$, $y$. Alors, de l'équation (6), jointe à la formule (3) du paragraphe III, on tirera

$$x_r y_s - x_s y_r = (r, s)\, rs[r, s]. \tag{8}$$

D'ailleurs, comme on l'a vu (§ I), le produit

$$rs[r, s]$$

représente précisément l'aire du parallélogramme qui a pour côtés les rayons vecteurs $r$, $s$. Donc la formule (8) entraînera le théorème suivant :

THÉORÈME I. — *Les positions des divers points d'un plan étant rapportées à deux axes rectangulaires des $x$ et $y$, si l'on désigne par $r$, $s$ les rayons vecteurs menés de l'origine O des coordonnées à deux points quelconques d'un plan, et par*

$$\begin{matrix} x_r, & y_r, \\ x_s, & y_s, \end{matrix}$$

*les quatre coordonnées de ces deux points, la résultante*

$$x_r y_s - x_s y_r,$$



*formée avec ces quatre coordonnées, sera positive ou négative, suivant que le mouvement de rotation de $r$ en $s$ sera direct ou rétrograde, et cette résultante aura pour valeur numérique l'aire du parallélogramme construit sur les rayons vecteurs $r$, $s$.*

Supposons maintenant les points P, P′ situés hors du plan des $x$, $y$. Alors, en désignant par $\rho$, ζ les projections absolues des longueurs $r$, $s$ sur le plan des $x$, $y$, on aura

$$\rho = r\cos(\widehat{r, \rho}), \qquad \varsigma = s\cos(\widehat{s, \varsigma}),$$

et l'on tirera de l'équation (6), jointe à la formule (6) du paragraphe III,

$$x_r y_s - x_s y_r = (\rho, \varsigma)\, rs\cos(\widehat{r, \rho})\cos(\widehat{s, \varsigma})\sin(\widehat{\rho, \varsigma});$$

par conséquent,

$$x_r y_s - x_s y_r = (\rho, \varsigma)\, \rho\varsigma\sin(\widehat{\rho, \varsigma}). \tag{9}$$

De plus, comme en désignant toujours par z une longueur mesurée à partir de l'origine sur le demi-axe des $z$ positives, supposé perpendiculaire au plan des $x$, $y$, on aura [*voir* la formule (7) du paragraphe III]

$$(\rho, \varsigma) = (r, s, \mathrm{z}),$$

l'équation (9) pourra s'écrire comme il suit :

$$x_r y_s - x_s y_r = (r, s, \mathrm{z})\, \rho\varsigma\sin(\rho, \varsigma). \tag{10}$$

D'ailleurs, en nommant

$$l, \quad m, \quad n$$

trois longueurs mesurées à partir de l'origine O, la première sur la droite d'intersection du plan OPP′ et du plan des $x$, $y$, les deux dernières sur des perpendiculaires élevées à cette même droite dans ces mêmes plans, et, en supposant ces perpendiculaires dirigées chacune dans un sens tel que le mouvement de rotation de $l$ en $m$ soit de l'espèce du mouvement de rotation de x en y, et le mouvement de rotation de $l$ en $n$ de l'espèce du mouvement de rotation de $r$ en $s$, on tirera de l'équation (6), jointe à la formule (10) du paragraphe III,

$$x_r y_s - x_s y_r = rs[r, s] \cos(\widehat{m, n}). \tag{11}$$

Enfin, si l'on nomme

$$T$$

une longueur mesurée à partir de l'origine O sur une perpendiculaire au plan de l'angle $(\widehat{r, s})$, on aura, en vertu de l'équation (11) du paragraphe III,

$$\cos(\widehat{m, n}) = (r, s, T) \cos(\widehat{T, z});$$

et, par suite, la formule (11) pourra s'écrire comme il suit :

$$x_r y_s - x_s y_r = (r, s, T)\, rs[r, s] \cos(\widehat{T, z}). \tag{12}$$

Or les formules (10) et (12) entraineront évidemment les propositions suivantes :

Théorème II. — *La position d'un point dans l'espace étant rapportée à trois axes rectangulaires des $x, y, z$, si l'on désigne par*

$$r, \quad s$$

*les rayons vecteurs menés de l'origine* O *des coordonnées à deux points quelconques* P, P′, *et par*

$$x_r, \quad y_r,$$
$$x_s, \quad y_s$$

*celles des coordonnées de ces deux points qui sont mesurées sur les axes des $x$ et $y$, la résultante*

$$x_r y_s - x_s y_r,$$

*formée avec ces quatre coordonnées, sera positive ou négative suivant que le mouvement de rotation de $r$ en $s$ autour du demi-axe des $z$ positives sera direct ou rétrograde; et cette résultante aura pour valeur numérique l'aire du parallélogramme construit dans le plan des $x, y$ sur les projections des rayons vecteurs $r$ et $s$.*

Théorème III. — *Les mêmes choses étant posées que dans le théorème* II, *la résultante*

$$x_r y_s - x_s y_r$$

*aura encore pour valeur numérique le produit que l'on obtient en multipliant l'aire du parallélogramme construit sur les rayons vecteurs $r$, $s$, par le cosinus de l'angle aigu qui mesure l'inclinaison du plan de l'angle $(\widehat{r, s})$ sur le plan des $x, y$.*

*Nota.* Les valeurs numériques que les théorèmes II et III assignent à la valeur numérique de la résultante $x_r y_s - x_s y_r$ devant être égales entre elles, il suit de ces théorèmes que l'inclinaison mutuelle du plan de l'angle $(\widehat{r, s})$ et du plan des $x$, $y$, offre un cosinus équivalent au rapport qui existe entre les aires des deux parallélogrammes, ou même des deux triangles, dont les côtés sont, d'une part, les deux rayons vecteurs $r$, $s$, et, d'autre part, les projections $\rho$, $\varsigma$ de ces rayons sur le plan des $x, y$. On se trouve ainsi ramené de nouveau à la proposition énoncée vers la fin du paragraphe I.

Passons maintenant à l'équation (7). On tirera de cette équation, jointe à la formule (20) du paragraphe III,

$$x_r y_s z_t - x_r y_t z_s + x_s y_t z_r - x_s y_r z_t + x_t y_r z_s - x_t y_s z_r = (r, s, t)\, rst[r, s, t]. \tag{13}$$

D'ailleurs, comme on l'a vu dans le paragraphe I, le produit

$$rst[r, s, t]$$

représente précisément le volume du parallélipipède qui a pour côtés $r$, $s$, $t$. Donc la formule (13) entraine la proposition suivante :

Théorème IV. — *La position d'un point dans l'espace étant rapportée à trois axes rectangulaires des $x, y, z$, si l'on désigne par*

$$r, \quad s, \quad t$$

*les rayons vecteurs menés de l'origine des coordonnées à trois points quelconques* P, P′, P″, *et par*

$$x_r, \quad y_r, \quad z_r;$$
$$x_s, \quad y_s, \quad z_s;$$
$$x_t, \quad y_t, \quad z_t$$

*les neuf coordonnées de ces trois points, la résultante*

$$x_r y_s z_t - x_r y_t z_s + x_s y_t z_r - x_s y_r z_t + x_t y_r z_s - x_t y_s z_r,$$

*formée avec ces coordonnées, sera positive ou négative suivant que le mouvement de rotation de r en s autour de t sera direct ou rétrograde, et cette résultante aura pour valeur numérique l'aire du parallélipipède construit sur les rayons vecteurs r, s, t.*

Les divers résultats que nous venons d'obtenir étaient déjà connus. Mais l'adoption de signes propres à indiquer le sens des mouvements de rotation, et l'introduction de ces signes dans le calcul, ont donné aux formules une clarté, une précision nouvelles, et fait disparaître les doubles signes dont la détermination dépendait de certaines conditions que l'on était obligé de mentionner dans le discours et d'énoncer à part.

Concevons, à présent, que les axes coordonnées des $x, y, z$, cessant d'être rectangulaires, se coupent sous des angles quelconques et, nommons

$$\mathrm{X},\quad \mathrm{Y},\quad \mathrm{Z}$$

trois longueurs mesurées à partir de l'origine O des coordonnées, sur trois droites respectivement perpendiculaires aux trois plans des $y, z$, des $z, x$ et des $x, y$. Alors les coordonnées $x, y, z$ d'un point quelconque P se trouveront liées au rayon vecteur $r$, mené de l'origine à ce point [*voir* le troisième volume, page 143 ([1])], par les formules

$$(14)\qquad x = r\frac{\cos(\widehat{r,\mathrm{X}})}{\cos(\widehat{x,\mathrm{X}})},\qquad y = r\frac{\cos(\widehat{r,\mathrm{Y}})}{\cos(\widehat{y,\mathrm{Y}})},\qquad z = r\frac{\cos(\widehat{r,\mathrm{Z}})}{\cos(\widehat{z,\mathrm{Z}})}.$$

Si d'ailleurs on représente, comme nous l'avons fait ci-dessus, par

$$r,\quad s,\quad t$$

trois rayons vecteurs menés de l'origine O à trois points divers P, P′, P″; et si, pour mieux reconnaître les coordonnées de ces points, on les

([1]) *Œuvres de Cauchy*, Série III, t. XIII, p. 156.



désigne encore à l'aide de la lettre $r$, ou $s$, ou $t$, placée comme indice au bas de la lettre $x$, ou $y$, ou $z$, les extrémités des trois rayons

$$r,\quad s,\quad t$$

auront toujours pour coordonnées les neuf quantités

$$\begin{matrix} x_r, & y_r, & z_r; \\ x_s, & y_s, & z_s; \\ x_t, & y_t, & z_t. \end{matrix}$$

Mais ces neuf quantités, au lieu d'être respectivement équivalentes aux termes du tableau (2), se trouveront représentées par les neuf produits

$$(15)\qquad \left\{\begin{matrix} r\dfrac{\cos(\widehat{r,\mathrm{X}})}{\cos(\widehat{x,\mathrm{X}})}, & r\dfrac{\cos(\widehat{r,\mathrm{Y}})}{\cos(\widehat{y,\mathrm{Y}})}, & r\dfrac{\cos(\widehat{r,\mathrm{Z}})}{\cos(\widehat{z,\mathrm{Z}})}, \\ s\dfrac{\cos(\widehat{s,\mathrm{X}})}{\cos(\widehat{x,\mathrm{X}})}, & s\dfrac{\cos(\widehat{s,\mathrm{Y}})}{\cos(\widehat{y,\mathrm{Y}})}, & s\dfrac{\cos(\widehat{s,\mathrm{Z}})}{\cos(\widehat{z,\mathrm{Z}})}, \\ t\dfrac{\cos(\widehat{t,\mathrm{X}})}{\cos(\widehat{x,\mathrm{X}})}, & t\dfrac{\cos(\widehat{t,\mathrm{Y}})}{\cos(\widehat{y,\mathrm{Y}})}, & t\dfrac{\cos(\widehat{t,\mathrm{Z}})}{\cos(\widehat{z,\mathrm{Z}})}. \end{matrix}\right.$$

Cela posé, cherchons d'abord la valeur de la résultante

$$x_r y_s - x_s y_r,$$

composée avec les quatre quantités

$$(16)\qquad \left\{\begin{matrix} x_r, & x_s; \\ y_r, & y_s; \end{matrix}\right.$$

ou, ce qui revient au même, avec les quatre termes du tableau

$$(17)\qquad \left\{\begin{matrix} r\dfrac{\cos(\widehat{r,\mathrm{X}})}{\cos(\widehat{x,\mathrm{X}})}, & r\dfrac{\cos(\widehat{r,\mathrm{Y}})}{\cos(\widehat{y,\mathrm{Y}})}; \\ s\dfrac{\cos(\widehat{s,\mathrm{X}})}{\cos(\widehat{x,\mathrm{X}})}, & s\dfrac{\cos(\widehat{s,\mathrm{Y}})}{\cos(\widehat{y,\mathrm{Y}})}. \end{matrix}\right.$$

Chacun des deux produits

$$x_r y_s,\quad x_s y_r,$$

que renferme cette résultante, proviendra de la multiplication de deux termes pris à la fois dans les deux colonnes horizontales et dans les deux colonnes verticales du tableau (16) ou (17). Mais, d'une part, deux termes situés dans une même colonne horizontale du tableau (17) offrent un facteur commun, savoir le facteur $r$ pour la première colonne horizontale, le facteur $s$ pour la seconde; et, d'autre part, deux termes situés dans une même colonne verticale du tableau (17) offrent un diviseur commun, savoir, le diviseur $\cos(\widehat{x, X})$ pour la première colonne verticale, et le diviseur $\cos(\widehat{y, Y})$ pour la seconde. Donc les valeurs qu'on obtiendra pour les deux produits

$$x_r y_s, \quad x_s y_r,$$

en substituant le tableau (17) au tableau (16), auront pour facteur commun le produit $rs$, pour diviseur commun le produit $\cos(\widehat{x, X})$ $\cos(\widehat{y, Y})$; et, pour obtenir la valeur de la résultante

$$x_r y_s - x_s y_r,$$

il suffira de multiplier la résultante formée avec les quatre termes du tableau

$$(18) \qquad \begin{cases} \cos(\widehat{r, X}), & \cos(\widehat{r, Y}), \\ \cos(\widehat{s, X}), & \cos(\widehat{s, Y}), \end{cases}$$

c'est-à-dire l'expression

$$[r, s; X, Y]$$

par le rapport

$$\frac{rs}{\cos(\widehat{x, X})\cos(\widehat{y, Y})};$$

on aura donc

$$(19) \qquad x_r y_s - x_s y_r = \frac{rs}{\cos(\widehat{x, X})\cos(\widehat{y, Y})}[r, s; X, Y].$$

Pareillement, pour obtenir la valeur de la résultante

$$x_r y_s z_t - x_r y_t z_s + x_s y_t z_r - x_s y_r z_t + x_t y_r z_s - x_t y_s z_r$$



il suffira de multiplier la résultante formée avec les divers termes du tableau

$$(20) \qquad \begin{cases} \cos(\widehat{r, X}), & \cos(\widehat{r, Y}), & \cos(\widehat{r, Z}); \\ \cos(\widehat{s, X}), & \cos(\widehat{s, Y}), & \cos(\widehat{s, Z}); \\ \cos(\widehat{t, X}), & \cos(\widehat{t, Y}), & \cos(\widehat{t, Z}); \end{cases}$$

c'est-à-dire l'expression

$$[r, s, t; X, Y, Z]$$

par le rapport

$$\frac{rst}{\cos(\widehat{x, X})\cos(\widehat{y, Y})\cos(\widehat{z, Z})},$$

on aura donc encore

$$(21) \qquad \begin{aligned} & x_r y_s z_t - x_r y_t z_s + x_s y_t z_r - x_s y_r z_t + x_t y_r z_s - x_t y_s z_r \\ & = \frac{rst}{\cos(\widehat{x, X})\cos(\widehat{y, Y})\cos(\widehat{z, Z})}[r, s, t; X, Y, Z]. \end{aligned}$$

Ce n'est pas tout. Comme X sera perpendiculaire à y et z, Y à z et x, Z à x et y, les cosinus des neuf angles

$$\begin{matrix} (\widehat{x, X}), & (\widehat{x, Y}), & (\widehat{x, Z}), \\ (\widehat{y, X}), & (\widehat{y, Y}), & (\widehat{y, Z}), \\ (\widehat{z, X}), & (\widehat{z, Y}), & (\widehat{z, Z}) \end{matrix}$$

s'évanouiront tous à l'exception de

$$\cos(\widehat{x, X}), \quad \cos(\widehat{y, Y}), \quad \cos(\widehat{z, Z}).$$

Donc, par suite, chacune des résultantes

$$[x, y; X, Y], \quad [x, y, z; X, Y, Z]$$

se réduira simplement à son premier terme, en sorte qu'on aura

$$[x, y; X, Y] = \cos(\widehat{x, X})\cos(\widehat{y, Y}),$$
$$[x, y, z; X, Y, Z] = \cos(\widehat{x, X})\cos(\widehat{y, Y})\cos(\widehat{z, Z}),$$

et les formules (19), (21) pourront s'écrire comme il suit :

$$x_r y_s - x_s y_r = \frac{[r, s; \mathrm{X}, \mathrm{Y}]}{[\mathrm{x}, \mathrm{y}; \mathrm{X}, \mathrm{Y}]} rs, \tag{22}$$

$$x_r y_s z_t - x_r y_t z_s + x_s y_t z_r - x_s y_r z_t + x_t y_r z_s - x_t y_s z_r = \frac{[r, s, t; \mathrm{X}, \mathrm{Y}, \mathrm{Z}]}{[\mathrm{x}, \mathrm{y}, \mathrm{z}; \mathrm{X}, \mathrm{Y}, \mathrm{Z}]} rst. \tag{23}$$

Il ne reste plus qu'à substituer, dans ces dernières formules, les valeurs des résultantes comprises dans les seconds membres.

Or, supposons, en premier lieu, les deux points P, P′ situés dans le plan des $x$, $y$. Alors l'équation (7) du paragraphe IV, jointe à la formule $(\mathrm{x}, \mathrm{y}) = 1$, donnera

$$[r, s; \mathrm{X}, \mathrm{Y}] = (r, s)(\mathrm{X}, \mathrm{Y})[r, s][\mathrm{X}, \mathrm{Y}],$$
$$[\mathrm{x}, \mathrm{y}; \mathrm{X}, \mathrm{Y}] = (\mathrm{X}, \mathrm{Y})[\mathrm{x}, \mathrm{y}][\mathrm{X}, \mathrm{Y}].$$

On aura donc

$$\frac{[r, s; \mathrm{X}, \mathrm{Y}]}{[\mathrm{x}, \mathrm{y}; \mathrm{X}, \mathrm{Y}]} = (r, s)\frac{[r, s]}{[\mathrm{x}, \mathrm{y}]}.$$

Donc alors l'équation (22) donnera

$$x_r y_s - x_s y_r = (r, s)\frac{rs[r, s]}{[\mathrm{x}, \mathrm{y}]}, \tag{24}$$

et l'on pourra énoncer le théorème suivant :

Théorème V. — *Les positions des divers points d'un plan étant rapportées à deux axes rectangulaires ou obliques des $x$ et $y$, si l'on désigne par* x *et* y *deux longueurs mesurées, à partir de l'origine* O *des coordonnées, sur ces axes prolongés du côté des coordonnées positives, par*

$$r, \quad s$$

*les rayons vecteurs menés de la même origine à deux points* P, P′ *du plan donné, et par*

$$x_r, \quad y_r,$$
$$x_s, \quad y_s$$

*les quatre coordonnées de ces deux points, la résultante*

$$x_r y_s - x_s y_r,$$



*formée avec ces quatre coordonnées, sera positive ou négative suivant que le mouvement de rotation de r et s sera direct ou rétrograde; et cette résultante aura pour valeur numérique le rapport qui existe entre l'aire du parallélogramme construit sur les côtés* r, s, *et l'aire du losange que l'on peut construire sur les côtés* x, y, *réduits l'un et l'autre à l'unité.*

Supposons, maintenant, les points P, P′ situés hors des plans des $x$, $y$. Alors, en nommant $T$ une longueur mesurée à partir de l'origine O, sur une perpendiculaire au plan de l'angle $(\widehat{r, s})$, et remplaçant $u$, $v$, $W$ par X, Y, Z dans l'équation (16) du paragraphe IV, on tirera de cette équation

$$[r, s; \mathrm{X}, \mathrm{Y}] = (r, s, T)(\mathrm{X}, \mathrm{Y}, \mathrm{z})[r, s][\mathrm{X}, \mathrm{Y}]\cos(\widehat{T, \mathrm{z}});$$

puis, en remplaçant $r$, $s$, $T$ par x, y, $z$, on trouvera

$$[\mathrm{x}, \mathrm{y}; \mathrm{X}, \mathrm{Y}] = (\mathrm{x}, \mathrm{y}, \mathrm{Z})(\mathrm{X}, \mathrm{Y}, \mathrm{z})[\mathrm{x}, \mathrm{y}][\mathrm{X}, \mathrm{Y}]\cos(\widehat{\mathrm{Z}, \mathrm{z}}).$$

On aura donc, par suite,

$$\frac{[r, s; \mathrm{X}, \mathrm{Y}]}{[\mathrm{x}, \mathrm{y}; \mathrm{X}, \mathrm{Y}]} = \frac{(r, s, T)}{(\mathrm{x}, \mathrm{y}, \mathrm{Z})}\frac{[r, s]}{[\mathrm{x}, \mathrm{y}]}\frac{\cos(\widehat{T, \mathrm{z}})}{\cos(\widehat{\mathrm{Z}, \mathrm{z}})},$$

et l'équation (22) donnera

$$x_r y_s - x_s y_r = \frac{(r, s, T)}{(\mathrm{x}, \mathrm{y}, \mathrm{Z})}\frac{rs[\widehat{r, s}]}{[\mathrm{x}, \mathrm{y}]}\frac{\cos(\widehat{T, \mathrm{z}})}{\cos(\widehat{\mathrm{Z}, \mathrm{z}})}. \tag{25}$$

Si, pour plus de commodité, on suppose la longueur Z mesurée du même côté que la longueur z, c'est-à-dire du côté des $z$ positives, le cosinus de l'angle $(\widehat{\mathrm{Z}, \mathrm{z}})$ offrira une valeur positive, égale au sinus de l'inclinaison de l'axe des $z$ sur le plan des $x$, $y$; et, comme on aura

$$(\mathrm{x}, \mathrm{y}, \mathrm{Z}) = (\mathrm{x}, \mathrm{y}, \mathrm{z}) = 1,$$

on trouvera simplement

$$x_r y_s - x_s y_r = (r, s, T)\frac{rs[r, s]}{[\mathrm{x}, \mathrm{y}]}\frac{\cos(\widehat{T, \mathrm{z}})}{\cos(\widehat{\mathrm{Z}, \mathrm{z}})}. \tag{26}$$

Enfin, si la longueur $T$ est mesurée elle-même du côté des $z$ positives, l'angle $(\widehat{T, \text{z}})$ sera l'angle aigu qui mesurera l'inclinaison du plan de l'angle $(\widehat{r, s})$ sur le plan des $x$, $y$; et, comme alors on aura

$$(r, s, T) = (r, s, \text{z}),$$

la formule (26) pourra être réduite à l'équation

$$x_r y_s - x_s y_r = (r, s, \text{z}) \frac{rs[r, s]}{[\text{x}, \text{y}]} \frac{\cos(\widehat{T, \text{z}})}{\cos(\widehat{\text{Z}, \text{z}})}, \tag{27}$$

de laquelle on déduira immédiatement la proposition suivante :

Théorème VI. — *La position d'un point dans l'espace étant rapportée à trois axes rectangulaires ou obliques des $x$, $y$, $z$, si l'on désigne par* x, y, z *trois longueurs mesurées à partir de l'origine* O *des coordonnées, sur ces axes, indéfiniment prolongés du côté des coordonnées positives, puis par*

$$r, \quad s$$

*les rayons vecteurs menés de la même origine à deux points quelconques* P, P′, *et par*

$$x_r, \quad y_r,$$
$$x_s, \quad y_s,$$

*celles des coordonnées de ces deux points qui sont mesurées sur les axes des $x$ et $y$, la résultante*

$$x_r y_s - x_s y_r,$$

*formée avec ces quatre coordonnées, sera positive ou négative suivant que le mouvement de rotation de r en s autour de la direction* z *sera direct ou rétrograde; et cette résultante aura pour valeur numérique le produit de deux facteurs respectivement égaux, le premier au rapport qui existe entre l'aire du parallélogramme construit sur les côtés r, s, et l'aire du losange que l'on peut construire sur les côtés* x, y, *réduits à l'unité; le second au rapport qui existe entre le cosinus de l'inclinaison du plan de l'angle $(\widehat{r, s})$ sur le plan des $x$, $y$, et le sinus de l'inclinaison de l'axe des* z *sur le même plan.*



Considérons, enfin, trois points P, P′, P″ situés dans l'espace, aux extrémités des rayons vecteurs $r$, $s$, $t$, et supposons la position de chaque point rapportée à trois axes rectangulaires ou obliques des $x$, $y$, $z$. La résultante formée avec les neuf coordonnées des trois points P, P′ P″, sera déterminée par la formule (23). D'ailleurs, l'équation (23) du paragraphe IV, jointe à la formule $(x, y, z) = 1$ donnera

$$[r, s, t; \text{X}, \text{Y}, \text{Z}] = (r, s, t)(\text{X}, \text{Y}, \text{Z})[r, s, t][\text{X}, \text{Y}, \text{Z}],$$
$$[\text{x}, \text{y}, \text{z}; \text{X}, \text{Y}, \text{Z}] = (\text{X}, \text{Y}, \text{Z})[\text{x}, \text{y}, \text{z}][\text{X}, \text{Y}, \text{Z}].$$

On aura donc

$$\frac{[r, s, t; \text{X}, \text{Y}, \text{Z}]}{[\text{x}, \text{y}, \text{z}; \text{X}, \text{Y}, \text{Z}]} = (r, s, t)\frac{[r, s, t]}{[\text{x}, \text{y}, \text{z}]}.$$

Donc l'équation (23) donnera

$$x_r y_s z_t - x_r y_t z_s + x_s y_t z_r - x_s y_r z_t + x_t y_r z_s - x_t y_s z_r = (r, s, t)\frac{rst[r, s, t]}{[\text{x}, \text{y}, \text{z}]}, \tag{28}$$

et l'on pourra énoncer le théorème suivant :

Théorème VII. — *La position d'un point dans l'espace étant rapportée à trois axes rectangulaires ou obliques des $x$, $y$, $z$, si l'on désigne par*

$$\text{x}, \quad \text{y}, \quad \text{z}$$

*trois longueurs mesurées, à partir de l'origine* O *des coordonnées, sur ces trois axes indéfiniment prolongés du côté des $x$, $y$, $z$ positives, puis par*

$$r, \quad s, \quad t$$

*les rayons vecteurs menés de l'origine à trois points quelconques, et par*

$$x_r, \quad y_r, \quad z_r,$$
$$x_s, \quad y_s, \quad z_s,$$
$$x_t, \quad y_t, \quad z_t$$

*les neuf coordonnées de ces trois points, la résultante*

$$x_r y_s z_t - x_r y_t z_s + x_s y_t z_r - x_s y_r z_t + x_t y_r z_s - x_t y_s z_r,$$

*formée avec ces neuf coordonnées, sera positive ou négative suivant que le mouvement de rotation de r et s autour de t sera direct ou rétrograde;*

*et cette résultante aura pour valeur numérique le rapport qui existe entre le volume du parallélipipède construit sur les arêtes r, s, t, et le volume du parallélipipède que l'on peut construire sur les arêtes* x, y, z, *réduites chacune à l'unité.*

Il est bon d'observer que les théorèmes V, VI et VII, relatifs à des coordonnées obliques, peuvent être immédiatement déduits des théorèmes I, II, III, IV, relatifs à des coordonnées rectangulaires. En effet, les trois équations qui servent à transformer des coordonnées obliques en coordonnées rectangulaires, étant du premier degré, il suit du théorème sur les produits de résultantes, déjà mentionné, que la résultante formée avec les coordonnées de trois points choisis arbitrairement dans l'espace obtiendra successivement deux valeurs qui seront entre elles dans un rapport constant, c'est-à-dire indépendant des positions de ces mêmes points, si, l'origine des coordonnées restant immobile, on rapporte la position d'un point quelconque, d'abord à des coordonnées rectangulaires, puis à des coordonnées obliques. Ajoutons que ce principe ne cessera pas d'être exact, si, en faisant abstraction des coordonnées parallèles à l'un des axes, par exemple à l'axe des $z$, on considère la résultante formée, non plus avec les neuf coordonnées de trois points choisis arbitrairement dans l'espace, mais avec les quatre coordonnées de deux points, pourvu qu'en passant des coordonnées obliques aux coordonnées rectangulaires, on ne déplace pas l'axe des $z$. En effet, il suit de la formule (13) de la page 144 du troisième volume (¹), que dans le cas où l'on passe d'un premier système de coordonnées rectilignes à un second système, sans déplacer l'un des axes, les coordonnées mesurées parallèlement aux deux autres axes entrent seules dans deux équations linéaires à l'aide desquelles la transformation s'effectue; et l'on peut appliquer séparément aux quatre coordonnées que ces deux équations servent à transformer, le théorème sur les produits de résultantes.

(¹) *Œuvres de Cauchy*, 2e série, t. XIII, p. 156.



Cela posé, le rapport

$$\frac{x_r y_s - x_s y_r}{(r, s)\, rs[r, s]}, \tag{29}$$

qui, en vertu de la formule (8), se réduit à l'unité, pour deux points situés dans le plan des coordonnées $x$ et $y$, quand ces coordonnées sont rectangulaires, pourra différer de l'unité, mais devra obtenir une valeur constante, c'est-à-dire une valeur indépendante des directions attribuées dans le plan donné aux rayons vecteurs $r$ et $s$, si les coordonnées deviennent obliques. Or, si l'on fait coïncider en direction $r$ et $s$ avec des longueurs x et y, mesurées à partir de l'origine sur les demi-axes des $x$ et $y$ positives, on aura

$$\begin{gathered} x_r = r, \qquad y_r = 0, \\ x_s = 0, \qquad y_s = s, \\ (r, s) = (\mathrm{x}, \mathrm{y}) = 1, \qquad [r, s] = [\mathrm{x}, \mathrm{y}]. \end{gathered}$$

Donc alors le rapport (29) se trouvera réduit à

$$\frac{1}{[\mathrm{x}, \mathrm{y}]},$$

et le principe énoncé fournira, pour des coordonnées obliques, l'équation générale

$$\frac{x_r y_s - x_s y_r}{(r, s)\, rs[r, s]} = \frac{1}{[\mathrm{x}, \mathrm{y}]}, \tag{30}$$

qui s'accorde, comme on devait s'y attendre, avec la formule (24).

Pareillement, si, les directions $r$, $s$ n'étant plus renfermées dans le plan des $x$, $y$, on nomme

$$\mathrm{z}, \quad Z, \quad T$$

trois longueurs mesurées, à partir de l'origine, la première sur un axe des $z$, perpendiculaire ou même oblique au plan des $x$, $y$; les deux dernières sur des perpendiculaires au plan des $x$, $y$ et au plan de l'angle $(\widehat{r, s})$, le rapport

$$\frac{x_r y_s - x_s y_r}{(r, s, T)\, rs[r, s] \cos(\widehat{T, \mathrm{z}})}, \tag{31}$$

qui, en vertu de la formule (12), se réduisait à l'unité, quand les coordonnées étaient rectangulaires, pourra différer de l'unité, mais devra obtenir une valeur constante, c'est-à-dire une valeur indépendante des directions attribuées aux rayons vecteurs $r$ et $s$. Or, si l'on fait coïncider, en direction, $r$ et $s$ avec les longueurs x, y mesurées, à partir de l'origine, sur les deux axes des $x$ et $y$ positives, on pourra supposer que $T$ coïncide lui-même avec Z, et l'on aura

$$\begin{gathered} x_r = r, \qquad y_r = 0, \\ x_s = 0, \qquad y_s = s, \\ x_r y_s - x_s y_r = rs, \\ (r, s, T) = (r, s, \mathrm{Z}), \qquad [r, s] = (\mathrm{x}, \mathrm{y}), \qquad (\widehat{T, \mathrm{z}}) = (\widehat{\mathrm{Z}, \mathrm{z}}). \end{gathered}$$

Donc alors le rapport (29) se trouvera réduit à

$$\frac{1}{(r, s, \mathrm{Z})[\mathrm{x}, \mathrm{y}]\cos(\widehat{\mathrm{Z}, \mathrm{z}})},$$

et le principe énoncé fournira, pour des coordonnées obliques, l'équation générale

$$\frac{x_r y_s - x_s y_r}{(r, s, T)\, rs[r, s]\cos(\widehat{T, \mathrm{z}})} = \frac{1}{(r, s, \mathrm{Z})[\mathrm{x}, \mathrm{y}]\cos(\widehat{\mathrm{Z}, \mathrm{z}})}, \tag{32}$$

qui s'accorde, comme on devait s'y attendre, avec la formule (25). Ajoutons que la formule (32) comprend évidemment, comme cas particulier, la formule (30).

Enfin, le rapport

$$\frac{x_r y_s z_t - x_r y_t z_s + x_s y_t z_r - x_s y_r z_t + x_t y_r z_s - x_t y_s z_r}{(r, s, t)\, rst[r, s, t]}, \tag{33}$$

qui, en vertu de la formule (13), se réduit à l'unité, quand les coordonnées sont rectangulaires, pourra différer de l'unité, mais devra encore obtenir une valeur constante, c'est-à-dire indépendante des directions $r$, $s$, $t$, si les coordonnées deviennent obliques. Or, si l'on fait coïncider en direction $r$, $s$, $t$ avec des longueurs x, y, z, mesurées



à partir de l'origine, sur les demi-axes des $x$, $y$, $z$ positives, on aura

$$\begin{gathered} x_r = r, \qquad y_r = 0, \qquad z_r = 0, \\ x_s = 0, \qquad y_s = s, \qquad z_s = 0, \\ x_t = 0, \qquad y_t = 0, \qquad z_t = t, \\ x_r y_s z_t - x_r y_t z_s + x_s y_t z_r - x_s y_r z_t + x_t y_r z_s - x_t y_s z_r = rst, \\ (r, s, t) = (\mathrm{x}, \mathrm{y}, \mathrm{z}) = 1, \qquad [r, s, t] = [\mathrm{x}, \mathrm{y}, \mathrm{z}]; \end{gathered}$$

donc alors le rapport (33) se trouvera réduit à

$$\frac{1}{[\mathrm{x}, \mathrm{y}, \mathrm{z}]},$$

et le principe énoncé fournira, pour des coordonnées obliques, l'équation générale

$$\frac{x_r y_s z_t - x_r y_t z_s + x_s y_t z_r - x_s y_r z_t + x_t y_r z_s - x_t y_s z_r}{(r, s, t)\, rst[r, s, t]} = \frac{1}{[\mathrm{x}, \mathrm{y}, \mathrm{z}]}, \tag{34}$$

qui coïncide, comme on devait s'y attendre, avec la formule (28).

### VI. — *Des conditions sous lesquelles les résultantes considérées dans les paragraphes précédents s'évanouissent.*

Les résultantes dont nous avons déterminé les valeurs dans les paragraphes précédents s'évanouissent sous certaines conditions, qu'il est bon de connaître, et que nous allons un instant examiner.

Considérons d'abord la résultante

$$[r, s; u, v] = \cos(\widehat{r, u})\cos(\widehat{s, v}) - \cos(\widehat{r, v})\cos(\widehat{s, u}), \tag{1}$$

dont les deux termes ont pour facteurs les cosinus de quatre angles, que les directions $r$, $s$ forment avec les dimensions $u$, $v$. Si les deux angles

$$(\widehat{r, s}), \quad (\widehat{u, v})$$

sont renfermés dans le même plan, ou dans des plans parallèles; alors, en vertu de la formule (2) du paragraphe IV, jointe au théorème énoncé dans le paragraphe II, on aura

$$[r, s; u, v] = (r, s)(u, v)\sin(\widehat{r, s})\sin(\widehat{u, v}); \tag{2}$$

et, par suite, la résultante $[r, s;\ u, v]$ aura pour valeur numérique le produit

$$(3) \qquad \sin(\widehat{r, s}), \quad \sin(\widehat{u, v}).$$

Si, au contraire, les plans des deux angles

$$(\widehat{r, s}), \quad (\widehat{u, v})$$

cessent de coïncider ou d'être parallèles entre eux ; alors, en nommant $\iota$ l'inclinaison mutuelle de ces deux plans, on conclura de la formule (13) du paragraphe IV, jointe au théorème du paragraphe II, que la résultante $[r, s;\ u, v]$ a pour valeur numérique le produit

$$(4) \qquad \sin(\widehat{r, s}) \sin(\widehat{u, v}) \cos\iota.$$

En conséquence, pour faire évanouir la résultante $[r, s;\ u, v]$ et vérifier la condition

$$(5) \qquad [r, s;\ u, v] = 0,$$

il est nécessaire et il suffira de réduire à zéro l'un des deux facteurs

$$\sin(\widehat{r, s}), \quad \sin(\widehat{u, v}),$$

quand les deux angles $(\widehat{r, s})$, $(\widehat{u, v})$ seront compris dans le même plan; et, dans le cas contraire, l'un des trois facteurs

$$\sin(\widehat{r, s}), \quad \sin(\widehat{u, v}), \quad \cos\iota.$$

D'ailleurs, l'équation

$$(6) \qquad \sin(\widehat{r, s}) = 0,$$

de laquelle on tire

$$(\widehat{r, s}) = 0 \text{ ou } \pi,$$

exprime que les directions $r$, $s$ se mesurent sur une même droite, ou du moins sur des droites parallèles; et l'équation

$$(7) \qquad \cos\iota = 0,$$



de laquelle on tire

$$\iota = \frac{\pi}{2},$$

exprime que les plans des deux angles

$$(\widehat{r, s}), \quad (\widehat{u, v})$$

sont perpendiculaires entre eux. Enfin, en vertu de l'équation (1), la condition (5) pourra être présentée sous l'une quelconque des deux formes

$$(8) \qquad \cos(\widehat{r, u}) \cos(\widehat{s, v}) - \cos(\widehat{r, v}) \cos(\widehat{s, u}) = 0,$$

$$(9) \qquad \frac{\cos(\widehat{r, u})}{\cos(\widehat{r, v})} = \frac{\cos(\widehat{s, u})}{\cos(\widehat{s, v})}.$$

Cela posé, on pourra évidemment énoncer la proposition suivante :

Théorème I. — *Les longueurs $u$, $v$ étant mesurées sur des droites distinctes et non parallèles, pour que deux autres longueurs $r$, $s$ se mesurent ou sur la même droite, ou sur des droites parallèles, ou du moins forment entre elles un angle $(\widehat{r, s})$ dont le plan soit perpendiculaire au plan de l'angle $(\widehat{u, v})$, il est nécessaire et il suffit que les quatre cosinus*

$$\cos(r, u), \quad \cos(r, v), \quad \cos(s, u), \quad \cos(s, v)$$

*représentent les quatre termes d'une proportion géométrique, de manière à vérifier la formule* (9).

*Corollaire.* — Comme on vient de le voir, la formule (9), remarquable par son élégance et sa simplicité, se déduit immédiatement de l'équation (2), dans le cas particulier où les directions $r$, $s$ sont renfermées dans le plan de l'angle $(\widehat{u, v})$. Ajoutons que, de ce cas particulier on peut aisément passer au cas général où les directions $r$, $s$ sont situées hors de ce plan, à l'aide des considérations suivantes.

Soient, dans le cas général,

$$\rho, \quad \varsigma$$

les projections absolues de $r$ et de $s$ sur le plan de l'angle $(\widehat{u, v})$. Pour que les directions $r$, $s$ se mesurent sur une même droite ou sur des droites parallèles, ou du moins forment entre elles un angle $(\widehat{r, s})$ dont le plan soit perpendiculaire au plan de l'angle $(\widehat{u, v})$, il sera nécessaire et il suffira, évidemment, que les projections $\rho$, $\zeta$ se mesurent sur la même droite et sur des droites parallèles; par conséquent, il sera nécessaire et il suffira que l'on ait

$$\frac{\cos(\widehat{\rho, u})}{\cos(\widehat{\rho, v})} = \frac{\cos(\widehat{\varsigma, u})}{\cos(\widehat{\varsigma, v})}. \tag{10}$$

Mais, d'autre part, le plan qui renfermera les trois angles

$$(\widehat{u, v}), \quad (\widehat{\rho, u}), \quad (\widehat{\rho, v})$$

étant perpendiculaire au plan de l'angle $(r, \rho)$, le théorème VII de la page 311 du troisième volume ([1]) donnera

$$\frac{\cos(\widehat{r, u})}{\cos(\widehat{\rho, u})} = \frac{\cos(\widehat{r, v})}{\cos(\widehat{\rho, v})} = \cos(\widehat{r, \rho}),$$

par conséquent,

$$\frac{\cos(\widehat{r, u})}{\cos(\widehat{r, v})} = \frac{\cos(\widehat{\rho, u})}{\cos(\widehat{\rho, v})},$$

et l'on trouvera, pareillement,

$$\frac{\cos(\widehat{s, u})}{\cos(\widehat{s, v})} = \frac{\cos(\widehat{\varsigma, u})}{\cos(\widehat{\varsigma, v})}.$$

Or il est clair qu'en vertu de ces dernières formules, l'équation (10) coïncidera précisément avec l'équation (9).

Considérons maintenant la résultante

$$\begin{aligned}(11)\quad & [r, s, t; u, v, w] \\ & = \cos(\widehat{r, u})\cos(\widehat{s, v})\cos(\widehat{t, w}) - \cos(\widehat{r, u})\cos(\widehat{s, w})\cos(\widehat{t, v}) \\ & \quad + \cos(\widehat{r, v})\cos(\widehat{s, w})\cos(\widehat{t, u}) - \cos(\widehat{r, v})\cos(\widehat{s, u})\cos(\widehat{t, w}) \\ & \quad + \cos(\widehat{r, w})\cos(\widehat{s, u})\cos(\widehat{t, v}) - \cos(\widehat{r, w})\cos(\widehat{s, v})\cos(\widehat{t, u}),\end{aligned}$$

([1]) *Œuvres de Cauchy*, série II, t. XIII, p. 349.



dont les six termes ont pour facteurs les cosinus des neuf angles que les directions $r$, $s$, $t$ forment avec les directions $u$, $v$, $w$. En vertu de la formule (23) du paragraphe IV, jointe au théorème énoncé dans le paragraphe II, on aura

$$[r, s, t; u, v, w] = (r, s, t)\,(u, v, w)\,[r, s, t]\,[u, v, w];$$

et, par suite, la résultante $[r, s, t; u, v, w]$ aura pour valeur numérique le produit

$$[r, s, t]\,[u, v, w]$$

des volumes des deux parallélipipèdes, que l'on peut construire, d'une part, sur les arêtes $r$, $s$, $t$, d'autre part, sur les arêtes $u$, $v$, $w$, en supposant ces arêtes réduites chacune à l'unité, et mesurées, à partir d'une même origine, dans des directions parallèles à celles qui leur étaient assignées. En conséquence, pour faire évanouir la résultante $[r, s, t; u, v, w]$ et vérifier la condition

$$[r, s, t; u, v, w] = 0, \tag{12}$$

il sera nécessaire et il suffira de réduire à zéro l'un des deux volumes

$$[r, s, t], \quad [u, v, w].$$

D'ailleurs, l'équation

$$[r, s, t] = 0, \tag{13}$$

qu'on obtient en égalant à zéro le volume $[r, s, t]$, est précisément la condition nécessaire et suffisante pour que les longueurs, mesurées à partir d'un même point dans des directions parallèles à celles de $r$, $s$, $t$, soient renfermées dans un plan unique, ou, d'en d'autres termes, pour que les trois directions $r$, $s$, $t$ soient parallèles à un même plan. Cela posé, on pourra évidemment énoncer la proposition suivante :

THÉORÈME II. — *Les longueurs $u$, $v$, $w$ étant mesurées sur des droites non parallèles à un même plan, pour que les directions des trois autres longueurs $r$, $s$, $t$ soient, ou comprises dans un même plan, ou du moins parallèles à un même plan, il est nécessaire et il suffit que la résultante des cosinus des neuf angles que les directions $r$, $s$, $t$ forment avec les* *directions $u$, $v$, $w$, s'évanouisse, ou, en d'autres termes, que l'on ait*

$$
\begin{aligned}
(14)\qquad &\cos(\widehat{r, u})\cos(\widehat{s, v})\cos(\widehat{t, w}) - \cos(\widehat{r, u})\cos(\widehat{s, w})\cos(\widehat{t, v}) \\
&+ \cos(\widehat{r, v})\cos(\widehat{s, w})\cos(\widehat{t, u}) - \cos(\widehat{r, v})\cos(\widehat{s, u})\cos(\widehat{t, w}) \\
&+ \cos(\widehat{r, w})\cos(\widehat{s, u})\cos(\widehat{t, v}) - \cos(\widehat{r, w})\cos(\widehat{s, v})\cos(\widehat{t, u}) = 0.
\end{aligned}
$$

*Corollaire.* — On pourrait, avec la plus grande facilité, arriver encore à la formule (14), en raisonnant comme il suit.

Rapportons les positions des divers points de l'espace à trois axes des $x$, $y$, $z$ menés par un point quelconque O, et, en attribuant aux demi-axes des $x$, $y$, positives des directions parallèles à celles de $u$, $v$, $w$, nommons

$$x, \quad y, \quad z$$

les coordonnées d'une longueur $\iota$ finie, mais différente de zéro, et mesurée sur une droite quelconque à partir du point O. La formule (13) de la page 143 du troisième volume (¹) donnera

$$\iota\cos(\widehat{r, \iota}) = x\cos(\widehat{r, u}) + y\cos(\widehat{r, v}) + z\cos(\widehat{r, w}).$$

Donc, si l'angle $(\widehat{r, \iota})$ se réduit à un droit, on aura simplement

$$x\cos(\widehat{r, u}) + y\cos(\widehat{r, v}) + z\cos(\widehat{r, w}) = 0.$$

D'ailleurs, pour que les directions $r$, $s$, $t$ soient parallèles à un plan unique, il est nécessaire et il suffit qu'elles forment trois angles droits

$$(\widehat{r, \iota}),\quad (\widehat{s, \iota}),\quad (\widehat{t, \iota})$$

avec une direction $\iota$ perpendiculaire à ce plan; par conséquent, il est nécessaire et il suffit qu'elles vérifient trois équations de la forme

$$
(15)\qquad \left\{
\begin{aligned}
&x\cos(\widehat{r, u}) + y\cos(\widehat{r, v}) + z\cos(\widehat{r, w}) = 0, \\
&x\cos(\widehat{s, u}) + y\cos(\widehat{s, v}) + z\cos(\widehat{s, w}) = 0, \\
&x\cos(\widehat{t, u}) + y\cos(\widehat{t, v}) + z\cos(\widehat{t, w}) = 0.
\end{aligned}
\right.
$$

Enfin, lorsque la longueur $\iota$, comme nous le supposons ici, diffère de

(¹) *Œuvres de Cauchy*, série II, t. XIII, p. 160.



zéro, les trois coordonnées

$$x, \quad y, \quad z$$

de l'extrémité de cette longueur, mesurées sur trois axes non parallèles à un même plan, ne peuvent s'évanouir à la fois; et alors les trois équations (15) ne peuvent subsister simultanément que dans le cas où les cosinus par lesquels y sont représentés les coefficients de $x$, $y$, $z$ vérifient la formule (14).

Cherchons maintenant les conditions sous lesquelles s'évanouissent les résultantes que l'on peut construire avec les coordonnées de deux ou trois points, dont les positions sont rapportées à des axes rectangulaires ou obliques des $x$, $y$, $z$.

Représentons par les trois lettres

$$r, \quad s, \quad t$$

les rayons vecteurs menés de l'origine à trois points donnés, et désignons, à l'aide de ces mêmes lettres, placées comme indices au bas de $x$, $y$ et $z$, les coordonnées de ces trois points. Enfin, soient

$$\mathrm{x}, \quad \mathrm{y}, \quad \mathrm{z}$$

trois longueurs, mesurées à partir de l'origine, sur les demi-axes des $x$, $y$, $z$ positives, et $T$ une autre longueur mesurée sur une perpendiculaire au plan de l'angle $(\widehat{r, s})$. Les formules (26) et (28) du paragraphe V donneront

$$(16)\qquad x_r y_s - x_s y_r = (r, s, T)\,\frac{rs[r, s]}{[\mathrm{x}, \mathrm{y}]}\,\frac{\cos(\widehat{T, \mathrm{z}})}{\cos(\widehat{Z, \mathrm{z}})},$$

et

$$(17)\qquad x_r y_s z_t - x_r y_t z_s + x_s y_t z_r - x_s y_r z_t + x_t y_r z_s - x_t y_s z_r = (r, s, t)\,\frac{rst[r, s, t]}{[\mathrm{x}, \mathrm{y}, \mathrm{z}]}.$$

Cela posé, l'équation de condition

$$(18)\qquad x_r y_s - x_s y_r = 0$$

pourra être réduite à

$$(19)\qquad rs[r, s]\cos(\widehat{T, \mathrm{z}}) = 0.$$

Donc, pour qu'elle soit vérifiée, il sera nécessaire et il suffira que l'un des facteurs

$$r, \quad s, \quad [r, s], \quad \cos(\widehat{T, z})$$

s'évanouisse. D'ailleurs, réduire à zéro l'un des rayons vecteurs $r$, $s$, c'est supposer que l'un des points donnés coïncide avec l'origine. Quant à la condition

$$[r, s] = 0,$$

que l'on peut encore écrire comme il suit,

$$\sin(\widehat{r, s}) = 0,$$

elle exprime que les longueurs $r$, $s$ se mesurent sur une même droite. Enfin, la condition

$$\cos(\widehat{T, z}) = 0$$

exprime que la direction $T$, perpendiculaire au plan de l'angle $(\widehat{r, s})$, est aussi perpendiculaire à l'axe des $z$, ou, en d'autres termes, que le plan de l'angle $(\widehat{r, s})$ passe par l'axe des $z$.

Quant à l'équation de condition

$$x_r y_s z_t - x_r y_t z_s + x_s y_t z_r - x_s y_r z_t + x_t y_r z_s - x_t y_s z_r = 0, \tag{20}$$

elle pourra être réduite, en vertu de la formule (17), à

$$rst[r, s, t] = 0. \tag{21}$$

Donc, pour qu'elle soit vérifiée, il sera nécessaire et il suffira que l'un des facteurs

$$r, \quad s, \quad t, \quad [r, s, t]$$

se réduise à zéro; par conséquent, il sera nécessaire et il suffira que l'un des points donnés coïncide avec l'origine, ou que le volume du parallélipipède construit sur trois arêtes parallèles à $r$, $s$, $t$ s'évanouisse, c'est-à-dire, en d'autres termes, que les trois arêtes $r$, $s$, $t$ deviennent parallèles à un même plan.

Eu égard aux remarques qu'on vient de faire, on pourra évidemment énoncer les propositions suivantes :



Théorème III. — *La position d'un point étant rapportée à trois axes des $x$, $y$, $z$ qui se coupent sous des angles quelconques, pour que deux points séparés de l'origine, l'un par la distance $r$, l'autre par la distance $s$, soient renfermés dans un plan qui passe par l'origine, il est nécessaire et il suffit que les coordonnées*

$$\begin{matrix} x_r, & y_r, \\ x_s, & y_s \end{matrix}$$

*de ces deux points, mesurées sur les axes des $x$ et $y$, vérifient la condition*

$$x_r y_s - x_s y_r = 0. \tag{22}$$

Théorème IV. — *La position d'un point étant rapportée à trois axes des $x$, $y$, $z$ qui se coupent sous des angles quelconques, pour que trois points séparés de l'origine par les distances*

$$r, \quad s \quad \text{et} \quad t$$

*soient renfermés dans un plan qui passe par l'origine, il est nécessaire et il suffit que les coordonnées*

$$\begin{matrix} x_r, & y_r, & z_r, \\ x_s, & y_s, & z_s, \\ x_t, & y_t, & z_t \end{matrix}$$

*de ces mêmes points vérifient la condition*

$$x_r y_s z_t - x_r y_t z_s + x_s y_t z_r - x_s y_r z_t + x_t y_r z_s - x_t y_s z_r = 0. \tag{23}$$

On pourrait encore, avec la plus grande facilité, établir les théorèmes III et IV, en raisonnant comme il suit.

Soient toujours

$$\mathrm{x}, \quad \mathrm{y}, \quad \mathrm{z}$$

trois longueurs mesurées, à partir de l'origine, sur les demi-axes des coordonnées positives, et $\iota$ une autre longueur mesurée, à partir de la même origine, dans une direction quelconque. Si l'on représente par $x$, $y$, $z$ les coordonnées d'un point situé dans le plan mené par cette origine perpendiculairement à $\iota$, la première des équations (15) subsistera, quand on y remplacera $u$, $v$, $w$ par $\mathrm{x}$, $\mathrm{y}$, $\mathrm{z}$; $r$ par $\iota$, et $\lambda$,

$\eta$, $\zeta$ par $x, y, z$. On aura donc

$$x\cos(\widehat{\iota, \mathrm{x}}) + y\cos(\widehat{\iota, \mathrm{y}}) + z\cos(\widehat{\iota, \mathrm{z}}) = 0. \tag{24}$$

Ajoutons que la formule (24), c'est-à-dire l'équation du plan mené par l'origine perpendiculairement à $\iota$, se réduira simplement à

$$x\cos(\widehat{\iota, \mathrm{x}}) + y\cos(\widehat{\iota, \mathrm{y}}) = 0, \tag{25}$$

si ce plan passe par l'axe des $z$, puisque alors, $\iota$ étant perpendiculaire à $\mathrm{z}$, on aura

$$(\widehat{\iota, \mathrm{z}}) = \frac{\pi}{2}, \qquad \cos(\widehat{\iota, \mathrm{z}}) = 0.$$

Cela posé, pour que les deux points séparés de l'origine par les distances $r$ et $s$ soient renfermés dans un plan qui passe par l'axe des $z$, il sera nécessaire et il suffira que leurs coordonnées

$$\begin{matrix} x_r, & y_r, \\ x_s, & z_s, \end{matrix}$$

mesurées sur les axes des $x$ et $y$, vérifient deux équations semblables à l'équation (25), c'est-à-dire deux équations de la forme

$$\left\{\begin{aligned} & x_r\cos(\widehat{\iota, \mathrm{x}}) + y_r\cos(\widehat{\iota, \mathrm{y}}) = 0, \\ & x_s\cos(\widehat{\iota, \mathrm{x}}) + y_s\cos(\widehat{\iota, \mathrm{y}}) = 0. \end{aligned}\right. \tag{26}$$

Pareillement, pour que les trois points séparés de l'origine par les distances $r$, $s$, $t$ soient renfermés dans un même plan qui passe par l'origine, il sera nécessaire et il suffira que leurs coordonnées

$$\begin{matrix} x_r, & y_r, & z_r, \\ x_s, & y_s, & z_s, \\ x_t, & y_t, & z_t, \end{matrix}$$

vérifient trois équations semblables à l'équation (24), c'est-à-dire trois équations de la forme

$$\left\{\begin{aligned} & x_r\cos(\widehat{\iota, \mathrm{x}}) + y_r\cos(\widehat{\iota, \mathrm{y}}) + z_r\cos(\widehat{\iota, \mathrm{z}}) = 0, \\ & x_s\cos(\widehat{\iota, \mathrm{x}}) + y_s\cos(\widehat{\iota, \mathrm{y}}) + z_s\cos(\widehat{\iota, \mathrm{z}}) = 0, \\ & x_t\cos(\widehat{\iota, \mathrm{x}}) + y_t\cos(\widehat{\iota, \mathrm{y}}) + z_t\cos(\widehat{\iota, \mathrm{z}}) = 0. \end{aligned}\right. \tag{27}$$



Or les trois angles

$$(\widehat{\iota, \mathrm{x}}), \quad (\widehat{\iota, \mathrm{y}}), \quad (\widehat{\iota, \mathrm{z}})$$

ne pouvant être droits tous les trois, lorsque les coordonnées $x, y, z$ se mesurent, comme on doit le supposer, sur trois axes non compris dans un même plan, les cosinus de ces trois angles ne peuvent s'évanouir à la fois; et, par suite, le système des formules (27) entraîne la condition (20).

VII. — *Sur les relations qui existent entre les coefficients des variables dans les deux espèces d'équations à l'aide desquelles on passe d'un premier système de coordonnées rectilignes à un second, et réciproquement.*

Parmi les problèmes dont la solution introduit dans le calcul des résultantes formées avec les coordonnées de deux ou trois points, on doit remarquer une question d'ailleurs facile à résoudre, celle dont l'objet est d'établir les relations qui existent entre les coefficients renfermés dans les deux espèces d'équations à l'aide desquelles on passe d'un premier système de coordonnées rectilignes à un second, et réciproquement. Occupons-nous un moment de cette question et des formules qui s'y rapportent.

D'après ce qui a été dit dans un précédent Mémoire (*voir* le III[e] volume), si l'on nomme

$x, y, z$ les coordonnées rectilignes d'un point quelconque P, relatives à trois axes rectangulaires ou obliques, menés par une certaine origine O;

$\mathrm{x}, \mathrm{y}, \mathrm{z}$ trois longueurs mesurées, à partir de cette origine, sur les axes des $x$, $y$, $z$ indéfiniment prolongés du côté des coordonnées positives;

X, Y, Z trois longueurs mesurées, à partir de la même origine, sur les axes conjugués, c'est-à-dire sur trois nouveaux axes respectivement perpendiculaires aux plans des $y, z$, des $z, x$ et des $x, y$;

et si l'on représente par

$$x_{,}, \quad y_{,}, \quad z_{,} \qquad \mathrm{x}_{,}, \quad \mathrm{y}_{,}, \quad \mathrm{z}_{,} \qquad \mathrm{X}_{,}, \quad \mathrm{Y}_{,}, \quad \mathrm{Z}_{,},$$

ce que deviennent

$$x,\quad y,\quad z,\qquad \mathrm{x},\quad \mathrm{y},\quad \mathrm{z},\qquad \mathrm{X},\quad \mathrm{Y},\quad \mathrm{Z},$$

quand au système des axes donnés on substitue un nouveau système d'axes, l'origine restant la même, on aura

$$(1)\qquad \left\{\begin{aligned} x_{,} &= a\,x + b\,y + c\,z,\\ y_{,} &= a'x + b'y + c'z,\\ z_{,} &= a''x + b''y + c''z,\end{aligned}\right.$$

les valeurs des coefficients

$$a,\quad b,\quad c;\qquad a',\quad b',\quad c';\qquad a'',\quad b'',\quad c''$$

étant fournies par les équations

$$(2)\qquad \left\{\begin{aligned} a &= \frac{\cos(\widehat{\mathrm{x},\mathrm{X}_{,}})}{\cos(\widehat{\mathrm{x}_{,},\mathrm{X}_{,}})}, & b &= \frac{\cos(\widehat{\mathrm{y},\mathrm{X}_{,}})}{\cos(\widehat{\mathrm{x}_{,},\mathrm{X}_{,}})}, & c &= \frac{\cos(\widehat{\mathrm{z},\mathrm{X}_{,}})}{\cos(\widehat{\mathrm{x}_{,},\mathrm{X}_{,}})};\\ a' &= \frac{\cos(\widehat{\mathrm{x},\mathrm{Y}_{,}})}{\cos(\widehat{\mathrm{y}_{,},\mathrm{Y}_{,}})}, & b' &= \frac{\cos(\widehat{\mathrm{y},\mathrm{Y}_{,}})}{\cos(\widehat{\mathrm{y}_{,},\mathrm{Y}_{,}})}, & c' &= \frac{\cos(\widehat{\mathrm{z},\mathrm{Y}_{,}})}{\cos(\widehat{\mathrm{y}_{,},\mathrm{Y}_{,}})};\\ a'' &= \frac{\cos(\widehat{\mathrm{x},\mathrm{Z}_{,}})}{\cos(\widehat{\mathrm{z}_{,},\mathrm{Z}_{,}})}, & b'' &= \frac{\cos(\widehat{\mathrm{y},\mathrm{Z}_{,}})}{\cos(\widehat{\mathrm{z}_{,},\mathrm{Z}_{,}})}, & c'' &= \frac{\cos(\widehat{\mathrm{z},\mathrm{Z}_{,}})}{\cos(\widehat{\mathrm{z}_{,},\mathrm{Z}})};\end{aligned}\right.$$

et, réciproquement,

$$(3)\qquad \left\{\begin{aligned} x &= A\,x_{,} + A'y_{,} + A''z_{,},\\ y &= B\,x_{,} + B'y_{,} + B''z_{,},\\ z &= C\,x_{,} + C'y_{,} + C''z_{,},\end{aligned}\right.$$

les valeurs des coefficients

$$A,\quad A',\quad A'';\qquad B,\quad B',\quad B'';\qquad C,\quad C',\quad C''$$

étant fournies par les équations

$$(4)\qquad \left\{\begin{aligned} A &= \frac{\cos(\widehat{\mathrm{x}_{,},\mathrm{X}})}{\cos(\widehat{\mathrm{x},\mathrm{X}})}, & A' &= \frac{\cos(\widehat{\mathrm{x}_{,},\mathrm{Y}})}{\cos(\widehat{\mathrm{y},\mathrm{Y}})}, & A'' &= \frac{\cos(\widehat{\mathrm{x}_{,},\mathrm{Z}})}{\cos(\widehat{\mathrm{z},\mathrm{Z}})};\\ B &= \frac{\cos(\widehat{\mathrm{y}_{,},\mathrm{X}})}{\cos(\widehat{\mathrm{x},\mathrm{X}})}, & B' &= \frac{\cos(\widehat{\mathrm{y}_{,},\mathrm{Y}})}{\cos(\widehat{\mathrm{y},\mathrm{Y}})}, & B'' &= \frac{\cos(\widehat{\mathrm{y}_{,},\mathrm{Z}})}{\cos(\widehat{\mathrm{z},\mathrm{Z}})};\\ C &= \frac{\cos(\widehat{\mathrm{z}_{,},\mathrm{X}})}{\cos(\widehat{\mathrm{x},\mathrm{X}})}, & C' &= \frac{\cos(\widehat{\mathrm{z}_{,},\mathrm{Y}})}{\cos(\widehat{\mathrm{y},\mathrm{Y}})}, & C'' &= \frac{\cos(\widehat{\mathrm{z}_{,},\mathrm{Z}})}{\cos(\widehat{\mathrm{z},\mathrm{Z}})}.\end{aligned}\right.$$



D'ailleurs, la nature de ces divers coefficients est facile à reconnaître; et, d'abord, en vertu des formules (1), les coefficients renfermés dans une même ligne verticale du tableau

$$(5)\qquad \left\{\begin{matrix} a, & b, & c,\\ a', & b', & c',\\ a'', & b'', & c''\end{matrix}\right.$$

représentent évidemment ce que deviennent les coordonnées

$$x_{,},\quad y_{,},\quad z_{,}$$

du point P, quand on a réduit l'une des trois variables

$$x,\quad y,\quad z$$

à l'unité, et les deux autres à zéro, c'est-à-dire, en d'autres termes, quand on fait coïncider le point P avec l'extrémité de l'une des longueurs

$$\mathrm{x},\quad \mathrm{y},\quad \mathrm{z}$$

réduites à l'unité. Pareillement, en vertu des formules (3), les termes renfermés dans une même ligne verticale du tableau

$$(6)\qquad \left\{\begin{matrix} A, & A', & A'',\\ B, & B', & B'',\\ C, & C', & C''\end{matrix}\right.$$

représentent ce que deviennent les coordonnées

$$x,\quad y,\quad z$$

du point P, quand on fait coïncider ce point avec l'extrémité de l'une des longueurs

$$\mathrm{x}_{,},\quad \mathrm{y}_{,},\quad \mathrm{z}_{,}$$

réduites à l'unité. Ainsi, les divers coefficients renfermés dans les équations (1) et (3) se réduisent aux projections algébriques que l'on obtient quand on projette les longueurs x, y, z réduites à l'unité, sur les directions $\mathrm{x}_{,}$, $\mathrm{y}_{,}$, $\mathrm{z}_{,}$, à l'aide de plans perpendiculaires aux directions X, Y, Z, ou les longueurs $\mathrm{x}_{,}$, $\mathrm{y}_{,}$, $\mathrm{z}_{,}$ réduites à l'unité, sur les directions x, y, z, à l'aide de plans perpendiculaires aux directions X, Y, Z. Cette seule remarque fournit un moyen simple de retrouver aisément et de reproduire à volonté l'une quelconque des formules (2) ou (4). En effet, si l'on désigne par

$$r, \quad s, \quad t$$

trois longueurs, dont chacune se mesure dans une direction déterminée, la projection algébrique de $r$ sur $s$, effectuée à l'aide de plans perpendiculaires à $t$, sera (*voir* le IIIe volume, p. 140) (¹)

$$r\frac{\cos(r, t)}{\cos(s, t)}.$$

Donc, si la longueur $r$ se réduit à l'unité, sa projection algébrique sera représentée par le rapport

$$\frac{\cos(\widehat{r, t})}{\cos(\widehat{s, t})}.$$

Cela posé, le coefficient $a$, par exemple, n'étant autre chose que la projection algébrique de x sur $\mathrm{x}_{,}$, effectuée à l'aide de plans perpendiculaires à $\mathrm{X}_{,}$, et correspondante à la valeur 1 de x, on aura nécessairement

$$a = \frac{\cos(\widehat{\mathrm{x}, \mathrm{X}_{,}})}{\cos(\widehat{\mathrm{x}_{,}, \mathrm{X}_{,}})};$$

et l'on pourra, de la même manière, en s'appuyant sur la remarque ci-dessus énoncée, reproduire isolément chacune des formules comprises dans le système des équations (2) ou (4).

D'autre part, chacune des formules (3) doit nécessairement coïncider avec l'une de celles que l'on peut obtenir en éliminant deux des coordonnées $x$, $y$, $z$ entre les formules (1); et, réciproquement, chacune des formules (1) doit coïncider avec l'une de celles que l'on obtient en éliminant deux coordonnées $x_{,}$, $y_{,}$, $z_{,}$ entre les formules (3). Il y a plus : cette coïncidence doit avoir lieu, quelles que soient les valeurs attribuées aux variables $x$, $y$, $z$ ou $x_{,}$, $y_{,}$, $z_{,}$; ce qui exige que les coefficients de $x$, $y$, $z$ soient les mêmes dans les valeurs de $x_{,}$, $y_{,}$, $z_{,}$

(¹) *Œuvres de Cauchy*, Série II, t. XIII, p. 157.



que donnent les formules (1), et dans celles que l'on tirerait des formules (3). Donc les neuf coefficients

$$a, \quad b, \quad c, \qquad a', \quad b', \quad c', \qquad a'', \quad b'', \quad c''$$

peuvent être exprimés en fonction des coefficients

$$A, \quad B, \quad C, \qquad A', \quad B', \quad C', \qquad A'', \quad B'', \quad C'';$$

et, réciproquement, chacun de ceux-ci peut être exprimé en fonction des neuf autres. En effectuant le calcul, et posant pour abréger,

$$k = ab'c'' - ab''c' + a'b''c - a'bc'' + a''bc' - a''b'c, \tag{7}$$
$$K = AB'C'' - AB''C' + A'B''C - A'BC'' + A''BC' - A''B'C, \tag{8}$$

on trouve (*voir* le IIe volume, p. 172) (¹)

$$\left\{\begin{aligned} A &= \frac{b'c'' - b''c'}{k}, & A' &= \frac{b''c - bc''}{k}, & A'' &= \frac{bc' - b'c}{k}; \\ B &= \frac{c'a'' - c''a'}{k}, & B' &= \frac{c''a - ca''}{k}, & B'' &= \frac{ca' - c'a}{k}; \\ C &= \frac{a'b'' - a''b'}{k}, & C' &= \frac{a''b - ab''}{k}, & C'' &= \frac{ab' - a'b}{k}; \end{aligned}\right. \tag{9}$$

et

$$\left\{\begin{aligned} a &= \frac{B'C'' - B''C'}{K}, & a' &= \frac{B''C - BC''}{K}, & a'' &= \frac{BC' - B'C}{K}; \\ b &= \frac{C'A'' - C''A'}{K}, & b' &= \frac{C''A - CA''}{K}, & b'' &= \frac{CA' - C'A}{K}; \\ c &= \frac{A'B'' - A''B'}{K}, & c' &= \frac{A''B - AB''}{K}, & c'' &= \frac{AB' - A'B}{K}. \end{aligned}\right. \tag{10}$$

Mais, en vertu des remarques précédemment faites, la valeur de $k$ donnée par la formule (7) est précisément la résultante des coordonnées des trois points l, m, n qui coïncident avec les extrémités des longueurs x, y, z, dans le cas où l'on suppose ces longueurs réduites à l'unité, et où l'on rapporte la position d'un point quelconque aux axes coordonnées de $x_{,}$, $y_{,}$, $z_{,}$. Pareillement, la valeur de $K$ donnée par la formule (8) est précisément la résultante des coordonnées des trois points L, M, N qui coïncident avec les extrémités des longueurs x, y, z, dans le cas où l'on suppose ces longueurs réduites à l'unité, et où

(¹) *Œuvres de Cauchy*, Série II, t. XII, p. 196.

l'on rapporte la position d'un point quelconque aux axes coordonnées des $x$, $y$, $z$. Enfin, si dans chaque résultante on fait entrer, non plus les neuf coordonnées de trois points mesurées sur trois axes différents, mais les quatre coordonnées de deux de ces points mesurées sur deux de ces axes, alors, à la place de chacune des résultantes

$$k \quad \text{et} \quad K,$$

on pourra obtenir neuf résultantes diverses, qui seront précisément les numérateurs des fractions comprises dans les formules (9) ou (10). Donc chacune des formules (9), (10) qui servent à exprimer les coefficients

$$A, \quad B, \quad C, \qquad A', \quad B', \quad C', \qquad A'', \quad B'', \quad C''$$

en fonction des coefficients

$$a, \quad b, \quad c, \qquad a', \quad b', \quad c', \qquad a'', \quad b'', \quad c'',$$

et réciproquement, a pour second membre le rapport entre deux résultantes à deux et à trois directions, construites avec les coordonnées de deux ou trois points. Ajoutons que la valeur de chacune de ces résultantes pourra être aisément déduite des formules établies dans le paragraphe V. Ainsi, par exemple, en vertu de la formule (28) du paragraphe V, la résultante K des coordonnées des points L, M, N, mesurées sur les axes des $x$, $y$, $z$, offrira une valeur numérique déterminée par l'équation

$$(11) \qquad K = (x_{\prime}, y_{\prime}, z_{\prime}) \frac{[x_{\prime}, y_{\prime}, z_{\prime}]}{[x, y, z]},$$

le mouvement de rotation de x en y autour de z étant considéré comme direct, en sorte qu'on ait

$$(x, y, z) = 1.$$

Alors, aussi, en vertu de la formule (25) du paragraphe V, la résultante

$$A'B'' - A''B'$$

des coordonnées des points L, M, mesurées sur les axes des $x$ et $y$,



offrira une valeur déterminée par l'équation

$$(12) \qquad A'B'' - A''B' = \frac{(x_{\prime}, y_{\prime}, Z_{\prime})}{(x, y, Z)} \frac{[x_{\prime}, y_{\prime}]}{[x, y]} \frac{\cos\left(\widehat{z, Z_{\prime}}\right)}{\cos\left(\widehat{z, Z}\right)}.$$

Or les formules (11), (12), et autres semblables, fourniront évidemment un moyen facile de vérifier les équations (10). S'agit-il, par exemple, de vérifier la dernière de ces équations? On commencera par observer qu'en vertu des formules (14) et (15) du paragraphe I, on a, en supposant aigus les angles $\left(\widehat{z, Z}\right)$, $\left(\widehat{z, Z_{\prime}}\right)$,

$$[x, y, z] = [x, y] \cos\left(\widehat{z, Z}\right),$$
$$[x_{\prime}, y_{\prime}, z_{\prime}] = [x_{\prime}, y_{\prime}] \cos\left(\widehat{z_{\prime}, Z_{\prime}}\right);$$

et, par suite, dans tous les cas possibles,

$$[x, y, z] = \frac{(x, y, Z)}{(x, y, z)} [x, y] \cos\left(\widehat{z, Z}\right) = (x, y, Z)[x, y] \cos\left(\widehat{z, Z}\right),$$
$$[x_{\prime}, y_{\prime}, z_{\prime}] = \frac{(x_{\prime}, y_{\prime}, Z_{\prime})}{(x_{\prime}, y_{\prime}, z_{\prime})} [x_{\prime}, y_{\prime}] \cos(z_{\prime}, Z_{\prime}).$$

Donc la formule (11) pourra s'écrire comme il suit :

$$(13) \qquad K = \frac{(x_{\prime}, y_{\prime}, Z_{\prime})}{(x, y, Z)} \frac{[x_{\prime}, y_{\prime}]}{[x, y]} \frac{\cos\left(\widehat{z_{\prime}, Z_{\prime}}\right)}{\cos\left(\widehat{z, Z}\right)}.$$

Cela posé, il suffira évidemment de combiner entre elles, par voie de division, les équations (12) et (13), pour obtenir la formule

$$\frac{A'B'' - A''B'}{K} = \frac{\cos\left(\widehat{z, Z_{\prime}}\right)}{\cos\left(\widehat{z_{\prime}, Z_{\prime}}\right)},$$

ou, ce qui revient au même, eu égard à la dernière des équations (10), la formule

$$\frac{A'B'' - A''B'}{K} = c'',$$

qui coïncide précisément avec la dernière des équations (10). On pourrait, de la même manière, à l'aide des formules établies dans le paragraphe V, vérifier chacune des équations (9) ou (10). Enfin, on pourrait encore vérifier ces mêmes équations, après y avoir substitué les valeurs des divers coefficients tirées des formules (2) et (4), à l'aide des formules générales que nous avons établies dans le paragraphe IV.

Il est bon d'observer que le système des équations (9), peut être remplacé par la seule formule

$$(14)\qquad \begin{aligned} &\frac{A}{b'c''-b''c'}=\frac{B}{c'a''-c''a'}=\frac{C}{a'b''-a''b'}\\ &=\frac{A'}{b''c-bc''}=\frac{B'}{c''a-ca''}=\frac{C'}{a''b-ab''}\\ &=\frac{A''}{bc'-b'c}=\frac{B''}{ca'-c'a}=\frac{C''}{ab'-a'b}=\frac{1}{k}, \end{aligned}$$

et le système des équations (10) par la seule formule

$$(15)\qquad \begin{aligned} &\frac{a}{B'C''-B''C'}=\frac{b}{C'A''-C''A'}=\frac{c}{A'B''-A''B'}\\ &=\frac{a'}{B''C-BC''}=\frac{b'}{C''A-CA''}=\frac{c'}{A''B-AB''}\\ &=\frac{a''}{BC'-B'C}=\frac{b''}{CA'-C'A}=\frac{c''}{AB'-A'B}=\frac{1}{K}. \end{aligned}$$

Ajoutons que les formules (9) et (10), ou (14) et (15), peuvent aussi être remplacées par un système de neuf équations qui soient linéaires par rapport aux coefficients renfermés dans les formules (1), comme par rapport aux coefficients renfermés dans les formules (3). Entrons, à ce sujet, dans quelques explications.

Si l'on fait coïncider successivement le point P, dont les coordonnées sont $x$, $y$, $z$, avec les extrémités en l, m, n des trois longueurs

$$\mathrm{x},\quad \mathrm{y},\quad \mathrm{z}$$

réduites à l'unité, on obtiendra trois systèmes de valeurs de $x$, $y$, $z$, dont chacune comprendra les trois coefficients renfermés dans une même colonne verticale du tableau (5); et à ces trois systèmes de valeurs de $x$, $y$, $z$, correspondront trois systèmes de valeurs de



$x$, $y$, $z$, dont chacun offrira deux valeurs nulles et une valeur égale à 1. Cela posé, des équations (3), appliquées aux coordonnées des trois points l, m, n, on déduira évidemment les neuf formules

$$(16)\qquad \begin{cases} Aa+A'a'+A''a''=1, & Ab+A'b'+A''b''=0, & Ac+A'c'+A''c''=0,\\ Ba+B'a'+B''a''=0, & Bb+B'b'+B''b''=1, & Bc+B'c'+B''c''=0,\\ Ca+C'a'+C''a''=0, & Cb+C'b'+C''b''=0, & Cc+C'c'+C''c''=1. \end{cases}$$

Si, au contraire, on fait coïncider successivement le point P avec les extrémités L, M, N des trois longueurs

$$\mathrm{x}_{\prime},\quad \mathrm{y}_{\prime},\quad \mathrm{z}_{\prime}$$

réduites à l'unité, on déduira successivement des équations (1) les neuf formules

$$(17)\qquad \begin{cases} Aa+Bb+Cc=1, & A'a+B'b+C'c=0, & A''a+B''b+C''c=0,\\ Aa'+Bb'+Cc'=0, & A'a'+B'b'+C'c'=1, & A''a'+B''b'+C''c'=0,\\ Aa''+Bb''+Cc''=0, & A'a''+B'b''+C'c''=0, & A''a''+B''b''+C''c''=1. \end{cases}$$

On pourrait, avec la plus grande facilité, déduire des équations (16) ou (17) les formules (9) et (10). Veut-on, par exemple, déduire des équations (17) les équations (9), ou, ce qui revient au même, la formule (14)? Il suffira de prendre pour inconnues les coefficients renfermés dans le tableau (6), et de déterminer simultanément les trois coefficients compris dans une même colonne verticale de ce tableau. Ainsi, en particulier, les équations (17) donneront

$$Aa+Bb+Cc=1,\qquad Aa'+Bb'+Cc'=0,\qquad Aa''+Bb''+Cc''=0,$$

et l'on tirera de celle-ci, en faisant d'abord abstraction de la première,

$$\frac{A}{b'c''-b''c'}=\frac{B}{c'a''-c''a'}=\frac{C}{a'b''-a''b'};$$

puis, ensuite,

$$\begin{aligned} &\frac{A}{b'c''-b''c'}=\frac{B}{c'a''-c''a'}=\frac{C}{a'b''-a''b'}\\ &\qquad=\frac{Aa+Bb+Cc}{a(b'c''-b''c')+b(c'a''-c''a')+c(a'b''-a''b')}=\frac{1}{k}. \end{aligned}$$

On prouvera, de même, en partant des équations (17), que chacune des fractions comprises dans la formule (14) se réduit à $\frac{1}{k}$; et généralement on pourra, du système des équations (16) ou (17), déduire à volonté, ou la formule (14), ou la formule (25). D'ailleurs, pour effectuer cette déduction, il suffira de s'appuyer, comme on vient de le faire, d'une part sur la formule à laquelle on parvient quand on élimine une seule inconnue entre deux équations linéaires qui renferment trois variables, sans aucun terme constant, et, d'autre part, sur ce principe, que la valeur commune de plusieurs fractions égales ne diffère pas du résultat qu'on obtient, quand, après avoir transformé chaque fraction en multipliant ses deux termes par un même facteur, on divise la somme des numérateurs par la somme des dénominateurs. Ce qu'on vient de dire prouve encore que le système des équations (17) est équivalent au système des équations (16). Chacun de ces systèmes peut certainement être remplacé par l'autre, puisqu'il est démontré que chacun d'eux peut être remplacé à volonté ou par la formule (14), ou par la formule (15).

Si l'on voulait, non plus tirer des équations (16) ou (17) les formules (14), (15), ou, ce qui revient au même, les équations (9) et (10), mais effectuer l'opération inverse, et revenir des équations (9), (10) aux équations (16) et (17), il suffirait évidemment de combiner par voie d'addition les formules (9) et (10), après avoir multiplié les deux membres de chacune d'elles par un facteur convenablement choisi.

Observons encore que, si l'on applique le théorème sur les produits de résultantes au système des équations (16), ou au système des équations (17), on en tirera, eu égard aux formules (7), (8),

$$kK = 1. \tag{18}$$

On arriverait aussi à la même conclusion, en partant de l'équation (11). En effet, cette équation, qui suppose que l'on considère comme direct le mouvement de rotation de x en y autour de z, et que l'on a en conséquence $(x, y, z) = 1$, peut être, pour plus de généralité, présentée



sous la forme

$$K = \frac{(x_{,}, y_{,}, z_{,})}{(x, y, z)} \frac{[x_{,}, y_{,}, z_{,}]}{[x, y, z]}, \tag{19}$$

et s'étend, sous cette dernière forme, au cas même où, la position d'un point quelconque étant rapportée aux axes des $x$, $y$, $z$ on considérerait comme direct, non plus le mouvement de x en y autour de z, mais le mouvement de $x_{,}$ en $y_{,}$ autour de $z_{,}$. D'ailleurs, en échangeant entre eux les deux systèmes d'axes, on obtiendra évidemment, à la place de la formule (19), la suivante :

$$k = \frac{(x, y, z)}{(x_{,}, y_{,}, z_{,})} \frac{[x, y, z]}{[x_{,}, y_{,}, z_{,}]}; \tag{20}$$

et il est clair que des formules (19), (20) on peut immédiatement déduire l'équation (18).

Si les deux systèmes d'axes coordonnés présentent chacun trois axes perpendiculaires l'un à l'autre, on aura

$$[x, y, z] = 1, \qquad [x_{,}, y_{,}, z_{,}] = 1,$$

et, par suite, les formules (19), (20) donneront

$$K = \frac{(x_{,}, y_{,}, z_{,})}{(x, y, z)}, \qquad k = \frac{(x, y, z)}{(x_{,}, y_{,}, z_{,})},$$

ou, ce qui revient au même,

$$K = k = (x, y, z)(x_{,}, y_{,}, z_{,}). \tag{21}$$

Donc, alors, chacune des résultantes $k$, $K$ se réduira simplement à l'unité, si les mouvements de rotation de x en y autour de z, et de $x_{,}$ en $y_{,}$ autour de $z_{,}$, sont de même espèce, et à $-1$, dans le cas contraire. Alors aussi les diverses formules établies dans ce paragraphe se confondront avec les formules connues qui se rapportent à la transformation des coordonnées rectangulaires, et qui ont été rappelées dans un précédent Mémoire (*voir* le IIe volume, p. 273) [1].

Nous renverrons à un autre Mémoire la recherche des lois suivant

[1] *Œuvres de Cauchy*, Série II, t. XII, p. 310.

lesquelles les neuf coefficients renfermés dans les équations (1) et (3) dépendent de la forme des deux angles solides qui ont pour arêtes, d'une part x, y, z, d'autre part $x_{,}$, $y_{,}$, $z_{,}$, et de trois constantes propres à déterminer la position de l'un de ces angles solides par rapport à l'autre

Observons, en finissant, que les formules (16), (17), (18) peuvent être étendues au cas général où, à la place des équations (1) et (3), on considérerait deux équations de la même forme, mais relatives à deux systèmes de variables, dont le nombre serait le même dans les deux systèmes, et d'ailleurs aussi grand que l'on voudrait. Effectivement, les formules (22) de la page 176 au IIe volume[1], qui se rapportent à deux systèmes d'équations semblables aux équations (1) et (3), se trouvent remplacées par d'autres formules du même genre, quand on échange entre eux les coefficients qui occupent les mêmes places dans les deux systèmes d'équations; et, par conséquent, on peut, dans le cas général, obtenir deux systèmes de formules analogues aux formules (16) et (17). Ajoutons que la formule (18) se trouve comprise, comme cas particulier, dans la formule (24) de la page citée.

[1] *Œuvres de Cauchy*, Série II, t. XII, p. 200.

---

# MÉMOIRE

SUR LA

# THÉORIE DES ÉQUIVALENCES ALGÉBRIQUES

## SUBSTITUÉE A LA THÉORIE DES IMAGINAIRES

### Préliminaires.

Les géomètres, surtout ceux qui s'efforcent de contribuer aux progrès des sciences mathématiques, ont été quelquefois accusés de parler une langue qui n'a pas toujours l'avantage de pouvoir être facilement comprise, et de fonder des théories sur des principes qui manquent de clarté. Si une théorie pouvait encourir ce reproche, c'était assurément la théorie des imaginaires, telle qu'elle était généralement enseignée dans les Traités d'Algèbre. C'est pour ce motif qu'elle avait spécialement fixé mon attention dans l'ouvrage que j'ai publié, en 1821, sous le titre d'*Analyse algébrique*, et qui avait précisément pour but de donner aux méthodes toute la rigueur que l'on exige en géométrie, de manière à ne jamais recourir aux raisons tirées de la généralité de l'Algèbre. Pour remédier à l'inconvénient signalé, j'avais considéré les équations imaginaires comme des formules symboliques, c'est-à-dire comme des formules qui, prises à la lettre et interprétées d'après les conventions généralement établies, sont inexactes ou n'ont pas de sens, mais desquelles on peut déduire des résultats exacts en modifiant et altérant, selon des règles fixes, ou ces formules, ou les symboles qu'elles renferment. Cela posé, il n'y avait plus nulle nécessité de se mettre l'esprit à la torture pour chercher à découvrir ce que pouvait représenter le signe symbolique $\sqrt{-1}$, auquel les géomètres allemands substituent la lettre $i$. Ce signe ou cette lettre était, si je puis ainsi m'exprimer, un outil, un instrument de calcul dont l'introduction dans les formules permettait d'arriver plus rapidement à la solution très réelle des questions que l'on avait posées. Mais il est évident que les théories algébriques deviendraient beaucoup plus claires encore, et beaucoup plus faciles à saisir, qu'elles pourraient être mises à la portée de toutes les intelligences, si l'on parvenait à se débarrasser complètement des expressions imaginaires, en réduisant la lettre $i$ à n'être plus qu'une quantité réelle. Quoiqu'une telle réduction parût invraisemblable et même impossible au premier abord, j'ai néanmoins essayé de résoudre ce singulier problème, et, après quelques tentatives, j'ai été assez heureux pour réussir. Le principe sur lequel je m'appuie semble d'autant plus digne d'attention, qu'il peut être appliqué même à la théorie des nombres, dans laquelle il conduit à des résultats qui méritent d'être remarqués. Entrons maintenant dans quelques détails.

### I. — *Sur les équivalences arithmétiques et algébriques.*

Lorsque deux nombres entiers $l$, $m$, étant divisés par un troisième $n$, fournissent le même reste, ils sont dits *congrus* ou *équivalents*, suivant le *module* ou *diviseur* $n$. Pour indiquer cette circonstance, on peut écrire, avec M. Gauss,

$$l \equiv m \quad (\text{mod } n). \tag{1}$$

Pareillement, si $\varphi(x), \chi(x)$ représentent deux polynomes en $x$, ou, en d'autres termes, deux fonctions entières de $x$, qui, étant divisées algébriquement par un troisième $\varpi(x)$, fournissent le même reste, on peut dire que ces polynomes sont *équivalents* entre eux, suivant le *module* ou *diviseur* $\varpi(x)$, et indiquer cette circonstance, comme l'a fait M. Kummer, en écrivant

$$\varphi(x) \equiv \chi(x) \quad [\text{mod } \varpi(x)]. \tag{2}$$



On doit donc distinguer deux espèces d'équivalences, qui pourront être appelées, les unes *arithmétiques*, les autres *algébriques*, une équivalence arithmétique étant celle qui indiquera l'égalité des restes de deux divisions arithmétiques; tandis qu'une équivalence algébrique indiquera l'égalité des restes de deux divisions algébriques, le diviseur arithmétique ou algébrique demeurant le même dans les deux divisions successivement effectuées.

Pour introduire cette distinction dans les formules, et faire en sorte que les équivalences algébriques ne puissent être confondues ni avec les équivalences arithmétiques, ni avec les équations proprement dites, j'aurai recours à un nouveau signe; et quand il s'agira d'exprimer une équivalence algébrique, alors, dans le signe qui s'applique aux équations, c'est-à-dire dans le signe $=$ formé de deux traits rectilignes superposés, je remplacerai le trait supérieur, non plus par deux traits rectilignes distincts, comme on le fait dans le cas où l'on veut exprimer une équivalence, mais par un crochet trapézoïdal, ou bien encore par un trait recourbé en arc de cercle, en réservant toutefois ce dernier signe, ainsi que je l'expliquerai dans le paragraphe II, pour le cas spécial où le polynome $\varpi(x)$ se réduit à un binome de la forme $x^2+1$. De plus, pour éviter toute méprise, et attendu que le mot *module* a reçu dans la langue analytique un grand nombre d'acceptions diverses, je donnerai la préférence au mot *diviseur*, quand il s'agira de nommer le polynome par lequel on doit effectivement diviser les deux membres d'une équivalence algébrique. Par suite, quand j'écrirai le polynome entre parenthèses à la suite d'une équivalence, je le ferai précéder, non plus des trois lettres initiales *mod.*, mais des trois lettres initiales *div*. Cela posé, la formule

$$\varphi(x) \simeq \chi(x) \quad [\text{div } \varpi(x)] \tag{3}$$

exprimera que les deux polynomes $\varphi(x)$ et $\chi(x)$ sont équivalents entre eux, suivant le diviseur $\varpi(x)$, ou, en d'autres termes, que les deux polynomes, divisés algébriquement par $\varpi(x)$, fournissent le même reste. Cette équivalence pourra donc toujours être remplacée par une équation de la forme

$$\varphi(x) = \chi(x) + u\,\varpi(x), \tag{4}$$

$u$ désignant une fonction entière de $x$.

Il est aisé de voir que des équivalences algébriques, quand elles sont toutes relatives au même diviseur, peuvent être, aussi bien que des équivalences arithmétiques, combinées entre elles par voie d'addition, de soustraction et de multiplication. Ainsi, par exemple, si, en prenant $\varpi(x)$ pour diviseur algébrique, on désigne par

$$\varphi(x),\quad \varphi_1(x),\quad \varphi_2(x),\quad \ldots,\quad \chi(x),\quad \chi_1(x),\quad \chi_2(x),\quad \ldots$$

diverses fonctions entières de $x$, les formules

$$\varphi(x) \equiv \chi(x),\qquad \varphi_1(x) \equiv \chi_1(x),\qquad \varphi_2(x) \equiv \chi_2(x)\qquad \ldots \tag{5}$$

entraîneront les suivantes :

$$\varphi(x) + \varphi_1(x) + \varphi_2(x) + \ldots \equiv \chi(x) + \chi_1(x) + \chi_2(x) + \ldots, \tag{6}$$

$$\varphi(x)\,\varphi_1(x)\,\varphi_2(x)\ldots \equiv \chi(x)\,\chi_1(x)\,\chi_2(x)\ldots \tag{7}$$

Effectivement, les formules (5), présentées sous la forme d'équations véritables, deviendront

$$\left\{\begin{array}{l} \varphi(x) = \chi(x) + u\,\varpi(x), \\ \varphi_1(x) = \chi_1(x) + u_1\,\varpi(x), \\ \varphi_2(x) = \chi_2(x) + u_2\,\varpi(x), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right. \tag{8}$$

$u, u_1, u_2, \ldots$ étant des fonctions entières de $x$. Or des formules (8) combinées entre elles par voie d'addition et de multiplication, on tirera

$$\varphi(x) + \varphi_1(x) + \varphi_2(x) + \ldots = \chi(x) + \chi_1(x) + \chi_2(x) + \ldots + \mathrm{U}\,\varpi(x), \tag{9}$$

et

$$\varphi(x)\,\varphi_1(x)\,\varphi_2(x)\ldots = \chi(x)\,\chi_1(x)\,\chi_2(x)\ldots + \mathrm{V}\,\varpi(x), \tag{10}$$



U, V étant des fonctions entières de $x$ déterminées par les formules

$$\begin{aligned} \mathrm{U} &= u + u_1 + u_2 + \ldots, \\ \mathrm{V} &= u\,u_1\,u_2\ldots[\varpi(x)]^{n-1} \\ &\quad + [u_1 u_2 \ldots \chi(x) + u u_2 \ldots \chi_1(x) + u u_1 \ldots \chi_2(x) + \ldots]\,[\varpi(x)]^{n-2} \\ &\quad + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &\quad + u\,\chi_1(x)\,\chi_2(x)\ldots + u_1\,\chi(x)\,\chi_2(x)\ldots + u_2\,\chi(x)\,\chi_1(x)\ldots. \end{aligned}$$

Or la fonction entière $\varpi(x)$ étant prise pour module, les équations (9), (10) peuvent être présentées sous les formes (6) et (7). Ajoutons que si, dans la formule (7), on suppose les fonctions $\varphi(x)$, $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$ égales entre elles, on aura, en désignant par $m$ le nombre de ces fonctions,

$$[\varphi(x)]^m \equiv [\chi(x)]^m. \tag{11}$$

De la formule (11) comparée à la formule (3), il résulte que, sans altérer une équivalence algébrique, on peut élever ses deux membres à la $m^{\text{ième}}$ puissance, quel que soit le nombre entier $m$.

Lorsqu'on a fait passer dans le premier membre d'une équivalence algébrique tous les termes que renfermait cette équation, elle se réduit à la forme

$$\mathrm{f}(x) \equiv 0 \qquad [\operatorname{div} \varpi(x)], \tag{12}$$

$\mathrm{f}(x)$ étant une fonction entière de $x$. Supposons maintenant que, la fonction $\varpi(x)$ étant du degré $n$, on nomme

$$c_0 + c_1 x + \ldots + c_{n-2}x^{n-2} + c_{n-1}x^{n-1}$$

le reste de la division algébrique de $\mathrm{f}(x)$ par $\varpi(x)$. L'équivalence (12) pourra être présentée sous la forme

$$c_0 + c_1 x + \ldots + c_{n-2}x^{n-2} + c_{n-1}x^{n-1} = 0. \tag{13}$$

Or, comme l'équation (13) devra subsister, quel que soit $x$, on en tirera, en posant $x = 0$,

$$c_0 = 0.$$

On aura donc encore

$$c_1 x + \ldots + c_{n-2}x^{n-2} + c_{n-1}x^{n-1} = 0;$$

puis, en divisant par $x$,

$$c_1 + \ldots + c_{n-2}x^{n-3} + c_{n-1}x^{n-2} = 0.$$

Cette dernière équation devant elle-même subsister, quel que soit $x$ on en tirera

$$c_1 = 0;$$

et, en continuant de la sorte, on finira par reconnaitre que la formule (13) entraine avec elle $n$ équations distinctes, savoir,

$$(14) \qquad c_0 = 0, \quad c_1 = 0, \quad \ldots, \quad c_{n-2} = 0, \quad c_{n-1} = 0.$$

Donc, lorsque le diviseur $\varpi(x)$ est une fonction entière du degré $n$, une équivalence relative à ce diviseur entraine avec elle $n$ équations, qu'on obtient en divisant le premier membre par $\varpi(x)$, après avoir fait passer tous les termes dans ce premier membre, et en égalant ensuite à zéro les coefficients des diverses puissances de $x$ comprises dans le reste de la division effectuée.

Pour montrer une application très simple des principes que nous venons d'établir, considérons en particulier le cas où le diviseur $\varpi(x)$ se réduit au binome $x^n - 1$. Comme ce binome divisera la différence

$$x^{mn} - 1,$$

quel que soit d'ailleurs le nombre entier $m$, on aura généralement

$$(15) \qquad x^{mn} - 1 \simeq 0 \qquad (\mathrm{div}\, x^n - 1),$$

ou, ce qui revient au même,

$$(16) \qquad x^{mn} \simeq 1;$$

puis en multipliant les deux membres de la formule (16) par $x^l$, on en tirera, pour des valeurs entières quelconques de $l$ et de $m$,

$$(17) \qquad x^{mn+l} \simeq x^l.$$

Si, dans cette dernière formule, on attribue successivement à $l$ les valeurs

$$1, \quad 2, \quad 3, \quad \ldots, \quad n-1,$$



on en tirera

$$(18) \qquad \left\{ \begin{array}{l} x^{mn+1} \simeq x, \\ x^{mn+2} \simeq x^2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots, \\ x^{mn+n-1} \simeq x^{n-1}, \end{array} \right.$$

le diviseur étant toujours le binome $x^n - 1$. Soit maintenant

$$(19) \qquad \mathrm{f}(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + a_{n+1} x^{n+1} + \ldots + a_{2n} x^{2n} + \ldots$$

une fonction entière quelconque de $x$. Comme en vertu de la formule (17), on aura généralement

$$a_{mn+l}\, x^{mn+l} \simeq a_{mn+l}\, x^l \qquad (\mathrm{div}\, x^n - 1);$$

l'équation (19) donnera

$$(20) \qquad \begin{aligned} \mathrm{f}(x) \simeq\ & a_0 + a_n + a_{2n} + \ldots \\ & + (a_1 + a_{n+1} + a_{2n+1} + \ldots)x \\ & + (a_2 + a_{n+2} + a_{2n+2} + \ldots)x^2 \\ & + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & + (a_{n-1} + a_{2n-1} + \ldots)\, x^{n-1} \qquad (\mathrm{div}\, x^n - 1). \end{aligned}$$

Cette dernière formule fait connaitre immédiatement la fonction entière de $x$ du degré $n-1$, qui représente le reste de la division algébrique de $\mathrm{f}(x)$ par le binome $x^n - 1$. On peut d'ailleurs étendre la formule (20) au cas où, le second membre de l'équation (19) étant composé d'un nombre infini de termes, la fonction $\mathrm{f}(x)$ serait, en vertu de cette équation même, la somme d'une série convergente ordonnée suivant les puissances entières et ascendantes de la variable $x$.

Considérons encore le cas où le diviseur se réduirait au binome $x^n + 1$. Comme ce binome divisera la différence

$$x^{mn} - (-1)^m,$$

quel que soit d'ailleurs le nombre entier $m$, on aura généralement, pour des valeurs impaires de $m$,

$$(21) \qquad x^{mn} + 1 \simeq 0 \qquad (\mathrm{div}\, x^n + 1),$$

ou, ce qui revient au même,

$$x^{mn} \asymp -1, \tag{22}$$

et, par suite,

$$x^{mn+l} \asymp x^l, \tag{23}$$

$l$ étant un nombre entier quelconque. On trouvera, au contraire, pour des valeurs paires de $m$,

$$x^{mn} - 1 \asymp 0 \qquad (\text{div}\ x^n + 1), \tag{24}$$

ou, ce qui revient au même,

$$x^{mn} \asymp 1, \tag{25}$$

et, par suite,

$$x^{mn+l} \asymp x^l. \tag{26}$$

Cela posé, il est clair qu'en prenant pour diviseur le binome $x^n + 1$, on déduira de l'équation (19), jointe aux équivalences (23) et (26), non plus la formule (20), mais la suivante :

$$\begin{aligned} \mathrm{f}(x) \asymp\ & a_0 - a_n + a_{2n} - \ldots \\ & + (a_1 - a_{n+1} + a_{2n+1} - \ldots) x \\ & + (a_2 - a_{n+2} + a_{2n+2} - \ldots) x^2 \\ & + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & + (a_{n-1} - a_{2n-1} + \ldots) x^{n-1} \qquad (\text{div}\ x^n + 1). \end{aligned} \tag{27}$$

Cette dernière équivalence fait immédiatement connaître la fonction entière de $x$ du degré $n - 1$, qui représente le reste de la division algébrique de $\mathrm{f}(x)$ par le binome $x^n + 1$.

II. — *Substitution des équivalences algébriques aux équations imaginaires.*

Dans la théorie des équivalences algébriques substituée à la théorie des imaginaires, la lettre $i$ cessera de représenter le signe symbolique $\sqrt{-1}$, que nous répudierons complètement, et que nous pouvons abandonner sans regret, puisqu'on ne saurait dire ce que signifie ce



prétendu signe, ni quel sens on doit lui attribuer. Au contraire, nous représenterons par la lettre $i$ une quantité réelle, mais indéterminée; et, en substituant le signe $\asymp$ au signe $=$, nous transformerons ce qu'on appelait une *équation imaginaire* en une équivalence algébrique, relative à la variable $i$ et au diviseur $i^2 + 1$. D'ailleurs, ce diviseur restant le même dans toutes les formules, on pourra se dispenser de l'écrire. Il suffira d'admettre, comme nous le ferons effectivement, que le signe $\asymp$ indique toujours une équivalence algébrique relative au diviseur $i^2 + 1$. Cela posé, on passera sans peine des équations qui renferment une variable réelle aux équivalences qui devront remplacer les équations imaginaires. Et d'abord, comme le binome

$$i^2 + 1$$

divisera généralement la différence

$$i^{2m} - (-1)^m,$$

quel que soit le nombre entier $m$, on en conclura

$$i^{2m} - (-1)^m \asymp 0, \tag{1}$$

ou, ce qui revient au même,

$$i^{2m} \asymp (-1)^m; \tag{2}$$

puis, en multipliant par $i$ les deux nombres de la formule (16), on trouvera encore

$$i^{2m+1} \asymp (-1)^m i. \tag{3}$$

Par suite, si l'on remplace successivement le nombre entier $m$ par le nombre pair $2m$, et par le nombre impair $2m + 1$, on tirera des formules (2) et (3),

$$i^{4m} \asymp 1, \qquad i^{4m+1} \asymp i, \qquad i^{4m+2} \asymp -1, \qquad i^{4m+3} \asymp -i. \tag{4}$$

Eu égard à ces diverses formules, si l'on nomme $\mathrm{f}(i)$ une fonction entière de $i$ déterminée par l'équation

$$\mathrm{f}(i) = a_0 + a_1 i + a_2 i^2 + a_3 i^3 + a_4 i^4 + a_5 i^5 + \ldots, \tag{5}$$

on aura encore

$$(6)\qquad \mathrm{f}(i) \simeq a_0 - a_2 + a_4 - a_6 + \ldots + (a_1 - a_3 + a_5 - a_7 + \ldots)\, i.$$

Observons, au reste, qu'on pouvait déduire immédiatement les équivalences (4) et (6) des formules (23), (26), (27) du premier paragraphe en remplaçant dans ces formules le nombre $n$ par le nombre 2, et la lettre $x$ par la lettre $i$. Observons, de plus, que la formule (6) peut être étendue au cas où, le second membre de l'équation (6) étant composé d'un nombre infini de termes, la fonction $\mathrm{f}(i)$ serait, en vertu de cette équation même, la somme d'une série convergente ordonnée suivant les puissances ascendantes et entières de la variable $i$.

Si la fonction $\mathrm{f}(i)$ est le produit de deux facteurs linéaires

$$\alpha + \beta i, \quad \gamma + \delta i,$$

il sera facile de la développer suivant les puissances ascendantes de $i$. On aura, en effet,

$$(7)\qquad (\alpha + \beta i)(\gamma + \delta i) = \alpha\gamma + (\alpha\delta + \beta\gamma) i + \beta\delta i^2;$$

et, de même que l'équation (5) entraîne l'équivalence (6), de même l'équation (7) entraînera la formule

$$(8)\qquad (\alpha + \beta i)(\gamma + \delta i) \simeq \alpha\gamma - \beta\delta + (\alpha\delta + \beta\gamma) i.$$

Si, dans l'équivalence (7), on réduit le binome $\gamma + \delta i$ à la forme $\alpha - \beta i$, elle donnera

$$(9)\qquad (\alpha + \beta i)(\alpha - \beta i) \simeq \alpha^2 + \beta^2.$$

Ajoutons que, si dans la formule (8), on change le signe de la variable $i$, on trouvera

$$(10)\qquad (\alpha - \beta i)(\gamma - \delta i) \simeq \alpha\gamma - \beta\delta - (\alpha\delta + \beta\gamma) i.$$

Enfin, si l'on combine entre elles, par voie de multiplication, les équivalences (8) et (10), on en conclura, eu égard à la formule (9),

$$(11)\qquad (\alpha^2 + \beta^2)(\gamma^2 + \delta^2) \simeq (\alpha\gamma - \beta\delta)^2 + (\alpha\delta + \beta\gamma)^2.$$



D'ailleurs, les deux membres de la formule (11) étant indépendants de $i$, coïncident avec les restes qu'on obtient, en les divisant algébriquement par $i^2 + 1$. Donc le signe $\simeq$, employé pour indiquer l'égalité des restes, pourra être remplacé, dans la formule (11), par le signe $=$, et cette formule pourra être réduite à l'équation

$$(12)\qquad (\alpha^2 + \beta^2)(\gamma^2 + \delta^2) = (\alpha\gamma - \beta\delta)^2 + (\alpha\delta + \beta\gamma)^2,$$

qui, lorsqu'on attribue des valeurs entières aux quantités $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, fournit, comme l'on sait, la proposition suivante :

*Si l'on multiplie l'un par l'autre deux nombres entiers dont chacun soit la somme de deux carrés, le produit sera encore une somme de deux carrés.*

On vient de voir que, dans la formule (11), on peut remplacer le signe $\simeq$ par le signe $=$. En général, comme dans toute équivalence relative au diviseur $i^2 + 1$, le signe $\simeq$ indique l'égalité des restes qu'on obtient en divisant deux fonctions entières de $i$ par $i^2 + 1$, il est clair que *si les deux membres de l'équivalence se réduisent à des fonctions linéaires de* $i$, *on pourra remplacer encore le signe* $\simeq$ *par le signe* $=$, *et réduire ainsi l'équivalence proposée à une équation véritable.*

Considérons maintenant l'une quelconque des équivalences algébriques qui se rapportent au diviseur $i^2 + 1$. Si, après avoir fait passer tous les termes dans le premier membre, et réduit ainsi l'équivalence proposée à la forme

$$(13)\qquad \mathrm{f}(i) \simeq 0,$$

on nomme $c_0 + c_1 i$ le reste de la division algébrique de $\mathrm{f}(i)$ par $i^2 + 1$, l'équivalence (13), transformée en une équation véritable, pourra s'écrire comme il suit :

$$(14)\qquad c_0 + c_1 i = 0.$$

D'ailleurs, l'équation (14) devant subsister, quel que soit $i$, on en tirera d'abord, en attribuant à $i$ une valeur nulle.

$$(15)\qquad c_0 = 1.$$

De plus, de la formule (14), jointe à la formule (15), on tire, quel que soit $i$,

$$c_1 i = 0,$$

et, par conséquent,

$$c_1 = 0. \tag{16}$$

L'équivalence (13), substituée à une équation imaginaire quelconque, entraînera donc toujours avec elle deux équations réelles (15) et (16), que l'on obtiendra en égalant à zéro la partie constante et le coefficient de $i$, dans le reste de la division $f(i)$ par $i^2+1$. Les deux équations réelles dont il s'agit sont précisément celles que l'on considérait comme pouvant être symboliquement représentées par l'équation imaginaire à laquelle nous avons substitué l'équivalence (13).

### III. — *Usage des équivalences algébriques dans la trigonométrie et dans l'analyse des sections angulaires.*

Si, dans la formule (8) du paragraphe précédent, on remplace les binomes

$$\alpha + \beta i, \quad \gamma + \delta i$$

par des binomes de la forme

$$\cos x + i \sin x, \quad \cos y + i \sin y,$$

elle donnera

$$(\cos x + i \sin x)(\cos y + i \sin y) \simeq \cos x \cos y + \sin x \sin y \\ + i(\sin x \cos y + \sin y \cos x),$$

ou, ce qui revient au même,

$$(\cos x + i \sin x)(\cos y + i \sin y) \simeq \cos(x+y) + i \sin(x+y). \tag{1}$$

On peut donc énoncer la proposition suivante :

Théorème I. — *Pour obtenir une expression équivalente, suivant le diviseur $i^2+1$, au produit d'un binome de la forme*

$$\cos x + i \sin x$$



*par le binome semblable dans lequel celui-ci se transforme quand on remplace $x$ par $y$, il suffit de remplacer, dans le premier binome, l'arc $x$ par la somme $x+y$.*

*Corollaire.* — Si, après avoir obtenu la formule (10), on multiplie les deux membres de cette formule par un troisième binome de la forme

$$\cos z + i \sin z,$$

alors, en ayant égard au théorème énoncé, on trouvera

$$(\cos x + i \sin x)(\cos y + i \sin y)(\cos z + i \sin z) \\ \simeq \cos(x+y+z) + i \sin(x+y+z).$$

Il y a plus; en opérant plusieurs fois de semblables multiplications, on déduira évidemment du premier théorème la proposition suivante :

Théorème II. — *Pour obtenir une expression équivalente, suivant le diviseur $i^2+1$, au produit du binome*

$$\cos x + i \sin x$$

*par les binomes semblables dans lesquels celui-ci se transforme quand on remplace $x$ par $y$ ou par $z$, ..., il suffit de remplacer dans le binome proposé l'arc $x$ par la somme*

$$x + y + z + \ldots.$$

*Corollaire.* — Si, dans le théorème II, on suppose les arcs $x, y, z, \ldots$ tous égaux entre eux, alors, en désignant par $n$ le nombre de ces arcs, on verra leur somme se réduire au produit $nx$, et l'on obtiendra la proposition suivante :

Théorème III. — *Si l'on divise la $n^{ième}$ puissance du binome $\cos x + i \sin x$ par $i^2+1$, le reste de la division sera $\cos nx + i \sin nx$.*

Tel est, dans la théorie des équivalences algébriques, l'énoncé du *théorème de Moivre*. Ajoutons qu'en vertu des conventions adoptées, ce théorème sera exprimé analytiquement par la formule

$$(\cos x + i \sin x)^n \simeq \cos nx + i \sin nx. \tag{2}$$

Voyons maintenant quelle est l'équivalence algébrique qui doit être substituée à la relation découverte par Euler, entre les sinus et cosinus et les exponentielles imaginaires.

On prouve aisément que l'exponentielle $e^x$ peut toujours être développée en une série convergente ordonnée suivant les puissances ascendantes de $x$, à l'aide de la formule

$$e^x = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3}{1.2.3} + \ldots, \tag{3}$$

en vertu de laquelle $e^x$ peut être considérée comme une fonction entière de $x$, composée d'un nombre infini de termes.

D'ailleurs, si, dans la formule (3), on remplace $x$ par $ix$, on en tirera

$$e^{ix} = 1 + \frac{x}{1} i + \frac{x^2}{1.2} i^2 + \frac{x^3}{1.2.3} i^3 + \ldots \tag{4}$$

Cela posé, la formule (6) du paragraphe précédent donnera

$$e^{ix} \simeq 1 - \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^4}{1.2.3.4} - \ldots + i\left(\frac{x}{1} - \frac{x^3}{1.2.3} + \ldots\right). \tag{5}$$

Mais, d'autre part, on établit aisément les équations

$$\left\{\begin{aligned} \cos x &= 1 - \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^4}{1.2.3.4} - \ldots, \\ \sin x &= \frac{x}{1} - \frac{x^3}{1.2.3} + \ldots. \end{aligned}\right. \tag{6}$$

Donc la formule (5) donnera simplement

$$e^{ix} \simeq \cos x + i \sin x, \tag{7}$$

et l'on pourra énoncer la proposition suivante :

Théorème IV. — *Si l'exponentielle $e^{ix}$, développée suivant les puissances ascendantes de $i$, et considérée, dès lors, comme une fonction entière de $i$, est divisée algébriquement par le binome $i^2+1$, le reste de la division sera précisément le binome*

$$\cos x + i \sin x.$$



Tel est, dans la théorie des équivalences algébriques, l'énoncé du théorème d'Euler, qui, d'ailleurs, se trouve implicitement renfermé dans la formule (7).

Il importe d'observer que la transformation des formules de Moivre et d'Euler en équivalences algébriques n'empêche point de tirer de ces formules toutes celles qu'on en déduit ordinairement. Ainsi, par exemple, veut-on tirer de la formule (2) les valeurs de $\cos nx$ et de $\sin nx$ exprimées en fonctions entières de $\sin x$ et de $\cos x$ ? Il suffira d'observer qu'en vertu des formules (5), (6), du paragraphe II, l'équation

$$(a+bi)^n = a^n + na^{n-1}bi + \frac{n(n-1)}{1.2} a^{n-2}b^2i^2 + \ldots$$

entrainera l'équivalence

$$\begin{aligned} (a+bi)^n \simeq\ & a^n - \frac{n(n-1)}{1.2} a^{n-2}b^2 + \ldots \\ & + i\left(na^{n-1} - \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3} a^{n-3}b^3 + \ldots\right), \end{aligned} \tag{8}$$

et, qu'eu égard à cette dernière, dans laquelle on peut remplacer $a$ et $b$ par $\cos x$ et $\sin x$, la formule (2) donnera

$$\begin{aligned} & \cos nx + i \sin nx \\ & \simeq \cos^n x - \frac{n(n-1)}{1.2} \cos^{n-2} x \sin^2 x + \ldots \\ & \quad + i\left(n \cos^{n-1} x \sin x - \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3} \cos^{n-3} x \sin^3 x + \ldots\right). \end{aligned} \tag{9}$$

Or, les deux membres de l'équivalence (9) étant des facteurs linéaires de $i$, coïncideront avec les restes de leur division par $i^2+1$. Donc le signe $\simeq$, employé pour indiquer l'égalité des deux restes, pourra être remplacé, dans la formule (9), par le signe $=$, et l'on aura encore

$$\begin{aligned} & \cos nx + i \sin nx \\ & = \cos^n x - \frac{n(n-1)}{1.2} \cos^{n-2} x \sin^2 x + \ldots \\ & \quad + i\left(n \cos^{n-1} x \sin x - \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3} \cos^{n-3} x \sin^3 x + \ldots\right). \end{aligned} \tag{10}$$

Ajoutons que, l'équation (10) devant subsister pour une valeur quelconque de $i$, et, par conséquent, pour $i = 0$, les parties indépendantes de $i$ dans les deux membres devront être séparément égales entre elles. Donc l'équation (10) entrainera les deux équations distinctes

$$(11) \quad \begin{cases} \cos nx = \cos^n x - \dfrac{n(n-1)}{1.2} \cos^{n-2} x \sin^2 x + \ldots, \\ \sin nx = n \cos^{n-1} x \sin x - \dfrac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3} \cos^{n-3} x \sin^3 x + \ldots. \end{cases}$$

IV. — *Sur les modules et les arguments des binomes de la forme* $\alpha + \beta i$.

On s'assure aisément que tout binome de la forme

$$\alpha + \beta i$$

peut encore être présenté sous cette autre forme

$$r(\cos t + i \sin t),$$

$r$ étant une quantité positive. En effet, pour que les deux expressions

$$\alpha + \beta i, \quad r(\cos t + i \sin t)$$

représentent une seule et même quantité, quelle que soit d'ailleurs la valeur attribuée à $i$; ou, en d'autres termes, pour que $i$ restant indéterminé, on ait toujours

$$(1) \qquad \alpha + \beta i = r(\cos t + i \sin t),$$

il suffit que $r$ et $t$ satisfassent aux deux équations

$$(2) \qquad \alpha = r \cos t, \qquad \beta = r \sin t.$$

Or on peut y satisfaire en posant

$$(3) \qquad r = (\alpha^2 + \beta^2)^{\frac{1}{2}},$$

et prenant ensuite pour $t$ l'un quelconque des arcs dont le sinus et le cosinus sont déterminés par les formules

$$(4) \qquad \cos t = \frac{\alpha}{r}, \qquad \sin t = \frac{\beta}{r},$$



qui peuvent être vérifiées simultanément, puisqu'on en tire, eu égard à la formule (3),

$$(5) \qquad \cos^2 t + \sin^2 t = 1.$$

La valeur positive de $r$, fournie par l'équation (3), est ce que nous appellerons le *module* du binome $\alpha + \beta i$. L'arc $t$, déterminé par les formules (4), sera l'*argument* du même binome. D'ailleurs le module $r$, correspondant à des valeurs données $\alpha$, $\beta$, offrira évidemment une valeur unique déterminée par l'équation (3), tandis que l'argument $t$, déterminé par le système des équations (4), offrira une infinité de valeurs représentées par les divers termes d'une progression arithmétique dont la raison sera la circonférence $2\pi$ correspondante au rayon 1.

Si le module du binome $\alpha + \beta i$ se réduit à zéro, l'équation

$$(6) \qquad r = 0,$$

que l'on pourra présenter sous la forme

$$\alpha^2 + \beta^2 = 0,$$

entrainera nécessairement les deux suivantes :

$$(7) \qquad \alpha = 0, \qquad \beta = 0,$$

et l'on arriverait encore aux mêmes conclusions, en partant soit des équations (2), soit de la formule (1). Ainsi, pour que, dans un binome de la forme $\alpha + \beta i$, les deux parties s'évanouissent, ou, en d'autres termes, pour que ce binome s'évanouisse, quel que soit $i$, il suffit que le module $r$ se réduise à zéro.

Si, au lieu d'un seul binome $\alpha + \beta i$, on considère deux binomes de la même forme, savoir :

$$\alpha + \beta i \quad \text{et} \quad \gamma + \delta i,$$

et si l'on nomme $r$, $r'$ les modules de ces deux binomes, en sorte qu'on ait

$$r = (\alpha^2 + \beta^2)^{\frac{1}{2}}, \qquad r' = (\gamma^2 + \delta^2)^{\frac{1}{2}},$$

la somme des deux binomes, savoir :

$$\alpha+\gamma+(\beta+\delta)i,$$

aura pour module la quantité

$$[(\alpha+\gamma)^2+(\beta+\delta)^2]^{\frac{1}{2}}=[r^2+r'^2+2(\alpha\gamma+\beta\delta)]^{\frac{1}{2}},$$

tandis que leur différence

$$\alpha-\gamma+(\beta-\delta)i$$

aura pour module la quantité

$$[(\alpha-\gamma)^2+(\beta-\delta)^2]^{\frac{1}{2}}=[r^2+r'^2-2(\alpha\gamma+\beta\delta)]^{\frac{1}{2}}.$$

Mais, d'autre part, en remplaçant $\delta$ par $-\delta$ dans la formule (11) du paragraphe II, on en tirera

$$(\alpha^2+\beta^2)(\gamma^2+\delta^2)=(\alpha\gamma+\beta\delta)^2+(\alpha\delta-\beta\gamma)^2,$$

et l'on en conclura

$$(\alpha\gamma+\beta\delta)^2<(\alpha^2+\beta^2)(\gamma^2+\delta^2),$$

ou, ce qui revient au même,

$$(\alpha\gamma+\beta\delta)^2<r^2r'^2.$$

Donc, par suite, la valeur numérique de la somme

$$\alpha\gamma+\beta\delta$$

sera inférieure au produit $rr'$, et les modules des deux binomes

$$\alpha+\gamma+(\beta+\delta)i,\quad \alpha-\gamma+(\beta-\delta)i$$

seront tous deux compris entre la limite inférieure

$$[r^2-2rr'+r'^2]^{\frac{1}{2}}=\pm(r-r')$$

et la limite supérieure

$$[r^2+2rr'+r'^2]^{\frac{1}{2}}=r+r'.$$



En conséquence, on peut énoncer la proposition suivante :

Théorème I. — *La somme de deux binomes de la forme*

$$\alpha+\beta i$$

*est, ainsi que leur différence, un nouveau binome de la même forme, qui offre un module compris entre la somme et la différence de leurs modules.*

Si l'on ajoute successivement les uns aux autres plusieurs binomes de la forme $\alpha+\beta i$, alors on déduira immédiatement du théorème I la proposition suivante :

Théorème II. — *La somme de plusieurs binomes de la forme $\alpha+\beta i$ offre un module inférieur à la somme de leurs modules. Si d'ailleurs, parmi les binomes donnés, il en existe un dont le module $r$ soit supérieur à la somme $s$ des modules de tous les autres, la somme de tous les binomes offrira un module supérieur à la différence $r-s$.*

Pour abréger, nous appellerons *module* et *argument* d'une fonction entière de $i$, le module et l'argument du reste que l'on obtient quand on divise cette fonction par $i^2+1$. Cela posé, toute fonction entière de $i$ offrira toujours un module unique et une infinité d'arguments représentés par les divers termes d'une progression arithmétique, dont la raison sera la circonférence $2\pi$. D'ailleurs, les théorèmes I et II entraîneront évidemment les propositions suivantes :

Théorème III. — *La somme de deux fonctions entières de $i$ offre, ainsi que leur différence, un module compris entre la somme et la différence des modules de ces deux fonctions.*

Théorème IV. — *La somme de plusieurs fonctions entières de $i$ offre un module inférieur à la somme de leurs modules. Si d'ailleurs, parmi les fonctions données, il en existe une dont le module $r$ soit supérieur à la somme $s$ des modules de toutes les autres, la somme de toutes les fonctions offrira un module supérieur à la différence $r-s$.*

Si l'on multiplie l'un par l'autre deux binomes de la forme

$$\alpha+\beta i,\quad \gamma+\delta i,$$

on aura, comme on l'a vu dans le paragraphe II, non seulement

$$(\alpha+\beta i)(\gamma+\delta i) \simeq \alpha\gamma-\beta\delta+(\alpha\delta+\beta\gamma)i, \tag{8}$$

mais encore

$$(\alpha^2+\beta^2)(\gamma^2+\delta^2)=(\alpha\gamma-\beta\delta)^2+(\alpha\delta+\beta\gamma)^2. \tag{9}$$

Si, d'ailleurs, on nomme, $r$, $r'$ les modules des deux binomes

$$\alpha+\beta i, \quad \gamma+\delta i,$$

et $\iota$ le module du produit de ces binomes, la formule (9) pourra s'écrire comme il suit :

$$r^2 r'^2=\iota^2, \tag{10}$$

et l'on en tirera

$$rr'=\iota. \tag{11}$$

Donc *le produit du module des deux binomes de la forme $\alpha+\beta i$ est égal au module de leur produit.*

Au reste, cette dernière proposition, et plusieurs autres qui s'en déduisent, peuvent encore être facilement démontrées de la manière suivante :

En vertu de la formule (7) du paragraphe précédent, on aura

$$\cos t+i\sin t \simeq e^{it}; \tag{12}$$

et, en conséquence, l'équation (1) entrainera toujours avec elle l'équivalence

$$\alpha+\beta i \simeq re^{it}, \tag{13}$$

dans laquelle $r$ désigne le module et $t$ l'argument du binome $\alpha+\beta i$. Ce binome pouvant d'ailleurs être le reste qu'on obtient quand on divise par $i^2+1$ une fonction entière quelconque de $i$, la formule (13) entrainera évidemment la proposition suivante :

Théorème V. — *Lorsqu'on prend pour diviseur algébrique le binome $i^2+1$, une fonction entière quelconque de $i$ est équivalente au produit de son module $r$ par l'exponentielle népérienne $e^{it}$, dans laquelle $t$ désigne l'argument de cette fonction.*



Comme, étant données plusieurs expressions de la forme

$$re^{it}, \quad r'e^{it'}, \quad r''e^{it''}, \quad \ldots,$$

le produit de ces expressions sera

$$rr'r''\ldots e^{i(t+t'+t''+\ldots)},$$

tandis que la $n^{\text{ième}}$ puissance de la première sera

$$r^n e^{nit};$$

le théorème V entrainera encore évidemment les propositions suivantes :

Théorème VI. — *Le produit de plusieurs fonctions entières de l'indéterminée $i$ a pour module le produit de leurs modules, et pour argument la somme de leurs arguments.*

Théorème VII. — *La $n^{\text{ième}}$ puissance d'une fonction entière de $i$ a pour module la $n^{\text{ième}}$ puissance du module de cette fonction, et pour argument le produit du nombre $n$ par l'argument de la même fonction.*

Comme le module d'une quantité $a$ indépendante de la variable $i$ se réduit à la valeur numérique $a$ de cette même quantité, le théorème V comprend évidemment la proposition suivante :

Théorème VIII. — *Le produit d'une fonction entière de l'indéterminée $i$ par une quantité $a$ indépendante de $i$ a pour module le produit du module de la fonction par la valeur numérique* a *de la quantité $a$.*

Observons encore que de la formule (13), on tire non seulement l'équivalence

$$(\alpha+\beta i)^n \simeq r^n e^{nit}, \tag{14}$$

qui s'accorde avec le théorème VII, mais encore, eu égard à la formule (12), l'équivalence

$$(\alpha+\beta i)^n \simeq r^n(\cos nt + i \sin nt), \tag{15}$$

à laquelle on parviendrait aussi en élevant à la $n^{\text{ième}}$ puissance chaque membre de la formule (1), et en ayant égard à la formule (2) du paragraphe précédent.

Supposons maintenant que l'on pose, pour abréger,

$$x = \alpha + \beta i. \tag{16}$$

Soient d'ailleurs, comme ci-dessus, $r$ le module et $t$ l'argument du binome $\alpha+\beta i$;

$$r \quad \text{et} \quad r^n$$

seront les modules respectifs des quantités

$$x \quad \text{et} \quad x^n,$$

qui vérifieront les formules

$$x \simeq re^{it}, \tag{17}$$

$$x^n \simeq r^n e^{nit}. \tag{18}$$

Soit encore $\mathfrak{f}(x)$ une fonction entière de $x$, du degré $n$, en sorte qu'on ait

$$\mathfrak{f}(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_{n-1} x + a_n. \tag{19}$$

Enfin, désignons par

$$\mathfrak{a}_0, \quad \mathfrak{a}_1, \quad \ldots, \quad \mathfrak{a}_{n-1}, \quad \mathfrak{a}_n$$

les valeurs numériques des coefficients

$$a_0, \quad a_1, \quad \ldots, \quad a_{n-1}, \quad a_n.$$

Les divers termes de la fonction $f(x)$ déterminée par l'équation (14) auront pour modules respectifs les quantités positives

$$\mathfrak{a}_0 r^n, \quad \mathfrak{a}_1 r^{n-1}, \quad \ldots, \quad \mathfrak{a}_{n-1} r, \quad \mathfrak{a}_n, \tag{20}$$

qui sont respectivement égales aux produits du facteur $r^n$ par les divers termes de la suite

$$\mathfrak{a}_0, \quad \frac{\mathfrak{a}_1}{r}, \quad \ldots, \quad \frac{\mathfrak{a}_{n-1}}{r^{n-1}}, \quad \frac{\mathfrak{a}_n}{r^n}. \tag{21}$$



D'autre part, la fonction

$$\mathfrak{f}(x) = \mathfrak{f}(\alpha+\beta i),$$

étant divisée par le binome $i^2+1$ fournira un reste de la forme

$$P + Qi,$$

que l'on pourra réduire à la forme

$$R(\cos T + i \sin T),$$

en nommant R le module de la fonction, déterminé par la formule

$$R = \sqrt{P^2+Q^2}, \tag{22}$$

et T l'argument de la même fonction déterminé par le système des deux formules

$$\cos T = \frac{P}{R}, \qquad \sin T = \frac{Q}{R}, \tag{23}$$

Observons maintenant que, pour de très grandes valeurs de $r$, les termes de la suite (21) étant tous très petits, à l'exception du premier, celui-ci surpassera, si $r$ est suffisamment grand, la somme de tous les autres. Alors aussi le produit de $\mathfrak{a}_0$ par $r^n$, ou le premier terme de la suite (20), surpassera évidemment la somme des autres termes de la même suite, puisque cette seconde somme sera équivalente au produit de la première par $r^n$. Cela posé, on conclura immédiatement du théorème IV que le module R de la fonction

$$\mathfrak{f}(x) = \mathfrak{f}(\alpha+\beta i)$$

est non seulement inférieur à la somme

$$\mathfrak{a}_0 r^n + \mathfrak{a}_1 r^{n-1} + \ldots + \mathfrak{a}_{n-1} r + \mathfrak{a}_n,$$

mais encore supérieur, pour des valeurs de $r$ suffisamment grandes, à la différence

$$\mathfrak{a}_0 r^n - (\mathfrak{a}_1 r^{n-1} + \ldots + \mathfrak{a}_{n-1} r + \mathfrak{a}_n);$$

en sorte qu'on a, pour de très grandes valeurs de $r$,

$$R > r^n\left(\mathfrak{a}_0 - \frac{\mathfrak{a}_1}{r} - \frac{\mathfrak{a}_2}{r^2} - \ldots - \frac{\mathfrak{a}_{n-1}}{r^{n-1}} - \frac{\mathfrak{a}_n}{r^n}\right). \tag{24}$$

Or, le second membre de la formule (24), étant le produit du facteur $r^n$ par la différence

$$\mathrm{a}_0 - \frac{\mathrm{a}_1}{r} - \frac{\mathrm{a}_2}{r^2} - \ldots - \frac{\mathrm{a}_{n-1}}{r^{n-1}} - \frac{\mathrm{a}_n}{r^n},$$

qui s'approche indéfiniment, pour des valeurs croissantes de $n$, de la limite $a_0$, on peut affirmer que, le module $r$ venant à croître, le module R deviendra infiniment grand, en même temps que $r^n$. On peut donc énoncer la proposition suivante :

Théorème IX. — *Supposons que, pour abréger, on désigne par la seule lettre $x$ le binome $\alpha + \beta i$, dans lequel $i$ désigne une variable indéterminée. Soit d'ailleurs $\mathrm{f}(x)$ une fonction entière de $x$ composée d'un nombre fini de termes. Si l'on fait croître indéfiniment le module r de la variable $x$, le module* R *de la fonction $\mathrm{f}(x)$ deviendra infiniment grand, pour des valeurs infiniment grandes de r.*

### V. — *Sur la substitution des racines des équivalences algébriques aux racines imaginaires des équations.*

Soit, comme dans le paragraphe précédent, $\mathrm{f}(x)$ une fonction entière du degré $n$, en sorte qu'on ait

$$\mathrm{f}(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_{n-1} x + a_n,$$

les coefficients $a_0, a_1, \ldots, a_n$ étant des quantités réelles. Les valeurs réelles de $x$ qui satisferont à l'équation

$$(1) \qquad \mathrm{f}(x) = 0,$$

sont ce qu'on appelle les *racines réelles* de cette équation. D'ailleurs le nombre de ces racines sera quelquefois égal, souvent inférieur au *degré n* de l'équation, et même, si ce degré est un nombre pair, toutes les racines réelles pourront disparaître à la fois. Mais si, en posant

$$(2) \qquad x = \alpha + \beta i,$$

on remplace dans la formule (1) le signe $=$ par le signe $\simeq$, cette formule, réduite à l'équivalence

$$(3) \qquad \mathrm{f}(x) \simeq 0,$$



aura toujours des *racines*, c'est-à-dire qu'elle pourra toujours être vérifiée par des valeurs de $x$ de la forme $\alpha + \beta i$. En d'autres termes, on pourra toujours trouver des systèmes de valeurs réelles des quantités $\alpha$ et $\beta$, pour lesquels se vérifie la condition

$$(4) \qquad \mathrm{f}(\alpha + \beta i) \simeq 0.$$

Il y a plus; le nombre des racines de l'équivalence (3) sera toujours égal à $n$, et l'on peut énoncer les propositions suivantes :

Théorème I. — *Quelles que soient les valeurs réelles attribuées aux coefficients*

$$a_0, \quad a_1, \quad \ldots, \quad a_n,$$

*l'équivalence* (3) *a toujours n racines, et n'en saurait avoir un plus grand nombre.*

Théorème II. — *Si l'on désigne par $x_1, x_2, \ldots, x_n$ les n racines de l'équivalence* (3), *le polynome $\mathrm{f}(x)$ sera équivalent au produit des facteurs linéaires*

$$x - x_1, \quad x - x_2, \quad \ldots, \quad x - x_n,$$

*en sorte qu'on aura*

$$(5) \qquad \mathrm{f}(x) \simeq (x - x_1)(x - x_2)\ldots(x - x_n).$$

Théorème III. — *Lorsque, dans une équivalence du degré n, le coefficient $a_0$ du premier terme est réduit à l'unité, les coefficients $a_1$, $a_2$, $a_3$, …, $a_n$ du deuxième, du troisième, du quatrième, …, du dernier terme, étant pris alternativement avec le signe $-$ et avec le signe $+$, sont respectivement égaux à la somme des racines, ou aux sommes des produits qu'on obtient en multipliant ces racines deux à deux, trois à trois, etc., ou enfin au produit de toutes les racines.*

On pourra aisément démontrer ces diverses propositions, et même les étendre au cas où chacun des coefficients compris dans la fonction entière $\mathrm{f}(x)$ serait remplacé par un binome de la forme $\alpha + \beta i$, si l'on part des principes établis dans le paragraphe précédent, surtout dans le paragraphe IV, et si l'on suit d'ailleurs la marche que j'ai adoptée, dans le IVe volume des *Exercices de Mathématiques*, en démontrant les propositions correspondantes de la théorie des équations. Pour que les démonstrations données alors deviennent applicables aux propositions nouvelles, il n'y a presque autre chose à faire que de remplacer le signe $=$ par le signe $\asymp$, et les mots *équation*, *égal*, etc., par les mots *équivalence*, *équivalent*, etc.

On voit maintenant quelle idée on doit se former de ce qu'on appelait les *racines imaginaires* des équations. Dans la nouvelle théorie, elles deviennent des racines réelles d'équivalences algébriques. Ainsi, par exemple, cette proposition que l'*équation binome*

$$x^4+1=0$$

*a pour racines les quatre expressions imaginaires comprises dans la formule*

$$\frac{\pm 1 \pm i}{\sqrt{2}},$$

*i étant une racine carrée de* $-1$, devra s'énoncer dans les termes suivants : *L'équivalence*

$$x^4+1 \asymp 0$$

*a pour racines réelles les quatre quantités comprises dans la formule*

$$\frac{\pm 1 \pm i}{\sqrt{2}}.$$

En d'autres termes, *si l'on prend pour $x$ l'une quelconque des quantités comprises dans la formule*

$$\frac{\pm 1 \pm i}{\sqrt{2}},$$

$x^4+1$ *sera divisible algébriquement par* $i^2+1$.

Lorsque, dans une racine $x=\alpha+\beta i$ de l'équivalence (3), le coefficient $\beta$ se réduit à zéro, cette équivalence, réduite à la forme

$$f(\alpha) \asymp 0,$$

entraine évidemment l'équation

$$f(\alpha)=0,$$



par conséquent l'équation

$$f(x)=0.$$

On peut donc énoncer la proposition suivante :

Théorème IV. — *Parmi les racines de l'équivalence* (3), *celles qui sont indépendantes de i sont en même temps des racines réelles de l'équation* (1).

Il est bon d'observer que le binome $i^2+1$ ne variera pas si l'on change $i$ en $-i$. Cela posé, si les coefficients $a_0, a_1, \dots, a_n$ étant indépendants de $i$, on satisfait à l'équivalence (3) par une racine $x$ de la forme

$$\alpha+\beta i,$$

il est clair qu'on y satisfera encore par une racine $x$ de la forme

$$\alpha-\beta i,$$

puisque, pour déduire cette seconde racine de la première, il suffit de changer $i$ en $-i$. Donc, si en adoptant le langage généralement admis, on appelle *conjuguées* deux expressions de la forme

$$\alpha+\beta i, \quad \alpha-\beta i,$$

on pourra énoncer la proposition suivante :

Théorème V. — *Lorsque dans la fonction* $f(x)$ *les coefficients sont tous indépendants de i, celles des racines de l'équivalence* (3) *qui ne deviennent pas indépendantes de i sont en nombre pair, et ces mêmes racines, prises deux à deux, sont conjuguées l'une à l'autre.*

Du théorème V on peut immédiatement déduire la proposition connue, qui s'énonce dans les termes suivants :

Théorème VI. — *Si dans la fonction entière* $f(x)$ *les coefficients sont tous indépendants de i, cette fonction sera décomposable en facteurs réels du premier et du second degré.*

Lorsque la fonction $f(x)$ cesse d'être algébrique et devient transcendante, les racines de l'équivalence (3), c'est-à-dire les valeurs de $x$, de la forme $\alpha + \beta i$, qui vérifient cette équivalence, représentent encore ce qu'on appelait les *racines réelles* ou *imaginaires* de l'équation (3), savoir : les racines réelles quand ces valeurs deviennent indépendantes de $i$, et les racines imaginaires dans le cas contraire. Alors aussi les théorèmes qui se rapportaient aux racines des équations transcendantes, se transforment en théorèmes relatifs aux racines des équivalences transcendantes, et les démonstrations que l'on donne des premiers s'appliquent ordinairement aux autres, moyennant la substitution du signe $\asymp$ au signe $=$, et des mots *équivalence*, *équivalent*, etc., aux mots *équation*, *égal*, etc.

# MÉMOIRE

SUR

# LES PROGRESSIONS DES DIVERS ORDRES

Les progressions sont les premières séries qui aient fixé l'attention des géomètres. Il ne pouvait en être autrement. Diverses suites, dont la considération se présentait naturellement à leur esprit, telles que la suite des nombres entiers, la suite des nombres pairs, la suite des nombres impairs, offraient cela de commun, que les divers termes de chacune d'elles étaient équidifférents entre eux; et l'on se trouvait ainsi conduit à remarquer les *progressions par différence*, autrement appelées *progressions arithmétiques*. De plus, en divisant algébriquement deux binomes l'un par l'autre, ou même en divisant un monome par un binome, on voyait naitre la *progression par quotient*, autrement appelée *progression géométrique*, qui offre le premier exemple d'une série ordonnée suivant les puissances entières d'une même quantité.

En réalité, une *progression arithmétique* n'est autre qu'une série simple dont le terme général se réduit à une fonction linéaire du nombre qui exprime le rang de ce terme.

Pareillement, une *progression géométrique* n'est autre chose qu'une série simple, dans laquelle le terme général se trouve représenté par une exponentielle dont l'exposant se réduit à une fonction linéaire du rang de ce même terme.

Il en résulte qu'une progression géométrique est une série simple dont le terme général a pour logarithme le terme général d'une progression arithmétique.

Il y a plus; de même qu'en Géométrie on distingue des paraboles de divers ordres, de même il semble convenable de distinguer en Analyse des *progressions* de divers ordres. En adoptant cette idée, on devra naturellement appeler *progression arithmétique de l'ordre m* une série simple dont le terme général sera une fonction du rang de ce terme, entière et du degré $m$.

Pareillement, il paraît naturel d'appeler *progression géométrique de l'ordre m* une série simple dans laquelle le terme général se trouve représenté par une exponentielle dont l'exposant est une fonction du rang de ce terme, entière et du degré $m$.

Cela posé, le terme général d'une progression géométrique de l'ordre $m$ aura toujours pour logarithme le terme général d'une progression arithmétique du même ordre.

Les définitions précédentes étant admises, les progressions arithmétique et géométrique du premier ordre seront précisément celles que l'on avait déjà examinées d'une manière spéciale, celles-là même dont les diverses propriétés, exposées dans tous les Traités d'Algèbre, sont parfaitement connues de tous ceux qui cultivent les sciences mathématiques.

Ajoutons que les progressions arithmétiques des divers ordres, quand on les suppose formées d'un nombre fini de termes, offrent des suites que les géomètres ont souvent considérées, et que l'on apprend à sommer dans le calcul aux différences finies. Telle est, en particulier, la suite des carrés des nombres entiers; telle est encore la suite des cubes, ou, plus généralement, la suite des puissances entières et semblables de ces mêmes nombres.

Mais, entre les diverses progressions, celles qui, en raison des propriétés dont elles jouissent, méritent surtout d'être remarquées, sont les progressions géométriques des ordres supérieurs au premier. Celles-ci paraissent tout à fait propres à devenir l'objet d'une nouvelle branche d'Analyse dont on peut apprécier l'importance en songeant que la théorie des progressions géométriques du second ordre fournit immédiatement les belles propriétés des fonctions elliptiques, si bien développées par M. Jacobi.



## Analyse.

### I. — *Considérations générales.*

Une *progression arithmétique* n'est autre chose qu'une série simple, dans laquelle le terme général $u_n$, correspondant à l'indice $n$, se réduit à une fonction linéaire de cet indice, en sorte qu'on ait, pour toute valeur entière, positive, nulle ou négative de $n$,

$$u_n = a + bn, \tag{1}$$

$a$ et $b$ désignant deux constantes déterminées.

Pareillement, une *progression géométrique* n'est autre chose qu'une série simple, dans laquelle le terme général $u_n$, correspondant à l'indice $n$, se trouve représenté par une exponentielle dont l'exposant se réduit à une fonction linéaire de cet indice, en sorte qu'on ait, pour toute valeur entière, positive, nulle ou négative de $n$,

$$u_n = A^{a+bn}, \tag{2}$$

A, $a$, $b$ désignant trois constantes déterminées. Il est d'ailleurs important d'observer que, sans diminuer la généralité de la valeur de $u_n$ fournie par l'équation (2), on peut toujours y supposer la constante A réduite à une quantité positive, par exemple, à la base

$$e = 2,7182818\ldots$$

des logarithmes népériens.

En étendant et généralisant ces définitions, on devra généralement appeler *progression arithmétique de l'ordre m* une série simple dont le terme général $u_n$ sera une fonction de l'indice $n$, entière et du degré $m$.

Pareillement, il paraît naturel d'appeler *progression géométrique de l'ordre m* une série simple dans laquelle le terme général $u_n$ se trouve représenté par une exponentielle dont l'exposant se réduit à une fonction de l'indice $n$ entière et du degré $m$.

Ces définitions étant admises, le terme général $u_n$ d'une progression arithmétique de l'ordre $m$, exprimé en fonction de l'indice $n$, sera de la forme

(3) $$u_n = a_0 + a_1 n + a_2 n^2 + \ldots + a_m n^m,$$

$a_0, a_1, a_2, \ldots, a_m$ étant des coefficients constants, c'est-à-dire indépendants de $n$.

Au contraire, le terme général d'une progression géométrique de l'ordre $m$ sera de la forme

(4) $$u_n = \mathrm{A}^{a_0 + a_1 n + a_2 n^2 + \ldots + a_m n^m};$$

et, par conséquent, il aura pour logarithme le terme général d'une progression arithmétique de l'ordre $m$.

Si, pour abréger, on pose

$$x_0 = \mathrm{A}^{a_0}, \quad x_1 = \mathrm{A}^{a_1}, \quad \ldots, \quad x_m = \mathrm{A}^{a_m},$$

l'équation (4) donnera

(5) $$u_n = x_0 x_1^n x_2^{n^2} \ldots x_m^{n^m}.$$

Donc le terme général d'une progression géométrique de l'ordre $m$ peut être considéré comme équivalent au produit de $m+1$ bases diverses

$$x_0, \quad x_1, \quad x_2, \quad \ldots, \quad x_m,$$

respectivement élevées à des puissances dont les exposants

$$1, \quad n, \quad n^2, \quad \ldots, \quad n^m$$

forment une progression géométrique du premier ordre, dont la raison est précisément le nombre $n$.

Si au coefficient $x_0$ on substitue la lettre $k$, et aux bases $x_1$, $x_2$, $x_3, \ldots, x_{m-1}, x_m$ les lettres $x, y, z, \ldots, v, w$, alors on obtiendra, pour le terme général $u_n$ d'une progression géométrique de l'ordre $m$, une expression de la forme

(6) $$u_n = k x^n y^{n^2} z^{n^3} \ldots v^{n^{m-1}} w^{n^m},$$

et le terme particulier correspondant à l'indice $n = 0$ sera

(7) $$u_0 = k.$$



Donc, si l'on nomme $k$ le terme spécial qui, dans une progression géométrique, correspond à l'indice zéro, le terme général correspondant à l'indice $n$, sera, dans une progression géométrique du premier ordre, de la forme

$$k x^n;$$

dans une progression géométrique du deuxième ordre, de la forme

$$k x^n y^{n^2};$$

dans une progression géométrique du troisième ordre, de la forme

$$k x^n y^{n^2} z^{n^3},$$

etc.

En terminant ce paragraphe, nous observerons que toute progression arithmétique ou géométrique peut être prolongée indéfiniment ou dans un seul sens, ou en deux sens opposés. Si $u_n$ représente le terme général d'une telle progression, celle-ci, indéfiniment prolongée dans un seul sens, à partir du terme $u_0$, sera réduite à la série

$$u_0, \quad u_1, \quad u_2, \quad \ldots,$$

ou à la série

$$u_0, \quad u_{-1}, \quad u_{-2}, \quad \ldots.$$

La même progression, indéfiniment prolongée dans les deux sens, sera

$$\ldots, \quad u_{-2}, \quad u_{-1}, \quad u_0, \quad u_1, \quad u_2, \quad \ldots.$$

### II. — *Sur les modules et sur les conditions de convergence des progressions géométriques des divers ordres.*

Considérons d'abord une progression géométrique de l'ordre $m$, dans laquelle le terme général $u_n$, correspondant à l'indice $n$, soit de la forme

$$u_n = \mathrm{A}^{n^m},$$

A désignant une quantité réelle et positive, et $n$ une quantité entière positive, nulle ou négative. Si l'on suppose cette progression prolongée indéfiniment dans un seul sens, à partir du terme $u_0 = 1$, elle se trouvera réduite ou à la série

$$(1) \qquad 1, \quad A, \quad A^{2^m}, \quad A^{3^m}, \quad \ldots,$$

ou à la série

$$(2) \qquad 1, \quad A^{(-1)^m}, \quad A^{(-2)^m}, \quad A^{(-3)^m}, \quad \ldots.$$

Dans le premier cas, le module de la progression sera la limite vers laquelle convergera, pour des valeurs croissantes du nombre $n$, la quantité

$$(u_n)^{\frac{1}{n}} = A^{n^{m-1}}.$$

Dans le second cas, au contraire, le module de la progression sera la limite vers laquelle convergera, pour des valeurs croissantes du nombre $n$, la quantité

$$(u_{-n})^{\frac{1}{n}} = A^{(-1)^m n^{m-1}}.$$

Enfin, si l'on suppose la progression prolongée indéfiniment dans les deux sens, on obtiendra la série

$$(3) \qquad A^{(-3)^m}, \quad A^{(-2)^m}, \quad A^{(-1)^m}, \quad 1, \quad A^1, \quad A^{2^m}, \quad A^{3^m}, \quad \ldots,$$

dont les deux modules se confondront, l'un avec le module de la série (1), l'autre avec le module de la série (2). D'ailleurs, ces deux modules, c'est-à-dire les limites des deux expressions

$$A^{n^{m-1}}, \quad A^{(-1)^m n^{m-1}},$$

se réduiront évidemment, 1° si l'on suppose $m = 1$, aux deux quantités

$$A \quad \text{et} \quad A^{-1};$$

2° si l'on suppose $m$ impair, mais différent de l'unité, aux deux quantités

$$A^{\infty}, \quad A^{-\infty};$$

3° si l'on suppose $m$ pair, à la seule quantité

$$A^{\infty}.$$

Ajoutons que l'on aura encore, 1° en supposant $A < 1$,

$$A^{\infty} = 0, \qquad A^{-\infty} = \infty;$$



2° en supposant $A > 1$,

$$A^{\infty} = \infty, \qquad A^{-\infty} = 0.$$

Il est maintenant facile de reconnaitre dans quels cas les séries (1), (2), (3) seront convergentes. En effet, une série quelconque, indéfiniment prolongée dans un seul sens, est convergente ou divergente suivant que son module est inférieur ou supérieur à l'unité. De plus, quand la série se prolonge indéfiniment en deux sens opposés, il faut substituer au module dont il s'agit le plus grand des deux modules, et l'on peut affirmer que la série est alors convergente ou divergente, suivant que le plus grand de ses deux modules est inférieur ou supérieur à l'unité.

Cela posé, on déduira évidemment des remarques faites ci-dessus les propositions suivantes :

Théorème I. — *Soient* A *une quantité positive, et* $m$ *un nombre impair quelconque. La progression géométrique*

$$1, \quad A, \quad A^{2^m}, \quad A^{3^m}, \quad \ldots,$$

*dont le module est* A *ou* $A^{\infty}$, *sera convergente ou divergente, suivant que la base* A *sera inférieure ou supérieure à l'unité. Au contraire, la progression géométrique*

$$1, \quad A^{-1}, \quad A^{-2^m}, \quad A^{-3^m}, \quad \ldots,$$

*dont le module est* $A^{-1}$ ou $A^{-\infty}$, *sera convergente ou divergente, suivant que la base* A *sera supérieure ou inférieure à l'unité. Quant à la progression*

$$\ldots, \quad A^{-3^m}, \quad A^{-2^m}, \quad A^{-1}, \quad 1, \quad A, \quad A^{2^m}, \quad A^{3^m}, \quad \ldots,$$

*qui comprend tous les termes renfermés dans les deux premières, et se confond avec la série* (3), *elle ne sera jamais convergente, attendu que ses deux modules, étant inverses l'un de l'autre, ne pourront devenir simultanément inférieurs à l'unité.*

Si $m$ désigne un nombre pair, on aura non plus

$$A^{(-n)^m} = A^{-n^m},$$

mais

$$A^{(-n)^m} = A^{n^m}.$$

Donc alors la série (2) ne sera plus distincte de la série (1), et la série (3), réduite à la forme

$$\ldots,\quad A^{3^m},\quad A^{2^m},\quad A,\quad 1,\quad A^{2^m},\quad A^{3^m},\quad \ldots,$$

offrira deux modules égaux entre eux. Cela posé, on pourra évidemment énoncer la proposition suivante :

Théorème II. — *Soient* A *une quantité positive et $m$ un nombre pair quelconque. La progression géométrique, qui offrira pour terme général* $A^{n^m}$, *étant prolongée indéfiniment, ou dans un seul sens, ou en deux sens opposés, sera toujours convergente si l'on a*

$$A < 1,$$

*et toujours divergente si l'on a*

$$A > 1.$$

Considérons maintenant une progression géométrique, et de l'ordre $m$, qui ait pour terme général la valeur de $u_n$ déterminée par l'équation

$$u_n = kx^n y^{n^2} z^{n^3} \ldots v^{n^{m-1}} w^{n^m}, \tag{4}$$

le nombre des variables

$$x,\quad y,\quad z,\quad \ldots,\quad v,\quad w$$

étant précisément égal à $m$. Soient, d'ailleurs,

$$\mathrm{x},\quad \mathrm{y},\quad \mathrm{z},\quad \ldots,\quad \mathrm{v},\quad \mathrm{w}$$

les modules de ces mêmes variables, et $\mathrm{k}$ le module du coefficient $k$. Si l'on nomme $\mathrm{u}_n$ le module de $u_n$, on trouvera

$$\mathrm{u}_n = \mathrm{k}\,\mathrm{x}^n \mathrm{y}^{n^2} \mathrm{z}^{n^3} \ldots \mathrm{v}^{n^{m-1}} \mathrm{w}^{n^m}, \tag{5}$$

ou, ce qui revient au même,

$$\mathrm{u}_n = \mathrm{N}^{n^m}, \tag{6}$$

la valeur de N étant

$$\mathrm{N} = \mathrm{k}^{\frac{1}{n^m}} \mathrm{x}^{\frac{1}{n^{m-1}}} \mathrm{y}^{\frac{1}{n^{m-2}}} \mathrm{z}^{\frac{1}{n^{m-3}}} \ldots \mathrm{v}^{\frac{1}{n}} \mathrm{w}. \tag{7}$$



D'autre part, la progression géométrique que l'on considère étant prolongée indéfiniment, ou dans un seul sens, ou en deux sens opposés, offrira un ou deux modules représentés chacun par l'une des limites vers lesquelles convergeront, pour des valeurs croissantes de $n$, les deux expressions

$$(\mathrm{u}_n)^{\frac{1}{n}},\quad (\mathrm{u}_{-n})^{\frac{1}{n}}.$$

Mais, pour des valeurs croissantes de $n$, la valeur de N déterminée par la formule (7), et celle qu'on déduirait de la même formule en y remplaçant $n$ par $-n$, convergent généralement vers la limite w. Donc, eu égard à la formule (6), les limites des expressions

$$(\mathrm{u}_n)^{\frac{1}{n}},\quad (\mathrm{u}_{-n})^{\frac{1}{n}}$$

seront généralement les mêmes que celles des expressions

$$\mathrm{w}^{n^{m-1}},\quad \mathrm{w}^{(-1)^m n^{m-1}}.$$

En partant de cette remarque, et raisonnant comme dans le cas où le terme général de la progression géométrique se réduisait à

$$A^{n^m},$$

on établira immédiatement les deux propositions suivantes :

Théorème III. — *Soit $m$ un nombre impair quelconque. La progression géométrique et de l'ordre $m$, qui a pour terme général la valeur de $u_n$ déterminée par l'équation*

$$u_n = kx^n y^{n^2} z^{n^3} \ldots v^{n^{m-1}} w^{n^m},$$

*étant prolongée indéfiniment dans les deux sens, offrira généralement deux modules, inverses l'un de l'autre, et sera par conséquent divergente, à moins que le module* w *de la variable $w$ ne se réduise à l'unité. La même progression, prolongée indéfiniment dans un seul sens à partir du terme*

$$u_0 = k,$$

*et réduite ainsi à l'une des séries*

$$k,\quad kxyz\ldots vw,\quad kx^2y^4z^8\ldots v^{2^{m-1}}w^{2^m},\quad kx^3y^9z^{27}\ldots v^{3^{m-1}}w^{3^m},\quad \ldots, \tag{8}$$

$$k,\quad kx^{-1}yz^{-1}\ldots vw^{-1},\quad kx^{-2}y^4z^{-8}\ldots v^{2^{m-1}}w^{-2^m},\quad kx^{-3}y^9z^{-27}\ldots v^{3^{m-1}}w^{-3^m},\quad \ldots, \tag{9}$$

*sera convergente, si le module du dernier des facteurs qui renferme le second terme reste inférieur à l'unité.*

En conséquence, $\mathrm{w}$ étant toujours le module de la variable $w$, la série (8) sera convergente si l'on a

$$\mathrm{w} < 1,$$

et la série (9) si l'on a

$$\mathrm{w}^{-1} < 1,$$

ou, ce qui revient au même,

$$\mathrm{w} > 1.$$

Au contraire, la série (8) sera divergente si l'on a

$$\mathrm{w} > 1,$$

et la série (9) si l'on a

$$\mathrm{w} < 1.$$

Théorème IV. — *Soit $m$ un nombre pair quelconque. La progression géométrique et de l'ordre $m$, qui a pour terme général*

$$u_n = kx^n y^{n^2} z^{n^3} \dots v^{n^{m-1}} w^{n^m},$$

*étant prolongée indéfiniment dans les deux sens, offrira deux modules égaux et sera convergente ou divergente, suivant que le module $\mathrm{w}$ de la variable $w$ sera inférieur ou supérieur à l'unité.*

Les théorèmes III et IV supposent que le module $\mathrm{w}$ de la variable $w$ diffère de l'unité. Si ce même module se réduisait précisément à l'unité, alors, pour savoir si la série dont $u_n$ représente le terme général est convergente ou divergente, il faudrait recourir à la considération des modules

$$\mathrm{v}, \quad \dots, \quad \mathrm{z}, \quad \mathrm{y}, \quad \mathrm{x}$$

des autres variables, ou plutôt à la considération du premier d'entre ces modules qui ne se réduirait pas à l'unité. En suivant cette marche, on établirait généralement la proposition suivante :

Théorème V. — *Soit $m$ un nombre entier quelconque, et nommons*

$$\mathrm{x}, \quad \mathrm{y}, \quad \mathrm{z}, \quad \dots, \quad \mathrm{v}, \quad \mathrm{w}$$



*les modules variables*

$$x, \quad y, \quad z, \quad \dots, \quad v, \quad w.$$

*Enfin, supposons que la progression géométrique, et de l'ordre $m$, qui a pour terme général*

$$u_n = kx^n y^{n^2} z^{n^3} \dots v^{n^{m-1}} w^{n^m},$$

*soit prolongée indéfiniment dans les deux sens. Cette progression sera convergente, si parmi les modules*

$$\mathrm{w}, \quad \mathrm{v}, \quad \dots, \quad \mathrm{z}, \quad \mathrm{y}, \quad \mathrm{x},$$

*le premier de ceux qui ne se réduisent pas à l'unité reste inférieur à l'unité et correspond à une variable dont l'exposant dans la formule (5) soit une puissance paire de $n$. La même progression sera divergente si l'une de ces deux conditions n'est pas remplie.*

Le théorème V entraîne immédiatement la proposition suivante :

Théorème VI. — *Soit $m$ un nombre impair et supérieur à l'unité. La progression géométrique et d'ordre impair, qui aura pour terme général*

$$kx^n y^{n^2} z^{n^3} \dots v^{n^{m-1}} w^{n^m},$$

*étant indéfiniment prolongée dans les deux sens, sera convergente si la dernière des variables*

$$x, \quad y, \quad z, \quad \dots, \quad v, \quad w$$

*offre un module $\mathrm{w} = 1$, et l'avant-dernière $v$ un module $\mathrm{v}$ inférieur à l'unité.*

Il suit des théorèmes IV et V que, parmi les progressions géométriques, celle du premier ordre est la seule qui, prolongée indéfiniment dans les deux sens, ne puisse jamais être convergente.

### III. — *Propriétés remarquables des progressions géométriques des divers ordres.*

Désignons par $m$ un nombre entier quelconque, et considérons une progression géométrique de l'ordre $m$, dont le terme général $u_n$ soit déterminé par la formule

$$(1)\qquad u_n = k x^n y^{n^2} z^{n^3} \ldots v^{n^{m-1}} w^{n^m}.$$

On aura

$$u_0 = k, \qquad u_1 = kxyz\ldots vw, \qquad \ldots,$$

et par suite

$$(2)\qquad \frac{u_n}{u_0} = x^n y^{n^2} z^{n^3} \ldots v^{n^{m-1}} w^{n^m}, \qquad \frac{u_{n+1}}{u_1} = \frac{x^{n+1} y^{(n+1)^2} z^{(n+1)^3} \ldots v^{(n+1)^{m-1}} w^{(n+1)^m}}{xyz\ldots vw},$$

puis on tirera de la dernière équation

$$(3)\qquad \frac{u_{n+1}}{u_1} = X^n Y^{n^2} Z^{n^3} \ldots V^{n^{m-1}} W^{n^m},$$

les nouvelles variables $X, Y, Z, \ldots, V, W$ étant liées aux variables $x, y, z, \ldots$ par les formules

$$(4)\qquad \begin{cases} X = x y^2 z^3 \ldots v^{m-1} w^m, \\ Y = y z^3 \ldots v^{\frac{(m-1)(m-2)}{2}} w^{\frac{m(m-1)}{2}}, \\ Z = z \ldots v^{\frac{(m-1)(m-2)(m-3)}{2.3}} w^{\frac{(m-1)(m-2)}{2.3}}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ V = v w^m, \\ W = w, \end{cases}$$

dans lesquelles les variables $x, y, z, \ldots, v, w$ se trouvent élevées à des puissances dont les exposants se confondent successivement avec les nombres figurés des divers ordres. Cela posé, on conclura des équations (2) et (3), qu'il suffit de remplacer les variables $x, y, z, \ldots, v, w$, par les variables $X, Y, Z, \ldots, V, W$ pour transformer le rapport

$$\frac{u_n}{u_0}$$

en une fonction nouvelle équivalente au rapport

$$\frac{u_{n+1}}{u_1}.$$

Considérons spécialement le cas où la progression géométrique est



convergente. Alors, de l'observation que nous venons de faire on déduira facilement les deux théorèmes dont je joins ici les énoncés.

Théorème I. — *Supposons que la série, ou plutôt la progression géométrique*

$$(5)\qquad \ldots,\ u_{-3},\ u_{-2},\ u_{-1},\ u_0,\ u_1,\ u_2,\ u_3,\ \ldots,$$

*dont le terme général $u_n$ est déterminé par la formule* (1), *reste convergente, tandis qu'on la prolonge indéfiniment dans les deux sens, et soit*

$$(6)\qquad s = \mathrm{f}(x, y, z, \ldots, v, w)$$

*la somme de cette même progression, en sorte qu'on ait*

$$(7)\qquad \mathrm{f}(x, y, z, \ldots, v, w) = \ldots + u_{-3} + u_{-2} + u_{-1} + u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + \ldots.$$

*Soient encore $X, Y, Z, \ldots, V, W$ de nouvelles variables liées aux variables $x, y, z, \ldots, v, w$ par les formules* (4). *La fonction $f(x, y, z, \ldots, v, w)$ se trouvera reproduite par la substitution des variables nouvelles $X, Y, Z, \ldots, V, W$ aux variables $x, y, z, \ldots, v, w$ et par l'adjonction du facteur*

$$\frac{u_1}{u_0} = xyz\ldots vw$$

*au résultat de cette substitution; et par conséquent la fonction $f(x, y, z, \ldots, v, w)$ vérifiera l'équation linéaire*

$$(8)\qquad \mathrm{f}(x, y, z, \ldots, v, w) = xyz\ldots vw\, \mathrm{f}(X, Y, Z, \ldots, V, W).$$

Théorème II. — *Les mêmes choses étant posées que dans le théorème I, la factorielle* P[1] *déterminée par l'équation*

$$(9)\qquad \mathrm{P} = \left(1 + \frac{u_1}{u_0}\right)\left(1 + \frac{u_2}{u_1}\right)\left(1 + \frac{u_3}{u_2}\right)\cdots\left(1 + \frac{u_{-1}}{u_0}\right)\left(1 + \frac{u_{-2}}{u_{-1}}\right)\left(1 + \frac{u_{-3}}{u_{-2}}\right)\cdots$$

*sera encore une fonction de $x, y, z, \ldots, v, w$, qui se trouvera reproduite par la substitution des variables $X, Y, Z, \ldots, V, W$ aux variables $x, y,$*

---

[1] Je suppose ici que, pour abréger, on désigne sous le nom de *factorielles* des produits composés d'un nombre fini ou infini de facteurs.

*$z, \ldots, v, w$, et par l'adjonction du facteur*

$$\frac{u_1}{u_0} = xyz\ldots vw$$

*au résultat de cette substitution.* Donc, si, pour plus de commodité, on désigne par

$$(10) \qquad P = F(x, y, z, \ldots, v, w)$$

la valeur de P que fournit l'équation (3), la fonction $F(x, y, z, \ldots, v, w)$ aura la propriété de vérifier l'équation linéaire

$$(11) \qquad F(x, y, z, \ldots, v, w) = xyz\ldots vw\, F(X, Y, Z, \ldots, V, W).$$

### IV. — *Nouvelles formules relatives aux progressions géométriques des divers ordres, et aux fonctions qui se reproduisent par substitution.*

Aux formules générales établies dans le paragraphe précédent, on peut en joindre quelques autres, qui méritent encore d'être remarquées, celles-ci se déduisent immédiatement de plusieurs nouveaux théorèmes relatifs aux fonctions qui se reproduisent par substitution. Ces nouveaux théorèmes peuvent s'énoncer comme il suit :

Théorème I. — *Concevons que l'indice n représente, au signe près, un nombre entier. Soit, de plus,*

$$u_n$$

*une fonction de l'indice n et des variables $x, y, z, \ldots$. Enfin, supposons que les divers valeurs de $u_n$, savoir,*

$$(1) \qquad \ldots,\ u_{-3},\ u_{-2},\ u_{-1},\ u_0,\ u_1,\ u_2,\ u_3,\ \ldots,$$

*forment une série convergente prolongée indéfiniment dans les deux sens. Si, en substituant aux variables $x, y, z, \ldots$ d'autres variables $X, Y, Z, \ldots$, qui soient des fonctions connues et déterminées des premières, on transforme généralement $u_n$ en $u_{n+1}$, alors la somme*

$$(2) \qquad s = \ldots + u_{-2} + u_{-1} + u_0 + u_1 + u_2 + \ldots$$

*de la série (1) sera une fonction de $x, y, z, \ldots$ qui se trouvera reproduite par la substitution dont il s'agit.*



*Démonstration.* — En effet, désignons, pour plus de commodité, par $f(x, y, z, \ldots)$ la somme $s$ de la série (1). On aura non seulement

$$f(x, y, z, \ldots) = \Sigma u_n,$$

la somme qu'indique le signe $\Sigma$ s'étendant à toutes les valeurs entières positives, nulles et négatives de $n$, mais encore, en vertu de l'hypothèse admise,

$$f(X, Y, Z, \ldots) = \Sigma u_{n+1};$$

et comme évidemment, $\Sigma u_{n+1}$ ne diffère pas de $\Sigma u_n$, on trouvera définitivement

$$(3) \qquad f(x, y, z, \ldots) = f(X, Y, Z, \ldots).$$

Théorème II. — *Les mêmes choses étant posées que dans le théorème précédent, la factorielle P déterminée par l'équation*

$$(4) \qquad P = \ldots(1 + u_{-2})(1 + u_{-1})(1 + u_0)(1 + u_1)(1 + u_2)\ldots$$

*sera encore une fonction de $x, y, z, \ldots$ qui se trouvera reproduite par la substitution des variables $X, Y, Z, \ldots$ aux variables $x, y, z, \ldots$.*

*Démonstration.* — En effet, représentons, pour plus de commodité, par $F(x, y, z, \ldots)$ la factorielle P. L'équation (4) donnera

$$F(x, y, z, \ldots) = \ldots(1 + u_{-2})(1 + u_{-1})(1 + u_0)(1 + u_1)(1 + u_2)\ldots;$$

puis on en conclura, en remplaçant $x, y, z, \ldots$ par $X, Y, Z, \ldots$,

$$F(X, Y, Z, \ldots) = \ldots(1 + u_{-1})(1 + u_0)(1 + u_1)(1 + u_2)(1 + u_3)\ldots;$$

et, par suite,

$$(5) \qquad F(x, y, z, \ldots) = F(X, Y, Z, \ldots).$$

Supposons maintenant que les deux modules de la série (1), prolongée indéfiniment dans les deux sens, soient, l'un inférieur, l'autre supérieur à l'unité; de sorte que, la série (1) étant divergente, les deux séries

$$u_0,\ u_1,\ u_2,\ u_3,\ \ldots,$$
$$\frac{1}{u_{-1}},\ \frac{1}{u_{-2}},\ \frac{1}{u_{-3}},\ \ldots,$$

soient l'une et l'autre convergentes. Alors, à la place du théorème II, on obtiendra évidemment la proposition suivante :

Théorème III. — *Supposons que la série* (1), *qui a pour terme général* $u_n$, *étant prolongée indéfiniment dans les deux sens, les deux modules de cette série qui correspondent, l'un à des valeurs positives, l'autre à des valeurs négatives de l'indice n, soient, le premier inférieur, le second supérieur à l'unité. Si, en substituant aux variables* $x, y, z, \ldots$ *d'autres variables* $X, Y, Z, \ldots$ *qui soient des fonctions connues des premières, on transforme généralement* $u_m$ *en* $u_{n+1}$, *alors la factorielle* P *déterminée par l'équation*

$$P = \ldots\left(1+\frac{1}{u_{-2}}\right)\left(1+\frac{1}{u_{-1}}\right)(1+u_0)(1+u_1)(1+u_2)\ldots \tag{6}$$

*sera une fonction de* $x, y, z, \ldots$ *qui se trouvera reproduite par la substitution des variables* $X, Y, Z, \ldots$ *aux variables* $x, y, z, \ldots$ *et par l'adjonction du facteur* $u_0$ *au résultat de cette substitution même.*

*Démonstration.* — En effet, représentons, pour plus de commodité, par $F(x, y, z, \ldots)$ la factorielle P. L'équation (6) donnera

$$F(x, y, z, \ldots) = \ldots\left(1+\frac{1}{u_{-2}}\right)\left(1+\frac{1}{u_{-1}}\right)(1+u_0)(1+u_1)(1+u_2)\ldots,$$

puis on en tirera, en remplaçant $x, y, z, \ldots$ par $X, Y, Z, \ldots$,

$$F(X, Y, Z, \ldots) = \ldots\left(1+\frac{1}{u_{-1}}\right)\left(1+\frac{1}{u_0}\right)(1+u_1)(1+u_2)(1+u_3)\ldots,$$

et par suite

$$F(x, y, z, \ldots) = u_0 F(X, Y, Z, \ldots). \tag{7}$$

Considérons maintenant une progression géométrique, et de l'ordre $m$, dont le terme général $u_n$, correspondant à l'indice $n$, soit déterminé par une équation de la forme

$$u_n = xy^n z^{n^2}\ldots v^{n^{m-1}} w^{n^m}. \tag{8}$$

On tirera de cette équation

$$u_{n+1} = XY^n Z^{n^2}\ldots V^{n^{m-1}} W^{n^m}, \tag{9}$$



les valeurs des variables

$$X,\ Y,\ Z,\ \ldots,\ V,\ W$$

étant liées à celles des variables

$$x,\ y,\ z,\ \ldots,\ v,\ w$$

par les formules

$$\left\{\begin{aligned} X &= xyz\ldots vw,\\ Y &= xy^2z^3\ldots v^{m-1}w^m,\\ Z &= xy^3z^6\ldots v^{\frac{(m-1)(m-2)}{2}} w^{\frac{m(m-1)}{2}},\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\ V &= vw^m,\\ W &= w. \end{aligned}\right. \tag{10}$$

Cela posé, on déduira évidemment des théorèmes I, II et III les propositions suivantes :

Théorème IV. — *Supposons que la progression géométrique et de l'ordre m, qui a pour terme général*

$$u_n = xy^n z^{n^2}\ldots v^{n^{m-1}} w^{n^m},$$

*reste convergente, dans le cas où elle est indéfiniment prolongée dans les deux sens; et soit*

$$s = f(x, y, z, \ldots, v, w)$$

*la somme de cette progression géométrique. Alors, en nommant* $X, Y, Z, \ldots$ *des variables nouvelles liées aux variables* $x, y, z, \ldots$ *par la formule* (10), *on aura*

$$f(x, y, z, \ldots, v, w) = f(X, Y, Z, \ldots, V, W). \tag{11}$$

Théorème V. — *Les mêmes choses étant posées que dans le théorème précédent, si l'on représente par*

$$F(x, y, z, \ldots, v, w)$$

*la factorielle*

$$\ldots(1+u_{-2})(1+u_{-1})(1+u_0)(1+u_1)(1+u_2)\ldots$$

*on aura encore*

$$F(x, y, z, \ldots, v, w) = F(X, Y, Z, \ldots, V, W). \tag{12}$$

Théorème VI. — *Supposons que, la progression géométrique et de l'ordre m, qui a pour terme général*

$$u_n = xy^n z^{n^2} \dots v^{n^{m-1}} w^{n^m},$$

*étant prolongée indéfiniment dans les deux sens, les deux modules de cette progression, qui correspondent, l'un à des valeurs positives, l'autre à des valeurs négatives de n, soient, le premier inférieur, le second supérieur à l'unité. Alors, en nommant X, Y, Z, ... des variables nouvelles liées aux variables x, y, z, ... par les formules* (10), *et en désignant par* $F(x, y, z, \dots, v, w)$ *la factorielle*

$$\left(1 + \frac{1}{u_{-2}}\right)\left(1 + \frac{1}{u_{-1}}\right)(1 + u_0)(1 + u_1)(1 + u_2)\dots,$$

*on trouvera*

$$F(x, y, z, \dots, v, w) = u_0 F(X, Y, Z, \dots, V, W).$$

Dans le cas particulier où les progressions que l'on considère sont du second ordre, les divers théorèmes que nous venons d'énoncer, joints aux propositions fondamentales du calcul des résidus, fournissent le moyen d'établir un grand nombre de formules dignes de remarque, et relatives aux fonctions elliptiques. Si l'on suppose, au contraire, qu'il s'agisse de progressions géométriques d'un ordre supérieur au second, alors, à la place des formules qui se rapportent à la théorie des fonctions elliptiques, on obtiendra des formules plus générales que je développerai dans d'autres Mémoires.

---

# MÉMOIRE

SUR

# LE CHANGEMENT DES VARIABLES

## DANS LES INTÉGRALES

### I. — *Considérations générales.*

Considérons d'abord une intégrale simple ou de la forme

$$\mathcal{S} = \int_{x'}^{x''} \Omega \, dx, \tag{1}$$

$x$ étant une variable réelle et $\Omega$ une fonction réelle de $x$, qui demeure continue entre les limites $x = x'$, $x = x''$. Supposons d'ailleurs que dans cette intégrale on veuille substituer à la variable $x$ une nouvelle variable $\mathrm{x}$ liée à $x$ par une certaine équation

$$\mathcal{X} = 0; \tag{2}$$

et soient $\mathrm{x}'$, $\mathrm{x}''$ les deux valeurs de $\mathrm{x}$ correspondantes aux valeurs $x'$, $x''$ de $x$. On aura, en regardant $x$ comme fonction de $\mathrm{x}$,

$$dx = D_{\mathrm{x}} x \, d\mathrm{x};$$

puis on en conclura

$$\int_{x'}^{x''} \Omega \, dx = \int_{\mathrm{x}'}^{\mathrm{x}''} \Omega \, D_{\mathrm{x}} x \, d\mathrm{x}, \tag{3}$$

pourvu que, en vertu de l'équation (2), chacune des variables $x$, $\mathrm{x}$ reste fonction continue de l'autre, du moins entre les limites de l'intégration, c'est-à-dire pourvu qu'entre ces limites les deux quantités $x$, $\mathrm{x}$ varient simultanément par degrés insensibles, et que, pour des valeurs croissantes de l'une, l'autre soit toujours croissante ou décroissante. On aura donc, sous cette condition,

$$\mathcal{S} = \int_{\mathrm{x}'}^{\mathrm{x}''} \Omega \mathrm{D}_{\mathrm{x}} x \, d\mathrm{x}; \tag{4}$$

et alors, pour substituer, dans l'intégrale proposée $\mathcal{S}$, la variable $\mathrm{x}$ à la variable $x$, il suffira, 1° de remplacer $dx$ par $d\mathrm{x}$, en multipliant la fonction sous le signe $\int$ par le facteur $\mathrm{D}_{\mathrm{x}} x$; 2° de substituer aux limites données de la variable $x$ les limites correspondantes de la nouvelle variable $\mathrm{x}$.

Si la condition énoncée n'était pas remplie, il deviendrait nécessaire, avant d'effectuer le changement de variable, de décomposer l'intégrale donnée $\mathcal{S}$ en plusieurs parties, pour chacune desquelles cette condition se vérifierait. Alors l'intégrale $\mathcal{S}$, relative à la variable $x$, se trouverait remplacée, non plus par une seule, mais par plusieurs intégrales relatives à la nouvelle variable $\mathrm{x}$, et serait équivalente à la somme de ces dernières intégrales.

Il importe d'observer que, dans le second membre de la formule (3) ou (4), $x$ est considérée comme une fonction de $\mathrm{x}$ complètement déterminée en vertu de l'équation (2). Si, pour chaque valeur réelle de $\mathrm{x}$, l'équation (2) fournissait plusieurs valeurs réelles de $x$, on devrait se borner à considérer une seule de ces dernières.

La substitution de $\mathrm{x}$ à $x$ ne pourrait plus avoir lieu si à une valeur de $x$ comprise entre les limites $x'$, $x''$ ne correspondait pas toujours, en vertu de l'équation (2), au moins une valeur réelle de $\mathrm{x}$.

Observons encore que, si l'on suppose $x' < x''$, le facteur $\mathrm{D}_{\mathrm{x}} x$ sera, dans la formule (3) ou (4), une quantité affectée du même signe que la différence $\mathrm{x}'' - \mathrm{x}'$. Donc, si l'on désigne par $a$ la plus petite et par $b$ la plus grande des deux quantités $\mathrm{x}'$, $\mathrm{x}''$, si d'ailleurs on nomme $\Theta$ la valeur numérique de $\mathrm{D}_{\mathrm{x}} x$, en sorte qu'on ait

$$\Theta = \sqrt{(\mathrm{D}_{\mathrm{x}} x)^2}, \tag{5}$$



on trouvera

$$\int_{\mathrm{x}'}^{\mathrm{x}''} \Omega \mathrm{D}_{\mathrm{x}} x \, d\mathrm{x} = \int_a^b \Omega \Theta \, d\mathrm{x},$$

et l'équation (4) pourra être remplacée par celle-ci :

$$\mathcal{S} = \int_a^b \Omega \Theta \, d\mathrm{x}. \tag{6}$$

Considérons maintenant une intégrale multiple de la forme

$$\mathcal{S} = \int_{x'}^{x''} \int_{y'}^{y''} \int_{z'}^{z''} \cdots \int_{u'}^{u''} \int_{v'}^{v''} \int_{w'}^{w''} \Omega \, dw \, dv \, du \ldots dz \, dy \, dx, \tag{7}$$

$\Omega$ étant une fonction réelle et continue des $n$ variables réelles $x$, $y$, $z$, ..., $u$, $v$, $w$, et les limites de chaque intégration pouvant dépendre des variables auxquelles se rapportent les intégrations suivantes. Alors, les limites $x'$, $x''$ étant des quantités constantes, les limites $y'$, $y''$ pourront être fonctions de $x$, les limites $z'$, $z''$ fonctions de $x$, $y$, ... les limites $w'$, $w''$ fonctions de $x$, $y$, $z$, ..., $u$, $v$. D'ailleurs, l'intégrale $\mathcal{S}$ demeurant la même, au signe près, quand on échange entre elles les deux limites assignées à une même variable, par exemple $x'$ et $x''$, ou $y'$ et $y''$, ..., ou enfin $w'$ et $w''$, on pourra se borner à considérer le cas où $x'$ serait inférieur à $x''$, $y'$ à $y''$, $z'$ à $z''$, ..., $w'$ à $w''$; et il est clair que, dans ce cas, $\mathcal{S}$ pourra être regardée comme une somme d'éléments infiniment petits correspondant aux divers systèmes de valeurs de $x$, $y$, $z$, ..., qui vérifieront simultanément les conditions

$$\begin{cases} x > x', & y > y', & z > z', & \ldots, & u > u', & v > v', & w > w', \\ x < x'', & y < y'', & z < z'', & \ldots, & u < u'', & v < v'', & w < w''. \end{cases} \tag{8}$$

Si les variables $x$, $y$, $z$, ... se réduisent à une seule, ou à deux, ou à trois, ..., et représentent des coordonnées rectilignes, ou polaires, ou de toute autre nature, alors les divers systèmes des valeurs de $x$, $y$, $z$, ..., pour lesquels les conditions (8) seront vérifiées, correspondront à des points situés sur une certaine ligne ou sur une certaine surface, ou renfermés dans un certain volume, par conséquent à des points compris dans un certain *lieu géométrique;* et l'intégrale $\mathcal{S}$ sera complètement déterminée quand on connaîtra ce lieu géométrique avec la fonction $\Omega$. Si le nombre des variables $x, y, z, \ldots, u, v, w$ devient supérieur à 3, les divers systèmes des valeurs de $x, y, z, \ldots, u, v, w$, pour lesquels se vérifieront les conditions (8), n'appartiendront plus à un lieu géométrique, mais à ce que nous appellerons un *lieu analytique*, et l'intégrale $\mathcal{S}$ sera encore une intégrale multiple complètement déterminée, quand on connaîtra ce lieu analytique avec la fonction $\Omega$. Cela posé, on reconnaîtra sans peine qu'à l'intégrale $\mathcal{S}$ on peut substituer une intégrale ou une somme d'intégrales de même forme, mais dans lesquelles l'ordre des intégrations ne serait plus le même, pourvu que l'on remplace les conditions (8) par d'autres conditions du même genre, mais de nature telle, que les divers systèmes de valeurs $x, y, z, \ldots, u, v, w$, correspondants aux divers éléments des intégrales nouvelles, se réduisent aux divers systèmes de valeurs de $x, y, z, \ldots, u, v, w$, propres à vérifier les conditions (8), c'est-à-dire, en d'autres termes, pourvu que les lieux analytiques correspondants aux nouvelles intégrales, étant réunis les uns aux autres, reproduisent ensemble le lieu analytique correspondant à l'intégrale $\mathcal{S}$. En joignant à ce principe les règles ci-dessus rappelées et relatives au changement de variable dans les intégrales simples, on pourra changer aussi les variables que renferme une intégrale multiple. On pourra, par exemple, dans l'intégrale $\mathcal{S}$, substituer aux variables $x, y, z, \ldots, u, v, w$ des variables nouvelles $\mathrm{x}, \mathrm{y}, \mathrm{z}, \ldots, \mathrm{u}, \mathrm{v}, \mathrm{w}$, liées aux premières par un système d'équations données

$$(9)\qquad \mathrm{X}=0,\qquad \mathrm{Y}=0,\qquad \mathrm{Z}=0,\qquad \ldots,\qquad \mathrm{U}=0,\qquad \mathrm{V}=0,\qquad \mathrm{W}=0.$$

Entrons à ce sujet dans quelques détails.

J'observe d'abord que les valeurs de $x, y, z, \ldots, u, v, w$, tirées des équations (9), devront être réduites à des fonctions réelles continues et déterminées de $\mathrm{x}, \mathrm{y}, \mathrm{z}, \ldots, \mathrm{u}, \mathrm{v}, \mathrm{w}$, du moins entre les limites indiquées par les lieux analytiques correspondants aux intégrales nouvelles. Si, pour chaque système de valeurs réelles de $\mathrm{x}, \mathrm{y}, \mathrm{z}, \ldots, \mathrm{u}, \mathrm{v}, \mathrm{w}$, les équations (9) fournissaient plusieurs systèmes de valeurs réelles de $x, y, z, \ldots, u, v, w$, on devrait se borner à considérer un seul de ces derniers systèmes.



La substitution des variables $\mathrm{x}, \mathrm{y}, \mathrm{z}, \ldots, \mathrm{u}, \mathrm{v}, \mathrm{w}$ aux variables $x, y, z, \ldots, u, v, w$ ne pourrait plus avoir lieu si, à un système de valeurs de $x, y, z, \ldots, u, v, w$, comprises entre les lignes des intégrations, ne correspondait pas toujours, en vertu des formules (9), au moins un système de valeurs réelles de $\mathrm{x}, \mathrm{y}, \mathrm{z}, \ldots, \mathrm{u}, \mathrm{v}, \mathrm{w}$.

D'ailleurs, la substitution des variables nouvelles $\mathrm{x}, \mathrm{y}, \mathrm{z}, \ldots, \mathrm{u}, \mathrm{v}, \mathrm{w}$ aux variables anciennes $x, y, z, \ldots, u, v, w$, sera une opération complexe, décomposable en plusieurs autres, dans chacune desquelles une seule des variables nouvelles sera substituée à l'une des anciennes; et puisqu'on peut toujours, sans altérer la fonction sous le signe $\int$, intervertir l'ordre des intégrations relatives à des variables données, on pourra supposer, dans chaque opération particulière, que la variable ancienne à laquelle on substitue une variable nouvelle est précisément celle à laquelle se rapporte la première intégration. Donc chaque opération particulière se réduira toujours à un changement de variable dans une intégrale simple, c'est-à-dire à une opération en vertu de laquelle la fonction sous le signe $\int$ se trouvera multipliée par un certain facteur. Ajoutons que ce facteur sera toujours positif si dans chaque intégrale nouvelle, aussi bien que dans l'intégrale $\mathcal{S}$, l'intégration relative à chaque variable s'effectue entre deux limites, dont la seconde surpasse la première.

Cela posé, concevons qu'en opérant, comme on vient de le dire, sur l'intégrale $\mathcal{S}$, on substitue successivement la variable nouvelle $\mathrm{w}$ à la variable $w$, puis la variable nouvelle $\mathrm{v}$ à la variable $v$, puis la variable nouvelle $\mathrm{u}$ à la variable $u, \ldots$, puis enfin la variable nouvelle $\mathrm{x}$ à la variable $x$. Lorsque dans l'intégrale $\mathcal{S}$, relative aux variables $x, y, z, \ldots, u, v, w$, on substituera $\mathrm{w}$ à $w$, on devra laisser invariables $x, y, z, \ldots$. D'ailleurs, considérant $x, y, z, \ldots, u, v, w$ comme des fonctions déterminées de $\mathrm{x}, \mathrm{y}, \mathrm{z}, \ldots, \mathrm{u}, \mathrm{v}, \mathrm{w}$, on a généralement

$$\begin{aligned}
dx &= D_{\mathrm{x}} x\, d\mathrm{x} + D_{\mathrm{y}} x\, d\mathrm{y} + \ldots + D_{\mathrm{v}} x\, d\mathrm{v} + D_{\mathrm{w}} x\, d\mathrm{w},\\
dy &= D_{\mathrm{x}} y\, d\mathrm{x} + D_{\mathrm{y}} y\, d\mathrm{y} + \ldots + D_{\mathrm{v}} y\, d\mathrm{v} + D_{\mathrm{w}} y\, d\mathrm{w},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
dv &= D_{\mathrm{x}} v\, d\mathrm{x} + D_{\mathrm{y}} v\, d\mathrm{y} + \ldots + D_{\mathrm{v}} v\, d\mathrm{v} + D_{\mathrm{w}} v\, d\mathrm{w},\\
dw &= D_{\mathrm{x}} w\, d\mathrm{x} + D_{\mathrm{y}} w\, d\mathrm{y} + \ldots + D_{\mathrm{v}} w\, d\mathrm{v} + D_{\mathrm{w}} w\, d\mathrm{w}.
\end{aligned}$$

Donc, si l'on se borne à faire varier $w$ avec $\mathrm{x}, \mathrm{y}, \mathrm{z}, \ldots, \mathrm{u}, \mathrm{v}, \mathrm{w}$, en laissant $x, y, z, \ldots, u, v, w$ invariables, on trouvera

$$\begin{aligned}
0 &= D_{\mathrm{x}} x\, d\mathrm{x} + D_{\mathrm{y}} x\, d\mathrm{y} + \ldots + D_{\mathrm{v}} x\, d\mathrm{v} + D_{\mathrm{w}} x\, d\mathrm{w},\\
0 &= D_{\mathrm{x}} y\, d\mathrm{x} + D_{\mathrm{y}} y\, d\mathrm{y} + \ldots + D_{\mathrm{v}} y\, d\mathrm{v} + D_{\mathrm{w}} y\, d\mathrm{w},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
0 &= D_{\mathrm{x}} v\, d\mathrm{x} + D_{\mathrm{y}} v\, d\mathrm{y} + \ldots + D_{\mathrm{v}} v\, d\mathrm{v} + D_{\mathrm{w}} v\, d\mathrm{w},\\
dw &= D_{\mathrm{x}} w\, d\mathrm{x} + D_{\mathrm{y}} w\, d\mathrm{y} + \ldots + D_{\mathrm{v}} w\, d\mathrm{v} + D_{\mathrm{w}} w\, d\mathrm{w},
\end{aligned}$$

et l'on en conclura

$$dw = \frac{S(\pm D_{\mathrm{x}} x\, D_{\mathrm{y}} y \ldots D_{\mathrm{v}} v\, D_{\mathrm{w}} w)}{S(\pm D_{\mathrm{x}} x\, D_{\mathrm{y}} y \ldots D_{\mathrm{v}} v)}\, d\mathrm{w}. \tag{10}$$

Donc le facteur positif par lequel on devra multiplier la fonction sous le signe $\int$, quand on substituera $\mathrm{w}$ à $w$ et $d\mathrm{w}$ à $dw$, ne sera autre chose que la valeur numérique du rapport

$$\frac{S(\pm D_{\mathrm{x}} x\, D_{\mathrm{y}} y \ldots D_{\mathrm{v}} v\, D_{\mathrm{w}} w}{S(\pm D_{\mathrm{x}} x\, D_{\mathrm{y}} y \ldots D_{\mathrm{v}} v)}.$$

D'autre part, lorsqu'après avoir substitué $\mathrm{w}$ à $w$, on voudra substituer encore $\mathrm{v}$ à $v$ et $d\mathrm{v}$ à $dv$, en considérant $v$ comme la variable à laquelle se rapporterait la première intégration, on devra se borner à faire varier $v$ avec $\mathrm{x}, \mathrm{y}, \mathrm{z}, \ldots, \mathrm{u}, \mathrm{v}$, en laissant invariables $x, y, z, \ldots, u$ et $w$. Donc alors le rapport de $dv$ à $d\mathrm{v}$ sera déterminé par les équations

$$\begin{aligned}
0 &= D_{\mathrm{x}} x\, d\mathrm{x} + D_{\mathrm{y}} x\, d\mathrm{y} + \ldots + D_{\mathrm{v}} x\, d\mathrm{v},\\
0 &= D_{\mathrm{x}} y\, d\mathrm{x} + D_{\mathrm{y}} y\, d\mathrm{y} + \ldots + D_{\mathrm{v}} y\, d\mathrm{v},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
0 &= D_{\mathrm{x}} u\, d\mathrm{x} + D_{\mathrm{y}} u\, d\mathrm{y} + \ldots + D_{\mathrm{v}} u\, d\mathrm{v},\\
dv &= D_{\mathrm{x}} v\, d\mathrm{x} + D_{\mathrm{y}} v\, d\mathrm{y} + \ldots + D_{\mathrm{v}} v\, d\mathrm{v},
\end{aligned}$$



desquelles on tirera

$$dv = \frac{S(\pm D_{\mathrm{x}} x\, D_{\mathrm{y}} y \ldots D_{\mathrm{u}} u\, D_{\mathrm{v}} v)}{S(\pm D_{\mathrm{x}} x\, D_{\mathrm{y}} y \ldots D_{\mathrm{u}} u)}\, d\mathrm{v}. \tag{11}$$

Donc le facteur positif par lequel on devra multiplier la fonction sous le signe $\int$, quand on substituera $\mathrm{v}$ à $v$, ne sera autre chose que la valeur numérique du rapport

$$\frac{S(\pm D_{\mathrm{x}} x\, D_{\mathrm{y}} y \ldots D_{\mathrm{u}} u\, D_{\mathrm{v}} v)}{S(\pm D_{\mathrm{x}} x\, D_{\mathrm{y}} y \ldots D_{\mathrm{u}} u)}.$$

En continuant ainsi, et désignant par

$$\Theta,\quad \Theta',\quad \ldots,\quad \Theta^{(n-2)},\quad \Theta^{(n-1)}$$

les valeurs numériques des résultantes

$$S(\pm D_{\mathrm{x}} x\, D_{\mathrm{y}} y \ldots D_{\mathrm{v}} v\, D_{\mathrm{w}} w),\quad S(\pm D_{\mathrm{x}} x\, D_{\mathrm{y}} y \ldots D_{\mathrm{v}} v),\quad \ldots,\quad S(\pm D_{\mathrm{x}} x\, D_{\mathrm{y}} y),\quad D_{\mathrm{x}} x,$$

on conclura définitivement que si, dans l'intégrale $\mathfrak{S}$, on substitue successivement $\mathrm{w}$ à $w$, puis $\mathrm{v}$ à $v$, $\ldots$, puis $\mathrm{y}$ à $y$, puis enfin $\mathrm{x}$ à $x$, les facteurs positifs par lesquels la fonction sous le signe $\int$ devra être successivement multipliée se réduiront aux rapports

$$\frac{\Theta}{\Theta'},\quad \frac{\Theta'}{\Theta''},\quad \ldots,\quad \frac{\Theta^{(n-2)}}{\Theta^{(n-1)}},\quad \Theta^{(n-1)}.$$

Donc le facteur $\Theta$ équivalent au produit de tous ces rapports sera le facteur positif par lequel la fonction sous le signe $\int$ se trouvera définitivement multipliée, quand on aura substitué aux anciennes variables $x, y, z, \ldots, u, v, w$ les variables nouvelles $\mathrm{x}, \mathrm{y}, \mathrm{z}, \ldots, \mathrm{u}, \mathrm{v}, \mathrm{w}$; et l'on peut énoncer la proposition suivante :

Théorème I. — *Concevons que, dans l'intégrale multiple*

$$\mathfrak{S} = \int_{x'}^{x''} \int_{y'}^{y''} \int_{z'}^{z''} \cdots \int_{u'}^{u''} \int_{v'}^{v''} \int_{w'}^{w''} \Omega\, dw\, dv\, du \ldots dz\, dy\, dx;$$

*$\Omega$ désigne une fonction réelle de $n$ variables réelles $x, y, z, \ldots, u, v, w$,*

*prises chacune entre deux limites dont la seconde surpasse la première ; les deux limites de chaque variable pouvant d'ailleurs dépendre des variables auxquelles se rapportent les intégrations non encore effectuées. Si aux variables $x, y, z, \ldots, u, v, w$ on veut substituer $n$ variables nouvelles* $\mathrm{x}, \mathrm{y}, \mathrm{z}, \ldots, \mathrm{u}, \mathrm{v}, \mathrm{w}$, *dont les premières soient des fonctions déterminées, on devra, en remplaçant dans l'intégrale proposée $dx, dy, dz, \ldots, du, dv, dw$ par* $d\mathrm{x}, d\mathrm{y}, d\mathrm{z}, \ldots, d\mathrm{u}, d\mathrm{v}, d\mathrm{w}$, *multiplier la fonction sous le signe $\int$ par la valeur numérique $\Theta$ de la résultante*

$$S(\pm D_{\mathrm{x}}x\, D_{\mathrm{y}}y\, D_{\mathrm{z}}z \ldots D_{\mathrm{u}}u\, D_{\mathrm{v}}v\, D_{\mathrm{w}}w), \tag{12}$$

*formée avec les divers termes du tableau*

$$\left\{\begin{array}{lllll} D_{\mathrm{x}}x, & D_{\mathrm{y}}x, & D_{\mathrm{z}}x, & \ldots, & D_{\mathrm{w}}x, \\ D_{\mathrm{x}}y, & D_{\mathrm{y}}y, & D_{\mathrm{z}}y, & \ldots, & D_{\mathrm{w}}y, \\ D_{\mathrm{x}}z, & D_{\mathrm{y}}z, & D_{\mathrm{z}}z, & \ldots, & D_{\mathrm{w}}z, \\ \ldots, & \ldots, & \ldots, & \ldots, & \ldots, \\ D_{\mathrm{x}}w, & D_{\mathrm{y}}w, & D_{\mathrm{z}}w, & \ldots, & D_{\mathrm{w}}w, \end{array}\right. \tag{13}$$

*puis égaler l'intégrale proposée à une intégrale ou à une somme d'intégrales de la forme*

$$\iiint \cdots \iiint \Omega\Theta\, d\mathrm{w}\, d\mathrm{v}\, d\mathrm{u} \ldots d\mathrm{z}\, d\mathrm{y}\, d\mathrm{x}, \tag{14}$$

*en choisissant les limites des intégrations de telle sorte que chaque variable croisse quand elle passe de la première limite à la seconde, et que les lieux analytiques correspondants aux intégrales nouvelles reproduisent le lieu analytique correspondant à l'intégrale donnée.* On peut encore exprimer cette dernière condition en disant que les divers systèmes de valeurs de $x, y, z, \ldots, u, v, w$ correspondants aux divers éléments des nouvelles intégrales, doivent se réduire précisément aux divers systèmes pour lesquels se vérifient les conditions (8).

Le théorème précédent comprend les règles établies par les géomètres, spécialement par Lagrange et par M. Jacobi pour le changement des variables dans les intégrales multiples.

Lorsque les variables anciennes $x, y, z, \ldots, u, v, w$ s'expriment



en fonction des variables nouvelles $\mathrm{x}, \mathrm{y}, \mathrm{z}, \ldots, \mathrm{u}, \mathrm{v}, \mathrm{w}$, de telle sorte que de celles-ci la dernière seulement entre dans $w$, les deux dernières seulement dans $v$, les trois dernières seulement dans $u$, etc., alors les formules (10), (11), etc., se réduisent évidemment aux suivantes :

$$dw = D_{\mathrm{w}}w\, d\mathrm{w}, \qquad dv = D_{\mathrm{v}}v\, d\mathrm{v}, \qquad \ldots, \qquad dx = D_{\mathrm{x}}x\, d\mathrm{x},$$

et, en conséquence, le facteur $\Theta$, par lequel on doit multiplier la fonction sous le signe $\int$, quand on substitue les nouvelles variables aux anciennes, se réduit à la valeur numérique du produit

$$D_{\mathrm{x}}x\, D_{\mathrm{y}}y\, D\; z \ldots D_{\mathrm{u}}u\, D_{\mathrm{v}}v\, D_{\mathrm{w}}w. \tag{15}$$

On arriverait à la même conclusion en observant que, dans l'hypothèse admise, le tableau (13) se réduit au suivant :

$$\left\{\begin{array}{lllll} D_{\mathrm{x}}x, & D_{\mathrm{y}}x, & D_{\mathrm{z}}x, & \ldots, & D_{\mathrm{w}}x, \\ 0, & D_{\mathrm{y}}y, & D_{\mathrm{z}}y, & \ldots, & D_{\mathrm{w}}y, \\ 0, & 0, & D_{\mathrm{z}}z, & \ldots, & D_{\mathrm{w}}z, \\ ., & ., & \ldots, & \ldots, & \ldots, \\ 0, & 0, & 0, & \ldots, & D_{\mathrm{w}}w, \end{array}\right. \tag{16}$$

et la résultante

$$S(\pm D_{\mathrm{x}}x\, D_{\mathrm{y}}y\, D_{\mathrm{z}}z \ldots D_{\mathrm{u}}u\, D_{\mathrm{v}}v\, D_{\mathrm{w}}w)$$

au seul terme

$$D_{\mathrm{x}}x\, D_{\mathrm{y}}y\, D_{\mathrm{z}}z \ldots D_{\mathrm{u}}u\, D_{\mathrm{v}}v\, D_{\mathrm{w}}w.$$

Ajoutons que la même résultante se réduirait encore à ce terme unique si le tableau (13) se réduisait au suivant :

$$\left\{\begin{array}{lllll} D_{\mathrm{x}}x, & 0, & 0, & \ldots, & 0, \\ D_{\mathrm{x}}y, & D_{\mathrm{y}}y, & 0, & \ldots, & 0, \\ D_{\mathrm{x}}z, & D_{\mathrm{y}}z, & D_{\mathrm{z}}z, & \ldots, & 0, \\ \ldots, & \ldots, & \ldots, & \ldots, & ., \\ D_{\mathrm{x}}w, & D_{\mathrm{y}}w, & D_{\mathrm{z}}w, & \ldots, & D_{\mathrm{w}}w, \end{array}\right. \tag{17}$$

c'est-à-dire, si des anciennes variables, exprimées en fonction des nouvelles, la première $x$ renfermait $\mathrm{x}$ seulement, tandis que $\mathrm{x}$ et $\mathrm{y}$ seules entreraient dans $y$ ; $\mathrm{x}$, $\mathrm{y}$ et $\mathrm{z}$ seules dans $z$, etc. On peut donc énoncer encore la proposition suivante :

Théorème II. — *Les mêmes choses étant posées que dans le théorème I, si d'ailleurs les valeurs de $x, y, z, \ldots, u, v, w$, exprimées en fonction des variables nouvelles $\mathrm{x}, \mathrm{y}, \mathrm{z}, \ldots, \mathrm{u}, \mathrm{v}, \mathrm{w}$, renferment seulement, la première, la variable $\mathrm{x}$; la deuxième, les deux variables $\mathrm{x}, \mathrm{y}$; la troisième, les trois variables $\mathrm{x}, \mathrm{y}, \mathrm{z}$; etc.; alors le facteur positif $\Theta$, par lequel on devra multiplier la fonction sous le signe $\int$, quand on substituera les nouvelles variables aux anciennes, se réduira simplement à la valeur numérique du produit*

$$D_{\mathrm{x}} x\, D_{\mathrm{y}} y\, D_{\mathrm{z}} z \ldots D_{\mathrm{u}} u\, D_{\mathrm{v}} v\, D_{\mathrm{w}} w.$$

Remarquons encore que, dans le cas particulier où les variables $x, y, z, \ldots, u, v, w$ sont liées par des équations linéaires aux variables nouvelles $\mathrm{x}, \mathrm{y}, \mathrm{z}, \ldots, \mathrm{u}, \mathrm{v}, \mathrm{w}$, le facteur $\Theta$ se réduit évidemment à une quantité constante.

Remarquons enfin que les principes ci-dessus exposés entraînent la proposition suivante :

Théorème III. — *Si la fonction placée sous le signe $\int$, dans une intégrale multiple relative aux variables $x, y, z, \ldots, u, v, w$, doit être multipliée par le facteur $\Theta$ quand on substitue au système $x, y, z, \ldots, u, v, w$ un autre système $\mathrm{x}, \mathrm{y}, \mathrm{z}, \ldots, \mathrm{u}, \mathrm{v}, \mathrm{w}$, et par $\Theta'$ quand on substitue au second système $\mathrm{x}, \mathrm{y}, \mathrm{z}, \ldots, \mathrm{u}, \mathrm{v}, \mathrm{w}$, un troisième système $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}, \ldots, \mathfrak{u}, \mathfrak{v}, \mathfrak{w}$, cette même fonction devra être multipliée par le produit $\Theta\Theta'$ quand on passera directement du premier système $x, y, z, \ldots, u, v, w$ au troisième système $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}, \ldots, \mathfrak{u}, \mathfrak{v}, \mathfrak{w}$.*

D'ailleurs ce théorème, ainsi que les précédents, continuerait évidemment de subsister, si plusieurs variables appartenaient à la fois aux divers systèmes que l'on considère.

## II. — *Applications diverses des principes exposés dans le premier paragraphe.*

Pour montrer une application des principes établis dans le paragraphe I, supposons que, $\Omega$ étant une fonction réelle de $n$ variables



réelles $x, y, z, \ldots, u, v, w$, et $r$ une autre variable, réelle et positive, liée aux premières par la formule

$$x^2 + y^2 + z^2 + \ldots + u^2 + v^2 + w^2 = r^2, \tag{1}$$

on étende l'intégrale

$$\mathcal{S} = \iiint \cdots \iiint \Omega\, dw\, dv\, du \ldots dz\, dy\, dx \tag{2}$$

à tous les systèmes des valeurs de $x, y, z, \ldots, u, v, w$ pour lesquels $r$ demeure compris entre les limites

$$r = r', \qquad r = r''. \tag{3}$$

Si l'on pose

$$x = \alpha_1 r, \quad y = \alpha_2 r, \quad z = \alpha_3 r, \quad \ldots, \quad u = \alpha_{n-2} r, \quad v = \alpha_{n-1} r, \quad w = \alpha_n r, \tag{4}$$

les nouvelles variables

$$\alpha_1, \quad \alpha_2, \quad \ldots, \quad \alpha_n,$$

devront, eu égard à l'équation (1), vérifier la condition

$$\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \ldots + \alpha_n^2 = 1, \tag{5}$$

à laquelle on satisfera en prenant

$$\begin{cases} \alpha_1 = \cos\varphi_1, \\ \alpha_2 = \sin\varphi_1 \cos\varphi_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \alpha_{n-1} = \sin\varphi_1 \sin\varphi_2 \ldots \sin\varphi_{n-2} \cos\varphi_{n-1}, \\ \alpha_n = \sin\varphi_1 \sin\varphi_2 \ldots \sin\varphi_{n-2} \sin\varphi_{n-1}. \end{cases} \tag{6}$$

Si d'ailleurs on assujettit les angles $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{n-2}$ à demeurer compris entre les limites $0, \pi$, et l'angle $\varphi_{n-1}$ à demeurer compris entre les limites $-\pi, +\pi$; alors à tout système de valeurs de $x, y, z, \ldots, u, v, w$, pour lequel se vérifiera la condition (1), correspondra toujours un système unique de valeurs de $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, pour lequel se vérifiera la condition (5); et, par suite, si aux variables $x, y, z, \ldots, u, v, w$ on substitue les variables $r, \varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{n-1}$, on aura, en vertu du théorème I du paragraphe I,

$$\mathcal{S} = \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^{\pi} \cdots \int_0^{\pi} \int_{r'}^{r''} \Omega\Theta\, dr\, d\varphi_1 \ldots d\varphi_{n-2}\, d\varphi_{n-1}, \tag{7}$$

$\Theta$ désignant un facteur positif que l'on déterminera sans peine en opérant comme il suit.

Comme, en laissant invariables $x, y, z, \ldots, u, v$, on tire de la formule (1),

$$w\,dw = r\,dr,$$

par conséquent

$$dw = \frac{dr}{\alpha_n},$$

il est clair que, si l'on substitue $r$ à $w$ et $dr$ à $dw$, on devra, dans l'intégrale $\mathcal{S}$, multiplier la fonction placée sous le signe $\int$ par la valeur numérique du rapport $\frac{1}{\alpha_n}$. Si l'on substitue ensuite $\alpha_1$ à $x$, $\alpha_2$ à $y$, ..., $\alpha_{n-1}$ à $v$, on devra évidemment, en vertu des formules (4), remplacer

$$dx, \quad dy, \quad \ldots, \quad dv$$

par

$$r\,d\alpha_1, \quad r\,d\alpha_2, \quad \ldots, \quad r\,d\alpha_{n-1};$$

et, en conséquence, remplacer le produit

$$dx\,dy\ldots dv$$

par le produit

$$r^{n-1}\,d\alpha_1\,d\alpha_2\ldots d\alpha_{n-1}.$$

Donc, si aux variables $x, y, z, \ldots, u, v, w$ on substitue les variables $r, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n-1}$, on devra, dans l'intégrale $\mathcal{S}$, multiplier la fonction $\Omega$ par la valeur numérique du rapport

$$\frac{r^{n-1}}{\alpha_n}.$$

D'autre part, si, dans une intégrale multiple, relative aux variables $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n-1}$, on substitue à celles-ci les angles $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{n-1}$ liés avec elles par les équations (6), on devra, en vertu du théorème II du paragraphe I, multiplier la fonction sous le signe $\int$ par la valeur numérique du produit

$$\mathrm{D}_{\varphi_1}\alpha_1\,\mathrm{D}_{\varphi_2}\alpha_2\ldots\mathrm{D}_{\varphi_{n-1}}\alpha_{n-1},$$

qui peut être réduit à la forme

$$(-1)^{n-1}\theta\alpha_n,$$



la valeur de $\theta$ étant positive et déterminée par l'équation

(8) $$\theta = \sin^{n-2}\varphi_1 \sin^{n-3}\varphi_2 \ldots \sin^2\varphi_{n-3} \sin\varphi_{n-2}.$$

Cela posé, on conclura du théorème III (§ I), qu'en substituant aux variables $x, y, z, \ldots, u, v, w$ les variables $r, \varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{n-1}$, on doit, avec M. Jacobi, multiplier la fonction sous le signe $\int$ par le facteur

(9) $$\Theta = \theta r^{n-1}.$$

Donc la formule (2) pourra être réduite à

(10) $$\mathcal{S} = \int_{-\pi}^{\pi}\int_0^{\pi}\cdots\int_0^{\pi}\int_{r'}^{r''} \Omega\theta r^{n-1}\,dr\,d\varphi_1\ldots d\varphi_{n-2}\,d\varphi_{n-1}.$$

Concevons maintenant que les $n$ variables $x, y, z, \ldots, u, v, w$, soient liées à $n$ autres variables $\mathrm{x}, \mathrm{y}, \mathrm{z}, \ldots, \mathrm{u}, \mathrm{v}, \mathrm{w}$ par des équations linéaires de la forme

(11) $$\begin{cases} x = a\mathrm{x} + a_1\mathrm{y} + a_2\mathrm{z} + \ldots + a_{n-1}\mathrm{w}, \\ y = b\mathrm{x} + b_1\mathrm{y} + b_2\mathrm{z} + \ldots + b_{n-1}\mathrm{w}, \\ z = c\mathrm{x} + c_1\mathrm{y} + c_2\mathrm{z} + \ldots + c_{n-1}\mathrm{w}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ w = h\mathrm{x} + h_1\mathrm{y} + h_2\mathrm{z} + \ldots + h_{n-1}\mathrm{w}. \end{cases}$$

Pour que l'on ait identiquement

(12) $$x^2 + y^2 + z^2 + \ldots + u^2 + v^2 + w^2 = \mathrm{x}^2 + \mathrm{y}^2 + \mathrm{z}^2 + \ldots + \mathrm{u}^2 + \mathrm{v}^2 + \mathrm{w}^2,$$

il suffira que les coefficients

$$a, b, c, \ldots, h; \quad a_1, b_1, c_1, \ldots, h_1; \quad \ldots, \quad a_{n-1}, b_{n-1}, c_{n-1}, \ldots, \quad h_{n-1},$$

vérifient les conditions

$$\left\{\begin{array}{llll} a^2+b^2+\ldots+h^2=1, & aa_1+bb_1+\ldots+hh_1=0, & \ldots, & a\,a_{n-1}+b\,b_{n-1}+\ldots+h\,h_{n-1}=0, \\ & a_1^2+b_1^2+\ldots+h_1^2=1, & \ldots, & a_1a_{n-1}+b_1b_{n-1}+\ldots+h_1h_{n-1}=0, \\ & & \ldots, & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ & & & a_{n-1}^2+b_{n-1}^2+\ldots+h_{n-1}^2=1. \end{array}\right.$$

D'ailleurs, si aux conditions (13) on joint la formule (24) du Mémoire sur les sommes alternées connues sous le nom de *résultantes* (t. II,

p. 176) [1], on en conclura

$$\Theta^2 = 1,$$

et, par suite,

$$\Theta = 1, \tag{14}$$

$\Theta$ désignant la valeur numérique de la somme

$$S(\pm\, a b_1 c_2 \ldots h_{n-1});$$

et, eu égard aux formules (11), cette dernière somme ne différera pas de la suivante :

$$S(\pm\, D_{\mathrm{x}} x\, D_{\mathrm{y}} y \ldots D_{\mathrm{w}} w).$$

Enfin, la formule (12), jointe à l'équation (1), donnera

$$\mathrm{x}^2 + \mathrm{y}^2 + \mathrm{z}^2 + \ldots + \mathrm{u}^2 + \mathrm{v}^2 + \mathrm{w}^2 = r^2. \tag{15}$$

Cela posé, il résulte du théorème I du paragraphe I, que si les conditions (13) sont remplies, on pourra, dans la formule (2), substituer immédiatement aux variables $x, y, z, \ldots, u, v, w$ les variables nouvelles $\mathrm{x}, \mathrm{y}, \mathrm{z}, \ldots, \mathrm{u}, \mathrm{v}, \mathrm{w}$ liées aux premières par les formules (11), en sorte qu'on aura

$$\iint \cdots \iint \Omega\, dw\, dv \ldots dy\, dx = \iint \cdots \iint \Omega\, d\mathrm{w}\, d\mathrm{v} \ldots d\mathrm{y}\, d\mathrm{x}, \tag{16}$$

les intégrations étant étendues à tous les systèmes de valeurs de $x$, $y, \ldots, v, w$ ou de $\mathrm{x}, \mathrm{y}, \ldots, \mathrm{v}, \mathrm{w}$ pour lesquels la variable positive $r$, liée avec les premières par la formule (1) ou (15), demeure comprise entre les limites $r'$, $r''$.

Il importe d'observer que des formules (11) jointes aux équations (13), on tire immédiatement

$$\left\{\begin{array}{l} \mathrm{x} = a\ \ x + b\ \ y + c\ \ z + \ldots + h\ \ w, \\ \mathrm{y} = a_1 x + b_1 y + c_1 z + \ldots + h_1 w, \\ \mathrm{z} = a_2 x + b_2 y + c_2 z + \ldots + h_2 w, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \mathrm{w} = a_{n-1} x + b_{n-1} y + c_{n-1} z + \ldots + h_{n-1} w. \end{array}\right. \tag{17}$$

[1] *Œuvres de Cauchy*, série II, t. XII, p. 201.



Remarquons encore que l'on peut satisfaire d'une infinité de manières aux conditions (13), par des valeurs réelles des coefficients

$$a, b, \ldots, h; \quad a_1, b_1, \ldots, h_1; \quad a_{n-1}, b_{n-1}, \ldots, h_{n-1}.$$

En effet, après avoir choisi des valeurs réelles de $a, b, c, \ldots, h$ propres à vérifier la formule

$$a^2 + b^2 + c^2 + \ldots + h^2 = 1, \tag{18}$$

on pourra satisfaire, par des valeurs réelles de $a_1, b_1, c_1, \ldots, h_1$, aux deux conditions

$$a a_1 + b b_1 + c c_1 + \ldots + h h_1 = 0, \qquad a_1^2 + b_1^2 + c_1^2 + \ldots + h_1^2 = 1, \tag{19}$$

qui se réduiront simplement à

$$a a_1 + b b_1 = 0, \qquad a_1^2 + b_1^2 = 1,$$

si les coefficients $a_1, b_1, c_1, \ldots, h_1$ sont tous supposés nuls à l'exception des deux premiers, et qui donneront alors

$$\frac{a_1}{b} = \frac{b_1}{-a} = \pm \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Il y a plus : à la première des équations (19) on pourra joindre $n - 1$ équations de même forme, c'est-à-dire $n - 1$ équations en vertu desquelles $n - 1$ fonctions linéaires et homogènes de $a_1, b_1, c_1, \ldots$, arbitrairement choisies, se réduiront à zéro; et de ces $n - 1$ équations nouvelles, réunies à la première des équations (19), on en tirera une autre de la forme

$$\frac{a_1}{\mathrm{A}} = \frac{b_1}{\mathrm{B}} = \frac{c_1}{\mathrm{C}} = \ldots = \frac{h_1}{\mathrm{H}}, \tag{20}$$

A, B, C, ..., H étant des quantités connues; puis de l'équation (20), jointe à la seconde des formules (19), on conclura

$$\frac{a_1}{\mathrm{A}} = \frac{b_1}{\mathrm{B}} = \frac{c_1}{\mathrm{C}} = \ldots = \frac{h_1}{\mathrm{H}} = \pm \frac{1}{\sqrt{\mathrm{A}^2 + \mathrm{B}^2 + \mathrm{C}^2 + \ldots + \mathrm{H}^2}}. \tag{21}$$

Les valeurs de $a_1, b_1, c_1, \ldots, h_1$ étant ainsi déterminées, on prouvera, par des raisonnements semblables, que l'on peut encore satisfaire, par des valeurs réelles de $a_2, b_2, c_2, \ldots, h_2$, aux trois équations

$$(22)\qquad \begin{cases} aa_2 + bb_2 + \ldots + hh_2 = 0, \\ a_1 a_2 + b_1 b_2 + \ldots + h_1 h_2 = 0, \\ a_2^2 + b_2^2 + \ldots + h_2^2 = 1, \end{cases}$$

dont les deux premières peuvent être jointes à $n-2$ équations de même forme, arbitrairement choisies; et, en continuant de la sorte, on finira par obtenir, pour les coefficients

$$a_2, b_2, \ldots, h_2;\quad a_3, b_3, \ldots, h_3;\quad a_{n-1}, b_{n-1}, \ldots, h_{n-1},$$

des valeurs réelles qui seront propres à vérifier les formules (13), quand on les joindra aux valeurs réelles et arbitrairement choisies des coefficients $a, b, c, \ldots, h$.

Concevons à présent qu'en attribuant aux coefficients $a, b, c, \ldots, h$ l'un quelconque des systèmes de valeurs réelles pour lesquels se vérifie la condition (18), on réduise $\Omega$ à une fonction réelle et continue du polynome

$$ax + by + cz + \ldots + hw,$$

en sorte que cette fonction étant désignée à l'aide de la lettre caractéristique f, on ait

$$\Omega = \mathrm{f}(ax + by + cz + \ldots + hw).$$

L'équation (16) donnera

$$(23)\qquad \iint \cdots \int \mathrm{f}(ax + by + \ldots + hw)\, dw \ldots dy\, dx = \iint \cdots \int \mathrm{f}(\mathrm{x})\, d\mathrm{w} \ldots d\mathrm{y}\, d\mathrm{x}.$$

Si d'ailleurs, dans chaque membre de la formule (23), on substitue aux variables $x, y, z, \ldots, w$, ou $\mathrm{x}, \mathrm{y}, \mathrm{z}, \ldots, \mathrm{w}$, la variable $r$ liée avec elles par l'équation (1) ou (15), et des angles auxiliaires $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{n-1}$ liés encore à ces mêmes variables par des équations semblables aux formules (4) et (6), chaque membre prendra la forme de l'intégrale multiple que présente l'équation (10); et en posant, pour abréger,

$$(24)\qquad \omega = a\alpha_1 + b\alpha_2 + \ldots + h\alpha_n,$$



on trouvera

$$(25)\qquad \begin{aligned} &\int_{-\pi}^{\pi}\int_0^{\pi} \cdots \int_0^{\pi}\int_{r'}^{r''} \theta r^{n-1} \mathrm{f}(\omega r)\, dr\, d\varphi_1 \ldots d\varphi_{n-2}\, d\varphi_{n-1} \\ &= \int_{-\pi}^{\pi}\int_0^{\pi} \cdots \int_0^{\pi}\int_{r'}^{r''} \theta r^{n-1} \mathrm{f}(\alpha_1 r)\, dr\, d\varphi_1 \ldots d\varphi_{n-2}\, d\varphi_{n-1}, \end{aligned}$$

la valeur de $\theta$ étant toujours celle que détermine la formule (8); puis en différentiant les deux membres par rapport à $r''$, et posant après la différentiation $r'' = 1$, on aura simplement

$$(26)\qquad \begin{aligned} &\int_{-\pi}^{\pi}\int_0^{\pi} \cdots \int_0^{\pi}\int_0^{\pi} \theta\, \mathrm{f}(\omega)\, d\varphi_1\, d\varphi_2 \ldots d\varphi_{n-2}\, d\varphi_{n-1} \\ &= \int_{-\pi}^{\pi}\int_0^{\pi} \cdots \int_0^{\pi}\int_0^{\pi} \theta\, \mathrm{f}(\alpha_1)\, d\varphi_1\, d\varphi_2 \ldots d\varphi_{n-2}\, d\varphi_{n-1}. \end{aligned}$$

D'ailleurs si, en désignant par $m$, $n$ des nombres entiers quelconques, et par $\varphi$ un angle variable, on pose

$$\alpha = \cos\varphi,$$

on aura généralement

$$\int_0^{\pi} \sin^{m-1}\varphi \cos^{n-1}\varphi\, d\varphi = \int_{-1}^{1} \alpha^{n-1}(1-\alpha^2)^{\frac{m-2}{2}}\, d\alpha = \frac{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{m+n}{2}\right)};$$

puis on en conclura

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin^{m-1}\varphi\, d\varphi = \frac{\pi^{\frac{1}{2}}\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{m+1}{2}\right)};$$

et, par suite, eu égard à la formule (8), on trouvera

$$\int_{-\pi}^{\pi}\int_0^{\pi} \cdots \int_0^{\pi} \theta\, d\varphi_2 \ldots d\varphi_{n-2}\, d\varphi_{n-1} = \frac{2\pi^{\frac{n-1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)} \sin^{n-2}\varphi_1.$$

Donc la formule (26) pourra être réduite à

$$(27)\qquad \begin{aligned} &\int_{-\pi}^{\pi}\int_0^{\pi} \cdots \int_0^{\pi}\int_0^{\pi} \theta\, \mathrm{f}(\omega)\, d\varphi_1\, d\varphi_2 \ldots d\varphi_{n-2}\, d\varphi_{n-1} \\ &= \frac{2\pi^{\frac{n-1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)} \int_{-1}^{1} (1-\alpha^2)^{\frac{n-3}{2}} \mathrm{f}(\alpha)\, d\alpha. \end{aligned}$$

On ne doit pas oublier que, dans la formule (24), $a, b, c, \ldots, h$ désignent des coefficients arbitraires assujettis seulement à vérifier la condition

$$a^2+b^2+c^2+\ldots+h^2=1.$$

Si, en nommant $k$ une quantité réelle quelconque, on remplaçait $a$, $b, c, \ldots, h$ par $\frac{a}{k}, \frac{b}{k}, \frac{c}{k}, \cdots$ et $\mathrm{f}(\alpha)$ par $\mathrm{f}(k\alpha)$, alors, à la place de la formule (27) on obtiendrait la suivante :

$$(28) \quad \begin{aligned} &\int_{-\pi}^{\pi}\int_{0}^{\pi}\cdots\int_{0}^{\pi}\int^{\pi}\theta\,\mathrm{f}(\omega)\,d\varphi_1\,d\varphi_2\ldots d\varphi_{n-2}\,d\varphi_{n-1} \\ &\quad = \frac{2\pi^{\frac{n-1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}\int_{-1}^{1}(1-\alpha^2)^{\frac{n-3}{2}}\mathrm{f}(k\alpha)\,d\alpha, \end{aligned}$$

la valeur de $\omega$ étant toujours déterminée par la formule (24), et $a$, $b$, $c, \ldots, h$ étant des coefficients arbitraires, mais liés au coefficient $k$ par la formule

$$(29) \quad a^2+b^2+c^2+\ldots+h^2=k^2.$$

Lorsque, dans la formule (28), on pose $n=3$, alors en écrivant $\varphi$, $\chi$ au lieu de $\varphi_1$, $\varphi_2$, et $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ au lieu de $\alpha_1$, $\beta_2$, $\gamma_3$, on trouve simplement

$$(30) \quad \int_{-\pi}^{\pi}\int_{0}^{\pi}\sin\varphi\,\mathrm{f}(a\alpha+b\beta+c\gamma)\,d\varphi\,d\chi = 2\pi\int_{-1}^{1}\mathrm{f}(k\alpha)\,d\alpha,$$

les variables auxiliaires $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ étant liées aux angles $\varphi$, $\chi$ par les formules

$$(31) \quad \alpha=\cos\varphi, \qquad \beta=\sin\varphi\cos\chi, \qquad \gamma=\sin\varphi\sin\chi,$$

et les coefficients arbitraires $a$, $b$, $c$ étant liés au coefficient $k$ par l'équation

$$(32) \quad a^2+b^2+c^2=k^2.$$



La formule (30) reproduit le théorème à l'aide duquel M. Poisson a intégré l'équation du mouvement des fluides élastiques.

Si, dans la formule (28) on prend

$$\mathrm{f}(\alpha)=\alpha^m,$$

$m$ étant un nombre pair quelconque, l'intégrale que renferme le second membre sera réduite au produit de $k^m$ par la suivante

$$\int_{-1}^{1}\alpha^m(1-\alpha^2)^{\frac{n-3}{2}}d\alpha = \frac{\Gamma\left(\frac{m+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{m+n}{2}\right)},$$

et la formule (28) donnera

$$(33) \quad \int_{-\pi}^{\pi}\int_{0}^{\pi}\cdots\int_{0}^{\pi}\int_{0}^{\pi}\theta\,\omega^m\,d\varphi_1\,d\varphi_2\ldots d\varphi_{n-2}\,d\varphi_{n-1} = 2\pi^{\frac{n-1}{2}}\frac{\Gamma\left(\frac{m+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{m+n}{2}\right)}k^m.$$

Mais, d'autre part, en supposant $n$ impair, on aura

$$\frac{\Gamma\left(\frac{m+n}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{m+1}{2}\right)} = \frac{m+n-2}{2}\cdots\frac{m+3}{2}\,\frac{m+1}{2} = \mathrm{D}_\iota^{\frac{n-1}{2}}\iota^{\frac{m+n-2}{2}},$$

$\iota$ devant être réduit à l'unité, après les différentiations indiquées par la caractéristique $\mathrm{D}_\iota$. Cela posé, on tirera de la formule (33)

$$(34) \quad k^m = \frac{1}{2\pi^{\frac{n-1}{2}}}\mathrm{D}_\iota^{\frac{n-1}{2}}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{0}^{\pi}\cdots\int_{0}^{\pi}\int_{0}^{\pi}\iota^{\frac{n-2}{2}}\theta(\omega\sqrt{\iota})^m\,d\varphi_1\,d\varphi_2\ldots d\varphi_{n-2}\,d\varphi_{n-1}.$$

Cette dernière formule subsistant, quel que soit le nombre pair $m$, continuera de subsister, si l'on y remplace par $k^m$ une fonction paire $\mathrm{f}(k)$ développable suivant les puissances ascendantes de $k^2$, pourvu que l'on remplace en même temps, dans le second membre, $(\omega\sqrt{\iota})^m$ par $\mathrm{f}(\omega\sqrt{\iota})^n$. On aura donc encore, en supposant $n$ impair, et $\mathrm{f}(k)$ développable suivant les puissances ascendantes de $k^2$,

$$(35) \quad \mathrm{f}(k) = \frac{1}{2\pi^{\frac{n-1}{2}}}\mathrm{D}_\iota^{\frac{n-1}{2}}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{0}^{\pi}\cdots\int_{0}^{\pi}\int_{0}^{\pi}\iota^{\frac{n-2}{2}}\theta\,\mathrm{f}(\omega\sqrt{\iota})\,d\varphi_1\,d\varphi_2\ldots d\varphi_{n-2}\,d\varphi_{n-1},$$

pourvu que, les valeurs de $\omega$, $k$ étant déterminées par les formules

$$k^2 = a^2 + b^2 + c^2 + \ldots + h^2, \qquad \omega = a\alpha_1 + b\alpha_2 + c\alpha_3 + \ldots + h\alpha_n,$$

et les variables $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ étant liées aux angles $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{n-1}$ par les équations (6), on pose $\iota = 1$, après les différentiations indiquées par la lettre caractéristique $D_\iota$.

# MÉMOIRE

SUR

# LES VALEURS MOYENNES DES FONCTIONS

## D'UNE OU DE PLUSIEURS VARIABLES.

Considérons d'abord une fonction $\Omega$ d'une seule variable $x$, et supposons que cette fonction reste continue entre deux valeurs données de la variable. Si, après avoir interposé entre ces deux valeurs d'autres valeurs équidistantes, dont le nombre représenté par $n-1$ soit très considérable, on cherche les diverses valeurs de la fonction $\Omega$ correspondantes aux $n-1$ valeurs données de la variable $x$, la moyenne arithmétique entre ces valeurs de $\Omega$ se transformera, quand le nombre $n$ deviendra infini, en ce que nous nommerons la *valeur moyenne* de la fonction $\Omega$, et cette valeur moyenne sera le rapport des deux intégrales définies relatives à $x$, dans lesquelles les fonctions sous le signe $\int$ seront $\Omega$ et l'unité. Pour plus de commodité, je désignerai cette valeur moyenne de $\Omega$ à l'aide de la lettre caractéristique M, et je placerai au-dessous et au-dessus du signe M, les limites de la variable, suivant l'usage adopté pour les intégrales définies.

Concevons maintenant que $\Omega$ représente une fonction de plusieurs variables $x, y, \ldots$, qui reste continue pour les systèmes de valeurs de $x, y, \ldots$, comprises entre certaines limites. Le rapport entre les deux intégrales définies qui, étant relatives à $x, y, \ldots$, et prises entre les limites données, renfermeront sous le signe $\int$ la fonction $\Omega$ et l'unité, sera la limite vers laquelle convergera la moyenne arithmétique entre les valeurs de $\Omega$ qui correspondront à des éléments égaux de la seconde intégrale. Pour cette raison, le rapport dont il s'agit sera nommé la *valeur moyenne* de la fonction $\Omega$, et je désignerai encore cette valeur moyenne à l'aide de la lettre caractéristique M, en indiquant au-dessous et au-dessus du signe M les limites des diverses intégrations.

Concevons, maintenant, que les intégrations doivent être étendues à tous les systèmes de valeurs des variables $x, y, z, \ldots$ qui réduisent une certaine fonction $r$ de ces mêmes variables à une quantité comprise entre deux limites données $a, b$. On pourra rechercher ce que devient la valeur moyenne de la fonction $\Omega$ dans le cas particulier où les deux limites $a, b$ se réduisent à une seule. Dans ce cas, qui mérite d'être remarqué, nous pourrons nous borner à indiquer au-dessus du signe M la limite $a$ de la fonction $r$, en ayant soin, d'ailleurs, d'écrire au-dessous du même signe les diverses variables $x, y, z, \ldots,$ auxquelles se rapportent les intégrations.

Comme nous le montrerons plus tard, la considération des valeurs moyennes des fonctions d'une ou de plusieurs variables peut être utilement employée dans la solution de plusieurs problèmes d'analyse, spécialement dans l'intégration des équations linéaires aux dérivées partielles.

### Analyse.

Supposons que l'on fasse varier $x, y, z, \ldots,$ entre les limites

$$x = x_0, \quad x = x_1; \quad y = y_0, \quad y = y_1; \quad z = z_0, \quad z = z_1; \quad \ldots,$$

$y_0, y_1$ pouvant être des fonctions de $x$, et $z_0, z_1$ des fonctions de $x$, $y$, etc. Soit d'ailleurs $\Omega$ une fonction de $x$, ou de $x, y$, etc., qui reste continue entre les limites dont il s'agit. La valeur moyenne de $\Omega$ entre ces limites sera

$$\mathop{\mathbf{M}}_{x=x_0}^{x=x_1} \Omega = \frac{\int_{x_0}^{x_1} \Omega\, dx}{\int_{x_0}^{x_1} dx},$$



ou

$$\mathop{\mathbf{M}}_{x=x_0,\, y=y_0}^{x=x_1,\, y=y_1} \Omega = \frac{\int_{x_0}^{x_1}\int_{y_0}^{y_1} \Omega\, dy\, dx}{\int_{x_0}^{x_1}\int_{y_0}^{y_1} dy\, dx}, \qquad \ldots$$

Cela posé, on établira facilement la proposition suivante :

Théorème I. — *Soit $\Omega$ une fonction réelle de $n$ variables réelles $x, y, z, \ldots.$ Si à celles-ci on substitue $n$ autres variables réelles $\mathrm{x}, \mathrm{y}, \mathrm{z}, \ldots$ qui soient liées aux premières par $n$ équations linéaires, $\Omega$ considérée comme fonction de $x, y, z, \ldots$ ou de $\mathrm{x}, \mathrm{y}, \mathrm{z}, \ldots,$ conservera dans les deux cas la même valeur moyenne, pourvu que les limites assignées au second système de variables correspondent aux limites assignées au premier système.*

*Démonstration.* — En effet, quand on transformera chaque intégrale relative aux variables $x, y, z, \ldots,$ en substituant à celles-ci les variables $\mathrm{x}, \mathrm{y}, \mathrm{z}, \ldots,$ la fonction sur le signe $\int$ sera multipliée, comme l'on sait, par le facteur

$$\Theta = \mathrm{S}(\pm \mathrm{D}_{\mathrm{x}} x\, \mathrm{D}_{\mathrm{y}} y\, \mathrm{D}_{\mathrm{z}} z \ldots).$$

Si d'ailleurs, les variables $x, y, z, \ldots$ sont liées par des équations linéaires aux variables $\mathrm{x}, \mathrm{y}, \mathrm{z}, \ldots,$ le facteur $\Theta$ se réduira simplement à une constante. Donc alors ce facteur pourra être placé en dehors des signes d'intégration, puis effacé comme facteur commun des deux termes du rapport qui représentera la valeur de $\Omega$.

Soit maintenant $r = \mathrm{f}(x, y, z, \ldots)$ une nouvelle fonction, réelle aussi bien que $\Omega$, et supposons que l'on cherche la moyenne entre les valeurs de $\Omega$ correspondantes à toutes les valeurs de $x, y, z, \ldots$ pour lesquelles la fonction $r$ demeure comprise entre deux limites données $a, b$. Désignons d'ailleurs à l'aide de la notation

$$\mathop{\mathbf{M}}_{x, y, z, \ldots}^{r=a} \Omega$$

ce que devient cette moyenne quand la différence $b - a$ s'évanouit.

On aura, en vertu du théorème précédent, et en supposant toujours $x$, $y$, $z$, ... liées à x, y, z, ... par des équations linéaires,

$$\underset{x,y,z,\ldots}{\overset{r=a}{\mathbf{M}}}\Omega = \underset{\mathrm{x},\mathrm{y},\mathrm{z},\ldots}{\overset{r=a}{\mathbf{M}}}\Omega. \tag{1}$$

Supposons, pour fixer les idées, que la variable $r$, étant positive, soit liée aux $n$ variables $x$, $y$, $z$, ..., par une équation de la forme

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2 + \ldots. \tag{2}$$

Si l'on nomme $\Lambda$ la moyenne entre les diverses valeurs de $\Omega$ correspondantes aux divers systèmes de valeurs de $x$, $y$, $z$, ..., pour lesquels $r$ demeure comprise entre les limites positives $a$, $b$, on aura

$$\Lambda = \frac{\iiint \cdots \Omega \, dz \, dy \, dx}{\iiint \cdots dz \, dy \, dx}, \tag{3}$$

les intégrations s'étendant à tous ces systèmes. Si d'ailleurs on pose, comme dans le Mémoire précédent,

$$x = \alpha_1 r, \qquad y = \alpha_2 r, \qquad z = \alpha_3 r, \qquad \ldots, \tag{4}$$

les variables $\alpha_1$, $\alpha_2$, $\alpha_3$, ..., $\alpha_n$, liées aux $n$ variables $x$, $y$, $z$, ... par les formules (4), devront, eu égard à l'équation (2), vérifier la condition

$$\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \ldots + \alpha_n^2 = 1. \tag{5}$$

D'ailleurs, pour satisfaire à cette condition, il suffira de prendre

$$\left\{\begin{aligned} \alpha_1 &= \cos\varphi_1, \\ \alpha_2 &= \sin\varphi_1 \cos\varphi_2, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \alpha_{n-1} &= \sin\varphi_1 \sin\varphi_2 \ldots \sin\varphi_{n-2} \cos\varphi_{n-1}, \\ \alpha_n &= \sin\varphi_1 \sin\varphi_2 \ldots \sin\varphi_{n-2} \sin\varphi_{n-1}. \end{aligned}\right. \tag{6}$$

Il y a plus : si l'on assujettit les angles $\varphi_1$, $\varphi_2$, ..., $\varphi_{n-2}$ à demeurer compris entre les limites $0$, $\pi$ et l'angle $\varphi_{n-1}$ à demeurer compris entre



les limites $-\pi$, $\pi$; alors, pour chaque système de valeurs de $\alpha_1$, $\alpha_2$, ..., $\alpha_n$ propres à vérifier la condition (5), on obtiendra toujours un système unique de valeurs de $\varphi_1$, $\varphi_2$, ..., $\alpha_{n-1}$. Cela posé, si l'on fait, pour abréger,

$$\theta = \sin^{n-2}\varphi_1 \sin^{n-3}\varphi_2 \ldots \sin^2\varphi_{n-3} \sin\varphi_{n-2}, \tag{7}$$

et si, en opérant comme dans le Mémoire précédent, on substitue, dans les deux intégrales que renferme la formule (3), les variables $\varphi_1$, $\varphi_2$, ..., $\varphi_{n-2}$, $\varphi_{n-1}$, $r$ aux $n$ variables $x$, $y$, $z$, ..., on trouvera

$$\Lambda = \frac{\int_{-\pi}^{\pi}\int_0^{\pi}\cdots\int_0^{\pi}\int_a^b \theta\,\Omega\, r^{n-1}\, dr\, d\varphi_1 \ldots d\varphi_{n-2}\, d\varphi_{n-1}}{\int_{-\pi}^{\pi}\int_0^{\pi}\cdots\int_0^{\pi}\int_a^b \theta\, r^{n-1}\, dr\, d\varphi_1 \ldots d\varphi_{n-2}\, d\varphi_{n-1}}. \tag{8}$$

Concevons maintenant que, dans l'équation (8), on pose $b = a$; alors le second membre de cette équation se présentera sous la forme $\frac{0}{0}$; et pour obtenir sa véritable valeur, il suffira de remplacer le rapport des deux intégrales qu'il renferme par le rapport de leurs dérivées relatives à $b$, puis de poser, dans ce dernier rapport, $b = a$; et comme la valeur de $\Lambda$ ainsi obtenue sera précisément la valeur moyenne de $\Omega$, désignée par la notation

$$\underset{x,y,z,\ldots}{\overset{r=a}{\mathbf{M}}}\Omega,$$

nous devons conclure que l'on aura

$$\underset{x,y,z,\ldots}{\overset{r=a}{\mathbf{M}}}\Omega = \frac{\int_{-\pi}^{\pi}\int_0^{\pi}\cdots\int_0^{\pi} \theta\,\Omega\, d\varphi_1 \ldots d\varphi_{n-2}\, d\varphi_{n-1}}{\int_{-\pi}^{\pi}\int_0^{\pi}\cdots\int_0^{\pi} \theta\, d\varphi_1 \ldots d\varphi_{n-2}\, d\varphi_{n-1}}. \tag{9}$$

D'autre part, comme en désignant par $m$ un nombre entier quelconque, on a généralement

$$\int_0^{\pi} \sin^{m-1}\varphi\, d\varphi = \frac{\pi^{\frac{1}{2}}\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{m+1}{2}\right)}, \tag{10}$$

on trouvera, eu égard à l'équation (7),

$$\int_{-\pi}^{\pi}\int_{0}^{\pi}\cdots\int_{0}^{\pi}\theta\, d\varphi_1\ldots d\varphi_{n-2}\, d\varphi_{n-1}=\frac{2\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}; \tag{11}$$

donc la formule (9) pourra être réduite à

$$\mathop{\mathrm{M}}_{x,y,z,\ldots}^{r=a}\Omega=\frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{2\pi^{\frac{n}{2}}}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{0}^{\pi}\cdots\int_{0}^{\pi}\theta\,\Omega\, d\varphi_1\ldots d\varphi_{n-2}\, d\varphi_{n-1}. \tag{12}$$

Considérons maintenant, d'une manière spéciale, le cas où l'on a

$$a=1.$$

Dans ce cas la fonction de $x, y, z, \ldots$, désignée par $\Omega$, se réduit pour $r=1$, en vertu des formules (4), à une fonction des variables

$$\alpha_1,\quad \alpha_2,\quad \ldots,\quad \alpha_n;$$

et, en substituant cette dernière fonction à la première, on réduit la moyenne

$$\mathop{\mathrm{M}}_{x,y,z,\ldots}^{r=1}\Omega,$$

à la forme

$$\mathop{\mathrm{M}}_{\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n}^{\rho=1}\Omega,$$

$\rho$ étant une variable nouvelle liée aux variables $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ par l'équation

$$\rho^2=\alpha_1^2+\alpha_2^2+\ldots+\alpha_n^2. \tag{13}$$

Donc, en considérant $\Omega$ comme une fonction des $n$ variables $\alpha_1$, $\alpha_2, \ldots, \alpha_n$, et supposant $\rho$ lié à celles-ci par l'équation (13), on aura

$$\mathop{\mathrm{M}}_{\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n}^{\rho=1}\Omega=\frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{2\pi^{\frac{n}{2}}}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{0}^{\pi}\cdots\int_{0}^{\pi}\theta\,\Omega\, d\varphi_1\, d\varphi_2\ldots d\varphi_{n-2}\, d\varphi_{n-1}, \tag{14}$$

pourvu que, dans le second membre de la formule (14), on regarde



$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \theta$ comme des fonctions de $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{n-1}$ déterminées par les formules (6) et (7).

Concevons, à présent, que $u_1, u_2, \ldots, u_n$ étant des coefficients réels, on pose

$$\omega=u_1\alpha_1+u_2\alpha_2+\ldots+u_n\alpha_n. \tag{15}$$

Soit, d'ailleurs, $k$ une quantité positive liée aux coefficients $u_1$, $u_2, \ldots, u_n$ par la formule

$$k^2=u_1^2+u_2^2+\ldots+u_n^2; \tag{16}$$

et nommons $F(k)$ une fonction paire de $k$, développable suivant les puissances ascendantes de $k^2$. En vertu de la formule (35) du précédent Mémoire, on aura, pour des valeurs impaires de $n$,

$$F(k)=\frac{1}{2\pi^{\frac{n-1}{2}}}D_\iota^{\frac{n-1}{2}}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{0}^{\pi}\cdots\int_{0}^{\pi}\theta\,\iota^{\frac{n-2}{2}}F(\omega\sqrt{\iota})\, d\varphi_1\ldots d\varphi_{n-2}\, d\varphi_{n-1}, \tag{17}$$

pourvu que l'on pose $\iota=1$, après les différentiations indiquées par la caractéristique $D_\iota$. Donc, eu égard à la formule (14), on aura encore

$$F(k)=\frac{\pi^{\frac{1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\mathop{\mathrm{M}}_{\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n}^{\rho=1}D_\iota^{\frac{n-1}{2}}\left[\iota^{\frac{n-2}{2}}F(\omega\sqrt{\iota})\right]. \tag{18}$$

Concevons maintenant que $F(k)$ désigne une fonction de $k$, paire ou impaire, mais développable suivant les puissances ascendantes de $k$. Alors l'expression

$$\mathop{\mathrm{M}}_{\alpha=-1}^{\alpha=1}F(k\alpha)=\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}F(k\alpha)\, d\alpha$$

représentera une fonction paire de $k$, développable suivant les puissances ascendantes de $k^2$; et à la formule (18) on devra substituer celle qu'on en déduit quand on remplace dans le premier membre $F(k)$ par $\mathop{\mathrm{M}}_{\alpha=-1}^{\alpha=1}F(k\alpha)$, et, dans le second membre, l'expression

$$D_\iota^{\frac{n-1}{2}}\left[\iota^{\frac{n-2}{2}}F(\omega\sqrt{\iota})\right],$$

par l'expression

$$(19) \qquad \mathrm{D}_{\iota}^{\frac{n-1}{2}}\left[\iota^{\frac{n-2}{2}} \underset{\alpha=-1}{\overset{\alpha=1}{\mathbf{M}}} \mathrm{F}(\omega\alpha\sqrt{\iota})\right],$$

ou, ce qui revient au même, par la suivante :

$$(20) \qquad \frac{1}{2}\mathrm{D}_{\iota}^{\frac{n-1}{2}}\left[\iota^{\frac{n-2}{2}}\int_{-1}^{1}\mathrm{F}(\omega\alpha\sqrt{\iota})\,d\alpha\right],$$

dans laquelle on devra toujours réduire $\iota$ à l'unité, après les différentiations indiquées par la caractéristique $\mathrm{D}_{\iota}$. D'ailleurs, si l'on remplace $\mathrm{F}(k)$ par $k^m$, $m$ étant un nombre pair quelconque, l'expression (20), réduite à

$$\frac{1}{2}\mathrm{D}_{\iota}^{\frac{n-1}{2}}\left[\iota^{\frac{n-2}{2}}\int_{-1}^{1}(\omega\alpha\sqrt{\iota})^m\,d\alpha\right],$$

sera équivalente au produit

$$\frac{1}{2}\,\frac{m+n-2}{2}\cdots\frac{m+5}{2}\,\frac{m+3}{2}\,\omega^m\iota^{\frac{m-1}{2}},$$

ou, ce qui revient au même, à l'expression

$$\frac{1}{2\iota}\mathrm{D}_{\iota}^{\frac{n-3}{2}}\left[\iota^{\frac{n-2}{2}}(\omega\sqrt{\iota})^m\right].$$

On aura donc, pour des valeurs paires de $m$,

$$\frac{1}{2}\mathrm{D}_{\iota}^{\frac{n-1}{2}}\left[\iota^{\frac{n-2}{2}}\int_{-1}^{1}(\omega\alpha\sqrt{\iota})^m\,d\alpha\right] = \frac{1}{2\iota}\mathrm{D}_{\iota}^{\frac{n-3}{2}}\left[\iota^{\frac{n-2}{2}}(\omega\sqrt{\iota})^m\right],$$

ou, ce qui revient au même,

$$\mathrm{D}_{\iota}^{\frac{n-1}{2}}\left[\iota^{\frac{n-1}{2}} \underset{\alpha=-1}{\overset{\alpha=1}{\mathbf{M}}} (\omega\alpha\sqrt{\iota})^m\right] = \frac{1}{2\iota}\mathrm{D}_{\iota}^{\frac{n-3}{2}}\left[\iota^{\frac{n-2}{2}}(\omega\sqrt{\iota})^m\right].$$

Eu égard à cette dernière formule, dans laquelle le facteur $\frac{1}{2\iota}$ se réduira simplement à $\frac{1}{2}$ pour $\iota = 1$, on tirera de l'équation (18), quand on y remplacera $\mathrm{F}(k)$ par $\underset{\alpha=-1}{\overset{\alpha=1}{\mathbf{M}}}\mathrm{F}(k\alpha)$, en supposant $\mathrm{F}(k)$ développable suivant les puissances ascendantes de $k$,



$$(21) \qquad \underset{\alpha=-1}{\overset{\alpha=1}{\mathbf{M}}}\mathrm{F}(k\alpha) = \frac{\pi^{\frac{1}{2}}}{2\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \underset{\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n}{\overset{\rho=1}{\mathbf{M}}} \mathrm{D}_{\iota}^{\frac{n-3}{2}}\left[\iota^{\frac{n-2}{2}}\mathrm{F}(\omega\sqrt{\iota})\right].$$

En résumé, on peut énoncer les deux propositions suivantes :

Théorème II. — *Soient $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, $n$ variables réelles; soit encore*

$$\omega = u_1\alpha_1 + u_2\alpha_2 + \ldots + u_n\alpha_n$$

*une fonction linéaire de ces variables, les coefficients $u_1, u_2, \ldots, u_n$ étant réels, et posons*

$$\rho = \sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \ldots + \alpha_n^2}, \qquad k = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + \ldots + u_n^2}.$$

*Soit enfin $\mathrm{F}(k)$ une fonction paire de $k$, développable suivant les puissances ascendantes de $k^2$. On aura pour des valeurs impaires de $n$,*

$$\mathrm{F}(k) = \frac{\pi^{\frac{1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \underset{\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n}{\overset{\rho=1}{\mathbf{M}}} \mathrm{D}_{\iota}^{\frac{n-1}{2}}\left[\iota^{\frac{n-2}{2}}\mathrm{F}(\omega\sqrt{\iota})\right],$$

*pourvu qu'après avoir effectué les différentiations indiquées par la caractéristique $\mathrm{D}_{\iota}$ on réduise le paramètre $\iota$ à l'unité. On aura d'ailleurs, comme l'on sait,*

$$\Gamma\left(\frac{n}{2}\right) = \frac{1.3.5\ldots(n-2)}{2^{\frac{n-1}{2}}}\pi^{\frac{1}{2}}.$$

Théorème III. — *Les mêmes choses étant posées que dans le théorème précédent, si l'on nomme $\mathrm{F}(k)$ une fonction développable suivant les puissances ascendantes de $k$, on aura*

$$\underset{\alpha=-1}{\overset{\alpha=1}{\mathbf{M}}}\mathrm{F}(k\alpha) = \frac{2\pi^{\frac{1}{2}}}{2\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \underset{\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n}{\overset{\rho=1}{\mathbf{M}}} \mathrm{D}_{\iota}^{\frac{n-3}{2}}\left[\iota^{\frac{n-2}{2}}\mathrm{F}(\omega\sqrt{\iota})\right],$$

*pourvu qu'après les différentiations indiquées par la caractéristique $\mathrm{D}_{\iota}$ on réduise $\iota$ à l'unité.*