MÉMOIRE

SUR LA

THÉORIE DES PROJECTIONS ORTHOGONALES

I. — *Considérations générales.*

La considération des projections orthogonales, qui permet d'établir assez facilement les théorèmes fondamentaux des deux trigonométries et de la géométrie analytique, a quelquefois l'inconvénient d'introduire dans le calcul un grand nombre de lettres destinées à représenter, avec les longueurs mesurées sur certaines droites, les trois projections de chacune de ces longueurs. Mais on peut remédier, au moins en partie, à cet inconvénient, et, en abrégeant la démonstration des théorèmes, donner au langage analytique plus de précision et plus de clarté, à l'aide d'une notation très simple que je vais indiquer en peu de mots.

Soient

$$r, \quad s, \quad t, \quad \dots$$

diverses longueurs dont chacune se mesure suivant une droite déterminée et dans un sens déterminé. Non seulement nous désignerons par (r, s) le plan qui renfermera, ou les deux longueurs r, s, ou deux droites parallèles à ces deux longueurs, et par $(\widehat{r, s})$, suivant l'usage, l'angle que formera la direction de r avec la direction de s; mais, de plus, nous emploierons la notation

$$s_r$$

pour représenter la projection absolue de s sur une droite menée perpendiculairement à r dans le plan (r, s), et, pareillement, nous emploierons la notation

$$t_{r,s}$$

pour représenter la projection absolue de t sur une droite perpendiculaire au plan (r, s). Ces conventions étant adoptées, l'angle $(\widehat{r, s})$, compris entre deux longueurs mesurées dans des directions quelconques, pourra être un angle aigu ou obtus, par conséquent l'un quelconque des angles renfermés entre les deux limites extrêmes 0, π. Mais l'angle $(\widehat{s, s_r})$, compris entre une longueur s et la projection absolue de cette longueur sur une droite perpendiculaire à la direction de r, sera toujours un angle aigu renfermé entre les limites extrêmes 0, $\frac{\pi}{2}$. D'ailleurs on établira sans peine les propositions suivantes :

Théorème I. — *Soient*

$$r, \quad s$$

deux longueurs dont chacune se mesurera suivant une droite déterminée et dans un sens déterminé. L'angle aigu $(\widehat{s, s_r})$ *aura pour complément l'angle* $(\widehat{r, s})$ *ou le supplément de* $(\widehat{r, s})$, *en sorte que l'on aura*

$$\cos(\widehat{s, s_r}) = \sin(\widehat{r, s}), \qquad \sin(\widehat{s, s_r}) = \pm\cos(\widehat{r, s}). \tag{1}$$

Démonstration. — En effet, l'angle compris entre deux droites qui ne sont pas situées dans un même plan, n'étant autre chose que l'angle compris entre deux autres droites parallèles aux deux premières et situées dans un même plan, il suffira, pour établir généralement le théorème I, de le démontrer dans le cas où les trois longueurs

$$r, \quad s, \quad s_r$$

sont renfermées dans un seul plan (r, s). Mais alors le théorème devient évident, puisque $(\widehat{r, s})$, $(\widehat{s, s_r})$ représentent deux angles formés, par la direction de s, avec les directions de r et de s_r, c'est-à-dire de deux longueurs mesurées sur deux axes qui se coupent à angles droits.

Théorème II. — *Les mêmes choses étant posées que dans le théorème I,*

on aura

$$s_r = s\cos(\widehat{s, s_r}), \tag{2}$$

et

$$s_r = s\sin(\widehat{r, s}). \tag{3}$$

Démonstration. — En effet, si l'on divise par la longueur s la projection absolue de cette longueur sur une droite quelconque, on obtiendra pour quotient, comme on sait, le cosinus de l'angle aigu compris entre la direction de s et la droite dont il s'agit. Donc, en faisant coïncider cette droite avec celle sur laquelle se mesure la projection s_r, on aura

$$\frac{s_r}{s} = \cos(\widehat{s, s_r}),$$

ou, ce qui revient au même,

$$s_r = s\cos(\widehat{s, s_r}),$$

et par suite, eu égard à la première des formules (1),

$$s_r = s\sin(\widehat{r, s}).$$

Théorème III. — *Soient*

$$r, \quad s, \quad t$$

trois longueurs dont chacune se mesure suivant une droite déterminée et dans un sens déterminé. Supposons d'ailleurs que, des longueurs

$$s_r, \quad t_r,$$

mesurées sur deux droites perpendiculaires à r, *la première* s_r *soit projetée sur la seconde* t_r. *La projection ainsi obtenue sera la même que la projection de* s *sur* t_r, *et l'on aura*

$$s\cos(\widehat{s, t_r}) = s_r\cos(\widehat{s_r, t_r}). \tag{4}$$

Démonstration. — Pour que le théorème III se trouve généralement démontré, il suffira évidemment de l'établir dans le cas où les trois longueurs r, s, t partent d'un même point O. Si, d'ailleurs, comme on peut le faire, on prend pour s_r la perpendiculaire abaissée sur r de l'extrémité A de la longueur s, et si, par la direction de r, on mène un plan perpendiculaire à t_r, les projections absolues de s et de s_r sur t_r se confondront l'une et l'autre avec la perpendiculaire abaissée du point A sur ce plan. Donc ces deux projections, représentées par les valeurs numériques des deux produits

$$s\cos\left(\widehat{s, t_r}\right), \qquad s_r\cos\left(\widehat{s_r, t_r}\right),$$

seront égales entre elles. D'ailleurs, ces deux produits seront tous deux positifs si les directions des longueurs s, t se mesurent d'un même côté du plan dont il s'agit, et tous deux négatifs dans la supposition contraire. Donc les deux produits

$$s\cos(s, t_r), \qquad s_r\cos(s_r, t_r)$$

offriront, dans tous les cas, non seulement des valeurs numériques égales, mais encore le même signe; donc ils seront égaux, et la formule (3) sera vérifiée.

Corollaire I. — Si, après avoir substitué, dans la formule (3), la valeur de s_r tirée de l'équation (2) ou (3), on efface, dans les deux membres, le facteur commun s, on obtiendra l'équation

$$\cos\left(\widehat{s, t_r}\right)=\cos\left(\widehat{s, s_r}\right)\cos\left(\widehat{t_r, s_r}\right), \tag{5}$$

ou

$$\cos\left(\widehat{s, t_r}\right)=\sin\left(\widehat{r, s}\right)\cos\left(\widehat{t_r, s_r}\right). \tag{6}$$

Corollaire II. — La direction de $s_{r,t}$ étant, comme celle de t_r, perpendiculaire à la direction de r, on pourra, dans les formules (4), (5), (6), remplacer t_r par $s_{r,t}$. Donc les formules (5), (6) entraineront les suivantes :

$$\cos\left(\widehat{s, t_{r,s}}\right)=\cos\left(\widehat{s, s_r}\right)\cos\left(\widehat{s_{r,t}, s_r}\right), \tag{7}$$

$$\cos\left(\widehat{s, s_{r,t}}\right)=\sin\left(\widehat{r, s}\right)\cos\left(\widehat{s_{r,t}, s_r}\right). \tag{8}$$

D'ailleurs les longueurs

$$s_r, \quad t_r, \quad s_{r,t},$$

dont les trois directions sont perpendiculaires à la direction de r, peuvent être censées renfermées dans un même plan, la direction de $s_{r,t}$ étant elle-même perpendiculaire au plan $\left(\widehat{r, t}\right)$, et, par suite, à la direction de t_r. Donc l'angle $\left(\widehat{s_{r,t}, s_r}\right)$ doit avoir pour complément l'angle $\left(\widehat{s_r, t_r}\right)$ ou le supplément de $\left(\widehat{s_r, t_r}\right)$, et à l'équation (8) on peut joindre la formule

$$\cos\left(\widehat{s_{r,t}, s_r}\right)=\sin\left(\widehat{s_r, t_r}\right), \tag{9}$$

en vertu de laquelle la formule (8) se réduit à

$$\cos\left(\widehat{s, s_{r,t}}\right)=\sin\left(\widehat{r, s}\right)\sin\left(\widehat{s_r, t_r}\right). \tag{10}$$

En conséquence, on peut énoncer la proposition suivante :

Théorème IV. — *Soient*

$$r, \quad s, \quad t$$

trois longueurs dont chacune se mesure sur une droite déterminée et dans une direction déterminée. On aura

$$\cos\left(\widehat{s, t_r}\right)=\sin\left(\widehat{r, s}\right)\cos\left(\widehat{s_r, t_r}\right),$$

et

$$\cos\left(\widehat{s, s_{r,t}}\right)=\sin\left(\widehat{r, s}\right)\sin\left(\widehat{s_r, t_r}\right).$$

Supposons maintenant qu'un point mobile P *passe de l'origine* O *d'une certaine longueur r à l'extrémité* A *de cette même longueur, en parcourant les divers côtés u, v, w, ... d'une portion de polygone qui joigne le point* O *au point* A, *et attribuons à chacun de ces côtés la direction indiquée par le mouvement du point* P. *Si l'on projette les diverses longueurs*

$$r, \quad u, \quad v, \quad w, \quad \ldots$$

sur la direction d'une autre longueur s, la projection algébrique de r sera équivalente (*voir* la page 157) *à la somme des projections algébriques des longueurs u, v, w, ..., et l'on aura, en conséquence,*

$$r\cos\left(\widehat{r, s}\right)=u\cos\left(\widehat{u, s}\right)+v\cos\left(\widehat{v, s}\right)+w\cos\left(\widehat{w, s}\right)+\ldots. \tag{11}$$

Si l'on réduit à trois les longueurs u, v, w, ..., elles exprimeront les côtés d'un parallélipipède dont r sera la diagonale, et alors la formule (11) donnera

$$\cos(\widehat{r,s}) = \frac{u}{r}\cos(\widehat{u,s}) + \frac{v}{r}\cos(\widehat{v,s}) + \frac{w}{r}\cos(\widehat{w,s}). \tag{12}$$

Si, d'ailleurs, on pose, pour abréger,

$$U = u_{v,w}, \qquad V = v_{w,u}, \qquad W = w_{u,v}, \tag{13}$$

U, V, W représenteront les trois dimensions de ce parallélipipède, mesurées sur des droites perpendiculaires aux faces. Enfin, comme, en projetant les longueurs r et u sur la direction U, on obtiendra évidemment pour projection la longueur U elle-même, on aura encore

$$U = r\cos(\widehat{r,U}) = u\cos(\widehat{u,U}),$$

et, par suite,

$$\frac{u}{r} = \frac{\cos(\widehat{r,U})}{\cos(\widehat{u,U})}. \tag{14}$$

On trouvera de même :

$$\left\{\begin{aligned} \frac{v}{r} &= \frac{\cos(\widehat{r,V})}{\cos(\widehat{v,V})}, \\ \frac{w}{r} &= \frac{\cos(\widehat{r,W})}{\cos(\widehat{w,W})}; \end{aligned}\right. \tag{14'}$$

et en substituant les valeurs précédentes de $\frac{u}{r}$, $\frac{v}{r}$, $\frac{w}{r}$ dans la formule (12), on en tirera

$$\cos(\widehat{r,s}) = \frac{\cos(\widehat{s,u})\cos(\widehat{r,U})}{\cos(\widehat{u,U})} + \frac{\cos(\widehat{s,v})\cos(\widehat{r,V})}{\cos(\widehat{v,V})} + \frac{\cos(\widehat{s,w})\cos(\widehat{r,W})}{\cos(\widehat{w,W})}. \tag{15}$$

Ajoutons que cette dernière formule continuera évidemment de subsister : 1° quand on échangera entre elles les longueurs r, s; 2° quand

on remplacera chacune des longueurs u, v, w, U, V, W par une autre longueur portée sur la même direction, ou même sur la direction opposée, attendu que, dans le second membre de la formule (15), chaque terme reste inaltérable, quand deux des cosinus qu'il renferme viennent à changer de signe. Cela posé, il est clair que, dans la formule (15), les lettres u, v, w pourront être censées représenter trois longueurs quelconques mesurées, à partir d'un seul point O, dans trois directions arbitrairement choisies, et les lettres U, V, W trois autres longueurs quelconques mesurées, à partir du même point O, dans trois directions respectivement perpendiculaires aux trois plans (v, w), (w, u), (u, v), la longueur U étant mesurée du même côté que u par rapport au plan (v, w), la longueur V du même côté que v par rapport au plan (w, u), et la longueur W du même côté que w par rapport au plan (u, v). On se trouve ainsi ramené au théorème de la page 158. D'ailleurs l'équation (15), qui renferme ce théorème, comprend, comme cas particulier, la formule bien connue

$$\cos(\widehat{r,s}) = \cos(\widehat{r,u})\cos(\widehat{s,u}) + \cos(\widehat{r,v})\cos(\widehat{s,v}) + \cos(\widehat{r,w})\cos(\widehat{s,w}), \tag{16}$$

qui se démontre de la même manière, et qui se rapporte au cas où les trois longueurs

$$u, \quad v, \quad w$$

se mesurent sur trois axes perpendiculaires entre eux.

Si les longueurs r, s étaient comprises dans le plan (u, v), l'équation (16) donnerait

$$\cos(\widehat{r,s}) = \cos(\widehat{r,u})\cos(\widehat{s,u}) + \cos(\widehat{r,v})\cos(\widehat{s,v}). \tag{17}$$

Il y a plus; pour que l'équation (17) subsiste, il suffit que l'un des angles

$$(\widehat{r,w}), \quad (\widehat{s,w})$$

devienne droit, c'est-à-dire, en d'autres termes, que l'une des longueurs r, s se mesure sur une droite, ou comprise dans le plan (u, v), ou parallèle à ce plan. Enfin l'équation (16) se réduira simplement à

$$\cos(\widehat{r,s}) = \cos(\widehat{r,u})\cos(\widehat{s,u}), \tag{18}$$

si les droites sur lesquelles se mesurent les longueurs r, s sont perpendiculaires, l'une à la direction de v, l'autre à la direction de w. Mais alors, des deux longueurs v, w, l'une, étant perpendiculaire aux directions de r et de u, sera, par suite, perpendiculaire au plan (r, u), tandis que l'autre, étant perpendiculaire aux directions de s et de u, sera perpendiculaire au plan (s, u). Donc, puisque les longueurs v, w se coupent à angles droits, les plans (r, u), (s, u) se couperont eux-mêmes à angles droits. Réciproquement, si les deux plans (r, u), (s, u) se coupent à angles droits, alors, pour obtenir trois directions perpendiculaires entre elles, il suffira de joindre à la direction de u les directions de deux longueurs v, w mesurées sur deux droites respectivement perpendiculaires à ces deux plans, et l'équation (16) se réduira immédiatement à la formule (18).

En résumant ce qu'on vient de dire, on obtient les trois propositions suivantes, dont la première, connue depuis longtemps, renferme les deux autres comme cas particuliers.

THÉORÈME V. — *Soient*

$$u, \quad v, \quad w$$

trois longueurs mesurées sur trois axes rectangulaires, et

$$r, \quad s$$

deux autres longueurs mesurées sur des droites quelconques. On aura

$$\cos(\widehat{r,s}) = \cos(\widehat{r,u})\cos(\widehat{s,u}) + \cos(\widehat{r,v})\cos(\widehat{s,v}) + \cos(\widehat{r,w})\cos(\widehat{s,w}).$$

THÉORÈME VI. — *Soient*

$$u, \quad v$$

deux longueurs mesurées sur deux axes qui se coupent à angles droits, et

$$r, \quad s$$

deux autres longueurs dont l'une se mesure sur une droite comprise dans le plan (u, v) ou parallèle à ce plan. On aura

$$\cos(\widehat{r,s}) = \cos(\widehat{r,u})\cos(\widehat{s,u}) + \cos(\widehat{r,v})\cos(\widehat{s,v}).$$

THÉORÈME VII. — *Nommons*

$$u$$

une longueur mesurée dans une direction quelconque, et

$$r, \quad s$$

deux autres longueurs dont les directions soient telles que les plans (r, u), (s, u) se coupent à angles droits. On aura

$$\cos(\widehat{r,s}) = \cos(\widehat{r,u})\cos(\widehat{s,u}).$$

Corollaire. — Pour déduire du théorème précédent la formule (5), il suffit de remplacer les trois longueurs

$$u, \quad r, \quad s$$

par les trois longueurs

$$s_r, \quad t_r, \quad s,$$

qui remplissent évidemment la condition énoncée, attendu que les plans

$$(s, s_r) \quad \text{et} \quad (t_r, s_r),$$

dont l'un peut être censé renfermer la direction de r, l'autre étant perpendiculaire à cette même direction, se coupent à angles droits.

II. — *Sur les relations qui existent entre les cosinus et sinus des angles que forment l'une avec l'autre trois droites parallèles à un même plan.*

On déduit aisément des principes établis dans le paragraphe I les relations qui existent entre les sinus et cosinus des angles que forment entre elles trois droites parallèles à un même plan, ou, ce qui revient au même, trois droites comprises dans un même plan et prolongées indéfiniment à partir du même point O dans trois directions déterminées. En effet, nommons

$$r, \quad s, \quad t$$

trois longueurs mesurées dans ces trois directions, et u, v deux autres longueurs qui se mesurent sur deux axes rectangulaires tracés à volonté dans le plan des trois premières. La formule (17) du paragraphe I donnera

$$(1) \qquad \cos(\widehat{r, s}) = \cos(\widehat{r, u})\cos(\widehat{s, u}) + \cos(\widehat{r, v})\cos(\widehat{s, v}).$$

D'ailleurs, la direction de s_i étant perpendiculaire à celle de t, rien n'empêchera de prendre

$$u = t, \qquad v = s_i.$$

On aura donc encore

$$(2) \qquad \cos(\widehat{r, s}) = \cos(\widehat{r, t})\cos(\widehat{s, t}) + \cos(\widehat{r, s_i})\cos(\widehat{s, s_i}).$$

Si, dans cette dernière formule, on échange entre elles les longueurs r, s, on trouvera

$$\cos(\widehat{r, s}) = \cos(\widehat{r, t})\cos(\widehat{s, t}) + \cos(\widehat{s, r_i})\cos(\widehat{r, r_i});$$

puis, en substituant à la longueur s la longueur s_i, on obtiendra l'équation

$$(3) \qquad \cos(\widehat{r, s_i}) = \cos(\widehat{r_i, s_i})\cos(\widehat{r, r_i})$$

entièrement semblable à la formule (5) du paragraphe I. Cela posé l'équation (2) donnera

$$(4) \qquad \cos(\widehat{r, s}) = \cos(\widehat{r, t})\cos(\widehat{s, t}) + \cos(\widehat{r, r_i})\cos(\widehat{s, s_i})\cos(\widehat{r_i, s_i}).$$

Mais, d'autre part, r_i, s_i étant perpendiculaires à t, on aura

$$\cos(\widehat{r, r_i}) = \sin(\widehat{r, t}), \qquad \cos(\widehat{s, s_i}) = \sin(\widehat{s, t}).$$

Donc la formule (4) pourra être réduite à

$$(5) \qquad \cos(\widehat{r, s}) = \cos(\widehat{r, t})\cos(\widehat{s, t}) + \sin(\widehat{r, t})\sin(\widehat{s, t})\cos(\widehat{r_i, s_i}).$$

Enfin, puisque les longueurs r_i, s_i se mesureront sur des droites situées dans un même plan, et perpendiculaires à t, on aura nécessairement

$$\cos(\widehat{r_i, s_i}) = \pm 1,$$

et, par suite,

$$(6) \qquad \cos(\widehat{r, s}) = \cos(\widehat{r, t})\sin(\widehat{s, t}) \pm \sin(\widehat{r, t})\sin(\widehat{s, t_i}),$$

le signe $\pm$ devant être réduit au signe $-$ ou au signe $+$, suivant que les directions des longueurs r, s comprendront ou ne comprendront pas entre elles la direction de la longueur t.

La formule (6) et celles que l'on peut en déduire par des échanges opérés entre les trois longueurs

$$r, \quad s, \quad t,$$

expriment des relations existantes entre les cosinus et sinus des angles

$$(\widehat{s, t}), \quad (\widehat{t, r}), \quad (\widehat{r, s}),$$

que forment, l'une avec l'autre, les directions de ces trois longueurs. Concevons que, pour abréger, on représente ces trois angles à l'aide des trois lettres

$$a, \quad b, \quad c.$$

Alors, si les directions des longueurs r, s comprennent entre elles la direction de la longueur t, on aura

$$(\widehat{r, s}) = a + b,$$

et, par suite, la formule (6), dans laquelle le double signe $\pm$ devra être réduit au signe $-$, donnera

$$(7) \qquad \cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b.$$

Si, au contraire, les directions de r et de s sont situées d'un même côté par rapport à la direction de t, on aura

$$(\widehat{r, s}) = \pm (a - b),$$

et, par suite, la formule (6), dans laquelle le double signe $\pm$ devra se réduire au signe $+$, donnera

$$(8) \qquad \cos(a - b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$$

On se trouve ainsi ramené aux formules connues qui déterminent le cosinus de la somme ou de la différence de deux angles a, b en fonction des sinus et cosinus de ces deux angles. A la vérité, la démonstration ici donnée de ces formules semble exiger que chacun des angles a, b soit positif et inférieur à deux droits. Mais évidemment les formules (7), (8) ne seront pas altérées si l'on fait croître ou diminuer l'un quelconque des angles a, b d'un multiple de la demi-circonférence π. Alors, en effet, chacun des termes que renferment ces formules conservera la même valeur numérique en changeant ou en ne changeant pas de signe, suivant que le multiple en question sera le produit de π par un nombre impair ou par un nombre pair; et, d'ailleurs, il est clair que, pour obtenir un angle quelconque, positif ou négatif, il suffira toujours de faire croître ou diminuer un certain angle positif, inférieur à deux droits, d'un multiple de π. Donc, pour que les formules (7), (8) se trouvent généralement démontrées, il suffit de les établir dans le cas particulier où chacun des angles a, b reste compris entre les deux limites extrêmes 0, π.

Si, dans les formules (7), (8), obtenues comme on vient de le dire, on remplace a par $a+\frac{\pi}{2}$, on obtiendra immédiatement les équations connues

$$\sin(a+b)=\sin a\cos b+\sin b\cos a, \tag{9}$$

$$\sin(a-b)=\sin a\cos b-\sin b\cos a, \tag{10}$$

qui déterminent le sinus de la somme ou de la différence de deux angles a, b, en fonction des sinus et cosinus de ces deux angles.

Enfin, des formules (7), (8), combinées l'une avec l'autre par voie d'addition, on tirera immédiatement

$$\cos(a+b)+\cos(a-b)=2\cos a\cos b, \tag{11}$$

puis, en posant

$$a+b=p, \qquad a-b=q,$$

on trouvera

$$\cos p+\cos q=2\cos\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2}. \tag{12}$$

Il est bon d'observer que, si, dans la formule (4), on substitue à la

longueur s la longueur t_s, on obtiendra la suivante :

$$\cos(\widehat{r,t_s})=\cos(\widehat{r,t})\cos(\widehat{t,t_s})+\cos(\widehat{r,r_t})\cos(\widehat{s_t,t_s})\cos(\widehat{r_t,s_t}). \tag{13}$$

D'ailleurs si, dans la formule (3), on échange entre elles les deux lettres s et t, on en tirera

$$\cos(\widehat{r,t_s})=\cos(\widehat{r_s,t_s})\cos(\widehat{r,r_s}). \tag{14}$$

Ajoutons que, si une droite mobile, comptée à partir du point O, tourne autour de ce point de manière à s'appliquer successivement sur la direction de s, puis sur la direction de t, une longueur mesurée sur une perpendiculaire à la droite mobile s'appliquera successivement, non sur la direction des deux longueurs s_t, t_s, situées, la première, du même côté que s, par rapport à t, la seconde, du même côté que t, par rapport à s, mais sur l'une de ces deux directions et sur le prolongement de l'autre. Donc, par suite, l'angle $(\widehat{t_s,s_t})$ sera égal, non pas à l'angle $(\widehat{s,t})$, mais au supplément de $(\widehat{s,t})$, et l'on aura

$$\cos(\widehat{s_t,t_s})=-\cos(\widehat{s,t}). \tag{15}$$

Or, en vertu de cette dernière formule, jointe à l'équation (14), la formule (13) donnera

$$\cos(\widehat{r_s,t_s})\cos(\widehat{r,r_s})=\cos(\widehat{r,t})\cos(\widehat{t,t_s})-\cos(\widehat{r,r_t})\cos(\widehat{s,t})\cos(\widehat{r_t,s_t}). \tag{16}$$

Mais, d'autre part, on aura

$$\cos(\widehat{r,r_s})=\sin(\widehat{r,s}), \qquad \cos(\widehat{r,r_t})=\sin(\widehat{r,t}), \qquad \cos(\widehat{t,t_s})=\sin(\widehat{s,t}).$$

Donc la formule (16) pourra être réduite à

$$\cos(\widehat{r_s,t_s})\sin(\widehat{r,s})=\cos(\widehat{r,t})\sin(\widehat{s,t})-\sin(\widehat{r,t})\cos(\widehat{s,t})\cos(\widehat{r_t,t_s}). \tag{17}$$

Cela posé, en représentant, comme ci-dessus, par a et b les deux angles $(\widehat{s,t})$, $(\widehat{r,t})$, et supposant d'abord que les directions r, s comprennent entre elles la direction de la longueur t, on trouvera

$$(\widehat{r,s}) = a+b, \qquad \cos(\widehat{r_s, t_s}) = 1, \qquad \cos(\widehat{r_t, s_t}) = -1;$$

en sorte que l'équation (17) se réduira immédiatement à l'équation (9). Si, au contraire, les directions de r et de s sont situées d'un même côté par rapport à la direction de t, on aura

$$\cos(\widehat{r_t, s_t}) = 1,$$

et, de plus,

$$(\widehat{r,s}) = a-b, \qquad \cos(\widehat{r_s, t_s}) = 1,$$

ou

$$(\widehat{r,s}) = b-a, \qquad \cos(\widehat{r_s, t_s}) = -1,$$

en sorte que l'équation (17) se réduira simplement à l'équation (10).

III. — *Sur la résolution des triangles rectilignes.*

Soient r, s, t les trois côtés d'un triangle quelconque. Si, en prenant le côté r pour base, on adopte les notations établies dans le paragraphe I, on pourra représenter la hauteur par s_r et par t_r. On aura donc

$$s_r = t_r. \tag{1}$$

Mais, d'autre part, on aura [*voir* la formule (3) du paragraphe I]

$$s_r = s\sin(\widehat{r,s}), \qquad t_r = t\sin(\widehat{r,t}). \tag{2}$$

Donc la formule (1) donnera

$$s\sin(\widehat{r,s}) = t\sin(\widehat{r,t}),$$

ou, ce qui revient au même,

$$\frac{\sin(\widehat{t,r})}{s} = \frac{\sin(\widehat{r,s})}{t}.$$

Cette dernière équation devant subsister quand on échange entre eux

les côtés r, s, on en conclura

$$\frac{\sin(\widehat{s,t})}{r} = \frac{\sin(\widehat{t,r})}{s} = \frac{\sin(\widehat{r,s})}{t}. \tag{3}$$

Si maintenant on nomme

$$\alpha, \quad \beta, \quad \gamma$$

les trois angles du triangle respectivement opposés aux côtés

$$r, \quad s, \quad t,$$

l'angle $(\widehat{s,t})$ se réduira évidemment, ou à l'angle α, ou au supplément de α, et l'on aura, par suite,

$$\sin(\widehat{s,t}) = \sin\alpha.$$

On trouvera de même

$$\sin(\widehat{t,r}) = \sin\beta,$$

$$\sin(\widehat{r,s}) = \sin\gamma.$$

Donc la formule (4) pourra être réduite à

$$\frac{\sin\alpha}{r} = \frac{\sin\beta}{s} = \frac{\sin\gamma}{t}. \tag{4}$$

On se trouve ainsi ramené à cette proposition bien connue, que *dans un triangle les côtés sont proportionnels aux sinus des angles opposés*.

Rappelons d'ailleurs que, dans la formule (4), les trois angles positifs

$$\alpha, \quad \beta, \quad \gamma$$

seront toujours liés entre eux par la formule

$$\alpha+\beta+\gamma = \pi, \tag{5}$$

de laquelle on tire

$$\pi - \alpha = \beta + \gamma,$$

et, par suite,

$$\sin\alpha = \sin(\beta+\gamma), \qquad \cos\alpha = -\cos(\beta+\gamma). \tag{6}$$

Or, comme je l'ai fait voir dans l'*Analyse algébrique* (note I) [1], et dans les *Résumés analytiques*, on peut, des équations (4), (5), (6) jointes à

[1] *Œuvres de Cauchy*, série II, t. III, p. 357.

la formule (12) du paragraphe II, ou bien encore aux équations (7) et (9) du même paragraphe, déduire immédiatement, avec la plus grande facilité, les diverses formules de trigonométrie qui servent à la résolution des triangles rectilignes.

En terminant ce paragraphe, nous observerons que, si l'on multiplie la base r du triangle donné par la hauteur s_r correspondante à cette base, le produit

$$rs_r,$$

ainsi obtenu, sera équivalent au double de la surface du triangle. Donc, si l'on nomme A cette surface, on aura

$$\mathrm{A} = \frac{1}{2} rs_r = \frac{1}{2} rs \sin\left(\widehat{r, s}\right). \tag{7}$$

IV. — *Sur la trigonométrie sphérique.*

Soient

$$r, \quad s, \quad t$$

trois longueurs mesurées, à partir d'un même point O, dans trois directions déterminées. Ces trois longueurs seront les trois arêtes d'un certain angle solide trièdre formé par les trois plans

$$(s, t), \quad (t, r), \quad (r, s);$$

et comme

$$s_r, \quad t_r$$

représenteront les projections absolues des longueurs s, t sur des perpendiculaires élevées, dans les deux plans (r, s), (r, t), à la commune intersection r de ces deux plans, il est clair que

$$\left(\widehat{s_r, t_r}\right)$$

représentera l'angle dièdre opposé, dans l'angle solide dont il s'agit, à l'angle plan (s, t). Cela posé, faisons, pour abréger,

$$a = \left(\widehat{s, t}\right), \qquad b = \left(\widehat{t, r}\right), \qquad c = \left(\widehat{r, s}\right),$$
$$\alpha = \left(\widehat{s_r, t_r}\right), \qquad \beta = \left(\widehat{t_s, r_s}\right), \qquad \gamma = \left(\widehat{r_t, s_t}\right);$$

et traçons, sur la surface de la sphère dont le rayon est l'unité, le

triangle dont les sommets coïncident avec les points où cette surface est traversée par les directions des arêtes r, s, t. Les six lettres

$$a, \quad b, \quad c; \qquad \alpha, \quad \beta, \quad \gamma$$

représenteront les trois côtés du triangle sphérique construit comme on vient de le dire, et les trois angles opposés à ces côtés. Ce n'est pas tout; si l'on pose, pour abréger,

$$R = r_{s,t}, \qquad S = s_{t,r}, \qquad T = t_{r,s},$$

les trois lettres

$$R, \quad S, \quad T$$

représenteront les projections absolues des trois longueurs

$$r, \quad s, \quad t$$

sur trois droites respectivement perpendiculaires aux trois plans

$$(s, t), \quad (t, r), \quad (r, s);$$

et les trois longueurs

$$r, \quad s, \quad t,$$

considérées comme arêtes d'un tétraèdre, formeront, avec les faces opposées à ces arêtes, des angles dont les sinus seront respectivement égaux aux cosinus des trois angles λ, μ, ν, déterminés par les formules

$$\lambda = \left(\widehat{r, R}\right), \qquad \mu = \left(\widehat{s, S}\right), \qquad \nu = \left(\widehat{t, T}\right).$$

J'ajoute que les relations existantes entre les angles

$$a, \quad b, \quad c; \qquad \alpha, \quad \beta, \quad \gamma; \qquad \lambda, \quad \mu, \quad \nu$$

pourront être aisément découvertes à l'aide des principes établis dans le paragraphe I. Entrons, à ce sujet, dans quelques détails.

Observons d'abord que si, après avoir construit un parallélipipède dont les arêtes soient les trois longueurs

$$r, \quad s, \quad t,$$

on prend pour base de ce parallélipipède le parallélogramme dont les côtés sont les longueurs

$$s, \quad t,$$

et pour base de ce parallélogramme l'arête t, l'aire A du parallélogramme et le volume V du parallélipipède se détermineront par les formules

$$(1)\qquad A = ts_t, \qquad V = A r_{s,t},$$

desquelles on tirera

$$(2)\qquad V = ts_t r_{s,t}.$$

Comme on aura, d'ailleurs,

$$s_t = s\cos(\widehat{s, s_t}) = s\sin(\widehat{s, t}),$$

et

$$r_{s,t} = r\cos(\widehat{r, r_{s,t}}),$$

la formule (2) donnera

$$(3)\qquad V = rst\sin(\widehat{s, t})\cos(\widehat{r, r_{s,t}}).$$

Donc, si l'on désigne par θrst le volume du parallélipipède, ou, ce qui revient au même, si l'on pose

$$(4)\qquad \theta = \frac{V}{rst},$$

on aura

$$\theta = \sin(\widehat{s, t})\cos(\widehat{r, r_{s,t}}).$$

Si, dans cette dernière formule, on échange entre elles les lettres r, s, t, on obtiendra deux nouvelles valeurs de θ, et l'on trouvera

$$(5)\qquad \theta = \sin(\widehat{s, t})\cos(\widehat{r, r_{s,t}}) = \sin(\widehat{t, r})\cos(\widehat{s, s_{t,r}}) = \sin(\widehat{r, s})\cos(\widehat{t, t_{r,s}}),$$

ou, ce qui revient au même,

$$(6)\qquad \theta = \sin(\widehat{s, t})\cos(\widehat{r, R}) = \sin(\widehat{t, r})\cos(\widehat{s, S}) = \sin(\widehat{r, s})\cos(\widehat{t, T}),$$

par conséquent

$$(7)\qquad \theta = \sin a\cos\lambda = \sin b\cos\mu = \sin c\cos\nu.$$

La valeur de θ fournie par chacune des équations (5), (6), (7) n'est évidemment autre chose que la valeur de V correspondante au cas où l'on aurait

$$r = 1, \qquad s = 1, \qquad t = 1,$$

c'est-à-dire le volume du parallélipipède qui a pour arêtes trois longueurs équivalentes à l'unité, et mesurées, à partir du point O, sur les

directions de r, s, t. Ce volume est d'ailleurs sextuple du volume du tétraèdre, que l'on peut construire avec les mêmes arêtes, et que, pour abréger, je désignerai par la notation (r, s, t).

Il est bon d'observer encore que, les directions des longueurs S et T étant perpendiculaires à la direction de r, celle-ci sera perpendiculaire au plan (S, T). Pareillement la direction de s sera perpendiculaire au plan (T, R), et la direction de t au plan $(\widehat{R, S})$. Donc, si, comme on peut le supposer, les trois longueurs R, S, T se mesurent, ainsi que r, s, t, sur des droites qui partent du point O, le tétraèdre (r, s, t), qui aura pour arêtes les trois longueurs r, s, t, et le tétraèdre (R, S, T) qui aura pour arêtes les trois longueurs R, S, T, jouiront de cette propriété remarquable, que les arêtes de l'un seront perpendiculaires aux faces de l'autre. Ajoutons que, si une face mobile, et limitée par l'arête r, tourne autour de cette arête de manière à s'appliquer successivement sur la face (r, t), puis sur la face (r, s), une longueur mesurée à partir du point O, dans une direction perpendiculaire au plan de la face mobile, s'appliquera successivement non sur les directions des longueurs S, T situées, la première du même côté que s, par rapport au plan (r, t), la seconde du même côté que t, par rapport au plan (r, s), mais sur l'une des deux directions S, T et sur le prolongement de l'autre. Cela posé, les deux triangles sphériques qui auront pour sommets les points où les arêtes des deux tétraèdres (r, s, t), (R, S, T) traverseront la surface de la sphère dont le rayon est l'unité, seront évidemment ce qu'on appelle deux triangles *supplémentaires* l'un de l'autre, c'est-à-dire deux triangles dont l'un a pour côtés les suppléments des angles de l'autre.

Soit maintenant Θ le volume du parallélipipède qui aurait pour arêtes trois longueurs équivalentes à l'unité, et mesurées, à partir du point O, sur les directions de R, S, T. A la formule (5) on pourra joindre la suivante

$$(8)\qquad \Theta = \sin(\widehat{S, T})\cos(\widehat{R, R_{S,T}}) = \sin(\widehat{T, R})\cos(\widehat{S, S_{T,R}}) = \sin(\widehat{R, S})\cos(\widehat{T, T_{R,S}}).$$

Mais les longueurs r, $R_{S,T}$, dont chacune sera perpendiculaire au plan (S, T), se mesureront, à partir du point O, sur une même droite; et comme l'angle aigu, formé par cette droite avec la direction de R, pourra être représenté par chacune des notations

$$(\widehat{r, R}), \quad (\widehat{R, R_{S,T}}),$$

on aura nécessairement

$$(\widehat{R, R_{S,T}}) = (\widehat{r, R}).$$

On trouvera de même

$$(\widehat{S, S_{T,R}}) = (\widehat{s, S}),$$
$$(\widehat{T, T_{R,S}}) = (\widehat{t, T});$$

donc l'équation (8) donnera

$$\Theta = \sin(\widehat{S, T})\cos(\widehat{r, R}) = \sin(\widehat{T, R})\cos(\widehat{s, S}) = \sin(\widehat{R, S})\cos(\widehat{t, T}), \tag{9}$$

ou, ce qui revient au même,

$$\Theta = \sin\alpha\cos\lambda = \sin\beta\cos\mu = \sin\gamma\cos\nu. \tag{10}$$

Si l'on combine entre elles, par voie de division, les formules (7) et (10), on sera immédiatement conduit à la suivante

$$\frac{\theta}{\Theta} = \frac{\sin a}{\sin\alpha} = \frac{\sin b}{\sin\beta} = \frac{\sin c}{\sin\gamma}. \tag{11}$$

D'ailleurs $\frac{\theta}{\Theta}$ représente évidemment ici le rapport des volumes des parallélipipèdes, ou bien encore des tétraèdres dont les arêtes équivalentes à l'unité se mesurent, d'une part, sur les directions des longueurs r, s, t, d'autre part, sur les directions des longueurs R, S, T. On se trouve donc ainsi ramené à la proposition connue dont voici l'énoncé :

THÉORÈME I. — *Un triangle, tracé sur la surface de la sphère dont le rayon est l'unité, offre des côtés dont les sinus sont proportionnels aux sinus des angles opposés à ces mêmes côtés, ou, ce qui revient au même, aux sinus des côtés du triangle supplémentaire, le rapport entre les sinus des côtés correspondants des deux triangles étant précisément le rapport entre les volumes des deux tétraèdres qui ont pour arêtes les rayons menés du centre de la sphère aux sommets de ces triangles.*

Les sinus des angles a, b, c, α, β, γ, et les cosinus des angles λ, μ, ν ne sont pas seulement liés entre eux par les formules (7), (8); ils vérifient encore certaines équations dont l'une coïncide avec l'équation (7) ou (10) du paragraphe I, tandis que les autres se déduisent de celle-ci à l'aide d'échanges opérés entre les trois lettres r, s, t. Telle est, par exemple, l'équation

$$\cos(\widehat{r, r_{s,t}}) = \cos(\widehat{r, r_s})(\cos\widehat{r_s, r_{s,t}}) \tag{12}$$

que le septième théorème du paragraphe I peut fournir immédiatement, attendu que le plan $(r_s, r_{s,t})$ passant par deux droites perpendiculaires à s sera lui-même perpendiculaire à s, et, par suite, au plan (r, r_s) qui renferme la longueur s. Comme on aura d'ailleurs [*voir* les formules (1) et (9) du paragraphe I]

$$\cos(\widehat{r, r_s}) = \sin(\widehat{r, s}), \qquad \cos(\widehat{r_s, r_{s,t}}) = \sin(\widehat{r_s, t_s}),$$

l'équation (12) pourra être réduite à

$$\cos(\widehat{r, r_{s,t}}) = \sin(\widehat{r, s})\sin(\widehat{r_s, t_s}), \tag{13}$$

ou, ce qui revient au même, à

$$\cos\lambda = \sin c \sin\beta. \tag{14}$$

On établira de la même manière les six équations comprises dans les trois formules

$$\left\{\begin{aligned} \cos\lambda &= \sin b \sin\gamma = \sin c \sin\beta, \\ \cos\mu &= \sin c \sin\alpha = \sin a \sin\gamma, \\ \cos\nu &= \sin a \sin\beta = \sin b \sin\alpha, \end{aligned}\right. \tag{15}$$

desquelles on tire non seulement

$$\frac{\sin a}{\sin\alpha} = \frac{\sin b}{\sin\beta} = \frac{\sin c}{\sin\gamma},$$

mais encore

$$\cos\lambda\cos\mu\cos\nu = \sin a \sin b \sin c \sin\alpha \sin\beta \sin\gamma. \tag{16}$$

Ajoutons que, des formules (15), combinées avec les équations (7) et (10), on tire

$$\theta\Theta = \sin\alpha \sin a \cos^2\lambda = \sin a \sin b \sin c \sin\alpha \sin\beta \sin\gamma,$$

et, par conséquent, eu égard à la formule (16),

$$\cos\lambda \cos\mu \cos\nu = \theta\Theta. \tag{17}$$

On se trouve ainsi conduit au théorème qui s'énonce dans les termes suivants :

Théorème II. — *Deux triangles supplémentaires l'un de l'autre étant tracés sur la surface de la sphère dont le rayon est l'unité, les trois rayons menés du centre de la sphère aux sommets du premier triangle formeront, avec les trois rayons menés du même centre aux sommets correspondants du second triangle, trois angles dont les cosinus offriront un produit équivalent au produit des volumes des deux parallélipipèdes qui auront pour arêtes, l'un les trois premiers rayons, l'autre les trois derniers.*

On pourrait encore, des formules (7), (10), (11), (15), déduire immédiatement les équations

$$\sin a \sin b \sin c = \frac{\theta^2}{\Theta}, \qquad \sin\alpha \sin\beta \sin\gamma = \frac{\Theta^2}{\theta}. \tag{18}$$

qui, jointes à la formule (16), reproduisent l'équation (17).

Aux diverses formules que nous venons d'obtenir, on peut joindre les équations (5) et (17) du paragraphe II, qui continuent de subsister dans le cas même où les trois longueurs r, s, t cessent d'être renfermées dans un même plan. En effet, pour établir généralement ces équations, il suffira de recourir au théorème VI du paragraphe I. Concevons, pour fixer les idées, que l'on veuille établir la formule (5) du paragraphe II, en supposant, comme ci-dessus, que les trois longueurs r, s, t se mesurent, dans trois directions quelconques, à partir d'un même point O. Le théorème VI du paragraphe I donnera

$$\cos(\widehat{r, s}) = \cos(\widehat{r, u})\cos(\widehat{s, u}) + \cos(\widehat{r, v})\cos(\widehat{s, v}), \tag{19}$$

u, v étant deux longueurs nouvelles mesurées sur deux droites perpendiculaires l'une à l'autre, et tellement choisies que le plan (u, v) soit parallèle à l'une des longueurs r, s. Or ces conditions seront effectivement remplies si l'on prend

$$u = t, \qquad v = s_{\prime},$$

puisque alors le plan (u, v) pourra être censé se confondre avec le plan (s, t), et que d'ailleurs $s_{\prime}$ sera perpendiculaire à t. En conséquence, on tirera de la formule (19)

$$\cos(\widehat{r, s}) = \cos(\widehat{r, t})\cos(\widehat{s, t}) + \cos(\widehat{r, s_{\prime}})\cos(\widehat{s, s_{\prime}}). \tag{20}$$

Mais, d'autre part, on aura [*voir* la formule (5) du paragraphe I]

$$\cos(\widehat{r, s_{\prime}}) = \cos(\widehat{r, r_{\prime}})\cos(\widehat{r_{\prime}, s_{\prime}}).$$

Donc la formule (20) donnera

$$\cos(\widehat{r, s}) = \cos(\widehat{r, t})\cos(\widehat{s, t}) + \cos(\widehat{r, r_{\prime}})\cos(\widehat{s, s_{\prime}})\cos(\widehat{r_{\prime}, s_{\prime}}). \tag{21}$$

Enfin l'on aura [*voir* la première des formules (1) du paragraphe I]

$$\cos(\widehat{r, r_{\prime}}) = \sin(\widehat{r, t}), \qquad \cos(\widehat{s, s_{\prime}}) = \sin(\widehat{s, t}).$$

Donc la formule (21) pourra être réduite à

$$\cos(\widehat{r, s}) = \cos(\widehat{r, t})\cos(\widehat{s, t}) + \sin(\widehat{r, t})\sin(\widehat{s, t})\cos(\widehat{r_{\prime}, s_{\prime}}). \tag{22}$$

Ainsi, en partant du théorème VI du paragraphe I, et raisonnant, d'ailleurs, comme dans le paragraphe II, on établit immédiatement, pour tous les cas, la formule (5) de la page 350, et il est clair que l'on établira généralement de la même manière la formule (17) de la page 353, c'est-à-dire l'équation

$$\sin(\widehat{r, s})\cos(\widehat{r_{\prime}, t_{\prime}}) = \cos(\widehat{r, t})\sin(\widehat{s, t}) - \sin(\widehat{r, t})\cos(\widehat{s, t})\cos(\widehat{r_{\prime}, s_{\prime}}). \tag{23}$$

Ajoutons qu'en vertu des notations adoptées, les formules (22), (23) pourront s'écrire comme il suit :

$$\cos c = \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos\gamma, \tag{24}$$

$$\sin c \cos\beta = \sin a \cos b - \sin b \cos a \cos\gamma. \tag{25}$$

Si, aux formules (22), (23), on joint celles que l'on peut en déduire à l'aide d'échanges opérés entre les trois lettres r, s, t, on obtiendra en tout neuf équations, savoir, trois équations semblables à la formule (22), qui pourront s'écrire comme il suit :

$$(26)\qquad \begin{cases} \cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos\alpha, \\ \cos b = \cos c \cos a + \sin c \sin a \cos\beta, \\ \cos c = \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos\gamma, \end{cases}$$

et six équations semblables à la formule (23) qui pourront s'écrire comme il suit :

$$(27)\qquad \begin{cases} \sin a \cos\beta = \sin c \cos b - \sin b \cos c \cos\alpha, \\ \sin a \cos\gamma = \sin b \cos c - \sin c \cos b \cos\alpha; \end{cases}$$

$$(28)\qquad \begin{cases} \sin b \cos\gamma = \sin a \cos c - \sin c \cos a \cos\beta, \\ \sin b \cos\alpha = \sin c \cos a - \sin a \cos c \cos\beta; \end{cases}$$

$$(29)\qquad \begin{cases} \sin c \cos\alpha = \sin b \cos a - \sin a \cos b \cos\gamma, \\ \sin c \cos\beta = \sin a \cos b - \sin b \cos a \cos\gamma. \end{cases}$$

D'ailleurs, pour obtenir les équations (27), il suffit de substituer, dans la deuxième et la troisième des formules (26), la valeur de $\cos a$ fournie par la première; et, par suite, on peut, de l'équation (24), tirer, avec la plus grande facilité, non seulement les trois formules (26), mais encore les formules (27), (28), (29).

Il y a plus : on peut, comme on sait, déduire de la seule équation (24), ou, ce qui revient au même, de la première des équations (26), les principales formules de la trigonométrie sphérique, telles qu'on les trouve dans un grand nombre d'ouvrages et de mémoires, entre lesquels on doit remarquer le Mémoire inséré par Euler dans les *Acta Academiæ Petropolitanæ* de l'année 1779. Avant de terminer ce paragraphe, je rappellerai, en peu de mots, comment ces déductions s'effectuent.

D'abord, si l'on échange entre eux les deux triangles sphériques supplémentaires l'un de l'autre, dont le premier a pour côtés a, b, c, et pour angles α, β, γ, on obtiendra, non plus les formules (26), (27), (28), (29), mais celles qu'on en déduit quand on y remplace

$$a,\quad b,\quad c,\qquad \alpha,\quad \beta,\quad \gamma$$

par

$$\pi-\alpha,\quad \pi-\beta,\quad \pi-\gamma,\quad \pi-a,\quad \pi-b,\quad \pi-c;$$

c'est-à-dire les équations

$$(30)\qquad \begin{cases} \cos\alpha = \sin\beta \sin\gamma \cos a - \cos\beta \cos\gamma, \\ \cos\beta = \sin\gamma \sin\alpha \cos b - \cos\gamma \cos\alpha, \\ \cos\gamma = \sin\alpha \sin\beta \cos c - \cos\alpha \cos\beta; \end{cases}$$

$$(31)\qquad \begin{cases} \sin\alpha \cos b = \sin\gamma \cos\beta + \sin\beta \cos\gamma \cos a, \\ \sin\alpha \cos c = \sin\beta \cos\gamma + \sin\gamma \cos\beta \cos a; \end{cases}$$

$$(32)\qquad \begin{cases} \sin\beta \cos c = \sin\alpha \cos\gamma + \sin\gamma \cos\alpha \cos b, \\ \sin\beta \cos a = \sin\gamma \cos\alpha + \sin\alpha \cos\gamma \cos b; \end{cases}$$

$$(33)\qquad \begin{cases} \sin\gamma \cos a = \sin\beta \cos\alpha + \sin\alpha \cos\beta \cos c, \\ \sin\gamma \cos b = \sin\alpha \cos\beta + \sin\beta \cos\alpha \cos c. \end{cases}$$

Observons d'ailleurs : 1° que les équations (27), (28), (29) sont linéaires par rapport aux trois sinus

$$\sin a,\quad \sin b,\quad \sin c,$$

et les équations (31), (32), (33) par rapport aux trois sinus

$$\sin\alpha,\quad \sin\beta,\quad \sin\gamma;$$

2° que, pour déduire les équations (31), (32), (33) des équations (27), (28), (29), il suffit de remplacer, dans celles-ci,

$$\sin a,\quad \sin b,\quad \sin c$$

par

$$\sin\alpha,\quad \sin\beta,\quad \sin\gamma.$$

Il résulte immédiatement de ces observations, que les valeurs des rapports

$$\frac{\sin b}{\sin a},\quad \frac{\sin c}{\sin a},$$

déterminées par deux quelconques des équations (27), (28), (29), se confondent avec les valeurs des rapports

$$\frac{\sin\beta}{\sin\alpha},\quad \frac{\sin\gamma}{\sin\alpha},$$

déterminées par deux des équations (31), (32), (33). Donc l'équation (24) entraine avec elle les deux formules

$$(34)\qquad \frac{\sin\beta}{\sin\alpha}=\frac{\sin b}{\sin a},\qquad \frac{\sin\gamma}{\sin\alpha}=\frac{\sin c}{\sin a},$$

comprises l'une et l'autre dans la suivante :

$$(35)\qquad \frac{\sin\alpha}{\sin a}=\frac{\sin\beta}{\sin b}=\frac{\sin\gamma}{\sin c},$$

et, par conséquent, dans la formule (11). Au reste, on peut encore déduire immédiatement la première ou la seconde des formules (34), des équations (33) ou (32), jointes aux formules (26). Ainsi, par exemple, quand on élimine $\sin\gamma$ entre les équations (33), on obtient la formule

$$\frac{\sin\beta}{\sin\alpha}=\frac{(\cos a-\cos b\cos c)\cos\beta}{(\cos b-\cos c\cos a)\cos\alpha},$$

qui, étant jointe aux deux premières des équations (26), reproduit la formule (34).

Lorsque, étant donnés les trois côtés a, b, c d'un triangle sphérique, on veut déterminer l'un des angles α, β, γ, il suffit de recourir à l'une des équations (26). S'agit-il, par exemple, de fixer la valeur de l'angle γ ou $(\widehat{r_{\prime}, s_{\prime}})$; on aura en vertu de l'équation (24),

$$(36)\qquad \cos\gamma=\frac{\cos c-\cos a\cos b}{\sin a\sin b}.$$

Alors aussi on déduira sans peine les valeurs des lignes trigonométriques

$$\sin\frac{\gamma}{2},\quad \cos\frac{\gamma}{2}$$

de l'équation (36), jointe aux deux formules

$$\sin^2\frac{\gamma}{2}=\frac{1-\cos\gamma}{2},\qquad \cos^2\frac{\gamma}{2}=\frac{1+\cos\gamma}{2},$$

et, en posant, pour abréger,

$$a+b+c=2p,$$

on trouvera

$$(37)\qquad \begin{cases} \sin\dfrac{\gamma}{2}=\sqrt{\left[\dfrac{\sin(p-a)\sin(p-b)}{\sin a\sin b}\right]}, \\ \cos\dfrac{\gamma}{2}=\sqrt{\left[\dfrac{\sin p\sin(p-c)}{\sin a\sin b}\right]}. \end{cases}$$

On pourra même, de ces deux dernières formules, tirer immédiatement les valeurs de

$$\tang\frac{\gamma}{2}=\frac{\sin\frac{\gamma}{2}}{\cos\frac{\gamma}{2}},\qquad \sin\gamma=2\sin\frac{\gamma}{2}\cos\frac{\gamma}{2},$$

et l'on trouvera ainsi :

$$(38)\qquad \tang\frac{\gamma}{2}=\sqrt{\left[\frac{\sin(p-a)\sin(p-b)}{\sin p\sin(p-c)}\right]},$$

$$(39)\qquad \sin\gamma=2\frac{\sqrt{[\sin p\sin(p-a)\sin(p-b)\sin(p-c)]}}{\sin a\sin b};$$

par conséquent,

$$\frac{\sin\gamma}{\sin c}=2\frac{\sqrt{[\sin p\sin(p-a)\sin(p-b)\sin(p-c)]}}{\sin a\sin b\sin c}.$$

Le second membre de la dernière équation n'étant pas altéré, quand on échange entre eux les sommets et, par suite, les côtés du triangle sphérique que l'on considère, le premier membre devra jouir de la même propriété; d'où il résulte qu'on peut encore revenir immédiatement de l'équation (39) à la formule (35). D'ailleurs, l'équation (39) pouvant s'écrire comme il suit

$$2\sqrt{\sin p\sin(p-a)\sin(p-b)\sin(p-c)]}=\sin a\sin b\sin\gamma,$$

donnera, eu égard aux formules (7) et (15),

$$(40)\qquad \vartheta=2\sqrt{[\sin p\sin(p-a)\sin(p-b)\sin(p-c)]}.$$

L'équation (40) entraine évidemment le théorème dont voici l'énoncé :

Théorème III. — *Soient*

$$a,\ b,\ c$$

les trois côtés d'un triangle sphérique, tracé sur la surface de la sphère qui a l'unité pour rayon, et p le demi-périmètre de ce triangle. Le produit des sinus des quatre angles

$$p,\quad p-a,\quad p-b,\quad p-c$$

offrira, pour racine carrée, la moitié du volume du parallélipipède dont les arêtes seront les rayons menés du centre de la sphère aux trois sommets du triangle sphérique ou, ce qui revient au même, le triple du volume du tétraèdre construit avec ces arêtes.

Il est bon d'observer que chacune des formules (36), (37), (38) détermine complètement la valeur de l'angle γ, toujours positif et inférieur à deux droits, ou, ce qui revient au même, la valeur de l'angle $\frac{\gamma}{2}$, toujours positif et inférieur à un droit. Cela posé, il est clair que les formules (37), (38), qui se prêtent d'elles-mêmes aux calculs par logarithmes, fournissent le moyen de résoudre très facilement un triangle sphérique dont les trois côtés sont connus. Les formules analogues que l'on déduira de celles-ci, en substituant au triangle sphérique proposé le triangle supplémentaire, fourniront le moyen de calculer les côtés a, b, c, du premier triangle, lorsque ses trois angles α, β, γ seront connus. Supposons, pour fixer les idées, qu'il s'agisse de calculer le côté c. Alors, en posant

$$\alpha+\beta+\gamma=2\varpi.$$

et remplaçant, dans les formules (37), (38),

$$a,\quad b,\quad c,\quad p,\quad \gamma$$

par

$$\pi-\alpha,\quad \pi-\beta,\quad \pi-\gamma,\quad \frac{3\pi}{2}-\varpi,\quad \pi-c,$$

on trouvera

$$(41)\qquad \begin{cases} \cos\dfrac{c}{2}=\sqrt{\left[\dfrac{\cos(\varpi-\alpha)\cos(\varpi-\beta)}{\sin\alpha\sin\beta}\right]}, \\ \sin\dfrac{c}{2}=\sqrt{\left[\dfrac{\cos\varpi\cos(\varpi-\gamma)}{\sin\alpha\sin\beta}\right]}, \end{cases}$$

$$(42)\qquad \operatorname{tang}\frac{c}{2}=\sqrt{\left[\frac{\cos\varpi\cos(\varpi-\gamma)}{\cos(\varpi-\alpha)\cos(\varpi-\beta)}\right]}.$$

Quant à la résolution d'un triangle sphérique, dans lequel on connaît deux côtés et l'angle compris, ou un côté et les deux angles adjacents à ce côté, elle se tire sans peine des considérations suivantes.

Concevons que l'on combine par voie d'addition ou de soustraction les deux formules (29). On trouvera ainsi :

$$(43)\qquad \begin{cases} (\cos\alpha+\cos\beta)\sin c=(1-\cos\gamma)\sin(a+b), \\ (\cos\beta-\cos\alpha)\sin c=(1+\cos\gamma)\sin(a-b). \end{cases}$$

Mais, d'autre part, on tirera de la formule (35)

$$(44)\qquad \frac{\sin\alpha+\sin\beta}{\sin a+\sin b}=\frac{\sin\alpha-\sin\beta}{\sin a-\sin b}=\frac{\sin\gamma}{\sin c};$$

par conséquent,

$$(45)\qquad \begin{cases} (\sin\alpha+\sin\beta)\sin c=\sin\gamma(\sin a+\sin b), \\ (\sin\alpha-\sin\beta)\sin c=\sin\gamma(\sin a-\sin b). \end{cases}$$

Enfin, on aura identiquement

$$\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2},\qquad \cos\beta-\cos\alpha=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2},$$

$$\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2},\qquad \sin\alpha-\sin\beta=2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2},$$

et, par suite,

$$\operatorname{tang}\frac{\alpha+\beta}{2}=\frac{\sin\alpha+\sin\beta}{\cos\alpha+\cos\beta}=\frac{\cos\beta-\cos\alpha}{\sin\alpha-\sin\beta},$$

$$\operatorname{tang}\frac{\alpha-\beta}{2}=\frac{\cos\beta-\cos\alpha}{\sin\alpha+\sin\beta}=\frac{\sin\alpha-\sin\beta}{\cos\alpha+\cos\beta}.$$

Donc, eu égard aux formules (43) et (45), on trouvera

$$(46)\qquad \begin{cases} \operatorname{tang}\dfrac{\alpha+\beta}{2}=\dfrac{\sin\gamma}{1-\cos\gamma}\,\dfrac{\sin a+\sin b}{\sin(a+b)}=\dfrac{1+\cos\gamma}{\sin\gamma}\,\dfrac{\sin(a-b)}{\sin a-\sin b}, \\ \operatorname{tang}\dfrac{\alpha-\beta}{2}=\dfrac{1+\cos\gamma}{\sin\gamma}\,\dfrac{\sin(a-b)}{\sin a+\sin b}=\dfrac{\sin\gamma}{1-\cos\gamma}\,\dfrac{\sin a-\sin b}{\sin(a+b)}, \end{cases}$$

ou, ce qui revient au même,

$$(47)\qquad \begin{cases} \operatorname{tang}\dfrac{\alpha+\beta}{2}=\dfrac{\cos\dfrac{a-b}{2}}{\cos\dfrac{a+b}{2}}\cot\dfrac{\gamma}{2}, \\[2ex] \operatorname{tang}\dfrac{a-b}{2}=\dfrac{\sin\dfrac{a-b}{2}}{\sin\dfrac{a+b}{2}}\cot\dfrac{\gamma}{2}. \end{cases}$$

Si l'on remplace le triangle sphérique donné par le triangle supplémentaire, on devra, dans les formules (47), remplacer

$$a,\quad b,\quad c,\quad \alpha,\quad \beta,\quad \gamma$$

par

$$\pi-\alpha,\quad \pi-\beta,\quad \pi-\gamma,\quad \pi-a,\quad \pi-b,\quad \pi-c.$$

On aura donc encore

$$(48)\qquad \left\{\begin{aligned} \operatorname{tang}\frac{a+b}{2} &= \frac{\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}{\cos\frac{\alpha+\beta}{2}}\operatorname{tang}\frac{c}{2},\\ \operatorname{tang}\frac{a-b}{2} &= \frac{\sin\frac{\alpha-\beta}{2}}{\sin\frac{\alpha+\beta}{2}}\operatorname{tang}\frac{c}{2}, \end{aligned}\right.$$

puis on en conclura

$$(49)\qquad \left\{\begin{aligned} \frac{\cos\frac{\alpha+\beta}{2}}{\cos\frac{\alpha-\beta}{2}} &= \cot\frac{a+b}{2}\operatorname{tang}\frac{c}{2},\\ \frac{\sin\frac{\alpha+\beta}{2}}{\sin\frac{\alpha-\beta}{2}} &= \cot\frac{a-b}{2}\operatorname{tang}\frac{c}{2}. \end{aligned}\right.$$

D'ailleurs, les formules (43) peuvent s'écrire comme il suit :

$$(50)\qquad \left\{\begin{aligned} \cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2} &= \frac{\sin(a+b)}{\sin c}\sin^2\frac{\gamma}{2},\\ \sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2} &= \frac{\sin(a-b)}{\sin c}\cos^2\frac{\gamma}{2}; \end{aligned}\right.$$

et, en ayant égard aux deux équations identiques

$$\sin c\operatorname{tang}\frac{c}{2} = 2\sin^2\frac{c}{2},\qquad \sin c\cot\frac{c}{2} = 2\cos^2\frac{c}{2},$$

on tire des formules (49), combinées avec les formules (50) par voie

de multiplication ou de division,

$$(51)\qquad \left\{\begin{aligned} \cos^2\frac{\alpha+\beta}{2} &= \cos^2\frac{a+b}{2}\,\frac{\sin^2\frac{\gamma}{2}}{\cos^2\frac{c}{2}}, &\qquad \cos^2\frac{\alpha-\beta}{2} &= \sin^2\frac{a+b}{2}\,\frac{\sin^2\frac{\gamma}{2}}{\sin^2\frac{c}{2}},\\ \sin^2\frac{\alpha+\beta}{2} &= \cos^2\frac{a-b}{2}\,\frac{\cos^2\frac{\gamma}{2}}{\cos^2\frac{c}{2}}, &\qquad \sin^2\frac{\alpha-\beta}{2} &= \sin^2\frac{a-b}{2}\,\frac{\cos^2\frac{\gamma}{2}}{\sin^2\frac{c}{2}}. \end{aligned}\right.$$

Pour réduire ces dernières aux équations connues

$$(52)\qquad \left\{\begin{aligned} \cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{c}{2} &= \cos\frac{a+b}{2}\sin\frac{\gamma}{2}, &\qquad \cos\frac{\alpha-\beta}{2}\sin\frac{c}{2} &= \sin\frac{a+b}{2}\sin\frac{\gamma}{2},\\ \sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{c}{2} &= \cos\frac{a-b}{2}\cos\frac{\gamma}{2}, &\qquad \sin\frac{\alpha-\beta}{2}\sin\frac{c}{2} &= \sin\frac{a-b}{2}\cos\frac{\gamma}{2}, \end{aligned}\right.$$

il suffira d'extraire les racines carrées de chaque membre, puis d'observer : 1° que, chacun des angles

$$\frac{a}{2},\quad \frac{b}{2},\quad \frac{c}{2},\qquad \frac{\alpha}{2},\quad \frac{\beta}{2},\quad \frac{\gamma}{2}$$

étant inférieur à un droit, chacune des lignes trigonométriques

$$\sin\frac{c}{2},\quad \cos\frac{c}{2},\quad \sin\frac{\gamma}{2},\quad \cos\frac{\gamma}{2},\quad \sin\frac{a+b}{2},\quad \sin\frac{\alpha+\beta}{2},\quad \cos\frac{a-b}{2},\quad \cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

sera positive; 2° qu'en vertu des formules (49), $\cos\frac{\alpha+\beta}{2}$ sera un cosinus affecté du même signe que les deux quantités

$$\cot\frac{a+b}{2},\quad \cos\frac{a+b}{2},$$

et $\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$ un sinus affecté du même signe que les deux quantités

$$\cot\frac{a-b}{2},\quad \sin\frac{a-b}{2}.$$

Les formules (47) et (48), analogues à celle qui, dans la Trigonométrie rectiligne, sert à la résolution d'un triangle dans lequel on connaît deux côtés et l'angle compris, constituent ce qu'on appelle les *analogies de Néper*. Observons d'ailleurs qu'on les reproduira immédiatement si l'on combine entre elles, par voie de division, les formules (52).

Les formules (47), jointes à l'une quelconque des formules (48) ou (52), fournissent le moyen de résoudre complètement un triangle sphérique dans lequel on connait deux côtés a, b et l'angle compris γ. En effet, un tel triangle étant proposé, on pourra déduire immédiatement des formules (47) les demi-sommes

$$\frac{\alpha+\beta}{2}, \quad \frac{\alpha-\beta}{2},$$

renfermées, la première entre les limites 0, π, la seconde entre les limites $-\frac{\pi}{2}$, $+\frac{\pi}{2}$, et, par suite, les angles α, β; puis de l'une quelconque des formules (48) ou (52), la valeur de $\frac{c}{2}$ comprise entre les limites 0, $\frac{\pi}{2}$, et, par suite, la valeur de c.

Pareillement les formules (48), jointes à l'une quelconque des équations (47) ou (52), fournissent le moyen de résoudre un triangle sphérique dans lequel on connait un côté c et les deux angles adjacents α, β. En effet, un tel triangle étant proposé, on pourra déduire immédiatement des formules (48) les demi-sommes

$$\frac{a+b}{2}, \quad \frac{a-b}{2},$$

comprises, la première entre les limites 0, π, la seconde entre les limites $-\frac{\pi}{2}$, $+\frac{\pi}{2}$, et, par suite, les côtés a, b; puis, de l'une quelconque des formules (47) ou (52), la valeur de $\frac{\gamma}{2}$ comprise entre les limites 0, $\frac{\pi}{2}$, et, par suite, la valeur de γ.

Si l'on donnait, dans un triangle sphérique, deux côtés a, b et l'angle α opposé à l'un d'eux, ou deux angles α, β et le côté a opposé à l'un d'eux, on commencerait par déterminer l'angle β ou le côté b, à l'aide de la formule (35) réduite à

$$\frac{\sin\beta}{\sin b} = \frac{\sin\alpha}{\sin a};$$

mais à la valeur de $\sin\beta$ ou de $\sin b$, tirée de cette formule, correspondraient deux valeurs de β ou de b, également admissibles, et représentées par deux angles, l'un aigu, l'autre obtus. D'ailleurs, les côtés a, b et les angles α, β étant supposés connus, on pourrait déduire la valeur de c de l'une quelconque des équations (48), et la valeur de γ de l'une quelconque des équations (47).

Dans le cas particulier où l'un des angles du triangle sphérique, l'angle γ par exemple, se réduit à un angle droit, on a

$$\cos\gamma = 0, \qquad \sin\gamma = 1,$$

et les formules (24) et (35) se réduisent aux suivantes :

$$\cos c = \cos a \cos b, \tag{53}$$

$$\frac{\sin\alpha}{\sin a} = \frac{\sin\beta}{\sin b} = \frac{1}{\sin c}, \tag{54}$$

dont la dernière peut être remplacée par les deux équations

$$\sin a = \sin\alpha \sin c, \qquad \sin b = \sin\beta \sin c. \tag{55}$$

Alors aussi les formules (30) donnent

$$\cos\alpha = \cos a \sin\beta, \qquad \cos\beta = \cos b \sin\alpha. \tag{56}$$

On doit remarquer d'ailleurs que ces diverses équations peuvent toutes se déduire directement du théorème VII du paragraphe I. La première, c'est-à-dire l'équation (53), qui subsiste entre les côtés a, b et l'hypoténuse c d'un triangle sphérique rectangle, est précisément, comme on l'a fort bien observé, celle qui remplace le théorème de Pythagore, quand on passe de la géométrie plane à la théorie des figures tracées sur la surface d'une sphère. Ajoutons qu'en réduisant $\cos\gamma$ à zéro, et $\sin\gamma$ à l'unité, on tire des formules (27), (28), (29), (30), (31), (32),

$$\left\{\begin{aligned} \tang a &= \tang c \cos\beta, \\ \tang b &= \tang c \cos\alpha, \end{aligned}\right. \tag{57}$$

$$\left\{\begin{aligned} \sin c \cos\alpha &= \sin b \cos a, \\ \sin c \cos\beta &= \sin a \cos b, \end{aligned}\right. \tag{58}$$

$$\tang\alpha \tang\beta \cos c = 1, \tag{59}$$

$$\left\{\begin{aligned} \sin\alpha \cos c &= \cos\beta \cos a, \\ \sin\beta \cos c &= \cos\alpha \cos b. \end{aligned}\right. \tag{60}$$

Au reste, les équations (57), (58), (59), (60) pourraient se déduire immédiatement des formules (53), (55), (56), ou, ce qui revient au même, de l'équation (53) jointe aux deux formules

$$(61)\qquad \sin\alpha = \frac{\sin a}{\sin c} = \frac{\cos\beta}{\cos b}, \qquad \sin\beta = \frac{\sin b}{\sin c} = \frac{\cos\alpha}{\cos a}.$$

La formule (53), jointe aux équations (57) et (58), fournit immédiatement la résolution d'un triangle sphérique rectangle, dans lequel on connaît les trois côtés, puisqu'un tel triangle étant donné, on peut déduire, 1° le côté inconnu de la formule (53); 2° les angles α, β des équations (57) ou (58).

Les formules (56) et (59) fournissent immédiatement les trois côtés a, b, c d'un triangle sphérique rectangle dans lequel on connaît les deux angles α, β.

Si l'on connaissait un angle α avec un côté adjacent b ou c, le second des deux côtés adjacents à l'angle α serait déterminé par l'une des formules (57) et l'on se trouverait ainsi ramené au cas où deux côtés étaient connus.

Enfin, si l'on connaissait, dans un triangle sphérique rectangle, un angle α et le côté opposé a, on ne pourrait plus, comme dans les cas précédents, déterminer chaque angle ou côté inconnu à l'aide de son cosinus ou de sa tangente, c'est-à-dire à l'aide d'une ligne trigonométrique à laquelle répond toujours un seul angle compris entre les limites 0, π. Mais l'équation (54) fournirait la valeur de $\sin c$, à laquelle répondraient deux valeurs de c également admissibles, et représentées par deux angles, l'un aigu, l'autre obtus. D'ailleurs a et c étant connus, la résolution s'achèverait comme dans le premier cas.

Si le triangle sphérique, dont les côtés sont a, b, c et les angles α, β, γ, était tracé sur la surface d'une sphère décrite non plus avec le rayon 1, mais avec le rayon ι, le triangle sphérique semblable, tracé sur la surface de la sphère dont le rayon serait l'unité, aurait évidemment pour côtés

$$\frac{a}{\iota},\quad \frac{b}{\iota},\quad \frac{c}{\iota},$$

les angles étant toujours

$$\alpha,\quad \beta,\quad \gamma.$$

Donc alors aux formules trouvées dans ce paragraphe, on devrait substituer celles qu'on en déduit, quand on remplace a, b, c par $\frac{a}{\iota}$, $\frac{b}{\iota}$, $\frac{c}{\iota}$.

V. — *Sur la réduction de la trigonométrie sphérique à la trigonométrie rectiligne.*

Ainsi que Lagrange l'a remarqué, les formules de la trigonométrie sphérique peuvent être aisément réduites à celles que présente la trigonométrie rectiligne. Cette réduction permettant de mieux saisir les analogies qui existent entre les formules correspondantes des deux trigonométries, il n'est pas sans intérêt de voir comment elle s'effectue. Or on peut établir à ce sujet une règle très simple, que nous allons démontrer en peu de mots.

Nommons a, b, c les côtés et α, β, γ les angles d'un triangle sphérique tracé sur la surface de la sphère dont le rayon est ι. Ces côtés et ces angles auront entre eux les relations qu'expriment les formules établies dans le paragraphe IV, quand on y remplace a, b, c par $\frac{a}{\iota}$, $\frac{b}{\iota}$, $\frac{c}{\iota}$.

Concevons maintenant que, dans les formules du paragraphe IV, modifiées comme on vient de le dire, le rayon ι devienne infiniment grand. Les angles $\frac{a}{\iota}$, $\frac{b}{\iota}$, $\frac{c}{\iota}$ deviendront infiniment petits, et, après avoir développé les sinus, cosinus et tangentes de chaque angle infiniment petit en séries ordonnées suivant les puissances ascendantes de cet angle, on pourra faire disparaître le rayon ι de chaque formule en y réduisant $\frac{1}{\iota}$ à zéro. Il y a plus : les formules nouvelles auxquelles on parviendra, en opérant de cette manière, coïncideront évidemment avec celles que l'on déduirait des équations diverses établies dans le paragraphe IV, en considérant chacun des angles représentés par a, b, c, ou par une fonction linéaire de a, b, c, comme une quantité infiniment petite du premier ordre, et en négligeant les infiniment petits d'ordre supérieur par rapport aux infiniment petits d'ordre inférieur; elles seront donc homogènes par rapport aux côtés a, b, c, si l'on donne ce nom aux équations et formules qu'on obtient en égalant à zéro des fonctions homogènes de a, b, c. D'autre part, lorsque $\frac{1}{r}$ deviendra nul, et r infini, le triangle sphérique tracé sur la surface de la sphère, dont r était le rayon, se transformera évidemment en un triangle rectiligne. On peut donc énoncer la proposition suivante :

Théorème. — *Considérons l'une quelconque des formules de trigonométrie sphérique qui lient entre eux les trois côtés a, b, c et les trois angles α, β, γ d'un triangle sphérique tracé sur la surface de la sphère qui a pour rayon l'unité. Pour que cette formule devienne applicable à un triangle rectiligne dont les côtés seraient encore représentés par a, b, c, et les angles par α, β, γ, il suffira de la rendre homogène par rapport aux côtés a, b, c, et d'opérer comme si, ces côtés étant infiniment petits du premier ordre, on négligeait les infiniment petits d'ordre supérieur par rapport aux infiniment petits d'ordre inférieur.*

Corollaire I. — Si l'on veut, en opérant comme on vient de le dire, rendre homogènes les formules (27), (28), (29) du paragraphe IV, il suffira d'y pousser l'approximation jusqu'au premier ordre dans l'évaluation des sinus et cosinus des arcs considérés comme infiniment petits; il suffira donc d'y remplacer les sinus des arcs a, b, c par ces arcs eux-mêmes, et leur cosinus par l'unité. Donc, en vertu du théorème énoncé, les équations analogues aux formules (27), (28), (29) du paragraphe IV seront, dans la trigonométrie rectiligne,

$$(1)\quad a = b\cos\gamma + c\cos\gamma,\qquad b = c\cos\alpha + a\cos\gamma,\qquad c = a\cos\beta + b\cos\gamma.$$

Effectivement, étant donné un triangle rectiligne dont les côtés sont représentés par a, b, c et les angles par α, β, γ, on peut établir immédiatement chacune des formules (7), en projetant les trois côtés sur la direction de l'un d'entre eux.

Corollaire II. — En opérant comme dans le corollaire I, c'est-à-dire

en remplaçant le cosinus de chacun des angles a, b, c par l'unité, et en ayant égard aux équations (7), (8), (9), (10) du paragraphe II, on réduira les formules (30), (31), (32), (33) du paragraphe IV aux six équations

$$(2)\quad \begin{cases} \cos\alpha = -\cos(\beta+\gamma), & \cos\beta = -\cos(\gamma+\alpha), & \cos\gamma = -\cos(\alpha+\beta), \\ \sin\alpha = \sin(\beta+\gamma), & \sin\beta = \sin(\gamma+\alpha), & \sin\gamma = \sin(\alpha+\beta). \end{cases}$$

Or il résulte de ces dernières que les sinus et cosinus des angles

$$\beta+\gamma,\quad \gamma+\alpha,\quad \alpha+\beta$$

sont en même temps les sinus et cosinus des angles

$$\pi-\alpha,\quad \pi-\beta,\quad \pi-\gamma,$$

et que, par suite, l'angle

$$\alpha+\beta+\gamma-\pi$$

est un terme de la série

$$0,\quad 2\pi,\quad 4\pi,\quad \ldots.$$

Donc, puisque, chacun des angles α, β, γ étant inférieur à π, la différence $\alpha+\beta+\gamma-\pi$ devra rester inférieure à 2π, cette différence sera nécessairement nulle, et les équations (2) entraîneront la suivante :

$$(3)\quad \alpha+\beta+\gamma = \pi.$$

Donc, en partant des formules (30), (31), (32), (33) du paragraphe IV, on se trouve ramené à celle qui exprime que, *dans un triangle rectiligne, la somme des trois angles est égale à deux droits.*

Corollaire III. — En opérant comme dans le corollaire I, c'est-à-dire en remplaçant les sinus des arcs a, b, c par les arcs eux-mêmes, on réduira la formule (35) du paragraphe IV à la suivante :

$$(4)\quad \frac{\sin\alpha}{a} = \frac{\sin\beta}{b} = \frac{\sin\gamma}{c},$$

qui s'accorde avec l'équation (4) du paragraphe III.

Corollaire IV. — Lorsque les côtés a, b, c sont infiniment petits du premier ordre, on peut en dire autant de la demi-somme, $\frac{a+b}{2}$, de la demi-différence $\frac{a-b}{2}$, et du demi-périmètre

$$p = \frac{a+b+c}{2}.$$

Alors aussi, pour rendre homogènes les formules (37), (38), (39), (47) du paragraphe IV, il suffit évidemment d'y remplacer le sinus de chaque arc infiniment petit par cet arc lui-même et son cosinus par l'unité. Donc, en vertu de ces formules et du théorème énoncé, les côtés a, b, c, les angles α, 6, γ et le demi-périmètre p d'un triangle rectiligne quelconque sont liés entre eux par les équations

$$(5)\quad \left\{ \begin{array}{l} \sin\frac{\gamma}{2} = \sqrt{\left[\frac{(p-a)(p-b)}{ab}\right]}, \qquad \cos\frac{\gamma}{2} \quad \sqrt{\left[\frac{p(p-c)}{ab}\right]}, \\ \qquad \operatorname{tang}\frac{\gamma}{2} = \sqrt{\left[\frac{(p-a)(p-b)}{p(p-c)}\right]}, \end{array} \right.$$

$$(6)\quad \sin\gamma = 2\frac{\sqrt{[p(p-a)(p-b)(p-c)]}}{ab},$$

$$(7)\quad \operatorname{tang}\frac{\alpha+6}{2} = \cot\frac{\gamma}{2}, \qquad \operatorname{tang}\frac{\alpha-6}{2} = \frac{a-b}{a+b}\cot\frac{\gamma}{2}.$$

Parmi ces équations, les trois premières sont celles qui s'appliquent le plus aisément à la résolution d'un triangle rectiligne dont les trois côtés sont connus. Ajoutons que l'avant-dernière se déduit encore de la formule

$$\alpha + 6 + \gamma = \pi,$$

et que la dernière, jointe à cette même formule, fournit le moyen de résoudre un triangle rectiligne dans lequel on connait deux côtés a, b et l'angle γ compris entre ces côtés.

Corollaire V. — Lorsque, en considérant les côtés a, b, c comme infiniment petits, on veut rendre homogène, par rapport à ces côtés, l'une des formules (26) du paragraphe IV, par exemple la formule (24), ou, ce qui revient au même, l'équation (36) du même paragraphe, il ne suffit plus de pousser l'approximation jusqu'aux infiniment petits du premier ordre dans l'évaluation des sinus et cosinus des arcs a, b, c, et de substituer ces arcs à leurs sinus, en remplaçant leurs cosinus

par l'unité. Il devient nécessaire de faire entrer en ligne de compte les infiniment petits du second ordre, et de prendre, en conséquence, pour valeurs approchées de

$$\sin a, \quad \sin b, \quad \cos a, \quad \cos b, \quad \cos c, \quad \cos a \cos b,$$

les quantités

$$a, \quad b, \quad 1-\frac{a^2}{2}, \quad 1-\frac{b^2}{2}, \quad 1-\frac{c^2}{2}, \quad 1-\frac{a^2+b^2}{2}.$$

Cela posé, en rendant homogène, par rapport aux côtés a, b, c, l'équation (24) ou (36) du paragraphe IV, on obtiendra la formule connue

$$(8)\quad c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma,$$

ou

$$(9)\quad \cos\gamma = \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab},$$

qui, en vertu du théorème énoncé, devra, dans un triangle rectiligne quelconque, déterminer le cosinus d'un angle en fonction des trois côtés.

Dans le cas particulier où l'angle γ devient nul, l'équation (24) du paragraphe IV se réduit à l'équation (53) du même paragraphe. Alors aussi l'équation (8), réduite à la formule

$$(10)\quad c^2 = a^2 + b^2,$$

reproduit le théorème de Pythagore, ainsi qu'on devait s'y attendre, puisque, dans la trigonométrie sphérique, ce théorème se trouve remplacé par la formule (53) du paragraphe IV, ou, en d'autres termes, par le théorème VII du paragraphe I.

VI. — *Sur les relations qui existent entre les systèmes de coordonnées rectilignes relatives à deux systèmes d'axes conjugués.*

Nommons

$$x, \quad y, \quad z$$

les coordonnées d'un point mobile P, rapportées à trois axes quelconques menés par l'origine O, et

$$X, \quad Y, \quad Z$$

les coordonnées du même point mobile, rapportées à trois autres axes *conjugués* aux trois premiers, c'est-à-dire à trois autres axes menés par la même origine perpendiculairement aux plans des y, z, des z, x et des x, y. Supposons d'ailleurs, pour plus de commodité, les demi-axes des X, Y et Z positives situés par rapport aux plans coordonnés des y, z, des z, x et des x, y, des mêmes côtés que les demi-axes des x, y et z positives. Enfin soient

$$\mathrm{x},\quad \mathrm{y},\quad \mathrm{z}\quad \text{et}\quad \mathrm{X},\quad \mathrm{Y},\quad \mathrm{Z}$$

six longueurs mesurées à partir de l'origine O, d'une part sur les demi-axes des x, y, z positives, d'autre part sur les demi-axes des X, Y, Z positives. Les deux angles solides

$$(\mathrm{x}, \mathrm{y}, \mathrm{z}),\quad (\mathrm{X}, \mathrm{Y}, \mathrm{Z}),$$

dont les arêtes auront pour directions celles de x, y, z et de X, Y, Z, seront, comme les deux triangles sphériques auxquels ils répondent, *supplémentaires* l'un de l'autre. Cela posé, si, en considérant le premier de ces angles solides, celui qui a pour arêtes les demi-axes sur lesquels se mesurent les trois longueurs x, y, z, on nomme

$$a,\quad b,\quad c$$

les angles plans opposés à ces arêtes,

$$\alpha,\quad \beta,\quad \gamma$$

les angles dièdres opposés à ces angles plans, et

$$\lambda,\quad \mu,\quad \nu$$

les angles aigus que forment ces trois arêtes avec les demi-axes perpendiculaires aux plans des faces opposées, on aura

$$(1)\quad \left\{\begin{array}{lll} (\widehat{\mathrm{y}, \mathrm{z}}) = a, & (\widehat{\mathrm{z}, \mathrm{x}}) = b, & (\widehat{\mathrm{x}, \mathrm{y}}) = c, \\ (\widehat{\mathrm{Y}, \mathrm{Z}}) = \pi - \alpha, & (\widehat{\mathrm{Z}, \mathrm{X}}) = \pi - \beta, & (\widehat{\mathrm{X}, \mathrm{Y}}) = \pi - \gamma, \\ (\widehat{\mathrm{x}, \mathrm{X}}) = \lambda, & (\widehat{\mathrm{y}, \mathrm{Y}}) = \mu, & (\widehat{\mathrm{z}, \mathrm{Z}}) = \nu. \end{array}\right.$$

Ajoutons que, si l'on nomme r le rayon vecteur mené de l'origine O au

point mobile P, on aura, en vertu des formules (12) de la page 160,

$$(2)\quad x = r\frac{\cos(\widehat{r, \mathrm{X}})}{\cos(\widehat{\mathrm{x}, \mathrm{X}})},\qquad y = r\frac{\cos(\widehat{r, \mathrm{Y}})}{\cos(\widehat{\mathrm{y}, \mathrm{Y}})},\qquad z = r\frac{\cos(\widehat{r, \mathrm{Z}})}{\cos(\widehat{\mathrm{z}, \mathrm{Z}})}.$$

Si maintenant on échange entre eux les deux systèmes d'axes conjugués, alors, à la place des formules (2), on obtiendra les suivantes :

$$(3)\quad X = r\frac{\cos(\widehat{r, \mathrm{x}})}{\cos(\widehat{\mathrm{x}, \mathrm{X}})},\qquad Y = r\frac{\cos(\widehat{r, \mathrm{y}})}{\cos(\widehat{\mathrm{y}, \mathrm{Y}})},\qquad Z = r\frac{\cos(\widehat{r, \mathrm{z}})}{\cos(\widehat{\mathrm{z}, \mathrm{Z}})}.$$

D'autre part, comme on l'a vu dans le paragraphe I, la considération des projections orthogonales fournit immédiatement la formule (15) de la page 346, par conséquent les formules (10), (11) des pages 159, 160. Donc, s étant un rayon mesuré toujours à partir de l'origine O, mais distinct de r, on aura encore

$$(4)\quad \cos(\widehat{r, s}) = \frac{\cos(\widehat{r, \mathrm{x}})\cos(\widehat{s, \mathrm{X}})}{\cos(\widehat{\mathrm{x}, \mathrm{X}})} + \frac{\cos(\widehat{r, \mathrm{y}})\cos(\widehat{s, \mathrm{Y}})}{\cos(\widehat{\mathrm{y}, \mathrm{Y}})} + \frac{\cos(\widehat{r, \mathrm{z}})\cos(\widehat{s, \mathrm{Z}})}{\cos(\widehat{\mathrm{z}, \mathrm{Z}})}$$

et

$$(5)\quad \cos(\widehat{r, s}) = \frac{\cos(\widehat{r, \mathrm{X}})\cos(\widehat{s, \mathrm{x}})}{\cos(\widehat{\mathrm{x}, \mathrm{X}})} + \frac{\cos(\widehat{r, \mathrm{Y}})\cos(\widehat{s, \mathrm{y}})}{\cos(\widehat{\mathrm{y}, \mathrm{Y}})} + \frac{\cos(\widehat{r, \mathrm{Z}})\cos(\widehat{s, \mathrm{z}})}{\cos(\widehat{\mathrm{z}, \mathrm{Z}})}.$$

Ajoutons qu'en vertu des formules (2), (3), les équations (4), (5) se réduiront aux deux suivantes :

$$(6)\quad r\cos(\widehat{r, s}) = x\cos(\widehat{s, \mathrm{x}}) + y\cos(\widehat{s, \mathrm{y}}) + z\cos(\widehat{s, \mathrm{z}}),$$

et

$$(7)\quad r\cos(\widehat{r, s}) = X\cos(\widehat{s, \mathrm{X}}) + Y\cos(\widehat{s, \mathrm{Y}}) + Z\cos(\widehat{s, \mathrm{Z}})$$

c'est-à-dire à deux équations semblables l'une à l'autre, et dont chacune peut se déduire directement de la formule (5) de la page 158. Cela posé, pour obtenir les valeurs des coordonnées x, y, z exprimées en fonctions linéaires des coordonnées X, Y, Z, ou les valeurs de X, Y, Z exprimées en fonctions linéaires de x, y, z, il ne restera plus qu'à substituer, dans les formules (2), les valeurs de

$$\cos(\widehat{r, \mathrm{X}}),\quad \cos(\widehat{r, \mathrm{Y}}),\quad \cos(\widehat{r, \mathrm{Z}}),$$

tirées de l'équation (7), ou, dans les formules (3), les valeurs de

$$\cos(\widehat{r, \mathrm{x}}),\quad \cos(\widehat{r, \mathrm{y}}),\quad \cos(\widehat{r, \mathrm{z}}),$$

tirées de l'équation (6).

Si l'on a égard aux équations (1), les formules (2), (3) deviendront

$$(8)\qquad x = r\frac{\cos(\widehat{r, \mathrm{X}})}{\cos\lambda},\qquad y = r\frac{\cos(\widehat{r, \mathrm{Y}})}{\cos\mu},\qquad z = r\frac{\cos(\widehat{r, \mathrm{Z}})}{\cos\nu},$$

$$(9)\qquad X = r\frac{\cos(\widehat{r, \mathrm{x}})}{\cos\lambda},\qquad Y = r\frac{\cos(\widehat{r, \mathrm{y}})}{\cos\mu},\qquad Z = s\frac{\cos(\widehat{r, \mathrm{z}})}{\cos\nu};$$

et l'on tirera des formules (6), (7),

$$(10)\qquad \begin{cases} r\cos(\widehat{r, \mathrm{x}}) = x + y\cos c + z\cos b, \\ r\cos(\widehat{r, \mathrm{y}}) = x\cos c + y + z\cos a, \\ r\cos(\widehat{r, \mathrm{z}}) = x\cos b + y\cos a + z; \end{cases}$$

$$(11)\qquad \begin{cases} r\cos(\widehat{r, \mathrm{X}}) = X - Y\cos\gamma - Z\cos\beta, \\ r\cos(\widehat{r, \mathrm{Y}}) = -X\cos\gamma + Y - Z\cos\alpha, \\ r\cos(\widehat{r, \mathrm{Z}}) = -X\cos\beta - Y\cos\alpha + Z. \end{cases}$$

Or ces dernières, combinées avec les formules (8), (9), donneront

$$(12)\qquad X = \frac{x + y\cos c + z\cos b}{\cos\lambda},\qquad Y = \frac{x\cos c + y + z\cos a}{\cos\mu},\qquad Z = \frac{x\cos b + y\cos a + z}{\cos\nu},$$

$$(13)\qquad x = \frac{X - Y\cos\gamma - Z\cos\beta}{\cos\lambda},\qquad y = \frac{-X\cos\gamma + Y - Z\cos\alpha}{\cos\mu},\qquad z = \frac{-X\cos\beta - Y\cos\alpha + Z}{\cos\nu}.$$

Remarquons d'ailleurs que chacune des équations (12), (13) se trouve comprise, comme cas particulier, dans la formule (16) de la page 161, de laquelle on pourrait les déduire immédiatement.

Il est bon d'observer que les équations (12), présentées sous les formes

$$(14)\qquad \begin{cases} x + y\cos a + z\cos b = X\cos\lambda, \\ x\cos c + y + z\cos a = Y\cos\mu, \\ x\cos b + y\cos a + z = Z\cos\nu, \end{cases}$$

peuvent être facilement résolues par rapport à x, y, z. Concevons que, pour abréger, l'on désigne par K la résultante formée avec les neuf termes du tableau

$$(15)\qquad \begin{cases} 1, & \cos c, & \cos b, \\ \cos c, & 1, & \cos a, \\ \cos b, & \cos a, & 1; \end{cases}$$

puis par

$$A,\quad B,\quad C,\quad D,\quad E,\quad F,$$

les résultantes formées avec les mêmes termes pris quatre à quatre dans deux lignes horizontales, et dans deux lignes verticales, en sorte qu'on ait

$$(16)\qquad K = 1 - \cos^2 a - \cos^2 b - \cos^2 c + 2\cos a\cos b\cos c$$

et

$$(17)\qquad \begin{cases} A = 1 - \cos^2 a, & B = 1 - \cos^2 b, & C = 1 - \cos^2 c, \\ D = \cos b\cos c - \cos a, & E = \cos c\cos a - \cos b, & F = \cos a\cos b - \cos c. \end{cases}$$

Les valeurs de A, B, C pourront être réduites à

$$(18)\qquad A = \sin^2 a,\qquad B = \sin^2 b,\qquad C = \sin^2 c,$$

et, en effectuant la résolution des formules (14), par rapport à x, y, z, on trouvera

$$(19)\qquad \begin{cases} x = \dfrac{AX\cos\lambda + FY\cos\mu + EZ\cos\nu}{K}, \\ y = \dfrac{FX\cos\lambda + BY\cos\mu + DZ\cos\nu}{K}. \\ z = \dfrac{EX\cos\lambda + DY\cos\mu + CZ\cos\nu}{K}. \end{cases}$$

Or ces dernières valeurs de x, y, z devront s'accorder avec celles que fournissent les équations (13), quelles que soient d'ailleurs les valeurs attribuées aux variables X, Y, Z. Donc les coefficients constants, par lesquels ces variables se trouvent multipliées, doivent être les mêmes dans les formules (13) et (19). Cette seule observation fournit immédiatement la formule

$$(20)\qquad K = A\cos^2\lambda = B\cos^2\mu = C\cos^2\nu$$
$$= -D\frac{\cos\mu\cos\nu}{\cos\alpha} = -E\frac{\cos\nu\cos\lambda}{\cos\beta} = -F\frac{\cos\lambda\cos\mu}{\cos\gamma},$$

de laquelle on tire, eu égard aux équations (18),

$$K = \sin^2 a \cos^2 \lambda = \sin^2 b \cos^2 \mu = \sin^2 c \cos^2 \nu, \tag{21}$$

et, par suite,

$$\theta = \sin a \cos \lambda = \sin b \cos \mu = \sin c \cos \nu, \tag{22}$$

θ étant une quantité positive liée à K par l'équation

$$\theta^2 = K. \tag{23}$$

Ajoutons que, de la formule (20), jointe aux équations (16), (17), (22), on tirera

$$\left\{\begin{aligned} \cos\alpha &= \frac{\cos a - \cos b \cos c}{\sin b \sin c}, \\ \cos 6 &= \frac{\cos b - \cos c \cos a}{\sin c \sin a}, \\ \cos\gamma &= \frac{\cos c - \cos a \cos b}{\sin a \sin b}. \end{aligned}\right. \tag{24}$$

Enfin, si, dans l'équation (23), on substitue pour K sa valeur, on trouvera

$$\theta^2 = 1 - \cos^2 a - \cos^2 b - \cos^2 c + 2 \cos a \cos b \cos c. \tag{25}$$

Si, au lieu de tirer les valeurs de x, y, z des équations (12), on comparait les valeurs de X, Y, Z, tirées des équations (13), à celles que fournissent les équations (12), alors, à la place des formules (22) et (24), on obtiendrait les suivantes :

$$\Theta = \sin\alpha \cos\lambda = \sin 6 \cos\mu = \sin\gamma \cos\nu, \tag{26}$$

$$\left\{\begin{aligned} \cos a &= \frac{\cos\alpha + \cos 6 \cos\gamma}{\sin 6 \sin\gamma}, \\ \cos b &= \frac{\cos 6 + \cos\gamma \cos\alpha}{\sin\gamma \sin\alpha}, \\ \cos c &= \frac{\cos\gamma + \cos\alpha \cos 6}{\sin\alpha \sin 6}, \end{aligned}\right. \tag{27}$$

Θ étant une quantité déterminée par la formule

$$\Theta^2 = 1 - \cos^2\alpha - \cos^2 6 - \cos^2\gamma - 2 \cos\alpha \cos 6 \cos\gamma. \tag{28}$$

Les formules (22), (24), (26), (27) coïncident avec les formules (7), (26), (10) et (30) du paragraphe IV. Ainsi, les équations fonda-

mentales de la trigonométrie sphérique sont comprises parmi celles auxquelles on se trouve conduit par la comparaison des formules (12) et (13).

Au reste, il est juste d'observer que les formules établies ou rappelées dans ce paragraphe, et les démonstrations que nous en avons données, ne diffèrent pas, au fond, des formules et démonstrations présentées par M. Sturm, dans un Mémoire que renferme le Tome XV des *Annales de Mathématiques* de M. Gergonne. Telle est, en effet, la conviction qu'a produite en nous une étude approfondie de ce Mémoire. Seulement il nous semble que les notations dont nous nous sommes servis donnent au langage analytique une clarté, une précision nouvelles. Dans le Mémoire de M. Sturm, les angles formés par le rayon vecteur r avec les axes coordonnés des x, y, z, prolongés du côté des coordonnées positives, et avec des perpendiculaires aux plans de ces axes, sont exprimés à l'aide des notations

$$\begin{gathered} (r, x), \quad (r, y), \quad (r, z), \\ (r, yz), \quad (r, zx), \quad (r, xy); \end{gathered}$$

et ces expressions sont admises dans des formules où l'auteur désigne avec nous, par x, y, z, les coordonnées de l'extrémité du rayon r. Pour rendre les notations uniformes et plus précises, il nous parait utile de considérer toujours, dans l'expression (r, s) ou $(\widehat{r, s})$, employée pour désigner un angle, les lettres r et s comme représentant deux longueurs absolues, mesurées dans des directions déterminées, et de remplacer, en conséquence, dans l'expression $(\widehat{r, s})$, la lettre s, non par la lettre x ou par le système de deux lettres yz, mais par une longueur nouvelle x ou X, mesurée sur le demi-axe des x positives, ou sur un demi-axe perpendiculaire au plan des yz, quand il s'agit de représenter l'angle formé par ce demi-axe avec la direction du rayon vecteur r. Observons encore que, si la formule (4) ou (5) n'est pas écrite en toutes lettres dans le Mémoire de M. Sturm, elle peut, du moins, être considérée comme comprise dans les équations qu'il a données, et spécialement dans les formules (13) et (18) du Mémoire cité, c'est-à-dire, en d'autres termes, dans les équations (2) et (6), d'où on la déduit immédiatement, et d'où l'auteur a effectivement déduit celle en laquelle elle se transforme dans le cas particulier où l'on fait coïncider le rayon vecteur s avec le rayon vecteur r.

Remarquons à présent que l'on pourrait tirer encore les équations fondamentales de la trigonométrie sphérique, et spécialement la formule (20), non plus des équations (14), résolues généralement par rapport à x, y, z, quelles que soient d'ailleurs les valeurs attribuées aux variables X, Y, Z, mais des équations (10), résolues par rapport à x, y, z, pour des positions particulières et déterminées du rayon r. En effet, concevons d'abord que l'on fasse coïncider le rayon r avec la longueur X, mesurée sur le demi-axe des X positives. Alors la formule (8) donnera

$$x = \frac{r}{\cos\lambda}, \qquad y = -\frac{r\cos\gamma}{\cos\mu}, \qquad z = -\frac{r\cos 6}{\cos\nu}, \tag{29}$$

et les formules (10) se réduiront à celles-ci :

$$\left\{\begin{aligned} r\cos\lambda &= x + y\cos c + z\cos b,\\ 0 &= x\cos c + y + z\cos a,\\ 0 &= x\cos b + y\cos a + z. \end{aligned}\right. \tag{30}$$

Or, des équations (3) résolues par rapport à x, y, z, on tirera

$$\frac{x}{A} = \frac{y}{F} = \frac{z}{E} = \frac{r\cos\lambda}{K}, \tag{31}$$

ou, ce qui revient au même,

$$\frac{A}{x} = \frac{F}{y} = \frac{E}{z} = \frac{K}{r\cos\lambda}, \tag{32}$$

puis, en substituant dans la formule (32) les valeurs de x, y, z, fournies par les équations (29), on trouvera

$$A\cos\lambda = -F\frac{\cos\mu}{\cos\gamma} = -E\frac{\cos\nu}{\cos 6} = \frac{K}{\cos\lambda};$$

par conséquent,

$$K = A\cos^2\lambda = -F\frac{\cos\lambda\cos\mu}{\cos\gamma} = -E\frac{\cos\nu\cos\lambda}{\cos 6}.$$

On trouvera de même, en faisant coïncider le rayon r avec la lon-

gueur Y, mesurée sur le demi-axe des Y positives,

$$K = B\cos^2\mu = -D\frac{\cos\mu\cos\nu}{\cos\alpha} = -F\frac{\cos\lambda\cos\mu}{\cos\gamma},$$

puis, en faisant coïncider le rayon r avec la longueur Z mesurée sur le demi-axe des Z positives,

$$K = C\cos^2\nu = -E\frac{\cos\nu\cos\lambda}{\cos 6} = -D\frac{\cos\mu\cos\nu}{\cos\alpha};$$

et il est clair qu'en réunissant les trois valeurs précédentes de K, on reproduira précisément la formule (20).

Il est bon d'observer que les numérateurs des fractions qui, dans les formules (24), représentent les cosinus des angles $\alpha, 6, \gamma$, se réduisent précisément aux résultantes

$$-D, \quad -E, \quad -F,$$

formées chacune avec quatre termes du tableau (15). D'ailleurs, ce tableau est précisément celui qu'on obtient quand on réduit à son expression la plus simple chacun des termes du suivant :

$$\left\{\begin{matrix} \cos(\widehat{x, x}), & \cos(\widehat{x, y}), & \cos(\widehat{x, z}),\\ \cos(\widehat{y, x}), & \cos(\widehat{y, y}), & \cos(\widehat{y, z}),\\ \cos(\widehat{x, z}), & \cos(\widehat{z, y}), & \cos(\widehat{z, z}). \end{matrix}\right. \tag{33}$$

Donc, la forme la plus naturelle des équations (24) est celle à laquelle on arrive quand aux numérateurs des rapports qui expriment les valeurs de $\cos\alpha$, $\cos 6$, $\cos\gamma$, on substitue trois résultantes, dont chacune est formée avec quatre termes du tableau (33). Concevons, en particulier, que dans la valeur de $\cos\gamma$, déterminée par la dernière des équations (24), ou, ce qui revient au même, par la suivante :

$$\cos\gamma = -\frac{F}{\sin a\sin b},$$

on substitue la valeur de $-F$ déduite du tableau (33), savoir

$$-F = \cos(\widehat{x, y})\cos(\widehat{z, z}) - \cos(\widehat{x, z})\cos(\widehat{y, z}),$$

on trouvera

$$(34)\qquad \cos\gamma = \frac{\cos(\widehat{\mathrm{x}, \mathrm{y}})\cos(\widehat{\mathrm{z}, \mathrm{z}}) - \cos(\widehat{\mathrm{x}, \mathrm{z}})\cos(\widehat{\mathrm{y}, \mathrm{z}})}{\sin(\widehat{\mathrm{x}, \mathrm{z}})\sin(\widehat{\mathrm{y}, \mathrm{z}})}.$$

Comme on devait s'y attendre, l'équation (34) se réduira simplement à la formule

$$(35)\qquad \cos\gamma = \frac{\cos(\widehat{\mathrm{x}, \mathrm{y}}) - \cos(\widehat{\mathrm{x}, \mathrm{z}})\cos(\widehat{\mathrm{y}, \mathrm{z}})}{\sin(\widehat{\mathrm{x}, \mathrm{z}})\sin(\widehat{\mathrm{y}, \mathrm{z}})},$$

si l'on a égard à l'équation identique

$$\cos(\widehat{\mathrm{z}, \mathrm{z}}) = 1.$$

Mais la formule (34), qui conserve mieux que la formule (35) la trace des opérations à l'aide desquelles on l'a construite, est aussi plus élégante et plus facile à retenir, puisque le numérateur de son second membre est la différence de deux produits de mêmes dimensions, dont le second se déduit du premier par un échange opéré entre les lettres qui occupent la seconde place dans les deux expressions $(\widehat{\mathrm{x}, \mathrm{y}})$, $(\widehat{\mathrm{z}, \mathrm{z}})$.

Il est bon d'observer encore que la formule (25) coïncide avec l'équation (40) du paragraphe IV. En effet, on tire de cette dernière équation

$$(36)\qquad \theta^2 = 4\sin p\sin(p-a)\sin(p-b)\sin(p-c),$$

la valeur de $2p$ étant

$$2p = a+b+c,$$

ou, ce qui revient au même,

$$(37)\quad \theta^2 = 4\sin\left(\frac{a+b+c}{2}\right)\sin\left(\frac{b+c-a}{2}\right)\sin\left(\frac{c+a-b}{2}\right)\sin\left(\frac{a+b-c}{2}\right).$$

D'ailleurs, les deux formules

$$2\sin p\sin q = \cos(p-q) - \cos(p+q),$$
$$2\cos p\cos q = \cos(p-q) + \cos(p+q),$$

donneront, d'une part,

$$2\sin\frac{a+b+c}{2}\sin\frac{b+c-a}{2} = \cos a - \cos(b+c),$$
$$2\sin\frac{c+a-b}{2}\sin\frac{a+b-c}{2} = \cos(b-c) - \cos a,$$

et, d'autre part,

$$\cos(b+c) + \cos(b-c) = 2\cos b\cos c,$$
$$\cos(b+c) + \cos(b-c) = \frac{\cos 2b + \cos 2c}{2} = 1 - \cos^2 b - \cos^2 c.$$

Donc, on tirera de la formule (37)

$$\begin{aligned}\theta^2 &= [\cos a - \cos(b+c)][\cos(b-c) - \cos a]\\ &= 1 - \cos^2 a - \cos^2 b - \cos^2 c + 2\cos a\cos b\cos c.\end{aligned}$$

Ajoutons que, si au triangle sphérique dont les côtés sont a, b, c, on substitue le triangle sphérique supplémentaire, on obtiendra, au lieu de la formule (36), la suivante :

$$(38)\qquad \Theta^2 = -4\cos\varpi\cos(\varpi-\alpha)\cos(\varpi-6)\cos(\varpi-\gamma),$$

et que l'équation (28) coïncidera précisément avec la formule (38).

Avant de terminer ce paragraphe, nous allons encore déduire des équations (2), (3), (4), (5), (6), quelques formules qui méritent d'être remarquées.

Si, dans l'équation (6), on remplace successivement la lettre s par chacune des lettres r, x, y, z, alors, comme l'a observé M. Sturm dans le Mémoire déjà cité, on obtiendra successivement les formules

$$(39)\qquad r = x\cos(\widehat{r, \mathrm{x}}) + y\cos(\widehat{r, \mathrm{y}}) + z\cos(\widehat{r, \mathrm{z}}),$$

$$(40)\qquad \left\{\begin{aligned} r\cos(\widehat{r, \mathrm{x}}) &= x + y\cos(\widehat{\mathrm{x}, \mathrm{y}}) + z\cos(\widehat{\mathrm{x}, \mathrm{z}}),\\ r\cos(\widehat{r, \mathrm{y}}) &= x\cos(\widehat{\mathrm{x}, \mathrm{y}}) + y + z\cos(\widehat{\mathrm{y}, \mathrm{z}}),\\ r\cos(\widehat{r, \mathrm{z}}) &= x\cos(\widehat{\mathrm{x}, \mathrm{z}}) + y\cos(\widehat{\mathrm{y}, \mathrm{z}}) + z,\end{aligned}\right.$$

dont les trois dernières coïncident avec les formules (10), tandis que la première multipliée par r, puis combinée avec les trois dernières, reproduit l'équation connue

$$(41)\quad r^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2yz\cos(\widehat{y,z}) + 2zx\cos(\widehat{z,x}) + 2xy\cos(\widehat{x,y}).$$

En opérant de la même manière, on tirera de la formule (7) :

$$(42)\quad r^2 = X^2 + Y^2 + Z^2 + 2YZ\cos(\widehat{Y,Z}) + 2ZX\cos(\widehat{Z,X}) + 2XY\cos(\widehat{X,Y}).$$

Si dans l'équation (6) on échange entre eux les rayons r, s, alors, en nommant

$$x',\quad y',\quad z'$$

ce que deviennent les coordonnées x, y, z quand on passe de l'extrémité du rayon r à l'extrémité du rayon s, on trouvera

$$(43)\qquad s\cos(\widehat{r,s}) = x'\cos(\widehat{r,x}) + y'\cos(\widehat{r,y}) + z'\cos(\widehat{r,z});$$

et de l'équation (43), multipliée par r, puis combinée avec les équations (40), on tirera la formule

$$(44)\quad rs\cos(\widehat{r,s}) = xx' + yy' + zz' + (yz' + y'z)\cos(\widehat{y,z})$$
$$+ (zx' + z'x)\cos(\widehat{z,x}) + (xy' + x'y)\cos(\widehat{x,y}),$$

qui est l'une de celles que M. Binet a données dans le Tome XV du *Journal de l'École Polytechnique*. Pareillement, si l'on nomme X', Y', Z' ce que deviennent les coordonnées X, Y, Z quand on passe de l'extrémité du rayon r à l'extrémité du rayon s, on obtiendra la formule

$$(45)\quad rs\cos(\widehat{r,s}) = XX' + YY' + ZZ' + (YZ' + Y'Z)\cos(\widehat{Y,Z})$$
$$+ (ZX' + Z'X)\cos(\widehat{Z,X}) + (XY' + X'Y)\cos(\widehat{X,Y}),$$

donnée encore par M. Binet. De plus, si dans les formules (44), (45) on substitue les valeurs de

$$x,\quad y,\quad z,\quad X,\quad Y,\quad Z,$$

tirées des formules (2), (3), et les valeurs semblables de

$$x',\quad y',\quad z',\quad X',\quad Y',\quad Z',$$

on obtiendra deux équations dont la première a été indiquée par M. Sturm, dans le Mémoire cité, et dont la seconde sera

$$(46)\quad \cos(\widehat{r,s}) = \frac{\cos(\widehat{r,x})\cos(\widehat{s,x})}{\cos^2(\widehat{x,X})} + \frac{\cos(\widehat{r,y})\cos(\widehat{s,y})}{\cos^2(\widehat{y,Y})} + \frac{\cos(\widehat{r,z})\cos(\widehat{s,z})}{\cos^2(\widehat{z,Z})}$$
$$+ \frac{\cos(\widehat{r,y})\cos(\widehat{s,z}) + \cos(\widehat{r,z})\cos(\widehat{s,y})}{\cos(\widehat{y,Y})\cos(\widehat{z,Z})}\cos(\widehat{Y,Z})$$
$$+ \frac{\cos(\widehat{r,z})\cos(\widehat{s,x}) + \cos(\widehat{r,x})\cos(\widehat{s,z})}{\cos(\widehat{z,Z})\cos(\widehat{x,X})}\cos(\widehat{Z,X})$$
$$+ \frac{\cos(\widehat{r,x})\cos(\widehat{s,y}) + \cos(\widehat{r,y})\cos(\widehat{s,x})}{\cos(\widehat{x,X})\cos(\widehat{y,Y})}\cos(\widehat{X,Y}),$$

ou, ce qui revient au même, eu égard aux formules (1),

$$(47)\quad \cos(\widehat{r,s}) = \frac{\cos(\widehat{r,x})\cos(\widehat{s,x})}{\cos^2\lambda} + \frac{\cos(\widehat{r,y})\cos(\widehat{s,y})}{\cos^2\mu} + \frac{\cos(\widehat{r,z})\cos(\widehat{s,z})}{\cos^2\nu}$$
$$- \frac{\cos(\widehat{r,y})\cos(\widehat{s,z}) + \cos(\widehat{s,y})\cos(\widehat{r,z})}{\cos\mu\cos\nu}\cos\alpha$$
$$- \frac{\cos(\widehat{r,z})\cos(\widehat{s,x}) + \cos(\widehat{s,z})\cos(\widehat{r,x})}{\cos\nu\cos\lambda}\cos6$$
$$- \frac{\cos(\widehat{r,x})\cos(\widehat{s,y}) + \cos(\widehat{s,x})\cos(\widehat{r,y})}{\cos\lambda\cos\mu}\cos\gamma.$$

Enfin, si l'on fait coïncider le rayon s avec le rayon r, les formules (44), (45) se réduiront aux formules (41), (42), la formule (4) ou (5) sera réduite à l'équation

$$(48)\quad 1 = \frac{\cos(\widehat{r,x})\cos(\widehat{r,X})}{\cos(\widehat{x,X})} + \frac{\cos(\widehat{r,y})\cos(\widehat{r,Y})}{\cos(\widehat{y,Y})} + \frac{\cos(\widehat{r,z})\cos(\widehat{r,Z})}{\cos(\widehat{z,Z})},$$

que l'on trouve déjà dans le Mémoire de M. Sturm, et les formules (46), (47) donneront

$$(49)\quad 1=\frac{\cos^2(\widehat{r,x})}{\cos^2(\widehat{x,X})}+\frac{\cos^2(\widehat{r,y})}{\cos^2(\widehat{y,Y})}+\frac{\cos^2(\widehat{r,z})}{\cos^2(\widehat{z,Z})}$$
$$+2\frac{\cos(\widehat{r,y})\cos(\widehat{r,z})}{\cos(\widehat{y,Y})\cos(\widehat{z,Z})}\cos(\widehat{Y,Z})+2\frac{\cos(\widehat{r,z})\cos(\widehat{r,x})}{\cos(\widehat{z,Z})\cos(\widehat{x,X})}\cos(\widehat{Z,X})$$
$$+2\frac{\cos(\widehat{r,x})\cos(\widehat{r,y})}{\cos(\widehat{x,X})\cos(\widehat{y,Y})}\cos(\widehat{X,Y}),$$

ou, ce qui revient au même,

$$(50)\quad 1=\frac{\cos^2(\widehat{r,x})}{\cos^2\lambda}+\frac{\cos^2(\widehat{r,y})}{\cos^2\mu}+\frac{\cos^2(\widehat{r,z})}{\cos^2\nu}-2\frac{\cos(\widehat{r,y})\cos(\widehat{r,z})}{\cos\mu\cos\nu}\cos\alpha$$
$$-2\frac{\cos(\widehat{r,z})\cos(\widehat{r,x})}{\cos\nu\cos\lambda}\cos6-2\frac{\cos(\widehat{r,x})\cos(\widehat{r,y})}{\cos\lambda\cos\mu}\cos\gamma.$$

La formule (46) ou (47) est celle qui sert à exprimer généralement le cosinus de l'angle compris entre deux directions données, en fonction des cosinus des angles formés par ces deux directions avec trois axes quelconques rectangulaires ou obliques. La formule (49) ou (50) fournit la relation connue qui existe entre les cosinus des trois angles formés par une seule direction avec les trois axes que l'on considère.

Dans le cas particulier où les axes coordonnés des x, y, z sont rectangulaires, ils se confondent avec les axes conjugués, c'est-à-dire avec les axes coordonnés des X, Y, Z, en sorte qu'on a

$$X=x,\qquad Y=y,\qquad Z=z.$$

Alors aussi, chacun des angles a, b, c, α, 6, γ étant droit, et chacun des angles λ, μ, ν étant réduit à zéro, chacune des quantités

$$\cos a,\quad \cos b,\quad \cos c$$

s'évanouit, et chacune des suivantes

$$\sin a,\quad \sin b,\quad \sin c,\quad \cos\lambda,\quad \cos\mu,\quad \cos\nu,$$

se réduit à l'unité. En conséquence, les formules (10), (22), (41), (44),

(47), (50) se réduisent aux équations connues

$$(51)\qquad x=r\cos(\widehat{r,x}),\qquad y=r\cos(\widehat{r,y}),\qquad z=r\cos(\widehat{r,z}),$$
$$(52)\qquad \theta=1,$$
$$(53)\qquad r^2=x^2+y^2+z^2,$$
$$(54)\qquad rs=xx'+yy'+zz',$$
$$(55)\qquad \cos(\widehat{r,s})=\cos(\widehat{r,x})\cos(\widehat{s,x})+\cos(\widehat{r,y})\cos(\widehat{s,y})+\cos(\widehat{r,z})\cos(\widehat{s,z}),$$
$$(56)\qquad 1=\cos^2(\widehat{r,x})+\cos^2(\widehat{r,y})+\cos^2(\widehat{r,z}).$$

Supposons maintenant que des axes coordonnés, l'un, par exemple l'axe des z, soit perpendiculaire aux deux autres, c'est-à-dire aux axes des x et y, l'angle

$$c=(\widehat{x,y})$$

compris entre ces deux derniers axes pouvant d'ailleurs être aigu ou obtus. Alors, le plan des x, y, étant en même temps le plan des X, Y, l'axe des Z viendra se confondre avec l'axe des z, en sorte qu'on aura

$$(57)\qquad Z=z,\qquad \nu=0.$$

Alors aussi on aura évidemment

$$(58)\qquad \alpha=6=a=b=\frac{\pi}{2},\qquad \gamma=c,$$

par conséquent,

$$(59)\qquad \begin{cases}\cos\alpha=\cos6=\cos a=\cos b=0, & \sin\alpha=\sin6=\sin a=\sin b=1,\\ \cos\gamma=\cos c, & \sin\gamma=\sin c,\end{cases}$$

et les formules (15) de la page 322 donneront

$$(60)\qquad \cos\lambda=\cos\mu=\sin c,\qquad \cos\nu=1.$$

Au reste, la seconde des formules (60) se tire immédiatement de la seconde des formules (57), et quant à la première des formules (60), on peut la déduire de cette seule considération que les axes des X et Y, tous deux renfermés dans le plan des x, y, seront, dans l'hypothèse admise, perpendiculaires, le premier à l'axe des y, le second à l'axe des x. Les valeurs des angles

$$a,\quad b,\quad \alpha,\quad \beta,\quad \gamma,\quad \lambda,\quad \mu,\quad \nu$$

et celles de leurs sinus et cosinus étant déterminées par les équations qui précèdent, les formules (12), (13), (22), (26), (41), (44), (47), (50) donneront

$$(61)\qquad X=\frac{x+y\cos c}{\sin c},\qquad Y=\frac{x\cos c+y}{\sin c},\qquad Z=z;$$

$$(62)\qquad x=\frac{X-Y\cos c}{\sin c},\qquad y=\frac{Y-X\cos c}{\sin c},\qquad z=Z;$$

$$(63)\qquad \theta=\Theta=\sin c;$$

$$(64)\qquad r^2=x^2+y^2+z^2+2xy\cos c;$$

$$(65)\qquad rs\cos(r,s)=xx'+yy'+zz'+(xy'+x'y)\cos c;$$

$$(66)\qquad \left\{\begin{aligned} \cos(\widehat{r,s}) &= \frac{\cos(\widehat{r,\mathrm{x}})\cos(\widehat{s,\mathrm{x}})+\cos(\widehat{r,\mathrm{y}})\cos(\widehat{s,\mathrm{y}})}{\sin^2 c}+\cos(\widehat{r,\mathrm{z}})\cos(\widehat{s,\mathrm{z}})\\ &\quad -\frac{\cos(\widehat{r,\mathrm{x}})\cos(\widehat{s,\mathrm{y}})+\cos(\widehat{s,\mathrm{x}})\cos(\widehat{r,\mathrm{y}})}{\sin^2 c}\cos c. \end{aligned}\right.$$

Ajoutons que, si des deux rayons vecteurs r, s le premier est perpendiculaire à l'axe des x, et le second à l'axe des y, on aura

$$\cos(r,\mathrm{x})=0,\qquad \cos(s,\mathrm{y})=0.$$

Donc alors la formule (66) se trouvera réduite à l'équation

$$(67)\qquad \cos(\widehat{r,s})=\cos(\widehat{r,\mathrm{z}})\cos(\widehat{s,\mathrm{z}})-\frac{\cos c}{\sin^2 c}\cos(\widehat{s,\mathrm{x}})\cos(\widehat{r,\mathrm{y}}),$$

que l'on peut écrire comme il suit :

$$(68)\qquad \cos(\widehat{r,z})\cos(\widehat{s,z})-\cos(\widehat{r,s})=\frac{\cos(\widehat{s,\mathrm{x}})\cos(\widehat{r,\mathrm{y}})}{\sin c\,\mathrm{tang}\,c},$$

la valeur de c étant toujours

$$c=(\widehat{\mathrm{x},\mathrm{y}}).$$

D'ailleurs, en vertu de la formule (35), le premier membre de l'équation (68), pris en signe contraire et divisé par le produit

$$\sin(\widehat{r,\mathrm{z}})\sin(\widehat{s,\mathrm{z}}),$$

donne pour quotient le cosinus de l'angle dièdre opposé à l'angle

plan $(\widehat{r,s})$ dans l'angle solide (r, s, z). Donc l'équation (68) entraine la proposition suivante :

Théorème. — *Étant donnés trois axes des x, y, z dont le troisième est perpendiculaire aux deux premiers, si l'on nomme*

$$\mathrm{x},\quad \mathrm{y},\quad \mathrm{z}$$

trois longueurs mesurées sur ces trois axes, à partir de l'origine, dans le sens des coordonnées positives, et r, s deux droites qui, partant elles-mêmes de l'origine, soient respectivement perpendiculaires la première à l'axe des x, la seconde à l'axe des y, le cosinus de l'angle dièdre opposé à l'angle plan $(\widehat{r,s})$ dans l'angle solide (r, s, z) sera égal au rapport

$$\frac{\cos(\widehat{s,\mathrm{x}})\cos(\widehat{r,\mathrm{y}})}{\sin(\widehat{r,\mathrm{z}})\sin(\widehat{s,\mathrm{z}})\sin(\widehat{\mathrm{x},\mathrm{y}})\,\mathrm{tang}(\widehat{\mathrm{x},\mathrm{y}})},$$

pris en signe contraire. Nous montrerons, dans un autre Mémoire, comment l'on peut faire servir cette proposition, ou, ce qui revient au même, la formule (67) à la recherche de l'équation différentielle que vérifie généralement le cosinus de l'angle compris entre deux lignes tracées sur une même surface courbe.

VII. — *Sur la transformation des coordonnées rectilignes et d'autres coordonnées de même espèce.*

Nommons

$$x,\quad y,\quad z$$

les coordonnées d'un point mobile P rapportées à trois axes quelconques menés par l'origine O. Soient d'ailleurs

$$\mathrm{x},\quad \mathrm{y},\quad \mathrm{z}\quad \text{et}\quad \mathrm{X},\quad \mathrm{Y},\quad \mathrm{Z}$$

six longueurs mesurées à partir de l'origine O, d'une part sur les demi-axes des x, y, z positives, d'autre part sur trois perpendiculaires aux plans coordonnés des y, z, des z, x, des x, y; et supposons, pour fixer les idées, ces perpendiculaires prolongées à partir des plans coordonnés des mêmes côtés que les demi-axes des coordonnées positives, en sorte que chacun des trois angles

$$(\widehat{\mathrm{x}, \mathrm{X}}),\quad (\widehat{\mathrm{y}, \mathrm{Y}}),\quad (\widehat{\mathrm{z}, \mathrm{Z}})$$

se réduise à un angle aigu. Enfin soient

$$x_1,\quad y_1,\quad z_1$$

de nouvelles coordonnées du point P, relatives à de nouveaux axes rectilignes qui continuent de passer par l'origine O; et supposons que, pour ce nouveau système d'axes, les longueurs précédemment représentées par

$$\mathrm{x},\quad \mathrm{y},\quad \mathrm{z},\quad \mathrm{X},\quad \mathrm{Y},\quad \mathrm{Z}$$

deviennent

$$\mathrm{x}_1,\quad \mathrm{y}_1,\quad \mathrm{z}_1,\quad \mathrm{X}_1,\quad \mathrm{Y}_1,\quad \mathrm{Z}_1.$$

On passera des coordonnées x, y, z aux coordonnées x_1, y_1, z_1, et réciproquement, par le moyen d'équations toutes semblables à l'équation (16) de la page 161, par conséquent à l'aide des formules

$$(1)\qquad \left\{\begin{aligned}
x_1 &= \frac{x\cos(\widehat{\mathrm{x}, \mathrm{X}_1}) + y\cos(\widehat{\mathrm{y}, \mathrm{X}_1}) + z\cos(\widehat{\mathrm{z}, \mathrm{X}_1})}{\cos(\widehat{\mathrm{x}_1, \mathrm{X}_1})},\\
y_1 &= \frac{x\cos(\widehat{\mathrm{x}, \mathrm{Y}_1}) + y\cos(\widehat{\mathrm{y}, \mathrm{Y}_1}) + z\cos(\widehat{\mathrm{z}, \mathrm{Y}_1})}{\cos(\widehat{\mathrm{y}_1, \mathrm{Y}_1})},\\
z_1 &= \frac{x\cos(\widehat{\mathrm{x}, \mathrm{Z}_1}) + y\cos(\widehat{\mathrm{y}, \mathrm{Z}_1}) + z\cos(\widehat{\mathrm{z}, \mathrm{Z}_1})}{\cos(\widehat{\mathrm{z}_1, \mathrm{Z}_1})},
\end{aligned}\right.$$

ou à l'aide des formules

$$(2)\qquad \left\{\begin{aligned}
x &= \frac{x_1\cos(\widehat{\mathrm{x}_1, \mathrm{X}}) + y_1\cos(\widehat{\mathrm{y}_1, \mathrm{X}}) + z_1\cos(\widehat{\mathrm{z}_1, \mathrm{X}})}{\cos(\widehat{\mathrm{x}, \mathrm{X}})},\\
y &= \frac{x_1\cos(\widehat{\mathrm{x}_1, \mathrm{Y}}) + y_1\cos(\widehat{\mathrm{y}_1, \mathrm{Y}}) + z_1\cos(\widehat{\mathrm{z}_1, \mathrm{Y}})}{\cos(\widehat{\mathrm{y}, \mathrm{Y}})},\\
z &= \frac{x_1\cos(\widehat{\mathrm{x}_1, \mathrm{Z}}) + y_1\cos(\widehat{\mathrm{y}_1, \mathrm{Z}}) + z_1\cos(\widehat{\mathrm{z}_1, \mathrm{Z}})}{\cos(\widehat{\mathrm{z}, \mathrm{Z}})}.
\end{aligned}\right.$$

En vertu de ces formules qui étaient déjà connues [*voir* en particulier

le Mémoire de M. Sturm, inséré dans le Tome XV des *Annales de Mathématiques* de M. Gergonne], les coordonnées x_1, y_1, z_1 seront des fonctions linéaires de x, y, z, et réciproquement. D'ailleurs, en résolvant les équations (2) par rapport aux coordonnées nouvelles

$$x_1,\quad y_1,\quad z_1,$$

on obtiendra, pour ces coordonnées, des valeurs qui devront évidemment coïncider avec celles que fournissent les formules (1), quelles que soient d'ailleurs les valeurs attribuées à x, y, z. Donc les constantes qui représentent les coefficients de x, y, z, dans les formules (1), pourront être exprimées en fonction des constantes qui représentent les coefficients de x_1, y_1, z_1 dans les formules (2), et réciproquement, en sorte qu'on pourra obtenir neuf équations de condition entre les cosinus des six angles

$$(\widehat{\mathrm{x}, \mathrm{X}}),\quad (\widehat{\mathrm{y}, \mathrm{Y}}),\quad (\widehat{\mathrm{z}, \mathrm{Z}}),$$
$$(\widehat{\mathrm{x}_1, \mathrm{X}}),\quad (\widehat{\mathrm{y}_1, \mathrm{Y}}),\quad (\widehat{\mathrm{z}_1, \mathrm{Z}})$$

et les cosinus des angles formés : 1° par les directions des longueurs x, y, z avec les directions des longueurs $\mathrm{X}_1, \mathrm{Y}_1, \mathrm{Z}_1$; 2° par les directions des longueurs $\mathrm{x}_1, \mathrm{y}_1, \mathrm{z}_1$ avec les directions des longueurs X, Y, Z.

Dans le cas particulier où les nouveaux demi-axes des coordonnées positives coïncident avec ceux sur lesquels se mesurent les longueurs X, Y, Z, les nouvelles coordonnées du point P, relatives à ces nouveaux demi-axes, sont précisément celles que, dans le paragraphe VI, nous avons représentées par les trois lettres

$$X,\quad Y,\quad Z.$$

Alors aussi les formules (1) et (2) se réduisent aux formules (12), (13) du paragraphe VI, et les équations de condition, que vérifient les coefficients renfermés dans ces formules, aux six équations comprises dans la formule (20) du paragraphe VI.

Lorsque les axes coordonnés des x_1, y_1, z_1 se coupent à angles droits, les directions des longueurs $\mathrm{X}_1, \mathrm{Y}_1, \mathrm{Z}_1$ se confondent avec celles des longueurs $\mathrm{x}_1, \mathrm{y}_1, \mathrm{z}_1$, et, par suite, les formules (1) donnent simplement

$$(3)\quad \left\{\begin{aligned} x_1 &= x\cos(\widehat{\mathrm{x}, \mathrm{x}_1}) + y\cos(\widehat{\mathrm{y}, \mathrm{x}_1}) + z\cos(\widehat{\mathrm{z}, \mathrm{x}_1}),\\ y_1 &= x\cos(\widehat{\mathrm{x}, \mathrm{y}_1}) + y\cos(\widehat{\mathrm{y}, \mathrm{y}_1}) + z\cos(\widehat{\mathrm{z}, \mathrm{y}_1}),\\ z_1 &= x\cos(\widehat{\mathrm{x}, \mathrm{z}_1}) + y\cos(\widehat{\mathrm{y}, \mathrm{z}_1}) + z\cos(\widehat{\mathrm{z}, \mathrm{z}_1}). \end{aligned}\right.$$

Pareillement, lorsque les axes des x, y, z se coupent à angles droits, les directions des longueurs X, Y, Z se confondent avec celles des longueurs x, y, z, et, par suite, les formules (2) deviennent simplement

$$(4)\quad \left\{\begin{aligned} x &= x_1\cos(\widehat{\mathrm{x}, \mathrm{x}_1}) + y_1\cos(\widehat{\mathrm{x}, \mathrm{y}_1}) + z_1\cos(\widehat{\mathrm{x}, \mathrm{z}_1}),\\ y &= x_1\cos(\widehat{\mathrm{y}, \mathrm{x}_1}) + y_1\cos(\widehat{\mathrm{y}, \mathrm{y}_1}) + z_1\cos(\widehat{\mathrm{y}, \mathrm{z}_1}),\\ z &= x_1\cos(\widehat{\mathrm{z}, \mathrm{x}_1}) + y_1\cos(\widehat{\mathrm{z}, \mathrm{y}_1}) + z_1\cos(\widehat{\mathrm{z}, \mathrm{z}_1}). \end{aligned}\right.$$

Si les deux systèmes d'axes coordonnés sont rectangulaires, les formules (4) subsisteront en même temps que les équations (3).

Concevons maintenant qu'il s'agisse de transformer les coordonnées obliques

$$x,\quad y,\quad z$$

en coordonnées rectangulaires

$$\mathfrak{X},\quad \mathfrak{Y},\quad \mathfrak{Z},$$

relatives encore à trois axes qui passent par l'origine O, et supposons que ces trois axes, prolongés dans le sens des

$$\mathfrak{X},\quad \mathfrak{Y},\quad \mathfrak{Z}$$

positives, soient respectivement ceux sur lesquels se mesurent les trois longueurs

$$\mathrm{x},\quad \mathrm{y}_{\mathrm{x}},\quad \mathrm{z}_{\mathrm{x},\mathrm{y}}.$$

En d'autres termes, supposons que le demi-axe des $\mathfrak{X}$ positives se confonde avec le demi-axe des x positives; le demi-axe des $\mathfrak{Y}$ positives, avec une droite menée, dans le plan des x, y, perpendiculairement à l'axe des x, et dirigée de manière à former, avec le demi-axe des y positives, un angle aigu; enfin le demi-axe des $\mathfrak{Z}$ positives, avec

une droite perpendiculaire au plan des x, y, et dirigée de manière à former, avec le demi-axe des z positives, un angle aigu. En remplaçant dans les équations (3) et (2),

$$x_1,\quad y_1,\quad z_1\quad \text{par}\quad \mathfrak{X},\quad \mathfrak{Y},\quad \mathfrak{Z},$$

et $\mathrm{x}_1, \mathrm{y}_1, \mathrm{z}_1$ par $\mathrm{x}, \mathrm{y}_{\mathrm{x}}, \mathrm{z}_{\mathrm{x},\mathrm{y}}$, on trouvera

$$(5)\quad \left\{\begin{aligned} \mathfrak{X} &= x + y\cos(\widehat{\mathrm{y}, \mathrm{x}}) + z\cos(\widehat{\mathrm{z}, \mathrm{x}}),\\ \mathfrak{Y} &= y\cos(\widehat{\mathrm{y}, \mathrm{y}_{\mathrm{x}}}) + z\cos(\widehat{\mathrm{z}, \mathrm{y}_{\mathrm{x}}}),\\ \mathfrak{Z} &= z\cos(\widehat{\mathrm{z}, \mathrm{z}_{\mathrm{x},\mathrm{y}}}), \end{aligned}\right.$$

et

$$(6)\quad \left\{\begin{aligned} x &= \mathfrak{X} + \mathfrak{Y}\frac{\cos(\widehat{\mathrm{y}_{\mathrm{x}}, \mathrm{X}})}{\cos(\widehat{\mathrm{x}, \mathrm{X}})} + \mathfrak{Z}\frac{\cos(\widehat{\mathrm{z}_{\mathrm{y},\mathrm{x}}, \mathrm{X}})}{\cos(\widehat{\mathrm{x}, \mathrm{X}})},\\ y &= \mathfrak{Y}\frac{\cos(\widehat{\mathrm{y}_{\mathrm{x}}, \mathrm{Z}})}{\cos(\widehat{\mathrm{y}, \mathrm{Y}})} + \mathfrak{Z}\frac{\cos(\widehat{\mathrm{z}_{\mathrm{x},\mathrm{y}}, \mathrm{Y}})}{\cos(\widehat{\mathrm{y}, \mathrm{Y}})},\\ z &= \frac{\mathrm{Z}}{\cos(\widehat{\mathrm{z}, \mathrm{Z}})}. \end{aligned}\right.$$

D'autre part, les trois longueurs

$$\mathrm{X},\quad \mathrm{Y},\quad \mathrm{Z}$$

pourront être censées se confondre, en grandeur comme en direction, avec les trois longueurs

$$\mathrm{x}_{\mathrm{y},\mathrm{z}},\quad \mathrm{y}_{\mathrm{z},\mathrm{x}},\quad \mathrm{z}_{\mathrm{x},\mathrm{y}};$$

et si, en considérant l'angle solide (x, y, z), on nomme :

a, b, c les trois angles opposés aux trois arêtes x, y, z;

α, β, γ les trois angles dièdres opposés à ces angles plans;

λ, μ, ν les angles aigus formés par les trois arêtes x, y, z avec les perpendiculaires aux trois faces opposées à ces arêtes, on aura

$$(\widehat{\mathrm{y}, \mathrm{z}}) = a,\qquad (\widehat{\mathrm{z}, \mathrm{x}}) = b,\qquad (\widehat{\mathrm{x}, \mathrm{y}}) = c,$$
$$(\mathrm{y}_{\mathrm{x}}, \mathrm{z}_{\mathrm{x}}) = \alpha,\qquad (\mathrm{z}_{\mathrm{y}}, \mathrm{x}_{\mathrm{y}}) = \beta,\qquad (\mathrm{x}_{\mathrm{z}}, \mathrm{y}_{\mathrm{z}}) = \gamma,$$
$$(\widehat{\mathrm{Y}, \mathrm{Z}}) = \pi - \alpha,\qquad (\widehat{\mathrm{Z}, \mathrm{X}}) = \pi - \beta,\qquad (\widehat{\mathrm{X}, \mathrm{Y}}) = \pi - \gamma,$$
$$(\widehat{\mathrm{x}, \mathrm{X}}) = \lambda,\qquad (\widehat{\mathrm{y}, \mathrm{Y}}) = \mu,\qquad (\widehat{\mathrm{z}, \mathrm{Z}}) = \nu.$$

Cela posé, en ayant égard aux formules (1), (6), (8), (9) des pages 342 et 344, on trouvera

$$\cos(\widehat{y, x}) = \cos c, \qquad \cos(\widehat{z, x}) = \cos b,$$

$$\cos(\widehat{y, y_x}) = \sin(\widehat{x, y}) = \sin c, \qquad \cos(\widehat{z, y_x}) = \sin(z, x)\cos(y_x, z_x) = \sin b \cos\alpha,$$

$$\cos(\widehat{z, z_{x,y}}) = \cos(\widehat{z, x}) = \cos\nu,$$

$$\cos(z_{x,y}, X) = \cos(\widehat{Z, Y}) = -\cos 6, \qquad \cos(z_{x,y}, Y) = \cos(\widehat{Z, Y}) = -\cos\gamma.$$

De plus, les longueurs

$$y_x, \quad Y = y_{z,x}, \qquad Z = z_{x,y}$$

étant toutes trois comprises dans un même plan perpendiculaire à l'axe des x, et les deux longueurs

$$y_x, \qquad Z = z_{x,y}$$

étant, dans le plan dont il s'agit, perpendiculaires l'une à l'autre, l'angle aigu

$$(\widehat{y_x, Y})$$

aura pour complément l'angle

$$(\widehat{Z, Y}) = \pi - \alpha$$

ou son supplément α. On aura donc

$$\cos(\widehat{y_x, Y}) = \sin\alpha,$$

et l'on trouvera de même

$$\cos(\widehat{x_y, X}) = \sin 6.$$

Enfin, les plans des deux angles

$$(\widehat{x_y, y_x}), \qquad (\widehat{x_y, X}) = (\widehat{x_y, x_{y,z}})$$

étant perpendiculaires l'un à l'autre, puisque le premier de ces deux plans, c'est-à-dire le plan des x, y, passe par l'axe des y, tandis que le plan $(\widehat{x_y, x_{y,z}})$ est perpendiculaire au même axe, le septième théo-

rème de la page 349 donnera

$$\cos(\widehat{y_x, X}) = \cos(\widehat{x_y, y_x})\cos(\widehat{x_y, X}) = \cos(\widehat{x_y, y_x})\sin 6;$$

et comme évidemment l'angle

$$(\widehat{x_y, y_x})$$

sera le supplément de l'angle $(\widehat{x, y}) = c$, la valeur précédente de $\cos(\widehat{y_x, X})$ deviendra

$$\cos(\widehat{y_x, X}) = -\cos c \sin 6.$$

Donc, en définitive, si l'on exprime, en fonction des neuf angles

$$a, \quad b, \quad c, \quad \alpha, \quad 6, \quad \gamma, \quad \lambda, \quad \mu, \quad \nu,$$

les coefficients de x, y, z ou de $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$, renfermés dans les seconds membres des formules (5) et (6), ces formules se réduiront aux suivantes :

$$(7) \qquad \begin{cases} \mathfrak{X} = x + y\cos c + z\cos 6, \\ \mathfrak{Y} = y\sin c + z\sin b\cos\alpha, \\ \mathfrak{Z} = z\cos\nu, \end{cases}$$

$$(8) \qquad \begin{cases} x = \mathfrak{X} - \dfrac{\mathfrak{Y}\sin 6\cos c + \mathfrak{Z}\cos 6}{\cos\lambda}, \\ y = \dfrac{\mathfrak{Y}\sin\alpha - \mathfrak{Z}\cos\alpha}{\cos\mu}, \\ z = \dfrac{\mathfrak{Z}}{\cos\nu}. \end{cases}$$

On ne doit pas oublier que, dans les formules (7), (8), les trois cosinus

$$\cos\lambda, \quad \cos\mu, \quad \cos\nu$$

sont liés aux sinus des angles

$$a, \quad b, \quad c, \quad \alpha, \quad 6, \quad \gamma$$

par les équations (15) de la page 361, ce qui permet d'éliminer les trois angles

$$\lambda, \quad \mu, \quad \nu.$$

Si, pour fixer les idées, on tire des équations dont il s'agit des valeurs de $\cos\lambda$, $\cos\mu$, $\cos\nu$, exprimées à l'aide des seuls angles

$$b,\quad c,\quad \alpha,\quad \beta,$$

déjà renfermés dans les formules (7) et (8), on aura

$$\cos\lambda=\sin c\sin\beta,\qquad \cos\mu=\sin c\sin\alpha,\qquad \cos\nu=\sin b\sin\alpha;$$

et, par suite, les formules (7), (8) donneront

$$(9)\qquad \left\{\begin{aligned} \mathfrak{X}&=x+y\cos c+z\cos b,\\ \mathfrak{Y}&=y\sin c+z\sin b\cos\alpha,\\ \mathfrak{Z}&=z\sin b\sin\alpha; \end{aligned}\right.$$

$$(10)\qquad \left\{\begin{aligned} x&=\mathfrak{X}-\mathfrak{Y}\cot c-\mathfrak{Z}\,\mathrm{cos\acute{e}c}\,c\cot\beta,\\ y&=(\mathfrak{Y}-\mathfrak{Z}\cot\alpha)\,\mathrm{cos\acute{e}c}\,c,\\ z&=\mathfrak{Z}\,\mathrm{cos\acute{e}c}\,\alpha\,\mathrm{cos\acute{e}c}\,b. \end{aligned}\right.$$

Les équations (9), (10) s'accordent avec des formules déjà connues. Elles offrent cela de remarquable, qu'elles renferment seulement les deux angles plans

$$b=(\widehat{\mathrm{z},\mathrm{x}}),\qquad c=(\widehat{\mathrm{x},\mathrm{y}}),$$

formés par les demi-axes des y et z positives avec le demi-axe des x positives, et l'angle dièdre α compris entre les plans des deux angles b, c. Les deux dernières des équations (10) remplissent aussi cette condition, à laquelle la première des équations (10) satisfera elle-même, si l'on substitue, à la place de $\cot\beta$, sa valeur déduite des formules (27) et (35) du paragraphe IV. En effet, ces formules donneront

$$\sin a\cos\beta=\sin c\cos b-\sin b\cos c\cos\alpha,$$
$$\sin a\sin\beta=\sin b\sin\alpha,$$

et, par suite,

$$\cot\beta=\frac{\sin c\cos b-\sin b\cos c\cos\alpha}{\sin b\sin\alpha},$$

puis on en conclura

$$\mathrm{cos\acute{e}c}\,c\cot\beta=\frac{\cot b-\cos\alpha\cot c}{\sin\alpha}.$$

Donc, les formules (10) peuvent s'écrire comme il suit :

$$(11)\qquad \left\{\begin{aligned} x&=\mathfrak{X}-\mathfrak{Y}\cot c-\mathfrak{Z}\frac{\cot b-\cos\alpha\cot c}{\sin\alpha},\\ y&=(\mathfrak{Y}-\mathfrak{Z}\cot\alpha)\,\mathrm{cos\acute{e}c}\,c,\\ z&=\mathfrak{Z}\,\mathrm{cos\acute{e}c}\,\alpha\,\mathrm{cos\acute{e}c}\,b. \end{aligned}\right.$$

Au reste pour obtenir immédiatement les formules (11), il suffit de résoudre, par rapport à x, y z, les équations (9).

Dans le cas particulier où le point P est l'un de ceux que renferme le plan des x, y, les ordonnées z et $\mathfrak{Z}$ s'évanouissent. Alors les relations linéaires qui, en vertu des formules (9) et (11), subsistent entre les coordonnées x, y et $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, se réduisent aux suivantes :

$$(12)\qquad \mathfrak{X}=x+y\cos c,\qquad \mathfrak{Y}=y\cos c,$$
$$(13)\qquad x=\mathfrak{X}-\mathfrak{Y}\cot c,\qquad y=\mathfrak{Y}\,\mathrm{cos\acute{e}c}\,c,$$

qu'il serait d'ailleurs facile d'établir directement.

MÉMOIRE

SUR LES

FONCTIONS DE VARIABLES IMAGINAIRES

I. — *Des expressions imaginaires, de leurs arguments et de leurs modules.*

Ainsi que je l'ai remarqué dans mon *Analyse algébrique*, une *expression imaginaire* n'est autre chose qu'une expression symbolique de la forme

$$\alpha + 6\sqrt{-1},$$

α, 6 désignant deux quantités réelles. On dit que deux expressions imaginaires

$$\alpha + 6\sqrt{-1}, \qquad \gamma + \delta\sqrt{-1}$$

sont égales, lorsqu'il y a égalité de part et d'autre : 1° entre les parties réelles α et γ; 2° entre les coefficients de $\sqrt{-1}$, savoir, 6 et δ. L'égalité de deux expressions imaginaires s'indique, comme celle de deux quantités réelles, par le signe $=$, et il en résulte ce qu'on appelle une *équation imaginaire*. Cela posé, toute équation imaginaire n'est autre chose que la *représentation symbolique* de deux équations entre quantités réelles. Par exemple, l'équation symbolique

$$\alpha + 6\sqrt{-1} = \gamma + \delta\sqrt{-1}$$

équivaut seule aux deux équations réelles

$$\alpha = \gamma, \qquad 6 = \delta.$$

L'emploi des expressions imaginaires, en permettant de remplacer deux équations par une seule, offre souvent le moyen de simplifier les calculs et d'écrire sous une forme abrégée des résultats fort compliqués.

Tel est même le motif principal pour lequel on doit continuer à se servir de ces expressions qui, prises à la lettre et interprétées d'après les conventions généralement établies, ne signifient rien et n'ont pas de sens. Le signe $\sqrt{-1}$ n'est en quelque sorte qu'un outil, un instrument de calcul, qui peut être employé avec succès, dans un grand nombre de cas, pour rendre beaucoup plus simples et plus concises, non seulement les formules analytiques, mais encore les méthodes à l'aide desquelles on parvient à les établir.

Deux expressions imaginaires qui ne diffèrent l'une de l'autre que par le signe du terme que renferme $\sqrt{-1}$, par exemple

$$\alpha+6\sqrt{-1},\quad \alpha-6\sqrt{-1},$$

sont ce qu'on appelle *conjuguées*.

Concevons maintenant que l'on effectue l'addition ou la multiplication de deux ou de plusieurs expressions imaginaires, en opérant d'après les règles généralement établies, comme si $\sqrt{-1}$ était un facteur réel dont le carré fût égal à -1. On obtiendra pour résultat une nouvelle expression imaginaire, qui sera ce qu'on appelle la *somme* ou le *produit* des expressions données. Il est d'ailleurs naturel d'indiquer cette somme ou ce produit à l'aide des notations adoptées pour représenter la somme ou le produit de quantités réelles. C'est ce que l'on fait toujours. Lorsque l'on multiplie l'une par l'autre deux expressions imaginaires conjuguées, le produit devient réel. On a effectivement

$$(\alpha+6\sqrt{-1})(\alpha-6\sqrt{-1})=\alpha^2+6^2. \tag{1}$$

Dans le cas particulier où les quantités réelles

$$\alpha,\quad 6$$

se réduisent au cosinus et au sinus d'un même arc ϖ, alors, de l'équation (1) jointe à la formule

$$\cos^2\varpi+\sin^2\varpi=1, \tag{2}$$

on tire

$$(\cos\varpi+\sqrt{-1}\sin\varpi)(\cos\varpi-\sqrt{-1}\sin\varpi)=1. \tag{3}$$

Toute expression imaginaire

$$\alpha+6\sqrt{-1}$$

peut être présentée sous la forme

$$\rho(\cos\varpi+\sqrt{-1}\sin\varpi),$$

ρ désignant une quantité positive et ϖ un arc réel. Effectivement, si l'on pose

$$\alpha+6\sqrt{-1}=\rho(\cos\varpi+\sqrt{-1}\sin\varpi),$$

ou, ce qui revient au même,

$$\alpha=\rho\cos\varpi,\qquad 6=\rho\sin\varpi, \tag{4}$$

on tirera des équations (4), jointes à la formule (2),

$$\rho^2=\alpha^2+6^2, \tag{5}$$

puis, en supposant ρ positif,

$$\rho=\sqrt{\alpha^2+6^2}, \tag{6}$$

$$\cos\varpi=\frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2+6^2}},\qquad \sin\varpi=\frac{6}{\sqrt{\alpha^2+6^2}}; \tag{7}$$

et il est clair qu'on pourra satisfaire aux équations (7) par une valeur réelle, et même par une infinité de valeurs réelles de l'arc ϖ. Le facteur ρ, dont la valeur unique se détermine par la formule (6), est ce qu'on appelle *le module* de l'expression imaginaire

$$\alpha+6\sqrt{-1};$$

l'arc ϖ est ce que je nommerai *l'argument* de cette expression. Si ω désigne une des valeurs de cet argument, on vérifiera généralement les équations (7) en prenant

$$\varpi=\omega\pm 2k\pi, \tag{8}$$

k étant un nombre entier quelconque; et, par suite, les diverses valeurs de l'argument ϖ formeront une progression arithmétique dont la raison sera la circonférence 2π. Ajoutons que, si l'on désigne par φ un arc réel quelconque, une seule des valeurs de l'argument ϖ se trouvera renfermée entre les limites

$$\varphi-\pi, \quad \varphi+\pi.$$

Comme il suffira de changer le signe de ϖ pour transformer l'une dans l'autre les deux expressions

$$\alpha+\beta\sqrt{-1}=\rho(\cos\varpi+\sqrt{-1}\sin\varpi), \qquad \alpha-\beta\sqrt{-1}=\rho(\cos\varpi-\sqrt{-1}\sin\varpi),$$

il est clair que deux expressions imaginaires conjuguées offriront toujours, avec un module commun équivalent à la racine carrée de leur produit, deux arguments égaux, au signe près, mais affectés de signes contraires.

Si l'on multiplie l'une par l'autre les deux expressions imaginaires

$$\cos\varpi+\sqrt{-1}\sin\varpi, \quad \cos\varpi'+\sqrt{-1}\sin\varpi',$$

dont ϖ, ϖ' représentent les arguments, et dont les modules se réduisent à l'unité, on trouvera

$$(9) \qquad \begin{aligned}&(\cos\varpi+\sqrt{-1}\sin\varpi)(\cos\varpi'+\sqrt{-1}\sin\varpi')\\ &\quad=\cos(\varpi+\varpi')+\sqrt{-1}\sin(\varpi+\varpi').\end{aligned}$$

Par suite, si l'on multiplie l'une par l'autre les deux expressions imaginaires

$$\alpha+\beta\sqrt{-1}=\rho(\cos\varpi+\sqrt{-1}\sin\varpi), \quad \alpha'+\beta'\sqrt{-1}=\rho'(\cos\varpi'+\sqrt{-1}\sin\varpi'),$$

dont les modules ρ, ρ' peuvent différer de l'unité, on trouvera non seulement

$$(10) \qquad (\alpha+\beta\sqrt{-1})(\alpha'+\beta'\sqrt{-1})=\alpha\alpha'-\beta\beta'+(\alpha\beta'+\alpha'\beta)\sqrt{-1},$$

mais encore

$$(11) \qquad (\alpha+\beta\sqrt{-1})(\alpha'+\beta'\sqrt{-1})=\rho\rho'[\cos(\varpi+\varpi')+\sqrt{-1}\sin(\varpi+\varpi')].$$

Il suit de la formule (10), que *le produit de deux expressions imaginaires a pour module le produit de leurs modules, et pour argument la somme de leurs arguments*. D'ailleurs, le produit $\rho\rho'$ étant, en vertu des formules (10) et (11), le module de l'expression imaginaire

$$\alpha\alpha'-\beta\beta'+(\alpha\beta'+\alpha'\beta)\sqrt{-1},$$

l'équation (5) donnera

$$\rho^2\rho'^2=(\alpha\alpha'-\beta\beta')^2+(\alpha\beta'+\alpha'\beta)^2,$$

ou, ce qui revient au même,

$$(12) \qquad (\alpha^2+\beta^2)(\alpha'^2+\beta'^2)=(\alpha\alpha'-\beta\beta')^2+(\alpha\beta'+\alpha'\beta)^2.$$

La formule (9) n'est autre chose que la représentation symbolique des deux équations réelles qui servent à exprimer le cosinus et le sinus de la somme de deux arcs en fonctions des sinus et cosinus de ces deux arcs. La formule (11), appliquée au cas où les quantités α, α', β, β' deviennent des nombres entiers, fait voir que, si l'on multiplie l'un par l'autre deux nombres entiers dont chacun soit la somme de deux carrés, le produit sera encore une somme de deux carrés.

Si l'on multipliait l'une par l'autre trois, quatre, etc. expressions imaginaires, alors, à la place de la formule (11), on obtiendrait une formule analogue de laquelle on conclurait que *le produit de plusieurs expressions imaginaires a pour module le produit de leurs modules, et pour argument la somme de leurs arguments*.

II. — *Des variables imaginaires.*

Lorsqu'on suppose variables les deux quantités réelles s, t, ou au moins l'une d'entre elles, l'expression imaginaire x déterminée par la formule

$$(1) \qquad x=s+t\sqrt{-1},$$

est ce qu'on appelle une *variable imaginaire*.

Si l'on nomme r le module et p l'argument de la variable imaginaire x, on aura généralement

$$(2) \qquad x=r(\cos p+\sqrt{-1}\sin p),$$

r, p étant liés à s et t par les formules

$$(3) \qquad s=r\cos p, \qquad t=r\sin p;$$

et il sera nécessaire que des deux quantités r et p, l'une au moins, soit variable avec x.

Rien n'empêche de considérer les quantités réelles s, t comme représentant les coordonnées rectilignes d'un point situé dans un plan donné. Alors les diverses valeurs de x que l'on déduira de la formule (1), en attribuant aux variables s, t divers systèmes de valeurs, correspondront aux diverses positions que pourra prendre un point mobile P dans le point dont il s'agit. Si les coordonnées s, t sont non seulement rectilignes, mais rectangulaires, le module r et l'argument p, liés à s et t par les formules (3), représenteront le rayon vecteur mené de l'origine à ce point, et l'*angle polaire* que décrira ce rayon vecteur en tournant autour de l'origine considérée comme *pôle*; par conséquent, r et p seront ce qu'on appelle les *coordonnées polaires* du point P.

Si, dans l'équation (1), on fait converger la variable s vers une certaine limite S, et la variable t vers une certaine limite T, la variable x convergera elle-même vers une *limite* correspondante X qui sera déterminée par la formule

$$X = S + T\sqrt{-1}.$$

Une expression imaginaire variable est appelée *infiniment petite* lorsqu'elle converge vers la limite zéro, ce qui suppose que, dans l'expression donnée, la partie réelle et le coefficient de $\sqrt{-1}$ convergent en même temps vers cette limite. Cela posé, représentons par

$$\alpha + \beta\sqrt{-1} = \rho(\cos\varpi + \sqrt{-1}\sin\varpi)$$

une expression imaginaire variable, α, β désignant deux quantités réelles auxquelles on peut substituer le module ρ et l'argument ϖ. Pour que cette expression soit infiniment petite, il sera nécessaire et il suffira que son module ρ soit lui-même infiniment petit.

III. — *Sur les fonctions de variables imaginaires et sur celles de ces fonctions que l'on nomme entières ou rationnelles.*

Les variables imaginaires peuvent être soumises, aussi bien que les variables réelles, à diverses opérations dont les résultats sont des

fonctions de ces variables. Ces fonctions se trouvent complètement définies quand les opérations ont été définies elles-mêmes et quand on a complètement fixé le sens des notations employées dans le calcul.

Ainsi, par exemple, en vertu des définitions et conventions admises dans le paragraphe I, la *somme* ou le *produit* de plusieurs expressions imaginaires

$$\alpha + \beta\sqrt{-1}, \quad \alpha' + \beta'\sqrt{-1}, \quad \alpha'' + \beta''\sqrt{-1}, \quad \ldots$$

ne sera autre chose que l'expression de même forme à laquelle on parvient quand on *ajoute* entre elles, ou quand on *multiplie* l'une par l'autre les expressions données, en opérant, d'après les règles établies pour les quantités réelles, comme si $\sqrt{-1}$ était un facteur réel dont le carré fût égal à -1; et cette somme ou ce produit s'indiquera toujours à l'aide des notations dont on se sert pour représenter la somme ou le produit de quantités réelles. Donc, si l'on nomme

$$a, \quad b, \quad c, \quad \ldots, \quad x, \quad y, \quad z, \quad \ldots$$

plusieurs constantes et variables imaginaires, les valeurs des fonctions de x représentées par les notations

$$x + a, \quad x + a + b, \quad \ldots, \quad ax, \quad abx, \quad abcx, \quad \ldots,$$

et des fonctions de $x, y, z, \ldots$ représentées par les notations

$$x + y, \quad x + y + z, \quad \ldots, \quad xy, \quad xyz, \quad \ldots, \quad axyz, \quad \ldots$$

seront toujours complètement déterminées.

De la notion des produits, on passe immédiatement, comme l'on sait, à celle des puissances entières. En effet, si l'on désigne par n un nombre entier quelconque, et par x une variable réelle, la $n^{\text{ième}}$ puissance de x, représentée par la notation x^n, ne sera autre chose que le produit de n facteurs égaux à x. Or, il suffira évidemment d'étendre cette définition et cette notation au cas même où la variable x devient imaginaire, pour que la fonction

$$x^n$$

soit toujours complètement déterminée.

Si l'on nomme r le module et p l'argument de x, alors, en vertu de la dernière des propositions énoncées dans le paragraphe I, x^n aura pour module le produit r^n de n facteurs égaux à r, et pour argument la somme np de n quantités égales à p. On aura donc

$$x^n = r^n(\cos np + \sqrt{-1}\sin np). \tag{1}$$

Ces principes étant admis, une fonction d'une ou de plusieurs variables imaginaires pourra être considérée comme complètement déterminée, quand elle résultera d'une ou de plusieurs opérations dont chacune sera une addition, une multiplication ou l'élévation d'une expression imaginaire variable à une puissance entière. En effet, pour obtenir la valeur d'une telle fonction, il suffira d'effectuer, l'une après l'autre, les opérations dont il s'agit. Les fonctions ainsi construites avec des variables imaginaires sont appelées *fonctions entières* de ces variables, c'est-à-dire qu'on leur donne le nom assigné aux fonctions de même nature, construites avec des variables réelles. Cela posé, les fonctions entières de variables imaginaires jouiront évidemment des mêmes propriétés que les fonctions entières des variables réelles, et vérifieront les mêmes formules. Ainsi, en particulier, *la somme ou le produit de plusieurs variables imaginaires*, tout comme la somme ou le produit de plusieurs variables réelles, *offrira une valeur indépendante de l'ordre dans lequel les additions ou les multiplications seront effectuées*. Ainsi encore les deux formules

$$(x+y)(x-y) = x^2 - y^2,$$
$$(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2,$$

et les formules plus générales

$$x^n - y^n = (x-y)(x^{n-1} + x^{n-2}y + \ldots + xy^{n-2} + y^{n-1}), \tag{2}$$

$$(x+y)^n = x^n + nx^{n-1}y + \frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}y^2 + \ldots + y^n, \tag{3}$$

$$x^{m+n} = x^m x^n, \tag{4}$$

$$(xy)^n = x^n y^n, \tag{5}$$

$$(x^n)^m = x^{mn}, \tag{6}$$

dans lesquelles m et n désigneront des nombres entiers quelconques,

subsisteront pour des valeurs imaginaires, aussi bien que pour des valeurs réelles des variables x, y.

Les opérations inverses de l'addition et de la multiplication peuvent être effectuées sur des variables imaginaires, aussi bien que sur des variables réelles. Il est naturel de désigner, sous les mêmes noms, dans les deux cas, ces opérations inverses et leurs résultats, et de représenter ces résultats à l'aide des mêmes notations. C'est ce que l'on fait, autant qu'il est possible. Entrons, à ce sujet, dans quelques détails.

Étant données deux variables réelles ou imaginaires x et y, la *soustraction* ou l'opération inverse de l'addition consiste à trouver, par exemple, une nouvelle variable z qui, ajoutée à la variable x, reproduise la variable y, et vérifie en conséquence la formule

$$x + z = y. \tag{7}$$

Le résultat de la soustraction s'appelle *différence*. Or, comme pour tirer de l'équation (1) la valeur de z, il suffira d'ajouter $-x$ aux deux membres, il est clair que la différence z de y à x sera déterminée par la formule

$$z = y - x, \tag{8}$$

et représentée, pour des valeurs quelconques de x et y, par la notation

$$y - x.$$

Ainsi la soustraction peut être réduite à l'addition; et, pour soustraire la variable x de la variable y, il suffira d'ajouter à cette dernière la variable $-x$.

La *division* n'étant autre chose que l'opération inverse de la multiplication, pour diviser y par x, il suffira de chercher la valeur de z qui, multipliée par x, reproduit y, et vérifie en conséquence la formule

$$xz = y. \tag{9}$$

Le résultat de la division s'appelle *quotient* ou *rapport géométrique*. Le quotient de y par x s'indique, pour des valeurs quelconques réelles ou imaginaires de x, à l'aide de la notation

$$\frac{y}{x},$$

en sorte que l'équation (9) entraîne toujours la suivante

$$z = \frac{y}{x}. \tag{10}$$

D'ailleurs, si l'on nomme r, r' le module des variables x, y, et p, p' leurs arguments, on aura

$$x = r(\cos p + \sqrt{-1}\sin p), \qquad y = r'(\cos p' + \sqrt{-1}\sin p'),$$

et, pour tirer la valeur de z de l'équation (9), réduite à la forme

$$rz(\cos p + \sqrt{-1}\sin p) = r'(\cos p' + \sqrt{-1}\sin p'),$$

il suffira évidemment de multiplier les deux membres : 1° par le facteur $\frac{1}{r}$; 2° par le facteur

$$\cos p - \sqrt{-1}\sin p.$$

En opérant ainsi, on trouvera, pour des valeurs du rapport $\frac{y}{x} = z$,

$$\frac{y}{x} = \frac{r'}{r}\left[\cos(p'-p) + \sqrt{-1}\sin(p'-p)\right], \tag{11}$$

et l'on pourra, en conséquence, affirmer que *le rapport de deux expressions imaginaires a pour module le rapport de leurs modules, et pour argument la différence de leurs arguments*. Cette proposition, qui pourrait évidemment se déduire de celle que nous avons énoncée à la fin du paragraphe I, prouve que le quotient de deux variables imaginaires est toujours complètement déterminé, à moins que le diviseur y ne s'évanouisse avec son module r.

Dans le cas particulier où y se réduit à l'unité, le rapport z, réduit à $\frac{1}{x}$, devient ce que nous appelons l'expression ou la variable *inverse* de x. Alors la formule (11) donne

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{r}(\cos p - \sqrt{-1}\sin p). \tag{12}$$

Donc *l'inverse* $\frac{1}{x}$ *de la variable imaginaire* x *offre un module inverse du*

module de x, *avec un argument égal, au signe près, à l'argument de* x, *mais affecté d'un signe contraire*.

Comme on aura d'ailleurs, en vertu des formules (11) et (12), jointes à la formule (11) du paragraphe I,

$$\frac{y}{x} = y \times \frac{1}{x}, \tag{13}$$

il est clair que, pour diviser y par x, il suffira de multiplier y par l'inverse de x. Ainsi *le rapport de deux variables imaginaires est le produit de la première par l'inverse de la seconde*. Cette proposition, jointe à celle que nous avons énoncée tout à l'heure, permet de substituer une multiplication à une division.

Une fonction d'une ou de plusieurs variables imaginaires est appelée rationnelle lorsqu'elle est le résultat de plusieurs opérations dont chacune se réduit à une addition, à une multiplication, à la formation d'une puissance entière, ou à une division. Cela posé, les fonctions rationnelles de variables imaginaires jouiront évidemment des mêmes propriétés que les fonctions rationnelles de variables réelles, et vérifieront les mêmes formules. Ainsi, en particulier, *toute fonction rationnelle pourra être réduite au rapport de deux fonctions entières*; et, de plus, *un tel rapport ne sera point altéré si ses deux termes sont multipliés ou divisés par un même facteur*. Ainsi, encore, on tirera de la formule (4), pour des valeurs imaginaires, aussi bien que pour des valeurs réelles de x,

$$x^m = \frac{x^{m+n}}{x^n}. \tag{14}$$

Ajoutons que, pour obtenir une définition générale de x^m, dans le cas où m désigne une quantité réelle, positive, nulle ou négative, mais dont la valeur numérique est un nombre entier, il suffira d'étendre la formule (14) au cas même où l'exposant m devient nul ou négatif. En effet, si, n étant un nombre entier quelconque, l'on remplace successivement, dans cette formule, m par zéro et par $-n$, on trouvera

$$x^0 = 1 \tag{15}$$

et

$$x^{-n} = \frac{1}{x^n}. \tag{16}$$

Il est bon d'observer qu'en désignant, comme ci-dessus, par r le module et par p l'argument de x, on tirera de la formule (16), jointe aux équations (1) et (12),

$$x^{-n} = r^{-n}(\cos np - \sqrt{-1}\sin np). \tag{17}$$

Cela posé, si l'on nomme a une quantité positive ou négative dont la valeur numérique soit un nombre entier n, on aura, en vertu des formules (1) et (17),

$$x^a = r^a(\cos ap + \sqrt{-1}\sin ap). \tag{18}$$

IV. — *Sur les fonctions algébriques et irrationnelles de variables imaginaires.*

On est conduit à la notion des fonctions algébriques et irrationnelles, lorsqu'on cherche à effectuer l'opération inverse de celle qui a pour objet l'élévation d'une variable à des puissances entières, ou à généraliser l'emploi de la notation par laquelle on exprime ces puissances, et à étendre cet emploi au cas même où les exposants deviennent fractionnaires ou irrationnels. Pour bien comprendre ce que nous devons dire à ce sujet, il est nécessaire de rappeler d'abord en peu de mots la définition générale des racines et la définition des puissances fractionnaires ou irrationnelles d'une quantité positive.

L'opération inverse de celle qui a pour objet l'élévation d'une variable à la $n^{\text{ième}}$ puissance, la lettre n désignant un nombre entier quelconque, c'est ce qu'on appelle l'*extraction de la racine du degré n*. Ainsi, extraire la racine $n^{\text{ième}}$ de la variable réelle ou imaginaire x, c'est tout simplement chercher une autre variable y dont la $n^{\text{ième}}$ puissance reproduise x, en sorte qu'on ait

$$y^n = x. \tag{1}$$

D'ailleurs cette équation admet généralement n racines dont une seule

est réelle et positive, quand on suppose que la variable x elle-même est réelle et positive. Adoptons cette supposition, et, en désignant, suivant l'usage, par $\sqrt[n]{x}$ la racine $n^{\text{ième}}$ et positive de x, faisons, pour abréger,

$$\mathrm{x} = \sqrt[n]{x}. \tag{2}$$

On aura

$$x = \mathrm{x}^n; \tag{3}$$

et si, en nommant a un nombre entier quelconque, on élève les deux membres de la formule (3) à la puissance du degré a, on trouvera

$$x^a = \mathrm{x}^{na}. \tag{4}$$

Or, pour obtenir la définition générale de x^a, dans le cas où l'exposant a devient fractionnaire, il suffira d'étendre à ce cas la formule (4). En effet, si, dans cette formule, on remplace successivement a par $\frac{1}{n}$ et par $\frac{m}{n}$, elle donnera

$$x^{\frac{1}{n}} = \mathrm{x}, \qquad x^{\frac{m}{n}} = \mathrm{x}^m; \tag{5}$$

en sorte que $x^{\frac{1}{n}}$ ne différera pas de $\sqrt[n]{x}$. Il y a plus; si l'on attribue successivement à la constante a les valeurs négatives $-\frac{1}{n}$, $-\frac{1}{m}$, la formule (4) donnera

$$x^{-\frac{1}{n}} = \mathrm{x}^{-1}, \qquad x^{-\frac{m}{n}} = \mathrm{x}^{-m}; \tag{6}$$

et, par suite, la quantité positive x^{-a} sera toujours inverse de x^a, c'est-à-dire égale à $\frac{1}{x^a}$, tout comme, en vertu de la formule (16) du paragraphe III, x^{-1} est inverse de x, et x^{-m} de x^m. Ajoutons que, si la constante a, étant positive ou négative, a pour valeur numérique un nombre irrationnel μ, on pourra obtenir de ce nombre irrationnel des valeurs aussi approchées que l'on voudra, exprimées par des nombres fractionnaires. Or, soit $\frac{m}{n}$ une de ces valeurs approchées. En vertu de la définition généralement admise par les géomètres, les puissances irrationnelles

$$x^{\mu} \quad \text{et} \quad x^{-\mu}$$

ne seront autre chose que les limites vers lesquelles convergeront les puissances fractionnaires

$$x^{\frac{m}{n}} \quad \text{et} \quad x^{-\frac{m}{n}},$$

tandis que le degré de l'approximation croîtra indéfiniment. D'ailleurs, ces dernières puissances se réduisant toujours à deux nombres inverses l'un de l'autre, on pourra en dire autant de leurs limites, en sorte qu'on aura encore

$$(7) \qquad x^{-a} = \frac{1}{x^a}.$$

En résumé, si la variable x est réelle et positive, alors, parmi ses racines du degré n, c'est-à-dire parmi les valeurs de y propres à vérifier l'équation (1), une seule sera réelle et positive. Si, en désignant cette racine positive par la lettre x, on veut déterminer complètement la valeur de la fraction

$$x^a,$$

il suffira, quand l'exposant a sera fractionnaire, de recourir à l'équation (4), et, dans le cas contraire, de faire converger un exposant fractionnaire vers la limite a.

Considérons maintenant le cas général où la variable x est imaginaire. Nommons r le module, et p l'argument de cette variable. Les diverses racines $n^{\text{ièmes}}$ de x seront toujours les n valeurs de y propres à vérifier l'équation (1). Soient ρ et ϖ le module et l'argument de l'une quelconque de ces valeurs ; on aura, non seulement

$$x = r(\cos p + \sqrt{-1}\sin p), \qquad y = \rho(\cos\varpi + \sqrt{-1}\sin\varpi),$$

mais encore, en vertu de la formule (1) du paragraphe III,

$$y^n = \rho^n(\cos n\varpi + \sqrt{-1}\sin n\varpi);$$

et puisqu'à une expression imaginaire donnée correspond toujours un seul module, les deux modules

$$\rho^n, \quad r$$

des expressions égales y^n et x seront nécessairement égaux entre eux. On aura donc

$$(8) \qquad \rho^n = r;$$

et, par suite, la valeur de y^n étant réduite à

$$y^n = r(\cos n\varpi + \sqrt{-1}\sin n\varpi),$$

l'équation (1) donnera

$$\cos n\varpi + \sqrt{-1}\sin n\varpi = \cos p + \sqrt{-1}\sin p,$$

ou, ce qui revient au même,

$$(9) \qquad \cos n\varpi = \cos p, \qquad \sin n\varpi = \sin p.$$

Or, on tirera de l'équation (8)

$$\rho = \sqrt[n]{r},$$

ou, ce qui revient au même,

$$(10) \qquad \rho = r^{\frac{1}{n}}.$$

De plus, en vertu des formules (9), l'arc $n\varpi$ admettra une infinité de valeurs équidistantes ; mais, comme ces valeurs se réduiront aux divers termes d'une progression arithmétique dont la raison sera la circonférence 2π, elles coïncideront précisément avec les diverses valeurs que peut admettre l'argument p de la variable x. Donc, par suite, les diverses valeurs des inconnues ϖ et y seront celles que l'on pourra déduire des formules

$$(11) \qquad \varpi = \frac{p}{n}$$

et

$$(12) \qquad y = r^{\frac{1}{n}}\left(\cos\frac{p}{n} + \sqrt{-1}\sin\frac{p}{n}\right),$$

en y substituant pour p l'un quelconque des arguments de la variable x.

Il importe beaucoup de distinguer les unes des autres les diverses valeurs de y qui peuvent se tirer de la formule (12), et l'on s'exposerait à introduire une étrange confusion dans le calcul, si on les désignait toutes indistinctement par la notation

$$\sqrt[n]{x}.$$

Il est donc nécessaire de n'appliquer cette notation qu'à une seule des racines $n^{\text{ièmes}}$ de x, convenablement choisie. D'ailleurs, la racine que l'on choisira devra évidemment remplir deux conditions. En premier lieu, elle devra se réduire, pour une valeur réelle et positive de x, à la racine que nous représentons alors par la notation

$$\sqrt[n]{x} \quad \text{ou} \quad x^{\frac{1}{n}}.$$

En second lieu, elle devra se réduire à $\sqrt{-1}$, quand on posera $n = 2$ et $x = -1$. Or ces conditions seront remplies si, dans le second membre de la formule (12), on réduit toujours l'angle p à celui des arguments de la variable x qui se trouve compris entre les limites $-\pi$, $+\pi$, en faisant coïncider p avec la limite supérieure π, dans le cas particulier où la variable x deviendrait réelle et négative. En effet, l'argument p étant choisi comme on vient de le dire, on aura : 1° pour une valeur réelle et positive de x,

$$p = 0, \qquad \frac{p}{n} = 0, \qquad x = r;$$

2° pour $x = -1$, et $n = 2$,

$$p = \pi, \qquad \frac{p}{n} = \frac{\pi}{2}, \qquad r = 1;$$

et la formule (12) donnera, dans le premier cas,

$$y = r^{\frac{1}{n}} = x^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{x};$$

dans le second cas,

$$y = \sqrt{-1}.$$

Le choix que nous venons d'indiquer est celui auquel nous nous arrêterons, et, en conséquence, nous poserons

$$\sqrt[n]{x} = r^{\frac{1}{n}}\left(\cos\frac{p}{n} + \sqrt{-1}\sin\frac{p}{n}\right), \tag{13}$$

p étant l'argument de x compris entre la limite inférieure $-\pi$, qu'il ne doit jamais atteindre, et la limite supérieure π, qu'il atteindra si l'on attribue à la variable x une valeur réelle, mais négative.

Il est bon d'observer qu'on satisferait encore aux deux conditions énoncées si, dans la formule (13), on attribuait toujours à l'argument p

une valeur comprise entre les limites

$$\varphi - \pi, \qquad \varphi + \pi,$$

l'une de ces limites étant exclue, et φ étant un angle positif inférieur à π ; ou même si, en considérant l'argument p comme représentant un angle polaire, on faisait varier cet angle polaire, suivant l'usage reçu dans la géométrie analytique, entre les limites

$$\pi - \pi = 0, \qquad \pi + \pi = 2\pi,$$

sans lui permettre néanmoins d'atteindre jamais la plus grande de ces deux limites. Mais, dans cette dernière hypothèse, il suffirait d'attribuer à la variable x, supposée réelle et positive, un accroissement infiniment petit, dans lequel le coefficient de $\sqrt{-1}$ fût négatif, pour que la fonction $\sqrt[n]{x}$ changeât brusquement de valeur ; et l'on évite cet inconvénient en s'arrêtant à la supposition que nous avons admise.

En résumé, nous supposerons toujours, dans ce qui va suivre, la valeur de $\sqrt[n]{x}$ déterminée par la formule (13), dans laquelle l'argument p de x ne pourra varier que depuis la limite $-\pi$ exclusivement jusqu'à la limite π inclusivement. Le sens de la notation $\sqrt[n]{x}$ étant ainsi fixé, si l'on pose, pour abréger,

$$\mathrm{x} = \sqrt[n]{x},$$

on aura

$$x = \mathrm{x}^n,$$

et même on tirera de cette dernière formule, en élevant les deux membres à une puissance entière dont le degré soit représenté par a,

$$x^a = \mathrm{x}^{na}.$$

On se trouvera ainsi ramené à l'équation (4), déjà établie pour le cas où la variable x était réelle et positive, et l'on peut ajouter que, si, dans cette équation, l'on substitue à $\mathrm{x} = \sqrt[n]{x}$ sa valeur tirée de la formule (13), on verra reparaître l'équation (18) du paragraphe III, savoir,

$$x^a = r^a(\cos ap + \sqrt{-1}\sin ap). \tag{14}$$

Cela posé, rien n'empêchera d'étendre les définitions et conventions admises dans le cas où la variable était réelle et positive, au cas où cette variable devient imaginaire. C'est ce que nous ferons; et, en conséquence, pour définir la valeur de x^a correspondante à des valeurs fractionnaires positives ou négatives de l'exposant a, nous étendrons à ces valeurs fractionnaires de a l'équation (4), ou, ce qui revient au même, la formule (14); puis, quand l'exposant a deviendra irrationnel, nous regarderons la puissance irrationnelle x^a comme la limite vers laquelle convergera une autre puissance dont l'exposant fractionnaire s'approchera indéfiniment de la limite a. Nous parviendrons ainsi à fixer, pour une valeur réelle quelconque de l'exposant a, le sens qui devra être attaché à la notation x^a, et qui se trouvera, dans tous les cas, déterminé par la formule (14).

On nomme *fonction algébrique irrationnelle* celle qui est le résultat de plusieurs opérations algébriques dont chacune se réduit à une addition, à une multiplication, à une division, ou à la formation d'une puissance entière, fractionnaire ou irrationnelle. Les fonctions algébriques irrationnelles de variables imaginaires jouissent de propriétés analogues à celles des fonctions algébriques irrationnelles de variables réelles, et vérifient des formules du même genre, seulement plusieurs de ces formules ne subsistent que sous certaines conditions, et entre certaines limites, quand les variables deviennent imaginaires. Ainsi, par exemple, a, b, c, ... étant des exposants réels quelconques, et $x, y, z, \ldots$ des variables imaginaires, les formules

$$x^a x^b = x^{a+b}, \qquad x^a x^b x^c = x^{a+b+c}, \qquad \ldots \tag{15}$$

subsisteront pour une valeur quelconque de x. Mais on ne pourra pas en dire autant des formules

$$x^a y^a = (xy)^a, \qquad x^a y^a z^a = (xyz)^a, \qquad \ldots, \tag{16}$$

et si l'on représente par

$$p, \quad p', \quad p'', \quad \ldots$$

les arguments des variables

$$x, \quad y, \quad z, \quad \ldots,$$

en supposant chacun de ces arguments supérieur à la limite $-\pi$, mais inférieur ou tout au plus égal à π, les formules (16) subsisteront sous la condition que la somme

$$p + p' \quad \text{ou} \quad p + p' + p'', \quad \ldots$$

des arguments des diverses variables soit elle-même supérieure à $-\pi$, et inférieure ou tout au plus égale à π.

V. — *Sur les fonctions exponentielles, trigonométriques et logarithmiques de variables imaginaires.*

Ainsi que nous l'avons remarqué dans le paragraphe III, une fonction de plusieurs variables imaginaires offre une valeur complètement déterminée, quand elle se réduit à une fonction entière de ces variables. Il y a plus; cette proposition, qui reste vraie quel que soit le nombre des termes compris dans la fonction entière, peut être évidemment étendue au cas même où le nombre de ces termes devient infini, et où cette fonction est représentée par la somme d'une série convergente. Pour qu'une telle fonction soit complètement déterminée, il suffit que l'on attribue à la variable ou aux variables qu'elle renferme, des valeurs qui laissent subsister la convergence de la série.

Cela posé, concevons qu'une fonction de x, représentée par une certaine notation, soit développable, pour des valeurs réelles de la variable x en une série ordonnée suivant les puissances ascendantes de cette variable. Si cette série reste convergente pour des valeurs imaginaires de x, comprises entre certaines limites, elle offrira un moyen facile de fixer entre ces limites le sens de la notation dont il s'agit; et, pour y parvenir, il suffira de considérer cette notation comme propre à exprimer la somme de la série, tant qu'elle demeure convergente.

Pour montrer une application de ces principes, considérons en particulier les trois fonctions que l'on nomme *exponentielle népérienne*, *cosinus* et *sinus*, et que l'on représente par les notations

$$e^x, \quad \cos x, \quad \sin x,$$

la lettre e désignant la base des logarithmes népériens. En raisonnant comme je l'ai fait dans mon *Analyse algébrique*, on établira sans peine les formules connues

$$(1)\qquad e^x = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3}{1.2.3} + \ldots,$$

$$(2)\qquad \cos x = 1 - \frac{x^2}{1.2} + \ldots, \qquad \sin x = \frac{x}{1} - \frac{x^3}{1.2.3} + \ldots,$$

et l'on prouvera que les séries comprises dans les seconds membres de ces formules restent convergentes pour une valeur quelconque réelle ou imaginaire de la variable x. Cela posé, pour fixer, dans tous les cas possibles, le sens des notations

$$e^x, \quad \cos x, \quad \sin x,$$

il suffira évidemment de suivre la règle énoncée et d'étendre les formules (1) et (2) au cas même où la variable x devient imaginaire.

Ajoutons que, si l'on désigne par A une quantité positive et par a le logarithme népérien de A, l'équation

$$(3)\qquad A = e^a$$

entraînera la suivante

$$(4)\qquad A^x = e^{ax},$$

quand la variable x sera réelle; et qu'il suffira d'étendre la formule (4) au cas où x deviendra imaginaire, pour fixer, dans ce dernier cas, le sens qui devra être attaché à la notation A^x. Au reste, pour déterminer, dans tous les cas possibles, la valeur de l'*exponentielle* A^x, il suffirait encore de la considérer comme une expression propre à représenter toujours la somme de la série convergente, qui représente le développement de cette même exponentielle, dans le cas où x est réel.

Les exponentielles, les sinus et les cosinus, définis comme on vient de l'expliquer, jouissent, quand les variables sont imaginaires, de plusieurs propriétés remarquables. Quelques-unes de ces propriétés, par exemple celles qu'expriment les formules

$$(5)\qquad \begin{cases} e^{x+y} = e^x . e^y, \\ A^{x+y} = A^x . A^y, \end{cases}$$

$$(6)\qquad \begin{cases} \cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y, \\ \sin(x+y) = \sin x \cos y + \sin y \cos x, \end{cases}$$

sont précisément celles qu'offraient déjà les fonctions semblables de variables réelles. D'autres propriétés des mêmes fonctions se rapportent spécialement au cas où les variables deviennent imaginaires. Telle est, en particulier, la relation importante qui existe entre les deux lignes trigonométriques $\sin x$, $\cos x$ et $e^{x\sqrt{-1}}$. Cette relation, qu'Euler a découverte, et qui se déduit immédiatement des formules (1) et (2), se trouve exprimée par la suivante

$$(7)\qquad e^{x\sqrt{-1}} = \cos x + \sqrt{-1}\,\sin x.$$

Elle entraîne immédiatement les deux équations

$$(8)\qquad \cos x = \frac{e^{x\sqrt{-1}} + e^{-x\sqrt{-1}}}{2}, \qquad \sin x = \frac{e^{x\sqrt{-1}} - e^{-x\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}},$$

en vertu desquelles le sinus et le cosinus d'un arc réel x peuvent être exprimés à l'aide d'exponentielles que je nomme, pour cette raison, *trigonométriques*, c'est-à-dire à l'aide d'exponentielles dont les exposants n'offrent pas de parties réelles. Les coefficients de $\sqrt{-1}$, dans ces exposants, sont les *arguments* des exponentielles trigonométriques. Si, la variable x étant supposée non plus réelle, mais imaginaire, on nomme r le module et p l'argument de cette variable, on aura, en vertu de la formule (7), jointe à l'équation (2) du paragraphe II,

$$(9)\qquad x = r\,e^{p\sqrt{-1}}.$$

Ainsi *une variable imaginaire quelconque est équivalente au produit de son module par l'exponentielle trigonométrique qui a pour argument l'argument même de la variable.*

L'opération inverse de celle qui donne pour résultat une exponentielle, fournit précisément ce qu'on appelle un logarithme. Ainsi, par exemple, les divers logarithmes népériens de x ne sont autre chose que les diverses valeurs de y propres à vérifier la formule

$$(10)\qquad e^y = x.$$

Dans le cas particulier où la variable x est réelle et positive, un seul des logarithmes népériens de x, celui-là même que l'on désigne par la notation $\mathrm{l}(x)$, est réel et positif. Dans le cas où x devient imaginaire, on tire des formules (9) et (10)

$$e^{y} = r\, e^{p\sqrt{-1}}. \tag{11}$$

Soit d'ailleurs

$$y = u + v\sqrt{-1}$$

une quelconque des valeurs de y, les lettres u, v désignant deux quantités réelles. La première des équations (5) donnera

$$e^{y} = e^{u}\, e^{v\sqrt{-1}}.$$

Donc l'exponentielle e^{y} aura pour module e^{u}, et pour argument v. Mais, en vertu de la formule (11), la même exponentielle a pour module r, et pour argument l'angle p. Donc, puisqu'à une expression imaginaire correspondent toujours un seul module et une infinité d'arguments qui forment les divers termes d'une progression arithmétique dont la raison est 2π, on aura, d'une part,

$$e^{u} = r,$$

par conséquent

$$u = \mathrm{l}(r), \tag{12}$$

et, d'autre part,

$$v = p, \tag{13}$$

p désignant l'un quelconque des arguments de la variable x. Donc, par suite, les diverses valeurs de y seront toutes comprises dans la formule

$$y = \mathrm{l}(r) + p\sqrt{-1}. \tag{14}$$

Parmi ces valeurs, il importe d'en choisir une à laquelle on applique constamment la notation $\mathrm{l}(x)$, Or, pour y parvenir, il est naturel de nous conformer encore ici à la règle que nous avons suivie dans le précédent paragraphe, quand nous avons fixé le sens qu'il convenait d'attacher à la notation x^{a}. C'est ce que nous ferons, et, en conséquence, nous supposerons

$$\mathrm{l}(x) = \mathrm{l}(r) + p\sqrt{-1}, \tag{15}$$

la lettre p désignant, non plus l'un quelconque des arguments de la

variable x, mais celui des arguments de cette variable qui, étant supérieur à la limite $-\pi$, est en même temps inférieur, ou tout au plus égal à π. Cet argument s'évanouira quand la variable x sera réelle et positive, et alors, x étant égal à r, la formule (15) sera vérifiée, puisqu'elle donnera $\mathrm{l}(x) = \mathrm{l}(r)$.

Après avoir fixé, comme on vient de le dire, le sens qui devra être attaché, pour des valeurs quelconques réelles ou imaginaires de x, à la notation $\mathrm{l}(x)$, ou, en d'autres termes, la valeur du logarithme népérien que cette notation représente, on déterminera sans peine le sens qu'il convient d'attribuer généralement à d'autres notations par lesquelles on exprime, quand x est réel, des fonctions dont la définition peut se déduire de celle du logarithme népérien ; par exemple, le sens qu'il convient d'attribuer aux notations

$$\mathrm{L}(x), \quad x^{a},$$

l'exposant a étant réel ou imaginaire, et la lettre L indiquant un logarithme pris dans un système dont la base A diffère du nombre e. En effet, pour y parvenir, il suffira d'étendre les formules

$$\mathrm{L}(x) = \frac{\mathrm{l}(x)}{\mathrm{l}(A)}, \tag{16}$$

$$x^{a} = e^{a\,\mathrm{l}(x)}, \tag{17}$$

qu'il est facile d'établir, quand x et a sont réels, au cas même où x et a deviennent imaginaires. Cette convention étant adoptée, on aura, en vertu des formules (15) et (16),

$$\mathrm{L}(x) = \frac{\mathrm{l}(r)}{\mathrm{l}(A)} + \frac{p}{\mathrm{l}(A)}\sqrt{-1},$$

ou, ce qui revient au même,

$$\mathrm{L}(x) = \mathrm{L}(r) + p\,\mathrm{L}(a)\sqrt{-1}. \tag{18}$$

De plus, si l'on pose

$$a = \alpha + \beta\sqrt{-1},$$

α et β étant réels, on aura

$$a\,\mathrm{l}(x) = \alpha\,\mathrm{l}(r) - \beta p + [\alpha p + \beta\,\mathrm{l}(r)]\sqrt{-1};$$

et, par suite, la formule (17) donnera

$$x^a = e^{\alpha\, l(r) - \beta p}\, e^{[\alpha p + \beta\, l(r)]\sqrt{-1}}$$

ou, ce qui revient au même,

$$x^a = r^{\alpha}\, e^{-\beta p}\, e^{[\alpha p + \beta\, l(r)]\sqrt{-1}}. \tag{19}$$

Dans le cas particulier où l'exposant a est réel, on a

$$\alpha = a, \qquad \beta = 0,$$

et l'équation (19), réduite à

$$x^a = r^a\, e^{ap\sqrt{-1}}, \tag{20}$$

peut encore, en vertu de la formule (7), s'écrire comme il suit :

$$x^a = r^a(\cos ap + \sqrt{-1}\sin ap). \tag{21}$$

On se trouve ainsi ramené, par la considération des exponentielles, à la valeur de x^a déterminée par la formule (14) du paragraphe IV; et l'on voit en même temps que cette formule, relative au cas où l'exposant a est réel, peut être non seulement étendue au cas où l'exposant devient imaginaire, mais encore remplacée avec avantage par une autre, plus concise, savoir, par l'équation (20).

Considérons maintenant l'opération inverse de celle par laquelle on détermine le cosinus ou le sinus de la variable x. Cette opération donnera pour résultat une nouvelle variable y qui vérifiera la formule

$$\cos y = x, \tag{22}$$

ou

$$\sin y = x. \tag{23}$$

Si d'ailleurs x, étant réel, offre une valeur numérique inférieure à l'unité, une seule des valeurs de y sera représentée par la notation

$$\operatorname{arc}\cos x,$$

à l'aide de laquelle nous désignons toujours un arc renfermé entre les limites 0, π, ou par la notation

$$\operatorname{arc}\sin x,$$

à l'aide de laquelle nous désignons toujours un arc renfermé entre les limites $-\frac{\pi}{2}$, $+\frac{\pi}{2}$. En étendant les mêmes notations au cas où x devient imaginaire, on doit nécessairement appliquer chacune d'elles à une valeur de y tellement choisie, que cette valeur coïncide, quand y est réel, avec la fonction alors exprimée par $\operatorname{arc}\cos x$, ou par $\operatorname{arc}\sin x$. Cette condition est remplie quand on détermine $\operatorname{arc}\cos x$ et $\operatorname{arc}\sin x$ à l'aide des formules que j'ai données dans mon *Analyse algébrique*, et que je vais rappeler.

Si l'on pose, pour plus de commodité,

$$x = s + t\sqrt{-1}, \qquad y = u + v\sqrt{-1},$$

s, t, u, v étant réels, la formule (22) donnera

$$s + t\sqrt{-1} = \cos(u + v\sqrt{-1}) = \frac{e^v + e^{-v}}{2}\cos u - \frac{e^v - e^{-v}}{2}\sin u\sqrt{-1},$$

ou, ce qui revient au même,

$$\frac{e^v + e^{-v}}{2}\cos u = s, \qquad \frac{e^v - e^{-v}}{2}\sin u = -t. \tag{24}$$

On aura, par suite,

$$e^v = \frac{s}{\cos u} - \frac{t}{\sin u}, \qquad e^{-v} = \frac{s}{\cos u} + \frac{t}{\sin u}, \tag{25}$$

et l'on en conclura

$$\frac{s^2}{\cos^2 u} - \frac{t^2}{\sin^2 u} = 1.$$

De cette dernière formule, combinée avec l'équation

$$\cos^2 u + \sin^2 u = 1,$$

on déduira sans peine les valeurs de $\cos^2 u$, $\sin^2 u$; et, en posant, pour abréger,

$$\left\{\begin{aligned} S &= \left\{\sqrt{\left[\left(\frac{1+s^2+t^2}{2}\right)^2 - s^2\right]} + \frac{1+s^2+t^2}{2}\right\}^{\frac{1}{2}}, \\ T &= \left\{\sqrt{\left[\left(\frac{1-s^2-t^2}{2}\right)^2 + t^2\right]} - \frac{1-s^2-t^2}{2}\right\}^{\frac{1}{2}}, \end{aligned}\right. \tag{26}$$

on trouvera

$$\cos^2 u = \frac{s^2}{S^2}, \qquad \sin^2 u = \frac{t^2}{T^2}. \tag{27}$$

D'ailleurs, en vertu de la première des formules (24), s et $\cos u$ seront des quantités de même signe. Donc la première des équations (27) donnera

$$\cos u = \frac{s}{S}. \tag{28}$$

On satisfait à l'équation (28) en posant

$$u = \pm \operatorname{arc} \cos \frac{s}{S} \pm 2k\pi, \tag{29}$$

k étant un nombre entier. Mais, si l'on veut que la variable

$$y = u + v\sqrt{-1}$$

se réduise à la quantité réelle

$$\operatorname{arc} \cos x,$$

quand x, étant réel, offrira une valeur numérique inférieure à l'unité, c'est-à-dire, en d'autres termes, quand on aura

$$t = 0,$$

et, par suite,

$$x = s, \qquad S = 1, \qquad T = 0, \qquad v = 0,$$

il faudra nécessairement supposer, dans la formule (29), $k = 0$, et réduire en même temps au signe $+$ le double signe placé devant l'arc qui a pour cosinus le rapport $\frac{s}{S}$; il faudra donc prendre

$$u = \operatorname{arc} \cos \frac{s}{S}. \tag{30}$$

La valeur de u étant ainsi déterminée, $\sin u$ sera positif, à moins que t ne s'évanouisse, et la seconde des équations (27) donnera, en général,

$$\sin u = \frac{\sqrt{t^2}}{T}. \tag{31}$$

Cela posé, la première des formules (25) donnera

$$v = \mathrm{l}(S \mp T), \tag{32}$$

le double signe $\mp$ devant être réduit au signe $-$ ou au signe $+$, suivant que t sera positif ou négatif. Comme on aura d'ailleurs

$$\left(\frac{1 + s^2 + t^2}{2}\right)^2 - s^2 = \left(\frac{1 - s^2 - t^2}{2}\right)^2 + t^2,$$

les formules (26) donneront

$$S^2 - T^2 = 1,$$

et, par suite, la valeur de v pourra être réduite à

$$v = \mp \mathrm{l}(S + T), \tag{33}$$

la détermination du signe devant s'effectuer conformément à la règle énoncée. En d'autres termes, on aura

$$v = -\frac{\sqrt{t^2}}{t} \mathrm{l}(S + T), \tag{34}$$

et celle des valeurs de

$$y = u + v\sqrt{-1},$$

qu'il conviendra de représenter par la notation $\operatorname{arc} \cos x$, sera déterminée par la formule

$$\operatorname{arc} \cos x = \operatorname{arc} \cos \frac{s}{S} - \frac{\sqrt{t^2}}{t} \sqrt{-1}\, \mathrm{l}(S + T), \tag{35}$$

ou, ce qui revient au même, par la formule

$$\operatorname{arc} \cos x = \operatorname{arc} \cos \frac{s}{S} \mp \sqrt{-1}\, \mathrm{l}(S + T), \tag{36}$$

le signe $\mp$ devant être réduit au signe $-$ ou au signe $+$, suivant que t sera positif ou négatif.

Lorsque x, étant réel, offre une valeur numérique inférieure à l'unité, on a, comme nous l'avons déjà remarqué,

$$S = 1, \qquad T = 0,$$

et, par suite, l'équation (36) devient identique, s étant alors égal à x. Mais si l'on suppose que x, étant réel, offre une valeur numérique supérieure à l'unité, ou, en d'autres termes, si l'on suppose

$$t = 0, \qquad s^2 > 1,$$

les équations (26) donneront

$$S = s, \qquad T = \sqrt{s^2 - 1},$$

et le second membre de la formule (36) se trouvera réduit à

$$\mp\sqrt{-1}\,\mathrm{l}\left(s + \sqrt{s^2 - 1}\right). \tag{37}$$

Pour ne laisser planer aucune incertitude sur le sens qui devra être attribué dans tous les cas à la notation

$$\arccos x,$$

il sera nécessaire de faire disparaître le double signe qui affecte le produit (37), à l'aide d'une convention nouvelle. Celle que nous adopterons consiste à réduire le double signe au signe —, c'est-à-dire au signe qu'on obtient quand on considère la valeur nulle, attribuée à t, comme la limite d'une valeur positive infiniment petite.

Quant à la valeur de $\arcsin x$, il suffit, pour la déterminer complètement, d'étendre à des valeurs quelconques réelles ou imaginaires de la variable x, l'équation

$$\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}, \tag{38}$$

qui subsiste toujours quand x est réelle. Cela posé, on aura généralement

$$\arcsin x = \frac{\pi}{2} - \arccos x. \tag{39}$$

Les logarithmes, les puissances à exposants quelconques réels ou imaginaires, et les arcs de cercle qui répondent à des sinus ou cosinus donnés, vérifient, quand les variables deviennent imaginaires, des formules analogues à celles qui se rapportaient au cas où les variables étaient réelles. Seulement plusieurs de ces formules ne continuent de subsister que sous certaines conditions, et entre certaines limites. Ainsi, par exemple,

$$x, \quad y, \quad z, \quad \ldots$$

étant des variables imaginaires, et a, b, c, ... des exposants quelconques, les formules

$$x^a x^b = x^{a+b}, \qquad x^a x^b x^c = x^{a+b+c}, \qquad \ldots \tag{40}$$

subsisteront, il est vrai, pour une valeur quelconque de x; mais on ne pourra plus en dire autant des formules

$$x^a y^a = (xy)^a, \qquad x^a y^a z^a = (xyz)^a, \qquad \ldots, \tag{41}$$

ni des formules

$$\mathrm{l}(x) + \mathrm{l}(y) = \mathrm{l}(xy), \qquad \mathrm{l}(x) + \mathrm{l}(y) + \mathrm{l}(z) = \mathrm{l}(xyz), \qquad \ldots, \tag{42}$$

et si l'on représente par

$$p, \quad p', \quad p'', \quad \ldots$$

les arguments des variables $x, y, z, \ldots$, en supposant chacun de ces arguments supérieur à $-\pi$, mais inférieur ou tout au plus égal à π, les formules (41), (42) subsisteront sous la condition que la somme

$$p + p', \quad p + p' + p'', \quad \ldots$$

des arguments des diverses variables soit elle-même supérieure à $-\pi$, et inférieure ou tout au plus égale à π.

On pourra combiner entre elles les diverses notations dont nous avons jusqu'ici déterminé le sens, et alors on obtiendra des fonctions de fonctions ou des fonctions composées dont les valeurs seront encore complètement déterminées. Si ces fonctions nouvelles renferment des exponentielles, des logarithmes, des sinus et cosinus, elles seront du nombre de celles que l'on nomme *fonctions exponentielles*, *logarithmiques*, *trigonométriques*, etc. Parmi les fonctions trigonométriques, on doit distinguer les fonctions rationnelles de sinus et cosinus, particulièrement celles de ces fonctions rationnelles qui, pour des valeurs réelles de la variable, sont représentées à l'aide de notations particulières. Pour fixer complètement le sens de ces mêmes notations, il suffit évidemment d'étendre les formules qui établissent les relations existantes entre les sinus, les cosinus et les fonctions dont il s'agit, au cas même où la variable devient imaginaire. Ainsi, par exemple, les valeurs des fonctions

$$\operatorname{tang} x, \quad \cot x, \quad \operatorname{séc} x, \quad \operatorname{coséc} x$$

peuvent toujours être, quel que soit x, complètement déterminées à l'aide des formules

$$(43)\quad \operatorname{tang} x = \frac{\sin x}{\cos x}, \qquad \cot x = \frac{\cos x}{\sin x}, \qquad \operatorname{séc} x = \frac{1}{\cos x}, \qquad \operatorname{coséc} x = \frac{1}{\sin x}.$$

Les conventions admises dans ce Mémoire donnent une extension nouvelle à diverses formules, et particulièrement à celles qui renferment les fonctions représentées par les notations

$$\mathrm{l}(x), \quad \mathrm{L}(x), \quad x^a.$$

Dans mon *Analyse algébrique*, et dans mes précédents Ouvrages, je m'étais borné à employer ces notations dans le cas où la variable x offrait une partie réelle positive. En se conformant aux règles ci-dessus établies, on pourra, sans inconvénient, faire encore usage de ces mêmes notations dans le cas où la partie réelle de x sera négative.

Au reste, les conditions auxquelles on satisfait en attribuant aux notations dont il s'agit, et spécialement à la notation x^a, la valeur que nous avons indiquée, pourraient être, comme nous l'avons remarqué dans le paragraphe IV, remplies de diverses manières. On pourrait, par exemple, supposer que, dans les équations (15), (21), et dans les formules du même genre, p est un angle polaire assujetti à varier, suivant l'usage, entre les limites π, 2π. Cette supposition est précisément celle qui a été admise par M. Ernest Lamarle, dans un Mémoire sur la convergence des séries. Mais, comme on l'a dit dans le paragraphe IV, elle entraînerait une variation brusque de la fonction x^a et même des fonctions $\mathrm{l}(x)$, $\mathrm{L}(x)$, dans le voisinage d'une valeur réelle et positive de x. Ajoutons qu'elle entraînerait aussi la discontinuité de certaines fonctions auxquelles il peut être utile de conserver le caractère de fonctions continues. Telle serait, en particulier, la fonction $(1+x)^a$ qui, dans la supposition dont il s'agit, deviendrait fonction discontinue non seulement de la variable x, mais encore de son argument p, pour une valeur du module r inférieure à l'unité.

Dans un prochain Mémoire, je reviendrai sur la nature et les propriétés des fonctions de variables imaginaires, et je les envisagerai d'une manière spéciale, sous le rapport de la continuité, en désignant

toujours sous le nom de fonctions continues celles qui reçoivent des accroissements infiniment petits quand on fait varier infiniment peu les variables elles-mêmes.

P.-S. — Depuis que j'ai rédigé ce Mémoire, j'ai rencontré, au bas de l'une des pages de celui que M. Bjœrling a publié sur le développement d'une puissance quelconque réelle ou imaginaire d'un binome, une Note où il est dit que cet auteur a présenté à l'Académie d'Upsal une Dissertation sur l'utilité qu'il peut y avoir à conserver dans le calcul les deux notations x^a, $\mathrm{l}(x)$, dans le cas même où la partie réelle de x est négative. M. Bjœrling verra que, sur ce point, je suis d'accord avec lui. Il reste à savoir si les conventions auxquelles il aura eu recours, pour fixer complètement, dans tous les cas, le sens des notations x^a, $\mathrm{l}(x)$, sont exactement celles que j'ai adoptées moi-même; et, pour le savoir, je suis obligé d'attendre qu'il me soit possible de connaître la Dissertation dont il s'agit.

NOTE

SUR

LES MODULES DES SÉRIES

Soit

$$u_0, \quad u_1, \quad u_2, \quad \ldots \tag{1}$$

une série dont u_n désigne le terme général correspondant à l'indice n, ce terme général pouvant d'ailleurs être réel ou imaginaire. Désignons d'ailleurs par la notation

$$\operatorname{mod} u_n$$

le module de ce terme général, et par u la limite unique, ou du moins la plus grande des limites dont s'approche indéfiniment, pour des valeurs croissantes du nombre n, l'expression

$$(\operatorname{mod} u_n)^{\frac{1}{n}}.$$

La quantité positive u sera ce que nous appellerons le *module* de la série (1). D'après ce qui a été démontré dans l'*Analyse algébrique*, la série sera convergente si l'on a

$$\mathrm{u} < 1, \tag{2}$$

divergente si l'on a

$$\mathrm{u} > 1. \tag{3}$$

De plus, si, pour des valeurs croissantes de n, le module du rapport

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}$$

s'approche indéfiniment d'une limite fixe, cette limite sera précisément le module de la série (1).

Soit maintenant

$$(4)\qquad \ldots,\quad u_{-2},\quad u_{-1},\quad u_0,\quad u_1,\quad u_2,\quad \ldots$$

une série qui se prolonge indéfiniment dans deux sens opposés, de manière à offrir deux termes généraux

$$u_n \quad \text{et} \quad u_{-n},$$

correspondant, le premier à l'indice n, le second à l'indice $-n$. Concevons d'ailleurs que, le nombre venant à croître, on cherche la limite unique, ou la plus grande des limites dont s'approche indéfiniment chacune des expressions

$$(\operatorname{mod} u_n)^{\frac{1}{n}}, \qquad (\operatorname{mod} u_{-n})^{\frac{1}{n}};$$

et représentons par u la limite de $(\operatorname{mod} u_n)^{\frac{1}{n}}$, par u_1 la limite de $(\operatorname{mod} u_{-n})^{\frac{1}{n}}$. Les deux quantités positives

$$\mathrm{u}, \quad \mathrm{u}_1$$

seront les deux *modules* de la série (4), qui sera convergente si ces deux modules sont inférieurs à l'unité, divergente si l'un d'eux ou si les deux à la fois deviennent supérieurs à l'unité.

Il est bon d'observer que le module d'une série prolongée indéfiniment dans un seul sens n'est point altéré dans le cas où le rang de chaque terme est diminué d'une ou de plusieurs unités, en vertu de la suppression du premier, ou des deux premiers, ou des trois premiers, ... termes. Pareillement les deux modules d'une série prolongée indéfiniment en deux sens opposés ne seront point altérés si l'on déplace simultanément tous les termes en les faisant marcher vers la droite ou vers la gauche avec celui qui servait de point de départ pour la fixation des rangs et des indices.

Considérons à présent une série

$$(5)\qquad a_0,\quad a_1x,\quad a_2x^2,\quad \ldots$$

ordonnée suivant les puissances entières et ascendantes d'une variable réelle ou imaginaire x. Nommons r le module de cette variable, et p son argument, en sorte que l'on ait

$$x = r e^{p\sqrt{-1}}.$$

Soit d'ailleurs a le module de la série

$$a_0,\quad a_1,\quad a_2,\quad \ldots,$$

c'est-à-dire la plus grande limite dont s'approche indéfiniment, pour des valeurs croissantes de n, l'expression

$$(\operatorname{mod} a_n)^{\frac{1}{n}}.$$

Comme on aura

$$\operatorname{mod}(a_n x^n) = r^n \operatorname{mod} a_n,$$

on en conclura

$$(\operatorname{mod} a_n x^n)^{\frac{1}{n}} = r(\operatorname{mod} a_n)^{\frac{1}{n}},$$

et, par conséquent, il est clair que le module de la série (5) se réduira au produit

$$\mathrm{a}r.$$

Donc la série (5) sera convergente si l'on a

$$\mathrm{a}r < 1 \quad \text{ou} \quad r < \frac{1}{\mathrm{a}};$$

divergente si l'on a

$$\mathrm{a}r > 1 \quad \text{ou} \quad r > \frac{1}{\mathrm{a}}.$$

Considérons enfin une série

$$(6)\qquad \ldots,\quad a_{-2}x^{-2},\quad a_{-1}x^{-1},\quad a_0,\quad a_1x,\quad a_2x^2,\quad \ldots$$

ordonnée à la fois suivant les puissances ascendantes et suivant les puissances descendantes de la variable x. Si l'on nomme a la plus grande des limites vers lesquelles converge, pour des valeurs croissantes de n, l'expression

$$(\operatorname{mod} a_n)^{\frac{1}{n}},$$

et a_1, la plus grande des limites vers lesquelles converge l'équation

$$(\operatorname{mod} a_{-n})^{\frac{1}{n}},$$

les deux modules de la série (6) seront évidemment

$$\mathrm{a}_1 r^{-1}, \quad \mathrm{a}r;$$

et, par suite, la série (6) sera convergente si le module r de x vérifie les deux conditions

$$r < \frac{1}{\mathrm{a}}, \qquad r > \mathrm{a}_{,};$$

divergente si r vérifie les deux conditions

$$r > \frac{1}{\mathrm{a}}, \qquad r < \mathrm{a}_{,},$$

ou seulement l'une d'entre elles.

En résumé, il y aura généralement deux limites extrêmes, l'une inférieure, l'autre supérieure, entre lesquelles le module r de x pourra varier, sans que la série (5) ou (6) cesse d'être convergente. Soient

$$\mathrm{k}_{,}, \quad \mathrm{k}$$

ces limites extrêmes, k désignant la limite supérieure. D'après ce qu'on vient de dire, on aura, pour la série (6),

$$(7) \qquad \mathrm{k}_{,} = \mathrm{a}_{,}, \qquad \mathrm{k} = \frac{1}{\mathrm{a}},$$

et, par suite, les deux modules de la série (6) seront

$$(8) \qquad \frac{\mathrm{k}_{,}}{r}, \quad \frac{r}{\mathrm{k}}.$$

D'ailleurs, $\mathrm{k}_{,}$ devra être remplacé par zéro si la série (6) est réduite à la série (5).

Ajoutons que la quantité k sera certainement la limite extrême et supérieure du module r si, la série étant convergente pour $r < \mathrm{k}$, la somme de cette série devient infinie pour $r = \mathrm{k}$, et pour une valeur convenablement choisie de l'argument p.

Pareillement, $\mathrm{k}_{,}$ sera certainement la limite extrême et inférieure du module r si, la série (6) étant convergente pour $r > \mathrm{k}_{,}$, la somme de cette série devient infinie pour $r = \mathrm{k}_{,}$, et pour une valeur convenablement choisie de l'argument p.

En effet, une série ne peut acquérir une somme infinie sans devenir divergente, et par conséquent sans offrir un module égal ou supérieur à l'unité.

Lorsque les divers termes d'une série sont fonctions d'une certaine variable x, la nouvelle série qu'on obtient en substituant à chaque terme de la première sa dérivée prise par rapport à x, doit naturellement s'appeler la *série dérivée*. Concevons, pour fixer les idées, que la première série se réduise à la série (5), dont le terme général est $a_n x^n$, ou même à la série (6), dont les termes généraux sont

$$a_{-n} x^{-n} \quad \text{et} \quad a_n x^n;$$

alors la série dérivée aura pour terme général le produit

$$n a_n x^{n-1},$$

ou bien elle aura pour termes généraux les produits

$$-n a_{-n} x^{-n-1}, \quad n a_n x^{n-1}.$$

D'ailleurs, comme on a

$$-n a_{-n} x^{-n-1} = -n x^{-1} (a_{-n} x^{-n}), \qquad n a_n x^{n-1} = n x^{-1} (a_n x^n),$$

on en conclut que les deux expressions

$$(9) \qquad [\operatorname{mod}(-n a_{-n} x^{-n-1})]^{\frac{1}{n}}, \quad [\operatorname{mod}(n a_n x^{n-1})]^{\frac{1}{n}}$$

s'approchent indéfiniment, pour des valeurs croissantes de n, des produits que l'on obtient quand on multiplie respectivement les quantités positives

$$\mathrm{a}_{,} r^{-1} \quad \text{et} \quad \mathrm{a} r$$

par la limite de l'expression

$$(n r^{-1})^{\frac{1}{n}}.$$

Enfin, cette limite qui se confond avec la limite fixe du rapport

$$\frac{(n+1) r^{-1}}{n r^{-1}} = 1 + \frac{1}{n},$$

se réduit à l'unité. Donc les limites des expressions (9) se réduiront simplement aux produits

$$\mathrm{a}_{,} r^{-1} \quad \text{et} \quad \mathrm{a} r.$$

Donc *le module ou les modules de la série* (5) *ou* (6) *seront en même temps le module ou les modules de la série dérivée.*

Nous avons ici supposé que l'on différentiait une seule fois chaque terme de la série donnée (5) ou (6) ; mais, après avoir ainsi obtenu ce qu'on doit appeler la *série dérivée du premier ordre*, on pourrait former encore la dérivée de celle-ci, puis la dérivée de sa dérivée, . . ., et l'on obtiendrait alors, à la place de la série (5) ou (6), des *séries dérivées de divers ordres*. Or, de ce que nous avons dit tout à l'heure, il résulte évidemment que le *module ou les modules de toutes ces séries seront précisément le module ou les modules de la série* (5) *ou* (6).

TABLE DES MATIÈRES DU TOME XIII.

FIN DE LA TABLE DU TREIZIÈME VOLUME.

PARIS. — IMPRIMERIE GAUTHIER-VILLARS ET Cie.
Quai des Grands-Augustins, 55.
57850-32

GAUTHIER-VILLARS & Cie
Imprimeurs-Éditeurs
55, Quai des Grands-Augustins, PARIS (6e)
Tél. DANTON 50-14 et 50-15. R. C. Seine 22 520.

Envoi dans toute la France et l'Union postale contre mandat-poste ou valeur sur Paris.
Frais de port en sus (Chèques postaux : Paris 29323.)

ŒUVRES

DE

HENRI POINCARÉ

Publiées sous les auspices du Ministre de l'Instruction publique et de l'Académie des Sciences.

Notice.

M. Emile Borel fait hommage à l'Académie, au nom de M. Paul Appell, du tome I des *Œuvres de Henri Poincaré*. Dans sa Préface, M. Paul Appell s'exprime en ces termes :

« La publication des *Œuvres de Henri Poincaré*, entreprise par Gaston » Darboux sous les auspices du Ministère de l'Instruction publique, et » commencée dès la mort de l'illustre géomètre (le tome II seul est paru), » a été interrompue par la guerre ainsi que par la mort de Gaston Dar- » boux et de Pierre Boutroux, qui avaient assumé la plus grande partie » de la tâche à accomplir.

» Les difficultés économiques actuelles auraient rendu difficile la reprise » de cette publication, si nécessaire cependant à la science mathéma- » tique, si l'Académie n'avait décidé, sur la proposition unanime de sa » Section de Géométrie, d'y consacrer une somme importante obtenue » sur les fonds recueillis dans la Journée Pasteur.

» Grace à cette décision, la Section de Géométrie espère pouvoir, avec » le concours de M. Jules Drach, professeur à la Faculté des Sciences de » Paris, qui a bien voulu se charger de revoir les manuscrits et les » épreuves, faire paraître régulièrement les tomes successifs.

» La Maison Gauthier-Villars, dont l'habileté est universellement con- » nue, continue d'apporter son aide appréciée à la publication.

» La France élèvera ainsi à Henri Poincaré le monument le plus digne » de sa mémoire. Grâce à ses Œuvres, les jeunes mathématiciens pour- » ront connaître la pensée du maître incomparable dont l'influence sur » les mathématiques a été si considérable et continuer à progresser dans » les voies fécondes qu'il a ouvertes. »

(Extrait des *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, séance du 19 décembre 1924.)

TOME I, publié sous les auspices de l'Académie des Sciences, par Paul Appell, Membre de l'Académie des Sciences, avec la collaboration de Jules Drach, Professeur à la Faculté des Sciences de Paris. In-4° carré (28-22,5) de 382 pages.................................. 150 fr.

Table des Matières.

TOME II, publié sous les auspices du Ministère de l'Instruction publique, par G. Darboux, Secrétaire perpétuel de l'Académie des Sciences, avec la collaboration de N.-E. Nörlund, Professeur à l'Université de Lund (Suède), et de Ernest Lebon, Professeur honoraire du Lycée Charlemagne. In-4° carré (28-22,5) de LXXVII-632 pages, avec un portrait de Henri Poincaré et 19 figures.............................. 125 fr.

Table des Matières.

BULLETIN DE COMMANDE

Messieurs **GAUTHIER-VILLARS** et Cie, 55, quai des Grands-Augustins, PARIS (6e)

Veuillez m'adresser ________ *exemplaire de l'Ouvrage :*

ŒUVRES DE HENRI POINCARÉ

Ci-joint un mandat postal (ou un chèque).

Nom ____________________

Profession ____________________ *Signature :*

Domicile ____________________

Date ____________________

A LA MÊME LIBRAIRIE.

86459-29. Paris. — Imp. Gauthier-Villars et C^{ie}, 55, quai des Grands-Augustins.

PARIS. — IMPRIMERIE GAUTHIER-VILLARS ET C^ie^
Quai des Grands-Augustins, 55
57850

GAUTHIER-VILLARS
et C^ie^

PRIX : 100 fr.