ŒUVRES

COMPLÈTES

D'AUGUSTIN CAUCHY

PUBLIÉES SOUS LA DIRECTION SCIENTIFIQUE

DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES

ET SOUS LES AUSPICES

DE M. LE MINISTRE DE L'INSTRUCTION PUBLIQUE.

IIe SÉRIE. — TOME XIII.

PARIS,
GAUTHIER-VILLARS ET Cie, ÉDITEURS,
LIBRAIRES DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,
Quai des Grands-Augustins, 55.

MCMXXXII

ŒUVRES

COMPLÈTES

D'AUGUSTIN CAUCHY

PARIS. — IMPRIMERIE GAUTHIER-VILLARS ET C^ie

57850 Quai des Grands-Augustins, 55.

ŒUVRES

COMPLÈTES

D'AUGUSTIN CAUCHY

PUBLIÉES SOUS LA DIRECTION SCIENTIFIQUE

DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES

ET SOUS LES AUSPICES

DE M. LE MINISTRE DE L'INSTRUCTION PUBLIQUE.

IIe SÉRIE. — TOME XIII.

PARIS,

GAUTHIER-VILLARS ET C^ie, ÉDITEURS,

LIBRAIRES DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE.

Quai des Grands-Augustins, 55.

MCMXXXII

SECONDE SÉRIE.

I. — MÉMOIRES PUBLIÉS DANS DIVERS RECUEILS
AUTRES QUE CEUX DE L'ACADÉMIE.

II. — OUVRAGES CLASSIQUES.

III. — MÉMOIRES PUBLIÉS EN CORPS D'OUVRAGE.

IV. — MÉMOIRES PUBLIÉS SÉPARÉMENT.

III.

MÉMOIRES

PUBLIÉS EN CORPS D'OUVRAGE.

EXERCICES D'ANALYSE

ET DE

PHYSIQUE MATHÉMATIQUE

(NOUVEAUX EXERCICES)

TOME III. — PARIS, 1844.

DEUXIÈME ÉDITION

RÉIMPRIMÉE

D'APRÈS LA PREMIÈRE ÉDITION.

EXCERCICES D'ANALYSE

ET DE

PHYSIQUE MATHÉMATIQUE,

PAR LE BARON AUGUSTIN CAUCHY,

Membre de l'Académie des Sciences de Paris, de la Société Italienne, de la Société royale de Londres, des Académies de Berlin, de Saint-Pétersbourg, de Prague, de Stockholm, de Gœttingue, de l'Académie Américaine, etc.

TOME TROISIÈME.

PARIS,

BACHELIER, IMPRIMEUR-LIBRAIRE

DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE, DU BUREAU DES LONGITUDES, ETC.,

QUAI DES AUGUSTINS, N° 55.

1844

EXERCICES D'ANALYSE

ET DE

PHYSIQUE MATHÉMATIQUE

MÉMOIRE

SUR

L'ANALYSE INFINITÉSIMALE.

Préliminaires. — *Considérations générales.*

Lorsque des variables sont liées entre elles par une ou plusieurs équations, alors, en vertu de ces équations mêmes, quelques-unes de ces variables deviennent fonctions des autres considérées comme indépendantes. Alors aussi des accroissements simultanément attribués aux diverses variables se trouvent liés entre eux et à ces variables par des équations nouvelles qui se déduisent immédiatement des équations données. Ajoutons que, si, les accroissements des variables étant supposés infiniment petits, on néglige, vis-à-vis de ces accroissements considérés comme infiniment petits du premier ordre, les infiniment petits des ordres supérieurs au premier, les nouvelles équations deviendront linéaires par rapport aux accroissements infiniment petits des variables. Leibnitz et les premiers géomètres qui se sont occupés de l'analyse infinitésimale ont appelé *différentielles* des variables leurs accroissements infiniment petits, et ils ont donné le nom d'*équations différentielles* aux équations linéaires qui subsistent entre ces différentielles. Cette définition des différentielles et des équations différentielles a le grand avantage d'être très générale et de s'étendre à tous les cas possibles. Toutefois, pour ceux qui l'adoptent, les équations différentielles ne deviennent exactes que dans le cas où les différentielles s'évanouissent, c'est-à-dire dans le cas où ces équations mêmes disparaissent. A la vérité, l'inconvénient que nous venons de rappeler n'a point arrêté Euler, et ce grand géomètre, tirant la conséquence rigoureuse des principes généralement admis, a considéré les différentielles comme de véritables zéros qui ont entre eux des rapports finis. Mais d'autres géomètres non moins illustres, et Lagrange à leur tête, n'ont pu se résoudre à introduire dans un même calcul plusieurs sortes de zéros distincts les uns des autres, et c'est pour ce motif qu'à la notion des différentielles Lagrange a songé à substituer la notion des fonctions dérivées, sur laquelle il sera convenable de nous arrêter quelques instants.

Examinons en particulier le cas où l'on considère une seule variable indépendante et une seule fonction de cette variable. Si l'on attribue à cette variable un accroissement infiniment petit, l'accroissement correspondant de la fonction se trouvera lié à la variable et à l'accroissement de la variable, par une équation qui deviendra linéaire à l'égard des deux accroissements, quand on négligera les infiniment petits du second ordre ou d'un ordre supérieur vis-à-vis des infiniment petits du premier ordre. Or l'équation linéaire ainsi obtenue fournira, pour le rapport entre les accroissements infiniment petits de la fonction donnée et de la variable, une fonction nouvelle. Cette fonction nouvelle est précisément celle que Lagrange appelle la *fonction dérivée* (1). Elle représente en réalité la limite du rapport entre les accrois-

(1) La méthode de *maximis* et *minimis*, donnée par Fermat, peut être réduite à la recherche du rapport qu'on obtient quand on divise, par un accroissement indéterminé attribué à une variable, l'accroissement correspondant de la fonction qui doit devenir un *maximum* ou un *minimum*, et à la détermination de la valeur particulière qu'acquiert ce rapport, quand l'accroissement de la variable s'évanouit. Or cette valeur particulière, comme Lagrange en a fait la remarque, est encore la *fonction dérivée*.

sements infiniment petits et simultanés de la fonction et de la variable. Mais, au lieu de lui donner cette origine, Lagrange l'a considérée comme représentant le coefficient de l'accroissement de la variable dans le premier terme de l'accroissement de la fonction développée en une série ordonnée suivant les puissances ascendantes de l'accroissement de la variable.

Dans le cas où l'on considère un développement en série, abstraction faite du système d'opérations qui a pu produire ce développement, le seul moyen de savoir si le développement dont il s'agit appartient à une fonction donnée, est d'examiner si cette fonction équivaut à la somme de la série supposée convergente. Par suite, pour établir sur des bases rigoureuses la théorie des fonctions dérivées, telle que Lagrange l'a conçue, il faudrait commencer par faire voir que l'accroissement d'une fonction quelconque est, sinon dans tous les cas possibles, du moins sous certaines conditions, la somme d'une série convergente ordonnée suivant les puissances ascendantes de l'accroissement de la variable. Or la démonstration générale d'un semblable théorème ne peut se donner a priori, et repose nécessairement, même dans le cas où les accroissements deviennent infiniment petits, sur diverses propositions antécédentes; d'où il résulte que ce théorème doit être naturellement regardé, non comme le principe et la base du calcul différentiel, mais comme un des résultats auxquels conduisent les applications de ce calcul. Aussi les difficultés que l'on rencontre, quand on veut déduire la notion des fonctions dérivées de la considération d'une série composée d'un nombre infini de termes, se trouvent-elles à peine dissimulées par toutes les ressources qu'a développées le génie de Lagrange dans les premiers chapitres de la *Théorie des fonctions analytiques*.

On échappe aux difficultés que nous venons de signaler, quand on considère une *fonction dérivée comme la limite du rapport entre les accroissements infiniment petits et simultanés de la fonction donnée et de la variable dont elle dépend*. En adoptant cette définition on pourrait, avec quelques auteurs, nommer *différentielle de la variable indépen-*

dante l'accroissement de cette variable, et *différentielle de la fonction donnée* le produit de la fonction dérivée par la différentielle de la variable. On pourrait enfin, lorsqu'une même quantité dépend de plusieurs variables, nommer *différentielle totale* de cette quantité la somme des différentielles qu'on obtiendrait en la considérant successivement comme fonction de chacune des variables dont il s'agit. Mais alors le sens du mot *différentielle*, loin de se trouver généralement fixé, en vertu d'une définition simple applicable à tous les cas possibles, exigerait, pour être complètement déterminé, que l'on expliquât avec précision quelles sont les variables regardées comme indépendantes; et, si, pour fixer les idées, on s'occupait uniquement de deux variables liées entre elles par une seule équation, non seulement la différentielle de la première variable serait définie autrement que la différentielle de la seconde, mais, de plus, la définition de chaque différentielle varierait lorsqu'on changerait la variable indépendante, en considérant tantôt la seconde variable comme fonction de la première, tantôt la première comme fonction de la seconde.

On évitera ces inconvénients si l'on considère les *différentielles* de deux ou de plusieurs variables liées entre elles par une ou plusieurs équations, comme *des quantités finies dont les rapports sont rigoureusement égaux aux limites des rapports entre les accroissements infiniment petits et simultanés de ces variables*. Cette définition nouvelle, que j'ai adoptée dans mon *Calcul différentiel* et dans le Mémoire *sur les méthodes analytiques*, me paraît joindre à l'exactitude désirable tous les avantages qu'offrait, sous le rapport de la simplicité et de la généralité, la définition primitivement admise par Leibnitz et par les géomètres qui l'ont suivi. A la vérité, les différentielles de plusieurs variables ne se trouvent pas complètement déterminées par la définition nouvelle; et cette définition, lors même que toutes les variables se réduisent à des fonctions de l'une d'entre elles, détermine seulement les rapports entre les différentielles de ces diverses variables. Mais l'indétermination qui subsiste est plutôt utile que nuisible dans les problèmes qui se résolvent à l'aide du calcul infini-

tésimal, attendu qu'elle permet toujours de disposer arbitrairement au moins d'une différentielle; et d'ailleurs, c'est précisément en vertu de cette indétermination même que la définition nouvelle embrasse, comme cas particuliers, les définitions diverses qu'offrirait, pour divers systèmes de variables indépendantes, la théorie que nous rappelions tout à l'heure. En vertu de la nouvelle définition, les divers systèmes de valeurs que peuvent acquérir les différentielles de plusieurs variables liées entre elles par des équations données, restent évidemment les mêmes, quelles que soient celles de ces variables que l'on considère comme indépendantes; et les équations différentielles, c'est-à-dire les équations linéaires auxquelles satisfont les divers systèmes de valeurs, ne sont plus, comme dans la théorie de Leibnitz, des équations approximatives, mais des équations exactes.

Pour écarter complètement l'idée que les formules employées dans le calcul différentiel sont des formules approximatives, et non des formules rigoureusement exactes, il me paraît important de considérer les différentielles comme des quantités finies, en les distinguant soigneusement des accroissements infiniment petits des variables. La considération de ces derniers accroissements peut et doit être employée comme moyen de découverte ou de démonstration dans la recherche des formules ou dans l'établissement des théorèmes. Mais alors le calculateur se sert des infiniment petits comme d'intermédiaires qui doivent le conduire à la connaissance des relations qui subsistent entre des quantités finies; et jamais, à mon avis, des quantités infiniment petites ne doivent être admises dans les équations finales, où leur présence deviendrait sans objet et sans utilité. D'ailleurs, si l'on considérait les différentielles comme des quantités toujours très petites, on renoncerait, par cela même, à l'avantage de pouvoir, entre les différentielles de plusieurs variables, en prendre une pour unité. Or, pour se former une idée précise d'une quantité quelconque, il importe de la rapporter à l'unité de son espèce. Il importe donc de choisir une unité parmi les différentielles. Ajoutons qu'un choix convenable de cette unité suffit pour transformer en différentielles ce qu'on appelle des fonctions dérivées. En effet, en vertu des définitions adoptées, la *dérivée d'une fonction est ce que devient sa différentielle, quand la différentielle de la variable indépendante est prise pour unité.*

Remarquons encore que la considération d'une variable dont la différentielle est prise pour unité simplifie l'énoncé de la définition que nous avons donnée pour les différentielles en général, et permet de réduire cette définition aux termes suivants :

La différentielle d'une variable quelconque est la limite du rapport entre les accroissements infiniment petits que peuvent acquérir simultanément la variable dont il s'agit, et la variable dont la différentielle est prise pour unité.

Or, la définition précédente fournit le moyen de démontrer fort simplement les propositions fondamentales du calcul différentiel, et en particulier les théorèmes généraux relatifs à la différentiation des fonctions de fonctions, et des fonctions composées. C'est ce que nous allons expliquer dans ce Mémoire, après avoir indiqué en peu de mots les notations dont nous ferons usage.

I. — *Notations.*

Conformément aux principes établis dans les préliminaires, nous appellerons *différentielles* de plusieurs variables, *des quantités finies dont les rapports sont rigoureusement égaux aux limites des rapports entre les accroissements simultanés et infiniment petits des variables proposées.*

Pour étendre cette définition au cas où les variables deviendraient imaginaires, il suffirait d'y remplacer le mot *quantités* par ceux-ci : *expressions imaginaires*, attendu qu'alors les différentielles elles-mêmes cesseraient généralement d'être réelles. En conséquence, la définition générale des différentielles sera la suivante :

Les différentielles de plusieurs variables réelles ou imaginaires sont des

quantités finies ou des expressions imaginaires finies, qui, comparées les unes aux autres, offrent des rapports égaux aux limites des rapports entre les accroissements simultanés et infiniment petits de ces variables.

Nous indiquerons, suivant l'usage, les accroissements simultanés, finis ou infiniment petits de variables proposées, à l'aide de la lettre caractéristique Δ, et leurs différentielles à l'aide de la lettre caractéristique d. En conséquence, si l'on nomme

$$x,\quad y,\quad z,\quad \ldots,\quad u,\quad v,\quad w,\quad \ldots$$

les variables proposées, leurs accroissements simultanés, finis ou infiniment petits, seront

$$\Delta x,\quad \Delta y,\quad \Delta z,\quad \ldots,\quad \Delta u,\quad \Delta v,\quad \Delta w,\quad \ldots$$

tandis que les notations

$$dx,\quad dy,\quad dz,\quad \ldots,\quad du,\quad dv,\quad dw,\quad \ldots$$

représenteront les différentielles de ces mêmes variables, c'est-à-dire des variables nouvelles dont les rapports seront égaux aux limites des rapports entre les accroissements

$$\Delta x,\quad \Delta y,\quad \Delta z,\quad \ldots,\quad \Delta u,\quad \Delta v,\quad \Delta w,\quad \ldots$$

supposés infiniment petits.

Il importe d'observer que, dans le cas même où chacun des rapports entre les accroissements infiniment petits des variables proposées converge vers une limite unique et finie, la définition ci-dessus adoptée ne détermine pas complètement les différentielles des variables, mais seulement les rapports qui existent entre ces différentielles. On pourra donc toujours disposer arbitrairement au moins de la différentielle d'une variable; et l'on ne doit pas s'en étonner, puisque les relations qui peuvent exister entre les diverses variables devront toujours laisser au moins une de ces variables entièrement arbitraire.

Un moyen de simplifier les calculs est évidemment de réduire à l'unité la valeur de la différentielle qui demeure arbitraire. D'ailleurs la variable, à laquelle appartient cette différentielle, pourra être ou l'une des variables proposées, ou même une nouvelle variable avec laquelle on ferait varier toutes les autres. En effet, rien n'empêche de concevoir que les accroissements simultanés

$$\Delta x, \quad \Delta y, \quad \Delta z, \quad \ldots, \quad \Delta u, \quad \Delta v, \quad \Delta w, \quad \ldots$$

des variables proposées

$$x, \quad y, \quad z, \quad \ldots, \quad u, \quad v, \quad w, \quad \ldots$$

correspondent à l'accroissement Δt d'une variable t, comprise ou non comprise parmi les premières, et de prendre l'unité pour la différentielle de cette variable t, qui devra être considérée comme indépendante de toutes les autres, et qui pourra être censée, si l'on veut, représenter le temps. Il y a plus : si l'on pose

$$\Delta t = \iota,$$

rien n'empêchera de considérer l'accroissement ι de la variable indépendante t comme une nouvelle variable indépendante. C'est ce que nous ferons désormais. D'ailleurs, pour abréger le discours, nous désignerons la variable indépendante t, de laquelle toutes les autres seront censées dépendre, et dont la différentielle sera réduite à l'unité, sous le nom de *variable primitive*.

Cela posé, soit s une variable distincte de la variable primitive t. En vertu des définitions adoptées, le rapport entre les différentielles

$$ds, \quad dt$$

sera la limite du rapport entre les accroissements infiniment petits

$$\Delta s, \quad \Delta t.$$

On aura donc

$$\frac{ds}{dt} = \lim \frac{\Delta s}{\Delta t}; \tag{1}$$

ou, ce qui revient au même,

$$ds = dt \lim \frac{\Delta s}{\Delta t}. \tag{2}$$

Or de cette dernière équation, jointe aux formules

$$dt = 1, \qquad \Delta t = \iota,$$

on tirera

$$ds = \lim \frac{\Delta s}{\iota}. \tag{3}$$

Effectivement, il résulte des définitions admises que la *différentielle d'une variable quelconque s sera la limite du rapport entre les accroissements infiniment petits Δs et ι de cette variable et de la variable primitive*.

Concevons maintenant que l'on nomme s et x deux variables quelconques liées entre elles par une certaine équation. Cette équation, résolue par rapport à s, déterminera s en fonction de x. D'ailleurs, s étant considéré comme fonction de la variable x, le rapport entre les différentielles ds, dx de cette fonction et de cette variable sera la limite du rapport entre les accroissements infiniment petits Δs, Δx. On aura effectivement, en remplaçant s par x dans la formule (1),

$$\frac{ds}{dx} = \lim \frac{\Delta s}{\Delta x}, \tag{4}$$

ou, ce qui revient au même,

$$ds = dx \lim \frac{\Delta s}{\Delta x}. \tag{5}$$

Or la valeur qu'acquerrait la différentielle ds de la fonction, si la différentielle dx de la variable se réduisait à l'unité, est précisément ce qu'on nomme la *fonction dérivée* de s, relative à la variable x. Si l'on désigne par la lettre caractéristique D_x, et à l'aide de la notation

$$D_x s,$$

cette fonction dérivée, on aura, en vertu de la formule (5),

$$D_x s = \lim \frac{\Delta s}{\Delta x}, \tag{6}$$

et, par suite, cette formule donnera généralement

$$ds = D_x s \, dx. \tag{7}$$

Concevons à présent que s représente une fonction de plusieurs variables

$$x,\quad y,\quad z,\quad \ldots,\quad u,\quad v,\quad w,\quad \ldots.$$

On pourra partager ces variables en divers groupes ou systèmes, et chercher l'accroissement que la fonction s reçoit quand on attribue des accroissements infiniment petits

$$\Delta x,\quad \Delta y,\quad \Delta z,\quad \ldots,\quad \Delta u,\quad \Delta v,\quad \Delta w,\quad \ldots,$$

à toutes les variables

$$x,\quad y,\quad z,\quad \ldots,\quad u,\quad v,\quad w,\quad \ldots,$$

ou seulement aux variables comprises dans le premier groupe, dans le second, dans le troisième, ... En opérant ainsi, on obtiendra, dans le premier cas, l'*accroissement total de s*, que nous continuerons à exprimer par la notation

$$\Delta s,$$

et dans le second cas un *accroissement partiel* de s, qui correspondra au changement de valeur des variables comprises dans un seul groupe, et qui sera représenté par l'une des notations

$$\Delta_{\prime} s,\quad \Delta_{\prime\prime} s,\quad \Delta_{\prime\prime\prime} s,\quad \ldots.$$

A l'*accroissement total* Δs correspondra la *différentielle totale* ds déterminée par la formule (3); et de même aux *accroissements partiels*

$$\Delta_{\prime} s,\quad \Delta_{\prime\prime} s,\quad \Delta_{\prime\prime\prime} s,\quad \ldots,$$

correspondront des *différentielles partielles*

$$d_{\prime} s,\quad d_{\prime\prime} s,\quad d_{\prime\prime\prime} s,\quad \ldots,$$

déterminées par des équations de la forme

$$d_{\prime} s = \lim \frac{\Delta_{\prime} s}{i}. \tag{8}$$

Après avoir partagé en plusieurs groupes les variables desquelles dépend la fonction s, on peut calculer non seulement *ses accroissements partiels du premier ordre*

$$\Delta_{\prime} s,\quad \Delta_{\prime\prime} s,\quad \Delta_{\prime\prime\prime} s,\quad \ldots,$$

correspondants au changement de valeurs des variables comprises dans les divers groupes, mais encore *ses accroissements partiels du second ordre*, par exemple

$$\Delta_{\prime}\Delta_{\prime\prime} s,\quad \Delta_{\prime}\Delta_{\prime\prime\prime} s,\quad \ldots,\quad \Delta_{\prime\prime}\Delta_{\prime\prime\prime} s,\quad \ldots;$$

ses accroissements partiels du troisième ordre, par exemple,

$$\Delta_{\prime}\Delta_{\prime\prime}\Delta_{\prime\prime\prime} s,\quad \ldots,$$

etc. A ces *accroissements partiels des divers ordres* correspondront des *différentielles partielles des divers ordres*. Ainsi, en particulier, outre les *différentielles partielles du premier ordre* représentées par les notations

$$d_{\prime} s,\quad d_{\prime\prime} s,\quad d_{\prime\prime\prime} s,\quad \ldots,$$

on pourra obtenir des *différentielles partielles du second ordre* représentées par les notations

$$d_{\prime} d_{\prime\prime} s,\quad d_{\prime} d_{\prime\prime\prime} s,\quad \ldots,\quad d_{\prime\prime} d_{\prime\prime\prime} s,\quad \ldots,$$

des *différentielles partielles du troisième ordre* représentées par les notations

$$d_{\prime} d_{\prime\prime} d_{\prime\prime\prime} s,\quad \ldots.$$

Il y a plus, outre les accroissements et différentielles de divers ordres que produisent plusieurs opérations successivement effectuées, mais dissemblables entre elles, on pourra considérer des accroissements totaux ou partiels, et des différentielles totales ou partielles qui seraient les résultats d'opérations dont plusieurs deviendraient semblables les unes aux autres. Tels seraient, par exemple, les accroissements totaux ou partiels exprimés par les notations

$$\Delta\Delta s,\quad \Delta\Delta\Delta s,\quad \Delta\Delta\Delta\Delta s,\quad \ldots,$$
$$\Delta_{\prime}\Delta_{\prime} s,\quad \Delta_{\prime}\Delta_{\prime}\Delta_{\prime} s,\quad \ldots,\quad \Delta_{\prime\prime}\Delta_{\prime\prime}\Delta_{\prime} s,\quad \ldots,$$

et les différentielles totales ou partielles exprimées par les notations

$$dds,\quad ddds,\quad dddds,\quad \ldots,$$
$$d_{\prime}d_{\prime}s,\quad d_{\prime}d_{\prime}d_{\prime}s,\quad \ldots,\quad d_{\prime\prime}d_{\prime\prime}d_{\prime}s,\quad \ldots.$$

Pour plus de commodité, on est convenu d'écrire

$$\Delta^2,\quad \Delta^3,\quad \ldots,\quad \text{au lieu de}\quad \Delta\Delta,\quad \Delta\Delta\Delta,\quad \ldots,$$
$$\Delta_{\prime}^2,\quad \Delta_{\prime}^3,\quad \ldots,\quad \text{au lieu de}\quad \Delta_{\prime}\Delta_{\prime},\quad \Delta_{\prime}\Delta_{\prime}\Delta_{\prime},\quad \ldots,$$

et pareillement

$$d^2,\quad d^3,\quad \ldots,\quad \text{au lieu de}\quad dd,\quad ddd,\quad \ldots,$$
$$d_{\prime}^2,\quad d_{\prime}^3,\quad \ldots,\quad \text{au lieu de}\quad d_{\prime}d_{\prime},\quad d_{\prime}d_{\prime}d_{\prime},\quad \ldots,$$

comme si les notations

$$\Delta\Delta,\quad \Delta\Delta\Delta,\quad \ldots,\quad \Delta_{\prime}\Delta_{\prime},\quad \Delta_{\prime}\Delta_{\prime}\Delta_{\prime},\quad \ldots,$$
$$dd,\quad ddd,\quad \ldots,\quad d_{\prime}d_{\prime},\quad d_{\prime}d_{\prime}d_{\prime},\quad \ldots$$

représentaient de véritables produits. Eu égard à cette convention, les accroissements totaux et différentielles totales des divers ordres de la fonction s se trouveront représentés par les notations

$$\Delta s,\quad \Delta^2 s,\quad \Delta^3 s,\quad \ldots,$$
$$ds,\quad d^2 s,\quad d^3 s,\quad \ldots,$$

et les accroissements partiels ou dérivées partielles

$$\Delta_{\prime}\Delta_{\prime}s,\quad \Delta_{\prime}\Delta_{\prime}\Delta_{\prime}s,\quad \ldots,\quad \Delta_{\prime\prime}\Delta_{\prime\prime}\Delta_{\prime}s,\quad \ldots,\quad d_{\prime}d_{\prime}s,\quad d_{\prime}d_{\prime}d_{\prime}s,\quad \ldots,\quad d_{\prime\prime}d_{\prime\prime}d_{\prime}s,\quad \ldots,$$

par les notations

$$\Delta_{\prime}^2 s,\quad \Delta_{\prime}^3 s,\quad \ldots,\quad \Delta_{\prime\prime}^2\Delta_{\prime}s,\quad \ldots,\quad d_{\prime}^2 s,\quad d_{\prime}^3 s,\quad \ldots,\quad d_{\prime\prime}^2 d_{\prime}s,\quad \ldots.$$

On pourrait supposer que, s étant une fonction de plusieurs variables $x, y, z, \ldots$, chacune des caractéristiques

$$\Delta_{\prime},\quad \Delta_{\prime\prime},\quad \Delta_{\prime\prime\prime},\quad \ldots$$

fût relative au changement de valeur d'une seule variable

$$x,\quad \text{ou}\quad y,\quad \text{ou}\quad z,\quad \ldots.$$

Dans ce cas particulier, nous remplacerons ces caractéristiques par les

suivantes

$$\Delta_x,\quad \Delta_y,\quad \Delta_z,\quad \ldots;$$

en sorte que la notation

$$\Delta_x s,$$

par exemple, représentera l'accroissement partiel de la fonction s, correspondant à l'accroissement Δx de la seule variable x. Alors aussi nous remplacerons les caractéristiques

$$d_{\prime},\ d_{\prime\prime},\ d_{\prime\prime\prime},\quad \ldots$$

par les suivantes

$$d_x,\quad d_y,\quad d_z,\quad \ldots,$$

dont chacune indiquera une différentiation effectuée sur une fonction de $x, y, z, \ldots$ par rapport à une seule variable x, ou y, ou z, ..,; et les notations

$$d_x s,\quad d_y s,\quad d_z s,\quad \ldots$$

représenteront les *différentielles partielles* de la fonction s relatives aux diverses variables. Ce n'est pas tout : en vertu des conventions admises, on devra représenter par la notation $D_x s$ la dérivée de s relative à la seule variable x, par $D_y s$ la dérivée de s relative à la seule variable y, etc...; et pour déterminer les valeurs de ces diverses dérivées qui devront naturellement s'appeler les *dérivées partielles* de s relatives à x, à y, à z, ..., on obtiendra, au lieu de l'équation (6), des équations semblables et de la forme

$$(9)\qquad D_x s = \lim \frac{\Delta_x s}{\Delta x},\qquad D_y s = \lim \frac{\Delta_y s}{\Delta y},\qquad D_z s = \lim \frac{\Delta_z s}{\Delta z},\qquad \ldots.$$

Enfin, à la place de la formule (7), on obtiendra les suivantes

$$(10)\qquad d_x s = D_x s\, dx,\qquad d_y s = D_y s\, dy,\qquad d_z s = D_z s\, dz,\qquad \ldots,$$

qui montrent comment les différentielles partielles

$$d_x s,\quad d_y s,\quad d_z s,\quad \ldots$$

peuvent se déduire des dérivées partielles

$$D_x s,\quad D_y s,\quad D_z s,\quad \ldots.$$

Lorsqu'une même fonction s se trouve successivement soumise à plusieurs opérations indiquées par quelques-uns des signes

$$d_x,\quad d_y,\quad d_z,\quad \ldots$$

ou

$$\mathrm{D}_x,\quad \mathrm{D}_y,\quad \mathrm{D}_z,\quad \ldots,$$

on obtient, dans le premier cas, des différentielles partielles de divers ordres, telles que

$$d_x d_y s,\quad d_x d_z s,\quad d_y d_z s,\quad \ldots,\quad d_x d_y d_z s,\quad \ldots,$$

et dans le second cas des *dérivées partielles de divers ordres*, telles que

$$\mathrm{D}_x \mathrm{D}_y s,\quad \mathrm{D}_x \mathrm{D}_z s,\quad \mathrm{D}_y \mathrm{D}_z s,\quad \ldots,\quad \mathrm{D}_x \mathrm{D}_y \mathrm{D}_z s,\quad \ldots.$$

Lorsqu'une de ces opérations se trouve répétée plusieurs fois de suite, alors, au lieu de plusieurs caractéristiques pareilles, placées à la suite l'une de l'autre, on écrit une seule caractéristique affectée d'un exposant égal à leur nombre, comme nous l'avons déjà fait dans des cas semblables. En opérant de cette manière, on réduit, par exemple, les expressions

$$d_x d_x d_y s,\quad d_x d_x d_y d_y s,\quad \ldots$$

à celles-ci

$$d_x^2 d_y s,\quad d_x^2 d_y^2 s,\quad \ldots,$$

et les expressions

$$\mathrm{D}_x \mathrm{D}_x \mathrm{D}_y s,\quad \mathrm{D}_x \mathrm{D}_x \mathrm{D}_y \mathrm{D}_y s,\quad \ldots$$

à celles-ci

$$\mathrm{D}_x^2 \mathrm{D}_y s,\quad \mathrm{D}_x^2 \mathrm{D}_y^2 s,\quad \ldots.$$

Lorsque les relations qui existent entre les variables proposées laissent non pas seulement une, mais plusieurs variables indéterminées, en sorte que plusieurs variables puissent être considérées comme indépendantes, il est clair qu'on peut disposer arbitrairement des différentielles de toutes les variables indépendantes. Alors on simplifie les calculs en considérant ces mêmes différentielles comme autant de constantes arbitraires.

II. — *Sur la continuité des fonctions, de leurs dérivées et de leurs différentielles. Propriétés diverses des différentielles.*

Nous disons, comme l'on sait, qu'une fonction est *continue*, entre deux limites données d'une variable dont elle dépend, ou dans le

voisinage d'une valeur particulière attribuée à cette variable, lorsque entre ces limites ou dans le voisinage de cette valeur particulière, la fonction, conservant sans cesse une valeur unique et finie, varie de telle sorte qu'un accroissement infiniment petit, attribué à la variable, produise toujours un accroissement infiniment petit de la fonction elle-même.

Supposer, comme on le fait dans le calcul différentiel, qu'à des accroissements infiniment petits des variables correspondent des accroissements infiniment petits des fonctions, c'est supposer implicitement que les fonctions restent continues. On ne doit donc pas être étonné de rencontrer dans le calcul différentiel des définitions, des formules et des théorèmes qui cessent d'être applicables, ou d'offrir un sens précis et déterminé dans le cas où l'on attribue aux variables des valeurs pour lesquelles les fonctions deviennent discontinues. On ne doit pas être étonné de voir, dans des cas semblables, les formules (3) et (6) du § I fournir, pour la différentielle ds d'une fonction donnée, ou pour sa dérivée $\mathrm{D}_x s$ relative à une seule variable x, des valeurs infinies ou même indéterminées (¹).

Sans perdre de vue ces observations, nous allons maintenant faire voir avec quelle facilité les propriétés diverses des différentielles et des fonctions dérivées se déduisent des principes établis dans le

(¹) Pour en donner un exemple très-simple, posons $s = \frac{1}{x}$; alors l'équation (6) du § I, savoir,

$$\mathrm{D}_x s = \lim \frac{\Delta s}{\Delta x},$$

se réduira simplement à

$$\mathrm{D}_x s = -\lim \frac{1}{x(x+\Delta x)},$$

et donnera généralement, pour dérivée de $\frac{1}{x}$, la fonction $-\frac{1}{x^2}$ qui sera une quantité négative si la variable x, étant réelle, diffère de zéro. Mais, si la variable x s'évanouit, la même formule fournira une valeur infinie de $\mathrm{D}_x s$; et l'on doit ajouter que cette valeur pourra être censée à volonté ou positive, ou négative, attendu qu'en faisant converger x et Δx vers zéro, on peut disposer arbitrairement du signe et de la valeur du rapport $\frac{\Delta x}{x}$.

premier paragraphe, et en particulier de la définition que nous avons donnée des différentielles, jointe à la considération d'une variable dont la différentielle est prise pour unité.

Soit s une variable ou fonction quelconque. Soient encore

$$\Delta s \quad \text{et} \quad \iota$$

les accroissements infiniment petits et simultanés de la variable s et de la variable primitive dont la différentielle est prise pour unité. Comme nous l'avons remarqué dans le § I, la différentielle ds sera, en vertu de sa définition même, déterminée par la formule

$$(1) \qquad ds = \lim \frac{\Delta s}{\iota}.$$

Cela posé, concevons d'abord que la fonction s soit équivalente à la somme de plusieurs autres fonctions $u, v, w, \ldots$, en sorte qu'on ait

$$(2) \qquad s = u + v + w + \ldots.$$

Si l'on désigne par

$$\Delta s, \quad \Delta u, \quad \Delta v, \quad \Delta w, \quad \ldots$$

les accroissements infiniment petits et simultanés de

$$s, \quad u, \quad v, \quad w, \quad \ldots,$$

l'accroissement total de s se réduira évidemment à la somme des accroissements correspondants des autres fonctions $u, v, w, \ldots$. On aura donc

$$\Delta s = \Delta u + \Delta v + \Delta w + \ldots$$

et par suite

$$\frac{\Delta s}{\iota} = \frac{\Delta u}{\iota} + \frac{\Delta v}{\iota} + \frac{\Delta w}{\iota} + \ldots.$$

Si, dans cette dernière formule, on fait converger ι vers la limite zéro, alors, eu égard à l'équation (2), on verra les rapports

$$\frac{\Delta s}{\iota}, \quad \frac{\Delta u}{\iota}, \quad \frac{\Delta v}{\iota}, \quad \frac{\Delta w}{\iota}, \quad \ldots$$

converger vers les limites respectives

$$ds, \quad du, \quad dv, \quad dw, \quad \ldots;$$

puis on en conclura, en passant aux limites,

$$(3) \qquad ds = du + dv + dw + \ldots.$$

En d'autres termes, l'équation

$$(4) \qquad \Delta(u + v + w + \ldots) = \Delta u + \Delta v + \Delta w + \ldots$$

entraînera la formule

$$(5) \qquad d(u + v + w + \ldots) = du + dv + dw + \ldots.$$

On peut donc énoncer la proposition suivante.

Théorème I. — La différentielle de la somme de plusieurs fonctions se réduit à la somme de leurs différentielles.

Corollaire. — Si l'on suppose les fonctions $u, v, \ldots$ réduites à deux seulement, la formule (5) deviendra

$$d(u + v) = du + dv.$$

Or, de cette dernière formule il résulte que, si une fonction donnée u reçoit un accroissement quelconque v, l'accroissement correspondant de la différentielle du sera représenté par dv. En d'autres termes : *l'accroissement de la différentielle sera la différentielle de l'accroissement.*

Supposons maintenant deux fonctions r, s, liées entre elles par l'équation

$$(6) \qquad s = ar,$$

dans laquelle a désigne un coefficient constant. Quand on fera croître r de Δr, le produit ar croîtra d'une quantité représentée par le produit $a\,\Delta r$. Donc, en nommant Δr, Δs les accroissements infiniment petits et simultanés des fonctions r, s, on aura

$$\Delta s = a\,\Delta r.$$

En divisant par ι chaque membre de la dernière équation, et faisant converger i vers la limite zéro, on trouvera non seulement

$$\frac{\Delta s}{i} = a\frac{\Delta r}{i},$$

mais encore

(7) $$ds = a\,dr.$$

En d'autres termes, l'équation

(8) $$\Delta(ar) = a\,\Delta r$$

entraînera la formule

(9) $$d(ar) = a\,dr.$$

On peut donc énoncer encore la proposition suivante.

Théorème II. — Lorsqu'on multiplie une fonction par un coefficient constant, la différentielle de cette fonction se trouve à son tour multipliée par le même coefficient.

Supposons enfin la fonction s liée à d'autres fonctions $u, v, w, \ldots$ par une équation linéaire ou de la forme

(10) $$s = au + bv + cw + \ldots,$$

dans laquelle $a, b, c, \ldots$ désignent des coefficients constants. Alors, en raisonnant toujours de la même manière, on obtiendra la formule

(11) $$ds = a\,du + b\,dv + c\,dw + \ldots,$$

qui entraînera la suivante

(12) $$d(au + bv + cw + \ldots) = a\,du + b\,dv + c\,dw + \ldots,$$

et qui peut se déduire directement des équations (5) et (9).

Les théorèmes et les formules que nous venons d'établir subsistent évidemment dans le cas même où l'on se bornerait à changer les valeurs de quelques-unes des variables comprises dans les fonctions données, et où l'on remplacerait en conséquence les accroissements totaux et les différentielles totales par des accroissements partiels et par des

différentielles partielles. Ainsi, en particulier, les formules (4), (8) continueront de subsister, si l'on y remplace la caractéristique Δ, qui indique l'accroissement total d'une fonction, par l'une des caractéristiques

$$\Delta_x,\ \Delta_y,\ \Delta_z,\ \ldots,\ \Delta_{,},\ \Delta_{,,},\ \Delta_{,,,},\ \ldots,$$

qui indique des accroissements partiels relatifs à diverses variables x, y, z, ... ou à divers groupes de variables. Pareillement, les formules (5), (9), (12) continueront de subsister, si l'on y remplace la caractéristique d qui indique la différentielle totale d'une fonction par l'une des caractéristiques

$$d_x,\ d_y,\ d_z,\ \ldots,\ d_{,},\ d_{,,},\ d_{,,,},\ \ldots,$$

qui indiquent des différentielles partielles relatives, soit aux variables $x, y, z, \ldots$, soit à des groupes de variables. Il y a plus : comme une différentielle partielle relative à une seule variable x se réduit à la dérivée correspondante, lorsque dx se réduit à l'unité, les formules (5), (9), (12) subsisteront encore, quand on y remplacera la caractéristique d par l'une des caractéristiques

$$D_x,\ D_y,\ D_z,\ \ldots.$$

L'équation (1), de laquelle nous avons déduit les formules (5), (9) et (12), entraîne encore une multitude d'autres conséquences dignes de remarque, et en particulier celles que nous allons indiquer.

Supposons que la fonction s et sa différentielle ds restent continues, par rapport aux variables dont elles dépendent, dans le voisinage du système des valeurs particulières attribuées à ces mêmes variables. Concevons d'ailleurs que l'on fasse coïncider la variable primitive dont l'accroissement est représenté par i, et dont la différentielle est réduite à l'unité, avec l'une des variables données, ou avec une variable nouvelle dont toutes les autres soient des fonctions continues. Non seulement la différentielle ds sera la limite de laquelle s'approchera indéfiniment le rapport $\frac{\Delta s}{i}$, tandis que i s'approchera indéfiniment de la limite zéro ; mais de plus, pour de très petits modules de i, ce rapport différera très peu de sa limite, en sorte qu'on pourra énoncer la proposition suivante.

Théorème III. — *Si une fonction s de plusieurs variables et sa différentielle ds restent continues dans le voisinage d'un système de valeurs attribuées à ces variables; si d'ailleurs on fait coïncider la variable primitive, ou avec l'une de ces variables, ou avec une variable nouvelle dont toutes les autres soient fonctions continues; alors, pour des valeurs infiniment petites attribuées à l'accroissement ι de la variable primitive, la différence entre le rapport $\frac{\Delta s}{\iota}$ et la différentielle ds sera infiniment petite.*

Corollaire I. — Le théorème III s'étend au cas même où l'accroissement total Δs et la différentielle totale ds seraient remplacés par un accroissement partiel

$$\Delta_{\prime}s, \quad \text{ou} \quad \Delta_{\prime\prime}s, \quad \text{ou} \quad \Delta_{\prime\prime\prime}s, \quad \ldots$$

et par la différentielle correspondante

$$d_{\prime}s \quad \text{ou} \quad d_{\prime\prime}s, \quad \text{ou} \quad d_{\prime\prime\prime}s, \quad \ldots.$$

On pourrait d'ailleurs supposer ici les caractéristiques

$$\Delta_{\prime}, \quad \Delta_{\prime\prime}, \quad \Delta_{\prime\prime\prime}, \quad \ldots, \quad d_{\prime}, \quad d_{\prime\prime}, \quad d_{\prime\prime\prime}, \quad \ldots,$$

relatives chacune à une seule variable x, ou y, ou z, ... et par conséquent réduites aux caractéristiques

$$\Delta_x, \quad \Delta_y, \quad \Delta_z, \quad \ldots, \quad d_x, \quad d_y, \quad d_z, \quad \ldots.$$

Corollaire II. — Concevons maintenant que les variables, dont s est fonction, soient partagées en deux groupes. Indiquons à l'aide de la caractéristique Δ l'accroissement total de la fonction s ou d'une fonction de même nature, et à l'aide de la caractéristique $\Delta_{\prime}$ ou $\Delta_{\prime\prime}$ l'accroissement partiel que prend la même fonction pour des accroissements infiniment petits attribués aux variables comprises dans un seul groupe. Soient en conséquence $\Delta_{\prime}s$ ou $\Delta_{\prime\prime}s$ l'accroissement infiniment petit de s correspondant à des accroissements infiniment petits des

variables comprises dans le premier ou dans le second groupe; et Δs l'accroissement total de s. Enfin, nommons $s_{\prime}$ ce que devient s quand on fait croître seulement les variables comprises dans le premier groupe, et $s_{\prime\prime}$ ce que devient s quand on fait croître toutes les variables à la fois. On aura évidemment

$$s_{\prime} = s + \Delta_{\prime}s,$$
$$s_{\prime\prime} = s_{\prime} + \Delta_{\prime\prime}s_{\prime} = s + \Delta_{\prime}s + \Delta_{\prime\prime}s_{\prime},$$

et, par suite, la valeur de $\Delta s = s_{\prime\prime} - s$ sera

$$\Delta s = \Delta_{\prime}s + \Delta_{\prime\prime}s_{\prime}. \tag{13}$$

En divisant par ι les deux membres de cette dernière équation, l'on trouvera

$$\frac{\Delta s}{\iota} = \frac{\Delta_{\prime}s}{\iota} + \frac{\Delta_{\prime\prime}s_{\prime}}{\iota}.$$

Supposons, d'ailleurs, que la fonction s et ses deux différentielles partielles

$$d_{\prime}s, \quad d_{\prime\prime}s$$

soient des fonctions continues des diverses variables, dans le voisinage du système des valeurs attribuées à ces variables mêmes. Alors, pour des valeurs infiniment petites de ι, en vertu du corollaire I, le rapport $\frac{\Delta_{\prime}s}{\iota}$ différera infiniment peu de $d_{\prime}s$, et le rapport $\frac{\Delta_{\prime\prime}s_{\prime}}{\iota}$ de $d_{\prime\prime}s_{\prime}$. Mais, d'autre part, à l'accroissement infiniment petit

$$s_{\prime} - s = \Delta_{\prime}s$$

de la fonction s correspondra l'accroissement

$$d_{\prime\prime}s_{\prime} - d_{\prime\prime}s = \Delta_{\prime}d_{\prime\prime}s$$

de la différentielle $d_{\prime\prime}s$; et ce dernier accroissement sera encore infiniment petit, puisque $d_{\prime\prime}s$ sera, par hypothèse, fonction continue de s. Donc le rapport $\frac{\Delta_{\prime\prime}s_{\prime}}{\iota}$ différera indéfiniment peu non seulement de $d_{\prime\prime}s_{\prime}$, mais aussi de $d_{\prime\prime}s$. Donc, dans l'hypothèse admise, si l'on fait converger ι vers la limite zéro, les rapports

$$\frac{\Delta_{\prime} s}{\iota}, \quad \frac{\Delta_{\prime\prime} s_{\prime}}{\iota}$$

convergeront respectivement vers les limites

$$d_{\prime} s, \quad d_{\prime\prime} s;$$

et, par suite, la formule

$$\frac{\Delta s}{\iota} = \frac{\Delta_{\prime} s}{\iota} + \frac{\Delta_{\prime\prime} s_{\prime}}{\iota}$$

entrainera celle-ci

$$ds = d_{\prime} s + d_{\prime\prime} s$$

En conséquence, on peut énoncer la proposition suivante.

Théorème IV. — Soit s une fonction de diverses variables que nous supposerons partagées en deux groupes. Soient, de plus,

$$d_{\prime} s$$

la différentielle partielle de s correspondante au système des variables comprises dans le premier groupe;

$$d_{\prime\prime} s$$

la différentielle partielle de s correspondante au système des variables comprises dans le second groupe; et

$$ds$$

la différentielle totale de s correspondante au système de toutes les variables. Si la fonction s et les différentielles partielles

$$d_{\prime} s, \quad d_{\prime\prime} s$$

restent fonctions continues des diverses variables dans le voisinage du système des valeurs attribuées à ces variables mêmes, la différentielle totale ds sera la somme des différentielles partielles, en sorte qu'on aura

$$ds = d_{\prime} s + d_{\prime\prime} s. \tag{14}$$

Corollaire. — Concevons maintenant que la fonction s dépende de

plusieurs variables partagées en trois groupes, et nommons

$$d_{\prime} s, \quad d_{\prime\prime} s, \quad d_{\prime\prime\prime} s$$

les différentielles partielles de s correspondantes à ces trois groupes. Supposons, d'ailleurs, que la fonction s et ces trois différentielles partielles restent fonctions continues des diverses variables, dans le voisinage du système des valeurs attribuées à ces variables mêmes. Si l'on considère les deux derniers groupes de variables comme n'en formant plus qu'un seul, la différentielle partielle de s correspondante à ce nouveau groupe sera, en vertu du théorème précédent, représentée par la somme

$$d_{\prime\prime} s + d_{\prime\prime\prime} s;$$

et, en vertu du même théorème, il suffira d'ajouter cette somme à $d_{\prime} s$ pour obtenir la différentielle totale de s ou ds. On aura donc

$$ds = d_{\prime} s + d_{\prime\prime} s + d_{\prime\prime\prime} s.$$

Par des raisonnements semblables, on passera aisément du cas où les variables sont partagées en trois groupes, au cas où elles sont partagées en quatre groupes, etc., et en continuant ainsi on établira généralement la proposition suivante.

Théorème V. — Soit s une fonction de plusieurs variables, que nous supposerons partagées en divers groupes. Soient de plus

$$d_{\prime} s, \quad d_{\prime\prime} s, \quad d_{\prime\prime\prime} s, \quad \ldots$$

les différentielles partielles de s, correspondantes au premier, au second, au troisième ... groupe. Enfin, supposons que la fonction s et chacune de ces différentielles restent fonctions continues des diverses variables dans le voisinage du système des valeurs attribuées à ces variables mêmes. La différentielle totale ds de la fonction s sera la somme des différentielles partielles $d_{\prime} s$, $d_{\prime\prime} s$, $d_{\prime\prime\prime} s$, ..., en sorte qu'on aura

$$ds = d_{\prime} s + d_{\prime\prime} s + d_{\prime\prime\prime} s + \ldots. \tag{15}$$

Corollaire I. — Au lieu de déduire le théorème V du précédent, on pourrait l'établir directement à l'aide des considérations suivantes. Les variables que renferme la fonction s étant, comme on vient de le dire, partagées en divers groupes, désignons, à l'aide des caractéristiques

$$\Delta_{\prime},\quad \Delta_{\prime\prime},\quad \Delta_{\prime\prime\prime},\quad \ldots,$$

les accroissements partiels de la fonction s ou d'une fonction de même nature, qui correspondent à des accroissements infiniment petits des valeurs des variables comprises dans le premier, le second, le troisième, ... groupe. Soient encore $s_{\prime}$ ce que devient la fonction s en vertu des accroissements attribués aux variables comprises dans le premier; $s_{\prime\prime}$ ce que devient la fonction s en vertu des accroissements attribués aux variables comprises dans les deux premiers groupes; $s_{\prime\prime\prime}$ ce que devient la même fonction, en vertu des accroissements attribués aux variables comprises dans les trois premiers groupes, ..., et ainsi de suite. On pourra évidemment considérer $s_{\prime\prime}$ comme représentant ce que devient $s_{\prime}$ en vertu des accroissements attribués aux seules variables comprises dans le second groupe; $s_{\prime\prime\prime}$ comme représentant ce que devient $s_{\prime\prime}$ en vertu des accroissements attribués aux seules variables comprises dans le troisième groupe, etc. On aura donc

$$\begin{aligned}
s_{\prime} &= s + \Delta_{\prime} s,\\
s_{\prime\prime} &= s_{\prime} + \Delta_{\prime\prime} s_{\prime},\\
s_{\prime\prime\prime} &= s_{\prime\prime} + \Delta_{\prime\prime\prime} s_{\prime\prime},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots,
\end{aligned}$$

et par suite

$$\begin{aligned}
s_{\prime} &= s + \Delta_{\prime} s,\\
s_{\prime\prime} &= s + \Delta_{\prime} s + \Delta_{\prime\prime} s_{\prime},\\
s_{\prime\prime\prime} &= s + \Delta_{\prime} s + \Delta_{\prime\prime} s_{\prime} + \Delta_{\prime\prime\prime} s_{\prime\prime},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,
\end{aligned}$$

ou, ce qui revient au même,

$$\begin{aligned}
s_{\prime} - s &= \Delta_{\prime} s,\\
s_{\prime\prime} - s &= \Delta_{\prime} s + \Delta_{\prime\prime} s_{\prime},\\
s_{\prime\prime\prime} - s &= \Delta_{\prime} s + \Delta_{\prime\prime} s_{\prime} + \Delta_{\prime\prime\prime} s_{\prime\prime},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

Donc les différences

$$s_{\prime} - s,\quad s_{\prime\prime} - s,\quad s_{\prime\prime\prime} - s,\quad \ldots$$

pourront être respectivement représentées par les sommes composées avec le premier, ou les deux premiers, ou les trois premiers, ..., termes de la suite

$$\Delta_{\prime} s,\quad \Delta_{\prime\prime} s_{\prime},\quad \Delta_{\prime\prime\prime} s_{\prime\prime},\quad \ldots;$$

et la somme de tous les termes de cette suite représentera la dernière de toutes ces différences qui sera précisément l'accroissement total de la fonction s correspondant aux accroissements infiniment petits de toutes les variables. Donc, en nommant Δs cet accroissement total de la fonction s, on aura

$$\Delta s = \Delta_{\prime} s + \Delta_{\prime\prime} s_{\prime} + \Delta_{\prime\prime\prime} s_{\prime\prime} + \ldots.$$

Concevons à présent que l'on divise par ι les deux membres de la formule précédente. On trouvera

$$\frac{\Delta s}{\iota} = \frac{\Delta_{\prime} s}{\iota} + \frac{\Delta_{\prime\prime} s_{\prime}}{\iota} + \frac{\Delta_{\prime\prime\prime} s_{\prime\prime}}{\iota} + \ldots;$$

puis en attribuant à ι une valeur infiniment petite, et supposant que les fonctions

$$s,\quad d_{\prime} s,\quad d_{\prime\prime} s_{\prime},\quad d_{\prime\prime\prime} s_{\prime\prime},\quad \ldots$$

restent fonctions continues des diverses variables dans le voisinage du système de valeurs attribuées à ces variables, on reconnaîtra que les rapports

$$\frac{\Delta_{\prime} s}{\iota},\quad \frac{\Delta_{\prime\prime} s}{\iota},\quad \frac{\Delta_{\prime\prime\prime} s}{\iota},\quad \ldots$$

diffèrent infiniment peu, le premier de $d_{\prime} s$; le deuxième de $d_{\prime\prime} s_{\prime}$, et, par suite, de $d_{\prime\prime} s$; le troisième de $d_{\prime\prime\prime} s_{\prime\prime}$, et, par suite, de $d_{\prime\prime\prime} s_{\prime}$, ou même de $d_{\prime\prime\prime} s$, etc. Donc, en faisant converger ι vers la limite zéro, on verra les rapports

$$\frac{\Delta_{\prime} s}{\iota},\quad \frac{\Delta_{\prime\prime} s_{\prime}}{\iota},\quad \frac{\Delta_{\prime\prime\prime} s_{\prime\prime}}{\iota},\quad \ldots$$

converger respectivement vers les limites

$$d_{\prime}s,\quad d_{\prime\prime}s,\quad d_{\prime\prime\prime}s,\quad \ldots;$$

et la formule

$$\frac{\Delta s}{i} = \frac{\Delta_{\prime} s}{i} + \frac{\Delta_{\prime\prime} s_{\prime}}{i} + \frac{\Delta_{\prime\prime\prime} s_{\prime\prime}}{i} + \ldots$$

entrainera la suivante

$$ds = d_{\prime}s + d_{\prime\prime}s + d_{\prime\prime\prime}s + \ldots.$$

Corollaire II. — Le théorème V continuerait évidemment de subsister si chacune des caractéristiques

$$d_{\prime},\quad d_{\prime\prime},\quad d_{\prime\prime\prime},\quad \ldots$$

se rapportait à une seule variable. Mais alors, en désignant par x, y, z, ... les diverses variables, on pourrait à ces caractéristiques substituer les suivantes

$$d_x,\quad d_y,\quad d_z,\quad \ldots;$$

et, par suite, la formule (15) deviendrait

$$(16)\qquad ds = d_x s + d_y s + d_z s + \ldots.$$

III. — *Formules générales pour la différentiation des fonctions d'une ou de plusieurs variables.*

Les principes établis dans les paragraphes précédents fournissent immédiatement les diverses formules générales qui servent à la différentiation des fonctions d'une ou de plusieurs variables. Entrons à ce sujet dans quelques détails.

Considérons d'abord une fonction s d'une seule variable x. Si cette fonction est du nombre de celles que l'on nomme *fonctions simples*, sa dérivée $D_x s$ devra se déduire, dans chaque cas particulier, de l'équation (6) du paragraphe I, c'est-à-dire de la formule

$$(1)\qquad D_x s = \lim \frac{\Delta s}{\Delta x}.$$

Cette dérivée étant obtenue, la formule (7) du § I, savoir,

$$(2)\qquad ds = D_x s\, dx,$$

fournira immédiatement la valeur générale de la différentielle ds.

Si s est une fonction de fonction de x, si, par exemple, s est fonction de la variable y, cette variable étant elle-même fonction de la variable x, alors la différentielle ds se trouvera déterminée non plus par l'équation (2), mais par le système de deux équations de même forme, savoir,

$$(3)\qquad ds = D_y s\, dy,\qquad dy = D_x y\, dx,$$

en sorte qu'on aura

$$(4)\qquad ds = D_y s\, D_x y\, dx.$$

Pareillement, si s était fonction de z, z étant fonction de y, et y fonction de x, on trouverait successivement

$$(5)\qquad ds = D_z s\, dz,\qquad dz = D_y z\, dy,\qquad dy = D_x y\, dx,$$

puis on en conclurait

$$(6)\qquad ds = D_z s\, D_y z\, D_x y\, dx;$$

et ainsi de suite.

Supposons maintenant que s soit non plus une fonction de fonction, mais une fonction composée de plusieurs variables x, y, z, ... Alors, en vertu de la formule (15) du paragraphe précédent, on aura généralement

$$(7)\qquad ds = d_x s + d_y s + d_z s + \ldots.$$

Mais les formules (10) du § I donneront

$$(8)\qquad d_x s = D_x s\, dx,\qquad d_y s = D_y s\, dy,\qquad d_z s = D_z s\, dz,\quad \ldots.$$

Donc alors la valeur de la différentielle ds se trouvera déterminée par la formule

$$ds = D_x s\, dx + D_y s\, dy + D_z s\, dz + \ldots.$$

Si s était une fonction de plusieurs autres

$$u, \quad v, \quad w, \quad \ldots,$$

qui fussent elles-mêmes fonctions de plusieurs variables indépendantes

$$x, \quad y, \quad z, \quad \ldots,$$

alors, au lieu de la formule (9), on obtiendrait la suivante

$$(10) \qquad ds = \mathrm{D}_u s\, du + \mathrm{D}_v s\, dv + \mathrm{D}_w s\, dw + \ldots,$$

et chacune des différentielles du, dv, dw, ... se trouverait à son tour déterminée par une équation semblable à la formule (9), en sorte qu'on aurait

$$(11) \qquad \left\{ \begin{array}{l} du = \mathrm{D}_x u\, dx + \mathrm{D}_y u\, dy + \mathrm{D}_z u\, dz + \ldots, \\ dv = \mathrm{D}_x v\, dx + \mathrm{D}_y v\, dy + \mathrm{D}_z v\, dz + \ldots, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array} \right.$$

Donc alors, pour obtenir la valeur générale de ds exprimée en fonction des variables $x, y, z, \ldots$ et de leurs différentielles $dx, dy, dz, \ldots$, il suffirait de substituer dans le second membre de l'équation (10) les valeurs de du, dv, dw, ... fournies par les formules (11).

Il pourrait arriver que, s étant fonction de $u, v, w, \ldots$, chacune des lettres $u, v, w, \ldots$ représentât non plus une fonction des variables indépendantes, mais une fonction composée d'autres fonctions. Au reste, il est clair que, dans tous les cas, quel que soit le nombre des variables diverses, supposées fonctions les unes des autres, la différentielle totale de s pourra être déterminée par le système de plusieurs équations semblables aux formules (9), (10), (11).

Les formules qui précèdent comprennent, comme cas particuliers, d'autres formules générales qu'on en déduirait sans peine. Ainsi, par exemple, comme en désignant par a, b deux constantes arbitraires, on trouve

$$\Delta(ax+b) = \Delta(ax) = a\,\Delta x,$$

par conséquent

$$\frac{\Delta(ax+b)}{\Delta x} = a,$$

la formule (1) donnera

$$\mathrm{D}_x(ax+b) = a.$$

Par suite, si l'on pose

$$s = au + bv + cw + \ldots,$$

la formule (10) donnera

$$ds = a\,du + b\,dv + c\,dw + \ldots,$$

en sorte qu'on aura

$$d(au + bv + cw + \ldots) = a\,du + b\,dv + c\,dw + \ldots.$$

On se trouve ainsi ramené immédiatement à la formule (12) du § II, laquelle comprend comme cas particuliers les formules (5) et (9) du même paragraphe.

Supposons maintenant que diverses variables se trouvent liées entre elles par une ou plusieurs équations. Les deux membres de chaque équation étant égaux, leurs différentielles seront égales, et l'égalité de ces différentielles constituera une équation nouvelle. On appelle *équations différentielles* les nouvelles équations que l'on obtient en différentiant les deux membres de chacune des équations données. Comme une quantité constante est celle qui ne varie pas, ou, en d'autres termes, celle qui ne reçoit pas d'accroissement, il est clair que la différentielle d'une constante s'évanouit avec son accroissement même. Donc lorsqu'une équation offre pour second membre zéro, ou une autre constante, il suffit de différentier le premier membre de cette équation pour obtenir l'équation différentielle correspondante.

Les règles qui servent à déterminer la différentielle du premier ordre d'une fonction quelconque peuvent encore évidemment servir à déterminer la différentielle de cette différentielle ou la différentielle du second ordre, et généralement les différentielles des divers ordres. Pareillement, étant données une ou plusieurs équations entre diverses variables, on pourra tirer parti des règles dont il s'agit pour différentier plusieurs fois de suite chaque équation, et pour obtenir ainsi ce qu'on appelle des équations différentielles de divers ordres.

Dans le paragraphe qui va suivre, nous ferons connaître diverses propriétés remarquables des différentielles et des fonctions dérivées d'un ordre quelconque.

IV. — *Propriétés des différentielles et des fonctions dérivées des divers ordres.*

Aux théorèmes et aux formules que nous avons établis dans les paragraphes précédents, il est utile de joindre la démonstration de quelques propriétés générales des différentielles des divers ordres. L'une de ces propriétés appartient à la fois aux accroissements des fonctions, à leurs différentielles et à leurs dérivées. Elle consiste en ce qu'on peut intervertir arbitrairement l'ordre dans lequel se succèdent deux ou plusieurs opérations, dont chacune est exprimée ou par l'une des caractéristiques

$$\Delta,\quad \Delta_{\prime},\quad \Delta_{\prime\prime},\quad \Delta_{\prime\prime\prime},\quad \ldots,\quad \Delta_x,\quad \Delta_y,\quad \Delta_z,\quad \ldots,$$

qui servent à indiquer des accroissements totaux ou partiels, ou par l'une des caractéristiques

$$d,\quad d_{\prime},\quad d_{\prime\prime},\quad d_{\prime\prime\prime},\quad \ldots,\quad d_x,\quad d_y,\quad d_z,\quad \ldots,$$

qui servent à indiquer des différentielles totales ou partielles, ou même par l'une des caractéristiques

$$D_x,\quad D_y,\quad D_z,\quad \ldots,$$

qui servent à indiquer des dérivées partielles, sans altérer en aucune manière le résultat définitif de ces opérations diverses. Pour établir cette proposition, il suffit évidemment de faire voir que l'on pourra toujours, sans inconvénient, échanger entre elles deux de ces caractéristiques, écrites à la suite l'une de l'autre. Il y a plus : on pourra se borner à considérer le cas où les deux caractéristiques seraient dissemblables, la proposition étant évidente dans le cas contraire.

Or, supposons que, la lettre s désignant une fonction de plusieurs variables $x, y, z, \ldots$, on nomme ς un accroissement partiel ou même total de cette fonction. On aura, en vertu des formules (4) et (5)

du § II,

$$\Delta(s+\varsigma) = \Delta s + \Delta\varsigma,$$
$$d(s+\varsigma) = ds + d\varsigma.$$

Donc, à un accroissement quelconque de s, représenté par ς, correspondront un accroissement de Δs représenté par $\Delta\varsigma$, et un accroissement de la différentielle ds représenté par $d\varsigma$. Ce n'est pas tout : comme les formules (4) et (5) du § II continuent de subsister, dans le cas même où l'on y remplace la caractéristique Δ par l'une des caractéristiques

$$\Delta_{\prime}, \Delta_{\prime\prime}, \Delta_{\prime\prime\prime},\quad \ldots,\quad \Delta_x,\quad \Delta_y,\quad \Delta_z,\quad \ldots,$$

et la caractéristique d par l'une des caractéristiques

$$d_{\prime},\quad d_{\prime\prime},\quad d_{\prime\prime\prime},\quad \ldots,\quad d_x,\quad d_y,\quad d_z,\quad \ldots,$$

ou même par l'une des caractéristiques

$$D_x,\quad D_y,\quad D_z,\quad \ldots,$$

on peut affirmer qu'à l'accroissement ς de la fonction s correspondront les accroissements

$$\Delta_{\prime}\varsigma,\quad \Delta_{\prime\prime}\varsigma,\quad \Delta_{\prime\prime\prime}\varsigma,\quad \ldots,\quad \Delta_x\varsigma,\quad \Delta_y\varsigma,\quad \Delta_z\varsigma,\quad \ldots$$

des expressions

$$\Delta_{\prime}s,\quad \Delta_{\prime\prime}s,\quad \Delta_{\prime\prime\prime}s,\quad \ldots,\quad \Delta_x s,\quad \Delta_y s,\quad \Delta_z s,\quad \ldots$$

et les accroissements

$$d_{\prime}\varsigma,\quad d_{\prime\prime}\varsigma,\quad d_{\prime\prime\prime}\varsigma,\quad \ldots,\quad d_x\varsigma,\quad d_y\varsigma,\quad d_z\varsigma,\quad D_x\varsigma,\quad D_y\varsigma,\quad D_z\varsigma,\quad \ldots$$

des expressions

$$d_{\prime}s,\quad d_{\prime\prime}s,\quad d_{\prime\prime\prime}s,\quad \ldots,\quad d_x s,\quad d_y s,\quad d_z s,\quad \ldots,\quad D_x s,\quad D_y s,\quad D_z s,\quad \ldots.$$

Cela posé, concevons que les accroissements correspondants dont il s'agit se réduisent à ceux que l'on indique par l'une des caractéristiques

$$\Delta,\quad \Delta_{\prime},\quad \Delta_{\prime\prime},\quad \Delta_{\prime\prime\prime},\quad \ldots.\quad \Delta_x,\quad \Delta_y,\quad \Delta_z,\quad \ldots.$$

On conclura immédiatement de ce qui précède que l'on peut sans inconvénient échanger entre elles deux de ces caractéristiques, ou échanger l'une d'elles avec l'une des suivantes

$$d,\quad d_{,},\quad d_{,,},\quad d_{,,,},\quad \ldots,\quad d_x,\quad d_y,\quad d_z,\quad \ldots,\quad \mathrm{D}_x,\quad \mathrm{D}_y,\quad \mathrm{D}_z,\quad \ldots.$$

Ainsi, par exemple, de ce qu'à l'accroissement ς de s, correspond l'accroissement $\Delta_{,}\varsigma$ de $\Delta_{,}s$, on conclura qu'en posant

$$\varsigma = \Delta_{,,} s,$$

on doit avoir

$$\Delta_{,}\varsigma = \Delta_{,,}\Delta_{,}s.$$

On aura donc par suite

$$\Delta_{,}\Delta_{,,}s = \Delta_{,,}\Delta_{,}s. \tag{1}$$

Pareillement, de ce qu'à l'accroissement ς de s correspond l'accroissement $d_{,}\varsigma$ de $d_{,}s$, on conclura qu'en posant

$$\varsigma = \Delta_{,,} s,$$

on doit avoir

$$d_{,}\varsigma = \Delta_{,,} d_{,}\varsigma.$$

On aura donc par suite

$$d_{,}\Delta_{,,} s = \Delta_{,,} d_{,} s. \tag{2}$$

On pourra d'ailleurs remplacer, dans les formules (1) et (2), les caractéristiques $\Delta_{,}$, $\Delta_{,,}$ par deux quelconques des caractéristiques

$$\Delta,\quad \Delta_{,},\quad \Delta_{,,},\quad \Delta_{,,,},\quad \ldots,\quad \Delta_x,\quad \Delta_y,\quad \Delta_z,\quad \ldots;$$

et la caractéristique $d_{,}$ par l'une quelconque des caractéristiques

$$d,\quad d_{,},\quad d_{,,},\quad d_{,,,},\quad \ldots,\quad d_x,\quad d_y,\quad d_z,\quad \ldots,\quad \mathrm{D}_x,\quad \mathrm{D}_y,\quad \mathrm{D}_z,\quad \ldots.$$

Concevons maintenant que l'on divise les deux membres de la formule (2) par l'accroissement ι de la variable primitive. On trouvera

$$\frac{d_{,}\Delta_{,,} s}{\iota} = \frac{\Delta_{,,} d_{,} s}{\iota},$$

ou, ce qui revient au même, eu égard à la formule (9),

$$d_{,}\frac{\Delta_{,,} s}{\iota} = \frac{\Delta_{,,} d_{,} s}{\iota};$$

puis, en faisant converger vers la limite zéro l'accroissement ι et les

accroissements correspondants des variables comprises dans le groupe auquel se rapporte la caractéristique $\Delta_{,,}$, on verra les rapports

$$\frac{\Delta_{,,} s}{\iota},\quad \frac{\Delta_{,,} d_{,} s}{\iota}$$

converger respectivement vers les limites

$$d_{,,} s,\quad d_{,,} d_{,} s.$$

Donc, en passant aux limites, on trouvera

$$d_{,} d_{,,} s = d_{,,} d_{,} s. \tag{3}$$

Ajoutons que, si la caractéristique $d_{,,}$ indique une différentielle partielle relative à une seule variable, et se réduit par exemple à d_x, on pourra aussi la réduire à D_x en prenant dx pour unité. Cela posé, comme la formule (2) continue de subsister quand on y remplace la caractéristique $\Delta_{,,}$ par l'une quelconque des suivantes

$$\Delta,\quad \Delta_{,},\quad \Delta_{,,},\quad \Delta_{,,,},\quad \ldots,\quad \Delta_x,\quad \Delta_y,\quad \Delta_z,\quad \ldots,$$

et la caractéristique $d_{,}$ par l'une quelconque des suivantes

$$d,\quad d_{,},\quad d_{,,},\quad d_{,,,},\quad \ldots,\quad d_x,\quad d_y,\quad d_z,\quad \ldots,\quad \mathrm{D}_x,\quad \mathrm{D}_y,\quad \mathrm{D}_z,\quad \ldots,$$

il est clair que la formule (3) continuera de subsister si l'on y remplace les caractéristiques $d_{,}$, $d_{,,}$ par deux quelconques des caractéristiques

$$d,\quad d_{,},\quad d_{,,},\quad d_{,,,},\quad \ldots,\quad d_x,\quad d_y,\quad d_z,\quad \ldots,\quad \mathrm{D}_x,\quad \mathrm{D}_y,\quad \mathrm{D}_z,\quad \ldots.$$

En résumé, les formules (1), (2), (3) et autres semblables entraînent la proposition suivante.

Théorème I. — *Supposons qu'une fonction s de plusieurs variables soit successivement soumise à diverses opérations dont chacune, ayant pour but de fournir un accroissement total ou partiel, une différentielle totale ou partielle, ou même une dérivée partielle, se trouve indiquée par l'une des caractéristiques*

$$\begin{array}{l} \Delta,\quad \Delta_{,},\quad \Delta_{,,},\quad \Delta_{,,,},\quad \ldots,\quad \Delta_x,\quad \Delta_y,\quad \Delta_z,\quad \ldots, \\ d,\quad d_{,},\quad d_{,,},\quad d_{,,,},\quad \ldots,\quad d_x,\quad d_y,\quad d_z,\quad \ldots, \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\quad \mathrm{D}_x,\quad \mathrm{D}_y,\quad \mathrm{D}_z,\quad \ldots. \end{array}$$

L'expression qui résultera de ces opérations diverses offrira une valeur indépendante de l'ordre dans lequel se succéderont ces mêmes opérations, et par conséquent les caractéristiques qui serviront à les indiquer. On pourra donc, sans altérer cette valeur, intervertir arbitrairement l'ordre dans lequel les diverses lettres caractéristiques se trouveront rangées, comme si le système de ces lettres, écrites à la suite les unes des autres, représentait un véritable produit.

Corollaire I. — Il suit des formules (8) et (9) du § II, que le théorème III doit être étendu au cas même où l'une des caractéristiques, cessant d'indiquer un accroissement ou une différentielle, représenterait un coefficient constant.

Corollaire II. — Le théorème III, et même l'équation (15), comprennent comme cas particulier la formule

$$d_x d_y s = d_y d_x s, \tag{4}$$

de laquelle on tire immédiatement la suivante

$$D_x D_y s = D_y D_x s, \tag{5}$$

en considérant les variables x, y comme indépendantes et réduisant les différentielles dx ou dy de chacune d'elles à l'unité. Au reste, la formule (5) pourrait être démontrée directement comme il suit :

Corollaire III. — Concevons que, s étant une fonction de deux variables x, y, on attribue à ces variables des accroissements infiniment petits

$$\Delta x = \alpha, \qquad \Delta y = 6,$$

indépendants l'un de l'autre et de ces variables mêmes. On aura d'abord

$$\Delta_x \Delta_y s = \Delta_y \Delta_x s;$$

et par suite

$$\frac{\Delta_x \Delta_y s}{\alpha} = \frac{\Delta_y \Delta_x s}{\alpha},$$

ou, ce qui revient au même, eu égard à la formule (8) du § II,

$$\frac{\Delta_x(\Delta_y s)}{\alpha} = \Delta_y\left(\frac{\Delta_x s}{\alpha}\right),$$

puis on conclura, en faisant converger $\alpha = \Delta x$ vers la limite zéro,

$$D_x \Delta_y s = \Delta_y D_x s.$$

Si maintenant on divise par 6 les deux membres de la dernière équation, on trouvera

$$\frac{D_x \Delta_y s}{6} = \frac{\Delta_y D_x s}{6},$$

ou, ce qui revient au même, eu égard à la formule (9) du § II,

$$D_x \frac{\Delta_y s}{6} = \frac{\Delta_y (D_x s)}{6};$$

puis on en conclura, en faisant converger $6 = \Delta_y s$ vers la limite zéro,

$$D_x D_y s = D_y D_x s.$$

V. — *Sur l'analyse des caractéristiques.*

Les lettres que l'on emploie dans la haute analyse sont de deux espèces. Les unes servent à représenter des quantités constantes ou variables, ou des expressions imaginaires ; les autres à indiquer des opérations diverses, et dans ce dernier cas elles se nomment ordinairement *caractéristiques*. Ici, en particulier, nous désignerons sous le nom de *caractéristiques différentielles* les lettres

$$\begin{array}{llllllll}
\Delta, & \Delta_{,}, & \Delta_{,,}, & \Delta_{,,,}, & \ldots, & \Delta_x, & \Delta_y, & \Delta_z, \quad \ldots, \\
d, & d_{,}, & d_{,,}, & d_{,,,}, & \ldots, & d_x, & d_y, & d_z, \quad \ldots, \\
 & & & & & D_x, & D_y, & D_z, \quad \ldots,
\end{array}$$

employées dans les paragraphes précédents pour représenter diverses opérations dont chacune a pour but de fournir un accroissement total ou partiel, une différentielle totale ou partielle, ou bien encore une dérivée partielle d'une fonction donnée. De telles opérations peuvent se succéder les unes aux autres en nombre quelconque, et nous avons déjà observé qu'alors le résultat définitif est indépendant de l'ordre dans lequel ces opérations s'effectuent, par conséquent de l'ordre dans lequel sont rangées les caractéristiques qui les indiquent. Or, de même qu'il est souvent utile de remplacer par une seule lettre une expression composée qui renfermait plusieurs lettres propres à représenter certaines quantités constantes ou variables, de même, pour simplifier les calculs, il peut être souvent utile de remplacer, soit par une seule lettre, soit du moins par un seul signe ou caractère spécial, le système de plusieurs opérations indiquées par diverses caractéristiques. Nous ajouterons qu'il parait convenable d'affecter à cet emploi un caractère nouveau plutôt qu'une lettre, afin de ne pas augmenter le nombre de celles qui ont été enlevées à l'analyse algébrique, et qui représentent, dans la haute analyse, non de simples quantités, mais des opérations de diverses natures. C'est pour ces motifs que divers auteurs, entre autres MM. Laplace et Brisson, ont employé, dans des cas semblables, deux caractères empruntés à la Géométrie, savoir, le triangle et le carré, en ayant soin de renverser le triangle, de manière qu'il ne puisse être confondu avec un Δ. Nous suivrons ici cet exemple, comme nous l'avons déjà fait en diverses circonstances; et nous représenterons en particulier par l'un des caractères

$$\nabla,\quad \nabla_{,},\quad \nabla_{,,},\quad \ldots,\quad \nabla',\quad \nabla'',\quad \ldots$$

le système de plusieurs opérations qu'indiqueraient, si elles étaient écrites à la suite l'une de l'autre, deux ou plusieurs des caractéristiques ci-dessus mentionnées

$$\begin{array}{llllllll}
\Delta, & \Delta_{,}, & \Delta_{,,}, & \Delta_{,,,}, & \ldots, & \Delta_x, & \Delta_y, & \Delta_z, \quad \ldots, \\
d, & d_{,}, & d_{,,}, & d_{,,,}, & \ldots, & d_x, & d_y, & d_z, \quad \ldots, \\
 & & & & & \mathrm{D}_x, & \mathrm{D}_y, & \mathrm{D}_z, \quad \ldots.
\end{array}$$

Cela posé, si, pour fixer les idées, on prend

$$\nabla = \mathrm{D}_x \mathrm{D}_y, \tag{1}$$

on aura, en nommant s une fonction quelconque de x, y,

$$\nabla s = \mathrm{D}_x \mathrm{D}_y s. \tag{2}$$

Pareillement, si l'on prend

$$\nabla = d_x d_y d_z, \tag{3}$$

on aura

$$\nabla s = d_x d_y d_z s, \quad \ldots. \tag{4}$$

D'ailleurs, suivant l'observation ci-dessus rappelée, on pourra, dans les formules (2), (4), etc., et par suite aussi dans les formules (1), (3), etc., intervertir arbitrairement l'ordre dans lequel seront rangées les diverses caractéristiques, comme si les expressions

$$\mathrm{D}_x \mathrm{D}_y,\quad d_x d_y d_z,\quad \ldots$$

étaient de véritables produits. Pour conserver le souvenir de cette analogie, nous appellerons les expressions

$$\mathrm{D}_x \mathrm{D}_y,\quad d_x d_y d_z,\quad \ldots,$$

et autres semblables, des *produits de caractéristiques*. Les *facteurs* de ces produits seront les caractéristiques elles-mêmes que l'on pourra échanger entre elles dans chaque produit, en sorte qu'on aura par exemple, en vertu de la formule (1),

$$\nabla = \mathrm{D}_x \mathrm{D}_y = \mathrm{D}_y \mathrm{D}_x;$$

en vertu de la formule (3),

$$\begin{aligned}
\nabla &= d_x d_y d_z = d_y d_z d_x = d_z d_x d_y \\
&= d_x d_z d_y = d_z d_y d_x = d_y d_x d_z, \quad \ldots.
\end{aligned}$$

Il suit d'ailleurs de ce qui a été dit dans le § II (théorème III, corollaire I), que l'on peut sans inconvénient, dans de semblables produits, et par conséquent dans les expressions que représenteront les notations

$$\nabla,\quad \nabla_{,},\quad \nabla_{,,},\quad \ldots,$$

remplacer une ou plusieurs caractéristiques par des coefficients constants.

Supposons maintenant qu'il s'agisse de combiner entre elles, par voie d'addition, plusieurs expressions de la forme

$$\nabla s, \quad \nabla_{\prime} s, \quad \nabla_{\prime\prime} s, \quad \ldots.$$

Le résultat de cette addition sera la somme

$$\nabla s + \nabla_{\prime} s + \nabla_{\prime\prime} s + \ldots.$$

Mais, pour simplifier les notations, nous nous bornerons à écrire une seule fois la lettre s à la suite de l'expression

$$\nabla + \nabla_{\prime} + \nabla_{\prime\prime} + \ldots,$$

et en conséquence nous conviendrons de représenter la somme dont il s'agit par la formule

$$(\nabla + \nabla_{\prime} + \nabla_{\prime\prime} + \ldots) s.$$

Cette convention nouvelle fournit un moyen d'abréger les formules. Elle permet, par exemple, de réduire l'équation (22) du § II, savoir,

$$ds = d_x s + d_y s + d_z s + \ldots, \tag{5}$$

à la forme la plus simple

$$ds = (d_x + d_y + d_z + \ldots) s. \tag{6}$$

Il y a plus : la formule (6) devant subsister quelle que soit la fonction représentée par la lettre s, on l'abrégera encore en effaçant cette lettre, et alors on trouvera

$$d = d_x + d_y + d_z + \ldots. \tag{7}$$

Les expressions de la forme

$$d_x + d_y + d_z + \ldots,$$

ou plus généralement de la forme

$$\nabla + \nabla_{\prime} + \nabla_{\prime\prime} + \ldots,$$

devront être naturellement appelées des *sommes de caractéristiques*. Lorsqu'une semblable somme se réduit d'elle-même, comme on le voit dans la formule (7), à une seule caractéristique, on peut profiter de

cette réduction pour simplifier le calcul. Dans le cas contraire, on parvient au même but en se servant d'un caractère nouveau pour représenter une telle somme. Nous supposerons ici que l'on affecte à cet emploi l'un des caractères

$$\Box, \quad \Box_{\prime}, \quad \Box_{\prime\prime}, \quad \ldots, \quad \Box', \quad \Box'', \quad \ldots.$$

Cela posé, lorsque nous prendrons pour exemple

$$\Box = \nabla + \nabla_{\prime} + \nabla_{\prime\prime} + \ldots, \tag{8}$$

la formule (8) sera une formule symbolique dont nous nous servirons pour exprimer que le sens de la notation $\Box s$ se trouvera défini, quelle que soit la fonction s, par l'équation

$$\Box s = \nabla s + \nabla_{\prime} s + \nabla_{\prime\prime} s + \ldots. \tag{9}$$

Les nouveaux caractères

$$\begin{array}{llllll} \nabla, & \nabla_{\prime}, & \nabla_{\prime\prime}, & \ldots, & \nabla', & \nabla'', \quad \ldots, \\ \Box, & \Box_{\prime}, & \Box_{\prime\prime}, & \ldots, & \Box', & \Box'', \quad \ldots, \end{array}$$

destinés à représenter ou des produits formés avec les *caractéristiques simples*

$$\begin{array}{lllllllll} \Delta, & \Delta_{\prime}, & \Delta_{\prime\prime}, & \Delta_{\prime\prime\prime}, & \ldots, & \Delta_x, & \Delta_y, & \Delta_z, & \ldots, \\ d, & d_{\prime}, & d_{\prime\prime}, & d_{\prime\prime\prime}, & \ldots, & d_x, & d_y, & d_z, & \ldots, \\ & & & & & \mathrm{D}_x, & \mathrm{D}_y, & \mathrm{D}_z, & \ldots, \end{array}$$

ou des sommes de semblables produits, sont ce que nous pouvons appeler des *caractéristiques composées*. Les propriétés de ces nouvelles caractéristiques se déduisent aisément des principes établis dans les précédents paragraphes. Ainsi, en particulier, puisque les formules (4), (5) du § I s'étendent au cas même où l'on remplace les accroissements totaux par des accroissements partiels, ou les différentielles totales par des différentielles partielles, il est clair qu'en désignant par u, v, w, ... des fonctions quelconques, on aura non seulement

$$\begin{array}{l} d_{\prime}(u + v + w + \ldots) = d_{\prime} u + d_{\prime} v + d_{\prime} w + \ldots, \\ d_{\prime\prime}(u + v + w + \ldots) = d_{\prime\prime} u + d_{\prime\prime} v + d_{\prime\prime} w + \ldots, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{array}$$

mais encore

$$\begin{aligned} d_{\prime}d_{\prime\prime}(u+v+w+\ldots) &= d_{\prime}(d_{\prime\prime}u+d_{\prime\prime}v+d_{\prime\prime}w+\ldots) \\ &= d_{\prime}d_{\prime\prime}u+d_{\prime}d_{\prime\prime}v+d_{\prime}d_{\prime\prime}w+\ldots, \end{aligned}$$

et que l'on trouvera généralement de la même manière

$$(10)\qquad d_{\prime}d_{\prime\prime}d_{\prime\prime\prime}\ldots(u+v+w+\ldots) = d_{\prime}d_{\prime\prime}d_{\prime\prime\prime}\ldots u + d_{\prime}d_{\prime\prime}d_{\prime\prime\prime}\ldots v + d_{\prime}d_{\prime\prime}d_{\prime\prime\prime}\ldots w + \ldots.$$

Il y a plus : on pourra, dans la dernière équation, remplacer chacune des caractéristiques par l'une quelconque des caractéristiques simples dont nous nous servons pour indiquer des accroissements, des différentielles ou des dérivées; ou même par un coefficient constant. Donc, dans la formule (10) on pourra au produit $d_{\prime}d_{\prime\prime}d_{\prime\prime\prime}\ldots$ substituer l'un quelconque de ceux que peut représenter la caractéristique composée ∇, et l'on aura généralement

$$(11)\qquad \nabla(u+v+w+\ldots) = \nabla u + \nabla v + \nabla w + \ldots.$$

Ce n'est pas tout ; comme, en vertu des conventions adoptées, on aura généralement

$$(12)\qquad (\nabla + \nabla_{\prime} + \nabla_{\prime\prime} + \ldots)s = \nabla s + \nabla_{\prime}s + \nabla_{\prime\prime}s + \ldots,$$

il est clair que si l'on pose

$$(13)\qquad s = u + v + w + \ldots,$$

on tirera des formules (11) et (12)

$$\begin{aligned} (\nabla + \nabla_{\prime} + \nabla_{\prime\prime} + \ldots)s = {} & \nabla u + \nabla_{\prime}u + \nabla_{\prime\prime}u + \ldots \\ & + \nabla v + \nabla_{\prime}v + \nabla_{\prime\prime}v + \ldots \\ & + \nabla w + \nabla_{\prime}w + \nabla_{\prime\prime}w + \ldots, \end{aligned}$$

ou, ce qui revient au même, eu égard à la formule (12),

$$\begin{aligned} (\nabla + \nabla_{\prime} + \nabla_{\prime\prime} + \ldots)s = {} & (\nabla + \nabla_{\prime} + \nabla_{\prime\prime} + \ldots)u \\ & + (\nabla + \nabla_{\prime} + \nabla_{\prime\prime} + \ldots)v \\ & + (\nabla + \nabla_{\prime} + \nabla_{\prime\prime} + \ldots)w \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

Donc, en supposant pour abréger

$$\square = \nabla + \nabla_{\prime} + \nabla_{\prime\prime} + \ldots,$$

on aura

$$(14)\qquad \square s = \square u + \square v + \square w + \ldots,$$

ou, en d'autres termes,

$$(15)\qquad \square(u+v+w+\ldots) = \square u + \square v + \square w + \ldots.$$

Les formules (11) et (15), qui sont semblables aux formules (4), (5) du § II, entraîneront évidemment la proposition suivante.

Théorème I. — *Le résultat que produit l'application d'une caractéristique simple ou composée à la somme de plusieurs termes ne diffère pas de celui qu'on obtiendrait en appliquant successivement la même caractéristique aux divers termes dont il s'agit.*

Supposons maintenant qu'à une expression de la forme

$$\nabla_{\prime}s,$$

on veuille appliquer une nouvelle caractéristique composée $\nabla_{\prime\prime}$. Il est clair que, dans l'expression nouvelle

$$\nabla_{\prime\prime}\nabla_{\prime}s,$$

ainsi obtenue, la partie indépendante de s, savoir,

$$\nabla_{\prime\prime}\nabla_{\prime},$$

représentera tout à la fois un produit de caractéristiques simples et ce qu'on peut appeler le *produit* des caractéristiques composées $\nabla_{\prime}$, $\nabla_{\prime\prime}$. Or, l'ordre dans lequel se succèdent les facteurs du premier produit pouvant être interverti arbitrairement, il en résulte que, dans le second produit, on pourra échanger entre elles les caractéristiques composées $\nabla_{\prime}$, $\nabla_{\prime\prime}$. On aura donc généralement

$$(16)\qquad \nabla_{\prime\prime}\nabla_{\prime}s = \nabla_{\prime}\nabla_{\prime\prime}s.$$

Il y a plus : si l'on pose

$$\square = \nabla + \nabla_{\prime} + \nabla_{\prime\prime} + \ldots$$

et

$$\square' = \nabla' + \nabla'' + \ldots,$$

on trouvera non seulement

$$\square s = \nabla s + \nabla_{,} s + \nabla_{,,} s + \ldots,$$

mais encore, eu égard à la formule (14),

$$\square' \square s = \square' \nabla s + \square' \nabla_{,} s + \square' \nabla_{,,} s + \ldots.$$

D'autre part, eu égard à la formule (9), on aura

$$\begin{aligned} \square' \nabla s &= \nabla' \nabla s + \nabla'' \nabla s + \ldots, \\ \square' \nabla_{,} s &= \nabla' \nabla_{,} s + \nabla'' \nabla_{,} s + \ldots, \\ \square' \nabla_{,,} s &= \nabla' \nabla_{,,} s + \nabla'' \nabla_{,,} s + \ldots, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

Donc on trouvera définitivement

$$\begin{aligned} \square' \square s = {} & \nabla' \nabla s + \nabla' \nabla_{,} s + \nabla' \nabla_{,,} s + \ldots \\ & + \nabla'' \nabla s + \nabla'' \nabla_{,} s + \nabla'' \nabla_{,,} s + \ldots \\ & + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned} \tag{17}$$

On trouvera de même

$$\begin{aligned} \square \square' s = {} & \nabla \nabla' s + \nabla_{,} \nabla' s + \nabla_{,,} \nabla' s + \ldots \\ & + \nabla \nabla'' s + \nabla_{,} \nabla'' s + \nabla_{,,} \nabla'' s + \ldots \\ & + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned} \tag{18}$$

Donc, eu égard à la formule (16), on aura généralement

$$\square' \square s = \square \square' s. \tag{19}$$

Les formules (16), (18), qui sont semblables aux formules (13), (14), (15) du § I, entraînent évidemment la proposition suivante.

Théorème II. — *Le résultat que produit l'application simultanée de deux caractéristiques différentielles, simples ou composées, à une fonction quelconque s, est indépendant de l'ordre dans lequel se trouvent rangées ces mêmes caractéristiques.*

Corollaire. — Si l'on efface la lettre s dans les deux membres de la formule (19), on obtiendra la suivante

$$\square' \square = \square \square'. \tag{20}$$

En vertu de cette dernière, l'expression $\square' \square$, qui représente le *produit* de deux caractéristiques composées, sera, comme tout produit de deux facteurs, indépendant de l'ordre dans lequel ces mêmes facteurs se trouveront écrits.

Concevons maintenant que l'on applique simultanément à une fonction quelconque s diverses caractéristiques simples ou composées. On pourra, sans altérer la valeur de l'expression ainsi obtenue, échanger entre elles deux quelconques de ces caractéristiques, et, à l'aide de semblables échanges plusieurs fois répétés, on pourra évidemment amener à la première, à la seconde, à la troisième place, etc. telle caractéristique que l'on voudra. Donc, l'expression obtenue offrira une valeur indépendante de l'ordre dans lequel on rangera les diverses caractéristiques, et l'on pourra énoncer la proposition suivante.

Théorème III. — *Le résultat que produit l'application simultanée de plusieurs caractéristiques différentielles, simples ou composées, à une fonction quelconque s, offre une valeur indépendante de l'ordre dans lequel ces mêmes caractéristiques se trouvent rangées.*

Corollaire. — En vertu du théorème IV, une expression de la forme

$$\square \square_{,} \square_{,,} \ldots s$$

offrira toujours une valeur indépendante de l'ordre dans lequel se succéderont les caractéristiques $\square$, $\square_{,}$, $\square_{,,}$, ..., et par suite le *produit* de ces caractéristiques, c'est-à-dire l'expression

$$\square \square_{,} \square_{,,} \ldots,$$

sera, comme un produit de quantités véritables, indépendant de l'ordre dans lequel ses divers facteurs se trouveront écrits.

Lorsqu'on efface la lettre s dans les deux membres de la formule (18), cette formule, qui suppose

$$\square = \nabla + \nabla_{,} + \nabla_{,,} + \dots, \qquad \square = \nabla' + \nabla'' + \dots,$$

se réduit simplement à

$$\begin{aligned} \square\square' = {} & \nabla\nabla' + \nabla_{,}\nabla' + \nabla_{,,}\nabla' + \dots \\ & + \nabla\nabla'' + \nabla_{,}\nabla'' + \nabla_{,,}\nabla' + \dots \\ & + \dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{aligned}$$

On aura donc généralement

$$(21) \quad \begin{aligned} (\nabla + \nabla_{,} + \nabla_{,,} + \dots)(\nabla' + \nabla'' + \dots) = {} & \nabla\nabla' + \nabla_{,}\nabla' + \nabla_{,,}\nabla' + \dots \\ & + \nabla\nabla'' + \nabla_{,}\nabla'' + \nabla_{,,}\nabla'' + \dots \\ & + \dots\dots\dots\dots\dots\dots, \end{aligned}$$

non seulement lorsque les lettres

$$\nabla, \quad \nabla_{,}, \quad \nabla_{,,}, \quad \dots, \quad \nabla', \quad \nabla'', \quad \dots$$

représenteront des quantités véritables, mais aussi lorsqu'elles représenteront des produits de caractéristiques. Au reste, la formule (20) est une conséquence immédiate des deux formules

$$\begin{aligned} (\nabla + \nabla_{,} + \nabla_{,,} + \dots)\nabla'^{s} &= \nabla\nabla'^{s} + \nabla_{,}\nabla'^{s} + \nabla_{,,}\nabla'^{s} + \dots, \\ \nabla'(\nabla + \nabla_{,} + \nabla_{,,} + \dots)^{s} &= \nabla'\nabla^{s} + \nabla'\nabla_{,}^{s} + \nabla'\nabla_{,,}^{s} + \dots, \end{aligned}$$

qui se tirent immédiatement, la première de l'équation (12), la seconde des formules (11), (12), et qui se réduisent, quand on efface la lettre s, aux deux suivantes

$$(22) \quad \left\{ \begin{aligned} (\nabla + \nabla_{,} + \nabla_{,,} + \dots)\nabla' &= \nabla\nabla' + \nabla_{,}\nabla' + \nabla_{,,}\nabla' + \dots, \\ \nabla'(\nabla + \nabla_{,} + \nabla_{,,} + \dots) &= \nabla'\nabla + \nabla'\nabla_{,} + \nabla'\nabla_{,,} + \dots. \end{aligned} \right.$$

Observons d'ailleurs qu'une expression de la forme

$$\square + \square_{,} + \square_{,,} + \dots,$$

se réduisant, en dernière analyse, à une somme de produits de caractéristiques simples, n'offre rien de plus général qu'une expression de la forme

$$\nabla + \nabla_{,} + \nabla_{,,} + \dots.$$

Cela posé, comme les produits de caractéristiques simples renfermés dans le développement de l'expression

$$(\square + \square_{,} + \square_{,,} + \dots)(\square' + \square'' + \dots)$$

seront précisément ceux qu'on obtiendra en développant les expressions diverses

$$\begin{matrix} \square\square', & \square_{,}\square', & \square_{,,}\square', & \dots, \\ \square\square'', & \square_{,}\square'', & \square_{,,}\square'', & \dots, \end{matrix}$$

il est clair que la formule (21) entrainera encore la suivante

$$(23) \quad \begin{aligned} (\square + \square_{,} + \square_{,,} + \dots)(\square' + \square'' + \dots) = {} & \square\square' + \square_{,}\square' + \square_{,,}\square' + \dots \\ & + \square\square'' + \square_{,}\square'' + \square_{,,}\square'' + \dots \\ & + \dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{aligned}$$

En conséquence, on pourra énoncer la proposition suivante.

Théorème IV. — *Si l'on multiplie l'une par l'autre deux sommes de caractéristiques différentielles, simples ou composées, le produit de ces deux sommes sera la somme des produits partiels qu'on obtiendra en multipliant successivement les divers termes de la première somme par les divers termes de la seconde. Il se calculera donc de la même manière que si les divers termes compris dans les deux sommes représentaient de véritables quantités.*

Corollaire. — Après s'être servi du théorème précédent pour obtenir le produit de deux sommes de caractéristiques multipliées l'une par l'autre, on peut s'en servir encore pour obtenir des résultats auxquels on parviendrait en multipliant d'abord ce produit par une troisième somme, puis le produit des trois sommes par une quatrième, et ainsi de suite. En opérant de cette manière, on obtiendra successivement diverses formules qui seront toutes fournies par le théorème suivant.

Théorème V. — *Si l'on multiplie l'une par l'autre plusieurs sommes de caractéristiques différentielles, simples ou composées, le produit de ces sommes sera la somme des produits partiels qu'on pourra former en mul-*

tipliant un terme quelconque de la première somme, par un terme quelconque de la seconde, par un terme quelconque de la troisième, etc. Le produit cherché pourra donc se calculer, comme si les divers termes des sommes proposées représentaient de véritables quantités.

Corollaire I. — Si les différentes sommes, étant au nombre de n, devenaient toutes pareilles l'une à l'autre, le théorème V fournirait le développement d'une expression de la forme

$$(\square + \square_{\prime} + \square_{\prime\prime} + \ldots)^n.$$

Si chaque somme renferme deux termes seulement, l'expression dont il s'agit sera réduite à

$$(\square + \square_{\prime})^n,$$

et l'on trouvera

$$(\square + \square_{\prime})^n = \square^n + \frac{n}{1}\square^{n-1}\square_{\prime} + \frac{n(n-1)}{1.2}\square^{n-2}\square_{\prime}^2 + \ldots + \square_{\prime}^n. \tag{24}$$

On peut aisément, de cette dernière formule, déduire, comme on va le voir, diverses formules générales que présentent le calcul des différences finies et le calcul différentiel.

Corollaire I. — Soient s une fonction de x, et Δs l'accroissement de s correspondant à l'accroissement Δx de la variable x. Posons d'ailleurs

$$\square = 1 + \Delta, \tag{25}$$

en sorte qu'on ait

$$\square s = s + \Delta s. \tag{26}$$

La notation

$$\square s$$

représentera évidemment ce que devient s quand on fait croître x de Δx; et par suite les notations

$$\square s, \quad \square^2 s, \quad \square^3 s, \quad \ldots$$

représenteront ce que devient s quand on fait croître une ou plusieurs fois de suite x de Δx, c'est-à-dire, en d'autres termes, quand on attribue à x les accroissements

$$\Delta x, \quad 2\Delta x, \quad 3\Delta x, \quad \ldots.$$

Donc, en général, $\square^n s$ sera ce que devient s quand on fait croître x de $n\Delta x$. D'ailleurs, on tirera de la formule (25) non seulement

$$\Delta = \square - 1, \tag{27}$$

mais aussi

$$\square^n = (1 + \Delta)^n, \qquad \Delta^n = (\square - 1)^n,$$

et par suite, eu égard à la formule (24),

$$\square^n = 1 + \frac{n}{1}\Delta + \frac{n(n-1)}{2}\Delta^2 + \ldots + \Delta^n, \tag{28}$$

$$\Delta^n = \square^n - \frac{n}{1}\square^{n-1} + \frac{n(n-1)}{1.2}\square^{n-2} + \ldots \pm 1. \tag{29}$$

On aura donc

$$\square^n s = s + \frac{n}{1}\Delta s + \frac{n(n-1)}{1.2}\Delta^2 s + \ldots + \Delta^n s \tag{30}$$

et

$$\Delta^n s = \square^n s - \frac{n}{1}\square^{n-1}s + \frac{n(n-1)}{1.2}\square^{n-2}s - \ldots \pm s. \tag{31}$$

Corollaire II. — Supposons maintenant que s représente une fonction de deux variables x, y. On aura généralement

$$ds = d_x s + d_y s, \tag{32}$$

ou, ce qui revient au même,

$$ds = (d_x + d_y)s.$$

En effaçant s dans les deux membres de cette dernière formule, on trouvera

$$d = d_x + d_y, \tag{33}$$

et par suite

$$d^n = (d_x + d_y)^n;$$

puis on conclura, eu égard à la formule (24),

$$d^n = d_x^n + \frac{n}{1} d_x^{n-1} d_y + \frac{n(n-1)}{1.2} d_x^{n-2} d_y^2 + \ldots + d_y^n. \tag{34}$$

On aura donc généralement

$$d^n s = d_x^n s + \frac{n}{1} d_x^{n-1} d_y s + \frac{n(n-1)}{1.2} d_x^{n-2} d_y^2 s + \ldots + d_y^n s. \tag{35}$$

Corollaire III. — Supposons

$$s = uv, \tag{36}$$

u et v étant des fonctions quelconques d'autres variables qui peuvent n'être que les mêmes dans u et dans v. Désignons, à l'aide de la caractéristique $d_{\prime}$, une différentiation partielle opérée comme si u seul variait, et à l'aide de la caractéristique $d_{\prime\prime}$ une différentiation partielle opérée comme si v seul variait. On aura

$$ds = d_{\prime} s + d_{\prime\prime} s, \tag{37}$$

ou, ce qui revient au même,

$$ds = (d_{\prime} + d_{\prime\prime}) s.$$

En effaçant s dans les deux membres de cette dernière formule, on trouvera

$$d = d_{\prime} + d_{\prime\prime},$$

et par suite

$$d^n = (d_{\prime} + d_{\prime\prime})^n,$$

puis on en conclura, eu égard à la formule (24),

$$d^n = d_{\prime}^n + \frac{n}{1} d_{\prime}^{n-1} d_{\prime\prime} + \frac{n(n-1)}{1.2} d_{\prime}^{n-2} d_{\prime\prime}^2 + \ldots + d_{\prime\prime}^n. \tag{38}$$

On aura donc généralement

$$d^n s = d_{\prime}^n s + \frac{n}{1} d_{\prime}^{n-1} d_{\prime\prime} s + \frac{n(n-1)}{1.2} d_{\prime}^{n-2} d_{\prime\prime}^2 s + \ldots + d_{\prime\prime}^n s. \tag{39}$$

D'autre part, en faisant varier dans s le seul facteur u, on tirera suc-

cessivement de la formule (36)

$$d_{\prime} s = v\, d_{\prime} u, \qquad d_{\prime}^2 s = v\, d_{\prime}^2 u, \qquad d_{\prime}^3 s = v\, d_{\prime}^3 u, \qquad \ldots,$$

et généralement

$$d_{\prime}^l s = v\, d_{\prime}^l u, \tag{40}$$

l étant un nombre entier quelconque ; puis, en faisant varier le seul facteur v, on tirera successivement de la formule (40)

$$d_{\prime\prime} d_{\prime}^l s = d_{\prime\prime} v . d_{\prime}^l u, \qquad d_{\prime\prime}^2 d_{\prime}^l s = d_{\prime\prime}^2 v . d_{\prime}^l u, \qquad \ldots,$$

et généralement

$$d_{\prime\prime}^m d_{\prime}^l s = d_{\prime\prime}^m v\, d_{\prime}^l u. \tag{41}$$

Il y a plus, comme on aura identiquement

$$d_{\prime\prime}^m v = d^m v, \qquad d_{\prime}^l u = d^l u,$$

la formule (41) pourra être réduite à

$$d_{\prime\prime}^m d_{\prime}^l s = d^m v\, d^l u. \tag{42}$$

Donc, en remplaçant s par le produit uv dans l'équation (39), on trouvera

$$d^n(uv) = v\, d^n u + \frac{n}{1} dv\, d^{n-1} u + \frac{n(n-1)}{1.2} d^2 v\, d^{n-2} u + \ldots + u\, d^n v. \tag{43}$$

La démonstration que nous venons de donner de la formule (43) semble, au premier abord, n'être applicable qu'au cas où les variables desquelles dépend le facteur u sont distinctes des variables desquelles dépend le facteur v ; en sorte que les caractéristiques $d_{\prime}$, $d_{\prime\prime}$ indiquent des différentiations relatives à deux groupes de variables distincts l'un de l'autre. Toutefois la formule (43) s'étend au cas même où plusieurs variables

$$x, \quad y, \quad z, \quad \ldots$$

seraient communes aux deux groupes ; et, pour rendre notre démonstration applicable à ce dernier cas, il suffit de concevoir que l'on range, parmi les opérations indiquées à l'aide de la caractéristique $d_{\prime}$, les différentiations relatives aux $x, y, z, \ldots$ qui se trouvent compris dans le facteur u ou qui en proviennent, et, parmi les opérations indiquées à l'aide de la caractéristique $d_{\prime\prime}$, les différentiations relatives aux $x, y, z, \ldots$ qui se trouvent compris dans le facteur v ou qui en proviennent.

Dans le cas particulier où u est fonction d'une seule variable x, et v fonction d'une seule variable y, l'équation (43) peut être déduite directement de l'équation (35).

MÉMOIRE

SUR LE

CALCUL DES VARIATIONS.

Préliminaires. — *Considérations générales.*

Les premiers géomètres qui se sont occupés des problèmes dont les solutions se tirent aujourd'hui du calcul des variations, ont été conduits à examiner ce qui se passe quand on fait varier infiniment peu, non seulement diverses quantités, et les fonctions qui en dépendent, mais encore les formes mêmes de ces fonctions. Ainsi, en particulier, dans le bel Ouvrage qui a pour titre : *Methodus inveniendi lineas curvas maximi minimive proprietate gaudentes*, Euler a considéré les accroissements infiniment petits que prennent diverses fonctions d'une abscisse variable, par exemple, l'ordonnée d'une courbe et les dérivées de cette ordonnée, quand le point avec lequel coïncide l'extrémité de l'ordonnée se trouve remplacé, non par un second point de la même courbe, très voisin du premier et correspondant à une nouvelle abscisse, mais par un point correspondant à la même abscisse et situé sur une seconde courbe très voisine de la première. Ces accroissements infiniment petits d'une nouvelle espèce, distincts, sous un certain point de vue, de ceux que Leibnitz avait désignés sous le nom de *différentielles*, devaient être naturellement considérés comme le résultat d'un nouveau genre de différentiation. Aussi ont-ils été nommés par Euler des différentielles d'un nouveau genre (*Methodus*, p. 27). Euler a d'ailleurs reconnu combien il importait de ne pas représenter simultanément, à l'aide de la même notation, les nouvelles différentielles et les différentielles ordinaires, avec lesquelles on pourrait aisément les confondre; et, pour éviter cette confusion, il a imaginé d'exprimer les différentielles ordinaires, considérées comme des accroissements infiniment petits, à l'aide de valeurs consécutives des variables et des fonctions. Il eût été plus simple de représenter, à l'aide d'une nouvelle notation, les nouvelles différentielles; et, si Euler eût pris ce dernier parti, il serait immédiatement arrivé au *calcul des variations* de notre illustre Lagrange.

En réalité, les variations de Lagrange étaient primitivement ce que deviennent les différentielles de Leibnitz, c'est-à-dire les accroissements infiniment petits des variables et des fonctions, quand on suppose ces accroissements produits non seulement par le changement de valeur des variables, mais aussi par le changement de forme des fonctions diverses. Mais, après avoir cherché à écarter du calcul différentiel la notion des quantités infiniment petites, Lagrange ne pouvait vouloir la conserver dans le calcul des variations. Aussi, dans la *Théorie des fonctions analytiques*, les variations se présentent-elles, non plus comme des accroissements petits simultanément attribués aux variables ou fonctions proposées, mais comme des dérivées relatives à une nouvelle variable généralement distincte de toutes les autres.

Euler, qui a lui-même accueilli avec empressement le calcul des variations, considérait les variations non comme des dérivées, mais comme des différentielles relatives à une nouvelle variable indépendante qui peut être censée représenter le temps.

Sans exclure ce point de vue, nous donnerons pour les variations une définition analogue à celle que nous avons donnée pour les différentielles dans le précédent Mémoire; et, *lorsque plusieurs quantités et fonctions pourront changer simultanément de valeurs et de forme, leurs variations seront*, pour nous, *de nouvelles variables et de nouvelles fonctions dont les rapports seront égaux aux limites des rapports entre les accroissements infiniment petits des variables et des fonctions proposées.*

Cette définition, que j'ai proposée aux géomètres dans le Mémoire *sur les méthodes analytiques* (voir le Recueil publié à Milan, et intitulé : *Bibliotheca italiana*), peut être simplifiée par la considération d'une variable dont la variation serait l'unité, et être ainsi réduite aux termes suivants :

La variation d'une variable ou fonction quelconque est la limite du rapport entre les accroissements infiniment petits que peuvent acquérir simultanément la variable ou la fonction dont il s'agit et une variable nouvelle dont la variation serait prise pour unité.

En vertu de cette dernière définition, les variations se réduisent à des différentielles prises par rapport à une nouvelle variable, comme le voulait Euler. Seulement ces différentielles, au lieu d'être ou des quantités infiniment petites, ou de véritables zéros, offrent des valeurs finies.

I. — *Définitions. Notations.*

Comme je l'ai rappelé dans le précédent Mémoire, les *différentielles* de plusieurs quantités variables dépendantes ou indépendantes les unes des autres peuvent être définies *de nouvelles quantités dont les rapports sont égaux aux limites des rapports entre les accroissements simultanés et infiniment petits des variables proposées.*

On peut donner, pour les variations des quantités et des fonctions, une définition analogue, comprise dans les termes suivants :

Lorsque plusieurs quantités et fonctions changent simultanément de valeurs et de formes, leurs variations se réduisent à de nouvelles quantités et à de nouvelles fonctions dont les rapports sont égaux aux limites des rapports entre les accroissements infiniment petits et correspondants des quantités et des fonctions proposées.

Ces définitions, que j'ai données dans le Mémoire *sur les méthodes analytiques*, mettent en évidence l'analogie qui existe entre le calcul différentiel et le calcul des variations. Lorsque les formes des fonctions proposées ne varient pas, les variations des diverses quantités que l'on considère se réduisent simplement à leurs différentielles.

Pour étendre les définitions précédentes au cas où les variables deviendraient imaginaires, il suffirait d'y remplacer le mot *quantité* par ceux-ci *expressions imaginaires*, attendu qu'alors les variations elles-mêmes cesseraient généralement d'être réelles.

Nous indiquerons, suivant l'usage, les accroissements simultanés, finis ou infiniment petits, des variables ou fonctions proposées, à l'aide de la caractéristique Δ, et leurs variations à l'aide de la caractéristique δ. En conséquence, si l'on nomme

$$x, \quad y, \quad z, \quad \ldots, \quad u, \quad v, \quad w, \quad \ldots$$

ces variables ou fonctions, leurs accroissements simultanés, finis ou infiniment petits, seront

$$\Delta x, \quad \Delta y, \quad \Delta z, \quad \ldots, \quad \Delta u, \quad \Delta v, \quad \Delta w, \quad \ldots,$$

tandis que les notations

$$\delta x, \quad \delta y, \quad \delta z, \quad \ldots, \quad \delta u, \quad \delta v, \quad \delta w, \quad \ldots$$

représenteront leurs variations, c'est-à-dire des variables ou des fonctions nouvelles dont les rapports seront égaux aux limites des rapports entre les accroissements infiniment petits

$$\Delta x, \quad \Delta y, \quad \Delta z, \quad \ldots, \quad \Delta u, \quad \Delta v, \quad \Delta w, \quad \ldots.$$

On peut concevoir que les accroissements infiniment petits

$$\Delta x, \quad \Delta y, \quad \Delta z, \quad \ldots, \quad \Delta u, \quad \Delta v, \quad \Delta w, \quad \ldots,$$

des variables ou fonctions proposées

$$x, \quad y, \quad z, \quad \ldots, \quad u, \quad v, \quad w, \quad \ldots,$$

correspondent à l'accroissement infiniment petit Δt d'une seule variable indépendante t, comprise ou non comprise parmi les variables données, et qui sera censée, si l'on veut, représenter le temps. Cela posé,

soit s une variable ou fonction distincte de t. En vertu des définitions adoptées, le rapport entre les variations δs, δt sera la limite du rapport entre les accroissements infiniment petits Δs, Δt, en sorte qu'on aura

$$\frac{\delta s}{\delta t} = \lim \frac{\Delta s}{\Delta t},$$

et, par suite,

$$\delta s = \delta t \lim \frac{\Delta s}{\Delta t}.$$

Il importe d'observer que les variations de plusieurs quantités ne se trouvent pas complètement déterminées par la définition que nous en avons donnée. Cette définition, lors même que toutes les quantités proposées se réduisent à des fonctions d'une seule variable indépendante, fournit seulement le rapport entre la variation δs d'une variable ou fonction quelconque s, et la variation δt de la variable indépendante t. Mais cette dernière variation δt demeure entièrement arbitraire.

Lorsque l'on compare, comme on vient de le faire, les variations de toutes les variables ou fonctions proposées à la variation d'une seule variable indépendante t, un moyen de simplifier les calculs est de réduire cette variation qui reste arbitraire à l'unité. Ajoutons que, si l'on pose

$$\Delta t = \iota,$$

rien n'empêchera de considérer l'accroissement ι de la variable indépendante t comme une nouvelle variable indépendante. C'est ce que nous ferons désormais, en sorte que l'accroissement ι sera supposé indépendant de la variable t et de toutes les autres. D'ailleurs, pour abréger le discours, nous désignerons la variable indépendante t, de laquelle les valeurs des autres variables ainsi que les formes des diverses fonctions seront censées dépendre, et dont la variation sera réduite à l'unité, sous le nom de *variable primitive*. Cela posé, *la variation d'une variable quelconque s ne sera autre chose que la limite du rapport entre les accroissements infiniment petits Δs et ι de cette variable et de* *la variable primitive*. Effectivement, de l'équation

$$\delta s = \delta t \lim \frac{\Delta s}{\Delta t},$$

jointe aux formules

$$\delta t = 1, \qquad \Delta t = \iota,$$

on tirera immédiatement

$$(1) \qquad \delta s = \lim \frac{\Delta s}{\iota}.$$

Concevons, maintenant, que la quantité s dépende de plusieurs variables ou fonctions

$$x, \ y, \ z, \ \ldots, \ u, \ v, \ w, \ \ldots.$$

On pourra partager ces variables ou fonctions en divers groupes ou systèmes, et chercher l'accroissement que s reçoit quand on attribue des accroissements infiniment petits

$$\Delta x, \ \Delta y, \ \Delta z, \ \ldots, \ \Delta u, \ \Delta v, \ \Delta w, \ \ldots$$

à toutes les variables

$$x, \ y, \ z, \ \ldots, \ u, \ v, \ w, \ \ldots,$$

ou seulement aux variables comprises dans le premier groupe, dans le second, dans le troisième,.... En opérant ainsi, on obtiendra, dans le premier cas, l'*accroissement total* de s que nous continuerons à exprimer par la notation

$$\Delta s,$$

et, dans le second cas, un *accroissement partiel* de s, qui correspondra au changement de valeur ou de forme des variables ou fonctions comprises dans un seul groupe, et qui sera représenté par l'une des notations

$$\Delta_{\prime} s, \ \Delta_{\prime\prime} s, \ \Delta_{\prime\prime\prime} s, \ \ldots.$$

A l'accroissement total Δs correspondra la *variation totale* δs déterminée par la formule (1); et de même, aux accroissements partiels

$$\Delta_{\prime} s, \ \Delta_{\prime\prime} s, \ \Delta_{\prime\prime\prime} s, \ \ldots$$

correspondront des *variations partielles*

$$\delta_{\prime} s, \ \delta_{\prime\prime} s, \ \delta_{\prime\prime\prime} s, \ \ldots,$$

déterminées par des équations de la forme

$$(2) \qquad \delta_{\prime} s = \lim \frac{\Delta_{\prime} s}{\iota}.$$

Si la quantité s était une fonction de

$$x, \ y, \ z, \ \ldots, \ u, \ v, \ w, \ \ldots,$$

qui pût changer de forme, alors, dans la recherche de l'accroissement total Δs et de la variation totale δs, il faudrait tenir compte du changement de forme dont il s'agit. En ayant égard seulement à ce changement de forme, et laissant d'ailleurs invariables les quantités

$$x, \ y, \ z, \ \ldots, \ u, \ v, \ w, \ \ldots,$$

on obtiendrait non plus la variation totale de s, mais une variation partielle qui devrait naturellement s'appeler la *variation propre* de la fonction s.

Pareillement, si des fonctions de diverses variables $x, y, z, \ldots$ sont représentées par $u, v, w, \ldots$ et peuvent changer de forme, les *variations propres* de ces fonctions ne seront autre chose que leurs variations partielles correspondantes, non pas au changement de valeur d'une ou de plusieurs variables, mais seulement au changement de forme dont il s'agit.

Lorsque, dans un calcul, diverses variables seront fonctions les unes des autres, nous appellerons variables simples ou du premier ordre celles dont toutes les autres seront des fonctions. Nous appellerons, au contraire, variables du second ordre celles qui s'exprimeront en fonction des variables du premier ordre, variables du troisième ordre celles qui s'exprimeront en fonction des variables du second ordre, et ainsi de suite. Cela posé, il est clair que les variations propres des variables simples se confondront toujours avec leurs variations totales.

Lorsqu'une fonction s dépendra de variables de divers ordres, représentées chacune par une fonction qui pourra changer de forme, nous désignerons à l'aide de la caractéristique $\mathcal{I}$, et par la notation

$$\mathcal{I}s,$$

ou la variation propre de la quantité s, si cette quantité, considérée comme fonction des autres variables, peut elle-même changer de forme; ou, dans le cas contraire, la variation partielle de s correspondante aux variations propres de quelques-unes des autres variables, savoir, de celles qui seront de l'ordre le plus élevé. Si l'on désigne par

$$x, \quad y, \quad z, \quad \ldots, \quad u, \quad v, \quad w, \quad \ldots$$

les variables de divers ordres, desquelles dépendra la quantité s, les variations propres de ces variables seront elles-mêmes représentées, à l'aide de la caractéristique $\mathcal{I}$, par les notations

$$\mathcal{I}x, \quad \mathcal{I}y, \quad \mathcal{I}z, \quad \ldots, \quad \mathcal{I}u, \quad \mathcal{I}v, \quad \mathcal{I}w, \quad \ldots;$$

et, si la variable x se réduit à une variable simple, on aura identiquement

$$\partial x = \mathcal{I}x.$$

Concevons à présent que, la quantité s étant une quantité qui dépende de plusieurs variables et de plusieurs fonctions, on nomme

$$\Delta_{\prime}s, \quad \Delta_{\prime\prime}s, \quad \Delta_{\prime\prime\prime}s, \quad \ldots$$

des *accroissements partiels* de s, dont chacun corresponde aux accroissements infiniment petits que reçoivent quelques-unes de ces fonctions, lorsqu'on change infiniment peu leur forme sans changer la valeur des variables qu'elles renferment. Aux accroissements partiels

$$\Delta_{\prime}s, \quad \Delta_{\prime\prime}s, \quad \Delta_{\prime\prime\prime}s, \quad \ldots$$

correspondront encore des *variations partielles* de s, qui pourront encore être représentées par

$$\partial_{\prime}s, \quad \partial_{\prime\prime}s, \quad \partial_{\prime\prime\prime}s, \quad \ldots$$

et qui se trouveront encore déterminées par des formules semblables à l'équation (2).

Après avoir partagé en plusieurs groupes les variables ou fonctions desquelles dépend la quantité s, on peut calculer non seulement ses *accroissements partiels du premier ordre*

$$\Delta_{\prime}s, \quad \Delta_{\prime\prime}s, \quad \Delta_{\prime\prime\prime}s, \quad \ldots,$$

correspondants au changement de valeur des variables ou au changement de forme des fonctions comprises dans les divers groupes, mais encore ses *accroissements partiels du second ordre*, par exemple,

$$\Delta_{\prime}\Delta_{\prime\prime}s, \quad \Delta_{\prime}\Delta_{\prime\prime\prime}s, \quad \ldots, \quad \Delta_{\prime\prime}\Delta_{\prime\prime\prime}s, \quad \ldots;$$

ses *accroissements partiels du troisième ordre*, par exemple,

$$\Delta_{\prime}\Delta_{\prime\prime}\Delta_{\prime\prime\prime}s, \quad \ldots,$$

etc. A ces *accroissements partiels des divers ordres* correspondront des *variations partielles des divers ordres*. Ainsi, en particulier, outre les *variations partielles du premier ordre* représentées par les notations

$$\partial_{\prime}s, \quad \partial_{\prime\prime}s, \quad \partial_{\prime\prime\prime}s, \quad \ldots,$$

on pourra obtenir des *variations partielles du second ordre* représentées par les notations

$$\partial_{\prime}\partial_{\prime\prime}s, \quad \partial_{\prime}\partial_{\prime\prime\prime}s, \quad \ldots, \quad \partial_{\prime\prime}\partial_{\prime\prime\prime}s, \quad \ldots,$$

des *variations partielles du troisième ordre* représentées par les notations

$$\partial_{\prime}\partial_{\prime\prime}\partial_{\prime\prime\prime}s, \quad \ldots.$$

Il y a plus, outre les accroissements et variations de divers ordres que produisent plusieurs opérations successivement effectuées, mais dissemblables entre elles, on pourra considérer des accroissements totaux ou partiels, et des variations totales ou partielles, qui seraient les résultats d'opérations dont plusieurs seraient semblables les unes aux autres. Tels seraient, par exemple, les accroissements totaux ou partiels exprimés par les notations

$$\Delta\Delta s,\quad \Delta\Delta\Delta s,\quad \Delta\Delta\Delta\Delta s,\quad \ldots,$$
$$\Delta_{,}\Delta_{,}s,\quad \Delta_{,}\Delta_{,}\Delta_{,}s,\quad \ldots,\quad \Delta_{,,}\Delta_{,,}\Delta_{,}s,\quad \ldots,$$

et les variations totales ou partielles exprimées par les notations

$$\delta\delta s,\quad \delta\delta\delta s,\quad \delta\delta\delta\delta s,\quad \ldots$$
$$\delta_{,}\delta_{,}s,\quad \delta_{,}\delta_{,}\delta_{,}s,\quad \delta_{,,}\delta_{,,}\delta_{,}s,\quad \ldots.$$

Pour plus de commodité, on est convenu d'écrire

$$\Delta^2,\quad \Delta^3,\quad \ldots,\quad \text{au lieu de}\quad \Delta\Delta,\quad \Delta\Delta\Delta,\quad \ldots;$$
$$\Delta_{,}^2,\quad \Delta_{,}^3,\quad \ldots,\quad \text{au lieu de}\quad \Delta_{,}\Delta_{,},\quad \Delta_{,}\Delta_{,}\Delta_{,},\quad \ldots;$$

et pareillement

$$\delta_{,}^2,\quad \delta^3,\quad \ldots,\quad \text{au lieu de}\quad \delta_{,}\delta_{,},\quad \delta_{,}\delta_{,}\delta_{,},\quad \ldots,$$

comme si les notations

$$\Delta\Delta,\quad \Delta\Delta\Delta,\quad \ldots,\quad \Delta_{,}\Delta_{,},\quad \Delta_{,}\Delta_{,}\Delta_{,},\quad \ldots,$$
$$\delta\delta,\quad \delta\delta\delta,\quad \ldots,\quad \delta_{,}\delta_{,},\quad \delta_{,}\delta_{,}\delta_{,},\quad \ldots$$

représentaient de véritables produits. Eu égard à cette convention, les variations totales des divers ordres de la fonction s se trouvent représentées par les notations

$$\delta s,\quad \delta^2 s,\quad \delta^3 s,\quad \ldots,$$

tandis que les variations partielles

$$\delta_{,}\delta_{,}s,\quad \delta_{,}\delta_{,}\delta_{,}s,\quad \ldots,\quad \delta_{,,}\delta_{,,}\delta_{,},\quad \ldots$$

se trouvent représentées par les notations

$$\delta_{,}^2 s,\quad \delta_{,}^3 s,\quad \ldots,\quad \delta_{,,}^2\delta_{,}s,\quad \ldots.$$

En terminant ce paragraphe, nous ferons remarquer la connexion intime qui existe, en vertu des principes mêmes que nous avons établis, entre le calcul des variations et le calcul différentiel.

Nous avons déjà observé que les variations totales de quantités variables peuvent être censées se réduire à leurs différentielles, dans

le cas où les fonctions comprises parmi ces quantités ne changent pas de forme.

J'ajoute que, dans tous les cas, les variations totales des quantités que l'on considère peuvent être regardées comme des dérivées ou des différentielles prises par rapport à la variable primitive t, dont l'accroissement Δt est censé déterminer les changements de valeur ou de forme des variables, ou des fonctions proposées. En effet, s étant l'une quelconque de ces variables ou fonctions, nommons, comme ci-dessus,

$$\Delta s$$

l'accroissement total de s correspondant à l'accroissement $\iota = \Delta t$ de la variable primitive t; et posons, pour abréger,

$$S = s + \Delta s.$$

Les deux quantités

$$s,\quad S$$

pourront être considérées comme représentant les deux valeurs particulières que prendra une certaine fonction s de la variable t, pour une valeur donnée de cette variable, et pour la même valeur augmentée de $\iota = \Delta t$. Par suite, la limite vers laquelle convergera le rapport

$$\frac{\Delta s}{\iota},$$

tandis que Δt s'approchera indéfiniment de la limite zéro, ne sera autre chose que la valeur particulière de la dérivée

$$\mathrm{D}_t s,$$

correspondante à la valeur donnée de t. Donc, en vertu de l'équation (1), la variation totale δs se confondra simplement avec la dérivée

$$\mathrm{D}_t s,$$

ou plutôt avec la valeur qu'acquerra cette dérivée pour une valeur particulière de t.

D'ailleurs, t étant, par hypothèse, la variable primitive, la différentielle dt se réduira simplement à l'unité; en sorte que la fonction dérivée

$$D_t s$$

ne différera pas de la différentielle partielle

$$d_t s$$

prise par rapport à t.

Il est juste d'observer que, dans la vingt-deuxième Leçon du *Calcul des fonctions*, Lagrange avait déjà regardé les variations de quantités variables comme représentant des dérivées prises par rapport à une nouvelle variable, distincte de toutes celles que l'on considérait d'abord.

II. — *Sur la continuité des fonctions et de leurs variations. Propriétés générales des variations de plusieurs variables ou fonctions liées entre elles par des équations connues.*

Supposer, comme on le fait dans le calcul des variations, qu'à des accroissements infiniment petits des variables correspondent des accroissements infiniment petits des fonctions, c'est supposer implicitement que les fonctions restent continues. On ne doit donc pas être étonné de rencontrer, dans le calcul des variations, des définitions, des formules et des théorèmes qui cessent d'être applicables ou d'offrir un sens précis et déterminé, quand les fonctions deviennent discontinues. On ne doit pas être étonné de voir, dans des cas semblables, la formule (1) du § I fournir, pour la variation δs, une valeur infinie ou même indéterminée.

Sans perdre de vue ces observations, nous allons maintenant faire voir avec quelle facilité on peut, des principes établis dans le premier paragraphe, déduire les propriétés générales des variations de plusieurs variables ou fonctions liées entre elles par des relations connues.

Soit s une variable ou fonction quelconque; soient encore

$$\Delta s \quad \text{et} \quad \iota$$

les accroissements infiniment petits et simultanés de la variable ou fonction s, et de la variable primitive, dont la variation est l'unité. La variation de s ou δs sera, comme on l'a vu dans le § I, déterminée par la formule

$$\delta s = \lim \frac{\Delta s}{\iota}. \tag{1}$$

Cela posé, concevons d'abord que la variable ou fonction s soit la somme de plusieurs autres variables ou fonctions

$$u, \quad v, \quad w,$$

en sorte qu'on ait

$$s = u + v + w + \ldots. \tag{2}$$

Quand on attribuera aux variables ou fonctions

$$u, \quad v, \quad w, \quad \ldots$$

les accroissements infiniment petits

$$\Delta u, \quad \Delta v, \quad \Delta w, \quad \ldots,$$

s croîtra évidemment d'une quantité représentée par la somme de ces accroissements. On aura donc

$$\Delta s = \Delta u + \Delta v + \Delta w + \ldots;$$

puis, en divisant par ι chaque membre de la dernière équation, et faisant ensuite converger ι vers la limite zéro, on trouvera non seulement

$$\frac{\Delta s}{\iota} = \frac{\Delta u}{\iota} + \frac{\Delta v}{\iota} + \frac{\Delta w}{\iota} + \ldots,$$

mais encore, eu égard à la formule (1),

$$\delta s = \delta u + \delta v + \delta w + \ldots \tag{3}$$

En d'autres termes, l'équation

$$\Delta(u + v + w + \ldots) = \Delta u + \Delta v + \Delta w + \ldots \tag{4}$$

entrainera la formule

$$(5)\qquad \delta(u+v+w+\ldots) = \delta u + \delta v + \delta w + \ldots.$$

On peut donc énoncer la proposition suivante.

Théorème I. — *La variation de la somme de plusieurs fonctions ou variables se réduit à la somme de leurs variations.*

Corollaire. — Si l'on suppose les fonctions $u, v, \ldots$ réduites à deux seulement, la formule (5) deviendra

$$\delta(u+v) = \delta u + \delta v.$$

Or il résulte de cette dernière formule que, si une fonction donnée u reçoit un accroissement quelconque v, l'accroissement correspondant de la variation δu sera représenté par δv. En d'autres termes, *l'accroissement de la variation sera la variation de l'accroissement.*

Supposons maintenant que deux variables ou fonctions r, s soient liées entre elles par l'équation

$$(6)\qquad s = ar,$$

a désignant une quantité constante. Quand on fera croître r de Δr, le produit ar croîtra d'une quantité représentée par le produit $a\Delta r$. Donc, en nommant Δr, Δs les accroissements infiniment petits et simultanés des variables ou fonctions r, s, on aura

$$\Delta s = a\,\Delta r.$$

En divisant par ι chaque membre de la dernière équation, et faisant ensuite converger ι vers la limite zéro, on trouvera non seulement

$$\frac{\Delta s}{\iota} = a\frac{\Delta r}{\iota},$$

mais encore, eu égard à la formule (1),

$$(7)\qquad \delta s = a\,\delta r.$$

En d'autres termes, l'équation

$$(8)\qquad \Delta(ar) = a\,\Delta r$$

entrainera la formule

$$(9)\qquad \delta(ar) = a\,\delta r.$$

On peut donc énoncer la proposition suivante.

Théorème II. — *Lorsqu'on multiplie une fonction par un coefficient constant, la variation de cette fonction se trouve à son tour multipliée par ce même coefficient.*

Supposons encore la fonction s liée à d'autres fonctions $u, v, w, \ldots$ par une équation linéaire, de sorte qu'on ait

$$(10)\qquad s = au + bv + cw + \ldots,$$

$a, b, c, \ldots$ désignant des coefficients constants; alors, en raisonnant toujours de la même manière, on obtiendra la formule

$$(11)\qquad \delta s = a\,\delta u + b\,\delta v + c\,\delta w + \ldots,$$

qui entrainera la suivante

$$(12)\qquad \delta(u+v+w+\ldots) = a\,\delta u + b\,\delta v + c\,\delta w + \ldots,$$

et qui peut se déduire directement des équations (5) et (9).

Supposons enfin que deux variables ou fonctions r, s soient liées entre elles par la formule

$$(13)\qquad s = f(r),$$

$f(r)$ étant une fonction déterminée de r; et représentons par $D_r s$ la dérivée de s prise par rapport à r. On aura

$$(14)\qquad D_r s = \lim\frac{\Delta s}{\Delta r}.$$

D'ailleurs l'équation identique

$$\Delta s = \frac{\Delta s}{\Delta r}\,\Delta r$$

entraînera la suivante

$$\frac{\Delta s}{\iota} = \frac{\Delta s}{\Delta r}\frac{\Delta r}{\iota},$$

de laquelle on conclura, en faisant converger ι vers la limite zéro, et ayant égard à la formule (14),

$$\delta s = \mathrm{D}_r s\, \delta r. \tag{15}$$

En d'autres termes, on aura

$$\delta\, \mathrm{f}(r) = \mathrm{D}_r \mathrm{f}(r)\, \delta r. \tag{16}$$

Les théorèmes et les formules que nous venons d'établir subsistent évidemment dans le cas où l'on se bornerait à changer les valeurs ou les formes de quelques variables ou de quelques fonctions, et où l'on remplacerait en conséquence les accroissements totaux et les variations totales par des accroissements partiels et des variations partielles. Ainsi, en particulier, les formules (4), (8) continueront de subsister, si l'on y remplace la caractéristique Δ, qui indique l'accroissement total d'une fonction, par l'une des caractéristiques

$$\Delta_{\prime},\quad \Delta_{\prime\prime},\quad \Delta_{\prime\prime\prime},\quad \ldots,$$

employées pour indiquer des accroissements partiels relatifs au changement de valeur ou de forme de diverses variables ou fonctions, ou même des variables ou fonctions comprises dans divers groupes. Pareillement, les formules (5), (9), (12) continueront de subsister, si l'on y remplace la caractéristique δ, qui indique la variation totale d'une fonction, par l'une des caractéristiques

$$\delta_{\prime},\quad \delta_{\prime\prime},\quad \delta_{\prime\prime\prime},\quad \ldots,$$

employées pour indiquer les variations partielles.

Si les variations partielles que l'on considère se réduisent à des variations propres; alors à la caractéristique δ on devra substituer, non plus une des caractéristiques $\delta_{\prime}, \delta_{\prime\prime}, \delta_{\prime\prime\prime}, \ldots$, mais la caractéristique $\mathcal{I}$; et en conséquence, à la place des formules (5), (9), (12), on obtiendra les suivantes :

$$\mathcal{I}(u+v+w+\ldots) = \mathcal{I}u + \mathcal{I}v + \mathcal{I}w + \ldots, \tag{17}$$

$$\mathcal{I}(ar) = a\,\mathcal{I}r, \tag{18}$$

$$\mathcal{I}(au+bv+cw+\ldots) = a\,\mathcal{I}u + b\,\mathcal{I}v + c\,\mathcal{I}w + \ldots. \tag{19}$$

Ajoutons qu'en vertu de la convention établie dans le § I (pages 65 et 66), on pourra remplacer à la fois, dans les deux membres de la formule (16), la caractéristique δ par la caractéristique $\mathcal{I}$. On trouvera ainsi, pourvu que $\mathrm{f}(r)$ ne cesse pas de représenter une fonction déterminée de r,

$$\mathcal{I}\,\mathrm{f}(r) = \mathrm{D}_r \mathrm{f}(r)\, \mathcal{I} r. \tag{20}$$

L'équation (1), de laquelle nous avons déduit les formules (5), (9), (12), (16), ..., entraîne encore une multitude d'autres conséquences dignes de remarque, et en particulier celles que nous allons indiquer.

Supposons que la fonction s et sa variation δs restent continues par rapport aux variables dont elles dépendent dans le voisinage du système de valeurs particulières attribuées à ces mêmes variables. Concevons d'ailleurs que l'on fasse coïncider la variable primitive, dont l'accroissement est représenté par ι, et dont la variation est réduite à l'unité, avec l'une des variables données, ou avec une variable nouvelle dont toutes les autres soient des fonctions continues. Non seulement la variation δs sera la limite de laquelle s'approchera indéfiniment le rapport $\frac{\Delta s}{\iota}$, tandis que ι s'approchera indéfiniment de la limite zéro; mais, de plus, pour de très petits modules de ι, ce rapport différera très peu de sa limite, en sorte qu'on pourra énoncer la proposition suivante.

Théorème III. — *Si une fonction s et sa variation δs restent continues, par rapport aux variables dont elles dépendent, dans le voisinage du système de valeurs attribuées à ces variables; si d'ailleurs on fait coïncider la variable primitive, ou avec l'une de ces variables, ou avec une variable* *nouvelle dont toutes les autres soient fonctions continues; alors, pour des valeurs infiniment petites attribuées à l'accroissement* ι *de la variable primitive, la différence entre le rapport* $\frac{\Delta s}{\iota}$ *et la variation* δs *sera infiniment petite.*

Corollaire I. — Le théorème III s'étend au cas même où l'accroissement total Δs et la variation totale δs seraient remplacés par un accroissement partiel

$$\Delta_{\prime} s, \quad \text{ou} \quad \Delta_{\prime\prime} s, \quad \text{ou} \quad \Delta_{\prime\prime\prime} s, \quad \ldots$$

et par la variation correspondante

$$\delta_{\prime} s, \quad \text{ou} \quad \delta_{\prime\prime} s, \quad \text{ou} \quad \delta_{\prime\prime\prime} s, \quad \ldots.$$

Corollaire II. — Concevons à présent que les variables et fonctions diverses, desquelles dépend la fonction s, soient partagées en deux groupes. Indiquons à l'aide de la caractéristique Δ l'accroissement total de la fonction s ou d'une fonction de même nature, et à l'aide des caractéristiques $\Delta_{\prime}$ ou $\Delta_{\prime\prime}$ les accroissements partiels de la même fonction correspondants à des changements infiniment petits de valeur ou de forme des variables ou fonctions comprises dans un seul groupe. Soit, en conséquence, $\Delta_{\prime} s$ ou $\Delta_{\prime\prime} s$ l'accroissement infiniment petit de s qui correspond à des changements de valeur ou de forme des variables ou fonctions comprises dans le premier ou dans le second groupe. Soit, au contraire, Δs l'accroissement total de s. Enfin, posons

$$s_{\prime} = s + \Delta_{\prime} s \quad \text{et} \quad s_{\prime\prime} = s_{\prime} + \Delta_{\prime\prime} s_{\prime}. \tag{21}$$

$s_{\prime\prime}$ sera évidemment ce que devient s quand on change à la fois les valeurs de toutes les variables et les formes de toutes les fonctions. On aura donc

$$s_{\prime\prime} = s + \Delta s.$$

D'ailleurs on tirera des formes (21)

$$s_{\prime\prime} = s_{\prime} + \Delta_{\prime\prime} s_{\prime} = s_{\prime} + \Delta_{\prime} s + \Delta_{\prime\prime} s_{\prime}, \tag{22}$$

par conséquent

$$s_{\prime\prime} - s = \Delta_{\prime} s + \Delta_{\prime\prime} s_{\prime};$$

et, comme la formule (22) donnera

$$\Delta s = s_{\prime\prime} - s,$$

on trouvera définitivement

$$\Delta s = \Delta_{\prime} s + \Delta_{\prime\prime} s_{\prime}. \tag{23}$$

En divisant par ι les deux membres de cette dernière équation, on aura

$$\frac{\Delta s}{\iota} = \frac{\Delta_{\prime} s}{\iota} + \frac{\Delta_{\prime\prime} s_{\prime}}{\iota}.$$

Soient maintenant

$$\delta_{\prime} s, \quad \delta_{\prime\prime} s$$

les variations partielles de la fonction s correspondantes aux accroissements partiels

$$\Delta_{\prime} s, \quad \Delta_{\prime\prime} s;$$

et supposons que

$$s, \quad \delta_{\prime} s, \quad \delta_{\prime\prime} s$$

soient des fonctions continues des diverses variables, dans le voisinage du système des valeurs attribuées à ces variables mêmes. Alors, pour des valeurs infiniment petites de ι, en vertu du corollaire I, le rapport $\frac{\Delta_{\prime} s}{\iota}$ différera infiniment peu de $\delta_{\prime} s$, et le rapport $\frac{\Delta_{\prime\prime} s_{\prime}}{\iota}$ de $\delta_{\prime\prime} s_{\prime}$. Mais, d'autre part, à l'accroissement infiniment petit

$$s_{\prime} - s = \Delta_{\prime} s$$

de la fonction s correspondra l'accroissement

$$\delta_{\prime\prime} s_{\prime} - \delta_{\prime\prime} s = \Delta_{\prime} \delta_{\prime\prime} s$$

de la variation $\delta_{\prime\prime} s$, et ce dernier accroissement sera encore infiniment petit, puis $\delta_{\prime\prime} s$ sera, par hypothèse, fonction continue des diverses variables. Donc $\delta_{\prime\prime} s_{\prime}$ différera infiniment peu de $\delta_{\prime\prime} s$; et, par suite, le rapport $\frac{\Delta_{\prime\prime} s_{\prime}}{\iota}$ différera infiniment peu non seulement de $\delta_{\prime\prime} s_{\prime}$, mais aussi de $\delta_{\prime\prime} s$. Donc, dans l'hypothèse admise, si l'on fait converger ι vers la limite zéro, les rapports

$$\frac{\Delta_{\prime} s}{\iota}, \quad \frac{\Delta_{\prime\prime} s_{\prime}}{\iota}$$

convergeront respectivement vers les limites

$$\delta_{\prime} s, \quad \delta_{\prime\prime} s;$$

et, par suite, la formule

$$\frac{\Delta s}{i} = \frac{\Delta_{\prime} s}{i} + \frac{\Delta_{\prime\prime} s_{\prime}}{i}$$

entraînera celle-ci

$$\delta s = \delta_{\prime} s + \delta_{\prime\prime} s.$$

En conséquence, on peut énoncer la proposition suivante.

THÉORÈME IV. — *Soit s une fonction dépendante de variables et fonctions diverses que nous supposerons partagées en deux groupes. Soient, de plus,*

$$\delta_{\prime} s$$

la variation partielle de s correspondante au changement de valeur ou de forme des variables ou des fonctions comprises dans le premier groupe;

$$\delta_{\prime\prime} s$$

la variation partielle de s, correspondante au changement de valeur ou de forme des variables ou des fonctions comprises dans le second groupe; et δs la variation totale de s. Si la fonction s et ses variations partielles

$$\delta_{\prime} s, \quad \delta_{\prime\prime} s$$

restent fonctions continues des diverses variables, dans le voisinage du système des valeurs attribuées à ces variables mêmes, la variation totale δs sera la somme des variations partielles, en sorte qu'on aura

$$\delta s = \delta_{\prime} s + \delta_{\prime\prime} s. \tag{24}$$

Corollaire. — Concevons maintenant que les variables et fonctions diverses desquelles dépend la fonction s soient partagées en trois groupes, et nommons

$$\delta_{\prime} s, \quad \delta_{\prime\prime} s, \quad \delta_{\prime\prime\prime} s$$

les variations partielles de s correspondantes à ces trois groupes. Supposons d'ailleurs que la fonction s et ces trois variations partielles restent fonctions continues des diverses variables dans le voisinage du système des valeurs attribuées à ces variables mêmes. Si l'on considère les deux derniers groupes comme n'en formant plus qu'un seul: la variation partielle de s, correspondante à ce nouveau groupe, sera, en vertu du théorème précédent, représentée par la somme

$$\delta_{\prime\prime} s + \delta_{\prime\prime\prime} s;$$

et, en vertu du même théorème, il suffira d'ajouter cette somme à $\delta_{\prime} s$ pour obtenir la variation totale de s, ou δs. On aura donc

$$\delta s = \delta_{\prime} s + \delta_{\prime\prime} s + \delta_{\prime\prime\prime} s.$$

Par des raisonnements semblables on passera aisément du cas où les variables ou fonctions sont partagées en trois groupes, au cas où elles sont partagées en quatre groupes, etc.; et, continuant ainsi, on établira généralement la proposition suivante.

THÉORÈME V. — *Soit s une fonction dépendante de variables et fonctions diverses que nous supposerons partagées en divers groupes. Soient, de plus,*

$$\delta_{\prime} s, \quad \delta_{\prime\prime} s, \quad \delta_{\prime\prime\prime} s, \quad \ldots$$

les variations partielles de s correspondantes au premier, au second, au troisième, etc. groupe. Enfin, supposons que la fonction s et chacune de ces variations restent fonctions continues des diverses variables dans le voisinage du système de valeurs attribuées à ces variables mêmes. La variation totale δs de la fonction s sera la somme des variations partielles $\delta_{\prime} s$, $\delta_{\prime\prime} s$, $\delta_{\prime\prime\prime} s$, ...; en sorte qu'on aura

$$\delta s = \delta_{\prime} s + \delta_{\prime\prime} s + \delta_{\prime\prime\prime} s + \ldots. \tag{25}$$

Corollaire I. — Au lieu de déduire le cinquième théorème du précédent, on pourrait l'établir directement à l'aide des considérations suivantes. Les variables et fonctions diverses desquelles dépend la fonction s étant, comme on vient de le dire, partagées en divers groupes; désignons à l'aide des caractéristiques

$$\Delta_{\prime}, \quad \Delta_{\prime\prime}, \quad \Delta_{\prime\prime\prime}, \quad \ldots$$

les accroissements partiels de la fonction s ou d'une fonction de même nature, qui correspondent à des changements de valeur ou de forme des variables ou des fonctions comprises dans le premier, le second, le troisième, etc. groupe. Si l'on pose successivement

$$\left\{\begin{array}{l} s_{\prime} = s + \Delta_{\prime} s, \\ s_{\prime\prime} = s_{\prime} + \Delta_{\prime\prime} s_{\prime}, \\ s_{\prime\prime\prime} = s_{\prime\prime} + \Delta_{\prime\prime\prime} s_{\prime\prime}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots, \end{array}\right. \tag{26}$$

le dernier terme de la suite

$$s_{\prime},\quad s_{\prime\prime},\quad s_{\prime\prime\prime},\quad \ldots$$

sera évidemment ce que devient s en vertu des changements de valeur de toutes les variables et des changements de forme de toutes les fonctions données. Donc ce dernier terme sera la valeur de $s + \Delta s$, c'est-à-dire la fonction s augmentée de son accroissement total Δs. D'autre part, on tirera successivement des formules (26),

$$\begin{array}{l} s_{\prime} = s + \Delta_{\prime} s, \\ s_{\prime\prime} = s + \Delta_{\prime} s + \Delta_{\prime\prime} s_{\prime}, \\ s_{\prime\prime\prime} = s + \Delta_{\prime} s + \Delta_{\prime\prime} s_{\prime} + \Delta_{\prime\prime\prime} s_{\prime\prime}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}$$

Donc le dernier terme de la suite

$$s_{\prime},\quad s_{\prime\prime},\quad s_{\prime\prime\prime},\quad \ldots$$

sera encore équivalent à la fonction s augmentée de la somme des termes de la suite

$$\Delta_{\prime} s,\quad \Delta_{\prime\prime} s_{\prime},\quad \Delta_{\prime\prime\prime} s_{\prime\prime},\quad \ldots.$$

Donc cette somme sera précisément la valeur de l'accroissement total Δs, et l'on aura

$$\Delta s = \Delta_{\prime} s + \Delta_{\prime\prime} s_{\prime} + \Delta_{\prime\prime\prime} s_{\prime\prime} + \ldots; \tag{27}$$

puis on en conclura

$$\frac{\Delta s}{\iota} = \frac{\Delta_{\prime} s}{\iota} + \frac{\Delta_{\prime\prime} s_{\prime}}{\iota} + \frac{\Delta_{\prime\prime\prime} s_{\prime\prime}}{\iota} + \ldots. \tag{28}$$

Si maintenant on attribue à ι une valeur infiniment petite, et si l'on suppose que les fonctions

$$s,\quad \delta_{\prime} s,\quad \delta_{\prime\prime} s,\quad \delta_{\prime\prime\prime} s,\quad \ldots$$

restent fonctions continues des diverses variables dans le voisinage du système de valeurs attribuées à ces variables; on reconnaitra que les rapports

$$\frac{\Delta_{\prime} s}{\iota},\quad \frac{\Delta_{\prime\prime} s_{\prime}}{\iota},\quad \frac{\Delta_{\prime\prime\prime} s_{\prime\prime}}{\iota},\quad \ldots$$

diffèrent infiniment peu, le premier de $\delta_{\prime} s$; le second de $\delta_{\prime\prime} s_{\prime}$, et par suite de $\delta_{\prime\prime} s$; le troisième de $\delta_{\prime\prime\prime} s_{\prime\prime}$, et par suite de $\delta_{\prime\prime\prime} s_{\prime}$, ou même de $\delta_{\prime\prime\prime} s$, ... Donc, en faisant converger ι vers la limite zéro, on verra les rapports

$$\frac{\Delta_{\prime} s}{\iota},\quad \frac{\Delta_{\prime\prime} s_{\prime}}{\iota},\quad \frac{\Delta_{\prime\prime\prime} s_{\prime\prime}}{\iota},\quad \ldots$$

converger respectivement vers les limites

$$\delta_{\prime} s,\quad \delta_{\prime\prime} s,\quad \delta_{\prime\prime\prime} s,\quad \ldots,$$

et la formule (28) entrainera l'équation (25).

III. — *Formules générales, propres à fournir les variations des fonctions d'une ou de plusieurs variables.*

Les principes établis dans le paragraphe précédent fournissent immédiatement les diverses formules générales à l'aide desquelles on peut déterminer les variations des fonctions d'une ou de plusieurs variables. Entrons à ce sujet dans quelques détails.

Considérons d'abord une fonction s d'une seule variable x. Si la forme de cette fonction est complètement déterminée, et si s se trouve immédiatement exprimée en fonction de x, la variation δs pourra être déterminée à l'aide de l'équation (15) du paragraphe précédent, de laquelle on tirera

$$\delta s = \mathrm{D}_x s\, \delta x. \tag{1}$$

Alors aussi on pourra considérer les variations

$$\delta s, \quad \delta x,$$

comme représentant de simples différentielles

$$ds, \quad dx;$$

de sorte que la formule (1) se confondra en réalité avec l'équation

$$ds = \mathrm{D}_x s\, dx. \tag{2}$$

Corollaire I. — Si la forme de la fonction s cesse d'être complètement déterminée, alors, en vertu du théorème IV du § II, la variation totale de s sera la somme de ses deux variations partielles correspondantes, l'une au changement de valeur de la variable x, l'autre au changement de forme de s considéré comme fonction de x. D'ailleurs de ces deux variations partielles, la seconde sera précisément celle que nous appelons *la variation propre de la fonction s*, et que, d'après les conventions admises dans le § I, nous représentons par $\mathcal{J}s$, tandis que la première sera la valeur de δs fournie par l'équation (1), ou le produit $\mathrm{D}_x s\, \delta x$. On aura donc généralement, dans l'hypothèse admise,

$$\delta s = \mathcal{J}s + \mathrm{D}_x s\, \delta x. \tag{3}$$

Corollaire II. — Concevons maintenant que la valeur de s soit fournie par l'équation

$$s = \mathrm{f}(x, y, z, \ldots, u, v, w, \ldots), \tag{4}$$

dans laquelle les lettres

$$x, \quad y, \quad z, \quad \ldots, \quad u, \quad v, \quad w, \quad \ldots$$

désignent des variables ou fonctions diverses. Supposons d'ailleurs que, la forme de la fonction f étant complètement déterminée, on indique, à l'aide des caractéristiques

$$\delta_u, \quad \delta_v, \quad \delta_w, \quad \ldots,$$

des variations partielles dont chacune corresponde à la variation totale d'une seule des variables ou fonctions

$$x, \quad y, \quad z, \quad \ldots, \qquad u, \quad v, \quad w, \quad \ldots.$$

Alors les valeurs de

$$\delta_u s, \quad \delta_v s, \quad \delta_w s, \quad \ldots$$

pourront être calculées à l'aide de la formule (15) du § II; puisque, d'après la remarque faite dans le § II (page 74), on peut se servir de cette formule pour déterminer, non seulement les variations totales, mais encore les variations partielles correspondantes de deux variables ou fonctions liées l'une à l'autre. Donc ces valeurs pourront être réduites aux produits

$$\mathrm{D}_x s\, \delta x, \quad \mathrm{D}_y s\, \delta y, \quad \mathrm{D}_z s\, \delta z, \quad \ldots, \quad \mathrm{D}_u s\, \delta u, \quad \mathrm{D}_v s\, \delta v, \quad \mathrm{D}_w s\, \delta w, \quad \ldots.$$

D'autre part, en vertu du théorème V du § II, il suffira d'ajouter ces valeurs l'une à l'autre pour obtenir la variation totale de s. On aura donc, dans l'hypothèse admise,

$$\delta s = \mathrm{D}_x s\, \delta x + \mathrm{D}_y s\, dy + \mathrm{D}_z s\, \delta z + \ldots + \mathrm{D}_u s\, \delta u + \mathrm{D}_v s\, \delta v + \mathrm{D}_w s\, \delta w + \ldots. \tag{5}$$

Dans le cas où les formes des diverses fonctions contenues dans s restent complètement déterminées, les variations

$$\delta x, \quad \delta y, \quad \delta z, \quad \ldots \quad \delta u, \quad \delta v, \quad \delta w, \quad \ldots, \quad \delta s$$

se réduisent à de simples différentielles

$$dx, \quad dy, \quad dz, \quad \ldots, \quad du, \quad dv, \quad dw, \quad \ldots, \quad ds,$$

et l'équation (5) à la formule

$$ds = \mathrm{D}_x s\, dx + \mathrm{D}_y s\, dy + \mathrm{D}_z s\, dz + \ldots + \mathrm{D}_u s\, du + \mathrm{D}_v s\, dv + \mathrm{D}_w s\, dw + \ldots. \tag{6}$$

Corollaire III. — Si la forme de la fonction f cessait d'être complètement déterminée; alors, pour obtenir la valeur générale de δs, il faudrait, en vertu de la formule (25) du § II, ajouter au second membre de l'équation (5) la variation propre de s, c'est-à-dire la variation partielle de s relative, non plus au changement de valeur ou de forme des variables ou fonctions

$$x,\ y,\ z,\ \ldots,\quad u,\ v,\ w,\ \ldots,$$

mais au changement de forme de la fonction indiquée par la lettre f. Alors, en désignant par $\mathfrak{d}s$ la variation propre de s, on trouverait

$$(7)\quad \delta s = \mathfrak{d}s + \mathrm{D}_x s\,\delta x + \mathrm{D}_y s\,\delta y + \mathrm{D}_z s\,\delta z + \ldots + \mathrm{D}_u s\,\delta u + \mathrm{D}_v s\,\delta v + \mathrm{D}_w s\,\delta w + \ldots.$$

Pareillement, si les lettres

$$u,\ v,\ w,\ \ldots$$

désignaient des fonctions de x, y, z, ... dont les formes ne fussent pas complètement déterminées; alors, pour obtenir la variation totale δu, il faudrait à la somme

$$\mathrm{D}_x u\,\delta x + \mathrm{D}_y u\,\delta y + \mathrm{D}_z u\,\delta z + \ldots$$

ajouter la variation propre $\mathfrak{d}u$ de la fonction u. On aurait en conséquence

$$(8)\quad \left\{\begin{array}{l} \delta u = \mathfrak{d}u + \mathrm{D}_x u\,\delta x + \mathrm{D}_y u\,\delta y + \mathrm{D}_z u\,\delta z + \ldots, \\ \text{et pareillement} \\ \delta v = \mathfrak{d}v + \mathrm{D}_x v\,\delta x + \mathrm{D}_y v\,\delta y + \mathrm{D}_z v\,\delta z + \ldots, \\ \delta w = \mathfrak{d}w + \mathrm{D}_x w\,\delta x + \mathrm{D}_y w\,\delta y + \mathrm{D}_z w\,\delta z + \ldots, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right.$$

Corollaire IV. — Pour déduire de l'équation (25) du § II l'équation (5) relative au cas où la forme de la fonction f est complètement déterminée, il a suffi de supposer que chacune des lettres caractéristiques

$$\delta_{,},\ \delta_{,,},\ \delta_{,,,},\ \ldots$$

se rapportait, dans l'équation (25) du § II, à la variation totale d'une seule des variables ou fonctions

$$x,\ y,\ z,\ \ldots,\quad u,\ v,\ w,\ \ldots.$$

Si l'on supposait, au contraire, que chacune des caractéristiques

$$\delta_{,},\ \delta_{,,},\ \delta_{,,,},\ \ldots$$

se rapporte à la variation propre d'une seule des variables ou fonctions

$$x,\ y,\ z,\ \ldots,\quad u,\ v,\ w,\ \ldots,$$

on obtiendrait, au lieu de la formule (5), une autre formule qui fournirait pour δs une seconde valeur nécessairement équivalente à la première. Confirmons l'exactitude de cette assertion par un exemple, et supposons, pour fixer les idées, que la valeur de s étant donnée par la formule (4), x, y, z, ... représentent des variables indépendantes dont u, v, w, ... soient fonctions. Les variations propres

$$\mathfrak{d}x,\ \mathfrak{d}y,\ \mathfrak{d}z,\ \ldots$$

des variables indépendantes x, y, z, ... se confondront avec leurs variations totales

$$\delta x,\ \delta y,\ \delta z,$$

en sorte qu'on aura identiquement

$$(9)\qquad \delta x = \mathfrak{d}x,\quad \delta y = \mathfrak{d}y,\quad \delta z = \mathfrak{d}z,\quad \ldots.$$

Mais les variations propres

$$\mathfrak{d}u,\ \mathfrak{d}v,\ \mathfrak{d}w,\ \ldots$$

des fonctions u, v, w, ... seront distinctes de leurs variations totales, et liées à ces dernières par les formules (8). Cela posé, nommons $[s]$ la fonction de x, y, z, ... à laquelle se réduit la fonction de x, y, z, ..., u, v, w, ..., représentée par s, lorsqu'on y substitue les valeurs de u, v, w, ..., exprimées en fonction de x, y, z, ... On pourra concevoir que, dans la formule (25) du § II, chacune des variations

$$\delta_{,}s,\ \delta_{,,}s,\ \delta_{,,,}s,\ \ldots$$

correspond, non plus à la variation totale, mais à la variation propre d'une seule des variables x, y, z, ..., ou d'une seule des fonctions u, v, w, ... Seulement alors, pour tenir parfaitement compte de l'influence exercée sur la variation totale δs par la variation propre de x, on devra considérer s, non plus comme une fonction de x, y, z, ..., u, v, w, ..., mais comme une fonction des seules variables indépendantes x, y,

z, ... Donc alors les variations partielles de s, correspondantes aux variations propres

$$\mathcal{J}x, \quad \mathcal{J}y, \quad \mathcal{J}z, \quad \ldots$$

des variables $x, y, z, \ldots$, seront, eu égard à la formule (1), représentées par les produits

$$D_x[s]\mathcal{J}x, \quad D_y[s]\mathcal{J}y, \quad D_z[s]\mathcal{J}z, \quad \ldots;$$

tandis que les variations partielles de s, correspondantes aux variations propres

$$\mathcal{J}u, \quad \mathcal{J}v, \quad \mathcal{J}w, \quad \ldots,$$

seront, eu égard à la même formule, représentées par les produits

$$D_u s\mathcal{J}u, \quad D_v s\mathcal{J}v, \quad D_w s\mathcal{J}w, \quad \ldots.$$

Donc la formule (25) du § II donnera

$$(10) \qquad \begin{aligned}\delta s = {} & D_x[s]\mathcal{J}x + D_y[s]\mathcal{J}y + D_z[s]\mathcal{J}z + \ldots \\ & + D_u\, s\, \mathcal{J}u + D_v\, s\, \mathcal{J}v + D_w\, s\, \mathcal{J}w + \ldots.\end{aligned}$$

Il est facile de comparer l'une à l'autre les valeurs de δs fournies par les équations (5) et (10). En effet, eu égard aux formules (9), l'équation (10) peut s'écrire comme il suit :

$$(11) \qquad \begin{aligned}\delta s = {} & D_x[s]\,\delta x + D_y[s]\,\delta y + D_z[s]\,\delta z \ldots \\ & + D_u\, s\, \mathcal{J}u + D_v\, s\, \mathcal{J}v + D_w\, s\, \mathcal{J}w \ldots\end{aligned}$$

D'autre part, en considérant u, v, w, et, par suite, s comme fonctions de x, y, z, on aura non seulement

$$(12) \qquad \left\{\begin{aligned} du &= D_x u\, dx + D_y u\, dy + D_z u\, dz + \ldots, \\ dv &= D_x v\, dx + D_y v\, dy + D_z v\, dz + \ldots, \\ dw &= D_x w\, dx + D_y w\, dy + D_z w\, dz + \ldots, \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{aligned}\right.$$

mais encore

$$(13) \qquad ds = D_x[s]\,dx + D_y[s]\,dy + D_z[s]\,dz + \ldots.$$

Cette dernière valeur de ds devant coïncider avec celle que fournit l'équation (6), quelles que soient les valeurs attribuées aux différentielles

$$dx, \quad dy, \quad dz, \quad \ldots,$$

on en conclura, en réduisant l'une de ces différentielles à zéro, et les autres à l'unité,

$$(14) \qquad \left\{\begin{aligned} D_x[s] &= D_x s + D_u s\, D_x u + D_v s\, D_x v + D_w s\, D_x w + \ldots, \\ D_y[s] &= D_y s + D_u s\, D_y u + D_v s\, D_y v + D_w s\, D_y w + \ldots, \\ D_z[s] &= D_z s + D_u s\, D_z u + D_v s\, D_z v + D_w s\, D_z w + \ldots, \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\end{aligned}\right.$$

Or, eu égard à ces dernières formules, on reconnaîtra sans peine que la valeur de δs fournie par l'équation (11) est précisément celle qu'on obtient quand on substitue dans le second membre de l'équation (5) les valeurs de

$$\delta u, \quad \delta v, \quad \delta w, \quad \ldots,$$

tirées des formules (8).

Corollaire V. — Supposons que, la quantité s étant une fonction déterminée de variables de divers ordres représentées par

$$x, \quad y, \quad z, \quad \ldots, \qquad u, \quad v, \quad w, \quad \ldots,$$

on nomme

$$u, \quad v, \quad w, \quad \ldots$$

celles de ces variables qui sont de l'ordre le plus élevé. Alors, d'après les principes exposés dans le § I, ce qu'on devra exprimer par la notation

$$\mathcal{J}s,$$

ce sera la variation partielle de s correspondante aux variations propres

$$\mathcal{J}u, \quad \mathcal{J}v, \quad \mathcal{J}w, \quad \ldots$$

des variables de l'ordre le plus élevé, contenues dans la fonction s. Donc $\mathcal{J}s$ se trouvera réduit à la somme des derniers termes compris dans le second membre de la formule (11), et l'on aura, dans l'hypothèse admise,

$$(15) \qquad \mathcal{J}s = D_u s\mathcal{J}u + D_v s\mathcal{J}v + D_w s\mathcal{J}w + \ldots.$$

Par suite, la formule (10) pourra être réduite à

$$(16) \qquad \delta s = \mathcal{J}s + D_x[s]\,\delta x + D_y[s]\,\delta y + D_z[s]\,\delta z + \ldots.$$

IV. — *Propriétés des variations des divers ordres.*

Les théorèmes et les formules que nous avons établis dans les paragraphes précédents se rapportent seulement aux variations du premier ordre. Nous allons passer maintenant aux variations des divers ordres, et démontrer quelques-unes de leurs propriétés générales. L'une de ces propriétés appartient à la fois aux accroissements et aux variations; elle consiste en ce qu'on peut intervertir arbitrairement l'ordre dans lequel se succèdent deux ou plusieurs opérations dont chacune est exprimée, ou par l'une des caractéristiques

$$\Delta,\quad \Delta_{\prime},\quad \Delta_{\prime\prime},\quad \Delta_{\prime\prime\prime},\quad \ldots,$$

qui indiquent des accroissements totaux ou partiels; ou par l'une des caractéristiques

$$\delta,\quad \delta_{\prime},\quad \delta_{\prime\prime},\quad \delta_{\prime\prime\prime},\quad \ldots,$$

qui indiquent des variations totales ou partielles, sans altérer en aucune manière le résultat définitif de ces opérations mêmes. Pour établir cette proposition, il suffit évidemment de faire voir que l'on pourra toujours, sans inconvénient, échanger entre elles deux caractéristiques écrites à la suite l'une de l'autre. Il y a plus : on pourra se borner à considérer le cas où ces deux caractéristiques seraient dissemblables, la proposition étant évidente dans le cas contraire.

Or, soit s une fonction qui dépende de diverses variables, ou même de fonctions diverses; et nommons ς un accroissement partiel, ou même total de s, qui corresponde à des changements de valeur des variables ou à des changements de forme des fonctions proposées et de la fonction s elle-même. On aura, en vertu des formules (4) et (5) du § II,

$$(1)\qquad \begin{cases} \Delta(s+\varsigma)=\Delta s+\Delta\varsigma, \\ \delta(s+\varsigma)=\delta s+\delta\varsigma. \end{cases}$$

Donc à un accroissement quelconque de s représenté par ς, correspondront un accroissement de Δs représenté par $\Delta\varsigma$, et un accroissement de la variation δs représenté par $\delta\varsigma$. Ce n'est pas tout : comme les formules (4) et (5) du § II, et, par suite, les formules (1) continuent de subsister dans le cas même où l'on y remplace la caractéristique Δ par l'une des caractéristiques

$$\Delta_{\prime},\quad \Delta_{\prime\prime},\quad \Delta_{\prime\prime\prime},\quad \ldots$$

et la caractéristique δ par l'une des caractéristiques

$$\delta_{\prime},\quad \delta_{\prime\prime},\quad \delta_{\prime\prime\prime},\quad \ldots,$$

on peut affirmer qu'à l'accroissement ς de la fonction s correspondront les accroissements

$$\Delta_{\prime}\varsigma,\quad \Delta_{\prime\prime}\varsigma,\quad \Delta_{\prime\prime\prime}\varsigma,\quad \ldots,\qquad \delta_{\prime}\varsigma,\quad \delta_{\prime\prime}\varsigma,\quad \delta_{\prime\prime\prime}\varsigma,\quad \ldots$$

des expressions

$$\Delta_{\prime}s,\quad \Delta_{\prime\prime}s,\quad \Delta_{\prime\prime\prime}s,\quad \ldots,\qquad \delta_{\prime}s,\quad \delta_{\prime\prime}s,\quad \delta_{\prime\prime\prime}s,\quad \ldots.$$

On en conclut immédiatement que, si deux des caractéristiques

$$\Delta,\quad \Delta_{\prime},\quad \Delta_{\prime\prime},\quad \Delta_{\prime\prime\prime},\quad \ldots,$$

ou bien encore l'une de ces caractéristiques et l'une des suivantes

$$\delta,\quad \delta_{\prime},\quad \delta_{\prime\prime},\quad \delta_{\prime\prime\prime},\quad \ldots$$

se trouvent simultanément appliquées à une même fonction, on pourra toujours intervertir l'ordre dans lequel se succéderont les deux caractéristiques dont il s'agit, sans altérer le résultat définitif des deux opérations qu'elles indiqueront. Ainsi, par exemple, de ce qu'à l'accroissement ς de s correspondent l'accroissement $\Delta_{\prime}\varsigma$ de $\Delta_{\prime}s$ et l'accroissement $\delta_{\prime}\varsigma$ de $\delta_{\prime}s$, on conclura qu'en posant

$$\varsigma=\Delta_{\prime\prime}s,$$

on doit avoir

$$\Delta_{\prime}\varsigma=\Delta_{\prime\prime}\Delta_{\prime}s,\qquad \delta_{\prime}\varsigma=\Delta_{\prime\prime}\delta_{\prime}s.$$

Or, si dans les deux dernières formules on remet pour ς sa valeur $\Delta_{\prime\prime}s$, elles donneront

$$(2)\qquad \Delta_{\prime}\Delta_{\prime\prime}s=\Delta_{\prime\prime}\Delta_{\prime}s,$$

$$(3)\qquad \delta_{\prime}\Delta_{\prime\prime}s=\Delta_{\prime\prime}\delta_{\prime}s.$$

Concevons maintenant que l'on divise les deux membres de la formule (3) par l'accroissement ι de la variable primitive. On trouvera

$$\frac{\delta_{\prime}\Delta_{\prime\prime}s}{\iota}=\frac{\Delta_{\prime\prime}\delta_{\prime}s}{\iota},$$

ou, ce qui revient au même, eu égard à la formule (9) du § II,

$$\delta_{\prime}\frac{\Delta_{\prime\prime}s}{\iota}=\frac{\Delta_{\prime\prime}\delta_{\prime}s}{\iota};$$

puis, en faisant converger vers la limite zéro l'accroissement ι de la variable primitive et les accroissements correspondants qu'indique la caractéristique $\Delta_{\prime\prime}$, on verra les rapports

$$\frac{\Delta_{\prime\prime}s}{\iota},\quad \frac{\Delta_{\prime\prime}\delta_{\prime}s}{\iota}$$

converger vers les limites

$$\delta_{\prime\prime}s,\quad \delta_{\prime\prime}\delta_{\prime}s.$$

Donc, en passant aux limites, on trouvera

$$\delta_{\prime}\delta_{\prime\prime}s=\delta_{\prime\prime}\delta_{\prime}s. \tag{4}$$

Ajoutons que, dans la formule (4), on pourra remplacer chacune des caractéristiques $\delta_{\prime}$, $\delta_{\prime\prime}$ par l'une quelconque des suivantes

$$\delta,\quad \delta_{\prime},\quad \delta_{\prime\prime},\quad \delta_{\prime\prime\prime},\quad \ldots.$$

En résumé, les formules (2), (3), (4), et celles qu'on peut en déduire, entraînent la proposition dont voici l'énoncé :

Théorème I. — *Soit s une fonction qui dépende de diverses variables ou même de fonctions diverses; et supposons cette fonction successivement soumise à diverses opérations dont chacune, ayant pour but de fournir un accroissement total ou partiel, ou bien encore une variation totale ou partielle, se trouve indiquée par l'une des caractéristiques*

$$\Delta,\quad \Delta_{\prime},\quad \Delta_{\prime\prime},\quad \Delta_{\prime\prime\prime},\quad \ldots,\qquad \delta,\quad \delta_{\prime},\quad \delta_{\prime\prime},\quad \delta_{\prime\prime\prime},\quad \ldots.$$

L'expression qui résultera de ces opérations successivement effectuées offrira une valeur indépendante de l'ordre dans lequel se succéderont ces mêmes opérations, et par conséquent les caractéristiques qui serviront à les indiquer. On pourra donc, sans altérer cette valeur, intervertir arbitrairement l'ordre dans lequel les diverses lettres caractéristiques se trouvent rangées, comme si le système de ces lettres, écrites à la suite les une des autres, représentait un véritable produit.

Corollaire I. — Il suit des formules (8) et (9) du § II que le théorème précédent doit être étendu au cas même où l'une des caractéristiques, cessant d'indiquer un accroissement ou une variation, représenterait un coefficient constant.

Corollaire II. — On peut concevoir que, parmi les caractéristiques

$$\delta_{\prime},\quad \delta_{\prime\prime},\quad \delta_{\prime\prime\prime},\quad \ldots,$$

plusieurs indiquent des variations relatives, non à des changements de formes de certaines fonctions, mais à des changements de valeurs de certaines variables x, y, z, ... Lorsque chacune des caractéristiques de cette espèce se rapporte à une seule variable x, ou y, ou z, ..., elle peut être immédiatement remplacée par

$$d_x,\quad \text{ou}\quad d_y,\quad \text{ou}\quad d_z,\quad \ldots,$$

et même par

$$\mathrm{D}_x,\quad \text{ou}\quad \mathrm{D}_y,\quad \text{ou}\quad \mathrm{D}_z,\quad \ldots,$$

si la variable dont il s'agit est une variable indépendante, ce qui permet de réduire sa variation à l'unité.

Le théorème III du § II, et les théorèmes qui s'en déduisent, sont relatifs à des variations totales ou partielles du premier ordre. Mais, en partant de ces théorèmes, on peut en obtenir d'autres du même genre qui soient relatifs à des variations totales ou partielles d'ordres supérieurs. Tel est, en particulier, le suivant :

Théorème II. — *Supposons qu'une fonction s, et une variation de s, totale ou partielle, d'un ordre n supérieur au premier, restent continues, par rapport aux variables dont elles dépendent, dans le voisinage du système de valeurs attribuées à ces variables. Faisons d'ailleurs coïncider la* *variable primitive, ou avec l'une de ces variables, ou avec une variable nouvelle dont toutes les autres soient fonctions continues. La variation que l'on considère différera infiniment peu du rapport qu'on obtiendra quand on divisera par ι^n l'accroissement infiniment petit de s correspondant à cette même variation.*

Démonstration. — Considérons, par exemple, une variation de la forme

$$\partial_u \partial_\iota s,$$

et admettons les suppositions énoncées dans le théorème II, en sorte que

$$s \quad \text{et} \quad \partial_u \partial_\iota s$$

restent fonctions continues des diverses variables, dans le voisinage du système des valeurs attribuées à ces mêmes variables. En vertu du théorème III du § II (corollaire I), la variation $\partial_u \partial_\iota s$ différera infiniment peu du rapport

$$\frac{\Delta_u \partial_\iota s}{\iota} = \frac{\partial_\iota \Delta_u s}{\iota}.$$

Donc ce rapport devra rester à son tour fonction continue des diverses variables, dans le voisinage du système des valeurs attribuées à ces mêmes variables. Il y a plus : en vertu du théorème cité, le rapport

$$\frac{\partial_\iota \Delta_u s}{\iota},$$

que l'on peut, eu égard à l'équation (9) du § II, présenter sous la forme

$$\partial_\iota \frac{\Delta_u s}{\iota},$$

différera infiniment peu de l'expression

$$\frac{\Delta_\iota \left(\frac{\Delta_u s}{\iota}\right)}{\iota},$$

ou, ce qui revient au même, du rapport

$$\frac{\Delta_\iota \Delta_u s}{\iota^2} = \frac{\Delta_u \Delta_\iota s}{\iota^2}.$$

Donc ce dernier rapport différera infiniment peu de la variation

$$\partial_u \partial_\iota s.$$

En raisonnant comme on vient de le faire, on pourra évidemment démontrer le théorème II dans tous les cas possibles.

Corollaire. — Supposons que l'accroissement ι de la variable primitive soit considéré comme un infiniment petit du premier ordre; alors, en vertu du théorème II, l'accroissement total ou partiel de s, correspondant à une variation de l'ordre n, sera un infiniment petit de l'ordre n, si cette variation reste fonction continue des variables dont s dépend, dans le voisinage du système des valeurs attribuées à ces variables, et si d'ailleurs elle acquiert, pour le système dont il s'agit, une valeur différente de zéro. Si, de ces deux conditions, la première était remplie sans que la seconde le fût, ou, en d'autres termes, si la variation de l'ordre n offrait pour valeur particulière une valeur nulle, sans cesser d'être continue dans le voisinage de cette valeur, l'accroissement correspondant à la variation proposée deviendrait pour l'ordinaire un infiniment petit d'un ordre supérieur au premier. Mais ce n'est là évidemment qu'un cas exceptionnel; et en général ce que nous appellerons un accroissement de l'ordre n sera en même temps, en vertu du théorème II, un infiniment petit de l'ordre n. Ainsi, non seulement un accroissement du premier ordre sera généralement, comme on peut le conclure du théorème III du § II, un infiniment petit du premier ordre; mais de plus un accroissement du second ordre sera généralement un infiniment petit du second ordre, etc.

V. — *Sur la variation d'une intégrale définie simple ou multiple.*

Soit d'abord s une intégrale définie simple, relative à la variable x, et prise entre les limites

$$x = x, \qquad x = \mathrm{X},$$

en sorte qu'on ait

$$s = \int_x^X k\,dx. \tag{1}$$

Supposons d'ailleurs, dans cette intégrale,

$$k = \mathrm{f}(x, u, v, w, \ldots), \tag{2}$$

$u, v, w, \ldots$ désignant des fonctions de x dont la forme puisse varier, et la lettre f indiquant au contraire une fonction de forme invariable. Il suit de la formule (25) du § II que, pour obtenir la variation totale de l'intégrale s, il suffira de calculer : 1° la variation partielle de s correspondante au changement de forme des fonctions $u, v, w, \ldots$ contenues dans k, et par conséquent aux variations propres de $u, v, w, \ldots$; 2° la variation partielle de s correspondante au changement de valeurs des quantités x, X, et par conséquent aux variations propres des limites de l'intégrale; puis d'ajouter l'une à l'autre ces deux variations partielles de s.

Calculons d'abord la première, et supposons que les limites x, X restant invariables, on change infiniment peu la forme des fonctions

$$u, \quad v, \quad w, \quad \ldots.$$

Nommons

$$\Delta k, \quad \Delta s$$

les accroissements infiniment petits de k et de s, correspondants à ce changement de forme. La formule (1) entraînera la suivante

$$s + \Delta s = \int_x^X (k + \Delta k)\,dx,$$

et par conséquent la suivante

$$\Delta s = \int_x^X \Delta k\,dx.$$

Soit d'ailleurs ι l'accroissement infiniment petit d'une variable indépendante dont la variation serait l'unité. On tirera de la dernière formule

$$\frac{\Delta s}{\iota} = \int_x^X \frac{\Delta k}{\iota}\,dx. \tag{3}$$

Soient enfin

$$\delta u, \quad \delta v, \quad \delta w, \quad \ldots$$

les variations propres des fonctions

$$u, \quad v, \quad w, \quad \ldots;$$

et représentons par les notations

$$\delta k, \quad \delta s$$

les variations partielles correspondantes de k et de s. En faisant converger ι vers la limite zéro, on verra, dans la formule (3), les rapports

$$\frac{\Delta k}{\iota}, \quad \frac{\Delta s}{\iota}$$

converger vers les limites

$$\delta k, \quad \delta s;$$

et l'on aura, par suite,

$$\delta s = \int_x^X \delta k\,dx. \tag{4}$$

D'ailleurs, en vertu de la formule (15) du § III, la variation δk se trouvera liée aux variations propres

$$\delta u, \quad \delta v, \quad \delta w, \quad \ldots$$

des fonctions $u, v, w, \ldots$ par l'équation

$$\delta k = \mathrm{D}_u k\,\delta u + \mathrm{D}_v k\,\delta v + \mathrm{D}_w k\,\delta w + \ldots. \tag{5}$$

Si dans la formule (4) on substitue la valeur de s tirée de l'équation (1), on trouvera

$$\delta \int_x^X k\,dx = \int_x^X \delta k\,dx. \tag{6}$$

On peut donc, dans une expression de la forme

$$\delta \int_x^X k\,dx,$$

intervertir l'ordre des deux opérations indiquées par les signes δ et $\int$.

Cherchons maintenant la variation partielle de s, à laquelle on se trouve conduit quand on fait varier seulement les limites x, X. Pour obtenir cette variation partielle, on devra, dans l'équation (2), considérer comme complètement déterminées, non seulement la forme de la fonction f, mais encore les formes des fonctions $u, v, w, \ldots$. Soit, dans cette hypothèse,

$$\Delta s$$

l'accroissement infiniment petit de s correspondant aux accroissements infiniment petits

$$\Delta \mathrm{x},\quad \Delta \mathrm{X},$$

des limites x et X. L'équation (1) entraînera la suivante

$$s+\Delta s=\int_{\mathrm{x}+\Delta\mathrm{x}}^{\mathrm{X}+\Delta\mathrm{X}} k\,dx,$$

et de cette dernière, combinée avec la formule (1), on tirera

$$\Delta s=\int_{\mathrm{X}}^{\mathrm{X}+\Delta\mathrm{X}} k\,dx-\int_{\mathrm{x}}^{\mathrm{x}+\Delta\mathrm{x}} k\,dx,$$

par conséquent

$$\frac{\Delta s}{\iota}=\frac{\displaystyle\int_{\mathrm{X}}^{\mathrm{X}+\Delta\mathrm{X}} k\,dx}{\Delta\mathrm{X}}\,\frac{\Delta\mathrm{X}}{\iota}-\frac{\displaystyle\int_{\mathrm{x}}^{\mathrm{x}+\Delta\mathrm{x}} k\,dx}{\Delta\mathrm{x}}\,\frac{\Delta\mathrm{x}}{\iota}. \tag{7}$$

Supposons maintenant que l'on fasse converger ι, et par suite, les accroissements infiniment petits

$$\Delta\mathrm{x},\quad \Delta\mathrm{X}$$

vers la limite zéro. Alors, en désignant par $\delta_{,}s$ la variation partielle de s correspondante à l'hypothèse admise, on verra non seulement les rapports

$$\frac{\Delta\mathrm{x}}{\iota},\quad \frac{\Delta\mathrm{X}}{\iota},\quad \frac{\Delta s}{\iota}$$

converger respectivement vers les limites

$$\delta\mathrm{x},\quad \delta\mathrm{X},\quad \delta_{,}s,$$

mais encore les rapports

$$\frac{\displaystyle\int_{\mathrm{x}}^{\mathrm{x}+\Delta\mathrm{x}} k\,dx}{\Delta\mathrm{x}},\quad \frac{\displaystyle\int_{\mathrm{X}}^{\mathrm{X}+\Delta\mathrm{X}} k\,dx}{\Delta\mathrm{X}}$$

converger vers des limites qui, eu égard aux propriétés connues des intégrales définies, seront précisément les valeurs de k correspondantes aux valeurs x, X de la variable x. Si l'on représente ces valeurs de k par les notations [1]

$$\Big|^{x=\mathrm{x}} k,\quad \Big|^{x=\mathrm{X}} k,$$

alors, en posant $\iota=0$, on tirera de la formule (7) l'équation

$$\delta_{,}s=\Big|^{x=\mathrm{X}} k\,\delta\mathrm{X}-\Big|^{x=\mathrm{x}} k\,\delta\mathrm{x}, \tag{8}$$

que, pour abréger, on peut écrire comme il suit :

$$\delta_{,}s=\Big(\delta\mathrm{X}\Big|^{x=\mathrm{X}}-\delta\mathrm{x}\Big|^{x=\mathrm{x}}\Big)k. \tag{9}$$

D'ailleurs, les deux valeurs de x, représentées par x, X étant deux quantités qui, dans l'intégrale s, peuvent varier indépendamment l'une de l'autre, et indépendamment des formes attribuées aux fonctions $u, v, w, \ldots$, les variations totales

$$\delta\mathrm{X},\quad \delta\mathrm{x}$$

de ces deux quantités ne différeront pas de leurs variations propres

$$\delta_{\iota}\mathrm{X},\quad \delta_{\iota}\mathrm{x}.$$

(1) Dans un Mémoire qui a remporté le grand prix de Mathématiques, M. Sarrus observe, avec raison, qu'il convient de joindre aux notations adoptées par les analystes un *signe de substitution*, c'est-à-dire un signe propre à indiquer la substitution d'une lettre à une autre lettre. Celui dont je me sers ici diffère peu du signe de substitution qui a été adopté par M. Sarrus, et qui est un trait recourbé en forme de crosse, à la droite duquel l'auteur place, en haut et en bas, les deux lettres dont l'une doit être substituée à l'autre. La notation nouvelle que je propose se prête aisément à des réductions qui permettent de rendre les formules plus simples et plus concises, comme on le verra ci-après dans le § VII.

Donc l'équation (9) pourra encore s'écrire comme il suit :

$$\delta_{,}s = \left(\daleth X \overset{x=X}{\Big|} - \daleth \mathrm{x} \overset{x=\mathrm{x}}{\Big|}\right)k. \tag{10}$$

Après avoir trouvé les deux variations partielles

$$\daleth s, \quad \delta_{,}s$$

dont la somme doit fournir la variation totale δs de l'intégrale s, il suffira de combiner l'équation

$$\delta s = \daleth s + \delta_{,}s \tag{11}$$

avec les formules (4) et (10) pour obtenir la formule générale

$$\delta s = \int_{\mathrm{x}}^{X} \daleth s\, dx + \left(\daleth X \overset{x=X}{\Big|} - \daleth \mathrm{x} \overset{x=\mathrm{x}}{\Big|}\right)k. \tag{12}$$

Supposons maintenant que la lettre s représente une intégrale définie double, relative aux variables x, y, et prise : 1° par rapport à y entre les limites

$$y = \mathrm{y}, \qquad y = Y;$$

2° par rapport à x entre les limites

$$x = \mathrm{x}, \qquad x = X,$$

en sorte qu'on ait

$$s = \int_{\mathrm{x}}^{X} \int_{\mathrm{y}}^{Y} k\, dx\, dy, \tag{13}$$

y, Y pouvant désigner deux fonctions quelconques de la variable x. Supposons d'ailleurs, dans cette intégrale,

$$k = \mathrm{f}(x, y, u, v, w, \ldots), \tag{14}$$

$u, v, w, \ldots$ désignant des fonctions de x, y, dont la forme puisse varier, et la lettre f indiquant au contraire une fonction de forme invariable. Il suit de la formule (15) du § II que, pour obtenir la variation totale de l'intégrale s, il suffira de calculer : 1° la variation partielle de s correspondante au changement de forme des fonctions $u, v, w, \ldots$ contenues dans k, et par conséquent aux variations propres de

$u, v, w, \ldots$; 2° la variation partielle de s correspondante au changement de valeurs des limites x, X, et par conséquent aux variations propres de x, X ; 3° la variation partielle de s correspondante au changement de forme des limites y, Y, considérées comme fonctions de x, et par conséquent aux variations propres de y, Y ; puis d'ajouter l'une à l'autre ces trois variations partielles de s.

Cela posé, en nous conformant aux notations précédemment adoptées, désignons par

$$\daleth k$$

la variation partielle de k correspondante aux variations propres

$$\daleth u, \quad \daleth v, \quad \daleth w, \quad \ldots$$

des fonctions $u, v, w, \ldots$; et représentons encore par

$$\daleth \int_{\mathrm{y}}^{Y} k\, dy, \qquad \daleth \int_{\mathrm{x}}^{X} \int_{\mathrm{y}}^{Y} k\, dx\, dy = \daleth s,$$

les variations correspondantes des intégrales

$$\int_{\mathrm{y}}^{Y} k\, dy, \quad \int_{\mathrm{x}}^{X} \int_{\mathrm{y}}^{Y} k\, dx\, dy = s.$$

Indiquons, au contraire, à l'aide de la caractéristique

$$\delta_{,}$$

placée devant la dernière de ces intégrales, sa variation partielle correspondante aux variations propres $\daleth \mathrm{x}$, $\daleth X$ des limites x, X ; et à l'aide de la caractéristique

$$\delta_{,,}$$

placée devant l'une ou l'autre intégrale, sa variation partielle correspondante aux variations propres $\daleth \mathrm{y}$, $\daleth Y$ des limites y, Y. A l'aide des raisonnements par lesquels nous avons établi la formule (6), on prouvera que l'on peut, dans l'expression

$$\daleth s = \daleth \int_{\mathrm{x}}^{X} \int_{\mathrm{y}}^{Y} k\, dx\, dy,$$

intervertir l'ordre des opérations indiquées par les signes $\mathfrak{d}$ et $\int$, de manière à transporter successivement la lettre $\mathfrak{d}$ après le premier, puis après le second des deux signes d'intégration. On aura donc

$$\mathfrak{d}\int_x^X \int_y^Y k\,dx\,dy = \int_x^X \mathfrak{d}\int_y^Y k\,dx\,dy = \int_x^X \int_y^Y \mathfrak{d}k\,dx\,dy;$$

et, par suite, la variation partielle de s correspondante aux variations propres des fonctions $u, v, w, \ldots$ pourra être déterminée à l'aide de l'équation

$$(15) \qquad \mathfrak{d}s = \int_x^X \int_y^Y \mathfrak{d}k\,dx\,dy,$$

à laquelle on devra joindre la formule (15) du § III, savoir,

$$(16) \qquad \mathfrak{d}k = \mathrm{D}_u k\,\mathfrak{d}u + \mathrm{D}_v k\,\mathfrak{d}v + \mathrm{D}_w k\,\mathfrak{d}w + \ldots.$$

Cherchons maintenant la variation partielle représentée par $\delta_x s$, et correspondante aux variations propres $\mathfrak{d}x$, $\mathfrak{d}X$ des limites x, X de l'intégration qui se rapporte à la variable x dans la formule (13). Comme, pour déduire cette formule de l'équation (1), il suffit de remplacer dans le second membre la lettre k par l'intégrale $\int_y^Y k\,dy$, il est clair que la même opération transformera le second membre de l'opération (10), de manière à le faire coïncider avec la valeur cherchée de $\delta_x s$. On aura donc, dans le cas présent.

$$(17) \qquad \delta_x s = \left(\mathfrak{d}X \Big|^{x=X} - \mathfrak{d}x \Big|^{x=x}\right) \int_y^Y k\,dy.$$

Quant à la variation partielle de s, représentée par $\delta_y s$, et correspondante aux variations propres $\mathfrak{d}y$, $\mathfrak{d}Y$ des limites y, Y de l'intégration qui se rapporte à la variable y dans la formule (13), elle se déduira aisément de la formule

$$\delta_y s = \delta_y \int_x^X \int_y^Y k\,dx\,dy,$$

dans laquelle on pourra encore, en opérant comme dans la for-

mule (6), transporter le signe δ_y après le signe de l'intégration relative à x. On aura donc

$$\delta_y s = \int_x^X \delta_y \int_y^Y k\,dx\,dy.$$

Mais en remplaçant, dans la formule (6), l'intégrale (1), savoir,

$$s = \int_x^X k\,dx,$$

par l'intégrale

$$\int_y^Y k\,dy,$$

et substituant par suite la caractéristique δ_y à la caractéristique δ_x, on trouvera

$$\delta_y \int_y^Y k\,dy = \left(\mathfrak{d}Y \Big|^{y=Y} - \mathfrak{d}y \Big|^{y=y}\right) k.$$

Donc, on aura définitivement

$$(18) \qquad \delta_y s = \int_x^X \left(\mathfrak{d}Y \Big|^{y=Y} - \mathfrak{d}y \Big|^{y=y}\right) k\,dx.$$

Après avoir trouvé les trois variations partielles

$$\mathfrak{d}s, \quad \delta_x s, \quad \delta_y s,$$

dont la somme doit fournir la variation totale δs de l'intégrale s, il suffira de combiner l'équation

$$(19) \qquad \delta s = \mathfrak{d}s + \delta_x s + \delta_y s$$

avec les formules (15), (17), (18) pour obtenir la formule générale

$$(20) \qquad \delta s = \int_x^X \int_y^Y \mathfrak{d}k\,dy\,dx + \left(\mathfrak{d}X \Big|^{x=X} - \mathfrak{d}x \Big|^{x=x}\right) \int_y^Y k\,dy + \int_x^X \left(\mathfrak{d}Y \Big|^{y=Y} - \mathfrak{d}y \Big|^{y=y}\right) k\,dx.$$

En général, soit

$$(21) \qquad s = \int_x^X \int_y^Y \int_z^Z \ldots k \ldots dx\,dy\,dz$$

une intégrale définie multiple, relative aux variables $x, y, z, \ldots$, et dans laquelle les limites y, Y peuvent être des fonctions quelconques de x, les limites z, Z des fonctions quelconques de x, y, etc. Supposons d'ailleurs dans cette intégrale

$$k = \mathrm{f}(x, y, z, \ldots, u, v, w, \ldots), \tag{22}$$

$u, v, w, \ldots$ désignant des fonctions de $x, y, z, \ldots$ dont la forme puisse varier, et la lettre f indiquant, au contraire, une fonction de forme invariable. Désignons à l'ordinaire par

$$\mathcal{I}k, \quad \mathcal{I}s$$

les variations partielles de k et de s correspondantes aux variations propres

$$\mathcal{I}u, \quad \mathcal{I}v, \quad \mathcal{I}w, \quad \ldots$$

des fonctions $u, v, w, \ldots$. Enfin soient :

$\partial_{\prime} s$ la variation partielle de s, correspondante aux variations propres des limites x, X ;

$\partial_{\prime\prime} s$ la variation partielle de s, correspondante aux variations propres des limites y, Y ;

$\partial_{\prime\prime\prime} s$ la variation partielle de s, correspondante aux variations propres des limites z, Z, ...

etc.

On aura

$$\partial s = \mathcal{I}s + \partial_{\prime} s + \partial_{\prime\prime} s + \partial_{\prime\prime\prime} s + \ldots, \tag{23}$$

la variation partielle $\mathcal{I}s$ étant déterminée par l'équation

$$\mathcal{I}s = \mathcal{I}\int_x^X \int_y^Y \int_z^Z \ldots k\,dx\,dy\,dz \ldots$$

que l'on peut réduire à

$$\mathcal{I}s = \int_x^X \int_y^Y \int_z^Z \ldots \mathcal{I}k\,dx\,dy\,dz \ldots, \tag{24}$$

et la valeur de $\mathcal{I}k$ étant

$$\mathcal{I}k = \mathrm{D}_u k\,\mathcal{I}u + \mathrm{D}_v k\,\mathcal{I}v + \mathrm{D}_w k\,\mathcal{I}w + \ldots. \tag{25}$$

Ajoutons que les variations partielles

$$\partial_{\prime} s, \quad \partial_{\prime\prime} s, \quad \partial_{\prime\prime\prime} s, \quad \ldots$$

se trouveront déterminées par les équations

$$\begin{aligned}
\partial_{\prime} s &= \partial_{\prime} \int_x^X \int_y^Y \int_z^Z \ldots k\,dx\,dy\,dz \ldots, \\
\partial_{\prime\prime} s &= \partial_{\prime\prime} \int_x^X \int_y^Y \int_z^Z \ldots k\,dx\,dy\,dz \ldots, \\
\partial_{\prime\prime\prime} s &= \partial_{\prime\prime\prime} \int_x^X \int_y^Y \int_z^Z \ldots k\,dx\,dy\,dz \ldots, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,
\end{aligned}$$

ou, ce qui revient au même, par les suivantes :

$$\begin{aligned}
\partial_{\prime} s &= \partial_{\prime} \int_x^X \int_y^Y \int_z^Z \ldots k\,dx\,dy\,dz \ldots, \\
\partial_{\prime\prime} s &= \int_x^X \partial_{\prime\prime} \int_y^Y \int_z^Z \ldots k\,dx\,dy\,dz \ldots, \\
\partial_{\prime\prime\prime} s &= \int_x^X \int_y^Y \partial_{\prime\prime\prime} \int_z^Z \ldots k\,dx\,dy\,dz \ldots, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,
\end{aligned}$$

desquelles on tirera, eu égard à la formule (10),

$$\left\{\begin{aligned}
\partial_{\prime} s &= \left(\mathcal{I}X \Big|^{x=X} - \mathcal{I}x \Big|^{x=x}\right) \int_y^Y \int_z^Z \ldots k\,dy\,dz \ldots, \\
\partial_{\prime\prime} s &= \int_x^X \left(\mathcal{I}Y \Big|^{y=Y} - \mathcal{I}y \Big|^{y=y}\right) \int_z^Z \ldots k\,dx\,dz \ldots, \\
\partial_{\prime\prime\prime} s &= \int_x^X \int_y^Y \left(\mathcal{I}Z \Big|^{z=Z} - \mathcal{I}z \Big|^{z=z}\right) \ldots k\,dx\,dy \ldots, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}\right. \tag{26}$$

En substituant dans la formule (21) les valeurs de

$$\mathcal{I}s, \quad \partial_{\prime} s, \quad \partial s_{\prime\prime}, \quad \partial_{\prime\prime\prime} s, \quad \ldots$$

déterminées par les formules (24), (26), on obtiendra la formule générale

$$(27)\qquad \begin{aligned}\delta s = &\int_x^X \int_y^Y \int_z^Z \ldots \iota k\, dx\, dy\, dz \ldots \\ &+ \Big(\iota X \overset{x=X}{|} - \iota x \overset{x=x}{|}\Big) \int_y^Y \int_z^Z \ldots k\, dy\, dz \ldots \\ &+ \int_x^X \Big(\iota Y \overset{y=Y}{|} - \iota y \overset{y=y}{|}\Big) \int_z^Z \ldots k\, dx\, dz \ldots \\ &+ \int_x^X \int_y^Y \Big(\iota Z \overset{z=Z}{|} - \iota z \overset{z=z}{|}\Big) \ldots k\, dx\, dy \ldots \\ &+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\end{aligned}$$

que l'on peut encore écrire comme il suit :

$$(28)\quad \begin{aligned}\delta s = &\int_x^X \int_y^Y \int_z^Z \ldots \iota k\, dx\, dy\, dz \\ &+ \iota X \overset{x=X}{|} \int_y^Y \int_z^Z \ldots k\, dy\, dz \ldots - \iota x \overset{x=x}{|} \int_y^Y \int_z^Z \ldots k\, dz\, dy \ldots \\ &+ \int_x^X \iota Y \overset{y=Y}{|} \int_z^Z \ldots k\, dx\, dz \ldots - \int_x^X \iota y \overset{y=y}{|} \int_z^Z \ldots k\, dx\, dz \ldots \\ &+ \int_x^X \int_y^Y \iota Z \overset{z=Z}{|} \ldots k\, dx\, dy \ldots - \int_x^X \int_y^Y \iota z \overset{z=z}{|} \ldots k\, dx\, dy \ldots \\ &+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\end{aligned}$$

Cette dernière formule, dans laquelle chaque terme du second membre pourrait être calculé séparément, en vertu des principes exposés dans le § II, est précisément celle qu'a obtenue M. Sarrus, dans le Mémoire couronné par l'Académie des Sciences.

VI. — *Sur les diverses formes que peut prendre la variation d'une intégrale définie simple ou multiple.*

Considérons de nouveau l'intégrale définie multiple

$$(1)\qquad s = \int_x^X \int_y^Y \int_z^Z \ldots k\, dx\, dy\, dz \ldots,$$

dans laquelle on a

$$(2)\qquad k = f(x, y, z, \ldots, u, v, w, \ldots),$$

les limites y, Y pouvant être des fonctions quelconques de x, les limites z, Z des fonctions quelconques de x, y, etc., et $u, v, w, \ldots$ désignant des fonctions de $x, y, z, \ldots$ dont la forme puisse varier, tandis que la lettre f indique au contraire une fonction de forme invariable. Comme la valeur de cette intégrale s dépendra uniquement des valeurs des quantités x, X, et des formes des fonctions de $x, y, z, \ldots$ représentées par y, Y, par z, Z, ... et par $u, v, w, \ldots$, il s'ensuit que, dans la recherche de la variation totale δs, on pourra se borner à tenir compte des variations propres des quantités représentées par

$$x,\ X;\quad y,\ Y;\quad z,\ Z;\quad \ldots,\ u,\ v,\ w,\ \ldots.$$

En opérant ainsi, on obtiendra une valeur de δs composée de termes dont chacun, dépendant d'une seule des variations propres

$$\iota x,\ \iota X,\ \iota y,\ \iota Y,\ \iota z,\ \iota Z,\ \ldots,\ \iota u,\ \iota v,\ \iota w,\ \ldots,$$

pourra être calculé séparément, en vertu des principes établis dans le § II; et cette valeur de δs sera précisément celle que fournit l'équation (28) du paragraphe précédent. Alors aussi, l'intégrale s étant considérée comme une somme d'éléments, l'accroissement partiel de cette intégrale correspondant à des accroissements infiniment petits des limites

$$x,\ X,\ y,\ Y,\ z,\ Z,\ \ldots,$$

sera une somme d'éléments nouveaux qui s'ajoutera aux éléments primitifs de l'intégrale, tandis que chacun des éléments primitifs, conservant sa valeur et sa forme, continuera de correspondre aux mêmes systèmes de valeurs des variables $x, y, z, \ldots$.

Au reste, au lieu d'ajouter à l'intégrale s de nouveaux éléments infiniment petits, on pourra changer infiniment peu la valeur et la forme de chaque élément. Pour y parvenir, il suffira d'attribuer aux variables

$$x,\ y,\ z,\ \ldots$$

des accroissements infiniment petits

$$\Delta x,\ \Delta y,\ \Delta z,\ \ldots$$

dont chacun pourra être fonction de $x, y, z, \ldots$ et de l'accroissement infiniment petit ι attribué à la variable indépendante qui a pour variation l'unité. Cela posé, soient

$$X, \quad Y, \quad Z, \quad \ldots$$

les variables nouvelles dans lesquelles se transforment

$$x, \quad y, \quad z, \quad \ldots$$

quand on attribue à celles-ci les accroissements $\Delta x, \Delta y, \Delta z, \ldots$, en sorte qu'on ait

$$(3) \qquad X = x + \Delta x, \qquad Y = y + \Delta y, \qquad Z = z + \Delta z, \qquad \ldots.$$

Soient encore

$$\Delta k, \quad \Delta s$$

les accroissements infiniment petits que prendront les quantités

$$k \quad \text{et} \quad s$$

lorsqu'on changera x en $x + \Delta x$, y en $y + \Delta y$, z en $z + \Delta z$, en faisant de plus varier les formes des fonctions $u, v, w, \ldots$, et posons

$$K = k + \Delta k.$$

Dans la nouvelle intégrale

$$s + \Delta s,$$

la fonction différentielle sous le signe $\int$ se trouvera représentée, non plus par le produit

$$k\,dx\,dy\,dz\ldots,$$

mais par le suivant

$$K\,dX\,dY\,dZ\ldots.$$

D'ailleurs, la variation totale δs se déduira de l'accroissement total Δs à l'aide de l'équation

$$(4) \qquad \delta s = \lim \frac{\Delta s}{\iota}.$$

Observons maintenant que l'accroissement total Δs étant celui que prend l'intégrale s quand on substitue simultanément la variable X à

la variable x, la variable Y à la variable y, la variable Z à la variable $z, \ldots$, enfin la fonction K à la fonction k, on pourra, en vertu des principes établis dans le § II, calculer d'abord la variation partielle de s relative à chacune de ces substitutions, et déduire des variations partielles de s sa variation totale qui se réduira simplement à leur somme. D'ailleurs, si l'on se borne à remplacer dans l'intégrale s la fonction k par la fonction K, on obtiendra une nouvelle intégrale dans laquelle la fonction différentielle sous le signe $\int$ sera

$$K\,dx\,dy\,dz\ldots = (k + \Delta k)\,dx\,dy\,dz\ldots.$$

Donc alors la nouvelle intégrale sera réduite à

$$\int_x^X \int_y^Y \int_z^Z (k + \Delta k)\,dx\,dy\,dz\ldots,$$

et l'accroissement de l'intégrale s à

$$\int_x^X \int_y^Y \int_z^Z \ldots \Delta k\,dx\,dy\,dz\ldots.$$

En divisant cet accroissement par ι, et faisant ensuite converger ι vers la limite zéro, on verra le rapport

$$\frac{\Delta k}{\iota}$$

converger vers la limite δk, et l'on obtiendra ainsi une variation partielle de s représentée par l'expression

$$\int_x^X \int_y^Y \int_z^Z \ldots \delta k\,dx\,dy\,dz\ldots.$$

Cette expression est effectivement la variation partielle de s correspondante à la variation totale δk de la fonction k.

Concevons à présent que, sans altérer la fonction k, on se contente de substituer, dans le produit

$$k\,dx\,dy\,dz\ldots,$$

à l'une des variables $x, y, z, \ldots$ la variable correspondante X, ou Y, ou Z, ... Supposons, pour fixer les idées, que l'on substitue Z à z. Alors, dans la nouvelle intégrale, la fonction différentielle sous le signe $\int$ sera

$$k\,dx\,dy\,dZ\ldots.$$

Si d'ailleurs l'intégration relative à z est celle qui s'effectue la première dans l'intégrale s, il sera facile de substituer, dans la nouvelle intégrale, la variable z à la variable Z, et pour y parvenir il suffira d'observer qu'en laissant $x, y, \ldots$ invariables, on tirera de l'équation $Z = z + \Delta z$ cette autre formule

$$dZ = (1 + D_z \Delta z)\,dz.$$

Donc la nouvelle intégrale, rapportée aux variables primitives, renfermera sous le signe $\int$ la fonction différentielle

$$k(1 + D_z \Delta z)\,dx\,dy\,dz\ldots.$$

et se réduira simplement à

$$\int_x^X \int_y^Y \int_z^Z \ldots k(1 + D_z \Delta z)\,dx\,dy\,dz\ldots.$$

Donc, lorsque dans l'intégrale s on substituera Z à z, l'accroissement de cette intégrale sera

$$\int_x^X \int_y^Y \int_z^Z \ldots k\,D_z \Delta z\,dx\,dy\,dz\ldots.$$

En divisant par z cet accroissement, et faisant ensuite converger ι vers la limite zéro, on verra le rapport

$$\frac{D_z \Delta z}{\iota} = D_z \frac{\Delta z}{\iota}$$

converger vers la limite

$$D_z \delta z,$$

et en conséquence l'on obtiendra une variation partielle de s repré-

sentée par l'expression

$$\int_x^X \int_y^Y \int_z^Z \ldots k\,D_z \delta z\,dx\,dy\,dz\ldots.$$

Ainsi, pour former la variation partielle de s correspondante à la variation totale δz de la variable z, il suffira de multiplier, dans l'intégrale s, la fonction différentielle par la dérivée partielle

$$D_z \delta z.$$

On prouvera de la même manière que, pour obtenir la variation partielle de s correspondante à l'une quelconque des variations

$$\delta x, \quad \delta y, \quad \delta z, \quad \ldots,$$

il suffit de multiplier, dans l'intégrale s, la fonction différentielle par la dérivée partielle

$$D_x \delta x, \quad \text{ou} \quad D_y \delta y, \quad \text{ou} \quad D_z \delta z, \quad \ldots;$$

et pour lever les difficultés que l'on rencontre au premier abord quand on veut étendre la démonstration ci-dessus exposée à toutes les variables $x, y, z, \ldots$, il suffira d'observer que dans une intégrale multiple la fonction sous le signe $\int$ ne change pas quand on change l'ordre des intégrations. Telle est, en effet, la conclusion à laquelle on est immédiatement conduit, en considérant une intégrale multiple comme une somme d'éléments qui correspondent à certains systèmes de valeurs des variables $x, y, z, \ldots$ auxquelles se rapportent les intégrations, c'est-à-dire à des systèmes de valeurs de $x, y, z, \ldots$ compris entre certaines limites.

En résumé, les variations partielles de s, relatives aux variations totales des variables $x, y, z, \ldots$, sont respectivement

$$\int_x^X \int_y^Y \int_z^Z \ldots k\,D_x \delta x\,dx\,dy\,dz\ldots,$$
$$\int_x^X \int_y^Y \int_z^Z \ldots k\,D_y \delta y\,dx\,dy\,dz\ldots,$$
$$\int_x^X \int_y^Y \int_z^Z \ldots k\,D_z \delta z\,dx\,dy\,dz\ldots$$
....

En leur ajoutant la variation partielle qui correspond à la variation totale δk de la fonction k, on obtiendra immédiatement la variation totale de s, telle qu'elle est donnée par la formule connue

$$
(5)\qquad \begin{aligned} \delta s = &\int_x^X \int_y^Y \int_z^Z \ldots \delta k\, dx\, dy\, dz \ldots \\ &+ \int_x^X \int_y^Y \int_z^Z \ldots k(\mathrm{D}_x \delta x + \mathrm{D}_y \delta y + \mathrm{D}_z \delta z + \ldots)\, dx\, dy\, dz \ldots . \end{aligned}
$$

L'équation (5) n'est pas la seule que l'on puisse substituer à l'équation (28) du paragraphe précédent, dans la recherche de la variation totale δs. Cette variation peut encore être présentée sous une autre forme peu différente et que nous allons indiquer.

Si l'on nomme $[k]$ la fonction de x, y, z, en laquelle se transforme la fonction k déterminée par la formule (2), quand on y considère $u, v, w, \ldots$, comme fonctions de $x, y, z, \ldots$, on pourra exprimer la variation totale δk, à l'aide des variations totales

$$\delta x, \quad \delta y, \quad \delta z, \quad \ldots$$

de $x, y, z, \ldots$, et des variations propres

$$\mathcal{J} u, \quad \mathcal{J} v, \quad \mathcal{J} w, \quad \ldots$$

des fonctions $u, v, w, \ldots$ Effectivement si l'on remplace dans la formule (23) du § II la lettre s par la lettre k, on trouvera

$$
(6)\qquad \begin{aligned} \delta k = &\ \mathrm{D}_x[k]\,\delta x + \mathrm{D}_y[k]\,\delta y + \mathrm{D}_z[k]\,\delta z + \ldots \\ &+ \mathrm{D}_u k\, \mathcal{J} u \ + \mathrm{D}_v k\, \mathcal{J} v \ + \mathrm{D}_w k\, \mathcal{J} w \ + \ldots; \end{aligned}
$$

puis, en posant pour abréger, comme dans le paragraphe précédent,

$$
(7)\qquad \mathcal{J} k = \mathrm{D}_u k\, \mathcal{J} u + \mathrm{D}_v k\, \mathcal{J} v + \mathrm{D}_w k\, \mathcal{J} w + \ldots,
$$

on obtiendra la formule

$$
(8)\qquad \delta k = \mathcal{J} k + \mathrm{D}_x[k]\,\delta x + \mathrm{D}_y[k]\,\delta y + \mathrm{D}_z[k]\,\delta z + \ldots .
$$

D'autre part, si l'on désigne par les notations

$$[k\,\delta x], \quad [k\,\delta y], \quad [k\,\delta z], \quad \ldots$$

les fonctions de $x, y, z, \ldots$, dans lesquelles se transforment les produits

$$k\,\delta x, \quad k\,\delta y, \quad k\,\delta z, \quad \ldots,$$

quand on y considère $u, v, w, \ldots$, comme fonctions de $x, y, z, \ldots$, on aura identiquement

$$
(9)\qquad \left\{ \begin{aligned} &\mathrm{D}_x[k]\,\delta x + k\,\mathrm{D}_x\,\delta x = \mathrm{D}_x[k\,\delta x], \\ &\mathrm{D}_y[k]\,\delta y + k\,\mathrm{D}_y\,\delta y = \mathrm{D}_y[k\,\delta y], \\ &\mathrm{D}_z[k]\,\delta z + k\,\mathrm{D}_z\,\delta z = \mathrm{D}_z[k\,\delta z], \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned} \right.
$$

Cela posé, on tirera de l'équation (5), jointe aux formules (8) et (9),

$$
(10)\qquad \begin{aligned} \delta s = &\int_x^X \int_y^Y \int_z^Z \ldots \mathcal{J} k\, dx\, dy\, dz \ldots \\ &+ \int_x^X \int_y^Y \int_z^Z \ldots \{\mathrm{D}_x[k\,\delta x] + \mathrm{D}_y[k\,\delta y] + \mathrm{D}_z[k\,\delta z] + \ldots\}\, dx\, dy\, dz \ldots \end{aligned}
$$

ou, ce qui revient au même,

$$
(11)\qquad \begin{aligned} \delta s = &\int_x^X \int_y^Y \int_z^Z \ldots \mathcal{J} k\, dx\, dy\, dz \ldots \\ &+ \int_x^X \int_y^Y \int_z^Z \ldots \mathrm{D}_x[k\,\delta x]\, dx\, dy\, dz \ldots \\ &+ \int_x^X \int_y^Y \int_z^Z \ldots \mathrm{D}_y[k\,\delta y]\, dx\, dy\, dz \ldots \\ &+ \int_x^X \int_y^Y \int_z^Z \ldots \mathrm{D}_z[k\,\delta z]\, dx\, dy\, dz \ldots \\ &+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}
$$

Il nous reste à prouver que la formule (5) ou (11) s'accorde avec la formule (28) du précédent paragraphe. On y parvient facilement en suivant, comme nous allons le faire, la marche adoptée par M. Sarrus dans le Mémoire déjà cité.

§ VII. — *Comparaison des formules établies dans les troisième et quatrième paragraphes. Différentiation d'une intégrale multiple, relativement à une variable distincte de celles auxquelles se rapportent les intégrations.*

Pour pouvoir aisément comparer entre elles les formules générales établies dans les paragraphes précédents, il est d'abord nécessaire d'exposer les règles de la différentiation d'une intégrale multiple relative aux variables x, y, z, ..., par rapport à une autre variable t. Or, ces règles se déduisent immédiatement de la formule (27) ou (28) du § V. En effet, soit

$$(1) \qquad s=\int_{x}^{\mathrm{x}}\int_{y}^{\mathrm{y}}\int_{z}^{\mathrm{z}}\ldots k\,dx\,dy\,dz\ldots$$

une intégrale multiple, dans laquelle k représente une fonction donnée, non seulement des variables x, y, z, ..., auxquelles les intégrations se rapportent, mais aussi d'une autre variable t; et supposons encore que x, x représentent des fonctions de t; y, y des fonctions de x et de t; z, z des fonctions de x, y, t; etc.

Pour obtenir la valeur de

$$d_t s = \mathrm{D}_t s\,dt,$$

ou, ce qui revient au même, la valeur de

$$\mathrm{D}_t s,$$

il suffira de chercher la variation δs de l'intégrale s, en considérant t comme seul variable dans les fonctions représentées par les lettres

$$x,\ \mathrm{x};\quad y,\ \mathrm{y};\quad z,\ \mathrm{z};\quad \ldots;\quad k;$$

puis de remplacer chacune des lettres caractéristiques δ, $\mathfrak{D}$ par la lettre caractéristique D_t dans la formule (27) ou (28) du § V. On aura, en conséquence,

$$
\begin{aligned}
(2)\quad \mathrm{D}_t s = {} & \int_{x}^{\mathrm{x}}\int_{y}^{\mathrm{y}}\int_{z}^{\mathrm{z}}\ldots \mathrm{D}_t k\,dx\,dy\,dz \\
& + \mathrm{D}_t \mathrm{x} \mathop{\Big|}\limits^{x=\mathrm{x}} \int_{y}^{\mathrm{y}}\int_{z}^{\mathrm{z}}\ldots k\,dy\,dz - \mathrm{D}_t x \mathop{\Big|}\limits^{x=x} \int_{y}^{\mathrm{y}}\int_{z}^{\mathrm{z}}\ldots k\,dy\,dz \\
& + \int_{x}^{\mathrm{x}} \mathrm{D}_t \mathrm{y} \mathop{\Big|}\limits^{y=\mathrm{y}} \int_{z}^{\mathrm{z}}\ldots k\,dx\,dz - \int_{x}^{\mathrm{x}} \mathrm{D}_t y \mathop{\Big|}\limits^{y=y} \int_{z}^{\mathrm{z}}\ldots k\,dx\,dz \\
& + \int_{x}^{\mathrm{x}}\int_{y}^{\mathrm{y}} \mathrm{D}_t \mathrm{z} \mathop{\Big|}\limits^{z=\mathrm{z}} \ldots k\,dx\,dy - \int_{x}^{\mathrm{x}}\int_{y}^{\mathrm{y}} \mathrm{D}_t z \mathop{\Big|}\limits^{z=z} \ldots k\,dx\,dy \\
& + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}
$$

De la formule (2) on peut tirer immédiatement une autre formule

qui sert à la réduction d'une intégrale multiple dans laquelle la fonction sous le signe $\int$ se trouve différentiée par rapport à l'une des variables auxquelles se rapportent les intégrations. En effet, si l'on intègre par rapport à t et entre les limites

$$t=t,\qquad t=\mathrm{t},$$

chacun des termes de la formule (2), alors, en désignant, pour abréger, la différence

$$\mathop{\Big|}\limits^{t=\mathrm{t}} s - \mathop{\Big|}\limits^{t=t} s$$

par la notation (1)

$$\mathop{\Big|}\limits_{t=t}^{t=\mathrm{t}} s,$$

---

(1) Cette nouvelle notation, analogue à celle dont les géomètres se servent pour représenter une intégrale définie, permet de rendre plus simples et plus concises un grand nombre de formules d'algèbre ou de calcul infinitésimal. Ainsi, par exemple, en vertu de la notation dont il s'agit, la formule

$$\int_{x}^{\mathrm{x}} \mathrm{D}_x u\,dx = \mathrm{f}(\mathrm{x}) - \mathrm{f}(x),$$

dans laquelle on suppose $u=\mathrm{f}(x)$, sera réduite à

$$\int_{x}^{\mathrm{x}} \mathrm{D}_x u\,dx = \mathop{\Big|}\limits_{x=x}^{x=\mathrm{x}} u;$$

pareillement la formule

$$\int_{x}^{\mathrm{x}}\int_{y}^{\mathrm{y}} \mathrm{D}_y \mathrm{D}_x u\,dy\,dx = \mathrm{f}(\mathrm{x},\mathrm{y}) - \mathrm{f}(\mathrm{x},y) - \mathrm{f}(x,\mathrm{y}) + \mathrm{f}(x,y),$$

dans laquelle on suppose $u=\mathrm{f}(x,y)$, sera réduite à

$$\int_{x}^{\mathrm{x}}\int_{y}^{\mathrm{y}} \mathrm{D}_y \mathrm{D}_x u\,dy\,dx = \mathop{\Big|}\limits_{x}^{\mathrm{x}} \mathop{\Big|}\limits_{y}^{\mathrm{y}} u;$$

pareillement encore la formule

$$
\begin{aligned}
\int_{x}^{\mathrm{x}}\int_{y}^{\mathrm{y}}\int_{z}^{\mathrm{z}} \mathrm{D}_z \mathrm{D}_y \mathrm{D}_x u = {} & \mathrm{f}(\mathrm{x},\mathrm{y},\mathrm{z}) + \mathrm{f}(\mathrm{x},y,z) + \mathrm{f}(x,\mathrm{y},z) + \mathrm{f}(x,y,\mathrm{z}) \\
& - \mathrm{f}(x,y,z) - \mathrm{f}(x,\mathrm{y},\mathrm{z}) - \mathrm{f}(\mathrm{x},y,\mathrm{z}) - \mathrm{f}(\mathrm{x},\mathrm{y},z),
\end{aligned}
$$

dans laquelle on suppose $u=f(x,y,z)$, sera réduite à

$$\int_{x}^{\mathrm{x}}\int_{y}^{\mathrm{y}}\int_{z}^{\mathrm{z}} \mathrm{D}_z \mathrm{D}_y \mathrm{D}_x u = \mathop{\Big|}\limits_{x=x}^{x=\mathrm{x}} \mathop{\Big|}\limits_{y=y}^{y=\mathrm{y}} \mathop{\Big|}\limits_{z=z}^{z=\mathrm{z}} u;$$

etc.

on trouvera

$$(3)\qquad \begin{aligned}
\overset{t=\mathrm{t}}{\underset{t=t}{\Big|}}\, s = {} & \int_t^{\mathrm{t}}\int_x^{\mathrm{x}}\int_y^{\mathrm{y}}\int_z^{\mathrm{z}} \dots D_t k\,dt\,dx\,dy\,dz\dots \\
& + \int_t^{\mathrm{t}} D_t\mathrm{x} \overset{x=\mathrm{x}}{\Big|} \int_y^{\mathrm{y}}\int_z^{\mathrm{z}} \dots k\,dt\,dy\,dz\dots - \int_t^{\mathrm{t}} D_t x \overset{x=x}{\Big|} \int_y^{\mathrm{y}}\int_z^{\mathrm{z}} \dots k\,dt\,dy\,dz\dots \\
& + \int_t^{\mathrm{t}}\int_x^{\mathrm{x}} D_t\mathrm{y} \overset{y=\mathrm{y}}{\Big|} \int_z^{\mathrm{z}} \dots k\,dt\,dx\,dz\dots - \int_t^{\mathrm{t}}\int_x^{\mathrm{x}} D_t y \overset{y=y}{\Big|} \int_z^{\mathrm{z}} \dots k\,dt\,dx\,dz\dots \\
& + \int_t^{\mathrm{t}}\int_x^{\mathrm{x}}\int_y^{\mathrm{y}} D_t\mathrm{z} \overset{z=\mathrm{z}}{\Big|} \dots k\,dt\,dx\,dy\dots - \int_t^{\mathrm{t}}\int_x^{\mathrm{x}} D_t z \overset{z=z}{\Big|} \dots k\,dt\,dx\,dy\dots \\
& + \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots
\end{aligned}$$

et par suite, eu égard à la formule (1),

$$(4)\qquad \begin{aligned}
& \int_t^{\mathrm{t}}\int_x^{\mathrm{x}}\int_y^{\mathrm{y}}\int_z^{\mathrm{z}} \dots D_t k\,dt\,dx\,dy\,dz\dots \\
& = \overset{t=\mathrm{t}}{\underset{t=t}{\Big|}} \int_x^{\mathrm{x}}\int_y^{\mathrm{y}}\int_z^{\mathrm{z}} \dots k\,dx\,dy\,dz\dots \\
& \quad - \int_t^{\mathrm{t}} D_t\mathrm{x} \overset{x=\mathrm{x}}{\Big|} \int_y^{\mathrm{y}}\int_z^{\mathrm{z}} \dots k\,dt\,dy\,dz\dots + \int_t^{\mathrm{t}} D_t x \overset{x=x}{\Big|} \int_y^{\mathrm{y}}\int_z^{\mathrm{z}} \dots k\,dt\,dy\,dz\dots \\
& \quad - \int_t^{\mathrm{t}}\int_x^{\mathrm{x}} D_t\mathrm{y} \overset{y=\mathrm{y}}{\Big|} \int_z^{\mathrm{z}} \dots k\,dt\,dx\,dz\dots + \int_t^{\mathrm{t}}\int_x^{\mathrm{x}} D_t y \overset{y=y}{\Big|} \int_z^{\mathrm{z}} \dots k\,dt\,dx\,dz\dots \\
& \quad - \int_t^{\mathrm{t}}\int_x^{\mathrm{x}}\int_y^{\mathrm{y}} D_t\mathrm{z} \overset{z=\mathrm{z}}{\Big|} \dots k\,dt\,dx\,dy\dots + \int_t^{\mathrm{t}}\int_x^{\mathrm{x}}\int_y^{\mathrm{y}} D_t z \overset{z=z}{\Big|} \dots k\,dt\,dx\,dy\dots \\
& \quad - \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots
\end{aligned}$$

D'ailleurs, il est clair que les deux dérivées $D_t\mathrm{x}$, $D_t x$ seront, avec x et x, des fonctions de la seule variable t; que pareillement $D_t\mathrm{y}$, $D_t y$ seront avec y et y des fonctions des seules variables t, x; que $D_t\mathrm{z}$, $D_t z$ seront avec z et z des fonctions des seules variables, t, x, y, etc. Donc la formule (4) pourra encore s'écrire comme il suit :

$$(5)\qquad \begin{aligned}
& \int_t^{\mathrm{t}}\int_x^{\mathrm{x}}\int_y^{\mathrm{y}}\int_z^{\mathrm{z}} \dots D_t k\,dt\,dx\,dy\,dz\dots \\
& = \overset{t=\mathrm{t}}{\underset{t=t}{\Big|}} \int_x^{\mathrm{x}}\int_y^{\mathrm{y}}\int_z^{\mathrm{z}} \dots k\,dx\,dy\,dz\dots \\
& \quad - \int_t^{\mathrm{t}} \overset{x=\mathrm{x}}{\Big|} \int_y^{\mathrm{y}}\int_z^{\mathrm{z}} \dots k\,D_t\mathrm{x}\,dt\,dy\,dz\dots + \int_t^{\mathrm{t}} \overset{x=x}{\Big|} \int_y^{\mathrm{y}}\int_z^{\mathrm{z}} \dots k\,D_t x\,dt\,dy\,dz\dots \\
& \quad - \int_t^{\mathrm{t}}\int_x^{\mathrm{x}} \overset{y=\mathrm{y}}{\Big|} \int_z^{\mathrm{z}} \dots k\,D_t\mathrm{y}\,dt\,dx\,dz\dots + \int_t^{\mathrm{t}}\int_x^{\mathrm{x}} \overset{y=y}{\Big|} \int_z^{\mathrm{z}} \dots k\,D_t y\,dt\,dx\,dz\dots \\
& \quad - \int_t^{\mathrm{t}}\int_x^{\mathrm{x}}\int_y^{\mathrm{y}} \overset{z=\mathrm{z}}{\Big|} \dots k\,D_t\mathrm{z}\,dt\,dx\,dy\dots + \int_t^{\mathrm{t}}\int_x^{\mathrm{x}}\int_y^{\mathrm{y}} \overset{z=z}{\Big|} \dots k\,D_t z\,dt\,dx\,dy\dots \\
& \quad - \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots
\end{aligned}$$

L'équation (5) permet de réduire facilement la formule (11) du § VI à la formule (28) du § V. En effet, si, dans l'équation (5), on substitue à la variable t l'une des variables $x, y, z, \dots$, et à la fonction k l'un des produits

$$k\,\delta x,\quad k\,\delta y,\quad k\,\delta z;$$

alors, en désignant par les notations

$$[k\,\delta x],\quad [k\,\delta y],\quad [k\,\delta z],$$

placées à la suite des caractéristiques D_x, D_y, D_z, ..., les dérivées partielles de ces produits, considérés comme fonctions des seules variables $x, y, z, \dots$, on trouvera successivement

$$(6)\qquad \left\{ \begin{aligned}
& \int_x^{\mathrm{x}}\int_y^{\mathrm{y}}\int_z^{\mathrm{z}} \dots D_x[k\,\delta x]\,dx\,dy\,dz\dots \\
& = \overset{x=\mathrm{x}}{\underset{x=x}{\Big|}} \int_y^{\mathrm{y}}\int_z^{\mathrm{z}} \dots k\,\delta x\,dy\,dz\dots \\
& \quad - \int_x^{\mathrm{x}} \overset{y=\mathrm{y}}{\Big|} \int_z^{\mathrm{z}} \dots k\,D_x\mathrm{y}\,\delta x\,dx\,dz\dots + \int_x^{\mathrm{x}} \overset{y=y}{\Big|} \int_z^{\mathrm{z}} \dots k\,D_x y\,\delta x\,dx\,dz\dots \\
& \quad - \int_x^{\mathrm{x}}\int_y^{\mathrm{y}} \overset{z=\mathrm{z}}{\Big|} \dots k\,D_x\mathrm{z}\,\delta x\,dx\,dy\dots + \int_x^{\mathrm{x}}\int_y^{\mathrm{y}} \overset{z=z}{\Big|} \dots k\,D_x z\,\delta x\,dx\,dy\dots \\
& \quad - \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots; \\[1ex]
& \int_y^{\mathrm{y}}\int_z^{\mathrm{z}} \dots D_y[k\,\delta y]\,dy\,dz\dots \\
& = \overset{y=\mathrm{y}}{\underset{y=y}{\Big|}} \int_z^{\mathrm{z}} \dots k\,\delta y\,dz\dots \\
& \quad - \int_y^{\mathrm{y}} \overset{z=\mathrm{z}}{\Big|} \dots k\,D_y\mathrm{z}\,\delta y\,dy\dots + \int_y^{\mathrm{y}} \overset{z=z}{\Big|} \dots k\,D_y z\,\delta y\,dy\dots \\
& \quad - \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots; \\[1ex]
& \int_z^{\mathrm{z}} \dots D_z[k\,\delta z]\,dz\dots = \overset{z=\mathrm{z}}{\underset{z=z}{\Big|}} k\,\delta z\dots - \dots, \\
& \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots
\end{aligned} \right.$$

D'autre part on aura

$$
(7)\quad\left\{\begin{aligned}
&\overset{x=\mathrm{x}}{\underset{x=\mathfrak{x}}{\Big|}}\int_{\mathfrak{y}}^{\mathrm{y}}\int_{\mathfrak{z}}^{\mathrm{z}}\ldots k\,\delta x\,dy\,dz=\overset{x=\mathrm{x}}{\Big|}\int_{\mathfrak{y}}^{\mathrm{y}}\int_{\mathfrak{z}}^{\mathrm{z}}\ldots k\,\delta x\,dy\,dz-\overset{x=\mathfrak{x}}{\Big|}\int_{\mathfrak{y}}^{\mathrm{y}}\int_{\mathfrak{z}}^{\mathrm{z}}\ldots k\,\delta x\,dy\,dz,\\
&\overset{y=\mathrm{y}}{\underset{y=\mathfrak{y}}{\Big|}}\int_{\mathfrak{z}}^{\mathrm{z}}\ldots k\,\delta y\,dz=\overset{y=\mathrm{y}}{\Big|}\int_{\mathfrak{z}}^{\mathrm{z}}\ldots k\,\delta y\,dz-\overset{y=\mathrm{y}}{\Big|}\int_{\mathfrak{z}}^{\mathrm{z}}\ldots k\,\delta y\,dz\ldots,\\
&\overset{z=\mathrm{z}}{\underset{z=\mathfrak{z}}{\Big|}}\ldots k\,\delta z=\overset{z=\mathrm{z}}{\Big|}\ldots k\,\delta z-\overset{z=\mathfrak{z}}{\Big|}\ldots k\,\delta z.\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}\right.
$$

De plus, dans la recherche des quantités

$$
\overset{x=\mathrm{x}}{\Big|}\int_{\mathfrak{y}}^{\mathrm{y}}\int_{\mathfrak{z}}^{\mathrm{z}}\ldots k\,\delta x\,dy\,dz\ldots,\qquad \overset{x=\mathfrak{x}}{\Big|}\int_{\mathfrak{y}}^{\mathrm{y}}\int_{\mathfrak{z}}^{\mathrm{z}}\ldots k\,\delta x\,dy\,dz\ldots,
$$

qui représentent les valeurs de l'intégrale

$$
\int_{\mathfrak{y}}^{\mathrm{y}}\int_{\mathfrak{z}}^{\mathrm{z}}\ldots k\,\delta x\,dy\,dz\ldots
$$

correspondantes aux valeurs $\mathfrak{x}$ et x de la variable x, on pourra, en considérant cette intégrale comme une somme d'éléments, commencer par réduire, dans chaque élément, le facteur δx du produit

$$
k\,\delta x
$$

à la valeur $\delta\mathrm{x}$ que prend ce même facteur pour $x=\mathfrak{x}$ ou pour $x=\mathrm{x}$. Une remarque semblable étant applicable aux intégrales de la forme

$$
\int_{\mathfrak{z}}^{\mathrm{z}}\ldots k\,\delta y\,dz\ldots,\qquad\ldots,
$$

on pourra aux formules (7) substituer les suivantes :

$$
(8)\quad\left\{\begin{aligned}
&\overset{x=\mathrm{x}}{\underset{x=\mathfrak{x}}{\Big|}}\int_{\mathfrak{y}}^{\mathrm{y}}\int_{\mathfrak{z}}^{\mathrm{z}}\ldots k\,\delta x\,dy\,dz\ldots\\
&=\overset{x=\mathrm{x}}{\Big|}\int_{\mathfrak{y}}^{\mathrm{y}}\int_{\mathfrak{z}}^{\mathrm{z}}\ldots k\,\delta\mathrm{x}\,dy\,dz\ldots-\overset{x=\mathfrak{x}}{\Big|}\int_{\mathfrak{y}}^{\mathrm{y}}\int_{\mathfrak{z}}^{\mathrm{z}}\ldots k\,\delta\mathfrak{x}\,dy\,dz\ldots,\\
&\overset{y=\mathrm{y}}{\underset{y=\mathfrak{y}}{\Big|}}\int_{\mathfrak{z}}^{\mathrm{z}}\ldots k\,\delta y\,dz=\overset{y=\mathrm{y}}{\Big|}\int_{\mathfrak{z}}^{\mathrm{z}}\ldots k\,\delta\mathrm{y}\,dz-\overset{y=\mathfrak{y}}{\Big|}\int_{\mathfrak{z}}^{\mathrm{z}}\ldots k\,\delta\mathfrak{y}\,dz,\\
&\overset{z=\mathrm{z}}{\underset{z=\mathfrak{z}}{\Big|}}\ldots k\,\delta z\ldots=\overset{z=\mathrm{z}}{\Big|}\ldots k\,\delta\mathrm{z}-\overset{z=\mathfrak{z}}{\Big|}\ldots k\,\delta\mathfrak{z},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}\right.
$$

En vertu de ces dernières, jointes aux équations (6), la formule (11) du § IV donnera

$$
\begin{aligned}
(9)\quad \delta s=&\int_{\mathfrak{x}}^{\mathrm{x}}\int_{\mathfrak{y}}^{\mathrm{y}}\int_{\mathfrak{z}}^{\mathrm{z}}\ldots \eth k\,dx\,dy\,dz\ldots\\
&+\overset{x=\mathrm{x}}{\Big|}\int_{\mathfrak{y}}^{\mathrm{y}}\int_{\mathfrak{z}}^{\mathrm{z}}\ldots k\,\delta\mathrm{x}\,dy\,dz\ldots-\overset{x=\mathfrak{x}}{\Big|}\int_{\mathfrak{y}}^{\mathrm{y}}\int_{\mathfrak{z}}^{\mathrm{z}}\ldots k\,\delta\mathfrak{x}\,dy\,dz\ldots\\
&+\int_{\mathfrak{x}}^{\mathrm{x}}\overset{y=\mathrm{y}}{\Big|}\int_{\mathfrak{z}}^{\mathrm{z}}\ldots k(\delta\mathrm{y}-\mathrm{D}_x\mathrm{y}\,\delta x)\,dx\,dz\ldots\\
&-\int_{\mathfrak{x}}^{\mathrm{x}}\overset{y=\mathfrak{y}}{\Big|}\int_{\mathfrak{z}}^{\mathrm{z}}\ldots k(\delta\mathfrak{y}-\mathrm{D}_x\mathfrak{y}\,\delta x)\,dx\,dz\ldots\\
&+\int_{\mathfrak{x}}^{\mathrm{x}}\int_{\mathfrak{y}}^{\mathrm{y}}\overset{z=\mathrm{z}}{\Big|}\ldots k(\delta\mathrm{z}-\mathrm{D}_x\mathrm{z}\,\delta x-\mathrm{D}_y\mathrm{z}\,\delta y)\,dx\,dy\ldots\\
&+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}
$$

Enfin, puisque $\mathfrak{x}$ et x sont indépendants de $x, y, z, \ldots$, tandis que $\mathfrak{y}$ et y sont fonctions de x, $\mathfrak{z}$ et z fonctions de $x, y, \ldots$, il suit des principes établis dans le § II que les variations totales

$$
\delta\mathfrak{x},\quad \delta\mathrm{x},\quad \delta\mathfrak{y},\quad \delta\mathrm{y},\quad \delta\mathfrak{z},\quad \delta\mathrm{z},\quad \ldots
$$

des quantités

$$
\mathfrak{x},\quad \mathrm{x},\quad \mathfrak{y},\quad \mathrm{y},\quad \mathfrak{z},\quad \mathrm{z},\quad \ldots
$$

sont liées à leurs variations propres

$$
\eth\mathfrak{x},\quad \eth\mathrm{x},\quad \eth\mathfrak{y},\quad \eth\mathrm{y},\quad \eth\mathfrak{z},\quad \eth\mathrm{z},\quad \ldots
$$

par les formules

$$
(10)\quad\left\{\begin{aligned}
&\delta\mathfrak{x}=\eth\mathfrak{x}, && \delta\mathrm{x}=\eth\mathrm{x},\\
&\delta\mathfrak{y}=\eth\mathfrak{y}+\mathrm{D}_x\mathfrak{y}\,\delta x, && \delta\mathrm{y}=\eth\mathrm{y}+\mathrm{D}_x\mathrm{y}\,\delta x,\\
&\delta\mathfrak{z}=\eth\mathfrak{z}+\mathrm{D}_x\mathfrak{z}\,\delta x+\mathrm{D}_x\mathfrak{z}\,\delta y, && \delta\mathrm{z}=\eth\mathrm{z}+\mathrm{D}_x\mathrm{z}\,\delta x+\mathrm{D}_x\mathrm{z}\,\delta y,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, && \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}\right.
$$

Donc l'équation (9) pourra être réduite à la suivante :

$$
\begin{aligned}
(11)\quad \delta s=&\int_{\mathfrak{x}}^{\mathrm{x}}\int_{\mathfrak{y}}^{\mathrm{y}}\int_{\mathfrak{z}}^{\mathrm{z}}\ldots \eth k\,dx\,dy\,dz\ldots\\
&+\overset{x=\mathrm{x}}{\Big|}\int_{\mathfrak{y}}^{\mathrm{y}}\int_{\mathfrak{z}}^{\mathrm{z}}\ldots k\,\eth\mathrm{x}\,dy\,dz\ldots-\overset{x=\mathfrak{x}}{\Big|}\int_{\mathfrak{y}}^{\mathrm{y}}\int_{\mathfrak{z}}^{\mathrm{z}}\ldots k\,\eth\mathfrak{x}\,dy\,dz\ldots\\
&+\int_{\mathfrak{x}}^{\mathrm{x}}\overset{y=\mathrm{y}}{\Big|}\int_{\mathfrak{z}}^{\mathrm{z}}\ldots k\,\eth\mathrm{y}\,dx\,dz\ldots-\int_{\mathfrak{x}}^{\mathrm{x}}\overset{y=\mathfrak{y}}{\Big|}\int_{\mathfrak{z}}^{\mathrm{z}}\ldots k\,\eth\mathfrak{y}\,dx\,dz\ldots\\
&+\int_{\mathfrak{x}}^{\mathrm{x}}\int_{\mathfrak{y}}^{\mathrm{y}}\overset{z=\mathrm{z}}{\Big|}\ldots k\,\eth\mathrm{z}\,dx\,dy\ldots-\int_{\mathfrak{x}}^{\mathrm{x}}\int_{\mathfrak{y}}^{\mathrm{y}}\overset{z=\mathfrak{z}}{\Big|}\ldots k\,\eth\mathfrak{z}\,dx\,dy\ldots\\
&+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}
$$

Il y a plus ; comme les variations propres des limites d'une intégrale multiple, étant dues au seul changement de forme des fonctions qui représentent ces limites, seront nécessairement d'autres fonctions de même nature, il en résulte : 1° que les variations propres

$$\mathfrak{d}x, \quad \mathfrak{d}\mathrm{X}$$

seront, avec x et X, indépendantes des variables $x, y, z, \ldots$; 2° que les variations propres

$$\mathfrak{d}y, \quad \mathfrak{d}\mathrm{Y}$$

se réduiront, avec y et Y, à des fonctions de x ; 3° que les variations propres

$$\mathfrak{d}z, \quad \mathfrak{d}\mathrm{Z}$$

se réduiront, avec z et Z, à des fonctions de x, y, etc... Donc la formule (11) pourra être réduite à la suivante

$$(12)\quad \begin{aligned} \delta s = {} & \int_x^{\mathrm{X}}\int_y^{\mathrm{Y}}\int_z^{\mathrm{Z}} \ldots \mathfrak{d}k\,dx\,dy\,dz \ldots \\ & + \mathfrak{d}\mathrm{X} \Big|^{x=\mathrm{X}} \int_y^{\mathrm{Y}}\int_z^{\mathrm{Z}} \ldots k\,dy\,dz \ldots - \mathfrak{d}x \Big|^{x=x} \int_y^{\mathrm{Y}}\int_z^{\mathrm{Z}} \ldots k\,dy\,dz \ldots \\ & + \int_x^{\mathrm{X}} \mathfrak{d}\mathrm{Y} \Big|^{y=\mathrm{Y}} \int_z^{\mathrm{Z}} \ldots k\,dx\,dz \ldots - \int_x^{\mathrm{X}} \mathfrak{d}y \Big|^{y=y} \int_z^{\mathrm{Z}} \ldots k\,dx\,dz \ldots \\ & + \int_x^{\mathrm{X}}\int_y^{\mathrm{Y}} \mathfrak{d}\mathrm{Z} \Big|^{z=\mathrm{Z}} \ldots k\,dx\,dy \ldots - \int_x^{\mathrm{X}}\int_y^{\mathrm{Y}} \mathfrak{d}z \Big|^{z=z} \ldots k\,dx\,dy \ldots \\ & + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

c'est-à-dire à la formule (28) du § V.

§ VIII. — *Sur la variation partielle qui, pour une intégrale définie, simple ou multiple, correspond aux variations propres des fonctions renfermées sous le signe $\int$.*

Soit, comme dans le § V,

$$(1)\qquad s = \int_x^{\mathrm{X}}\int_y^{\mathrm{Y}}\int_z^{\mathrm{Z}} \ldots k\,dx\,dy\,dz \ldots$$

une intégrale définie multiple, dans laquelle on ait

$$(2)\qquad k = \mathrm{f}(x, y, z, \ldots, u, v, w, \ldots),$$

les limites y, Y pouvant être des fonctions quelconques de x, les limites z, Z des fonctions quelconques de $x, y, \ldots$; et $u, v, w, \ldots$, désignant des fonctions de $x, y, z, \ldots$, dont la forme puisse varier, tandis que la lettre f indique, au contraire, une fonction de forme invariable. Si l'on nomme

$$\mathfrak{d}k \quad \text{et} \quad \mathfrak{d}s$$

les variations partielles de s et de k, correspondantes aux variations propres

$$\mathfrak{d}u, \quad \mathfrak{d}v, \quad \mathfrak{d}w, \quad \ldots$$

des fonctions $u, v, w, \ldots$; on aura, en vertu de la formule (24) du § V,

$$(3)\qquad \mathfrak{d}k = \int_x^{\mathrm{X}}\int_y^{\mathrm{Y}}\int_z^{\mathrm{Z}} \ldots \mathfrak{d}k\,dx\,dy\,dz \ldots,$$

la valeur de $\mathfrak{d}k$ étant

$$(4)\qquad \mathfrak{d}k = \mathrm{D}_u k\,\mathfrak{d}u + \mathrm{D}_v k\,\mathfrak{d}v + \mathrm{D}_w k\,\mathfrak{d}w + \ldots.$$

Or, en général, dans les problèmes dont la solution est l'objet du calcul des variations, les fonctions

$$u, \quad v, \quad w, \quad \ldots\ldots$$

que renferme l'expression $\mathrm{f}(x, y, z, \ldots, u, v, w, \ldots)$, ne sont pas toutes indépendantes entre elles, et plusieurs de ces mêmes fonctions se déduisent des autres, à l'aide de différentiations relatives à x, à y, à z, etc. Cela posé, l'expression

$$\mathrm{f}(x, y, z, \ldots, u, v, w, \ldots)$$

devra être censée renfermer généralement, avec certaines fonctions,

$$u, \quad v, \quad w, \quad \ldots,$$

dont les formes pourront varier arbitrairement, les dérivées partielles de ces fonctions par rapport à $x, y, z, \ldots$. Soit r l'une quelconque de ces dérivées, en sorte qu'on ait, par exemple,

$$(5)\qquad r = \mathrm{D}_x^l \mathrm{D}_y^m \mathrm{D}_z^n \ldots u.$$

La fonction r se réduira simplement à la fonction u, lorsque les nombres entiers l, m, n, ... se réduiront à zéro; et le second membre de l'équation (4) se trouvera représenté par une somme de termes de la forme

$$D_r k\, \delta r,$$

mais relatifs, les uns à la fonction u, les autres aux fonctions v, w, ..., qui pourront être successivement substituées, dans la formule (5), à la fonction u. En conséquence, on pourra écrire l'équation (4) comme il suit

$$(6) \qquad \delta k = \sum D_r k\, \delta r + \ldots,$$

le signe $\sum$ indiquant une somme de termes de la même forme, et relatifs à la même fonction u, mais à divers systèmes de valeurs des nombres entiers l, m, n, ... Si, pour plus de commodité, l'on pose

$$D_r k = R,$$

l'équation (6) se trouvera réduite à

$$(7) \qquad \delta k = \sum R\, \delta r + \ldots.$$

Concevons maintenant que, la valeur de r étant déterminée par la formule (5), on nomme

$$\Delta u, \quad \Delta r$$

les accroissements infiniment petits de u et de r, dus seulement à un changement de forme de la fonction u, et correspondants à l'accroissement infiniment petit ι d'une quantité dont la variation serait prise pour unité. La formule (5) entraînera l'équation

$$r + \Delta r = D_x^l D_y^m D_z^n \ldots (u + \Delta u),$$

et, par suite, l'équation

$$\Delta r = D_x^l D_y^m D_z^n \ldots \Delta u,$$

de laquelle on tirera, en divisant les deux membres par ι,

$$\frac{\Delta r}{\iota} = D_x^l D_y^m D_z^n \ldots \frac{\Delta u}{\iota}.$$

Si, dans cette dernière, on fait converger ι vers la limite zéro, on verra les rapports

$$\frac{\Delta r}{\iota}, \quad \frac{\Delta u}{\iota}$$

converger vers les limites correspondantes

$$\delta r, \quad \delta u,$$

et l'on trouvera définitivement

$$(8) \qquad \delta r = D_x^l D_y^m D_z^n \ldots \delta u.$$

Au reste, la formule (8) peut se déduire directement d'un principe précédemment établi [*voir* le § IV], et en vertu duquel on peut intervertir arbitrairement l'ordre de deux ou de plusieurs opérations indiquées par des caractéristiques qui servent à exprimer, les unes des variations partielles, les autres des dérivées partielles. En effet, en vertu de ce principe, on aura

$$(9) \qquad \delta D_x^l D_y^m D_z^n \ldots u = D_x^l D_y^m D_z^n \ldots \delta u;$$

et, par suite, la formule (5) entraînera la formule (8).

Si l'on substitue la valeur de δr, déterminée par la formule (8), dans l'équation (7), on trouvera

$$(10) \qquad \delta k = \sum R\, D_x^l D_y^m D_z^n \ldots \delta u + \ldots;$$

puis, eu égard à cette dernière, on tirera de la formule (3)

$$(11) \qquad \delta s = \int_x^X \int_y^Y \int_z^Z \ldots \sum R\, D_x^l D_y^m D_z^n \ldots \delta u \ldots dx\, dy\, dz + \ldots,$$

ou, ce qui revient au même,

$$(12) \qquad \delta s = \sum \int_x^X \int_y^Y \int_z^Z \ldots R\, D_x^l D_y^m D_z^n \ldots \delta u \ldots dx\, dy\, dz + \ldots.$$

Si les variables

$$x, \quad y, \quad z, \quad \ldots$$

se réduisent à une seule x, on aura simplement

$$(13)\qquad \delta s = \sum \int_{\mathrm{y}}^{x} \mathrm{R}\,\mathrm{D}_x^{l}\,\delta u\,dx + \ldots.$$

Dans chacune des équations (12), (13), nous n'avons mis en évidence que la somme des termes relatifs à la fonction u. Les autres sommes, qui devront être ajoutées à celles-ci, seront de même forme, mais relatives aux fonctions v, w, ...

Il importe d'observer que, dans la plupart des termes qui composent les seconds membres des équations (12) et (13), les variations propres

$$\delta u,\quad \delta v,\quad \delta w,\quad \ldots$$

des fonctions u, v, w, ..., se trouvent engagées sous les signes caractéristiques D_x, D_y, D_z, ... Mais on peut, à l'aide d'intégrations par parties, faire en sorte que ces mêmes variations soient, dans chaque intégrale simple ou multiple, débarrassées de quelques-unes des caractéristiques

$$\mathrm{D}_x,\quad \mathrm{D}_y,\quad \mathrm{D}_z,\quad \ldots,$$

savoir, de celles qui indiquent des différentiations partielles relatives aux variables par rapport auxquelles les intégrations s'effectuent. C'est, au reste, ce que nous expliquerons plus en détail dans le paragraphe suivant.

§ IX. — *Sur les réductions que l'on peut effectuer, à l'aide d'intégrations par parties, dans les variations d'une intégrale définie, simple ou multiple.*

Les réductions qui sont l'objet de ce paragraphe se déduisent aisément de quelques formules très simples, que nous allons rappeler en peu de mots.

Concevons d'abord que l'on représente par k une fonction des deux variables x, y; et nommons $[k]$ ce que devient k quand on y pose

$$y = \mathrm{y},$$

y étant une fonction donnée de x. On aura identiquement

$$[k] = \Big|^{y=\mathrm{y}} k;$$

et la valeur de la dérivée

$$\mathrm{D}_x[k]$$

sera fournie par une équation analogue à chacune des formules (14) du § III. Effectivement, cette valeur sera

$$\mathrm{D}_x[k] = \mathrm{D}_x k + \mathrm{D}_y k\,\mathrm{D}_x \mathrm{y},$$

pourvu que dans chacune des quantités

$$\mathrm{D}_x k,\quad \mathrm{D}_y k,\quad \mathrm{D}_x \mathrm{y},$$

on pose $y = \mathrm{y}$. En d'autres termes, on aura

$$\mathrm{D}_x \Big|^{y=\mathrm{y}} k = \Big|^{y=\mathrm{y}} \mathrm{D}_x k + \mathrm{D}_x \mathrm{y} \Big|^{y=\mathrm{y}} \mathrm{D}_y k,$$

ou, ce qui revient au même, puisque $\mathrm{D}_x \mathrm{y}$ est indépendant de y,

$$(1)\qquad \mathrm{D}_x \Big|^{y=\mathrm{y}} k = \Big|^{y=\mathrm{y}} \mathrm{D}_x k + \Big|^{y=\mathrm{y}} \mathrm{D}_y k\,\mathrm{D}_x \mathrm{y}.$$

Pareillement, si l'on pose $y = \mathfrak{y}$, $\mathfrak{y}$ désignant une nouvelle fonction de x, la valeur de k, correspondante à la valeur $\mathfrak{y}$ de y, sera

$$\Big|^{y=\mathfrak{y}} k,$$

et l'on aura encore

$$(2)\qquad \mathrm{D}_x \Big|^{y=\mathfrak{y}} k = \Big|^{y=\mathfrak{y}} \mathrm{D}_x k + \Big|^{y=\mathfrak{y}} \mathrm{D}_y k\,\mathrm{D}_x \mathfrak{y}.$$

Enfin, si l'on combine entre elles, par voie de soustraction, les formules (1) et (2), alors, en ayant égard à l'équation identique

$$\Big|^{y=\mathrm{y}} k - \Big|^{y=\mathfrak{y}} k = \Big|_{y=\mathfrak{y}}^{y=\mathrm{y}} k,$$

on trouvera

$$(3)\qquad \mathrm{D}_x \Big|_{y=\mathfrak{y}}^{y=\mathrm{y}} k = \Big|_{y=\mathfrak{y}}^{y=\mathrm{y}} \mathrm{D}_x k + \Big|^{y=\mathrm{y}} \mathrm{D}_y k\,\mathrm{D}_x \mathrm{y} - \Big|^{y=\mathfrak{y}} \mathrm{D}_y k\,\mathrm{D}_x \mathfrak{y}.$$

Supposons à présent que, dans les formules (1) et (2) du § VII, on réduise les variables t, x, y, z, ..., à deux. On tirera de ces formules, en remplaçant t par x et x par y,

$$\text{(4)} \qquad \mathrm{D}_x \int_{\mathfrak{y}}^{\mathrm{y}} k\,dy = \int_{\mathfrak{y}}^{\mathrm{y}} \mathrm{D}_x k\,dy + \Big|_{}^{y=\mathrm{y}} k\,\mathrm{D}_x \mathrm{y} - \Big|_{}^{y=\mathfrak{y}} k\,\mathrm{D}_x \mathfrak{y}.$$

Il est bon d'observer que, si les fonctions

$$k \quad \text{et} \quad \mathrm{D}_x k$$

sont des fonctions continues de y entre les limites $y = \mathfrak{y}$, $y = \mathrm{y}$, il suffira de remplacer, dans la formule (4), k par $\mathrm{D}_y k$, pour reproduire immédiatement la formule (3).

Concevons maintenant que, k étant une fonction des variables

$$x, \quad y, \quad z, \quad \ldots,$$

on représente par $\mathfrak{y}$ et y deux fonctions données de x; par $\mathfrak{z}$ et z deux fonctions données de x, y, etc. Désignons d'ailleurs par

$$\square k,$$

ou l'expression

$$\Big|_{y=\mathfrak{y}}^{y=\mathrm{y}} \; \Big|_{z=\mathfrak{z}}^{z=\mathrm{z}} \ldots k,$$

ou l'une de celles qu'on en déduit quand on remplace quelques-unes des opérations qu'indiquent les signes

$$\Big|_{y=\mathfrak{y}}^{y=\mathrm{y}}, \quad \Big|_{z=\mathfrak{z}}^{z=\mathrm{z}}, \quad \ldots,$$

par des intégrations effectuées relativement à y, à z, etc., entre les limites écrites au-dessous et au-dessus de ces mêmes signes; en sorte que la seule caractéristique

$$\square$$

indique un système d'opérations auxquelles on doit soumettre successivement la fonction k. Alors $\square k$ représentera : 1° si les variables x, y,

z, ..., se réduisent à une seule variable x, l'une des deux expressions

$$\Big|_{y=\mathfrak{y}}^{y=\mathrm{y}} k, \qquad \int_{\mathfrak{y}}^{\mathrm{y}} k\,dx;$$

2° si les variables x, y, z, ..., se réduisent à deux, x, y, l'une des quatre expressions

$$\Big|_{y=\mathfrak{y}}^{y=\mathrm{y}} \; \Big|_{z=\mathfrak{z}}^{z=\mathrm{z}} k, \quad \Big|_{y=\mathfrak{y}}^{y=\mathrm{y}} \int_{\mathfrak{y}}^{\mathrm{y}} k\,dz, \quad \int_{\mathfrak{y}}^{\mathrm{y}} \Big|_{z=\mathfrak{z}}^{z=\mathrm{z}} k\,dy, \quad \int_{\mathfrak{y}}^{\mathrm{y}} \int_{\mathfrak{z}}^{\mathrm{z}} k\,dy\,dz; \quad \ldots.$$

Dans tous les cas, on déduira aisément des formules (3) et (4) la valeur de la dérivée $\mathrm{D}_x \square k$. Ainsi, en particulier, comme on tirera successivement de la formule (3),

$$\mathrm{D}_x \Big|_{y=\mathfrak{y}}^{y=\mathrm{y}} \; \Big|_{z=\mathfrak{z}}^{z=\mathrm{z}} k = \Big|_{y=\mathfrak{y}}^{y=\mathrm{y}} \mathrm{D}_x \Big|_{z=\mathfrak{z}}^{z=\mathrm{z}} k + \Big|_{}^{y=\mathrm{y}} \; \Big|_{z=\mathfrak{z}}^{z=\mathrm{z}} k\,\mathrm{D}_x \mathrm{y} - \Big|_{}^{y=\mathfrak{y}} \mathrm{D}_y \Big|_{z=\mathfrak{z}}^{z=\mathrm{z}} k\,\mathrm{D}_x \mathfrak{y}$$

et

$$\mathrm{D}_x \Big|_{z=\mathfrak{z}}^{z=\mathrm{z}} k = \Big|_{z=\mathfrak{z}}^{z=\mathrm{z}} \mathrm{D}_x k + \Big|_{}^{z=\mathrm{z}} \mathrm{D}_z k\,\mathrm{D}_x \mathrm{z} - \Big|_{}^{z=\mathfrak{z}} \mathrm{D}_z k\,\mathrm{D}_x \mathfrak{z},$$

on en conclura définitivement

$$\begin{aligned}
\text{(5)} \qquad \mathrm{D}_x \Big|_{y=\mathfrak{y}}^{y=\mathrm{y}} \; \Big|_{z=\mathfrak{z}}^{z=\mathrm{z}} k = {} & \Big|_{y=\mathfrak{y}}^{y=\mathrm{y}} \; \Big|_{z=\mathfrak{z}}^{z=\mathrm{z}} \mathrm{D}_x k \\
& + \Big|_{}^{y=\mathrm{y}} \mathrm{D}_y \Big|_{z=\mathfrak{z}}^{z=\mathrm{z}} k\,\mathrm{D}_x \mathrm{y} - \Big|_{}^{y=\mathrm{y}} \mathrm{D}_y \Big|_{z=\mathfrak{z}}^{z=\mathrm{z}} k\,\mathrm{D}_x \mathfrak{y} \\
& + \Big|_{y=\mathfrak{y}}^{y=\mathrm{y}} \; \Big|_{}^{z=\mathrm{z}} \mathrm{D}_z k\,\mathrm{D}_x \mathrm{z} - \Big|_{y=\mathfrak{y}}^{y=\mathrm{y}} \; \Big|_{}^{z=\mathfrak{z}} \mathrm{D}_z k\,\mathrm{D}_x \mathfrak{z}.
\end{aligned}$$

Au contraire, on tirera de la formule (4)

$$\begin{aligned}
\text{(6)} \qquad \mathrm{D}_x \int_{\mathfrak{y}}^{\mathrm{y}} \int_{\mathfrak{z}}^{\mathrm{z}} k\,dy\,dz = {} & \int_{\mathfrak{y}}^{\mathrm{y}} \int_{\mathfrak{z}}^{\mathrm{z}} \mathrm{D}_x k\,dy\,dz \\
& + \Big|_{}^{y=\mathrm{y}} \int_{\mathfrak{z}}^{\mathrm{z}} k\,\mathrm{D}_x \mathrm{y}\,dz - \Big|_{}^{y=\mathfrak{y}} \int_{\mathfrak{z}}^{\mathrm{z}} k\,\mathrm{D}_x \mathfrak{y}\,dz \\
& + \int_{\mathfrak{y}}^{\mathrm{y}} \Big|_{}^{z=\mathrm{z}} k\,\mathrm{D}_x \mathrm{z}\,dy - \int_{\mathfrak{y}}^{\mathrm{y}} \Big|_{}^{z=\mathfrak{z}} k\,\mathrm{D}_x \mathfrak{z}\,dy.
\end{aligned}$$

Enfin, on tirera de la formule (3), combinée avec la formule (4), non seulement

$$(7)\qquad D_x \Big|_{y=\mathfrak{y}}^{y=\mathrm{y}} \int_{\mathfrak{z}}^{\mathrm{z}} k\,dz = \Big|_{y=\mathfrak{y}}^{y=\mathrm{y}} \int_{\mathfrak{z}}^{\mathrm{z}} D_x k\,dz$$
$$+ \Big|^{y=\mathrm{y}} D_y \int_{\mathfrak{z}}^{\mathrm{z}} k\,D_x \mathrm{y}\,dz - \Big|^{y=\mathfrak{y}} D_y \int_{\mathfrak{z}}^{\mathrm{z}} k\,D_x \mathfrak{y}\,dz$$
$$+ \Big|_{y=\mathfrak{y}}^{y=\mathrm{y}} \Big|^{z=\mathrm{z}} k\,D_x \mathrm{z} - \Big|_{y=\mathfrak{y}}^{y=\mathrm{y}} \Big|^{z=\mathfrak{z}} k\,D_x \mathfrak{z},$$

mais encore

$$(8)\qquad D_x \int_{\mathfrak{y}}^{\mathrm{y}} \Big|_{z=\mathfrak{z}}^{z=\mathrm{z}} k\,dy = \int_{\mathfrak{y}}^{\mathrm{y}} \Big|_{z=\mathfrak{z}}^{z=\mathrm{z}} D_x k\,dy$$
$$+ \Big|^{y=\mathrm{y}} \Big|_{z=\mathfrak{z}}^{z=\mathrm{z}} k\,D_x \mathrm{y} - \Big|^{y=\mathfrak{y}} \Big|_{z=\mathfrak{z}}^{z=\mathrm{z}} k\,D_x \mathfrak{y}$$
$$+ \int_{\mathfrak{y}}^{\mathrm{y}} \Big|^{z=\mathrm{z}} D_z k\,D_x \mathrm{z}\,dy - \int_{\mathfrak{y}}^{\mathrm{y}} \Big|^{z=\mathfrak{z}} D_z k\,D_x \mathfrak{z}\,dy.$$

Généralement, en vertu des formules (3) et (4), *la dérivée de k, relative à x, se composera de plusieurs termes dont on obtiendra le premier en remplaçant, sous les signes $\int$ ou $|$, la fonction k par sa dérivée $D_x k$. Les autres termes se grouperont deux à deux, de telle sorte que les divers groupes correspondront aux diverses variables y, z, ..., distinctes de x, et que, dans chaque groupe, les deux termes précédés, l'un du signe $+$, l'autre du signe $-$, correspondront, l'un à la limite supérieure, l'autre à la limite inférieure d'une même variable. Ajoutons que les divers termes seront, aux signes près, de mêmes formes et que pour obtenir l'un d'eux, par exemple le terme correspondant à la limite supérieure y de la variable y, on devra, en vertu de la formule* (3) *ou* (4), *substituer, dans la valeur donnée de $\square$ de k, le produit $k D_x \mathrm{y}$ à la fonction k, en remplaçant ou le signe*

$$\Big|_{y=\mathfrak{y}}^{y=\mathrm{y}} \quad \text{par} \quad \Big|^{y=\mathrm{y}} D_y,$$

ou le signe

$$\int_{\mathfrak{y}}^{\mathrm{y}} \quad \text{par} \quad \Big|^{y=\mathrm{y}},$$

et supprimant d'ailleurs, dans le second cas, la différentielle dy.

On pourrait concevoir que, dans la caractéristique $\square$, les signes

$$\Big|_{y=\mathfrak{y}}^{y=\mathrm{y}}, \quad \Big|_{z=\mathfrak{z}}^{z=\mathrm{z}}, \quad \ldots$$

fussent modifiés séparément ou simultanément, de telle sorte que le premier se trouvât réduit à un signe de la forme $\Big|^{y=\mathrm{y}}$, ou le second à un signe de la forme $\Big|^{z=\mathrm{z}}$, ... Alors, dans la valeur de $D_x \square\, k$, à l'aide de la règle que nous venons d'énoncer, on devrait réduire à un seul les deux termes correspondants aux deux limites d'une même variable, et conserver seulement, dans le premier cas, le terme correspondant à la limite y de la variable y, dans le second cas le terme correspondant à la limite z de la variable z, etc....

La dérivée $D_x \square\, k$, calculée comme nous venons de le dire, se composera généralement de termes dont chacun sera de l'une des formes que $\square\, k$ pourrait prendre, à cela près que la fonction k se trouvera remplacée par une autre, et que la lettre caractéristique

$$D_y \quad \text{ou} \quad D_z, \quad \ldots$$

pourra se trouver interposée entre deux signes de substitution ou d'intégration. Mais il est bon d'observer que, dans ce dernier cas, on pourra, en recourant de nouveau à la formule (3) ou (4), se débarrasser de toute caractéristique D_y ou D_z, ... qui précéderait un ou plusieurs signes de substitution ou d'intégration. Ainsi, par exemple, pour se débarrasser, dans la formule (5), de la caractéristique D_y qui précède le signe $\Big|_{z=\mathfrak{z}}^{z=\mathrm{z}}$, il suffira d'observer que l'on a, en vertu de la formule (3),

$$D_y \Big|_{z=\mathfrak{z}}^{z=\mathrm{z}} k = \Big|_{z=\mathfrak{z}}^{z=\mathrm{z}} D_y k + \Big|^{z=\mathrm{z}} D_z k\,D_y \mathrm{z} - \Big|^{z=\mathfrak{z}} D_z k\,D_y \mathfrak{z},$$

et par suite

$$(9)\quad \begin{cases} \displaystyle \Big|^{y=\mathrm{y}} D_y \Big|_{z=\mathfrak{z}}^{z=\mathrm{z}} k D_x \mathrm{y} = \Big|^{y=\mathrm{y}} \Big|_{z=\mathfrak{z}}^{z=\mathrm{z}} D_y k D_x \mathrm{y} \\ \displaystyle \qquad + \Big|^{y=\mathrm{y}} \Big|^{z=\mathrm{z}} D_z k D_y \mathrm{z} D_x \mathrm{y} - \Big|^{y=\mathrm{y}} \Big|^{z=\mathfrak{z}} D_z k D_y \mathfrak{z} D_x \mathrm{y}, \\ \displaystyle \Big|^{y=\mathrm{y}} D_y \Big|_{z=\mathfrak{z}}^{z=\mathrm{z}} k D_x \mathfrak{y} = \Big|^{y=\mathfrak{y}} \Big|_{z=\mathfrak{z}}^{z=\mathrm{z}} D_y k D_x \mathfrak{y} \\ \displaystyle \qquad + \Big|^{y=\mathrm{y}} \Big|^{z=\mathrm{z}} D_z k D_y \mathrm{z} D_x \mathrm{y} - \Big|^{y=\mathfrak{y}} \Big|^{z=\mathfrak{z}} D_z k D_y \mathfrak{z} D_x \mathfrak{y}. \end{cases}$$

Pareillement, pour se débarrasser, dans la formule (7), de la caractéristique D_y qui précède le signe d'intégration $\int_{\mathfrak{z}}^{\mathrm{z}}$, il suffira d'observer que l'on a, en vertu de la formule (4),

$$D_y \int_{\mathfrak{z}}^{\mathrm{z}} k\,dz = \int_{\mathfrak{z}}^{\mathrm{z}} D_y k\,dz + \Big|^{z=\mathrm{z}} k D_y \mathrm{z} - \Big|^{z=\mathfrak{z}} k D_y \mathfrak{z}$$

et, par suite,

$$(10)\quad \begin{cases} \displaystyle \Big|^{y=\mathrm{y}} D_y \int_{\mathfrak{z}}^{\mathrm{z}} k D_x \mathrm{y}\,dz = \Big|^{y=\mathrm{y}} \int_{\mathfrak{z}}^{\mathrm{z}} D_y k D_x \mathrm{y}\,dz \\ \displaystyle \qquad + \Big|^{y=\mathrm{y}} \Big|^{z=\mathrm{z}} k D_y \mathrm{z}\, D_x \mathrm{y} - \Big|^{y=\mathrm{y}} \Big|^{z=\mathfrak{z}} k D_y \mathfrak{z}\, D_x \mathrm{y}, \\ \displaystyle \Big|^{y=\mathfrak{y}} D_y \int_{\mathfrak{z}}^{\mathrm{z}} k D_x \mathfrak{y}\,dz = \Big|^{y=\mathfrak{y}} \int_{\mathfrak{z}}^{\mathrm{z}} D_y k D_x \mathfrak{y}\,dz \\ \displaystyle \qquad + \Big|^{y=\mathfrak{y}} \Big|^{z=\mathrm{z}} k D_y \mathrm{z}\, D_x \mathfrak{y} - \Big|^{y=\mathfrak{y}} \Big|^{z=\mathfrak{z}} k D_y \mathfrak{z}\, D_x \mathfrak{y}. \end{cases}$$

A l'aide de semblables opérations, répétées autant de fois qu'il sera nécessaire, on finira évidemment par obtenir une valeur de $D_x \square k$ composée de termes dans chacun desquels les signes de substitution ou d'intégration ne seront plus jamais séparés les uns des autres par l'une des caractéristiques D_y, D_z, ... On trouvera ainsi

$$(11)\qquad D_x \square k = \square D_x k + \square_{\prime} k_{\prime} + \square_{\prime\prime} k_{\prime\prime} + \ldots,$$

en désignant par

$$k_{\prime},\quad k_{\prime\prime},\quad \ldots,$$

des fonctions rationnelles de

$$k,\quad D_y k,\quad D_z k,\quad \ldots$$

et de

$$D_x \mathfrak{y},\quad D_x \mathfrak{z},\quad \ldots,\quad D_y \mathfrak{z},\quad \ldots,$$
$$D_x \mathrm{y},\quad D_x \mathrm{z},\quad \ldots,\quad D_y \mathrm{z},\quad \ldots,$$

qui seront linéaires par rapport à

$$k,\quad D_y k,\quad D_z k;$$

tandis que les caractéristiques

$$\square_{\prime},\quad \square_{\prime\prime},\quad \ldots,$$

désigneront des systèmes d'opérations pareils à celui qu'indique la caractéristique $\square$, à cela près que dans le passage de $\square$ à $\square_{\prime}$ ou à $\square_{\prime\prime}$, ... on pourra remplacer quelques opérations par d'autres, en substituant, par exemple, au signe

$$\Big|_{y=\mathfrak{y}}^{y=\mathrm{y}},$$

ou bien au signe

$$\int_{\mathfrak{y}}^{\mathrm{y}},$$

l'un des deux signes

$$\Big|^{y=\mathrm{y}},\quad \Big|^{y=\mathfrak{y}},$$

et supprimant dans le second cas la différentielle dy. Ajoutons que, dans les expressions $\square_{\prime} k_{\prime}$, $\square_{\prime\prime} k_{\prime\prime}$, etc.... la dérivée $D_y k$ se trouvera toujours précédée de l'un des signes

$$\Big|^{y=\mathrm{y}},\quad \Big|^{y=\mathfrak{y}},$$

et jamais engagée sous le signe $\int_{\mathfrak{y}}^{\mathrm{y}}$ d'une intégration relative à la variable y; que pareillement la dérivée $D_z k$ se trouvera toujours précédée de l'un des deux signes.

$$\Big|^{z=\mathrm{z}},\quad \Big|^{z=\mathfrak{z}},$$

et jamais engagée sous le signe $\int_{\mathfrak{z}}^{\mathrm{z}}$ d'une intégration relative à la variable z; etc.

Concevons à présent que l'on intègre, par rapport à la variable x, et entre les limites

$$x = x, \qquad x = \mathrm{X},$$

les deux membres de la formule (1). Alors, en posant, pour abréger,

$$\mathrm{K} = \int_{x}^{\mathrm{X}} \square_{\prime} k_{\prime}\, dx + \int_{x}^{\mathrm{X}} \square_{\prime\prime} k_{\prime\prime}\, dx + \ldots, \tag{12}$$

on trouvera

$$\Big|_{x=x}^{x=\mathrm{X}} \square k = \int_{x}^{\mathrm{X}} \square\, \mathrm{D}_x k\, dx - \mathrm{K}, \tag{13}$$

et, par suite,

$$\int_{x}^{\mathrm{X}} \square\, \mathrm{D}_x k\, dx = \Big|_{x=x}^{x=\mathrm{X}} \square k - \mathrm{K}. \tag{14}$$

Or, comme, dans le second membre de la formule (12), $k_{\prime}$, $k_{\prime\prime}$, …, représentent des fonctions linéaires de

$$k, \quad \mathrm{D}_y k, \quad \mathrm{D}_z k, \quad \ldots,$$

il est clair qu'en vertu de l'équation (14), l'intégrale

$$\int_{x}^{\mathrm{X}} \square\, \mathrm{D}_x k\, dx,$$

dans laquelle la dérivée $\mathrm{D}_x k$ reste engagée sous le signe $\int$ d'une intégration relative à x, se trouvera transformée en une somme de termes dont aucun n'offrira plus cette particularité.

Au reste, une transformation analogue est applicable à l'intégrale

$$\int_{x}^{\mathrm{X}} \square(\mathrm{R}\, \mathrm{D}_x k)\, dx,$$

que l'on obtient en remplaçant dans la précédente $\mathrm{D}_x k$ par le produit

$$\mathrm{R}\, \mathrm{D}_x k,$$

et en supposant que le premier facteur R représente une nouvelle fonction de $x, y, z, \ldots$. En effet, comme on aura

$$\mathrm{D}_x(\mathrm{R} k) = \mathrm{R}\, \mathrm{D}_x k + k\, \mathrm{D}_x \mathrm{R},$$

et par suite

$$\mathrm{R}\, \mathrm{D}_x k = \mathrm{D}_x(\mathrm{R} k) - k\, \mathrm{D}_x \mathrm{R}, \tag{15}$$

on en conclura

$$\int_{x}^{\mathrm{X}} \square(\mathrm{R}\, \mathrm{D}_x k)\, dx = \int_{x}^{\mathrm{X}} \square\, \mathrm{D}_x(\mathrm{R} k)\, dx - \int_{x}^{\mathrm{X}} \square(k\, \mathrm{D}_x \mathrm{R})\, dx. \tag{16}$$

D'autre part, on tirera de la formule (10), en y remplaçant k par $\mathrm{R}k$,

$$\int_{x}^{\mathrm{X}} \square\, \mathrm{D}_x(\mathrm{R} k)\, dx = \Big|_{x=x}^{x=\mathrm{X}} \square(\mathrm{R} k) - \mathcal{X}, \tag{17}$$

$\mathcal{X}$ désignant une somme d'intégrales relatives à x, mais dont aucune ne renfermera $\mathrm{D}_x k$ sous le signe $\int$. Donc la formule (16) donnera

$$\int_{x}^{\mathrm{X}} \square(\mathrm{R}\, \mathrm{D}_x k)\, dx = \Big|_{x=x}^{x=\mathrm{X}} \square(\mathrm{R} k) - \mathcal{X} - \int_{x}^{\mathrm{X}} \square(k\, \mathrm{D}_x \mathrm{R})\, dx. \tag{18}$$

Or, l'équation (18) transforme évidemment l'intégrale simple ou multiple

$$\int_{x}^{\mathrm{X}} \square(\mathrm{R}\, \mathrm{D}_x k)\, dx,$$

dans laquelle la dérivée $\mathrm{D}_x k$ se trouve engagée sous le signe $\int$, en une somme de termes dont aucun n'offre plus cette particularité.

Il importe d'observer que les formules (11), (14) et (17) peuvent être étendues au cas où, dans la caractéristique $\square$, on substituerait, simultanément ou séparément,

au signe $\Big|_{y}^{\mathrm{Y}}$, l'un des signes $\Big|^{\mathrm{Y}}$, $\Big|^{y}$;

au signe $\Big|_{z}^{\mathrm{Z}}$, l'un des signes $\Big|^{\mathrm{Z}}$, $\Big|^{z}$,

. . . .

Dans le cas particulier où l'on a $\square k = k$, les termes représentés dans la formule (11) par $\square_{\prime} k_{\prime}$, $\square_{\prime\prime} k_{\prime\prime}$, …, se réduisent évidemment à zéro, avec les sommes représentées par K et par $\mathcal{X}$ dans les formules (14) et (18). Donc alors, la formule (18) se réduit à l'équation connue

$$\int_{x}^{\mathrm{X}} \mathrm{R}\, \mathrm{D}_x k\, dx = \Big|_{x=x}^{x=\mathrm{X}} \mathrm{R} k - \int_{x}^{\mathrm{X}} k\, \mathrm{D}_x \mathrm{R}\, dx, \tag{19}$$

à l'aide de laquelle s'effectue l'intégration par parties, appliquée à une intégrale simple. Or, cette opération consiste précisément à transformer une intégrale simple

$$\int_{\mathfrak{x}}^{\mathrm{x}} \mathrm{R}\,\mathrm{D}_x k\, dx,$$

dans laquelle la dérivée $\mathrm{D}_x k$ d'une certaine fonction k, différentiée par rapport à x, se trouve engagée sous le signe $\int$, en une somme composée de deux termes dont aucun ne renferme plus cette même dérivée; et, comme l'équation (18) fournit une transformation semblable de l'intégrale

$$\int_{\mathfrak{x}}^{\mathrm{x}} \square(\mathrm{R}\,\mathrm{D}_x k)\, dx,$$

nous pouvons dire que cette équation est, pour l'intégrale dont il s'agit, la formule d'intégration par parties.

Parmi les applications que l'on peut faire des formules (14) et (18), on doit remarquer celles qui correspondent au cas où l'on suppose

$$\square k = \Big|_{y=\mathfrak{y}}^{y=\mathrm{y}} k, \qquad \text{ou bien} \qquad \square k = \int_{\mathfrak{y}}^{\mathrm{y}} k\, dy.$$

Dans la première supposition l'on a

$$\square \mathrm{D}_x k = \Big|_{y=\mathfrak{y}}^{y=\mathrm{y}} \mathrm{D}_x k.$$

D'ailleurs, on tire de l'équation (3)

$$\Big|_{y=\mathfrak{y}}^{y=\mathrm{y}} \mathrm{D}_x k = \mathrm{D}_x \Big|_{y=\mathfrak{y}}^{y=\mathrm{y}} k - \Big|^{y=\mathrm{y}} \mathrm{D}_y k\, \mathrm{D}_x \mathrm{y} + \Big|^{y=\mathfrak{y}} \mathrm{D}_x k\, \mathrm{D}_x \mathfrak{y}.$$

En intégrant par rapport à x, entre les limites $\mathfrak{x}$ et x, les deux membres de la dernière équation, multipliés par dx, on obtient, à la place de la formule (14), la suivante

$$(20)\qquad \int_{\mathfrak{x}}^{\mathrm{x}} \Big|_{y=\mathfrak{y}}^{y=\mathrm{y}} \mathrm{D}_x k\, dx = \Big|_{x=\mathfrak{x}}^{x=\mathrm{x}} \; \Big|_{y=\mathfrak{y}}^{y=\mathrm{y}} k$$
$$- \int_{\mathfrak{x}}^{\mathrm{x}} \Big|^{y=\mathrm{y}} \mathrm{D}_y k\, \mathrm{D}_x \mathrm{y}\, dx + \int_{\mathfrak{x}}^{\mathrm{x}} \Big|^{y=\mathfrak{y}} \mathrm{D}_y k\, \mathrm{D}_x \mathfrak{y}\, dx;$$

puis, en remplaçant k par $\mathrm{R}k$, et ayant égard à l'équation (16), on trouve

$$\int_{\mathfrak{x}}^{\mathrm{x}} \Big|_{y=\mathfrak{y}}^{y=\mathrm{y}} \mathrm{R}\mathrm{D}_x k\, dx = \Big|_{x=\mathfrak{x}}^{x=\mathrm{x}} \; \Big|_{y=\mathfrak{y}}^{y=\mathrm{y}} \mathrm{R}k - \int_{\mathfrak{x}}^{\mathrm{x}} \Big|_{y=\mathfrak{y}}^{y=\mathrm{y}} k\, \mathrm{D}_x \mathrm{R}\, dx$$
$$- \int_{\mathfrak{x}}^{\mathrm{x}} \Big|^{y=\mathrm{y}} \mathrm{D}_y(\mathrm{R}k)\, \mathrm{D}_x \mathrm{y}\, dx + \int_{\mathfrak{x}}^{\mathrm{x}} \Big|^{y=\mathfrak{y}} \mathrm{D}_y(\mathrm{R}k)\, \mathrm{D}_x \mathfrak{y}\, dx.$$

Enfin, comme on aura non seulement

$$\Big|_{y=\mathfrak{y}}^{y=\mathrm{y}} k\, \mathrm{D}_x \mathrm{R} = \Big|^{y=\mathrm{y}} k\, \mathrm{D}_x \mathrm{R} - \Big|^{y=\mathfrak{y}} k\, \mathrm{D}_x \mathrm{R},$$

et

$$\mathrm{D}_y(\mathrm{R}k) = \mathrm{R}\,\mathrm{D}_y k + k\,\mathrm{D}_y \mathrm{R},$$

mais aussi

$$\Big|^{y=\mathrm{y}} (\mathrm{D}_x \mathrm{R} + \mathrm{D}_y \mathrm{R}\, \mathrm{D}_x \mathrm{y}) = \mathrm{D}_x \Big|^{y=\mathrm{y}} \mathrm{R},$$

et

$$\Big|^{y=\mathfrak{y}} (\mathrm{D}_x \mathrm{R} + \mathrm{D}_y \mathrm{R}\, \mathrm{D}_x \mathfrak{y}) = \mathrm{D}_x \Big|^{y=\mathfrak{y}} \mathrm{R};$$

on trouvera encore

$$(21)\qquad \int_{\mathfrak{x}}^{\mathrm{x}} \Big|_{y=\mathfrak{y}}^{y=\mathrm{y}} \mathrm{R}\,\mathrm{D}_x k\, dx = \Big|_{x=\mathfrak{x}}^{x=\mathrm{x}} \; \Big|_{y=\mathfrak{y}}^{y=\mathrm{y}} \mathrm{R}k$$
$$- \int_{\mathfrak{x}}^{\mathrm{x}} \Big|^{y=\mathrm{y}} \mathrm{R}\,\mathrm{D}_y k\, \mathrm{D}_x \mathrm{y}\, dx + \int_{\mathfrak{x}}^{\mathrm{x}} \Big|^{y=\mathfrak{y}} \mathrm{R}\,\mathrm{D}_y k\, \mathrm{D}_x \mathfrak{y}\, dx$$
$$- \int_{\mathfrak{x}}^{\mathrm{x}} \Big|^{y=\mathrm{y}} k\, \mathrm{D}_x \Big|^{y=\mathrm{y}} \mathrm{R}\, dx + \int_{\mathfrak{x}}^{\mathrm{x}} \Big|^{y=\mathfrak{y}} k\, \mathrm{D}_x \Big|^{y=\mathfrak{y}} \mathrm{R}\, dx.$$

Si, dans la formule (21), on remplace le signe $\Big|_{y=\mathfrak{y}}^{y=\mathrm{y}}$ par le signe $\Big|^{y=\mathrm{y}}$, on aura simplement

$$(22)\qquad \int_{\mathfrak{x}}^{\mathrm{x}} \Big|^{y=\mathrm{y}} \mathrm{R}\,\mathrm{D}_x k\, dx = \Big|_{x=\mathfrak{x}}^{x=\mathrm{x}} \; \Big|^{y=\mathrm{y}} \mathrm{R}k - \int_{\mathfrak{x}}^{\mathrm{x}} \Big|^{y=\mathrm{y}} \mathrm{R}\,\mathrm{D}_y k\, \mathrm{D}_x \mathrm{y}\, dx$$
$$- \int_{\mathfrak{x}}^{\mathrm{x}} \Big|^{y=\mathrm{y}} k\, \mathrm{D}_x \Big|^{y=\mathrm{y}} \mathrm{R}\, dx.$$

Dans le cas où l'on suppose

$$\square k = \int_y^{\mathrm{y}} k\, dy,$$

on a

$$\square D_x k = \int_y^{\mathrm{y}} D_x k\, dy.$$

D'ailleurs, on tire de l'équation (4)

$$\int_y^{\mathrm{y}} D_x k\, dy = D_x \int_y^{\mathrm{y}} k\, dy - \overset{y=\mathrm{y}}{|}\, k D_x \mathrm{y} + \overset{y=y}{|}\, k D_x y.$$

En intégrant par rapport à x, entre les limites x, x, les deux membres de la dernière équation, multipliés par dx, on obtient, à la place de la formule (14), la suivante

$$(23)\qquad \int_x^{\mathrm{x}} \int_y^{\mathrm{y}} D_x k\, dy\, dx = \overset{x=\mathrm{x}}{\underset{x=x}{|}} \int_y^{\mathrm{y}} k\, dy - \int_x^{\mathrm{x}} \overset{y=\mathrm{y}}{|}\, k D_x \mathrm{y}\, dx + \int_x^{\mathrm{x}} \overset{y=y}{|}\, k D_x y\, dx,$$

qui est évidemment comprise, comme cas particulier, dans la formule (5) du § VII; puis, en remplaçant k par $\mathrm{R}k$, et ayant égard à l'équation (16), on trouve

$$(24)\qquad \int_x^{\mathrm{x}} \int_y^{\mathrm{y}} \mathrm{R} D_x k\, dx\, dy = \overset{x=\mathrm{x}}{\underset{x=x}{|}} \int_y^{\mathrm{y}} \mathrm{R} k\, dy - \int_x^{\mathrm{x}} \int_y^{\mathrm{y}} k D_x \mathrm{R}\, dx\, dy - \int_x^{\mathrm{x}} \overset{y=\mathrm{y}}{|}\, \mathrm{R} k D_x \mathrm{y}\, dx + \int_x^{\mathrm{x}} \overset{y=y}{|}\, \mathrm{R} k D_x y\, dx.$$

Les formules (21), (22), (24) sont celles que fournit l'intégration par parties, appliquée aux expressions différentielles

$$\overset{y=\mathrm{y}}{\underset{y=y}{|}}\, \mathrm{R} D_x k\, dx, \quad \overset{y=\mathrm{y}}{|}\, \mathrm{R} D_x k\, dx. \quad \left(\int_y^{\mathrm{y}} \mathrm{R} D_x k\, dy \right) dx.$$

Il est maintenant facile de voir quelles sont les réductions que l'on peut effectuer, à l'aide d'intégrations par parties, dans la variation

d'une intégrale multiple s, relative aux variables $x, y, z, \ldots$, et spécialement dans la partie de cette variation qui dépend des variations propres des fonctions renfermées sous le signe $\int$. En effet, soient

$$u, \quad v, \quad w, \quad \ldots$$

ces fonctions;

$$x \text{ et } \mathrm{x}, \qquad y \text{ et } \mathrm{y}, \qquad z \text{ et } \mathrm{z}$$

les limites des intégrations relatives à $x, y, z, \ldots$, et $\mathfrak{d} s$ la partie de δs qui correspond aux variations propres

$$\mathfrak{d} u, \quad \mathfrak{d} v, \quad \mathfrak{d} w, \quad \ldots$$

des fonctions $u, v, w, \ldots$. D'après ce qui a été dit dans le paragraphe précédent, on aura

$$(25)\qquad \mathfrak{d} s = \sum \int_x^{\mathrm{x}} \int_y^{\mathrm{y}} \int_z^{\mathrm{z}} \ldots \mathrm{R} D_x^l D_y^m D_z^n \ldots \mathfrak{d} u\, dx\, dy\, dz \ldots + \ldots,$$

c'est-à-dire que $\mathfrak{d} s$ se composera de termes de la forme

$$(26)\qquad \int_x^{\mathrm{x}} \int_y^{\mathrm{y}} \int_z^{\mathrm{z}} \ldots \mathrm{R} D_x^l D_y^m D_z^n \ldots \mathfrak{d} u\, dx\, dy\, dz \ldots;$$

R désignant un facteur qui renfermera $x, y, z, \ldots, u, v, w, \ldots$ et pourra être considéré comme fonction des seules variables $x, y, z, \ldots$. Or, en vertu d'intégrations par parties, effectuées à l'aide de la formule (18), on pourra toujours réduire l'intégrale (21) à une somme de termes dont aucun n'offre, sous le signe $\int$ d'une intégration relative à une variable donnée, une dérivée de $\mathfrak{d} u$ relative à la même variable. C'est, du moins, ce que l'on démontrera sans peine à l'aide des considérations suivantes.

Concevons d'abord que l'on pose, dans l'équation (18),

$$k = D_x^{l-1} D_y^m D_z^n \ldots \mathfrak{d} u,$$

et

$$\square k = \int_y^{\mathrm{y}} \int_z^{\mathrm{z}} \ldots k\, dy\, dz \ldots.$$

Alors cette équation transformera l'intégrale (21) en une somme de termes qui renfermeront la variation propre δu, toujours affectée, sous le signe $\int_x^X$, de la caractéristique D_x^{l-1}; sous le signe $\int_y^Y$, de la caractéristique D_y^m; sous le signe $\int_z^Z$, de la caractéristique D_z^n, etc. Mais, à l'aide de nouvelles intégrations par parties, effectuées encore à l'aide de la formule (18), on pourra réduire successivement la caractéristique D_x^{l-1} aux caractéristiques

$$D_x^{l-2},\quad D_x^{l-3},\quad \ldots,\quad D_x,$$

et même faire disparaître finalement, sous le signe $\int_x^X$, la caractéristique D_x, appliquée à la variation δu. Après cette disparition, on pourra, en opérant toujours de la même manière, réduire successivement, sous le signe $\int_y^Y$, la caractéristique D_y^m aux caractéristiques

$$D_y^{m-1},\quad D_y^{m-2},\quad \ldots,\quad D_y,$$

puis faire disparaître, sous le signe $\int_y^Y$, la caractéristique D_y; et continuer ainsi jusqu'à ce qu'aucun terme ne renferme, sous le signe d'une intégration relative à une variable donnée, une dérivée de δu relative à cette variable. Cette méthode de réduction, appliquée non seulement à l'intégrale (26), mais encore à chacune de celles que peut contenir le second membre de l'équation (25), fournira la valeur de δs sous la forme qu'il convient de lui donner dans la solution des problèmes auxquels on est conduit par le calcul des variations. Il est bon d'observer qu'après les réductions opérées comme on vient de le dire, les dérivées de δu, δv, ..., relatives à x, ne pouvant être précédées du signe $\int_x^X$, se trouveront nécessairement précédées de l'un des signes

$$\overset{x=X}{|},\qquad \overset{x=x}{|},\qquad \overset{x=X}{\underset{x=x}{|}},$$

puisque la valeur de chacun des termes renfermés dans δs doit dépendre non de la variable x, mais des limites x, X. Pour une raison semblable, les dérivées de δu, δv, ..., relatives à y, devront être précédées de l'un des signes

$$\overset{y=Y}{|},\qquad \overset{y=y}{|},\qquad \overset{y=Y}{\underset{y=y}{|}};$$

les dérivées de δu, δv, ..., relatives à la variable z, devront être précédées de l'un des signes

$$\overset{z=Z}{|},\qquad \overset{z=z}{|},\qquad \overset{z=Z}{\underset{z=z}{|}},\qquad \ldots.$$

Il est bon d'observer encore que toutes les réductions indiquées se déduisent de la formule (15), jointe à la règle qui sert à déterminer la valeur générale d'une expression de la forme $D_z \square k$. Donc, cette formule et cette règle offriront toujours le moyen de réduire un terme quelconque, pris au hasard dans la variation d'une intégrale multiple, à la forme convenable. Pour vérifier cette assertion sur un exemple, supposons que, l'intégrale multiple s étant relative à trois variables x, y, z, la fonction sous le signe $\int$ renferme, avec x, y, z, une fonction u de x, y, z, et ses dérivées des trois premiers ordres, par conséquent la dérivée du troisième ordre

$$r = D_x D_y D_z u. \tag{27}$$

Alors δs renfermera un terme de la forme

$$\int_x^X \int_y^Y \int_z^Z R\,\delta r\,dx\,dy\,dz.$$

Il y a plus : si la fonction sous le signe $\int$, dans l'intégrale donnée, dépend uniquement de x, y, z et r, on aura simplement

$$\delta s = \int_x^X \int_y^Y \int_z^Z R\,\delta r\,dx\,dy\,dz, \tag{28}$$

ou, ce qui revient au même, eu égard à la formule (27),

$$\delta s = \int_x^{\mathrm{X}}\int_y^{\mathrm{Y}}\int_z^{\mathrm{Z}} \mathrm{R}\,\mathrm{D}_x\mathrm{D}_y\mathrm{D}_z\delta u\,dx\,dy\,dz. \tag{29}$$

Or, pour réduire cette valeur de δs à la forme convenable, il suffira de recourir à la formule (15) et à la règle qui fournit la valeur des expressions de la forme $\square\,\mathrm{D}_x k$, en opérant comme il suit.

On aura d'abord, en vertu de la formule (15),

$$\mathrm{R}\,\mathrm{D}_x\mathrm{D}_y\mathrm{D}_z\delta u = \mathrm{D}_x(\mathrm{R}\,\mathrm{D}_y\mathrm{D}_z\delta u) - \mathrm{D}_x\mathrm{R}\,\mathrm{D}_y\mathrm{D}_z\delta u,$$

et, par suite, l'équation (29) donnera

$$\begin{aligned}\delta s = & \int_x^{\mathrm{X}}\int_y^{\mathrm{Y}}\int_z^{\mathrm{Z}} \mathrm{D}_x(\mathrm{R}\,\mathrm{D}_y\mathrm{D}_z\delta u)\,dx\,dy\,dz \\ & -\int_x^{\mathrm{X}}\int_y^{\mathrm{Y}}\int_z^{\mathrm{Z}} \mathrm{D}_x\mathrm{R}\,\mathrm{D}_y\mathrm{D}_z\delta u\,dx\,dy\,dz.\end{aligned} \tag{30}$$

De plus, en vertu de la règle ci-dessus rappelée, l'intégrale

$$\int_y^{\mathrm{Y}}\int_z^{\mathrm{Z}} \mathrm{D}_x(\mathrm{R}\,\mathrm{D}_y\mathrm{D}_z\delta u)\,dy\,dz$$

représentera le premier terme de la valeur de l'expression

$$\mathrm{D}_x\int_y^{\mathrm{Y}}\int_z^{\mathrm{Z}} \mathrm{R}\,\mathrm{D}_y\mathrm{D}_z\delta u\,dy\,dz.$$

On aura effectivement

$$\begin{aligned}& \mathrm{D}_x\int_y^{\mathrm{Y}}\int_z^{\mathrm{Z}} \mathrm{R}\,\mathrm{D}_y\mathrm{D}_z\delta u\,dy\,dz \\ = & \int_y^{\mathrm{Y}}\int_z^{\mathrm{Z}} \mathrm{D}_x(\mathrm{R}\,\mathrm{D}_y\mathrm{D}_z\delta u)\,dz\,dy \\ & + \Big|^{y=\mathrm{Y}}\int_z^{\mathrm{Z}} \mathrm{R}\,\mathrm{D}_x\mathrm{Y}\,\mathrm{D}_y\mathrm{D}_z\delta u\,dz - \Big|^{y=y}\int_z^{\mathrm{Z}} \mathrm{R}\,\mathrm{D}_x y\,\mathrm{D}_y\mathrm{D}_z\delta u\,dz \\ & + \int_y^{\mathrm{Y}}\Big|^{z=\mathrm{Z}} \mathrm{R}\,\mathrm{D}_x\mathrm{Z}\,\mathrm{D}_y\mathrm{D}_z\delta u\,dy - \int_y^{\mathrm{Y}}\Big|^{z=z} \mathrm{R}\,\mathrm{D}_x z\,\mathrm{D}_y\mathrm{D}_z\delta u\,dy,\end{aligned}$$

puis on en conclura

$$\begin{aligned}& \int_y^{\mathrm{Y}}\int_z^{\mathrm{Z}} \mathrm{D}_x(\mathrm{R}\,\mathrm{D}_y\mathrm{D}_z\delta u)\,dy\,dz \\ = & \,\mathrm{D}_x\int_y^{\mathrm{Y}}\int_z^{\mathrm{Z}} \mathrm{R}\,\mathrm{D}_y\mathrm{D}_z\delta u\,dy\,dz \\ & - \Big|^{y=\mathrm{Y}}\int_z^{\mathrm{Z}} \mathrm{R}\,\mathrm{D}_x\mathrm{Y}\,\mathrm{D}_y\mathrm{D}_z\delta u\,dz + \Big|^{y=y}\int_z^{\mathrm{Z}} \mathrm{R}\,\mathrm{D}_x y\,\mathrm{D}_y\mathrm{D}_z\delta u\,dz \\ & - \int_y^{\mathrm{Y}}\Big|^{z=\mathrm{Z}} \mathrm{R}\,\mathrm{D}_x\mathrm{Z}\,\mathrm{D}_y\mathrm{D}_z\delta u\,dy + \int_y^{\mathrm{Y}}\Big|^{z=z} \mathrm{R}\,\mathrm{D}_x z\,\mathrm{D}_y\mathrm{D}_z\delta u\,dy;\end{aligned}$$

et, par suite, en intégrant par rapport à x, entre les limites x, X, chaque terme multiplié par dx, on obtiendra l'équation

$$\begin{aligned}& \int_x^{\mathrm{X}}\int_y^{\mathrm{Y}}\int_z^{\mathrm{Z}} \mathrm{D}_x(\mathrm{R}\,\mathrm{D}_y\mathrm{D}_z\delta u)\,dx\,dy\,dz \\ = & \Big|_{x=x}^{x=\mathrm{X}}\int_y^{\mathrm{Y}}\int_z^{\mathrm{Z}} \mathrm{R}\,\mathrm{D}_y\mathrm{D}_z\delta u\,dy\,dz \\ & - \int_x^{\mathrm{X}}\Big|^{y=\mathrm{Y}}\int_z^{\mathrm{Z}} \mathrm{R}\,\mathrm{D}_x\mathrm{Y}\,\mathrm{D}_y\mathrm{D}_z\delta u\,dx\,dz + \int_x^{\mathrm{X}}\Big|^{y=y} \mathrm{R}\,\mathrm{D}_x y\,\mathrm{D}_y\delta u\,dx\,dz \\ & - \int_x^{\mathrm{X}}\int_y^{\mathrm{Y}}\Big|^{z=\mathrm{Z}} \mathrm{R}\,\mathrm{D}_x\mathrm{Z}\,\mathrm{D}_y\mathrm{D}_z\delta u\,dx\,dy + \int_x^{\mathrm{X}}\int_y^{\mathrm{Y}}\Big|^{z=z} \mathrm{R}\,\mathrm{D}_x z\,\mathrm{D}_y\mathrm{D}_z\delta u\,dx\,dy,\end{aligned}$$

évidemment comprise comme cas particulier dans la formule (5) du cinquième paragraphe. Donc l'équation (30) pourra être réduite à la formule

$$\begin{aligned}\delta s = & \Big|_{x=x}^{x=\mathrm{X}}\int_y^{\mathrm{Y}}\int_z^{\mathrm{Z}} \mathrm{R}\,\mathrm{D}_y\mathrm{D}_z\delta u\,dy\,dz - \int_x^{\mathrm{X}}\int_y^{\mathrm{Y}}\int_z^{\mathrm{Z}} \mathrm{D}_x\mathrm{R}\,\mathrm{D}_y\mathrm{D}_z\delta u\,dx\,dy\,dz \\ & - \int_x^{\mathrm{X}}\Big|^{y=\mathrm{Y}}\int_z^{\mathrm{Z}} \mathrm{R}\,\mathrm{D}_x\mathrm{Y}\,\mathrm{D}_y\mathrm{D}_z\delta u\,dx\,dz + \int_x^{\mathrm{X}}\Big|^{y=y}\int_z^{\mathrm{Z}} \mathrm{R}\,\mathrm{D}_x y\,\mathrm{D}_y\mathrm{D}_z\delta u\,dx\,dz \\ & - \int_x^{\mathrm{X}}\int_y^{\mathrm{Y}}\Big|^{z=\mathrm{Z}} \mathrm{R}\,\mathrm{D}_x\mathrm{Z}\,\mathrm{D}_y\mathrm{D}_z\delta u\,dx\,dy + \int_x^{\mathrm{X}}\int_y^{\mathrm{Y}}\Big|^{z=z} \mathrm{R}\,\mathrm{D}_x z\,\mathrm{D}_y\mathrm{D}_z\delta u\,dx\,dy.\end{aligned} \tag{31}$$

dans laquelle aucun terme du second membre n'offre la variation propre δu précédée de la caractéristique D_x, sous le signe $\int_x^X$ d'une intégration relative à la variable x.

Si maintenant on veut faire en sorte qu'aucun terme ne renferme la variation δu précédée de la caractéristique D_y, sous le signe $\int_y^Y$ d'une intégration relative à la variable y, il suffira de recourir de nouveau à la formule (15) et à la règle ci-dessus rappelée; ou, ce qui revient au même, il suffira de recourir aux formules (22 et (24) desquelles on tirera

$$\int_y^Y\int_z^Z RD_yD_z\delta u\,dy\,dz=\underset{y=y}{\overset{y=Y}{\Big|}}\int_z^Z RD_z\delta u\,dz-\int_y^Y\int_z^Z D_yRD_z\delta u\,dy\,dz$$
$$-\int_y^Y\overset{z=Z}{\Big|}RD_yZD_z\delta u\,dy+\int_y^Y\overset{z=z}{\Big|}RD_yz\,\delta u\,dy,$$

$$\int_y^Y\int_z^Z D_xRD_yD_z\delta u\,dy\,dz=\underset{y=y}{\overset{y=Y}{\Big|}}\int_z^Z D_xRD_z\delta u\,dz-\int_y^Y\int_z^Z D_xD_yRD_z\delta u\,dy\,dz$$
$$-\int_y^Y\overset{z=Z}{\Big|}D_xRD_yZD_z\delta u\,dy$$
$$+\int_y^Y\overset{z=z}{\Big|}D_zRD_yz\,D_y\delta u\,dy,$$

$$\int_y^Y\overset{z=Z}{\Big|}RD_xZD_yD_z\delta u\,dy$$
$$=\underset{y=y}{\overset{y=Y}{\Big|}}\overset{z=Z}{\Big|}RD_xZD_z\delta u-\int_y^Y\overset{z=Z}{\Big|}RD_xZD_yZD_z^2\delta u\,dy$$
$$-\int_y^Y D_y\Big(\overset{z=Z}{\Big|}RD_xZ\Big)\overset{z=Z}{\Big|}D_z\delta u\,dy,$$

$$\int_y^Y\overset{z=z}{\Big|}RD_xz\,D_yD_z\delta u\,dy$$
$$=\underset{y=y}{\overset{y=Y}{\Big|}}\overset{z=z}{\Big|}RD_xz\,D_z\delta u-\int_y^Y\overset{z=z}{\Big|}RD_xz\,D_yz\,D_z^2\delta u\,dy$$
$$-\int_y^Y D_y\Big(\overset{z=z}{\Big|}RD_xz\Big)\overset{z=z}{\Big|}D_z\delta u\,dy;$$

et, par suite,

$$(32)\quad \delta s=\underset{x=x}{\overset{x=X}{\Big|}}\underset{y=y}{\overset{y=Y}{\Big|}}\int_z^Z RD_z\delta u\,dz$$
$$-\underset{x=x}{\overset{x=X}{\Big|}}\int_y^Y\overset{z=Z}{\Big|}RD_yZD_z\delta u\,dy+\underset{x=x}{\overset{x=X}{\Big|}}\int_y^Y\overset{z=z}{\Big|}RD_yz\,D_z\delta u\,dy$$
$$-\int_x^X\underset{y=y}{\overset{y=Y}{\Big|}}\overset{z=Z}{\Big|}RD_xZD_z\delta u\,dx+\int_x^X\underset{y=y}{\overset{y=Y}{\Big|}}\overset{z=z}{\Big|}RD_xz\,D_z\delta u\,dx$$
$$-\underset{x=x}{\overset{x=X}{\Big|}}\int_x^Y\int_z^Z D_zRD_z\delta u\,dy\,dz-\int_x^X\underset{y=y}{\overset{y=Y}{\Big|}}\int_z^Z D_xRD_z\delta u\,dx\,dz$$
$$-\int_x^X\int_y^Y\Big[\overset{z=Z}{\Big|}D_xRD_yZ+D_y\Big(\overset{z=Z}{\Big|}RD_xZ\Big)\Big]\overset{z=Z}{\Big|}D_z\delta u\,dx\,dy$$
$$+\int_x^X\int_y^Y\Big[\overset{z=z}{\Big|}D_xRD_yz+D_y\Big(\overset{z=z}{\Big|}RD_xz\Big)\Big]\overset{z=z}{\Big|}D_z\delta u\,dx\,dy$$
$$-\int_x^X\overset{y=Y}{\Big|}\int_z^Z RD_xY D_yD_z\delta u\,dx\,dz+\int_x^X\overset{y=y}{\Big|}\int_z^Z RD_xy\,D_yD_z\delta u\,dx\,dz$$
$$+\int_x^X\int_y^Y\overset{z=Z}{\Big|}RD_xZD_yZD_z^2\delta u\,dx\,dy-\int_x^X\int_y^Y\overset{z=z}{\Big|}RD_xz\,D_yz\,D_z^2\delta u\,dx\,dy$$
$$+\int_x^X\int_y^Y\int_z^Z D_xD_yRD_z\delta u\,dx\,dy\,dz.$$

Enfin, si l'on veut faire en sorte que, dans les valeurs de δs, aucun terme ne renferme la variation δu, précédée de la caractéristique D_z, sous le signe $\int_z^Z$ d'une intégration relative à z, il suffira de recourir à la formule (15) et à la règle ci-dessus rappelée, ou, ce qui revient au même, à la formule (19), de laquelle on tirera non seulement

$$\int_z^Z RD_z\delta u\,dz=\underset{z=z}{\overset{z=Z}{\Big|}}R\delta u-\int_z^Z D_zR\delta u\,dz,$$
$$\int_z^Z D_xRD_z\delta u\,dz=\underset{z=z}{\overset{z=Z}{\Big|}}D_xR\delta u-\int_z^Z D_xD_zR\delta u\,dz,$$
$$\int_z^Z D_yRD_z\delta u\,dz=\underset{z=z}{\overset{z=Z}{\Big|}}D_yR\delta u-\int_z^Z D_yD_zR\delta u\,dz,$$
$$\int_z^Z D_xD_yRD_z\delta u\,dz=\underset{z=z}{\overset{z=Z}{\Big|}}D_xD_yR\delta u-\int_z^Z D_xD_yD_zR\delta u\,dz,$$

mais encore

$$\int_z^{\mathrm{z}} \mathrm{R}\,\mathrm{D}_y\mathrm{D}_z\delta u\,dz = \Big|_{z=z}^{z=\mathrm{z}} \mathrm{R}\,\mathrm{D}_y\,\delta u - \int_z^{\mathrm{z}} \mathrm{D}_z\mathrm{R}\,\mathrm{D}_y\delta u\,dz,$$

et, par suite,

$$\begin{aligned}
(33)\quad \delta s = {} & \Big|_{x=x}^{x=\mathrm{x}}\ \Big|_{y=y}^{y=\mathrm{y}}\ \Big|_{z=z}^{z=\mathrm{z}} \mathrm{R}\delta u - \int_x^{\mathrm{x}} \Big|_{y=y}^{y=\mathrm{y}}\ \Big|_{z=z}^{z=\mathrm{z}} \mathrm{D}_x\mathrm{R}\delta u\,dx \\
& - \Big|_{x=x}^{x=\mathrm{x}} \int_y^{\mathrm{y}} \Big|_{z=z}^{z=\mathrm{z}} \mathrm{D}_y\mathrm{R}\delta u\,dy - \Big|_{x=x}^{x=\mathrm{x}}\ \Big|_{y=y}^{y=\mathrm{y}} \int_z^{\mathrm{z}} \mathrm{D}_z\mathrm{R}\delta u\,dz \\
& - \int_x^{\mathrm{x}} \Big|^{y=\mathrm{y}}\ \Big|_{z=z}^{z=\mathrm{z}} \mathrm{R}\,\mathrm{D}_x\mathrm{y}\,\mathrm{D}_y\delta u\,dx + \int_x^{\mathrm{x}} \Big|^{y=y}\ \Big|_{z=z}^{z=z} \mathrm{R}\,\mathrm{D}_x y\,\mathrm{D}_y\delta u\,dx \\
& - \int_x^{\mathrm{x}} \Big|_{y=y}^{y=\mathrm{y}}\ \Big|^{z=\mathrm{z}} \mathrm{R}\,\mathrm{D}_x\mathrm{z}\,\mathrm{D}_z\delta u\,dx + \int_x^{\mathrm{x}} \Big|_{y=y}^{y=\mathrm{y}}\ \Big|^{z=z} \mathrm{R}\,\mathrm{D}_x z\,\mathrm{D}_z\delta u\,dx \\
& - \Big|_{x=x}^{x=\mathrm{x}} \int_y^{\mathrm{y}} \Big|^{z=\mathrm{z}} \mathrm{R}\,\mathrm{D}_y\mathrm{z}\,\mathrm{D}_z\delta u\,dy + \Big|_{x=x}^{x=\mathrm{x}} \int_y^{\mathrm{y}} \Big|^{z=z} \mathrm{R}\,\mathrm{D}_y z\,\mathrm{D}_z\delta u\,dy \\
& + \int_x^{\mathrm{x}} \Big|^{y=\mathrm{y}} \int_z^{\mathrm{z}} \mathrm{D}_z\mathrm{R}\,\mathrm{D}_x\mathrm{y}\,\mathrm{D}_y\delta u\,dx\,dz - \int_x^{\mathrm{x}} \Big|^{y=y} \int_z^{\mathrm{z}} \mathrm{D}_z\mathrm{R}\,\mathrm{D}_x y\,\mathrm{D}_y\delta u\,dx\,dz \\
& + \int_x^{\mathrm{x}}\int_y^{\mathrm{y}} \left[\Big|^{z=\mathrm{z}} \mathrm{D}_x\mathrm{R}\,\mathrm{D}_y\mathrm{z} + \mathrm{D}_y\left(\Big|^{z=\mathrm{z}} \mathrm{R}\,\mathrm{D}_x\mathrm{z}\right)\right] \Big|^{z=\mathrm{z}} \mathrm{D}_z\delta u\,dx\,dy \\
& - \int_x^{\mathrm{x}}\int_y^{\mathrm{y}} \left[\Big|^{z=z} \mathrm{D}_x\mathrm{R}\,\mathrm{D}_y z + \mathrm{D}_y\left(\Big|^{z=z} \mathrm{R}\,\mathrm{D}_x z\right)\right] \Big|^{z=z} \mathrm{D}_z\delta u\,dx\,dy \\
& + \int_x^{\mathrm{x}}\int_y^{\mathrm{y}} \Big|^{z=\mathrm{z}} \mathrm{R}\,\mathrm{D}_x\mathrm{z}\,\mathrm{D}_y\mathrm{z}\,\mathrm{D}_z^2\delta u\,dx\,dy - \int_x^{\mathrm{x}}\int_y^{\mathrm{y}} \Big|^{z=z} \mathrm{R}\,\mathrm{D}_x z\,\mathrm{D}_y z\,\mathrm{D}_z^2\delta u\,dx\,dy \\
& + \Big|_{x=x}^{x=\mathrm{x}} \int_y^{\mathrm{y}}\int_z^{\mathrm{z}} \mathrm{D}_y\mathrm{D}_z\mathrm{R}\delta u\,dy\,dz + \int_x^{\mathrm{x}} \Big|_{y=y}^{y=\mathrm{y}} \int_z^{\mathrm{z}} \mathrm{D}_x\mathrm{D}_z\mathrm{R}\delta u\,dx\,dz \\
& + \int_x^{\mathrm{x}}\int_y^{\mathrm{y}} \Big|_{z=z}^{z=\mathrm{z}} \mathrm{D}_x\mathrm{D}_y\mathrm{R}\delta u\,dx\,dy - \int_x^{\mathrm{x}}\int_y^{\mathrm{y}}\int_z^{\mathrm{z}} \mathrm{D}_x\mathrm{D}_y\mathrm{D}_z\mathrm{R}\delta u\,dx\,dy\,dz.
\end{aligned}$$

Si l'on supposait simplement

$$(34)\qquad s = \int_x^{\mathrm{x}}\int_y^{\mathrm{y}}\int_z^{\mathrm{z}} r\,dx\,dy\,dz,$$

la valeur de r étant fournie par l'équation (27), ou, ce qui revient au même,

$$(35)\qquad s = \int_x^{\mathrm{x}}\int_y^{\mathrm{y}}\int_z^{\mathrm{z}} \mathrm{D}_x\mathrm{D}_y\mathrm{D}_z u\,dx\,dy\,dz.$$

alors on trouverait

$$\mathrm{R} = 1,$$

et, par suite, l'équation (33) se réduirait à la suivante

$$\begin{aligned}
(36)\quad \delta s = {} & \Big|_{x=x}^{x=\mathrm{x}}\ \Big|_{y=y}^{y=\mathrm{y}}\ \Big|_{z=z}^{z=\mathrm{z}} \delta u \\
& - \int_x^{\mathrm{x}} \Big|^{y=\mathrm{y}}\ \Big|_{z=z}^{z=\mathrm{z}} \mathrm{D}_x\mathrm{y}\,\mathrm{D}_y\delta u\,dx + \int_x^{\mathrm{x}} \Big|^{y=y}\ \Big|_{z=z}^{z=\mathrm{z}} \mathrm{D}_x y\,\mathrm{D}_y\delta u\,dx \\
& - \int_x^{\mathrm{x}} \Big|_{y=y}^{y=\mathrm{y}}\ \Big|^{z=\mathrm{z}} \mathrm{D}_x\mathrm{z}\,\mathrm{D}_z\delta u\,dx + \int_x^{\mathrm{x}} \Big|_{y=y}^{y=\mathrm{y}}\ \Big|^{z=z} \mathrm{D}_x z\,\mathrm{D}_z\delta u\,dx \\
& - \Big|_{x=x}^{x=\mathrm{x}} \int_y^{\mathrm{y}} \Big|^{z=\mathrm{z}} \mathrm{D}_y\mathrm{z}\,\mathrm{D}_z\delta u\,dy + \Big|_{x=x}^{x=\mathrm{x}} \int_y^{\mathrm{y}} \Big|^{z=z} \mathrm{D}_y z\,\mathrm{D}_z\delta u\,dy \\
& + \int_x^{\mathrm{x}}\int_y^{\mathrm{y}} \Big|^{z=\mathrm{z}} \mathrm{D}_x\mathrm{z}\,\mathrm{D}_y\mathrm{z}\,\mathrm{D}_z^2\delta u\,dx\,dy - \int_x^{\mathrm{x}}\int_y^{\mathrm{y}} \Big|^{z=z} \mathrm{D}_x z\,\mathrm{D}_y z\,\mathrm{D}_z^2\delta u\,dx\,dy.
\end{aligned}$$

Les diverses formules obtenues dans ce dernier paragraphe ne diffèrent pas, au fond, de celles qu'a obtenues M. Sarrus. Seulement, elles se trouvent simplifiées par l'emploi de la notation à laquelle nous avons eu recours, en écrivant les deux valeurs que reçoit successivement une même variable en haut et en bas d'un même signe de substitution (*).

Nous bornerons ici, pour le moment, l'exposition que nous voulions faire des principes généraux qui nous paraissent devoir servir de base au calcul des variations. Dans d'autres Mémoires nous développerons ces mêmes principes, et nous les appliquerons à la solution de divers problèmes.

(*) Ayant eu l'occasion de parler à M. Sarrus de ces nouvelles recherches relatives au calcul des variations, et de la notation que je propose, j'ai appris de lui que l'idée d'accoler à un signe unique deux valeurs particulières d'une variable, pour exprimer la différence entre deux valeurs correspondantes d'une même fonction, s'était aussi présentée à son esprit. Mais cette idée, et les formules que M. Sarrus avait obtenues en la réalisant, n'étaient ni transcrites, ni mentionnées dans le Mémoire couronné par l'Académie. D'ailleurs, la nouvelle notation se trouve complètement en harmonie avec celle qui est aujourd'hui généralement adoptée pour la représentation d'une intégrale définie, prise entre deux limites données.

SUR LE

MOUVEMENT DE ROTATION VARIABLE D'UN POINT

QUI REPRÉSENTE, DANS UN PLAN DONNÉ, LA PROJECTION D'UN AUTRE POINT DOUÉ DANS L'ESPACE D'UN MOUVEMENT DE ROTATION UNIFORME AUTOUR D'UN CERTAIN AXE

Supposons qu'un point mobile A tourne autour d'un axe fixe OO′, de manière à décrire un cercle autour de cet axe. Supposons encore que la vitesse du point mobile soit constante, ou, en d'autres termes, que le mouvement du point soit ce qu'on peut appeler un *mouvement de rotation uniforme*. Rapportons les différents points de l'espace à trois axes fixes et rectangulaires. Prenons pour origine des coordonnées un point O de l'axe de rotation, et supposons chacun des demi-axes des coordonnées positives dirigé dans un sens tel que les projections du point mobile A sur les plans coordonnés soient animées de mouvements de rotation *directs* autour de l'origine.

Enfin, soient

r la distance du point mobile A à l'origine des coordonnées;
s la distance du même point à l'axe fixe OO′;
ω la vitesse absolue du point A;
$\varkappa$ sa vitesse angulaire autour de l'axe OO′;
λ, μ, ν les angles que forme avec les demi-axes des coordonnées positives, l'axe fixe prolongé, à partir du point O, dans une certaine direction OO′ choisie de manière que le mouvement de rotation ait lieu autour de cet axe de droite à gauche.

Soient de plus, au bout du temps t,

x, y, z les coordonnées du point A; et

u, v, w les projections algébriques de la vitesse ω sur les axes coordonnés.

Concevons d'ailleurs que la vitesse absolue ω et la vitesse angulaire $\varkappa$ soient représentées, la première, en grandeur et en direction, par une certaine longueur AB portée à partir du point A sur la tangente au cercle que ce point décrit; la seconde, en grandeur seulement, par une longueur OC portée sur l'axe de rotation et à partir du point O dans la direction OO'. On pourra, en prenant un point quelconque de l'espace pour centre des moments, construire le moment linéaire de la vitesse angulaire $\varkappa$ représentée par la longueur OC. Cela posé, il est clair que la vitesse absolue ω, mesurée par le produit

$$s\varkappa$$

et dirigée suivant un plan perpendiculaire au plan AOC, de manière à faire tourner le point A de droite à gauche autour du demi-axe OC, coïncidera en grandeur et en direction avec le moment linéaire de la vitesse angulaire $\varkappa$. Donc, les projections algébriques

$$u, \quad v, \quad w$$

de la vitesse ω seront équivalentes aux projections algébriques du moment linéaire de la vitesse $\varkappa$. Mais ces dernières projections changeraient évidemment de signe, si l'on échangeait entre eux le centre des moments A et le point O à partir duquel se mesure la longueur destinée à représenter la vitesse $\varkappa$. Donc, les quantités

$$u, \quad v, \quad w$$

seront égales, aux signes près, aux projections algébriques du moment linéaire de la vitesse $\varkappa$, si, en prenant l'origine pour centre des moments, on représente la vitesse $\varkappa$ par une longueur portée à partir du point A dans une direction parallèle à OO'. Mais alors, cette longueur ayant pour origine le point dont les coordonnées sont x, y, z, et pour projections algébriques les trois quantités

$$\varkappa\cos\lambda, \quad \varkappa\cos\mu, \quad \varkappa\cos\nu,$$

le moment linéaire de la vitesse $\varkappa$ aura lui-même pour projections algébriques les trois produits

$$\varkappa(y\cos\nu - z\cos\mu), \quad \varkappa(z\cos\lambda - x\cos\nu), \quad \varkappa(x\cos\mu - y\cos\lambda).$$

Donc ces trois produits, pris en signes contraires, reproduiront les valeurs de u, v, w, et l'on aura

$$(1) \qquad \begin{cases} u = -\varkappa(y\cos\nu - z\cos\mu), \\ v = -\varkappa(z\cos\lambda - x\cos\nu), \\ w = -\varkappa(x\cos\mu - y\cos\lambda). \end{cases}$$

Soit maintenant P la projection du point A sur le plan des x, y; et nommons

ρ le rayon vecteur mené de l'origine au point P;
θ l'angle décrit par ce rayon vecteur au bout du temps t;
υ la vitesse angulaire du point P, dans le plan des x, y.

On aura évidemment

$$(2) \qquad \upsilon = D_t\theta;$$

et, comme on trouvera d'ailleurs

$$x = \rho\cos\theta, \qquad y = \rho\sin\theta,$$

par conséquent

$$u = D_t x = \cos\theta D_t\rho - \rho\sin\theta D_t\theta,$$
$$v = D_t y = \sin\theta D_t\rho + \rho\cos\theta D_t\theta,$$

on en conclura

$$\rho D_t\theta = v\cos\theta - u\sin\theta.$$

On aura donc, par suite,

$$\upsilon = D_t\theta = \frac{v\cos\theta - u\sin\theta}{\rho},$$

ou, ce qui revient au même,

$$(3) \qquad \upsilon = \frac{vx - uy}{\rho^2}.$$

Mais, d'autre part, on tirera des formules (1)

$$(4) \quad vx - uy = \varkappa[(x^2+y^2+z^2)\cos\nu - z(x\cos\lambda + y\cos\mu + z\cos\nu)];$$

et, comme en nommant δ l'angle formé par le rayon vecteur r avec la direction OO′, on a

$$\cos\delta = \frac{x\cos\lambda + y\cos\mu + z\cos\nu}{r},$$

l'équation (4) pourra être réduite à

$$vx - uy = \varpi(r^2\cos\nu - rz\cos\delta).$$

Donc, la formule (3) donnera

$$(5)\qquad \upsilon = \varpi\frac{r^2\cos\nu - rz\cos\delta}{\rho^2}.$$

Si, pour plus de simplicité, on fait coïncider l'origine O des coordonnées avec le pied de la perpendiculaire abaissée du point A sur l'axe fixe, alors, l'angle δ étant un angle droit, on trouvera

$$\cos\delta = 0,$$

et, par suite,

$$(6)\qquad \upsilon = \frac{r^2}{\rho^2}\varpi\cos\nu.$$

Enfin, si l'on nomme τ l'angle que forme le rayon vecteur r avec sa projection ρ, on aura

$$\rho = r\cos\tau.$$

Donc, la formule (6) donnera encore

$$(7)\qquad \upsilon = \frac{\varpi\cos\nu}{\cos^2\tau},$$

et l'on pourra énoncer la proposition suivante :

Théorème. — *Si un point* A, *doué d'un mouvement de rotation uniforme autour d'un axe fixe, est projeté sur un plan fixe donné, la vitesse angulaire variable du point projeté* P, *et la vitesse angulaire constante du point* A, *seront entre elles dans le rapport qui existe entre le cosinus de l'angle que le plan donné forme avec le plan du cercle décrit par le point* A, *et le carré du cosinus de l'angle que le rayon du cercle forme avec la projection sur le plan donné.*

Au reste, on pourrait arriver encore très facilement au théorème

précédent par une autre méthode que nous allons indiquer en peu de mots.

Considérons, dans l'espace, un triangle dans lequel deux côtés, représentés par r et r', comprennent entre eux un certain angle p, et projetons ce triangle sur un plan fixe qui forme avec le plan du triangle, l'angle ν. Nommons

$$\rho,\quad \rho',\quad \varphi$$

les projections des côtés r, r' et de l'angle p, et

$$\tau,\quad \tau'$$

les angles que les côtés r, et r' forment avec leurs projections respectives ρ, ρ'. Les surfaces du triangle donné et du triangle projeté seront respectivement mesurées par les produits

$$\frac{1}{2}rr'\sin p,\qquad \frac{1}{2}\rho\rho'\sin\varphi;$$

et comme le rapport de la seconde surface à la première devra se réduire à $\cos\nu$, on en conclura

$$\frac{\rho\rho'}{rr'}\frac{\sin\varphi}{\sin p} = \cos\nu,\qquad \frac{\sin\varphi}{\sin p} = \frac{rr'}{\rho\rho'}\cos\nu.$$

Comme, d'autre part, on aura encore

$$\rho = r\cos\tau,\qquad \rho' = r'\cos\tau',$$

on en conclura

$$(8)\qquad \frac{\sin\varphi}{\sin p} = \frac{\cos\nu}{\cos\tau\cos\tau'}.$$

Concevons maintenant que p, φ se réduisent aux très petits angles décrits, à partir de la fin du temps t, et pendant un instant très court Δt : 1° par le rayon vecteur r animé d'une vitesse angulaire constante ϖ; 2° par la projection ρ de ce même rayon vecteur; alors, en nommant υ la vitesse angulaire de cette projection, on aura sensiblement, pour de très petites valeurs de Δt,

$$\frac{\sin\varphi}{\sin p} = \frac{\varphi}{p} = \frac{\upsilon}{\varpi}\qquad \text{et}\qquad \cos\tau' = \cos\tau.$$

Donc, en rapprochant indéfiniment Δt de la limite zéro, on tirera de la formule (8)

$$\frac{\upsilon}{\varkappa} = \frac{\cos\nu}{\cos^2\tau}, \tag{9}$$

et l'on se trouvera ainsi ramené à la formule (7).

Nous allons maintenant énoncer plusieurs conséquences qui se déduisent immédiatement de la formule (7), et qui paraissent mériter d'être remarquées.

Le plus petit et le plus grand des angles aigus compris entre le rayon vecteur r et sa projection sont évidemment o et ν. En d'autres termes, les valeurs maximum et minimum de $\cos\tau$ sont 1 et $\cos\nu$. Donc, par suite, les valeurs minimum et maximum de υ seront

$$\varkappa\cos\nu, \quad \frac{8}{\cos\nu},$$

et la moyenne géométrique entre ces deux valeurs sera précisément $\varkappa$. On peut donc énoncer encore la proposition suivante :

Théorème II. — *Si un point* A, *doué d'un mouvement de rotation uniforme autour d'un axe fixe, est projeté sur un plan fixe donné, la moyenne géométrique entre les valeurs* maximum *et* minimum *de la vitesse angulaire variable du point projeté sera précisément la vitesse angulaire constante du point* A. *De plus, la vitesse angulaire variable du point projeté aura pour valeur* minimum *celle qu'on obtient lorsque la vitesse angulaire constante du point* A *est représentée par une longueur portée sur l'axe de rotation, puis projetée sur un axe perpendiculaire au plan donné.*

Avant de quitter ce sujet, nous observerons que la méthode à l'aide de laquelle nous avons établi les formules (1) a été depuis longtemps employée par nous, soit dans les Leçons données à l'école Polytechnique, soit dans les *Exercices de Mathématiques*. Nous ajouterons que de cette méthode on peut aisément déduire ce qu'on appelle la composition des mouvements de rotation. Effectivement, supposons la vitesse angulaire $\varkappa$ d'un point A, qui tourne, au moins instantanément,

autour d'un axe, représentée par une longueur portée sur ce même axe. Non seulement, comme nous l'avons rappelé, la vitesse absolue ω du point A sera ce que devient le moment linéaire de la vitesse $\varkappa$, quand on prend pour centre des moments le point A; mais il suit de cette proposition même, que si la vitesse angulaire $\varkappa$ peut être considérée comme la résultante de plusieurs autres vitesses angulaires, relatives à divers mouvements de rotation instantanés autour de divers axes, et représentées par des longueurs portées sur ces mêmes axes, il suffira de composer entre elles les vitesses absolues correspondantes du point A, pour obtenir la vitesse absolue ω. Ainsi, en particulier, puisque la vitesse angulaire $\varkappa$, mesurée sur un demi-axe OO′ qui forme, avec les demi-axes des coordonnées positives, les angles λ, μ, ν, peut être censée avoir pour composantes trois vitesses angulaires mesurées sur les axes des x, y, z, et représentées par les projections algébriques

$$\varkappa\cos\lambda, \quad \varkappa\cos\mu, \quad \varkappa\cos\nu,$$

de la longueur $\varkappa$ sur ces mêmes axes; nous devons conclure que la vitesse absolue d'un point tournant de droite à gauche autour de l'axe OO′ avec la vitesse angulaire $\varkappa$, est la résultante des trois vitesses absolues que pourrait prendre le même point, si on le faisait tourner successivement de droite à gauche autour de chacun des axes des x, y, z, prolongés dans le sens des coordonnées dont les signes sont ceux des quantités

$$\varkappa\cos\lambda, \quad \varkappa\cos\mu, \quad \varkappa\cos\nu,$$

en supposant d'ailleurs la rotation autour de chaque axe effectuée avec la vitesse angulaire qui correspond à ce même axe.

Au reste, la même conclusion pourrait être tirée immédiatement de cette seule considération, que les seconds membres des équations (1) sont des fonctions linéaires des trois quantités

$$\varkappa\cos\lambda, \quad \varkappa\cos\mu, \quad \varkappa\cos\nu.$$

NOTE

SUR UN

THÉORÈME DE GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE

On connait l'élégant théorème de géométrie analytique qui fournit le cosinus de l'angle compris entre deux droites dont les positions sont déterminées à l'aide des cosinus des angles que forment ces droites avec trois axes rectilignes et rectangulaires. Suivant ce théorème, si l'on multiplie l'un par l'autre les cosinus des deux angles que les deux droites forment avec un même axe, la somme des trois produits de cette forme, correspondants aux trois axes, sera précisément le cosinus de l'angle compris entre les deux droites. Concevons maintenant que les trois axes donnés, cessant d'être rectangulaires, comprennent entre eux des angles quelconques, et au système de ces trois axes joignons un second système d'axes respectivement perpendiculaires aux plans des trois premiers. Les axes primitifs seront eux-mêmes perpendiculaires aux plans formés par les nouveaux axes; et les deux systèmes d'axes seront ce que nous appellerons deux systèmes d'*axes conjugués*. Nous dirons en particulier que l'un de ces axes, pris dans l'un des deux systèmes, a pour *conjugué* celui des axes de l'autre système qui ne le coupe pas à angles droits. Cela posé, le théorème rappelé ci-dessus, et relatif à un système d'axes rectangulaires, se trouve évidemment compris dans un théorème général dont voici l'énoncé :

Théorème. — *Considérons, d'une part, deux droites quelconques, d'autre part, deux systèmes d'axes conjugués. Supposons d'ailleurs qu'en attribuant à chaque droite et à chaque axe une direction déterminée, on multiplie l'un par l'autre les cosinus des angles que forme un axe du* *premier système avec la première droite, et l'axe conjugué du second système avec la seconde droite, puis, que l'on divise le produit ainsi obtenu par le cosinus de l'angle que ces deux axes conjugués comprennent entre eux. La somme des trois quotients de cette espèce, correspondants aux trois couples d'axes conjugués, sera précisément le cosinus de l'angle compris entre les deux droites données.*

Pour démontrer immédiatement ce théorème, il suffit de projeter la première droite sur la seconde, en observant que cette droite peut être considérée comme la diagonale d'un parallélipipède, dont les arêtes seraient parallèles aux axes du second système.

Il est bon d'observer qu'on peut échanger entre elles les deux droites données sans échanger entre eux les deux systèmes d'axes; d'où il suit que le théorème énoncé fournit deux expressions différentes du cosinus de l'angle renfermé entre les deux droites.

On pourrait aussi, au cosinus de l'angle que forme un axe du second système avec la seconde droite ou avec l'axe conjugué du premier système, substituer le sinus de l'angle que cette droite ou cet axe conjugué forme avec le plan des deux autres axes du second système. Toutefois, en opérant cette substitution, on devrait convenir de regarder l'angle formé par une droite avec un plan tantôt comme positif, tantôt comme négatif, suivant que la direction de cette droite pourrait être représentée par une longueur mesurée à partir du plan donné, d'un certain côté de ce même plan ou du côté opposé. On se trouverait ainsi ramené à une formule qui ne diffère pas au fond de celles qu'ont proposées, pour la transformation des coordonnées obliques, divers auteurs, et spécialement M. Français. On pourrait d'ailleurs, de ces dernières formules, revenir directement au théorème énoncé. Ainsi ce théorème peut être considéré à la rigueur comme implicitement renfermé dans des formules déjà connues. Observons néanmoins que les auteurs de ces formules les avaient établies sans parler de la convention que nous avons indiquée, et qui nous paraît nécessaire pour dissiper toute incertitude sur le sens des notations adoptées.

ANALYSE.

Les énoncés de plusieurs des théorèmes fondamentaux de la géométrie analytique se simplifient lorsqu'on a soin de distinguer les *projections absolues* d'un rayon vecteur, sur des axes coordonnés rectangulaires, des *projections algébriques* de ce même rayon vecteur, ainsi que je l'ai fait dans les préliminaires de mes *Leçons sur les applications du calcul infinitésimal à la géométrie*. On peut même, avec avantage, étendre la distinction des projections absolues et des projections algébriques au cas où le rayon vecteur est projeté sur des droites quelconques, les projections pouvant d'ailleurs être ou orthogonales ou obliques. Entrons à ce sujet dans quelques détails.

Soient r, s deux longueurs mesurées sur deux droites distinctes, et dans des directions déterminées, savoir, la première entre deux points donnés A et B, dans la direction AB; la seconde entre deux autres points C et D, dans la direction CD. Pour projeter la longueur r, et ses deux extrémités A, B, sur la droite CD, il suffira de mener par les points A et B deux plans parallèles à un plan fixe donné. Les points a et b, où ces deux plans rencontreront la droite CD, seront précisément les *projections* des deux points A, B; et si l'on nomme ρ la distance qui sépare le point b, c'est-à-dire la projection du point B, d'avec le point a, c'est-à-dire d'avec la projection du point A, cette distance ρ, mesurée dans la direction ab, sera la *projection* orthogonale ou oblique de la longueur r, savoir, la *projection orthogonale*, si le plan fixe donné est perpendiculaire à la droite CD, et la *projection oblique* dans le cas contraire. D'ailleurs les directions des longueurs s, ρ, mesurées sur une même droite, la première dans le sens CD, la seconde dans le sens ab, seront nécessairement ou une seule et même direction, ou deux directions opposées l'une à l'autre. Cela posé, la *projection absolue* ρ, prise dans le premier cas avec le signe $+$, dans le second cas avec le signe $-$, sera ce que nous appelons la *projection algébrique* de la longueur r sur la direction de la longueur s.

Concevons maintenant qu'en faisant usage de la notation généralement adoptée, on désigne par (r, s) l'angle aigu ou obtus que forment entre elles deux longueurs r, s, mesurées chacune dans une direction déterminée. Alors, en supposant les projections orthogonales, on aura évidemment

$$\rho = r\cos(r, \rho).$$

De plus, la projection algébrique de r, sur la direction de s, sera $+\rho$ ou $-\rho$, suivant que la direction de ρ sera la direction même de s, ou la direction opposée; et, comme on aura, dans le premier cas,

$$\cos(r, \rho) = \cos(r, s),$$

dans le second cas

$$\cos(r, \rho) = -\cos(r, s),$$

il en résulte que la projection algébrique de r sur la direction de s sera représentée, dans l'un et l'autre cas, par le produit

$$r\cos(r, s). \tag{1}$$

Supposons à présent que les projections, au lieu d'être orthogonales, soient obliques; et, après avoir mené une droite perpendiculaire au plan fixe, nommons t une longueur mesurée sur cette droite dans une direction déterminée. Alors les projections absolues et même les projections algébriques des longueurs r et ρ, sur la direction de t, seront évidemment égales entre elles. On aura donc

$$\rho\cos(\rho, t) = r\cos(r, t),$$

et par suite

$$\rho = r\frac{\cos(r, t)}{\cos(\rho, t)}. \tag{2}$$

De plus, pour obtenir la projection algébrique de la longueur r sur la direction de s, il suffira de prendre ρ avec le signe $+$ ou avec le signe $-$, suivant que la direction de ρ sera la direction de s ou la direction opposée; il suffira donc de remplacer, dans le second membre de la formule (2), la quantité $\cos(\rho, t)$ par la quantité $\cos(s, t)$ égale, au signe près, à la première. Donc la projection algébrique de r sur la

direction de s sera

$$r\frac{\cos(r, t)}{\cos(s, t)}. \tag{3}$$

Supposons maintenant qu'un point mobile P passe de la position A à la position B, en parcourant non plus la longueur r, mais les divers côtés u, v, w, ... d'une portion de polygone qui joigne le point A au point B, et attribuons à chacun de ces côtés la direction indiquée par le mouvement du point P. Soit d'ailleurs p la projection du point mobile P sur la droite CD, et nommons toujours a, b les projections respectives des deux points A, B sur la même droite. Tandis que le point mobile P passera de la position A à la position B, en parcourant successivement les diverses longueurs u, v, w, ..., le point mobile p passera de la position a à la position b, en parcourant successivement sur la droite CD les projections des diverses longueurs u, v, w, ..., et l'une quelconque de ces projections, celle de u par exemple, sera parcourue dans le sens indiqué par la direction du rayon vecteur ρ ou dans le sens opposé, suivant que la projection algébrique de la longueur u sur la direction de ρ sera positive ou négative. Il en résulte que la longueur ρ ou la projection algébrique de la longueur r sur la direction de ρ, sera équivalente à la somme des projections algébriques des longueurs u, v, w, ... sur la même direction. Par suite aussi, puisque la direction de s est toujours ou la direction même de ρ, ou la direction opposée, si l'on projette, d'une part, la longueur r, d'autre part, les longueurs u, v, w, ... sur la direction de s, on obtiendra une projection algébrique de r équivalente à la somme des projections algébriques de u, v, w, ... Donc, en supposant les projections orthogonales, on trouvera

$$r\cos(r, s) = u\cos(u, s) + v\cos(v, s) + w\cos(w, s) + \ldots. \tag{4}$$

Ces prémisses étant établies, concevons que les positions des différents points de l'espace soient rapportées à trois axes obliques qui partent d'un même point O. Nommons x, y, z trois longueurs portées sur ces trois axes, et mesurées chacune, à partir du point O, dans une direction déterminée. Soient encore

$$X, \quad Y, \quad Z$$

trois longueurs mesurées, à partir du point O, sur trois axes respectivement perpendiculaires aux plans

$$yz, \quad zx, \quad xy.$$

Concevons, de plus, que l'on construise un parallélipipède dont la longueur r soit la diagonale, les trois arêtes u, v, w étant respectivement parallèles aux axes sur lesquels se mesurent les longueurs x, y, z; et attribuons à ces trois arêtes les directions indiquées par le mouvement d'un point qui passe, en parcourant ces mêmes arêtes, de l'extrémité A de la diagonale r à l'extrémité B. Enfin, projetons cette diagonale et les trois arêtes sur la direction d'une longueur quelconque s. On aura, en vertu de la formule (4),

$$r\cos(r, s) = u\cos(u, s) + v\cos(v, s) + w\cos(w, s), \tag{5}$$

ou, ce qui revient au même,

$$\cos(r, s) = \frac{u}{r}\cos(u, s) + \frac{v}{r}\cos(v, s) + \frac{w}{r}\cos(w, s). \tag{6}$$

D'ailleurs, u étant précisément la projection absolue qu'on obtient pour la longueur r, quand on projette cette longueur sur l'axe des x, à l'aide de plans parallèles au plan fixe des yz, on aura, en vertu de la formule (2),

$$u = r\frac{\cos(r, X)}{\cos(u, X)}, \tag{7}$$

par conséquent,

$$\frac{u}{r} = \frac{\cos(r, X)}{\cos(u, X)}, \tag{8}$$

et cette dernière formule continuera évidemment de subsister quand on y remplacera u par v, et X par Y, ou u par w, et X par Z. Donc l'équation (6) donnera

$$\cos(r, s) = \frac{\cos(r, X)\cos(u, s)}{\cos(u, X)} + \frac{\cos(r, Y)\cos(v, s)}{\cos(v, Y)} + \frac{\cos(r, Z)\cos(w, s)}{\cos(w, Z)}. \tag{9}$$

D'autre part, il est clair qu'on n'altérera pas le second membre de la formule (9) si l'on y remplace, séparément ou simultanément, u par x, v par y, w par z. En effet, la direction de u étant ou la direction de x ou la direction opposée, on aura, dans le premier cas,

$$\cos(u, s) = \cos(x, s), \qquad \cos(u, X) = \cos(x, X),$$

dans le second cas,

$$\cos(u, s) = -\cos(x, s), \qquad \cos(u, X) = -\cos(x, X),$$

et dans les deux cas,

$$\frac{\cos(u, s)}{\cos(u, X)} = \frac{\cos(x, s)}{\cos(x, X)}.$$

Donc la formule (9) pourra être réduite à la suivante :

$$\cos(r, s) = \frac{\cos(r, X)\cos(s, x)}{\cos(x, X)} + \frac{\cos(r, Y)\cos(s, y)}{\cos(y, Y)} + \frac{\cos(r, Z)\cos(s, z)}{\cos(z, Z)}. \tag{10}$$

Ajoutons que les axes sur lesquels se mesurent les longueurs

$$X, \quad Y, \quad Z$$

étant, par hypothèse, perpendiculaires aux plans

$$yz, \quad zx, \quad xy,$$

les axes sur lesquels se mesurent les longueurs

$$x, \quad y, \quad z$$

seront eux-mêmes perpendiculaires aux plans

$$YZ, \quad ZX, \quad XY.$$

Donc ces deux systèmes d'axes, que nous nommerons *systèmes d'axes conjugués* (l'axe sur lequel se mesure X étant le *conjugué* de l'axe sur lequel se mesure x, etc.), pourront être échangés entre eux dans la formule (10), et l'on aura encore

$$\cos(r, s) = \frac{\cos(r, x)\cos(s, X)}{\cos(x, X)} + \frac{\cos(r, y)\cos(s, Y)}{\cos(y, Y)} + \frac{\cos(r, z)\cos(s, Z)}{\cos(z, Z)}. \tag{11}$$

Chacune des formules (10), (11) est une expression analytique du théorème fondamental énoncé dans le préambule du présent article.

Si, en faisant coïncider le point B avec le point O, et les demi-axes des coordonnées positives avec les directions des longueurs

$$\mathrm{x},\quad \mathrm{y},\quad \mathrm{z},$$

on nomme

$$x,\quad y,\quad z$$

les coordonnées rectilignes du point A, rapportées à ces demi-axes, alors x sera précisément la projection algébrique du rayon vecteur r sur la direction de x, la projection étant effectuée à l'aide de plans parallèles au plan des yz, et perpendiculairement à X. Donc alors on obtiendra x en remplaçant, dans l'expression (3), s par x, et t par X; en sorte qu'on aura $x = r\frac{\cos(r, \mathrm{X})}{\cos(x, \mathrm{X})}$. On trouvera de même

$$(12)\qquad \begin{cases} x = r\dfrac{\cos(r, \mathrm{X})}{\cos(x, \mathrm{X})}, \\[2ex] y = r\dfrac{\cos(r, \mathrm{Y})}{\cos(y, \mathrm{Y})}, \\[2ex] z = r\dfrac{\cos(r, \mathrm{Z})}{\cos(z, \mathrm{Z})}. \end{cases}$$

Alors aussi on pourra évidemment, dans la formule (5), remplacer les quantités u, v, w par les coordonnées x, y, z, qui seront respectivement égales, aux signes près, à ces mêmes quantités, pourvu que l'on remplace en même temps les trois angles

$$(u, s),\quad (v, s),\quad (w, s)$$

par les angles

$$(\mathrm{x}, s),\quad (\mathrm{y}, s),\quad (\mathrm{z}, s),$$

respectivement égaux aux trois premiers ou à leurs suppléments. On aura donc encore

$$(13)\qquad r\cos(r, s) = x\cos(\mathrm{x}, s) + y\cos(\mathrm{y}, s) + z\cos(\mathrm{z}, s).$$

On peut immédiatement déduire des formules (12) et (13) celles qui servent à la transformation des coordonnées obliques. En effet, soient

$$x,\quad y,\quad z$$

de nouvelles coordonnées du point B, relatives à de nouveaux axes

rectilignes qui continuent de passer par le point O; et supposons que, pour le nouveau système d'axes, les longueurs, précédemment représentées par

$$\mathrm{x},\quad \mathrm{y},\quad \mathrm{z},\quad \mathrm{X},\quad \mathrm{Y},\quad \mathrm{Z},$$

deviennent

$$\mathrm{x}_{,},\quad \mathrm{y}_{,},\quad \mathrm{z}_{,},\quad \mathrm{X}_{,},\quad \mathrm{Y}_{,},\quad \mathrm{Z}_{,}.$$

Alors, en vertu des formules (12), on aura, par exemple,

$$(14)\qquad x_{,} = \frac{r\cos(r, \mathrm{X}_{,})}{\cos(\mathrm{x}_{,}, \mathrm{X}_{,})};$$

et, d'ailleurs, la formule (13) donnera

$$(15)\qquad r\cos(r, \mathrm{X}_{,}) = x\cos(\mathrm{x}, \mathrm{X}_{,}) + y\cos(\mathrm{y}, \mathrm{X}_{,}) + z\cos(\mathrm{z}, \mathrm{X}_{,}).$$

On trouvera donc

$$(16)\qquad x_{,} = \frac{x\cos(\mathrm{x}, \mathrm{X}_{,}) + y\cos(\mathrm{y}, \mathrm{X}_{,}) + z\cos(\mathrm{z}, \mathrm{X}_{,})}{\cos(\mathrm{x}, \mathrm{X}_{,})}.$$

Quant aux valeurs de $y_{,}$, $z_{,}$, on les obtiendra en remplaçant $\mathrm{X}_{,}$ par $\mathrm{Y}_{,}$ ou par $\mathrm{Z}_{,}$ dans les deux termes de la fraction qui représente ici la valeur de $x_{,}$, et, de plus, x par y ou par z dans le dénominateur.

Si les axes coordonnés deviennent rectangulaires, alors les axes sur lesquels se mesurent les longueurs x, y, z se confondront avec les axes sur lesquels se mesurent les longueurs X, Y, Z, et, par suite, les formules (10), (12), (16) donneront simplement, comme on devait s'y attendre,

$$(17)\qquad \cos(r, s) = \cos(r, \mathrm{x})\cos(s, \mathrm{x}) + \cos(r, \mathrm{y})\cos(s, \mathrm{y}) + \cos(r, \mathrm{z})\cos(s, \mathrm{z}),$$

$$(18)\qquad x = r\cos(r, \mathrm{x}),\qquad y = r\cos(r, \mathrm{y}),\qquad z = r\cos(r, \mathrm{z}),$$

$$(19)\qquad x_{,} = x\cos(\mathrm{x}, \mathrm{x}_{,}) + y\cos(\mathrm{y}, \mathrm{x}_{,}) + z\cos(\mathrm{z}, \mathrm{x}_{,}).$$