RECHERCHES

SUR LES

INTÉGRALES DES ÉQUATIONS LINÉAIRES

AUX DÉRIVÉES PARTIELLES [1].

Les intégrales des équations linéaires aux dérivées partielles jouissent de diverses propriétés dignes de remarque et spécialement utiles pour la solution des problèmes de physique mathématique. Telles sont, en particulier, celles que j'établirai dans ce Mémoire.

ANALYSE.

I. — *Sur quelques propriétés générales des intégrales qui vérifient les équations linéaires aux dérivées partielles et à coefficients constants.*

Comme je l'ai remarqué dans le Mémoire sur l'application du calcul des résidus aux questions de physique mathématique, si l'on désigne par u, v deux fonctions données de la variable x, et par m un nombre entier quelconque, on aura

$$v\,\mathrm{D}_x^m u - u(-\mathrm{D}_x)^m v = \mathrm{D}_x \mathcal{X}, \tag{1}$$

$\mathcal{X}$ désignant une fonction entière de

$$u,\quad \mathrm{D}_x u,\quad \ldots,\quad \mathrm{D}_x^{m-1} u,\quad v,\quad \mathrm{D}_x v,\quad \ldots,\quad \mathrm{D}_x^{m-1} v,$$

[1] *Voir* un résumé de ce Mémoire : *Œuvres de Cauchy*, S. II, T. VII, p. 283, Extrait 204 des *C. R.*

déterminée par la formule

$$\mathcal{X} = v\,\mathrm{D}_x^{m-1} u - \mathrm{D}_x v\,\mathrm{D}_x^{m-2} u + \ldots \mp \mathrm{D}_x u\,\mathrm{D}_x^{m-2} v \pm u\,\mathrm{D}_x^{m-1} v. \tag{2}$$

En conséquence, si l'on nomme $\mathrm{F}(x)$ une fonction entière de x, on aura généralement

$$v\,\mathrm{F}(\mathrm{D}_x)u - u\,\mathrm{F}(-\mathrm{D}_x)v = \mathrm{D}_x \mathcal{X}, \tag{3}$$

$\mathcal{X}$ désignant encore une fonction entière des quantités u, v, et de plusieurs de leurs dérivées relatives à x. Il y a plus; si l'on désigne par u, v deux fonctions quelconques des deux variables x, y, et par m, n deux nombres entiers quelconques, alors, en remplaçant dans la formule (1) : 1° u par $\mathrm{D}_y^n u$; 2° m par n, x par y, et v par $(-\mathrm{D}_x)^m v$, on tirera successivement de cette formule

$$v\,\mathrm{D}_x^m \mathrm{D}_y^n u - \mathrm{D}_y^n u(-\mathrm{D}_x)^m v = \mathrm{D}_x \mathcal{X},$$
$$\mathrm{D}_y^n u(-\mathrm{D}_x)^m v - u(-\mathrm{D}_x)^m(-\mathrm{D}_y)^n v = \mathrm{D}_y \mathcal{Y},$$

et par suite

$$v\,\mathrm{D}_x^m \mathrm{D}_y^n u - u(-\mathrm{D}_x)^m(-\mathrm{D}_y)^n v = \mathrm{D}_x \mathcal{X} + \mathrm{D}_y \mathcal{Y}, \tag{4}$$

$\mathcal{X}$, $\mathcal{Y}$ désignant deux fonctions entières des quantités u et v et de plusieurs de leurs dérivées relatives à x et à y; puis on en conclura généralement, quelle que soit la fonction entière de x et de y, représentée par $\mathrm{F}(x, y)$,

$$v\,\mathrm{F}(\mathrm{D}_x, \mathrm{D}_y)u - u\,\mathrm{F}(-\mathrm{D}_x, -\mathrm{D}_y)v = \mathrm{D}_x \mathcal{X} + \mathrm{D}_y \mathcal{Y}, \tag{5}$$

$\mathcal{X}$, $\mathcal{Y}$ désignant encore deux fonctions entières des quantités u, v et de leurs dérivées relatives à x et à y. Enfin, si l'on représente par u, v deux fonctions quelconques des variables $x, y, z, \ldots$, et par $\mathrm{F}(x, y, z, \ldots)$ une fonction entière quelconque de ces mêmes variables, on trouvera généralement

$$\begin{aligned} v\,\mathrm{F}(\mathrm{D}_x, \mathrm{D}_y, \mathrm{D}_z, \ldots)u - u\,\mathrm{F}(-\mathrm{D}_x, -\mathrm{D}_y, -\mathrm{D}_z, \ldots)v \\ = \mathrm{D}_x \mathcal{X} + \mathrm{D}_y \mathcal{Y} + \mathrm{D}_z \mathcal{Z} + \ldots; \end{aligned} \tag{6}$$

$\mathcal{X}$, $\mathcal{Y}$, $\mathcal{Z}$, ... désignant encore des fonctions entières des variables u,

v, w, ... et de leurs dérivées relatives à $x, y, z, \ldots$. Ajoutons que, si l'on nomme m le degré de la fonction entière de $x, y, z, \ldots$ représentée par $F(x, y, z, \ldots)$, les fonctions

$$\mathcal{X},\quad \mathcal{Y},\quad \mathcal{Z},\quad \ldots$$

seront composées de termes dans chacun desquels les ordres des dérivées de u et de v relatives à $x, y, z, \ldots$ se trouveront représentés par des nombres dont la somme sera égale ou inférieure à $m - 1$.

On déduit aisément de l'équation (6) (¹) diverses propriétés remarquables des intégrales des équations linéaires, par exemple celles que fournissent les théorèmes suivants :

Théorème I. — *Nommons* $F(x, y, z, \ldots)$ *une fonction entière des variables* $x, y, z, \ldots$. *Supposons d'ailleurs qu'une fonction* u *de ces variables ait la double propriété de vérifier généralement l'équation aux dérivées partielles*

$$F(D_x, D_y, D_z, \ldots)u = 0, \tag{7}$$

et de s'évanouir : 1° *quels que soient* $y, z, \ldots$ *pour chacune des valeurs de* x *représentées par* x_0, X; 2° *quels que soient* $x, z, \ldots$ *pour chacune des valeurs de* y *représentées par* y_0, Y; 3° *quels que soient* $x, y, \ldots$, *pour chacune des valeurs particulières de* z *représentées par* z_0, Z, ... *Enfin, nommons* v *une fonction quelconque des variables* $x, y, z, \ldots$. *On aura généralement*

$$\int_{x_0}^{X}\int_{y_0}^{Y}\int_{z_0}^{Z}\cdots u\,F(-D_x, -D_y, -D_z, \ldots)v\,dx\,dy\,dz\ldots = 0. \tag{8}$$

Démonstration. — En effet, dans l'hypothèse admise, on aura

$$\int_{x_0}^{X} D_x\mathcal{X}\,dx = 0,\qquad \int_{y_0}^{Y} D_y\mathcal{Y}\,dy = 0,\qquad \int_{z_0}^{Z} D_z\mathcal{Z}\,dz = 0\qquad \ldots;$$

(¹) J'aurais voulu pouvoir comparer les résultats auxquels je parviens ici avec ceux que M. Ostrogradsky avait obtenus dans un Mémoire où il avait établi quelques propositions générales relatives à l'intégration des équations linéaires aux dérivées partielles. Mais, n'ayant qu'un souvenir vague de ce Mémoire, et ne sachant pas s'il a été publié quelque part, je me trouve dans l'impossibilité de faire cette comparaison.

puis on en conclura

$$\int_{x_0}^{X}\int_{y_0}^{Y}\int_{z_0}^{Z}\cdots(D_x\mathcal{X} + D_y\mathcal{Y} + D_z\mathcal{Z} + \ldots)\,dx\,dy\,dz\ldots = 0;$$

et par suite l'équation (6), jointe à la formule (7), donnera

$$\int_{x_0}^{X}\int_{y_0}^{Y}\int_{z_0}^{Z}\cdots u\,F(-D_x, -D_y, -D_z, \ldots)v\,dx\,dy\,dz\ldots$$
$$= -\int_{x_0}^{X}\int_{y_0}^{Y}\int_{z_0}^{Z}\cdots(D_x\mathcal{X} + D_y\mathcal{Y} + D_z\mathcal{Z} + \ldots)\,dx\,dy\,dz\ldots = 0.$$

Corollaire. — A la rigueur, pour que l'équation (8) se déduise de la formule (7), il suffira que des fonctions représentées par $\mathcal{X}, \mathcal{Y}, \mathcal{Z}, \ldots$, dans la formule (6), la première $\mathcal{X}$ reprenne la même valeur pour $x = x_0$, et pour $x = X$; que la seconde $\mathcal{Y}$ reprenne la même valeur pour $y = y_0$, et pour $y = Y$; que la troisième $\mathcal{Z}$ reprenne la même valeur pour $z = z_0$ et pour $z = Z$; etc.

Théorème II. — *Supposons que* $F(x, y, z, \ldots)$ *représente une fonction entière et du degré* m *des variables* $x, y, z, \ldots$. *Soient de plus* u, v *deux fonctions de* $x, y, z, \ldots$, *propres à vérifier les équations aux dérivées partielles*

$$F(D_x, D_y, D_z, \ldots)u = au, \tag{9}$$
$$F(-D_x, -D_y, -D_z, \ldots)v = bv, \tag{10}$$

a, b *étant deux quantités constantes. Si les fonctions désignées par* $\mathcal{X}, \mathcal{Y}, \mathcal{Z}, \ldots$ *dans la formule* (6) *reprennent les mêmes valeurs, la première pour* $x = x_0$ *et pour* $x = X$; *la seconde pour* $y = y_0$ *et pour* $y = Y$; *la troisième pour* $z = z_0$ *et pour* $z = Z$, ..., *on aura, en vertu des équations* (9), (10), *jointes à la formule* (6),

$$(a - b)\int_{x_0}^{X}\int_{y_0}^{Y}\int_{z_0}^{Z}\cdots uv\,dx\,dy\,dz\ldots = 0. \tag{11}$$

Par suite, on trouvera

$$\int_{x_0}^{X}\int_{y_0}^{Y}\int_{z_0}^{Z}\cdots uv\,dx\,dy\,dz\ldots = 0, \tag{12}$$

excepté dans le cas où l'on aurait

$$b = a. \tag{13}$$

Démonstration. — En effet, dans l'hypothèse admise, on tirera de l'équation (6), jointe aux formules (9) et (10),

$$(a-b)uv = D_x\mathfrak{X} + D_y\mathfrak{Y} + D_z\mathfrak{Z} + \ldots;$$

puis, en intégrant par rapport à $x, y, z, \ldots$ les deux membres de cette dernière multipliés par le produit $dx\,dy\,dz\ldots$, on trouvera

$$(a-b)\int_{x_0}^{X}\int_{y_0}^{Y}\int_{z_0}^{Z}\cdots uv\,dx\,dy\,dz\ldots$$
$$=\int_{x_0}^{X}\int_{y_0}^{Y}\int_{z_0}^{Z}\cdots(D_x\mathfrak{X} + D_y\mathfrak{Y} + D_z\mathfrak{Z} + \ldots)\,dx\,dy\,dz\ldots = 0.$$

Premier corollaire. — Les conditions relatives aux fonctions $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$, ... seront évidemment remplies, si ces fonctions s'évanouissent chacune pour les deux limites de l'intégration qui se rapporte à la variable correspondante x, ou y, ou z, ... C'est ce qui arrivera en particulier si, d'une part, la fonction u et ses dérivées d'un ordre non supérieur à m', d'autre part, la fonction v et ses dérivées d'un ordre non supérieur à m'' s'évanouissent : 1° pour chacune des valeurs de x représentées par x_0, X; 2° pour chacune des valeurs de y représentées par y_0, Y; 3° pour chacune des valeurs de z représentées par z_0, Z, etc., m', m'' étant d'ailleurs deux nombres entiers, assujettis seulement à vérifier la condition

$$m' + m'' = m - 1.$$

Deuxième corollaire. — Si $F(x, y, z, \ldots)$ représente une fonction paire des variables $x, y, z, \ldots$, c'est-à-dire si l'on a généralement

$$F(-x, -y, -z, \ldots) = F(x, y, z, \ldots),$$

l'équation (10) sera de la même forme que l'équation (9) et se réduira simplement à

$$F(D_x, D_y, D_z, \ldots)v = bv. \tag{14}$$

Troisième corollaire. — Si les variables $x, y, z, \ldots$ se réduisent à la seule variable x, les formules (9), (10) deviendront

$$F(D_x)u = au, \tag{15}$$

$$F(-D_x)v = bv, \tag{16}$$

et l'équation (12) sera réduite à

$$\int_{x_0}^{X} uv\,dx = 0. \tag{17}$$

On se trouvera ainsi ramené à la formule (124) du Mémoire sur l'application du calcul des résidus aux questions de physique mathématique :

Quatrième corollaire. — Si l'on suppose en particulier

$$F(x) = x^2,$$
$$a = h^2, \qquad b = k^2,$$

h, k désignant deux nombres entiers quelconques, on aura

$$F(-x) = F(x),$$

et les équations (15), (16) deviendront

$$D_x^2 u = h^2 u, \tag{18}$$

$$D_x^2 v = k^2 v. \tag{19}$$

Or on vérifiera ces dernières, si l'on prend

$$u = \cos hx, \qquad v = \cos kx;$$

et, si l'on pose d'ailleurs

$$x_0 = 0, \qquad X = 2\pi,$$

chacune des fonctions u, v reprendra la même valeur pour $x = x_0$ et pour $x = \mathrm{X}$. Alors, les conditions énoncées dans le théorème II étant remplies, la formule (17) reproduira l'équation connue

$$\int_0^{2\pi} \cos hx \cos kx \, dx = 0, \tag{20}$$

qui subsistera pour toutes les valeurs entières de h et de k, excepté dans le cas où l'on aurait

$$h = k.$$

L'équation (20) fournit, comme l'on sait, les moyens de développer une fonction donnée de x en une série dont les divers termes sont proportionnels aux cosinus des multiples d'un même arc. On pourra se servir de la même manière des formules (17) et (12) pour développer une fonction donnée de x ou de $x, y, z, \ldots$ en une série de termes respectivement proportionnels à diverses valeurs de u qui, étant propres à vérifier l'équation (15) ou (9), correspondraient à diverses valeurs de a représentées par les diverses racines d'une même équation transcendante.

II. — *Sur quelques propriétés remarquables des équations homogènes et de leurs intégrales.*

Supposons que, $\mathrm{F}(x, y, z, \ldots)$ désignant une fonction entière et homogène des variables $x, y, z, \ldots$, on pose, pour abréger,

$$\nabla = \mathrm{F}(\mathrm{D}_x, \mathrm{D}_y, \mathrm{D}_z, \ldots);$$

l'équation linéaire aux dérivées partielles

$$\nabla \varpi = 0 \tag{1}$$

sera ce que nous appelons une *équation homogène*. Supposons encore que, dans l'intégrale ϖ de cette équation, l'on remplace les variables indépendantes $x, y, z, \ldots$ par d'autres $p, q, r, \ldots$ liées aux premières

en une autre équation linéaire qui soit de la forme (11), *et renferme, avec l'inconnue ϖ, les dérivées de ϖ relatives à la nouvelle variable s, sans renfermer cette variable même, il suffit de substituer, aux variables indépendantes $x, y, z, \ldots$, d'autres variables $p, q, \ldots, s$, liées aux premières de telle sorte que, si s vient à varier, $x, y, z, \ldots$, considérées comme fonctions de $p, q, \ldots, s$, varient proportionnellement à l'exponentielle e^s.*

Premier exemple. — Si l'on transforme les coordonnées rectangulaires x, y, réduites à deux, en coordonnées polaires r et p, à l'aide des formules

$$x = r\cos p, \qquad y = r\sin p, \tag{13}$$

alors des formules (13), jointes à l'équation

$$r = \rho e^s,$$

on tirera

$$x = \rho e^s \cos p, \qquad y = \rho e^s \sin p \tag{14}$$

et, par suite,

$$\mathrm{D}_x^2 + \mathrm{D}_y^2 = \frac{1}{\rho^2} e^{-2s} (\mathrm{D}_p^2 + \mathrm{D}_s^2). \tag{15}$$

Donc, si l'équation (1) se réduit à

$$(\mathrm{D}_x^2 + \mathrm{D}_y^2)\varpi = 0, \tag{16}$$

cette équation, transformée à l'aide des formules (14), deviendra

$$(\mathrm{D}_p^2 + \mathrm{D}_s^2)\varpi = 0, \tag{17}$$

ce qu'avait déjà remarqué M. Lamé. Au reste, il est facile de s'assurer *a posteriori* que toute fonction ϖ de x et de y, qui vérifie l'équation (16), est en même temps une fonction de p, s, propre à vérifier l'équation (17). En effet, l'intégrale générale de l'équation (16) est de la forme

$$\varpi = \varphi(x + y\sqrt{-1}) + \chi(x - y\sqrt{-1}); \tag{18}$$

et comme, en vertu des formules (14), on aura

$$x + y\sqrt{-1} = \rho e^{s+p\sqrt{-1}}, \qquad x - y\sqrt{-1} = \rho e^{s-p\sqrt{-1}},$$

il suffira évidemment de poser

$$\varphi(\rho e^{s}) = \Phi(s), \qquad \chi(\rho e^{s}) = \mathrm{X}(s),$$

pour réduire l'équation (18) à

$$(19) \qquad \varpi = \Phi(s + p\sqrt{-1}) + \mathrm{X}(s - p\sqrt{-1}).$$

Or cette dernière valeur de ϖ est évidemment l'intégrale générale de l'équation (17).

Deuxième exemple. — Comme on tire de la formule (15)

$$(\mathrm{D}_x^2 + \mathrm{D}_y^2)^2 = \frac{1}{\rho^4} e^{-2s}(\mathrm{D}_p^2 + \mathrm{D}_s^2)[e^{-2s}(\mathrm{D}_p^2 + \mathrm{D}_s^2)],$$

ou, ce qui revient au même,

$$(\mathrm{D}_x^2 + \mathrm{D}_y^2)^2 = \frac{1}{\rho^4} e^{-4s}(\mathrm{D}_p^2 + \mathrm{D}_s^2)[\mathrm{D}_p^2 + (\mathrm{D}_s - 2)^2],$$

il en résulte que, si à l'aide des formules (14) on transforme l'équation

$$(20) \qquad (\mathrm{D}_x^2 + \mathrm{D}_y^2)^2 \varpi = 0,$$

cette équation deviendra

$$(21) \qquad (\mathrm{D}_p^2 + \mathrm{D}_s^2)[\mathrm{D}_p^2 + (\mathrm{D}_s - 2)^2]\varpi = 0.$$

Si, en prenant toujours pour ∇ une fonction homogène de D_x, D_y, D_z, ..., on substituait à l'équation (1) une autre équation linéaire, homogène ou non homogène, et de la forme

$$(22) \qquad \mathrm{D}_t^n \varpi = a\nabla\varpi,$$

t désignant une nouvelle variable indépendante, n un nombre entier

quelconque, et a un coefficient constant; alors, en opérant toujours de la même manière, et transformant l'équation (22) à l'aide des formules (12) et (7), on trouverait

$$(23) \qquad \mathrm{D}_t^n \varpi = \frac{a}{\rho^m} e^{-ms} \square \varpi,$$

la valeur de $\square$ étant déterminée par la formule (9).

Ainsi, en particulier, les formules (14) réduiront l'équation du mouvement de la chaleur, savoir

$$(24) \qquad \mathrm{D}_t \varpi = a(\mathrm{D}_x^2 + \mathrm{D}_y^2)\varpi,$$

à la formule

$$(25) \qquad \mathrm{D}_t \varpi = \frac{a}{\rho^2} e^{-2s}(\mathrm{D}_p^2 + \mathrm{D}_s^2)\varpi;$$

et l'équation du mouvement d'une plaque élastique isotrope, savoir

$$(26) \qquad \mathrm{D}_t^2 \varpi + a^2(\mathrm{D}_x^2 + \mathrm{D}_y^2)^2 \varpi = 0,$$

à la formule

$$(27) \qquad \mathrm{D}_t^2 \varpi + \frac{a^2}{\rho^2} e^{-4s}(\mathrm{D}_p^2 + \mathrm{D}_s^2)[\mathrm{D}_p^2 + (\mathrm{D}_s - 2)^2]\varpi = 0.$$

IV. — *Sur une transformation remarquable de l'équation aux dérivées partielles qui représente l'équilibre des températures dans un cylindre de forme quelconque.*

L'équation aux dérivées partielles qui représente l'équilibre des températures dans un corps quelconque est, comme l'on sait, de la forme

$$(1) \qquad (\mathrm{D}_x^2 + \mathrm{D}_y^2 + \mathrm{D}_z^2)\varpi = 0,$$

x, y, z désignant trois coordonnées rectangulaires. On peut la réduire à

$$(2) \qquad \nabla\varpi = 0,$$

en posant pour abréger

$$\nabla = \mathrm{D}_x^2 + \mathrm{D}_y^2 + \mathrm{D}_z^2. \tag{3}$$

Si maintenant on nomme p, q, r trois coordonnées polaires, ou même plus généralement trois coordonnées curvilignes liées à x, y, z par trois équations de forme déterminée, on trouvera, quelle que soit la fonction ϖ,

$$\begin{aligned} \nabla\varpi = {} & \mathrm{L}\,\mathrm{D}_p^2\varpi + \mathrm{M}\,\mathrm{D}_q^2\varpi + \mathrm{N}\,\mathrm{D}_r^2\varpi \\ & + 2\mathrm{P}\,\mathrm{D}_q\mathrm{D}_r\varpi + 2\mathrm{Q}\,\mathrm{D}_r\mathrm{D}_p\varpi + 2\mathrm{R}\,\mathrm{D}_p\mathrm{D}_q\varpi \\ & + \mathcal{L}\,\mathrm{D}_p\varpi + \mathcal{M}\,\mathrm{D}_q\varpi + \mathcal{N}\,\mathrm{D}_r\varpi, \end{aligned} \tag{4}$$

les valeurs de L, M, N, P, Q, R, $\mathcal{L}$, $\mathcal{M}$, $\mathcal{N}$ étant

$$\left\{ \begin{aligned} \mathrm{L} &= (\mathrm{D}_x p)^2 + (\mathrm{D}_y p)^2 + (\mathrm{D}_z p)^2, \\ \mathrm{M} &= (\mathrm{D}_x q)^2 + (\mathrm{D}_y q)^2 + (\mathrm{D}_z q)^2, \\ \mathrm{N} &= (\mathrm{D}_x r)^2 + (\mathrm{D}_y r)^2 + (\mathrm{D}_z r)^2; \end{aligned} \right. \tag{7}$$

$$\left\{ \begin{aligned} \mathrm{P} &= \mathrm{D}_x q\,\mathrm{D}_x r + \mathrm{D}_y q\,\mathrm{D}_y r + \mathrm{D}_z q\,\mathrm{D}_z r, \\ \mathrm{Q} &= \mathrm{D}_x r\,\mathrm{D}_x p + \mathrm{D}_y r\,\mathrm{D}_y p + \mathrm{D}_z r\,\mathrm{D}_z p, \\ \mathrm{R} &= \mathrm{D}_x p\,\mathrm{D}_x q + \mathrm{D}_y p\,\mathrm{D}_y q + \mathrm{D}_z p\,\mathrm{D}_z q; \end{aligned} \right. \tag{5}$$

$$\left\{ \begin{aligned} \mathcal{L} &= \mathrm{D}_x^2 p + \mathrm{D}_y^2 p + \mathrm{D}_z^2 p, \\ \mathcal{M} &= \mathrm{D}_x^2 q + \mathrm{D}_y^2 q + \mathrm{D}_z^2 q, \\ \mathcal{N} &= \mathrm{D}_x^2 r + \mathrm{D}_y^2 r + \mathrm{D}_z^2 r. \end{aligned} \right. \tag{6}$$

Si les nouvelles coordonnées p, q, r sont telles que les trois surfaces, dont on forme les équations en égalant p, q, r à trois constantes, se coupent à angles droits, on aura

$$\mathrm{P} = 0, \qquad \mathrm{Q} = 0, \qquad \mathrm{R} = 0, \tag{8}$$

et par suite la valeur de $\nabla\varpi$ sera réduite à

$$\begin{aligned} \nabla\varpi = {} & \mathrm{L}\,\mathrm{D}_p^2\varpi + \mathrm{M}\,\mathrm{D}_q^2\varpi + \mathrm{N}\,\mathrm{D}_r^2\varpi \\ & + \mathcal{L}\,\mathrm{D}_p\varpi + \mathcal{M}\,\mathrm{D}_q\varpi + \mathcal{N}\,\mathrm{D}_r\varpi. \end{aligned} \tag{9}$$

Or, dans cette hypothèse, en posant, pour abréger,

$$\mathrm{S}[\pm \mathrm{D}_x p\,\mathrm{D}_y q\,\mathrm{D}_z r] = \frac{1}{\omega},$$

ou, ce qui revient au même,

$$\omega = \mathrm{S}[\pm \mathrm{D}_p x\,\mathrm{D}_q y\,\mathrm{D}_r z],$$

on tirera des équations (8), après y avoir substitué les valeurs de P, Q, R tirées des formules (6),

$$\begin{aligned} & \frac{\mathrm{D}_x p}{\mathrm{D}_y q\,\mathrm{D}_z r - \mathrm{D}_y r\,\mathrm{D}_z q} = \frac{\mathrm{D}_y p}{\mathrm{D}_z q\,\mathrm{D}_x r - \mathrm{D}_z r\,\mathrm{D}_x q} \\ & = \frac{\mathrm{D}_z p}{\mathrm{D}_x q\,\mathrm{D}_y r - \mathrm{D}_x r\,\mathrm{D}_y q} = \frac{(\mathrm{D}_x p)^2 + (\mathrm{D}_y p)^2 + \mathrm{D}_z p)^2}{\mathrm{S}[\pm \mathrm{D}_x p\,\mathrm{D}_y q\,\mathrm{D}_z r]} = \omega\mathrm{L}; \end{aligned} \tag{10}$$

par conséquent,

$$\begin{aligned} \mathrm{D}_y q\,\mathrm{D}_z r - \mathrm{D}_y r\,\mathrm{D}_z q &= \frac{\mathrm{D}_x p}{\omega\mathrm{L}}, \\ \mathrm{D}_z q\,\mathrm{D}_x r - \mathrm{D}_z r\,\mathrm{D}_x q &= \frac{\mathrm{D}_y p}{\omega\mathrm{L}}, \\ \mathrm{D}_x q\,\mathrm{D}_y r - \mathrm{D}_x r\,\mathrm{D}_y q &= \frac{\mathrm{D}_z p}{\omega\mathrm{L}}. \end{aligned}$$

Cela posé, l'équation identique

$$\begin{aligned} & \mathrm{D}_x(\mathrm{D}_y q\,\mathrm{D}_z r - \mathrm{D}_y r\,\mathrm{D}_z q) \\ & \quad + \mathrm{D}_y(\mathrm{D}_z q\,\mathrm{D}_x r - \mathrm{D}_z r\,\mathrm{D}_x q) + \mathrm{D}_z(\mathrm{D}_x q\,\mathrm{D}_y r - \mathrm{D}_x r\,\mathrm{D}_y q) = 0 \end{aligned}$$

donnera

$$\mathrm{D}_x \frac{\mathrm{D}_x p}{\omega\mathrm{L}} + \mathrm{D}_y \frac{\mathrm{D}_y p}{\omega\mathrm{L}} + \mathrm{D}_z \frac{\mathrm{D}_z p}{\omega\mathrm{L}} = 0, \tag{11}$$

et par suite, eu égard à la première des équations (7),

$$\mathcal{L} = \frac{\mathrm{D}_x p\,\mathrm{D}_x(\omega\mathrm{L}) + \mathrm{D}_y p\,\mathrm{D}_y(\omega\mathrm{L}) + \mathrm{D}_z p\,\mathrm{D}_z(\varpi\mathrm{L})}{\omega\mathrm{L}}. \tag{12}$$

D'autre part, on aura encore

$$\begin{aligned} \mathrm{D}_p x\,\mathrm{D}_x p + \mathrm{D}_p y\,\mathrm{D}_y p + \mathrm{D}_p z\,\mathrm{D}_z p &= 1, \\ \mathrm{D}_p x\,\mathrm{D}_x q + \mathrm{D}_p y\,\mathrm{D}_y q + \mathrm{D}_p z\,\mathrm{D}_z q &= 0, \\ \mathrm{D}_p x\,\mathrm{D}_x r + \mathrm{D}_p y\,\mathrm{D}_y r + \mathrm{D}_p z\,\mathrm{D}_z r &= 0, \end{aligned}$$

et par suite

$$(13)\qquad \frac{D_p x}{D_y q\, D_z r - D_y r\, D_z q} = \frac{D_p y}{D_z q\, D_x r - D_z r\, D_x q}$$
$$= \frac{D_p z}{D_x q\, D_y r - D_x r\, D_y q} = \frac{1}{S(\pm D_x p\, D_y q\, D_z r)} = \omega;$$

puis on tirera des formules (10) et (13)

$$(14)\qquad \frac{D_x p}{D_p x} = \frac{D_y p}{D_p y} = \frac{D_z p}{D_p z} = L,$$

ou, ce qui revient au même,

$$(15)\qquad \frac{D_x p}{L} = D_p x, \qquad \frac{D_y p}{L} = D_p y, \qquad \frac{D_z p}{L} = D_p z.$$

Enfin la formule (12), jointe aux formules (15), donnera

$$\omega \mathcal{L} = D_p x\, D_x(\omega L) + D_q y\, D_y(\omega L) + D_r z\, D_z(\omega L),$$

par conséquent

$$(16)\qquad \left\{ \begin{array}{l} \omega \mathcal{L} = D_p(\omega L), \\ \text{On aura de même} \\ \omega \mathcal{M} = D_q(\omega M), \\ \omega \mathcal{N} = D_r(\omega N). \end{array} \right.$$

Donc l'équation (9) donnera

$$(17)\qquad \omega \nabla \varpi = D_p(\omega L\, D_p \varpi) + D_q(\omega L\, D_q \varpi) + D_r(\omega L\, D_r \varpi).$$

Par suite aussi, en nommant u, v deux valeurs particulières de ϖ, propres à vérifier l'équation (1) ou (2), on trouvera

$$(18)\qquad \begin{aligned} \omega(v \nabla u - u \nabla v) = {} & D_p[\omega L(v D_p u - u D_p v)] \\ & + D_q[\omega M(v D_q u - u D_q v)] \\ & + D_r[\omega N(v D_r u - u D_r v)]. \end{aligned}$$

Les équations (17), (18) paraissent dignes d'attention. On peut observer que la dernière est analogue à l'équation (6) du paragraphe I.

V — *Sur une certaine classe d'équations linéaires aux dérivées partielles.*

Considérons une équation linéaire aux dérivées partielles de la forme

$$(1)\qquad F(\nabla)\varpi = 0,$$

ϖ étant une fonction inconnue de deux variables indépendantes

$$x, \quad y,$$

$F(\nabla)$ étant une fonction entière de ∇; et la valeur de ∇ étant

$$(2)\qquad \nabla = a D_x^2 + b D_y^2 + 2c D_x D_y.$$

Un changement de variables indépendantes suffira pour ramener l'équation (1) à une équation de même forme, dans laquelle on aurait

$$(3)\qquad \nabla = D_x^2 + D_y^2.$$

C'est ce que l'on reconnaitra sans peine, en faisant usage des formules que j'ai données à la page 104 du premier Volume des *Exercices d'Analyse et de Physique mathématique* (1).

Pareillement, si, ϖ étant fonction de trois variables indépendantes x, y, z, on suppose dans l'équation (1)

$$(4)\qquad \nabla = a D_x^2 + b D_y^2 + c D_z^2 + 2d D_y D_z + 2e D_z D_x + 2f D_x D_y,$$

il suffira d'un simple changement de variables indépendantes pour ramener l'équation (1) à une équation de même forme dans laquelle on aurait

$$(5)\qquad \nabla = D_x + D_y^2 + D_z^2.$$

On pourrait étendre ces remarques au cas où la fonction ϖ renfer-

(1) *Œuvres de Cauchy*, S. II, T. XI, p. 137.

merait des variables indépendantes $x, y, z, \ldots$ en nombre quelconque, et où ∇ serait une fonction homogène du second degré de D_x, D_y, D_z, ... Dans ce cas encore, on pourrait ramener l'équation (1) à une équation de même forme dans laquelle on aurait

$$\nabla = D_x^2 + D_y^2 + D_z^2 + \ldots. \tag{6}$$

D'autre part, si la valeur de ∇ est donnée par la formule (6), alors, pour obtenir une valeur de ϖ qui vérifie l'équation (1), il suffira de prendre

$$\varpi = \Pi(r), \tag{7}$$

$\Pi(r)$ étant une fonction de r, la valeur de r^2 étant de la forme

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2 + \ldots, \tag{8}$$

ou même de la forme

$$r^2 = (x-f)^2 + (y-g)^2 + (z-h)^2 + \ldots, \tag{9}$$

et $f, g, h, \ldots$ désignant des quantités constantes. En effet, on tirera de la formule (9)

$$D_x r = \frac{x-f}{r}, \qquad D_y r = \frac{y-g}{r}, \qquad D_z r = \frac{z-h}{r}, \qquad \ldots,$$

et par suite, en supposant ϖ fonction de r seule, on aura

$$D_x \varpi = \frac{x-f}{r} D_r \varpi, \qquad D_x^2 \varpi = \frac{1}{r} D_r \varpi + \frac{(x-f)^2}{r} D_r\left(\frac{1}{r} D_r \varpi\right),$$
$$D_y \varpi = \frac{y-g}{r} D_r \varpi, \qquad D_y^2 \varpi = \frac{1}{r} D_r \varpi + \frac{(y-g)^2}{r} D_r\left(\frac{1}{r} D_r \varpi\right).$$

....

Cela posé, si l'on nomme n le nombre des variables $x, y, z, \ldots$, et si l'on a égard à l'équation (9), la formule (6) donnera

$$\nabla \varpi = \frac{n}{r} D_r \varpi + r D_r\left(\frac{1}{r} D_r \varpi\right). \tag{10}$$

de telle sorte que, si r vient à varier, $x, y, z, \ldots$, considérés comme fonctions de $p, q, r, \ldots$, varient proportionnellement à r. Les équations qui subsisteront entre $x, y, z, \ldots, p, q, r$ seront de la forme

$$x = \alpha r, \quad y = 6 r, \quad z = \gamma r, \quad \ldots, \tag{2}$$

$\alpha, 6, \gamma, \ldots$ désignant des fonctions qui renfermeront les nouvelles variables $p, q, \ldots$ distinctes de r; et, lorsqu'on aura effectué le changement de variables indépendantes, ∇ deviendra une fonction de p, q, r, ..., D_p, D_q, D_r, ..., qui sera entière par rapport à D_p, D_q, D_r, ... D'autre part, si θ désigne une quantité constante, on pourra, dans les équations (2), remplacer simultanément

$$x, \; y, \; z, \; \ldots \quad \text{par} \quad \theta x, \; \theta y, \; \theta z, \; \ldots$$

et

$$r \quad \text{par} \quad \theta r,$$

sans changer la forme de ces équations, et par conséquent sans changer la forme de l'équation par laquelle ∇ sera exprimé en fonction de $p, q, r, \ldots, D_p, D_q, D_r, \ldots$. D'ailleurs, si l'on nomme m le degré de la fonction homogène $F(x, y, z, \ldots)$, la substitution de θx, θy, θz, ... à $x, y, z, \ldots$ transformera D_x, D_y, D_z, ... en

$$\frac{1}{\theta} D_x, \quad \frac{1}{\theta} D_y, \quad \frac{1}{\theta} D_z, \quad \ldots$$

et, par suite, l'expression

$$\nabla = F(D_x, D_y, D_z, \ldots)$$

en $\frac{\nabla}{\theta^m}$. Donc aussi, pour transformer ∇, considéré comme fonction de $p, q, r, \ldots, D_p, D_q, D_r, \ldots$, en $\frac{\nabla}{\theta^m}$, il suffira d'y remplacer r par θr, et en conséquence D_r par $\frac{1}{\theta} D_r$. Donc ∇, considéré comme fonction de D_r et de $\frac{1}{r}$, sera une fonction homogène du degré m, et l'on aura

$$\nabla = \nabla_0 D_r^m + \frac{1}{r} \nabla_1 D_r^{m-1} + \ldots + \frac{1}{r^{m-1}} \nabla_{m-1} D_r + \frac{1}{r^m} \nabla_m, \tag{3}$$

$\nabla_0, \nabla_1, \ldots, \nabla_{m-1}, \nabla_m$ désignant des fonctions de $p, q, \ldots, D_p, D_q, \ldots$, qui ne renfermeront plus ni r, ni D_r. Cela posé, il est facile de voir qu'on pourra vérifier l'équation (1) en prenant pour ϖ une fonction homogène de $x, y, z, \ldots$, et même une fonction homogène d'un degré quelconque n. En effet, une semblable fonction sera transformée, par le changement de variables indépendantes, en un produit de la forme

$$u_n r^n,$$

u_n étant seulement fonction des nouvelles variables $p, q, \ldots$ distinctes de r; et, si l'on prend

$$\varpi = u_n r^n, \tag{4}$$

l'équation (1), transformée à l'aide de la formule (3), deviendra

$$r^{n-m} \square_n u_n = 0,$$

la valeur de $\square_n$ étant

$$\square_n = \nabla_m + n\nabla_{m-1} + n(n-1)\nabla_{m-2} + \ldots + n(n-1)\ldots(n-m+1)\nabla_0.$$

Donc, dans l'hypothèse admise, l'équation (1) pourra être réduite à

$$\square_n u_n = 0; \tag{5}$$

et, pour la vérifier, il suffira de substituer dans la formule (4) une valeur de u_n qui représente une intégrale de l'équation (5). Or cette équation (5), ne renfermant plus que les nouvelles variables $p, q, \ldots$ distinctes de r, avec les lettres caractéristiques correspondantes D_p, $D_q, \ldots$, pourra être vérifiée par des valeurs convenables de u_n. On peut donc énoncer la proposition suivante :

Théorème I. — *Étant donnée une équation aux dérivées partielles, linéaire, à coefficients constants et homogène, entre une inconnue u et diverses variables indépendantes $x, y, z, \ldots$, on pourra satisfaire à cette équation en prenant pour intégrale une fonction homogène de $x, y, z, \ldots$ et même une fonction homogène d'un degré quelconque n. De plus, la recherche d'une telle intégrale pourra être réduite à l'intégration d'une équation linéaire,*

mais à coefficients variables, qui renfermera une variable indépendante de moins, et changera de forme avec le nombre n.

Ce n'est pas tout : puisque l'on vérifiera l'équation (1) en prenant pour ϖ le produit

$$u_n r^n,$$

on la vérifiera encore en prenant pour ϖ une somme de semblables produits, c'est-à-dire en posant

$$\varpi = \Sigma u_n r^n, \tag{6}$$

u_n représentant toujours une intégrale de l'équation (5), et la somme indiquée par le signe Σ s'étendant ou à un nombre fini, ou même à un nombre infini de valeurs rationnelles ou irrationnelles, entières ou fractionnaires, positives ou négatives, de l'exposant n de r^n. Enfin la valeur de ϖ, déterminée par la formule (6), continuera évidemment de vérifier l'équation (1), si l'on multiplie sous le signe Σ chaque terme $u_n r^n$ par un coefficient constant a_n. On obtiendra ainsi pour l'intégrale de l'équation (1) une expression de la forme

$$\varpi = \Sigma a_n u_n r^n. \tag{7}$$

La valeur du coefficient a_n dans chaque terme pourra d'ailleurs être choisie arbitrairement, lorsque le nombre des termes restera fini. Lorsque ce nombre deviendra infini, la seule condition, à laquelle a_n devra satisfaire, sera que le système de tous les termes offre une série convergente.

Au lieu de faire servir l'intégration de la formule (5) à celle de l'équation (1), on pourrait réciproquement faire servir l'intégration de cette équation à l'intégration de la formule (5). En effet, supposons d'abord que l'on connaisse une intégrale homogène ϖ de l'équation (1). On pourra toujours, par le changement de variables indépendantes opéré à l'aide des formules (2), réduire cette intégrale homogène à la forme $u_n r^n$; et alors, comme on l'a dit, u_n sera une intégrale de l'équation (5). Mais il y a plus : étant donnée une intégrale quelconque ϖ de l'équation (1), après avoir exprimé cette intégrale en fonction des nouvelles variables $p, q, r, \ldots$, on pourra, dans un grand nombre de cas, la développer en une série convergente ordonnée suivant les puissances ascendantes ou suivant les puissances descendantes de r, et poser en conséquence

$$\varpi = \Sigma u_n r^n,$$

u_n étant une fonction des nouvelles variables $p, q, \ldots$ distinctes de r. Or, en substituant la valeur précédente de ϖ dans la formule (1), on en conclura

$$\Sigma \nabla (u_n r^n) = 0; \tag{8}$$

et comme on aura identiquement

$$\nabla (u_n r^n) = r^{n-m} \square_n u_n,$$

la formule (8) donnera

$$\Sigma r^{n-m} \square_n u_n = 0. \tag{9}$$

Cette dernière formule, devant être vérifiée quel que soit r, entraînera nécessairement l'équation (5) ou

$$\square_n u_n = 0.$$

On peut remarquer d'ailleurs que développer l'intégrale ϖ, considérée comme fonction de $p, q, r, \ldots$ en une série ordonnée suivant les puissances ascendantes de r, c'est aussi développer la même intégrale, considérée comme fonction de $x, y, z, \ldots$ en une série de termes représentés par des fonctions homogènes de $x, y, z, \ldots$. On peut donc énoncer encore la proposition suivante :

Théorème II. — *Pour intégrer l'équation* (5), *il suffit d'obtenir une intégrale de l'équation* (1), *représentée par une fonction homogène de* $x, y, z, \ldots$ *ou de développer une intégrale quelconque de l'équation* (1) *en une série de termes représentés par de semblables fonctions.*

Premier corollaire. — On peut toujours intégrer l'équation (1) et même obtenir son intégrale générale à l'aide des formules que j'ai données dans le XIX[e] cahier du *Journal de l'École Polytechnique*, et dans le Mémoire sur l'application du calcul des résidus aux questions de physique mathématique. Donc, par suite, on pourra toujours intégrer l'équation (5). Ainsi le deuxième théorème conduit à l'intégration d'une infinité d'équations linéaires aux dérivées partielles et à coefficients variables. Je développerai plus tard cette conclusion importante, et pour l'instant je me bornerai à l'exemple suivant :

Si l'on pose

$$\nabla = D_x^2 + D_y^2,$$

alors, l'équation (1), réduite à

$$(D_x^2 + D_y^2)\varpi = 0, \tag{10}$$

aura pour intégrale générale la somme de deux fonctions arbitraires dépendantes, l'une du binome $x + y\sqrt{-1}$, l'autre du binome $x - y\sqrt{-1}$. On pourra donc prendre pour ϖ la fonction homogène

$$\varpi = (x \pm y\sqrt{-1})^n, \tag{11}$$

l'exposant n étant une constante quelconque réelle ou même imaginaire. Si d'ailleurs on établit, entre x et y, les relations

$$x = ar\cos p, \qquad y = br\sin p, \tag{12}$$

a, b désignant deux quantités constantes, on trouvera

$$\begin{aligned} \square_n u = {} & D_p\left[\left(\frac{\sin^2 p}{a^2} + \frac{\cos^2 p}{b^2}\right) D_p u\right] + n^2\left(\frac{\cos^2 p}{a^2} + \frac{\sin^2 p}{b^2}\right) u \\ & + n\left(\frac{1}{b^2} - \frac{1}{a^2}\right)(\sin 2p\, D_p u + u\cos 2p). \end{aligned} \tag{13}$$

Enfin, on tirera des formules (11) et (12)

$$\varpi = (a\cos p \pm b\sin p\sqrt{-1})^n r^n. \tag{14}$$

Donc, si l'on suppose la caractéristique $\square_n$ définie par la formule (13), on vérifiera l'équation différentielle du second ordre

$$\square_n u = 0, \tag{15}$$

en prenant

$$u = (a \cos p \pm b \sin p \sqrt{-1})^n,$$

et par suite, l'intégrale générale de l'équation (15) sera

$$u = A(a \cos p + b \sin p \sqrt{-1})^n + B(a \cos p - b \sin p \sqrt{-1})^n, \tag{16}$$

A, B désignant deux constantes arbitraires.

Si l'on supposait $a = 1$, $b = 1$, l'équation (15), réduite à

$$D_p^2 u + n^2 u = 0,$$

aurait pour intégrale générale, en vertu de la formule (16), la valeur de n déterminée par l'équation

$$u = A e^{np\sqrt{-1}} + B e^{-np\sqrt{-1}};$$

ce qui est effectivement exact.

Si, à la place de l'équation (1) supposée homogène, on considérait un système d'équations semblables, c'est-à-dire un système d'équations linéaires, homogènes et à coefficients constants, alors, à la place des premier et deuxième théorèmes, on obtiendrait des théorèmes analogues qui fourniraient les moyens d'intégrer une infinité de systèmes d'équations linéaires aux dérivées partielles et à coefficients variables.

III. — *Sur une transformation remarquable des équations homogènes, et de quelques autres.*

Concevons, comme dans le paragraphe précédent, que $F(x, y, z, \ldots)$ désignant une fonction entière et homogène des variables $x, y, z, \ldots$, on pose

$$\nabla = F(D_x, D_y, D_z, \ldots);$$

et considérons de nouveau l'équation homogène

$$\nabla \varpi = 0. \tag{1}$$

Supposons encore que, dans l'intégrale ϖ de cette équation, l'on remplace les variables indépendantes $x, y, z, \ldots$ par d'autres $p, q, r, \ldots$, liées aux premières et assujetties à vérifier des équations de la forme

$$x = \alpha r, \quad y = \beta r, \quad z = \gamma r, \quad \ldots, \tag{2}$$

$\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ désignant des quantités qui renferment seulement les nouvelles variables $p, q, \ldots$ distinctes de r. Après le changement de variables indépendantes, on aura, comme nous l'avons prouvé dans le paragraphe II,

$$\nabla = \nabla_0 D_r^m + \frac{1}{r}\nabla_1 D_r^{m-1} + \ldots + \frac{1}{r^{m-1}}\nabla_{m-1} D_r + \frac{1}{r^m}\nabla_m, \tag{3}$$

m étant le degré de la fonction homogène $F(x, y, z, \ldots)$, et $\nabla_0, \nabla_1, \ldots, \nabla_{m-1}, \nabla_m$ désignant des fonctions de $p, q, \ldots, D_p, D_q, \ldots$, qui ne renferment plus ni r, ni D_r.

Concevons maintenant que l'on pose

$$r = \rho e^s, \tag{4}$$

s désignant une nouvelle variable d et ρ un coefficient constant. En substituant à la variable indépendante r la variable s, et en ayant égard à la formule

$$D_s(e^{as}\varpi) = e^{as}(D_s + a)\varpi, \tag{5}$$

qui subsiste quelle que soit la constante a, on trouvera non seulement

$$D_r \varpi = D_r s \, D_s \varpi = \frac{1}{r} D_s \varpi = \frac{1}{\rho} e^{-s} D_s \varpi,$$

mais encore

$$D_r^2 \varpi = \frac{1}{\rho^2} e^{-2s} D_s(D_s - 1)\varpi,$$

$$D_r^3 \varpi = \frac{1}{\rho^3} e^{-3s} D_s(D_s - 1)(D_s - 2)\varpi,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

et généralement

$$\mathrm{D}_r^m \varpi = \frac{1}{\rho^m} e^{-ms} \mathrm{D}_s(\mathrm{D}_s - 1)\ldots(\mathrm{D}_s - m + 1)\varpi,$$

ou, ce qui revient au même,

$$(6) \qquad \mathrm{D}_r^m \varpi = \frac{1}{r^m} \mathrm{D}_s(\mathrm{D}_s - 1)\ldots(\mathrm{D}_s - m + 1)\varpi.$$

Cela posé, on tirera de la formule (3)

$$(7) \qquad \nabla = \frac{1}{r^m} \square,$$

la valeur de $\square$ étant

$$(8) \quad \square = \nabla_0 \mathrm{D}_s(\mathrm{D}_s - 1)\ldots(\mathrm{D}_s - m + 1) + \ldots + \nabla_{m-2} \mathrm{D}_s(\mathrm{D}_s - 1) + \nabla_{m-1} \mathrm{D}_s + \nabla_m.$$

Ajoutons qu'en vertu de la formule (8) on aura

$$(9) \qquad \square = \square_0 \mathrm{D}_s^m + \square_1 \mathrm{D}_s^{m-1} + \ldots + \square_{m-1} \mathrm{D}_s + \square_m,$$

$\square_0, \square_1, \ldots, \square_{m-1}, \square_m$ désignant des fonctions de $p, q, \ldots, \mathrm{D}_p, \mathrm{D}_q, \ldots$ qui ne renfermeront ni s, ni D_s, et qui seront liées à $\nabla_0, \nabla_1, \ldots, \nabla_{m-1}, \nabla_m$ par les formules

$$\square_0 = \nabla_0, \qquad \square_1 = \nabla_1 - \frac{m(m-1)}{2}\nabla_0, \qquad \ldots, \qquad \square_m = \nabla_m.$$

Or l'équation (1), jointe à la formule (7), donnera

$$(10) \qquad \square\varpi = 0,$$

ou, ce qui revient au même,

$$(11) \qquad (\square_0 \mathrm{D}_s^m + \square_1 \mathrm{D}_s^{m-1} + \ldots + \square_{m-1} \mathrm{D}_s + \square_m)\varpi = 0.$$

D'autre part, on tirera des équations (2) et (4)

$$(12) \qquad x = \rho\alpha e^s, \qquad y = \rho\beta e^s, \qquad z = \rho\gamma e^s, \qquad \ldots.$$

Donc, *pour transformer l'équation* (1), *supposée linéaire et homogène,*

Or, en vertu de la formule (10), l'équation (1) se trouvera réduite à une équation différentielle qui ne renfermera plus que la variable r, avec ϖ considéré comme fonction de r; et l'intégrale générale de cette équation différentielle sera en même temps une fonction des variables $x, y, z, \ldots$, propre à représenter une intégrale de l'équation (1).

Appliquons maintenant ces principes généraux à quelques exemples.

Premier exemple. — Supposons d'abord qu'on ait simplement

$$\mathrm{F}(\nabla) = \nabla.$$

Alors l'équation (1) donnera

$$(11) \qquad \nabla\varpi = 0;$$

ou, ce qui revient au même, eu égard à la formule (10),

$$(12) \qquad \frac{\mathrm{D}_r\left(\frac{1}{r}\mathrm{D}_r\varpi\right)}{\frac{1}{r}\mathrm{D}_r\varpi} = -\frac{n}{r}.$$

Or, en désignant, à l'aide de la lettre caractéristique l, un logarithme népérien, on tirera de l'équation (12)

$$\mathrm{l}\left(\frac{\mathrm{D}_r\varpi}{r}\right) = -n\,\mathrm{l}(r) + \text{const.},$$

par conséquent

$$\frac{\mathrm{D}_r\varpi}{r} = \frac{\mathrm{C}}{r^n},$$

ou, ce qui revient au même,

$$(13) \qquad \mathrm{D}_r\varpi = \frac{\mathrm{C}}{r^{n-1}},$$

C désignant une constante arbitraire; puis, en intégrant de nouveau l'équation (13), on trouvera

$$(14) \qquad \varpi = \mathrm{A} + \frac{\mathrm{B}}{r^{n-2}},$$

A, B désignant deux nouvelles constantes arbitraires, dont la seconde B sera liée à la constante C par la formule

$$\text{(15)} \qquad B = -\frac{C}{n-2}.$$

Ainsi, on vérifiera généralement l'équation

$$\text{(16)} \qquad (D_x^2 + D_y^2 + D_z^2 + \ldots)\varpi = 0,$$

en prenant pour ϖ une fonction des n variables $x, y, z, \ldots$, déterminée par le système des formules (9) et (14) dans lesquelles les lettres

$$A, \quad B, \quad f, \quad g, \quad n, \quad \ldots$$

désignent $n + 2$ constantes arbitraires.

Deuxième exemple. — Si l'on a précisément $n = 2$, alors, en supposant non plus $B = -\frac{C}{n-2}$, mais $B = C$, on tirera de l'équation (13)

$$\text{(17)} \qquad D_r \varpi = \frac{C}{r},$$

et l'on en conclura

$$\text{(18)} \qquad \varpi = A + B\,l(r),$$

la valeur de r^2 étant

$$\text{(19)} \qquad r^2 = (x-f)^2 + (y-g)^2.$$

Ainsi, on vérifiera l'équation

$$\text{(20)} \qquad (D_x^2 + D_y^2)\varpi = 0,$$

en prenant pour ϖ une fonction de x, y, déterminée par le système des formules (18) et (19), dans lesquelles

$$A, \quad B, \quad f, \quad g$$

désignent quatre constantes arbitraires.

Il est bon d'observer que si, dans les formules (14) et (18), on posait

$$B = 1, \qquad A = 0,$$

elles donneraient simplement, la première,

$$\varpi = \frac{1}{r^{n-2}},$$

et la seconde,

$$\varpi = l(r).$$

Les formules (14) et (18), jointes à la formule (9), fournissent des valeurs de ϖ qui renferment seulement les constantes arbitraires A, B, $f, g, h, \ldots$. Mais on peut introduire des fonctions arbitraires dans ces valeurs de ϖ, en les intégrant par rapport aux quantités $f, g, h, \ldots$ entre des limites fixes, et considérant B comme une fonction arbitraire de ces mêmes quantités.

Troisième exemple. — Supposons maintenant qu'on ait

$$F(\nabla) = \nabla^m,$$

m désignant un nombre entier quelconque. L'équation (1) deviendra

$$\text{(21)} \qquad \nabla^m \varpi = 0$$

et se réduira, si l'on suppose toujours ∇ déterminé par la formule (10), à une équation différentielle entre r et ϖ d'un ordre égal à $2m$. D'autre part, si dans la formule (10) on pose

$$\text{(22)} \qquad \varpi = r^k,$$

k désignant une quantité constante, on trouvera

$$\nabla\varpi = k(n+k-2)r^{k-2},$$

puis on en conclura

$$\nabla^2\varpi = k(k-2)(n+k-2)(n+k-4)r^{k-4},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$\nabla^m\varpi = k(k-2)\ldots(k-2m+2)(n+k-2)(n+k-4)\ldots(n+k-2m)r^{k-2m}.$$

Donc la valeur de ϖ, fournie par la formule (22), vérifiera l'équation (21) si la valeur de k vérifie la condition

$$(23)\quad k(k-2)\ldots(k-2m+2)(n+k-2)(n+k-4)\ldots(n+k-2m)=0,$$

c'est-à-dire si l'on attribue à k l'une des valeurs

$$(24)\quad \begin{cases} k=0, & k=2, & \ldots, & k=2m-2, \\ k=-(n-2), & k=-(n-4), & \ldots, & k=-(n-2m). \end{cases}$$

Donc la formule (21), considérée comme une équation différentielle de l'ordre $2m$, aura pour intégrales particulières les $2m$ valeurs de ϖ comprises dans les deux suites

$$(25)\quad \begin{cases} 1, & r^2, & \ldots, & r^{2m-2}, \\ \dfrac{1}{r^{n-2}}, & \dfrac{1}{r^{n-4}}, & \ldots, & \dfrac{1}{r^{n-2m}}; \end{cases}$$

et, puisque cette même équation est linéaire, on obtiendra immédiatement son intégrale générale, en ajoutant les unes aux autres ces intégrales particulières, multipliées par $2m$ constantes arbitraires

$$\begin{matrix} A, & A_1, & \ldots, & A_{m-1}, \\ B, & B_1, & \ldots, & B_{m-1}. \end{matrix}$$

En opérant de cette manière, on trouvera généralement

$$(26)\quad \varpi = A + A_1 r^2 + \ldots + A_{m-1} r^{2m-2} + \frac{B}{r^{n-2}} + \frac{B_1}{r^{n-4}} + \ldots + \frac{B_{m-1}}{r^{n-2m}}.$$

Donc, pour vérifier la formule (21), considérée comme une équation linéaire aux dérivées partielles, ou, ce qui revient au même, pour vérifier l'équation

$$(27)\quad (D_x^2 + D_y^2 + D_z^2 + \ldots)^m \varpi = 0,$$

il suffira de prendre pour ϖ une fonction $x, y, z, \ldots$, déterminée par

le système des formules (9) et (26), dans lesquelles

$$A,\ A_1,\ \ldots,\ A_{m-1},\ B,\ B_1,\ \ldots,\ B_{m-1},\ f,\ g,\ h,\ \ldots$$

désignent $2m+n$ constantes arbitraires.

Il importe d'observer que si l'on pose non plus $\varpi = r^k$, mais

$$(28)\quad \varpi = \mathrm{l}(r),$$

on trouvera successivement

$$\begin{aligned} \nabla\varpi &= (n-2)r^{-2}, \\ \nabla^2\varpi &= (-2)(n-2)(n-4)r^{-4}, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \nabla^m\varpi &= (-2)\ldots(-2m+2)(n-2)(n-4)\ldots(n-2m)r^{-2m}. \end{aligned}$$

Donc la valeur de ϖ, donnée par la formule (28), vérifiera l'équation (21), si l'on a

$$(29)\quad (n-2)(n-4)\ldots(n-2m)=0,$$

c'est-à-dire si des deux suites, comprises dans le Tableau (24), la seconde fournit, comme la première, une valeur nulle de k. On doit en conclure que si, dans le second membre de l'équation (26), l'une des constantes

$$B,\ B_1,\ \ldots,\ B_{m-1}$$

se trouve multipliée par une puissance nulle de r, cette puissance devra être remplacée par le facteur variable $\mathrm{l}(r)$.

On peut généraliser la conclusion à laquelle nous venons de parvenir; et, si une même valeur de k appartient à la fois aux deux suites comprises dans le Tableau (24), il suffira d'attribuer à k cette valeur pour qu'on vérifie l'équation (21), non seulement en prenant

$$\varpi = r^k,$$

mais encore en prenant

$$(30)\quad \varpi = r^k\,\mathrm{l}(k).$$

C'est ce qu'on peut aisément démontrer à l'aide d'un des procédés dont les géomètres se sont servis pour étendre la formule qui donne l'intégrale générale d'une équation linéaire à coefficients constants au cas où deux racines de l'équation caractéristique deviennent égales entre elles. En effet, désignons, pour abréger, par la lettre K le premier membre de la formule (23), en sorte qu'on ait

$$\mathrm{K} = k(k-2)\ldots(k-2m+2)(n+k-2)(n+k-4)\ldots(n+k-2m).$$

Si la valeur attribuée à k appartient aux deux suites comprises dans le Tableau (24), cette valeur sera une racine double de l'équation

$$\mathrm{K} = 0. \tag{31}$$

Elle vérifiera donc encore l'équation

$$\mathrm{D}_k \mathrm{K} = 0. \tag{32}$$

D'autre part, en posant $\varpi = r^k$, on aura, d'après ce qu'il a été dit plus haut,

$$\nabla^m \varpi = \mathrm{K} r^{k-2m}.$$

On aura donc identiquement, quels que soient k et r,

$$\nabla^m r^k = \mathrm{K} r^{k-2m}. \tag{33}$$

Or de cette dernière formule, différentiée par rapport à k, on tirera

$$\nabla^m [r^k \mathrm{l}(r)] = [\mathrm{K}\,\mathrm{l}(r) + \mathrm{D}_k \mathrm{K}]\, r^{k-2m}, \tag{34}$$

et par suite

$$\nabla^m [r^k \mathrm{l}(r)] = 0, \tag{35}$$

si l'on prend pour k une racine commune des équations (31), (32), ou, ce qui revient au même, une racine double de l'équation (31). Donc, si la valeur de k se réduit à une telle racine, la formule (30) entrainera l'équation

$$\nabla \varpi = 0.$$

Il est bon d'observer que l'équation (21), dans le cas où l'on y suppose ∇ déterminé par la formule (10), est du genre des équations différentielles linéaires à coefficients variables, que nous avons considérées dans le premier Volume des *Exercices de Mathématiques* [1]. Elle pourra donc s'intégrer immédiatement à l'aide des formules très simples que nous avons établies; et son intégrale générale sera

$$\varpi = \mathcal{E} \frac{r^k \varphi(k)}{[\mathrm{K}]_k}, \tag{36}$$

le résidu intégral étant relatif aux diverses valeurs de k qui vérifient l'équation

$$\mathrm{K} = 0,$$

et $\varphi(k)$ désignant une fonction arbitraire de k qui ne devienne infinie pour aucune de ces valeurs. Effectivement, si l'on substitue dans la formule (21) la valeur de ϖ que donne la formule (36), on obtiendra l'équation identique

$$\mathcal{E} \frac{\mathrm{K} r^k \varphi(k)}{[\mathrm{K}]_k} = 0.$$

D'ailleurs, en développant le second membre de l'équation (36), on arrivera ou à la formule (26), ou à cette formule modifiée comme nous avons vu qu'elle doit l'être dans le cas où l'équation (31) offre deux racines égales.

Si l'on pose, dans la formule (26), $m = 1$, alors, en ayant égard aux observations que nous avons faites, on trouvera : 1° pour $n = 1$, ou pour $n > 2$,

$$\varpi = \mathrm{A} + \frac{\mathrm{B}}{r^{n-2}};$$

2° pour $n = 2$,

$$\varpi = \mathrm{A} + \mathrm{B}\,\mathrm{l}(r).$$

On sera donc alors immédiatement ramené aux formules (14) et (18).

(1) *Voir*, dans ce premier Volume, le *Mémoire sur l'application du calcul des résidus à l'intégration de quelques équations linéaires à coefficients variables*, p. 262 (*Œuvres de Cauchy*, S. II, T. VI, p. 316).

Pareillement, si l'on pose dans la formule (26) $m = 2$, on trouvera : 1° en prenant pour n un nombre entier impair ou un nombre pair supérieur à 4,

$$\varpi = A + A_1 r^2 + \frac{B}{r^{n-2}} + \frac{B_1}{r^{n-4}};$$

2° en prenant $n = 2$,

$$\varpi = A + A_1 r^2 + (B + B_1 r^2)\,l(r);$$

3° en prenant $n = 4$,

$$\varpi = A + A_1 r^2 + \frac{B}{r^2} + B_1\,l(r).$$

MÉMOIRE

SUR LA

THÉORIE DES INTÉGRALES DÉFINIES SINGULIÈRES

APPLIQUÉE GÉNÉRALEMENT

A LA DÉTERMINATION DES INTÉGRALES DÉFINIES, ET EN PARTICULIER A L'ÉVALUATION DES INTÉGRALES EULÉRIENNES

La théorie des intégrales singulières, qui dès l'année 1814 s'est trouvée, grâce au Rapport de MM. Lacroix et Legendre, accueillie si favorablement de l'Académie, m'a fourni, comme on sait, les moyens, non seulement d'expliquer le singulier paradoxe que semblaient présenter des intégrales doubles dont la valeur variait avec l'ordre des intégrations, et de mesurer l'étendue de cette variation, mais encore de construire des formules générales relatives à la transformation ou même à la détermination des intégrales définies, et de distinguer les intégrales dont la valeur est finie d'avec celles dont les valeurs deviennent infinies ou indéterminées. Ces diverses applications de la théorie des intégrales singulières se trouvent déjà exposées et développées d'une part dans le Tome I des *Mémoires des Savants étrangers* (1), d'autre part dans mes *Exercices de Mathématiques* et dans les Leçons données à l'École Polytechnique sur le calcul infinitésimal.

Il arrive souvent que, dans une intégrale simple, la fonction sous le signe $\int$ se compose de divers termes dont plusieurs deviennent infinis

(1) *OEuvres de Cauchy*, S. I, T. I.

pour une valeur de la variable comprise entre les limites des intégrations, ou représentée par l'une de ces limites. Alors il importe de savoir si l'intégrale est finie, ou infinie, ou indéterminée, mais en outre, lorsqu'elle reste finie, quelle est précisément sa valeur. La théorie des intégrales singulières, qui sert à résoudre généralement le premier problème, conduit souvent encore à la solution exacte ou approchée du second. Ainsi en particulier cette théorie, combinée avec le calcul des résidus, fournit, sous une forme très simple, la valeur générale d'une intégrale prise entre les limites o et ∞, lorsque la fonction sous le signe $\int$ est une somme d'exponentielles multipliées chacune par un polynome dont les divers termes sont proportionnels à des puissances entières positives ou même négatives de la variable x.

La théorie des intégrales singulières peut encore être employée avec avantage dans l'évaluation des intégrales qui représentent des fonctions de très grands nombres. Elle permet de séparer, dans ces dernières, la partie qui reste finie ou qui devient même infinie avec ces nombres, de celle qui décroît indéfiniment avec eux. Cette séparation devient surtout facile quand, les limites de l'intégrale étant zéro et l'infini, la fonction sous le signe $\int$ se compose de deux termes, dont l'un est indépendant d'un très grand nombre donné, tandis que l'autre a pour facteur une exponentielle dont l'exposant est proportionnel à ce même nombre.

L'observation que nous venons de faire s'applique particulièrement à deux intégrales dignes de remarque. La première est celle qui représente la somme des puissances négatives semblables des divers termes d'une progression arithmétique dans laquelle le nombre des termes devient très considérable. La seconde est le logarithme d'une des intégrales eulériennes, savoir, de celle que M. Legendre a désignée par la lettre Γ. En appliquant les principes ci-dessus énoncés à la première, on la décompose en deux parties, dont l'une, qui décroît indéfiniment avec le nombre des termes de la progression arithmétique, peut être développée en série convergente, tandis que l'autre partie peut être présentée sous forme finie, et débarrassée du signe d'intégration,

pourvu qu'on introduise dans le calcul une certaine constante analogue à celle dont Euler s'est servi pour la sommation approximative de la série harmonique.

Quant à l'intégrale définie qui représente le logarithme de la fonction $\Gamma(n)$, elle se décompose immédiatement, d'après les principes ci-dessus énoncés, en deux parties, dont l'une croît indéfiniment avec le nombre n et peut être complétement débarrassée du signe d'intégration, tandis que l'autre peut être développée de plusieurs manières en série convergente. Cette décomposition est précisément celle à laquelle M. Binet est parvenu, par d'autres considérations, dans son Mémoire sur les intégrales eulériennes, et constitue, à mon avis, l'un des beaux résultats obtenus par l'auteur dans cet important Mémoire. A la vérité M. Gauss avait, en 1812, exprimé par une intégrale définie la différentielle du logarithme de $\Gamma(n)$, et l'on pouvait aisément, par l'intégration, remonter de cette différentielle au logarithme lui-même. A la vérité encore, en retranchant de ce logarithme la partie qui croît indéfiniment, telle qu'on la déduit des formules données par Stirling et par d'autres auteurs, on devait tenir pour certain que la différence décroîtrait indéfiniment avec le nombre n. Mais, en supposant même que ces rapprochements se fussent présentés à l'esprit des géomètres, ils n'auraient pas encore fourni le moyen de développer en série convergente et d'évaluer par suite, avec une exactitude aussi grande qu'on le voudrait, la différence entre deux termes très considérables, dont un seul était représenté par une intégrale définie. Avant qu'on pût obtenir un tel développement, il était d'abord nécessaire de représenter la différence dont il s'agit par une seule intégrale qui se prêtât facilement à l'intégration par série. C'est en cela que consistait, ce me semble, la principale difficulté qui s'opposait à ce qu'on pût évaluer avec une exactitude indéfinie, et aussi considérable qu'on le voudrait, les fonctions de très grands nombres, et en particulier la fonction $\Gamma(n)$. Cette difficulté, que n'avaient pas fait disparaître les Mémoires de Laplace, de Gauss, de Legendre, est, comme nous l'avons dit, résolue dans le Mémoire de M. Binet. Les amis de la science ne verront peut-être pas sans intérêt que l'analyse, très délicate et très ingénieuse, dont ce géomètre a fait usage peut être remplacée par quelques formules déduites de la théorie des intégrales singulières et qu'on peut tirer immédiatement de cette théorie la plupart des équations en termes finis auxquelles M. Binet est parvenu.

Lorsqu'une fois on a décomposé le logarithme de $\Gamma(n)$, ou même une fonction quelconque de n, en deux parties, dont l'une croît indéfiniment avec n, tandis que l'autre est représentée par une seule intégrale définie ; alors, pour obtenir le développement de cette intégrale en série, il suffit de développer la fonction sous le signe $\int$ en une autre série dont chaque terme soit facilement intégrable. Le développement de l'intégrale se réduit à une seule série convergente, lorsque le développement de la fonction sous le signe $\int$ ne cesse jamais d'être convergent entre les limites des intégrations. Telle est effectivement la condition à laquelle M. Binet s'est astreint dans son Mémoire. Toutefois il n'est pas absolument nécessaire que cette condition soit remplie. Si, pour fixer les idées, on représente, comme je le fais dans ce Mémoire, la partie décroissante du logarithme de $\Gamma(n)$ par une intégrale prise entre les limites zéro et infini, on pourra, dans le cas où le nombre n deviendra très considérable, décomposer cette intégrale en deux autres, prises, la première entre les limites 0, 1, la seconde entre les limites 1, ∞, puis développer la première intégrale en une série dont les divers termes, analogues à ceux que renferme la formule de Stirling, aient pour facteurs les nombres de Bernoulli, et la seconde intégrale en une autre série dont les divers termes aient pour facteurs les nombres que M. Binet a introduits dans l'expression du logarithme de $\Gamma(n)$.

Nous ferons remarquer, en finissant, que les principes exposés dans ce Mémoire fournissent le moyen de tirer un parti avantageux de la formule donnée par Stirling, et de calculer très facilement la limite de l'erreur qu'on commet quand on applique cette formule à la détermination de $\Gamma(n)$.

ANALYSE.

I. — *Formules générales.*

Parmi les propositions auxquelles nous avons été conduits par la théorie des intégrales définies singulières, on doit particulièrement remarquer la suivante :

THÉORÈME I. — *Soient x, y deux variables réelles, $z = x + y\sqrt{-1}$ une variable imaginaire et $f(z)$ une fonction de z tellement choisie que le résidu*

$$\mathop{\mathcal{E}}_{x_0\ y_0}^{X\ Y}[f(z)],$$

pris entre les limites

$$x = x_0, \qquad x = X, \qquad y = y_0, \qquad y = Y,$$

offre une valeur finie et déterminée. On aura généralement

$$(1) \qquad \int_{x_0}^{X}\left[f(x+Y\sqrt{-1}) - f(x+y_0\sqrt{-1})\right]dx$$
$$= \sqrt{-1}\int_{y_0}^{Y}\left[f(X+y\sqrt{-1}) - f(x_0+y\sqrt{-1})\right]dy - 2\pi\sqrt{-1}\mathop{\mathcal{E}}_{x_0\ y_0}^{X\ Y}[f(z)],$$

les deux intégrales relatives à x et à y devant être réduites, lorsqu'elles deviennent indéterminées, à leurs valeurs principales.

De ce premier théorème on déduit immédiatement le suivant :

THÉORÈME II. — *Soient x, y deux variables réelles, $z = x + y\sqrt{-1}$ une variable imaginaire et $f(z)$ une fonction telle que le résidu*

$$\mathop{\mathcal{E}}_{-\infty\ 0}^{\infty\ \infty}[f(z)]$$

offre une valeur finie et déterminée. Si d'ailleurs le produit

$$z f(z) \quad \text{ou} \quad (x+y\sqrt{-1})f(x+y\sqrt{-1})$$

s'évanouit : 1° pour $x = \pm\infty$, quel que soit y ; 2° pour $y = \infty$, quel que soit x, on aura

$$(2)\qquad \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 2\pi\sqrt{-1}\ {}_{-\infty}^{\ \infty}\mathcal{E}_0^{\infty}[f(z)],$$

l'intégrale devant être réduite, lorsqu'elle devient indéterminée, à sa valeur principale.

Corollaire I. — L'équation (2) peut encore se mettre sous la forme

$$(3)\qquad \int_0^{\infty} \frac{f(x)+f(-x)}{2}\,dx = 2\pi\sqrt{-1}\ {}_{-\infty}^{\ \infty}\mathcal{E}_0^{\infty}[f(z)].$$

Corollaire II. — L'équation (2) ou (3) fournit les valeurs d'une multitude d'intégrales définies, dont quelques-unes étaient déjà connues. Si l'on pose en particulier, dans l'équation (2) ou (3),

$$f(x) = \frac{(-x\sqrt{-1})^{a-1}}{1+x},$$

a désignant une quantité comprise entre les limites 0, 1, on trouvera

$$(4)\qquad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(-x\sqrt{-1})^{a-1}}{1+x}\,dx = \pi(\sqrt{-1})^{a},$$

et, par suite,

$$(5)\qquad \int_0^{\infty} \frac{x^{a-1}\,dx}{1+x} = \frac{\pi}{\sin a\pi},\qquad \int_0^{\infty} \frac{x^{a-1}\,dx}{1-x} = \frac{\pi}{\operatorname{tang} a\pi}.$$

La théorie des intégrales définies singulières fournit encore les conditions qui doivent être remplies pour qu'une intégrale, dans laquelle la fonction sous le signe $\int$ s'évanouit entre les limites de l'intégration, conserve une valeur unique et finie : c'est ce qu'on peut voir dans le *Résumé des Leçons données à l'École Polytechnique sur le calcul infinitésimal* (25[e] leçon). Ainsi, en particulier, on peut énoncer la proposition suivante :

Théorème III. — *Soit $f(x)$ une fonction de x qui conserve une valeur*

unique et finie pour chaque valeur positive de x, et devienne infinie quand x s'évanouit. Pour que la valeur de l'integrale

$$(6)\qquad \int_0^{\infty} f(x)\,dx$$

soit finie et determinée, il sera nécessaire et il suffira que les intégrales singulières

$$(7)\qquad \int_{\varepsilon\nu}^{\varepsilon} f(x)\,dx,$$

$$(8)\qquad \int_{\frac{1}{\varepsilon}}^{\frac{1}{\varepsilon\mu}} f(x)\,dx$$

s'évanouissent par des valeurs infiniment petites de ε, quelle que soit d'ailleurs la valeur finie ou infiniment petite attribuée au coefficient μ ou ν.

Corollaire. — Si l'on suppose en particulier

$$(9)\qquad f(x) = \mathrm{P}\,e^{-ax} + \mathrm{Q}\,e^{-bx} + \mathrm{R}\,e^{-cx} + \ldots,$$

$a, b, c, \ldots$ désignant des constantes dont les parties réelles soient positives, et P, Q, R, ... des polynomes dont chaque terme soit proportionnel à une puissance entière, positive, nulle ou négative, de x ; on déduira sans peine du théorème précédent la seule condition qui devra être remplie pour que l'intégrale (6) conserve une valeur finie. Cette seule condition sera que la fonction

$$f(x)$$

se réduise à une constante finie pour $x = 0$.

Observons enfin qu'on arrive à des résultats dignes de remarque quand on transforme des intégrales singulières, dont les valeurs approximatives peuvent être facilement déterminées, en d'autres intégrales. Pour donner un exemple de cette transformation, supposons que la fonction $f(x)$ devienne infinie pour $x = 0$, mais que le produit

$$x\,f(x)$$

se réduise alors à une constante finie f. Supposons d'ailleurs que le même produit s'évanouisse pour $x=\infty$, et que la fonction $f(x)$ ne devienne jamais infinie pour des valeurs finies de x. Si l'on désigne par ε un nombre infiniment petit, et par μ, ν deux coefficients finis et positifs, on aura sensiblement

$$\int_{\varepsilon\nu}^{\varepsilon\mu} f(x)\,dx = \mathrm{f}\,\mathrm{l}\left(\frac{\mu}{\nu}\right). \tag{10}$$

D'ailleurs l'intégrale singulière que détermine l'équation (10) pourra être considérée comme la différence de deux autres intégrales. On aura en effet

$$\int_{\varepsilon\nu}^{\varepsilon\mu} f(x)\,dx = \int_{\varepsilon\nu}^{\infty} f(x)\,dx - \int_{\varepsilon\mu}^{\infty} f(x)\,dx.$$

On aura donc encore, pour de très petites valeurs de ε,

$$\int_{\varepsilon\nu}^{\infty} f(x)\,dx - \int_{\varepsilon\mu}^{\infty} f(x)\,dx = \mathrm{f}\,\mathrm{l}\left(\frac{\mu}{\nu}\right). \tag{11}$$

D'autre part, soient $\varphi(z)$, $\chi(z)$ deux fonctions de z qui deviennent nulles et infinies en même temps que la variable z, en conservant des valeurs finies pour toutes les valeurs finies et positives de z. Si les fonctions dérivées $\varphi'(z)$ et $\chi'(z)$ se réduisent, pour $z=0$, à des quantités finies

$$\mu=\varphi'(0), \qquad \nu=\chi'(0),$$

on aura sensiblement

$$\varphi(\varepsilon)=\mu\varepsilon, \qquad \chi(\varepsilon)=\nu\varepsilon;$$

et, par suite, les formules

$$\int_{\varepsilon}^{\infty} \chi'(z)\,f[\chi(z)]\,dz = \int_{\chi(\varepsilon)}^{\infty} f(x)\,dx,$$
$$\int_{\varepsilon}^{\infty} \varphi'(z)\,f[\varphi(z)]\,dz = \int_{\varphi(\varepsilon)}^{\infty} f(x)\,dx,$$

combinées avec l'équation (11), donneront à très peu près

$$\int_{\varepsilon}^{\infty} \{\chi'(z)\,f[\chi(z)] - \varphi'(z)\,f[\varphi(z)]\}\,dz = \mathrm{f}\,\mathrm{l}\left(\frac{\mu}{\nu}\right);$$

puis on en conclura en toute rigueur, en posant $\varepsilon=0$,

$$\int_{0}^{\infty} \{\chi'(z)\,f[\chi(z)] - \varphi'(z)\,f[\varphi(z)]\}\,dz = \mathrm{f}\,\mathrm{l}\left[\frac{\varphi'(0)}{\chi'(0)}\right]. \tag{12}$$

Si l'on prend en particulier

$$\mathrm{f}(x)=\frac{e^{-x}}{x},$$

la formule (12) deviendra

$$\int_{0}^{\infty} \left[\frac{\chi'(z)}{\chi(z)}e^{-\chi(z)} - \frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)}e^{-\varphi(z)}\right]dz = \mathrm{l}\left[\frac{\varphi'(0)}{\chi'(0)}\right]. \tag{13}$$

L'équation (13) comprend plusieurs formules déjà connues. Ainsi, par exemple, on en tirera : 1° en supposant $\chi(z)=z$, $\varphi(z)=\mathrm{l}(1+z)$,

$$\int_{0}^{\infty} \left[\frac{e^{-z}}{z} - \frac{(1+z)^{-2}}{\mathrm{l}(1+z)}\right]dz = 0; \tag{14}$$

2° en désignant par a, b deux constantes dont les parties réelles soient positives, et supposant $\varphi(z)=az$, $\chi(z)=bz$,

$$\int_{0}^{\infty} \frac{e^{-bz}-e^{-az}}{z}\,dz = \mathrm{l}\left(\frac{a}{b}\right), \qquad \cdots \tag{15}$$

A l'aide d'intégrations par parties jointes à la formule (15), on peut assez facilement calculer la valeur de l'intégrale

$$\int_{0}^{\infty} f(x)\,dx,$$

lorsque, cette valeur étant finie, le facteur $f(x)$ est déterminé par l'équation (9). Entrons à ce sujet dans quelques détails.

Supposons que, dans les polynomes

$$P, \quad Q, \quad R, \quad \ldots,$$

composés de termes proportionnels à des puissances entières positives, nulles ou négatives de x, les parties qui renferment des puissances négatives soient représentées par

$$\mathfrak{P},\quad \mathfrak{Q},\quad \mathfrak{R},\quad \ldots.$$

Les restes

$$\mathrm{P}-\mathfrak{P},\quad \mathrm{Q}-\mathfrak{Q},\quad \mathrm{R}-\mathfrak{R},\quad \ldots$$

ne renfermeront plus que des puissances nulles ou positives, et par suite, la valeur de l'intégrale

$$\int_0^\infty [(\mathrm{P}-\mathfrak{P})e^{-ax}+(\mathrm{Q}-\mathfrak{Q})e^{-bx}+\ldots]\,dx$$

pourra se déduire des deux formules

$$(16)\qquad \begin{cases} \displaystyle\int_0^\infty \quad e^{-hx}\,dx = \frac{1}{h}, \\ \displaystyle\int_0^\infty x^m e^{-hx}\,dx = \frac{1.2.3\ldots m}{h^{m+1}}, \end{cases}$$

qui subsistent pour une valeur positive de la partie réelle de h, et pour une valeur nulle ou positive de m. D'autre part, comme en posant, pour abréger,

$$(17)\qquad \varphi(x) = \mathfrak{P}e^{-ax}+\mathfrak{Q}e^{-bx}+\mathfrak{R}e^{-cx}+\ldots,$$

on tirera de la formule (9)

$$f(x) = (\mathrm{P}-\mathfrak{P})e^{-ax}+(\mathrm{Q}-\mathfrak{Q})e^{-bx}+(\mathrm{R}-\mathfrak{R})e^{-cx}+\ldots+\varphi(x),$$

on aura encore

$$(18)\qquad \begin{aligned} &\int_0^\infty f(x)\,dx \\ &\quad = \int_0^\infty [(\mathrm{P}-\mathfrak{P})e^{-ax}+(\mathrm{Q}-\mathfrak{Q})e^{-bx}+(\mathrm{R}-\mathfrak{R})e^{-cx}+\ldots]\,dx \\ &\quad\quad +\int_0^\infty \varphi(x)\,dx; \end{aligned}$$

et cette dernière formule, qui offre pour second membre la somme de deux intégrales, dont l'une peut être facilement calculée comme on

vient de le dire, réduira évidemment la détermination de l'intégrale

$$\int_0^\infty f(x)\,dx$$

à celle de l'intégrale

$$\int_0^\infty \varphi(x)\,dx,$$

dont nous allons maintenant nous occuper.

Concevons d'abord que, la valeur de $\varphi(x)$ étant déterminée par l'équation (12), on cherche la valeur, non plus de l'intégrale

$$\int_0^\infty \varphi(x)\,dx,$$

mais de la suivante

$$\int_\varepsilon^\infty \varphi(x)\,dx,$$

ε désignant un nombre infiniment petit. Puisque les lettres $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{Q}$, $\mathfrak{R}$, … représentent des polynomes qui renferment seulement des puissances entières et négatives de x, la fonction $\varphi(x)$ pourra être décomposée en termes proportionnels à des expressions de la forme

$$\frac{e^{-hx}}{x^m},$$

h désignant l'un quelconque des exposants a, b, c, …, par conséquent une constante dont la partie réelle sera positive. Donc, par suite, l'intégrale

$$\int_\varepsilon^\infty \varphi(x)\,dx$$

pourra être décomposée en plusieurs parties respectivement proportionnelles à d'autres intégrales de la forme

$$\int_\varepsilon^\infty \frac{e^{-hx}}{x^m}\,dx.$$

D'ailleurs, en effectuant une ou plusieurs intégrations par parties, on trouvera successivement

$$\int \frac{e^{-hx}}{x^m}\,dx = -\frac{e^{-hx}}{(m-1)x^{m-1}} - \frac{h}{m-1}\int \frac{e^{-hx}}{x^{m-1}}\,dx,$$
$$\int \frac{e^{-hx}}{x^{m-1}}\,dx = -\frac{e^{-hx}}{(m-2)x^{m-2}} - \frac{h}{m-2}\int \frac{e^{-hx}}{x^{m-2}}\,dx,$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots,$$

puis on en conclura

$$\int \frac{e^{-hx}}{x^m}\,dx = -\frac{e^{-hx}}{(m-1)x^{m-1}} - \frac{(-h)\,e^{-hx}}{(m-1)(m-2)x^{m-2}} - \dots$$
$$- \frac{(-h)^{m-2}\,e^{-hx}}{(m-1)(m-2)\dots1.x} + \frac{(-h)^{m-1}}{(m-1)(m-2)\dots1}\int \frac{e^{-hx}}{x}\,dx,$$

et par suite

$$(19)\quad \int_\varepsilon^\infty \frac{e^{-hx}}{x^m}\,dx = \frac{e^{-h\varepsilon}}{(m-1)\varepsilon^{m-1}} + \frac{(-h)\,e^{-h\varepsilon}}{(m-1)(m-2)\varepsilon^{m-2}} + \dots$$
$$+ \frac{(-h)^{m-2}\,e^{-h\varepsilon}}{(m-1)(m-2)\dots1.\varepsilon} + \frac{(-h)^{m-1}}{(m-1)(m-2)\dots1}\int_\varepsilon^\infty \frac{e^{-hx}}{x}\,dx.$$

Donc la valeur de l'intégrale

$$\int_\varepsilon^\infty \varphi(x)\,dx$$

se composera : 1° de termes finis, dont chacun pourra être développé suivant les puissances ascendantes et entières de ε ; 2° de termes proportionnels à des intégrales de la forme

$$\int_\varepsilon^\infty \frac{e^{-ax}}{x}\,dx,\quad \int_\varepsilon^\infty \frac{e^{-bx}}{x}\,dx,\quad \int_\varepsilon^\infty \frac{e^{-cx}}{x}\,dx,\quad \dots.$$

Donc, en nommant

$$A,\quad B,\quad C,\quad \dots$$

les coefficients constants par lesquels ces dernières intégrales se trouveront multipliées, et K la somme des termes finis, on aura

$$(20)\qquad \int_\varepsilon^\infty \varphi(x)\,dx = K + A\int_\varepsilon^\infty e^{-ax}\frac{dx}{x} + B\int_\varepsilon^\infty e^{-bx}\frac{dx}{x} + \dots.$$

Chacune des intégrales que renferme le second membre de la formule (20) surpasse l'intégrale de même espèce

$$\int_\varepsilon^\infty e^{-x}\frac{dx}{x}.$$

d'une quantité qui, en vertu de la formule (15), conserve une valeur finie lorsque ε s'évanouit. Par suite, la somme

$$A\int_\varepsilon^\infty e^{-ax}\frac{dx}{x} + B\int_\varepsilon^\infty e^{-bx}\frac{dx}{x} + \dots$$

surpassera la somme

$$(A + B + C + \dots)\int_\varepsilon^\infty e^{-x}\frac{dx}{x}$$

d'une quantité qui restera finie pour des valeurs infiniment petites de ε. Effectivement, si l'on pose

$$(21)\qquad H = A\int_\varepsilon^\infty \frac{e^{-ax} - e^{-x}}{x}\,dx + B\int_\varepsilon^\infty \frac{e^{-bx} - e^{-x}}{x}\,dx + \dots,$$

la formule (15) donnera, pour $\varepsilon = 0$,

$$(22)\qquad H = -A\,\mathrm{l}(a) - B\,\mathrm{l}(b) - \dots.$$

Ajoutons qu'en vertu de la formule (21), l'équation (20) deviendra

$$(23)\qquad \int_\varepsilon^\infty \varphi(x)\,dx = K + H + (A + B + C + \dots)\int_\varepsilon^\infty \frac{e^{-x}}{x}\,dx.$$

Quant à l'intégrale

$$\int_\varepsilon^\infty e^{-x}\frac{dx}{x},$$

elle surpasse évidemment la suivante :

$$\int_\varepsilon^1 e^{-x}\frac{dx}{x},$$

et, à plus forte raison, la suivante :

$$\int_\varepsilon^1 e^{-1}\frac{dx}{x} = \frac{1}{e}\,\mathrm{l}\left(\frac{1}{\varepsilon}\right);$$

par conséquent, elle devient infinie pour $\varepsilon = 0$. Mais, d'un autre côté, elle offre évidemment une valeur numérique équivalente à celle de la somme

$$\int_\varepsilon^1 e^{-x}\frac{dx}{x} + \int_1^\infty e^{-x}\frac{dx}{x},$$

par conséquent inférieure à celle de la somme

$$\int_\varepsilon^1 \frac{dx}{x} + \int_1^\infty e^{-x}\,dx$$

et, à plus forte raison, à celle de la somme

$$\int_\varepsilon^1 \frac{dx}{x} + \int_0^\infty e^{-x}\,dx = 1 - \mathrm{l}(\varepsilon).$$

Donc, par suite, le produit

$$\varepsilon^m \int_\varepsilon^\infty e^{-x}\frac{dx}{x}$$

s'évanouira toujours avec ε, pour des valeurs positives du nombre m; et, comme on pourra en dire autant du produit

$$\varepsilon^m \int_\varepsilon^\infty \varphi(x)\,dx,$$

si l'intégrale

$$\int_\varepsilon^\infty \varphi(x)\,dx$$

conserve une valeur finie pour $\varepsilon = 0$, il est clair que, dans ce cas, en vertu de l'équation (23), le produit

$$K\varepsilon^m$$

s'évanouira lui-même avec ε pour toute valeur positive de m.

Supposons maintenant qu'on développe, comme on peut le faire, les exponentielles

$$e^{-a\varepsilon}, \quad e^{-b\varepsilon}, \quad e^{-c\varepsilon}, \quad \ldots,$$

renfermées dans la somme K en séries convergentes suivant les puissances ascendantes de ε; et soit $\left(\frac{1}{x}\right)^n$ la plus haute puissance de $\frac{1}{x}$ renfermée dans les polynomes

$$\mathfrak{P}, \quad \mathfrak{Q}, \quad \mathfrak{R}, \quad \ldots.$$

La somme K se trouvera elle-même développée en série convergente par une équation de la forme

$$K = k_{-n}\varepsilon^{-n} + k_{-n+1}\varepsilon^{-n+1} + \ldots + k_{-1}\varepsilon^{-1} + k + k_1\varepsilon + k_2\varepsilon^2 + \ldots;$$

et, si l'on suppose que l'intégrale

$$\int_\varepsilon^\infty \varphi(x)\,dx$$

conserve une valeur finie pour $\varepsilon = 0$, alors, la condition

$$K\varepsilon^m = 0,$$

se trouvant vérifiée pour une valeur nulle de ε et pour une valeur positive quelconque de m, entraînera la formule

$$(k_{-n}\varepsilon^{-n} + k_{-n+1}\varepsilon^{-n+1} + \ldots + k_{-1}\varepsilon^{-1})\varepsilon^m = 0.$$

Or si, dans cette dernière formule, on attribue successivement à m les diverses valeurs

$$n, \quad n-1, \quad \ldots, \quad 1,$$

on en déduira, l'une après l'autre, les équations

$$(24) \qquad k_{-n} = 0, \quad k_{-n+1} = 0, \quad \ldots, \quad k_{-1} = 0.$$

Donc, dans l'hypothèse admise, on aura simplement

$$K = k + k_1\varepsilon + k_2\varepsilon^2 + \ldots.$$

et par suite l'équation (23) sera réduite à celle-ci :

$$(25)\qquad \int_\varepsilon^\infty \varphi(x)\,dx = k + k_1\varepsilon + k_2\varepsilon^2 + \ldots + H + (A + B + C + \ldots)\int_\varepsilon^\infty e^{-x}\frac{dx}{x}.$$

Il y a plus ; comme, en vertu de la formule (25), une valeur nulle de ε rendrait infinie l'intégrale

$$\int_\varepsilon^\infty \varphi(x)\,dx,$$

en même temps que le produit

$$(A + B + C + \ldots)\int_\varepsilon^\infty e^{-x}\frac{dx}{x},$$

si le facteur $A + B + C + \ldots$ ne se réduisait pas généralement à zéro, on peut affirmer que l'hypothèse admise entraînera non seulement les conditions (24), mais encore celle-ci :

$$(26)\qquad A + B + C + \ldots = 0.$$

Donc, dans cette hypothèse, l'équation (25), réduite à la formule

$$\int_\varepsilon^\infty \varphi(x)\,dx = k + k_1\varepsilon + k_2\varepsilon^2 + \ldots + H,$$

et combinée avec l'équation (22) qui subsiste pour une valeur nulle de ε, donnera

$$(27)\qquad \int_0^\infty \varphi(x)\,dx = k - A\,l(a) - B\,l(b) - C\,l(c) - \ldots.$$

Cherchons maintenant les valeurs des coefficients

$$A,\quad B,\quad C,\quad \ldots$$

et de la constante k.

Il résulte de la formule (19) que, si l'on suppose

$$\mathcal{P} = \frac{1}{x^m},$$

on aura

$$A = \frac{(-a)^{m-1}}{1.2\ldots(m-1)} = \mathcal{E}\left[\frac{e^{-ax}}{x^m}\right].$$

Si l'on supposait

$$\mathcal{P} = \frac{\lambda}{x^m},$$

λ étant un coefficient constant, la valeur de A se trouverait évidemment multipliée par λ ; on aurait donc

$$A = \lambda\,\mathcal{E}\left[\frac{e^{-ax}}{x^m}\right] = \mathcal{E}\left[\frac{\lambda\,e^{-ax}}{x^m}\right].$$

Par suite, on trouvera, dans l'une et l'autre supposition,

$$(28)\qquad A = \mathcal{E}\,[\mathcal{P}\,e^{-ax}].$$

D'ailleurs, le polynome $\mathcal{P}$ peut toujours être décomposé en termes de la forme

$$\frac{\lambda}{x^m},$$

et il suffira d'ajouter entre elles les valeurs de A correspondantes à diverses valeurs de $\mathcal{P}$, pour obtenir la valeur de A correspondante à une valeur nouvelle de $\mathcal{P}$ représentée par la somme de toutes les autres. Donc la formule (28) s'étend à tous les cas possibles. On établira de la même manière chacune des équations

$$(29)\qquad B = \mathcal{E}\,[\mathcal{Q}\,e^{-bx}],\qquad C = \mathcal{E}\,[\mathcal{R}\,e^{-cx}],\qquad \ldots$$

Quant à la valeur de la constante k, on peut la déduire encore facilement de la formule (19). En effet, en vertu de cette formule, si l'on suppose

$$\mathcal{P} = \frac{1}{x^m},$$

m désignant un nombre entier supérieur à l'unité, la partie de k qui correspondra au produit

$$\mathcal{P}\,e^{-ax}$$

se trouvera représentée par le terme qui ne dépendra pas de ε dans le développement du polynome

$$\frac{e^{-a\varepsilon}}{(m-1)\varepsilon^{m-1}}+\frac{(-a)\,e^{-a\varepsilon}}{(m-1)(m-2)\varepsilon^{m-2}}+\ldots+\frac{(-a)^{m-2}\,e^{-a\varepsilon}}{(m-1)(m-2)\ldots1.\varepsilon},$$

en une série ordonnée suivant les puissances ascendantes de ε, c'est-à-dire par l'expression

$$\frac{(-a)^{m-1}}{1.2\ldots(m-1)}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{m-1}\right),$$

ou, ce qui revient au même, par l'expression

$$\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{m-1}\right)\mathcal{E}\left[\frac{1}{x^m}e^{-ax}\right].$$

Si l'on supposait au contraire

$$\mathfrak{P}=\frac{\lambda}{x^m},$$

λ désignant un coefficient constant, la partie de k correspondante au produit $\mathfrak{P}e^{-ax}$ serait évidemment

$$(30)\qquad \left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{m-1}\right)\mathcal{E}\left[\frac{\lambda}{x^m}e^{-ax}\right].$$

Cela posé, soient

$$\frac{u}{x},\quad \frac{v}{x^2},\quad \frac{w}{x^3},\quad \ldots$$

ce que devient successivement la fonction

$$\varphi(x)=\mathfrak{P}\,e^{-ax}+\mathfrak{Q}\,e^{-bx}+\mathfrak{R}\,e^{-cx}+\ldots,$$

quand on réduit chacun des polynomes

$$\mathfrak{P},\quad \mathfrak{Q},\quad \mathfrak{R},\quad \ldots$$

à un seul terme, savoir au terme qui renferme comme facteur

$$\frac{1}{x}\quad \text{ou}\quad \frac{1}{x^2}\quad \text{ou}\quad \frac{1}{x^3},\quad \ldots.$$

Non seulement on aura

$$(31)\qquad \varphi(x)=\frac{u}{x}+\frac{v}{x^2}+\frac{w}{x^3}+\ldots;$$

mais de plus la valeur générale de k, composée de diverses expressions semblables à l'expression (30), se trouvera évidemment déterminée par la formule

$$(32)\qquad k=\mathcal{E}\left[\frac{v}{x^2}+\frac{w}{x^3}+\ldots\right]+\frac{1}{2}\mathcal{E}\left[\frac{w}{x^3}+\ldots\right]+\ldots.$$

Eu égard aux formules (28), (29) et (32), l'équation (27) donnera

$$(33)\qquad \int_0^\infty \varphi(x)\,dx=\mathcal{E}\left[\frac{v}{x^2}+\frac{w}{x^3}+\ldots\right]+\frac{1}{2}\mathcal{E}\left[\frac{w}{x^3}+\ldots\right]+\ldots$$
$$-\mathcal{E}[\mathfrak{P}\,e^{-ax}\,\mathrm{l}(a)+\mathfrak{Q}\,e^{-bx}\,\mathrm{l}(b)+\mathfrak{R}\,e^{-cx}\,\mathrm{l}(c)+\ldots].$$

Pour montrer une application de la formule (33), supposons

$$\varphi(x)=\left[1-\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{2}\right)(1-e^{-x})\right]\frac{e^{-ax}}{x}.$$

On aura, dans cette hypothèse,

$$b=a+1,$$
$$\mathfrak{P}=\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{x}\right)\frac{1}{x},\qquad \mathfrak{Q}=+\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{x}\right)\frac{1}{x},$$
$$u=\frac{1}{2}(1+e^{-x})\,e^{-ax},\qquad v=-(1-e^{-x})\,e^{-ax},$$
$$\mathcal{E}[\mathfrak{P}\,e^{-ax}]=a+\frac{1}{2},\qquad \mathcal{E}[\mathfrak{Q}\,e^{-bx}]=-\left(a+\frac{1}{2}\right),$$
$$\mathcal{E}\left[\frac{v}{x^2}\right]=-1,$$

et par suite la formule (33) donnera

$$\int_0^\infty\left[1-\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{2}\right)(1-e^{-x})\right]e^{-ax}\frac{dx}{x}=-1+\left(a+\frac{1}{2}\right)\mathrm{l}\left(\frac{a+1}{a}\right).$$

Soient maintenant n un nombre très considérable, et

$$(34)\qquad \mathrm{f}(n)=\int_0^\infty \mathrm{R}(\mathrm{P}+\mathrm{Q}\,e^{-nx})\,dx$$

une fonction déterminée de n, représentée par une intégrale définie, dans laquelle le facteur R conserve une valeur finie, pour $x = 0$, P, Q étant d'ailleurs deux fonctions de x développables suivant les puissances ascendantes et entières de x. Si, en nommant $\mathcal{Q}$ la partie de la fonction Q qui renferme des puissances négatives de x, on pose

$$F(n) = \int_0^\infty R(P + \mathcal{Q}\, e^{-nx})\, dx, \tag{35}$$

$$\varpi(n) = \int_0^\infty R(Q - \mathcal{Q})\, e^{-nx}\, dx, \tag{36}$$

on aura

$$f(n) = F(n) + \varpi(n); \tag{37}$$

et la fonction $\varpi(n)$, qui s'évanouira pour $n = \infty$, deviendra infiniment petite pour des valeurs infiniment grandes de n.

II. — *Sur la sommation des puissances négatives semblables des divers termes d'une progression arithmétique.*

Pour montrer une application des formules établies dans le paragraphe I, supposons

$$f(n) = \frac{1}{\alpha^a} + \frac{1}{(\alpha+1)^a} + \ldots + \frac{1}{(\alpha+n-1)^a}, \tag{1}$$

α, a désignant deux quantités positives. Si l'on fait, avec M. Legendre,

$$\Gamma(a) = \int_0^\infty x^{a-1} e^{-x}\, dx,$$

on en conclura

$$\int_0^\infty x^{a-1} e^{-\alpha x}\, dx = \frac{\Gamma(a)}{\alpha^a},$$

ou, ce qui revient au même,

$$\frac{1}{\alpha^a} = \frac{1}{\Gamma(a)} \int_0^\infty x^{a-1} e^{-\alpha x}\, dx;$$

et, par suite, on aura

$$f(n) = \frac{1}{\Gamma(a)} \int_0^\infty x^{a-1} e^{-\alpha x} [1 + e^{-x} + \ldots + e^{-(n-1)x}]\, dx.$$

Mais, d'autre part, on trouvera

$$1 + e^{-x} + \ldots + e^{-(n-1)x} = \frac{1 - e^{-nx}}{1 - e^{-x}}.$$

On aura donc encore

$$f(n) = \frac{1}{\Gamma(a)} \int_0^\infty x^{a-1} e^{-\alpha x} \frac{1 - e^{-nx}}{1 - e^{-x}}\, dx. \tag{2}$$

On réduira la formule (2) à la formule (34) du paragraphe I, en posant

$$R = \frac{x^a e^{-\alpha x}}{\Gamma(a)}, \qquad P = \frac{1}{x(1 - e^{-x})}, \qquad Q = -\frac{1}{x(1 - e^{-x})}.$$

Alors, en développant la fonction Q suivant les puissances ascendantes de x, et nommant $\mathcal{Q}$ la partie du développement qui renfermera des puissances négatives de x, on trouvera

$$\mathcal{Q} = -\frac{1}{x^2} - \frac{1}{2x}.$$

Cela posé, les formules (35), (36), (37) du paragraphe I donneront

$$f(n) = F(n) + \varpi(n), \tag{3}$$

les valeurs de $F(n)$ et de $\varpi(n)$ étant

$$F(n) = \frac{1}{\Gamma(a)} \int_0^\infty x^{a-1} e^{-\alpha x} \left[\frac{1}{1 - e^{-x}} - \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{2}\right) e^{-nx}\right] dx, \tag{4}$$

$$\varpi(n) = \frac{1}{\Gamma(a)} \int_0^\infty x^{a-1} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{2} - \frac{1}{1 - e^{-x}}\right) e^{-(n+\alpha)x}\, dx. \tag{5}$$

En vertu des formules (4) et (5), on aura évidemment

$$\varpi(0) = -F(0) = \frac{1}{\Gamma(a)} \int_0^\infty x^{a-1} e^{-\alpha x} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{2} - \frac{1}{1 - e^{-x}}\right) dx. \tag{6}$$

En partant de l'équation (4), on peut obtenir en termes finis, sinon la valeur de la fonction $F(n)$, du moins celle de la différence

$$F(n) - F(0),$$

et par conséquent ramener la détermination de $F(n)$ considérée comme fonction de n, à l'évaluation de la constante représentée par $F(0)$. En effet, on tire de l'équation (4)

$$(7) \qquad F(n) - F(0) = \frac{1}{\Gamma(a)} \int_0^\infty x^{a-1} e^{-\alpha x} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{2}\right)(1 - e^{-nx})\, dx.$$

Comme on aura d'ailleurs évidemment

$$\int_0^\infty x^{a-1} e^{-\alpha x} e^{-nx}\, dx = \frac{\Gamma(a)}{(\alpha + n)^a},$$

on en conclura, en intégrant par rapport à n et à partir de $n = 0$,

$$\int_0^\infty x^{a-1} e^{-\alpha x} \frac{1 - e^{-nx}}{x}\, dx = \frac{(\alpha + n)^{1-a} - \alpha^{1-a}}{1 - a} \Gamma(a),$$

puis, en remplaçant a par $a + 1$,

$$\int_0^\infty x^{a-1} e^{-\alpha x}(1 - e^{-nx})\, dx = [\alpha^{-a} - (\alpha + n)^{-a}]\,\Gamma(a).$$

Cela posé, la formule (7) donnera

$$(8) \qquad F(n) - F(0) = \frac{(\alpha + n)^{1-a} - \alpha^{1-a}}{1 - a} - \frac{(\alpha + n)^{-a} - \alpha^{-a}}{2},$$

et l'on en tirera, eu égard à la formule (6),

$$(9) \qquad F(n) = \frac{(\alpha + n)^{1-a} - \alpha^{1-a}}{1 - a} - \frac{(\alpha + n)^{-a} - \alpha^{-a}}{2} - \varpi(0).$$

En substituant la valeur précédente de $F(n)$ dans le second membre de l'équation (3), et ayant égard à la formule (1), on trouvera

$$(10) \qquad \frac{1}{\alpha^a} + \frac{1}{(\alpha + 1)^a} + \ldots + \frac{1}{(\alpha + n - 1)^a} = \frac{(\alpha + n)^{1-a} - \alpha^{1-a}}{1 - a} - \frac{(\alpha + n)^{-a} - \alpha^{-a}}{2} + \varpi(n) - \varpi(0).$$

Si dans l'équation (10) on pose $a = 1$, elle donnera

$$(11) \qquad \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\alpha + 1} + \ldots + \frac{1}{\alpha + n - 1} = l(\alpha + n) - l(\alpha) + \frac{n}{2\alpha(\alpha + n)} + \varpi(n) - \varpi(0),$$

la valeur de $\varpi(n)$ étant

$$(12) \qquad \varpi(n) = \int_0^\infty \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{2} - \frac{1}{1 - e^{-x}}\right) e^{-(n+\alpha)x}\, dx.$$

Si l'on pose en outre

$$\alpha = 1,$$

on trouvera

$$(13) \qquad 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} = l(n + 1) + \frac{1}{2}\frac{n}{n + 1} + \varpi(n) - \varpi(0),$$

la valeur de $\varpi(n)$ étant

$$(14) \qquad \varpi(n) = \int_0^\infty \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{2} - \frac{1}{1 - e^{-x}}\right) e^{-(n+1)x}\, dx.$$

L'équation (13), dont le premier membre est la somme de la suite harmonique

$$1, \quad \frac{1}{2}, \quad \frac{1}{3}, \quad \ldots, \quad \frac{1}{n},$$

ne diffère pas, au fond, de la formule qu'Euler a donnée pour la sommation de cette suite, et ramène cette sommation au calcul des deux intégrales représentées par $\varpi(n)$ et $\varpi(0)$, dont la première devient infiniment petite pour des valeurs infiniment grandes de n. Ajoutons qu'en vertu de la formule (14) on aura

$$\varpi(0) = \int_0^\infty \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{2} - \frac{1}{1 - e^{-x}}\right) e^{-x}\, dx,$$

ou, ce qui revient au même,

$$(15) \qquad \varpi(0) = \frac{1}{2} - \int_0^\infty \left(\frac{1}{1 - e^{-x}} - \frac{1}{x}\right) e^{-x}\, dx.$$

En posant $e^{-x} = t$, on réduit l'intégrale

$$\int_0^\infty \left(\frac{1}{1-e^{-x}} - \frac{1}{x}\right) e^{-x}\,dx,$$

comprise dans le second membre de l'équation (15), à la forme

$$\int_0^1 \left[\frac{1}{1-t} + \frac{1}{l(t)}\right] dt.$$

Cette dernière intégrale a été calculée par Euler, qui a trouvé sa valeur sensiblement égale au nombre

$$0,5772156\ldots.$$

Il est bon d'observer que dans l'équation (10), comme dans l'équation (13), l'intégrale représentée par $\varpi(n)$ devient infiniment petite pour des valeurs infiniment grandes de n. Quant à l'intégrale représentée par $\varpi(0)$, elle est indépendante de n et analogue à la constante introduite par Euler dans le calcul relatif à la sommation de la suite harmonique.

Nous remarquerons, en terminant ce paragraphe, que les intégrales représentées par $\varpi(0)$ et $\varpi(n)$, dans la formule (10), peuvent être développées de plusieurs manières en séries convergentes. On y parviendra, par exemple, en suivant la méthode employée, dans un cas semblable, par M. Binet, et développant, dans la fonction sous le signe $\int$, le coefficient de l'exponentielle

$$e^{-(n+\alpha)x}$$

en une série ordonnée suivant les puissances ascendantes de la quantité variable

$$z = 1 - e^{-x}.$$

On pourrait ainsi commencer par décomposer l'intégrale $\varpi(n)$ en deux autres, dont la première serait prise entre les limites $x = 0$, $x = 1$, la seconde entre les limites $x = 1$, $x = \infty$; puis développer

dans la seconde intégrale la fonction sous le signe $\int$, comme on vient de le dire, et dans la première intégrale, le rapport

$$\frac{1}{1-e^{-x}}$$

en une série ordonnée suivant les puissances ascendantes de x. On sait d'ailleurs que, dans cette dernière série, les coefficients des puissances entières de x s'expriment très facilement à l'aide des nombres de Bernoulli.

III. — *Sur les intégrales eulériennes.*

Les intégrales, nommées *eulériennes* par M. Legendre, sont, comme on sait, de deux espèces. Mais, comme les intégrales eulériennes de première espèce peuvent être exprimées en fonction des intégrales eulériennes de seconde espèce, nous nous bornerons à considérer celles-ci que M. Legendre représente à l'aide de la lettre Γ, et à faire voir comment, des principes établis dans le premier paragraphe, on peut déduire les propriétés diverses de la fonction de n déterminée par la formule

$$\Gamma(n) = \int_0^\infty x^{n-1} e^{-x}\,dx. \tag{1}$$

Lorsqu'on pose $n = 1$, l'équation (1) donne immédiatement

$$\Gamma(1) = 1. \tag{2}$$

Lorsque n se réduit à un nombre entier plus grand que l'unité, alors, pour obtenir la valeur de $\Gamma(n)$, il suffit d'appliquer une ou plusieurs fois de suite l'intégration par parties au second membre de la formule (1). On arrive ainsi aux formules connues

$$\Gamma(2) = 1, \qquad \Gamma(3) = 1.2, \qquad \Gamma(4) = 1.2.3, \qquad \ldots, \tag{3}$$

et l'on trouve généralement

$$\Gamma(n) = 1.2\ldots(n-1). \tag{4}$$

Au reste, on peut encore arriver facilement à la formule (3) en partant de l'équation

$$(5)\qquad \int_0^\infty e^{-kx}\,dx = \frac{1}{k},$$

dans laquelle k désigne une quantité positive quelconque. En effet, on tire de cette équation, différentiée $n-1$ fois par rapport à k,

$$(6)\qquad \int_0^\infty x^{n-1}e^{-kx}\,dx = \frac{1.2\ldots(n-1)}{k^n};$$

puis, en posant $k = 1$, on se trouve immédiatement ramené à la formule (4).

Supposons maintenant que la lettre n représente une quantité positive quelconque, qui puisse varier arbitrairement depuis $n = 0$. jusqu'à $n = \infty$.

En différentiant, par rapport à n, les deux membres de l'équation (1), on trouvera

$$(7)\qquad \mathrm{D}_n\Gamma(n) = \int_0^\infty x^{n-1}e^{-x}\,\mathrm{l}(x)\,dx.$$

D'autre part, en remplaçant x par z, et k par x dans la formule (5), on aura

$$\int_0^\infty e^{-xz}\,dz = \frac{1}{x},$$

puis, en intégrant par rapport à x et à partir de $x = 1$, on en tirera

$$\int_0^\infty \frac{e^{-z}-e^{-xz}}{z}\,dz = \mathrm{l}(x),$$

ce qu'on pourrait aussi conclure de l'équation (15) du paragraphe I. Donc la formule (7) donnera

$$\mathrm{D}_n\Gamma(n) = \int_0^\infty\int_0^\infty x^{n-1}e^{-x}(e^{-z}-e^{-xz})\frac{dz\,dx}{z};$$

et, comme à l'équation (1) on pourra joindre la suivante :

$$\int_0^\infty x^{n-1}e^{-x}e^{-xz}\,dx = \int_0^\infty x^{n-1}e^{-x(1+z)}\,dx = \frac{\Gamma(n)}{(1+z)^n},$$

on trouvera définitivement

$$\mathrm{D}_n\Gamma(n) = \Gamma(n)\int_0^\infty\left[e^{-z} - \frac{1}{(1+z)^n}\right]\frac{dz}{z},$$

ou, ce qui revient au même,

$$(8)\qquad \mathrm{D}_n\,\mathrm{l}\,\Gamma(n) = \int_0^\infty [e^{-z}-(1+z)^{-n}]\frac{dz}{z}.$$

Si l'on intègre par rapport à n, et à partir de $n = 1$, les deux membres de la formule (8), alors, en ayant égard à l'équation (1), on trouvera

$$(9)\qquad \mathrm{l}\,\Gamma(n) = \int_0^\infty\left[(n-1)e^{-z} - \frac{(1+z)^{-1}-(1+z)^{-n}}{\mathrm{l}(1+z)}\right]\frac{dz}{z}.$$

Il est facile de vérifier la formule (9), dans le cas particulier où l'on prend $n = 2$. Alors, en effet, elle donne, eu égard à la première des équations (3),

$$(10)\qquad 0 = \int_0^\infty\left[\frac{e^{-z}}{z} - \frac{(1+z)^{-2}}{\mathrm{l}(1+z)}\right]dz$$

et se réduit par conséquent à la formule (14) du paragraphe I.

Le second membre de la formule (9) renferme tout à la fois, sous le signe $\int$, le logarithme népérien $\mathrm{l}(1+z)$, et l'exponentielle e^{-z}; mais il peut être facilement débarrassé de cette exponentielle. En effet, si l'on combine entre elles, par voie d'addition, les formules (9) et (10), après avoir multiplié la dernière par $-(n-1)$, on trouvera

$$(11)\qquad \mathrm{l}\,\Gamma(n) = \int_0^\infty\left[(n-1)(1+z)^{-2} - \frac{(1+z)^{-1}-(1+z)^{-n}}{z}\right]\frac{dz}{\mathrm{l}(1+z)}.$$

Si l'on veut débarrasser le second membre de la formule (11) de la fonction transcendante $\mathrm{l}(1+z)$ il suffira de poser

$$\mathrm{l}(1+z) = x,$$

ou, ce qui revient au même,

$$1 + z = e^x, \qquad z = e^x - 1.$$

On trouvera ainsi

$$(12) \qquad \mathrm{l}\Gamma(n) = \int_0^\infty \left[(n-1)e^{-x} - \frac{e^{-x} - e^{-nx}}{1 - e^{-x}} \right] \frac{dx}{x}.$$

Il est bon d'observer qu'en différentiant l'équation (12) par rapport à n, on obtiendrait la suivante :

$$\mathrm{D}_n \mathrm{l}\Gamma(n) = \int_0^\infty \left(\frac{e^{-x}}{x} - \frac{e^{-nx}}{1 - e^{-x}} \right) dx.$$

Cette dernière équation, qui peut se déduire directement des formules (8) et (10), se transforme, quand on y pose

$$e^{-x} = t,$$

en une autre donnée par M. Gauss. Donc, réciproquement, en posant

$$t = -\mathrm{l}(x)$$

dans l'équation de M. Gauss, on pourra de cette équation, intégrée par rapport à n, tirer immédiatement la formule (12).

On peut aisément déduire de la formule (12) les diverses propriétés connues de la fonction $\Gamma(n)$; et d'abord, si l'on y remplace n par $n+1$, on trouvera

$$(13) \qquad \mathrm{l}\Gamma(1+n) = \int_0^\infty \left[n e^{-x} - \frac{e^{-x} - e^{-(n+1)x}}{1 - e^{-x}} \right] \frac{dx}{x},$$

puis on tirera des formules (12), (13)

$$\mathrm{l}\Gamma(1+n) - \mathrm{l}\Gamma(n) = \int_0^\infty \frac{e^{-x} - e^{-nx}}{x} dx = \mathrm{l}(n);$$

par conséquent

$$(14) \qquad \Gamma(1+n) = \mathrm{l}\Gamma(n) + \mathrm{l}(n).$$

et

$$(15) \qquad \Gamma(1+n) = n\Gamma(n).$$

On arriverait immédiatement à la même conclusion, en différentiant par rapport à k la formule

$$\int_0^\infty x^{n-1} e^{-kx} dx = \frac{1}{k^n} \int_0^\infty x^{n-1} e^{-x} dx = \frac{\Gamma(n)}{k^n},$$

et posant ensuite $k = 1$.

Concevons à présent que, n étant inférieur à l'unité, on remplace, dans la formule (13), n par $-n$. On trouvera

$$(16) \qquad \mathrm{l}\Gamma(1-n) = \int_0^\infty \left[-n e^{-x} - \frac{e^{-x} - e^{-(1-n)x}}{1 - e^{-x}} \right] \frac{dx}{x},$$

puis, en combinant entre elles par voie d'addition les formules (13) et (16), on aura

$$(17) \qquad \mathrm{l}\Gamma(1+n) + \mathrm{l}\Gamma(1-n) = \int_0^\infty \frac{e^{-(1+n)x} + e^{-(1-n)x} - 2e^{-x}}{1 - e^{-x}} \frac{dx}{x}.$$

D'autre part, si dans la seconde des formules (5) du paragraphe I, on pose successivement $x = t$, $x = \frac{1}{t}$, on en tirera

$$\int_0^\infty \frac{t^{a-1} dt}{1-t} = \int_0^\infty \frac{t^{-a} dt}{t-1} = \frac{\pi}{\operatorname{tang} a\pi};$$

par conséquent

$$\int_0^\infty \frac{t^{a-1} - t^{-a}}{1-t} dt = \frac{2\pi}{\operatorname{tang} a\pi}$$

et

$$\frac{\pi}{\operatorname{tang} a\pi} = \frac{1}{2} \int_0^\infty \frac{t^{a-1} - t^{-a}}{1-t} dt = \int_0^1 \frac{t^{a-1} - t^{-a}}{1-t} dt.$$

Donc, eu égard aux formules

$$\frac{t^{a-1} - t^{-a}}{1-t} = t^{a-1} + \frac{t^a - t^{-a}}{1-t},$$

$$\int_0^1 t^{a-1} dt = \frac{1}{a},$$

on aura

$$\frac{\pi}{\operatorname{tang} a\pi} = \frac{1}{a} + \int_0^1 \frac{t^a - t^{-a}}{1-t}\,dt$$

et

$$\int_0^1 \frac{t^a - t^{-a}}{1-t}\,dt = \frac{\pi}{\operatorname{tang} a\pi} - \frac{1}{a}.$$

Si, dans cette dernière formule, on pose $t = e^{-x}$, $a = n$, on trouvera

$$\int_0^\infty \frac{e^{-(1+n)x} - e^{-(1-n)x}}{1-e^{-x}}\,dx = \frac{\pi}{\operatorname{tang} n\pi} - \frac{1}{n},$$

puis en intégrant par rapport à n, et à partir de $n = 0$,

$$\int_0^\infty \frac{e^{-(1+n)x} + e^{-(1-n)x} - 2e^{-x}}{1-e^{-x}}\,\frac{dx}{x} = \mathrm{l}\,\frac{n\pi}{\sin n\pi}.$$

Cela posé, la formule (17) donnera

$$\mathrm{l}\,\Gamma(1+n) + \mathrm{l}\,\Gamma(1-n) = \mathrm{l}\,\frac{n\pi}{\sin n\pi}, \tag{18}$$

et par suite

$$\Gamma(1+n)\,\Gamma(1-n) = \frac{n\pi}{\sin n\pi}. \tag{19}$$

De cette dernière équation, jointe à la formule (15), on tire immédiatement la suivante :

$$\Gamma(n)\,\Gamma(1-n) = \frac{\pi}{\sin n\pi}, \tag{20}$$

qui peut aussi se déduire, comme on sait, de la première des formules (5) du paragraphe I. En effet, la formule

$$\frac{\pi}{\sin n\pi} = \int_0^\infty \frac{x^{n-1}\,dx}{1+x},$$

jointe à l'équation (5), de laquelle on tire

$$\frac{1}{1+x} = \int_0^\infty e^{-z} e^{-xz}\,dz,$$

donne

$$\frac{\pi}{\sin n\pi} = \int_0^\infty\!\int_0^\infty x^{n-1} e^{-z} e^{-xz}\,dz\,dx = \Gamma(n)\int_0^\infty z^{-n} e^{-z}\,dz = \Gamma(n)\,\Gamma(1-n).$$

En posant, dans l'équation (20), $n = \frac{1}{2}$, on retrouve l'équation connue

$$\left[\Gamma\left(\tfrac{1}{2}\right)\right]^2 = \pi,$$

ou

$$\Gamma\left(\tfrac{1}{2}\right) = \pi^{\frac{1}{2}}. \tag{21}$$

Les équations (14) et (18) ont cela de remarquable, qu'elles fournissent les valeurs des quantités

$$\mathrm{l}\,\Gamma(n+1) - \mathrm{l}\,\Gamma(n), \qquad \mathrm{l}\,\Gamma(1+n) + \mathrm{l}\,\Gamma(1-n),$$

dont chacune représente une fonction linéaire de deux valeurs différentes de $\mathrm{l}\,\Gamma(n)$. Nous montrerons plus loin comment, à l'aide de la formule (12), on peut découvrir et calculer d'autres fonctions linéaires formées avec diverses valeurs de $\mathrm{l}\,\Gamma(n)$; et, en terminant le présent paragraphe, nous ferons voir que la marche tracée dans le paragraphe I fournit immédiatement la décomposition de l'intégrale qui représente $\mathrm{l}\,\Gamma(n)$ en deux autres, dont l'une devient infiniment petite pour des valeurs infiniment grandes de n. Effectivement, si l'on pose, pour abréger,

$$\mathrm{P} = \left(n - 1 - \frac{1}{1-e^{-x}}\right)\frac{e^{-x}}{x}, \qquad \mathrm{Q} = \frac{1}{x(1-e^{-x})},$$

la formule (12), réduite à

$$\mathrm{l}\,\Gamma(n) = \int_0^\infty (\mathrm{P} + \mathrm{Q}\,e^{-nx})\,dx, \tag{22}$$

deviendra semblable à la formule (34) du paragraphe I; et, pour obtenir la décomposition ci-dessus mentionnée, il suffira de développer la fonction Q suivant les puissances ascendantes de x. Si l'on nomme $\mathfrak{Q}$ la partie du développement composée des seuls termes qui renfermeront les puissances négatives de x, on aura

$$\mathfrak{Q} = \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{2}\right)\frac{1}{x}$$

et

$$\text{(23)} \qquad \mathrm{l}\Gamma(n) = \mathrm{F}(n) + \varpi(n),$$

les valeurs de $\mathrm{F}(n)$, $\varpi(n)$ étant déterminées par les formules

$$\text{(24)} \qquad \mathrm{F}(n) = \int_0^\infty (\mathrm{P} + \mathfrak{Q}\, e^{-nx})\, dx,$$

$$\text{(25)} \qquad \varpi(n) = \int_0^\infty (\mathrm{Q} - \mathfrak{Q})\, e^{-nx}\, dx,$$

dont la seconde fournira une valeur de $\varpi(n)$ qui s'approchera indéfiniment de zéro, tandis que le nombre n croitra indéfiniment. Ajoutons que si, dans les formules (24) et (25), on substitue les valeurs de P, Q et $\mathfrak{Q}$, on obtiendra les équations

$$\text{(26)} \qquad \mathrm{F}(n) = \int_0^\infty \left[\left(n - 1 - \frac{1}{1 - e^{-x}}\right) e^{-x} + \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{2}\right) e^{-nx}\right] \frac{dx}{x},$$

$$\text{(27)} \qquad \varpi(n) = \int_0^\infty \left(\frac{1}{1 - e^{-x}} - \frac{1}{x} - \frac{1}{2}\right) e^{-nx}\, \frac{dx}{x},$$

dont la seconde a été donnée par M. Binet.

Lorsqu'on suppose $n = \frac{1}{2}$, il est facile de calculer non seulement la valeur de $\Gamma(n)$, alors déterminée par l'équation (21), mais aussi les valeurs de $\mathrm{F}(n)$ et $\varpi(n)$. En effet on tire de la formule (27)

$$\varpi\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^\infty \left(\frac{1}{1 - e^{-x}} - \frac{1}{x} - \frac{1}{2}\right) e^{-\frac{1}{2}x}\, \frac{dx}{x},$$

puis, en remplaçant x par $2x$,

$$\text{(28)} \qquad \varpi\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^\infty \left(\frac{1}{1 - e^{-2x}} - \frac{1}{2x} - \frac{1}{2}\right) e^{-x}\, \frac{dx}{x}.$$

D'autre part, on a

$$\frac{e^{-x}}{1 - e^{-2x}} = \frac{e^{-x}}{1 - e^{-x}}\left(1 - \frac{e^{-x}}{1 + e^{-x}}\right) = \frac{e^{-x}}{1 - e^{-x}} - \frac{e^{-2x}}{1 - e^{-2x}},$$

et l'on tirera de la formule (27), en y posant $n = 1$,

$$\varpi(1) = \int_0^\infty \left(\frac{1}{1 - e^{-x}} - \frac{1}{x} - \frac{1}{2}\right) e^{-x}\, \frac{dx}{x}$$
$$= \int_0^\infty \left(\frac{1}{1 - e^{-2x}} - \frac{1}{2x} - \frac{1}{2}\right) e^{-2x}\, \frac{dx}{x};$$

par conséquent

$$\text{(29)} \qquad 0 = \int_0^\infty \left(\frac{1}{1 - e^{-2x}} - \frac{2 - e^{-x}}{2x} - \frac{1 - e^{-x}}{2}\right) e^{-x}\, \frac{dx}{x}.$$

Or, en combinant par voie de soustraction les formules (28) et (29), on trouvera

$$\varpi\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}\int_0^\infty \left(\frac{1 - e^{-x}}{x} - e^{-x}\right) e^{-x}\, \frac{dx}{x},$$

ou, ce qui revient au même,

$$\varpi\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}\int_0^\infty \left(\frac{e^{-x} - e^{-2x}}{x^2} - \frac{e^{-2x}}{x}\right) dx.$$

D'ailleurs la formule (33) du paragraphe I donnera

$$\int_0^\infty \left(\frac{e^{-x} - e^{-2x}}{x^2} - \frac{e^{-2x}}{x}\right) dx$$
$$= \mathcal{E}\left[\frac{e^{-x} - e^{-2x}}{x^2}\right] + \mathcal{E}\left[\left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x}\right) e^{-2x}\, \mathrm{l}(2)\right] = 1 - \mathrm{l}(2).$$

On aura donc définitivement

$$\text{(30)} \qquad \varpi\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\mathrm{l}(2).$$

La valeur de $\varpi(\frac{1}{2})$ étant ainsi calculée, celle de $\mathrm{F}(\frac{1}{2})$ se déduira immédiatement des formules (21) et (23), desquelles on tirera

$$\frac{1}{2}\mathrm{l}(\pi) = \mathrm{F}\left(\frac{1}{2}\right) + \varpi\left(\frac{1}{2}\right) = \mathrm{F}\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\mathrm{l}(2),$$

et par suite

$$\text{(31)} \qquad \mathrm{F}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}\,\mathrm{l}(2\pi) - \frac{1}{2}.$$

Il y a plus, on pourra aisément déduire des formules (26) et (31) la valeur générale de $\mathrm{F}(n)$. En effet, la formule (24) donne

$$\mathrm{F}(n) - \mathrm{F}\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^\infty \left[\left(n - \frac{1}{2}\right)e^{-x} + \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{2}\right)\left(e^{-nx} - e^{-\frac{1}{2}x}\right)\right]\frac{dx}{x},$$

et par suite, eu égard à la formule (33) du paragraphe I, on aura

$$\begin{aligned} \mathrm{F}(n) - \mathrm{F}\left(\frac{1}{2}\right) = {} & \mathcal{E}\left[\frac{e^{-nx} - e^{-\frac{1}{2}x}}{x^2}\right] \\ & - \mathcal{E}\left\{\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{2}\right)\frac{1}{x}\left[e^{-nx}\,\mathrm{l}(n) - e^{-\frac{1}{2}x}\,\mathrm{l}\left(\frac{1}{2}\right)\right]\right\} \\ = {} & -n + \frac{1}{2} + \left(n - \frac{1}{2}\right)\mathrm{l}(n); \end{aligned}$$

puis on en conclura

$$\mathrm{F}(n) = \mathrm{F}\left(\frac{1}{2}\right) - n + \frac{1}{2} + \left(n - \frac{1}{2}\right)\mathrm{l}(n),$$

ou, ce qui revient au même,

$$\text{(32)} \qquad \mathrm{F}(n) = \left(n - \frac{1}{2}\right)\mathrm{l}(n) - n + \frac{1}{2}\,\mathrm{l}(2\pi).$$

Cela posé, la formule (23) se trouvera réduite à

$$\text{(33)} \qquad \mathrm{l}\,\Gamma(n) = \left(n - \frac{1}{2}\right)\mathrm{l}(n) - n + \frac{1}{2}\,\mathrm{l}(2\pi) + \varpi(n),$$

la valeur de $\varpi(n)$ étant toujours déterminée par l'équation (27); et l'on en conclura

$$\text{(34)} \qquad \Gamma(n) = (2\pi)^{\frac{1}{2}} n^{n-\frac{1}{2}} e^{-n} e^{\varpi(n)}.$$

En vertu de la formule (34), le rapport de la fonction $\Gamma(n)$ au produit

$$(2\pi)^{\frac{1}{2}} n^{n-\frac{1}{2}} e^{-n}$$

se trouve représenté par l'exponentielle

$$e^{\varpi(n)},$$

dont l'exposant $\varpi(n)$ s'approche indéfiniment de zéro, tandis que n croît indéfiniment. Donc, pour de très grandes valeurs de n, ce rapport se réduit sensiblement à l'unité. Cette conclusion remarquable est, comme on sait, une conséquence immédiate d'une formule donnée par Stirling.

IV. — *Sur le développement de* $\mathrm{l}\,\Gamma(n)$ *en série convergente, et sur la formule de Stirling.*

Comme on l'a vu dans le paragraphe précédent, le calcul de $\mathrm{l}\,\Gamma(n)$, et par suite le calcul de la fonction $\Gamma(n)$, se trouve réduit à celui de la fonction $\varpi(n)$ par la formule

$$\text{(1)} \qquad \mathrm{l}\,\Gamma(n) = \left(n - \frac{1}{2}\right)\mathrm{l}(n) - n + \frac{1}{2}\,\mathrm{l}(2\pi) + \varpi(n),$$

dans laquelle on a

$$\text{(2)} \qquad \varpi(n) = \int_0^\infty \left(\frac{1}{1 - e^{-x}} - \frac{1}{x} - \frac{1}{2}\right) e^{-nx}\,\frac{dx}{x},$$

ou, ce qui revient au même,

$$\text{(3)} \qquad \varpi(n) = \int_0^\infty \frac{1 - (1 - e^{-x})\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{2}\right)}{x}\,\frac{e^{-nx}}{1 - e^{-x}}\,dx.$$

Voyons maintenant le parti qu'on peut tirer de la formule (2) ou (3), pour développer la fonction $\varpi(n)$ en série convergente.

La fonction de x, renfermée entre parenthèses sous le signe $\int$ dans le second membre de la formule (2) ou (3), n'est développable en série convergente ordonnée suivant les puissances ascendantes de x, que pour un module de x inférieur au module 2π de la plus petite racine de l'équation

$$1 - e^{-x} = 0.$$

Mais il suffit de multiplier la fonction dont il s'agit par le facteur

$$1 - e^{x}$$

ou bien encore par le facteur

$$e^{x} - 1 = e^{x}(1 - e^{-x}),$$

pour obtenir un produit qui soit toujours développable en une série convergente ordonnée suivant les puissances ascendantes de x. En profitant de cette remarque, on peut aisément développer la fonction $\varpi(n)$ en série convergente. Effectivement, si l'on développe e^{-x} en une série ordonnée suivant les puissances ascendantes de x, on trouvera

$$1 - e^{-x} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{2.3} - \frac{x^4}{2.3.4} + \ldots,$$

et par suite

$$\begin{aligned}\frac{1-(1-e^{-x})\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{2}\right)}{x} &= \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)\frac{x}{2} - \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)\frac{x^2}{2.3} + \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{5}\right)\frac{x^3}{2.3.4} - \ldots \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2.3}x - \frac{2}{3.4}\,\frac{x^2}{2} + \frac{3}{4.5}\,\frac{x^3}{2.3} - \ldots\right).\end{aligned}$$

Donc la formule (3) donnera

$$(4)\quad \varpi(n) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2.3}\int_0^\infty x\,\frac{e^{-nx}}{1-e^{-x}}\,dx - \frac{2}{3.4}\int_0^\infty \frac{x^2}{1.2}\,\frac{e^{-nx}}{1-e^{-x}}\,dx + \ldots\right).$$

Comme on aura d'autre part

$$\frac{e^{-nx}}{1-e^{-x}} = e^{-nx} + e^{-(n+1)x} + e^{-(n+2)x} + \ldots,$$

on en conclura, pour une valeur entière quelconque de m,

$$(5)\qquad \int_0^\infty \frac{x^m}{1.2\ldots m}\,\frac{e^{-nx}}{1-e^{-x}}\,dx = \frac{1}{n^{m+1}} + \frac{1}{(n+1)^{m+1}} + \ldots.$$

On aura donc

$$(6)\quad \varpi(n) = \frac{1}{2}\left\{\frac{1}{2.3}\left[\frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n+1)^2} + \ldots\right] - \frac{2}{3.4}\left[\frac{1}{n^3} + \frac{1}{(n+1)^3} + \ldots\right] + \ldots\right\}.$$

Si à l'équation (3) on substituait la suivante :

$$(7)\qquad \varpi(n) = \int_0^\infty \frac{e^{x}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{x}\right)+\frac{1}{2}+\frac{1}{x}}{x}\,\frac{e^{-nx}}{e^{x}-1}\,dx,$$

c'est-à-dire, en d'autres termes, si, dans l'intégrale qui représente la fonction $\varpi(n)$, on décomposait la fonction sous le signe $\int$ en deux facteurs dont le second fût représenté non plus par le rapport

$$\frac{e^{-nx}}{1-e^{-x}},$$

mais par le rapport

$$\frac{e^{-nx}}{e^{x}-1};$$

alors, en développant le premier facteur en une série ordonnée suivant les puissances ascendantes de x, on obtiendrait non plus la formule (6), mais celle-ci :

$$(8)\qquad \varpi(n) = \frac{1}{2}\left\{\frac{1}{2.3}\left[\frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+2)^2} + \ldots\right] + \frac{2}{3.4}\left[\frac{1}{(n+1)^3} + \frac{1}{(n+2)^3} + \ldots\right] + \ldots\right\}.$$

Dans son Mémoire sur les intégrales eulériennes, M. Binet a prouvé que l'équation (8) fournit la valeur de $\varpi(n)$ propre à vérifier la formule (1). Mais, au lieu d'opérer comme nous venons de le faire, en déduisant l'équation (8) de la formule (3), il a suivi une marche inverse et tiré la formule (3) de l'équation (8), après avoir établi celle-ci directement.

Le succès de la méthode de développement, à l'aide de laquelle nous avons déduit la formule (6) ou (8) de l'équation (3) ou (7), tient à ce que nous avons évité de comprendre le diviseur

$$1 - e^{-x} \quad \text{ou} \quad e^{x} - 1$$

dans le facteur développé suivant les puissances ascendantes de la variable x. Il est donc naturel de penser qu'il peut être avantageux de représenter ce facteur par une seule lettre. Si, pour fixer les idées, on pose

$$1 - e^{-x} = t$$

dans la formule (3), on trouvera

$$\varpi(n) = -\int_0^1 \left[\frac{1}{t} - \frac{1}{2} + \frac{1}{\mathrm{l}(1-t)}\right] \frac{(1-t)^{n-1}}{\mathrm{l}(1-t)}\, dt. \tag{9}$$

Si l'on pose au contraire

$$e^x - 1 = t$$

dans la formule (7) on trouvera

$$\varpi(n) = \int_0^\infty \left[\frac{1}{t} + \frac{1}{2} - \frac{1}{\mathrm{l}(1+t)}\right] \frac{(1+t)^{-n-1}}{\mathrm{l}(1+t)}\, dt. \tag{10}$$

Or il est facile de développer en série convergente le second membre de la formule (9), attendu que, si l'on y décompose la fonction sous le signe $\int$ en deux facteurs dont l'un soit

$$(1-t)^{n-1},$$

l'autre facteur, savoir

$$\left[\frac{1}{t} - \frac{1}{2} + \frac{1}{\mathrm{l}(1-t)}\right] \frac{1}{\mathrm{l}(1-t)},$$

sera développable, pour toutes les valeurs de t comprises entre 0 et 1, en une série convergente ordonnée suivant les puissances ascendantes de t. En effet, on a, d'après la formule de Newton, pour toute valeur de t comprise entre les limites 0, 1,

$$(1-t)^\alpha = 1 - \alpha t - \frac{\alpha(1-\alpha)}{1.2} t^2 - \frac{\alpha(1-\alpha)(2-\alpha)}{1.2.3} t^3 - \ldots,$$

ou, ce qui revient au même,

$$(1-t)^\alpha = 1 - \alpha_1 t - \alpha_2 t^2 - \alpha_3 t^3 - \ldots, \tag{11}$$

la valeur générale de α_m étant

$$\alpha_m = \frac{\alpha(1-\alpha)(2-\alpha)\ldots(m-1-\alpha)}{1.2.3\ldots m}. \tag{12}$$

Or on tire de l'équation (11) intégrée deux fois de suite, par rapport à α et à partir de $\alpha = 0$,

$$\frac{(1-t)^\alpha - 1}{\mathrm{l}(1-t)} = \alpha - t\int_0^\alpha \alpha_1\, d\alpha - t^2 \int_0^\alpha \alpha_2\, d\alpha - \ldots,$$

$$\left[\frac{(1-t)^\alpha - 1}{\mathrm{l}(1-t)} - \alpha\right] \frac{1}{\mathrm{l}(1-t)} = \frac{\alpha^2}{2} - t\int_0^\alpha \int_0^\alpha \alpha_1\, d\alpha^2 - t^2 \int_0^\alpha \int_0^\alpha \alpha_2\, d\alpha^2 - \ldots.$$

Si, dans ces deux dernières formules, on pose $\alpha = 1$, elles deviendront

$$\frac{1}{\mathrm{l}(1-t)} = -\frac{1}{t} + \int_0^1 \alpha_1\, d\alpha + t\int_0^1 \alpha_2\, d\alpha + \ldots,$$

$$\left[\frac{1}{\mathrm{l}(1-t)} + \frac{1}{t}\right] \frac{1}{\mathrm{l}(1-t)} = -\frac{1}{2t} + \int_0^1 \int_0^\alpha \alpha_1\, d\alpha^2 + t\int_0^1 \int_0^\alpha \alpha_2\, d\alpha^2 + \ldots;$$

puis, en les combinant entre elles par voie d'addition, après avoir multiplié la première par $-\frac{1}{2}$, on trouvera

$$\left[\frac{1}{t} - \frac{1}{2} + \frac{1}{\mathrm{l}(1-t)}\right] \frac{1}{\mathrm{l}(1-t)} = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \ldots, \tag{13}$$

la valeur générale de a_m étant

$$a_m = \int_0^1 \int_0^\alpha \alpha_{m+1}\, d\alpha^2 - \frac{1}{2}\int_0^1 \alpha_{m+1}\, d\alpha,$$

ou, ce qui revient au même,

$$a_m = \int_0^1 \left(\frac{1}{2} - \alpha\right) \alpha_{m+1}\, d\alpha, \tag{14}$$

attendu que l'intégration par parties donne

$$\int_0^1 \int_0^\alpha \alpha_{m+1}\, d\alpha^2 = \int_0^1 \alpha_{m+1}\, d\alpha - \int_0^1 \alpha\alpha_{m+1}\, d\alpha.$$

En posant successivement $m=0$, $m=1$, $m=2$, $m=3$, ..., on tirera de la formule (14)

$$a_0=-\frac{1}{12},\qquad a_1=0,\qquad a_2=\frac{1}{2.3}\,\frac{1}{120},\qquad a_3=\frac{1}{2.3.4}\,\frac{1}{30},\qquad \cdots.$$

Les valeurs de a_0, a_1, a_2, ... étant ainsi déterminées, l'équation (9), jointe à la formule (13), donnera

$$(15)\qquad \varpi(n)=\int_0^1\left(\frac{1}{12}-a_2t^2-a_3t^3-a_4t^4-\ldots\right)(1-t)^{n-1}\,dt;$$

et, comme on a généralement

$$\int_0^1 t^m(1-t)^{n-1}\,dt=\frac{1.2.3\ldots m}{n(n+1)\ldots(n+m)},$$

on trouvera définitivement

$$(16)\quad \varpi(n)=\frac{1}{n}\left[\frac{1}{12}-\frac{1.2}{(n+1)(n+2)}a_2-\frac{1.2.3}{(n+1)(n+2)(n+3)}a_3-\ldots\right].$$

La formule (16) est encore l'une de celles que M. Binet a obtenues en opérant comme nous venons de le dire.

Au lieu de chercher à développer, dans l'intégrale que renferme l'équation (2), la fonction sous le signe $\int$ en une série qui demeure toujours convergente entre les limites de l'intégration, on pourrait, après avoir décomposé cette intégrale en deux autres, appliquer à celles-ci deux méthodes de développement diverses. Ainsi, par exemple, ω étant un nombre inférieur à 2π, on pourra remplacer l'équation (2) par la suivante :

$$\varpi(n)=\int_0^\omega\left(\frac{1}{1-e^{-x}}-\frac{1}{x}-\frac{1}{2}\right)e^{-nx}\frac{dx}{x}+\int_\omega^\infty\left(\frac{1}{1-e^{-x}}-\frac{1}{x}-\frac{1}{2}\right)e^{-nx}\frac{dx}{x},$$

de laquelle on tirera, en posant dans la seconde intégrale $1-e^{-x}=t$, et $1-e^{-\omega}=\Omega$,

$$(17)\qquad \begin{aligned}\varpi(n)=&\int_0^\omega\left(\frac{1}{1-e^{-x}}-\frac{1}{x}-\frac{1}{2}\right)e^{-nx}\frac{dx}{x}\\ &-\int_\Omega^1\left[\frac{1}{t}-\frac{1}{2}+\frac{1}{l(1-t)}\right]\frac{(1-t)^{n-1}}{l(1-t)}\,dt.\end{aligned}$$

D'ailleurs, comme on a généralement

$$\frac{1}{2}\cot\frac{x}{2}=\frac{1}{x}-\frac{1}{6}\,\frac{x}{2}-\frac{1}{30}\,\frac{x^3}{2.3.4}-\frac{1}{42}\,\frac{x^5}{2.3.4.5.6}-\ldots,$$

les coefficients

$$\frac{1}{6},\quad \frac{1}{30},\quad \frac{1}{42},\quad \cdots$$

étant les nombres mêmes de Bernoulli, on en conclura, en remplaçant x par $x\sqrt{-1}$,

$$(18)\quad \frac{1}{x}\left(\frac{1}{1-e^{-x}}-\frac{1}{x}-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{6}\,\frac{1}{2}-\frac{1}{30}\,\frac{x^2}{2.3.4}+\frac{1}{42}\,\frac{x^4}{2.3.4.5.6}-\ldots.$$

Or, eu égard à cette dernière formule et à l'équation (13), la formule (17) donnera

$$(19)\quad \begin{aligned}\varpi(n)=&\int_0^\omega\left(\frac{1}{6}\,\frac{1}{2}-\frac{1}{30}\,\frac{x^2}{2.3.4}+\frac{1}{42}\,\frac{x^4}{2.3.4.5.6}-\ldots\right)e^{-nx}\,dx\\ &+\int_\Omega^1\left(\frac{1}{12}-a_2t^2-a_3t^3-\ldots\right)(1-t)^{n-1}\,dt.\end{aligned}$$

Ajoutons qu'il sera facile de calculer les diverses intégrales dans lesquelles pourront se décomposer le second membre de la formule (19). En effet, on aura d'une part

$$\int_0^\omega e^{-nx}\,dx=\frac{1-e^{-n\omega}}{n};$$

puis on en conclura, en différentiant m fois par rapport à n,

$$(20)\qquad \int_0^\omega x^m e^{-nx}\,dx=(-1)^m\,\mathrm{D}_n^m\left(\frac{1-e^{-n\omega}}{n}\right).$$

D'autre part, en nommant k un coefficient quelconque, on aura

$$\int_\Omega^1(1-kt)^{n+m-1}\,dt=\frac{(1-k\Omega)^{n+m}-(1-k)^{n+m}}{(n+m)k},$$

puis on en conclura, en différentiant m fois par rapport à k,

$$(21)\qquad \int_{\Omega}^{1} t^m(1-kt)^{n-1}\,dt = \frac{(-1)^m}{n(n+1)\ldots(n+m)}\,\mathrm{D}_k^m\,\frac{(1-k\Omega)^{n+m}-(1-k)^{n+m}}{k};$$

et par suite, en posant $k=1$, on trouvera

$$(22)\qquad \int_{\Omega}^{1} t^m(1-t)^{n-1}\,dt = \frac{(-1)^m}{n(n+1)\ldots(n+m)}\,\mathrm{D}_k^m\,\frac{(1-k\Omega)^{n+m}}{k},$$

k devant être réduit à l'unité, après les différentiations, dans la valeur de l'expression

$$\mathrm{D}_k^m\,\frac{(1-k\Omega)^{n+m}}{k}.$$

Il est bon d'observer que si, dans l'équation (22), on pose $\Omega=0$, on retrouvera, comme on devait s'y attendre, l'équation

$$\int_0^1 t^m(1-t)^{n-1}\,dt = \frac{1.2\ldots m}{n(n+1)\ldots(n+m)}.$$

Le développement de la fonction $\varpi(n)$ cesserait d'être convergent si, dans le second membre de la formule (19), on supposait $\omega > 2\pi$. Le cas où l'on supposerait $\omega=\infty$, et par suite $\Omega=1$, mérite une attention particulière. Dans ce cas, l'équation (19), réduite à

$$(23)\qquad \varpi(n) = \frac{1}{6}\,\frac{1}{1.2.n} - \frac{1}{30}\,\frac{1}{3.4.n^3} + \frac{1}{42}\,\frac{1}{5.6.n^5} - \ldots,$$

coïnciderait avec une formule de Stirling. Mais, quoique cette formule soit inadmissible et dépourvue de sens, quand on suppose la série que le second membre renferme, prolongée à l'infini, cependant lorsque, n ayant une valeur considérable, on se borne à calculer un petit nombre de termes de la série en question, la somme de ces termes fournit à très peu près la valeur de $\varpi(n)$. Or il importe de savoir quelles sont alors les limites de l'erreur commise. C'est ce que nous allons maintenant examiner.

On a généralement

$$\cot x = \mathcal{E}\,\frac{[\cot z]}{x-z} = \frac{1}{x} + \frac{1}{x-\pi} + \frac{1}{x-2\pi} + \frac{1}{x-3\pi} + \ldots$$
$$+ \frac{1}{x+\pi} + \frac{1}{x+2\pi} + \frac{1}{x+3\pi} + \ldots,$$

ou, ce qui revient au même,

$$\frac{1}{2x}\left(\cot x - \frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x^2-\pi^2} + \frac{1}{x^2-4\pi^2} + \frac{1}{x^2-9\pi^2} + \ldots,$$

puis on en conclut, en remplaçant x par $\frac{1}{2}x\sqrt{-1}$,

$$(24)\qquad \frac{1}{x}\left(\frac{1}{1-e^{-x}} - \frac{1}{x} - \frac{1}{2}\right) = 2\left(\frac{1}{4\pi^2+x^2} + \frac{1}{16\pi^2+x^2} + \frac{1}{36\pi^2+x^2} + \ldots\right).$$

Cela posé, la formule (2) donnera

$$(25)\qquad \varpi(n) = 2\int_0^{\infty}\left(\frac{1}{4\pi^2+x^2} + \frac{1}{16\pi^2+x^2} + \frac{1}{36\pi^2+x^2} + \ldots\right)e^{-nx}\,dx.$$

En développant chacune des fractions que renferme le second membre de la formule (24), suivant les puissances ascendantes de x^2, à l'aide de l'équation

$$(26)\qquad \frac{1}{k^2+x^2} = \frac{1}{k^2} - \frac{x^2}{k^4} + \frac{x^4}{k^6} - \ldots,$$

dans laquelle k peut représenter successivement les divers termes de la suite

$$2\pi,\quad 4\pi,\quad 6\pi,\quad \ldots,$$

on tirera de la formule (24) comparée à la formule (18) les équations connues

$$(27)\qquad \left\{\begin{array}{l} 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \ldots = \frac{1}{6}\pi^2, \\ 1 + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{4^4} + \ldots = \frac{1}{30}\,\frac{2^2\pi^4}{3.4}, \\ 1 + \frac{1}{2^6} + \frac{1}{3^6} + \frac{1}{4^6} + \ldots = \frac{1}{42}\,\frac{2^4\pi^6}{3.4.5.6}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{array}\right.$$

et l'on fera coïncider l'équation (25) avec la formule inexacte de Stirling. Mais, à la place de celle-ci, on retrouvera une formule exacte et rigoureuse, si à l'équation (26), qui devient inexacte dès que le module de x surpasse le module de k, on substitue l'équation

$$(28)\qquad \frac{1}{k^2+x^2} = \frac{1}{k^2} - \frac{x^2}{k^4} + \frac{x^4}{k^6} - \ldots \pm \frac{x^{2m-2}}{k^{2m}} \mp \frac{x^{2m}}{k^{2m}(k^2+x^2)},$$

qui demeure toujours vraie, quel que soit x. En ayant égard à cette dernière, ainsi qu'aux formules (27), et en posant, pour abréger,

$$c_1 = \frac{1}{6}, \qquad c_2 = \frac{1}{30}, \qquad c_3 = \frac{1}{42}, \qquad \ldots,$$

c'est-à-dire, en désignant par $c_1, c_2, c_3, \ldots$ les nombres de Bernoulli, on tirera de l'équation (24)

$$(29)\quad \frac{1}{x}\left(\frac{1}{1-e^{-x}} - \frac{1}{x} - \frac{1}{2}\right) = \frac{c_1}{2} - \frac{c_2 x^2}{2.3.4} + \frac{c_3 x^4}{2.3.4.5.6} - \ldots \pm \frac{c_m x^{2m-2}}{2.3.4\ldots 2m} \mp r_m,$$

la valeur de r_m étant

$$(30)\qquad r_m = 2\left\{\frac{x^{2m}}{(2\pi)^{2m}[(2\pi)^2+x^2]} + \frac{x^{2m}}{(4\pi)^{2m}[(4\pi)^2+x^2]} + \ldots\right\}.$$

D'ailleurs, pour des valeurs réelles de x et de k, on aura généralement

$$\frac{x^{2m}}{k^{2m}(k^2+x^2)} < \frac{x^{2m}}{k^{2m+2}},$$

et par suite l'équation (30) donnera

$$r_m < 2\left(1 + \frac{1}{2^{2m+2}} + \frac{1}{3^{2m+2}} + \ldots\right)\frac{x^{2m}}{(2\pi)^{2m+2}},$$

ou, ce qui revient au même,

$$(31)\qquad r_m < \frac{c_{m+1}x^{2m}}{2.3.4\ldots(2m+2)}.$$

Donc, en désignant par θ un nombre inférieur à l'unité, on aura

$$r_m = \theta\frac{c_{m+1}x^{2m}}{2.3.4\ldots(2m+2)},$$

et la formule (29) donnera

$$(32)\quad \frac{1}{x}\left(\frac{1}{1-e^{-x}} - \frac{1}{x} - \frac{1}{2}\right) = \frac{c_1}{2} - \frac{c_2 x^2}{2.3.4} + \frac{c_3 x^4}{2.3.4.5.6} - \ldots \pm \frac{c_m x^{2m-2}}{2.3.4\ldots 2m} \mp \theta\frac{c_{m+1}x^{2m}}{2.3.4\ldots(2m+2)}.$$

Ajoutons qu'eu égard aux formules (29) et (31), on tirera de l'équation (2)

$$(33)\qquad \varpi(n) = \frac{c_1}{1.2n} - \frac{c_2}{3.4n^3} + \frac{c_3}{5.6n^5} - \ldots \pm \frac{c_m}{(2m-1)2mn^{2m-1}} \mp \int_0^\infty r_m e^{-nx}\,dx,$$

la valeur de l'intégrale $\int_0^\infty r_m e^{-nx}dx$ étant assujettie à la condition

$$(34)\qquad \int_0^\infty r_m e^{-nx}\,dx < \frac{c_{m+1}}{(2m+1)(2m+2)n^{2m+1}}.$$

En d'autres termes, on aura

$$(35)\quad \varpi(n) = \frac{c_1}{1.2.n} - \frac{c_2}{3.4.n^3} + \frac{c_3}{5.6.n^5} - \ldots - (-1)^m\frac{c_m}{(2m-1)2mn^{2m-1}} - (-1)^{m+1}\Theta\frac{c_{m+1}}{(2m+1)(2m+2)n^{2m+1}},$$

Θ désignant encore un nombre inférieur à l'unité, et la valeur de c_m étant généralement déterminée par la formule

$$(36)\qquad 1 + \frac{1}{2^{2m}} + \frac{1}{3^{2m}} + \ldots = \frac{2^{2m-1}\pi^{2m}}{2.3\ldots 2m}c_m.$$

Dans le cas particulier où l'on pose $m = 0$, la formule (35) reproduit un résultat obtenu par M. Liouville. Observons d'ailleurs que M. Crelle a publié récemment, dans son Journal, un Mémoire où M. Raabe, après avoir établi la formule (35) pour le cas où n se réduit à un nombre entier, ajoute qu'il est très probable qu'elle subsiste, dans tous les cas, mais qu'il n'a pu réussir jusqu'à présent à en obtenir une démonstration générale et rigoureuse.

Le rapport entre les valeurs numériques des deux termes qui, dans la série de Stirling, ont pour facteurs les nombres

$$c_{m+1} \quad \text{et} \quad c_m,$$

se réduit à

$$\frac{(2m-1)2m}{(2m+1)(2m+2)} \frac{c_{m+1}}{c_m} \frac{1}{n^2}.$$

D'ailleurs on tire de la formule (36)

$$\frac{c_{m+1}}{c_m} = \frac{(2m+1)(2m+2)}{(2\pi)^2} \frac{1+\left(\frac{1}{2}\right)^{2m+2}+\ldots}{1+\left(\frac{1}{2}\right)^{2m}+\ldots} < \frac{(2m+1)(2m+2)}{(2\pi)^2}.$$

Donc, par suite, le rapport ci-dessus mentionné sera inférieur à l'expression

$$\frac{(2m-1)2m}{(2\pi n)^2} < \left(\frac{m}{\pi n}\right)^2,$$

et les valeurs numériques des divers termes de la série de Stirling iront en décroissant, jusqu'à ce qu'on arrive à un terme dont le rang m surpasse le produit πn, et à plus forte raison, puisqu'on a $\pi > 3$, le produit $3n$. D'ailleurs on tire de la formule (35) cette conclusion, digne de remarque, que, si l'on arrête la série de Stirling à un terme quelconque, la valeur numérique de ce terme sera précisément la limite de l'erreur que l'on commettra en prenant la somme des termes précédents pour valeur approchée de $\varpi(n)$.

La conclusion que nous venons d'énoncer prouve l'utilité d'un calcul à l'aide duquel on trouverait commodément une limite supérieure à l'expression

$$(37) \qquad \frac{c_m}{(2m-1)2mn^{2m-1}},$$

qui représente la valeur numérique du terme général de la série de Stirling. Or, en vertu des principes établis, il sera facile d'obtenir une

telle limite; et d'abord on tire de la formule (36)

$$\frac{c_m}{c_1} = \frac{1}{2} \frac{2.3.4\ldots 2m}{(2\pi)^{2m-2}} \frac{1+\left(\frac{1}{2}\right)^{2m}+\ldots}{1+\left(\frac{1}{2}\right)^{2}+\ldots};$$

par conséquent,

$$c_m < \frac{c_1}{2} \frac{2.3.4\ldots 2m}{(2\pi)^{2m-2}},$$

ou, ce qui revient au même,

$$(38) \qquad c_m < \frac{1}{12} \frac{\Gamma(2m+1)}{(2\pi)^{2m-2}}.$$

D'autre part, en posant $m = 0$, dans la formule (35), on en tire

$$\varpi(n) = \Theta \frac{c_1}{2n} = \frac{\Theta}{12n};$$

par conséquent,

$$\varpi(n) < \frac{1}{12n},$$

et, eu égard à cette dernière formule, l'équation (34) du paragraphe III donnera

$$(39) \qquad \Gamma(n) < (2\pi)^{\frac{1}{2}} n^{n-\frac{1}{2}} e^{-n} e^{\frac{1}{12n}}.$$

On aura donc

$$\Gamma(2m+1) = 2m\Gamma(2m) < (2\pi)^{\frac{1}{2}} (2m)^{2m+\frac{1}{2}} e^{-2m} e^{\frac{1}{24m}},$$

et par suite la formule (38) donnera

$$c_m < \frac{1}{12} \frac{(2m)^{2m+\frac{1}{2}}}{(2\pi)^{2m-\frac{5}{2}}} e^{-2m} e^{\frac{1}{24m}}.$$

Cela posé, l'expression (37) sera évidemment inférieure au produit

$$(40) \qquad \frac{\pi^2}{3} \frac{n}{2m-1} \left(\frac{\pi}{m}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{m}{\pi n e}\right)^{2m} e^{\frac{1}{24m}},$$

qui pourra toujours se calculer facilement par le moyen de son logarithme.

Nous avons remarqué que la valeur numérique du terme général de la série de Stirling, c'est-à-dire l'expression (37), décroît tant que le nombre m ne surpasse pas le nombre $3n$. Il importe donc d'examiner en particulier ce que devient le produit (40), quand on suppose précisément $m = 3n$. Or ce produit se réduit alors au suivant :

$$\left(\frac{3}{\pi}\right)^{6n-\frac{3}{2}} \frac{\pi n}{6n-1} \left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{e}\right)^{6n} e^{\frac{1}{72n}}. \tag{41}$$

D'ailleurs, pour $n > 1$, l'expression

$$\left(\frac{3}{\pi}\right)^{6n-\frac{3}{2}} \frac{\pi n}{6n-1} e^{\frac{1}{72n}}$$

reste inférieure à

$$\left(\frac{3}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{\pi}{5} e^{\frac{1}{72}} = 0,5177\ldots;$$

et par conséquent, si n surpasse l'unité, le terme dont le rang sera représenté par le nombre $3n$, dans la série de Stirling, offrira une valeur numérique inférieure au produit

$$(0,5177\ldots)\left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{e}\right)^{6n}. \tag{42}$$

Donc, pour une valeur de n supérieure à l'unité, on peut, à l'aide de la série de Stirling, obtenir une valeur de $\varpi(n)$ tellement approchée que l'erreur commise reste inférieure au produit (42). Ajoutons que cette valeur approchée sera tout simplement la somme des $3n - 1$ premiers termes de la série. Il est, d'autre part, aisé de s'assurer que le produit (42), qui représentera une limite supérieure à l'erreur commise, sera généralement un nombre très petit. Si, pour fixer les idées, on prend $n = 4$, le produit (42) deviendra

$$0,97\ldots\left(\frac{1}{10}\right)^{11},$$

et par conséquent l'erreur commise sera inférieure au nombre

$$\left(\frac{1}{10}\right)^{11} = 0,00000\,00000\,1.$$

Si l'on prend $n = 10$, le produit (42) deviendra

$$1,43\ldots\left(\frac{1}{10}\right)^{27},$$

et par conséquent l'erreur commise sera inférieure au nombre

$$0,00000\,00000\,00000\,00000\,00000\,0143\ldots.$$

Ainsi, en résumé, l'équation (35), que nous avons substituée à la formule de Stirling, fournira la valeur de $\varpi(n)$ avec une approximation qui sera généralement très considérable, et même plus que suffisante pour les besoins du calcul.

V. — *Recherches des équations linéaires que vérifient des valeurs diverses de* $1\Gamma(n)$.

Soient

$$a, \quad b, \quad c, \quad \ldots$$

diverses valeurs positives successivement attribuées au nombre n. Les valeurs correspondantes de $1\Gamma(n)$ seront

$$1\Gamma(a), \quad 1\Gamma(b), \quad 1\Gamma(c), \quad \ldots;$$

et une fonction linéaire de ces dernières quantités sera de la forme

$$A\,1\Gamma(a) + B\,1\Gamma(b) + C\,1\Gamma(c) + \ldots,$$

A, B, C, ... désignant des coefficients constants.

D'ailleurs, en vertu de la formule (12) du paragraphe III, on aura également

$$1\Gamma(n) = \int_0^\infty \left[(n-1)e^{-x} - \frac{e^{-x} - e^{-nx}}{1 - e^{-x}}\right] \frac{dx}{x}. \tag{1}$$

Il y a plus : en désignant par θ une constante positive quelconque, et remplaçant x par θx dans le second membre de la formule (1), on en tirera

$$(2) \qquad l\Gamma(n) = \int_0^\infty \left[(n-1)e^{-\theta x} - \frac{e^{-\theta x} - e^{-n\theta x}}{1 - e^{-\theta x}}\right]\frac{dx}{x}.$$

Cela posé, soient

$$\alpha, \quad \beta, \quad \gamma, \quad \ldots$$

diverses valeurs de θ que nous ferons correspondre aux valeurs

$$a, \quad b, \quad c, \quad \ldots$$

de n. On tirera successivement de la formule (2)

$$l\Gamma(a) = \int_0^\infty \left[(a-1)e^{-\alpha x} - \frac{e^{-\alpha x} - e^{-a\alpha x}}{1 - e^{-\alpha x}}\right]\frac{dx}{x},$$

$$l\Gamma(b) = \int_0^\infty \left[(b-1)e^{-\beta x} - \frac{e^{-\beta x} - e^{-b\beta x}}{1 - e^{-\beta x}}\right]\frac{dx}{x},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

puis on en conclura

$$(3) \qquad A\,l\Gamma(a) + B\,l\Gamma(b) + C\,l\Gamma(c) + \ldots = \int_0^\infty X\frac{dx}{x},$$

la valeur de X étant

$$\begin{aligned} X = {} & A\left[(a-1)e^{-\alpha x} - \frac{e^{-\alpha x} - e^{-a\alpha x}}{1 - e^{-\alpha x}}\right] \\ & + B\left[(b-1)e^{-\beta x} - \frac{e^{-\beta x} - e^{-b\beta x}}{1 - e^{-\beta x}}\right] \\ & + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{aligned}$$

ou, ce qui revient au même,

$$(4) \qquad \begin{aligned} X = {} & A[(a-1)e^{-\alpha x} + 1] + B[(b-1)e^{-\beta x} + 1] + \ldots \\ & - A\frac{1 - e^{-a\alpha x}}{1 - e^{-\alpha x}} - B\frac{1 - e^{-b\beta x}}{1 - e^{-\beta x}} - \ldots . \end{aligned}$$

Donc, pour déterminer la fonction linéaire de

$$l\Gamma(a), \quad l\Gamma(b), \quad l\Gamma(c), \quad \ldots,$$

représentée par la somme

$$A\,l\Gamma(a) + B\,l\Gamma(b) + C\,l\Gamma(c) + \ldots,$$

il suffira d'évaluer l'intégrale

$$\int_0^\infty X\,dx,$$

dans laquelle la valeur de X est donnée par la formule (4). Or on pourra effectivement, dans plusieurs cas, à l'aide des principes établis dans le paragraphe I, déterminer très facilement l'intégrale en question, et même obtenir sa valeur en termes finis, comme nous allons le faire voir.

Pour que la formule (33) du paragraphe I fournisse immédiatement la valeur de l'intégrale

$$\int_0^\infty X\frac{dx}{x},$$

il suffit que la fonction X, ou même la somme des fractions renfermées dans le second membre de la formule (4), savoir

$$A\frac{1 - e^{-a\alpha x}}{1 - e^{-\alpha x}} + B\frac{1 - e^{-b\beta x}}{1 - e^{-\beta x}} + C\frac{1 - e^{-c\gamma x}}{1 - e^{-\gamma x}} + \ldots,$$

se réduise à une fonction linéaire de puissances positives de l'exponentielle

$$e^{-x}.$$

D'ailleurs, si l'on pose

$$e^{-x} = t,$$

la somme dont il s'agit se transformera en cette autre

$$A\frac{1 - t^{a\alpha}}{1 - t^{\alpha}} + B\frac{1 - t^{b\beta}}{1 - t^{\beta}} + C\frac{1 - t^{c\gamma}}{1 - t^{\gamma}} + \ldots,$$

et, pour que la condition énoncée soit remplie, il suffira que la dernière somme se réduise à une fonction linéaire de puissances positives de t. Il est bon d'observer que, dans cette fonction linéaire, le terme indépendant de t sera nécessairement la valeur qu'acquiert la fonction, pour $t=0$, savoir

$$A+B+C+\ldots.$$

Soit, en conséquence,

$$A\frac{1-t^{a\alpha}}{1-t^{\alpha}}+B\frac{1-t^{b6}}{1-t^{6}}+\ldots=A+B+\ldots+Ht^{h}+Kt^{k}+\ldots,$$

h, k désignant deux exposants positifs, et H, K, ... des coefficients constants. On aura par suite

$$A\frac{1-e^{-a\alpha x}}{1-e^{-\alpha x}}+B\frac{1-e^{-b6x}}{1-e^{-6x}}+\ldots=A+B+\ldots+He^{-hx}+Ke^{-kx}+\ldots,$$

et la formule (4) étant réduite à

$$X=A(a-1)e^{-\alpha x}+B(b-1)e^{-6x}+\ldots-He^{-hx}-Ke^{-kx}-\ldots,$$

la formule (3), jointe à la formule (33) du paragraphe I donnera

$$\begin{aligned}A\,l\Gamma(a)+B\,l\Gamma(b)+\ldots&=H\,l(h)+K\,l(k)+\ldots\\&\quad-A(a-1)\,l(\alpha)-B(b-1)\,l(6)\ldots.\end{aligned}$$

On pourra énoncer le théorème suivant :

Théorème I. — *La valeur de la somme*

$$A\,l\Gamma(a)+B\,l\Gamma(b)+C\,l\Gamma(c)+\ldots$$

pourra s'obtenir en termes finis, si l'on peut choisir les constantes

$$\alpha,\quad 6,\quad \gamma,\quad \ldots,$$

de manière que le polynome

$$A\frac{1-t^{a\alpha}}{1-t^{\alpha}}+B\frac{1-t^{b6}}{1-t^{6}}+C\frac{1-t^{c\gamma}}{1-t^{\gamma}}+\ldots$$

se réduise à une fonction linéaire de puissances positives de t, par conséquent à une expression de la forme

$$A+B+\ldots+Ht^{h}+Kt^{k}+\ldots,$$

les exposants h, k étant positifs; et alors l'équation

$$A\frac{1-t^{a\alpha}}{1-t^{\alpha}}+B\frac{1-t^{b6}}{1-t^{6}}+\ldots=A+B+\ldots+Ht^{h}+Kt^{k}+\ldots \tag{5}$$

entraînera la suivante :

$$\begin{aligned}A\,l\Gamma(a)+B\,l\Gamma(b)+\ldots&=H\,l(h)+K\,l(k)+\ldots\\&\quad-A(a-1)\,l(\alpha)-B(b-1)\,l(6)-\ldots.\end{aligned} \tag{6}$$

Il est bon d'observer que, si l'on pose $n=1$, dans les formules (26) et (32) du paragraphe III, ces formules fourniront deux valeurs nécessairement égales de la fonction représentée par $F(n)$. On aura donc

$$\frac{1}{2}l(2\pi)-1=\int_0^\infty\left[\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{2}\right)e^{-x}-\frac{e^{-x}}{1-e^{-x}}\right]\frac{dx}{x}. \tag{7}$$

Si l'on retranche les deux membres de cette dernière formule des membres correspondants de l'équation (1), on trouvera

$$l\frac{\Gamma(n)}{\sqrt{2\pi}}+1=\int_0^\infty\left[\left(n-\frac{3}{2}-\frac{1}{x}\right)e^{-x}+\frac{e^{-nx}}{1-e^{-x}}\right]\frac{dx}{x}; \tag{8}$$

puis on en conclura, en remplaçant x par θx,

$$l\frac{\Gamma(n)}{\sqrt{2\pi}}+1=\int_0^\infty\left[\left(n-\frac{3}{2}-\frac{1}{\theta x}\right)e^{-\theta x}+\frac{e^{-n\theta x}}{1-e^{-\theta x}}\right]\frac{dx}{x}. \tag{9}$$

Cela posé, soient

$$\alpha,\quad 6,\quad \gamma,\quad \ldots$$

diverses valeurs positives de θ, que nous ferons correspondre aux valeurs

$$a,\quad b,\quad c,\quad \ldots$$

de n. On tirera successivement de la formule (9)

$$\begin{aligned}l\frac{\Gamma(a)}{\sqrt{2\pi}}+1&=\int_0^\infty\left[\left(a-\frac{3}{2}-\frac{1}{\alpha x}\right)e^{-\alpha x}+\frac{e^{-a\alpha x}}{1-e^{-\alpha x}}\right]\frac{dx}{x},\\ l\frac{\Gamma(b)}{\sqrt{2\pi}}+1&=\int_0^\infty\left[\left(b-\frac{3}{2}-\frac{1}{6x}\right)e^{-6x}+\frac{e^{-b6x}}{1-e^{-6x}}\right]\frac{dx}{x},\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\end{aligned}$$

puis

$$\text{(10)}\qquad \mathrm{A}\,\mathrm{l}\frac{\Gamma(a)}{\sqrt{2\pi}}+\mathrm{B}\,\mathrm{l}\frac{\Gamma(b)}{\sqrt{2\pi}}+\ldots+\mathrm{A}+\mathrm{B}+\ldots=\int_0^\infty \mathcal{X}\frac{dx}{x},$$

la valeur de $\mathcal{X}$ étant

$$\text{(11)}\qquad \begin{aligned}\mathcal{X}=\mathrm{A}\left(a-\frac{3}{2}-\frac{1}{\alpha x}\right)e^{-\alpha x}+\mathrm{B}\left(b-\frac{3}{2}-\frac{1}{\beta x}\right)e^{-\beta x}+\ldots\\+\mathrm{A}\frac{e^{-a\alpha x}}{1-e^{-\alpha x}}+\mathrm{B}\frac{e^{-b\beta x}}{1-e^{-\beta x}}+\ldots.\end{aligned}$$

Or, la formule (33) du paragraphe I fournira immédiatement la valeur de l'intégrale

$$\int_0^\infty \mathcal{X}\,dx,$$

si la somme

$$\mathrm{A}\frac{e^{-a\alpha x}}{1-e^{-\alpha x}}+\mathrm{B}\frac{e^{-b\beta x}}{1-e^{-\beta x}}+\mathrm{C}\frac{e^{-c\gamma x}}{1-e^{-\gamma x}}+\ldots$$

se réduit à une fonction linéaire de puissances positives de l'exponentielle e^{-x}, ou, ce qui revient au même, si la somme

$$\mathrm{A}\frac{t^{a\alpha}}{1-t^{\alpha}}+\mathrm{B}\frac{t^{b\beta}}{1-t^{\beta}}+\mathrm{C}\frac{t^{c\gamma}}{1-t^{\gamma}}+\ldots$$

se réduit à une fonction linéaire de puissances positives de t, c'est-à-dire à une expression de la forme

$$\mathrm{H}t^h+\mathrm{K}t^k+\ldots.$$

D'ailleurs, dans ce cas, la valeur de $\mathcal{X}$ étant réduite à

$$\mathcal{X}=\mathrm{A}\left(a-\frac{3}{2}-\frac{1}{\alpha x}\right)e^{-\alpha x}+\mathrm{B}\left(b-\frac{3}{2}-\frac{1}{\beta x}\right)e^{-\beta x}+\ldots+\mathrm{H}e^{-hx}+\mathrm{K}e^{-kx}+\ldots,$$

la formule (33) du paragraphe I donnera

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \mathcal{X}\frac{dx}{x}=&-\mathrm{A}\,\mathcal{L}\left[\frac{e^{-\alpha x}}{\alpha x^2}\right]-\mathrm{B}\,\mathcal{L}\left[\frac{e^{-\beta x}}{\beta x^2}\right]-\ldots\\&-\mathrm{A}\,\mathcal{L}\left[\left(a-\frac{3}{2}-\frac{1}{\alpha x}\right)\frac{e^{-\alpha x}}{x}\mathrm{l}(\alpha)\right]-\ldots\\&-\mathrm{H}\,\mathcal{L}\left[\frac{e^{-hx}}{x}\mathrm{l}(h)\right]-\mathrm{K}\,\mathcal{L}\left[\frac{e^{-kx}}{x}\mathrm{l}(k)\right]-\ldots\end{aligned}$$

et, par suite,

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \mathcal{X}\frac{dx}{x}=\mathrm{A}+\mathrm{B}+\ldots-\mathrm{A}\left(a-\frac{1}{2}\right)\mathrm{l}(\alpha)-\mathrm{B}\left(b-\frac{1}{2}\right)\mathrm{l}(\beta)-\ldots\\-\mathrm{H}\,\mathrm{l}(h)-\mathrm{K}\,\mathrm{l}(k)-\ldots.\end{aligned}$$

Donc la formule (10) donnera

$$\begin{aligned}\mathrm{A}\,\mathrm{l}\frac{\Gamma(a)}{\sqrt{2\pi}}+\mathrm{B}\,\mathrm{l}\frac{\Gamma(b)}{\sqrt{2\pi}}+\ldots=-\mathrm{H}\,\mathrm{l}(h)-\mathrm{K}\,\mathrm{l}(k)-\ldots\\-\mathrm{A}\left(a-\frac{1}{2}\right)\mathrm{l}(a)-\mathrm{B}\left(b-\frac{1}{2}\right)\mathrm{l}(\beta)-\ldots,\end{aligned}$$

ou, ce qui revient au même,

$$\begin{aligned}\mathrm{A}\,\mathrm{l}\Gamma(a)+\mathrm{B}\,\mathrm{l}\Gamma(b)+\ldots=\frac{\mathrm{A}+\mathrm{B}+\ldots}{2}\mathrm{l}(2\pi)-\mathrm{H}\,\mathrm{l}(h)-\mathrm{K}\,\mathrm{l}(k)-\ldots\\-\mathrm{A}\left(a-\frac{1}{2}\right)\mathrm{l}(\alpha)-\mathrm{B}\left(b-\frac{1}{2}\right)\mathrm{l}(\beta)-\ldots.\end{aligned}$$

On peut donc énoncer encore la proposition suivante :

Théorème II. — *La valeur de la somme*

$$\mathrm{A}\,\mathrm{l}\Gamma(a)+\mathrm{B}\,\mathrm{l}\Gamma(b)+\mathrm{C}\,\mathrm{l}\Gamma(c)+\ldots$$

pourra s'obtenir en termes finis, si l'on peut choisir les constantes

$$\alpha,\quad \beta,\quad \gamma,\quad \ldots,$$

de manière que le polynome

$$\mathrm{A}\frac{t^{a\alpha}}{1-t^{\alpha}}+\mathrm{B}\frac{t^{b\beta}}{1-t^{\beta}}+\mathrm{C}\frac{t^{c\gamma}}{t-t^{\gamma}}+\ldots$$

se réduise à une fonction linéaire de puissances positives de t, *par conséquent à une expression de la forme*

$$\mathrm{H}t^h+\mathrm{K}t^k+\ldots,$$

les exposants h, k *étant positifs; et alors l'équation*

$$\text{(12)}\qquad \mathrm{A}\frac{t^{a\alpha}}{1-t^{\alpha}}+\mathrm{B}\frac{t^{b\beta}}{1-t^{\beta}}+\mathrm{B}\frac{t^{c\gamma}}{1-t^{\gamma}}+\ldots=\mathrm{H}t^h+\mathrm{K}t^k+\ldots$$

entraînera la suivante :

$$(13)\quad A\,l\Gamma(a)+B\,l\Gamma(b)+\ldots=\frac{A+B+\ldots}{2}\,l(2\pi)-H\,l(h)-K\,l(k)-\ldots$$
$$-A\left(a-\frac{1}{2}\right)l(\alpha)-B\left(b-\frac{1}{2}\right)l(\beta)-\ldots.$$

Si, dans les théorèmes I et II, on remplace les constantes positives

$$a,\quad b,\quad c,\quad \ldots$$

par les rapports

$$\frac{a}{\alpha},\quad \frac{b}{\beta},\quad \frac{c}{\gamma},\quad \ldots,$$

alors à la place de ces deux théorèmes on obtiendra les propositions suivantes :

Théorème III. — *Si le polynome*

$$A\frac{1-t^a}{1-t^\alpha}+B\frac{1-t^b}{1-t^\beta}+C\frac{1-t^c}{1-t^\gamma}+\ldots,$$

dans lequel

$$a,\quad b,\quad c,\quad \ldots,\qquad \alpha,\quad \beta,\quad \gamma,\quad \ldots$$

désignent des exposants positifs, et A, B, C, *des coefficients constants, se réduit à une fonction linéaire de puissances positives de* t, *c'est-à-dire à une expression de la forme*

$$Ht^h+Kt^k+\ldots,$$

h, k, … étant des exposants positifs, et H, K, … *des quantités constantes ; alors l'équation*

$$(14)\quad A\frac{1-t^a}{1-t^\alpha}+B\frac{1-t^b}{1-t^\beta}+\ldots=A+B+\ldots+Ht^h+Kt^k+\ldots$$

entraînera la suivante :

$$(15)\quad A\,l\Gamma\left(\frac{a}{\alpha}\right)+B\,l\Gamma\left(\frac{b}{\beta}\right)+\ldots=H\,l(h)+K\,l(k)+\ldots$$
$$-A\left(\frac{a}{\alpha}-1\right)l(\alpha)-B\left(\frac{b}{\beta}-1\right)l(\beta)-\ldots.$$

Théorème IV. — *Si le polynome*

$$A\frac{t^a}{1-t^\alpha}+B\frac{t^b}{1-t^\beta}+C\frac{t^c}{1-t^\gamma}+\ldots,$$

dans lequel

$$a,\quad b,\quad c,\quad \ldots,\qquad \alpha,\quad \beta,\quad \gamma,\quad \ldots,$$

désignent des exposants positifs, et A, B, C, …, *des coefficients constants, se réduit à une fonction linéaire de puissances positives de* t, *c'est-à-dire à une expression de la forme*

$$Ht^h+Kt^k+\ldots,$$

h, k étant des exposants positifs, et H, K *des quantités constantes, alors l'équation*

$$(16)\quad A\frac{t^a}{1-t^\alpha}+B\frac{t^b}{1-t^\beta}+C\frac{t^c}{1-t^\gamma}+\ldots=Ht^h+Kt^k+\ldots$$

entraînera la suivante :

$$(17)\quad A\,l\Gamma\left(\frac{a}{\alpha}\right)+B\,l\Gamma\left(\frac{b}{\beta}\right)+\ldots=\frac{A+B+\ldots}{2}\,l(2\pi)-H\,l(h)-K\,l(k)-\ldots$$
$$-A\left(\frac{a}{\alpha}-\frac{1}{2}\right)l(\alpha)-B\left(\frac{b}{\beta}-\frac{1}{2}\right)l(\beta)-\ldots.$$

Appliquons maintenant les formules générales que nous venons d'établir à quelques exemples.

En désignant par n un nombre entier, on a

$$(18)\quad \frac{1-t^n}{1-t}=1+t+t^2+\ldots+t^{n-1}.$$

Si l'on substitue cette dernière formule à l'équation (14), la formule (15) donnera

$$(19)\quad l\Gamma(n)=l(1)+l(2)+\ldots+l(n-1)$$

et, par suite,

$$(20)\quad \Gamma(n)=1.2.3\ldots(n-1),$$

ce qui est effectivement exact.

En désignant par a un nombre quelconque, on tire de la formule (18)

$$\frac{t^a - t^{a+n}}{1-t} = t^a + t^{a+1} + \ldots + t^{a+n-1} \tag{21}$$

ou, ce qui revient au même,

$$\frac{1 - t^{a+n}}{1-t} - \frac{1-t^a}{1-t} = t^a + t^{a+1} + \ldots + t^{a+n-1}. \tag{22}$$

Si l'on substitue cette dernière formule à l'équation (14), la formule (15) donnera

$$\mathrm{l}\,\Gamma(a+n) - \mathrm{l}\,\Gamma(a) = \mathrm{l}(a) + \mathrm{l}(a+1) + \ldots + \mathrm{l}(a+n-1) \tag{23}$$

et, par suite,

$$\frac{\Gamma(a+n)}{\Gamma(a)} = a(a+1)\ldots(a+n-1), \tag{24}$$

ce qui est exact. On arriverait encore à la même conclusion en substituant l'équation (21) à la formule (16). Dans le cas particulier où l'on pose $n=1$, la formule (24) réduite à

$$\frac{\Gamma(a+1)}{\Gamma(a)} = a \tag{25}$$

coïncide avec la formule (15) du paragraphe III.

Si l'on divise par $1 - t^n$ les deux membres de la formule (21), ou, ce qui revient au même, si l'on multiplie par

$$\frac{t^a}{1-t^n}$$

les deux membres de la formule (18), on en conclura

$$\frac{t^a}{1-t^n} + \frac{t^{a+1}}{1-t^n} + \ldots + \frac{t^{a+n-1}}{1-t^n} - \frac{t^a}{1-t} = 0. \tag{26}$$

Si maintenant on substitue cette dernière formule à l'équation (16),

la formule (17) donnera

$$\begin{aligned} \mathrm{l}\,\Gamma\left(\frac{a}{n}\right) + \mathrm{l}\,\Gamma\left(\frac{a+1}{n}\right) + \ldots + \mathrm{l}\,\Gamma\left(\frac{a+n-1}{n}\right) - \mathrm{l}\,\Gamma(a) \\ = \frac{n-1}{2}\,\mathrm{l}(2\pi) - \left(a - \frac{1}{2}\right)\mathrm{l}(n), \end{aligned} \tag{27}$$

attendu que le coefficient de $\mathrm{l}(n)$, dans le second membre, sera équivalent à la somme des termes de la progression arithmétique

$$\frac{a}{n} - \frac{1}{2},\quad \frac{a+1}{n} - \frac{1}{2},\quad \ldots,\quad \frac{a+n-1}{n} - \frac{1}{2},$$

par conséquent à

$$n\left(\frac{2a-1}{2n}\right) = a - \frac{1}{2};$$

et l'on trouvera par suite

$$\frac{\Gamma\left(\frac{a}{n}\right)\Gamma\left(\frac{a+1}{n}\right)\ldots\Gamma\left(\frac{a+n-1}{n}\right)}{\Gamma(a)} = \frac{(2\pi)^{\frac{n-1}{2}}}{n^{a-\frac{1}{2}}}. \tag{28}$$

Au reste, pour obtenir immédiatement la formule (27), sans être obligé de recourir à la sommation d'une progression arithmétique, il suffit d'observer qu'on tire de la formule (28), en y remplaçant t par $t^{\frac{1}{n}}$,

$$\frac{t^{\frac{a}{n}}}{1-t} + \frac{t^{\frac{a+1}{n}}}{1-t} + \ldots + \frac{t^{\frac{a+n-1}{n}}}{1-t} - \frac{t^{\frac{a}{n}}}{1-t^{\frac{1}{n}}} = 0. \tag{29}$$

Or, si l'on substitue l'équation (29) à la formule (16), l'équation (17) se réduira précisément à la formule (27).

Lorsque, dans l'équation (28), on remplace a par nx, on retrouve la formule

$$\frac{\Gamma(x)\,\Gamma\left(x+\frac{1}{n}\right)\ldots\Gamma\left(x+\frac{n-1}{n}\right)}{\Gamma(nx)} = \frac{(2\pi)^{\frac{n-1}{2}}}{n^{nx-\frac{1}{2}}}, \tag{30}$$

que j'ai démontrée d'une autre manière dans le second Volume des

Exercices de Mathématiques (¹), et qui a été découverte par M. Gauss.

Lorsque dans la formule (14) ou (15) on remplace t par t^θ, θ désignant un nombre quelconque, l'effet produit est le même que si les exposants

$$a,\ b,\ c,\ \ldots,\quad \alpha,\ 6,\ \gamma,\ \ldots,\quad h,\ k,\ \ldots$$

se trouvaient remplacés par les exposants

$$a\theta,\ b\theta,\ c\theta,\ \ldots,\quad \alpha\theta,\ 6\theta,\ \gamma\theta,\ \ldots,\quad h\theta,\ k\theta,\ \ldots.$$

Il suit de cette seule observation que chacune des formules (15), (17) continue généralement de subsister quand on y fait varier simultanément chacun des exposants

$$a,\ b,\ c,\ \ldots,\quad \alpha,\ 6,\ \gamma,\ \ldots,\quad h,\ k,\ \ldots$$

dans un rapport donné θ. Donc la formule (14) entraine non seulement l'équation (15), mais encore la suivante :

$$(31)\quad \begin{cases} \mathrm{A\,l}\Gamma\left(\frac{a}{\alpha}\right)+\mathrm{B\,l}\Gamma\left(\frac{b}{6}\right)+\ldots \\ \quad =\mathrm{H\,l}(\theta h)+\mathrm{K\,l}(\theta k)+\ldots-\mathrm{A}\left(\frac{a}{\alpha}-1\right)\mathrm{l}(\theta\alpha)-\mathrm{B}\left(\frac{b}{6}-1\right)\mathrm{l}(\theta 6)-\ldots, \end{cases}$$

et pareillement la formule (16) entraine non seulement l'équation (17), mais encore la suivante :

$$(32)\quad \mathrm{A\,l}\Gamma\left(\frac{a}{\alpha}\right)+\mathrm{B\,l}\Gamma\left(\frac{b}{6}\right)+\ldots=\frac{\mathrm{A}+\mathrm{B}+\ldots}{2}\mathrm{l}(2\pi)-\mathrm{H\,l}(\theta h)-\mathrm{K\,l}(\theta k)-\ldots$$
$$-\mathrm{A}\left(\frac{a}{\alpha}-\frac{1}{2}\right)\mathrm{l}(\theta\alpha)-\mathrm{B}\left(\frac{b}{6}-\frac{1}{2}\right)\mathrm{l}(\theta 6)-\ldots.$$

Au reste, pour s'assurer que l'équation (31) coïncide avec l'équation (15), et l'équation (32) avec l'équation (14), il suffit d'observer

(¹) *Œuvres de Cauchy*, S. II, T. VII, p. 121. La démonstration que fournissent, pour la formule (30), les principes généraux ci-dessus exposés, se rapproche beaucoup de celle que M. Lejeune-Dirichlet a donnée dans le Journal de M. Crelle.

qu'on tire de la formule (14), en y posant $t=1$,

$$(33)\quad \mathrm{H}+\mathrm{K}+\ldots=\mathrm{A}\left(\frac{a}{\alpha}-1\right)+\mathrm{B}\left(\frac{b}{6}-1\right)+\ldots;$$

et de la formule (16), en développant les deux membres suivant les puissances de $1-t$, non seulement

$$(34)\quad \frac{\mathrm{A}}{\alpha}+\frac{\mathrm{B}}{6}+\frac{\mathrm{C}}{\gamma}+\ldots=0,$$

mais encore, eu égard à l'équation (34),

$$(35)\quad \mathrm{A}\left(\frac{a}{\alpha}-\frac{1}{2}\right)+\mathrm{B}\left(\frac{b}{6}-\frac{1}{2}\right)+\ldots\mathrm{H}+\mathrm{K}+\ldots=0.$$

Nous remarquerons, en terminant ce paragraphe, que toute équation linéaire qui subsiste entre diverses valeurs de $\mathrm{l}\Gamma(n)$ entraine une autre équation linéaire entre les valeurs correspondantes de la fonction $\varpi(n)$ liée à $\mathrm{l}\Gamma(n)$, comme on l'a vu dans le paragraphe III, par la formule

$$(36)\quad \mathrm{l}\Gamma(n)=\left(n-\frac{1}{2}\right)\mathrm{l}(n)-n-\frac{1}{2}\mathrm{l}(2\pi)+\varpi(n).$$

Ainsi, en particulier, eu égard à cette dernière formule, l'équation (16) entrainera non seulement les équations (17) et (32), mais encore les suivantes :

$$(37)\quad \mathrm{A}\varpi\left(\frac{a}{\alpha}\right)+\mathrm{B}\varpi\left(\frac{b}{6}\right)+\ldots=\mathrm{A}\frac{a}{\alpha}+\mathrm{B}\frac{b}{6}+\ldots-\mathrm{H\,l}(h)-\mathrm{K\,l}(k)-\ldots$$
$$-\mathrm{A}\left(\frac{a}{\alpha}-\frac{1}{2}\right)\mathrm{l}(a)-\mathrm{B}\left(\frac{b}{6}-\frac{1}{2}\right)\mathrm{l}(b)-\ldots,$$

$$(38)\quad \mathrm{A}\varpi\left(\frac{a}{\alpha}\right)+\mathrm{B}\varpi\left(\frac{b}{6}\right)+\ldots=\mathrm{A}\frac{a}{\alpha}+\mathrm{B}\frac{b}{6}+\ldots-\mathrm{H\,l}(\theta h)-\mathrm{K\,l}(\theta k)-\ldots$$
$$-\mathrm{A}\left(\frac{a}{\alpha}-\frac{1}{2}\right)\mathrm{l}(\theta a)-\mathrm{B}\left(\frac{b}{6}-\frac{1}{2}\right)\mathrm{l}(\theta b)-\ldots.$$

FIN DU TOME XII DE LA SECONDE SÉRIE.

TABLE DES MATIÈRES

DU TOME DOUZIÈME.

SECONDE SÉRIE.

MÉMOIRES DIVERS ET OUVRAGES.

III. — MÉMOIRES PUBLIÉS EN CORPS D'OUVRAGES.

Exercices d'Analyse et de Physique mathématique.

FIN DE LA TABLE DES MATIÈRES DU TOME XII DE LA SECONDE SÉRIE.

52934 Paris. — Imp. GAUTHIER-VILLARS ET Cie, quai des Grands-Augustins, 55.