MÉMOIRE

SUR LE RAPPORT DIFFÉRENTIEL

DE DEUX GRANDEURS QUI VARIENT SIMULTANÉMENT.

Les principes que nous allons établir dans le présent Mémoire permettent de résoudre aisément un grand nombre de questions diverses, dont la plupart étaient ordinairement traitées par les méthodes que fournit le Calcul différentiel. D'ailleurs, l'exposition de ces principes repose sur des notions tellement simples qu'elles peuvent être introduites sans inconvénient même dans la Géométrie élémentaire et dans l'Analyse algébrique. Tels sont les motifs qui nous ont porté à entreprendre la rédaction de ce Mémoire, en nous donnant lieu de croire qu'il rendra plus facile l'étude du Calcul infinitésimal et de celles des sciences mathématiques qui sont intimement liées à ce même calcul.

I. — *Définition et propriétés générales des rapports différentiels.*

Nous appelons *grandeurs* ou quantités *coexistantes* deux grandeurs ou quantités qui existent ensemble et varient simultanément, de telle sorte que les éléments de l'une existent et varient, ou s'évanouissent, en même temps que les éléments de l'autre. Tels sont, par exemple, le volume d'un corps et la masse ou le poids de ce corps. Tels sont aussi le temps pendant lequel un point se meut et l'espace parcouru par ce point. Tels sont encore le rayon d'un cercle et sa surface, le rayon d'une sphère et son volume, la hauteur et la surface d'un triangle

ou d'un parallélogramme, la hauteur et le volume d'un prisme ou d'une pyramide, etc., la base et le volume d'un cylindre, etc.

Des grandeurs ou quantités coexistantes peuvent d'ailleurs varier simultanément dans un ou plusieurs sens divers. Ainsi, par exemple, le volume d'un prisme ou d'un cylindre, dont la base est constante, varie avec la hauteur dans un seul sens. Mais, si l'on suppose la hauteur constante et la base variable, le volume pourra varier avec cette base dans deux sens divers. De même encore, la masse d'un parallélépipède ou généralement d'un corps quelconque, pourra varier avec le volume de ce corps dans trois sens correspondants aux trois dimensions de l'espace, etc.

Cela posé, soient

$$A \quad \text{et} \quad B$$

deux grandeurs ou quantités coexistantes, qui varient simultanément dans un ou plusieurs sens divers. Concevons d'ailleurs que la grandeur B soit décomposée en éléments

$$b_1, \quad b_2, \quad \ldots, \quad b_n,$$

dont les valeurs numériques soient très petites ; et nommons

$$a_1, \quad a_2, \quad \ldots, \quad a_n$$

les éléments correspondants de la grandeur A. Enfin supposons que, l'un quelconque des éléments de la grandeur B étant représenté par b, et l'élément correspondant de la grandeur A par a, la valeur numérique de l'élément b vienne à décroître indéfiniment dans un ou plusieurs sens. L'élément a s'approchera lui-même indéfiniment de zéro ; mais on ne pourra en dire autant du rapport

$$\frac{a}{b},$$

qui convergera en général vers une limite finie différente de zéro. Cette limite est ce que nous appellerons le *rapport différentiel* de la grandeur A à la grandeur B. Ce rapport différentiel sera d'ailleurs du *premier ordre* ou du *second*, ou du *troisième*, etc., suivant que, pour l'obtenir, on aura fait décroître l'élément b dans un, ou deux, ou trois, ... sens différents.

Une des propriétés les plus générales et les plus utiles du rapport différentiel est celle que nous allons établir.

Concevons qu'on indique à l'aide de la lettre M, placée devant plusieurs quantités, une moyenne entre ces quantités, c'est-à-dire une quantité nouvelle comprise entre la plus petite et la plus grande de celles qu'on considérait d'abord. Si les éléments

$$b_1, \quad b_2, \quad \ldots, \quad b_n$$

de la grandeur ou quantité désignée par B sont positifs, les éléments

$$a_1, \quad a_2, \quad \ldots, \quad a_n$$

de la grandeur ou quantité désignée par A pouvant être affectés de signes quelconques ; on aura, en vertu d'un théorème connu (Voir l'*Analyse algébrique*, p. 17).

$$\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{b_1+b_2+\ldots+b_n} = \mathrm{M}\left(\frac{a_1}{b_1}, \frac{a_2}{b_2}, \ldots, \frac{a_n}{b_n}\right),$$

et, par suite, les deux équations

$$A = a_1+a_2+\ldots+a_n,$$
$$B = b_1+b_2+\ldots+b_n$$

entraîneront la suivante :

$$\frac{A}{B} = \mathrm{M}\left(\frac{a_1}{b_1}, \frac{a_2}{b_2}, \ldots, \frac{a_n}{b_n}\right). \tag{1}$$

D'ailleurs cette dernière équation continuera de subsister si, le nombre n devenant de plus en plus grand, chacun des éléments

$$b_1, \quad b_2, \quad \ldots, \quad b_n$$

devient de plus en plus petit ; et alors chacun des rapports

$$\frac{a_1}{b_1}, \quad \frac{a_2}{b_2}, \quad \ldots, \quad \frac{a_n}{b_n}$$

finira par différer aussi peu qu'on voudra d'une certaine valeur du rapport différentiel. On pourra donc, de la formule (1), déduire le théorème suivant :

Théorème I. — *Le rapport entre deux grandeurs ou quantités coexistantes A et B, dont la première varie dans un ou plusieurs sens avec la seconde supposée toujours positive, est une moyenne entre les diverses valeurs de leur rapport différentiel.*

Corollaire. — Le théorème I s'étend évidemment, avec la formule (1), au cas même où la seconde quantité B serait toujours négative.

Lorsque deux grandeurs coexistantes varient proportionnellement l'une à l'autre, leur rapport est constant, aussi bien que le rapport de leurs éléments, et la limite de ce dernier rapport, ou le rapport différentiel. On peut donc énoncer encore la proposition suivante :

Théorème II. — *Si deux grandeurs ou quantités coexistantes A et B sont entre elles dans un rapport constant, ce rapport constant sera aussi leur rapport différentiel.*

La proposition inverse peut s'énoncer comme il suit :

Théorème III. — *Si le rapport différentiel de la grandeur ou quantité A à la grandeur ou quantité constante B est constant, ce rapport constant sera aussi celui des grandeurs ou quantités elles-mêmes.*

Démonstration. — Supposons d'abord que la grandeur B, étant positive, puisse être considérée comme uniquement formée d'éléments positifs. Alors le troisième théorème sera une conséquence immédiate du premier théorème; et, par suite, si l'on nomme ρ le rapport différentiel des grandeurs A et B, on aura

$$\frac{A}{B} = \rho. \tag{2}$$

Ajoutons qu'en vertu du corollaire du premier théorème, l'équation (2) subsistera encore si la quantité B, étant négative, peut être considérée comme uniquement composée d'éléments négatifs.

Supposons, en second lieu, la grandeur ou quantité B formée d'éléments dont les uns soient positifs, les autres négatifs. On pourra la décomposer en diverses parties

$$B_{\prime}, \quad B_{\prime\prime}, \quad B_{\prime\prime\prime}, \quad \ldots,$$

dont chacune soit considérée comme uniquement formée d'éléments affectés du même signe; et, en nommant

$$A_{\prime}, \quad A_{\prime\prime}, \quad A_{\prime\prime\prime}, \quad \ldots$$

les parties correspondantes de la grandeur ou quantité A, on aura, en vertu de l'équation (2),

$$\frac{A_{\prime}}{B_{\prime}} = \rho, \qquad \frac{A_{\prime\prime}}{B_{\prime\prime}} = \rho, \qquad \frac{A_{\prime\prime\prime}}{B_{\prime\prime\prime}} = \rho, \qquad \ldots,$$

par conséquent

$$A_{\prime} = \rho B_{\prime}, \qquad A_{\prime\prime} = \rho B_{\prime\prime}, \qquad A_{\prime\prime\prime} = \rho B_{\prime\prime\prime}, \quad \ldots$$

et

$$A_{\prime} + A_{\prime\prime} + A_{\prime\prime\prime} + \ldots = \rho(B_{\prime} + B_{\prime\prime} + B_{\prime\prime\prime} + \ldots),$$

ou, ce qui revient au même,

$$A = \rho B. \tag{3}$$

Or cette dernière formule entraîne évidemment l'équation (1).

Corollaire. — Si le coefficient différentiel ρ est constamment nul, l'équation (3) donnera simplement

$$A = 0. \tag{4}$$

On peut donc énoncer encore la proposition suivante :

THÉORÈME IV. — *Une grandeur ou quantité s'évanouit toujours, lorsque le rapport différentiel de cette grandeur ou quantité à une autre grandeur ou quantité coexistante est constamment nul.*

Le rapport différentiel de deux grandeurs, constant ou variable, reçoit souvent divers noms particuliers relatifs à la nature même de ces grandeurs. Donnons à ce sujet quelques exemples.

Considérons d'abord une certaine masse ou quantité de matière M, renfermée dans un solide dont le volume est V, ou concentrée sur une surface dont l'aire est A, ou enfin concentrée sur une ligne dont la longueur est S. Si la masse M varie proportionnellement à la quantité

$$V, \quad \text{ou} \quad A, \quad \text{ou} \quad S,$$

le rapport constant

$$\frac{M}{V}, \quad \text{ou} \quad \frac{M}{A}, \quad \text{ou} \quad \frac{M}{S}$$

sera la *densité* constante du corps ou de la surface, ou de la ligne donnée. Soient, dans la même hypothèse,

$$m$$

un élément de la masse M, et

$$v, \quad \text{ou} \quad a, \quad \text{ou} \quad s,$$

l'élément correspondant de la quantité

$$V, \quad \text{ou} \quad A, \quad \text{ou} \quad S.$$

La densité constante du corps, ou de la surface, ou de la ligne donnée, pourra encore être représentée par le rapport

$$\frac{m}{v}, \quad \text{ou} \quad \frac{m}{a}, \quad \text{ou} \quad \frac{m}{s},$$

ainsi que par la limite de ce rapport. Cette densité constante sera donc le rapport différentiel de la masse M à la quantité

$$V, \quad \text{ou} \quad A, \quad \text{ou} \quad S.$$

Supposons maintenant que la masse M varie par exemple avec le volume V, mais sans lui être proportionnelle. Alors les rapports

$$\frac{M}{V} \quad \text{et} \quad \frac{m}{v}$$

pourront différer l'un de l'autre, et représenteront ce qu'on nomme la *densité moyenne* du corps sous le volume V ou sous le volume v. Si d'ailleurs le volume élémentaire v change graduellement de forme, sans jamais cesser de renfermer un certain point P du corps que l'on considère, et si, en vertu de ce changement de forme, les trois dimensions du volume viennent à décroître indéfiniment, la masse élémentaire m décroîtra indéfiniment avec le volume élémentaire v; mais le rapport $\frac{m}{v}$, ou la densité moyenne du corps sous le volume v, convergera en général vers une certaine limite différente de zéro. Or cette limite, qu'on nomme la *densité du corps au point* P, représentera évidemment, pour le même point, le rapport différentiel de la masse au volume. En d'autres termes, ce rapport différentiel est la limite vers laquelle converge la densité moyenne d'un élément infiniment petit, appartenant au corps que l'on considère, et renfermant le point P.

Pareillement, si la masse M, concentrée sur une surface ou sur un élément de surface, varie avec l'aire A ou a de cette surface ou de cet élément, sans être proportionnelle à cette aire, le rapport

$$\frac{M}{A}, \quad \text{ou} \quad \frac{m}{a},$$

représentera ce qu'on nomme la *densité moyenne* de la surface ou de l'élément dont il s'agit. Soit maintenant P un point renfermé dans la surface élémentaire a; et concevons que les deux dimensions de cette surface élémentaire décroissent indéfiniment, sans qu'elle cesse jamais de renfermer le point P. La masse élémentaire m décroîtra indéfiniment avec a; mais le rapport $\frac{m}{a}$, ou la densité moyenne de l'élément de surface, convergera en général vers une certaine limite différente de zéro. Cette limite, qu'on nomme la *densité de la surface au point* P, ne sera autre chose que le rapport différentiel de la masse M à l'aire A, calculé pour le point P.

Pareillement encore, si la masse M, concentrée sur une ligne ou

sur un élément de cette ligne, varie avec la longueur S ou s de cette ligne ou de cet élément, sans être proportionnelle à cette longueur, le rapport

$$\frac{M}{S}, \quad \text{ou} \quad \frac{m}{s}$$

représentera ce qu'on nomme la *densité moyenne* de la ligne ou de l'élément dont il s'agit. Soit maintenant P un point situé sur la ligne élémentaire s; et concevons que cette ligne décroisse en longueur sans cesser jamais de renfermer le point P. La masse élémentaire m décroîtra indéfiniment avec s; mais le rapport $\frac{m}{s}$, ou la densité moyenne de la ligne élémentaire, convergera en général vers une certaine limite différente de zéro. Cette limite, qu'on nomme la *densité de la ligne au point* P, ne sera autre chose que le rapport différentiel de la masse M à la longueur S, mesuré au point P.

Considérons maintenant un point mobile qui parcoure une certaine ligne droite ou courbe. Si l'espace parcouru est au temps que le point mobile emploie à le parcourir dans un rapport constant, ce rapport sera ce qu'on nomme la *vitesse constante du point mobile*. Dans le cas contraire, le rapport variable de l'espace au temps, ou de l'élément de l'espace à l'élément du temps, sera la *vitesse moyenne du point mobile* pendant le temps fini ou infiniment petit que l'on considère. Enfin, la vitesse moyenne du mobile, pendant un temps infiniment petit compté à partir d'un instant donné, aura pour limite ce qu'on nomme la *vitesse du point mobile à cet instant même*. Or il est clair que cette dernière vitesse sera précisément le rapport différentiel de l'espace au temps, et que ce rapport deviendra constant avec la vitesse dans le cas que nous avons d'abord indiqué.

Considérons encore une surface plane pressée par un liquide pesant. Si cette surface est horizontale, elle supportera une pression proportionnelle à son aire, et le rapport constant de cette pression à l'aire sera ce qu'on nomme la *pression hydrostatique*. Mais, si la surface pressée cesse d'être horizontale, le rapport de la pression à l'aire deviendra, pour la surface donnée, ou pour un élément de cette surface, ce qu'on peut appeler la *pression hydrostatique moyenne*, calculée pour cette surface ou pour cet élément. Enfin la pression hydrostatique moyenne, calculée pour un élément infiniment petit de surface qui renfermera un point donné P, aura pour limite, si les deux dimensions de l'élément viennent à décroître indéfiniment, ce qu'on nomme la *pression hydrostatique au point* P; et il est clair que cette dernière pression hydrostatique sera le rapport différentiel de la pression à l'aire, calculé pour le point P.

Si l'on applique successivement le théorème I aux diverses espèces de grandeurs que nous venons de passer en revue, on obtiendra les propositions suivantes :

Le rapport de la masse d'un corps à son volume est une moyenne entre les densités correspondantes aux divers points de ce volume.

Lorsqu'une masse est concentrée sur une surface ou sur une ligne, le rapport entre cette masse et l'aire de la surface ou la longueur de la ligne est une moyenne entre les densités correspondantes aux divers points de cette surface ou de cette ligne.

Lorsqu'un point mobile parcourt une ligne droite ou courbe, le rapport de l'espace au temps est une moyenne entre les vitesses que le point mobile acquiert successivement dans ses diverses positions sur cette ligne.

Lorsqu'une surface plane est pressée par un liquide pesant, le rapport entre la pression totale et l'aire de cette surface est une moyenne entre les diverses valeurs de la pression hydrostatique correspondantes aux divers points de la surface.

Ces diverses propositions justifient les noms de *densité moyenne*, de *vitesse moyenne*, de *pression hydrostatique moyenne*, précédemment donnés aux divers rapports qui s'y trouvent mentionnés.

Le rapport différentiel d'une grandeur à une autre n'est un rapport constant que dans le cas où ces deux grandeurs sont proportionnelles l'une à l'autre (Théorème III). Dans le cas contraire, non seulement le rapport différentiel des deux grandeurs est variable; mais il peut varier dans un ou dans plusieurs sens, suivant que la seconde gran-

deur peut varier elle-même dans un seul sens ou dans plusieurs sens divers. Il en résulte qu'un rapport différentiel peut être fonction d'une ou de plusieurs variables indépendantes. Ainsi, en particulier, si la seconde grandeur est une ligne, ou une surface, ou un volume, le rapport différentiel sera généralement déterminé pour chaque point de la ligne donnée, de la surface donnée, ou du volume donné. Mais il pourra varier d'un point à l'autre et dépendre des coordonnées de ce point, savoir, d'une seule coordonnée si la seconde grandeur est une ligne, de deux coordonnées si la seconde grandeur est une surface, de trois coordonnées si elle est un volume.

Si la seconde grandeur est un temps, le rapport différentiel de la première grandeur à la seconde sera généralement déterminé à chaque instant, ou, si l'on peut ainsi s'exprimer, à chaque point du temps que l'on considère; mais ce même rapport différentiel variera pour l'ordinaire d'un instant à l'autre.

Lorsqu'une grandeur varie dans un seul sens, elle offre deux bouts, ou deux extrémités; elle commence à l'une, et finit à l'autre. Alors, si, la première extrémité demeurant fixe, la seconde extrémité se déplace, on verra varier en même temps et la grandeur dont il s'agit, et un rapport différentiel qui serait relatif à cette seconde extrémité. Alors aussi ce rapport différentiel sera du premier ordre, et dépendra d'une seule variable. Considérons, pour fixer les idées, une longueur, ou un temps, ou même simplement un nombre variable qui, en croissant, atteint une certaine limite. On pourra regarder chacune de ces grandeurs comme variant dans un seul sens, et passant par degrés insensibles d'une valeur nulle à une valeur finale. Or, si à l'une de ces grandeurs on compare une grandeur nouvelle qui croisse avec elle-même, et si, après avoir partagé les deux grandeurs en éléments correspondants, mais très petits, on divise le dernier élément de la nouvelle grandeur par le dernier élément de l'autre, le quotient ainsi obtenu aura pour limite, quand les deux éléments deviendront infiniment petits, un rapport différentiel du premier ordre, qui dépendra de la valeur définitivement acquise par la longueur, ou le temps, ou le nombre variable dont il s'agit. Le plus souvent, ce rapport différentiel sera une fonction continue de la variable dont il dépend, c'est-à-dire qu'il changera de valeur avec elle par degrés insensibles; et alors, pour l'obtenir, on pourra indifféremment, ou chercher la limite du rapport entre les derniers éléments des deux grandeurs que l'on compare l'une à l'autre, ou chercher la limite des éléments nouveaux, mais correspondants, qu'elles pourraient acquérir, si chacune d'elles venait à croître au delà de sa seconde extrémité.

Dans le cas particulier où la seconde grandeur est une longueur mesurée sur une certaine ligne droite ou courbe, l'extrémité de cette longueur, avec laquelle varie le rapport différentiel que l'on considère, peut d'ailleurs être un point quelconque P de la ligne donnée; et, comme une seule coordonnée suffit pour déterminer la position du point P sur la même ligne, le rapport différentiel correspondant au point P peut être regardé comme fonction de cette seule coordonnée.

Concevons maintenant que les deux grandeurs coexistantes A et B puissent varier simultanément dans deux, trois, quatre... sens divers. On pourra en dire autant de leurs éléments correspondants; et l'on obtiendra pour limite du rapport entre ces éléments un rapport différentiel ρ, du second, du troisième, du quatrième... ordre, qui sera une fonction de deux, trois, quatre... variables indépendantes. Dans un grand nombre de cas, le rapport différentiel ρ est une fonction continue des variables dont il dépend, c'est-à-dire une fonction qui prend une valeur unique et déterminée pour chaque système de valeurs attribuées à ces variables, et qui varie avec elles par degrés insensibles. Dans cette hypothèse, si un élément b de la grandeur B devient infiniment petit dans tous les sens, on pourra dire en quelque sorte qu'à cet élément b correspond un seul système de valeurs des variables indépendantes, et par suite une seule valeur de ρ. Mais aux diverses parties de la grandeur B, ou plutôt à ses divers éléments infiniment petits, correspondront divers systèmes de valeurs des variables indépendantes, et par conséquent en général diverses

valeurs de ρ. Les limites, entre lesquelles les variables devront rester comprises dans ces divers systèmes, dépendront de la valeur attribuée à la grandeur B; et, si la grandeur B est toujours positive, ces limites s'étendront de plus en plus avec cette valeur même. Dans les problèmes de Géométrie et de Mécanique, les variables indépendantes peuvent être les coordonnées d'un point mobile et le temps.

Supposons, pour fixer les idées, que la seconde grandeur soit une aire, ou un volume; et nommons P un point quelconque de cette aire, ou de ce volume. La position du point P se trouvera déterminée par deux ou trois coordonnées qui seront les variables indépendantes. Cela posé, prenons, dans la seconde grandeur, un élément infiniment petit qui renferme le point P, et divisons par cet élément l'élément correspondant de la première. Le quotient obtenu différera généralement très peu de sa limite, qui sera le rapport différentiel de la première grandeur à la seconde, correspondant au point P. Ajoutons que ce rapport différentiel, variable avec les coordonnées du point P, en sera, dans beaucoup de cas, une fonction continue. D'ailleurs les divers systèmes de valeurs de ces coordonnées, correspondants aux divers éléments de l'aire ou du volume que l'on considère, devront être censés connus, dès que l'on connaîtra cette aire ou ce volume; et les limites, entre lesquelles resteront comprises les valeurs des coordonnées dans ces divers systèmes, seront évidemment déterminées par les équations des lignes qui envelopperont cette aire, ou de la surface qui enveloppera ce volume.

Lorsque, la seconde grandeur étant toujours positive, le rapport différentiel ρ est une fonction continue des variables dont il dépend, et par suite varie avec elles par degrés insensibles, une moyenne entre les diverses valeurs de ρ, correspondantes aux divers éléments de la seconde grandeur, est encore nécessairement l'une de ces valeurs. Donc le théorème I entraîne la proposition suivante :

Théorème V. — *Si le rapport différentiel d'une première grandeur à une grandeur coexistante et toujours positive est une fonction* *continue de la variable ou des variables dont il dépend, une des valeurs de ce rapport différentiel correspondantes à la seconde grandeur représentera le rapport qu'on obtient en divisant la première grandeur par la seconde.*

Corollaire I. — Concevons, pour fixer les idées, que la seconde grandeur se réduise à une longueur S mesurée sur une certaine ligne droite ou courbe, et la première grandeur à une masse M concentrée sur cette courbe. Les diverses valeurs du rapport différentiel ρ, correspondantes aux divers éléments infiniment petits de la longueur S, ne seront autre chose que les diverses valeurs de la densité dans les divers points que renferme cette longueur. D'ailleurs la position de chaque point P, sur la ligne que l'on considère, pourra être déterminée à l'aide d'une seule coordonnée x; et la densité ρ sera fonction continue de x, lorsque, étant complètement déterminée pour un point donné P, elle variera, avec la position du point P, par degrés insensibles. Donc le théorème V entraine la proposition suivante :

S désignant la longueur d'une ligne droite ou courbe sur laquelle se trouve concentrée une masse M, si la densité ρ, étant complètement déterminée en chaque point P *de la longueur S, varie avec la position du point* P *par degrés insensibles, le rapport de M à S, ou, en d'autres termes, la densité moyenne de la ligne, sera l'une des valeurs de ρ correspondantes aux divers points que renferme la longueur S.*

Corollaire II. — Concevons que la seconde grandeur se réduise à une aire A, mesurée sur une certaine surface plane ou courbe, et la première grandeur à une masse M concentrée sur cette surface. Les diverses valeurs du rapport différentiel ρ, correspondantes aux divers éléments infiniment petits de l'aire A, ne seront autre chose que les diverses valeurs de la densité relatives aux divers points que renferme cette aire. D'ailleurs la position de chaque point P, sur la surface que l'on considère, pourra être déterminée à l'aide de deux coordonnées rectangulaires x, y, ou de deux coordonnées polaires r, p, ou même à l'aide de deux coordonnées quelconques; et la densité ρ sera une fonction continue de ces coordonnées, lorsque, étant complètement déterminée pour un point donné P, elle variera, avec la position du point P, par degrés insensibles. Donc le théorème V entraine la proposition suivante :

A désignant l'aire d'une surface plane ou courbe sur laquelle se trouve concentrée une masse M, si la densité ρ, étant complètement déterminée en chaque point P *de l'aire A, varie avec la position du point* P *par degrés insensibles, le rapport de M à A, ou, en d'autres termes, la densité moyenne de la surface, sera l'une des valeurs de ρ correspondantes aux divers points que renferme l'aire A.*

Corollaire III. — Concevons que la seconde grandeur se réduise au volume V d'un solide dont la masse soit M. Les diverses valeurs du rapport différentiel ρ, correspondantes aux divers éléments infiniment petits du volume V, ne seront autre chose que les diverses valeurs de la densité relatives aux divers points que renferme ce volume. D'ailleurs la position de chaque point P, dans ce volume, pourra être déterminée à l'aide de trois coordonnées rectangulaires x, y, z, ou de trois coordonnées polaires r, p, q, ou généralement à l'aide de trois coordonnées quelconques; et la densité ρ sera fonction continue de ces coordonnées, lorsque, étant complètement déterminée en un point quelconque P, elle variera, avec la position du point P, par degrés insensibles. Donc le théorème V entraine encore la proposition suivante :

V désignant le volume d'un solide dont la masse est M, si la densité ρ de ce solide, étant complètement déterminée en chaque point quelconque P *du volume V, varie avec la position du point* P *par degrés insensibles, le rapport de M à V, ou, en d'autres termes, la densité moyenne du solide, sera l'une des valeurs de ρ correspondantes aux divers points que renferme le volume V.*

La comparaison des éléments correspondants

$$a \quad \text{et} \quad b$$

de deux grandeurs coexistantes

$$A \quad \text{et} \quad B$$

peut donner lieu à la formation de l'un ou l'autre des deux rapports

$$\frac{a}{b}, \quad \frac{b}{a},$$

suivant que l'on divise le premier élément par le second, ou le second par le premier. Or, ces deux rapports inverses l'un de l'autre, auront pour limites, si les éléments a et b viennent à décroître indéfiniment, deux quantités inverses l'une de l'autre, c'est-à-dire deux quantités dont le produit sera l'unité. On peut donc, aux propositions précédemment énoncées, joindre la suivante :

Théorème VI. — *Si deux grandeurs ou quantités coexistent et varient simultanément, le rapport différentiel de la première à la seconde sera l'inverse du rapport différentiel de la seconde à la première.*

Observons encore que, si l'on désigne par λ, μ deux facteurs ou coefficients constants, et par a, b les éléments de deux grandeurs ou quantités coexistantes A, B, les produits

$$\lambda a, \quad \mu b$$

représenteront les éléments des grandeurs exprimées par les produits

$$\lambda A, \quad \mu B.$$

Cela posé, soit α la limite du rapport $\frac{a}{b}$, ou, ce qui revient au même, le rapport différentiel de A à B. Le rapport différentiel de λA à μB sera évidemment la limite du rapport

$$\frac{\lambda a}{\mu b} = \frac{\lambda}{\mu}\frac{a}{b};$$

il se réduira donc au produit

$$\frac{\lambda}{\mu}\alpha.$$

Si l'un des facteurs μ, λ est l'unité, le même produit, réduit à

$$\lambda\alpha \quad \text{ou à} \quad \frac{\alpha}{\mu},$$

représentera le rapport différentiel de λA à B, ou de A à μB. On peut donc énoncer encore le théorème suivant :

Théorème VII. — *Soient λ, μ deux facteurs constants, et α le rapport différentiel de deux grandeurs ou quantités coexistantes*

$$A, \quad B.$$

Les rapports différentiels

$$\text{de } \lambda A \text{ à } B, \qquad \text{de } A \text{ à } \mu B, \qquad \text{de } \lambda A \text{ à } \mu B,$$

seront respectivement

$$\lambda\alpha, \quad \frac{\alpha}{\mu}, \quad \frac{\lambda}{\mu}\alpha.$$

Jusqu'ici nous nous sommes bornés à comparer deux grandeurs entre elles. Si les grandeurs que l'on compare l'une à l'autre sont au nombre de trois, de quatre, ..., ou même en nombre quelconque, on obtiendra, sur les rapports différentiels, de nouvelles propositions que nous allons successivement établir.

Observons d'abord que, si

$$A, \quad B, \quad C$$

désignent trois grandeurs coexistantes, et

$$a, \quad b, \quad c$$

trois éléments correspondants de ces grandeurs, on aura identiquement

$$\frac{a}{c} = \frac{a}{b}\frac{b}{c}. \tag{5}$$

Or, en supposant que, dans l'équation (5), les éléments a, b, c deviennent infiniment petits, on obtiendra immédiatement la proposition suivante :

Théorème VIII. — *Si trois grandeurs ou quantités coexistent et varient simultanément, le rapport différentiel de la première à la seconde, multiplié par le rapport différentiel de la seconde à la troisième, donnera pour produit le rapport différentiel de la première à la troisième.*

On démontrerait de la même manière le théorème que nous allons énoncer :

Théorème IX. — *Si plusieurs grandeurs ou quantités coexistent et varient simultanément, le rapport différentiel de la première à la dernière sera le produit des rapports différentiels de la première à la seconde, de la seconde à la troisième, de la troisième à la quatrième, ..., enfin de l'avant-dernière à la dernière.*

Le théorème VIII entraîne évidemment le suivant :

Théorème X. — *Lorsque trois grandeurs coexistent et varient simultanément, si l'on divise le rapport différentiel de la première à la troisième par le rapport différentiel de la seconde à la troisième, on obtiendra pour quotient le rapport différentiel de la première à la seconde.*

Nota. — En vertu des théorèmes II et III, si le rapport de la première grandeur à la seconde est constant, ce rapport constant sera en même temps leur rapport différentiel; et réciproquement, si le rapport différentiel de la première grandeur à la seconde est constant, ce rapport différentiel constant sera le rapport des grandeurs elles-mêmes. Cela posé, il est clair que le théorème X entraîne encore les deux propositions suivantes :

Théorème XI. — *Supposons que deux grandeurs ou quantités coexistantes A et B soient entre elles, tandis qu'elles varient, dans un rapport constant μ, les rapports différentiels α et β de ces deux grandeurs A et B*

à une troisième grandeur ou quantité coexistante C seront entre eux dans le même rapport constant; en d'autres termes, l'équation

$$A = \mu B \tag{6}$$

entraînera la suivante

$$\alpha = \mu\beta. \tag{7}$$

Théorème XII. — *Réciproquement, si les rapports différentiels α, β de deux grandeurs ou quantités coexistantes A et B, successivement comparées à une troisième grandeur ou quantité C, sont entre eux dans un rapport constant μ, ce rapport constant sera aussi celui de A à B; en d'autres termes, l'équation (7) entraînera toujours l'équation (6).*

Corollaire. — En supposant dans le théorème XII le nombre μ réduit à l'unité, on obtient la proposition suivante :

Théorème XIII. — *Si les rapports différentiels de deux grandeurs ou quantités A et B, successivement comparées à une troisième grandeur ou quantité C, sont égaux, les grandeurs ou quantités A, B seront égales entre elles.*

Considérons maintenant la somme de plusieurs grandeurs ou quantités coexistantes

$$A, \quad B, \quad C, \quad \ldots.$$

Nommons S cette somme, et

$$a, \quad b, \quad c, \quad \ldots, \quad s$$

les éléments correspondants des grandeurs ou quantités

$$A, \quad B, \quad C, \quad \ldots, \quad S.$$

Enfin comparons celles-ci à une nouvelle grandeur ou quantité K, dont l'élément soit k. On aura non seulement

$$S = A + B + C + \ldots, \tag{8}$$

mais aussi

$$(9) \qquad s = a + b + c + \ldots,$$

et par suite

$$(10) \qquad \frac{s}{k} = \frac{a}{k} + \frac{b}{k} + \frac{c}{k} + \ldots.$$

Or, si l'on conçoit que, dans cette dernière équation, les éléments

$$a, \quad b, \quad c, \quad \ldots, \quad s, \quad k$$

deviennent infiniment petits, on obtiendra, en passant aux limites, la proposition suivante :

Théorème XIV. — *Si l'on calcule non seulement les rapports différentiels*

$$\alpha, \quad 6, \quad \gamma, \quad \ldots$$

de plusieurs grandeurs ou quantités coexistantes

$$A, \quad B, \quad C, \quad \ldots,$$

mais aussi le rapport différentiel ς de la somme

$$A + B + C + \ldots$$

à une nouvelle grandeur ou quantité K, le dernier rapport ς, ou le rapport différentiel de la somme $A + B + C + \ldots$ à K, sera en même temps la somme des autres rapports différentiels; en sorte qu'on aura

$$(11) \qquad \varsigma = \alpha + 6 + \gamma + \ldots.$$

Supposons à présent que, dans la somme S, les grandeurs ou quantités

$$A, \quad B, \quad C, \quad \ldots$$

se trouvent respectivement multipliées par des facteurs constants

$$\lambda, \quad \mu, \quad \nu, \quad \ldots.$$

En d'autres termes, supposons que la grandeur ou quantité S représente une fonction linéaire des grandeurs ou quantités

$$A, \quad B, \quad C, \quad \ldots,$$

déterminée par la formule

$$(12) \qquad S = \lambda A + \mu B + \nu C + \ldots.$$

Si l'on nomme toujours

$$a, \quad b, \quad c, \quad \ldots, \quad s$$

les éléments des grandeurs

$$A, \quad B, \quad C, \quad \ldots, \quad S,$$

et si l'on compare encore ces diverses grandeurs ou quantités à une nouvelle grandeur ou quantité K, dont l'élément soit k, on trouvera, eu égard à la formule (12), non seulement

$$(13) \qquad s = \lambda a + \mu b + \nu c + \ldots,$$

mais aussi

$$(14) \qquad \frac{s}{k} = \lambda \frac{a}{k} + \mu \frac{b}{k} + \nu \frac{c}{k} + \ldots;$$

puis, en supposant que, dans cette dernière équation, les éléments

$$a, \quad b, \quad c, \quad \ldots, \quad s, \quad k$$

s'approchent indéfiniment de la limite zéro, on se trouvera conduit à la proposition suivante :

Théorème XV. — *Si l'on calcule, non seulement les rapports différentiels*

$$\alpha, \quad 6, \quad \gamma, \quad \ldots,$$

de plusieurs grandeurs ou quantités coexistantes

$$A, \quad B, \quad C, \quad \ldots,$$

mais aussi le rapport différentiel ς d'une autre grandeur ou quantité

$$\lambda A + \mu B + \nu C + \ldots,$$

représentée par une fonction linéaire des premières à une nouvelle grandeur ou quantité coexistante K, le dernier rapport ς sera exprimé en *fonction linéaire de tous les autres, tout comme S s'exprime en fonction linéaire de A, B, C, ...; en sorte qu'on aura*

$$\varsigma = \lambda\alpha + \mu\beta + \nu\gamma + \ldots. \tag{15}$$

Il est bon d'observer que, dans le théorème XV, les coefficients

$$\lambda, \quad \mu, \quad \nu, \quad \ldots$$

peuvent être ou positifs ou négatifs. Si, pour fixer les idées, on supposait

$$\lambda = 1, \quad \mu = -1, \quad \nu = 0, \quad \ldots,$$

le théorème XVI pourrait être énoncé comme il suit :

THÉORÈME XVI. — *Si l'on calcule, non seulement les rapports différentiels*

$$\alpha, \quad \beta$$

de deux grandeurs ou quantités coexistantes

$$A, \quad B,$$

mais aussi le rapport différentiel de leur différence

$$S = A - B \tag{16}$$

à une nouvelle grandeur ou quantité coexistante K, le dernier rapport ς, ou le rapport différentiel de la différence A — B à K, sera en même temps la différence des deux autres rapports différentiels α, β, en sorte qu'on aura

$$\varsigma = \alpha - \beta. \tag{17}$$

Observons aussi que le rapport différentiel, désigné par ς dans le théorème XII, s'évanouira toujours avec la somme S, et que réciproquement, en vertu du théorème IV, cette somme s'évanouira toujours avec le rapport différentiel ς. Donc l'équation

$$\lambda A + \mu B + \nu C + \ldots = 0 \tag{18}$$

entraînera toujours la formule

$$\lambda\alpha + \mu\beta + \nu\gamma + \ldots = 0, \tag{19}$$

et réciproquement cette formule entraînera toujours l'équation (18). On peut donc énoncer encore la proposition suivante :

THÉORÈME XVII. — *Si plusieurs grandeurs ou quantités coexistantes sont liées entre elles par une équation linéaire quelconque, la même équation linéaire existera entre les rapports différentiels de ces grandeurs ou quantités à une autre; et réciproquement, si ces coefficients différentiels sont liés entre eux par une équation linéaire, la même équation linéaire existera entre les grandeurs données.*

Remarquons encore que les formules (8), (12), (16), et les formules (11), (15), (17) sont, tout comme les formules (18) et (19), des équations linéaires qui lient entre elles, d'une part les grandeurs ou quantités coexistantes

$$A, \quad B, \quad C, \quad \ldots \quad \text{et} \quad S,$$

d'autre part les rapports différentiels

$$\alpha, \quad \beta, \quad \gamma, \quad \ldots \quad \text{et} \quad \varsigma$$

des grandeurs ou quantités dont il s'agit à une nouvelle grandeur ou quantité K. Par suite on pourra remonter de la formule (11), (15) ou (17) à la formule (8), (12) ou (16), tout comme on remonte de la formule (19) à la formule (18). Donc aux théorèmes XIV, XV, XVI on pourra joindre les théorèmes inverses qui sont compris, comme eux, dans le théorème XVII, et que nous allons énoncer.

THÉORÈME XVIII. — *Soient*

$$A, \quad B, \quad C, \quad \ldots, \quad S$$

plusieurs grandeurs ou quantités coexistantes, et

$$\alpha, \quad \beta, \quad \gamma, \quad \ldots, \quad \varsigma$$

les rapports différentiels de ces mêmes grandeurs ou quantités comparées à une nouvelle grandeur ou quantité coexistante K. Si le rapport différentiel ς est la somme de tous les autres α, β, γ, ..., la grandeur ou quantité S sera pareillement la somme des grandeurs ou quantités A, B, C, ... En d'autres termes, l'équation

$$\varsigma = \alpha + \beta + \gamma + \ldots$$

entraînera l'équation

$$S = A + B + C + \ldots.$$

Théorème XIX. — *Les mêmes choses étant posees que dans le théorème précédent, si le rapport différentiel ς s'exprime en fonction linéaire de tous les autres, la grandeur ou quantité S s'exprimera de la même manière en fonction linéaire des quantités A, B, C, ... En d'autres termes, la formule*

$$\varsigma = \lambda\alpha + \mu\beta + \nu\gamma + \ldots$$

entraînera la suivante

$$S = \lambda A + \mu B + \nu C + \ldots.$$

Théorème XX. — *Soient*

$$A,\quad B,\quad S$$

trois grandeurs ou quantités coexistantes, et

$$\alpha,\quad \beta,\quad \varsigma$$

les rapports différentiels de ces mêmes grandeurs ou quantités, comparées à une grandeur ou quantité coexistante K. Si le rapport différentiel ς est la différence des deux autres α et β, la grandeur ou quantité S sera pareillement la différence des grandeurs ou quantités A et B. En d'autres termes, l'équation

$$\varsigma = \alpha - \beta$$

entraînera l'équation

$$S = A - B.$$

Lorsque deux grandeurs ou quantités coexistantes se réduisent à une variable x et à une fonction y de cette variable, le rapport diffé-

rentiel de la fonction à la variable est précisément ce qu'on nomme la *dérivée* de la fonction ou le *coefficient différentiel*.

Lorsque deux grandeurs ou quantités coexistantes se réduisent au produit de n variables x, y, z, ... et à une fonction φ de ces variables, le rapport différentiel de la fonction φ au produit $xyz\ldots$ est précisément ce qu'on nomme la *dérivée de l'ordre n* de la fonction φ, prise par rapport à toutes ces variables.

D'ailleurs, pour que la variable x ou le produit $xyz\ldots$, et la fonction φ de x ou de x, y, z, ..., représentent deux grandeurs coexistantes, il suffit que la fonction φ s'évanouisse avec la variable x, ou avec les variables x, y, z, ...

Nous terminerons ce paragraphe en donnant la solution d'un problème dont nous ferons plus tard de nombreuses applications.

Problème. — *Soit K une grandeur toujours positive, dont chaque élément varie dans un ou plusieurs sens, avec une ou plusieurs variables indépendantes; et supposons que, pour chaque système de valeurs attribuées à ces variables, le rapport différentiel ρ d'une seconde grandeur ou quantité S à la première, ait une valeur connue et déterminée, qui varie avec elle par degrés insensibles. On demande une méthode qui puisse servir à calculer la grandeur S, avec un degré d'approximation aussi grand que l'on voudra.*

Solution. — En vertu du théorème V, le rapport

$$\frac{S}{K}$$

sera, dans l'hypothèse admise, une des valeurs du rapport différentiel ρ correspondantes à la grandeur K. On aura donc, pour l'une de ces valeurs de ρ,

$$\frac{S}{K} = \rho,$$

ou, ce qui revient au même,

$$S = \rho K. \tag{20}$$

Pareillement, si l'on nomme k un élément de K, et s l'élément correspondant de S, l'une des valeurs du rapport différentiel ρ correspondantes à l'élément k vérifiera la formule

$$s = \rho k. \tag{21}$$

Mais, si l'élément k décroît indéfiniment dans tous les sens, les diverses valeurs de ρ correspondantes à cet élément se déduiront les unes des autres par des variations de plus en plus petites des variables indépendantes, et, en conséquence, ces diverses valeurs finiront par différer entre elles de quantités inférieures à tout nombre donné ε. Donc alors, en prenant l'une quelconque d'entre elles pour la valeur de ρ qui devra satisfaire à la formule (21), on commettra sur la valeur de s une erreur dont la valeur numérique ne dépassera pas le produit

$$\varepsilon k.$$

Cela posé, divisons la grandeur K en éléments

$$k_1, \quad k_2, \quad \ldots, \quad k_n,$$

dont chacun soit assez petit pour que les valeurs correspondantes de ρ diffèrent entre elles de quantités inférieures au nombre ε. Multiplions ensuite chacun de ces éléments k par l'une quelconque des valeurs de ρ correspondantes à ce même élément, et considérons le produit obtenu comme représentant une valeur approchée de l'élément s de la grandeur S, correspondant à l'élément k de la grandeur K. La somme des produits ainsi calculés, représentée par un polynome de la forme

$$\rho_1 k_1 + \rho_2 k_2 + \ldots + \rho_n k_n,$$

représentera une valeur approchée de S, et en posant

$$\mathrm{S} = \rho_1 k_1 + \rho_2 k_2 + \ldots + \rho_n k_n, \tag{22}$$

on commettra une erreur qui ne pourra dépasser la somme des produits de la forme

$$\varepsilon k,$$

c'est-à-dire le produit

$$\varepsilon(k_1 + k_2 + \ldots + k_n) = \varepsilon \mathrm{K}.$$

Donc l'équation (22), qui fournirait la valeur exacte de S, si l'on pouvait choisir convenablement les coefficients

$$\rho_1, \quad \rho_2, \quad \ldots, \quad \rho_n,$$

fournira seulement une valeur approchée de S, si l'on prend pour ρ_1 l'une quelconque des valeurs de ρ correspondantes à l'élément k_1, pour ρ_2 l'une quelconque des valeurs de ρ correspondantes à l'élément k_2, ..., pour ρ_n l'une quelconque des valeurs de ρ correspondantes à l'élément k_n. Mais, en prenant pour n un nombre suffisamment grand, et pour

$$k_1, \quad k_2, \quad \ldots, \quad k_n$$

des éléments suffisamment petits, on fera décroître autant qu'on voudra le nombre ε, et avec lui la limite εK de l'erreur commise; et, par suite, on rendra le degré d'approximation aussi grand qu'on voudra.

Corollaire I. — La formule (22) fournirait encore une valeur très approchée de la somme S, pour de très petites valeurs des éléments

$$k_1, \quad k_2, \quad \ldots, \quad k_n,$$

si l'on prenait pour coefficient de chaque élément k, non plus l'une des valeurs de ρ correspondantes à cet élément, mais une quantité très peu différente de ces mêmes valeurs, la différence étant assujettie à décroître indéfiniment avec l'élément k. En effet, si les coefficients désignés dans la formule (22) par

$$\rho_1, \quad \rho_2, \quad \ldots, \quad \rho_n$$

sont altérés de telle sorte que, pour des valeurs de

$$k_1, \quad k_2, \quad \ldots, \quad k_n$$

suffisamment petites, la variation de chaque coefficient devienne inférieure à un très petit nombre ε, la valeur de S, déterminée par la formule (22), se trouvera elle-même altérée, mais de manière que sa variation soit inférieure au produit

$$\varepsilon(k_1 + k_2 + \ldots + k_n) = \varepsilon K.$$

Or cette dernière variation deviendra évidemment très petite quand le nombre ε sera lui-même très petit.

Corollaire II. — La formule (22) fournirait encore une valeur très approchée de la grandeur S pour de très petites valeurs des éléments

$$k_1, \quad k_2, \quad \ldots, \quad k_n,$$

si, dans le calcul de cette somme, on faisait abstraction de quelques-uns des éléments dont il s'agit, pourvu que la somme des éléments omis s'approchât indéfiniment de zéro par des valeurs croissantes du nombre n. En effet, nommons

$$k', \quad k'', \quad \ldots$$

les éléments omis et $\varkappa$ leur somme. La somme des termes dans la valeur de S fournie par l'équation (22) sera de la forme

$$\rho' k' + \rho'' k'' + \ldots,$$

et pourra être représentée par le produit

$$(k' + k'' + \ldots)\, M(\rho', \rho'', \ldots) = \varkappa M(\rho', \rho'', \ldots).$$

Or ce produit décroîtra indéfiniment pour des valeurs décroissantes du facteur $\varkappa$, ou, ce qui revient au même, pour des valeurs croissantes du nombre n.

Corollaire III. — D'après ce qui a été dit dans les corollaires précédents, on peut énoncer la proposition suivante :

Théorème XXI. — *Étant donnée une grandeur* K *toujours positive, dont chaque élément varie dans un ou plusieurs sens, avec une ou plusieurs variables indépendantes, si, pour chaque système de valeurs attribuées à ces variables, le rapport différentiel* ρ *d'une seconde grandeur ou quantité* S *à la première, obtient une valeur déterminée qui varie avec elles par degrés insensibles, alors, pour calculer* S *avec un degré d'approximation aussi grand que l'on voudra, on pourra se contenter de partager la grandeur positive* K *en éléments suffisamment petits*

$$k_1, \quad k_2, \quad \ldots, \quad k_n,$$

puis de recourir à la formule

$$S = \rho_1 k_1 + \rho_2 k_2 + \ldots + \rho_n k_n, \tag{22}$$

dans laquelle chaque élément k *aura pour coefficient ou l'une des valeurs de* ρ *correspondantes à cet élément, ou du moins une quantité très peu différente de l'une de ces valeurs, la différence étant assujettie à décroître indéfiniment avec l'élément* k. *Ajoutons que, dans le calcul de la grandeur* S, *on pourra faire abstraction de quelques-uns des éléments*

$$k_1, \quad k_2, \quad \ldots, \quad k_n,$$

pourvu que la somme $\varkappa$ *des éléments omis décroisse indéfiniment avec* $\frac{1}{n}$.

Corollaire I. — Si tous les éléments

$$k_1, \quad k_2, \quad \ldots, \quad k_n,$$

ou du moins ceux dont on ne fait pas abstraction, deviennent égaux, en désignant par k leur valeur commune, on aura

$$k = \frac{1}{n} K,$$

ou du moins

$$k = \frac{1}{n}(K - \varkappa),$$

$\varkappa$ désignant la somme des éléments omis ; et, par suite, la formule (22) donnera

$$S = \rho K, \tag{23}$$

ou du moins

$$S = \rho(K - \varkappa) = \rho K - \rho\varkappa, \tag{24}$$

la valeur de ρ étant celle que détermine l'équation

$$\rho = \frac{1}{n}(\rho_1 + \rho_2 + \ldots + \rho_n). \tag{25}$$

Or, en vertu de l'équation (25), la valeur de ρ sera la somme des rapports différentiels

$$\rho_1, \quad \rho_2, \quad \ldots, \quad \rho_n,$$

divisée par leur nombre, ou ce qu'on nomme la moyenne arithmétique entre ces rapports. Elle sera donc inférieure au plus grand de ces rapports, et si $\varkappa$ décroît indéfiniment pour des valeurs croissantes de n, on pourra en dire autant du produit $\rho\varkappa$. Donc alors, pour de grandes valeurs de n, la formule (24) se réduira sensiblement à la formule (23). On peut donc énoncer encore la proposition suivante :

Théorème XXII. — *Les mêmes choses étant posées que dans le théorème* XXI, *pour obtenir* S *avec un degré d'approximation aussi grand que l'on voudra, on pourra se contenter de partager la grandeur* K *en éléments suffisamment petits, qui soient tous égaux entre eux, à l'exception de quelques-uns dont la somme $\varkappa$ décroisse indéfiniment, tandis que le nombre total n des éléments égaux devient de plus en plus considérable, puis de calculer n valeurs*

$$\rho_1, \quad \rho_2, \quad \ldots, \quad \rho_n$$

du rapport différentiel ρ, qui correspondent respectivement aux n éléments égaux, ou qui du moins diffèrent très peu de n valeurs respectivement correspondantes à ces mêmes éléments, les différences étant assujetties à décroître indéfiniment avec $\frac{1}{n}$, et enfin de multiplier la grandeur K *par la moyenne arithmétique entre les quantités*

$$\rho_1, \quad \rho_2, \quad \ldots, \quad \rho_n.$$

Pour montrer une application des théorèmes XXI ou XXII, considérons une droite matérielle dont la longueur soit désignée par H, et sur laquelle on ait concentré une certaine masse M. Soit d'ailleurs ρ le rapport différentiel de M à H, ou, en d'autres termes, la densité de la droite matérielle pour le point P dont l'abscisse est n, et supposons que la densité ρ, étant fonction continue de cette abscisse, varie en conséquence avec elle par degrés insensibles. Les quantités désignées par

$$\rho_1, \quad \rho_2, \quad \ldots, \quad \rho_n,$$

dans les formules (22) et (25), devront représenter rigoureusement, ou à très peu près, les valeurs de la densité correspondantes à divers points

$$P_1, \quad P_2, \quad \ldots, \quad P_n,$$

respectivement situés sur des éléments égaux ou inégaux, mais toujours très petits, de la longueur H. Cela posé, le théorème XXI entraînera évidemment la proposition suivante :

H *étant la longueur d'une droite matérielle sur laquelle se trouve concentrée une certaine masse* M, *si la densité ρ de cette droite est connue et déterminée en chaque point* P *de la longueur* H, *et varie avec la position du point* P *par degrés insensibles, alors, pour obtenir la valeur de la masse* M *avec un degré d'approximation aussi grand que l'on voudra, on pourra se contenter de partager la longueur* H *en éléments suffisamment petits*

$$h_1, \quad h_2, \quad \ldots, \quad h_n,$$

puis de recourir à la formule

$$M = \rho_1 h_1 + \rho_2 h_2 + \ldots + \rho_n h_n,$$

dans laquelle chaque élément h aura pour coefficient ou la densité correspondante à l'un quelconque des points de cet élément, ou une quantité très peu différente de cette densité, la différence étant assujettie à décroître indéfiniment avec l'élément lui-même. Ajoutons que dans le calcul de la masse M *on pourra faire abstraction de quelques-uns des éléments*

$$h_1, \quad h_2, \quad \ldots, \quad h_n,$$

pourvu que la somme $\varkappa$ des éléments omis décroisse indéfiniment avec $\frac{1}{n}$.

Si les éléments de la longueur H, ou du moins ceux de ces éléments que l'on n'omet pas, deviennent égaux entre eux, on pourra faire coïncider

$$\rho_1, \quad \rho_2, \quad \ldots, \quad \rho_n$$

avec les valeurs de la densité correspondantes aux points

$$P_1, \quad P_2, \quad \ldots, \quad P_n,$$

qui représentent les origines ou les extrémités des éléments égaux, c'est-à-dire à des points équidistants, mais très rapprochés les uns des autres, et situés sur la longueur H. D'ailleurs si, entre les extrémités de la longueur H, on place des points équidistants, cette ligne pourra être par ce moyen divisée en éléments qui soient tous égaux entre eux, ou tous égaux à l'exception des deux extrêmes, et qui pourront être supposés inférieurs aux autres; et comme, dans cette dernière supposition, les éléments extrêmes pourront être évidemment omis, leur somme étant très petite aussi bien que chacun d'eux, il est clair que le théorème XXII entraînera la proposition suivante :

H *étant la longueur d'une droite matérielle sur laquelle se trouve concentrée une certaine masse* M, *si la densité* ρ *de cette droite est connue et déterminée en chaque point* P *de la longueur* H, *et varie avec la position du point* P *par degrés insensibles, pour obtenir la masse* M *avec un degré d'approximation aussi grand que l'on voudra, il suffira de partager la longueur* H *par des points équidistants en éléments qui soient tous égaux entre eux, ou même tous égaux à l'exception des éléments extrêmes que l'on pourra supposer inférieurs aux autres, puis de multiplier la longueur* H *par la moyenne arithmétique entre les valeurs de la densité correspondantes aux origines ou aux extrémités des éléments égaux.*

Les théorèmes XXI et XXII s'appliqueraient encore immédiatement à la détermination des masses concentrées sur des lignes courbes ou sur des surfaces planes ou courbes, ou même des masses comprises sous des volumes donnés. Cette détermination se trouverait ainsi ramenée à celle des longueurs, des surfaces et des volumes.

II. — *Sur les grandeurs proportionnelles.*

Deux grandeurs coexistantes, qui varient proportionnellement l'une à l'autre, c'est-à-dire dans un rapport constant, sont dites *proportionnelles*.

En vertu des théorèmes II et III du premier paragraphe, non seulement *le rapport différentiel de deux grandeurs proportionnelles l'une à l'autre coïncide avec le rapport constant de ces mêmes grandeurs*, mais de plus, *si le rapport différentiel de deux grandeurs coexistantes est un rapport constant, ces deux grandeurs seront proportionnelles l'une à l'autre*. D'ailleurs le rapport différentiel de deux grandeurs données A et B est certainement un rapport constant, lorsque à deux éléments égaux de l'une correspondent toujours des éléments égaux de l'autre. En effet, soient

$$\alpha, \quad \alpha'$$

deux valeurs du rapport différentiel de A et B, propres à représenter : 1° la limite du rapport de deux éléments correspondants

$$a \quad \text{et} \quad b;$$

2° la limite du rapport de deux autres éléments correspondants

$$a' \quad \text{et} \quad b'.$$

Si l'équation

$$b' = b$$

entraîne toujours la suivante

$$a' = a,$$

quelque petite que soit la valeur numérique de b, on en conclura

$$\frac{a'}{b'} = \frac{a}{b},$$

puis, en passant aux limites,

$$\alpha' = \alpha.$$

On peut donc énoncer le théorème suivant :

Théorème I. — *Deux grandeurs coexistantes sont certainement proportionnelles l'une à l'autre, lorsqu'à des éléments égaux de l'une correspondent des éléments égaux de l'autre.*

En s'appuyant sur ce théorème, on peut aisément reconnaître la proportionnalité d'une multitude de grandeurs diverses. Donnons à ce sujet quelques exemples.

On sait que la *projection orthogonale* d'un point sur un axe est le nouveau point où cet axe se trouve rencontré par une droite ou un plan perpendiculaire à l'axe, et qui renferme le point donné. On sait encore que la projection orthogonale d'une longueur, ou d'une surface, ou d'un volume sur un axe, est la portion de l'axe sur laquelle tombent les projections de tous les points renfermés dans cette longueur, cette surface ou ce volume. D'autre part il est aisé de s'assurer qu'une longueur mesurée, entre deux droites parallèles, ou entre deux plans parallèles dont la distance est donnée, sur une nouvelle droite, dépend uniquement de l'angle formé par cette droite avec les deux premières ou avec les deux plans, ou bien encore, avec un axe qui leur serait perpendiculaire. Donc, par suite, une longueur rectiligne se trouvera toujours partagée en éléments égaux en même temps que sa projection sur un axe avec lequel elle formera un angle donné. Donc, en vertu du théorème I, on pourra énoncer la proposition suivante :

Théorème II. — *Une longueur mesurée sur une droite est toujours proportionnelle à sa projection orthogonale sur un axe qui forme avec cette droite un angle donné.*

Nota. — Si l'axe et la droite donnée ne se rencontraient pas, l'angle formé par cette droite avec l'axe sera l'angle qu'elle forme avec un axe parallèle mené par l'une de ses extrémités.

Corollaire. — Les angles d'un triangle ne varient pas lorsque la base se déplace parallèlement à elle-même ; et, dans cette hypothèse, les deux autres côtés forment toujours le même angle avec l'axe mené par le sommet perpendiculairement à la base, c'est-à-dire avec l'axe sur lequel se mesure la hauteur du triangle ; donc ils restent proportionnels à cette hauteur qui représente leur projection commune sur l'axe dont il s'agit ; donc, par suite, ces deux côtés restent proportionnels l'un à l'autre. D'ailleurs des triangles qui offrent des angles égaux peuvent toujours être superposés en partie l'un à l'autre, de manière à présenter un sommet et un angle communs avec des bases parallèles opposées à ce sommet. Donc le théorème II entraîne encore la proposition suivante :

Théorème III. — *Si, dans un triangle, les côtés varient sans les angles, ces côtés resteront proportionnels l'un à l'autre.*

Observons à présent que, si la base d'un triangle commence par se déplacer en restant parallèle à elle-même, puis tourne ensuite autour de l'une de ses extrémités, le rapport des deux autres côtés commencera par demeurer constant, puis ensuite variera, tandis que, l'un de ces côtés restant invariable, l'autre changera de longueur. Donc, si la base se déplace, en cessant d'être parallèle à elle-même, le rapport des deux autres côtés variera toujours. Or cette remarque entraîne évidemment la proposition suivante :

Théorème IV. — *Si la base d'un triangle se déplace, de manière que les deux autres côtés restent proportionnels l'un à l'autre, cette base restera nécessairement parallèle à elle-même.*

Du théorème III, joint au théorème IV, on déduit encore immédiatement celui que nous allons énoncer :

Théorème V. — *Deux rayons vecteurs étant menés d'un centre fixe à deux points mobiles, si ces deux rayons varient dans le même rapport, sans changer de directions, la distance des deux points mobiles variera dans ce même rapport, en restant parallèle à elle-même.*

Considérons maintenant un système quelconque de points ou de figures donné dans un plan ou dans l'espace; et d'un centre fixe, arbitrairement choisi, menons des rayons vecteurs à tous les points du système. Si ces rayons vecteurs varient simultanément dans un rapport donné, on obtiendra un nouveau système de points qui correspondront respectivement aux points du premier; et les deux systèmes seront précisément ce qu'on appelle deux systèmes *semblables*, le centre fixe étant ce qu'on nomme *centre de similitude*. D'ailleurs, en vertu du théorème V, non seulement la droite qui joindra deux points du nouveau système sera parallèle à la droite qui joindra les points correspondants du premier; mais de plus les longueurs de ces deux droites seront entre elles dans le rapport donné de deux rayons vecteurs correspondants. En conséquence, si l'on nomme *points homologues* les points correspondants, *droites homologues* les droites qui joignent, dans les deux systèmes, les points homologues, et *angles homologues* les angles formés de part et d'autre par des droites homologues, on pourra énoncer la proposition suivante :

Théorème VI. — *Lorsque deux systèmes de points sont semblables entre eux, les angles homologues sont égaux dans ces deux systèmes, et les droites homologues proportionnelles.*

Corollaire I. — Étant donnés trois points situés dans le premier système sur une même droite, les trois points homologues seront situés dans le second système sur une seconde droite homologue à la première.

Corollaire II. — Étant donné un triangle quelconque formé avec trois points du premier système, le triangle semblable, formé avec les trois points correspondants du second système, offrira les mêmes angles avec des côtés homologues proportionnels.

Corollaire III. — Étant donnés quatre points dans le premier système, si les trois droites, menées du quatrième point aux trois autres, sont perpendiculaires à un même axe, c'est-à-dire situées dans un même plan, les trois droites homologues sont perpendiculaires à un axe

homologue, c'est-à-dire situées dans un second plan. Donc si un plan renferme divers points ou diverses figures qui appartiennent au premier système, un autre plan renfermera les points correspondants ou les figures correspondantes du second système, et si une courbe donnée est plane, la courbe semblable sera encore une courbe plane.

Corollaire IV. — Étant donnée une pyramide triangulaire formée avec quatre points du premier système, la pyramide semblable formée avec les quatre points correspondants du second système, aura pour faces des triangles semblables à ceux qui limitent la première pyramide et disposés dans le même ordre.

Corollaire V. — Si deux droites sont égales dans le premier système, les droites homologues seront égales dans le second système. Par suite, si un point est le milieu d'une droite ou le centre d'une figure ou d'une courbe plane dans le premier système, le point homologue dans le second système sera le milieu d'une droite homologue, ou le centre d'une figure semblable. Par suite encore, si une courbe plane ou une surface courbe offre un centre, et si les diamètres menés par ce centre sont égaux, la courbe semblable ou la surface semblable jouira des mêmes propriétés. En d'autres termes, une courbe semblable à une circonférence de cercle est une autre circonférence de cercle, et une surface courbe semblable à la surface d'une sphère est une autre surface de sphère.

Le rapport suivant lequel varient les diverses longueurs rectilignes, lorsqu'on passe d'un système de points ou de figures à un système semblable, détermine ce qu'on nomme l'*échelle* du second système comparé au premier. Ce rapport pourra d'ailleurs être inférieur ou supérieur à l'unité, suivant que les dimensions du nouveau système seront inférieures ou supérieures à celles du premier. Ainsi, par exemple, ce rapport serait $\frac{1}{10}$, si le nouveau système était construit sur une échelle d'un décimètre pour un mètre et, au contraire, le même rapport serait 10, si le nouveau système était construit sur une échelle d'un décamètre pour un mètre.

Il est bon d'observer que divers systèmes de points semblables à un système donné peuvent être construits sur une même échelle, à l'aide de divers centres de similitude, et après divers déplacements du premier système dans l'espace. Mais, en vertu du théorème VI, lorsque deux systèmes semblables à un troisième seront construits sur une même échelle, les droites homologues dans ces deux systèmes seront égales. Donc les triangles semblables formés avec les droites homologues se réduiront à des triangles égaux. Pareillement les pyramides triangulaires semblables, formées avec des arêtes homologues, se réduiront à des pyramides égales, et non à des pyramides symétriques, puisque les faces correspondantes seront, pour les deux systèmes, disposées dans le même ordre [théorème V, corollaire II]. Or, concevons que l'on superpose l'un à l'autre deux triangles égaux qui aient pour sommets respectifs trois points du premier système et trois points homologues du second. Il est clair qu'à un autre point quelconque du premier système se trouvera superposé le point homologue du second système, ces deux points pouvant être considérés comme les sommets de pyramides égales qui auraient pour bases les deux triangles égaux dont il s'agit. Ces conclusions s'étendent évidemment au cas même où chacun des nouveaux points se trouverait situé dans le plan du triangle correspondant et où, par suite, chacune des pyramides se transformerait en un quadrilatère plan. On peut donc énoncer la proposition suivante :

Théorème VII. — *Deux systèmes de points, semblables à un troisième et construits sur la même échelle, pourront être superposés l'un à l'autre.*

Ajoutons que, pour opérer la superposition, il suffit de déplacer l'un des deux systèmes, de manière à faire coïncider trois points du premier système non situés en ligne droite avec les trois points homologues ou correspondants du second système.

Jusqu'à présent les grandeurs proportionnelles que nous avons considérées étaient des lignes, par conséquent des grandeurs de même espèce. Nous allons maintenant appliquer le théorème I à des grandeurs proportionnelles d'espèces diverses que nous passerons rapidement en revue.

Il est aisé de s'assurer que, dans un cercle donné, à deux arcs égaux correspondent toujours des angles au centre égaux. Donc le théorème I entraîne la proposition suivante :

Théorème VIII. — *Dans un cercle donné, un arc variable mesuré sur la circonférence et l'angle au centre correspondant sont deux grandeurs proportionnelles.*

Il est encore facile de s'assurer que deux parallélogrammes, ou deux prismes, ou deux cylindres construits sur la même base, sont superposables, et par conséquent égaux en surface ou en valeur, quand ils offrent des hauteurs égales. Donc le théorème I entraîne encore les propositions suivantes :

Théorème IX. — *Un parallélogramme construit sur une base donnée offre une surface proportionnelle à sa hauteur.*

Théorème X. — *Un prisme ou un cylindre construit sur une base donnée offre un volume proportionnel à sa hauteur.*

Si un parallélogramme se réduit à un rectangle, alors des deux côtés qui aboutiront à un même sommet, et qui mesureront les deux dimensions de ce rectangle, l'un quelconque pourra être pris pour base, l'autre pour hauteur.

Pareillement, si un prisme se réduit à un parallélépipède rectangle, alors des trois côtés qui aboutiront à un même sommet, et qui mesureront les trois dimensions de ce parallélépipède, l'un quelconque pourra être pris pour hauteur.

On peut donc encore énoncer les propositions suivantes :

Théorème XI. — *La surface d'un parallélogramme rectangle est proportionnelle à l'un et à l'autre des deux côtés qui aboutissent à un même sommet.*

Théorème XII. — *La surface d'un parallélépipède rectangle est proportionnelle à chacun des trois côtés qui aboutissent à un même sommet.*

On nomme *corps homogène* un corps dont toutes les parties sont de même nature, et qui par conséquent offre partout, sous le même volume, la même masse et le même poids. Pareillement, une surface matérielle ou une ligne matérielle, c'est-à-dire une surface ou une ligne sur laquelle une certaine masse se trouve concentrée, est appelée *homogène*, lorsque des portions égales de la masse ont été concentrées sur des portions égales de la surface ou de la ligne. Cela posé, comme des portions égales de masse offrent toujours des poids égaux, il est clair que le théorème I entraîne encore les propositions suivantes :

La masse et le poids d'un corps homogène sont proportionnels à son volume.

La masse et le poids d'une surface matérielle homogène, ou d'une ligne matérielle homogène, sont proportionnels à l'aire de cette surface ou à la longueur de cette ligne.

On appelle *mouvement uniforme* un mouvement rectiligne dans lequel un point mobile parcourt des espaces égaux en temps égaux, et mouvement uniformément accéléré un mouvement rectiligne dans lequel la vitesse croît de quantités égales en temps égaux. Donc, en vertu du théorème I, on pourra encore énoncer les propositions suivantes :

Un point mobile, doué d'un mouvement uniforme, parcourt dans un temps donné un espace proportionnel à ce temps.

Un point mobile, dont le mouvement est uniformément varié, acquiert dans un temps donné une vitesse proportionnelle à ce temps.

Lorsqu'un liquide pesant presse une surface plane horizontale, des portions égales de la surface supportent la même pression.

Donc, en vertu du théorème I, *la pression supportée par une surface plane et horizontale dans un liquide pesant est proportionnelle à l'aire de cette surface.*

Les grandeurs proportionnelles jouissent de propriétés diverses parmi lesquelles on doit remarquer celles que nous allons rappeler en peu de mots.

Lorsqu'une grandeur K est proportionnelle à une seule variable x, le rapport

$$\frac{K}{x}$$

est constant; et par suite, si l'on nomme $\mathcal{K}$ la valeur particulière de K qui correspond à $x = 1$, on aura

$$\frac{K}{x} = \frac{\mathcal{K}}{1} = \mathcal{K},$$

(1) $$K = \mathcal{K} x.$$

Supposons maintenant que la grandeur K dépende de deux variables x, y, et soit proportionnelle à chacune d'elles. Alors, si l'on nomme $\mathcal{K}$ la valeur de K correspondante à

$$x = 1, \qquad y = 1,$$

et $\mathcal{K}_{\prime}$ la valeur que reçoit K lorsque, x restant variable, on pose seulement

$$y = 1,$$

on aura, en vertu de la formule (1),

$$\mathcal{K}_{\prime} = \mathcal{K} x, \qquad K = \mathcal{K}_{\prime} y,$$

par conséquent

(2) $$K = \mathcal{K} x y.$$

Supposons encore que la grandeur K dépende de trois variables x, y, z, et soit proportionnelle à chacune d'elles. Alors, si l'on nomme

$$\mathcal{K} \quad \text{ou} \quad \mathcal{K}_{\prime} \quad \text{ou} \quad \mathcal{K}_{\prime\prime}$$

la valeur particulière que prend la grandeur K lorsqu'on réduit à l'unité les trois variables x, y, z, ou seulement les deux variables y, z, ou enfin la seule variable z, on aura, en vertu de la formule (1),

$$\mathcal{K}_{\prime} = \mathcal{K} x, \qquad \mathcal{K}_{\prime\prime} = \mathcal{K}_{\prime} y, \qquad K = \mathcal{K}'' z,$$

par conséquent

$$K = \mathfrak{K} x y z. \tag{3}$$

Supposons enfin que la grandeur K dépende de n variables diverses

$$x, \quad y, \quad z, \quad \ldots, \quad t$$

et soit proportionnelle à chacune d'elles. Nommons d'ailleurs $\mathfrak{K}$ la valeur particulière que reçoit la grandeur K quand on suppose toutes les valeurs réduites à l'unité. Pour passer de cette hypothèse au cas général, en faisant varier successivement x, puis y, puis z, ..., puis t, il suffira, en vertu de la formule (1), de multiplier successivement $\mathfrak{K}$ par x, puis le produit obtenu par y, puis le nouveau produit par z, ..., et enfin l'avant-dernier produit par t. On aura donc définitivement

$$K = \mathfrak{K} x y z \ldots t, \tag{4}$$

ou, ce qui revient au même,

$$\frac{K}{xyz\ldots t} = \mathfrak{K}. \tag{5}$$

Or, en vertu de la formule (4), le rapport de K au produit $xyz\ldots t$ sera constant, ou, en d'autres termes, la grandeur K sera proportionnelle à ce produit. On peut donc énoncer la proposition suivante :

Théorème XIII. — *Lorsqu'une grandeur est proportionnelle à plusieurs autres, elle est proportionnelle à leur produit.*

Cela posé, les théorèmes XI et XII entraîneront immédiatement les suivants :

Théorème XIV. — *La surface d'un parallélogramme rectangle est proportionnelle au produit de ses deux dimensions, c'est-à-dire au produit des deux côtés qui aboutissent à un même sommet.*

Théorème XV. — *La surface d'un parallélépipède rectangle est proportionnelle au produit de ses trois dimensions, c'est-à-dire au produit des trois côtés qui aboutissent à un même sommet.*

Lorsque, dans l'équation (1), la variable x se réduit à une longueur mesurée sur une certaine droite, et la grandeur K à la projection orthogonale de cette longueur sur un axe qui forme avec la droite un angle aigu τ, la quantité $\mathfrak{K}$ représente la projection de l'unité de longueur sur le même axe, et cette projection est précisément ce qu'on nomme le *cosinus* de l'angle τ. Si l'on trace, dans un plan qui renferme la droite, non seulement l'axe dont il s'agit, mais encore un second axe perpendiculaire au premier, la projection orthogonale de l'unité de longueur sur le second axe sera ce qu'on nomme le *sinus* de l'angle τ. Le rapport du sinus au cosinus, et le rapport inverse du cosinus au sinus, sont la *tangente* et la *cotangente* de l'angle τ. L'inverse du sinus et l'inverse du cosinus sont la *sécante* et la *cosécante* du même angle. Le sinus, le cosinus, la tangente, la cotangente, la sécante et la cosécante de l'angle τ sont les diverses lignes trigonométriques de l'angle τ et s'expriment, comme l'on sait, à l'aide des notations

$$\sin\tau, \quad \cos\tau, \quad \mathrm{tang}\,\tau, \quad \cot\tau, \quad \mathrm{séc}\,\tau, \quad \mathrm{coséc}\,\tau.$$

Ces lignes, qui vérifient les formules

$$\mathrm{tang}\,\tau = \frac{\sin\tau}{\cos\tau}, \qquad \cot\tau = \frac{\cos\tau}{\sin\tau}, \qquad \mathrm{séc}\,\tau = \frac{1}{\cos\tau}, \qquad \mathrm{coséc}\,\tau = \frac{1}{\sin\tau}, \tag{6}$$

peuvent devenir négatives, quand l'angle τ cesse d'être aigu (voir l'*Analyse algébrique*, p. 425, et les *Résumés analytiques*, 4e livraison) [1].

En vertu de l'équation (1), jointe au théorème II du paragraphe I, la quantité désignée par $\mathfrak{K}$ dans l'équation (1) est tout à la fois le rapport constant et le rapport différentiel de K à x. De cette remarque, jointe aux définitions qui précèdent, on déduit immédiatement la proposition suivante :

Théorème XVI. — *Le rapport constant et le rapport différentiel de la projection orthogonale d'une longueur rectiligne sur un axe, à cette longueur même, sont tous deux représentés par le cosinus de l'angle aigu que forme avec cet axe la droite sur laquelle la longueur est mesurée.*

[1] *Œuvres de Cauchy*, 2e série, t. X, p. 99, et t. III, p. 353.

De la proposition que nous venons d'énoncer, jointe à l'avant-dernière des formules (6) au théorème VI du paragraphe I, on déduit encore cet autre théorème :

Théorème XVII. — *Le rapport constant et le rapport différentiel d'une longueur rectiligne à sa projection orthogonale sur un axe, sont tous deux représentés par la sécante de l'angle aigu que forme avec cet axe la droite sur laquelle la longueur est mesurée.*

La *projection orthogonale* d'un point sur un plan n'est autre chose que le pied de la perpendiculaire abaissée de ce point sur le plan; et la projection orthogonale d'une ligne, ou d'une surface, ou d'un volume sur un plan, est la nouvelle ligne ou la surface sur laquelle tombent les projections de tous les points de la ligne donnée, ou de la surface donnée, ou du volume donné. Ainsi, en particulier, la projection orthogonale d'une droite sur un plan sera la nouvelle droite qui renfermera les projections de tous les points de la première, ou, ce qui revient au même, la ligne d'intersection du plan donné avec un plan perpendiculaire, mené par la droite donnée; et si l'on projette sur la nouvelle droite une longueur mesurée sur la première, la projection obtenue sera aussi la projection de la même longueur sur le plan. Enfin l'angle formé par une droite avec un plan est précisément l'angle que forme cette droite avec la projection sur le plan. Cela posé, les théorèmes XVI et XVII entraînent évidemment les suivants :

Théorème XVIII. — *Le rapport constant et le rapport différentiel de la projection d'une longueur rectiligne sur un plan à cette longueur même, sont tous deux représentés par le cosinus de l'angle aigu que forme ce plan avec la droite sur laquelle la longueur est mesurée.*

Théorème XIX. — *Le rapport constant et le rapport différentiel entre une longueur rectiligne et sa projection orthogonale sur un plan, sont tous deux représentés par la sécante de l'angle aigu que forme avec ce plan la droite sur laquelle la longueur est mesurée.*

Lorsque la grandeur K se réduit à l'unité en même temps que la

variable x, on a, dans l'équation (1),

$$\mathcal{K} = 1,$$

et par suite cette équation donne simplement

$$K = x.$$

Donc alors la grandeur K et la variable x se trouvent toujours représentées par le même nombre qui sert de *mesure* à l'une et à l'autre. Alors aussi l'on peut dire que l'une des grandeurs est *mesurée* par l'autre. On peut donc énoncer la proposition suivante :

Théorème XX. — *Deux grandeurs proportionnelles sont représentées par le même nombre, ou, en d'autres termes, l'une sera mesurée par l'autre, si ces deux grandeurs, étant de même espèce, se réduisent simultanément à l'unité, ou si, l'une et l'autre étant d'espèces différentes, on choisit convenablement l'unité des grandeurs de première espèce, en prenant pour cette unité la grandeur correspondante à l'unité des grandeurs de seconde espèce.*

Cela posé, on déduira immédiatement du théorème VIII le suivant :

Théorème XXI. — *Dans un cercle dont le rayon est l'unité, un angle au centre sera représenté par le même nombre que l'arc compris entre ses côtés, si l'on prend pour unité d'angle celui qui correspond à l'arc dont la longueur est le rayon même.*

Le produit de plusieurs variables $x, y, z, \ldots$, se réduisant à l'unité en même temps que ces variables, on déduit encore des théorèmes XIII et XX la proposition suivante :

Théorème XXII. — *Une grandeur proportionnelle à plusieurs autres sera représentée par leur produit, si parmi les grandeurs de la première espèce on prend pour unité la grandeur qu'on obtient quand on réduit chacune des autres à l'unité de son espèce.*

Cela posé, les théorèmes XI et XII entraînent les suivants :

Théorème XXIII. — *Si l'on prend pour unité de surface l'aire du carré* *dont le côté est l'unité de longueur, l'aire d'un parallélogramme rectangle sera représentée par le produit de ses deux dimensions, c'est-à-dire des deux côtés qui aboutissent à un même sommet.*

Corollaire I. — L'aire d'un rectangle dont les côtés sont x et y, est représentée par le produit xy.

Corollaire II. — L'aire d'un carré dont le côté est x se trouve représentée par le produit $xx = x^2$.

Théorème XXIV. — *Si l'on prend pour unité de volume le volume du cube dont le côté est l'unité de longueur, le volume d'un parallélépipède rectangle sera représenté par le produit de ses trois dimensions, c'est-à-dire des trois côtés qui aboutissent à un même sommet.*

Corollaire I. — Le volume d'un parallélépipède rectangle dont les côtés sont x, y, z, est représenté par le produit xyz. Ce volume a donc encore pour mesure le produit de l'aire

$$yz \quad \text{ou} \quad zx \quad \text{ou} \quad xy$$

de l'une des faces par la hauteur

$$x \quad \text{ou} \quad y \quad \text{ou} \quad z,$$

mesurée perpendiculairement à cette face.

Corollaire II. — Le volume d'un cube dont le côté est x se trouve représenté par le produit $xxx = x^3$.

On déduit immédiatement, comme l'on sait, du théorème XXIII, un grand nombre de propositions diverses. Nous nous bornerons à en rappeler quelques-unes.

Un rectangle se trouve divisé par l'une quelconque de ses diagonales en deux triangles rectangles égaux, dont chacun a pour côtés ceux du rectangle même. Donc, en vertu du théorème XXIII, on peut énoncer la proposition suivante :

L'aire d'un triangle rectangle est la moitié de l'aire d'un rectangle construit sur les deux côtés qui comprennent l'angle droit; elle est donc

représentée par la moitié du produit de ces côtés. En prenant un de ces côtés pour base, on pourra dire que l'*aire du triangle rectangle est la moitié du produit de sa base par sa hauteur*.

Considérons maintenant un triangle quelconque. L'un des côtés, pris pour base, pourra être regardé comme la somme ou la différence des bases de deux triangles rectangles, dont les aires offriront pour somme ou pour différence l'aire du triangle donné. Donc, l'aire du triangle donné sera la somme ou la différence des produits qu'on obtient en multipliant la moitié de sa hauteur par les bases des triangles rectangles. Mais cette somme ou différence sera précisément la moitié du produit de la hauteur par la somme ou différence des bases dont il s'agit. On peut donc énoncer la proposition suivante :

Théorème XXV. — *Un côté quelconque d'un triangle étant pris pour base, l'aire du triangle a pour mesure la moitié du produit de cette base par la hauteur correspondante.*

Corollaire. — Un polygone plan pouvant toujours être décomposé en triangles, le théorème XXV fournit le moyen de calculer l'aire d'un semblable polygone. Ainsi, par exemple, un trapèze pouvant être décomposé en deux triangles qui offrent la même hauteur, leurs bases étant les côtés parallèles du trapèze, on peut énoncer le théorème suivant :

Théorème XXVI. — *L'aire d'un trapèze a pour mesure le produit de la hauteur par la demi-somme des côtés parallèles.*

Corollaire I. — Si deux carrés construits avec des côtés différents ont le même centre et des diagonales dirigées suivant les mêmes droites, la différence de ces deux carrés sera la somme de quatre trapèzes égaux dont chacun aura pour côtés parallèles les deux côtés donnés, et pour hauteur leur demi-différence. L'aire de chaque trapèze sera donc le produit de la demi-somme donnée par leur demi-différence, et le quadruple de ce produit, ou l'*aire du rectangle construit avec la somme et la différence des côtés donnés, représentera la différence entre les aires des carrés construits sur ces mêmes côtés.*

Cette proposition est d'ailleurs une conséquence immédiate du théorème XXIII. Car si l'on nomme x et X les côtés deux carrés, on aura

$$X^2 - x^2 = (X - x)(X + x).$$

Corollaire II. — Si les deux côtés parallèles d'un trapèze deviennent égaux, ce trapèze deviendra un parallélogramme. On peut donc énoncer encore la proposition suivante :

Théorème XXVII. — *L'aire d'un parallélogramme quelconque est le produit de l'un des côtés pris pour base par la hauteur correspondante.*

Considérons maintenant deux rectangles, ou deux triangles, ou deux parallélogrammes différents. Le rapport de leurs aires sera, en vertu du théorème XXIII, ou XXV, ou XXVII, le produit du rapport des bases par le rapport des hauteurs. D'ailleurs, si les deux rectangles ou triangles, ou parallélogrammes sont semblables l'un à l'autre, le rapport des hauteurs sera équivalent au rapport des bases (théorème VI). Donc alors le carré de ce dernier rapport, ou le rapport des carrés des bases, sera le rapport des aires, et l'on peut énoncer le théorème suivant :

Théorème XXVIII. — *Deux rectangles, ou deux triangles, ou deux parallélogrammes, quand ils deviennent semblables l'un à l'autre, offrent des aires proportionnelles aux carrés des côtés homologues.*

Au reste, les principales propositions ici déduites du théorème XXIII, et les propositions analogues auxquelles on parviendrait en partant du théorème XXIV, peuvent être facilement démontrées par la considération des rapports différentiels, comme on le verra plus tard.

En terminant le présent paragraphe, nous rappellerons une propriété fort utile des grandeurs proportionnelles.

Étant donnés deux systèmes de grandeurs, dont les unes sont proportionnelles aux autres, pour passer du premier système au second, il suffira de multiplier chacune des grandeurs comprises dans le premier système par un certain rapport qui sera le même pour toutes. Cela posé, si plusieurs grandeurs du premier système sont liées entre elles par

une équation linéaire, cette équation continuera de subsister, quand on multipliera chacun des termes qui la composent par le rapport dont il s'agit, ou ce qui revient au même, quand on passera du premier système au second.

On peut donc énoncer la proposition suivante :

Théorème XXIX. — *Toute équation linéaire qui subsiste entre diverses grandeurs, subsiste aussi entre des grandeurs proportionnelles.*

Corollaire I. — Ainsi, par exemple, étant donné, avec un premier système de grandeurs, un second système de grandeurs proportionnelles, si deux grandeurs du premier système sont entre elles dans un certain rapport, ou si l'une de ces grandeurs est la somme ou la différence de deux ou de plusieurs autres, on pourra en dire autant des grandeurs correspondantes du second système.

Corollaire II. — L'hypoténuse d'un triangle rectangle étant prise pour base de ce triangle, la perpendiculaire abaissée sur cette base du sommet opposé divise le triangle rectangle en deux autres semblables à lui, qui ont pour hypoténuses respectives les deux côtés du premier. Donc, en vertu du théorème XXVIII, les aires des trois triangles seront respectivement proportionnelles aux carrés construits sur l'hypoténuse et sur les côtés du triangle donné. Mais l'aire de celui-ci sera la somme des aires des deux autres. Donc, en vertu du corollaire II, *le carré construit sur l'hypoténuse d'un triangle rectangle sera la somme des carrés construits sur les deux côtés.*

Corollaire III. — Considérons dans un plan donné un centre fixe, un axe fixe et une courbe tracée de manière que les distances d'un point quelconque de la courbe au centre fixe, et à l'axe fixe, soient entre elles dans un rapport constant. En vertu des théorèmes VI et XXIX, une seconde courbe semblable à la première jouira de la même propriété relativement à un centre fixe et à un axe fixe tracés dans le plan de cette seconde courbe. D'ailleurs, il est aisé de s'assurer que, dans l'ellipse, la parabole et l'hyperbole, l'excentricité représente constamment le rapport entre les distances d'un point de la courbe à l'un des foyers et à une droite correspondante que l'on appelle la *directrice*. Il y a plus, cette propriété des courbes du second degré suffit pour les définir complètement et permet d'ailleurs de les distinguer facilement les unes des autres, puisque l'excentricité, nulle dans le cercle, et toujours inférieure à l'unité dans l'ellipse, devient équivalente à l'unité dans la parabole, et supérieure à l'unité dans l'hyperbole. En conséquence, on pourra énoncer la proposition suivante :

Théorème XXX. — *Une courbe semblable à une ellipse, à une parabole, ou à une hyperbole, est une autre ellipse, une autre parabole, ou une autre hyperbole, qui offre la même excentricité.*

Corollaire. — Une courbe du second degré est complètement déterminée quand on connait, avec l'excentricité, la distance d'un foyer à la directrice correspondante. Si l'on fait varier cette distance, sans altérer l'excentricité, la courbe restera semblable à elle-même. Comme pour la parabole en particulier, l'excentricité se réduit toujours à l'unité, il est clair que les diverses paraboles seront des courbes semblables entre elles, tout comme les diverses circonférences de cercle (théorème VI, corollaire V).

Dans un autre Mémoire, nous donnerons de nouveaux développements aux principes ci-dessus exposés, en les appliquant d'une manière spéciale à l'évaluation des longueurs, des aires et des volumes.

NOTE

SUR LA

NATURE DES PROBLÈMES

QUE PRÉSENTE

LE CALCUL INTÉGRAL.

Dans l'introduction qui précède mon *Analyse algébrique*, j'ai dit combien il était important de donner aux méthodes de calcul toute la rigueur qu'on exige en Géométrie, de manière à ne jamais recourir aux raisons tirées de la généralité de l'Algèbre. J'ai ajouté que les raisons de cette espèce tendaient à faire attribuer aux formules algébriques une étendue indéfinie, tandis que, dans la réalité, la plupart de ces formules subsistent uniquement sous certaines conditions, et pour certaines valeurs, des quantités qu'elles renferment. J'ai observé que la recherche de ces conditions et de ces valeurs, entrainant l'heureuse nécessité de fixer d'une manière précise le sens des notations diverses, et d'apporter des restrictions utiles à des assertions trop étendues, tournait au profit de l'Analyse ; qu'ainsi, par exemple, avant d'effectuer la sommation d'aucune série, j'avais dû examiner dans quels cas ces séries peuvent être sommées, ou, en d'autres termes, quelles sont les conditions de leur convergence, et que cet examen m'avait conduit à établir des règles générales de convergence qui paraissent dignes de quelque attention.

Les observations que je viens de rappeler ne sont pas seulement applicables à l'Algèbre et à l'Analyse algébrique. Elles s'appliquent encore, et à plus forte raison, au Calcul infinitésimal. Guidé par cette conviction, j'ai cherché, dans l'exposition du *Calcul différentiel*, à concilier la rigueur, dont je m'étais fait une loi dans l'Analyse algébrique, avec la simplicité qui résulte de la considération directe des quantités infiniment petites. Pour cette raison, j'ai cru devoir rejeter les développements des fonctions ou séries infinies, toutes les fois que les séries obtenues ne sont pas convergentes; et je me suis vu forcé de renvoyer à la fin du Calcul différentiel la formule de Taylor, que l'illustre auteur de la *Mécanique analytique* avait prise pour base de sa théorie des fonctions dérivées. La bienveillance avec laquelle les géomètres ont accueilli mon Ouvrage m'a donné lieu de croire que je ne m'étais pas trompé en pensant que les principes du Calcul différentiel et ses applications les plus importantes pouvaient être facilement et rigoureusement exposés sans l'intervention des séries.

Si du Calcul différentiel on passe au Calcul intégral, on obtiendra de nouveaux et nombreux exemples des avantages que l'on trouve à bien définir les questions, à ne rien laisser de vague ni d'arbitraire dans les notations et dans les formules. Ces précautions deviennent alors d'autant plus nécessaires que chaque problème de Calcul intégral semble, au premier abord, être, par sa nature même, un problème indéterminé. En effet, l'intégrale d'une expression différentielle ou d'une équation différentielle du premier ordre renferme, comme l'on dit, une constante arbitraire. Pareillement, plusieurs constantes arbitraires entrent dans les intégrales de plusieurs équations différentielles du premier ordre, ou d'une équation différentielle d'ordre supérieur. Enfin les intégrales d'une ou de plusieurs équations aux dérivées partielles renferment une ou plusieurs fonctions arbitraires. Mais, quand on examine attentivement le rôle que jouent ces diverses intégrales dans une question de Géométrie ou de Mécanique, on reconnaît bientôt que les constantes et fonctions dont il s'agit deviennent, dans chaque question, complètement déterminées. Toutefois, comme elles restent arbitraires quand on envisage le problème de l'intégration d'une manière générale et sous un point de vue purement analytique, on avait coutume, dans les traités de Calcul intégral, de renvoyer la détermination

de ces constantes ou de ces fonctions après la recherche des intégrales générales des expressions différentielles ou des équations proposées. Dans mes leçons données à l'École Polytechnique, comme dans la plupart des Ouvrages ou Mémoires que j'ai publiés sur le Calcul intégral, j'ai cru devoir renverser cet ordre et placer en premier lieu la recherche, non pas des intégrales générales, mais des intégrales particulières; en sorte que la détermination des constantes ou des fonctions arbitraires ne fût plus séparée de la recherche des intégrales. Alors chaque problème est devenu complètement déterminé, et c'est surtout cette circonstance qui m'a permis, non seulement de simplifier les solutions de problèmes déjà traités par d'autres auteurs, mais encore de résoudre des questions qui avaient résisté jusque-là aux efforts des géomètres. La marche ou, si l'on veut, la méthode que je viens de rappeler en peu de mots, me paraît évidemment propre à éclaircir les points les plus difficiles de l'Analyse infinitésimale; et, comme l'illustre géomètre de Kœnigsberg, avec lequel j'en causais, il y a peu de temps, partage mon avis à cet égard, j'ai pensé qu'il pourrait être utile d'indiquer ici diverses applications de cette méthode. Je vais donc entrer à ce sujet dans quelques détails.

Dans les traités de Calcul intégral on admettait, sans la démontrer, l'existence des intégrales générales des expressions et des équations différentielles; il importait de combler cette lacune. Pour y parvenir, j'ai suivi la marche que j'indiquais tout à l'heure; et, avant de prouver qu'à toute expression différentielle qui dépend d'une seule variable, correspond une intégrale ou fonction primitive, j'ai commencé par établir, dans le *Résumé des Leçons données à l'École Polytechnique*, la nature des *intégrales prises entre des limites données ou intégrales définies*. J'ai démontré par l'Analyse leur existence, qui pouvait se déduire de considérations géométriques; et, comme ces dernières intégrales peuvent devenir infinies ou indéterminées, j'ai dû rechercher dans quels cas elles conservent une valeur unique et finie. J'ai été ainsi conduit à la théorie des *intégrales définies singulières*, et cette théorie m'a fourni, avec les valeurs d'intégrales déjà connues, un grand nombre d'intégrales nouvelles, et même des formules générales propres à la détermination des intégrales définies. J'ai été conduit de la même manière, non seulement à reconnaître qu'il existe des intégrales indéterminées, mais encore à signaler certaines valeurs de ces intégrales, savoir, les *valeurs principales* qui méritent une attention particulière, et à expliquer le phénomène que présentent des intégrales doubles dont la valeur dépend de l'ordre dans lequel on effectue les intégrations; enfin à déterminer, dans un Mémoire spécial, la nature et les propriétés des *intégrales définies prises entre des limites imaginaires*. D'ailleurs, l'existence et la nature des intégrales définies étant bien connues, il a été facile d'en conclure l'existence des intégrales indéfinies, c'est-à-dire des intégrales qui renferment une constante arbitraire.

C'est aussi, en substituant aux intégrales indéfinies des intégrales prises chacune à partir d'une origine fixe, que je suis parvenu, dans le *Résumé* des Leçons déjà citées, à présenter, sous une forme très simple, l'intégration d'une fonction différentielle qui dépend de plusieurs variables.

C'est en opérant toujours de la même manière que j'ai réussi, d'une part, à simplifier, dans certains cas, la recherche des intégrales correspondantes aux équations différentielles très peu nombreuses que l'on savait intégrer en termes finis, spécialement la recherche des intégrales des équations linéaires, et, d'autre part, à établir sur des bases rigoureuses l'intégration des équations différentielles de forme quelconque.

Considérons d'abord, pour fixer les idées, une équation différentielle du premier ordre entre une variable indépendante et une fonction inconnue de cette variable, et supposons que l'on soit parvenu, soit à séparer les variables, soit à rendre l'équation intégrable par le moyen d'un facteur. Après avoir fait passer tous les termes de l'équation dans le premier membre, on pourra immédiatement intégrer ce premier membre, de manière qu'il s'évanouisse après l'intégration pour des valeurs particulières correspondantes des deux variables, et

l'on obtiendra ainsi l'intégrale générale, dans laquelle l'une ou l'autre de ces deux valeurs particulières, qui pourront être arbitrairement choisies, tiendra lieu de constante arbitraire. La même observation s'applique à un système d'équations différentielles du premier ordre, dont chacune offrirait pour premier membre une différentielle exacte d'une fonction de plusieurs variables, le second membre étant réduit à zéro. Dans ce cas encore, pour obtenir les intégrales générales du système, il suffira d'intégrer chacun des premiers membres, de manière qu'il s'évanouisse après l'intégration pour des valeurs particulières correspondantes de toutes les variables; et ces valeurs particulières, qui pourront être arbitrairement choisies, tiendront lieu des constantes arbitraires. Pour mieux faire saisir les avantages qu'offre ce procédé, concevons que l'on se propose d'intégrer un système d'équations différentielles linéaires et à coefficients constants, dont chacune même pourra offrir un dernier terme qui soit fonction de la variable indépendante. En suivant la méthode de d'Alembert, et à l'aide de facteurs auxiliaires convenablement choisis, on réduira facilement le problème à l'intégration d'une seule équation du premier ordre, et à la résolution d'une certaine équation finie que j'ai nommée l'*équation caractéristique*. Cela posé, en opérant comme il a été dit ci-dessus, on reconnaîtra que, pour obtenir le système des intégrales générales des équations données, il suffit d'égaler à zéro une certaine fonction des diverses variables $x, y, z, \ldots$ et de l'inconnue θ qui doit vérifier l'équation caractéristique, puis de réduire successivement l'inconnue θ aux diverses racines de cette dernière équation supposées inégales. Il y a plus : on reconnaîtra encore, comme je l'ai observé dans mes Leçons données à l'École Polytechnique, que, si l'équation caractéristique acquiert une racine double, triple, quadruple, etc., on doit, en prenant cette racine pour valeur de θ, égaler à zéro, avec la fonction dont il s'agit, une ou plusieurs dérivées de cette fonction différentiée une ou plusieurs fois par rapport à θ.

Si maintenant on considère un système quelconque d'équations différentielles du premier ordre, il ne sera plus généralement possible de les intégrer en termes finis. Mais on pourra du moins démontrer l'existence des intégrales générales, et même intégrer les équations proposées avec une approximation aussi grande que l'on voudra, soit à l'aide de la méthode que j'ai donnée dans mes Leçons de seconde année à l'École Polytechnique et que j'ai rappelée dans le paragraphe I du Mémoire sur l'intégration des équations différentielles (Vol. I des *Exercices d'Analyse et de Physique mathématique*, p. 327) (¹), soit à l'aide des principes nouveaux que j'ai développés dans ce Mémoire, et qui transforment en méthode rigoureuse le procédé de l'intégration par séries. Or, dans l'une et l'autre méthode, les constantes arbitraires, que doivent renfermer les intégrales générales d'un système d'équations différentielles du premier ordre, se trouvent remplacées par des valeurs particulières des inconnues, correspondantes à une valeur particulière de la variable indépendante, et par conséquent le problème de l'intégration se trouve réduit à un problème complètement déterminé.

Quant aux équations différentielles ou aux systèmes d'équations différentielles du second ordre, ou d'un ordre plus élevé, on peut toujours, comme je l'ai observé dans mes Leçons données à l'École Polytechnique, les réduire à des systèmes d'équations différentielles du premier ordre; et, pour y parvenir, il suffit d'augmenter le nombre des inconnues primitives en prenant pour inconnues nouvelles plusieurs de leurs dérivées, représentées chacune par une seule lettre. Cette réduction offre l'avantage de rendre les méthodes que je viens de rappeler immédiatement applicables à l'intégration d'équations différentielles d'un ordre supérieur au premier, et de simplifier ainsi la théorie de cette intégration. Pour s'en convaincre, il suffit de considérer une équation différentielle linéaire et à coefficients constants, qui soit d'un ordre supérieur au premier, et qui renferme un dernier terme représenté par une fonction de la variable indépendante. On sait que Lagrange a intégré cette équation différentielle, en ramenant l'in-

(¹) *OEuvres de Cauchy*, S. II, t. XI, p. 399.

tégration à la résolution d'une équation finie que nous nommerons encore l'*équation caractéristique;* mais la méthode employée par l'illustre géomètre exige d'assez longs calculs lorsque le terme variable dont nous avons parlé ne s'évanouit pas, et ces calculs deviennent encore plus compliqués, quand l'équation caractéristique offre des racines égales. Au contraire, l'intégration de l'équation traitée par Lagrange, ou même d'un système d'équations linéaires à coefficients constants d'un ordre quelconque, et dont chacune offrirait un dernier terme fonction de la variable indépendante, s'effectuera très facilement si l'on commence par réduire cette équation ou ce système d'équations à un système d'équations du premier ordre, en augmentant, comme on l'a dit, le nombre des inconnues. Alors aux constantes arbitraires, que doivent renfermer les intégrales générales, se trouvent substituées des valeurs particulières correspondantes des inconnues primitives et des inconnues nouvelles, ou, ce qui revient au même, des valeurs particulières simultanément acquises par les inconnues primitives et par celles de leurs dérivées que ne détermine point le système des équations différentielles (¹).

Le principe que je viens d'exposer s'applique avec un égal succès à

(¹) Déjà depuis longtemps on avait remarqué qu'il peut être avantageux, dans certains cas, de remplacer les constantes arbitraires introduites dans les intégrales des équations différentielles par des valeurs particulières des variables et de leurs dérivées. C'est ainsi, par exemple, que, pour obtenir l'intégrale d'une équation linéaire du second ordre, dans le cas où les deux racines de l'équation caractéristique deviennent égales entre elles, M. Lacroix (*Calcul différentiel*, t. II, p. 320) commence par exprimer les deux constantes arbitraires comprises dans l'intégrale générale en fonction de deux valeurs correspondantes de l'inconnue et de sa dérivée. Il y a plus : on avait remarqué que les valeurs particulières des inconnues et de leurs dérivées s'introduisent naturellement à la place des constantes arbitraires ou des fonctions arbitraires dans les développements des intégrales en séries. Mais on avait fait peu d'applications de la première remarque; et, pour que les conclusions que l'on tirait de la seconde devinssent rigoureuses, il fallait prouver que les séries obtenues étaient convergentes, au moins pour des valeurs des variables indépendantes renfermées entre certaines limites. Enfin, pour que l'emploi des séries même convergentes ne laissât aucun doute sur la nature des approximations, il fallait pouvoir assigner des limites aux erreurs que l'on commettait en arrêtant chaque série après un certain nombre de termes. On parvient à ce double but à l'aide du nouveau calcul que j'ai nommé *calcul des limites*. (Voir le Mémoire déjà cité sur l'*Intégration des équations différentielles*.)

l'intégration des équations aux dérivées partielles. Concevons d'abord, pour fixer les idées, qu'il s'agisse d'intégrer une équation aux dérivées partielles du premier ordre, entre une certaine inconnue et plusieurs variables indépendantes

$$x, \ y, \ z, \ \ldots, \ t,$$

dont la dernière t pourra être censée représenter le temps. L'intégrale cherchée pourra renfermer une fonction arbitraire, et par suite l'intégration de l'équation proposée, considérée sous un point de vue général, sera un problème indéterminé. Mais il importe d'observer : 1° que la valeur particulière de l'inconnue correspondante à une valeur particulière du temps t sera nécessairement une fonction des autres variables indépendantes; 2° que l'équation donnée ne fixe en aucune manière la forme de cette fonction, et qu'après avoir choisi cette forme arbitrairement, on pourra toujours intégrer l'équation dont il s'agit. On pourra donc assujettir l'inconnue, non seulement à vérifier l'équation proposée aux dérivées partielles, mais encore à se réduire, pour une valeur donnée du temps t, à une fonction donnée des autres variables indépendantes $x, y, z, \ldots$; et nous devons ajouter qu'alors le problème de l'intégration deviendra complètement déterminé. Or, cette seule considération fournit le moyen de lever entièrement les difficultés qui avaient arrêté les géomètres dans la recherche de l'intégrale générale d'une équation aux dérivées partielles du premier ordre, lorsque cette équation renfermait plus de deux variables indépendantes, et c'est en substituant ainsi, à un problème qui paraît indéterminé de sa nature, un autre problème complètement déterminé, que je suis parvenu, dans le *Bulletin de la Société philomatique* de janvier et février 1819, à faire dépendre l'intégration d'une équation quelconque aux dérivées partielles du premier ordre, de l'intégration d'un seul système d'équations différentielles du même ordre.

Considérons maintenant un système quelconque d'équations aux dérivées partielles du premier ordre. Il ne sera plus généralement possible de ramener leur intégration à celle d'un système d'équations

différentielles du même ordre. Mais si, dans le système proposé, chaque équation est linéaire au moins par rapport aux dérivées partielles des inconnues, on pourra démontrer l'existence des intégrales générales, et même intégrer les équations avec une approximation aussi grande que l'on voudra, en développant les intégrales en séries, et fixant, non seulement les règles de convergence des séries obtenues, mais encore les limites des restes, à l'aide des principes développés dans le Mémoire déjà cité sur l'intégration des équations différentielles, c'est-à-dire à l'aide du calcul des limites. D'ailleurs, dans les divers développements, les fonctions arbitraires introduites par l'intégration se trouveront encore remplacées par des fonctions qui devront être censées connues, savoir, par des valeurs particulières attribuées aux diverses inconnues, et correspondantes à une valeur donnée de l'une des variables indépendantes.

Si les équations proposées aux dérivées partielles cessaient d'être linéaires par rapport aux dérivées des inconnues, ou si ces mêmes équations n'étaient plus du premier ordre, mais d'un ordre quelconque, alors, pour revenir au cas précédent, il suffirait d'employer un artifice d'analyse semblable à celui par lequel nous avons réduit l'intégration des équations différentielles d'ordre quelconque à l'intégration des équations différentielles du premier ordre.

Au reste, je développerai, dans plusieurs nouveaux articles, les applications diverses des principes généraux que je viens d'établir.

MÉMOIRE SUR L'INTÉGRATION

DES

ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES

DU PREMIER ORDRE.

Lagrange a donné, en 1779, une méthode propre à fournir l'intégrale générale d'une équation aux dérivées partielles du premier ordre, dans le cas où cette équation est linéaire par rapport aux dérivées qu'elle renferme. D'ailleurs, dès l'année 1772, le même géomètre avait prouvé que l'intégration d'une équation quelconque, à trois variables et aux dérivées partielles du premier ordre, pouvait être ramenée à la recherche d'une intégrale particulière d'une équation linéaire du même ordre à quatre variables, savoir, d'une intégrale qui renferme une constante arbitraire. En effet, cette intégrale particulière de l'équation à quatre variables fournit, pour l'équation à trois variables, une intégrale correspondante, appelée *solution* ou *intégrale complète*, qui renferme deux constantes arbitraires, et Lagrange a fait voir que, pour déduire de cette intégrale complète l'intégrale générale de l'équation à trois variables, il suffit de substituer à la dernière des deux constantes arbitraires une fonction arbitraire de la première, puis de différentier, par rapport à celle-ci, l'intégrale complète, puis enfin d'éliminer la première constante entre l'intégrale complète et la nouvelle équation ainsi obtenue.

D'autre part, comme Charpit l'a remarqué dans un Mémoire présenté à l'Institut en 1784, on peut à volonté déduire, de la méthode

donnée par Lagrange en 1779, ou l'intégrale générale d'une équation linéaire à quatre variables, ou simplement une intégrale particulière qui renferme une constante arbitraire. Il est donc facile de concevoir comment, en s'appuyant sur les principes établis par Lagrange, Charpit est parvenu à intégrer généralement toute équation du premier ordre à trois variables, c'est-à-dire toute équation du premier ordre qui renferme avec deux variables indépendantes une inconnue et ses dérivées partielles du premier ordre. Lagrange lui-même a cherché depuis à lever les difficultés que l'on rencontrait quand on voulait déduire l'intégrale générale d'une semblable équation, non plus d'une intégrale particulière, mais de l'intégrale générale de l'équation linéaire à quatre variables. Au reste, après de nouvelles recherches des géomètres sur le même sujet, les difficultés dont il s'agit ont fini par disparaître complètement. Ajoutons que, parmi les diverses méthodes à l'aide desquelles on est parvenu à intégrer l'équation du premier ordre à trois variables, on doit distinguer la méthode de M. Ampère, fondée sur le changement d'une seule variable indépendante.

Charpit essaya d'étendre, aux équations qui renferment avec une seule inconnue plus de deux variables indépendantes, la méthode qui l'avait conduit à l'intégration des équations à trois variables. Mais il rencontra des difficultés qui ne lui permirent pas de résoudre complètement la question. Plus tard, en 1814, M. Pfaff parvint à une solution exacte et rigoureuse; mais la méthode qu'il proposa ramenait en général l'intégration d'une équation aux dérivées partielles du premier ordre à l'intégration de plusieurs systèmes d'équations différentielles. J'ai démontré le premier que la question dont il s'agit pouvait être réduite à l'intégration d'un seul système d'équations différentielles, de celles-là mêmes auxquelles on arrive en suivant la méthode de Charpit. Telle est en effet la conclusion à laquelle je suis parvenu dans une Note que renferme le *Bulletin de la Société philomatique* pour l'année 1819 (voir les livraisons de janvier et février 1819) ([1]). M. Jacobi, qui ne

([1]) *Œuvres de Cauchy*, S. II, T. II.

connaissait pas cette Note, ayant été conduit, par la lecture du Mémoire de M. Pfaff et d'un Mémoire de M. Hamilton sur les formules de la Dynamique, à examiner de nouveau la question, est arrivé à la même conclusion que moi. Seulement, en intégrant le système des équations différentielles substitué à l'équation proposée, il a tiré immédiatement de ce système, non plus l'intégrale générale, mais une *intégrale complète* de cette équation, c'est-à-dire une intégrale particulière qui renferme autant de constantes arbitraires qu'il y a de variables indépendantes. Cette intégrale complète, dont l'existence avait été déjà constatée par Lagrange et par moi-même dans divers cas particuliers, est précisément celle que l'on tire du système des équations différentielles en cherchant à établir une relation entre les variables de l'équation proposée et des valeurs particulières, mais correspondantes, de ces mêmes variables. D'ailleurs, cette intégrale complète étant formée, on en déduit aisément l'intégrale générale. J'ajouterai que la formule à l'aide de laquelle M. Jacobi a démontré généralement l'existence de l'intégrale complète dont nous venons de parler, se déduit d'une certaine équation différentielle donnée par M. Pfaff, ou plutôt de l'équation finie que M. Jacobi en a tirée par l'intégration, et que j'avais déjà obtenue moi-même dans le *Bulletin de la Société philomatique*. M. Binet a fait voir dernièrement qu'à l'aide du calcul des variations on pouvait simplifier la recherche de cette formule, et à la remarque de M. Binet j'en ai joint une autre, savoir que, de la formule dont il s'agit, on peut immédiatement déduire le système des équations propres à représenter l'intégrale générale, telle que je l'avais obtenue dans la Note de 1819.

Dans le premier paragraphe de ce Mémoire, je reproduirai la méthode que j'ai appliquée, dans le *Bulletin de la Société philomatique*, à l'intégration des équations aux dérivées partielles du premier ordre. On reconnaîtra que le succès de cette méthode, à l'aide de laquelle j'ai pu surmonter, dans tous les cas, les difficultés que la question avait présentées aux géomètres, tient surtout à ce que le problème de l'intégration, indéterminé de sa nature quand on le considère sous un point de vue général, devient ici complètement déterminé. Pour le rendre

tel, il m'a suffi de mettre au nombre des données du problème la fonction à laquelle se réduit l'inconnue pour une valeur particulière de l'une des variables indépendantes, et de substituer cette fonction, qui d'ailleurs peut être arbitrairement choisie, à la fonction arbitraire que doit renfermer l'intégrale générale de l'équation proposée.

Dans le second paragraphe, après avoir reproduit, à l'aide du calcul des variations, la formule à laquelle sont parvenus MM. Binet et Jacobi, je montrerai comment cette formule peut être appliquée à la recherche non seulement d'une intégrale complète de l'équation donnée, mais encore de l'intégrale générale, ou plutôt du système d'équations que représente cette intégrale.

I. — *Recherche de l'intégrale générale d'une équation aux dérivées partielles du premier ordre.*

Jusqu'à présent, il n'est aucun traité de Calcul différentiel et intégral où l'on ait donné les moyens d'intégrer complètement les équations aux dérivées partielles du premier ordre, quel que soit le nombre des variables indépendantes. M'étant occupé, il y a plusieurs mois [1], de cet objet, je fus assez heureux pour obtenir une méthode générale propre à remplir le but désiré. Mais, après avoir terminé mon travail, j'ai appris que M. Pfaff, géomètre allemand, était parvenu de son côté aux intégrales des équations ci-dessus mentionnées. Comme il s'agit ici d'une des questions les plus importantes du Calcul intégral, comme d'ailleurs la méthode de Pfaff est différente de la mienne, je pense que les géomètres ne verront pas sans intérêt une analyse abrégée de l'une et de l'autre. Je vais d'abord exposer la méthode dont je me suis servi, en profitant, pour simplifier l'exposition, de quelques remarques

(1) On ne doit pas oublier que ce qu'on va lire a été écrit en l'année 1818 ou 1819, et que le premier paragraphe du présent Mémoire offre le texte même de la Note publiée au commencement de l'année 1819, dans le *Bulletin de la Société philomatique*. Toutefois, pour rendre les notations du premier paragraphe pareilles à celles du second, nous avons changé la forme de quelques lettres, et, suivant notre usage, nous indiquons ici la dérivée d'une fonction, prise par rapport à une variable indépendante, à l'aide de la lettre D, au bas de laquelle nous plaçons cette variable même.

faites par M. Coriolis, ingénieur des Ponts et Chaussées, et de quelques autres qui me sont depuis peu venues à l'esprit.

Supposons en premier lieu qu'il s'agisse d'intégrer une équation aux dérivées partielles du premier ordre à deux variables indépendantes. On a déjà, pour une intégration de cette espèce, plusieurs méthodes différentes, dont l'une, celle de M. Ampère, est fondée sur le changement d'une seule variable indépendante. La méthode que je propose, appuyée sur le même principe dans l'hypothèse admise, se réduit alors à ce qui suit :

Soit

$$\mathrm{F}(x, t, \varpi, p, s) = 0 \tag{1}$$

l'équation donnée, dans laquelle x et t désignent les deux variables indépendantes, ϖ la fonction inconnue de ces deux variables, et p, s les dérivées partielles de ϖ relatives aux variables x et t. Pour qu'on puisse déterminer complètement la fonction cherchée ϖ, il ne suffira pas de savoir qu'elle doit vérifier l'équation (1) ; il sera encore nécessaire qu'elle soit assujettie à une autre condition, par exemple, à obtenir une certaine valeur particulière fonction de x pour une valeur donnée de la variable t. Supposons, en conséquence, que la fonction ϖ doive recevoir, pour $t = \tau$, la valeur particulière $\mathrm{f}(x)$; la fonction p ou la dérivée partielle de ϖ, différentiée par rapport à x, recevra dans cette hypothèse la valeur $\mathrm{f}'(x)$. Dans la même hypothèse, la valeur générale de ϖ sera, comme on sait, complètement déterminée. Il s'agit maintenant de calculer cette valeur : on y parviendra de la manière suivante :

Remplaçons x par une fonction de t et d'une nouvelle variable indépendante ξ. Les quantités ϖ, p, s, qui étaient fonctions de x et de t, deviendront elles-mêmes fonctions de t et de ξ, et l'on aura, en différentiant dans cette supposition,

$$\mathrm{D}_t\varpi = s + p\,\mathrm{D}_t x, \tag{2}$$

$$\mathrm{D}_\xi\varpi = p\,\mathrm{D}_\xi x. \tag{3}$$

Si l'on retranche l'une de l'autre les deux équations précédentes,

après avoir différentié la première par rapport à ξ et la seconde par rapport à t, on en conclura

$$\mathrm{D}_\xi s = \mathrm{D}_t p\,\mathrm{D}_\xi x - \mathrm{D}_t x\,\mathrm{D}_\xi p. \tag{4}$$

Si, de plus, on désigne par

$$\mathrm{X}\,dx + \mathrm{T}\,dt + \Pi\,d\varpi + \mathrm{P}\,dp + \mathrm{S}\,ds$$

la différentielle totale du premier membre de l'équation (1), on trouvera, en différentiant cette équation par rapport à ξ,

$$\mathrm{X}\mathrm{D}_\xi x + \Pi\mathrm{D}_\xi\varpi + \mathrm{P}\mathrm{D}_\xi p + \mathrm{S}\mathrm{D}_\xi s = 0 \tag{5}$$

et par suite, en ayant égard aux équations (3) et (4),

$$(\mathrm{X} + p\Pi + \mathrm{S}\mathrm{D}_t p)\mathrm{D}_\xi x + (\mathrm{P} - \mathrm{S}\mathrm{D}_t x)\mathrm{D}_\xi p = 0. \tag{6}$$

Observons maintenant que, la valeur de x en fonction de t et de ξ étant tout à fait arbitraire, on peut en disposer de manière qu'elle vérifie l'équation

$$\mathrm{P} - \mathrm{S}\mathrm{D}_t x = 0, \tag{7}$$

et qu'elle se réduise à ξ [1] dans la supposition particulière $t = \tau$. La valeur de x en t et ξ étant choisie comme on vient de le dire, les valeurs particulières de ϖ et de p correspondantes à $t = \tau$, savoir $\mathrm{f}(x)$ et $\mathrm{f}'(x)$, deviendront respectivement $\mathrm{f}(\xi)$ et $\mathrm{f}'(\xi)$. Représentons ces mêmes valeurs par ω, φ ; on aura

$$\omega = \mathrm{f}(\xi), \qquad \varphi = \mathrm{f}'(\xi). \tag{8}$$

Quant à la formule (6), elle se trouvera réduite par l'équation (7) à

$$(\mathrm{X} + p\Pi + \mathrm{S}\mathrm{D}_t p)\mathrm{D}_\xi x = 0,$$

et comme, x renfermant ξ par hypothèse, $\mathrm{D}_\xi x$ ne peut être constam-

[1] Nous supposions ici que la valeur ξ de x, correspondante à $t = \tau$, se réduit à la nouvelle variable indépendante. Mais cette réduction n'est pas nécessaire, et l'on peut tirer de la supposition contraire des conséquences qui méritent d'être remarquées, comme on le verra ci-après.

ment nul, la même formule deviendra

$$X + p\Pi + SD_t p = 0. \tag{9}$$

Cela posé, l'intégration de l'équation (1) se trouvera ramenée à la question suivante : *Trouver pour x, ϖ, p, s, quatre fonctions de t et de ξ, qui soient propres à vérifier les équations* (1), (2), (3), (7), (9), *et dont trois, savoir x, ϖ, p, se réduisent respectivement à ξ, ω, φ, dans la supposition $t = \tau$.*

Nous ne parlons pas de l'équation (4), parce qu'elle est une suite nécessaire des équations (2) et (3). Quant à la valeur particulière de s correspondante à $t = \tau$, elle n'entrera pas dans les valeurs générales de x, ϖ, p, s, déterminées par les conditions précédentes. Si on la désigne par ς, elle se déduira de la formule

$$F(\xi, \tau, \omega, \varphi, \varsigma) = 0. \tag{10}$$

Il est essentiel de remarquer que les valeurs générales de x, ϖ, p, s en fonction de t et de ξ resteront complètement déterminées si, parmi les conditions auxquelles elles doivent satisfaire, on s'abstient de compter la vérification de l'équation (3). Cette dernière condition doit donc être une conséquence immédiate de toutes les autres. Pour le démontrer, supposons un instant que, les autres étant vérifiées, les deux membres de l'équation (3) soient inégaux. La différence entre ces deux membres ne pourra être qu'une fonction de t et de ξ. Soient I cette fonction et i ce qu'elle devient pour $t = \tau$. On aura

$$\left\{\begin{aligned} I &= D_\xi \varpi - p D_\xi x, \\ i &= D_\xi \omega - \varphi D_\xi \xi = \varphi - \varphi = 0. \end{aligned}\right. \tag{11}$$

On trouvera par suite, au lieu des équations (3) et (4),

$$\left\{\begin{aligned} D_\xi \varpi &= \quad p D_\xi x + I, \\ D_\xi s &= D_t p D_\xi x - D_t x D_\xi p + D_t I, \end{aligned}\right. \tag{12}$$

puis, au lieu de l'équation (6), la suivante :

$$(X + p\Pi + SD_t p) D_\xi x + (P - SD_t x) D_\xi p + \Pi I + SD_t I = 0. \tag{13}$$

Cette dernière sera réduite par les équations (7) et (9), qu'on suppose vérifiées, à

$$\Pi I + SD_t I = 0. \tag{14}$$

En l'intégrant et considérant $\frac{\Pi}{S}$ comme une fonction de t et de ξ, on trouvera [1]

$$I = i e^{-\int_\tau^t \frac{\Pi}{S} dt}, \tag{15}$$

et par suite, en ayant égard à la seconde des équations (11), on aura généralement

$$I = 0. \tag{16}$$

Les deux membres de l'équation (3) ne sauraient donc être inégaux

[1] Comme on le voit, la formule (15) se déduit uniquement des équations (1), (2), (7), (9) et de leurs intégrales qui renfermeront généralement, avec les inconnues

$$x, \quad \varpi, \quad p, \quad s$$

considérées comme fonctions des deux variables t, ξ, les quantités

$$\xi, \quad \omega, \quad \varphi,$$

c'est-à-dire les valeurs particulières de x, ϖ, p, correspondantes à $t = \tau$. Donc la fonction

$$I = D_\xi \varpi - p D_\xi x$$

et sa valeur particulière

$$i = D_\xi \omega - \varphi D_\xi \xi,$$

correspondante à $t = \tau$, continueront de vérifier la formule (15) dans le cas même où, les valeurs générales des inconnues

$$x, \quad \varpi, \quad p, \quad s$$

étant fournies par les intégrales des équations (1), (2), (7), (9), les quantités

$$\xi, \quad \omega, \quad \varphi$$

ne seraient plus assujetties aux conditions (8), et où, par suite, i, I cesseraient de s'évanouir.

Si l'on pose, pour abréger,

$$\theta = -\frac{\Pi}{S}, \qquad \Theta = e^{\int_\tau^t \theta dt},$$

la formule (15) deviendra

$$I = \Theta i.$$

Si la nouvelle variable indépendante et la valeur de x correspondante à $t = \tau$ étaient dans l'hypothèse admise. On doit en conclure que les quantités x, ϖ, p, s satisferont à toutes les conditions requises, si ces quantités, considérées comme fonctions de t, vérifient les équations (1), (2), (7), (9) et si de plus

$$x, \quad \varpi, \quad p$$

se réduisent respectivement à

$$\xi, \quad \omega = f(\xi) \quad \text{et à} \quad \varphi = f'(\xi),$$

pour $t = \tau$. Il est inutile d'ajouter que s doit obtenir, dans la même supposition, la valeur ς; en effet, cette valeur particulière ne sera pas comprise dans les intégrales des équations (1), (2), (7), (9), attendu qu'aucune de ces équations ne renferme $D_t s$.

Si, dans l'équation (2), on substitue la valeur de $D_t x$ tirée de l'équation (7), on trouvera

$$D_t \varpi = s + \frac{P}{S} p = \frac{Pp + Ss}{S}. \tag{17}$$

De plus, si l'on différentie l'équation (1) par rapport à t, on obtiendra la suivante :

$$T + X D_t x + \Pi D_t \varpi + P D_t p + S D_t s = 0, \tag{18}$$

que les valeurs de $D_t x$, $D_t \varpi$, $D_t p$, tirées des formules (7), (17) et (9),

supposées distinctes et représentées par deux lettres différentes α, ξ, alors on devrait remplacer l'équation (3) par la suivante :

$$D_\alpha \varpi - p D_\alpha x = 0,$$

qu'on réduirait encore à la formule (16), en prenant

$$I = D_\alpha \varpi - p D_\alpha x.$$

Alors aussi, en considérant, dans les intégrales des équations (1), (2), (7), (9), les quantités

$$\xi, \quad \omega, \quad \varphi$$

comme des fonctions de α, on obtiendrait encore la formule (15), ou

$$I = \Theta i,$$

la lettre i désignant toujours la valeur de I correspondante à $t = \tau$, et par conséquent celle que fournit l'équation

$$i = D_\alpha \omega - \varphi D_\alpha \xi.$$

réduisent à

$$T + s\Pi + S D_t s = 0. \tag{19}$$

Cela posé, on pourra substituer l'équation (17) à l'équation (2), et l'équation (19) à l'une des équations (1), (17), (7), (9). Si d'ailleurs on observe que, dans le cas où l'on considère x, ϖ, p, s comme fonctions de t seulement, on peut comprendre les équations (7), (9), (17) et (19) dans la formule algébrique

$$\frac{dt}{S} = \frac{dx}{P} = \frac{d\varpi}{Pp + Ss} = -\frac{dp}{X + p\Pi} = -\frac{ds}{T + s\Pi}, \tag{20}$$

on conclura définitivement que, *pour déterminer les valeurs cherchées des quantités*

$$x, \quad \varpi, \quad p, \quad s,$$

il suffit de les assujettir à quatre des cinq équations comprises dans les deux formules

$$\left\{ \begin{aligned} & F(x, t, \varpi, p, s) = 0, \\ & \frac{dt}{S} = \frac{dx}{P} = \frac{d\varpi}{Pp + Ss} = -\frac{dp}{X + p\Pi} = -\frac{ds}{T + s\Pi}, \end{aligned} \right. \tag{21}$$

et à recevoir, pour $t = \tau$, les valeurs particulières

$$\xi, \quad \omega, \quad \varphi, \quad \varsigma,$$

dont les trois dernières sont déterminées, en fonction de la première, par les équations (8) *et* (10).

Supposons, pour fixer les idées, qu'à l'aide de l'équation

$$F(x, t, \varpi, p, s) = 0$$

on élimine s des trois équations comprises dans la formule

$$\frac{dt}{S} = \frac{dx}{P} = \frac{d\varpi}{Pp + Ss} = -\frac{dp}{X + p\Pi}. \tag{22}$$

En intégrant ces trois dernières, on obtiendra trois équations finies qui renfermeront avec les quantités

$$t, \quad x, \quad \varpi, \quad p,$$

les valeurs particulières représentées par

$$\tau,\quad \xi,\quad f(\xi),\quad f'(\xi).$$

Si, après l'intégration, on élimine p, les deux équations restantes renfermeront seulement, avec les quantités variables t, x, ϖ et la quantité constante τ, la nouvelle variable ξ dont l'élimination ne pourra s'effectuer que lorsqu'on aura assigné une forme particulière à la fonction arbitraire désignée par f. Quoi qu'il en soit, *le système des deux équations dont il s'agit pourra être considéré comme équivalent à l'intégrale générale de l'équation* (1) (1).

(1) La règle que nous donnons ici pour la recherche de l'intégrale générale de l'équation (1) peut s'énoncer comme il suit :

Éliminez s de la formule (22) *à l'aide de l'équation* (1) ; *alors les trois équations différentielles comprises dans la formule* (22) *ne renfermeront plus que les seules inconnues*

$$x,\quad \varpi,\quad p,$$

considérées comme fonctions de la variable indépendante t. Intégrez ces trois équations de manière que, pour $t = \tau$, on ait

$$x = \xi, \qquad \varpi = \omega, \qquad p = \varphi,$$

puis éliminez p entre les trois intégrales. Vous obtiendrez deux équations finies, dans lesquelles entreront seulement

$$t,\quad x,\quad \varpi,\quad \tau,\quad \xi,\quad \omega,\quad \varphi.$$

Cela posé, il ne restera plus qu'à éliminer ξ entre ces deux équations finies, jointes aux formules

$$\omega = f(\xi), \qquad \varphi = f'(\xi),$$

pour arriver immédiatement à l'intégrale générale de l'équation (1).

Il est bon d'observer que, la fonction $f(x)$ pouvant être arbitrairement choisie, les formules

$$\omega = f(\xi), \qquad \varphi = f'(\xi)$$

présentent simplement des valeurs de ω, φ propres à vérifier la condition $D_\xi\omega - \varphi = 0$, ou

$$\text{(a)} \qquad i = 0,$$

à laquelle se réduit, pour $t = \tau$, la condition (3) ou (16), savoir

$$\text{(b)} \qquad I = 0.$$

Il devait en être ainsi, puisque, suivant une remarque déjà faite, le changement de variable indépendante ramène l'intégration de l'équation (1), considérée comme une

Comme, dans tout ce qui précède, on peut substituer la variable t à la variable x, et réciproquement, il en résulte que les intégrales des équations (21) fourniront encore la solution de la question proposée, si l'on considère, dans ces intégrales, ξ comme constante, τ comme une nouvelle variable qu'on doit éliminer, et ω, φ, ς comme des

équation aux dérivées partielles, à l'intégration des équations simultanées (1), (2), (7), (9) entre les inconnues

$$x,\quad \varpi,\quad p,\quad s,$$

considérées comme fonctions de t, et à la vérification de la condition (16) ou (b), qui se déduit elle-même de la condition (a), en vertu de la formule (15), ou

$$\text{(c)} \qquad I = \Theta i.$$

Si la nouvelle variable indépendante et la valeur de x correspondante à $t = \tau$ étaient supposées distinctes et représentées par deux lettres différentes α, ξ, alors on devrait remplacer l'équation (a) par la suivante :

$$D_\alpha\varpi - pD_\alpha x = 0,$$

qu'on réduirait encore à la formule (16) ou (b) en posant

$$I = D_\alpha\varpi - pD_\alpha x.$$

Alors aussi, en considérant, dans les intégrales des équations (1), (2), (7), (9), les quantités

$$\xi,\quad \omega,\quad \varphi$$

comme des fonctions de α, on obtiendrait encore la formule (15) ou (c), de laquelle on conclurait encore que, pour satisfaire à la condition (3) ou (b), il suffit de vérifier la condition (a). Mais, comme on aurait

$$i = D_\alpha\omega - \varphi D_\alpha\xi,$$

on pourrait vérifier la condition (a) ou

$$D_\alpha\omega - \varphi D_\alpha\xi = 0,$$

soit en prenant, comme ci-dessous,

$$\omega = f(\xi), \qquad \varphi = f'(\xi),$$

soit en supposant

$$D_\alpha\omega = 0, \qquad D_\alpha\xi = 0,$$

c'est-à-dire, en supposant ω et ξ constantes et indépendantes de la variable α. D'ailleurs, dans cette dernière supposition, l'élimination de α entre les deux équations finies qui renferment

$$t,\quad x,\quad \varpi,\quad \tau,\quad \xi,\quad \omega,\quad \varphi$$

se réduira simplement à l'élimination de φ ; et les conditions (a), (b), étant vérifiées, fonctions de cette nouvelle variable déterminées par des équations de la forme

$$\omega = \mathrm{f}(\tau), \qquad \varsigma = \mathrm{f}'(\tau), \tag{23}$$

$$\mathrm{F}(\xi, \tau, \omega, \varphi, \varsigma) = 0. \tag{24}$$

Appliquons les principes que nous venons d'établir à l'intégration de l'équation aux différences partielles

$$ps - xt = 0. \tag{25}$$

On aura, dans cette hypothèse,

$$\mathrm{P} = s, \qquad \mathrm{S} = p, \qquad \Pi = 0, \qquad \mathrm{X} = -t, \qquad \mathrm{T} = -x,$$

entraineront la vérification de l'équation (1), considérée comme une équation aux dérivées partielles. On peut donc énoncer encore la proposition suivante :

L'élimination de p et de φ entre les trois intégrales tirées de la formule (22) *produira une équation résultante qui sera une intégrale de l'équation* (1).

L'intégrale dont il s'agit ici est non plus l'intégrale générale de l'équation proposée, mais seulement une intégrale particulière qui renferme deux constantes arbitraires ω, ξ.

Si l'on voulait déduire cette intégrale particulière de l'équation $i = 0$, présentée sous la forme

$$\varphi = \mathrm{D}_\xi \omega, \tag{d}$$

il suffirait d'observer que, dans le cas où l'on substitue à la variable indépendante ξ une autre variable indépendante α, on a identiquement

$$\mathrm{D}_\xi \omega = \frac{\mathrm{D}_\alpha \omega}{\mathrm{D}_\alpha \xi},$$

et qu'en conséquence l'équation (d) peut être généralement remplacée par la suivante :

$$\varphi = \frac{\mathrm{D}_\alpha \omega}{\mathrm{D}_\alpha \xi}.$$

Or cette dernière se vérifie quand ω et ξ deviennent indépendants de α, attendu que le second membre se présente sous la forme $\frac{0}{0}$.

Lorsqu'une fois on a obtenu l'intégrale particulière qui renferme les deux constantes arbitraires ω, ξ, alors, pour arriver à l'intégrale générale, il suffit de poser, suivant la méthode de Lagrange,

$$\omega = \mathrm{f}(\xi),$$

puis de joindre à l'intégrale particulière sa dérivée prise par rapport à ξ, et enfin d'éliminer ξ entre l'une et l'autre équation.

C'est pour cette raison que l'intégrale générale de chacune des équations (25) et (36) peut être représentée par le système de deux équations finies, dont la seconde est la dérivée de la première différentiée par rapport à ξ.

et par suite la seconde des formules (21) deviendra

$$\frac{dt}{p} = \frac{dx}{s} = \frac{d\varpi}{2xt} = \frac{dp}{t} = \frac{ds}{x};$$

ou, si l'on réduit toutes les fractions au même dénominateur $ps = xt$, pour le supprimer ensuite,

$$s\,dt = p\,dx = \frac{1}{2}d\varpi = x\,dp = t\,ds. \tag{26}$$

On tire successivement de la formule précédente

$$\frac{ds}{s} = \frac{dt}{t}, \qquad \frac{dp}{p} = \frac{dx}{x}, \qquad d\varpi = \frac{s}{t}2t\,dt = \frac{p}{x}2x\,dx, \tag{27}$$

puis, en intégrant et ayant égard à l'équation de condition $\varphi\varsigma = \xi\tau$,

$$\frac{s}{\varsigma} = \frac{t}{\tau}, \qquad \frac{p}{\varphi} = \frac{x}{\xi}, \tag{28}$$

$$\varpi - \omega = \frac{\varsigma}{\tau}(t^2 - \tau^2) = \frac{\varphi}{\xi}(x^2 - \xi^2) = \frac{\xi}{\varphi}(t^2 - \tau^2) = \frac{\tau}{\varsigma}(x^2 - \xi^2). \tag{29}$$

Si l'on multiplie l'une par l'autre les deux valeurs de $\varpi - \omega$ que fournit l'équation (29), on aura

$$(\varpi - \omega)^2 = (x^2 - \xi^2)(t^2 - \tau^2). \tag{30}$$

En joignant cette dernière à l'équation (29) mise sous la forme

$$(\varpi - \omega)\varphi = (t^2 - \tau^2)\xi \tag{31}$$

et remplaçant ω par $\mathrm{f}(\xi)$, φ par $\mathrm{f}'(\xi)$, on trouvera, pour les deux formules dont le système doit représenter l'intégrale générale de l'équation (25),

$$\left\{\begin{aligned} &[\varpi - \mathrm{f}(\xi)]^2 = (x^2 - \xi^2)(t^2 - \tau^2), \\ &[\varpi - \mathrm{f}(\xi)]\,\mathrm{f}'(\xi) = (t^2 - \tau^2)\xi. \end{aligned}\right. \tag{32}$$

Dans ces deux dernières formules, τ désigne une constante choisie à volonté, et ξ une nouvelle variable qu'on ne peut éliminer qu'après avoir fixé la valeur de la fonction arbitraire f. Il est bon de remarquer que la seconde des équations (32) n'est autre chose que la dérivée de la première relativement à la variable ξ.

Si l'on réunit l'équation (31) à l'équation (29) mise sous la forme

$$(\varpi - \omega)\varsigma = (x^2 - \xi^2)\tau; \tag{33}$$

si d'ailleurs, en considérant ξ comme constante et τ comme variable, on remplace ω par $f(\tau)$ et ς par $f'(\tau)$, on obtiendra deux nouvelles équations, savoir

$$\begin{cases} [\varpi - f(\tau)]^2 = (x^2 - \xi^2)(t^2 - \tau^2), \\ [\varpi - f(\tau)]\, f'(\tau) = (x^2 - \xi^2)\tau, \end{cases} \tag{34}$$

dont le système sera encore propre à représenter l'intégrale générale de l'équation (25). La seconde des équations (34) est la dérivée de la première relativement à τ.

On prouverait absolument de la même manière que l'intégrale générale de l'équation aux différences partielles

$$ps - \varpi = 0, \tag{35}$$

est représentée par le système de deux formules très simples, savoir de l'équation

$$\left(\varpi^{\frac{1}{2}} - \omega^{\frac{1}{2}}\right)^2 = (x - \xi)(t - \tau) \tag{36}$$

et de sa dérivée prise relativement à l'une des quantités ξ, τ considérée comme variable, ω étant censée fonction arbitraire de cette même variable.

La méthode que l'on vient d'exposer n'est pas seulement applicable à l'intégration des équations aux dérivées partielles à deux variables indépendantes; elle subsiste, quel que soit le nombre des variables indépendantes, ainsi qu'on peut aisément s'en assurer.

Prenons pour exemple le cas où il s'agit d'une équation aux dérivées partielles à trois variables indépendantes. Soit

$$F(x, y, t, \varpi, p, q, s) = 0 \tag{37}$$

cette équation, dans laquelle ϖ désigne toujours une fonction inconnue des variables indépendantes x, y, t et p, q, s les dérivées partielles de ϖ relatives à ces mêmes variables. Pour déterminer complètement la fonction ϖ, il ne suffira pas de savoir qu'elle doit vérifier l'équation (37);

il sera de plus nécessaire que cette fonction soit assujettie à une autre condition, par exemple à obtenir une certaine valeur particulière pour une valeur donnée de t. Supposons en conséquence que la fonction ϖ doive recevoir, pour $t = \tau$, la valeur particulière $f(x, y)$. Les fonctions p et q, ou les dérivées partielles de ϖ, relatives à x et à y, obtiendront dans la même hypothèse les valeurs particulières

$$D_x f(x, y), \quad D_y f(x, y)$$

que je désignerai, pour abréger, par

$$f'(x, y) \quad \text{et} \quad f_{\prime}(x, y).$$

Il s'agit maintenant de calculer la valeur générale de ϖ. On y parviendra de la manière suivante :

Remplaçons x et y par des fonctions de t et de deux nouvelles variables indépendantes ξ, η. Les quantités ϖ, p, q, s, qui étaient fonctions de x, y, t, deviendront elles-mêmes fonctions de ξ, η, t, et l'on aura, dans cette supposition,

$$D_t\varpi = s + p\,D_t x + q\,D_t y, \tag{38}$$

$$\begin{cases} D_\xi \varpi = p\,D_\xi x + q\,D_\xi y, \\ D_\eta \varpi = p\,D_\eta x + q\,D_\eta y. \end{cases} \tag{39}$$

On tire des trois équations précédentes

$$\begin{cases} D_\xi s = D_t p\, D_\xi x - D_t x\, D_\xi p + D_t q\, D_\xi y - D_t y\, D_\xi q, \\ D_\eta s = D_t p\, D_\eta x - D_t x\, D_\eta p + D_t q\, D_\eta y - D_t y\, D_\eta q. \end{cases} \tag{40}$$

Si de plus on désigne par

$$X\,dx + Y\,dy + T\,dt + \Pi\,d\varpi + P\,dp + Q\,dq + S\,ds$$

la différentielle totale du premier membre de l'équation (37), on trouvera, en différentiant successivement cette équation par rapport à ξ et par rapport à η,

$$\begin{cases} (X + p\Pi + SD_t p)\, D_\xi x + (Y + q\Pi + SD_t q)\, D_\xi y \\ \qquad + (P - SD_t x)\, D_\xi p + (Q - SD_t y)\, D_\xi q = 0, \\ (X + p\Pi + SD_t p)\, D_\eta x + (Y + q\Pi + SD_t q)\, D_\eta y \\ \qquad + (P - SD_t x)\, D_\eta p + (Q - SD_t y)\, D_\eta q = 0. \end{cases} \tag{41}$$

Observons maintenant que, les valeurs de x et de y en fonction de ξ, η, t, étant tout à fait arbitraires, on peut en disposer de manière qu'elles vérifient les équations différentielles

$$(42)\qquad \mathrm{P} - \mathrm{S}\mathrm{D}_t x = 0, \qquad \mathrm{Q} - \mathrm{S}\mathrm{D}_t y = 0,$$

et que de plus elles se réduisent ([1]), pour $t = \tau$, la première à ξ, la seconde à η. Les valeurs de x et de y étant choisies comme on vient de le dire, les équations (42) donneront

$$(43)\qquad \mathrm{X} + p\Pi + \mathrm{S}\mathrm{D}_t p = 0, \qquad \mathrm{Y} + q\Pi + \mathrm{S}\mathrm{D}_t q = 0;$$

et si l'on fait en outre

$$(44)\qquad \omega = \mathrm{f}(\xi, \eta), \qquad \varphi = \mathrm{f}'(\xi, \eta), \qquad \chi = \mathrm{f}_{,}(\xi, \eta),$$

on reconnaîtra facilement que la question proposée se réduit à intégrer les équations (38), (42) et (43), après y avoir substitué la valeur de s tirée de l'équation (37), et en y considérant

$$x, \quad y, \quad \varpi, \quad p, \quad q$$

comme des fonctions de t, qui doivent respectivement se réduire à

$$\xi, \quad \eta, \quad \omega, \quad \varphi, \quad \chi$$

pour $t = \tau$. Si entre les intégrales des cinq équations (38), (42) et (43), on élimine p et q, il restera seulement trois équations finies entre les quantités x, y, ϖ, la quantité constante τ, les nouvelles variables ξ, η et trois fonctions de ces nouvelles variables, savoir : $\omega = \mathrm{f}(\xi, \eta)$, $\varphi = \mathrm{f}'(\xi, \eta)$, $\chi = \mathrm{f}_{,}(\xi, \eta)$. *Le système de ces trois équations finies, entre lesquelles on ne pourra éliminer ξ et η qu'après avoir fixé la valeur de la fonction arbitraire $\mathrm{f}(x, y)$, doit être considéré comme équivalent à l'intégrale générale de l'équation* (37).

Les valeurs de x, y, ϖ, p, q, déterminées par la méthode précédente,

([1]) Nous supposions ici que les valeurs ξ, η de x et de y, correspondantes à $t = \tau$, se réduisent aux nouvelles variables indépendantes; mais cette réduction n'est pas nécessaire, et l'on peut tirer de la supposition contraire des conséquences qui méritent d'être remarquées, comme on le verra ci-après.

satisfont d'elles-mêmes aux équations (39). En effet, si l'on suppose

$$\mathrm{D}_\eta \varpi - p\mathrm{D}_\eta x - q\mathrm{D}_\eta y = \mathrm{J},$$
$$\mathrm{D}_\xi \varpi - p\mathrm{D}_\xi x - q\mathrm{D}_\xi y = \mathrm{I},$$

puis que l'on différentie successivement l'équation (37), par rapport à ξ et par rapport à η, en ayant égard aux équations (38), (42) et (43), on trouvera

$$\mathrm{I}\Pi + \mathrm{S}\mathrm{D}_t \mathrm{I} = 0,$$
$$\mathrm{J}\Pi + \mathrm{S}\mathrm{D}_t \mathrm{J} = 0,$$

et par suite ([1])

$$\mathrm{I} = i e^{-\int_\tau^t \frac{\Pi}{\mathrm{S}} dt}, \qquad \mathrm{J} = j e^{-\int_\tau^t \frac{\Pi}{\mathrm{S}} dt},$$

([1]) Il est bon d'observer que les deux formules ici obtenues se déduisent uniquement des équations (37), (38), (42), (43) et de leurs intégrales qui renfermeront généralement, avec les inconnues

$$x, \quad y, \quad \varpi, \quad p, \quad q, \quad s,$$

considérées comme fonctions des variables indépendantes ξ, η, t, les quantités

$$\xi, \quad \eta, \quad \omega, \quad \varphi, \quad \chi,$$

c'est-à-dire les valeurs particulières de x, y, ϖ, p, q, correspondantes à $t = \tau$. Donc ces deux formules continueront d'être vérifiées par les valeurs générales des fonctions

$$\mathrm{I} = \mathrm{D}_\xi \varpi - p\mathrm{D}_\xi x - q\mathrm{D}_\xi y, \qquad \mathrm{J} = \mathrm{D}_\eta \varpi - p\mathrm{D}_\eta x - q\mathrm{D}_\eta y$$

et par leurs valeurs particulières

$$i = \mathrm{D}_\xi \omega - \varphi\mathrm{D}_\xi \xi - \chi\mathrm{D}_\xi \eta, \qquad j = \mathrm{D}_\eta \omega - \varphi\mathrm{D}_\eta \xi - \chi\mathrm{D}_\eta \eta,$$

correspondantes à $t = \tau$, dans le cas même où, les valeurs générales des inconnues

$$x, \quad y, \quad \varpi, \quad p, \quad q, \quad s$$

étant fournies par les intégrales des équations (37), (38), (42), (43), les quantités

$$\xi, \quad \eta, \quad \omega, \quad \varphi, \quad \chi$$

ne seraient plus assujetties aux conditions (44).

Si, dans les deux formules dont il s'agit, on pose, pour abréger,

$$\theta = -\frac{\Pi}{\mathrm{S}}, \qquad \Theta = e^{\int_\tau^t \theta\, dt},$$

elles deviendront

$$\mathrm{I} = \Theta i, \qquad \mathrm{J} = \Theta j.$$

Si les nouvelles variables indépendantes étaient supposées distinctes des valeurs ξ, η de x, y correspondantes à $t = \tau$ et représentées par d'autres lettres α, β, alors on devrait

$\frac{\Pi}{S}$ étant considéré comme une fonction de ξ, η, t, et i, j désignant les valeurs de I et de J correspondantes à $t = \tau$. De plus, comme ces valeurs

remplacer les équations (39) par les suivantes

$$\text{(e)} \qquad D_\alpha \varpi - p D_\alpha x - q D_\alpha y = 0, \qquad D_6 \varpi - p D_6 x - q D_6 y = 0,$$

que l'on réduirait à la forme

$$I = 0, \qquad J = 0,$$

en posant, pour abréger,

$$I = D_\alpha \varpi - p D_\alpha x - q D_\alpha y, \qquad J = D_6 \varpi - p D_6 x - q D_6 y.$$

Alors aussi, en considérant, dans les intégrales des équations (37), (38), (42), (43), les quantités

$$\xi, \ \eta, \ \omega, \ \varphi, \ \chi$$

comme des fonctions de α, 6, on obtiendrait encore les formules

$$I = \theta i, \qquad J = \theta j,$$

les lettres i, j désignant toujours les valeurs de I, J, correspondantes à $t = \tau$, et par conséquent celles que fournissent les équations

$$i = D_\alpha \omega - \varphi D_\alpha \xi - \chi D_\alpha \eta, \qquad j = D_6 \omega - \varphi D_6 \xi - \chi D_6 \eta.$$

D'ailleurs, pour que le système des trois équations résultantes de l'élimination des variables p, q, s entre la formule (37) et les cinq intégrales des équations (38), (42), (43) puisse représenter une intégrale de la formule (37), considérée comme une équation aux dérivées partielles, il suffit encore, dans la nouvelle hypothèse, que les conditions

$$I = 0, \qquad J = 0$$

se trouvent vérifiées, et c'est ce qui aura effectivement lieu si les valeurs de i, j, liées avec celles de I, J par les formules

$$I = \theta i, \qquad J = \theta j,$$

se réduisent à zéro, c'est-à-dire si l'on a

$$i = 0, \qquad j = 0,$$

ou, en d'autres termes,

$$\text{(f)} \qquad D_\alpha \omega - \varphi D_\alpha \xi - \chi D_\alpha \eta = 0, \qquad D_6 \omega - \varphi D_6 \xi - \chi D_6 \eta = 0.$$

Or on satisfait à ces dernières conditions, soit en prenant comme ci-dessus

$$\omega = f(\xi, \eta), \qquad \varphi = f'(\xi, \eta), \qquad \chi = f_1(\xi, \eta),$$

soit en supposant ω, ξ, η, constants et indépendants des nouvelles variables α, 6. Enfin, dans cette supposition, l'élimination de α, 6, entre les équations finies qui renfer-

seront évidemment données par les équations

$$i = D_\xi \omega - \varphi D_\xi \xi = f'(\xi, \eta) - f'(\xi, \eta) = 0,$$
$$j = D_\eta \omega - \chi D_\eta \eta = f_1(\xi, \eta) - f_1(\xi, \eta) = 0,$$

meront

$$x, \ y, \ t, \ \varpi, \ \xi, \ \eta, \ \omega, \ \varphi, \ \chi$$

se réduira simplement à l'élimination de φ, χ. On peut donc énoncer encore la proposition suivante :

L'élimination de p, q, φ et χ entre les cinq intégrales tirées des équations (38), (42), (43), *produira une équation résultante qui sera une intégrale de l'équation* (37).

L'intégrale dont il s'agit ici est non plus l'intégrale générale de la formule (37), considérée comme représentant une équation aux dérivées partielles du premier ordre, mais seulement une intégrale particulière qui renferme trois constantes arbitraires ω, ξ, η.

Lorsqu'une fois on a obtenu cette intégrale particulière, alors, pour arriver à l'intégrale générale, il suffit de poser

$$\omega = f(\xi, \eta),$$

puis de joindre à l'intégrale particulière ses dérivées prises par rapport à ξ et à η, puis enfin d'éliminer ξ et η entre cette intégrale et ses deux dérivées. C'est pour cette raison que l'intégrale générale de chacune des équations (48) et (59) peut être représentée par le système de trois équations dont les deux dernières sont les dérivées de la première différentiée par rapport à ξ et à η.

En résumé, on voit qu'étant donnée une équation du premier ordre entre plusieurs variables indépendantes

$$x, \ y, \ z, \ \ldots, \ t,$$

une inconnue ϖ et les dérivées

$$p, \ q, \ \ldots, \ s$$

de cette inconnue, relatives aux variables x, y, ..., t, l'intégrale générale de cette équation pourra toujours être obtenue par la méthode que j'ai donnée en 1819. Alors cette intégrale se trouvera exprimée par le système de plusieurs équations dont le nombre sera celui des variables indépendantes. Ces équations renfermeront avec les variables

$$x, \ y, \ z, \ \ldots,$$

d'autres variables

$$\xi, \ \eta, \ \zeta, \ \ldots,$$

qui devront être éliminées, et qui représenteront des valeurs particulières de

$$x, \ y, \ z, \ \ldots,$$

correspondantes à une valeur donnée τ de t, dans les intégrales des équations différentielles substituées à l'équation proposée. Observons d'ailleurs que l'une des équations dont il s'agit sera elle-même une intégrale particulière de laquelle on déduira aisément toutes les autres équations et par suite l'intégrale générale. Cette intégrale particulière, qui avait été déjà mise en évidence dans les applications de la méthode générale à des cas on en conclura généralement

$$I = 0, \qquad J = 0.$$

Si l'on différentie par rapport à x l'équation (37), et que dans l'équation dérivée ainsi obtenue on substitue pour

$$D_t x, \quad D_t y, \quad D_t \varpi, \quad D_t p, \quad D_t q,$$

leurs valeurs tirées des formules (38), (42) et (43), on trouvera que cette équation se réduit à

$$T + s\Pi + SD_t s = 0. \tag{45}$$

Si de plus on désigne par ς la valeur particulière de s correspondante à $t = \tau$, cette valeur particulière satisfera évidemment à l'équation

$$F(\xi, \eta, \tau, \omega, \varphi, \chi, \varsigma) = 0. \tag{46}$$

Enfin, si l'on observe que, dans le cas où l'on considère

$$x, \quad y, \quad \varpi, \quad p, \quad q, \quad s,$$

comme fonctions de t, on peut comprendre les équations (38), (42),

déterminés, est précisément celle à laquelle M. Jacobi est parvenu en 1836. Pour établir généralement l'existence de cette intégrale, il suffit, comme nous l'avons vu, de recourir aux formules

$$D_\alpha \omega - \varphi D_\alpha \xi - \chi D_\alpha \eta \ldots = 0, \qquad D_\beta \omega - \varphi D_\beta \xi - \chi D_\beta \eta \ldots = 0, \quad \ldots, \tag{g}$$

et, pour déduire ces formules mêmes de celles que j'avais trouvées, il suffit de concevoir que les nouvelles variables indépendantes, substituées à $x, y, \ldots$, sont distinctes de $\xi, \eta, \ldots$

Si l'on se sert de la lettre caractéristique δ pour indiquer une différentiation relative à l'une quelconque des variables indépendantes

$$\alpha, \quad \beta, \quad \ldots,$$

l'une quelconque des équations (g) pourra être présentée sous la forme

$$\delta\omega - \varphi\,\delta\xi - \chi\,\delta\eta - \ldots = 0. \tag{h}$$

Il y a plus : cette dernière équation comprendra le système entier des formules (g), si, comme l'a fait M. Binet, on se sert de la caractéristique δ pour indiquer une différentiation relative, non plus à une seule des nouvelles variables α, β, ..., mais au système entier de ces variables. (*Voir* ci-après le second paragraphe du Mémoire.)

(43) et (45) dans la formule algébrique

$$\frac{dx}{P} = \frac{dy}{Q} = \frac{dt}{S} = \frac{d\varpi}{Pp + Qq + Ss} = -\frac{dp}{X + p\Pi} = -\frac{dq}{Y + q\Pi} = -\frac{ds}{T + s\Pi}, \tag{47}$$

on conclura, en définitive, que, pour déterminer complètement les quantités

$$x, \quad y, \quad \varpi, \quad p, \quad q, \quad s,$$

il suffit de les assujettir à six des équations comprises dans les formules (37), (47) et à recevoir, pour $t = \tau$, les valeurs particulières

$$\xi, \quad \eta, \quad \omega, \quad \varphi, \quad \chi, \quad \varsigma,$$

dont les quatre dernières se trouvent exprimées en fonction des deux premières par les équations (44) et (46).

Appliquons ces principes à l'intégration de l'équation aux dérivées partielles

$$pqs = xyt. \tag{48}$$

Dans cette hypothèse, la formule (47) deviendra

$$\frac{dx}{qs} = \frac{dy}{ps} = \frac{dt}{pq} = \frac{d\varpi}{3pqs} = \frac{dp}{yt} = \frac{dq}{xt} = \frac{ds}{xy},$$

ou, si l'on réduit toutes les fractions au même dénominateur $pqs = xyt$, pour le supprimer ensuite,

$$p\,dx = q\,dy = s\,dt = \tfrac{1}{3}d\varpi = x\,dp = y\,dq = t\,ds. \tag{49}$$

On tire de cette dernière formule

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{dp}{p} = \frac{dx}{x}, \qquad \frac{dq}{q} = \frac{dy}{y}, \qquad \frac{ds}{s} = \frac{dt}{t}, \\ &d\varpi = 3\frac{p}{x}x\,dx = 3\frac{q}{y}y\,dy = 3\frac{s}{t}t\,dt, \end{aligned}\right. \tag{50}$$

puis, en intégrant,

$$(51) \qquad \frac{p}{\varphi} = \frac{x}{\xi}, \qquad \frac{q}{\chi} = \frac{y}{\eta}, \qquad \frac{s}{\varsigma} = \frac{t}{\tau},$$

$$(52) \qquad \varpi - \omega = \frac{3}{2}\frac{\varphi}{\xi}(x^2 - \xi^2) = \frac{3}{2}\frac{\chi}{\eta}(y^2 - \eta^2) = \frac{3}{2}\frac{\varsigma}{\tau}(t^2 - \tau^2).$$

Si maintenant on multiplie l'une par l'autre les trois valeurs de $\varpi - \omega$ que fournit la formule (52), ou seulement deux de ces valeurs, en ayant égard à l'équation de condition

$$(53) \qquad \varphi\chi\varsigma = \xi\eta\tau,$$

on trouvera

$$(54) \qquad (\varpi - \omega)^3 = \frac{27}{8}(x^2 - \xi^2)(y^2 - \eta^2)(t^2 - \tau^2),$$

$$(55) \qquad \begin{cases} (\varpi - \omega)^2 = \dfrac{9}{4}\dfrac{\xi}{\varphi}(y^2 - \eta^2)(t^2 - \tau^2), \\ (\varpi - \omega)^2 = \dfrac{9}{4}\dfrac{\eta}{\chi}(x^2 - \xi^2)(t^2 - \tau^2), \\ (\varpi - \omega)^2 = \dfrac{9}{4}\dfrac{\tau}{\varsigma}(x^2 - \xi^2)(y^2 - \eta^2). \end{cases}$$

Enfin, si dans l'équation (54) et dans les deux premières des équations (55) on remplace

$$\omega \text{ par } \mathrm{f}(\xi, \eta), \quad \varphi \text{ par } \mathrm{f}'(\xi, \eta), \quad \chi \text{ par } \mathrm{f}_{\prime}(\xi, \eta),$$

on obtiendra trois formules dont le système représentera l'intégrale générale de l'équation (48), savoir :

$$(56) \qquad [\varpi - \mathrm{f}(\xi, \eta)]^3 = \frac{27}{8}(x^2 - \xi^2)(y^2 - \eta^2)(t^2 - \tau^2),$$

$$(57) \qquad \begin{cases} [\varpi - \mathrm{f}(\xi, \eta)]^2\,\mathrm{f}'(\xi, \eta) = \dfrac{9}{4}(y^2 - \eta^2)(t^2 - \tau^2)\xi, \\ [\varpi - \mathrm{f}(\xi, \eta)]^2\,\mathrm{f}_{\prime}(\xi, \eta) = \dfrac{9}{4}(x^2 - \xi^2)(t^2 - \tau^2)\eta. \end{cases}$$

Dans ces trois formules, τ désigne une quantité constante, et ξ, η deux

nouvelles quantités variables qu'on doit éliminer, après avoir fixé la valeur de la fonction arbitraire $\mathrm{f}(x, y)$. On peut remarquer que les équations (57) sont les dérivées de l'équation (56) prises successivement par rapport à ξ et par rapport à η.

En général, si l'on considère ω comme fonction de ξ, η, τ et que l'on fasse

$$(58) \qquad D_\xi \omega = \varphi, \qquad D_\eta \omega = \chi, \qquad D_\tau \omega = \varsigma,$$

les trois équations (55) ne seront que les dérivées de l'équation (54) prises relativement à ξ, η, τ; et, si dans l'équation (54), réunie à deux des équations (55), on regarde l'une des trois quantités

$$\xi, \quad \eta, \quad \tau,$$

comme constante et les deux autres comme variables, on obtiendra un système de trois équations finies propres à représenter l'intégrale générale de l'équation aux dérivées partielles

$$pqs - xyt = 0.$$

En appliquant la méthode ci-dessus exposée à l'équation aux dérivées partielles

$$(59) \qquad pqs - \varpi = 0,$$

on trouverait que l'intégrale générale de cette dernière peut être représentée par le système de trois formules très simples, savoir, de l'équation

$$(60) \qquad \left(\varpi^{\frac{1}{2}} - \omega^{\frac{1}{2}}\right)^3 = 8(x - \xi)(y - \eta)(t - \tau),$$

dans laquelle ω est censée fonction arbitraire de ξ, η, τ, et des deux dérivées de la même équation relatives à deux des trois quantités ξ, η, τ, lorsque l'on considère une de ces trois quantités comme constante et les deux autres comme variables.

L'extension des méthodes précédentes à l'intégration des équations aux différences partielles qui renferment plus de trois variables indépendantes ne présentant aucune difficulté, je passerai, dans un second article, à l'exposition du travail important de M. Pfaff sur les objets que je viens de traiter.

II. — *Sur une formule de laquelle on déduit à volonté ou l'intégrale générale d'une équation aux dérivées partielles du premier ordre, ou une intégrale particulière qui renferme des constantes arbitraires dont le nombre est précisément celui des variables indépendantes.*

Intégrer l'équation aux dérivées partielles

$$F(x, y, z, \ldots, t, \varpi, p, q, r, \ldots, s) = 0, \tag{1}$$

dans laquelle

$$p = D_x\varpi, \quad q = D_y\varpi, \quad r = D_z\varpi, \quad \ldots, \quad s = D_t\varpi, \tag{2}$$

c'est trouver pour

$$\varpi, \quad p, \quad q, \quad r, \quad \ldots, \quad s,$$

des fonctions de

$$x, \quad y, \quad z, \quad \ldots, \quad t,$$

qui vérifient simultanément la formule (1) et l'équation

$$d\varpi = p\,dx + q\,dy + r\,dz + \ldots + s\,dt. \tag{3}$$

Lorsque les n variables $x, y, z, \ldots, t$ restent indépendantes entre elles, l'équation (3) doit être vérifiée, quelles que soient leurs valeurs. Donc elle doit être vérifiée quand toutes ces valeurs, à l'exception d'une seule, deviennent constantes, c'est-à-dire qu'alors l'équation (3) entraîne les formules (2).

Supposons maintenant que les $n-1$ variables

$$x, \quad y, \quad z, \quad \ldots$$

deviennent fonctions de t et de constantes arbitraires. Les valeurs de

$$\varpi, \quad p, \quad q, \quad r, \quad \ldots, \quad s,$$

qui vérifient les formules (1) et (3), pourront elles-mêmes être considérées comme des fonctions de t et des constantes arbitraires dont il s'agit. Désignons, dans cette hypothèse, à l'aide de la caractéristique δ, une différentiation relative à une ou à plusieurs de ces constantes arbitraires, devenues variables, mais variant indépendamment de t. On tirera de l'équation (3)

$$d\,\delta\varpi = p\,d\,\delta x + q\,d\,\delta y + \ldots + dx\,\delta p + dy\,\delta q + \ldots + dt\,\delta s,$$

ou, ce qui revient au même,

$$d(\delta\varpi - p\,\delta x - q\,\delta y - \ldots) = dx\,\delta p + dy\,\delta q + \ldots + dt\,\delta s - dp\,\delta x - dq\,\delta y - \ldots.$$

Or, cette dernière équation se réduira simplement à une équation différentielle linéaire de la forme

$$d(\delta\varpi - p\,\delta x - q\,\delta y - r\,\delta z - \ldots) = \theta(\delta\varpi - p\,\delta x - q\,\delta y - r\,\delta z - \ldots)\,dt, \tag{4}$$

si l'on choisit le facteur θ de manière à vérifier la condition

$$\begin{aligned}(\theta p\,dt - dp)\,\delta x + (\theta q\,dt - dq)\,\delta y + (\theta r\,dt - dr)\,\delta z + \ldots - \theta\,dt\,\delta\varpi \\ + dx\,\delta p + dy\,\delta q + dz\,\delta r + \ldots + dt\,\delta s = 0.\end{aligned} \tag{5}$$

D'ailleurs, si l'on nomme

$$X, \quad Y, \quad Z, \quad \ldots, \quad T, \quad \Pi, \quad P, \quad Q, \quad R, \quad \ldots, \quad S$$

les dérivées partielles de la fonction

$$F(x, y, z, \ldots, t, \varpi, p, q, r, \ldots, s)$$

prises par rapport aux quantités

$$x, \quad y, \quad z, \quad \ldots, \quad t, \quad \varpi, \quad p, \quad q, \quad r, \quad \ldots, \quad s,$$

on tirera de l'équation (1), différentiée par rapport aux constantes arbitraires,

$$X\,\delta x + Y\,\delta y + Z\,\delta z + \ldots + \Pi\,\delta\varpi + P\,\delta p + Q\,\delta q + R\,\delta r + \ldots + S\,\delta s = 0; \tag{6}$$

et par suite, pour vérifier l'équation (5), il suffira d'assujettir

$$\theta, \quad x, \quad y, \quad z, \quad \ldots, \quad \varpi, \quad p, \quad q, \quad r, \quad \ldots, \quad s,$$

considérés comme fonctions de t, à vérifier la condition

$$(7)\qquad \frac{\theta p\,dt-dp}{\mathrm{X}}=\frac{\theta q\,dt-dq}{\mathrm{Y}}=\frac{\theta r\,dt-dr}{\mathrm{Z}}=\ldots=\frac{-\theta\,dt}{\Pi}$$
$$=\frac{dx}{\mathrm{P}}=\frac{dy}{\mathrm{Q}}=\frac{dz}{\mathrm{R}}=\ldots=\frac{dt}{\mathrm{S}}.$$

Or on tire de la formule (7)

$$(8)\qquad \theta=-\frac{\Pi}{\mathrm{S}},$$

puis de cette même formule, combinée avec l'équation (3),

$$(9)\qquad \frac{dx}{\mathrm{P}}=\frac{dy}{\mathrm{Q}}=\frac{dz}{\mathrm{R}}=\ldots=\frac{ds}{\mathrm{S}}=\frac{d\varpi}{\mathrm{P}p+\mathrm{Q}q+\mathrm{R}r+\ldots+\mathrm{S}s}$$
$$=\frac{dp}{-(\mathrm{X}+p\Pi)}=\frac{dq}{-(\mathrm{Y}+q\Pi)}=\frac{dr}{-(\mathrm{Z}+r\Pi)}=\ldots.$$

Pour passer immédiatement de la formule (7) à la formule (9), il suffit d'observer que les fractions égales entre elles sont encore égales à celles qu'on obtient quand on divise la somme des numérateurs de quelques-unes de ces fractions par la somme de leurs dénominateurs, et qu'on peut même, dans ces deux sommes, substituer aux deux termes de chaque fraction le produit de ces deux termes par un facteur arbitrairement choisi.

Concevons à présent que, s étant éliminé de la formule (9) à l'aide de l'équation (1), on intègre les $2n-1$ équations différentielles que comprend la formule (9). Leurs intégrales générales renfermeront $2n-1$ constantes arbitraires

$$\xi,\quad \eta,\quad \zeta,\quad \ldots,\quad \omega,\quad \varphi,\quad \chi,\quad \psi,\quad \ldots$$

qui pourront être censées représenter des valeurs particulières des variables

$$x,\quad y,\quad z,\quad \ldots,\quad \varpi,\quad p,\quad q,\quad r,\quad \ldots$$

correspondantes à une valeur donnée τ de la variable t; et ces intégrales elles-mêmes pourront être présentées sous les formes

$$(10)\qquad \begin{cases} \mathfrak{X}=\xi, & \mathfrak{Y}=\eta, \quad \mathfrak{Z}=\zeta, \quad \ldots, \quad \Omega=\omega, \\ \mathfrak{P}=\varphi, & \mathfrak{Q}=\chi, \quad \mathfrak{R}=\psi, \quad \ldots, \end{cases}$$

les lettres

$$\mathfrak{X},\quad \mathfrak{Y},\quad \mathfrak{Z},\quad \ldots,\quad \Omega,\quad \mathfrak{P},\quad \mathfrak{Q},\quad \mathfrak{R},\quad \ldots$$

désignant des fonctions déterminées de $x, y, z, \ldots, t, \varpi, p, q, r, \ldots$, qui ne renfermeront aucune des constantes arbitraires, et qui se réduiront respectivement à

$$x,\quad y,\quad z,\quad \ldots,\quad \varpi,\quad p,\quad q,\quad r,\quad \ldots,$$

pour la valeur τ de t, en sorte qu'on aura, pour $t=\tau$,

$$(11)\qquad \begin{cases} x=\xi, & y=\eta, \quad z=\zeta, \quad \ldots, \quad \varpi=\omega, \\ p=\varphi, & q=\chi, \quad r=\psi, \quad \ldots. \end{cases}$$

Lorsque

$$\theta,\quad x,\quad y,\quad z,\quad \ldots,\quad \varpi,\quad p,\quad q,\quad r,\quad \ldots$$

sont déterminés, en fonctions de t et des constantes arbitraires, par les formules (8) et (10), alors en posant, pour abréger,

$$(12)\qquad \Theta=e^{\int_\tau^t \theta\,dt},$$

et intégrant la formule (4), considérée comme une équation différentielle linéaire, on obtient, entre la valeur générale du polynome

$$\partial\varpi-p\,\partial x-q\,\partial y-r\,\partial z,\quad \ldots$$

et sa valeur initiale

$$\partial\omega-\varphi\,\partial\xi-\chi\,\partial\eta-\psi\,\partial\zeta,\quad \ldots,$$

correspondante à $t=\tau$, une relation exprimée par la formule

$$(13)\qquad \partial\varpi-p\,\partial x-q\,\partial y-r\,\partial z-\ldots=\Theta(\partial\omega-\varphi\,\partial\xi-\chi\,\partial\eta-\psi\,\partial\zeta-\ldots).$$

Jusqu'ici nous avons supposé que, dans les formules (10), les constantes arbitraires

$$\xi,\quad \eta,\quad \zeta,\quad \ldots,\quad \omega,\quad \varphi,\quad \chi,\quad \psi,\quad \ldots$$

restaient indépendantes les unes des autres. Supposons maintenant qu'elles se trouvent assujetties à vérifier certaines équations de condition

$$\lambda = 0, \quad \mu = 0, \quad \nu = 0, \quad \ldots, \tag{14}$$

dont les premiers membres

$$\lambda, \quad \mu, \quad \nu, \quad \ldots$$

représentent des fonctions données de

$$\xi, \quad \eta, \quad \zeta, \quad \ldots, \quad \omega, \quad \varphi, \quad \chi, \quad \psi, \quad \ldots.$$

Si ces équations de condition sont telles qu'on ait

$$\delta\omega = \varphi\,\delta\xi + \chi\,\delta\eta + \psi\,\delta\zeta + \ldots, \tag{15}$$

la formule (13) donnera généralement

$$\delta\varpi = p\,\delta x + q\,\delta y + r\,\delta z + \ldots; \tag{16}$$

en d'autres termes, pour que la différence

$$\delta\varpi - p\,\delta x - q\,\delta y - r\,\delta z - \ldots$$

s'évanouisse, il suffira généralement que la différence

$$\delta\omega - \varphi\,\delta\xi - \chi\,\delta\eta - \psi\,\delta\zeta - \ldots$$

se réduise à zéro. Observons d'ailleurs que, chacune des équations (14) étant de la forme

$$f(\xi, \eta, \zeta, \ldots, \omega, \varphi, \chi, \psi, \ldots) = 0,$$

si l'on en élimine les constantes arbitraires à l'aide des formules (10), on obtiendra une autre équation de la forme

$$f(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}, \mathfrak{Z}, \ldots, \Omega, \mathfrak{P}, \mathfrak{Q}, \mathfrak{R}, \ldots) = 0,$$

qui établira une relation entre les quantités variables

$$x, \quad y, \quad z, \quad \ldots, \quad t, \qquad \varpi, \quad p, \quad q, \quad r, \quad \ldots.$$

Concevons à présent que les équations de condition, c'est-à-dire les formules (14), soient en nombre égal à n. Si l'on en élimine

$$\xi, \quad \eta, \quad \zeta, \quad \ldots, \quad \omega, \qquad \varphi, \quad \chi, \quad \psi, \quad \ldots,$$

à l'aide des formules (10), elles se transformeront en n autres équations

$$\mathfrak{L} = 0, \quad \mathfrak{M} = 0, \quad \mathfrak{N} = 0, \quad \ldots, \tag{17}$$

qui ne renfermeront plus que

$$x, \quad y, \quad z, \quad \ldots, \quad t, \qquad \varpi, \quad p, \quad q, \quad r, \quad \ldots,$$

et pourront servir à déterminer

$$\varpi, \quad p, \quad q, \quad r, \quad \ldots$$

en fonction de

$$x, \quad y, \quad z, \quad \ldots, \quad t.$$

Voyons maintenant dans quels cas les valeurs de

$$\varpi, \quad p, \quad q, \quad r, \quad \ldots,$$

ainsi obtenues, et la valeur correspondante de s tirée de l'équation (1), vérifieront la formule (3).

Pour que les valeurs de

$$x, \quad y, \quad z, \quad \ldots, \quad \varpi, \qquad p, \quad q, \quad r, \quad \ldots, \quad s,$$

tirées des formules (1) et (10), et représentées par des fonctions déterminées de

$$t, \quad \xi, \quad \eta, \quad \zeta, \quad \ldots, \quad \omega, \qquad \varphi, \quad \chi, \quad \psi, \quad \ldots,$$

deviennent propres à vérifier les équations (17), il suffira que, dans ces valeurs, les constantes arbitraires

$$\xi, \quad \eta, \quad \zeta, \quad \ldots, \quad \omega, \qquad \varphi, \quad \chi, \quad \psi, \quad \ldots,$$

cessant d'être indépendantes les unes des autres et de la variable t, soient assujetties à vérifier les conditions (14). Mais alors la valeur du polynome

$$d\varpi - p\,dx - q\,dy - r\,dz - \ldots - s\,dt,$$

qui était nulle, en vertu de l'équation (3), se trouvera augmentée de la quantité

$$\delta\varpi - p\,\delta x - q\,\delta y - r\,\delta z - \ldots,$$

le signe δ indiquant une différentiation relative au système entier des constantes arbitraires. Donc, pour que l'équation (3) continue de subsister, il suffira que les équations de condition établies entre les constantes arbitraires, c'est-à-dire les équations (14), entraînent la formule (16), ou, ce qui revient au même, la formule (15). Donc, si les constantes arbitraires

$$\xi,\quad \eta,\quad \zeta,\quad \ldots,\quad \omega,\quad \varphi,\quad \chi,\quad \psi,\quad \ldots$$

sont assujetties à vérifier n équations qui entraînent la formule (15), l'équation (1), considérée comme une équation aux dérivées partielles du premier ordre, sera intégrée, c'est-à-dire vérifiée, en même temps que l'équation (3), par les valeurs de

$$\varpi,\quad p,\quad q,\quad r,\quad \ldots,$$

tirées des formules (17).

En résumé, par la méthode précédente, l'intégration de l'équation différentielle

$$d\varpi = p\,dx + q\,dy + r\,dz + \ldots + s\,dt,$$

dans laquelle les $2n+1$ variables

$$x,\quad y,\quad z,\quad \ldots,\quad t,\qquad \varpi,\quad p,\quad q,\quad r,\quad \ldots,\quad s$$

sont liées entre elles par la formule (1), se trouve ramenée à l'intégration de la seule équation différentielle

$$\partial\omega = \varphi\,\partial\xi + \chi\,\partial\eta + \psi\,\partial\zeta + \ldots,$$

qui ne renferme plus que $2n-1$ variables. D'ailleurs, en vertu de cette dernière équation, dont le second membre renferme les différentielles des seules variables

$$\xi,\quad \eta,\quad \zeta,\quad \ldots,$$

ω ne peut être qu'une fonction de ces variables, et rien n'empêche de supposer ces mêmes variables indépendantes. Or, dans cette supposition, la formule (15) donnera

$$(18)\qquad D_\xi\omega = \varphi,\qquad D_\eta\omega = \chi,\qquad D_\zeta\omega = \psi,\qquad \ldots.$$

Si, pour fixer les idées, on représente par

$$f(\xi, \eta, \zeta, \ldots)$$

la valeur de ω, $f(\xi, \eta, \zeta, \ldots)$ pourra être une fonction quelconque de $\xi, \eta, \zeta, \ldots$, et les formules (18) donneront

$$(19)\quad \left\{\begin{array}{c} \omega = f(\xi, \eta, \zeta, \ldots), \\ \varphi = D_\xi f(\xi, \eta, \zeta, \ldots),\quad \chi = D_\eta f(\xi, \eta, \zeta, \ldots),\quad \psi = D_\zeta f(\xi, \eta, \zeta, \ldots),\quad \ldots. \end{array}\right.$$

Ces dernières formules représenteront en effet les intégrales les plus générales possibles de l'équation différentielle

$$\partial\omega = \varphi\,\partial\xi + \chi\,\partial\eta + \psi\,\partial\zeta + \ldots.$$

Si l'on y substitue les valeurs de

$$\xi,\quad \eta,\quad \zeta,\quad \ldots,\quad \omega,\qquad \varphi,\quad \chi,\quad \psi,\quad \ldots,$$

tirées des formules (10), on obtiendra n autres équations

$$\mathcal{L} = 0,\qquad \mathcal{M} = 0,\qquad \mathcal{N} = 0,\qquad \ldots,$$

qui représenteront n intégrales de l'équation (3) jointe à la formule (1). Enfin, si entre ces n autres équations on élimine

$$p,\quad q,\quad r,\quad \ldots,$$

on obtiendra une équation définitive

$$(20)\qquad \mathcal{K} = 0,$$

qui renfermera seulement les variables

$$x,\quad y,\quad z,\quad \ldots,\quad t,\quad \varpi.$$

Donc cette équation définitive sera une intégrale de la formule (1), considérée comme une équation aux dérivées partielles. Elle en sera même l'intégrale générale, puisque la relation, établie par cette intégrale entre les n variables indépendantes

$$x,\quad y,\quad z,\quad \ldots,\quad t$$

et l'inconnue ϖ, dépendra de la fonction

$$\mathrm{f}(x, y, z, \ldots),$$

c'est-à-dire d'une fonction arbitraire de $n-1$ variables indépendantes.

Si l'on veut savoir à quoi se réduiront, pour $t=\tau$, les valeurs de

$$\varpi, \quad p, \quad q, \quad r, \quad \ldots,$$

tirées des formules

$$\mathfrak{L}=0, \qquad \mathfrak{M}=0, \qquad \mathfrak{N}=0, \qquad \ldots,$$

il suffira d'observer que, pour $t=\tau$, les formules (10) se réduisent aux formules (11), et que l'élimination des constantes arbitraires

$$\xi, \quad \eta, \quad \zeta, \quad \ldots, \quad \omega, \quad \varphi, \quad \chi, \quad \psi, \quad \ldots$$

entre les formules (11) et (19) fournit les équations

$$(21) \quad \begin{cases} \varpi=\mathrm{f}(x, y, z, \ldots), \\ p=\mathrm{D}_x \mathrm{f}(x, y, z, \ldots), \quad q=\mathrm{D}_y \mathrm{f}(x, y, z, \ldots), \quad r=\mathrm{D}_z \mathrm{f}(x, y, z, \ldots), \quad \ldots \end{cases}$$

Donc la valeur générale de ϖ, fournie par l'équation (20), sera précisément celle qui a la double propriété de vérifier, quel que soit t, l'équation (1) considérée comme une équation aux dérivées partielles, et, pour $t=\tau$, la condition

$$(22) \qquad \varpi=\mathrm{f}(x, y, z, \ldots).$$

Il est bon d'observer qu'étant donnée la valeur initiale $\mathrm{f}(x, y, z, \ldots)$ de l'inconnue ϖ, l'équation (22), combinée avec les formules (2), entraînera, pour $t=\tau$, toutes les formules (21), desquelles on déduira immédiatement les formules (19), en substituant aux lettres

$$x, \quad y, \quad z, \quad \ldots, \quad \varpi, \quad p, \quad q, \quad r, \quad \ldots,$$

les lettres

$$\xi, \quad \eta, \quad \zeta, \quad \ldots, \quad \omega, \quad \varphi, \quad \chi, \quad \psi, \quad \ldots$$

La même substitution suffira pour déduire la formule (15) de l'équation (3) réduite, pour une valeur constante τ de t, à la formule

$$d\varpi=p\,dx+q\,dy+r\,dz+\ldots.$$

Nous avons jusqu'à présent laissé la fonction $\mathrm{f}(x, y, z, \ldots)$, ou la valeur initiale de l'inconnue ϖ, entièrement arbitraire. Si cette valeur initiale était réduite à une fonction déterminée de ϖ et de n constantes arbitraires $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$, l'équation (20) représenterait non plus l'intégrale générale, mais ce que Lagrange appelle une *solution complète* de l'équation (1).

Enfin, au lieu de laisser les constantes arbitraires

$$\xi, \quad \eta, \quad \zeta, \quad \ldots$$

indépendantes l'une de l'autre, ce qui permet de passer de la formule (15) aux équations (18), on pourrait réduire séparément à zéro chaque terme de l'équation (15) en posant

$$\delta\xi=0, \qquad \delta\eta=0, \qquad \delta\zeta=0, \qquad \ldots, \qquad \delta\omega=0,$$

c'est-à-dire en supposant

$$\xi, \quad \eta, \quad \zeta, \quad \ldots, \quad \omega$$

indépendants des variables

$$x, \quad y, \quad z, \quad \ldots, \quad t, \qquad \varpi, \quad p, \quad q, \quad r, \quad \ldots.$$

Donc les seules équations

$$(23) \qquad \mathfrak{X}=\xi, \qquad \mathfrak{Y}=\eta, \qquad \mathfrak{Z}=\zeta, \qquad \ldots, \qquad \Omega=\omega$$

fourniront des valeurs de

$$\varpi, \quad p, \quad q, \quad r, \quad \ldots$$

qui, étant exprimées en fonction de

$$x, \quad y, \quad z, \quad \ldots, \quad t$$

et de

$$\xi, \quad \eta, \quad \zeta, \quad \ldots, \quad \omega,$$

vérifieront simultanément les équations (1) et (3), quand on continuera de considérer $\xi, \eta, \zeta, \ldots, \omega$ comme propres à représenter des constantes arbitraires. Si, entre les formules (23), on élimine

$$p, \quad q, \quad r, \quad \ldots,$$

on obtiendra une certaine équation

$$\mathrm{K} = 0 \tag{24}$$

très distincte de la formule (20), et qui représentera non plus une solution complète quelconque de l'équation (1), mais la solution complète dont j'ai signalé une propriété [1] remarquable dans les *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences* [2]. Cette solution complète sera encore celle dont l'existence peut être constatée à l'aide des formules établies dans mon Mémoire de 1819, pour les cas particuliers traités dans ce Mémoire, et a été démontrée, pour tous les cas, dans les Mémoires de M. Jacobi et de M. Binet.

Les calculs ci-dessus développés deviennent plus symétriques, lorsqu'aux divers rapports compris dans la formule (9) on joint le suivant :

$$\frac{ds}{-(\mathrm{T}+s\mathrm{II})},$$

qui équivaut lui-même à chacun des autres. Alors aux intégrales (10)

[1] Cette propriété consiste en ce que la solution complète dont il s'agit résulte de l'élimination de p, q, r, ... entre n intégrales particulières de l'équation caractéristique

$$\begin{gathered} \mathrm{P}\mathrm{D}_x 8 + \mathrm{Q}\mathrm{D}_y 8 + \mathrm{R}\mathrm{D}_z 8 + \ldots + \mathrm{S}\mathrm{D}_t 8 + (\mathrm{P}p + \mathrm{Q}q + \mathrm{R}r + \ldots + \mathrm{S}s)\mathrm{D}_\varpi 8 \\ -(\mathrm{X}+p\mathrm{II})\mathrm{D}_p 8 - (\mathrm{Y}+q\mathrm{II})\mathrm{D}_q 8 - (\mathrm{Z}+r\mathrm{II})\mathrm{D}_r 8 - \ldots = 0, \end{gathered}$$

correspondante au système des équations différentielles comprises dans la formule (9). En effet les formules (23) représentent n intégrales particulières de cette équation caractéristique, savoir : celles qu'on obtient lorsqu'on prend successivement chacune des quantités variables

$$x, \quad y, \quad z, \quad \ldots, \quad \varpi$$

pour valeur initiale de l'inconnue 8, c'est-à-dire, pour la valeur de 8 correspondante à une valeur donnée τ de la variable t, et qu'en conséquence on réduit successivement l'inconnue 8 à chacun des termes de la suite

$$\xi, \quad \eta, \quad \zeta, \quad \ldots, \quad \omega,$$

considéré comme fonction de $x, y, z, \ldots, t, \varpi, p, q, r, \ldots$.

[2] Voir : *Œuvres de Cauchy*, S. I, T. VI. Extraits 161, 162, 163.

se joint une nouvelle intégrale de la forme

$$\mathcal{S} = \varsigma,$$

les lettres $\mathcal{X}, \mathcal{Y}, \mathcal{Z}, \ldots, \Omega, \mathcal{P}, \mathcal{Q}, \mathcal{R}, \ldots, \mathcal{S}$ désignant des fonctions déterminées de $x, y, z, \ldots, t, \varpi, p, q, r, \ldots, s$, et ς une constante arbitraire liée avec les autres par la formule

$$\mathrm{F}(\xi, \eta, \zeta, \ldots, \tau, \omega, \varphi, \chi, \psi, \ldots, \varsigma) = 0.$$

Observons encore qu'on pourrait réduire à une constante donnée et non arbitraire, non plus la valeur particulière τ de t, mais la valeur particulière de l'une quelconque des autres variables indépendantes, ou même de l'inconnue ϖ, ou bien encore d'une autre variable liée à

$$x, \quad y, \quad z, \quad \ldots, \quad t, \quad \varpi$$

par une équation donnée. Dans ces diverses hypothèses, en opérant toujours de la même manière, on obtiendrait, au lieu de la formule (13), d'autres formules qui seraient toutes comprises, comme cas particuliers, dans la suivante :

$$\begin{aligned} &\partial\varpi - p\,\partial x - q\,\partial y - r\,\partial z - \ldots - s\,\partial t \\ &\quad = \Theta(\partial\omega - \varphi\,\partial\xi - \chi\,\partial\eta - \psi\,\partial\zeta - \ldots - \varsigma\,\partial\tau). \end{aligned} \tag{25}$$

Dans l'équation (25), tout comme dans l'équation (13), on peut supposer à volonté que le signe ∂ indique les différentiations relatives, soit à tout le système des constantes arbitraires, soit à une partie de ce système. D'ailleurs, si $\omega, \varphi, \chi, \psi, \ldots$ étant fonctions de $\xi, \eta, \zeta, \ldots$, la formule (13) se trouve une fois démontrée pour le cas où l'on fait varier une seule des quantités

$$\xi, \quad \eta, \quad \zeta, \quad \ldots,$$

elle se trouvera démontrée par cela même, pour le cas où l'on fera varier toutes ces quantités simultanément. Cette simple observation suffit pour prouver que la formule (13) pourrait se déduire des équations établies dans le paragraphe I [*voir* l'équation (15) du paragraphe I et les équations analogues de la page 289]. Il est vrai que, dans le paragraphe I, nous avons, d'une part, supposé les différentiations qu'indique ici la lettre δ, relatives aux seules constantes arbitraires

$$\xi,\quad \eta,\quad \zeta,\quad \ldots,$$

et, d'autre part, établi entre ces constantes arbitraires des relations qui réduisent à zéro le second membre de la formule (13). Mais, comme nous l'avons remarqué dans les notes placées au bas des pages 279 et 289, l'analyse dont nous nous étions servis fournit encore des équations semblables à celles que nous avions obtenues, lorsque les relations dont il s'agit disparaissent, et même lorsqu'on suppose les différentiations relatives à des constantes arbitraires distinctes des quantités ξ, η, ζ, ...

La formule (4) avait été donnée par M. Pfaff. En intégrant cette formule, on obtient l'équation (13) qui est digne de remarque, et qui pourrait se déduire, comme on vient de le voir, des formules comprises dans mon Mémoire de 1819. La formule (13) elle-même a été obtenue par M. Binet. Enfin, une formule analogue à l'équation (13), et à laquelle on parvient en posant, dans l'équation (21),

$$\delta\omega = 0,$$

savoir

$$(26)\qquad \begin{aligned} &\delta\varpi - (p\,\delta x + q\,\delta y + r\,\delta z + \ldots + s\,\delta t) \\ &= -\Theta(\varphi\,\delta\xi + \chi\,\delta\eta + \psi\,\delta\zeta + \ldots + \varsigma\,\delta\tau), \end{aligned}$$

a été donnée par M. Jacobi. Les principales différences qui existent entre l'analyse dont j'ai fait usage dans le Mémoire de 1819, et les calculs employés par MM. Jacobi et Binet, sont les suivantes. Je me suis servi de la formule (13), ou plutôt de celles qu'on en tire, en supposant successivement la caractéristique δ relative à chacune des constantes arbitraires ξ, η, ζ, ..., pour établir l'équation (20); tandis que MM. Jacobi et Binet se sont servis, l'un de la formule (26), l'autre de la formule (13), pour établir l'équation (24). De plus, dans la Note de M. Binet comme dans les calculs qui précèdent, les différentiations

sont relatives au système entier des constantes arbitraires, tandis que dans mon Mémoire de 1819 elles se rapportaient, pour chaque formule, à une seule des constantes arbitraires

$$\xi,\quad \eta,\quad \zeta,\quad \ldots.$$

Enfin, dans mon Mémoire de 1819, les constantes arbitraires qui représentent les valeurs initiales des diverses variables étaient, comme on vient encore de le faire, immédiatement introduites dans les calculs, et non substituées à d'autres constantes, comme dans les Mémoires des deux géomètres dont il s'agit.

MÉMOIRE SUR DIVERS THÉORÈMES

RELATIFS A LA

TRANSFORMATION DES COORDONNÉES RECTANGULAIRES.

I. — *Équations fondamentales.*

Nous allons, dans ce paragraphe, rappeler quelques équations fondamentales, desquelles se déduisent aisément les divers théorèmes que nous nous proposons d'établir.

Soient

$$x, \quad y, \quad z$$

les coordonnées rectilignes d'un point A, relatives à trois axes rectangulaires, et

$$\mathrm{x}, \quad \mathrm{y}, \quad \mathrm{z},$$

ce que deviennent ces coordonnées quand on fait tourner, d'une manière quelconque, le système de ces trois axes autour de l'origine. On aura, comme on sait,

$$(1) \qquad \begin{cases} \mathrm{x} = ax + by + cz, \\ \mathrm{y} = a'x + b'y + c'z, \\ \mathrm{z} = a''x + b''y + c''z, \end{cases}$$

les neuf coefficients

$$(2) \qquad \begin{cases} a, & b, & c, \\ a', & b', & c', \\ a'', & b'', & c'' \end{cases}$$

désignant les cosinus des angles formés par le demi-axe des x positives, ou des y positives, ou des z positives, avec les trois demi-axes des coordonnées positives x, y, z. D'ailleurs, six de ces neuf coefficients

pourront se déduire des trois autres, attendu qu'on doit avoir, quels que soient x, y, z,

$$(3) \qquad \mathrm{x}^2 + \mathrm{y}^2 + \mathrm{z}^2 = x^2 + y^2 + z^2,$$

et par suite

$$(4) \qquad \begin{cases} a^2 + a'^2 + a''^2 = 1, & b^2 + b'^2 + b''^2 = 1, & c^2 + c'^2 + c''^2 = 1, \\ bc + b'c' + b''c'' = 0, & ca + c'a' + c''a'' = 0, & ab + a'b' + a''b'' = 0. \end{cases}$$

De plus, on tirera des équations (1), jointes aux formules (4),

$$(5) \qquad \begin{cases} x = a\mathrm{x} + a'\mathrm{y} + a''\mathrm{z}, \\ y = b\mathrm{x} + b'\mathrm{y} + b''\mathrm{z}, \\ z = c\mathrm{x} + c'\mathrm{y} + c''\mathrm{z}, \end{cases}$$

puis de ces dernières, jointes à la formule (3),

$$(6) \qquad \begin{cases} a^2 + b^2 + c^2 = 1, & a'^2 + b'^2 + c'^2 = 1, & a''^2 + b''^2 + c''^2 = 1, \\ a'a'' + b'b'' + c'c'' = 0, & a''a + b''b + c''c = 0, & aa' + bb' + cc' = 0. \end{cases}$$

Il est bon de remarquer que les équations (6) donnent

$$(7) \qquad \begin{cases} aa + bb + cc = 1, & a'a + b'b + c'c = 0, & a''a + b''b + c''c = 0, \\ aa' + bb' + cc' = 0, & a'a' + b'b' + c'c' = 1, & a''a' + b''b' + c''c' = 0, \\ aa'' + bb'' + cc'' = 0, & a'a'' + b'b'' + c'c'' = 0, & a''a'' + b''b'' + c''c'' = 1. \end{cases}$$

Ces dernières équations, étant semblables aux formules (22) de la page 200 du présent Volume, entraineront des conséquences analogues, et l'on en conclura

$$(8) \qquad s^2 = 1,$$

s étant la *résultante* des quantités comprises dans le Tableau (2). D'autre part, on tirera de la formule (8)

$$s = \pm 1,$$

et puisque la valeur de la résultante s sera

$$s = \mathrm{S}(\pm ab'c'') = ab'c'' - ab''c' + a'b''c - a'bc'' + a''bc' - a''b'c,$$

on aura définitivement

$$(9) \qquad ab'c'' - ab''c' + a'b''c - a'bc'' + a''bc' - a''b'c = \pm 1.$$

On arrive à la même conclusion, en observant que les deux dernière des formules (6) donnent

$$(10) \qquad \begin{aligned} \frac{b'c'' - b''c'}{a} = \frac{c'a'' - c''a'}{b} = \frac{a'b'' - a''b'}{c} \\ = \frac{ab'c'' - ab''c' + bc'a'' - bc''a' + ca'b'' - ca''b'}{a^2 + b^2 + c^2} \\ = \pm \frac{[(b'c'' - b''c')^2 + (c'a'' - c''a')^2 + (a'b'' - a''b')^2]^{\frac{1}{2}}}{(a^2 + b^2 + c^2)^{\frac{1}{2}}}. \end{aligned}$$

Mais on a d'ailleurs, en vertu des formules (6),

$$a^2 + b^2 + c^2 = 1$$

et

$$\begin{aligned} (b'c'' - b''c')^2 + (c'a'' - c''a')^2 + (a'b'' - a''b')^2 \\ = (a'^2 + b'^2 + c'^2)(a''^2 + b''^2 + c''^2) - (a'a'' + b'b'' + c'c'')^2 = 1. \end{aligned}$$

Donc la formule (10) entrainera immédiatement l'équation (9). Enfin on arrivera encore à la formule (9) en observant que les neuf quantités comprises dans le Tableau (2) représentent les projections algébriques de trois longueurs égales à l'unité, mesurées sur les axes des x, y, z, et projetées sur les axes des x, y, z. En effet, le volume qui aura pour côtés ces trois longueurs se réduira simplement à l'unité, et, d'après ce qui a été dit dans les préliminaires des *Leçons sur les applications du Calcul infinitésimal à la Géométrie* (p. 29) [1], le volume dont il s'agit sera représenté au signe près par la résultante

$$ab'c'' - ab''c' + a'b''c - a'bc'' + a''bc' - a''b'c.$$

Ajoutons qu'en vertu des principes exposés dans ces préliminaires, la formule (9) devra se réduire à la suivante :

$$(11) \qquad ab'c'' - ab''c' + a'b''c - a'bc'' + a''bc' - a''b'c = 1.$$

Car nous avons supposé que, pour obtenir le second système d'axes

[1] *Œuvres de Cauchy*, S. II, T. V, p. 37.

coordonnés, il suffisait de faire tourner le premier autour de l'origine ; et, par suite de cette hypothèse, les mouvements de rotation, exécutés de droite à gauche dans les plans coordonnés autour des demi-axes des coordonnées positives, seront, pour l'un et l'autre systèmes d'axes, des mouvements *directs*, ou pour l'un et l'autre des mouvements *rétrogrades* [1]. Cela posé, la formule (10) donne

$$b'c'' - b''c' = a, \qquad c'a'' - c''a' = b, \qquad a'b'' - a''b' = c.$$

Donc les trois quantités a, b, c seront respectivement égales aux binomes qui multiplient ces trois quantités dans le premier membre de la formule (1). Cette proposition devant évidemment demeurer vraie dans le cas où l'on remplace

$$a, \quad b, \quad c$$

par

$$a', \quad b', \quad c'$$

ou par

$$a'', \quad b'', \quad c'',$$

il en résulte qu'on aura généralement, dans l'hypothèse admise,

$$(12) \qquad \left\{ \begin{array}{lll} b'c'' - b''c' = a, & b''c - bc'' = a', & bc' - b'c = a'', \\ c'a'' - c''a' = b, & c''a - ca'' = b', & ca' - c'a = b'', \\ a'b'' - a''b' = c, & a''b - ab'' = c', & ab' - a'b = c''. \end{array} \right.$$

Soient maintenant

$$x_{\prime}, \quad y_{\prime}, \quad z_{\prime}$$

et

$$\mathrm{x}_{\prime}, \quad \mathrm{y}_{\prime}, \quad \mathrm{z}_{\prime}$$

[1] Soit O l'origine des coordonnées; soient encore

OX, OY, OZ

les demi-axes de x, y et z positives, et supposons qu'un rayon vecteur mobile, en s'appliquant successivement sur chacun des plans coordonnés, fasse le tour de l'angle solide trièdre OXYZ. Le mouvement exécuté par ce rayon vecteur dans chacun des plans coordonnés sera ce que nous appelons un *mouvement de rotation direct*, si le rayon passe successivement de la position OX à la position OY, puis de celle-ci à la position OZ, pour revenir ensuite de cette dernière à la position OX. Le mouvement de rotation exécuté par le rayon vecteur dans chacun des plans coordonnés deviendrait *rétrograde* dans le cas contraire.

les coordonnées d'un nouveau point B, relatives au premier et au second système d'axes coordonnés. On aura

$$(13)\qquad \begin{cases} \mathrm{x}_{,} = a x_{,} + a y_{,} + c z_{,}, \\ \mathrm{y}_{,} = a' x_{,} + b' y_{,} + c' z_{,}, \\ \mathrm{z}_{,} = a'' x_{,} + b'' y_{,} + c'' z_{,}, \end{cases}$$

et des formules (13), jointes aux équations (1) et (4), on tirera

$$(14)\qquad \mathrm{x}\mathrm{x}_{,} + \mathrm{y}\mathrm{y}_{,} + \mathrm{z}\mathrm{z}_{,} = x x_{,} + y y_{,} + z z_{,}.$$

Donc, comme nous l'avons déjà remarqué (p. 104) (¹), *la transformation des coordonnées n'altère point la valeur de la somme*

$$x x_{,} + y y_{,} + z z_{,}.$$

Cette somme représente effectivement une quantité indépendante de la direction des axes coordonnés, savoir, le produit des rayons vecteurs OA, OB, menés de l'origine O des coordonnées aux points A et B, par le cosinus de l'angle que ces rayons vecteurs forment entre eux.

Dans le cas particulier où les deux points A, B se confondent l'un avec l'autre, l'équation (14) se réduit à la formule (3), dont chaque membre représente le carré du rayon vecteur OA mené de l'origine au point A.

On tire encore des équations (1) et (13), jointes aux formules (12),

$$(15)\qquad \begin{cases} \mathrm{y}\mathrm{z}_{,} - \mathrm{y}_{,}\mathrm{z} = a\,(y z_{,} - y_{,} z) + b\,(z x_{,} - z_{,} x) + c\,(x y_{,} - x_{,} y), \\ \mathrm{z}\mathrm{x}_{,} - \mathrm{z}_{,}\mathrm{x} = a'(y z_{,} - y_{,} z) + b'(z x_{,} - z_{,} x) + c'(x y_{,} - x_{,} y), \\ \mathrm{x}\mathrm{y}_{,} - \mathrm{x}_{,}\mathrm{y} = a''(y z_{,} - y_{,} z) + b''(z x_{,} - z_{,} x) + c''(x y_{,} - x_{,} y); \end{cases}$$

puis on en conclut

$$(16)\qquad \begin{aligned} &(\mathrm{y}\mathrm{z}_{,} - \mathrm{y}_{,}\mathrm{z})^2 + (\mathrm{z}\mathrm{x}_{,} - \mathrm{z}_{,}\mathrm{x})^2 + (\mathrm{x}\mathrm{y}_{,} - \mathrm{x}_{,}\mathrm{y})^2 \\ &\quad = (y z_{,} - y_{,} z)^2 + (z x_{,} - z_{,} x)^2 + (x y_{,} - x_{,} y)^2. \end{aligned}$$

Donc *la transformation des coordonnées n'altère pas la valeur de la somme*

$$(y z_{,} - y_{,} z)^2 + (z x_{,} - z_{,} x)^2 + (x y_{,} - x_{,} y)^2.$$

(¹) *Œuvres de Cauchy*, S. II, T. XI, p. 137.

Cette somme représente effectivement une quantité indépendante de la direction des axes coordonnés, savoir, le carré de la surface du parallélogramme qui a pour côtés les rayons vecteurs OA, OB; et d'ailleurs la formule (16) peut se déduire des équations (3) et (14), combinées avec l'équation identique

$$\begin{aligned} &(y z_{,} - y_{,} z)^2 + z x_{,} - z_{,} x)^2 + (x y_{,} - x_{,} y)^2 \\ &\quad = (x^2 + y^2 + z^2)(x_{,}^2 + y_{,}^2 + z_{,}^2) - (x x_{,} + y y_{,} + z z_{,})^2. \end{aligned}$$

Quant aux trois binomes

$$z y_{,} - z_{,} y, \quad x z_{,} - x_{,} z, \quad y x_{,} - y_{,} x,$$

ils représentent les projections algébriques de l'aire du parallélogramme dont il s'agit, successivement projetée sur les trois plans coordonnés des y, z, des z, x et des x, y, ou, ce qui revient au même, les projections algébriques d'une longueur mesurée sur une perpendiculaire au plan du parallélogramme, numériquement égale à l'aire de ce parallélogramme et successivement projetée sur les axes des x, des y et des z. Ajoutons qu'en partant de cette simple remarque, on pourrait immédiatement déduire les formules (15) des formules (1).

Concevons enfin que l'on considère, outre les points A et B, un troisième point C dont les coordonnées, relatives aux deux systèmes d'axes rectangulaires, soient respectivement

$$x_{,,}, \quad y_{,,}, \quad z_{,,}$$

et

$$\mathrm{x}_{,,}, \quad \mathrm{y}_{,,}, \quad \mathrm{z}_{,,}.$$

On aura encore

$$(17)\qquad \begin{cases} \mathrm{x}_{,,} = a x_{,,} + b y_{,,} + c z_{,,}, \\ \mathrm{y}_{,,} = a' x_{,,} + b' y_{,,} + c' z_{,,}, \\ \mathrm{z}_{,,} = a'' x_{,,} + b'' y_{,,} + c'' z_{,,}, \end{cases}$$

et des équations (17), jointes aux formules (15) et (3), on tirera

$$(18)\qquad \begin{aligned} &\mathrm{x}\mathrm{y}_{,}\mathrm{z}_{,,} - \mathrm{x}\mathrm{y}_{,,}\mathrm{z}_{,} + \mathrm{x}_{,}\mathrm{y}_{,,}\mathrm{z} - \mathrm{x}_{,}\mathrm{y}\mathrm{z}_{,,} + \mathrm{x}_{,,}\mathrm{y}\mathrm{z}_{,} - \mathrm{x}_{,,}\mathrm{y}_{,}\mathrm{z} \\ &\quad = x y_{,} z_{,,} - x y_{,,} z_{,} + x_{,} y_{,,} z - x_{,} y z_{,,} + x_{,,} y z_{,} - x_{,,} y_{,} z. \end{aligned}$$

Donc *la transformation des coordonnées n'altère point la valeur de la somme*

$$xy_1z_2 - xy_2z_1 + x_1y_2z - x_1yz_2 + x_2yz_1 - x_2y_1z.$$

Cette somme représente effectivement, au signe près, le volume du parallélépipède construit sur les trois rayons vecteurs OA, OB, OC; et d'ailleurs son signe dépend uniquement des positions respectives des trois demi-axes

$$\mathrm{OA},\quad \mathrm{OB},\quad \mathrm{OC}.$$

Elle sera positive si le mouvement de rotation, exécuté autour du demi-axe OC par un rayon vecteur mobile passant de la position OA à la position OB, est un mouvement de même espèce qu'un mouvement direct, par exemple, un mouvement de droite à gauche, dans le cas où un autre rayon mobile, doué d'un mouvement de rotation direct dans le plan des x, y, tournerait lui-même de droite à gauche autour de l'axe des z.

II. — *Conséquences diverses des formules obtenues dans le premier paragraphe.*

Considérons une grandeur qui puisse être représentée par une droite, par exemple une force ou le moment linéaire de cette force, une vitesse ou le moment linéaire de cette vitesse. Les projections algébriques de cette grandeur sur trois axes rectangulaires dépendront uniquement de la longueur de la droite et de sa direction. D'ailleurs, si la grandeur en question se confond avec un rayon vecteur r mené de l'origine des coordonnées à un certain point A, les projections algébriques de cette grandeur seront précisément les coordonnées du point A. Donc les relations qui subsistent entre les coordonnées rectangulaires d'un ou de plusieurs points rapportés à un ou à plusieurs systèmes d'axes coordonnés, subsisteront aussi entre les projections algébriques d'une ou de plusieurs grandeurs diverses projetées sur ces mêmes axes. Ainsi, en particulier, si l'on nomme

$$X,\quad Y,\quad Z$$

les projections algébriques d'une certaine force R sur trois axes rectangulaires x, y, z, et

$$\mathrm{X},\quad \mathrm{Y},\quad \mathrm{Z}$$

les projections algébriques de la même force sur trois autres axes rectangulaires des x, y, z; si, d'ailleurs, les neuf coefficients

$$a,\ b,\ c,\qquad a',\ b',\ c',\qquad a'',\ b'',\ c''$$

représentent, comme dans le paragraphe I, les cosinus des angles formés par les demi-axes des coordonnées positives x, y, z avec les demi-axes des coordonnées positives x, y, z; alors, à la place des formules (1), (3), (5) du paragraphe I, on obtiendra les suivantes :

$$(1)\qquad \begin{cases} \mathrm{X} = a\,X + b\,Y + c\,Z, \\ \mathrm{Y} = a'X + b'Y + c'Z, \\ \mathrm{Z} = a''X + b''Y + c''Z; \end{cases}$$

$$(2)\qquad \mathrm{X}^2 + \mathrm{Y}^2 + \mathrm{Z}^2 = X^2 + Y^2 + Z^2;$$

$$(3)\qquad \begin{cases} X = a\mathrm{X} + a'\mathrm{Y} + a''\mathrm{Z}, \\ Y = b\mathrm{X} + b'\mathrm{Y} + b''\mathrm{Z}, \\ Z = c\mathrm{X} + c'\mathrm{Y} + c''\mathrm{Z}. \end{cases}$$

Il y a plus : si, en supposant la force R appliquée au point A dont les coordonnées sont x, y, z ou x, y, z, on nomme

$$L,\quad M,\quad N$$

et

$$\mathrm{L},\quad \mathrm{M},\quad \mathrm{N}$$

les projections algébriques du moment linéaire de la force R, successivement projeté sur les axes des

$$x,\quad y,\quad z$$

et sur les axes des

$$\mathrm{x},\quad \mathrm{y},\quad \mathrm{z},$$

on aura encore, en vertu des équations (1), (3), (5) du paragraphe I,

$$(4)\qquad \left\{\begin{aligned} \mathrm{L} &= a\,L + b\,M + c\,N,\\ \mathrm{M} &= a'L + b'M + c'N,\\ \mathrm{N} &= a''L + b''M + c''N; \end{aligned}\right.$$

$$(5)\qquad \mathrm{L}^2 + \mathrm{M}^2 + \mathrm{N}^2 = L^2 + M^2 + N^2;$$

$$(6)\qquad \left\{\begin{aligned} L &= a\mathrm{L} + a'\mathrm{M} + a''\mathrm{N},\\ M &= b\mathrm{L} + b'\mathrm{M} + b''\mathrm{N},\\ N &= c\mathrm{L} + c'\mathrm{M} + c''\mathrm{N}. \end{aligned}\right.$$

Ajoutons que les équations (4) et (6) pourraient elles-mêmes se déduire des formules (15) du paragraphe I. Effectivement, pour obtenir en particulier les équations (4), il suffira de remplacer, dans les formules (15) du paragraphe I, les projections algébriques

$$\mathrm{x}_{\prime},\ \mathrm{y}_{\prime},\ \mathrm{z}_{\prime}\quad \text{ou}\quad x_{\prime},\ y_{\prime},\ z_{\prime}$$

de la distance $r_{\prime}$ comprise entre l'origine des coordonnées et un certain point B, par les projections algébriques

$$\mathrm{X},\ \mathrm{Y},\ \mathrm{Z}\quad \text{ou}\quad X,\ Y,\ Z$$

de la force R, puis d'avoir égard aux six formules

$$(7)\qquad \left\{\begin{aligned} &L = yZ - zY, && M = zX - xZ, && N = xY - yX,\\ &\mathrm{L} = \mathrm{y}\mathrm{Z} - \mathrm{z}\mathrm{Y}, && \mathrm{M} = \mathrm{z}\mathrm{X} - \mathrm{x}\mathrm{Z}, && \mathrm{N} = \mathrm{x}\mathrm{Y} - \mathrm{y}\mathrm{X}. \end{aligned}\right.$$

D'ailleurs les formules (4), une fois établies, entrainent immédiatement les formules (5) et (6), dont la première peut s'écrire comme il suit :

$$(8)\qquad \begin{aligned} &(\mathrm{y}\mathrm{Z} - \mathrm{z}\mathrm{Y})^2 + (\mathrm{z}\mathrm{X} - \mathrm{x}\mathrm{Z})^2 + (\mathrm{x}\mathrm{Y} - \mathrm{y}\mathrm{X})^2\\ &= (yZ - zY)^2 + (zX - xZ)^2 + (xY - yX)^2. \end{aligned}$$

On peut remarquer encore que chaque membre de la formule (2) représente le carré de la force R, et chaque membre de la formule (5)

ou (8) le carré de son moment linéaire. Donc, si l'on nomme K ce moment linéaire, on aura

$$(9)\qquad K^2 = (yZ - zY)^2 + (zX - xZ)^2 + (xY - yX)^2$$

ou, ce qui revient au même,

$$(10)\qquad K^2 = (x^2 + y^2 + z^2)(X^2 + Y^2 + Z^2) - (xX + yY + zZ)^2.$$

D'ailleurs on déduit sans peine l'équation (8) de la formule (10), jointe à l'équation (2) et à la suivante,

$$(11)\qquad \mathrm{x}\mathrm{X} + \mathrm{y}\mathrm{Y} + \mathrm{z}\mathrm{Z} = xX + yY + zZ,$$

à laquelle on parvient immédiatement en remplaçant les projections algébriques de la distance $r_{\prime}$ par les projections algébriques de la force R, dans l'équation (14) du paragraphe I.

Supposons maintenant que, le point matériel A étant mobile, on désigne par

$$u,\ v,\ w$$

et par

$$\mathrm{u},\ \mathrm{v},\ \mathrm{w}$$

les projections algébriques de la vitesse ω de ce point successivement projetée sur les axes des

$$x,\ y,\ z,$$

et sur les axes des x, y, z ; les équations (1), (2), (3), (4), (5), (6), (8) et (11) continueront évidemment de subsister quand on y remplacera les projections algébriques de la force R, ou de son moment linéaire, par les projections algébriques correspondantes de la vitesse ω ou de son moment linéaire. D'ailleurs les projections algébriques du moment linéaire de la vitesse ω, successivement projeté sur les axes des x, y, z et sur les axes des x, y, z, seront évidemment

$$\begin{aligned} &yw - zv, && zu - xw, && xv - yu,\\ &\mathrm{y}\mathrm{w} - \mathrm{z}\mathrm{v}, && \mathrm{z}\mathrm{u} - \mathrm{x}\mathrm{w}, && \mathrm{x}\mathrm{v} - \mathrm{y}\mathrm{u}. \end{aligned}$$

Cela posé, les formules (1), (2), (3), (4), (8) et (11) donneront

$$(12)\qquad \left\{\begin{aligned} \mathrm{u} &= a u + b v + c w,\\ \mathrm{v} &= a' u + b' v + c' w,\\ \mathrm{w} &= a'' u + b'' v + c'' w; \end{aligned}\right.$$

$$(13)\qquad \mathrm{u}^2 + \mathrm{v}^2 + \mathrm{w}^2 = u^2 + v^2 + w^2;$$

$$(14)\qquad \left\{\begin{aligned} u &= a\mathrm{u} + a'\mathrm{v} + a''\mathrm{w},\\ v &= b\mathrm{u} + b'\mathrm{v} + b''\mathrm{w},\\ w &= c\mathrm{u} + c'\mathrm{v} + c''\mathrm{w}; \end{aligned}\right.$$

$$(15)\qquad \left\{\begin{aligned} \mathrm{yw} - \mathrm{zv} &= a\,(yw - zv) + b\,(zu - xw) + c\,(xv - yu),\\ \mathrm{zu} - \mathrm{xw} &= a'(yw - zv) + b'(zu - xw) + c'(xv - yu),\\ \mathrm{xv} - \mathrm{yu} &= a''(yw - zv) + b''(zu - xw) + c''(xv - yu); \end{aligned}\right.$$

$$(16)\qquad \begin{aligned} &(\mathrm{yw} - \mathrm{zv})^2 + (\mathrm{zu} - \mathrm{xw})^2 + (\mathrm{xv} - \mathrm{yu})^2\\ &= (zw - yu)^2 + (zu - xw)^2 + (xv - yu); \end{aligned}$$

$$(17)\qquad \mathrm{xu} + \mathrm{yv} + \mathrm{zw} = xu + yv + zw.$$

Concevons maintenant que l'on considère un système de points matériels. Dans ce système, les projections algébriques u, v, w, ou u, v, w de la vitesse d'un point matériel $\mathfrak{m}$, pourront être regardées comme fonctions des trois coordonnées initiales x, y, z ou x, y, z de ce même point, et différentiées par rapport à ces coordonnées. D'ailleurs, en vertu des équations (1) et (5) du paragraphe II, on aura

$$(18)\qquad \left\{\begin{aligned} \mathrm{D_x} &= a\,\mathrm{D}_x + b\,\mathrm{D}_y + c\,\mathrm{D}_z,\\ \mathrm{D_y} &= a'\,\mathrm{D}_x + b'\,\mathrm{D}_y + c'\,\mathrm{D}_z,\\ \mathrm{D_z} &= a''\,\mathrm{D}_x + b''\,\mathrm{D}_y + c''\,\mathrm{D}_z; \end{aligned}\right.$$

$$(19)\qquad \left\{\begin{aligned} \mathrm{D}_x &= a\,\mathrm{D_x} + a'\,\mathrm{D_y} + a''\,\mathrm{D_z},\\ \mathrm{D}_y &= b\,\mathrm{D_x} + b'\,\mathrm{D_y} + b''\,\mathrm{D_z},\\ \mathrm{D}_z &= c\,\mathrm{D_x} + c'\,\mathrm{D_y} + c''\,\mathrm{D_z}. \end{aligned}\right.$$

La forme des équations (18) et (19) étant semblable à celle des équations (1), (5) du paragraphe II, et les dernières se déduisant des

premières par la seule substitution des caractéristiques

$$\mathrm{D}_x,\ \mathrm{D}_y,\ \mathrm{D}_z,\qquad \mathrm{D_x},\ \mathrm{D_y},\ \mathrm{D_z}$$

aux coordonnées

$$x,\ y,\ z,\qquad \mathrm{x},\ \mathrm{y},\ \mathrm{z},$$

il en résulte que les formules (15), (16), (17) continueront de subsister quand on y remplacera chaque coordonnée par la caractéristique qui indique une différentiation relative à cette même coordonnée. On aura donc encore

$$(20)\qquad \left\{\begin{aligned} \mathrm{D_y w} - \mathrm{D_z v} &= a\,(\mathrm{D}_y w - \mathrm{D}_z v) + b\,(\mathrm{D}_z u - \mathrm{D}_x w) + c\,(\mathrm{D}_x v - \mathrm{D}_y u),\\ \mathrm{D_z u} - \mathrm{D_x w} &= a'(\mathrm{D}_y w - \mathrm{D}_z v) + b'(\mathrm{D}_z u - \mathrm{D}_x w) + c'(\mathrm{D}_x v - \mathrm{D}_y u),\\ \mathrm{D_x v} - \mathrm{D_y u} &= a''(\mathrm{D}_y w - \mathrm{D}_z v) + b''(\mathrm{D}_z u - \mathrm{D}_x w) + c''(\mathrm{D}_x v - \mathrm{D}_y u); \end{aligned}\right.$$

$$(21)\qquad \begin{aligned} &(\mathrm{D_y w} - \mathrm{D_z v})^2 + (\mathrm{D_z u} - \mathrm{D_x w})^2 + (\mathrm{D_x v} - \mathrm{D_y u})^2\\ &= (\mathrm{D}_y w - \mathrm{D}_z v)^2 + (\mathrm{D}_z u - \mathrm{D}_x w)^2 + (\mathrm{D}_x v - \mathrm{D}_y u)^2; \end{aligned}$$

$$(22)\qquad \mathrm{D_x u} + \mathrm{D_y v} + \mathrm{D_z w} = \mathrm{D}_x u + \mathrm{D}_y v + \mathrm{D}_z w.$$

Les équations (20), (21) et (22) continueraient encore d'exister, si l'on y substituait aux projections algébriques

$$u,\ v,\ w\quad \text{ou}\quad \mathrm{u},\ \mathrm{v},\ \mathrm{w}$$

de la vitesse ω d'un point matériel $\mathfrak{m}$ les projections algébriques d'une autre grandeur relative au même point, et représentée par une portion de ligne droite, par exemple, les projections algébriques du déplacement absolu de ce point sur les axes des x, y, z ou des x, y, z. Alors, les formules (20) et (22) se trouveraient remplacées par quatre autres formules, dont les trois premières ont été obtenues par M. Mac Cullagh. Si, pour fixer les idées, on nommait

$$\xi,\ \eta,\ \zeta$$

les projections algébriques du déplacement absolu du point matériel $\mathfrak{m}$ sur les axes des

$$x,\ y,\ z,$$

les trois premières formules établiraient, entre les trois différences

$$D_y\zeta - D_z\eta, \quad D_z\xi - D_x\zeta, \quad D_x\eta - D_y\xi \tag{23}$$

et les valeurs nouvelles que prennent ces différences quand on passe d'un des systèmes de coordonnées à l'autre, des relations semblables à celles qu'indiquent les équations (1) et (5) du paragraphe I. Quant à la quatrième formule, elle exprimerait simplement que, dans le système de points matériels donné, la dilatation υ du volume, déterminée par l'équation

$$\upsilon = D_x\xi + D_y\eta + D_z\zeta, \tag{24}$$

conserve une valeur indépendante de la direction des axes coordonnés.

Lorsqu'aux axes des x, y, z on substitue les axes des x, y, z, alors des équations semblables aux formules (1) du paragraphe I servent, pour le système de points matériels donné, non seulement à déduire des trois déplacements

$$\xi, \quad \eta, \quad \zeta$$

d'une molécule m, mesurés parallèlement aux axes des x, y, z, trois autres déplacements mesurés parallèlement aux axes des x, y, z, et représentés par les sommes

$$a\xi + b\eta + c\zeta, \qquad a'\xi + b'\eta + c'\zeta, \qquad a''\xi + b''\eta + c''\zeta,$$

mais encore à déduire des déplacements symboliques

$$\bar\xi, \quad \bar\eta, \quad \bar\zeta$$

correspondants aux axes des x, y, z, trois autres déplacements symboliques correspondants aux axes des x, y, z, et représentés par les trois sommes

$$a\bar\xi + b\bar\eta + c\bar\zeta, \quad a'\bar\xi + b'\bar\eta + c'\bar\zeta, \quad a''\bar\xi + b''\bar\eta + c''\bar\zeta.$$

Il suit immédiatement de cette remarque que les mêmes formules, déduites de la transformation des coordonnées, s'appliquent d'une part aux déplacements effectifs, de l'autre aux déplacements symboliques.

Ainsi, en particulier, deux formules analogues à l'équation (3) du paragraphe I exprimeront que les deux trinomes

$$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2, \quad \bar\xi^2 + \bar\eta^2 + \bar\zeta^2$$

sont tous deux indépendants de la direction des axes; et, en effet, eu égard aux conditions (4) du paragraphe I, on aura non seulement

$$(a\xi + b\eta + c\zeta)^2 + (a'\xi + b'\eta + c'\zeta)^2 + (a''\xi + b''\eta + c''\zeta)^2 = \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2,$$

mais encore

$$(a\bar\xi + b\bar\eta + c\bar\zeta)^2 + (a'\bar\xi + b'\bar\eta + c'\bar\zeta)^2 + (a''\bar\xi + b''\bar\eta + c''\bar\zeta)^2 = \bar\xi^2 + \bar\eta^2 + \bar\zeta^2.$$

Pareillement, si l'on pose

$$\bar\upsilon = D_x\bar\xi + D_y\bar\eta + D_z\bar\zeta, \tag{25}$$

$\bar\upsilon$, ou ce qu'on peut appeler la *dilatation symbolique du volume*, sera indépendante, aussi bien que υ, de la direction des axes. On peut donc énoncer la proposition suivante :

THÉORÈME I. — *Dans un système de points matériels, la somme des carrés des déplacements symboliques d'un point quelconque offre, tout comme la dilatation symbolique du volume, une valeur indépendante de la direction des axes coordonnés, supposés rectangulaires.*

On pourrait arriver encore à divers résultats dignes de remarque, en appliquant les principes ci-dessus exposés à la transformation d'expressions réelles ou imaginaires dont chacune renfermerait ou plusieurs dérivées du premier ordre, ou même des dérivées d'un ordre supérieur au premier.

Ainsi, en particulier, si l'on désigne par

$$p, \quad q, \quad r, \quad \ldots$$

diverses quantités qui varient avec les coordonnées x, y, z, et par suite aussi avec les coordonnées x, y, z, les calculs à l'aide desquels nous avons obtenu les équations (14), (15), (16), (18) du paragraphe I nous conduiront pareillement aux formules

$$(26)\qquad \mathrm{D_x}p\,\mathrm{D_x}q + \mathrm{D_y}p\,\mathrm{D_y}q + \mathrm{D_z}p\,\mathrm{D_z}q = \mathrm{D}_xp\,\mathrm{D}_xq + \mathrm{D}_yp\,\mathrm{D}_yq + \mathrm{D}_zp\,\mathrm{D}_zq,$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{D_y}p\,\mathrm{D_z}q - \mathrm{D_z}p\,\mathrm{D_y}q &= a\,(\mathrm{D}_yp\,\mathrm{D}_zq - \mathrm{D}_zp\,\mathrm{D}_yq) + b\,(\mathrm{D}_zp\,\mathrm{D}_xq - \mathrm{D}_xp\,\mathrm{D}_zq) + c\,(\mathrm{D}_xp\,\mathrm{D}_yq - \mathrm{D}_yp\,\mathrm{D}_xq),\\
\mathrm{D_z}p\,\mathrm{D_x}q - \mathrm{D_x}p\,\mathrm{D_z}q &= a'(\mathrm{D}_yp\,\mathrm{D}_zq - \mathrm{D}_zp\,\mathrm{D}_yq) + b'(\mathrm{D}_zp\,\mathrm{D}_xq - \mathrm{D}_xp\,\mathrm{D}_zq) + c'(\mathrm{D}_xp\,\mathrm{D}_yq - \mathrm{D}_yp\,\mathrm{D}_xq),\\
\mathrm{D_x}p\,\mathrm{D_y}q - \mathrm{D_y}p\,\mathrm{D_x}q &= a''(\mathrm{D}_yp\,\mathrm{D}_zq - \mathrm{D}_zp\,\mathrm{D}_yq) + b''(\mathrm{D}_zp\,\mathrm{D}_xq - \mathrm{D}_xp\,\mathrm{D}_zq) + c''(\mathrm{D}_xp\,\mathrm{D}_yq - \mathrm{D}_yp\,\mathrm{D}_xq);
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&(\mathrm{D_y}p\,\mathrm{D_z}q - \mathrm{D_z}p\,\mathrm{D_y}q)^2 + (\mathrm{D_z}p\,\mathrm{D_x}q - \mathrm{D_x}p\,\mathrm{D_z}q)^2 + (\mathrm{D_x}p\,\mathrm{D_y}q - \mathrm{D_y}p\,\mathrm{D_x}q)^2\\
&= (\mathrm{D}_yp\,\mathrm{D}_zq - \mathrm{D}_zp\,\mathrm{D}_yq)^2 + (\mathrm{D}_zp\,\mathrm{D}_xq - \mathrm{D}_xp\,\mathrm{D}_zq)^2 + (\mathrm{D}_xp\,\mathrm{D}_yq - \mathrm{D}_yp\,\mathrm{D}_xq)^2;
\end{aligned}$$

$$(27)\qquad S[\pm\,\mathrm{D_x}p\,\mathrm{D_y}q\,\mathrm{D_z}r] = S[\pm\,\mathrm{D}_xp\,\mathrm{D}_yq\,\mathrm{D}_zr].$$

La dernière équation renferme un théorème qu'on peut énoncer comme il suit :

THÉORÈME II. — *Étant données trois fonctions quelconques de trois coordonnées rectangulaires x, y, z, la résultante formée avec les neuf dérivées de ces trois fonctions, c'est-à-dire avec les neuf quantités*

$$\begin{matrix}
\mathrm{D}_xp, & \mathrm{D}_yp, & \mathrm{D}_zp,\\
\mathrm{D}_xq, & \mathrm{D}_yq, & \mathrm{D}_zq,\\
\mathrm{D}_xr, & \mathrm{D}_yr, & \mathrm{D}_zr,
\end{matrix}$$

offrira une valeur indépendante de la direction des axes coordonnés.

Enfin, si l'on désigne par 8 une fonction quelconque de x, y, z, on tirera des formules (18) ou (19), non seulement

$$(28)\qquad (\mathrm{D_x}8)^2 + (\mathrm{D_y}8)^2 + (\mathrm{D_z}8)^2 = (\mathrm{D}_x8)^2 + (\mathrm{D}_y8)^2 + (\mathrm{D}_z8)^2,$$

mais encore

$$(29)\qquad \mathrm{D_x^2} + \mathrm{D_y^2} + \mathrm{D_z^2} = \mathrm{D}_x^2 + \mathrm{D}_y^2 + \mathrm{D}_z^2,$$

et, par suite,

$$(30)\qquad \mathrm{D_x^2}8 + \mathrm{D_y^2}8 + \mathrm{D_z^2}8 = \mathrm{D}_x^2 8 + \mathrm{D}_y^2 8 + \mathrm{D}_z^2 8.$$

On peut donc énoncer la proposition suivante :

THÉORÈME III. — *Si une fonction de trois coordonnées rectangulaires x, y, z est différentiée deux fois de suite par rapport à chacune de ces coordonnées, la somme des carrés des trois dérivées du premier ordre, et la somme des trois dérivées du second ordre, offriront des valeurs indépendantes de la direction des axes coordonnés.*

Cette dernière proposition était déjà connue. On la trouve énoncée dans un Mémoire de M. Lamé, que renferme le XXIII[e] cahier du *Journal de l'École Polytechnique* (p. 215). La racine du trinome

$$(\mathrm{D}_x8)^2 + (\mathrm{D}_y8)^2 + (\mathrm{D}_z8)^2$$

et la somme

$$\mathrm{D}_x^2 8 + \mathrm{D}_y^2 8 + \mathrm{D}_z^2 8$$

sont précisément ce que l'auteur du Mémoire appelle les *paramètres différentiels*, du premier et du second ordre, de la fonction 8.

NOTE SUR QUELQUES THÉORÈMES

RELATIFS A DES

SOMMES D'EXPONENTIELLES.

THÉORÈME I. — *Soit*

$$S = A e^{ax} + B e^{bx} + C e^{cx} + \ldots + G e^{gx} + H e^{hx} \tag{1}$$

une somme composée d'un nombre fini de termes dont chacun soit le produit de deux facteurs, l'un constant, l'autre variable avec x, le facteur variable étant une exponentielle népérienne dont l'exposant soit proportionnel à x, et chacune des constantes

$$A,\ B,\ C,\ \ldots,\ G,\ H, \quad a,\ b,\ c,\ \ldots,\ g,\ h$$

pouvant être réelle ou imaginaire. Si, les coefficients $a, b, c, \ldots, g, h$ étant tous différents les uns des autres, l'équation

$$S = 0 \tag{2}$$

se vérifie, quelle que soit la variable x, ou même seulement pour toutes les valeurs de x voisines d'une valeur donnée, cette équation entraînera les suivantes :

$$A = 0, \quad B = 0, \quad C = 0, \quad \ldots, \quad G = 0, \quad H = 0. \tag{3}$$

Démonstration. — En vertu de la formule (1), l'équation (2) se réduit à la suivante :

$$A e^{ax} + B e^{bx} + C e^{cx} + \ldots + G e^{gx} + H e^{hx} = 0. \tag{4}$$

Or, on tire de cette dernière : 1° en divisant les deux membres par l'ex-

ponentielle e^{ax}, et différentiant par rapport à x,

$$B(b-a)e^{(b-a)x} + C(c-a)e^{(c-a)x} + \ldots + G(g-a)e^{(g-a)x} + H(h-a)e^{(h-a)x} = 0;$$

2° en divisant les deux nouveaux membres par l'exponentielle $e^{(b-a)x}$, et différentiant par rapport à x,

$$\begin{aligned} &C(c-a)(c-b)e^{(c-b)x} + \ldots \\ &\quad + G(g-a)(g-b)e^{(g-b)x} + H(h-a)(h-b)e^{(h-b)x} = 0, \end{aligned}$$

etc. En continuant de la même manière, c'est-à-dire en divisant les deux membres de chaque nouvelle équation par l'exponentielle renfermée dans le premier terme, et différentiant ensuite par rapport à x, on arrivera définitivement à la formule

$$H(h-a)(h-b)(h-c)\ldots(h-g)e^{(h-g)x} = 0. \tag{5}$$

Cela posé, si, les coefficients

$$a,\ b,\ c,\ \ldots,\ g,\ h$$

étant tous différents les uns des autres, l'équation (4) subsiste quelle que soit x, ou du moins pour toutes les valeurs de x voisines d'une valeur donnée, on pourra en dire autant de l'équation (5); et, comme alors chacun des facteurs

$$h-a,\ h-b,\ h-c,\ \ldots,\ h-g,\ e^{(h-g)x}$$

différera de zéro, l'équation (5) entraînera la suivante :

$$H = 0.$$

Donc, dans l'hypothèse admise, l'équation (2) ou (4) entraînera la dernière des formules (3), c'est-à-dire la réduction du coefficient de la dernière exponentielle, et par conséquent du dernier terme de la somme S, à zéro. D'ailleurs les termes qui composent la somme S pouvant être rangés dans un ordre quelconque, on peut prendre pour dernier terme l'un quelconque d'entre eux. Donc, dans l'hypothèse admise, l'évanouissement de la somme S entraînera l'évanouissement de chacun de ses termes, et par conséquent le système des équations (3).

Corollaire. — Le théorème précédent, dont nous avons donné une autre démonstration dans le premier Volume de cet Ouvrage (p. 158), subsiste évidemment lors même que l'un des coefficients

$$a, \quad b, \quad c, \quad \ldots, \quad g, \quad h,$$

par exemple le coefficient a, se réduit à zéro, et l'exponentielle e^{ax} à l'unité; mais alors le premier terme de la somme S se réduit à une constante A. On peut donc énoncer encore la proposition suivante :

Théorème II. — *Nommons* S *une somme de la forme*

$$S = A + B e^{bx} + C e^{cx} + \ldots + G e^{gx} + H e^{hx}, \tag{6}$$

c'est-à-dire une somme composée d'un nombre fini de termes dont un seul A *soit constant, chacun des autres étant le produit d'un facteur constant par une exponentielle népérienne dont l'exposant soit proportionnel à x. Si les coefficients de la variable x, dans les diverses exponentielles, sont tous différents les uns des autres, la somme* S *ne pourra s'évanouir, pour une valeur quelconque de x, ou même pour toutes les valeurs de x voisines d'une valeur donnée, sans que chacun de ses termes s'évanouisse. Donc, si les constantes*

$$b, \quad c, \quad \ldots, \quad g, \quad h$$

sont toutes différentes les unes des autres et différentes de zéro, l'équation

$$A + B e^{bx} + C e^{cx} + \ldots + G e^{gx} + H e^{hx} = 0$$

entraînera chacune des suivantes :

$$A = 0, \quad B = 0, \quad C = 0, \quad \ldots, \quad G = 0, \quad H = 0.$$

Corollaire. — Nommons s une nouvelle somme qui ne diffère de la première S qu'en raison des valeurs attribuées aux coefficients des exponentielles, en sorte qu'on ait

$$s = \mathcal{A} + \mathcal{B} e^{bx} + \mathcal{C} e^{cx} + \ldots + \mathcal{G} e^{gx} + \mathcal{H} e^{hx}. \tag{7}$$

On tirera des équations (6) et (7)

$$S - s = A - \mathcal{A} + (B - \mathcal{B}) e^{bx} + (C - \mathcal{C}) e^{cx} + \ldots + (G - \mathcal{G}) e^{gx} + (H - \mathcal{H}) e^{hx}.$$

Cela posé, on conclura immédiatement du théorème III que, si les coefficients

$$b, \quad c, \quad \ldots, \quad g, \quad h$$

diffèrent tous les uns des autres et de zéro, l'équation

$$S - s = 0$$

ne pourra subsister pour toutes les valeurs de x voisines d'une valeur donnée, sans entraîner les formules

$$A = \mathcal{A}, \quad B = \mathcal{B}, \quad C = \mathcal{C}, \quad \ldots, \quad G = \mathcal{G}, \quad H = \mathcal{H}.$$

En conséquence, on pourra énoncer la proposition suivante :

Théorème III. — *Si, les constantes*

$$b, \quad c, \quad \ldots, \quad g, \quad h$$

étant toutes différentes les unes des autres et différentes de zéro, deux sommes S, s *de la forme*

$$\left\{\begin{array}{l} S = A + B e^{bx} + C e^{cx} + \ldots + G e^{gx} + H e^{hx}, \\ s = \mathcal{A} + \mathcal{B} e^{bx} + \mathcal{C} e^{cx} + \ldots + \mathcal{G} e^{gx} + \mathcal{H} e^{hx}, \end{array}\right. \tag{8}$$

sont égales entre elles quelle que soit x, ou seulement pour toutes les valeurs de x voisines d'une valeur donnée, les termes correspondants de ces deux sommes seront égaux, et par suite on aura

$$A = \mathcal{A}, \quad B = \mathcal{B}, \quad C = \mathcal{C}, \quad \ldots, \quad G = \mathcal{G}, \quad H = \mathcal{H}. \tag{9}$$

Corollaire. — Si les constantes

$$\mathcal{B}, \quad \mathcal{C}, \quad \ldots, \quad \mathcal{G}, \quad \mathcal{H}$$

se réduisent à zéro, on obtiendra, au lieu du théorème III, le suivant :

Théorème IV. — *Soit*

$$S = A + B e^{bx} + C e^{cx} + \ldots + G e^{gx} + H e^{hx}$$

une somme composée d'un nombre fini de termes dont un seul A *soit constant, chacun des autres étant le produit de deux facteurs, l'un constant, l'autre variable avec* x, *et le facteur variable étant une exponentielle népérienne dont l'exposant soit proportionnel à* x. *Si, les coefficients*

$$b,\quad c,\quad \ldots,\quad g,\quad h$$

étant tous différents les uns des autres, la somme S *se réduit, quelle que soit* x, *ou même seulement pour toutes les valeurs de* x *voisines d'une valeur donnée, à une constante déterminée* $\mathcal{A}$; *chacun des termes variables de la somme* S, *c'est-à-dire chaque terme proportionnel à une exponentielle donnée, se réduira séparément à zéro, en sorte qu'on aura*

$$A = \mathcal{A},\qquad B = 0,\qquad C = 0,\qquad \ldots,\qquad G = 0,\qquad H = 0.$$

NOTE SUR QUELQUES PROPRIÉTÉS DES INTÉGRALES DÉFINIES SIMPLES OU MULTIPLES.

Soient

$$x_0 \text{ et } X$$

deux valeurs réelles de la variable x et $f(x)$ une fonction réelle de cette variable. Soient d'ailleurs

$$x_1,\quad x_2,\quad \ldots,\quad x_{n-1}$$

de nouvelles valeurs de x interposées entre les limites

$$x_0,\quad X,$$

et qui aillent toujours en croissant ou en décroissant depuis la première limite jusqu'à la seconde, suivant que la différence $X - x_0$ sera positive ou négative. On pourra se servir de ces valeurs pour diviser la différence $X - x_0$ en éléments

$$x_1 - x_0,\quad x_2 - x_1,\quad x_3 - x_2,\quad \ldots,\quad X - x_{n-1}$$

qui seront tous de même signe; et, si la fonction $f(x)$ reste continue par rapport à la variable x pour des valeurs de cette variable intermédiaires entre x_0 et X, l'intégrale définie

$$\int_{x_0}^{X} f(x)\,dx$$

ne sera autre chose que la limite vers laquelle convergera la somme

$$(1)\qquad S = (x_1 - x_0) f(x_0) + (x_2 - x_1) f(x_1) + \ldots + (X - x_{n-1}) f(x_{n-1}),$$

tandis que les éléments de la différence $X - x_0$ deviendront de plus en plus petits.

Concevons maintenant que la fonction $f(x)$ soit le produit de deux facteurs, et qu'on ait en conséquence

$$f(x) = \theta u,$$

θ, u désignant deux fonctions réelles et continues de x dont la seconde conserve toujours le même signe pour des valeurs de x intermédiaires entre x_0 et X. Si l'on nomme

$$\theta_0, \quad \theta_1, \quad \ldots, \quad \theta_{n-1}$$

les valeurs de θ, et

$$u_0, \quad u_1, \quad \ldots, \quad u_{n-1}$$

les valeurs de u, correspondantes aux valeurs

$$x_0, \quad x_1, \quad \ldots, \quad x_{n-1}$$

de la variable x, l'équation (1) donnera

$$(2) \qquad S = \theta_0 u_0(x_1 - x_0) + \theta_1 u_1(x_2 - x_1) + \ldots + \theta_{n-1} u_{n-1}(X - x_{n-1}).$$

D'ailleurs on démontre aisément la proposition suivante :

Théorème I. — *Si l'on représente par*

$$\alpha, \quad \alpha', \quad \alpha'', \quad \ldots$$

des quantités de même signe, et par

$$a, \quad a', \quad a'', \quad \ldots$$

des quantités quelconques, on aura toujours

$$a\alpha + a'\alpha' + a''\alpha'' + \ldots = (\alpha + \alpha' + \alpha'' + \ldots) M(a, a', a'', \ldots),$$

la notation

$$M(a, a', a'', \ldots)$$

désignant une moyenne entre les quantités a, a', a'', ...

En vertu de ce théorème, dont on peut voir la démonstration dans l'*Analyse algébrique* (p. 17) [1], on tirera de la formule (2)

$$(3) \qquad S = \Theta[u_0(x_1 - x_0) + u_1(x_2 - x_1) + \ldots + u_{n-1}(X - x_{n-1})],$$

pourvu qu'on pose

$$\Theta = M(\theta_0, \theta_1, \ldots, \theta_{n-1}),$$

c'est-à-dire pourvu qu'on désigne par Θ une moyenne entre les quantités

$$\theta_0, \quad \theta_1, \quad \ldots, \quad \theta_{n-1},$$

par conséquent une moyenne entre les diverses valeurs qu'acquiert la fonction θ pour des valeurs de x intermédiaires entre x_0, X. Si maintenant on suppose que chacun des éléments de la différence $X - x_0$ devienne infiniment petit, le premier membre de l'équation (3) s'approchera indéfiniment de l'intégrale

$$\int_{x_0}^{X} f(x)\,dx = \int_{x_0}^{X} \theta u\,dx,$$

et la somme

$$u_0(x_1 - x_0) + u_1(x_2 - x_1) + \ldots + u_{n-1}(X - x_{n-1})$$

de l'intégrale

$$\int_{x_0}^{X} u\,dx.$$

Donc, en passant aux limites, on tirera de l'équation (3)

$$(4) \qquad \int_{x_0}^{X} \theta u\,dx = \Theta \int_{x_0}^{X} u\,dx,$$

Θ désignant toujours une moyenne entre les valeurs qu'acquiert la fonction θ pour des valeurs de x intermédiaires entre x_0 et X.

Supposons maintenant que la fonction

$$f(x) = \theta u$$

[1] *Œuvres de Cauchy*, S. II, T. III, p. 27.

cesse d'être finie, sans cesser d'être continue, et change brusquement de valeur avec l'un au moins de ses deux facteurs θ, u, pour certaines valeurs particulières de x intermédiaires entre x_0 et X. Si l'on désigne par

$$x_1, \quad x_2, \quad \ldots, \quad x_{n-1}$$

ces valeurs particulières, qui ne seront plus arbitrairement choisies comme dans l'équation (1), mais complètement déterminées, on aura

$$(5)\qquad \int_{x_0}^{X} f(x)\,dx = \int_{x_0}^{x_1} f(x)\,dx + \int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx + \ldots + \int_{x_{n-1}}^{X} f(x)\,dx,$$

ou, ce qui revient au même,

$$(6)\qquad \int_{x_0}^{X} \theta u\,dx = \int_{x_0}^{x_1} \theta u\,dx + \int_{x_1}^{x_2} \theta u\,dx + \ldots + \int_{x_{n-1}}^{X} \theta u\,dx.$$

D'ailleurs, comme la fonction $f(x)$ restera continue avec chacun de ses facteurs θ, u, pour toutes les valeurs de x renfermées entre les limites x_0, x_1, ou entre les limites $x_1, x_2, \ldots$, ou enfin entre les limites x_{n-1}, X; on tirera successivement de la formule (4)

$$\int_{x_0}^{x_1} \theta u\,dx = \Theta_0 \int_{x_0}^{x_1} u\,dx,$$
$$\int_{x_1}^{x_2} \theta u\,dx = \Theta_1 \int_{x_1}^{x_2} u\,dx,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$\int_{x_{n-1}}^{X} \theta u\,dx = \Theta_{n-1} \int_{x_{n-1}}^{X} u\,dx,$$

pourvu qu'on désigne généralement par Θ_m une moyenne entre les diverses valeurs qu'acquiert la fonction θ pour des valeurs de la variable x intermédiaires entre x_m et x_{m+1}. Or de ces dernières formules, jointes à l'équation (6) et au théorème I, on conclura immédiatement

$$\int_{x_0}^{X} \theta u\,dx = \left(\int_{x_0}^{x_1} u\,dx + \int_{x_1}^{x_2} u\,dx + \ldots + \int_{x_{n-1}}^{X} u\,dx\right) \mathrm{M}(\Theta_0, \Theta_1, \ldots, \Theta_{n-1}),$$

ou, ce qui revient au même,

$$\int_{x_0}^{X} \theta u\,dx = \Theta \int_{x_0}^{X} u\,dx,$$

pourvu qu'on pose

$$\Theta = \mathrm{M}(\Theta_0, \Theta_1, \ldots, \Theta_{n-1}),$$

c'est-à-dire pourvu qu'on désigne par Θ une moyenne entre les quantités

$$\Theta_0, \quad \Theta_1, \quad \ldots, \quad \Theta_{n-1},$$

et par conséquent une moyenne entre les diverses valeurs qu'acquiert la fonction θ pour des valeurs de la variable x intermédiaires entre x_0, X. Donc la proposition connue, que renferme l'équation (4), peut être étendue au cas où les fonctions de x représentées par θ, u, cessent d'être continues, sans cesser d'être finies. Il y a plus : en partant des définitions données et des principes développés dans le *Résumé des Leçons sur le Calcul infinitésimal* (1), on reconnaîtra facilement que, si la fonction u offre constamment le même signe entre les limites $x = x_0$, $x = $ X, la formule (4) subsistera toujours, ou subsistera du moins tant que les intégrales comprises dans ses deux membres conserveront des valeurs finies et déterminées. On peut donc énoncer la proposition suivante :

Théorème II. — *Si θ, u désignent deux fonctions réelles de la variable réelle x, et si la seconde de ces fonctions conserve constamment le même signe entre les limites $x = x_0$, $x = $ X, on aura*

$$\int_{x_0}^{X} \theta u\,dx = \Theta \int_{x_0}^{X} u\,dx,$$

pourvu que les intégrales définies comprises dans la formule précédente offrent des valeurs déterminées, et que l'on désigne par Θ une moyenne entre les valeurs diverses qu'acquiert la fonction θ pour des valeurs de x comprises entre les limites $x = x_0$, $x = $ X.

(1) *Œuvres de Cauchy*, S. II, T. IV.

Corollaire I. — Si l'on pose $u = 1$, on aura simplement

$$\int_{x_0}^{X} \theta \, dx = \Theta(X - x_0).$$

Donc une intégrale définie simple est le produit de la différence entre les limites de la variable par une valeur moyenne de la fonction sous la lettre $\int$; et, si cette fonction conserve constamment le même signe, entre les limites de l'intégration, le signe de la différence entre ces limites, multiplié par le signe de la fonction, donnera pour produit le signe de l'intégrale.

Corollaire II. — Si l'on pose

$$\theta u = v, \qquad \theta = \frac{v}{u},$$

Θ représentera une des valeurs du rapport $\frac{u}{v}$, et, par suite, le théorème II entraînera le suivant :

Théorème III. — *Si u, v désignent deux fonctions réelles de x, dont la première conserve constamment le même signe entre les limites réelles $x = x_0$, $x = X$, et si d'ailleurs les deux intégrales*

$$\int_{x_0}^{X} u \, dx, \quad \int_{x_0}^{X} v \, dx$$

offrent des valeurs déterminées, le rapport

$$\frac{\int_{x_0}^{X} v \, dx}{\int_{x_0}^{X} u \, dx}$$

sera une moyenne entre les diverses valeurs qu'acquiert le rapport

$$\frac{v}{u}$$

pour des valeurs de x intermédiaires entre x_0 et X.

Du théorème III on peut déduire immédiatement celui que nous allons énoncer :

Théorème IV. — *Soient x, y deux variables réelles et u, v deux fonctions réelles de x, y, dont la première u conserve constamment le même signe pour toutes les valeurs de y renfermées entre les limites $y = y_0$, $y = Y$, les lettres y_0, Y désignant deux fonctions données de x, et pour toutes les valeurs de x renfermées entre les limites constantes $x = x_0$, $x = X$. Si la différence $Y - y_0$, considérée comme fonction de x, ne change pas de signe entre les limites $x = x_0$, $x = X$, si d'ailleurs les deux intégrales*

$$\int_{x_0}^{X}\int_{y_0}^{Y} u \, dx \, dy, \qquad \int_{x_0}^{X}\int_{y_0}^{Y} v \, dx \, dy$$

offrent des valeurs déterminées, le rapport

$$\frac{\int_{x_0}^{X}\int_{y_0}^{Y} v \, dx \, dy}{\int_{x_0}^{X}\int_{y_0}^{Y} u \, dx \, dy}$$

sera une moyenne entre les diverses valeurs qu'acquiert le rapport

$$\frac{v}{u}.$$

Démonstration. — Puisque la quantité u, considérée comme fonction de x, y, et la différence $Y - y_0$, considérée comme fonction de x, doivent, par hypothèse, ne pas changer de signes entre les limites des intégrations, on pourra en dire autant de la fonction de x représentée par l'intégrale

$$\int_{y_0}^{Y} u \, dx,$$

dont le signe, eu égard au corollaire I du théorème II, sera le produit du signe de u par le signe de $Y - y_0$. Cela posé, on conclura du théorème III que le rapport

$$\frac{\int_{x_0}^{X}\int_{y_0}^{Y} v\,dx\,dy}{\int_{x_0}^{X}\int_{y_0}^{Y} u\,dx\,dy}$$

est une moyenne entre les diverses valeurs du rapport

$$\frac{\int_{y_0}^{Y} v\,dy}{\int_{y_0}^{Y} u\,dy},$$

et ce dernier rapport une moyenne entre les diverses valeurs du rapport $\frac{v}{u}$.

En appliquant de semblables raisonnements à des intégrales triples, quadruples, etc., on établira généralement la proposition suivante :

THÉORÈME V. — *Soient $x, y, z, \ldots$ plusieurs variables réelles, et u, v deux fonctions réelles de $x, y, z, \ldots$, dont la première u conserve constamment le même signe pour toutes les valeurs de x renfermées entre les limites constantes x_0, X; pour toutes les valeurs de y renfermées entre les limites y_0, Y, qui représentent deux fonctions données de x; pour toutes les valeurs de z renfermées entre les limites z_0, Z, qui représentent deux fonctions données de x, y; etc. Supposons encore qu'entre ces limites chacune des différences*

$$Y - y_0, \quad Z - z_0, \quad \ldots,$$

considérée comme fonction de x, ou de x, y, etc., conserve constamment le même signe. Si chacune des intégrales

$$\int_{x_0}^{X}\int_{y_0}^{Y}\int_{z_0}^{Z} \ldots u\,dx\,dy\,dz\ldots, \quad \int_{x_0}^{X}\int_{y_0}^{Y}\int_{z_0}^{Z} \ldots v\,dx\,dy\,dz\ldots$$

offre une valeur déterminée, le rapport

$$\frac{\int_{x_0}^{X}\int_{y_0}^{Y}\int_{z_0}^{Z} \ldots v\,dx\,dy\,dz\ldots}{\int_{x_0}^{X}\int_{y_0}^{Y}\int_{z_0}^{Z} \ldots u\,dx\,dy\,dz\ldots}$$

sera une moyenne entre les diverses valeurs qu'acquiert le rapport $\frac{v}{u}$ pour des valeurs de $x, y, z, \ldots$, comprises entre les limites des intégrations.

Comme les surfaces planes se trouvent représentées par des intégrales définies simples, et les volumes des solides par des intégrales définies doubles, les divers théorèmes que nous venons d'établir entraînent immédiatement plusieurs de ceux qui se trouvent énoncés dans les *Applications géométriques du Calcul infinitésimal* (¹) et en particulier les suivants :

THÉORÈME VI. — *Le rapport entre deux surfaces planes est toujours une quantité moyenne entre les diverses valeurs que peut acquérir le rapport des sections linéaires faites dans ces deux surfaces par un plan mobile qui demeure constamment parallèle à un plan donné.*

THÉORÈME VII. — *Le rapport entre les volumes renfermés dans deux enveloppes distinctes est une quantité moyenne entre les diverses valeurs que peut acquérir le rapport des longueurs interceptées par les deux enveloppes sur une droite mobile qui demeure constamment parallèle à un axe donné.*

Comme pour transformer le cercle dont le rayon est a en une ellipse dont les demi-axes sont a et b, il suffit de faire croître l'ordonnée du cercle dans un rapport égal à $\frac{b}{a}$, il suit du théorème VI que la surface de l'ellipse sera le produit de la surface du cercle par le rapport $\frac{b}{a}$.

(¹) *Œuvres de Cauchy*, S. II, T. V.

On retrouve ainsi, pour la surface de l'ellipse, l'expression connue

$$\pi a^2 \frac{b}{a} = \pi ab.$$

Pareillement, comme, pour transformer une sphère dont le rayon est a en un ellipsoïde dont les demi-axes soient

$$a, \quad b, \quad c,$$

il suffit de faire croître les ordonnées de la sphère, mesurées à partir de deux plans qui passent par le centre et se coupent à angles droits : 1° dans un rapport égal à $\frac{b}{a}$; 2° dans un rapport égal à $\frac{c}{a}$; il suit du théorème VII que le volume de l'ellipsoïde sera le produit du volume de la sphère par les deux rapports $\frac{b}{a}$, $\frac{c}{a}$. On retrouve ainsi, pour le volume de l'ellipsoïde, l'expression connue

$$\frac{4}{3}\pi a^3 \frac{b}{a}\frac{c}{a} = \frac{4}{3}\pi abc.$$

Pour obtenir les théorèmes VI et VII, il suffit d'exprimer les aires des surfaces planes et les volumes, à l'aide d'intégrales définies simples ou doubles, en faisant usage de coordonnées rectangulaires x, y, z. Mais à ces coordonnées rectangulaires on pourrait substituer des coordonnées polaires, savoir : le rayon vecteur r mené de l'origine des coordonnées à un point de l'espace, l'angle p formé par ce rayon vecteur avec un axe fixe mené par l'origine, et l'angle q formé par le plan qui renferme le rayon vecteur et l'axe fixe, avec un plan fixe passant par le même axe. D'autre part, si le rayon vecteur devient mobile, et si ce rayon, offrant une longueur variable avec sa direction, tourne autour de l'origine dans un plan ou dans l'espace, de manière à décrire une courbe ou une surface fermée qu'il traverse à chaque instant en un seul point; alors, pour représenter l'aire comprise dans la courbe plane, ou le volume enveloppé par la surface courbe, on obtiendra l'intégrale définie simple

$$\frac{1}{2}\int_0^{2\pi} r^2\,dp,$$

r étant fonction de p, ou l'intégrale définie double

$$\frac{1}{3}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} r^3 \sin p\,dp\,dq,$$

r étant fonction de p et de q. Cela posé, on déduira immédiatement des théorèmes III et IV les propositions suivantes :

Théorème VIII. — *Le rapport entre les aires de deux surfaces planes engendrées par deux rayons vecteurs mobiles qui tournent simultanément dans un plan autour d'un point fixe, de manière à offrir des longueurs variables avec leur direction commune, est une moyenne entre les diverses valeurs qu'acquiert successivement le carré du rapport de ces deux rayons vecteurs.*

Théorème IX. — *Le rapport entre les volumes engendrés par deux rayons vecteurs mobiles qui tournent dans l'espace autour d'un point fixe, de manière à offrir des longueurs variables avec leur direction commune, est une moyenne entre les diverses valeurs qu'acquiert successivement le cube du rapport de ces rayons vecteurs.*

Dans le cas où les deux rayons vecteurs cessent d'exécuter une rotation complète autour du point fixe, les limites des intégrales relatives à p et à q demeurent quelconques; mais le rapport des aires ou des volumes engendrés est toujours évidemment celui qu'indique le théorème VIII ou le théorème IX.

Lorsque deux rayons vecteurs mobiles, comptés à partir d'un point fixe, tournent simultanément autour de ce point dans un plan ou dans l'espace, de telle manière que leurs longueurs, mesurées à chaque instant dans une même direction, conservent toujours entre elles le même rapport, les deux courbes planes, ou les deux surfaces courbes, décrites par les deux extrémités de ces rayons vecteurs, sont ce qu'on appelle des *courbes semblables* ou des *surfaces semblables*. Cela posé, les théorèmes VIII et IX entraînent évidemment les propositions suivantes :

Théorème X. — *Le rapport des aires renfermées dans deux courbes semblables, engendrées par les extrémités de deux rayons vecteurs qui tournent simultanément dans un plan autour d'un point fixe, en conservant toujours entre eux le même rapport, est égal au carré de ce rapport.*

Théorème XI. — *Le rapport des volumes renfermés dans deux surfaces semblables engendrées par les extrémités de deux rayons vecteurs qui tournent dans l'espace autour d'un point fixe, en conservant toujours entre eux le même rapport, est égal au cube de ce rapport.*

MÉMOIRE

SUR

LES DILATATIONS, LES CONDENSATIONS ET LES ROTATIONS

PRODUITES PAR UN CHANGEMENT DE FORME

DANS UN SYSTÈME DE POINTS MATÉRIELS.

Pour être en état d'appliquer facilement la Géométrie à la Mécanique, il ne suffit pas de connaître les diverses formes que les lignes ou surfaces peuvent présenter, et les propriétés de ces lignes ou de ces surfaces, mais il importe encore de savoir quels sont les changements de forme que peuvent subir les corps considérés comme des systèmes de points matériels, et à quelles lois générales ces changements de forme se trouvent assujettis. Ces lois ne paraissent pas moins dignes d'être étudiées que celles qui expriment les propriétés générales des lignes courbes ou des surfaces courbes; et aux théorèmes d'Euler ou de Meusnier sur la courbure des surfaces qui limitent les corps, on peut ajouter d'autres théorèmes qui aient pour objet les condensations ou les dilatations linéaires, et les autres modifications éprouvées en chaque point par un corps qui vient à changer de forme. Déjà, dans un Mémoire qui a été présenté à l'Académie des Sciences le 30 septembre 1822 et publié par extrait dans le *Bulletin de la Société Philomathique* (¹), j'ai donné la théorie des condensations ou dilatations linéaires, et les lois de leurs variations dans un système de points matériels. A cette théorie, fondée sur une analyse que j'ai développée dans le second Volume des

(¹) *Œuvres de Cauchy*, S. II, T. II.

Exercices de Mathématiques (¹), et que je vais reproduire avec quelques légères modifications, je me propose de joindre ici la théorie des rotations qu'exécutent, en se déformant, des axes menés par un point quelconque du système.

ANALYSE.

I. — *Formules générales relatives au changement de forme que peut subir un système de points matériels.*

Considérons un système de points matériels rapporté à trois axes coordonnés et rectangulaires. Soient, dans un premier état du système :

x, y, z les coordonnées d'une molécule $\mathfrak{m}$ supposée réduite à un point matériel ;
$x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z$ les coordonnées d'une autre molécule m ;
r le rayon vecteur mené de la molécule $\mathfrak{m}$ à la molécule m ;
a, b, c les cosinus des angles formés par ce rayon vecteur avec les demi-axes des coordonnées positives.

On aura non seulement

$$r^2 = \Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2, \tag{1}$$

mais encore

$$a = \frac{\Delta x}{r}, \qquad b = \frac{\Delta y}{r}, \qquad c = \frac{\Delta z}{r}, \tag{2}$$

et

$$a^2 + b^2 + c^2 = 1. \tag{3}$$

Concevons maintenant que le système donné de points matériels vienne à se mouvoir et à changer de forme. Soient, dans le second état du système :

ξ, η, ζ les déplacements de la molécule $\mathfrak{m}$, mesurés parallèlement aux axes coordonnés ;
$\xi + \Delta\xi, \eta + \Delta\eta, \zeta + \Delta\zeta$ les déplacements correspondants de la molécule m ;

(¹) *OEuvres de Cauchy*, S. II, T. VII.

$r + \rho$ le rayon vecteur mené de la molécule $\mathfrak{m}$ à la molécule m ;
$\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}$ les cosinus des angles formés par ce rayon vecteur avec les demi-axes des coordonnées positives.

Les coordonnées de la molécule $\mathfrak{m}$, dans le second état du système, seront

$$x + \xi, \qquad y + \eta, \qquad z + \zeta,$$

tandis que celles de la molécule m seront

$$x + \xi + \Delta x + \Delta\xi, \quad y + \eta + \Delta y + \Delta\eta, \quad z + \zeta + \Delta z + \Delta\zeta ;$$

et, par suite, la différence entre les coordonnées des deux molécules, ou les projections algébriques du rayon vecteur $r + \rho$ sur les demi-axes des coordonnées positives, se trouveront représentées par les binomes

$$\Delta x + \Delta\xi, \quad \Delta y + \Delta\eta, \quad \Delta z + \Delta\zeta.$$

En conséquence, on aura non seulement

$$(r + \rho)^2 = (\Delta x + \Delta\xi)^2 + (\Delta y + \Delta\eta)^2 + (\Delta z + \Delta\zeta)^2, \tag{4}$$

mais encore

$$\mathfrak{a} = \frac{\Delta x + \Delta\xi}{r + \rho}, \qquad \mathfrak{b} = \frac{\Delta y + \Delta\eta}{r + \rho}, \qquad \mathfrak{c} = \frac{\Delta z + \Delta\zeta}{r + \rho} \tag{5}$$

et

$$\mathfrak{a}^2 + \mathfrak{b}^2 + \mathfrak{c}^2 = 1. \tag{6}$$

Ce n'est pas tout : si l'on pose

$$\varepsilon = \frac{\rho}{r}, \tag{7}$$

on tirera des équations (4) et (5), jointes aux formules (1) et (2),

$$(1 + \varepsilon)^2 = \left(a + \frac{\Delta\xi}{r}\right)^2 + \left(b + \frac{\Delta\eta}{r}\right)^2 + \left(c + \frac{\Delta\zeta}{r}\right)^2, \tag{8}$$

$$\mathfrak{a} = \frac{1}{1+\varepsilon}\left(a + \frac{\Delta\xi}{r}\right), \qquad \mathfrak{b} = \frac{1}{1+\varepsilon}\left(b + \frac{\Delta\eta}{r}\right), \qquad \mathfrak{c} = \frac{1}{1+\varepsilon}\left(c + \frac{\Delta\zeta}{r}\right); \tag{9}$$

la quantité ε, déterminée par la formule (7), représente évidemment *la* *dilatation linéaire* que subit la distance r comprise entre les molécules $\mathfrak{m}$ et m, tandis que le système donné passe du premier état au second. Lorsque ε devient négatif avec ρ, la dilatation dont il s'agit se transforme en une condensation linéaire représentée par la valeur numérique de ε.

Supposons maintenant qu'on désigne par O et par O′ les points de l'espace avec lesquels coïncide successivement la molécule $\mathfrak{m}$ dans le premier et dans le second état du système, puis par OA et par O′A′ les demi-axes qui, dans ces deux états, offrent pour directions celles des rayons vecteurs r et $r+\rho$. Supposons encore, pour fixer les idées, les demi-axes des coordonnées positives disposés de telle manière que les mouvements de rotation, exécutés de droite à gauche autour de ces demi-axes, soient, dans les plans coordonnés, des mouvements directs. Enfin nommons

$$\delta$$

l'angle formé dans l'espace par le demi-axe O′A′ avec le demi-axe OA, ou, ce qui revient au même, avec un demi-axe parallèle mené par le point O′; et représentons par

$$\varphi, \quad \chi, \quad \psi$$

les *projections algébriques* de l'angle δ sur les plans coordonnés, c'est-à-dire, en d'autres termes, les trois angles formés dans ces plans par les projections du rayon vecteur $r+\rho$ avec les projections du rayon vecteur r, chacun de ces angles étant pris d'ailleurs avec le signe + ou avec le signe −, suivant que le mouvement de rotation d'un rayon vecteur qui tourne de manière à s'appliquer successivement sur les projections de r et de $r+\rho$, est direct ou rétrograde. On aura, d'après une formule connue,

$$\cos\delta = a\mathfrak{a} + b\mathfrak{b} + c\mathfrak{c};$$

puis de cette dernière équation, jointe aux formules (3) et (6), on conclura

$$\sin^2\delta = 1 - \cos^2\delta = (a^2+b^2+c^2)(\mathfrak{a}^2+\mathfrak{b}^2+\mathfrak{c}^2) - (a\mathfrak{a}+b\mathfrak{b}+c\mathfrak{c})^2,$$

ou, ce qui revient au même,

$$\sin^2\delta = (b\mathfrak{c} - \mathfrak{b}c)^2 + (c\mathfrak{a} - \mathfrak{c}a)^2 + (a\mathfrak{b} - \mathfrak{a}b)^2$$

et par suite

$$\sin\delta = [(b\mathfrak{c} - \mathfrak{b}c)^2 + (c\mathfrak{a} - \mathfrak{c}a)^2 + (a\mathfrak{b} - \mathfrak{a}b)^2]^{\frac{1}{2}}. \tag{10}$$

De plus, l'angle φ n'étant autre chose que la différence entre deux angles qui auront pour tangentes

$$\frac{\mathfrak{c}}{\mathfrak{b}} \quad \text{et} \quad \frac{c}{b},$$

on en conclura

$$\operatorname{tang}\varphi = \frac{\dfrac{\mathfrak{c}}{\mathfrak{b}} - \dfrac{c}{b}}{1 + \dfrac{c}{b}\dfrac{\mathfrak{c}}{\mathfrak{b}}},$$

par conséquent

$$\tag{11} \left\{ \begin{array}{l} \operatorname{tang}\varphi = \dfrac{b\mathfrak{c} - \mathfrak{b}c}{b\mathfrak{b} + c\mathfrak{c}}; \\ \text{on trouvera de même} \\ \operatorname{tang}\chi = \dfrac{c\mathfrak{a} - \mathfrak{c}a}{c\mathfrak{c} + a\mathfrak{a}} \\ \text{et} \\ \operatorname{tang}\psi = \dfrac{a\mathfrak{b} - \mathfrak{a}b}{a\mathfrak{a} + b\mathfrak{b}}. \end{array} \right.$$

Il est bon d'observer que, en vertu des équations (9), les trois différences

$$b\mathfrak{c} - \mathfrak{b}c, \quad c\mathfrak{a} - \mathfrak{c}a, \quad a\mathfrak{b} - \mathfrak{a}b$$

auront pour valeurs respectives

$$b\mathfrak{c} - \mathfrak{b}c = \frac{b\,\Delta\zeta - c\,\Delta\eta}{(1+\varepsilon)r}, \quad c\mathfrak{a} - \mathfrak{c}a = \frac{c\,\Delta\xi - a\,\Delta\zeta}{(1+\varepsilon)r}, \quad a\mathfrak{b} - \mathfrak{a}b = \frac{a\,\Delta\eta - b\,\Delta\xi}{(1+\varepsilon)r}. \tag{12}$$

Dans les diverses formules ci-dessus établies, les déplacements moléculaires

$$\xi, \quad \eta, \quad \zeta,$$

étant variables avec la position de la molécule $\mathfrak{m}$, doivent être considérés comme des fonctions des coordonnées x, y, z. Passons maintenant à d'autres formules, qu'on déduit immédiatement des précédentes, en supposant que ces fonctions soient continues.

Lorsque la direction du demi-axe OA restant invariable, la molécule m se rapproche indéfiniment de la molécule $\mathfrak{m}$, chacune des quantités

$$r,\quad \Delta\xi,\quad \Delta\eta,\quad \Delta\zeta$$

se rapproche indéfiniment de la limite zéro; mais il n'en est pas de même des rapports

$$\frac{\Delta\xi}{r},\quad \frac{\Delta\eta}{r},\quad \frac{\Delta\zeta}{r},$$

dont chacun converge vers une limite qu'on détermine sans peine à l'aide des considérations suivantes :

Représentons par

$$f(x, y, z)$$

une fonction continue de x, y, z, par exemple un des déplacements ξ, η, ζ. On aura

$$\Delta f(x, y, z) = f(x+\Delta x, y+\Delta y, z+\Delta z) - f(x, y, z),$$

et par suite, eu égard aux formules (2),

$$(13)\qquad \frac{\Delta f(x, y, z)}{r} = \frac{f(x+ar, y+br, z+cr) - f(x, y, z)}{r}.$$

Or, tandis que r s'approche indéfiniment de zéro, la limite vers laquelle converge le second membre de l'équation (13) se réduit à la valeur que prend la dérivée

$$D_r f(x+ar, y+br, z+cr)$$

pour une valeur nulle de r, c'est-à-dire au trinome

$$a D_x f(x, y, z) + b D_y f(x, y, z) + c D_z f(x, y, z).$$

Donc les limites vers lesquelles convergent les rapports

$$\frac{\Delta\xi}{r},\quad \frac{\Delta\eta}{r},\quad \frac{\Delta\zeta}{r},$$

pour des valeurs décroissantes de r, seront déterminées par les formules

$$(14)\qquad \left\{\begin{aligned} \lim\frac{\Delta\xi}{r} &= a D_x\xi + b D_y\xi + c D_z\xi,\\ \lim\frac{\Delta\eta}{r} &= a D_x\eta + b D_y\eta + c D_z\eta,\\ \lim\frac{\Delta\zeta}{r} &= a D_x\zeta + b D_y\zeta + c D_z\zeta. \end{aligned}\right.$$

Cela posé, si la molécule $\mathfrak{m}$ se rapproche indéfiniment de la molécule m, ou, ce qui revient au même, si r décroît indéfiniment, les valeurs de

$$\varepsilon,\quad \mathfrak{a},\quad \mathfrak{b},\quad \mathfrak{c},\quad \delta,\quad \varphi,\quad \chi,\quad \psi,$$

fournies par les équations (8), (9), (10) et (11), convergeront elles-mêmes vers des limites qu'on obtiendra aisément en substituant dans les équations (8) et (9), à la place des rapports

$$\frac{\Delta\xi}{r},\quad \frac{\Delta\eta}{r},\quad \frac{\Delta\zeta}{r},$$

les seconds membres des formules (14). En opérant ainsi on trouvera, au lieu des équations (8) et (9), les suivantes :

$$(15)\qquad \begin{aligned} (1+\varepsilon)^2 = {} & [a(1+D_x\xi) + b D_y\xi + c D_z\xi]^2\\ & + [a D_x\eta + b(1+D_y\eta) + c D_z\eta]^2\\ & + [a D_x\zeta + b D_y\zeta + c(1+D_z\zeta)]^2, \end{aligned}$$

$$(16)\qquad \left\{\begin{aligned} \mathfrak{a} &= \frac{1}{1+\varepsilon}[a(1+D_x\xi) + b D_y\xi + c D_z\xi],\\ \mathfrak{b} &= \frac{1}{1+\varepsilon}[a D_x\eta + b(1+D_y\eta) + c D_z\eta],\\ \mathfrak{c} &= \frac{1}{1+\varepsilon}[a D_x\zeta + b D_y\zeta + c(1+D_z\zeta)]; \end{aligned}\right.$$

et, à la place des formules (12), les suivantes :

$$(17)\qquad \left\{\begin{aligned} b\mathfrak{c} - \mathfrak{b}c &= \frac{1}{1+\varepsilon}(a D_x + b D_y + c D_z)(b\zeta - c\eta),\\ c\mathfrak{a} - \mathfrak{c}a &= \frac{1}{1+\varepsilon}(a D_x + b D_y + c D_z)(c\xi - a\zeta),\\ a\mathfrak{b} - \mathfrak{a}b &= \frac{1}{1+\varepsilon}(a D_x + b D_y + c D_z)(a\eta - b\xi). \end{aligned}\right.$$

Il est d'ailleurs facile de voir ce que représenteront les valeurs de

$$\varepsilon,\quad a,\quad b,\quad c,\quad \delta,\quad \varphi,\quad \chi,\quad \psi,$$

déterminées par le système des équations (15) et (16), jointes aux formules (10) et (11); et d'abord, pour une valeur nulle de r, le demi-axe O'A', relatif au second état du système de points matériels, se confondra évidemment avec la tangente menée par le point O' à la courbe en laquelle se sera métamorphosé, en se déformant, le demi-axe OA mené par le point O. Cela posé, les angles dont les cosinus seront a', b', c' détermineront, dans le second état du système, la *nouvelle direction* que l'axe OA, en se courbant et se déplaçant, aura prise à partir du point avec lequel coïncide la molécule $\mathfrak{m}$; et l'angle δ mesurera ce qu'on peut appeler la *rotation du demi-axe* OA autour de cette molécule. Quant aux angles

$$\varphi,\quad \chi,\quad \psi,$$

ils représenteront toujours les projections algébriques de l'angle δ sur les plans coordonnés. Enfin la quantité ε, déterminée par l'équation (17), représentera évidemment, dans le second état du système de points matériels, ce qu'on peut appeler la *dilatation linéaire* du système, mesurée au point O' suivant la direction O'A'.

Considérons en particulier le cas où le demi-axe OA est parallèle au plan des y, z. Dans ce cas on trouve

$$a = 0;$$

et, en nommant τ l'angle polaire formé par le demi-axe OA avec celui des y positives, on a encore

$$b = \cos\tau, \qquad c = \sin\tau.$$

Par suite, on tire de la première des formules (11) jointe aux équations (16),

$$\text{(18)} \qquad \operatorname{tang}\varphi = \frac{(b\mathrm{D}_y + c\mathrm{D}_z)(b\zeta - c\eta)}{1 + (b\mathrm{D}_y + c\mathrm{D}_z)(b\eta + c\zeta)},$$

ou, ce qui revient au même,

$$\text{(19)} \qquad \operatorname{tang}\varphi = \frac{(\cos\tau\,\mathrm{D}_y + \sin\tau\,\mathrm{D}_z)(\zeta\cos\tau - \eta\sin\tau)}{1 + (\cos\tau\,\mathrm{D}_y + \sin\tau\,\mathrm{D}_z)(\eta\cos\tau + \zeta\sin\tau)}.$$

Alors φ représente ce qu'on peut appeler la *rotation du demi-axe* OA autour d'un demi-axe parallèle à celui des x positives. D'ailleurs, si la direction du demi-axe OA vient à varier avec l'angle τ dans un plan parallèle au plan des y, z, la rotation φ variera elle-même; et, si l'on pose

$$\text{(20)} \qquad \alpha = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \varphi\, d\tau,$$

φ étant déterminé en fonction de τ par la formule (19), α représentera la valeur moyenne de cette rotation, ou ce qu'on peut appeler la *rotation moyenne* du système autour d'un demi-axe parallèle à celui des x positives. Enfin on arrivera encore à des conclusions semblables, en supposant le demi-axe OA renfermé dans un plan parallèle au plan des z, x ou des x, y; et si, en attribuant à χ une valeur déterminée par l'équation

$$\text{(21)} \qquad \operatorname{tang}\chi = \frac{(\cos\tau\,\mathrm{D}_z + \sin\tau\,\mathrm{D}_x)(\xi\cos\tau - \zeta\sin\tau)}{1 + (\cos\tau\,\mathrm{D}_z + \sin\tau\,\mathrm{D}_x)(\zeta\cos\tau + \xi\sin\tau)},$$

on prend

$$\text{(22)} \qquad 6 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \chi\, d\tau,$$

ou si, en supposant

$$\text{(23)} \qquad \operatorname{tang}\psi = \frac{(\cos\tau\,\mathrm{D}_x + \sin\tau\,\mathrm{D}_y)(\eta\cos\tau - \xi\sin\tau)}{1 + (\cos\tau\,\mathrm{D}_x + \sin\tau\,\mathrm{D}_y)(\xi\cos\tau + \eta\sin\tau)},$$

on prend

$$\text{(24)} \qquad \gamma = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \psi\, d\tau,$$

6, γ représenteront ce qu'on peut appeler les *rotations moyennes du système* autour des demi-axes menés par la molécule m parallèlement à ceux des y et des z positives.

Puisque l'angle φ, déterminé par la première des formules (11), est la différence entre deux arcs dont les tangentes sont

$$\frac{\mathfrak{c}}{\mathfrak{b}}, \quad \frac{c}{b},$$

et que, pour passer de la première des formules (11) à l'équation (19), il suffit de poser

$$a = 0, \qquad b = \cos\tau, \qquad c = \sin\tau,$$

par conséquent

$$\frac{c}{b} = \operatorname{tang}\tau;$$

et de plus, eu égard aux formules (16),

$$\frac{\mathfrak{c}}{\mathfrak{b}} = \frac{a D_x\zeta + b D_y\zeta + c(1 + D_z\zeta)}{a D_x\eta + b(1 + D_y\eta) + c D_z\eta} = \frac{\cos\tau D_y\zeta + \sin\tau(1 + D_z\zeta)}{\cos\tau(1 + D_y\eta) + \sin\tau D_z\eta},$$

ou, ce qui revient au même,

$$\frac{\mathfrak{c}}{\mathfrak{b}} = \frac{D_y\zeta + (1 + D_z\zeta)\operatorname{tang}\tau}{1 + D_y\eta + D_z\eta \operatorname{tang}\tau};$$

il est clair que, dans la formule (20), on pourra supposer à volonté la valeur de φ déterminée ou par l'équation (19) ou par la suivante :

$$\operatorname{tang}(\varphi + \tau) = \frac{D_y\zeta + (1 + D_z\zeta)\operatorname{tang}\tau}{1 + D_y\eta + D_z\eta \operatorname{tang}\tau}. \tag{25}$$

Pareillement on pourra supposer à volonté, dans la formule (22), l'angle χ déterminé ou par l'équation (21) ou par la suivante :

$$\operatorname{tang}(\chi + \tau) = \frac{D_z\xi + (1 + D_x\xi)\operatorname{tang}\tau}{1 + D_z\zeta + D_x\zeta \operatorname{tang}\tau}; \tag{26}$$

et, dans la formule (24), l'angle ψ déterminé ou par l'équation (23) ou par la suivante :

$$\operatorname{tang}(\psi + \tau) = \frac{D_x\eta + (1 + D_y\eta)\operatorname{tang}\tau}{1 + D_x\xi + D_y\xi \operatorname{tang}\tau}. \tag{27}$$

Des formules jusqu'ici obtenues se déduisent diverses conséquences

dignes de remarque, et d'abord il résulte de la formule (15) que *le rapport*

$$\frac{1}{1+\varepsilon}$$

varie avec la direction du demi-axe OA *de manière à pouvoir être constamment représenté par le rayon vecteur d'un ellipsoïde dont l'équation serait*

$$\begin{aligned} 1 = {} & [\mathrm{x}(1 + D_x\xi) + \mathrm{y} D_y\xi + \mathrm{z} D_z\xi]^2 \\ & + [\mathrm{x} D_x\eta + \mathrm{y}(1 + D_y\eta) + \mathrm{z} D_z\eta]^2 \\ & + [\mathrm{x} D_x\zeta + \mathrm{y} D_y\zeta + \mathrm{z}(1 + \mathrm{z} D_z\zeta]^2, \end{aligned} \tag{28}$$

les lettres x, y, z désignant les coordonnées courantes de cet ellipsoïde. Il est d'ailleurs bon d'observer que l'équation (15) est précisément celle qu'on obtient quand on élimine $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}$ de l'équation (6), à l'aide des formules (16). Si, à l'aide des mêmes formules, on éliminait a, b, c de l'équation (2), on obtiendrait une autre équation de laquelle il résulterait que *le binome*

$$1 + \varepsilon,$$

considéré comme une quantité qui varie avec la direction du demi-axe O'A', *est représenté par le rayon vecteur* r *d'un second ellipsoïde.* Nous appellerons *dilatations ou condensations principales* celles qui correspondent aux trois axes de l'un ou de l'autre ellipsoïde, et parmi lesquelles se rencontrent toujours les dilatations ou condensations *maximum* et *minimum*. Cela posé, il est clair que *les trois directions dans lesquelles se mesureront les dilatations ou condensations linéaires seront celles de trois demi-axes qui se couperont à angles droits.* Ces conclusions s'accordent avec les formules que j'ai données en 1822, dans le Volume II des *Exercices de Mathématiques*. (*Voir* la page 60 et les suivantes.) [1].

On peut encore conclure généralement de l'équation (10), après en

[1] *OEuvres de Cauchy*, S. II, T. VII, p. 82 et suiv.

avoir éliminé $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, à l'aide des formules (16), que, *si le rapport*

$$\frac{1}{(1+\varepsilon)\sin\delta}$$

varie avec la direction du demi-axe OA, *il se trouvera représenté par le carré du rayon vecteur d'une surface du quatrième degré dont l'équation sera*

$$
\begin{aligned}
(29)\qquad 1 = {} & [(\mathrm{x}\mathrm{D}_x + \mathrm{y}\mathrm{D}_y + \mathrm{z}\mathrm{D}_z)(y\zeta - z\eta)]^2 \\
& + [(\mathrm{x}\mathrm{D}_x + \mathrm{y}\mathrm{D}_y + \mathrm{z}\mathrm{D}_z)(z\xi - x\zeta)]^2 \\
& + [(\mathrm{x}\mathrm{D}_x + \mathrm{y}\mathrm{D}_y + \mathrm{z}\mathrm{D}_z)(x\eta - y\xi)]^2.
\end{aligned}
$$

Si, au contraire, à l'aide des formules (16), on éliminait a, b, c de l'équation (10), on conclurait de l'équation résultante que *le rapport*

$$\frac{1+\varepsilon}{\sin\delta},$$

considéré comme variable avec la direction du demi-axe O'A', *peut être représenté par le carré du rayon vecteur d'une autre surface du quatrième degré.*

Enfin on conclura des formules (11) et (16) que *la tangente de chacun des angles* φ, χ, ψ *varie avec la direction du demi-axe* OA, *ou bien encore avec la direction du demi-axe* O'A', *de manière à être constamment représentée par le rapport entre les carrés des rayons vecteurs de deux surfaces du second degré.*

Concevons à présent qu'on cherche la rotation moyenne du système de points matériels donné, non plus autour de trois demi-axes parallèles à ceux des x, y et z positives, mais autour de trois autres demi-axes OA, OB, OC rectangulaires entre eux. Supposons que les cosinus des angles formés, avec les demi-axes des x, y et z positives, par les demi-axes OA ou OB ou OC, soient respectivement

$$a,\quad b,\quad c$$

ou

$$a',\quad b',\quad c'$$

ou

$$a'',\quad b'',\quad c'',$$

les trois nouveaux demi-axes OA, OB, OC étant tels qu'un mouvement de rotation imprimé à leur système puisse les faire coïncider, le premier avec le demi-axe des x positives, le deuxième avec le demi-axe des y positives, le troisième avec le demi-axe des z positives. Les neuf cosinus

$$a,\ b,\ c;\qquad a',\ b',\ c';\qquad a'',\ b'',\ c''$$

seront liés entre eux non seulement par les formules

$$
(30)\quad \begin{cases}
a^2 + b^2 + c^2 = 1, & a'^2 + b'^2 + c'^2 = 1, \quad a''^2 + b''^2 + c''^2 = 1 \\
a'a'' + b'b'' + c'c'' = 0, & a''a + b''b + c''c = 0, \quad aa' + bb' + cc' = 0,
\end{cases}
$$

mais encore par la suivante :

$$(31)\qquad ab'c'' - ab''c' + a'b''c - a'bc'' + a''bc' - a''b'c = 1.$$

Cela posé, pour obtenir les rotations moyennes du système de points matériels donné autour des nouveaux demi-axes, il suffira d'opérer comme s'il s'agissait d'une simple transformation de coordonnées rectangulaires, et de remplacer en conséquence dans les valeurs de φ, χ, ψ déterminées par le système des formules (19) et (20), ou (21) et (22), ou (23) et (24), non seulement

$$\xi,\quad \eta,\quad \zeta$$

par les trinomes

$$a\xi + b\eta + c\zeta,\quad a'\xi + b'\eta + c'\zeta,\quad a''\xi + b''\eta + c''\zeta,$$

mais encore les caractéristiques

$$\mathrm{D}_x,\quad \mathrm{D}_y,\quad \mathrm{D}_z$$

par

$$a\mathrm{D}_x + b\mathrm{D}_y + c\mathrm{D}_z,\quad a'\mathrm{D}_x + b'\mathrm{D}_y + c'\mathrm{D}_z,\quad a''\mathrm{D}_x + b''\mathrm{D}_y + c''\mathrm{D}_z.$$

Ainsi, en particulier, si l'on nomme θ la rotation moyenne du système autour du demi-axe OA qui forme avec ceux des coordonnées positives des angles dont les cosinus sont

$$a,\quad b,\quad c,$$

c'est-à-dire, si l'on désigne par θ une quantité dont la valeur numérique soit l'angle qui mesure cette rotation moyenne, en supposant d'ailleurs θ positif ou négatif, suivant que cette rotation moyenne s'exécute de droite à gauche ou de gauche à droite autour du demi-axe OA ; on aura

$$\theta = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \varpi \, d\tau, \tag{32}$$

ϖ étant ce que devient l'angle φ déterminé par l'équation (19) ou (25), quand on remplace dans cette équation

$$\eta, \quad \zeta$$

par

$$a'\xi + b'\eta + c'\zeta, \quad a''\xi + b''\eta + c''\zeta$$

et

$$D_x, \quad D_y$$

par

$$a' D_x + b' D_y + c' D_z, \quad a'' D_x + b'' D_y + c'' D_z.$$

En conséquence, la valeur de ϖ, qui devra être substituée dans la formule (32), sera celle que déterminera l'équation

$$\begin{aligned} \text{tang}(\varpi + \tau) \\ = \frac{\text{tang}\,\tau + [a' D_x + b' D_y + c' D_z + (a'' D_x + b'' D_y + c'' D_z)\,\text{tang}\,\tau](a''\xi + b''\eta + c''\zeta)}{1 + [a' D_x + b' D_y + c' D_z + (a'' D_x + b'' D_y + c'' D_z)\,\text{tang}\,\tau](a'\xi + b'\eta + c'\zeta)}. \end{aligned} \tag{33}$$

Dans cette dernière équation, les six quantités

$$a', \quad b', \quad c', \qquad a'', \quad b'', \quad c''$$

se trouvent liées les unes aux autres, et aux quantités a, b, c, par les cinq dernières des formules (30), à l'une desquelles on peut substituer la formule (31). On pourra donc supposer cinq de ces quantités déterminées en fonction de la sixième, considérée comme constante arbitraire, et des cosinus a, b, c. Mais la constante arbitraire dont il s'agit devra toujours disparaître de la valeur de θ que fournira l'équation (32). Car cette valeur de θ, ou la rotation moyenne du système de points matériels autour du demi-axe OA, ne pourra dépendre que de la direction de ce demi-axe, et par conséquent des cosinus a, b, c.

Faisons voir maintenant comment on peut obtenir cinq des quantités

$$a', \quad b', \quad c', \qquad a'', \quad b'', \quad c'',$$

par exemple les cinq dernières, exprimées en fonction de la première a' et de a, b, c.

Remarquons d'abord que, eu égard à la formule (31), la troisième et la quatrième des équations (30) donneront

$$a'' = bc' - b'c, \qquad b'' = ca' - c'a, \qquad c'' = ab' - a'b. \tag{34}$$

D'autre part, les deux premières et la dernière des formules (30) donneront non seulement

$$(b^2 + c^2)(b'^2 + c'^2) - (bb' + cc')^2 = 1 - a^2 - a'^2,$$

et par suite

$$bc' - b'c = \pm(1 - a^2 - a'^2)^{\frac{1}{2}},$$

mais encore

$$bb' + cc' = -aa';$$

puis on en conclura

$$b' = -\frac{aba' \pm c(1 - a^2 - a'^2)^{\frac{1}{2}}}{b^2 + c^2}, \qquad c' = -\frac{aca' \mp b(1 - a^2 - a'^2)^{\frac{1}{2}}}{b^2 + c^2}. \tag{35}$$

Il ne reste plus qu'à substituer les valeurs précédentes de b' et de c' dans les formules (34), pour obtenir les cinq quantités

$$b' \quad c', \qquad a'', \quad b'', \quad c'',$$

exprimées en fonction de a, b, c et de a'.

Au reste, θ devant être indépendant de a', on peut, dans le second membre de la formule (33), se borner à substituer non pas les valeurs générales des quantités

$$b', \quad c', \qquad a'', \quad b'', \quad c'',$$

déduites des formules (34) et (35), mais les valeurs particulières qu'acquièrent ces quantités, quand on attribue au cosinus a' une valeur particulière, par exemple quand on suppose

$$a' = 0.$$

Dans cette hypothèse, on tire des formules (34) et (35)

$$\frac{b'}{c} = \frac{c'}{-b} = \frac{a''}{-(b^2+c^2)} = \frac{b''}{ab} = \frac{c''}{ac} = \mp \frac{(1-a^2)^{\frac{1}{2}}}{b^2+c^2},$$

ou, ce qui revient au même, eu égard à l'équation $b^2 + c^2 = 1 - a^2$,

$$(36) \qquad \frac{b'}{-c} = \frac{c'}{b} = \frac{a''}{1-a^2} = \frac{b''}{-ab} = \frac{c''}{-ac} = \pm \frac{1}{(1-a^2)^{\frac{1}{2}}}.$$

Si l'on substitue les valeurs de

$$b', \quad c', \qquad a'', \quad b'', \quad c''$$

tirées de cette dernière formule dans l'équation (33), en réduisant de plus a' à zéro, on trouvera

$$(37) \quad \operatorname{tang}(\varpi+\tau)$$
$$= \frac{\operatorname{tang}\tau + \{b\mathrm{D}_z - c\mathrm{D}_y + [\mathrm{D}_x - a(a\mathrm{D}_x + b\mathrm{D}_y + c\mathrm{D}_z)]\operatorname{tang}\tau\} \dfrac{\xi - a(a\xi + b\eta + c\zeta)}{1-a^2}}{1 + \{b\mathrm{D}_z - c\mathrm{D}_y + [\mathrm{D}_x - a(a\mathrm{D}_x + b\mathrm{D}_y + c\mathrm{D}_z)]\operatorname{tang}\tau\} \dfrac{b\zeta - c\eta}{1-a^2}}.$$

En conséquence, il suffit de joindre la formule (37) à la formule (32) pour obtenir la rotation moyenne du système de points matériels donné, autour d'un demi-axe quelconque OA, qui forme, avec les demi-axes des coordonnées positives, des angles dont les cosinus sont représentés par a, b, c.

Si l'on adoptait, relativement aux demi-axes des coordonnées positives, une hypothèse contraire à celle que nous avons admise jusqu'ici, en supposant ces demi-axes disposés de telle manière que les mouvements de rotation exécutés de droite à gauche autour de ces demi-axes fussent dans les plans coordonnés des mouvements rétrogrades; alors la valeur de θ, déterminée par le système des formules (32) et (37), représenterait toujours, au signe près, l'angle qui mesurerait la rotation moyenne du système de points matériels donné autour du demi-axe OA correspondant aux angles dont les cosinus sont a, b, c : mais cette quantité serait positive ou négative, suivant que la rotation

moyenne dont il s'agit s'effectuerait de gauche à droite ou de droite à gauche autour du demi-axe OA.

En terminant ce paragraphe, nous rappellerons la relation qui existe entre la dilatation ou la condensation du volume en un point donné, et les dilatations ou condensations linéaires principales mesurées en ce même point, suivant trois axes rectangulaires entre eux. Pour obtenir cette relation, considérons un très petit élément de volume compris dans le premier état du système, sous une surface sphérique dont le rayon soit désigné par r, le centre étant le point O′, qui a pour coordonnées x, y, z. Dans le second état du système, la molécule $\mathfrak{m}$, qui occupait primitivement le point O, se trouvera déplacée et transportée au point O′, dont les coordonnées seront

$$x+\xi, \quad y+\eta, \quad z+\zeta;$$

de plus, d'après ce qui a été dit précédemment, la sphère très petite, dont le rayon était représenté par r, et le volume $\triangledown$ par l'expression

$$(38) \qquad \triangledown = \frac{4}{3}\pi r^3,$$

se trouvera sensiblement transformée en un ellipsoïde. En effet, soit m une seconde molécule située, dans le premier état du système, à la distance r de la molécule $\mathfrak{m}$, et nommons $r+\rho$ la nouvelle distance qui, dans le second état du système, sépare la molécule m de la molécule $\mathfrak{m}$. Si, en attribuant à r une valeur très petite, on pose

$$r+\rho = (1+\varepsilon)r,$$

la valeur de ε différera très peu de celle que fournit l'équation (15), et par suite la nouvelle distance $r+\rho$ se confondra sensiblement, en grandeur comme en direction, avec le rayon vecteur $r\mathfrak{r}$ d'un ellipsoïde semblable à celui dont le rayon vecteur a été précédemment désigné par $\mathfrak{r}$. (*Voir* la page 353.) Donc le petit volume primitivement désigné par

$$\triangledown = \frac{4}{3}\pi r^3$$

se trouvera transformé dans le second état du système, en un autre volume $\mathcal{V}_{,}$ terminé par la surface courbe qu'engendrera un rayon vecteur dont la longueur, mesurée dans le sens du rayon vecteur τ, se réduira sensiblement au produit

$$r\tau,$$

et rigoureusement à un produit de la forme

$$r\tau(1+i),$$

i désignant une quantité qui deviendra infiniment petite avec r.

D'ailleurs, si l'on nomme

$$\varepsilon', \quad \varepsilon'', \quad \varepsilon'''$$

les dilatations linéaires principales,

$$1+\varepsilon', \quad 1+\varepsilon'', \quad 1+\varepsilon'''$$

représenteront les trois axes principaux de l'ellipsoïde qui a pour rayon vecteur τ. Par suite, les valeurs de cet ellipsoïde et de l'ellipsoïde semblable, qui aura pour rayon vecteur le produit $r\tau$, seront respectivement

$$\frac{4}{3}\pi(1+\varepsilon')(1+\varepsilon'')(1+\varepsilon'''),$$

$$\frac{4}{3}\pi r^3(1+\varepsilon')(1+\varepsilon'')(1+\varepsilon''').$$

D'autre part, il suit du théorème IX de la Note précédente que le rapport entre les volumes

$$\mathcal{V}_{,} \quad \text{et} \quad \frac{4}{3}\pi r^3(1+\varepsilon')(1+\varepsilon'')(1+\varepsilon''')$$

engendrés par deux rayons vecteurs

$$r\tau(1+i) \quad \text{et} \quad r\tau,$$

qui, dans le second état du système, tournent simultanément autour de la molécule m, de manière à offrir des longueurs variables avec leur direction commune, est une moyenne entre les diverses valeurs

qu'acquiert successivement le cube

$$(1+i)^3$$

du rapport de ces rayons vecteurs. On aura donc

$$\mathcal{V}_{,}=\frac{4}{3}\pi r^3(1+\varepsilon')(1+\varepsilon'')(1+\varepsilon''')(1+\iota)^3, \tag{39}$$

ι désignant une quantité moyenne entre les diverses valeurs de i, par conséquent une quantité qui deviendra infiniment petite avec r et i. Soit maintenant υ la dilatation du volume mesurée, dans le second état du système, au point occupé par la molécule m. Cette dilatation ne sera autre chose que la limite dont le rapport

$$\frac{\mathcal{V}_{,}}{\mathcal{V}}$$

s'approchera indéfiniment pour des valeurs numériques décroissantes de r et de ι. Or, comme on tirera des formules (38) et (39)

$$\frac{\mathcal{V}_{,}}{\mathcal{V}}=(1+\varepsilon')(1+\varepsilon'')(1+\varepsilon''')(1+\iota)^3,$$

on en conclura, en passant aux limites,

$$1+\upsilon=(1+\varepsilon')(1+\varepsilon'')(1+\varepsilon'''). \tag{40}$$

Telle est en effet la relation générale qui existe entre la dilatation du volume et les dilatations linéaires principales

$$\varepsilon', \quad \varepsilon'', \quad \varepsilon'''.$$

II. — *Formules relatives aux changements de forme infiniment petits que peut subir un système de points matériels.*

Les diverses formules obtenues dans le premier paragraphe se simplifient lorsque le changement de forme du système de points matériels donné devient infiniment petit, ou plutôt, lorsque le changement de forme est assez petit pour qu'on puisse négliger les puissances supérieures et les produits des déplacements moléculaires et des quantités du même ordre, par exemple, des dérivées de ces déplacements et des dilatations linéaires. Alors la formule (15) du paragraphe I, réduite à

$$(1)\qquad \varepsilon = a^2 D_x\xi + b^2 D_y\eta + c^2 D_z\zeta + bc(D_y\zeta + D_z\eta) + ca(D_z\xi + D_x\zeta) + ab(D_x\eta + D_y\xi),$$

ou, ce qui revient au même, à

$$(2)\qquad \varepsilon = (aD_x + bD_y + cD_z)(a\xi + b\eta + c\zeta),$$

fournira une valeur très simple de la dilatation linéaire mesurée suivant une droite qui formait primitivement avec les demi-axes des coordonnées positives des angles dont les cosinus étaient a, b, c. Il est important d'observer que, dans le cas où elle devient négative, la dilatation ε représente une véritable condensation prise avec le signe $-$. La formule (1), en vertu de laquelle $\frac{1}{\varepsilon}$ représente, au signe près, le carré du rayon vecteur d'une surface du second degré, entraîne immédiatement le théorème suivant, déjà énoncé dans le Volume II des *Exercices de Mathématiques :*

Théorème I. — *Supposons que, par l'effet d'une cause quelconque, un système de points matériels passe d'un état naturel ou artificiel à un second état très peu différent du premier, et qu'à partir d'un point donné* $\mathfrak{m}$ *de ce système on porte, sur chacun des demi-axes aboutissant au même point, une longueur égale à l'unité divisée par la racine carrée de la condensation linéaire mesurée suivant le demi-axe que l'on considère. Cette longueur sera le rayon vecteur d'un ellipsoïde qui aura pour centre le point* $\mathfrak{m}$, *et dont les trois axes correspondront à trois dilatations ou condensations principales. Quant aux autres dilatations ou condensations, elles seront symétriquement distribuées autour de ces trois axes. Dans certains cas, l'ellipsoïde dont il s'agit se trouvera remplacé par deux hyperboloïdes à une nappe ou à deux nappes, qui, étant conjugués l'un à l'autre, auront le même centre avec les mêmes axes, et seront touchés à l'infini par une même surface conique du second degré. Ces cas sont ceux où il y aura, autour d'un point donné, dilatation dans un sens, condensation dans un*

autre. Alors la surface conique dont il s'agit séparera la région dilatée, qui correspondra au premier hyperboloïde, de la région condensée, qui correspondra au second, et les génératrices de cette surface conique indiqueront les directions suivant lesquelles il n'y aura ni dilatation, ni condensation. Ajoutons que, parmi les condensations ou dilatations principales, on rencontrera toujours, si le corps est dilaté dans tous les sens, ou condensé dans tous les sens autour du point $\mathfrak{m}$, *un maximum et un minimum de dilatation, ou bien un maximum et un minimum de condensation; ou, si le contraire arrive, une dilatation minimum avec une condensation maximum.*

Il peut arriver que les trois dilatations ou condensations principales, ou au moins deux d'entre elles, deviennent équivalentes ou se réduisent à zéro. Alors, l'ellipsoïde et les hyperboloïdes mentionnés dans le théorème précédent deviennent des surfaces de révolution ou des cylindres, et peuvent même se réduire à une sphère ou à un système de deux plans parallèles. Ainsi, en particulier, lorsque le système de points matériels donné est dilaté dans tous les sens ou condensé dans tous les sens, et que les dilatations ou condensations principales sont équivalentes, l'ellipsoïde se change en une sphère, et la dilatation ou condensation reste la même dans toutes les directions autour du point $\mathfrak{m}$.

Si de l'équation (1) on tire successivement les trois valeurs de la la dilatation ε correspondantes à trois demi-axes rectangulaires, qui forment, avec les demi-axes des coordonnées, des angles dont les cosinus soient

$$a,\quad b,\quad c;\qquad a',\quad b',\quad c';\qquad a'',\quad b'',\quad c'',$$

on obtiendra pour ces trois valeurs les trois polynomes

$$\begin{gathered}
a^2 D_x\xi + b^2 D_y\eta + c^2 D_z\zeta \\
+ bc(D_y\zeta + D_z\eta) + ca(D_z\xi + D_x\zeta) + ab(D_x\eta + D_y\xi), \\
a'^2 D_x\xi + b'^2 D_y\eta + c'^2 D_z\zeta \\
+ b'c'(D_y\zeta + D_z\eta) + c'a'(D_z\xi + D_x\zeta) + a'b'(D_x\eta + D_y\xi), \\
a''^2 D_x\xi + b''^2 D_y\eta + c''^2 D_z\zeta \\
+ b''c''(D_y\zeta + D_z\eta) + c''a''(D_z\xi + D_x\zeta) + a''b''(D_x\eta + D_y\xi);
\end{gathered}$$

et par suite, en ayant égard aux formules

$$(3)\quad \begin{cases} a^2 + a'^2 + a''^2 = 1, & b^2 + b'^2 + b''^2 = 1, & c^2 + c'^2 + c''^2 = 1, \\ bc + b'c' + b''c'' = 0, & ca + c'a' + c''a'' = 0, & ab + a'b' + a''b'' = 0, \end{cases}$$

on reconnaitra que la somme de ces trois valeurs se réduit à

$$D_x\xi + D_y\eta + D_z\zeta.$$

D'ailleurs les dilatations linéaires principales ε', ε'', ε''' correspondent à trois axes rectangulaires entre eux. On peut donc encore énoncer la proposition suivante :

Théorème II. — *Les mêmes choses étant posées que dans le théorème I, la somme des dilatations linéaires mesurées en un point donné, suivant trois directions qui, dans le premier état du système, étaient rectangulaires entre elles, restera toujours équivalente à la somme des dilatations linéaires principales ε', ε'', ε''', déterminée par la formule*

$$(4)\qquad \varepsilon' + \varepsilon'' + \varepsilon''' = D_x\xi + D_y\eta + D_z\zeta.$$

Lorsqu'en considérant les déplacements moléculaires et, par suite, les dilatations comme des quantités infiniment petites du premier ordre, on néglige, dans les diverses formules, les infiniment petits d'un ordre supérieur au premier, l'équation (40) du paragraphe I donne simplement

$$(5)\qquad \upsilon = \varepsilon' + \varepsilon'' + \varepsilon''',$$

puis de celle-ci, combinée avec la formule (4), on tire

$$(6)\qquad \upsilon = D_x\xi + D_y\eta + D_z\zeta.$$

On peut donc énoncer encore la proposition suivante :

Théorème III. — *Les mêmes choses étant posées que dans le théorème I, la dilatation du volume en chaque point sera équivalente, non seulement à la somme des dilatations linéaires principales, mais aussi à la somme des dérivées qu'on obtient lorsque les déplacements moléculaires, mesurés parallèlement aux axes coordonnés des x, y, z, sont différentiés, le premier par rapport à x, le deuxième par rapport à y, le troisième par rapport à z.*

Concevons maintenant que, les déplacements moléculaires étant toujours considérés comme infiniment petits du premier ordre, on néglige les quantités infiniment petites du second ordre ou d'un ordre supérieur dans les formules du paragraphe I qui déterminent, soit la rotation d'un axe autour d'une molécule donnée m, soit la rotation moyenne du système autour des demi-axes menés par cette molécule, parallèlement aux demi-axes des coordonnées positives, ou même parallèlement à des demi-axes quelconques. On pourra, dans les formules (16), (17) du paragraphe I, réduire le binome $1 + \varepsilon$ à l'unité, et, par suite, on tirera de ces formules, jointes à l'équation (10) du même paragraphe,

$$(7)\qquad \begin{aligned} \delta^2 = {} & [(aD_x + bD_y + cD_z)(b\zeta - c\eta)]^2 \\ & + [(aD_x + bD_y + cD_z)(c\xi - a\zeta)]^2 \\ & + [(aD_x + bD_y + cD_z)(a\xi - b\eta)]^2. \end{aligned}$$

Cette dernière équation déterminera immédiatement la rotation infiniment petite qu'exécutera, en se déformant, autour de la molécule m, un demi-axe dont la direction primitive formait, avec les demi-axes des coordonnées positives, les angles correspondants aux trois cosinus a, b, c.

Quant à la rotation moyenne du système autour d'un demi-axe mené par la molécule m, parallèlement au demi-axe des x positives, elle se déduira immédiatement des équations (19) et (20) [§ I], dont la première donne, quand on néglige les infiniment petits du second ordre et d'un ordre supérieur,

$$(8)\qquad \begin{aligned} \varphi & = (\cos\tau\, D_y + \sin\tau\, D_z)(\zeta\cos\tau - \eta\sin\tau) \\ & = \cos^2\tau\, D_y\zeta - \sin^2\tau\, D_z\eta - \sin\tau\cos\tau\,(D_y\eta - D_z\zeta), \end{aligned}$$

ou, ce qui revient au même,

$$(9)\qquad \varphi = \frac{1}{2}(D_y\zeta - D_z\eta) + \frac{1}{2}(D_y\zeta + D_z\eta)\cos 2\tau - \frac{1}{2}(D_y\eta - D_z\zeta)\sin 2\tau.$$

Cela posé, comme on a généralement

$$\int_0^{2\pi} \cos 2\tau \, d\tau = \int_0^{2\pi} \sin 2\tau \, d\tau = 0,$$

la formule (20) du paragraphe I donnera

$$(10) \quad \begin{cases} \alpha = \frac{1}{2}(D_y\zeta - D_z\eta). \\ \text{On aura de même} \\ \beta = \frac{1}{2}(D_z\xi - D_x\zeta), \\ \gamma = \frac{1}{2}(D_x\eta - D_y\xi). \end{cases}$$

Telles sont les valeurs de α, β, γ qui, dans l'hypothèse admise, se déduiront des formules (20), (22), (24) du paragraphe I. En conséquence, on pourra énoncer la proposition suivante :

Théorème IV. — *Les mêmes choses étant posées que dans le théorème I, les moitiés des trois binomes*

$$D_y\zeta - D_z\eta, \quad D_z\xi - D_x\zeta, \quad D_x\eta - D_y\xi$$

représenteront les rotations moyennes qu'exécutera le système de points matériels donné autour de trois demi-axes menés par la molécule m, *parallèlement aux demi-axes des coordonnées positives, c'est-à-dire qu'elles représenteront les trois angles infiniment petits qui mesureront ces rotations moyennes dans trois plans parallèles aux plans coordonnés, chacun de ces angles étant pris avec le signe + ou avec le signe —, suivant qu'il pourra être considéré comme décrit par un rayon mobile, en vertu d'un mouvement de rotation direct, ou en vertu d'un mouvement de rotation rétrograde.*

Si l'on cherchait la rotation moyenne θ exécutée par le système de points matériels, non plus autour d'un demi-axe parallèle à celui des x positives, mais autour d'un demi-axe qui formerait, avec ceux des coordonnées positives, les angles correspondants aux cosinus a, b, c; il faudrait à la formule (20) du paragraphe I substituer la formule (32)

du même paragraphe, en supposant la valeur de ϖ déterminée par la formule (33); ou, ce qui revient au même, il faudrait remplacer, dans la première des équations (10), α par θ,

$$\eta, \quad \zeta$$

par

$$a'\xi + b'\eta + c'\zeta, \quad a''\xi + b''\eta + c''\zeta,$$

et

$$D_y, \quad D_z$$

par

$$a'D_x + b'D_y + c'D_z, \quad a''D_x + b''D_y + c''D_z;$$

les cosinus

$$a', \quad b', \quad c', \qquad a'', \quad b'', \quad c''$$

étant d'ailleurs liés entre eux et avec les cosinus

$$a, \quad b, \quad c$$

par les formules (30), (31) du paragraphe I. Or, comme on aura dans ce cas

$$(11) \qquad b'c'' - b''c' = a, \qquad c'a'' - c''a' = b, \qquad a'b'' - a''b' = c,$$

on trouvera, en opérant comme on vient de le dire,

$$(12) \qquad \theta = \frac{a}{2}(D_y\zeta - D_z\eta) + \frac{b}{2}(D_z\xi - D_x\zeta) + \frac{c}{2}(D_x\eta - D_y\xi).$$

Lorsque les mouvements directs de rotation, exécutés autour de l'origine dans les plans coordonnés par des rayons vecteurs mobiles, sont en même temps, comme on l'a supposé jusqu'ici, des mouvements exécutés de droite à gauche autour des demi-axes des coordonnées positives, la valeur de θ, déterminée par la formule (12), est positive ou négative suivant que la rotation moyenne du système de points matériels, autour du demi-axe correspondant aux cosinus a, b, c, s'effectue de droite à gauche ou de gauche à droite. Donc la valeur de θ, déterminée par la formule (12), représente l'angle infiniment petit qui sert de mesure à cette rotation moyenne, pris dans le premier cas avec le signe +, dans le second cas avec le signe —.

De l'équation (12) jointe aux formules (10), on tire

$$(13) \qquad \theta = a\alpha + b\beta + c\gamma.$$

On a d'ailleurs identiquement

$$(a\alpha+b\beta+c\gamma)^2+(b\gamma-c\beta)^2+(c\alpha-a\gamma)^2+(a\beta-b\alpha)^2$$
$$=(a^2+b^2+c^2)(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2).$$

Donc, eu égard à l'équation (13) et à la formule

$$a^2+b^2+c^2=1,$$

on trouvera

$$(14)\qquad \theta^2+(b\gamma-c\beta)^2+(c\alpha-a\gamma)^2+(a\beta-b\alpha)^2=\alpha^2+\beta^2+\gamma^2.$$

En vertu de cette dernière équation, la valeur numérique de θ deviendra un *maximum* lorsqu'on aura

$$b\gamma-c\beta=0,\qquad c\alpha-a\gamma=0,\qquad a\beta-b\alpha=0;$$

par conséquent

$$(15)\qquad \frac{a}{\alpha}=\frac{b}{\beta}=\frac{c}{\gamma}=\pm\frac{1}{(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)^{\frac{1}{2}}}.$$

D'autre part on tirera des formules (13) et (15)

$$(16)\qquad \theta=\pm(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)^{\frac{1}{2}}.$$

Si, pour fixer les idées, on réduit le double signe au signe $+$, l'équation (16) fournira précisément le *maximum* de la rotation moyenne exécutée par le système de points matériels autour d'un demi-axe aboutissant à la molécule $\mathfrak{m}$. Ce *maximum* est ce que nous appellerons la *rotation moyenne principale*; si on le désigne par Θ, on trouvera non seulement

$$(17)\qquad \Theta=(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)^{\frac{1}{2}},$$

mais encore, en vertu de la formule (13),

$$(18)\qquad a=\frac{\alpha}{\Theta},\qquad b=\frac{\beta}{\Theta},\qquad c=\frac{\gamma}{\Theta}.$$

Ces dernières équations détermineront les cosinus a, b, c des angles formés avec les demi-axes des coordonnées positives par le demi-axe

autour duquel s'exécutera de droite à gauche la rotation moyenne principale.

Concevons maintenant qu'à partir de la molécule $\mathfrak{m}$ on porte une longueur représentée par la rotation moyenne principale sur le demi-axe autour duquel s'exécutera de droite à gauche cette rotation moyenne. Les projections algébriques de cette longueur sur les axes de x, y, z seront évidemment représentées par les produits

$$\Theta a,\quad \Theta b,\quad \Theta c,$$

les valeurs des cosinus a, b, c étant celles que fournissent les équations (18), ou, ce qui revient au même, par les quantités

$$\alpha,\quad \beta,\quad \gamma$$

que déterminent les équations (10). D'ailleurs, en vertu du théorème IV, ces mêmes quantités

$$\alpha,\quad \beta,\quad \gamma$$

représenteront aussi les rotations moyennes du système de points matériels autour de trois demi-axes menés par la molécule $\mathfrak{m}$, parallèlement à ceux des coordonnées positives. On pourra donc énoncer encore la proposition suivante :

Théorème V. — *Les mêmes choses étant posées que dans le théorème I, si la rotation moyenne principale qui correspond à la molécule* $\mathfrak{m}$ *est représentée par une longueur portée, à partir de cette molécule, sur le demi-axe autour duquel cette rotation s'effectue de droite à gauche, les projections algébriques de la même longueur, sur les axes des* x, y, z, *représenteront les rotations moyennes du système autour de trois axes parallèles menés par la molécule* $\mathfrak{m}$.

Concevons à présent que les quantités a, b, c cessent de se confondre avec les trois rapports

$$\frac{\alpha}{\Theta},\quad \frac{\beta}{\Theta},\quad \frac{\gamma}{\Theta}$$

et représentent les cosinus des angles formés avec les demi-axes des coordonnées positives par un demi-axe distinct de celui autour duquel s'effectue de droite à gauche la rotation moyenne principale. Le cosinus de l'angle compris entre ces deux demi-axes sera, d'après une formule connue,

$$a\frac{\alpha}{\Theta}+b\frac{\beta}{\Theta}+c\frac{\gamma}{\Theta}.$$

D'ailleurs, en multipliant ce cosinus par Θ, on obtiendra pour produit le trinome

$$a\alpha+b\beta+c\gamma;$$

et ce trinome, en vertu de la formule (12) ou (13), représentera la rotation moyenne autour du nouveau demi-axe, c'est-à-dire l'angle qui mesurera cette rotation moyenne, pris avec le signe $+$ ou le signe $-$, suivant que cette même rotation s'effectuera de droite à gauche ou de gauche à droite, autour du demi-axe dont il s'agit. On pourra donc encore énoncer la proposition suivante :

Théorème VI. — *Les mêmes choses étant posées que dans le théorème I, si la rotation moyenne principale qui correspond à la molécule* m *est représentée par une longueur portée à partir de cette molécule sur le demi-axe autour duquel cette rotation s'effectue de droite à gauche, la rotation moyenne autour d'un autre demi-axe sera le produit de la rotation moyenne principale par le cosinus de l'angle compris entre les deux axes.*

Corollaire. — Si le nouveau demi-axe est perpendiculaire au premier, le cosinus de l'angle compris entre eux s'évanouira, et par suite on pourra en dire autant de la rotation moyenne effectuée autour du nouveau demi-axe. Si au contraire l'angle compris entre les deux demi-axes est aigu ou obtus, le cosinus de cet angle sera positif dans le premier cas, négatif dans le second, en même temps que la rotation moyenne dont il s'agit. Donc cette rotation s'effectuera, dans le premier cas, de droite à gauche; dans le second cas, de gauche à droite. Cela posé, comme le produit d'une longueur mesurée sur une droite

par le cosinus de l'angle que forme cette droite avec une autre, représente toujours au signe près la projection de la longueur sur la nouvelle droite, le sixième théorème entraînera évidemment la proposition suivante :

Théorème VII. — *Les mêmes choses étant posées que dans le théorème I, si la rotation moyenne principale qui correspond à la molécule* m *est représentée par une longueur portée, à partir de cette molécule, sur le demi-axe autour duquel cette rotation s'effectue de droite à gauche; la rotation moyenne autour d'un demi-axe quelconque sera représentée au signe près par la projection de la rotation moyenne principale sur ce demi-axe : par conséquent, elle s'évanouira si le nouveau demi-axe est perpendiculaire au premier. Dans le cas contraire, elle s'effectuera de droite à gauche ou de gauche à droite, suivant que l'angle compris entre les deux demi-axes sera positif ou négatif.*

L'interprétation que nous avons donnée de la formule (12) et les théorèmes que nous venons d'en déduire, supposent les demi-axes des coordonnées positives tellement disposés que les mouvements de rotation, exécutés de droite à gauche autour de ces demi-axes, soient, dans les plans coordonnés, des mouvements directs. Dans l'hypothèse contraire, la valeur de Θ, déterminée par la formule (12), serait positive ou négative suivant que la rotation moyenne, représentée par la valeur numérique de Θ, s'exécuterait de gauche à droite, ou de droite à gauche, autour du demi-axe correspondant aux angles dont les cosinus seraient a, b, c; et alors, dans les énoncés des théorèmes V, VI, VII, les mouvements de rotation de droite à gauche devraient être remplacés par des mouvements de rotation de gauche à droite.

Après nous être spécialement occupés des rotations moyennes, revenons à la formule (8), qui détermine simplement la rotation φ exécutée autour du demi-axe des x positives par un demi-axe primitivement renfermé dans le plan des y, z. En vertu de cette formule, la valeur numérique de la rotation φ sera équivalente à l'unité divisée par le carré du rayon vecteur de l'une des courbes du second degré, tracées dans le plan des y, z, de manière que leurs coordonnées courantes y, z vérifient les équations

$$\mathrm{y}^2 D_y\zeta - \mathrm{z}^2 D_z\eta - \mathrm{yz}(D_y\eta - D_z\zeta) = 1, \tag{19}$$

$$\mathrm{y}^2 D_y\zeta - \mathrm{z}^2 D_z\eta - \mathrm{yz}(D_y\eta - D_z\zeta) = -1. \tag{20}$$

Or il arrivera toujours nécessairement, ou que l'une de ces deux courbes sera une ellipse, l'autre étant imaginaire, ou que les deux courbes seront deux hyperboles qui offrent le même centre et les mêmes asymptotes avec des axes réels perpendiculaires entre eux. Le premier cas sera celui où, en se déformant, les axes, primitivement renfermés dans le plan des y, z, tourneront tous dans le même sens autour du demi-axe des x positives. Comme d'ailleurs celui-ci peut être un demi-axe quelconque, il est clair que la formule (8) entraînera la proposition suivante :

Théorème VIII. — *Les mêmes choses étant posées que dans le théorème I, portons à partir de la molécule* m, *sur chacun des demi-axes aboutissant à cette molécule et renfermés dans un même plan, une longueur équivalente à l'unité divisée par la racine carrée de la rotation très petite qu'exécute, en se déformant, le demi-axe que l'on considère autour d'une droite perpendiculaire au plan. Cette longueur représentera le rayon vecteur d'une ellipse qui aura pour centre la molécule* m, *et dont les deux axes, grand et petit, correspondront, si toutes les rotations s'exécutent dans le même sens, le premier à la rotation dont la valeur numérique sera un minimum, le second à la rotation dont la valeur numérique sera un maximum. Si au contraire les rotations s'exécutent les unes dans un sens, les autres en sens contraire, l'ellipse se trouvera remplacée par deux hyperboles qui, étant conjuguées l'une à l'autre, auront pour centre commun la molécule* m, *et qui offriront les mêmes asymptotes avec des axes réels, perpendiculaires entre eux. Alors ces axes réels correspondront à deux rotations effectuées en sens contraires, et dont chacune sera un minimum, abstraction faite du signe; tandis que les directions des asymptotes répondront à deux demi-axes dont les rotations s'évanouiront.*

Il est facile de déterminer analytiquement les deux rotations mentionnées dans le théorème VIII, et dont chacune offrira une valeur numérique *maximum* ou *minimum*. Si, pour plus de commodité, le plan dans lequel sont renfermés les demi-axes que l'on considère est pris pour plan des y, z, la rotation très petite φ, exécutée par un de ces demi-axes autour d'une perpendiculaire au plan, sera, comme nous l'avons expliqué, déterminée par la formule (8), ou, ce qui revient au même, par la formule (9). Donc cette rotation deviendra un *maximum* ou un *minimum*, lorsqu'à la formule (9) on joindra la suivante :

$$D_\tau \varphi = 0 \tag{21}$$

de laquelle on tirera

$$\frac{\cos 2\tau}{D_y\zeta + D_z\eta} = \frac{\sin 2\tau}{D_z\zeta - D_y\eta} = \pm \frac{1}{[(D_y\zeta + D_z\eta)^2 + (D_y\eta - D_z\zeta)^2]^{\frac{1}{2}}}. \tag{22}$$

Donc les deux rotations, dont chacune offrira, pour valeur numérique, un *maximum* ou un *minimum*, seront les deux valeurs de φ que déterminera la formule

$$\varphi = \frac{1}{2}(D_y\zeta - D_z\eta) \pm \frac{1}{2}[(D_y\zeta + D_z\eta)^2 + (D_y\eta - D_z\zeta)^2]^{\frac{1}{2}}. \tag{23}$$

D'ailleurs ces deux valeurs seront des quantités affectées du même signe, si toutes les rotations s'exécutent dans le même sens, et de signes contraires, si cette condition n'est pas remplie; mais dans tous les cas la rotation moyenne

$$\alpha = \frac{1}{2}(D_y\zeta - D_z\eta)$$

représentera la demi-somme des valeurs de φ données par l'équation (23). On peut donc énoncer la proposition suivante :

Théorème IX. — *Les mêmes choses étant posées que dans le théorème VIII, les deux rotations, dont chacune offrira une valeur numérique maximum ou minimum, fourniront une demi-somme précisément égale à la rotation moyenne.*

Si, en considérant les rotations exécutées par les divers demi-axes que renferme un même plan autour d'une droite perpendiculaire à ce plan, on cessait de faire coïncider ce plan avec le plan des y, z, et la droite avec l'axe des x, les deux rotations, dont chacune offrirait une valeur numérique *maximum* ou *minimum*, seraient fournies non par l'équation (23), mais par une formule nouvelle, que l'on pourrait aisément déduire de cette équation. En effet, nommons ϖ ce que devient la rotation φ quand on remplace le demi-axe des x positives par le demi-axe qui forme avec ceux des coordonnées positives des angles dont les cosinus sont

$$a,\quad b,\quad c,$$

et supposons

$$a',\quad b',\quad c',\qquad a'',\quad b'',\quad c''$$

liés aux cosinus a, b, c par les formules (30) et (31) du paragraphe I. Pour obtenir l'équation qui déterminera le maximum ou le minimum de ϖ, il suffira évidemment de remplacer, dans la formule (23),

$$\eta,\quad \zeta$$

par

$$a'\xi+b'\eta+c'\zeta,\quad a''\xi+b''\eta+c''\zeta$$

et

$$D_y,\quad D_z$$

par

$$a'D_x+b'D_y+c'D_z,\quad a''D_x+b''D_y+c''D_z.$$

Or, en opérant ainsi, on obtiendra, au lieu de l'équation (23), la suivante :

$$\varpi=\theta\pm\varkappa; \tag{24}$$

la valeur de θ étant toujours déterminée par la formule (12), et la valeur de $\varkappa$ par celle-ci :

$$\begin{aligned}4\varkappa^2 = {} & [(a'D_x+b'D_y+c'D_z)(a''\xi+b''\eta+c''\zeta) \\ & + (a''D_x+b''D_y+c''D_z)(a'\xi+b'\eta+c'\zeta)]^2 \\ & + [(a'D_x+b'D_y+c'D_z)(a'\xi+b'\eta+c'\zeta) \\ & - (a''D_x+b''D_y+c''D_z)(a''\xi+b''\eta+c''\zeta)]^2.\end{aligned} \tag{25}$$

D'ailleurs, en vertu des formules (3), on a

$$\begin{aligned}&(a D_x+b D_y+c D_z)(a\xi+b\eta+c\zeta) \\ &+(a'D_x+b'D_y+c'D_z)(a'\xi+b'\eta+c'\zeta) \\ &+(a''D_x+b''D_y+c''D_z)(a''\xi+b''\eta+c''\zeta)=D_x\xi+D_y\eta+D_z\zeta,\end{aligned}$$

puis on en conclut, eu égard aux équations (2) et (6),

$$\begin{aligned}&(a'D_x+b'D_y+c'D_z)(a'\xi+b'\eta+c'\zeta) \\ &+(a''D_x+b''D_y+c''D_z)(a''\xi+b''\eta+c''\zeta)=\nu-\varepsilon,\end{aligned}$$

et par suite

$$\begin{aligned}&[(a'D_x+b'D_y+c'D_z)(a'\xi+b'\eta+c'\zeta) \\ &-(a''D_x+b''D_y+c''D_z)(a''\xi+b''\eta+c''\zeta)]^2 \\ &=(\nu-\varepsilon)^2-4[(a'D_x+b'D_y+c'D_z)(a'\xi+b'\eta+c'\zeta)] \\ &\qquad\times[(a''D_x+b''D_y+c''D_z)(a''\xi+b''\eta+c''\zeta)].\end{aligned}$$

Donc la formule (25) donnera

$$\begin{aligned}4\varkappa^2=(\nu-\varepsilon)^2&+[(a'D_x+b'D_y+c'D_z)(a''\xi+b''\eta+c''\zeta) \\ &+(a''D_x+b''D_y+c''D_z)(a'\xi+b'\eta+c'\zeta)]^2 \\ &-4[(a'D_x+b'D_y+c'D_z)(a'\xi+b'\eta+c'\zeta)] \\ &\times[(a''D_x+b''D_y+c''D_z)(a''\xi+b''\eta+c''\zeta)].\end{aligned} \tag{26}$$

On trouvera d'ailleurs

$$\begin{aligned}&(a'D_x+b'D_y+c'D_z)(a''\xi+b''\eta+c''\zeta) \\ &+(a''D_x+b''D_y+c''D_z)(a'\xi+b'\eta+c'\xi) \\ &=2a'a''D_x\xi+2b'b''D_y\eta+2c'c''D_z\zeta \\ &+(b'c''+b''c')(D_y\zeta+D_z\eta)+(c'a''+c''a')(D_z\xi+D_x\zeta) \\ &+(a'b''+a''b')(D_x\eta+D_y\xi),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&(a'D_x+b'D_y+c'D_z)(a'\xi+b'\eta+c'\zeta) \\ &=a'^2D_x\xi+b'^2D_y\eta+c'^2D_z\zeta+b'c'(D_y\zeta+D_z\eta) \\ &+c'a'(D_z\xi+D_x\zeta)+a'b'(D_x\eta+D_y\xi);\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&(a''D_x+b''D_y+c''D_z)(a''\xi+b''\eta+c''\xi) \\ &=a''^2D_x\xi+b''^2D_y\eta+c''^2D_z\zeta+b''c''(D_y\zeta+D_z\eta) \\ &+c''a''(D_z\xi+D_x\zeta)+a''b''(D_x\eta+D_y\xi);\end{aligned}$$

et par suite, en ayant égard aux formules (3) et (11), on reconnaîtra que, dans le développement de la somme qui, ajoutée au terme $(\upsilon-\varepsilon)^2$, complète la valeur de $4\varkappa^2$, les carrés et les doubles produits des six quantités

$$\mathrm{D}_x\xi,\quad \mathrm{D}_y\eta,\quad \mathrm{D}_z\zeta,\quad \mathrm{D}_y\zeta+\mathrm{D}_z\eta,\quad \mathrm{D}_z\xi+\mathrm{D}_x\zeta,\quad \mathrm{D}_x\eta+\mathrm{D}_y\xi$$

ont pour coefficients des sommes de l'une des formes

$$(2aa')^2-4a^2a'^2=0,\qquad (2bb')^2-4b^2b'^2=0,\qquad (2cc')^2-4c^2c'^2=0,$$
$$(b'c''+b''c')^2-4b'c'b''c''=(b'c''-b''c')^2=a^2,\qquad \ldots,$$
$$(2b'b'')(2c'c'')-2(b'^2c''^2+b''^2c'^2)=-2(b'c''-b''c')^2=-2a^2,\qquad \ldots,$$
$$(c'a''+c''a')(a'b''+a''b')-2a'a''(b'c''+b''c')=(c'a''-c''a')(a'b''-a''b')=bc,\quad \ldots,$$
$$2a'a''(b'c''+b''c')-2(a'^2b''c''+a''^2b'c')=-2(c'a''-c''a')(a'b''-a''b')=-2bc,\quad \ldots,$$
$$2a'a''(c'a''+c''a')-2a'a''(c'a''+c''a')=0,\qquad \ldots.$$

Cela posé, la formule (26) donnera

$$
\begin{aligned}
(27)\qquad 4\varkappa^2=(\upsilon-\varepsilon)^2&+a^2[(\mathrm{D}_y\zeta+\mathrm{D}_z\eta)^2-4\mathrm{D}_y\eta\,\mathrm{D}_z\zeta]\\
&+b^2[(\mathrm{D}_z\xi+\mathrm{D}_x\zeta)^2-4\mathrm{D}_z\zeta\,\mathrm{D}_x\xi]\\
&+c^2[(\mathrm{D}_x\eta+\mathrm{D}_y\xi)^2-4\mathrm{D}_x\xi\,\mathrm{D}_y\eta]\\
&-2bc[(\mathrm{D}_z\xi+\mathrm{D}_x\zeta)(\mathrm{D}_x\eta+\mathrm{D}_y\xi)-2\mathrm{D}_x\xi(\mathrm{D}_y\zeta+\mathrm{D}_z\eta)]\\
&-2ca[(\mathrm{D}_x\eta+\mathrm{D}_y\xi)(\mathrm{D}_y\zeta+\mathrm{D}_z\eta)-2\mathrm{D}_y\eta(\mathrm{D}_z\xi+\mathrm{D}_x\zeta)]\\
&-2ab[(\mathrm{D}_y\zeta+\mathrm{D}_z\eta)(\mathrm{D}_z\xi+\mathrm{D}_x\zeta)-2\mathrm{D}_z\zeta(\mathrm{D}_x\eta+\mathrm{D}_y\xi)].
\end{aligned}
$$

Si l'on pose dans la formule (27)

$$a=1,\qquad b=0,\qquad c=0,$$

on en tirera

$$4\varkappa^2=(\upsilon-\varepsilon)^2+(\mathrm{D}_y\zeta+\mathrm{D}_z\eta)^2-4\mathrm{D}_y\eta\,\mathrm{D}_z\zeta,$$

la valeur de $\upsilon-\varepsilon$ étant

$$\upsilon-\varepsilon=\upsilon-\mathrm{D}_x\xi=\mathrm{D}_y\eta+\mathrm{D}_z\zeta,$$

et par suite

$$4\varkappa^2=(\mathrm{D}_y\zeta+\mathrm{D}_z\eta)^2+(\mathrm{D}_y\eta-\mathrm{D}_z\zeta)^2,$$
$$\varkappa=\frac{1}{2}[(\mathrm{D}_y\zeta+\mathrm{D}_z\eta)^2+(\mathrm{D}_y\eta-\mathrm{D}_z\zeta)^2]^{\frac{1}{2}}.$$

De plus, dans la même hypothèse, la formule (13) donnera

$$\theta=\alpha=\frac{1}{2}(\mathrm{D}_y\zeta-\mathrm{D}_z\eta).$$

Donc la valeur de ϖ, déterminée par l'équation (24), se trouvera réduite, comme on devait s'y attendre, à la valeur de φ déterminée par la formule (23).