RÉSUMÉ D'UN MÉMOIRE

SUR

LA MÉCANIQUE CÉLESTE

ET SUR

UN NOUVEAU CALCUL APPELÉ CALCUL DES LIMITES [1].

(Lu à l'Académie de Turin, dans la séance du 11 octobre 1831.)

Avant d'indiquer d'une manière plus précise l'objet des recherches que j'ai l'honneur de présenter à l'Académie, il ne sera pas inutile de dire à quelle occasion elles ont été entreprises.

Les méthodes que les géomètres ont employées pour déduire du principe de la gravitation les mouvements des corps célestes laissaient encore beaucoup à désirer. Souvent elles manquaient de la rigueur convenable. Ainsi, en particulier, on ne trouve nulle part dans la *Mécanique céleste* de Laplace une démonstration suffisante de la formule de Lagrange, qui sert pourtant de base à la plupart des théories exposées dans cet Ouvrage. D'ailleurs pour déterminer, à l'aide de ces

(1) Le nouveau calcul que j'ai désigné sous le nom de *Calcul des limites* sert, non seulement à fournir des règles relatives à la convergence des séries qui représentent les développements de fonctions explicites ou implicites d'une ou de plusieurs variables, mais encore à fixer des *limites* supérieures aux erreurs qu'on commet, quand on arrête chaque série après un certain nombre de termes. J'ai déjà donné une idée de ce nouveau calcul dans la onzième livraison des *Exercices* (p. 355 et suiv.) [a]. Pour le faire mieux connaître, il me suffira de reproduire ici, avec le résumé d'un Mémoire sur la *Mécanique céleste*, lu à l'Académie de Turin dans la séance du 11 octobre 1831, la partie de ce Mémoire qui se rapportait au développement des fonctions en séries.

(a) *Œuvres de Cauchy*, 2e série, t. XI, p. 431 et suiv.

méthodes, les coefficients numériques relatifs à telle ou telle perturbation des mouvements planétaires, les astronomes étaient quelquefois obligés d'entreprendre des calculs qui exigeaient plusieurs années de travail. Un des membres les plus distingués de cette Académie, M. Plana, m'ayant parlé dernièrement encore du temps que consumaient de pareils calculs, je lui dis que j'étais persuadé qu'il serait possible de les abréger, et même de déterminer immédiatement le coefficient numérique correspondant à une inégalité donnée. Effectivement, au bout de quelques jours, je lui rapportai des formules à l'aide desquelles on pouvait résoudre de semblables questions, et dont j'avais déjà fait l'application à la détermination de certains nombres qu'il est utile de considérer dans la théorie de Saturne et de Jupiter. Quelques jours après, en s'appuyant sur des résultats qu'il avait obtenus dans un de ses Mémoires, M. Plana m'a dit avoir retrouvé ou les mêmes formules ou des formules du même genre. Au reste, pour établir les formules dont il s'agit et d'autres formules analogues que renferme le Mémoire ci-joint, il suffit d'appliquer, au développement de la fonction désignée par R dans la *Mécanique céleste*, des théorèmes bien connus, tels que le théorème de Taylor et le théorème de Lagrange sur le développement des fonctions des racines des équations algébriques ou transcendantes. Mais on a besoin de recourir à d'autres principes et à de nouvelles méthodes pour arriver à des résultats plus importants dont je vais maintenant donner une idée.

En joignant à la série de Maclaurin le reste qui la complète, et présentant ce reste sous la forme que Lagrange lui a donnée, ou sous d'autres formes du même genre, on peut s'assurer, dans un grand nombre de cas, qu'une fonction $f(x)$ de la variable x est développable pour certaines valeurs de x en une série convergente ordonnée suivant les puissances ascendantes de cette variable, et déterminer la limite supérieure des modules [1] des valeurs réelles ou imaginaires de x,

(1) Le module d'une valeur imaginaire de x est la racine carrée positive de la somme qu'on obtient en ajoutant le carré de la partie réelle au carré du coefficient de $\sqrt{-1}$. Lorsque ce coefficient s'évanouit, le module se réduit à la valeur numérique de x.

pour lesquels le développement subsiste. Ajoutons que pour développer une fonction explicite de plusieurs variables $x, y, z, \ldots$ suivant les puissances ascendantes de $x, y, z, \ldots$, c'est-à-dire en une série convergente dont le terme général soit une fonction entière et homogène de $x, y, z, \ldots$, il suffit de remplacer la fonction proposée $f(x, y, z, \ldots)$ par $f(\alpha x, \alpha y, \alpha z, \ldots)$, puis de développer $f(\alpha x, \alpha y, \alpha z, \ldots)$ suivant les puissances ascendantes de α, et de poser ensuite $\alpha = 1$. Par conséquent la théorie du développement des fonctions explicites de plusieurs variables se ramène immédiatement à la théorie du développement des fonctions explicites d'une seule variable. Mais il importe d'observer que l'application des règles, à l'aide desquelles on peut décider si la série de Maclaurin est convergente ou divergente, devient souvent très difficile, attendu que, dans cette série, le terme général ou proportionnel à x^n renferme la dérivée de l'ordre n de la fonction $f(x)$, ou du moins sa valeur correspondante à une valeur nulle de x, et que, hormis certains cas particuliers, la dérivée de l'ordre n d'une fonction donnée prend une forme de plus en plus compliquée, à mesure que n augmente.

Quant aux fonctions implicites, on a présenté, pour leurs développements en séries, diverses formules déduites le plus souvent de la méthode des coefficients indéterminés. Mais les démonstrations qu'on a prétendu donner de ces formules sont généralement insuffisantes : 1° parce qu'on n'a point examiné si les séries sont convergentes ou divergentes, et qu'en conséquence on ne peut dire le plus souvent dans quels cas les formules doivent être admises ou rejetées ; 2° parce qu'on ne s'est point attaché à démontrer que les développements obtenus avaient pour sommes les fonctions développées, et qu'il peut arriver qu'une série convergente provienne du développement d'une fonction, sans que la somme de la série soit équivalente à la fonction elle-même. Il est vrai que l'établissement de règles générales propres à déterminer dans quels cas les développements des fonctions implicites sont convergents et représentent ces mêmes fonctions paraissait offrir de grandes difficultés. On peut en juger, en lisant attentivement le

Mémoire de M. Laplace sur la convergence et la divergence de la série que fournit, dans le mouvement elliptique d'une planète, le développement du rayon vecteur suivant les puissances ascendantes de l'excentricité. Je pense donc que les géomètres et les astronomes attacheront quelque prix à mon travail, quand ils apprendront que je suis parvenu à établir, sur le développement des fonctions, soit explicites, soit implicites, des principes généraux et d'une application facile, à l'aide desquels on peut non seulement démontrer avec rigueur les formules, et indiquer les conditions de leur existence, mais encore fixer les limites des erreurs que l'on commet en négligeant les restes qui doivent compléter les séries. Parmi ces règles, celles qui se rapportent à la fixation des limites des erreurs commises présentent dans leur ensemble un nouveau calcul, que je désignerai sous le nom de *calcul des limites*. Je me contenterai d'indiquer ici en peu de mots quelques-unes des propositions fondamentales sur lesquelles repose le calcul dont il s'agit.

Soit $f(x)$ une fonction de la variable x. Si l'on attribue à cette variable une valeur imaginaire $\overline{x}$ dont le module soit X, le rapport de $\overline{x}$ à X sera une exponentielle de la forme $e^{p\sqrt{-1}}$, p désignant un certain arc réel que l'on pourra supposer compris entre les limites $-\pi$, $+\pi$, et le module de $f(\overline{x})$ dépendra tout à la fois du module X et de l'arc p. Or, parmi les valeurs que prendra le module de $f(\overline{x})$ quand on fera varier p, il y en aura généralement une qui sera supérieure à toutes les autres. C'est cette valeur *maximum* du module de $f(\overline{x})$ que je considère spécialement dans le calcul des limites. Je la désigne par la lettre caractéristique Λ placée devant la fonction $f(\overline{x})$, et je prouve : 1° que la fonction $f(x)$ est développable par le théorème de Maclaurin en une série convergente ordonnée suivant les puissances ascendantes de x, lorsque, le module de x étant égal ou inférieur à X, la fonction $f(x)$ reste finie et continue pour le module X ou pour un module plus petit de la variable réelle ou imaginaire x ; 2° qu'alors, dans le développement de $f(x)$ suivant les puissances ascendantes de x, le coefficient de x^n offre un module inférieur au quotient qu'on obtient en divisant par X^n le module *maximum* de $f(\overline{x})$. Cela posé, si l'on attribue à x une valeur imaginaire dont le module soit désigné par ξ, le module du terme général, dans le développement de $f(x)$, sera inférieur au produit de $\Lambda f(\overline{x})$ par la $n^{\text{ième}}$ puissance du rapport $\frac{\xi}{X}$. D'ailleurs, lorsque la fonction $f(x)$ est développable en une série convergente ordonnée suivant les puissances ascendantes de x, le reste qui complète cette série, prolongée jusqu'au $n^{\text{ième}}$ terme, équivaut à la somme des termes dans lesquels l'exposant de x est égal ou supérieur à n. Donc le module de ce reste, s'il est imaginaire, ou sa valeur numérique, s'il est réel, ne surpassera pas la somme des termes correspondants à ceux que nous venons d'indiquer dans la progression géométrique ci-dessus mentionnée, c'est-à-dire le reste qui complète cette progression. Ainsi, la détermination d'une limite supérieure au reste, qui complète la série propre à représenter le développement d'une fonction quelconque, se trouve ramenée à la détermination des restes des progressions géométriques, c'est-à-dire à une question résolue depuis longtemps en analyse. On sait en effet que, dans la progression géométrique qui a pour premier terme l'unité et pour raison $\frac{\xi}{X}$, la somme des termes dans lesquels ξ porte un exposant égal ou supérieur à n équivaut au quotient du $n^{\text{ième}}$ terme par la différence $1 - \frac{\xi}{X}$. Lorsque le premier terme devient $\Lambda f(\overline{x})$, il faut multiplier par ce premier terme le quotient dont il s'agit.

Il est important d'observer que, d'après ce qu'on vient de dire, les limites supérieures aux modules du terme général de la série de Maclaurin, et du reste qui complète cette série, sont des fonctions du module X qui représentent les maxima relatifs à p des modules de certaines fonctions de la variable imaginaire $\overline{x} = Xe^{p\sqrt{-1}}$. D'ailleurs, le module X doit surpasser le module ξ, et être déterminé de manière que la fonction $f(x)$ reste finie et continue pour le module X ou pour un module plus petit de la variable x. Or, parmi les valeurs de X qui remplissent ces deux conditions, on devra évidemment choisir de préférence celles qui rendront les limites supérieures dont il s'agit les

plus petites possible; et alors, ces limites, considérées comme valeurs particulières des fonctions de $\overline{x}$ ci-dessus mentionnées, seront tout à la fois des *maxima* relativement à l'angle p, et des *minima* relativement au module X, ou ce que nous avons nommé dans un autre Mémoire les modules principaux de ces mêmes fonctions.

Au surplus, quand on se propose uniquement de calculer des limites supérieures aux modules des termes généraux ou des restes des séries, il n'est point nécessaire de déterminer exactement les modules principaux dont il est ici question, et l'on peut se contenter de chercher des nombres supérieurs à ces modules.

Il est facile d'étendre les principes que nous venons d'indiquer aux fonctions de plusieurs variables. Soit en effet $f(x, y, z, \ldots)$ une fonction donnée des variables $x, y, z, \ldots$; si l'on attribue à ces variables des valeurs imaginaires $\overline{x}, \overline{y}, \overline{z}, \ldots$, dont les modules soient respectivement X, Y, Z, ..., le module de $f(\overline{x}, \overline{y}, \overline{z}, \ldots)$ dépendra tout à la fois des modules X, Y, Z, ... et des rapports imaginaires $\frac{\overline{x}}{X}, \frac{\overline{y}}{Y}, \frac{\overline{z}}{Z}$, etc. Or, on peut choisir ces rapports, ou plutôt les arcs de cercle qui s'y trouvent renfermés, de manière que le module de $f(\overline{x}, \overline{y}, \overline{z}, \ldots)$ acquière la plus grande valeur possible, les nombres X, Y, Z, ... restant les mêmes. C'est cette plus grande valeur ou cette valeur *maximum* que je désigne par la caractéristique Λ placée devant la fonction $f(\overline{x}, \overline{y}, \overline{z}, \ldots)$; et je prouve : 1° que la fonction $f(x, y, z, \ldots)$ est développable en une série convergente ordonnée suivant les puissances ascendantes de $x, y, z, \ldots$, quand, les modules des variables $x, y, z, \ldots$ étant égaux ou inférieurs à X, Y, Z, ..., la fonction $f(x, y, z, \ldots)$ reste finie ou continue pour les modules X, Y, Z, ..., ou pour des modules plus petits de ces mêmes variables; 2° qu'alors, dans le développement de $f(x, y, z, \ldots)$ suivant les puissances ascendantes de $x, y, z, \ldots$, le coefficient de $x^n y^{n'} z^{n''} \ldots$ offre un module inférieur au quotient qu'on obtient en divisant par $X^n Y^{n'} Z^{n''} \ldots$ le module maximum de $f(\overline{x}, \overline{y}, \overline{z}, \ldots)$. Cela posé, si l'on attribue à $x, y, z \ldots$ des valeurs réelles ou imaginaires dont les modules $\xi, \eta, \zeta, \ldots$ soient plus petits que X, Y, Z, ..., les divers termes du développement de la fonction $f(x, y, z, \ldots)$ offriront des modules respectivement inférieurs aux termes correspondants d'une fonction de $\xi, \eta, \zeta, \ldots$ qu'on obtiendra en multipliant le module maximum de $f(\overline{x}, \overline{y}, \overline{z}, \ldots)$ par les sommes des progressions géométriques qui ont pour premiers termes l'unité et pour raisons les rapports $\frac{\xi}{X}, \frac{\eta}{Y}, \frac{\zeta}{Z}, \ldots$. Donc, si l'on néglige, dans le développement de la première fonction $f(x, y, z, \ldots)$, certains termes, par exemple ceux dans lesquels l'exposant de x est égal ou supérieur à n, l'exposant de y égal ou supérieur à n', l'exposant de z égal ou supérieur à n'', etc., l'erreur [1] commise sera plus petite que la somme des termes correspondants de la seconde fraction, et par conséquent inférieure au produit de $\Lambda f(\overline{x}, \overline{y}, \overline{z}, \ldots)$ par les restes des progressions géométriques ci-dessus mentionnées.

Observons encore qu'après avoir déterminé en fonction de X, Y, Z,... une limite supérieure au reste de la série qui représente le développement de $f(x, y, z, \ldots)$ suivant les puissances ascendantes de $x, y, z, \ldots$, on devra choisir X, Y, Z, ... de manière à rendre cette limite la plus petite possible.

Si l'on voulait obtenir une limite supérieure à la somme des modules des termes qui, dans le développement de $f(x, y, z, \ldots)$, offrent un degré égal ou supérieur à n, c'est-à-dire des termes dans lesquels les exposants de $x, y, z, \ldots$ offrent une somme égale ou supérieure à n, il suffirait de chercher une limite supérieure au reste de la série qui représente le développement de $f(\alpha x, \alpha y, \alpha z, \ldots)$ suivant les puissances ascendantes de α, et de poser, dans cette limite, $\alpha = 1$.

Les principes que nous venons d'établir s'appliquent très facilement aux séries qui représentent les développements des fonctions explicites d'une ou de plusieurs variables, et fournissent, pour ces séries, non seulement des règles générales de convergence, mais encore des

[1] Lorsque les termes négligés sont réels, l'erreur commise a pour mesure la valeur numérique de leur somme. Lorsqu'ils deviennent imaginaires, le module de cette même somme peut servir à mesurer l'erreur dont il s'agit.

limites supérieures aux modules des termes généraux, et aux erreurs que l'on commet quand on calcule seulement un certain nombre de termes en négligeant tous les autres. Pour étendre l'application des mêmes principes aux séries qui représentent les développements d'une ou de plusieurs fonctions implicites déterminées par une ou plusieurs équations algébriques ou transcendantes, il suffit d'observer qu'en vertu de la formule de Lagrange, et des formules analogues qui se déduisent du calcul des résidus, les coefficients des termes généraux dans ces mêmes séries peuvent être, comme dans les séries de Taylor ou de Maclaurin, exprimés au moyen des dérivées des divers ordres de certaines fonctions, et qu'en conséquence la détermination de limites supérieures aux modules des termes généraux et aux restes des séries peut être réduite à la détermination des modules *maxima* de ces mêmes fonctions. On pourra donc établir pour les séries proposées des règles de convergence, et trouver des limites supérieures aux restes des séries, ou plutôt à leurs modules. La seule question qui restera indécise sera de savoir si les séries, supposées convergentes, ont effectivement pour sommes les fonctions implicites dont le développement les a produites. Or, on peut s'appuyer, pour résoudre cette question, sur des propositions générales semblables à celles que je vais énoncer :

Théorème I. — *Supposons qu'une fonction implicite u de la variable x soit déterminée par une équation algébrique ou transcendante, qu'elle se réduise à u_0 pour une valeur nulle de x, et que l'on ait développé cette fonction implicite en une série ordonnée suivant les puissances ascendantes de x par la formule de Maclaurin, de Lagrange, etc., ou, ce qui revient au même, par la méthode des coefficients indéterminés. La somme de cette série représentera la fonction u, si la valeur de x est tellement choisie que, la série étant convergente, la fonction explicite de x et u qui constitue le premier membre de l'équation donnée soit elle-même développable en une série convergente ordonnée suivant les puissances ascendantes de la variable x et de la différence $u - u_0$.*

Théorème II. — *Supposons que plusieurs fonctions implicites $u, v, w, \ldots$ de plusieurs variables $x, y, z, \ldots$ soient déterminées par une ou plusieurs équations algébriques ou transcendantes, qu'elles se réduisent à $u_0, v_0, w_0, \ldots$ pour des valeurs nulles de $x, y, z, \ldots$, et qu'on ait développé ces fonctions implicites en séries ordonnées suivant les puissances ascendantes de $x, y, z, \ldots$ par les formules de Maclaurin, de Lagrange, etc., ou, ce qui revient au même, par la méthode des coefficients indéterminés. Les sommes de ces séries représenteront les valeurs de $u, v, w, \ldots$, si les valeurs de $x, y, z, \ldots$ sont tellement choisies que, les séries étant convergentes, les fonctions explicites de $x, y, z, \ldots, u, v, w, \ldots$ qui constituent les premiers membres des équations données, soient elles-mêmes développables en séries convergentes ordonnées suivant les puissances ascendantes des variables $x, y, z, \ldots$ et des différences $u - u_0$, $v - v_0$, $w - w_0, \ldots$.*

Pour démontrer ces propositions, il suffit évidemment d'observer que, si les conditions énoncées (¹) sont remplies, les premiers membres des équations données, après les substitutions des valeurs générales de $u - u_0$, $v - v_0$, $w - w_0, \ldots$, seront encore des séries convergentes ordonnées suivant les puissances ascendantes de $x, y, z, \ldots$, et que, dans ces séries convergentes, le coefficient de chaque terme sera identiquement nul.

Au surplus, sans le secours de ces propositions, et en s'appuyant sur des formules que fournit le calcul des résidus, on peut établir directement des règles dignes de remarque sur la convergence des séries qui représentent les développements des fonctions implicites, et sur la fixation des limites supérieures aux modules des restes qui complètent les séries.

(¹) Aux conditions énoncées dans les théorèmes I, II, III, il convient d'en ajouter une sans laquelle ces théorèmes pourraient quelquefois devenir inexacts. Cette condition est que chacune des séries, que l'on suppose convergentes, ne cesse pas d'être convergente, quand on remplace ses différents termes par leurs valeurs numériques, ou plus généralement par leurs modules (*voir* les *Résumés analytiques*, p. 56 et 111) (ª).

(ª) *Œuvres de Cauchy*, 2ᵉ série, t. X, p. 68 et 129.

Les propositions ci-dessus mentionnées peuvent encore être facilement étendues au cas où les fonctions implicites seraient déterminées par des équations aux différences finies ou infiniment petites, ou aux différences partielles, ou aux différences mêlées. Ainsi, en particulier, on pourra énoncer le théorème suivant :

Théorème III. — *Soient données plusieurs équations différentielles simultanées entre la variable x, des fonctions inconnues $y, z, \ldots$ de cette variable, et leurs dérivées de divers ordres $y', z', \ldots, y'', z'', \ldots$. Supposons d'ailleurs que par la méthode des coefficients indéterminés on ait développé $y, z, \ldots$ en séries ordonnées suivant les puissances ascendantes de x. Les sommes de ces séries représenteront les valeurs générales de $y, z, \ldots$, si la valeur de x est tellement choisie que, les séries dont il s'agit, et par suite celles qui représenteront les dérivées de $y, z, \ldots$, étant convergentes, les fonctions explicites de $x, y, z, \ldots, y', z', \ldots$, qui constituent les premiers membres des équations données, soient elles-mêmes développables en séries convergentes ordonnées suivant les puissances ascendantes de x, et des différences qu'on obtient en retranchant des valeurs générales de $y, z, \ldots, y', z', \ldots$ leurs valeurs initiales correspondantes à $x = 0$.*

Je n'ai pu qu'indiquer rapidement quelques-uns des principaux résultats contenus dans le Mémoire que j'ai l'honneur de présenter à l'Académie. Ce Mémoire renferme encore : 1° une théorie de la variation des constantes arbitraires (¹), plus générale et à quelques égards plus simple que celles qui se trouvent exposées dans les Mémoires de MM. Lagrange, Laplace et Poisson; 2° des intégrales définies propres à représenter, dans le développement connu de la fonction R, le coefficient du sinus ou du cosinus d'un angle donné; 3° des for-

(¹) Dans un Mémoire présenté à l'Institut, M. Ostrogradski s'était aussi occupé de la variation des constantes arbitraires, et il avait appliqué, à ce que je crois, une formule de M. Fourier à la conversion des termes qui composent le développement de la fonction R en intégrales définies; mais, n'ayant qu'un souvenir confus de ce Mémoire, tout ce que je puis dire ici, c'est que, dans le cas où quelques-unes de ses formules coïncideraient avec quelques-unes des miennes, je ne prétends en aucune manière lui contester la priorité.

mules d'interpolation qui servent à déterminer une fonction entière de $\sin x$ et de $\cos x$, quand on connaît un nombre suffisant de valeurs particulières de cette même fonction; 4° plusieurs développements nouveaux de la fonction R, avec des formules propres non seulement à fournir les termes généraux de ces développements, mais encore à déterminer les limites des erreurs commises quand on conserve seulement certains termes en négligeant tous ceux qui les suivent. Je montre aussi dans quels cas l'un de ces développements doit être employé de préférence à l'autre. Ainsi, en particulier, si l'on demande les perturbations produites dans le mouvement d'une planète par une autre planète, située à très peu près à la même distance du Soleil que la première, le développement employé jusqu'ici par les astronomes devra être rejeté, et il faudra lui substituer un des autres développements ci-dessus mentionnés. On devra donc recourir à ces nouveaux développements dans la théorie des petites planètes, quand on recherchera les inégalités qui dépendent de leurs attractions mutuelles.

Au reste, si l'Académie attache quelque prix aux travaux dont je viens de l'entretenir, je pourrai sous peu de temps lui offrir d'autres Mémoires dans lesquels je montrerai d'une part comment on peut appliquer le calcul des résidus à la théorie du développement des fonctions implicites, et de l'autre comment on peut s'assurer de la convergence des séries qui représentent les intégrales des équations différentielles linéaires ou non linéaires, et fixer les limites supérieures aux modules des restes qui complètent ces mêmes séries.

FORMULES POUR LE DÉVELOPPEMENT DES FONCTIONS EN SÉRIES.

Calcul des limites [1].

Soient p un arc réel et n un nombre entier. On trouvera, en supposant $n > 0$,

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{np\sqrt{-1}}\,dp = \int_{-\pi}^{\pi} e^{-np\sqrt{-1}}\,dp = 0, \tag{1}$$

[1] Le Mémoire qu'on va lire est une partie de celui qui a été lithographié à Turin

et, en supposant $n = 0$,

$$\int_{-\pi}^{\pi} dp = 2\pi. \tag{2}$$

Soit de plus

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n$$

une fonction entière de la variable x. Si l'on attribue à cette variable une valeur imaginaire $\overline{x}$ dont le module soit X, en sorte qu'on ait

$$\overline{x} = \mathrm{X} e^{p\sqrt{-1}},$$

on tirera des formules (1) et (2)

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(\overline{x})\,dp = \int_{-\pi}^{\pi} f\left(\frac{1}{\overline{x}}\right) dp = 2\pi a_0;$$

on aura donc

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(\overline{x})\,dp = 2\pi f(0). \tag{3}$$

Il est d'ailleurs facile d'étendre la formule (3) au cas où $f(\overline{x})$ cesse d'être une fonction entière de x. En effet, on a généralement

$$\mathrm{D}_{\mathrm{X}} f(\overline{x}) = \frac{1}{\mathrm{X}\sqrt{-1}} \mathrm{D}_p f(\overline{x}).$$

Or, si l'on intègre les deux membres de l'équation précédente : 1° par rapport à X et à partir de $\mathrm{X} = 0$; 2° par rapport à p entre les limites

en 1832. Nous le reproduisons ici tel qu'il a été publié à cette époque. Seulement, dans l'énoncé des conditions sous lesquelles subsiste la formule (3) et, par suite, dans les énoncés des théorèmes II, III et VII, nous avons cru devoir, par la raison que nous avons déjà indiquée ailleurs (*voir*, dans le Tome I de cet Ouvrage, la fin de la Note *Sur l'intégration des équations différentielles des mouvements planétaires*, p. 32) [a], mentionner, avec les fonctions $f(x)$, $f(x, y)$, etc., leurs dérivées du premier ordre, et ajouter en conséquence au texte du Mémoire lithographié quelques mots que nous avons placés entre parenthèses. De plus, pour simplifier les notations, nous désignons souvent, comme nous l'avons fait dans plusieurs circonstances, les dérivées d'une fonction relatives à diverses variables $x, y, \ldots, p$, à l'aide des lettres caractéristiques $\mathrm{D}_x, \mathrm{D}_y, \ldots, \mathrm{D}_p$, en écrivant, par exemple,

$$\mathrm{D}_x f(x) \quad \text{au lieu de} \quad \frac{df(x)}{dx}.$$

[a] *Œuvres de Cauchy*, 2e série, t. XI, p. 50.

$p = -\pi$, $p = \pi$; et si l'on suppose que la fonction de X et de p, représentée par $f(\bar{x})$, reste finie et continue (avec sa dérivée), quel que soit p, pour la valeur attribuée à X et pour une valeur plus petite, on retrouvera précisément la formule (3).

D'autre part, comme on a $d\bar{x} = \bar{x}\,dp\sqrt{-1}$, si les fonctions dérivées $f'(\bar{x})$, $f''(\bar{x})$, $\ldots$, $f^{(n)}(\bar{x})$ restent elles-mêmes finies et continues pour la valeur attribuée à X et pour des valeurs plus petites, il suffira d'appliquer l'intégration par parties à l'intégrale

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{f(\bar{x})}{\bar{x}^n}\,dp,$$

pour en conclure

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{f(\bar{x})}{\bar{x}^n}\,dp = \frac{1}{n}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{f'(\bar{x})}{\bar{x}^{n-1}}\,dp = \frac{1}{n(n-1)}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{f''(\bar{x})}{\bar{x}^{n-2}}\,dp = \ldots$$

et par suite

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{f(\bar{x})}{x^n}\,dp = \frac{1}{1.2.3\ldots n}\int_{-\pi}^{\pi} f^{(n)}(\bar{x})\,dp,$$

ou, en vertu de la formule (3),

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{f(\bar{x})}{\bar{x}^n}\,dp = \frac{f^{(n)}(0)}{1.2.3\ldots n}. \tag{4}$$

Si la fonction $f(\bar{x})$ s'évanouit pour une valeur nulle de x, l'équation (3) donnera simplement

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(\bar{x})\,dp = 0. \tag{5}$$

Des formules (3), (4), (5) on peut aisément déduire, comme on va le voir, celles qui servent à développer une fonction explicite ou implicite de la variable x en une série ordonnée suivant les puissances ascendantes de cette variable.

Si, dans la formule (5), on remplace $f(\bar{x})$ par le produit

$$\bar{x}\,\frac{f(\bar{x}) - f(x)}{\bar{x} - x},$$

x étant différent de $\bar{x}$, et le module de x inférieur à X, on en conclura

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\bar{x}f(\bar{x})}{\bar{x} - x}\,dp = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\bar{x}f(x)}{\bar{x} - x}\,dp = f(x)\int_{-\pi}^{\pi}\left(1 + \frac{x}{\bar{x}} + \frac{x^2}{\bar{x}^2} + \ldots\right)dp = 2\pi f(x),$$

et par suite on retrouvera la formule connue

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\bar{x}f(\bar{x})}{\bar{x} - x}\,dp. \tag{6}$$

L'équation (6) suppose, comme les équations (3) et (5), que la fonction de X et de p représentée par $f(\bar{x})$ reste finie et continue pour la valeur attribuée à X et pour des valeurs plus petites.

Comme le rapport $\frac{\bar{x}}{\bar{x} - x}$ est la somme de la progression géométrique

$$1, \quad \frac{x}{\bar{x}}, \quad \frac{x^2}{\bar{x}^2}, \quad \ldots,$$

qui est toujours convergente, tant que le module de x reste inférieur au module X de $\bar{x}$; il suit de la formule (6) que $f(x)$ sera développable en une série ordonnée suivant les puissances ascendantes de x, si le module de la variable réelle ou imaginaire x conserve une valeur inférieure à celle pour laquelle la fonction $f(x)$ (ou sa dérivée du premier ordre) cesse d'être finie et continue. Ainsi, en particulier, puisque les fonctions

$$\cos x, \quad \sin x, \quad e^x, \quad e^{x^2}, \quad \cos(1 - x^2), \quad \ldots$$

(et leurs dérivées du premier ordre) ne cessent jamais d'être finies et continues, ces fonctions seront toujours développables en séries convergentes ordonnées suivant les puissances ascendantes de x.

Au contraire, les fonctions

$$(1 + x)^{\frac{1}{2}}, \quad \frac{1}{1 - x}, \quad \frac{x}{1 + \sqrt{1 - x^2}}, \quad \ldots,$$

qui, lorsqu'on attribue à x une valeur imaginaire de la forme $\mathrm{X}e^{p\sqrt{-1}}$, cessent (avec leurs dérivées du premier ordre) d'être fonctions continues de x, au moment où le module X devient égal à 1, seront certainement développables en séries convergentes ordonnées suivant les puissances ascendantes de la variable x, si la valeur réelle ou imaginaire de x offre un module inférieur à l'unité; mais elles pourront devenir et deviendront en effet divergentes, si le module de x surpasse l'unité. Enfin, comme les fonctions

$$e^{\frac{1}{x}},\quad e^{\frac{1}{x^2}},\quad \cos\frac{1}{x},\quad \dots$$

deviennent discontinues pour une valeur nulle de x, par conséquent lorsque le module de x est le plus petit possible, elles ne seront jamais développables en séries convergentes ordonnées suivant les puissances ascendantes de x.

Il suit encore de la formule (6) que, dans le développement de $f(x)$ suivant les puissances ascendantes de x, le terme général sera

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{x^n}{\overline{x}^n}f(\overline{x})\,dp = \frac{x^n}{1.2.3\ldots n}f^{(n)}(0). \tag{7}$$

Donc, lorsque la fonction $f(x)$ sera développable en série convergente ordonnée suivant les puissances ascendantes de x, on aura

$$f(x) = f(0) + \frac{x}{1}f'(0) + \frac{x^2}{1.2}f''(0) + \dots, \tag{8}$$

conformément au théorème de Maclaurin.

Si l'on nomme ξ le module de x, et $\Lambda f(\overline{x})$ la limite du module $f(\overline{x})$, c'est-à-dire la plus grande valeur que ce module puisse acquérir quand on y fait varier l'angle p sans changer le module X, le premier membre de la formule (7) aura [1] un module inférieur à

$$\left(\frac{\xi}{X}\right)^n \Lambda f(\overline{x}), \tag{9}$$

[1] Comme le module de la somme $x+y+z+\dots$ ne peut surpasser la somme des modules de $x, y, z, \dots$ (*voir* les *Exercices de Mathématiques*), si l'on désigne par $\varpi(x)$ une fonction réelle ou imaginaire d'une variable x, par a, b deux valeurs particu-

c'est-à-dire au terme général de la progression géométrique qui a pour somme

$$\frac{X}{X-\xi}\Lambda f(\overline{x}). \tag{10}$$

Donc, le reste de cette progression géométrique, savoir

$$\frac{\xi^n}{X^{n-1}(X-\xi)}\Lambda f(\overline{x}), \tag{11}$$

surpassera le reste de la série convergente qui représente le développement de $f(x)$. On pourrait encore arriver à la même conclusion de la manière suivante.

On a généralement

$$\frac{\overline{x}}{\overline{x}-x} = 1 + \frac{x}{\overline{x}} + \frac{x^2}{\overline{x}^2} + \dots + \frac{x^{n-1}}{\overline{x}^{n-1}} + \frac{x^n}{\overline{x}^{n-1}(\overline{x}-x)}.$$

Par suite, la formule (6) donnera

$$f(x) = f(0) + \frac{x}{1}f'(0) + \dots + \frac{x^{n-1}}{1.2\ldots(n-1)}f^{(n-1)}(0) + \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}\frac{x^n}{\overline{x}^{n-1}(\overline{x}-x)}f(\overline{x})\,dp.$$

Donc le reste de la série de Maclaurin prolongée jusqu'au $n^{\text{ième}}$ terme

lières de x, réelles et propres à vérifier la condition $a < b$, par n un très grand nombre, et par i le rapport $\frac{b-a}{n}$, le module du produit

$$i\{\varpi(a) + \varpi(a+i) + \dots + \varpi[a+(n-1)i]\}$$

ne surpassera pas le produit de $ni = b-a$ par le plus grand module que $\varpi(x)$ puisse acquérir, quand on fait varier x entre les limites $x=a$, $x=b+ni$; et par conséquent ce plus grand module sera une limite supérieure au quotient qu'on obtient en divisant par $b-a$ l'intégrale $\int_a^b \varpi(x)\,dx$. Donc aussi le plus grand module du rapport $\frac{x^n}{\overline{x}^n}f(\overline{x})$, ou l'expression (9), surpassera le quotient de $\int_{-\pi}^{\pi}\frac{x^n}{\overline{x}^n}f(\overline{x})\,dp$ par 2π.

sera

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{x^n}{\overline{x}^{n-1}(\overline{x}-x)}f(\overline{x})\,dp. \tag{12}$$

Or, le module de la fonction renfermée sous le signe $\int$ dans l'intégrale (12) étant inférieur à l'expression (11), il est clair qu'on pourra en dire autant de l'intégrale même.

En résumant ce qu'on vient de dire, on obtient la proposition suivante :

Théorème I. — *La fonction $f(x)$ sera développable par la formule de Maclaurin en une série convergente ordonnée suivant les puissances ascendantes de x, si le module de la variable réelle ou imaginaire x conserve une valeur inférieure à celle pour laquelle la fonction (ou sa dérivée du premier ordre) cesse d'être finie et continue. Soient X cette dernière valeur, ou une valeur plus petite, et $\overline{x}$ une expression imaginaire qui offre le module X. Les modules du terme général et du reste de la série de Maclaurin seront respectivement inférieurs aux modules du terme général et du reste de la progression géométrique qui a pour somme*

$$\frac{X}{X-x}\Lambda f(\overline{x}), \tag{13}$$

par conséquent au terme général et au reste de la progression géométrique qui a pour somme l'expression (10), *ξ désignant le module de X.*

De même, si l'on désigne par $f(x, y, z, \ldots)$ une fonction des variables $x, y, z, \ldots$, par $\overline{x}, \overline{y}, \overline{z}, \ldots$ des valeurs imaginaires attribuées à ces variables, par X, Y, Z, ... les modules de $\overline{x}, \overline{y}, \overline{z}, \ldots$ et par $\Lambda f(\overline{x}, \overline{y}, \overline{z}, \ldots)$ la limite du module de $f(\overline{x}, \overline{y}, \overline{z}, \ldots)$, c'est-à-dire la plus grande valeur que ce module puisse acquérir quand on y fait varier les rapports imaginaires $\frac{\overline{x}}{X}, \frac{\overline{y}}{Y}, \frac{\overline{z}}{Z}, \ldots$, sans changer X, Y, Z, ..., on établira facilement la proposition suivante :

Théorème II. — *La fonction $f(x, y, z, \ldots)$ sera développable, par la formule de Maclaurin étendue au cas de plusieurs variables, en une série convergente ordonnée suivant les puissances ascendantes de $x, y, z, \ldots$, si les modules des variables réelles ou imaginaires $x, y, z, \ldots$ conservent des valeurs inférieures à celles pour lesquelles la fonction (ou l'une de ses dérivées du premier ordre) cesse d'être finie et continue. Soient X, Y, Z, ... ces dernières valeurs ou des valeurs plus petites; et $\overline{x}, \overline{y}, \overline{z}, \ldots$ des expressions imaginaires qui offrent pour modules X, Y, Z, ... Les modules du terme général et du reste de la série en question seront respectivement inférieurs aux modules du terme général et du reste de la série qui a pour somme le produit*

$$\frac{X}{X-x}\,\frac{Y}{Y-y}\,\frac{Z}{Z-z}\cdots\Lambda f(\overline{x}, \overline{y}, \overline{z}, \ldots), \tag{14}$$

par conséquent au terme général et au reste de la série qui a pour somme

$$\frac{X}{X-\xi}\,\frac{Y}{Y-\eta}\,\frac{Z}{Z-\zeta}\cdots\Lambda f(\overline{x}, \overline{y}, \overline{z}, \ldots), \tag{15}$$

ξ, η, ζ étant les modules de $x, y, z, \ldots$.

Telles sont les propositions qui, dans le calcul des limites, servent de base à la théorie du développement des fonctions explicites d'une ou de plusieurs variables $x, y, z, \ldots$, suivant les puissances ascendantes de $x, y, z, \ldots$. Observons au reste que le théorème I peut être appliqué même au développement des fonctions de plusieurs variables; car, pour développer $f(x, y, z, \ldots)$ suivant les puissances ascendantes de $x, y, z, \ldots$, il suffit de développer, suivant les puissances ascendantes de α, la fonction

$$f(\alpha x, \alpha y, \alpha z, \ldots)$$

ou même la suivante

$$f(\alpha^k x, \alpha^{k'} y, \alpha^{k''} z, \ldots),$$

$k, k', k'', \ldots$ étant des nombres entiers quelconques, et de poser ensuite $\alpha = 1$. En opérant de cette manière, on prouvera sans peine que, si dans le développement de $f(x, y, z, \ldots)$ on néglige les termes où les exposants $n, n', n'', \ldots$ de $x, y, z, \ldots$ vérifient la condition

$$nk + n'k' + n''k'' + \ldots \geqq h \tag{16}$$

(h étant un nombre entier donné), l'erreur commise ou le module de la somme des termes négligés ne dépassera pas

$$\frac{1}{\Lambda^h(\Lambda-1)}\Lambda f(\bar{\alpha}^k x, \bar{\alpha}^{k'} y, \bar{\alpha}^{k''} z, \ldots), \tag{17}$$

Λ désignant le module de $\bar{\alpha}$, et ce module étant supérieur à l'unité, mais choisi de manière que la fonction

$$f(\bar{\alpha}^k x, \bar{\alpha}^{k'} y, \bar{\alpha}^{k''} z, \ldots)$$

reste finie et continue pour ce même module de $\bar{\alpha}$ ou pour des modules plus petits. Dans le cas où les nombres $k, k', k'', \ldots$ se réduisent à l'unité, la condition (16) donne simplement

$$n + n' + n'' + \ldots \geqq h, \tag{18}$$

et l'expression (17) se réduit elle-même à

$$\frac{1}{\Lambda^{h-1}(\Lambda-1)}\Lambda f(\bar{\alpha} x, \bar{\alpha} y, \bar{\alpha} z, \ldots). \tag{19}$$

La détermination de limites supérieures aux restes des séries qui représentent les développements des fonctions explicites se trouve réduite, par les théorèmes I et II, à la détermination des quantités de la forme

$$\Lambda f(\bar{x}) \qquad \text{ou} \qquad \Lambda f(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, \ldots). \tag{20}$$

On pourrait même à ces quantités en substituer d'autres qui seraient évidemment plus grandes. Or, il est généralement facile de déterminer ou les valeurs exactes des expressions (20), ou du moins des nombres qui surpassent ces valeurs. Ainsi, par exemple, si l'on désigne par a une quantité positive et par e la base des logarithmes népériens, en prenant successivement pour $f(x)$ les fonctions

$$a \pm x, \quad ax, \quad \frac{a}{x}, \quad e^{\pm x}, \quad e^{\pm x\sqrt{-1}}, \quad a^{\pm x}, \quad a^{\pm x\sqrt{-1}},$$

on trouvera

$$\left\{\begin{aligned}
&\Lambda(a+\bar{x}) = \Lambda(a-\bar{x}) = a + \mathrm{X},\\
&\Lambda(a\bar{x}) = a\mathrm{X}, \qquad \Lambda\left(\frac{a}{\bar{x}}\right) = \frac{a}{\mathrm{X}},\\
&\Lambda e^{\bar{x}} = \Lambda e^{-\bar{x}} = \Lambda e^{\bar{x}\sqrt{-1}} = \Lambda e^{-\bar{x}\sqrt{-1}} = e^{\mathrm{X}},\\
&\Lambda a^{\bar{x}} = \Lambda a^{-\bar{x}} = \Lambda a^{\bar{x}\sqrt{-1}} = \Lambda a^{-\bar{x}\sqrt{-1}} = a^{\mathrm{X}}.
\end{aligned}\right. \tag{21}$$

De même, en prenant pour $f(x)$ les fonctions

$$(1 \pm x)^a, \quad (1 \pm x)^{-a},$$

et supposant $\mathrm{X} < 1$, on trouvera

$$\left\{\begin{aligned}
&\Lambda(1+\bar{x})^a = \Lambda(1-\bar{x})^a = (1+\mathrm{X})^a,\\
&\Lambda(1+\bar{x})^{-a} = \Lambda(1-\bar{x})^{-a} = (1-\mathrm{X})^{-a}.
\end{aligned}\right. \tag{22}$$

Si l'on prenait $f(x) = \sin x$, le carré du module de $f(\bar{x}) = \sin \bar{x}$ serait le quart du trinome

$$e^{2\mathrm{X}\sin p} + e^{-2\mathrm{X}\sin p} - 2\cos(2\mathrm{X}\cos p).$$

Or il suffit de faire varier l'angle p entre les limites $p = 0, p = \frac{\pi}{2}$, pour que ce trinome acquière toutes les valeurs qu'il peut recevoir; et, comme sa dérivée relative à p est le produit de $8\mathrm{X}^2 \sin p \cos p$ par la différence

$$\frac{e^{2\mathrm{X}\sin p} - e^{-2\mathrm{X}\sin p}}{4\mathrm{X}\sin p} - \frac{\sin(2\mathrm{X}\cos p)}{2\mathrm{X}\cos p},$$

qui reste toujours positive, puisque le premier terme est supérieur et le second inférieur à l'unité [1], il est clair que le module de $\sin \bar{x}$ croîtra sans cesse depuis $p = 0$ jusqu'à $p = \frac{\pi}{2}$. Donc $\Lambda \sin \bar{x}$ sera le

[1] On a effectivement, pour des valeurs réelles de x,

$$\frac{e^x - e^{-x}}{2x} = 1 + \frac{x^2}{1.2.3} + \frac{x^4}{1.2.3.4.5} + \ldots > 1 \qquad \text{et} \qquad \frac{\sin x}{x} < 1$$

module de $\sin \bar{x}$ pour $\bar{x} = \mathrm{X} e^{\frac{\pi}{2}\sqrt{-1}} = \mathrm{X}\sqrt{-1}$, en sorte qu'on aura

$$(23)\qquad \left\{\begin{array}{l} \Lambda \sin \bar{x} = \dfrac{e^{\mathrm{X}} - e^{-\mathrm{X}}}{2}; \\ \qquad \text{on trouvera de même} \\ \Lambda \cos \bar{x} = \dfrac{e^{\mathrm{X}} + e^{-\mathrm{X}}}{2}. \end{array}\right.$$

On aura par suite

$$(24)\qquad \left\{\begin{array}{l} \Lambda \sin(a \pm \bar{x}) \leqq \dfrac{e^{\mathrm{X}} - e^{-\mathrm{X}}}{2}\sqrt{\cos^2 a} + \dfrac{e^{\mathrm{X}} + e^{-\mathrm{X}}}{2}\sqrt{\sin^2 a}, \\ \Lambda \cos(a \pm \bar{x}) \leqq \dfrac{e^{\mathrm{X}} + e^{-\mathrm{X}}}{2}\sqrt{\cos^2 a} + \dfrac{e^{\mathrm{X}} - e^{-\mathrm{X}}}{2}\sqrt{\sin^2 a}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right.$$

Soient encore $u, v, w, \ldots$ des fonctions des variables $x, y, z, \ldots$, et $\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}, \ldots$ ce que deviennent $u, v, w, \ldots$ quand on y remplace x par $\bar{x}$, y par $\bar{y}$, z par $\bar{z}$, ... On trouvera

$$(25)\qquad \left\{\begin{array}{l} \Lambda(\bar{u} \pm \bar{v} \pm \bar{w} \pm \ldots) \leqq \Lambda\bar{u} + \Lambda\bar{v} + \Lambda\bar{w} + \ldots, \\ \Lambda(\bar{u}\bar{v}\bar{w}\ldots\ldots\ldots\ldots) \leqq \Lambda\bar{u}.\Lambda\bar{v}.\Lambda\bar{w}\ldots\ldots\ldots, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right.$$

$$(26)\qquad \left\{\begin{array}{l} \Lambda e^{\bar{u}\sqrt{-1}} \leqq 2\Lambda \cos\bar{u}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right.$$

Pour faciliter la recherche de quantités égales ou supérieures à $\Lambda f(\bar{x})$, $\Lambda f(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$, il est utile de considérer non seulement les plus grandes, mais encore les plus petites valeurs que puissent acquérir des fonctions de $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, \ldots$ quand on fait varier les rapports $\dfrac{\bar{x}}{\mathrm{X}}, \dfrac{\bar{y}}{\mathrm{Y}}, \dfrac{\bar{z}}{\mathrm{Z}}, \ldots$. Concevons que, les plus grandes valeurs étant toujours indiquées à l'aide de la caractéristique Λ, on désigne les plus petites à l'aide de la même caractéristique suivie d'un accent, ou de Λ'. On

trouvera, en supposant a positif,

$$(27)\qquad \left\{\begin{array}{lll} \Lambda'(a + \bar{x}) = \Lambda'(a - \bar{x}) = a - \mathrm{X} & \text{pour} & \mathrm{X} < a, \\ \Lambda'(a + \bar{x}) = \Lambda'(a - \bar{x}) = \mathrm{X} - a & \text{pour} & \mathrm{X} > a, \\ \Lambda'(a\bar{x}) \quad = a\mathrm{X}, \qquad \Lambda'\left(\dfrac{a}{\bar{x}}\right) = \dfrac{a}{\mathrm{X}}, & & \\ \Lambda' e^{\bar{x}} = \Lambda' e^{-\bar{x}} = \Lambda' e^{\bar{x}\sqrt{-1}} = \Lambda' e^{-\bar{x}\sqrt{-1}} = e^{-\mathrm{X}}, & & \\ \Lambda' a^{\bar{x}} = \Lambda' a^{-\bar{x}} = \Lambda' a^{\bar{x}\sqrt{-1}} = \Lambda' a^{-\bar{x}\sqrt{-1}} = a^{-\mathrm{X}}, & & \end{array}\right.$$

$$(28)\qquad \left.\begin{array}{l} \Lambda'(1 + \bar{x})^{a} \;\, = \Lambda'(1 - \bar{x})^{a} \;\, = (1 - \mathrm{X})^{a} \\ \Lambda'(1 + \bar{x})^{-a} = \Lambda'(1 - \bar{x})^{-a} = (1 + \mathrm{X})^{-a} \end{array}\right\} \text{pour} \quad \mathrm{X} < 1,$$

$$(29)\qquad \Lambda' \sin\bar{x} = \sin\mathrm{X}, \qquad \Lambda' \cos\bar{x} = \cos\mathrm{X},$$

$$(30)\qquad \Lambda'(\bar{u}\bar{v}\bar{w}\ldots) \geqq \Lambda'\bar{u}.\Lambda'\bar{v}.\Lambda'\bar{w}\ldots.$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

On aura d'ailleurs

$$(31)\qquad \Lambda\frac{\bar{u}}{\bar{v}} \leqq \frac{\Lambda\bar{u}}{\Lambda'\bar{v}}, \qquad \Lambda'\frac{\bar{u}}{\bar{v}} \geqq \frac{\Lambda'\bar{u}}{\Lambda\bar{v}},$$

$$(32)\qquad \left\{\begin{array}{lll} \Lambda'(\bar{u} \pm \bar{v}) \geqq \Lambda'\bar{u} - \Lambda\bar{v} & \text{si} & \Lambda'\bar{u} > \Lambda\bar{v}, \\ \Lambda'(\bar{u} \pm \bar{v}) \geqq \Lambda'\bar{v} - \Lambda\bar{u} & \text{si} & \Lambda'\bar{v} > \Lambda\bar{u}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & .. & \ldots\ldots\ldots \end{array}\right.$$

Supposons qu'à l'aide de ces diverses formules on veuille calculer par exemple une limite égale ou supérieure à

$$\Lambda\frac{\bar{v}}{\bar{x} - \bar{u}},$$

en supposant $\Lambda\bar{u} < \mathrm{X}$. On trouvera successivement

$$\Lambda\frac{\bar{v}}{\bar{x} - \bar{u}} \leqq \frac{\Lambda\bar{v}}{\Lambda'(\bar{x} - \bar{u})}$$

et

$$\Lambda'(\bar{x} - \bar{u}) \geqq \mathrm{X} - \Lambda\bar{u},$$

puis on en conclura

$$(33)\qquad \Lambda\frac{\bar{v}}{\bar{x} - \bar{u}} \leqq \frac{\Lambda\bar{v}}{\mathrm{X} - \Lambda\bar{u}}.$$

Lorsqu'à l'aide de formules semblables à celles qui précèdent on a déterminé les quantités (20) ou des quantités évidemment plus grandes et qu'on peut leur substituer sans inconvénient, il convient de choisir les modules X, Y, Z, ... desquels dépendent ces mêmes quantités, de manière que les limites supérieures aux modules des termes généraux des séries que l'on considère et des restes qui complètent ces séries acquièrent les plus petites valeurs possibles.

Observons encore que, dans la recherche d'une limite supérieure au module du reste qui complète le développement de $f(x)$, on peut substituer à la formule (11) la plus grande valeur que puisse acquérir le module de la fonction renfermée sous le signe $\int$ dans l'intégrale (12), c'est-à-dire la quantité représentée par la notation

$$\Lambda\left[\frac{x^n}{\overline{x}^{n-1}(\overline{x}-x)} f(\overline{x})\right]. \tag{34}$$

En prenant cette dernière quantité, au lieu de la quantité (11), pour la limite dont il s'agit, on diminuera souvent la valeur de cette limite, attendu qu'on aura généralement

$$\Lambda\left[\frac{x^n}{\overline{x}^{n-1}(\overline{x}-x)} f(\overline{x})\right] \leqq \frac{\xi^n}{X^{n-1}(X-\xi)}\Lambda f(\overline{x}). \tag{35}$$

Mais d'un autre côté, le calcul de cette même limite deviendra plus difficile. Il semble que pour cette raison on devra ordinairement préférer la formule (11) à la formule (34).

Lorsqu'on a déterminé la quantité (34) en fonction de X, il convient de choisir X de manière que cette quantité devienne la plus petite possible. Alors l'expression (34), considérée comme une valeur particulière du module de la fonction

$$\frac{x^n}{\overline{x}^{n-1}(\overline{x}-x)} f(\overline{x}), \tag{36}$$

est tout à la fois un *maximum maximorum* de ce module, relativement à l'angle p, et un *minimum* relativement à X, ou ce que nous avons

nommé dans un autre Mémoire le *module principal* de la fonction (36) (*voyez* le Tome VIII des *Mémoires de l'Institut*) (¹).

Pour montrer une application des principes que nous venons d'établir, prenons successivement pour $f(x)$ les deux fonctions

$$e^x, \quad (1+x)^{-a},$$

qui, comme on l'a vu, peuvent être développées en séries convergentes ordonnées suivant les puissances ascendantes de x, la première, quel que soit x, la seconde, lorsque le module de x est inférieur à l'unité. Les expressions (9) et (11) deviendront, pour $f(x)=e^x$,

$$\frac{\xi^n}{X^n}e^X, \quad \frac{\xi^n}{X^{n-1}(X-\xi)}e^X, \tag{37}$$

et pour $f(x)=(1+x)^{-a}$,

$$\frac{\xi^n}{X^n(1-X)^a}, \quad \frac{\xi^n}{X^{n-1}(X-\xi)}\,\frac{1}{(1-X)^a}. \tag{38}$$

La première des expressions (37), considérée comme fonction de X, acquiert la plus petite valeur possible, lorsqu'on suppose $X=n$, et alors ces expressions se réduisent à

$$\left(\frac{e\xi}{n}\right)^n, \quad \frac{n}{n-\xi}\left(\frac{e\xi}{n}\right)^n. \tag{39}$$

Donc les quantités (39) sont des limites supérieures aux modules du terme général de la série qui représente le développement de e^x et du reste qui la complète, ξ désignant le module de x. Pareillement la première des expressions (38), considérée comme fonction de X, acquerra la plus petite valeur possible, lorsqu'on supposera $X=\frac{n}{n+a}$, et alors les expressions (38) deviendront

$$\frac{(n+a)^{n+a}}{n^n a^a}\xi^n, \quad \frac{n}{n(1-\xi)-a\xi}\,\frac{(n+a)^{n+a}}{n^n a^a}\xi^n. \tag{40}$$

Donc les quantités (40) sont des limites supérieures aux modules du

(¹) *Œuvres de Cauchy*, 1^re série, t. II, p. 31.

terme général de la série qui représente le développement de $(1+x)^{-a}$ et du reste qui la complète.

Concevons maintenant que l'on prenne pour $f(x)$ une fraction rationnelle, en sorte qu'on ait

$$f(x)=\frac{\mathrm{f}(x)}{\mathrm{F}(x)},$$

$\mathrm{f}(x)$ et $\mathrm{F}(x)$ désignant deux fonctions entières de x. Soit d'ailleurs ρ le plus petit des nombres ρ, ρ', ρ'', ... qui représentent les modules des racines de l'équation

$$\mathrm{F}(x)=0.$$

On conclura des principes ci-dessus exposés : 1° que la fraction rationnelle $\frac{\mathrm{f}(x)}{\mathrm{F}(x)}$ sera développable en une série convergente ordonnée suivant les puissances ascendantes de x, tant que le module ξ de la variable x sera inférieur à ρ; 2° que, si l'on attribue à X une valeur intermédiaire entre ξ et ρ, le reste de la série offrira un module inférieur au produit

$$\frac{\xi^n}{X^{n-1}(X-\xi)}\Lambda\frac{\mathrm{f}(\overline{x})}{\mathrm{F}(\overline{x})}.$$

D'autre part, comme, en appelant K la valeur numérique ou le module de $\mathrm{F}(0)$, on aura

$$\Lambda\frac{\mathrm{f}(\overline{x})}{\mathrm{F}(\overline{x})}\leqq\frac{\rho\rho'\rho''\ldots}{K}\,\frac{\Lambda\,\mathrm{f}(\overline{x})}{(\rho-X)(\rho'-X)(\rho''-X)\ldots},$$

il est clair que le module du reste de la série sera encore inférieur au rapport

$$\frac{\rho\rho'\rho''\ldots\xi^n\Lambda\,\mathrm{f}(\overline{x})}{KX^{n-1}(X-\xi)(\rho-X)(\rho'-X)(\rho''-X)\ldots}.$$

Parmi les valeurs qu'on peut attribuer à X, il serait difficile de calculer celle qui fournit le *minimum* du rapport dont il s'agit, ou même le *maximum* du produit

$$X^{n-1}(X-\xi)(\rho-X)(\rho'-X)(\rho''-X)\ldots.$$

Mais on déterminera sans peine les deux valeurs de X qui fournissent les maxima des deux produits

$$X^{n-1}(\rho-X),\quad (X-\xi)(\rho-X);$$

et ces deux valeurs feront connaître deux limites supérieures au module du reste de la série qui représentera le développement de $\frac{\mathrm{f}(x)}{\mathrm{F}(x)}$.

Si, au lieu de prendre pour $f(x)$ la fraction rationnelle $\frac{\mathrm{f}(x)}{\mathrm{F}(x)}$, on supposait

$$f(x)=\left[\frac{\mathrm{f}(x)}{\mathrm{F}(x)}\right]^a,$$

a étant un nombre fractionnaire ou irrationnel, un module de x inférieur à ρ rendrait encore la fonction $\left[\frac{\mathrm{f}(x)}{\mathrm{F}(x)}\right]^a$ développable en une série convergente ordonnée suivant les puissances ascendantes de x, pourvu que le nombre ρ désignât le plus petit de tous les modules appartenant aux racines des deux équations

$$\mathrm{f}(x)=0,\qquad \mathrm{F}(x)=0.$$

Alors aussi le reste de la série offrirait un module inférieur au produit

$$\frac{\xi^n}{X^{n-1}(X-\xi)}\Lambda\left[\frac{\mathrm{f}(\overline{x})}{\mathrm{F}(\overline{x})}\right]^a.$$

Si, pour fixer les idées, on suppose

$$\mathrm{f}(x)=1,\qquad \mathrm{F}(x)=1-2x\cos\delta+x^2=\left(x-e^{\delta\sqrt{-1}}\right)\left(x-e^{-\delta\sqrt{-1}}\right),$$

δ étant réel, on trouvera $\rho=1$; et l'on en conclura que tout module de x inférieur à l'unité rend la fonction

$$(1-2x\cos\delta+x^2)^{-a}$$

développable en une série convergente ordonnée suivant les puissances ascendantes de x; ce que l'on savait déjà. (*Voyez* un Mémoire de M. Laplace et une Note de M. Plana insérée dans le XIV^e^ volume de la *Correspondance astronomique* de M. de Zach). On reconnaitra aussi que le reste de la série offre un module inférieur au rapport

$$\frac{\xi^n}{X^{n-1}(X-\xi)(1-X)^{2a}}$$

et, par suite, aux deux nombres

$$\frac{(n+2a-1)^{n+2a}}{(n-1)^{n-1}(2a)^{2a}}\,\frac{\xi^n}{(n-1)(1-\xi)-2a\xi},\qquad \frac{(2a+1)^{n+2a}}{(2a)^{2a}}\,\frac{(1-\xi)^{2a+1}\xi^n}{(1+2a\xi)^{n-1}},$$

qui représentent les valeurs du même rapport correspondant aux valeurs maxima des produits

$$X^{n-1}(1-X)^{2a},\qquad (X-\xi)(1-X)^{2a}.$$

Avant de passer à la théorie du développement des fonctions implicites, nous ferons remarquer que l'exposition des principes ci-dessus établis peut être simplifiée à l'aide du calcul des résidus. En effet, les formules (1), (2), (3), (5), (6), (8), qui d'ailleurs étaient déjà connues, se trouvent toutes comprises dans une des formules fondamentales que présente le calcul des résidus, et que l'on peut écrire comme il suit

$$(41)\qquad \int_{-\pi}^{\pi}\varphi(\overline{x})\,dp = 2\pi\;{}^{(X)}_{(0)}\mathcal{E}^{(\pi)}_{(-\pi)}\left[\frac{\varphi(x)}{x}\right]_x \quad (^1),$$

$\varphi(x)$ étant une fonction qui conserve une valeur unique et déterminée pour toute valeur réelle ou imaginaire de x correspondant à un module renfermé entre les limites 0, X.

Soit maintenant y une fonction implicite de x, déterminée par une équation de la forme

$$(42)\qquad f(x,y)=0,$$

et b une valeur de y qui corresponde à une valeur particulière de x. Si

(1) Pour plus de simplicité, nous remplaçons ici les doubles parenthèses du calcul des résidus par deux crochets trapézoïdaux. De plus, à la suite du dernier crochet, nous plaçons la variable à laquelle se rapporte le signe $\mathcal{E}$, ainsi que M. Blanchet l'a fait dans ses derniers Mémoires, en adoptant notre nouvelle notation.

l'on fait

$$(43)\qquad y=b+z,$$

l'équation (42) deviendra

$$(44)\qquad f(x, b+z)=0.$$

Cela posé, désignons par $\chi(x,y)$ la dérivée de $f(x,y)$ prise par rapport à y, en sorte qu'on ait identiquement

$$(45)\qquad \chi(x,y)=\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}.$$

Supposons d'ailleurs que l'équation (44) admette une seule racine réelle ou imaginaire z dont le module soit inférieur à Z, que la fonction $f(x, b+z)$ conserve une valeur unique et déterminée pour toute valeur réelle ou imaginaire de z qui offre un module égal ou inférieur à Z, et que, pour une semblable valeur de z, la fonction $F(y)=F(b+z)$ ne devienne jamais ni discontinue ni infinie. On aura

$$(46)\qquad F(y)={}^{(Z)}_{(0)}\mathcal{E}^{(\pi)}_{(-\pi)}\left(\frac{\chi(x,b+z)}{f(x,b+z)}F(b+z)\right)_z,$$

le signe $\mathcal{E}$ se rapportant à la variable z. D'autre part, si l'on désigne par $\overline{z}$ une expression imaginaire dont le module soit Z, en sorte qu'on ait

$$(47)\qquad \overline{z}=Ze^{q\sqrt{-1}},$$

q représentant un arc réel, la formule (41) donnera

$$(48)\qquad {}^{(Z)}_{(0)}\mathcal{E}^{(\pi)}_{(-\pi)}\left(\frac{\chi(x,b+z)}{f(x,b+z)}F(b+z)\right)_z=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\overline{z}\,\frac{\chi(x,b+\overline{z})}{f(x,b+\overline{z})}F(b+\overline{z})\,dq.$$

Donc l'équation (46) pourra être réduite à

$$(49)\qquad F(y)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\overline{z}\,\frac{\chi(x,b+\overline{z})}{f(x,b+\overline{z})}F(b+\overline{z})\,dq.$$

On peut au reste déduire directement la formule (49) de l'équation (5), en opérant comme il suit.

Lorsqu'on suppose $\bar{z} = z$, les deux termes du binome

$$\frac{\chi(x, b+\bar{z})}{f(x, b+\bar{z})} \mathrm{F}(b+\bar{z}) - \frac{\mathrm{F}(b+z)}{\bar{z}-z}$$

deviennent infinis; mais ce binome lui-même acquiert généralement une valeur finie, savoir :

$$\mathrm{D}_z \mathrm{F}(b+z) + \frac{1}{2} \frac{\mathrm{F}(b+z)}{\chi(x, b+z)} \mathrm{D}_z \chi(x, b+z).$$

Donc, si le module Z de z est choisi de manière à remplir les conditions précédemment énoncées, savoir : 1° que l'équation (44) admette une seule racine dont le module soit inférieur à Z; 2° que la fonction $\mathrm{F}(b+z)$ ne devienne point infinie ou discontinue pour un module de z égal ou inférieur à Z, le produit

$$\bar{z}\left[\frac{\chi(x, b+\bar{z})}{f(x, b+\bar{z})} \mathrm{F}(b+\bar{z}) - \frac{\mathrm{F}(b+z)}{\bar{z}-z}\right] \tag{50}$$

restera fonction continue de Z et de q pour la valeur attribuée à Z ou pour une valeur plus petite. Or, si, dans l'équation (5), on remplace $\bar{x}$ par z, et la fonction $f(\bar{x})$ par le produit (50), on trouvera, en prenant pour z la racine de l'équation (44),

$$\int_{-\pi}^{\pi} \bar{z} \frac{\chi(x, b+\bar{z})}{f(x, b+\bar{z})} \mathrm{F}(b+\bar{z})\, dq = \mathrm{F}(b+z) \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\bar{z}\, dq}{\bar{z}-z} = 2\pi \mathrm{F}(b+z) = 2\pi \mathrm{F}(y),$$

et l'on sera ainsi ramené à la formule (49).

Lorsque, dans la formule (49), on pose $\mathrm{F}(y) = 1$, elle donne

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \bar{z} \frac{\chi(x, b+\bar{z})}{f(x, b+\bar{z})}\, dq = 1. \tag{51}$$

Lorsqu'on y suppose au contraire

$$\mathrm{F}(y) = y,$$

on en conclut

$$y = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \bar{z}(b+\bar{z}) \frac{\chi(x, b+\bar{z})}{f(x, b+\bar{z})}\, dq, \tag{52}$$

puis, en ayant égard à l'équation (51),

$$y = b + \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \bar{z}^2 \frac{\chi(x, b+\bar{z})}{f(x, b+\bar{z})}\, dq. \tag{53}$$

Si l'équation (44) admettait m racines égales ou inégales dont les modules fussent inférieurs à Z, en désignant par $z, z_1, z_2, \ldots, z_{m-1}$ ces mêmes racines, et par $y, y_1, y_2, \ldots, y_{m-1}$ les racines correspondantes de l'équation (42), on trouverait

$$\mathrm{F}(y) + \mathrm{F}(y_1) + \ldots + \mathrm{F}(y_{m-1}) = {}_{(0)}^{(\mathrm{Z})}\mathcal{E}_{(-\pi)}^{(\pi)} \left(\frac{\chi(x, b+z)}{f(x, b+z)} \mathrm{F}(b+z)\right)_z; \tag{54}$$

puis de cette dernière formule, combinée avec l'équation (48), on déduirait la suivante

$$\mathrm{F}(y) + \mathrm{F}(y_1) + \ldots + \mathrm{F}(y_{m-1}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \bar{z} \frac{\chi(x, b+\bar{z})}{f(x, b+\bar{z})} \mathrm{F}(b+\bar{z})\, dq, \tag{55}$$

qu'on peut établir directement aussi bien que l'équation (49). Si, dans la formule (55), on pose $\mathrm{F}(y) = 1$, elle donnera

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \bar{z} \frac{\chi(x, b+\bar{z})}{f(x, b+\bar{z})}\, dq = m. \tag{56}$$

Si l'on pose au contraire $\mathrm{F}(y) = y$, on trouvera

$$y + y_1 + y_2 + \ldots + y_{m-1} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \bar{z}(b+\bar{z}) \frac{\chi(x, b+\bar{z})}{f(x, b+\bar{z})}\, dq, \tag{57}$$

puis, en ayant égard à l'équation (56),

$$y + y_1 + y_2 + \ldots + y_{m-1} = mb + \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \bar{z}^2 \frac{\chi(x, b+\bar{z})}{f(x, b+\bar{z})}\, dq. \tag{58}$$

Nous montrerons tout à l'heure comment, à l'aide des formules (53), (58), (49) et (55), on peut développer les fonctions implicites de la variable x en séries ordonnées suivant les puissances ascendantes de cette variable. Mais auparavant il importe d'établir une proposition digne de remarque, et qui peut être employée très utilement quand on veut déterminer le nombre des racines de l'équation (44) qui offrent un module inférieur à Z. Voici l'énoncé de cette proposition :

THÉORÈME III. — *Soit m le nombre des racines de l'équation*

$$f(0, b + z) = 0, \tag{59}$$

qui offrent des modules plus petits que Z. Supposons d'ailleurs : 1° que, pour des modules de x et de z respectivement inférieurs à X et à Z, la fonction $f(x, b+z)$ obtienne toujours une valeur unique et déterminée ; 2° que, Z étant le module de $\bar{z}$, le logarithme népérien du rapport $\frac{f(x, b+\bar{z})}{f(0, b+z)}$, ou

$$\mathrm{l}\frac{f(x, b+\bar{z})}{f(0, b+\bar{z})}, \tag{60}$$

soit développable en une série convergente ordonnée suivant les puissances ascendantes de x, pour tout module de x inférieur à X. Pour un semblable module de x, l'équation (44) offrira elle-même un nombre m de racines dont les modules seront plus petits que Z.

Démonstration. — En effet, admettons que, pour un module de x inférieur à X, on puisse développer

$$\mathrm{l}\frac{f(x, b+\bar{z})}{f(0, b+\bar{z})}$$

en une série convergente ordonnée suivant les puissances ascendantes de x. On aura

$$\mathrm{l}\frac{f(x, b+\bar{z})}{f(0, b+\bar{z})} = x\bar{u}_1 + x^2\bar{u}_2 + x^3\bar{u}_3 + \ldots, \tag{61}$$

$\bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{u}_3, \ldots$ étant des fonctions de $\bar{z}$ qui pourront s'exprimer au moyen des valeurs que prennent la fonction $f(x, b+\bar{z})$ et ses dérivées relatives à la variable x quand x s'évanouit. Or on tirera de l'équation (61)

$$\frac{\chi(x, b+\bar{z})}{f(x, b+\bar{z})} = \frac{\chi(0, b+\bar{z})}{f(0, b+\bar{z})} + x\frac{d\bar{u}_1}{d\bar{z}} + x^2\frac{d\bar{u}_2}{d\bar{z}} + \ldots; \tag{62}$$

puis, en intégrant par rapport à q, entre les limites

$$q = -\pi, \qquad q = \pi,$$

les deux membres de la formule (62), multipliés par

$$\bar{z}\,dq = \frac{1}{\sqrt{-1}}\,d\bar{z},$$

et observant d'ailleurs que, prises entre ces limites, les intégrales

$$\int \frac{d\bar{u}_1}{d\bar{z}}\,d\bar{z} = \bar{u}_1 + \text{const.}, \qquad \int \frac{d\bar{u}_2}{d\bar{z}}\,d\bar{z} = \bar{u}_2 + \text{const.}, \qquad \ldots$$

s'évanouissent, on trouvera

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\chi(x, b+\bar{z})}{f(x, b+\bar{z})}\bar{z}\,dq = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\chi(0, b+\bar{z})}{f(0, b+\bar{z})}\bar{z}\,dq,$$

ou, ce qui revient au même,

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\chi(x, b+\bar{z})}{f(x, b+\bar{z})}\bar{z}\,dq = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\chi(0, b+\bar{z})}{f(0, b+\bar{z})}\bar{z}\,dq. \tag{63}$$

De cette dernière formule, combinée avec la formule (56), il résulte que, dans l'hypothèse admise, le nombre des racines qui offriront des modules inférieurs à Z sera le même pour l'équation (44) et pour l'équation (59), ce qu'il s'agissait de démontrer.

Lorsqu'une seule racine de l'équation (59) présente un module inférieur à Z, alors, en supposant remplies les conditions énoncées dans le théorème III, on peut affirmer que l'équation (44) offre pareillement une seule racine dont le module soit inférieur à Z.

Il est bon d'observer que la démonstration donnée ci-dessus du théorème III repose entièrement sur la formule (62) ; et, comme cette formule subsiste toutes les fois que, pour un module de x inférieur à X, le rapport

$$\frac{\chi(x, b+\bar{z})}{f(x, b+\bar{z})} \tag{64}$$

est développable en une série convergente ordonnée suivant les puissances ascendantes de x, il est clair que l'on peut, au théorème III, substituer la proposition suivante :

Théorème IV. — *Soit m le nombre des racines de l'équation* (59) *qui offrent des modules plus petits que* Z. *Supposons d'ailleurs :* 1° *que, pour des modules de x et de z respectivement inférieurs à* X *et à* Z, *la fonction $f(x, b+z)$ obtienne toujours une valeur unique et déterminée;* 2° *que, pour un module de x inférieur à* X, *le rapport* (64) *soit développable en une série convergente ordonnée suivant les puissances ascendantes de x. Pour un semblable module de x, l'équation* (44) *offrira elle-même un nombre m de racines dont les modules seront plus petits que* Z.

Concevons à présent que l'on intègre, entre les limites $q = -\pi$, $q = \pi$, la formule (62), après avoir multiplié les deux membres, non plus seulement par $\bar{z}\,dq$, mais par le produit

$$\mathrm{F}(b+\bar{z})\,\bar{z}\,dq = \frac{1}{\sqrt{-1}}\mathrm{F}(b+\bar{z})\,d\bar{z},$$

la fonction $\mathrm{F}(y) = \mathrm{F}(b+z)$ étant choisie de manière que $\mathrm{F}(b+z)$ reste finie et continue pour un module de z égal ou inférieur à Z. Alors, en posant pour abréger

$$\frac{d\bar{u}_n}{d\bar{z}} = \bar{v}_n, \tag{65}$$

puis ayant égard à l'équation (55), et désignant par β, β_1, ..., β_{m-1} celles des racines de l'équation

$$f(0, y) = 0 \tag{66}$$

qui correspondent à des modules de z plus petits que Z, on trouvera

$$\begin{aligned}
&\mathrm{F}(y) + \mathrm{F}(y_1) + \ldots + \mathrm{F}(y_{m-1}) \\
&\quad = \mathrm{F}(\beta) + \mathrm{F}(\beta_1) + \ldots + \mathrm{F}(\beta_{m-1}) + \frac{x}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\bar{v}_1\,\bar{z}\,\mathrm{F}(b+\bar{z})\,dq \\
&\qquad + \frac{x^2}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\bar{v}_2\,\bar{z}\,\mathrm{F}(b+\bar{z})\,dq + \ldots.
\end{aligned} \tag{67}$$

De plus, comme, n étant un nombre entier quelconque, l'intégration

par parties donnera

$$\int \mathrm{F}(b+\bar{z})\,d\bar{u}_n = u_n\,\mathrm{F}(b+\bar{z}) - \int u_n\,\mathrm{F}'(b+\bar{z})\,d\bar{z},$$

ou, ce qui revient au même,

$$\int \mathrm{F}(b+\bar{z})\frac{d\bar{u}_n}{d\bar{z}}\,\bar{z}\,dq = \frac{\bar{u}_n\,\mathrm{F}(b+\bar{z})}{\sqrt{-1}} - \int \bar{u}_n\,\mathrm{F}'(b+\bar{z})\,\bar{z}\,dq,$$

et par suite

$$\int_{-\pi}^{\pi}\mathrm{F}(b+\bar{z})\,\bar{v}_n\,\bar{z}\,dq = -\int_{-\pi}^{\pi}\bar{u}_n\,\bar{z}\,\mathrm{F}'(b+\bar{z})\,dq, \tag{68}$$

on trouvera encore

$$\begin{aligned}
&\mathrm{F}(y) + \mathrm{F}(y_1) + \ldots + \mathrm{F}(y_{m-1}) \\
&\quad = \mathrm{F}(\beta) + \mathrm{F}(\beta_1) + \ldots + \mathrm{F}(\beta_{m-1}) - \frac{x}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\bar{u}_1\,\bar{z}\,\mathrm{F}'(b+\bar{z})\,dq \\
&\qquad - \frac{x^2}{3\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\bar{u}_2\,\bar{z}\,\mathrm{F}'(b+\bar{z})\,dq - \ldots.
\end{aligned} \tag{69}$$

Les valeurs des intégrales que renferment les équations (67), (69) peuvent être aisément déterminées à l'aide de la formule (48), de laquelle on tire

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\bar{v}_n\,\bar{z}\,\mathrm{F}(b+\bar{z})\,dq = {}_{(0)}^{(\mathrm{Z})}\mathcal{E}_{(-\pi)}^{(\pi)}\,\mathrm{F}(b+z)\,(v_n)_z,$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\bar{u}_n\,\bar{z}\,\mathrm{F}'(b+\bar{z})\,dq = {}_{(0)}^{(\mathrm{Z})}\mathcal{E}_{(-\pi)}^{(\pi)}\,\mathrm{F}'(b+z)\,(u_n)_z,$$

u_n et v_n désignant ce que deviennent $\bar{u}_n$ et $\bar{v}_n$ quand on y remplace $\bar{z}$ par z, ou, ce qui revient au même, les coefficients de x^n dans les développements des expressions

$$1\frac{f(x, b+z)}{f(0, b+z)}, \tag{70}$$

$$\frac{\chi(x, b+z)}{f(x, b+z)}. \tag{71}$$

Cela posé, les formules (67), (69) donneront

$$\begin{aligned}
&\mathrm{F}(y) + \mathrm{F}(y_1) + \ldots + \mathrm{F}(y_{m-1}) \\
&\quad = \mathrm{F}(\beta) + \mathrm{F}(\beta_1) + \ldots + \mathrm{F}(\beta_{m-1}) + x\,{}_{(0)}^{(\mathrm{Z})}\mathcal{E}_{(-\pi)}^{(\pi)}\,\mathrm{F}(b+z)\,(v_1)_z \\
&\qquad + x^2\,{}_{(0)}^{(\mathrm{Z})}\mathcal{E}_{(-\pi)}^{(\pi)}\,\mathrm{F}(b+z)\,(v_2)_z + \ldots
\end{aligned} \tag{72}$$

et

$$(73)\qquad \begin{aligned} &\mathrm{F}(y)+\mathrm{F}(y_1)+\ldots+\mathrm{F}(y_{m-1}) \\ &= \mathrm{F}(6)+\mathrm{F}(6_1)+\ldots+\mathrm{F}(6_{m-1}) - x\,{}_{(0)}^{(\mathrm{Z})}\mathcal{E}_{(-\pi)}^{(\pi)}\,\mathrm{F}'(b+z)\,(u_1)_z \\ &\qquad - x^2\,{}_{(0)}^{(\mathrm{Z})}\mathcal{E}_{(-\pi)}^{(\pi)}\,\mathrm{F}'(b+z)\,(u_2)_z - \ldots. \end{aligned}$$

Si, dans les formules (69) et (73), on prend $\mathrm{F}(y)=1$, on se trouvera immédiatement ramené au théorème III. Si l'on prend, au contraire, $\mathrm{F}(y)=y$, les mêmes formules donneront

$$(74)\qquad \begin{aligned} &y+y_1+\ldots+y_{m-1} \\ &= 6+6_1+\ldots+6_{m-1} - \frac{x}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\bar{u}_1\bar{z}\,dq - \frac{x^2}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\bar{u}_2\bar{z}\,dq - \ldots \end{aligned}$$

et

$$(75)\qquad \begin{aligned} &y+y_1+\ldots+y_{m-1} \\ &= 6+6_1+\ldots+6_{m-1} - x\,{}_{(0)}^{(\mathrm{Z})}\mathcal{E}_{(-\pi)}^{(\pi)}\,(u_1)_z - x^2\,{}_{(0)}^{(\mathrm{Z})}\mathcal{E}_{(-\pi)}^{(\pi)}\,(u_2)_z - \ldots. \end{aligned}$$

Si maintenant on suppose qu'une seule racine de l'équation (59) offre un module inférieur à Z, et que cette racine soit précisément égale à zéro, on aura $m=1$, $6=b$, et les formules (67), (69), (73), (74), (75) se réduiront à

$$(76)\qquad \begin{aligned} \mathrm{F}(y) = \mathrm{F}(b) &+ \frac{x}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\bar{v}_1\bar{z}\,\mathrm{F}(b+\bar{z})\,dq \\ &+ \frac{x^2}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\bar{v}_2\bar{z}\,\mathrm{F}(b+\bar{z})\,dq + \ldots, \end{aligned}$$

$$(77)\qquad \begin{aligned} \mathrm{F}(y) = \mathrm{F}(b) &- \frac{x}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\bar{u}_1\bar{z}\,\mathrm{F}'(b+\bar{z})\,dq \\ &- \frac{x^2}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\bar{u}_2\bar{z}\,\mathrm{F}'(b+\bar{z})\,dq - \ldots, \end{aligned}$$

$$(78)\qquad \begin{aligned} \mathrm{F}(y) = \mathrm{F}(b) &- x\,{}_{(0)}^{(\mathrm{Z})}\mathcal{E}_{(-\pi)}^{(\pi)}\,\mathrm{F}'(b+z)\,(u_1)_z \\ &- x^2\,{}_{(0)}^{(\mathrm{Z})}\mathcal{E}_{(-\pi)}^{(\pi)}\,\mathrm{F}'(b+z)\,(u_2)_z - \ldots, \end{aligned}$$

$$(79)\qquad y = b - \frac{x}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\bar{u}_1\bar{z}\,dq - \frac{x^2}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\bar{u}_2\bar{z}\,dq - \ldots,$$

$$(80)\qquad y = b - x\,{}_{(0)}^{(\mathrm{Z})}\mathcal{E}_{(-\pi)}^{(\pi)}\,(u_1)_z - x^2\,{}_{(0)}^{(\mathrm{Z})}\mathcal{E}_{(-\pi)}^{(\pi)}\,(u_2)_z - \ldots.$$

Les formules (67), (69), (72), (73), (74), (75), (76), (77), (78), (79), (80) fournissent, sous les conditions ci-dessus énoncées, les développements des fonctions implicites de x représentées par y et $\mathrm{F}(y)$, ou par

$$y+y_1+\ldots+y_{m-1} \quad \text{et} \quad \mathrm{F}(y)+\mathrm{F}(y_1)+\ldots+\mathrm{F}(y_{m-1}),$$

en séries convergentes ordonnées suivant les puissances ascendantes de x. Observons d'ailleurs qu'en vertu des formules (76) et (67), le coefficient de x^n dans le développement de $\mathrm{F}(y)$ ou de

$$\mathrm{F}(y)+\mathrm{F}(y_1)+\ldots+\mathrm{F}(y_{m-1})$$

offrira un module inférieur au module maximum du produit

$$\bar{v}_n\bar{z}\,\mathrm{F}(b+\bar{z}),$$

qui est lui-même le coefficient de x^n dans le développement de la fonction

$$(81)\qquad \bar{z}\,\frac{\chi(x, b+\bar{z})}{f(x, b+\bar{z})}\,\mathrm{F}(b+\bar{z}).$$

On pourrait, dans les formules (46), (49), (54), (55), et dans celles que nous en avons déduites, remplacer $\mathrm{F}(y)$ par $\mathrm{F}(x, y)$, la fonction

$$\mathrm{F}(x, y) = \mathrm{F}(x, b+z)$$

étant choisie de manière à rester finie et continue pour des modules de x et de z respectivement inférieurs à X et à Z. Alors, à la place des formules (54) et (55), on obtiendrait les suivantes :

$$(82)\qquad \mathrm{F}(x, y)+\mathrm{F}(x, y_1)+\ldots+\mathrm{F}(x, y_{m-1}) = {}_{(0)}^{(\mathrm{Z})}\mathcal{E}_{(-\pi)}^{(\pi)}\left(\frac{\chi(x, b+z)}{f(x, b+z)}\,\mathrm{F}(x, b+z)\right)_z,$$

$$(83)\qquad \mathrm{F}(x, y)+\mathrm{F}(x, y_1)+\ldots+\mathrm{F}(x, y_{m-1}) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\bar{z}\,\frac{\chi(x, b+\bar{z})}{f(x, b+\bar{z})}\,\mathrm{F}(x, b+\bar{z})\,dq,$$

dont la dernière, combinée avec la formule (6), donnerait

$$(84)\qquad \begin{aligned} &\mathrm{F}(x, y)+\mathrm{F}(x, y_1)+\ldots+\mathrm{F}(x, y_{m-1}) \\ &= \frac{1}{4\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\bar{x}\bar{z}}{\bar{x}-x}\,\frac{\chi(\bar{x}, b+\bar{z})}{f(\bar{x}, b+\bar{z})}\,\mathrm{F}(\bar{x}, b+\bar{z})\,dp\,dq. \end{aligned}$$

Lorsque le nombre m se réduit à l'unité, l'équation (84) devient

$$(85)\qquad \mathrm{F}(x,y)=\frac{1}{4\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\overline{x}\,\overline{z}}{\overline{x}-x}\,\frac{\chi(\overline{x},b+\overline{z})}{f(\overline{x},b+\overline{z})}\mathrm{F}(\overline{x},b+\overline{z})\,dp\,dq.$$

Or, en vertu des formules (84), (85), le terme général de la série qui représentera le développement de $\mathrm{F}(x,y)$ ou de la fonction

$$\mathrm{F}(x,y)+\mathrm{F}(x,y_1)+\ldots+\mathrm{F}(x,y_{m-1}),$$

suivant les puissances ascendantes de x, et le reste de cette série, offriront des modules respectivement inférieurs à ceux du terme général et du reste de la progression géométrique qui a pour somme

$$(86)\qquad \frac{\mathrm{XZ}}{\mathrm{X}-x}\Lambda\frac{\chi(\overline{x},b+\overline{z})}{f(\overline{x},b+\overline{z})}\mathrm{F}(\overline{x},b+\overline{z}).$$

Lorsque, dans la formule (84), on fait successivement $\mathrm{F}(x,y)=1$, $\mathrm{F}(x,y)=y$, on en conclut

$$(87)\qquad y+y_1+\ldots+y_{m-1}=mb+\frac{1}{4\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\overline{x}\,\overline{z}^2}{\overline{x}-x}\,\frac{\chi(\overline{x},b+\overline{z})}{f(\overline{x},b+\overline{z})}\,dp\,dq,$$

puis, en supposant $m=1$,

$$(88)\qquad y=b+\frac{1}{4\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\overline{x}\,\overline{z}^2}{\overline{x}-x}\,\frac{\chi(\overline{x},b+\overline{z})}{f(\overline{x},b+\overline{z})}\,dp\,dq.$$

Donc le terme général et le reste de la série qui représentera le développement de y ou de $y+y_1+\ldots+y_{m-1}$, suivant les puissances ascendantes de x, offriront des modules respectivement inférieurs à ceux du terme général et du reste de la progression géométrique qui a pour somme

$$(89)\qquad \frac{\mathrm{XZ}^2}{\mathrm{X}-x}\Lambda\frac{\chi(\overline{x},b+\overline{z})}{f(\overline{x},b+\overline{z})}.$$

Si l'on désigne par U_n le coefficient de x^n dans la série que l'on obtient en développant suivant les puissances ascendantes de x le second membre de l'équation (83), on aura évidemment, pour $n>0$,

$$(90)\qquad \mathrm{U}_n=\frac{1}{1.2\ldots n}\,\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\overline{z}\,\mathrm{D}_x^n\left[\frac{\chi(x,b+\overline{z})}{f(x,b+\overline{z})}\mathrm{F}(x,b+\overline{z})\right]dq,$$

ou, ce qui revient au même,

$$(91)\qquad \mathrm{U}_n=\frac{1}{1.2.3\ldots n}\,{}^{(\mathrm{Z})}_{(0)}\mathcal{E}^{(\pi)}_{(-\pi)}\left(\mathrm{D}_x^n\left[\frac{\chi(x,b+z)}{f(x,b+z)}\right]\right)_z,$$

la variable x devant être réduite à zéro après les différentiations, et le signe $\mathcal{E}$ se rapportant à la variable z. On trouvera pareillement, pour $n=0$,

$$(92)\qquad \mathrm{U}_0=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\overline{z}\,\frac{\chi(0,b+\overline{z})}{f(0,b+\overline{z})}\mathrm{F}(0,b+\overline{z})\,dq,$$

ou, ce qui revient au même,

$$(93)\qquad \mathrm{U}_0={}^{(\mathrm{Z})}_{(0)}\mathcal{E}^{(\pi)}_{(-\pi)}\left(\frac{\chi(0,b+z)}{f(0,b+z)}\mathrm{F}(0,b+z)\right)_z.$$

Comme on aura d'ailleurs

$$\frac{\chi(x,b+z)}{f(x,b+z)}=\frac{\chi(0,b+z)}{f(0,b+z)}+\mathrm{D}_z\mathrm{l}\frac{f(x,b+z)}{f(0,b+z)},$$

on pourra encore, aux formules (90), (91), substituer les suivantes :

$$(94)\qquad \begin{aligned}\mathrm{U}_n={}&\frac{1}{1.2\ldots n}\,\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\overline{z}\,\frac{\chi(0,b+\overline{z})}{f(0,b+\overline{z})}\mathrm{D}_x^n\mathrm{F}(x,b+\overline{z})\,dq\\ &-\frac{1}{1.2\ldots n}\,\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\overline{z}\,\mathrm{D}_x^n\left[\mathrm{l}\frac{f(x,b+\overline{z})}{f(0,b+\overline{z})}\mathrm{D}_{\overline{z}}\mathrm{F}(x,b+\overline{z})\right]dq,\end{aligned}$$

$$(95)\qquad \begin{aligned}\mathrm{U}_n={}&\frac{1}{1.2\ldots n}\,{}^{(\mathrm{Z})}_{(0)}\mathcal{E}^{(\pi)}_{(-\pi)}\left(\frac{\chi(0,b+z)}{f(0,b+z)}\mathrm{D}_x^n\mathrm{F}(x,b+z)\right)_z\\ &-\frac{1}{1.2\ldots n}\,{}^{(\mathrm{Z})}_{(0)}\mathcal{E}^{(\pi)}_{(-\pi)}\left(\mathrm{D}_x^n\left[\mathrm{l}\frac{f(x,b+z)}{f(0,b+z)}\mathrm{D}_z\mathrm{F}(x,b+z)\right]\right)_z.\end{aligned}$$

Lorsqu'une seule racine de l'équation (59) offre un module inférieur à Z, et que cette racine est précisément zéro, les formules (92), (91), (95) donnent simplement

$$(96)\qquad \mathrm{U}_0=\mathrm{F}(0,b),$$

$$(97)\qquad \mathrm{U}_n=\frac{1}{1.2\ldots(n-1)}\,\frac{1}{1.2\ldots n}\mathrm{D}_z^{n-1}\left[z^n\mathrm{D}_x^n\left(\frac{\chi(x,b+z)}{f(x,b+z)}\mathrm{F}(x,b+z)\right)\right]$$

et

$$(98)\quad U_n = \frac{1}{1.2\ldots n} D_x^n F(x, b) - \frac{1}{1.2\ldots(n-1)} \frac{1}{1.2\ldots n} D_z^{n-1} \left\{ z^n D_x^n \left[1 \frac{f(x, b+z)}{f(0, b+z)} D_z F(x, b+z) \right] \right\},$$

les variables x et z devant être réduites à zéro, après les différentiations effectuées. Alors aussi l'équation (44) n'admet qu'une seule racine z dont le module soit inférieur à Z, et la série qui a pour terme général $U_n x^n$ est le développement de la fonction

$$F(x, y) = F(x, b+z).$$

Lorsque celles des racines de l'équation (59) qui offrent des modules inférieurs à Z sont toutes égales entre elles et se réduisent à zéro, alors, en nommant toujours u_n le coefficient de x^n dans le développement de l'expression (70), et désignant par N le nombre des racines nulles de l'équation

$$(99)\quad \frac{1}{u_n} = 0,$$

on tire des formules (92), (91), (95)

$$(100)\quad U_0 = m F(0, b),$$

$$(101)\quad U_n = \frac{1}{1.2\ldots(N-1)} \frac{1}{1.2\ldots n} D_z^{N-1} \left\{ z^N D_x^n \left[\frac{\chi(x, b+z)}{f(x, b+z)} F(x, b+z) \right] \right\}$$

et

$$(102)\quad U_n = \frac{m}{1.2\ldots n} D_x^n F(x, b) - \frac{1}{1.2\ldots(N-1)} \frac{1}{1.2\ldots n} D_z^{N-1} \left\{ z^N D_x^n \left[1 \frac{f(x, b+z)}{f(0, b+z)} \frac{dF(x, b+z)}{dz} \right] \right\},$$

x et z devant être réduits à zéro après les différentiations. Alors aussi la série qui a pour terme général $U_n x^n$ est le développement de la fonction

$$F(x, y) + F(x, y_1) + \ldots + F(x, y_{m-1}),$$

$y, y_1, \ldots, y_{m-1}$ représentant celles des racines de l'équation (42) qui correspondent à des modules de z plus petits que Z.

Si, dans les formules (96), (98), on remplace $F(x, y)$ par $F(y)$,

elles donneront simplement

$$(103)\quad U_0 = F(b),$$

$$(104)\quad U_n = -\frac{1}{1.2.3\ldots(n-1)} D_z^{n-1}[z^n u_n F'(b+z)],$$

et l'on aura par suite

$$(105)\quad F(y) = F(b) - x(z u_1) F'(b) - \frac{x^2}{1} D_z[z^2 u_2 F'(b+z)] - \frac{x^3}{1.2} D_z^2[z^3 u_3 F'(b+z)] - \ldots,$$

ou, ce qui revient au même,

$$(106)\quad F(y) = F(b) - \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{x^n}{1.2\ldots(n-1)} D_z^{n-1}[z^n u_n F'(b+z)],$$

pourvu que, dans tous les termes du second membre, on réduise z à zéro, après les différentiations. On tirera, sous la même condition, des formules (99) et (101),

$$(107)\quad F(y) + F(y_1) + \ldots + F(y_{m-1}) = m F(b) - \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{x^n}{1.2\ldots(N-1)} D_z^{N-1}[z^N u_n F'(b+z)].$$

Si l'on réduit $F(y)$ à y, les équations (106), (107) deviendront

$$(108)\quad y = b - \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{x^n}{1.2\ldots(n-1)} D_z^{n-1}(z^n u_n).$$

$$(109)\quad y + y_1 + \ldots + y_{m-1} = mb - \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{x^n}{1.2\ldots(N-1)} D_z^{N-1}(z^N u_n).$$

Les équations (106), (107), (108), (109) coïncident avec les formules (78), (73), (80) et (75).

En résumant ce qui précède, on obtient la proposition suivante :

Théorème V. — *Si les conditions énoncées dans le théorème IV sont remplies, la fonction implicite de x, représentée par y, et déterminée par l'équation (42), ou la somme des fonctions implicites représentées par y,*

$y_1, \ldots, y_{m-1}$, *pourra être développée à l'aide des formules* (79), (80), (74), (75), *ou, ce qui revient au même, à l'aide des formules* (90), (91), (92), (93), *en une série convergente ordonnée suivant les puissances ascendantes de* x. *Si de plus la fonction* $\mathrm{F}(x, y) = \mathrm{F}(x, b+z)$ *reste toujours finie et continue pour des modules de* x *et de* z *respectivement inférieurs à* X *et à* Z, *cette fonction, ou la somme*

$$\mathrm{F}(x, y) + \mathrm{F}(x, y_1) + \ldots + \mathrm{F}(x, y_{m-1}),$$

pourra encore être développée, à l'aide des formules (90), (91), (92), (93), *en une série convergente ordonnée suivant les puissances ascendantes de* x. *Ajoutons que les modules du terme général et du reste seront inférieurs, dans la première série, aux modules du terme général et du reste de la progression géométrique qui a pour somme l'expression* (89), *et, dans la seconde série, aux modules du terme général et du reste de la progression géométrique qui a pour somme l'expression* (86).

Scolie. — On peut assigner à X et à Z une infinité de systèmes de valeurs qui remplissent les conditions énoncées dans les théorèmes IV et V. Mais, parmi ces systèmes, il en est un dans lequel la valeur de X est la plus grande possible. Cette plus grande valeur de X est évidemment une limite au-dessous de laquelle on peut faire varier arbitrairement le module de x, sans que les fonctions y, $\mathrm{F}(x, y)$, ou

$$y + y_1 + \ldots + y_{m-1}, \quad \mathrm{F}(x, y) + \mathrm{F}(x, y_1) + \ldots + \mathrm{F}(x, y_{m-1}),$$

cessent d'être développables en séries convergentes ordonnées suivant les puissances ascendantes de x.

Lorsque, dans la formule (102), les nombres N, n deviennent égaux entre eux, la valeur de U_n se réduit à

$$(110) \quad \mathrm{U}_n = \frac{m}{1.2\ldots n} \mathrm{D}_x^n \mathrm{F}(x, b) - \frac{1}{1.2\ldots(n-1)} \frac{1}{1.2\ldots n} \mathrm{D}_z^{n-1} \left\{ z^n \mathrm{D}_x^n \left[\mathrm{l} \frac{f(x, z+b)}{f(0, z+b)} \mathrm{D}_z \mathrm{F}(x, z+b) \right] \right\},$$

les variables x et z devant toujours être annulées après les différentiations. M. Laplace, dans les *Mémoires de l'Académie royale des Sciences* pour l'année 1777, a énoncé, sans démonstration, un théorème en vertu duquel la précédente valeur de U_n serait le coefficient de x^n dans le développement de l'un des produits

$$m\,\mathrm{F}(x, y), \quad m\,\mathrm{F}(x, y_1), \quad \ldots, \quad m\,\mathrm{F}(x, y_{m-1}).$$

Mais ce théorème, comme l'a observé M. Paoli, est évidemment inexact, tant que l'on suppose $m > 1$. Il redevient exact, et s'accorde avec la formule (98), dans le cas où l'on a $m = 1$. Dans ce dernier cas, M. Paoli est parvenu à démontrer le même théorème de plusieurs manières, mais en supposant tacitement que la fonction implicite $\mathrm{F}(x, y)$ est développable en une série convergente ordonnée suivant les puissances ascendantes de x. Il importait de rechercher dans quels cas le développement peut avoir lieu, sous quelles conditions la formule (98) subsiste, et quelles sont les limites de l'erreur commise quand on arrête le développement après un certain nombre de termes. Le théorème V et le scolie qui le suit peuvent servir à résoudre ces différentes questions. Quant à la valeur de U_n que détermine l'équation (110), M. Paoli la présente comme exprimant le coefficient de x^n dans le développement de la somme

$$\mathrm{F}(x, y) + \mathrm{F}(x, y_1) + \ldots + \mathrm{F}(x, y_{m-1}),$$

ce qui cesse d'être vrai lorsqu'on a $\mathrm{N} > n$. Alors à la formule (110) il devient nécessaire de substituer la formule (102). C'est ce dont on peut aisément s'assurer en appliquant les formules (102) et (110) au développement de la fonction

$$(111) \qquad \mathrm{F}(x, y) + \mathrm{F}(x, y_1) + \mathrm{F}(x, y_2),$$

y, y_1, y_2 étant les racines d'une équation du troisième degré. En effet, la formule (110) a conduit M. Paoli à un résultat exact, lorsque l'équation du troisième degré était

$$(112) \qquad (y-b)^3 - x^3(ay+c)^3 = 0,$$

a, b, c désignant des quantités constantes. Mais la même formule ne serait plus applicable, si à l'équation (112) on substituait la suivante :

$$(y-b)^3 - x(ay+c)^3 = 0. \tag{113}$$

On pourrait généraliser encore les résultats auxquels nous sommes parvenus. En effet, si l'on désigne par x_0 un module de la variable x inférieur à X, et par

$$\underline{x} = x_0 e^{p\sqrt{-1}},$$

ce que devient $\overline{x}$ quand on y remplace X par x_0, on tirera de la formule (41)

$$\int_{-\pi}^{\pi}\left[\varphi(\overline{x}) - \varphi(\underline{x})\right]dp = 2\pi \mathop{\vphantom{\sum}}_{(x_0)}^{(\mathrm{X})}\!\mathcal{E}_{(-\pi)}^{(\pi)}\left(\frac{\varphi(x)}{x}\right)_x. \tag{114}$$

Or, si l'on substitue la formule (114) à la formule (41), on obtiendra, au lieu du théorème V, la proposition suivante :

Théorème VI. — *Soit m le nombre des racines de l'équation* (59) *qui offrent des modules compris entre les limites* z_0, Z; z_0 *étant* $<$ Z. *Soient, de plus,* $\overline{z}$, $\underline{z}$ *deux expressions imaginaires de la forme*

$$\overline{z} = \mathrm{Z}e^{q\sqrt{-1}}, \qquad \underline{z} = z_0 e^{p\sqrt{-1}},$$

et supposons : 1° que, pour des modules de x inférieurs à X *et pour des modules de z inférieurs à* Z, *la fonction* $f(x, b+z)$ *obtienne toujours une valeur unique et déterminée ; 2° que, pour tout module de x inférieur à* X, *les deux rapports*

$$\frac{\chi(x, b+\overline{z})}{f(x, b+\overline{z})}, \quad \frac{\chi(x, b+\underline{z})}{f(x, b+\underline{z})}$$

soient développables en séries convergentes ordonnées suivant les puissances ascendantes de x. Pour un semblable module de x, l'équation (44) *offrira elle-même un nombre m de racines dont les modules seront compris entre les limites* z_0, Z; *et, si l'on désigne par* $y, y_1, \ldots, y_{m-1}$ *les valeurs de y correspondantes à ces mêmes racines, la fonction y ou la somme*

$$y + y_1 + \ldots + y_{m-1}$$

sera développable en une série convergente ordonnée suivant les puissances ascendantes de x. Si d'ailleurs la fonction

$$\mathrm{F}(x, y) = \mathrm{F}(x, b+z)$$

reste toujours finie et continue, pour des modules de x inférieurs à X *et pour des modules de z renfermés entre les limites* z_0, Z, *cette fonction* $\mathrm{F}(x, y)$, *ou la somme*

$$\mathrm{F}(x, y) + \mathrm{F}(x, y_1) + \ldots + \mathrm{F}(x, y_{m-1}),$$

sera encore développable en une série convergente ordonnée suivant les puissances ascendantes de x, tant que le module de x demeurera inférieur à X.

Ajoutons que, pour appliquer les formules (67), (69), (72), (73), (74), (75), (76), (77), (78), (79), (80), ... ou (90), (91), (92), (93) au développement des fonctions et des sommes dont il s'agit, il suffira de remplacer, dans ces formules, les fonctions de $\overline{z}$, placées sous le signe $\int$, par les différences entre ces mêmes fonctions et les fonctions semblables de $\underline{z}$, ou le symbole $\mathop{\vphantom{\sum}}_{(0)}^{(\mathrm{Z})}\!\mathcal{E}_{(-\pi)}^{(\pi)}$, par le symbole $\mathop{\vphantom{\sum}}_{(z_0)}^{(\mathrm{Z})}\!\mathcal{E}_{(-\pi)}^{(\pi)}$.

Pour montrer une application des principes ci-dessus établis, supposons

$$f(x, y) = \Pi(y) - x\varpi(y). \tag{115}$$

Les conditions énoncées dans le théorème V se trouveront remplies, si, les trois fonctions

$$\Pi(b+z), \quad \varpi(b+z), \quad \mathrm{F}(x, b+z)$$

restant finies et continues pour des modules de x et de z respectivement inférieurs à X et à Z, le rapport

$$\frac{1}{\Pi(b+\overline{z}) - x\varpi(b+\overline{z})} \tag{116}$$

est développable, pour tout module de x inférieur à X, en une série convergente ordonnée suivant les puissances ascendantes de x. Cette dernière condition se trouvera elle-même vérifiée, si l'on a

$$X\Lambda\frac{\varpi(b+\bar{z})}{\Pi(b+\bar{z})}\leqq 1. \tag{117}$$

D'autre part, si le module Z de $\bar{z}$ est choisi de manière que la quantité

$$\Lambda\frac{\varpi(b+\bar{z})}{\Pi(b+\bar{z})} \tag{118}$$

acquière la plus grande valeur possible, cette quantité deviendra ce que nous avons nommé le module principal de la fonction

$$\frac{\varpi(b+z)}{\Pi(b+z)}, \tag{119}$$

et, en désignant par M ce module principal, on réduira la condition (117) à

$$X\leqq\frac{1}{M}. \tag{120}$$

De plus, l'équation (59) deviendra

$$\Pi(b+z)=0, \tag{121}$$

et l'on trouvera

$$\mathrm{l}\frac{f(x,b+z)}{f(0,b+z)}=\mathrm{l}\left[1-x\frac{\varpi(b+z)}{\Pi(b+z)}\right]=-\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{x^n}{n}\left[\frac{\varpi(b+z)}{\Pi(b+z)}\right]^n,$$

par conséquent

$$u_n=-\frac{1}{n}\left[\frac{\varpi(b+z)}{\Pi(b+z)}\right]^n \tag{122}$$

et

$$v_n=\frac{1}{\Pi(b+z)}\left[\frac{\varpi(b+z)}{\Pi(b+z)}\Pi'(b+z)-\varpi'(b+z)\right]\left[\frac{\varpi(b+z)}{\Pi(b+z)}\right]^{n-1}. \tag{123}$$

Enfin l'expression (86) deviendra

$$\frac{XZ}{X-x}\Lambda\frac{\Pi'(\beta+\bar{z})-\bar{x}\varpi'(b+\bar{z})}{\Pi(b+\bar{z})-\bar{x}\varpi(b+\bar{z})}F(\bar{x},b+\bar{z}), \tag{124}$$

et le reste de la progression géométrique produite par le développement de cette expression en une série ordonnée suivant les puissances de x sera

$$\frac{x^nZ}{X^{n-1}(X-x)}\Lambda\frac{\Pi'(b+\bar{z})-\bar{x}\varpi'(b+\bar{z})}{\Pi(b+\bar{z})-\bar{x}\varpi(b+\bar{z})}F(\bar{x},b+\bar{z}).$$

Donc, si l'on nomme ξ le module de x, le reste de la série qui représentera le développement de la fonction $F(x,y)$ ou de la somme

$$F(x,y)+F(x,y_1)+\ldots+F(x,y_{m-1})$$

offrira un module inférieur au produit

$$\frac{\xi^nZ}{X^{n-1}(X-\xi)}\Lambda\frac{\Pi'(b+\bar{z})-\bar{x}\varpi'(b+\bar{z})}{\Pi(b+\bar{z})-\bar{x}\varpi(b+\bar{z})}F(\bar{x},b+\bar{z}), \tag{125}$$

et à plus forte raison au produit

$$\frac{\xi^nZ}{X^{n-1}(X-\xi)}\,\frac{\Lambda\Pi'(b+\bar{z})+X\Lambda\varpi'(b+\bar{z})}{1-X\Lambda\dfrac{\varpi(b+\bar{z})}{\Pi(b+\bar{z})}}\Lambda\frac{F(\bar{x},b+\bar{z})}{\Pi(b+\bar{z})}. \tag{126}$$

Si l'on prend pour Z celui des modules de z qui correspond au module principal de la fonction (119), l'expression (126) deviendra

$$\frac{\xi^nZ}{X^{n-1}(X-\xi)}\,\frac{\Lambda\Pi'(b+\bar{z})+X\Lambda\varpi'(b+\bar{z})}{1-MX}\Lambda\frac{F(\bar{x},b+\bar{z})}{\Pi(b+\bar{z})}. \tag{127}$$

Cela posé, on déduira immédiatement du théorème V la proposition suivante :

Théorème VII. — *Soient* M *le module principal de la fonction*

$$\frac{\varpi(b+z)}{\Pi(b+z)},$$

Z le module correspondant de z, ou un module plus petit, et X *un nombre égal ou inférieur à* $\frac{1}{M}$. *Supposons d'ailleurs que les fonctions*

$$\varpi(b+z),\quad \Pi(b+z)$$

et leurs dérivées du premier ordre restent finies et continues pour des modules de z inférieurs à Z. *Enfin soit m le nombre des racines de l'équation*

$$\Pi(b+z)=0$$

qui offrent des modules inférieurs à Z. *Pour un module de x plus petit que $\frac{1}{M}$, l'équation*

$$\Pi(b+z)-x\varpi(b+z)=0$$

offrira elle-même un nombre m de racines dont les modules seront inférieurs à Z; *et, si, en désignant par y, y_1, y_2, ..., y_{m-1} les valeurs de $y=b+z$ correspondantes à ces racines, on pose*

$$f(x,y)=\Pi(y)-x\varpi(y),$$

la fonction y, ou la somme

$$y+y_1+\ldots+y_{m-1},$$

sera développable en une série ordonnée suivant les puissances ascendantes de x. De plus, si la fonction

$$F(x,y)=F(x,b+z)$$

reste elle-même finie et continue pour des modules de x et de z respectivement inférieurs à X *et à* Z, F(x,y), *ou la somme*

$$F(x,y)+F(x,y_1)+\ldots+F(x,y_{m-1}),$$

sera encore développable, par les formules (92) *et* (94), *ou* (93) *et* (95), *en une série ordonnée suivant les puissances ascendantes de x, et le reste de cette série offrira un module inférieur à chacune des expressions* (125), (126), (127).

Si l'on remplace F(x,y) par F(y), les formules (72), (73), combinées avec les formules (65) et (122), donneront

$$(128)\quad \begin{aligned} &F(y)+F(y_1)+\ldots+F(y_{m-1})\\ &=F(\beta)+F(\beta_1)+\ldots+F(\beta_{m-1})\\ &+\sum_{n=1}^{n=\infty}x^n\,{}_{(0)}^{(Z)}\mathcal{E}_{(-\pi)}^{(\pi)}\left(\frac{F(b+z)}{\Pi(b+z)}\left[\frac{\varpi(b+z)}{\Pi(b+z)}\Pi'(b+z)-\varpi'(b+z)\right]\left[\frac{\varpi(b+z)}{\Pi(b+z)}\right]^{n-1}\right)_z \end{aligned}$$

et

$$(129)\quad F(y)+F(y_1)+\ldots+F(y_{m-1})=F(\beta)+F(\beta_1)+\ldots+F(\beta_{m-1})$$
$$+\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{x^n}{n}\,{}_{(0)}^{(Z)}\mathcal{E}_{(-\pi)}^{(\pi)}\left(\left[\frac{\varpi(b+z)}{\Pi(b+z)}\right]^n F'(b+z)\right)_z.$$

Concevons maintenant que l'on pose $x=1$, et que, dans le théorème VI, on remplace $f(x,y)$ par

$$f(y)=\Pi(y)-\varpi(y);$$

alors on obtiendra la proposition suivante :

Théorème VIII. — *Soient*

$$(130)\qquad f(y)=0$$

une équation algébrique, b une valeur particulière de y, Z *une valeur particulière du module de la variable*

$$z=y-b$$

et $\bar{z}$ la valeur imaginaire de z qui correspond au module Z. *Supposons en outre que l'on partage la fonction $f(y)$ en deux parties*

$$\Pi(y),\quad -\varpi(y),$$

et soit m le nombre des racines de l'équation

$$(131)\qquad \Pi(y)=0$$

qui produisent des modules de z inférieurs à Z. *Si le nombre* Z *est choisi de manière que, les fonctions*

$$\Pi(b+z),\quad \varpi(b+z)$$

restant finies et continues pour des modules de z inférieurs à Z, *on ait*

$$(132)\qquad \Lambda\frac{\varpi(b+\bar{z})}{\Pi(b+\bar{z})}<1,$$

l'équation (130) *offrira elle-même un nombre m de racines correspondantes à des modules de z plus petits que* Z. *Désignons par y, y_1, ..., y_{m-1}*

ces racines, et par $\beta, \beta_1, \ldots, \beta_{m-1}$ *les racines analogues de l'équation* (131). *La fonction implicite* y, *si l'on a* $m=1$, *ou la somme* $y+y_1+\ldots+y_{m-1}$, *dans le cas contraire, sera développable en une série convergente par la formule*

$$(133)\quad y+y_1+\ldots+y_{m-1}=\beta+\beta_1+\ldots+\beta_{m-1}+{}_{(0)}^{(Z)}\mathcal{E}_{(-\pi)}^{(\pi)}\left(\frac{\varpi(b+z)}{\Pi(b+z)}\right)_z + \frac{1}{2}\,{}_{(0)}^{(Z)}\mathcal{E}_{(-\pi)}^{(\pi)}\left(\left[\frac{\varpi(b+z)}{\Pi(b+z)}\right]^2\right)_z+\ldots,$$

qui se déduit immédiatement des formules (75) *et* (122), *ou de l'équation* (129). *Si, de plus, la fonction*

$$F(y)=F(b+z)$$

reste elle-même finie et continue pour des modules de z *inférieurs à* Z, $F(y)$, *ou la somme* $F(y)+F(y_1)+\ldots+F(y_{m-1})$, *pourra encore être développée en série convergente par la formule*

$$(134)\quad \begin{aligned} &F(y)+F(y_1)+\ldots+F(y_{m-1}) \\ &\quad = F(\beta)+F(\beta_1)+\ldots+F(\beta_{m-1})+{}_{(0)}^{(Z)}\mathcal{E}_{(-\pi)}^{(\pi)}\left(\frac{\varpi(b+z)}{\Pi(b+z)}F'(b+z)\right)_z \\ &\quad + \frac{1}{2}\,{}_{(0)}^{(Z)}\mathcal{E}_{(-\pi)}^{(\pi)}\left(\left[\frac{\varpi(b+z)}{\Pi(b+z)}\right]^2 F'(b+z)\right)_z+\ldots. \end{aligned}$$

Enfin, le reste de cette dernière série offrira un module inférieur à

$$(135)\qquad \frac{Z}{X^{n-1}(X-1)}\Lambda\frac{\Pi'(b+\bar{z})-\bar{x}\varpi'(b+\bar{z})}{\Pi(b+\bar{z})-\bar{x}\varpi(b+\bar{z})}F(b+\bar{z}),$$

et à plus forte raison à

$$(136)\qquad \frac{Z}{X^{n-1}(X-1)}\,\frac{\Lambda\Pi'(b+\bar{z})+X\Lambda\varpi'(b+\bar{z})}{1-X\Lambda\dfrac{\varpi(b+\bar{z})}{\Pi(b+\bar{z})}}\,\Lambda\frac{F(b+\bar{z})}{\Pi(b+\bar{z})},$$

le module X *de* $\bar{x}$ *étant choisi de manière à remplir les deux conditions*

$$(137)\qquad X-1>0,\qquad 1-X\Lambda\frac{\varpi(b+\bar{z})}{\Pi(b+\bar{z})}>0;$$

et ce module étant par suite plus grand que l'unité, mais plus petit que

$$\Lambda'\frac{\Pi(b+\bar{z})}{\varpi(b+\bar{z})}.$$

Lorsqu'une seule racine de l'équation (131) correspond à un module de z plus petit que Z, et que cette racine est précisément b, on a

$$m=1,\qquad \beta=b,$$

et les formules (133), (134) se réduisent à

$$(138)\qquad y=b+\frac{1}{1}\,\frac{z\varpi(b+z)}{\Pi(b+z)}+\frac{1}{1.2}D_z\left[\frac{z\varpi(b+z)}{\Pi(b+z)}\right]^2+\ldots,$$

$$(139)\qquad F(y)=F(b)+\frac{1}{1}\,\frac{z\varpi(b+z)}{\Pi(b+z)}F'(b+z) + \frac{1}{1.2}D_z\left\{\left[\frac{z\varpi(b+z)}{\Pi(b+z)}\right]^2F'(b+z)\right\}+\ldots,$$

la variable z devant être, dans tous les termes des seconds membres, annulée après les différentiations.

Si l'on pose, dans la formule (115),

$$(140)\qquad \Pi(y)=y-b,$$

b sera la seule racine de l'équation (131). Alors les formules (128), (129) deviendront

$$(141)\qquad F(y)=F(b)+\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{x^n}{1.2.3\ldots n}D_b^n\{[\varpi(b)]^n F(b)\} - \sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{x^n}{1.2\ldots(n-1)}D_b^{n-1}\{[\varpi(b)]^{n-1}\varpi'(b)F(b)\},$$

et

$$(142)\qquad F(y)=F(b)+\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{x^n}{1.2.3\ldots n}D_b^{n-1}\{[\varpi(b)]^n F'(b)\},$$

ou, ce qui revient au même,

$$(143)\qquad F(y)=F(b)+\frac{x}{1}\varpi(b)F'(b)+\frac{x^2}{1.2}D_b\{[\varpi(b)]^2F'(b)\}+\ldots;$$

puis, on en conclura, en posant $F(y)=y$,

$$(144)\qquad y=b+\frac{x}{1}\varpi(b)+\frac{x^2}{1.2}D_b[\varpi(b)]^2+\frac{x^3}{1.2.3}D_b^2[\varpi(b)]^3+\ldots.$$

De plus, on aura, en vertu des formules (96) et (97),

$$F(x, y) = F(0, b) + \sum_{n=1}^{n=\infty} U_n x^n, \tag{145}$$

la valeur de U_n étant

$$U_n = \frac{n x^n}{(1.2.3\ldots n)^2} D_z^{n-1} \left\{ z^n D_x^n \left[\frac{1 - x\varpi'(b+z)}{z - x\varpi(b+z)} F(x, b+z) \right] \right\}, \tag{146}$$

et les variables x, z devant être annulées après les différentiations effectuées. On peut remarquer d'ailleurs que, pour obtenir la formule (144), il suffit de développer suivant les puissances ascendantes de x le second membre de l'équation (82), qui, dans le cas présent, se réduit à

$$F(x, y) = \mathop{\mathcal{E}}_{(0)}^{(Z)} {}_{(-\pi)}^{(\pi)} \left(\frac{1 - x\varpi'(b+z)}{z - x\varpi(b+z)} F(x, b+z) \right)_z. \tag{147}$$

On pourrait y parvenir encore à l'aide de la formule (83), ou

$$F(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \bar{z} \frac{1 - x\varpi'(b+\bar{z})}{\bar{z} - x\varpi(b+\bar{z})} F(x, b+\bar{z})\, dq. \tag{148}$$

Les formules (144) et (143) sont précisément celles que Lagrange a données comme pouvant servir à développer, suivant les puissances ascendantes de x, une racine y de l'équation

$$y - b - x\varpi(y) = 0, \tag{149}$$

et une fonction $F(y)$ de cette racine. Or, d'après le théorème VII, ces formules subsisteront, si les fonctions $\varpi(b+z)$, $F(b+z)$ restent finies et continues pour des modules de z inférieurs à Z, Z étant celui des modules de z qui correspond au module principal M de la fonction

$$\frac{\varpi(b+z)}{z}, \tag{150}$$

et si d'ailleurs on attribue à la variable réelle ou imaginaire x une valeur dont le module soit inférieur à $\frac{1}{M}$. Elles subsisteront *a fortiori* si, le module Z de $\bar{z}$ étant distinct de celui qui correspond au module

principal de la fonction (150), on choisit le module ξ de x de manière à vérifier la condition

$$\xi \Lambda \frac{\varpi(b+\bar{z})}{\bar{z}} < 1. \tag{151}$$

Quant à la fonction $F(x, y) = F(x, b+z)$ que renferme l'équation (145), elle devra rester encore finie et continue pour des modules de x et de z respectivement inférieurs à ξ et à Z. Ajoutons qu'à l'aide des formules (125), (126), (127), on déterminera sans peine des limites supérieures aux modules des restes des séries (143), (144), ou même de la série produite par le développement de $F(x, y)$ suivant les puissances ascendantes de x. Effectivement, en vertu des formules (125), (126), le dernier de ces restes offrira un module inférieur à chacun des nombres

$$\frac{\xi^n Z}{X^{n-1}(X-\xi)} \Lambda \frac{1 - \bar{x}\varpi'(b+\bar{z})}{\bar{z} - \bar{x}\varpi(b+\bar{z})} F(\bar{x}, b+\bar{z}), \tag{152}$$

$$\frac{\xi^n Z}{X^{n-1}(X-\xi)} \Lambda \frac{1 + X\Lambda\varpi'(b+\bar{z})}{Z - X\Lambda\varpi(b+\bar{z})} \Lambda F(\bar{x}, b+\bar{z}), \tag{153}$$

le module X de $\bar{x}$ étant supérieur au module ξ de x, mais inférieur au quotient qu'on obtient en divisant l'unité par le rapport

$$\Lambda \frac{\varpi(b+\bar{z})}{\bar{z}} = \frac{\Lambda\varpi(b+\bar{z})}{Z}. \tag{154}$$

Concevons, pour fixer les idées, que, la constante b étant réelle, on prenne

$$\varpi(y) = \sin y.$$

Si l'on nomme B un arc renfermé entre les limites $0, \frac{\pi}{2}$, et choisi de manière que $\cos B$ soit égal au signe près à $\cos b$, on aura, en vertu des formules (24),

$$\Lambda \sin(b+\bar{z}) \leqq \frac{e^Z - e^{-Z}}{2} \cos B + \frac{e^Z + e^{-Z}}{2} \sin B. \tag{155}$$

Il y a plus : le carré du module de $\sin(b+\bar{z})$ étant le quart du trinome

$$e^{2Z\sin q} + e^{-2Z\sin q} - 2\cos(2b + 2Z\cos q),$$

et par conséquent le quart de la somme qu'on obtient en ajoutant le trinome

$$e^{2Z\sin q}+e^{-2Z\sin q}-2\cos(2Z\cos q),$$

dont le maximum est $4(\Delta\sin\bar{z})^2=(e^Z-e^{-Z})^2$, au produit

$$2[\cos(2Z\cos q)-\cos(2b+2Z\cos q)]=4\sin b\sin(b+2Z\cos q),$$

dont le maximum est $4\sin B$, on trouvera encore

$$\Lambda\sin(b+\bar{z})\leqq\left[\left(\frac{e^Z-e^{-Z}}{2}\right)^2+\sin B\right]^{\frac{1}{2}}. \tag{156}$$

Donc la condition (151) sera vérifiée, si l'on a

$$\xi<\frac{Z}{\left[\left(\frac{e^Z-e^{-Z}}{2}\right)^2+\sin B\right]^{\frac{1}{2}}}, \tag{157}$$

et, à plus forte raison, si l'on a

$$\xi<\frac{2Z}{e^Z+e^{-Z}}, \tag{158}$$

puisque $\sin B$ ne peut surpasser l'unité. D'ailleurs la valeur minimum du rapport

$$\frac{2Z}{e^Z+e^{-Z}} \tag{159}$$

correspond à la valeur de Z déterminée par la formule

$$\frac{e^Z-e^{-Z}}{1}=\frac{e^Z+e^{-Z}}{Z}=\frac{2}{\sqrt{Z^2-1}}; \tag{160}$$

et, comme on a

$$\frac{e^Z+e^{-Z}}{2}-Z\frac{e^Z-e^{-Z}}{2}=1-\frac{Z^2}{2}-\frac{1}{1.2}\frac{Z^4}{4}-\frac{1}{1.2.3.4}\frac{Z^6}{6}-\ldots,$$

la formule (160) pourra être réduite à

$$1=\frac{1}{2}Z^2+\frac{1}{8}Z^4+\ldots. \tag{161}$$

Or l'équation (161), dont le second membre croît avec Z^2 et se réduit,

pour $Z=1$, à

$$1-\frac{1}{e}=1-\frac{1}{2,71828\ldots},$$

admet évidemment une seule racine positive supérieure à l'unité, mais inférieure à la racine positive de l'équation

$$1=\frac{1}{2}Z^2+\frac{1}{8}Z^4,$$

c'est-à-dire

$$\sqrt{-2+\sqrt{12}}=1,2100\ldots.$$

Donc si l'on pose, dans la formule (160),

$$Z=1,2+i, \tag{162}$$

i surpassera $-0,2$, et sera inférieur à $0,01$. Mais alors cette formule donnera

$$\frac{2,2+i}{0,2+i}e^{-2,4}=e^{2i}=1+2ie^{2\theta i},$$

θ désignant un nombre inférieur à l'unité, et par conséquent

$$i=-\frac{0,2-2,2e^{-2,4}}{1-e^{-2,4}+(0,4+2i)e^{2\theta i}}=-\frac{0,0004205\ldots}{0,90928\ldots+(0,4+2i)e^{2\theta i}}. \tag{163}$$

Donc i sera négatif et renfermé entre les limites

$$-\frac{0,0004205\ldots}{0,90928\ldots}=-0,0004624\ldots,$$

$$-\frac{0,0004205\ldots}{0,90928\ldots+0,4}=-\frac{0,0004205\ldots}{1,30928\ldots}=-0,0003211\ldots,$$

ou même entre la limite $-0,0003211\ldots$ et la suivante

$$-\frac{0,0004205\ldots}{0,90928\ldots+(0,4-0,0009248\ldots)e^{-0,0009248\ldots}}$$
$$=-\frac{0,0004205\ldots}{1,30798\ldots}=-0,0003214\ldots.$$

On aura donc, en poussant l'approximation jusqu'aux millionièmes inclusivement,

$$i=-0,000321\ldots,\qquad Z=1,2+i=1,199678\ldots,\qquad Z^2=1,439227\ldots,$$
$$\frac{2Z}{e^Z+e^{-Z}}=\sqrt{Z^2-1}=0,662742\ldots;$$

et, par suite, si l'on prend

$$Z = 1{,}199678\ldots, \tag{164}$$

la condition (158) se trouvera réduite à

$$\xi < 0{,}662742\ldots. \tag{165}$$

Donc, tant que le module de x ne surpassera pas le nombre 0,662742..., une seule racine de l'équation

$$y = b + x\sin y \tag{166}$$

produira une valeur de $y - b$ dont le module restera inférieur à 1,199678..., et cette racine sera développable par la formule de Lagrange en une série convergente ordonnée suivant les puissances ascendantes de x.

Considérons maintenant une fonction de x et de y, savoir,

$$F(x, y) = F(x, b + z).$$

Cette fonction sera encore développable par les formules (145), (146), suivant les puissances ascendantes de x, si elle reste finie et continue pour des modules de x et de z respectivement inférieurs aux nombres

$$0{,}662742\ldots \quad \text{et} \quad 1{,}199678\ldots.$$

Il y a plus : le développement dont il s'agit pourra être effectué à l'aide des formules (147) ou (148), si la fonction explicite

$$\frac{1 - x\varpi'(b+z)}{z - x\varpi(b+z)}F(x, b+z) = \frac{1 - x\cos(b+z)}{z - x\sin(b+z)}F(x, b+z) \tag{167}$$

est elle-même développable, pour de tels modules des variables x et z, en une série convergente ordonnée suivant les puissances ascendantes de ces variables. C'est ce qui aura lieu, par exemple, si l'on prend

$$F(x, y) = \frac{1}{1 - x\cos y}.$$

Alors, la formule (147) donnera

$$\frac{1}{1 - x\cos y} = {}_{(0)}^{(Z)}\mathcal{E}_{(-\pi)}^{(\pi)}\left(\frac{1}{z - x\sin(b+z)}\right)_z = \mathcal{E}\left(\frac{1}{z}\right)_z + x\,\mathcal{E}\left(\frac{\sin(b+z)}{z^2}\right)_z + x^2\,\mathcal{E}\left(\frac{\sin^2(b+z)}{z^3}\right)_z + \ldots,$$

ou, ce qui revient au même,

$$\frac{1}{1 - x\cos y} = 1 + \frac{x}{1}D_b\sin b + \frac{x^2}{1.2}D_b^2\sin^2 b + \frac{x^3}{1.2.3}D_b^3\sin^3 b + \ldots. \tag{168}$$

Si, de cette dernière série, on conserve seulement les n premiers termes, l'erreur commise, ou le module du reste, sera, en vertu de la formule (152), inférieure au produit

$$\frac{\xi^n Z}{X^{n-1}(X - \xi)}\,\frac{1}{Z - X\Lambda\sin(b + \bar{z})},$$

et à plus forte raison au produit

$$\frac{\xi^n}{X^{n-1}(X - \xi)}\,\frac{1}{1 - MX}, \tag{169}$$

M désignant le module principal de $\frac{\sin z}{z}$, déterminé par l'équation

$$M = \frac{e^Z + e^{-Z}}{2Z} = \frac{1}{0{,}662742\ldots} = 1{,}50888\ldots. \tag{170}$$

Si, dans l'expression (169), on remplaçait $X - \xi$ par X, on obtiendrait la suivante

$$\frac{\xi^n}{X^n(1 - MX)}, \tag{171}$$

qui représente une limite supérieure au module du terme général de la série que renferme l'équation (168). Dans l'une et l'autre expression, le nombre X doit être inférieur à $\frac{1}{M}$, mais supérieur au module ξ de la variable x. Si l'on choisit X de manière à rendre l'expression (171) un minimum, on trouvera

$$\frac{X}{n} = \frac{1 - MX}{M} = \frac{1}{(n+1)M},$$

et le produit (169) deviendra

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \frac{(n+1)M^n\xi^n}{1-\left(1+\frac{1}{n}\right)M\xi}.$$

Comme on aura d'ailleurs

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < e,$$

il est clair que le module du reste qui complète le développement de

$$\frac{1}{1-x\cos y}$$

sera inférieur à

$$(172)\qquad \frac{(n+1)e}{1-\left(1+\frac{1}{n}\right)M\xi}(M\xi)^n.$$

Si l'on attribue à x une valeur réelle et positive, la limite du module en question sera simplement

$$(173)\qquad \frac{(n+1)e}{1-\left(1+\frac{1}{n}\right)Mx}(Mx)^n.$$

Ainsi, par exemple, si l'on suppose $x=\frac{1}{4}$, elle deviendra

$$(174)\qquad \frac{(4,3647\ldots)(n+1)}{1-\frac{0,6057\ldots}{n}}(0,37722\ldots)^n.$$

Les fonctions implicites, que nous avons jusqu'ici développées en séries, dépendaient d'une seule variable x. Mais on pourrait étendre l'application des mêmes principes à des fonctions implicites de plusieurs variables $x, x', \ldots$. Concevons, pour fixer les idées, que y, y', ... soient déterminées en fonctions de $x, x', \ldots$ par des équations de la forme

$$(175)\qquad f(x,y)=0,\quad f_1(x',y')=0,\quad \ldots.$$

Désignons par $\chi(x,y)$ la dérivée de $f(x,y)$ relative à y, par $\chi_1(x',y')$ la dérivée de $f_1(x',y')$ relative à y', ..., et par

$$F(x,x',\ldots,y,y',\ldots)$$

une fonction de $x, x', \ldots, y, y', \ldots$. Enfin supposons : 1° que, $b, b', \ldots$ étant des constantes, les équations

$$(176)\qquad f(0,b+z)=0,\quad f_1(0,b'+z')=0,\quad \ldots$$

offrent, la première m racines dont les modules soient inférieurs à Z, la seconde m' racines dont les modules soient inférieurs à Z', ...; 2° que, pour des modules de $x, x', \ldots, z, z', \ldots$ respectivement inférieurs à X, X', ..., Z, Z', ..., chacune des fonctions $f(x,b+z), f_1(x',b+z'), \ldots$ obtienne toujours une valeur finie et déterminée; 3° que, Z étant le module de $\bar{z}$, Z' le module de $\bar{z}'$, ..., les rapports

$$(177)\qquad \frac{\chi(x,b+\bar{z})}{f(x,b+\bar{z})},\quad \frac{\chi_1(x',b'+\bar{z}')}{f_1(x',b'+\bar{z}')},\quad \ldots,$$

et le produit

$$(178)\qquad \frac{\chi(x,b+\bar{z})}{f(x,b+\bar{z})}\frac{\chi_1(x',b'+\bar{z}')}{f_1(x',b'+\bar{z}')}\cdots F(x,x',\ldots,b+\bar{z}_1,b'+\bar{z}',\ldots)$$

soient développables en des séries convergentes ordonnées suivant les puissances ascendantes de x, de x', ..., pour des modules de $x, x', \ldots$ respectivement inférieurs à X, X', ... Pour de semblables modules de $x, x', \ldots$, les équations

$$(179)\qquad f(x,b+z)=0,\quad f_1(x',b'+z')=0,\quad \ldots,$$

en vertu du théorème IV, offriront, la première un nombre m de racines dont les modules seront inférieurs à Z; la seconde un nombre m' de racines dont les modules seront inférieurs à Z', ...; et, si l'on désigne par

$$(180)\qquad SF(x,x',\ldots,y,y',\ldots)$$

la somme des valeurs que reçoit la fonction $F(x,x',\ldots,y,y',\ldots)$ lorsqu'on y substitue successivement, au lieu de $y, y', \ldots$, les racines dont il s'agit, cette somme sera développable en une série convergente ordonnée suivant les puissances ascendantes de $x, x', \ldots$. C'est en effet ce que l'on démontrera sans peine de la manière suivante :

Examinons d'abord le cas particulier où l'on aurait $m = 1$, $m' = 1$, ... Alors, on tirera de la formule (83), en y remplaçant m par l'unité, et $F(x, y)$ par $F(x, x', \ldots, y, y', \ldots)$,

$$(181) \quad F(x, x', \ldots, y, y', \ldots) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \bar{z} \frac{\chi(x, b+\bar{z})}{f(x, b+z)} F(x, x', \ldots, b+\bar{z}, y', \ldots)\, dq.$$

On aura de même

$$(182) \quad F(x, x', \ldots, b+\bar{z}, y', \ldots) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \bar{z}' \frac{\chi_1(x', b+\bar{z}')}{f_1(x', b+\bar{z}')} F(x, x', \ldots, b+\bar{z}, b'+\bar{z}', \ldots)\, dq',$$

....,

et par suite on trouvera

$$(183) \quad F(x, x', \ldots, y, y', \ldots) = \int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \ldots \bar{z}\bar{z}' \ldots \frac{\chi(x, b+\bar{z})}{f(x, b+\bar{z})} \frac{\chi_1(x', b'+\bar{z}')}{f_1(x', b'+\bar{z}')} \cdots F(x, x', \ldots, b'+\bar{z}, b+\bar{z}', \ldots) \frac{dq}{2\pi} \frac{dq'}{2\pi} \cdots$$

Si m, m' cessent de se réduire à l'unité, il faudra évidemment remplacer le premier membre de la formule (181) par la somme des valeurs que reçoit la fonction $F(x, x', \ldots, y, y', \ldots)$ quand on y substitue successivement, au lieu de y, celles des racines de l'équation $f(x, b+z) = 0$ qui offrent des modules inférieurs à Z; puis le premier membre de la formule (182) par la somme des valeurs que reçoit la fonction $F(x, x', \ldots, b+\bar{z}, y', \ldots)$ quand on y substitue successivement, au lieu de y', celles des racines de l'équation $f(x', b'+z') = 0$ qui offrent des modules inférieurs à Z', etc. Donc, le premier membre de la formule (183) devra être lui-même remplacé par l'expression (180), en sorte qu'on aura

$$(184) \quad SF(x, x', \ldots, y, y', \ldots) = \int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \ldots \bar{z}\bar{z}' \ldots \frac{\chi(x, b+\bar{z})}{f(x, b+\bar{z})} \frac{\chi_1(x', b'+\bar{z}')}{f_1(x', b'+\bar{z}')} \cdots F(x, x', \ldots, b+\bar{z}, b'+\bar{z}', \ldots) \frac{dq}{2\pi} \frac{dq'}{2\pi} \cdots$$

Or, en vertu de la formule (183) ou (184), l'expression

$$F(x, x', \ldots, y, y', \ldots) \quad \text{ou} \quad SF(x, x', \ldots, y, y', \ldots),$$

qui représente une fonction implicite (du moins en partie) des variables $x, x', \ldots$, se trouvera transformée en une fonction entièrement explicite de ces mêmes variables, et, pour la développer en une série convergente ordonnée suivant les puissances ascendantes de x, x', ..., il suffira de développer en une semblable série le produit (178). Ajoutons que la limite supérieure au module du reste qui complétera la dernière série sera en même temps une limite supérieure au module du reste qui complétera la première. Si l'on nomme ξ le module de x, ξ' le module de x', ..., et $\bar{x}, \bar{x}'$, ... des expressions imaginaires qui aient pour module X, X', ..., la limite dont il s'agit sera précisément le reste de la série qui, étant ordonnée suivant les puissances ascendantes de ξ, ξ', ..., a pour somme l'expression

$$(185) \quad \frac{X}{X-\xi} \frac{X'}{X'-\xi'} \cdots \Lambda \frac{\chi(\bar{x}, b+\bar{z})}{f(\bar{x}, b+\bar{z})} \frac{\chi_1(\bar{x}', b'+\bar{z}')}{f_1(\bar{x}', b'+\bar{z}')} \cdots F(\bar{x}, \bar{x}', \ldots, b+\bar{z}, b'+\bar{z}', \ldots).$$

Si, dans le développement de la fonction

$$F(x, x', \ldots, y, y', \ldots) \quad \text{ou} \quad SF(x, x', \ldots, y, y', \ldots),$$

suivant les puissances ascendantes de x, x', ..., on négligeait tous les termes dont le degré, mesuré par la somme des exposants de x, x', ..., deviendrait égal ou supérieur à h, l'erreur commise, ou le module du reste, serait encore inférieure au produit

$$(186) \quad \frac{1}{A^{h-1}(A-1)} \Lambda \frac{\chi(\bar{\alpha}x, b+\bar{z})}{f(\bar{\alpha}x, b+\bar{z})} \frac{\chi_1(\bar{\alpha}x', b'+\bar{z}')}{f_1(\bar{\alpha}x', b'+\bar{z}')} \cdots F(\bar{\alpha}x, \bar{\alpha}x', \ldots, b+\bar{z}, b'+\bar{z}' \ldots),$$

A désignant le module de $\bar{\alpha}$, et ce dernier module étant supérieur à l'unité, mais inférieur à chacun des quotients

$$\frac{X}{\xi}, \quad \frac{X'}{\xi'}, \quad \ldots$$

Pour montrer une application de la formule (183), supposons y, y'

déterminées en fonction de x, x' par les deux équations

$$y = b + x\sin y, \qquad y' = b' + x\sin y'. \tag{187}$$

Si les modules de x et de x' sont inférieurs au nombre 0,662742..., alors, d'après ce qui a été dit précédemment, chacune de ces équations offrira une seule racine correspondante à une valeur de $y - b$, ou de $y' - b'$, dont le module soit au-dessous du nombre 1,199678.... Cela posé, si la fonction

$$F(x, x', b + z, b' + z')$$

reste finie et continue pour des modules de x, x' plus petits que 0,662742... et pour des modules de z, z' plus petits que 1,199678..., on aura, en supposant les modules de $\bar{z}$, $\bar{z}'$ inférieurs eux-mêmes au nombre 1,199678...,

$$\begin{aligned} &F(x, x', y, y') \\ &= \left(\frac{1}{2\pi}\right)^2 \int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1 - x\cos(b + \bar{z})}{\bar{z} - x\sin(b + \bar{z})} \frac{1 - x'\cos(b + \bar{z}')}{\bar{z}' - x'\sin(b + \bar{z}')} F(x, x', b + \bar{z}, b' + \bar{z}')\,dq\,dq'. \end{aligned} \tag{188}$$

Donc, pour développer la fonction implicite de x, x', représentée par

$$F(x, x', y, y'),$$

en une série ordonnée suivant les puissances ascendantes de x, x', il suffira de développer en une semblable série le produit

$$\frac{1 - x\cos(b + \bar{z})}{\bar{z} - x\sin(b + \bar{z})} \frac{1 - x'\cos(b' + \bar{z}')}{\bar{z}' - x'\sin(b' + \bar{z}')} F(x, x', b + \bar{z}, b' + \bar{z}'). \tag{189}$$

Ajoutons que la limite supérieure au module du reste, qui complétera la première ou la seconde série, sera précisément le reste de la série qui, étant ordonnée suivant les puissances ascendantes de ξ, ξ', a pour somme l'expression

$$\frac{X}{X - \xi} \frac{X'}{X' - \xi} \Lambda \frac{1 - \bar{x}\cos(b + \bar{z})}{\bar{z} - \bar{x}\sin(b + \bar{z})} \frac{1 - \bar{x}'\cos(b' + \bar{z}')}{\bar{z}' - \bar{x}'\sin(b' + \bar{z}')} F(\bar{x}, \bar{x}', b + \bar{z}, b' + \bar{z}'). \tag{190}$$

Si, dans le développement de la fonction $F(x, x', y, y')$, on négligeait tous les termes dont le degré, mesuré par la somme des exposants de

x et de x', devient égal ou supérieur à h, l'erreur commise serait inférieure au produit

$$\frac{1}{A^{h-1}(A - 1)} \Lambda \frac{1 - \bar{\alpha}x\cos(b + \bar{z})}{\bar{z} - \bar{\alpha}x\sin(b + \bar{z})} \frac{1 - \bar{\alpha}x'\cos(b' + \bar{z}')}{\bar{z}' - \bar{\alpha}x'\sin(b' + \bar{z}')} F(\bar{\alpha}x, \bar{\alpha}x', b + \bar{z}, b' + \bar{z}'), \tag{191}$$

A désignant le module de $\bar{\alpha}$, et ce module étant supérieur à l'unité, mais inférieur à chacun des rapports $\frac{X}{\xi}$, $\frac{X'}{\xi'}$.

Lorsqu'à l'aide des méthodes exposées dans ce paragraphe on a déterminé en fonction du nombre n ou h la limite de l'erreur que l'on commet en négligeant, dans le développement d'une fonction explicite ou implicite, tous les termes dont le degré surpasse le nombre dont il s'agit, il est généralement facile de trouver la valeur qu'on doit assigner au nombre n ou h pour que l'erreur commise devienne inférieure à

$$\left(\frac{1}{10}\right)^N,$$

N étant un nombre entier donné. Il suffit en effet, pour y parvenir, de déterminer la partie entière de la quantité négative qui représente le logarithme décimal de l'erreur commise. Concevons, pour fixer les idées, que, y étant déterminée en fonction de x par l'équation (166) ou

$$y = b + x\sin y,$$

on propose d'assigner au nombre n une valeur telle que, dans le développement de

$$\frac{1}{1 - x\cos y},$$

suivant les puissances ascendantes de x, la somme des termes d'un degré égal ou supérieur à n offre un module inférieur à

$$\left(\frac{1}{10}\right)^N,$$

pour la valeur particulière $x = \frac{1}{4}$, ou, pour une valeur plus petite de la variable x. Il suffira évidemment que l'expression (174) devienne inférieure à $\left(\frac{1}{10}\right)^N$, et son logarithme décimal à $-N$. Si donc on désigne à l'aide de la lettre L les logarithmes pris dans le système dont la base est 10, il suffira de choisir le nombre entier n de manière à remplir la condition

$$(192)\qquad 0{,}6399617\ldots + L(n+1) - L\left(1 - \frac{0{,}6057\ldots}{n}\right) - 0{,}4234029\ldots n < -N.$$

Ainsi, par exemple, s'agit-il d'assigner au nombre n une valeur telle que l'erreur commise, quand on néglige les termes d'un degré égal ou supérieur à n, ne surpasse pas un millième. On trouvera, dans ce cas,

$$N = 3,$$

et la condition (192) donnera

$$(193)\qquad n > \frac{3{,}6399617\ldots}{0{,}4234029\ldots - \frac{1}{n}\left[L(n+1) - L\left(1 - \frac{0{,}6057\ldots}{n}\right)\right]}.$$

Si l'on réduisait à son premier terme le dénominateur de la fraction que renferme le second membre de la formule (193), cette fraction serait équivalente à 0,86..., et par conséquent on vérifierait la formule, en prenant $n = 9$. D'ailleurs, n étant égal ou supérieur à 9, le rapport

$$\frac{L(n+1)}{n}$$

diminuera pour des valeurs croissantes de n, et par suite le produit

$$\frac{1}{n}\left[L(n+1) - L\left(1 - \frac{0{,}6057\ldots}{n}\right)\right]$$

ne surpassera pas

$$\frac{1}{9}[1 - L(1 - 0{,}0673\ldots)] = 0{,}1144\ldots.$$

Donc la condition (193) sera remplie, si l'on a

$$n > \frac{3{,}6399\ldots}{0{,}4234\ldots - 0{,}1144\ldots} = 11{,}7\ldots,$$

en sorte qu'on pourra prendre $n = 12$. Donc si, dans l'hypothèse admise, on arrête le développement de

$$\frac{1}{1 - x\cos y}$$

après le douzième terme, l'erreur que l'on commettra ne surpassera pas un millième.

On voit, par ce qui précède, que, pour les fonctions implicites comme pour les fonctions explicites, la détermination de limites supérieures aux modules des restes qui complètent les développements peut être réduite à la détermination des quantités de la forme

$$\Lambda f(\bar{x}) \quad \text{ou} \quad \Lambda f(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, \ldots),$$

ou de quantités qui seront évidemment plus grandes. Nous avons déjà donné un grand nombre de formules qui peuvent être utilement employées dans l'évaluation des quantités dont il s'agit. Nous ajouterons ici que le développement en série des fonctions

$$f(\bar{x}), \quad f(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, \ldots)$$

est souvent un moyen très simple de parvenir à cette évaluation. Ainsi, en particulier, comme on a généralement, quel que soit le module X de $\bar{x}$,

$$\sin\bar{x} = \bar{x} - \frac{1}{1.2.3}\bar{x}^3 + \frac{1}{1.2.3.4.5}\bar{x}^5 - \ldots,$$

et

$$\cos\bar{x} = 1 - \frac{1}{1.2}\bar{x}^2 + \frac{1}{1.2.3.4}\bar{x}^4 - \ldots,$$

on en conclura, en ayant égard à la première des formules (25),

$$\Lambda \sin\bar{x} = X + \frac{X^3}{1.2.3} + \frac{X^5}{1.2.3.4.5} + \ldots = \frac{e^X - e^{-X}}{2},$$

et

$$\Lambda \cos\bar{x} = 1 + \frac{X^2}{1.2} + \frac{X^4}{1.2.3.4} + \ldots = \frac{e^X + e^{-X}}{2};$$

ce que l'on savait déjà. De même, comme, en supposant $X < 1$, on trouve

$$\mathrm{l}(1+\bar{x})=\bar{x}-\frac{\overline{x^2}}{2}+\frac{\overline{x^3}}{3}-\frac{\overline{x^4}}{4}+\ldots,$$

$$\operatorname{arc\,tang}\bar{x}=\bar{x}-\frac{\overline{x^3}}{3}+\frac{\overline{x^5}}{5}-\ldots,$$

$$\operatorname{arc\,sin}\bar{x}=\bar{x}+\frac{1}{2}\frac{\overline{x^3}}{3}+\frac{1.3}{2.4}\frac{\overline{x^5}}{5}+\frac{1.3.5}{2.4.6}\frac{\overline{x^7}}{7}+\ldots,$$

on aura, dans cette hypothèse, c'est-à-dire pour $X<1$,

$$\Lambda\mathrm{l}(1\pm\bar{x}) = X+\frac{X^2}{2}+\frac{X^3}{3}+\ldots,$$

$$\Lambda\operatorname{arc\,tang}\bar{x}=X+\frac{X^3}{3}+\frac{X^5}{5}+\ldots,$$

$$\Lambda\operatorname{arc\,sin}\bar{x} = X+\frac{1}{2}\frac{X^3}{3}+\frac{1.3}{2.4}\frac{X^5}{5}+\frac{1.3.5}{2.4.6}\frac{X^7}{7}+\ldots,$$

et, par conséquent,

$$(194)\qquad \begin{cases} \Lambda\mathrm{l}(1\pm\bar{x}) = \mathrm{l}\left(\dfrac{1}{1-X}\right), \\ \Lambda\operatorname{arc\,tang}\bar{x}=\mathrm{l}\left(\dfrac{1+X}{1-X}\right), \\ \Lambda\operatorname{arc\,sin}\bar{x} = \operatorname{arc\,sin}X, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

Enfin, si l'on désigne par $\bar{u}$ une fonction de $\bar{x}$ ou de $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$, on trouvera : 1° quel que soit $\Lambda\bar{u}$,

$$(195)\qquad \Lambda\sin\bar{u}\leqq\frac{e^{\Lambda\bar{u}}-e^{-\Lambda\bar{u}}}{2}, \qquad \Lambda\cos\bar{u}\leqq\frac{e^{\Lambda\bar{u}}+e^{-\Lambda\bar{u}}}{2};$$

2° en supposant $\Lambda\bar{u}<1$,

$$(196)\qquad \begin{cases} \Lambda\mathrm{l}(1\pm\bar{u})\leqq\mathrm{l}\left(\dfrac{1}{1-\Lambda\bar{u}}\right), \\ \Lambda\operatorname{arc\,tang}\bar{u}\leqq\mathrm{l}\left(\dfrac{1+\Lambda\bar{u}}{1-\Lambda\bar{u}}\right), \qquad \Lambda\operatorname{arc\,sin}\bar{u}\leqq\operatorname{arc\,sin}\Lambda\bar{u}, \qquad \ldots \end{cases}$$

MÉMOIRE

SUR LA SURFACE CARACTÉRISTIQUE

CORRESPONDANTE A UN

SYSTÈME D'ÉQUATIONS LINÉAIRES AUX DÉRIVÉES PARTIELLES,

ET

SUR LA SURFACE DES ONDES[1].

Ce Mémoire est relatif à deux surfaces qui jouent un grand rôle dans les questions de Physique ou de Mécanique dont la solution dépend d'un système d'équations linéaires aux dérivées partielles et à coefficients constants.

La première surface, que je nomme la *surface caractéristique*, est celle qui se trouve représentée par l'équation caractéristique elle-même, quand on y remplace les dérivées partielles des divers ordres relatives aux variables indépendantes x, y, z, t par les puissances des divers ordres de ces mêmes variables considérées comme représentant trois coordonnées rectangulaires et le temps.

La seconde surface est celle que l'on nomme la *surface des ondes*, et qui, dans un mouvement simple, persistant, où les durées des vibrations moléculaires demeurent constantes, touche, au bout d'un temps quelconque t, des ondes planes, infiniment minces, diversement inclinées sur trois plans rectangulaires, mais parties au premier instant d'un même centre pris pour origine des coordonnées.

[1] *Voir* un résumé de ce Mémoire, *Œuvres de Cauchy*, 1re série, t. V, p. 263; Extrait 136 des *Comptes rendus*.

Je donne, dans le paragraphe premier de ce Mémoire, les moyens d'obtenir généralement l'équation de la surface des ondes.

Je montre, dans le second paragraphe, les relations dignes de remarque qui existent entre la surface caractéristique et la surface des ondes, et j'établis divers théorèmes relatifs à ces surfaces [1].

I. — *Considérations générales.*

Prenons pour variables indépendantes trois coordonnées rectangulaires x, y, z et le temps t. Supposons d'ailleurs qu'à un système donné d'équations linéaires aux dérivées partielles et à coefficients constants corresponde l'équation caractéristique

$$\mathrm{F}(\mathrm{D}_x, \mathrm{D}_y, \mathrm{D}_z, \mathrm{D}_t) = 0. \tag{1}$$

Nous appellerons *surface caractéristique* celle que représente cette même équation, quand on y remplace

$$\mathrm{D}_x, \quad \mathrm{D}_y, \quad \mathrm{D}_z, \quad \mathrm{D}_t$$

par

$$x, \quad y, \quad z, \quad t.$$

L'équation de la surface caractéristique sera donc

$$\mathrm{F}(x, y, z, t) = 0. \tag{2}$$

Soient maintenant

$$u, \quad v, \quad w, \quad s$$

quatre constantes liées entre elles par l'équation

$$\mathrm{F}(u, v, w, s) = 0. \tag{3}$$

Pour vérifier l'équation aux différences partielles

$$\mathrm{F}(\mathrm{D}_x, \mathrm{D}_y, \mathrm{D}_z, \mathrm{D}_t)\varpi = 0, \tag{4}$$

[1] Les relations et les théorèmes dont il s'agit se déduisent assez facilement de formules déjà connues, et spécialement de celles que j'ai données dans le Bulletin de M. de Férussac (avril 1830). Cette remarque, à ce qu'il paraît, avait déjà été faite par quelques personnes, et en particulier par M. Blanchet; mais elle ne se trouvait énoncée nulle part avant la Note que j'ai insérée dans les *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences* (séance du 5 juillet 1841) (*Œuvres de Cauchy*, 1re série, t. VI, p. 202; Extrait 129 des *Comptes rendus*).

il suffira de prendre

$$\varpi = \Pi(ux + vy + wz + st), \tag{5}$$

si la fonction $\mathrm{F}(x, y, z, t)$ est homogène. Il y a plus : si cette fonction n'est pas homogène, alors, pour que la valeur de ϖ, déterminée par la formule (5), continue de vérifier l'équation (4), il suffira d'attribuer à la fonction arbitraire $\Pi(x)$ certaines formes déterminées, et de supposer, par exemple,

$$\Pi(x) = \theta e^x, \tag{6}$$

θ désignant une constante arbitraire, par conséquent

$$\varpi = \theta e^{ux+vy+wz+st}. \tag{7}$$

Si la fonction $\mathrm{F}(x, y, z, t)$, sans être homogène, se réduisait à une fonction paire de chacune des variables x, y, z, t, on pourrait encore aux formules (6) et (7) substituer les suivantes :

$$\Pi(x) = \theta\frac{e^x + e^{-x}}{2}, \tag{8}$$

$$\varpi = \frac{1}{2}\theta\left(e^{ux+vy+wz+st} + e^{-(ux+vy+wz+st)}\right). \tag{9}$$

Concevons à présent que, les constantes

$$u, \quad v, \quad w, \quad s$$

ayant des valeurs réelles, on pose, pour abréger,

$$k = \sqrt{u^2 + v^2 + w^2}; \tag{10}$$

alors la valeur numérique du rapport

$$\frac{ux + vy + wz}{k}$$

sera précisément la distance du point (x, y, z) au plan représenté par l'équation

$$ux + vy + wz = 0; \tag{11}$$

et la valeur de z déterminée par l'équation (5) pourra être considérée comme dépendant uniquement de cette même distance et du temps t. Il y a plus : la valeur de z, calculée à l'origine du mouvement, pour tous les points d'une tranche infiniment mince comprise entre deux plans parallèles à celui que représente la formule (11), correspondra, au bout du temps t, à tous les points d'une autre tranche semblable, mais séparée de la première par une distance équivalente à la valeur numérique du produit $\frac{s}{k}t$. On pourra donc dire qu'une onde plane, représentée dans le premier instant par une tranche infiniment mince, se déplace parallèlement à elle-même, pour des valeurs croissantes du temps, avec une vitesse équivalente à la valeur numérique du rapport

$$\frac{s}{k}.$$

Ainsi, en particulier, l'onde plane, infiniment mince, primitivement renfermée entre deux plans très voisins de celui qui passait par l'origine des coordonnées, et qui était représenté par la formule (11), se trouvera déplacée au bout du temps t, de manière à être alors comprise entre deux plans très voisins de celui que représentera l'équation

$$ux + vy + wz + st = 0, \tag{12}$$

et qui sera séparé de l'origine par une distance égale, au signe près, à $\frac{st}{k}$. Ajoutons que, si cette onde subsistait seule au premier instant, elle subsistera seule au bout du temps t. En effet, si la fonction $\Pi(x)$ s'évanouit hors des limites $x = -\varepsilon$, $x = \varepsilon$, ε désignant un nombre très petit, non seulement la valeur initiale de z, représentée par

$$\Pi(ux + vy + wz),$$

s'évanouira hors de la tranche comprise entre les plans parallèles représentés par les formules

$$ux + vy + wz = -\varepsilon, \qquad ux + vy + wz = \varepsilon,$$

mais, de plus, la valeur générale de z représentée, en raison de la formule (5), par

$$\Pi(ux + vy + wz + st),$$

s'évanouira au bout du temps t hors de la tranche comprise entre les deux plans représentés par les formules

$$ux + vy + wz + st = -\varepsilon, \qquad ux + vy + wz + st = \varepsilon.$$

Si l'on nomme plan d'une onde infiniment mince un plan mené, dans l'intérieur de cette onde, parallèlement à ceux qui la terminent, le plan d'une onde, qui passait primitivement par l'origine des coordonnées, pourra être représenté, au bout du temps t, par la formule (12). Si l'on abaisse de l'origine une perpendiculaire sur ce plan, et si l'on pose d'ailleurs

$$u = k\cos\alpha, \qquad v = k\cos6, \qquad w = k\cos\gamma, \tag{13}$$

α, 6, γ représenteront les angles formés par la perpendiculaire dont il s'agit, prolongée dans un certain sens avec les demi-axes des coordonnées positives, et l'équation (3), réduite à la forme

$$F(k\cos\alpha, k\cos6, k\cos\gamma, s) = 0, \tag{14}$$

établira pour chaque direction de la perpendiculaire une relation entre les deux constantes k, s, de telle sorte que, la valeur de k étant donnée, on pourra en déduire celle de s, et réciproquement. Si, la valeur de s restant la même, les angles α, 6, γ venaient seuls à varier, le plan d'une onde, représenté au bout du temps t par l'équation (12), prendra dans l'espace des positions diverses correspondantes à diverses ondes planes qui passaient toutes au premier instant par l'origine des coordonnées. Nous nommerons *surface des ondes* la surface limitée par ces mêmes ondes, c'est-à-dire la surface que le plan, représenté au bout du temps t par l'équation (12), touchera dans toutes les positions qu'il peut acquérir, quand on laisse varier u, v, w, de manière que la quantité s demeure constante. Cela posé, si l'on désigne par S le premier membre de la formule (3), c'est-à-dire si, en faisant pour abréger

$$\mathrm{S} = \mathrm{F}(u, v, w, s), \tag{15}$$

on réduit cette formule à

$$\mathrm{S} = 0, \tag{16}$$

alors, pour obtenir l'équation de la surface des ondes, il suffira évidemment d'éliminer u, v, w entre les formules (12) et (15) jointes à la suivante

$$\frac{x}{\mathrm{D}_u \mathrm{S}} = \frac{y}{\mathrm{D}_v \mathrm{S}} = \frac{z}{\mathrm{D}_w \mathrm{S}}. \tag{17}$$

Nous avons supposé, dans ce qui précède, les constantes u, v, w réelles, ainsi que les valeurs de s tirées de la formule (3). Mais les conclusions auxquelles nous sommes parvenus peuvent subsister sans que cette condition soit remplie, par exemple dans le cas où l'on aurait

$$u = \mathrm{u}\sqrt{-1}, \qquad v = \mathrm{v}\sqrt{-1}, \qquad w = \mathrm{w}\sqrt{-1} \tag{18}$$

et

$$s = \mathrm{s}\sqrt{-1}, \tag{19}$$

u, v, w, s désignant des quantités réelles. Alors l'équation (12), pouvant être réduite à

$$\mathrm{u}x + \mathrm{v}y + \mathrm{w}z + \mathrm{s}t = 0, \tag{20}$$

représenterait encore un plan qui se déplacerait dans l'espace avec une vitesse représentée par la valeur numérique du rapport

$$\frac{\mathrm{s}}{\mathrm{k}},$$

la valeur de k étant

$$k = \sqrt{\mathrm{u}^2 + \mathrm{v}^2 + \mathrm{w}^2}; \tag{21}$$

et les formules (10), (12), (16) se trouveraient remplacées par les

équations (20) et (21), jointes à la suivante

$$\frac{x}{\mathrm{D_u S}} = \frac{y}{\mathrm{D_v S}} = \frac{z}{\mathrm{D_w S}}. \tag{22}$$

Donc alors, pour obtenir l'équation de la surface des ondes, il suffirait d'éliminer u, v, w entre les formules (15), (20) et (22). Si d'ailleurs la fonction $\mathrm{F}(x, y, z, t)$ était homogène, l'équation (3), combinée avec les formules (17), (18), donnerait simplement

$$\mathrm{F}(\mathrm{u}, \mathrm{v}, \mathrm{w}, \mathrm{s}) = 0, \tag{23}$$

et dans la formule (21) on pourrait prendre pour S la fonction $\mathrm{F}(\mathrm{u}, \mathrm{v}, \mathrm{w}, \mathrm{s})$. Donc alors, dans la discussion des ondes planes et dans la recherche de la surface des ondes, on pourrait conserver les formules (12), (13), (14), (15), (16), (17), et se borner à y remplacer u, v, w, s, devenus imaginaires, par les quantités réelles u, v, w, s, ou, ce qui revient au même, on pourrait se borner à considérer u, v, w, s comme représentant des quantités réelles. Il y a plus : S étant alors une fonction homogène de u, v, w, s, les formules (12), (15) et (16) pourraient être considérées comme établissant des relations entre les variables indépendantes x, y, z, t et les seuls rapports

$$\frac{u}{s}, \quad \frac{v}{s}, \quad \frac{w}{s}.$$

Donc l'élimination de u, v, w entrainerait l'élimination de la quantité s, à laquelle on pourrait attribuer une valeur quelconque. On pourrait prendre, par exemple, $s = \omega$, en nommant ω la valeur particulière de s que fournit l'équation (3), quand on y suppose $k = 1$, ou, ce qui revient au même,

$$u^2 + v^2 + w^2 = 1.$$

Si, pour plus de simplicité, on supposait

$$s = t,$$

alors les quantités

$$u, \quad v, \quad w,$$

qui sont liées entre elles par la seule équation (3), pourraient être réduites aux coordonnées d'un point quelconque de la surface caractéristique; et en nommant x, y, z ces coordonnées, afin de les distinguer des coordonnées x, y, z d'un point de la surface des ondes, on aurait

$$u = x, \quad v = y, \quad w = z. \tag{24}$$

Cela posé, la valeur de S deviendrait

$$S = F(x, y, z, t); \tag{25}$$

et pour obtenir l'équation de la surface des ondes, il suffirait d'éliminer

$$x, \quad y, \quad z$$

entre les formules (12), (16), (17), réduites aux suivantes :

$$xx + yy + zz + t^2 = 0, \tag{26}$$

$$S = 0, \quad \frac{x}{D_x S} = \frac{y}{D_y S} = \frac{z}{D_z S}. \tag{27}$$

L'équation de la surface des ondes, ainsi obtenue, aurait évidemment pour premier membre une fonction homogène des quatre variables x, y, z, t.

Au reste, soit que l'équation caractéristique devienne homogène, ou cesse de l'être, il est clair qu'aux diverses valeurs de k, c'est-à-dire aux diverses racines de l'équation (14), résolue par rapport à k, correspondront généralement diverses nappes de la surface des ondes.

II. — *Rapports qui existent entre la surface caractéristique et la surface des ondes, dans le cas où l'équation caractéristique devient homogène.*

Considérons maintenant d'une manière spéciale le cas où l'équation caractéristique est homogène.

Soient alors, au bout du temps t, x, y, z les coordonnées rectangulaires d'un point quelconque de la surface caractéristique, et x, y, z les coordonnées d'un point correspondant de la surface des ondes.

Soient encore

$$S = 0 \tag{1}$$

l'équation de la surface caractéristique,

$$S = F(x, y, z, t)$$

étant une fonction homogène de x, y, z, t; et

$$\mathcal{S} = 0 \tag{2}$$

l'équation de la surface des ondes,

$$\mathcal{S} = \mathcal{F}(x, y, z, t)$$

étant une autre fonction de x, y, z, t, qui sera elle-même homogène. D'après ce qui a été dit dans le paragraphe I, pour obtenir l'équation de la surface des ondes, il suffira d'éliminer x, y, z entre l'équation (1) et les formules

$$xx + yy + zz + t^2 = 0, \tag{3}$$

$$\frac{x}{D_x S} = \frac{y}{D_y S} = \frac{z}{D_z S}. \tag{4}$$

Ajoutons que l'équation (3), quand on y considère x, y, z comme variables, représente un plan qui touche la surface des ondes au point (x, y, z), d'où il suit que l'on a encore

$$\frac{x}{D_x \mathcal{S}} = \frac{y}{D_y \mathcal{S}} = \frac{z}{D_z \mathcal{S}}. \tag{5}$$

Si l'on éliminait x, y, z entre cette dernière formule et les équations (2), (3), on devrait retrouver l'équation de la surface caractéristique. D'ailleurs, pour passer de l'équation (4) à l'équation (5), il suffit d'échanger l'une des surfaces contre l'autre, et cet échange n'altère point la formule (3). Donc une élimination semblable à celle par laquelle on déduit la surface des ondes de la surface caractéristique sert aussi à déduire la surface caractéristique de la surface des ondes. Cette remarque entraine évidemment la proposition suivante :

Théorème I. — *Si la surface des ondes correspondante à une équation* *caractéristique homogène se change en surface caractéristique, réciproquement la surface caractéristique se changera en surface des ondes.*

De ce qu'on vient de dire, il résulte immédiatement que, l'équation de la surface des ondes étant donnée, la forme de l'équation caractéristique s'en déduira immédiatement par une simple élimination. On reconnaîtra ainsi, par exemple, que, si les diverses nappes de la surface des ondes se réduisent à des surfaces de sphères, le premier membre de l'équation caractéristique dépendra seulement de

$$D_t^2 \quad \text{et de} \quad D_x^2 + D_y^2 + D_z^2.$$

Donc alors, ce premier membre pourra être décomposé en facteurs de la forme

$$D_t^2 - \Omega^2(D_x^2 + D_y^2 + D_z^2),$$

Ω désignant la vitesse de propagation d'une onde sphérique.

Soient maintenant

$$\mathrm{r} = \sqrt{\mathrm{x}^2 + \mathrm{y}^2 + \mathrm{z}^2},$$

et

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2},$$

les rayons vecteurs menés de l'origine des coordonnées : 1° au point $(\mathrm{x}, \mathrm{y}, \mathrm{z})$ de la surface caractéristique; 2° au point (x, y, z) de la surface des ondes, et nommons δ l'angle aigu compris entre ces mêmes rayons vecteurs. La somme

$$\mathrm{x}x + \mathrm{y}y + \mathrm{z}z$$

qui sera négative, en vertu de l'équation (3), se réduira nécessairement au produit

$$-r\mathrm{r}\cos\delta;$$

donc la formule (3) donnera

$$r\mathrm{r}\cos\delta = t^2. \tag{6}$$

Cette dernière équation comprend un théorème qu'on peut énoncer comme il suit :

Théorème II. — *Lorsque l'équation caractéristique est homogène, les*

rayons vecteurs r, r, *menés de l'origine au bout du temps* t, *à deux points correspondants de la surface caractéristique et de la surface des ondes, jouissent de cette propriété que chacun d'eux, multiplié par la projection de l'autre sur lui-même, fournit un produit constant égal au carré de* t.

Corollaire. — Il résulte du théorème II que les quatre points qui représentent les extrémités des deux rayons vecteurs, ou la projection de l'extrémité de l'un sur l'autre, sont situés sur une même circonférence de cercle.

Comme, en vertu de la formule (4) ou (5), le plan tangent mené à la surface des ondes, ou à la surface caractéristique, par l'extrémité de l'un des rayons vecteurs r, r, est perpendiculaire à l'autre rayon, on pourra encore évidemment déduire du théorème II la proposition suivante :

Théorème III. — *Étant donné un système d'équations aux dérivées partielles, qui conduit à une équation caractéristique homogène, pour déduire la surface des ondes de la surface caractéristique, ou réciproquement, il suffit de porter sur chaque rayon vecteur, mené de l'origine à l'une des deux surfaces, une longueur représentée par le rapport entre le carré du temps et ce même rayon vecteur; puis de faire passer par l'extrémité de cette longueur un plan perpendiculaire à ce rayon. L'autre surface sera celle que le plan dont il s'agit touchera constamment dans les diverses positions qu'il peut acquérir.*

Nous terminerons ce Mémoire par une remarque assez curieuse.

Si l'on considère t comme une fonction de $\mathrm{x}, \mathrm{y}, \mathrm{z}$ déterminée par l'équation $S = 0$, ou

$$F(\mathrm{x}, \mathrm{y}, \mathrm{z}, t) = 0, \tag{7}$$

cette fonction de $\mathrm{x}, \mathrm{y}, \mathrm{z}$ sera homogène et du premier degré; on aura donc non seulement

$$D_{\mathrm{x}}t = -\frac{D_{\mathrm{x}}S}{D_tS}, \qquad D_{\mathrm{y}}t = -\frac{D_{\mathrm{y}}S}{D_tS}, \qquad D_{\mathrm{z}}t = -\frac{D_{\mathrm{z}}S}{D_tS}, \tag{8}$$

mais encore

$$\mathrm{x}D_x t + \mathrm{y}D_y t + \mathrm{z}D_z t = t. \tag{9}$$

Or des équations (8), (9) jointes aux formules (3) et (4), on déduira la suivante

$$\frac{x}{D_x t} = \frac{y}{D_y t} = \frac{z}{D_z t} = \frac{\mathrm{x}x + \mathrm{y}y + \mathrm{z}z}{-t} = \frac{t}{-1}; \tag{10}$$

puis de celle-ci jointe à l'équation homogène

$$\mathcal{F}(x, y, z, t) = 0, \tag{11}$$

on conclura

$$\mathcal{F}(D_x t, D_y t, D_z t, -1) = 0. \tag{12}$$

Cette dernière formule sera donc une équation aux différences partielles à laquelle devra satisfaire la valeur de t donnée par la formule (7).

Ainsi, par exemple, comme en posant

$$F(x, y, z, t) = t^2 - \Omega^2(x^2 + y^2 + z^2),$$

on trouve

$$\mathcal{F}(x, y, z, t) = t^2 - \frac{x^2 + y^2 + z^2}{\Omega^2},$$

on devra vérifier l'équation aux différences partielles

$$(D_x t)^2 + (D_y t)^2 + (D_z t)^2 = 1,$$

en posant

$$t^2 = \Omega^2(x^2 + y^2 + z^2);$$

ce qui est effectivement exact.

MÉMOIRE

SUR

LA NATURE ET LES PROPRIÉTÉS DES RACINES

D'UNE ÉQUATION QUI RENFERME UN PARAMÈTRE VARIABLE (1).

Les racines d'une équation qui renferme deux variables x, t, et que l'on résout par rapport à la variable x, ou, ce qui revient au même, les racines d'une équation qui renferme, avec l'inconnue x, un paramètre variable t, jouissent de diverses propriétés qu'il importe de bien connaître. L'une de ces propriétés est que ces racines sont généralement des fonctions continues du paramètre variable, en sorte qu'elles varient avec ce paramètre par degrés insensibles. Il en résulte que, si, en vertu de la variation du paramètre, une racine réelle vient à disparaître, elle sera immédiatement remplacée par des racines imaginaires. Cette dernière proposition n'est pas à beaucoup près aussi évidente qu'elle semble l'être au premier abord. Il est d'autant plus nécessaire de la démontrer qu'elle ne subsiste pas sans condition. En effet, puisque la forme de l'équation entre x et t est entièrement arbitraire, rien n'empêche de donner pour racine x à cette équation une fonction discontinue du paramètre t, par exemple la fonction

$$e^{\frac{1}{t}};$$

et il est clair que, dans ce dernier cas, x variera très sensiblement, en

(1) *Voir* un résumé de ce Mémoire, *Œuvres de Cauchy*, 1re série, t. VI, p. 202; Extrait 129 des *Comptes rendus*.

passant d'une valeur très petite à une valeur très grande, si le paramètre t, en demeurant très voisin de zéro, passe du négatif au positif. Pour que l'on soit assuré que la racine x, considérée comme fonction du paramètre t, reste continue dans le voisinage d'une valeur particulière attribuée à ce paramètre, il suffit que le premier membre de l'équation donnée reste lui-même fonction continue des deux variables x, t, dans le voisinage de la valeur particulière de t, et de la valeur correspondante de x. C'est ce que je démontre, en m'appuyant sur un théorème que j'ai donné (¹) dans un Mémoire présenté à l'Académie de Turin le 27 novembre 1831. De ce théorème, qui détermine, pour une équation algébrique ou transcendante, le nombre des racines réelles ou imaginaires assujetties à des conditions données, je déduis immédiatement la continuité de la fonction de t qui représente la racine x de l'équation donnée entre x et t; et j'en conclus, par exemple, que, si, cette équation étant réelle, plusieurs racines réelles égales viennent à disparaître, elles se trouveront généralement remplacées par un pareil nombre de racines imaginaires.

Le paragraphe I du présent Mémoire est relatif à des équations entre x et t, de forme quelconque. Dans le paragraphe II, je considère des équations d'une forme particulière, savoir : celles qui fournissent immédiatement la valeur de t en fonction de x. Parmi les équations de ce genre, on doit surtout remarquer celles qui donnent pour t une fonction réelle et rationnelle de x. Une semblable équation, résolue par rapport à x, ne peut avoir constamment toutes ses racines réelles, pour une valeur réelle quelconque de t, que sous certaines conditions, dont l'une est que les degrés des deux termes de la fraction rationnelle soient égaux, ou diffèrent entre eux d'une seule unité. Les autres conditions consistent en ce que les deux termes, égalés à

(¹) Ce théorème peut encore se déduire immédiatement d'une proposition plus générale énoncée dans un second Mémoire que j'ai publié à Turin sous la date du 15 juin 1833. Ajoutons que MM. Sturm et Liouville ont donné du même théorème de nouvelles démonstrations dont l'une est en partie fondée sur quelques-unes des considérations auxquelles j'aurai recours dans le paragraphe I du présent Mémoire.

zéro, fournissent deux nouvelles équations, dont toutes les racines soient réelles et inégales, et que la suite de toutes ces racines réunies, et rangées d'après leur ordre de grandeur, offre alternativement une racine de l'une des deux nouvelles équations, puis une racine de l'autre. Lorsque ces diverses conditions sont remplies, on peut être assuré non seulement que l'équation proposée, résolue par rapport à x, a toutes ses racines réelles et inégales pour une valeur quelconque de t, mais encore que chacune de ces racines, pour une valeur croissante de t, est toujours croissante ou toujours décroissante, tant qu'elle reste finie. Quelques propositions établies par M. Richelot (*voir* le *Journal de M. Crelle*, t. XXI, p. 313) se trouvent comprises dans celles que je viens d'énoncer.

I. — *Considérations générales.*

Considérons une équation

$$F(x, t) = 0, \tag{1}$$

qui renferme deux variables x, t, ou, ce qui revient au même, une inconnue x avec un paramètre variable t. Supposons d'ailleurs que le premier membre $F(x, t)$ reste généralement fonction continue des deux variables x, t, et ne cesse de l'être que pour certaines valeurs particulières de ces variables, pour celles, par exemple, qui le rendent infini. Les racines de l'équation (1), résolue par rapport à x, seront généralement elles-mêmes des fonctions continues de t, qui varieront avec t par degrés insensibles. Effectivement, on démontrera sans peine la proposition suivante :

Théorème I. — *Nommons*

$$\tau, \quad \xi$$

deux valeurs finies et correspondantes de t et de x, propres à vérifier l'équation (1), *et dans le voisinage desquelles la fonction* $F(x, t)$ *reste continue par rapport aux variables x, t. Si l'on attribue à la variable t une valeur très peu différente de τ, par conséquent une valeur de la forme*

$$t = \tau + i,$$

i désignant un accroissement infiniment petit, positif ou négatif, ou même imaginaire, l'équation (1), *résolue par rapport à x, offrira une ou plusieurs racines x très peu différentes de ξ, et dont chacune sera de la forme*

$$x = \xi + j,$$

j désignant encore une expression réelle ou imaginaire, infiniment petite, qui convergera, en même temps que i, vers la limite zéro. De plus, le nombre de ces racines sera précisément le nombre de celles qui se réduiront à ξ dans l'équation

$$\text{(2)} \qquad F(x, \tau) = 0.$$

Démonstration. — Concevons d'abord que, la forme de la fonction $F(x, t)$ étant réelle, τ représente une valeur réelle de t, et ξ une racine réelle simple de l'équation (1). Si l'on nomme

$$t', \quad t''$$

deux limites qui comprennent entre elles la valeur τ de la variable t, et

$$x', \quad x''$$

deux limites qui comprennent entre elles la racine ξ, on pourra supposer les limites t', t'' assez rapprochées de τ, et les limites x', x'' assez rapprochées de ξ, pour que la fonction $F(x, t)$ reste continue entre les limites des deux variables t, x, et pour que l'équation

$$F(x, \tau) = 0$$

offre une seule racine réelle ξ non située hors des limites x', x''. Mais alors les valeurs

$$F(x', \tau), \quad F(x'', \tau)$$

de la fonction $F(x, t)$ se réduiront à deux quantités affectées de signes contraires. D'ailleurs chacune de ces valeurs variera évidemment très peu, et par suite conservera le signe qui lui appartient, si l'on y remplace τ par $\tau + i$, pourvu que l'accroissement i représente une quantité positive ou négative suffisamment rapprochée de zéro, et inférieure, abstraction faite du signe, à la plus petite des différences

$\tau - t'$, $t'' - \tau$. Donc, pour de très petites valeurs numériques de i, les deux quantités

$$F(x', \tau + i), \quad F(x'', \tau + i)$$

seront elles-mêmes affectées de signes contraires; d'où il suit que l'équation

$$\text{(3)} \qquad F(x, \tau + i) = 0$$

offrira une racine réelle $\xi + j$ comprise entre les limites

$$x', \quad x''.$$

Enfin, comme ces deux dernières limites pourront être évidemment très resserrées, quand i sera très peu différent de zéro, on peut affirmer que, dans ce cas, la valeur numérique de i deviendra très petite avec les différences

$$\xi - x', \qquad x'' - \xi,$$

qui la surpassent toutes deux. La première partie du théorème I se trouve ainsi démontrée, dans le cas où les valeurs de τ et de ξ, et la forme de la fonction $F(x, t)$ restent réelles, ξ étant d'ailleurs une racine simple de l'équation (1).

Concevons maintenant que, la forme de la fonction $F(x, t)$ étant réelle ou imaginaire,

$$\tau, \quad \xi$$

représentent deux valeurs finies correspondantes, soit réelles, soit imaginaires, des deux variables

$$t, \quad x,$$

la racine ξ de l'équation

$$F(x, t) = 0$$

pouvant être ou une racine simple, ou une racine multiple. Comme, par hypothèse, la fonction

$$F(x, t),$$

qu'on peut aussi présenter sous la forme

$$F[\xi + (x - \xi), \tau + (t - \tau)],$$

reste continue dans le voisinage des valeurs τ et ξ des deux variables t et x, si l'on nomme

$$\rho,\quad \varsigma$$

deux quantités positives, ces quantités pourront être assez rapprochées de zéro pour que la fonction dont il s'agit soit toujours continue, quand, le module de la différence $x-\xi$ étant inférieur à ρ, le module de la différence $t-\tau$ sera inférieur à ς, et pour que l'équation

$$F(x,\tau)=0$$

n'offre aucune racine x, différente de ξ, qui produise un module de $x-\xi$ inférieur ou seulement égal à la limite ρ. Posons d'ailleurs

$$(4)\qquad \xi=\alpha+6\sqrt{-1},\qquad x=u+v\sqrt{-1},\qquad x-\xi=r(\cos p+\sqrt{-1}\sin p),$$

et

$$(5)\qquad F(x,\tau)=U+V\sqrt{-1},$$

α, 6 désignant deux quantités réelles, u, v deux variables réelles, r le module de $x-\xi$, p un angle réel, et U, V deux fonctions réelles de u, v. Puisqu'on ne pourra vérifier l'équation

$$F(x,\tau)=0 \qquad \text{ou} \qquad U+V\sqrt{-1}=0,$$

et par suite les équations réelles

$$U=0,\qquad V=0,$$

en supposant $r=\rho$, ou, ce qui revient au même,

$$x-\xi=\rho(\cos p+\sqrt{-1}\sin p),$$

et par suite

$$(6)\qquad u=\alpha+\rho\cos p,\qquad v=6+\rho\sin p;$$

il est clair que, pour ces dernières valeurs de u, v, le rapport

$$\frac{U}{V}$$

ne se présentera jamais sous la forme indéterminée

$$\frac{0}{0}.$$

Cela posé, soit Δ l'*indice intégral* de la quantité

$$\frac{U}{V},$$

considérée comme fonction de l'angle p, c'est-à-dire la différence entre les deux nombres qui expriment combien de fois, pour des valeurs croissantes de p, comprises entre les limites 0, 2π, ou plus généralement entre deux limites réelles de la forme

$$p_0,\qquad P=p_0+2\pi,$$

cette quantité, en devenant infinie, passe : 1° du négatif au positif; 2° du positif au négatif. La valeur de Δ correspondante aux valeurs de u, v, fournies par les équations (6), ou même à des valeurs très voisines, sera un nombre entier complètement déterminé; et l'on conclura d'un théorème démontré dans le Mémoire du 27 novembre 1831, que la moitié de cette valeur représente le nombre des racines x qui vérifient l'équation

$$F(x,\tau)=0,$$

de manière à rendre le module de la différence $x-\xi$ inférieur à ρ. Donc, ρ étant inférieur au plus petit module que puisse offrir la différence entre deux racines distinctes dont l'une est ξ, la valeur de $\frac{1}{2}\Delta$ correspondante aux valeurs de u, v, fournies par les équations (6), représentera précisément le nombre des racines qui sont égales à ξ dans l'équation

$$F(x,\tau)=0;$$

et, si l'on nomme m le nombre de ces racines, on aura

$$\frac{1}{2}\Delta=m.$$

D'ailleurs, si entre les valeurs extrêmes

$$p_0 \quad \text{et} \quad P = p_0 + 2\pi$$

de la variable p, on interpose d'autres valeurs

$$p_1, \ p_2, \ p_3, \ \ldots,$$

choisies avec p_0 de manière qu'aucun terme de la suite croissante

$$p_0, \ p_1, \ p_2, \ p_3, \ \ldots, \ P$$

ne vérifie l'une des deux équations

$$U = 0, \qquad V = 0,$$

et que jamais deux termes consécutifs de cette suite ne comprennent à la fois entre eux une ou plusieurs racines réelles de l'équation

$$U = 0$$

avec une ou plusieurs racines réelles de l'équation

$$V = 0,$$

la valeur de Δ sera complètement connue, dès que l'on connaîtra le signe de chacune des quantités U, V pour chacune des valeurs

$$p_0, \ p_1, \ p_2, \ p_3, \ \ldots, \ P$$

de la variable p. En effet, nommons

$$p', \ p''$$

deux termes consécutifs pris au hasard dans la suite

$$p_0, \ p_1, \ p_2, \ \ldots, \ P.$$

Si ces deux termes comprennent entre eux une ou plusieurs racines de l'équation

$$U = 0.$$

V ne s'évanouira point entre les limites $p = p'$, $p = p''$, et en conséquence, dans l'indice intégral Δ, la partie δ qui répondra aux valeurs

de p comprises entre ces mêmes limites sera nulle. Passons au cas où la fonction U ne s'évanouit pas entre les limites $p = p'$, $p = p''$; alors la fonction U, qui demeure continue, par hypothèse, conservera constamment le même signe entre ces limites; mais dans cet intervalle la fonction V pourra changer une ou plusieurs fois de signe en passant par zéro. Soient

$$V', \ V''$$

les deux valeurs de V correspondantes aux valeurs

$$p', \ p''$$

de la variable p. Si V', V'' sont des quantités de même signe, tandis que p passera de la limite p' à la limite p'', la fonction V ne pourra changer plusieurs fois de signe sans passer, par exemple, du positif au négatif autant de fois qu'elle passera du négatif au positif; et comme on pourra en dire autant du rapport $\frac{U}{V}$, dont le numérateur ne changera pas de signe, il est clair que la partie δ de Δ, correspondante à des valeurs de p renfermées entre les limites p', p'', se réduira encore à zéro. Enfin, si V', V'' sont des quantités affectées de signes contraires, il suffira évidemment, pour obtenir δ, de tenir compte du dernier changement de signe que pourra subir la fonction V, avant que la variable p atteigne la limite p''; et par suite δ se réduira tantôt à $+1$, tantôt à -1, suivant que le signe de V'' sera le signe qui affecte la fonction U ou le signe contraire. Ainsi chaque partie δ de l'indice intégral Δ sera connue, comme nous l'avions avancé, dès que l'on connaîtra les signes de U et de V pour chacune des valeurs de p comprises dans la suite

$$p_0, \ p_1, \ p_2, \ \ldots, \ P.$$

Supposons à présent que, les valeurs de u, v étant toujours données par les formules (6), on nomme

$$U_{\prime}, \ V_{\prime}, \ \Delta_{\prime}$$

ce que deviennent

$$U, \ V, \ \Delta$$

quand on remplace τ par $\tau + i$, en sorte que $U_{\prime}$, $V_{\prime}$ désignent deux fonctions réelles de u, v, déterminées par la formule

$$F(u + v\sqrt{-1}, \tau + i) = U_{\prime} + V_{\prime}\sqrt{-1}.$$

$\frac{1}{2}\Delta_{\prime}$ représentera le nombre des racines x qui vérifieront l'équation

$$F(x, \tau + i) = 0.$$

D'ailleurs on pourra supposer le module de i assez rapproché de zéro, pour qu'une valeur de p, qui produisait une valeur de U ou de V sensiblement différente de zéro, produise encore une valeur de $U_{\prime}$ ou de $V_{\prime}$ sensiblement différente de zéro et affectée du même signe que la valeur correspondante de U ou de V. Donc le module de i pourra être assez petit pour que la substitution de $\tau + i$ à τ n'altère point les signes des valeurs de U et de V correspondantes à deux valeurs

$$p', \quad p''$$

de p, qui ne réduisaient à zéro ni U, ni V, et ne comprenaient entre elles aucune racine réelle de l'équation $U = 0$. Mais alors, d'après ce qui a été dit ci-dessus, $\Delta_{\prime}$ sera complètement connu aussi bien que Δ, et aura nécessairement la même valeur. Donc, pour des valeurs du module de i inférieures à ς, et suffisamment petites, on aura

$$(8) \qquad \Delta_{\prime} = \Delta,$$

par conséquent

$$\frac{1}{2}\Delta_{\prime} = \frac{1}{2}\Delta.$$

Ajoutons que la valeur de ρ, comprise dans les formules (6), pourra décroître indéfiniment, si la quantité ς elle-même se rapproche indéfiniment de zéro. Donc, m étant le nombre des racines égales à ξ dans l'équation

$$F(x, \tau) = 0,$$

et la fonction $F(x, t)$ étant supposée continue dans le voisinage des valeurs τ et ξ des variables t et x, on peut affirmer généralement que,

pour de très petites valeurs du module de i, l'équation

$$F(x, \tau + i)$$

offrira m racines réelles ou imaginaires, et très peu différentes de ξ.

Le théorème que nous venons d'établir entraîne la proposition suivante :

Théorème II. — *$F(x, t)$ étant une fonction réelle et déterminée des variables x, t, nommons*

$$\xi, \quad \tau$$

deux valeurs réelles et finies de ces variables qui vérifient l'équation

$$F(x, t) = 0,$$

et dans le voisinage desquelles la fonction $F(x, t)$ reste continue. Si τ représente une valeur maximum ou minimum de t, c'est-à-dire si τ est toujours inférieur, ou toujours supérieur, aux valeurs réelles que t peut acquérir pour des valeurs réelles de x voisines de ξ, l'équation

$$F(x, t) = 0,$$

résolue par rapport à x, offrira des racines imaginaires pour certaines valeurs réelles de t, voisines de la valeur τ.

Démonstration. — En effet, nommons m le nombre des racines x qui seront égales à ξ dans l'équation

$$F(x, \tau) = 0,$$

et i une quantité infiniment petite, que nous supposerons d'ailleurs négative si τ est un minimum, positive si τ est un maximum. En vertu du théorème I, pour des valeurs de i suffisamment rapprochées de zéro, l'équation

$$F(x, \tau + i) = 0$$

offrira m racines réelles ou imaginaires très peu différentes de ξ. Mais, si ces racines ou seulement quelques-unes d'entre elles étaient réelles, alors, contrairement à l'hypothèse admise, τ cesserait d'être un maximum ou un minimum. Donc elles seront imaginaires.

De ce qui vient d'être dit on déduit encore immédiatement les deux théorèmes que nous allons énoncer.

Théorème III. — *Les mêmes choses étant posées que dans le théorème II, si l'équation*

$$F(x, t) = 0,$$

après avoir acquis m racines réelles égales entre elles pour une certaine valeur réelle τ *de la variable t, vient tout à coup à perdre ces racines réelles, pour une valeur réelle de t très voisine de* τ, *celles-ci se trouveront remplacées par m racines imaginaires.*

Théorème IV. — *Si l'équation*

$$F(x, t) = 0,$$

résolue par rapport à x, *a toutes ses racines réelles pour une valeur réelle quelconque de la variable t, cette dernière variable, considérée comme fonction de* x, *ne pourra jamais acquérir un maximum ou un minimum* τ *correspondant à une valeur réelle* ξ *de* x *tellement choisie que* $F(x, t)$ *reste fonction continue dans le voisinage des valeurs* ξ *et* τ *des variables* x *et* t.

Lorsque l'équation (2) offre m racines égales à ξ, on a identiquement

$$F(x, \tau) = (x - \xi)^m \mathfrak{F}(x).$$

$\mathfrak{F}(x)$ désignant une fonction de x qui ne devient ni nulle, ni infinie pour $x = \xi$. Donc alors l'équation (3), ou

$$F(x, \tau + i) = 0,$$

peut être présentée sous la forme

$$F(x, \tau + i) - F(x, \tau) + (x - \xi)^m \mathfrak{F}(x) = 0. \tag{9}$$

Or, en posant pour abréger

$$\Pi(x, i) = -\frac{F(x, \tau + i) - F(x, \tau)}{i\,\mathfrak{F}(x)},$$

on verra la formule (9) se réduire à celle-ci

$$(x - \xi)^m = i\,\Pi(x, i). \tag{10}$$

Il est important d'observer que, si l'on pose

$$D_t F(x, t) = \Psi(x, t),$$

le rapport

$$\frac{F(x, \tau + i) - F(x, \tau)}{i}$$

s'approchera indéfiniment de

$$\Psi(x, \tau),$$

tandis que i s'approchera indéfiniment de zéro. Donc, par suite, si la fonction

$$F(x, t)$$

reste continue avec sa dérivée $\Psi(x, t)$ dans le voisinage des valeurs ξ et τ des variables x et t, on pourra en dire autant de la fonction

$$\Pi(x, i)$$

qui restera continue elle-même, dans le voisinage des valeurs ξ et 0 des variables x et i.

Concevons maintenant que, les quantités

$$\tau, \quad \xi$$

étant réelles, la forme de la fonction $F(x, t)$ soit pareillement réelle, et que l'expression

$$\Psi(x, \tau) = \Pi(x, 0)$$

acquière, pour $x = \xi$, une valeur finie différente de zéro. Nommons d'ailleurs θ une racine primitive de l'équation

$$\theta^{2m} = 1. \tag{11}$$

Si l'on attribue à i une valeur infiniment petite, l'équation (10), résolue par rapport à ξ, offrira, en vertu du théorème I, m racines très peu différentes de ξ. Or il est clair que, pour de très petites valeurs numériques de i, chacune de ces racines vérifiera l'une des m équations distinctes de la forme

$$(12) \qquad x - \xi = [i\,\Pi(x, i)]^{\frac{1}{m}}, \qquad x - \xi = \theta^2[i\,\Pi(x, i)]^{\frac{1}{m}}, \qquad \ldots,$$

si le signe de i est celui de la quantité $\Pi(\xi, 0)$, et l'une des m équations distinctes de la forme

$$(13) \qquad x - \xi = \theta[-i\,\Pi(x, i)]^{\frac{1}{m}}, \qquad x - \xi = \theta^3[-i\,\Pi(x, i)]^{\frac{1}{m}}, \qquad \ldots,$$

si le signe de i est contraire à celui de $\Pi(\xi, 0)$. D'ailleurs, comme, pour une valeur nulle de i, chacune des équations (12) ou (13) se réduit à

$$x - \xi = 0,$$

et a par conséquent pour racine simple la valeur ξ de x, on conclura du théorème I que, pour des valeurs réelles de i très rapprochées de zéro, une valeur de x très peu différente de ξ vérifie comme racine ou chacune des équations (12), ou chacune des équations (13). On se trouvera ainsi conduit à la proposition suivante :

Théorème V. — *$F(x, t)$ désignant une fonction réelle des variables x, t, nommons*

$$\xi, \quad \tau$$

deux valeurs réelles de x et de t, propres à vérifier l'équation

$$F(x, t) = 0,$$

et dans le voisinage desquelles la fonction $F(x, t)$ reste continue avec sa dérivée $\Psi(x, t)$ relative à la variable t. Soit m le nombre des racines égales à ξ dans l'équation

$$F(x, \tau) = 0,$$

en sorte que le rapport

$$\frac{F(x, \tau)}{(x - \xi)^m}$$

acquière, pour $x = \xi$, une valeur finie différente de zéro ; et supposons que l'on puisse en dire autant de la fonction $\Psi(x, \tau)$. Enfin posons

$$F(x, \tau) = (x - \xi)^m \mathcal{F}(x),$$

et

$$\Pi(x, i) = -\frac{F(x, \tau + i) - F(x, \tau)}{i\,\mathcal{F}(x)},$$

i désignant une quantité réelle. L'équation

$$F(x, \tau + i) = 0$$

offrira, pour de très petites valeurs numériques de i, m racines très peu différentes de ξ, dont chacune vérifiera l'une des équations (12), si le signe de i est celui de la quantité

$$\Pi(\xi, 0) = -\frac{\Psi(\xi, \tau)}{\mathcal{F}(\xi)},$$

et l'une des équations (13) si le signe de i est contraire à celui de $\Pi(\xi, 0)$.

Corollaire I. — Il est bon d'observer que les termes de la suite

$$1, \quad \theta^2, \quad \theta^4, \quad \ldots,$$

renfermés dans les seconds membres des équations (12), se réduisent aux diverses racines $m^{\text{ièmes}}$ de l'unité, tandis que les termes de la suite

$$\theta, \quad \theta^3, \quad \theta^5, \quad \ldots.$$

renfermés dans les équations (13), se réduisent aux diverses racines $m^{\text{ièmes}}$ de -1. Parmi ces diverses racines, deux seulement sont réelles, et se réduisent, la première à $+1$, la seconde à

$$\theta^m = -1.$$

Par suite, des équations (12) et (13) deux seulement sont réelles, savoir, la première des équations (12) et celle des équations (12) ou (13) qui renferme le facteur $\theta^m = -1$. Ces deux équations sont aussi les seules qui fourniront des valeurs réelles de x, les racines des équations imaginaires ne pouvant être qu'imaginaires elles-mêmes. D'ailleurs la racine réelle ou imaginaire de chacune des équations (12), (13) sera immédiatement fournie par la série de Lagrange.

Corollaire II. — Si m est un nombre pair, deux des équations (12) seront réelles, les équations (13) étant toutes imaginaires. Donc alors l'équation

$$F(x, \tau + i) = 0$$

offrira deux racines réelles et $m-2$ racines imaginaires, si le signe de i est celui de la quantité $\Pi(\xi, 0)$; mais quand le signe de i deviendra contraire à celui de $\Pi(\xi, 0)$, toutes les racines deviendront imaginaires.

Corollaire III. — Si m est un nombre impair, alors une seule des équations (12) sera réelle, ainsi qu'une seule des équations (13). Donc alors, pour une valeur réelle de i très rapprochée de zéro, soit positive, soit négative, l'équation

$$F(x, \tau + i) = 0$$

offrira une seule racine réelle et $m-1$ racines imaginaires.

Le théorème V et ses corollaires entraînent évidemment les nouvelles propositions que nous allons énoncer.

Théorème VI. — *Les mêmes choses étant posées que dans le théorème II, si la valeur ξ de x représente non une racine simple, mais une racine multiple de l'équation*

$$F(x, \tau) = 0,$$

en sorte que, m racines étant égales à ξ, le rapport

$$\frac{F(x, \tau)}{(x-\xi)^m}$$

acquière, pour $x = \xi$, une valeur finie différente de zéro, l'équation

$$F(x, t) = 0,$$

résolue par rapport à x, offrira des racines imaginaires, pour certaines valeurs réelles de t voisines de τ.

Corollaire. — Le théorème VI s'étend au cas même où la valeur particulière de t, représentée par τ, deviendrait infinie, comme on le prouverait aisément en substituant, dans ce cas, à la variable t, la variable $\frac{1}{t}$.

II. — *Sur les racines des équations de la forme $t = \varpi(x)$.*

En supposant, dans le paragraphe I, l'équation (1) réduite à la forme

$$t = \varpi(x),$$

on obtiendra, au lieu des théorèmes II, IV, V et VI, ceux que nous allons énoncer.

Théorème I. — *$\varpi(x)$ étant une fonction réelle et déterminée de x; si la variable t liée à x par l'équation*

$$t = \varpi(x) \tag{1}$$

acquiert une valeur maximum ou minimum τ pour une valeur réelle et finie de x, représentée par ξ, et dans le voisinage de laquelle la fonction $\varpi(x)$ reste continue, l'équation (1), résolue par rapport à x, offrira des racines imaginaires pour certaines valeurs réelles de t voisines de la valeur τ.

Théorème II. — *Si l'équation*

$$t = \varpi(x),$$

résolue par rapport à x, a toutes ses racines réelles pour une valeur réelle quelconque de la variable t, cette dernière variable ne pourra jamais acquérir un maximum ou un minimum τ correspondant à une valeur réelle ξ de x, dans le voisinage de laquelle la fonction $\varpi(x)$ resterait continue.

Théorème III. — *$\varpi(x)$ étant une fonction réelle et déterminée de x, supposons la variable t liée à la variable x par la formule*

$$t = \varpi(x).$$

Si l'équation

$$\varpi(x) = \tau, \tag{2}$$

offre m racines égales à ξ, *en sorte qu'on ait*

$$\varpi(x) - \tau = (x - \xi)^m \mathfrak{F}(x),$$

$\mathfrak{F}(x)$ *désignant une fonction nouvelle qui acquière, pour* $x = \xi$, *une valeur finie différente de zéro; l'équation*

$$\varpi(x) = \tau + i,$$

ou

$$(x - \xi)^m = \frac{i}{\mathfrak{F}(x)}, \tag{3}$$

offrira, pour de très petites valeurs numériques de i, m *racines très peu différentes de* ξ. *Soit d'ailleurs* θ *une des racines primitives de l'équation*

$$\theta^m = 1.$$

Chacune des m racines de l'équation (3) *correspondantes à de très petites valeurs numériques de i vérifiera l'une des m formules*

$$x - \xi = \left[\frac{i}{\mathfrak{F}(x)}\right]^{\frac{1}{m}}, \qquad x - \xi = \theta^2 \left[\frac{i}{\mathfrak{F}(x)}\right]^{\frac{1}{m}}, \qquad \ldots, \tag{4}$$

si le signe de i est en même temps celui de la quantité $\mathfrak{F}(\xi)$, *et l'une des m formules*

$$x - \xi = \theta \left[\frac{i}{\mathfrak{F}(x)}\right]^{\frac{1}{m}}, \qquad x - \xi = \theta^3 \left[\frac{i}{\mathfrak{F}(x)}\right]^{\frac{1}{m}}, \qquad \ldots, \tag{5}$$

si le signe de i est contraire à celui de $\mathfrak{F}(\xi)$.

Théorème IV. — $\varpi(x)$ *étant une fonction réelle et déterminée de la variable* x, *et cette variable étant liée à la variable* t *par l'équation*

$$t = \varpi(x),$$

nommons ξ *une valeur réelle de* x, *qui représente m racines réelles égales de l'équation*

$$\varpi(x) = \tau,$$

en sorte que le rapport

$$\frac{\varpi(x) - \tau}{(x - \xi)^m}$$

acquière, pour $x = \xi$, *une valeur finie différente de zéro. Si la fonction* $\varpi(x)$ *reste continue dans le voisinage de la valeur* $x - \xi$, *l'équation* (1), *ou*

$$\varpi(x) = t,$$

résolue par rapport à x, *offrira des racines imaginaires pour certaines valeurs réelles de* t *voisines de* τ.

On peut encore déduire du théorème IV celui que nous allons énoncer.

Théorème V. — $\varpi(x)$ *étant une fonction réelle et déterminée de* x *qui ne cesse d'être continue qu'en devenant infinie, si l'équation*

$$t = \varpi(x),$$

résolue par rapport à x, *a toutes ses racines réelles pour une valeur réelle quelconque de* t, *non seulement chacune des deux équations*

$$\varpi(x) = 0, \tag{6}$$

$$\frac{1}{\varpi(x)} = 0 \tag{7}$$

aura pareillement toutes ses racines réelles; mais, de plus, deux racines réelles distinctes de l'équation (6) *comprendront toujours entre elles une seule racine réelle de l'équation* (7), *et, réciproquement, deux racines réelles distinctes de l'équation* (7) *comprendront toujours entre elles une seule racine réelle de l'équation* (6).

Démonstration. — Puisque l'équation (1), ou

$$t = \varpi(x),$$

résolue par rapport à x, aura toutes ses racines réelles pour une valeur réelle quelconque de t, ces racines ne cesseront pas d'être toutes réelles, lorsqu'on réduira l'équation (1) à l'équation (6) en posant

$t = 0$, ou à l'équation (7) en posant $t = \frac{1}{0}$. Soient maintenant

$$b, \quad b'$$

deux racines réelles distinctes de l'équation (6), et supposons, pour fixer les idées,

$$b < b'.$$

Puisque la variable t, liée à x par l'équation

$$t = \varpi(x),$$

varie avec x par degrés insensibles tant qu'elle reste finie; si l'on fait croître x depuis la limite b jusqu'à la limite b', t devra s'éloigner de la valeur zéro pour y revenir, après avoir acquis dans l'intervalle ou une valeur infinie, ou une valeur maximum ou minimum. Mais la dernière supposition serait contraire à l'hypothèse admise que l'équation (1), résolue par rapport à x, a toutes ses racines réelles pour une valeur réelle quelconque de t; donc la variable t devra prendre une valeur infinie, ou, en d'autres termes, l'équation (7) devra être vérifiée pour une certaine valeur de x comprise entre les limites b, b'.

En raisonnant de la même manière, et substituant à la variable t la variable $\frac{1}{t}$, on ferait voir que, dans l'hypothèse admise, deux racines réelles distinctes

$$a, \quad a'$$

de l'équation (7) comprennent toujours entre elles une racine réelle de l'équation (6).

Les théorèmes II et V entraînent encore le suivant :

Théorème VI. — *Les mêmes choses étant posées que dans le théorème V, si les racines réunies des équations* (6) *et* (7) *sont rangées par ordre de grandeur, de manière à former une suite croissante, les divers termes de cette suite appartiendront alternativement à l'une et à l'autre équation; si d'ailleurs on nomme*

$$a, \quad a'$$

deux racines consécutives de l'équation (7), *la seconde de ces racines a' pouvant être remplacée par l'infini positif ∞ et la première par l'infini négatif $-\infty$, la variable*

$$t = \varpi(x)$$

sera toujours croissante ou toujours décroissante, tandis que la variable x passera de la limite a à la limite a'.

Pour montrer une application des principes que nous venons d'établir, concevons que $\varpi(x)$ soit une fonction réelle et rationnelle. Nommons

$$a_1, \quad a_2, \quad a_3, \quad \ldots$$

les racines finies et distinctes de l'équation (7), et

$$b_1, \quad b_2, \quad b_3, \quad \ldots$$

les racines finies et distinctes de l'équation (6). Enfin posons

$$(8) \qquad \begin{cases} \varphi(x) = (x - a_1)(x - a_2)(x - a_3)\ldots, \\ \psi(x) = (x - b_1)(x - b_2)(x - b_3)\ldots; \end{cases}$$

la fonction $\varpi(x)$ sera nécessairement de la forme

$$(9) \qquad \varpi(x) = k\frac{\psi(x)}{\varphi(x)},$$

k désignant une quantité constante, et par suite l'équation (1) pourra être réduite à

$$(10) \qquad t\varphi(x) - k\psi(x) = 0.$$

Alors aussi les deux équations

$$(11) \qquad \psi(x) = 0,$$

$$(12) \qquad \varphi(x) = 0$$

auront précisément pour racines les racines finies des équations (6) et (7), pourvu qu'on suppose, comme on peut toujours le faire, que la fraction rationnelle $\varpi(x)$ est réduite à sa plus simple expression, et qu'en conséquence les fonctions entières $\varphi(x)$, $\psi(x)$ n'ont pas de commun diviseur. Il y a plus : comme aucun terme de l'une des suites

$$\begin{array}{l} a_1, \quad a_2, \quad a_3, \quad \ldots, \\ b_1, \quad b_2, \quad b_3, \quad \ldots \end{array}$$

ne pourra être en même temps un terme de l'autre, il est clair que, si l'on nomme ξ l'une quelconque des quantités

$$a_1, \quad a_2, \quad a_3, \quad \ldots, \qquad b_1, \quad b_2, \quad b_3, \quad \ldots,$$

et m le nombre des racines égales à ξ dans l'équation (6) ou (7), le rapport

$$\frac{\varpi(x)}{(x-\xi)^m} \quad \text{ou} \quad \frac{1}{(x-\xi)^m \varpi(x)}$$

se réduira pour $x = \xi$ à une constante finie différente de zéro. Cela posé, admettons que l'équation (1) ou

$$t = \varpi(x),$$

résolue par rapport à x, ait toutes ses racines réelles pour une valeur quelconque de t. On conclura du théorème IV, non seulement que les racines

$$\begin{array}{l} a_1, \quad a_2, \quad a_3, \quad \ldots, \\ b_1, \quad b_2, \quad b_3, \quad \ldots \end{array}$$

sont toutes réelles, mais encore que ces dernières racines réunies, et rangées par ordre de grandeur, de manière à former une suite croissante, appartiennent alternativement à l'une et à l'autre équation. Ce n'est pas tout; on conclura du théorème III : 1° en y posant $\tau = 0$; 2° en y remplaçant la variable t par la variable $\frac{1}{t}$, puis réduisant $\frac{1}{t}$ à zéro; que, dans l'hypothèse admise, chacune des équations (6) et (7), par conséquent chacune des équations (11) et (12) ne saurait avoir de racines égales. De ces diverses conclusions il résulte évidemment que, dans l'hypothèse admise, le nombre des racines de l'équation (12) et le nombre des racines de l'équation (11), c'est-à-dire les degrés des deux fonctions entières

$$\varphi(x), \quad \psi(x)$$

seront égaux ou différeront entre eux d'une unité. Donc, en résumé, on pourra énoncer la proposition suivante :

Théorème VII. — *$\varpi(x)$ étant une fonction réelle et rationnelle de x, si l'équation*

$$\varpi(x) = t,$$

résolue par rapport à x, a toutes ses racines réelles pour une valeur réelle quelconque de t, les degrés des deux termes de la fraction rationnelle $\varpi(x)$ seront égaux ou différeront entre eux d'une seule unité; de plus, les racines de chacune des équations

$$\varpi(x) = 0, \qquad \frac{1}{\varpi(x)} = 0$$

seront réelles et inégales; enfin toutes ces racines réunies et rangées par ordre de grandeur, de manière à former une suite croissante, appartiendront alternativement à l'une et à l'autre équation.

Corollaire I. — Les mêmes choses étant posées que dans le théorème VII, nommons n le nombre entier qui représente ou les degrés des deux termes de la fraction rationnelle $\varpi(x)$, lorsque ces degrés sont égaux, ou lorsqu'ils deviennent inégaux, le plus grand des deux. Concevons d'ailleurs que les racines finies de chacune des équations

$$\varpi(x) = 0, \qquad \frac{1}{\varpi(x)} = 0$$

soient rangées par ordre de grandeur, de manière à former une suite croissante, et que les deux suites croissantes ainsi obtenues soient respectivement

$$\begin{array}{l} b_1, \quad b_2, \quad b_3, \quad \ldots, \\ a_1, \quad a_2, \quad a_3, \quad \ldots. \end{array}$$

Enfin, supposons toujours les fonctions entières $\varphi(x)$, $\psi(x)$ déterminées par les formules (8). Si les racines réunies de l'une et de l'autre équation sont de nouveau rangées par ordre de grandeur, on obtiendra : 1° la suite

$$(13) \qquad b_1, \quad a_1, \quad b_2, \quad a_2, \quad \ldots, \quad a_{n-1}, \quad b_n,$$

quand la fonction $\psi(x)$ sera du degré n et la fonction $\varphi(x)$ du degré $n-1$; 2° l'une des deux suites

$$(14)\qquad a_1,\ b_1,\ a_2,\ b_2,\ \ldots,\ a_n,\ b_n,$$

$$(15)\qquad b_1,\ a_1,\ b_2,\ a_2,\ \ldots,\ b_n,\ a_n,$$

quand les fonctions $\varphi(x)$, $\psi(x)$ seront l'une et l'autre du degré n; 3° enfin la suite

$$(16)\qquad a_1,\ b_1,\ a_2,\ b_2,\ \ldots,\ b_{n-1},\ a_n,$$

quand la fonction $\psi(x)$ sera du degré $n-1$ et la fonction $\varphi(x)$ du degré n. Quant aux valeurs

$$-\infty \quad \text{et} \quad +\infty$$

de la variable x, elles vérifieront, dans le premier cas, l'équation (7), et dans le troisième cas, l'équation (6); tandis que, dans le second cas, elles réduiront la valeur de $\varpi(x)$ généralement donnée par la formule (9), à la constante k.

Corollaire II. — Pour démontrer très simplement la première partie du théorème VI, il suffirait d'observer que, si l'on nomme

$$\pm l$$

la différence entre les degrés du numérateur et du dénominateur de la fraction rationnelle $\varpi(x)$, l désignant un nombre entier qui pourra se réduire à zéro, l'équation

$$\varpi(x)=t,$$

jointe à la formule (9), donnera sensiblement, pour une très grande valeur numérique ou pour un très grand module de la variable x,

$$t=kx^{\pm l},$$

par conséquent

$$x^l=\frac{t}{k} \quad \text{ou} \quad x^l=\frac{k}{t}.$$

Or, comme l'équation binome qui précède fournira, pour des valeurs

négatives de $\frac{t}{k}$, des valeurs imaginaires de x, si le nombre l surpasse l'unité, on peut en conclure immédiatement que, si l'équation (1), résolue par rapport à x, a toutes ses racines réelles, pour une valeur réelle quelconque de t, le nombre l, c'est-à-dire la différence absolue entre les degrés des deux termes de la fraction rationnelle $\varpi(x)$, se réduira simplement à zéro ou à l'unité.

On peut démontrer encore facilement l'inverse du théorème VII, c'est-à-dire la proposition suivante :

Théorème VIII. — *$\varpi(x)$ étant une fonction réelle et rationnelle de x, si les degrés des deux termes de cette fonction ou fraction rationnelle sont égaux ou diffèrent entre eux d'une seule unité; si d'ailleurs les racines de chacune des équations*

$$\varpi(x)=0, \qquad \frac{1}{\varpi(x)}=0$$

sont toutes réelles et inégales, si enfin ces racines, rangées par ordre de grandeur, appartiennent alternativement à l'une et à l'autre équation, alors, résolue par rapport à x, l'équation

$$\varpi(x)=t$$

aura toutes ses racines réelles, pour une valeur réelle quelconque de la variable t.

Démonstration. — Posons toujours

$$\varpi(x)=k\frac{\psi(x)}{\varphi(x)},$$

$\varphi(x)$, $\psi(x)$ désignant deux fonctions entières de x, dans chacune desquelles la plus haute puissance de x aura l'unité pour coefficient, et k une constante qui sera nécessairement réelle. Soit encore n le nombre entier qui représentera, dans l'hypothèse admise, les degrés des fonctions $\psi(x)$, $\varphi(x)$, si ces degrés sont égaux, ou, s'ils sont inégaux, le plus grand des deux. On aura trois cas à considérer suivant que les degrés des fonctions entières

$$\psi(x), \qquad \varphi(x)$$

seront

$$n \quad \text{et} \quad n-1,$$

ou

$$n \quad \text{et} \quad n,$$

ou enfin

$$n-1 \quad \text{et} \quad n.$$

Or, supposons d'abord $\psi(x)$ du degré n, et $\varphi(x)$ du degré $n-1$. Soient dans ce même cas

$$a_1, \quad a_2, \quad \ldots, \quad a_{n-1}$$

les racines, supposées réelles et inégales, de l'équation

$$\varphi(x) = 0,$$

ces racines étant rangées par ordre de grandeur; la suite croissante des racines de l'équation

$$\frac{1}{\varpi(x)} = 0$$

sera

$$-\infty, \quad a_1, \quad a_2, \quad \ldots, \quad a_{n-1}, \quad \infty;$$

et puisque deux de ces racines, prises consécutivement, comprendront entre elles une seule racine simple et réelle de l'équation

$$\psi(x) = 0,$$

deux termes consécutifs de la suite

$$\psi(-\infty), \quad \psi(a_1), \quad \psi(a_2), \quad \ldots, \quad \psi(a_{n-1}), \quad \psi(\infty)$$

seront toujours affectés de signes contraires. D'ailleurs la dernière suite offrira les valeurs diverses de la fonction

$$\psi(x) - \frac{t}{k}\varphi(x)$$

correspondantes aux valeurs

$$-\infty, \quad a_1, \quad a_2, \quad \ldots, \quad a_{n-1}, \quad \infty$$

de la variable x, et à une valeur finie quelconque de la variable t. Donc deux de ces valeurs de x, prises consécutivement, comprendront entre elles au moins une racine réelle et simple de l'équation

$$\psi(x) - \frac{t}{k}\varphi(x) = 0;$$

donc cette équation, qui est du degré n, admettra n racines réelles pour une valeur réelle quelconque de t. En d'autres termes, pour une valeur réelle finie de t, des valeurs réelles de x pourront seules devenir racines de l'équation

$$\psi(x) - \frac{t}{k}\varphi(x) = 0,$$

ou, ce qui revient au même, de l'équation

$$t = \varpi(x).$$

Ajoutons que, si la valeur de t devenait infinie, les racines de l'équation

$$t = \varpi(x)$$

ne cesseraient pas d'être réelles, puisqu'elles se réduiraient simplement aux racines

$$a_1, \quad a_2, \quad \ldots, \quad a_{n-1} \quad \text{et} \quad \frac{1}{0} = \pm\infty$$

de l'équation

$$\frac{1}{\varpi(x)} = 0.$$

Si la fonction $\psi(x)$ était du degré $n-1$, et la fonction $\varphi(x)$ du degré n, alors, pour démontrer le théorème VIII, il suffirait de raisonner comme nous venons de le faire, en substituant la fonction $\frac{1}{\varpi(x)}$ à la fonction $\varpi(x)$.

Enfin, si les fonctions

$$\varphi(x), \quad \psi(x)$$

sont l'une et l'autre du degré n; alors, en représentant par

$$a_1, \quad a_2, \quad \ldots, \quad a_n$$

la suite croissante des racines de l'équation

$$\varphi(x) = 0,$$

et par

$$b_1, \quad b_2, \quad \ldots, \quad b_n$$

la suite croissante des racines de l'équation

$$\psi(x) = 0,$$

on conclura encore de raisonnements semblables à ceux dont nous venons de faire usage, que, pour une valeur réelle de t, l'équation

$$t = \varpi(x),$$

réductible à chacune des formes

$$(17) \qquad \psi(x) - \frac{t}{k}\varphi(x) = 0, \qquad \varphi(x) - \frac{t}{k}\psi(x) = 0,$$

offre toujours, dans l'hypothèse admise, non seulement $n - 1$ racines réelles dont chacune est comprise entre deux termes consécutifs de la suite

$$a_1, \quad a_2, \quad \ldots, \quad a_n,$$

mais aussi $n - 1$ racines réelles dont chacune est comprise entre deux termes consécutifs de la suite

$$b_1, \quad b_2, \quad \ldots, \quad b_n.$$

Donc cette même équation, qu'on peut réduire à une équation réelle et algébrique du degré n, ne saurait admettre une seule racine imaginaire. Donc ses n racines seront réelles pour une valeur réelle quelconque de t; et le théorème VIII, dans le cas que nous considérons, ne cessera pas d'être exact.

Corollaire I. — Les conditions énoncées dans le théorème VII étant remplies, si l'on représente par

$$b_1, \quad b_2, \quad b_3, \quad \ldots$$

la suite croissante des racines de l'équation $\varpi(x) = 0$, et par

$$a_1, \quad a_2, \quad a_3, \quad \ldots$$

la suite croissante des racines de l'équation $\frac{1}{\varpi(x)} = 0$, ces diverses racines, rangées par ordre de grandeur, fourniront l'une des suites (13), (14), (15), (16). Alors aussi l'équation (1) pourra être présentée sous la forme

$$(18) \qquad t = k\frac{(x - b_1)(x - b_2)(x - b_3)\ldots}{(x - a_1)(x - a_2)(x - a_3)\ldots},$$

k désignant une constante réelle.

Corollaire II. — Si, pour fixer les idées, on suppose $n = 1$, la valeur de

$$\frac{t}{k},$$

tirée de l'équation (18), prendra l'une des trois formes

$$x - b, \qquad \frac{x - b}{x - a}, \qquad \frac{1}{x - a}.$$

D'ailleurs, on reconnaîtra facilement : 1° que la différence

$$x - b$$

croît sans cesse, tandis que la variable x croît en passant de la limite $-\infty$ à la limite $+\infty$; 2° que le rapport

$$\frac{1}{x - a}$$

décroît sans cesse, tandis que la variable x croît en passant de la limite $-\infty$ à la limite a, ou de la limite a à la limite ∞; 3° que la fraction

$$\frac{x - b}{x - a} = 1 + \frac{a - b}{x - a}$$

est toujours décroissante avec le rapport $\frac{1}{x - a}$, quand on a

$$a > b,$$

et toujours croissante pour des valeurs croissantes de $x - a$, quand on a

$$a < b.$$

De ces observations, relatives au cas particulier où l'on suppose $n = 1$, on conclura sans peine que, dans cette supposition, et même plus généralement, pour des valeurs quelconques du nombre entier n, la valeur de t, fournie par l'équation (1) ou (18), sera toujours croissante ou toujours décroissante, tandis que la variable x croîtra en passant d'un terme quelconque de la série

$$(19) \qquad -\infty, \quad a_1, \quad a_2, \quad a_3, \quad \ldots, \quad \infty$$

au terme suivant. Pour établir, par exemple, cette dernière proposition, dans le cas où, le numérateur de la fraction rationnelle $\varpi(x)$ étant du degré n, le dénominateur est du degré $n - 1$, il suffit de présenter successivement les valeurs de t sous chacune des formes

$$t = (x - b_1)\frac{x - b_2}{x - a_1}\frac{x - b_3}{x - a_2}\cdots\frac{x - b_n}{x - a_{n-1}},$$

$$t = \frac{x - b_1}{x - a_1}\frac{x - b_2}{x - a_2}\cdots\frac{x - b_{n-1}}{x - a_{n-1}}(x - a_n).$$

En conséquence, on peut énoncer la proposition suivante :

Théorème IX. — *Les mêmes choses étant posées que dans le théorème VIII, si l'on représente par*

$$a_1, \quad a_2, \quad a_3, \quad \ldots$$

la suite croissante des racines finies de l'équation

$$\frac{1}{\varpi(x)} = 0,$$

la valeur de

$$t = \varpi(x)$$

sera toujours croissante ou toujours décroissante, tandis que la variable x croîtra en passant d'un terme de la série

$$(19) \qquad -\infty, \quad a_1, \quad a_2, \quad a_3, \quad \ldots, \quad \infty$$

au terme suivant.

Corollaire. — Pour bien comprendre le théorème IX, il est nécessaire de distinguer trois cas, suivant que les degrés des deux termes de la fraction rationnelle $\varpi(x)$ sont

$$n \text{ et } n-1, \qquad \text{ou} \qquad n \text{ et } n, \qquad \text{ou enfin} \qquad n-1 \text{ et } n.$$

Dans le premier cas, $-\infty$, ∞ seront racines de l'équation

$$\frac{1}{\varpi(x)} = 0,$$

et la valeur du rapport

$$\frac{t}{k}$$

croîtra sans cesse en passant de la limite $-\infty$ à la limite $+\infty$, tandis que la variable x croîtra en passant d'un terme de la série (19) au terme suivant.

Dans le troisième cas, $-\infty$ et $+\infty$ seront racines de l'équation

$$\varpi(x) = 0;$$

et, tandis que la variable x croîtra, en passant d'un terme a' de la série (19) au terme suivant a'', la valeur du rapport

$$\frac{t}{k}$$

décroîtra sans cesse, en passant de la limite zéro à la limite $-\infty$, si l'on a $a' = -\infty$; de la limite ∞ à la limite zéro, si l'on a $a'' = \infty$; et de la limite ∞ à la limite $-\infty$, si a' et a'' conservent des valeurs finies.

Enfin, dans le second cas, $-\infty$, ∞ seront racines de l'équation

$$\varpi(x) = k;$$

et, tandis que la variable x croîtra, en passant d'un terme quelconque a de la série (19) au terme suivant a'', la valeur du rapport

$$\frac{t}{k}$$

croîtra ou décroîtra sans cesse en passant généralement de la limite $-\infty$ à la limite $+\infty$, ou réciproquement, suivant que la plus petite racine b_1 de l'équation

$$\varpi(x) = 0$$

sera supérieure ou inférieure à la plus petite racine a_1 de l'équation

$$\frac{1}{\varpi(x)} = 0.$$

Ajoutons que la première des valeurs extrêmes du rapport

$$\frac{t}{k},$$

si l'on a $a' = -\infty$, ou la seconde, si l'on a $a' = \infty$, devra cesser d'être infinie, et se réduire simplement à l'unité.

Dans les applications que nous venons de faire des principes ci-dessus établis, nous avons supposé que la fonction $\varpi(x)$ était algébrique et même rationnelle. Pour montrer une application des mêmes principes à une fonction transcendante, il nous suffira de prendre

$$\varpi(x) = \operatorname{tang} \alpha x;$$

α désignant une constante réelle. Alors l'équation (1), réduite à

$$t = \operatorname{tang} \alpha x,$$

ou, ce qui revient au même, à

$$t = \frac{\sin \alpha x}{\cos \alpha x},$$

aura, comme l'on sait, toutes ses racines x réelles. Donc, en vertu du théorème VI, les racines des deux équations (6) et (7), ou

$$\sin \alpha x = 0, \qquad \cos \alpha x = 0,$$

étant réunies et rangées par ordre de grandeur, appartiendront alternativement à l'une et à l'autre équation, ce qui est effectivement exact.

NOTE

SUR

QUELQUES THÉORÈMES D'ALGÈBRE.

Un lemme dont M. Lamé a fait usage pour démontrer l'impossibilité de résoudre en nombres entiers l'équation

$$x^7 + y^7 + z^7 = 0$$

se déduit aisément d'un théorème d'algèbre que l'on peut énoncer comme il suit :

Théorème I. — *n désignant un nombre impair non divisible par 3, si la somme des $n^{\text{ièmes}}$ puissances de deux variables x, y est retranchée de la $n^{\text{ième}}$ puissance de leur somme*

$$x + y,$$

le reste

$$(x+y)^n - x^n - y^n \tag{1}$$

sera divisible algébriquement, non seulement par le produit

$$xy(x+y),$$

comme il est facile de le reconnaître, mais encore, pour des valeurs de n supérieures à 3, par le trinome

$$x^2 + xy + y^2 = \frac{x^3 - y^3}{x - y},$$

et même par le carré de ce trinome, lorsque n divisé par 3 donnera pour reste l'unité.

Démonstration. — Pour s'assurer que l'expression (1) est algébriquement divisible par chacun des facteurs

$$x,\quad y,\quad x+y,$$

il suffit de s'assurer qu'elle s'évanouit, quand on y pose

$$x=0 \quad \text{ou} \quad y=0 \quad \text{ou} \quad y=-x,$$

ce qui est effectivement exact. Pareillement, pour démontrer que l'expression (1) est divisible par le produit

$$x^2+xy+y^2,$$

il suffit de prouver qu'elle s'évanouit, quand on y pose

$$y=\alpha x \quad \text{ou} \quad y=\beta x,$$

α, β désignant les deux racines de l'équation

$$x^2+x+1=0,$$

ou, ce qui revient au même, les deux racines imaginaires de l'équation

$$x^3=1.$$

Or, comme ces deux racines vérifient non seulement la condition

$$1+\alpha+\beta=0,$$

mais encore, lorsque n n'est pas divisible par 3, la condition

$$1+\alpha^n+\beta^n=0,$$

la supposition

$$y=\alpha x \quad \text{ou} \quad y=\beta x$$

réduira l'expression (1) au produit de x^n par l'une des sommes

$$(1+\alpha)^n-1-\alpha^n=-1-\alpha^n+(-\beta)^n,$$
$$(1+\beta)^n-1-\beta^n=-1-\beta^n+(-\alpha)^n,$$

et par conséquent au produit de x^n par

$$-(1+\alpha^n+\beta^n)=0,$$

toutes les fois que n sera un nombre impair non divisible par 3. Donc

alors l'expression (1) sera divisible algébriquement par le trinome

$$x^2+xy+y^2;$$

il y a plus : elle sera divisible par le carré du même trinome, si, en supposant

$$y=\alpha x \quad \text{ou} \quad y=\beta x,$$

on fait évanouir non seulement l'expression (1), mais encore sa dérivée relative à y, savoir :

$$n[(x+y)^{n-1}-y^{n-1}],$$

c'est-à-dire, en d'autres termes, si les binomes

$$(1+\alpha)^{n-1}-\alpha^{n-1}=(-\beta)^{n-1}-\alpha^{n-1},$$
$$(1+\beta)^{n-1}-\beta^{n-1}=(-\alpha)^{n-1}-\beta^{n-1}$$

se réduisent à zéro. Or c'est précisément ce qui arrivera toutes les fois que le nombre impair n, étant divisé par 6, donnera l'unité pour reste.

Exemples. — Si l'on prend successivement pour n les divers nombres

$$3,\quad 5,\quad 7,\quad 11,\quad 13,\quad \ldots,$$

on trouvera

$$(x+y)^3-x^3-y^3=3xy(x+y),$$
$$(x+y)^5-x^5-y^5=5xy(x+y)(x^2+xy+y^2),$$
$$(x+y)^7-x^7-y^7=7xy(x+y)(x^2+xy+y^2)^2,$$
$$(x+y)^{11}-x^{11}-y^{11}$$
$$=11xy(x+y)(x^2+xy+y^2)\,[(x^2+xy+y^2)^3+\ x^2y^2(x+y)^2],$$
$$(x+y)^{13}-x^{13}-y^{13}$$
$$=13xy(x+y)(x^2+xy+y^2)^2[(x^2+xy+y^2)^3+2x^2y^2(x+y)^2],$$
....

Des démonstrations semblables à celle que nous avons donnée du théorème I s'appliquent à d'autres propositions d'algèbre. Ainsi, en particulier, de ce qu'une fonction entière d'une ou de plusieurs variables indépendantes ne peut s'évanouir avec l'une quelconque de ces variables, sans être divisible par chacune d'elles, on doit conclure que, si

$$f(x),\quad f(x,y),\quad f(x,y,z),\quad \ldots$$

représentent des fonctions entières des variables indépendantes

$$x, \quad y, \quad z, \quad \ldots,$$

les sommes

$$f(x) - f(-x);$$

$$f(x, y) - f(-x, y) - f(x, -y) + f(-x, -y);$$

$$\begin{aligned} &f(x, y, z) - f(-x, y, z) - f(x, -y, z) + f(-x, -y, z) \\ &- f(x, y, -z) + f(-x, y, -z) + f(x, -y, -z) - f(-x, -y, -z); \end{aligned}$$

. . . .

seront algébriquement divisibles, la première par x, la seconde par le produit xy, la troisième par le produit $xyz\ldots$. On pourra donc énoncer la proposition suivante :

Théorème II. — *Soient*

$$x, \quad y, \quad z, \quad \ldots$$

n variables indépendantes, et

$$f(x, y, z, \ldots)$$

une fonction entière de ces variables. Soit encore

$$s$$

la somme formée par l'addition de cette fonction et de celles que l'on peut en déduire à l'aide d'une ou de plusieurs opérations successives, dont chacune consiste à changer simultanément le signe de la fonction et le signe de l'une des variables. La somme s sera divisible algébriquement par le produit de toutes les variables

$$x, \quad y, \quad z, \quad \ldots.$$

Nota. — Les termes qui composeront la somme s seront tous compris sous la forme générale

$$\pm f(\pm x, \pm y, \pm z, \ldots),$$

le signe extérieur à la fonction f étant le produit de ceux qui affecteront intérieurement les diverses variables $x, y, z, \ldots$. Donc le nombre des termes de la somme s sera le nombre 2^n des valeurs différentes que

pourra prendre l'expression

$$f(\pm x, \pm y, \pm z, \ldots),$$

eu égard au double signe qui se trouve placé devant chaque variable, et qui peut être réduit arbitrairement soit au signe $+$, soit au signe $-$.

Corollaire I. — Le produit $xyz\ldots$ étant du degré n, si la fonction

$$f(x, y, z, \ldots)$$

est d'un degré inférieur à n, la somme s, algébriquement divisible par le produit $xyz\ldots$, vérifiera nécessairement la condition

$$s = 0.$$

Corollaire II. — Si la fonction

$$f(x, y, z, \ldots)$$

est précisément du degré n, alors non seulement la somme s sera divisible algébriquement par le produit

$$xyz\ldots,$$

mais de plus le quotient de s par ce produit sera une fonction entière du degré zéro, c'est-à-dire une quantité constante. On aura donc, en désignant cette constante par Θ,

$$s = \Theta xyz\ldots.$$

Si, d'ailleurs, on représente par

$$\mathcal{N} xyz\ldots$$

la partie proportionnelle au produit $xyz\ldots$ dans la fonction

$$f(x, y, z, \ldots),$$

cette partie sera évidemment commune à la fonction $f(x, y, z, \ldots)$ et à toutes celles qui s'en déduisent. Donc, puisque le nombre total de ces fonctions, y compris la première, est 2^n, on aura

$$\Theta = 2^n \mathcal{N}$$

et

$$\mathcal{S} = 2^n \mathfrak{N} xyz\ldots.$$

Si, pour fixer les idées, on prend

$$\mathrm{f}(x, y, z, \ldots) = (x + y + z + \ldots)^n,$$

on aura

$$\mathfrak{N} = 1.2.3\ldots n,$$

et par suite

$$\mathcal{S} = 2^n\, 1.2.3\ldots nxyz\ldots.$$

On peut donc énoncer la proposition suivante :

Théorème III. — *n étant le nombre des variables indépendantes $x, y, z, \ldots$, soit $\mathcal{S}$ la somme formée par l'addition de la fonction*

$$(x + y + z + \ldots)^n$$

et de toutes celles qui se trouvent comprises sous la forme

$$\pm(\pm x \pm y \pm z \pm \ldots)^n$$

lorsqu'on réduit le signe extérieur, c'est-à-dire situé hors des parenthèses, au produit des signes intérieurs. On aura

$$\mathcal{S} = 2^n.1.2.3\ldots nxyz\ldots.$$

Ainsi, par exemple, on trouvera successivement

$$x - (-x) = 2x,$$

$$(x+y)^2 - (-x+y)^2 - (x-y)^2 + (-x-y)^2 = 2^2.1.2xy,$$

$$\begin{aligned}&(x+y+z)^3 - (-x+y+z)^3 - (x-y+z)^3 + (-x-y+z)^3\\ &- (x+y-z)^3 + (-x+y-z)^3 + (x-y-z)^3 - (-x-y-z)^3\\ &= 2^3.1.2.3xyz, \ldots\end{aligned}$$

Le théorème III, ainsi que nous l'avons montré dans les *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences* pour l'année 1840 [1], conduit facilement à la détermination complète des sommes alternées des racines primitives des équations binomes.

[1] *Œuvres de Cauchy*, 1re série, t. V, p. 152; Extrait 82 des *Comptes rendus*.

Concevons maintenant que,

$$\mathrm{f}(x, y, z, \ldots)$$

étant une fonction entière dont le degré surpasse le nombre n des variables $x, y, z, \ldots$, on désigne par

$$\mathfrak{N} x^k y^l z^m \ldots$$

l'un quelconque des termes dont cette fonction se compose. Pour que la somme, désignée par $\mathcal{S}$ dans le théorème II, offre une partie correspondante à ce terme, il sera nécessaire et il suffira que ce même terme change de signe avec chacune des variables

$$x,\quad y,\quad z,\quad \ldots;$$

par conséquent, il sera nécessaire et il suffira que chacun des exposants

$$k,\quad l,\quad m,\quad \ldots$$

soit un nombre impair. Sous cette condition, le terme dont il s'agit se trouvera, dans la somme $\mathcal{S}$, multiplié par le nombre 2^n, tandis que, dans le cas contraire, il disparaîtra évidemment de la même somme. De cette simple observation on déduit immédiatement la proposition suivante :

Théorème IV. — *Soit*

$$\mathrm{f}(x, y, z, \ldots)$$

une fonction entière de n variables $x, y, z, \ldots$. Soit, de plus,

$$\mathrm{F}(x, y, z, \ldots)$$

la partie de cette fonction qui se compose de termes de la forme

$$\mathfrak{N} x^{2a+1} y^{2b+1} z^{2c+1} \ldots,$$

$a, b, c, \ldots$ étant des nombres entiers, c'est-à-dire de termes dont chacun renferme toutes les variables élevées à des puissances impaires. La somme désignée par $\mathcal{S}$ dans le théorème II sera liée à la fonction

$$\mathrm{F}(x, y, z, \ldots)$$

par la formule

$$S = 2^n\,\mathrm{F}(x, y, z, \ldots).$$

Corollaire I. — Puisque dans chaque terme de la fonction

$$\mathrm{F}(x, y, z, \ldots),$$

les exposants

$$2a+1, \quad 2b+1, \quad 2c+1, \quad \ldots$$

de toutes les variables sont des nombres impairs, la somme de ces exposants, savoir,

$$2(a+b+c+\ldots)+n,$$

sera toujours l'un des nombres

$$n, \quad n+2, \quad n+4, \quad \ldots.$$

Donc si $f(x, y, z, \ldots)$ ne renferme point de termes dont le degré se réduise à l'un de ces nombres, on aura

$$S = 0.$$

C'est ce qui arrivera, en particulier, si $f(x, y, z, \ldots)$ est une fonction homogène dont le degré se réduise à l'un des termes de la progression arithmétique

$$n+1, \quad n+3, \quad n+5, \quad \ldots;$$

par exemple, si l'on prend pour $f(x, y, z, \ldots)$ l'une des fonctions

$$(x+y+z+\ldots)^{n+1}, \qquad (x+y+z+\ldots)^{n+3}, \qquad \ldots$$

Corollaire II. — Si l'on prend successivement pour $f(x, y, z, \ldots)$ chacune des fonctions homogènes

$$(x+y+z+\ldots)^n, \quad (x+y+z+\ldots)^{n+2}, \quad (x+y+z+\ldots)^{n+4}, \quad \ldots,$$

on tirera du théorème IV, joint à la formule qui fournit le développement d'une puissance entière de la somme $x+y+z+\ldots$,

$$S = 2^n.1.2.3\ldots nxyz\ldots;$$

puis

$$S = 2^n.4.5\ldots(n+2)xyz\ldots(x^2+y^2+z^2+\ldots);$$

puis

$$S = 2^n.6.7\ldots(n+4)xyz\ldots\left[x^4+y^4+z^4+\ldots+\frac{4.5}{2.3}(x^2y^2+x^2z^2+\ldots+y^2z^2+\ldots)\right],$$

ou, ce qui revient au même,

$$S = 2^{n+1}.7\ldots(n+4)xyz\ldots[3(x^4+y^4+z^4\ldots)+10(x^2y^2+x^2z^2+\ldots+y^2z^2+\ldots)],$$

....

La première des formules qui précèdent reproduit le théorème III; la seconde donne

$$(x+y)^4-(-x+y)^4-(x-y)^4+(-x-y)^4 = 2^2.4xy(x^2+y^2),$$

$$\begin{aligned}&(x+y+z)^5-(-x+y+z)^5-(x-y+z)^5+(-x-y+z)^5\\ &-(x+y-z)^5+(-x+y-z)^5+(x-y-z)^5-(-x-y-z)^5\\ &\quad = 2^3.4.5xyz(x^2+y^2+z^2),\end{aligned}$$

....;

la troisième ou quatrième donne

$$\begin{aligned}&(x+y)^6-(-x+y)^6-(x-y)^6+(-x-y)^6\\ &\quad = 2^3xy[3(x^4+y^4)+10x^2y^2],\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&(x+y+z)^7-(-x+y+z)^7-(x-y+z)^7+(-x-y+z)^7\\ &-(x+y-z)^7+(-x+y-z)^7+(x-y-z)^7-(-x-y-z)^7\\ &\quad = 2^4.7xyz[3(x^4+y^4+z^4)+10(x^2y^2+x^2z^2+y^2z^2)],\end{aligned}$$

....

En terminant cette Note, nous remarquerons que, dans le cas où $f(x, y, z, \ldots)$ est une fonction homogène de $x, y, z, \ldots$, les différents termes dont se compose la somme S sont égaux deux à deux, eu égard à la formule

$$f(x, y, z, \ldots) = (-1)^n f(-x, -y, -z, \ldots).$$

Ainsi, par exemple, si l'on prend

$$f(x, y) = (x+y)^2,$$

on trouvera

$$(x+y)^2 = (-x-y)^2,$$

et par suite, en remplaçant x par $-x$,

$$(-x+y)^2 = (x-y)^2.$$

Si l'on prend au contraire

$$f(x, y, z) = (x + y + z)^3.$$

on trouvera

$$(x + y + z)^3 = -(-x - y - z)^3,$$

et par suite

$$\begin{aligned}(-x + y - z)^3 &= -(\ \ x - y + z)^3,\\ (\ \ x - y - z)^3 &= -(-x + y + z)^3,\\ (-x - y + z)^3 &= -(\ \ x + y - z)^3,\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\end{aligned}$$

Cela posé, on tirera des formules ci-dessus établies :

1° En prenant successivement pour $f(x, y, z, \ldots)$ les fonctions

$$(x + y)^2, \quad (x + y + z)^3 \quad \ldots,$$

$$(x + y)^2 - (x - y)^2 = 2.2xy,$$

$$\begin{aligned}&(x + y + z)^3 + (\ \ x - y - z)^3\\ &\quad + (-x + y - z)^3 + (-x - y + z)^3 = 2^2.1.2.3xyz,\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots ;\end{aligned}$$

2° En prenant pour $f(x, y, z)$, l'une des fonctions

$$(x + y)^4, \quad (x + y + z)^5, \quad \ldots,$$

$$(x + y)^4 - (x - y)^4 = 2.4xy(x^2 + y^2),$$

$$\begin{aligned}&(x + y + z)^5 + (x - y - z)^5\\ &\quad + (-x + y - z)^5 + (-x - y + z)^5 = 2^2.4.5xyz(x^2 + y^2 + z^2);\end{aligned}$$

3° En prenant pour $f(x, y, z)$ l'une des fonctions

$$(x + y)^6, \quad (x + y + z)^7, \quad \ldots.$$

$$(x + y)^6 - (x - y)^6 = 2^2xy[3(x^4 + y^4) + 10^2x^2y],$$

$$\begin{aligned}&(x + y + z)^7 + (x - y - z)^7 + (-x + y - z)^7 + (-x - y + z)^7\\ &\quad = 2^3.7xyz[3(x^4 + y^4 + z^4) + 10(x^2y^2 + x^2z^2 + y^2z^2)],\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\end{aligned}$$

La dernière des formules auxquelles nous venons de parvenir coïncide encore avec l'une de celles dont M. Lamé a fait usage dans son Mémoire sur l'impossibilité de résoudre en nombres entiers l'équation

$$x^7 + {}^7y + z^7 = 0.$$

NOTE

SUR

LES DIVERSES SUITES QUE L'ON PEUT FORMER AVEC DES TERMES DONNÉS.

Considérons une suite composée de divers termes

$$a, \ b, \ c, \ d, \ \ldots.$$

On pourra de cette première suite en déduire plusieurs autres, en intervertissant l'ordre dans lequel les termes se trouvent écrits. De plus, si l'on compare une quelconque des nouvelles suites à la première, on se trouvera naturellement conduit par cette comparaison à distribuer les divers termes

$$a, \ b, \ c, \ d, \ \ldots$$

en plusieurs groupes, en faisant entrer deux termes dans un même groupe toutes les fois qu'ils occuperont le même rang dans la première suite et dans la nouvelle, et en formant un groupe isolé de chaque terme qui n'aura pas changé de rang dans le passage d'une suite à l'autre. Pour indiquer un de ces groupes, nous renfermerons entre deux parenthèses les termes dont il se compose, en faisant succéder immédiatement l'un à l'autre deux termes qui occuperont le même rang dans la nouvelle suite et dans la première. Alors le premier terme de chaque groupe devra être censé succéder au dernier. On pourra d'ailleurs prendre pour premier terme l'un quelconque de ceux qui composent le groupe, ce qui permettra de représenter le même groupe par diverses notations équivalentes. Ainsi, par exemple, l'une quelconque des quatre notations

$$(a, b, c, d), \quad (b, c, d, a), \quad (c, d, a, b), \quad (d, a, b, c)$$

indiquera un groupe formé par les quatre termes

$$a, \quad b, \quad c, \quad d,$$

et il y aura effectivement lieu à former ce groupe, si, dans le passage de la première suite à la nouvelle, les quatre termes

$$a, \quad b, \quad c, \quad d$$

sont respectivement remplacés par les quatre termes

$$b, \quad c, \quad d, \quad a,$$

savoir : a par b, b par c, c par d et d par a. Il n'y aurait qu'une seule manière de représenter un groupe, si les lettres qui le composent étaient écrites, les unes après les autres, non plus sur une ligne droite, mais sur une circonférence de cercle divisée en parties égales, et disposées de telle sorte qu'en parcourant la circonférence dans un sens déterminé, on passât immédiatement d'une lettre quelconque à celle qui doit la remplacer. C'est par ce motif que dans le Tome X du *Journal de l'École Polytechnique* j'ai désigné sous le nom de *substitution circulaire* l'opération qui embrasse le système entier des remplacements indiqués par un même groupe.

Lorsqu'un groupe se composera d'une seule lettre, il indiquera simplement que cette lettre ne doit pas être déplacée, et qu'elle conserve son rang dans le passage d'une suite à l'autre. Lorsqu'un groupe se composera de deux lettres, il indiquera un *échange mutuel* opéré entre ces deux lettres. Il est d'ailleurs évident qu'à l'aide de plusieurs semblables échanges opérés entre les lettres

$$a, \quad b, \quad c, \quad d, \quad \ldots$$

prises deux à deux, on pourra faire passer successivement l'une quelconque de ces lettres à la première place, puis l'une quelconque des

lettres restantes à la seconde place, etc., et par conséquent transformer la première suite

$$a, \quad b, \quad c, \quad d, \quad \ldots$$

en l'une quelconque des autres. Donc un système quelconque de substitutions circulaires, représenté par un système de groupes donnés, peut toujours être remplacé par un système d'échanges successivement opérés, et dont chacun se rapporte à deux lettres seulement.

Si l'on nomme n le nombre des lettres données

$$a, \quad b, \quad c, \quad d, \quad \ldots,$$

le nombre des diverses suites, ou, ce qui revient au même, des divers arrangements que l'on pourra former avec ces lettres, se déduira aisément du nombre n, et sera, comme l'on sait, représenté par le produit

$$1.2.3\ldots n.$$

De plus, ces mêmes suites ou arrangements se partageront en deux classes bien distinctes, la comparaison de chaque nouvel arrangement au premier

$$a, \quad b, \quad c, \quad d, \quad \ldots$$

pouvant donner naissance à un nombre pair ou à un nombre impair de groupes. J'ajoute qu'*un seul échange, opéré entre deux lettres, fera passer une suite ou un arrangement d'une classe à l'autre, en faisant croître ou diminuer le nombre des groupes d'une unité*. C'est en effet ce que l'on démontrera sans peine de la manière suivante.

Concevons d'abord que les deux lettres échangées entre elles appartiennent à deux groupes différents. On pourra supposer chacune d'elles écrite la première dans le groupe qui la renferme. Cela posé, soient, par exemple,

$$(a, b, c, \ldots, h, k), \quad (l, m, n, \ldots, r, s)$$

les deux groupes dont il s'agit. Ces groupes indiqueront que, dans le passage de la première suite à la nouvelle, les lettres

$$a, \quad b, \quad c, \quad \ldots, \quad h, \quad k \quad \text{et} \quad l, \quad m, \quad n, \quad \ldots, \quad r, \quad s$$

se trouvent respectivement remplacées par les lettres

$$b,\ c,\ \ldots,\ k,\ a \quad \text{et} \quad m,\ n,\ \ldots,\ s,\ l.$$

Donc, après un échange opéré dans la seconde suite entre les premières lettres des deux groupes, c'est-à-dire entre les lettres a et l, on devra, en passant de la première suite à la seconde, remplacer les lettres

$$a,\ b,\ c,\ \ldots,\ h,\ k,\ l,\ m,\ n,\ \ldots,\ r,\ s$$

par

$$b,\ c,\ \ldots,\ \ldots,\ k,\ l,\ m,\ n,\ \ldots,\ \ldots,\ s,\ a.$$

Donc, après cet échange, les deux groupes donnés

$$(a, b, c, \ldots, h, k), \quad (l, m, n, \ldots, r, s)$$

se trouveront réunis, et réduits à un seul groupe

$$(a, b, c, \ldots, h, k, l, m, n, \ldots, r, s).$$

Réciproquement, si ce dernier groupe était l'un des groupes donnés, résultants de la comparaison de la nouvelle suite à la première, un seul échange opéré entre deux lettres comprises dans ce groupe, par exemple entre les deux lettres a et l, diviserait ce groupe en deux autres

$$(a, b, c, \ldots, h, k) \quad \text{et} \quad (l, m, n, \ldots, r, s).$$

Donc, dans tous les cas, un seul échange opéré entre deux lettres, dans l'une quelconque des suites que l'on considère, fera passer cette suite d'une classe à l'autre, en faisant croître ou diminuer le nombre des groupes d'une unité.

Puisqu'un seul échange transformera les suites qui appartiennent à une classe en celles qui appartiennent à l'autre, il est clair que chaque classe offrira précisément la moitié du nombre total des suites ou des arrangements divers. Donc le nombre des arrangements qui appartiendront à chaque classe sera représenté par le produit

$$3.4\ldots n.$$

Observons encore que, n étant le nombre des lettres, la comparaison

du premier arrangement

$$a,\ b,\ c,\ d,\ \ldots$$

à lui-même fournira n groupes isolés. Donc la classe qui comprendra ce premier arrangement devra correspondre à un nombre pair ou à un nombre impair de groupes, suivant que le nombre n sera lui-même pair ou impair.

Observons enfin qu'après plusieurs échanges opérés chacun entre deux lettres, le nombre total des groupes se trouvera évidemment augmenté ou diminué, soit d'un nombre pair, soit d'un nombre impair, suivant que le nombre des échanges sera lui-même pair ou impair. Donc *des échanges par lesquels deux arrangements pourront être déduits l'un de l'autre seront toujours nécessairement en nombre pair, si ces arrangements appartiennent à la même classe, et en nombre impair dans le cas contraire.*

Concevons maintenant qu'une lettre placée avant une autre lettre dans le premier arrangement se trouve au contraire placée après elle dans un second. Nous dirons alors que ce second arrangement, comparé au premier, offre une inversion relative au système des deux lettres dont il s'agit. D'ailleurs, le nombre des inversions que présentera le second arrangement ne pourra évidemment surpasser le nombre des combinaisons que l'on peut former avec n lettres prises deux à deux, c'est-à-dire le rapport

$$\frac{n(n-1)}{2}.$$

J'ajoute que *le second arrangement appartiendra ou non à la même classe que le premier, suivant que le nombre des inversions sera pair ou impair.* C'est, en effet, ce que l'on démontre aisément comme il suit.

Supposons que de chaque lettre prise dans le premier ou dans le second arrangement on retranche successivement chacune des suivantes. Le produit des différences ainsi formées se réduira, pour le premier arrangement, à l'expression

$$(1)\qquad P = (a-b)(a-c)\ldots(b-c)\ldots.$$

De plus, le nombre des facteurs du même produit qui changeront de signe, quand on passera du premier arrangement au second, sera précisément le nombre des inversions qu'offrira ce second arrangement, et suivant que ce nombre sera pair ou impair, le nouveau produit sera égal, soit à $+P$, soit à $-P$. Donc, pour établir la proposition énoncée, il suffira de prouver que le nouveau produit se réduit à $+P$ ou à $-P$, suivant que le second arrangement appartient ou non à la même classe que le premier, ou, ce qui revient au même, suivant que le second arrangement peut ou ne peut pas se déduire du premier par un nombre pair d'échanges opérés chacun entre deux lettres. Or cette dernière proposition est évidente. Car si deux lettres, par exemple a et b, sont échangées entre elles, dans l'un quelconque des produits formés comme il a été dit ci-dessus, le facteur qui renfermera ces deux lettres, c'est-à-dire la différence

$$a-b \quad \text{ou} \quad b-a,$$

changera de signe ; mais les deux facteurs qui renfermeront les deux lettres a et b avec une troisième c, étant multipliés l'un par l'autre, fourniront un produit partiel qui pourra être réduit à l'une des formes

$$(a-c)(b-c), \qquad -(a-c)(b-c),$$

et qui dans l'un ou l'autre cas conservera le même signe, après l'échange mutuel de deux lettres a et b.

Le théorème qui détermine la classe à laquelle appartient un arrangement, à l'aide du nombre pair ou impair des inversions, a été donné, pour la première fois, par Kramer, et démontré par M. Laplace. J'ai donné les autres théorèmes ci-dessus énoncés dans le Tome X du *Journal de l'École Polytechnique* et dans l'*Analyse algébrique*. Si je les ai rappelés ici, c'est pour rendre plus facile la lecture du Mémoire suivant.

MÉMOIRE

SUR LES FONCTIONS ALTERNÉES

ET

SUR LES SOMMES ALTERNÉES.

Concevons que, dans la suite

$$x,\quad y,\quad z,\quad \ldots,$$

on retranche successivement de chaque terme tous ceux qui le suivent, et nommons P le produit des différences ainsi formées, en sorte qu'on ait

$$(1)\qquad P = (x-y)(x-z)\ldots(y-z)\ldots.$$

Si, dans le produit P, on échange deux lettres entre elles, il changera évidemment de signe, en conservant, au signe près, la même valeur. (*Voir* la Note précédente.)

Une *fonction alternée* de plusieurs variables $x, y, z, \ldots$ est celle qui, comme le produit P, change de signe, en conservant, au signe près, la même valeur, lorsqu'on échange deux de ces variables entre elles. Il suit de cette définition même qu'une fonction alternée de $x, y, z, \ldots$ s'évanouira, si l'on pose

$$x=y \quad \text{ou} \quad x=z, \quad \ldots \quad \text{ou} \quad y=z, \quad \ldots.$$

Donc, si cette fonction est entière, elle sera divisible algébriquement par chacune des différences

$$x-y,\quad x-z,\quad \ldots,\quad y-z,\quad \ldots,$$

entre les variables $x, y, z, \ldots$, combinées deux à deux. Elle sera donc alors algébriquement divisible par le produit P de toutes ces différences. (Voir l'*Analyse algébrique*, Chap. III, § II) (¹).

Une fonction rationnelle qui a pour dénominateur une fonction symétrique et pour numérateur une fonction alternée des variables x, y, z, ... est évidemment elle-même une fonction alternée de ces variables. Réciproquement, si une fonction alternée de x, y, z se trouve représentée par une fraction rationnelle dont le dénominateur se réduise à une fonction symétrique, le numérateur de la même fraction rationnelle sera nécessairement une autre fonction alternée de x, y, z, ...

Soit maintenant

$$\mathrm{f}(x, y, z, \ldots)$$

une fonction quelconque des variables $x, y, z, \ldots$; et supposons que l'on ajoute à cette fonction celles que l'on peut en déduire à l'aide d'un ou de plusieurs échanges opérés entre les variables $x, y, z, \ldots$, chacune des nouvelles fonctions étant prise avec le signe $+$ ou avec le signe $-$, suivant que le nombre des échanges est pair ou impair. La somme s ainsi obtenue aura évidemment la propriété de changer de signe, en conservant, au signe près, la même valeur, lorsqu'on échangera deux variables entre elles. Cette somme sera donc une fonction alternée des variables $x, y, z, \ldots$. Nous la nommerons, pour cette raison, *somme alternée;* et en adoptant une notation dont nous avons souvent fait usage, nous la désignerons comme il suit :

$$(2) \qquad s = \mathrm{S}[\pm \mathrm{f}(x, y, z, \ldots)].$$

Si la fonction $\mathrm{f}(x, y, z, \ldots)$ est entière, on pourra en dire autant de la somme alternée s. Donc alors, en vertu de ce qu'on a dit plus haut, le second membre de l'équation (2) sera divisible algébriquement par le produit P.

Si la fonction $\mathrm{f}(x, y, z, \ldots)$ est rationnelle, on pourra en dire autant

(¹) *Œuvres de Cauchy*, 2ᵉ série, t. III, p. 73.

de la somme alternée s qui sera de la forme

$$s = \frac{\mathrm{U}}{\mathrm{V}},$$

U, V désignant deux fonctions entières de $x, y, z, \ldots$. Il y a plus : si l'on prend pour V, comme on peut le faire, le produit des dénominateurs des fractions rationnelles dont la somme alternée s se composera dans cette hypothèse, ou plus généralement une fonction symétrique des variables $x, y, z, \ldots$ divisible par tous ces dénominateurs, U sera nécessairement une fonction alternée des mêmes variables. Donc alors U sera divisible algébriquement par le produit P, en sorte qu'on aura

$$(3) \qquad \mathrm{U} = \mathrm{PW},$$

et

$$(4) \qquad s = \mathrm{P}\frac{\mathrm{W}}{\mathrm{V}},$$

W désignant, ainsi que V, une fonction entière et symétrique de x, y, z, ... Donc la somme alternée s pourra être décomposée en deux facteurs, dont l'un sera le produit P, l'autre facteur $\frac{\mathrm{W}}{\mathrm{V}}$ étant une fonction rationnelle et symétrique de $x, y, z, \ldots$.

Pour montrer une application de la formule (4), supposons

$$(5) \qquad \mathrm{f}(x, y, z, \ldots) = \frac{1}{(x-a)(y-b)(z-c)\ldots};$$

on pourra prendre évidemment

$$(6) \quad \mathrm{V} = (x-a)(x-b)(x-c)\ldots(y-a)(y-b)(y-c)\ldots(z-a)(z-b)(z-c)\ldots,$$

et alors U sera une fonction entière de

$$x, \ y, \ z, \ \ldots, \ a, \ b, \ c, \ \ldots,$$

algébriquement divisible, non seulement par le produit P, mais encore par le suivant

$$(7) \qquad \mathfrak{P} = (a-b)(a-c)\ldots(b-c)\ldots.$$

On aura donc

$$(8) \qquad \mathrm{U} = \mathrm{k}\,\mathrm{P}\mathfrak{P},$$

et

$$(9) \qquad \mathrm{S}\left[\pm \frac{1}{(x-a)(y-b)(z-c)\ldots}\right] = \mathrm{k}\,\frac{\mathrm{P}\mathfrak{P}}{\mathrm{V}},$$

k désignant ou une constante ou une fonction entière de $x, y, z, \ldots, a, b, c, \ldots$. D'ailleurs, si l'on nomme n le nombre des variables $x, y, z, \ldots$, chacun des produits de la forme

$$(x-a)(x-b)(x-c)\ldots,$$

considéré comme fonction de

$$x, \quad y, \quad z, \quad \ldots, \quad a, \quad b, \quad c, \quad \ldots,$$

sera du degré n, d'où il suit que, dans l'hypothèse admise, n sera la différence entre les degrés des fonctions V et U. Donc, V étant du degré n^2, U sera du degré

$$n^2 - n.$$

D'autre part, la moitié de la différence n^2-n ou le nombre

$$\frac{n(n-1)}{2}$$

représente à la fois le degré de P considéré comme fonction de $x, y, z, \ldots$, et de $\mathfrak{P}$ considéré comme fonction de $a, b, c, \ldots$. Donc le degré de la fonction

$$\mathrm{k} = \frac{\mathrm{U}}{\mathrm{P}\mathfrak{P}}$$

se réduira simplement à zéro, et cette fonction à une constante. Ajoutons que, pour déterminer la constante k, il suffira de poser

$$x=a, \qquad y=b, \qquad z=c, \qquad \ldots$$

dans l'équation (9) réduite à la forme

$$\mathrm{k}\,\mathrm{P}\mathfrak{P} = \mathrm{S}\left[\pm \frac{\mathrm{V}}{(x-a)(y-b)(z-c)\ldots}\right].$$

En effet, on trouvera ainsi

$$\mathrm{k}\,\mathfrak{P}^2 = \frac{\mathrm{V}}{(x-a)(y-b)(z-c)\ldots},$$

ou, ce qui revient au même,

$$\mathrm{k}\,\mathfrak{P}^2 = (a-b)(a-c)\ldots(b-a)(b-c)\ldots(c-a)(c-b)\ldots = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\mathfrak{P}^2,$$

et par conséquent

$$\mathrm{k} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}.$$

Donc la formule (9) donnera

$$(10) \qquad \mathrm{S}\left[\pm \frac{1}{(x-a)(y-b)(z-c)\ldots}\right] = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\frac{\mathrm{P}\mathfrak{P}}{\mathrm{V}},$$

les valeurs de

$$\mathrm{P}, \quad \mathfrak{P}, \quad \mathrm{V}$$

étant toujours celles que fournissent les équations (1), (7) et (6).

Si dans la formule (10) on pose successivement

$$n=1, \qquad n=2, \qquad \ldots,$$

on obtiendra les suivantes :

$$\frac{1}{(x-a)(y-b)} - \frac{1}{(x-b)(y-a)} = -\frac{(a-b)(x-y)}{(x-a)(x-b)(y-a)(y-b)},$$

$$\begin{aligned}&\frac{1}{(x-a)(y-b)(z-c)} + \frac{1}{(x-b)(y-c)(z-a)} + \frac{1}{(x-c)(y-a)(z-b)}\\ &- \frac{1}{(x-a)(y-c)(z-b)} - \frac{1}{(x-b)(y-a)(z-c)} - \frac{1}{(x-c)(y-b)(z-a)}\\ &= -\frac{(a-b)(a-c)(b-c)(x-y)(x-z)(y-z)}{(x-a)(x-b)(x-c)(y-a)(y-b)(y-c)(z-a)(z-b)(z-c)},\end{aligned}$$

....

Jusqu'à présent nous avons supposé que les diverses variables qui concouraient à la formation d'une fonction alternée ou d'une somme alternée étaient représentées par des lettres diverses. Quelquefois on représente ces mêmes variables par une seule lettre affectée de divers indices

$$0, \quad 1, \quad 2, \quad 3, \quad \ldots, \quad n,$$

et l'on peut dire alors que la fonction ou la somme dont il s'agit est *alternée par rapport à ces indices*. Ainsi, par exemple, le produit

$$(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_1-x_2)$$

est une fonction alternée par rapport aux variables

$$x_0, \quad x_1, \quad x_2,$$

ou, ce qui revient au même, par rapport aux indices

$$0, \quad 1, \quad 2.$$

Dans ce qui précède, nous avons seulement considéré les fonctions alternées ou les sommes alternées qui changent de signe, en conservant, au signe près, la même valeur, quand on échange entre eux deux termes quelconques d'une suite donnée. On pourrait obtenir aussi des fonctions et des sommes qui seraient *alternées par rapport à diverses suites*, c'est-à-dire des fonctions et des sommes qui auraient la propriété de changer de signe, en conservant, au signe près, la même valeur, quand on échangerait entre eux les termes correspondants de ces mêmes suites. Considérons, par exemple, m suites différentes, composées chacune de n termes, qui se trouvent représentés, pour la première suite, par

$$x_0, \quad x_1, \quad \ldots, \quad x_{n-1};$$

pour la seconde suite, par

$$y_0, \quad y_1, \quad \ldots, \quad y_{n-1};$$

pour la troisième suite, par

$$z_0, \quad z_1, \quad \ldots, \quad z_{n-1},$$

etc.; et soit

$$\mathfrak{f}(x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}; y_0, y_1, \ldots, y_{n-1}; z_0, z_1, \ldots, z_{n-1}, \ldots)$$

une fonction donnée de ces divers termes. Si à cette fonction l'on ajoute toutes celles que l'on peut en déduire, à l'aide d'un ou de plusieurs échanges opérés entre les lettres

$$x, \quad y, \quad z, \quad \ldots,$$

prises deux à deux, chacune des nouvelles fonctions étant prise avec le signe $+$ ou avec le signe $-$, suivant qu'elle se déduit de la première par un nombre pair ou par un nombre impair d'échanges, le résultat de cette addition sera une somme alternée par rapport aux suites dont il s'agit. Nous désignerons toujours cette somme s à l'aide de la même notation dont nous avons déjà précédemment fait usage, et nous écrirons en conséquence

$$s = \mathrm{S}[\pm \mathfrak{f}(x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}; y_0, y_1, \ldots, y_{n-1}; z_0, z_1, \ldots, z_{n-1}; \ldots)].$$

Si l'on place les uns au-dessous des autres, dans diverses colonnes verticales, les termes correspondants des diverses suites, on obtiendra le tableau ci-après :

$$(11) \qquad \left\{ \begin{array}{llll} x_0, & x_1, & \ldots, & x_{n-1}, \\ y_0, & y_1, & \ldots, & y_{n-1}, \\ z_0, & z_1, & \ldots, & z_{n-1}, \\ \ldots, & \ldots, & \ldots, & \ldots\ldots \end{array} \right.$$

Concevons à présent qu'une fonction entière s des variables comprises dans le tableau (11) soit alternée par rapport aux suites formées avec ces variables, et que l'on développe cette fonction suivant les puissances ascendantes et entières des variables dont il s'agit. Un terme quelconque sera de la forme

$$(12) \qquad k x_0^a x_1^b \ldots y_0^f y_1^g \ldots z_0^i z_1^j \ldots,$$

$a, b, \ldots, f, g, \ldots, i, j, \ldots$ désignant des nombres entiers, et k un coefficient constant. D'ailleurs la fonction s, devant changer de signe, en vertu d'un échange opéré entre deux lettres, par exemple entre x et y, le développement de s ne pourra renfermer le produit (12) sans renfermer encore le produit résultant de cet échange, pris avec un signe contraire ; et ce second produit détruira le premier, si l'on a

$$a = f, \qquad b = g, \qquad \ldots.$$

On peut donc énoncer la proposition suivante :

Théorème I. — *Si une fonction entière d'un système de variables* *comprises dans plusieurs suites est alternée par rapport à ces mêmes suites, le développement de la fonction, suivant les puissances entières des variables, ne pourra renfermer aucun produit dans lequel les termes correspondants de deux suites données se trouvent toujours élevés aux mêmes puissances.*

Au lieu de représenter les termes de plusieurs suites par plusieurs lettres affectées d'un seul indice, on pourrait les représenter par une seule lettre affectée de deux espèces d'indices, le premier indice étant variable dans le passage d'une suite à une autre. Ainsi, par exemple, au système des termes compris dans le tableau (11), on pourrait substituer le système des termes compris dans le tableau suivant :

$$(13) \qquad \left\{\begin{array}{llll} x_{0,0}, & x_{0,1}, & \ldots, & x_{0,n-1}, \\ x_{1,0}, & x_{1,1}, & \ldots, & x_{1,n-1}, \\ x_{2,0}, & x_{2,1}, & \ldots, & x_{2,n-1}, \\ \ldots, & \ldots, & \ldots, & \ldots\ldots \end{array}\right.$$

Il est maintenant facile d'établir la proposition que nous allons énoncer.

Théorème II. — *Considérons deux systèmes de termes, savoir :*

$$(14) \qquad \left\{\begin{array}{llll} x_0, & x_1, & x_2, & \ldots, \\ y_0, & y_1, & y_2, & \ldots, \\ z_0, & z_1, & z_2, & \ldots, \\ \ldots, & \ldots, & \ldots & \ldots \end{array}\right.$$

$$(15) \qquad \left\{\begin{array}{llll} \mathrm{X}_0, & \mathrm{X}_1, & \mathrm{X}_2, & \ldots, \\ \mathrm{Y}_0, & \mathrm{Y}_1, & \mathrm{Y}_2, & \ldots, \\ \mathrm{Z}_0, & \mathrm{Z}_1, & \mathrm{Z}_2, & \ldots, \\ \ldots, & \ldots, & \ldots, & \ldots \end{array}\right.$$

les termes de chaque système étant répartis entre plusieurs suites, comme on le voit dans les tableaux (14) *et* (15) ; *et nommons s une fonction entière de tous ces termes qui soit alternée, non seulement par rapport aux suites comprises dans le tableau* (14), *mais aussi par rapport aux suites comprises dans le tableau* (15). *La fonction s sera équivalente à*

une somme de produits de la forme

$$\mathcal{K}\mathrm{K},$$

$\mathcal{K}$ désignant une fonction alternée par rapport aux suites comprises dans le tableau (14), *et* K *une fonction alternée par rapport aux suites comprises dans le tableau* (15).

Démonstration. — On prouve aisément que, si deux fonctions entières de plusieurs variables $x, y, z, \ldots$ sont égales entre elles, pour toutes les valeurs possibles, ou même seulement pour toutes les valeurs entières attribuées à ces variables, les coefficients des puissances semblables de $x, y, z, \ldots$ et des produits des puissances semblables seront égaux dans les termes correspondants des deux fonctions développées suivant les puissances entières de $x, y, z, \ldots$. (Voir l'*Analyse algébrique*, Chap. IV, p. 97.) Par suite, si deux fonctions entières de plusieurs variables $x, y, z, \ldots$ sont égales entre elles, au signe près, mais affectées de signes contraires pour toutes les valeurs possibles, ou seulement pour toutes les valeurs entières attribuées à ces variables, les coefficients des puissances semblables de $x, y, z, \ldots$ et des produits des puissances semblables seront égaux, au signe près, mais affectés de signes contraires, dans les termes correspondants des deux fonctions développées suivant les puissances entières de $x, y, z, \ldots$. Cela posé, concevons que la fonction s, étant alternée par rapport aux suites comprises dans le tableau (14), et par rapport aux suites comprises dans le tableau (15), soit développée suivant les puissances ascendantes des variables comprises dans le tableau (14). Chaque terme du développement sera de la forme

$$\mathrm{K}\, x_0^a x_1^b \ldots y_0^f y_1^g \ldots z_0^i z_1^j \ldots,$$

$a, b, \ldots, f, g, \ldots, i, j, \ldots$ désignant des nombres entiers, et le coefficient K une fonction des seules variables comprises dans le Tableau (15). D'ailleurs, en vertu de ce qu'on vient de dire, puisque la fonction s changera de signe, en conservant, au signe près, la même valeur, quand on échangera entre elles deux des suites comprises dans le tableau (15), ou, ce qui revient au même, deux des lettres x, y, z, ..., le coefficient K jouira de la même propriété. Ce coefficient sera donc une fonction alternée par rapport aux suites comprises dans le tableau (15). De plus, la fonction s, étant alternée par rapport aux suites comprises dans le tableau (14), devra renfermer, avec le produit

$$\mathrm{K}\,x_0^a x_1^b \dots y_0^f y_1^g \dots z_0^l z_1^l \dots,$$

tous ceux qu'on peut déduire à l'aide d'un ou de plusieurs échanges opérés entre les suites que renferme le tableau (14) ou, ce qui revient au même, entre les lettres $x, y, z, \dots$, chacun des nouveaux produits étant pris avec le signe $+$ ou le signe $-$, suivant qu'il se déduira du premier par un nombre pair ou par un nombre impair d'échanges. Enfin les nouveaux produits, étant ajoutés au premier, fourniront une somme de la forme

$$\mathrm{K\,S}[\pm x_0^a x_1^b \dots y_0^f y_1^g \dots z_0^l z_1^l \dots],$$

par conséquent de la forme

$$\mathrm{K}\,K,$$

la valeur de K étant

$$(16)\qquad K = \mathrm{S}[\pm x_0^a x_1^b \dots y_0^f y_1^g \dots z_0^l z_1^l \dots].$$

Or cette dernière valeur de K sera évidemment une fonction alternée par rapport aux suites comprises dans le tableau (14).

Les propriétés des fonctions alternées forment l'objet spécial, non seulement d'un paragraphe du Chapitre III de mon *Analyse algébrique*, imprimée en 1821, mais aussi d'un Mémoire publié par M. Jacobi dans le Tome XXI du *Journal de M. Crelle* (4e Cahier, 1841).

MÉMOIRE

SUR

LES SOMMES ALTERNÉES,

CONNUES SOUS LE NOM DE RÉSULTANTES.

I. — *Propriétés diverses des résultantes.*

Soit

$$\mathrm{f}(x, y, z, \dots)$$

une fonction quelconque de n variables

$$x,\quad y,\quad z,\quad \dots,$$

et ajoutons à cette fonction toutes celles qu'on peut en déduire par la transposition des variables, ou, ce qui revient au même, par un ou plusieurs échanges opérés chacun entre deux variables seulement, chaque nouvelle fonction étant prise avec le signe $+$ ou avec le signe $-$, suivant qu'elle se déduit de la première à l'aide d'un nombre pair ou impair de semblables échanges. La somme s ainsi obtenue sera la *somme alternée* que nous représentons par la notation

$$\mathrm{S}[\pm \mathrm{f}(x, y, z, \dots)].$$

On trouvera, par exemple, en supposant $n = 2$,

$$s = \mathrm{f}(x, y) - \mathrm{f}(y, x);$$

en supposant $n = 3$,

$$s = \mathrm{f}(x, y, z) - \mathrm{f}(x, z, y) + \mathrm{f}(y, z, x) - \mathrm{f}(y, x, z) + \mathrm{f}(z, x, y) - \mathrm{f}(z, y, x).$$

Concevons maintenant que la fonction

$$\mathrm{f}(x, y, z, \dots)$$

se réduise au produit de divers facteurs dont chacun renferme une seule des variables

$$x,\quad y,\quad z,\quad \ldots,$$

en sorte qu'on ait, par exemple,

$$f(x, y, z, \ldots) = \varphi(x)\chi(y)\psi(z)\ldots.$$

Alors, pour obtenir la somme alternée

$$(1)\qquad s = S[\pm\varphi(x)\chi(y)\psi(z)\ldots],$$

il suffira de construire le tableau

$$(2)\qquad \begin{cases} \varphi(x), & \chi(x), & \psi(x), & \ldots, \\ \varphi(y), & \chi(y), & \psi(y), & \ldots, \\ \varphi(z), & \chi(z), & \psi(z), & \ldots, \\ \ldots\ldots, & \ldots\ldots, & \ldots\ldots, & \ldots, \end{cases}$$

composé d'autant de termes qu'il y a d'unités dans le carré de n, puis de chercher tous les produits qu'on peut former en multipliant l'un par l'autre n termes de ce tableau, dont un seul appartienne à chaque colonne verticale et un seul à chaque ligne horizontale, puis enfin d'ajouter tous ces produits, pris tantôt avec le signe $+$, tantôt avec le signe $-$, suivant qu'ils se déduiront, par un nombre pair ou impair d'échanges, du produit

$$\varphi(x)\chi(y)\psi(z)\ldots$$

formé avec les termes qui occupent l'une des diagonales du tableau. Les sommes de cette espèce sont celles que M. Laplace a désignées sous le nom de *résultantes*. Si, pour fixer les idées, on pose successivement

$$n = 2,\qquad n = 3,\qquad \ldots,$$

la résultante s des termes que renferme le tableau (2) deviendra, dans le premier cas,

$$(3)\qquad s = \varphi(x)\chi(y) - \varphi(y)\chi(x);$$

dans le second cas,

$$(4)\quad \begin{aligned} s = {} & \varphi(x)\chi(y)\psi(z) + \varphi(y)\chi(z)\psi(x) + \varphi(z)\chi(x)\psi(y) \\ & - \varphi(x)\chi(z)\psi(y) - \varphi(y)\chi(x)\psi(z) - \varphi(z)\chi(y)\psi(x), \qquad \ldots. \end{aligned}$$

Les formes des fonctions désignées par

$$\varphi(x),\quad \chi(x),\quad \psi(x),\quad \ldots$$

étant arbitraires, aussi bien que les variables

$$x,\quad y,\quad z,\quad \ldots,$$

permettent aux divers termes qui composent le tableau (2) d'acquérir des valeurs quelconques. Substituons en conséquence à ces divers termes des variables quelconques, et représentons ces variables à l'aide de lettres diverses

$$x,\quad y,\quad z,\quad \ldots,\quad t$$

affectées d'indices différents

$$0,\quad 1,\quad 2,\quad \ldots,\quad n-1$$

dans les diverses lignes verticales. Alors, au lieu du tableau (2), on obtiendra le suivant :

$$(5)\qquad \begin{cases} x_0, & x_1, & x_2, & \ldots, & x_{n-1}, \\ y_0, & y_1, & y_2, & \ldots, & y_{n-1}, \\ z_0, & z_1, & z_2, & \ldots, & z_{n-1}, \\ \ldots, & \ldots, & \ldots, & \ldots, & \ldots, \\ t_0, & t_1, & t_2, & \ldots, & t_{n-1}; \end{cases}$$

et la résultante s des termes compris dans ce dernier tableau sera

$$(6)\qquad s = S[\pm x_0 y_1 z_2 \ldots t_{n-1}].$$

Pour obtenir cette résultante s, on devra construire non seulement le produit

$$x_0 y_1 z_2 \ldots t_{n-1},$$

qui renferme tous les termes situés sur une diagonale du tableau dont il s'agit, mais encore tous les produits que l'on peut former en multipliant l'un par l'autre n termes, dont un seul appartienne à chaque ligne verticale du tableau, et un seul à chaque ligne horizontale; puis ajouter entre eux tous ces produits, pris les uns avec le signe $+$, les autres avec le signe $-$, suivant qu'ils se déduiront du produit

$$x_0 y_1 z_2 \ldots t_{n-1}$$

à l'aide d'un nombre pair ou impair d'échanges opérés entre deux des lettres

$$x, \quad y, \quad z, \quad \ldots, \quad t.$$

Cela posé, il est clair qu'un seul échange opéré entre deux lettres, x et y par exemple, transformera, dans la résultante s, les termes qui étaient affectés du signe $+$ en ceux qui étaient affectés du signe $-$, et réciproquement. Donc, après un semblable échange, la résultante s se transformera en une autre résultante égale à $-s$. Au reste, la même conclusion peut immédiatement se déduire de cette seule considération que la résultante s est une fonction alternée par rapport aux diverses suites horizontales du tableau (5). On déduit aussi de cette considération le théorème que nous allons énoncer :

Théorème I. — *Si, dans la résultante s formée avec les diverses variables que renferme le tableau* (5), *on remplace une lettre x par une autre lettre y, sans remplacer en même temps la lettre y par la lettre x, on obtiendra, au lieu de cette résultante s, une somme précisément égale à zéro.*

Démonstration. — En effet, la somme obtenue aura la propriété de ne pas changer de valeur en changeant de signe, et cette propriété ne convient qu'à une somme identiquement nulle.

Les diverses variables

$$x_0, x_1, \ldots, x_{n-1};\ y_0, y_1, \ldots, y_{n-1};\ z_0, z_1, \ldots, z_{n-1};\ \ldots;\ t_0, t_1, \ldots, t_{n-1}$$

étant représentées, dans chaque ligne horizontale du tableau (5), à l'aide d'une seule lettre affectée d'indices divers, et dans chaque

colonne verticale du même tableau, à l'aide de lettres diverses affectées d'un même indice, il est clair que, pour opérer un échange mutuel entre deux lettres du produit

$$x_0 y_1 z_2 \ldots t_{n-1},$$

ou entre deux lettres des produits semblables qui composeront la résultante s, il suffira d'opérer un échange mutuel entre les indices dont ces deux lettres seront affectées. Donc la résultante s ne sera point altérée si, dans le tableau (5), on transforme les lignes horizontales en lignes verticales, et réciproquement, c'est-à-dire si au tableau (5) on substitue le suivant :

$$(7)\qquad \left\{\begin{array}{lllll} x_0, & y_0, & z_0, & \ldots, & t_0, \\ x_1, & y_1, & z_1, & \ldots, & t_1, \\ x_2, & y_2, & z_2, & \ldots, & t_2, \\ \ldots, & \ldots, & \ldots, & \ldots, & \ldots \\ x_{n-1}, & y_{n-1}, & z_{n-1}, & \ldots, & t_{n-1}. \end{array}\right.$$

Observons encore qu'il est facile d'établir la proposition suivante :

Théorème II. — *Si, avec les variables comprises dans le tableau* (5), *on forme une fonction entière, du degré n, qui offre, dans chaque terme, n facteurs dont un seul appartienne à chacune des suites horizontales de ce tableau, et qui soit alternée par rapport à ces mêmes suites, la fonction entière dont il s'agit devra se réduire, au signe près, à la résultante s.*

Démonstration. — Dans l'hypothèse admise, chaque terme sera de la forme

$$\pm x_a y_b z_c \ldots t_h,$$

chacun des indices

$$a, \quad b, \quad c, \quad \ldots, \quad h$$

désignant l'un des nombres

$$0, \quad 1, \quad 2, \quad \ldots, \quad n-1;$$

et, comme à chaque terme on devra joindre tous ceux qu'on en déduit à l'aide d'un ou de plusieurs échanges opérés entre les lettres x, y, z, ..., chaque nouveau terme étant affecté du même signe que le premier ou d'un signe contraire, suivant que le nombre des échanges sera pair ou impair, la fonction entière que l'on considère se réduira nécessairement ou à une somme alternée de la forme

$$\pm S[\pm x_a y_b z_c \ldots t_h], \tag{8}$$

dans laquelle on pourra supposer les indices

$$a, \quad b, \quad c, \quad \ldots, \quad h$$

rangés d'après l'ordre de leur grandeur, ou à un polynome résultant de l'addition de plusieurs sommes de cette espèce. D'ailleurs, la somme (8) s'évanouit, toutes les fois que dans le produit

$$x_a y_b z_c \ldots t_h$$

deux lettres diverses, par exemple x et y, sont affectées d'un même indice

$$a = b,$$

puisque alors deux termes qui se déduisent l'un de l'autre, à l'aide d'un échange opéré entre ces lettres, sont égaux, au signe près, mais affectés de signes contraires, et qu'en conséquence deux semblables termes se détruisent mutuellement. Donc, pour que la somme (8) ne s'évanouisse pas, il sera nécessaire que les indices

$$a, \quad b, \quad c, \quad \ldots, \quad h$$

soient tous différents les uns des autres, et que ces indices, rangés d'après leur ordre de grandeur, deviennent respectivement égaux aux nombres

$$0, \quad 1, \quad 2, \quad \ldots, \quad n-1.$$

Mais alors la somme (8) se réduira précisément à la résultante $\pm s$. Donc une fonction entière des variables comprises dans le tableau (5), lorsqu'elle remplira les conditions énoncées dans le théorème II, se réduira toujours à l'une des résultantes

$$+s, \quad -s.$$

Considérons maintenant, outre les variables

$$x_0, x_1, \ldots, x_{n-1};\ y_0, y_1, \ldots, y_{n-1};\ z_0, z_1, \ldots, z_{n-1};\ \ldots;\ t_0, t_1, \ldots, t_{n-1},$$

comprises dans le tableau (5), d'autres variables

$$\mathrm{x}_0, \mathrm{x}_1, \ldots, \mathrm{x}_{n-1};\ \mathrm{y}_0, \mathrm{y}_1, \ldots, \mathrm{y}_{n-1};\ \mathrm{z}_0, \mathrm{z}_1, \ldots, \mathrm{z}_{n-1};\ \ldots;\ \mathrm{t}_0, \mathrm{t}_1, \ldots, \mathrm{t}_{n-1},$$

que nous supposerons indépendantes des premières, et distribuées en plusieurs suites, comme l'indique le Tableau suivant :

$$\left\{\begin{array}{lllll} \mathrm{x}_0, & \mathrm{x}_1, & \mathrm{x}_2, & \ldots, & \mathrm{x}_{n-1}, \\ \mathrm{y}_0, & \mathrm{y}_1, & \mathrm{y}_2, & \ldots, & \mathrm{y}_{n-1}, \\ \mathrm{z}_0, & \mathrm{z}_1, & \mathrm{z}_2, & \ldots, & \mathrm{z}_{n-1}, \\ \ldots, & \ldots, & \ldots & \ldots, & \ldots, \\ \mathrm{t}_0, & \mathrm{t}_1, & \mathrm{t}_2, & \ldots, & \mathrm{t}_{n-1}. \end{array}\right. \tag{9}$$

Désignons d'ailleurs par la notation

$$(x, \mathrm{x})$$

la somme des produits de la forme

$$x_n \mathrm{x}_n,$$

en sorte qu'on ait

$$(x, \mathrm{x}) = x_0\mathrm{x}_0 + x_1\mathrm{x}_1 + \ldots + x_{n-1}\mathrm{x}_{n-1}, \tag{10}$$

et, par des notations semblables, les sommes du même genre qu'on obtient en substituant à la lettre x l'une des lettres y, z, ..., t, ou à la lettre x l'une des lettres y, z, ..., t. Enfin nommons s la résultante formée avec les divers termes du tableau

$$\left\{\begin{array}{lllll} (x,\mathrm{x}), & (x,\mathrm{y}), & (x,\mathrm{z}), & \ldots, & (x,\mathrm{t}), \\ (y,\mathrm{x}), & (y,\mathrm{y}), & (y,\mathrm{z}), & \ldots, & (y,\mathrm{t}), \\ (z,\mathrm{x}), & (z,\mathrm{y}), & (z,\mathrm{z}), & \ldots, & (z,\mathrm{t}), \\ \ldots\ldots, & \ldots\ldots, & \ldots\ldots, & \ldots, & \ldots\ldots, \\ (t,\mathrm{x}), & (t,\mathrm{y}), & (t,\mathrm{z}), & \ldots, & (t,\mathrm{t}); \end{array}\right. \tag{11}$$

en sorte qu'on ait

$$s = S[\pm (x,\mathrm{x})(y,\mathrm{y})(z,\mathrm{z})\ldots(t,\mathrm{t})]. \tag{12}$$

La résultante $\mathcal{S}$ aura la propriété de changer de signe en conservant, au signe près, la même valeur, quand on échangera entre elles ou deux des lettres

$$x,\quad y,\quad z,\quad \ldots,\quad t,$$

ou bien encore deux des lettres

$$\mathrm{x},\quad \mathrm{y},\quad \mathrm{z},\quad \ldots\quad \mathrm{t};$$

elle sera donc une fonction alternée, non seulement par rapport aux suites que renferme le tableau (5), mais aussi par rapport aux suites que renferme le tableau (9). Donc, en vertu du théorème II du Mémoire précédent, la résultante $\mathcal{S}$ sera décomposable en produits de la forme

$$P\mathrm{P},$$

P étant une fonction alternée par rapport aux suites que renferme le tableau (5), et P une fonction alternée par rapport aux suites que renferme le tableau (9). Il y a plus : d'après la formation des sommes représentées par les notations

$$(x, \mathrm{x}),\quad (x, \mathrm{y}),\quad \ldots,\quad (y, \mathrm{y}),\quad \ldots,$$

il est clair que chaque terme de la fonction alternée P ou P sera le produit de n facteurs dont un seul appartiendra à chacune des suites horizontales comprises dans le tableau (5) ou (9). Donc, en vertu du théorème II (p. 187), la fonction alternée P, quand elle ne sera pas nulle, se réduira, au signe près, à la résultante s déterminée par la formule (6). Pareillement, la fonction alternée P, quand elle ne sera pas nulle, se réduira, au signe près, à la résultante s, déterminée par la formule

$$\mathrm{s} = \mathrm{S}[\pm \mathrm{x}_0 \mathrm{y}_1 \mathrm{z}_2 \ldots \mathrm{t}_{n-1}]. \tag{13}$$

Donc le produit

$$P\mathrm{P},$$

quand il ne s'évanouira pas, se réduira, au signe près, au produit

$$s\mathrm{s}.$$

Donc ce dernier produit représentera la résultante $\mathcal{S}$, au signe près, et même eu égard aux signes, attendu qu'il renfermera, comme la résultante $\mathcal{S}$, le produit partiel

$$x_0 y_1 z_2 \ldots t_{n-1} \mathrm{x}_0 \mathrm{y}_1 \mathrm{z}_2 \ldots \mathrm{t}_{n-1},$$

pris avec le signe $+$. On peut donc énoncer la proposition suivante, que j'ai donnée pour la première fois dans le 17e Cahier du *Journal de l'École Polytechnique* (1) : [Voir aussi dans le même Cahier un Mémoire de M. Binet.]

Théorème III. — *Si l'on se sert des notations*

$$(x, \mathrm{x}),\quad (x, \mathrm{y}),\quad \ldots,\quad (y, \mathrm{y}),\quad \ldots$$

pour représenter les sommes que déterminent l'équation (10) *et autres semblables, la résultante $\mathcal{S}$ des divers termes compris dans le tableau* (11) *sera le produit des résultantes*

$$s \quad \text{et} \quad \mathrm{s}$$

respectivement formées avec les divers termes des tableaux (5) *et* (9), *en sorte qu'on aura*

$$\mathcal{S} = s\mathrm{s}. \tag{14}$$

Nous observerons, en terminant ce paragraphe, que chacune des résultantes

$$s,\quad \mathrm{s},\quad \mathcal{S}$$

prend une forme digne de remarque, lorsque, dans chacun des tableaux (5) et (9), on transforme en exposants les indices

$$0,\quad 1,\quad 2,\quad 3,\quad \ldots,\quad n-1,$$

écrits au bas des lettres

$$x,\quad y,\quad z,\quad \ldots,\quad t$$

ou

$$\mathrm{x},\quad \mathrm{y},\quad \mathrm{z},\quad \ldots,\quad \mathrm{t}.$$

(1) *Œuvres de Cauchy*, 2e série, t. I.

Alors, en effet, la résultante s, déterminée par la formule

$$s = \mathrm{S}[\pm x^0 y^1 z^2 \ldots t^{n-1}], \tag{15}$$

devient une fonction alternée des variables

$$x, \quad y, \quad z, \quad \ldots, \quad t.$$

Elle est donc divisible par le produit

$$(x-y)(x-z)\ldots(y-z)\ldots, \tag{16}$$

ou, ce qui revient au même, par le produit

$$(y-x)(z-x)\ldots(z-y)\ldots \tag{17}$$

de toutes les différences qu'on peut former avec les termes de la suite

$$x, \quad y, \quad z, \quad \ldots, \quad t,$$

en retranchant successivement de chaque terme celui qui le précède. D'ailleurs le degré de la fonction s, déterminée par la formule (15), est représenté par la somme

$$0+1+2+\ldots+(n-1) = \frac{n(n-1)}{2},$$

et, par conséquent, égal au nombre des différences calculées, ainsi qu'au degré du produit (17). Donc la résultante s, divisée par le produit (17), donnera pour quotient une constante. Enfin, comme le produit

$$x^0 y^1 z^2 \ldots t^{n-1},$$

qui se trouve pris avec le signe $+$ dans la valeur de s, est en même temps le produit partiel formé avec les premiers termes des binomes

$$y-x, \quad z-x, \quad \ldots, \quad z-y, \quad \ldots,$$

qui entrent comme facteurs dans l'expression (17), la constante dont il s'agit devra évidemment se réduire à l'unité. On aura donc

$$s = (y-x)(z-x)\ldots(z-y)\ldots \tag{18}$$

et, par suite,

$$\mathrm{S}[\pm x^0 y^1 z^2 \ldots t^{n-1}] = (y-x)(z-x)\ldots(z-y)\ldots. \tag{19}$$

On trouvera de même

$$\mathrm{S}[\pm \mathrm{x}^0 \mathrm{y}^1 \mathrm{z}^2 \ldots \mathrm{t}^{n-1}] = (\mathrm{y}-\mathrm{x})(\mathrm{z}-\mathrm{x})\ldots(\mathrm{z}-\mathrm{y})\ldots. \tag{20}$$

De plus, en supposant les notations

$$(x, \mathrm{x}), \quad (x, \mathrm{y}), \quad \ldots, \quad (y, \mathrm{y}), \quad \ldots$$

définies par la formule

$$(x, \mathrm{x}) = 1 + x\mathrm{x} + x^2\mathrm{x}^2 + \ldots + x^{n-1}\mathrm{x}^{n-1}, \tag{21}$$

et autres semblables, on tirera de la formule (14)

$$\begin{aligned} &\mathrm{S}[\pm (x, \mathrm{x})(y, \mathrm{y})(z, \mathrm{z})\ldots(t, \mathrm{t})] \\ &\quad = (y-x)(z-x)\ldots(z-y)\ldots(\mathrm{y}-\mathrm{x})(\mathrm{z}-\mathrm{x})\ldots(\mathrm{z}-\mathrm{y})\ldots. \end{aligned} \tag{22}$$

Enfin, puisque l'équation (21) peut être réduite à

$$(x, \mathrm{x}) = \frac{1-x^n\mathrm{x}^n}{1-x\mathrm{x}}, \tag{23}$$

la formule (22) pourra évidemment s'écrire comme il suit :

$$\begin{aligned} &\mathrm{S}\left[\pm \frac{1-x^n\mathrm{x}^n}{1-x\mathrm{x}} \, \frac{1-y^n\mathrm{y}^n}{1-y\mathrm{y}} \, \frac{1-z^n\mathrm{z}^n}{1-z\mathrm{z}} \cdots \frac{1-t^n\mathrm{t}^n}{1-t\mathrm{t}}\right] \\ &\quad = (y-x)(z-x)\ldots(z-y)\ldots(\mathrm{y}-\mathrm{x})(\mathrm{z}-\mathrm{x})\ldots(\mathrm{z}-\mathrm{y})\ldots. \end{aligned} \tag{24}$$

II. — *Emploi des résultantes dans la résolution des équations linéaires*

Soient données entre n inconnues

$$x, \quad y, \quad z, \quad \ldots, \quad t$$

n équations linéaires de la forme

$$\left\{\begin{array}{l} a_0 x + b_0 y + c_0 z + \ldots + h_0 t = k_0, \\ a_1 x + b_1 y + c_1 z + \ldots + h_1 t = k_1, \\ a_2 x + b_2 y + c_2 z + \ldots + h_2 t = k_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ a_{n-1} x + b_{n-1} y + c_{n-1} z + \ldots + h_{n-1} t = k_{n-1}. \end{array}\right. \tag{1}$$

La résolution de ces équations pourra se déduire immédiatement d'une propriété de la résultante formée avec les coefficients

$$(2)\qquad \left\{\begin{array}{lllll} a_0, & b_0, & c_0, & \ldots, & h_0, \\ a_1, & b_1, & c_1, & \ldots, & h_1, \\ a_2, & b_2, & c_2, & \ldots, & h_2, \\ \ldots, & \ldots, & \ldots, & \ldots, & \ldots, \\ a_{n-1}, & b_{n-1}, & c_{n-1}, & \ldots, & h_{n-1}, \end{array}\right.$$

par lesquels les diverses inconnues s'y trouvent respectivement multipliées. En effet, soit K cette résultante, dont la valeur est donnée par la formule

$$(3)\qquad K = S[\pm a_0 b_1 c_2 \ldots h_{n-1}],$$

et soient

$$A_0, \quad A_1, \quad A_2, \quad \ldots, \quad A_{n-1}$$

les coefficients respectifs des quantités

$$a_0, \quad a_1, \quad a_2, \quad \ldots, \quad a_{n-1}$$

dans la résultante K.

$$A_0, \quad A_1, \quad A_2, \quad \ldots, \quad A_{n-1}$$

représenteront des fonctions des seules quantités

$$\begin{array}{llll} b_0, & c_0, & \ldots, & h_0, \\ b_1, & c_1, & \ldots, & h_1, \\ b_2, & c_2, & \ldots, & h_2, \\ \ldots & \ldots, & \ldots, & \ldots, \\ b_{n-1}, & c_{n-1}, & \ldots, & h_{n-1}. \end{array}$$

D'ailleurs, en vertu du théorème I du paragraphe précédent, la résultante K se trouvera réduite à une somme nulle, si l'on y remplace la lettre a par une autre lettre b, sans remplacer en même temps b

par a. On aura donc

$$(4)\qquad \left\{\begin{array}{l} A_0 a_0 + A_1 a_1 + A_2 a_2 + \ldots + A_{n-1} a_{n-1} = K, \\ A_0 b_0 + A_1 b_1 + A_2 b_2 + \ldots + A_{n-1} b_{n-1} = 0, \\ A_0 c_0 + A_1 c_1 + A_2 c_2 + \ldots + A_{n-1} c_{n-1} = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ A_0 h_0 + A_1 h_1 + A_2 h_2 + \ldots + A_{n-1} h_{n-1} = 0. \end{array}\right.$$

Cela posé, concevons que l'on combine entre elles par voie d'addition les équations (1), après les avoir respectivement multipliées par les facteurs

$$A_0, \quad A_1, \quad A_2, \quad \ldots, \quad A_{n-1};$$

et posons, pour abréger,

$$(5)\qquad A_0 k_0 + A_1 k_1 + A_2 k_2 + \ldots + A_{n-1} k_{n-1} = X.$$

Cette opération suffira pour éliminer les inconnues y, z, ... de l'équation résultante qui se trouvera réduite à

$$Kx = X$$

et donnera pour valeur de x

$$(6)\qquad x = \frac{X}{K}.$$

D'ailleurs la valeur de X, déterminée par la formule (5), est évidemment ce que devient la valeur de K donnée par la première des formules (4), quand on y remplace la lettre a par la lettre k. Donc, puisqu'on a

$$K = S[\pm a_0 b_1 c_2 \ldots h_{n-1}],$$

on aura encore

$$X = S[\pm k_0 b_1 c_2 \ldots h_{n-1}],$$

et la formule (6) pourra s'écrire comme il suit :

$$(7)\qquad \left\{\begin{array}{l} x = \dfrac{S[\pm k_0 b_1 c_2 \ldots h_{n-1}]}{S[\pm a_0 b_1 c_2 \ldots h_{n-1}]}. \\ \text{On aura de même} \\ y = \dfrac{S[\pm a_0 k_1 c_2 \ldots h_{n-1}]}{S[\pm a_0 b_1 c_2 \ldots h_{n-1}]}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ t = \dfrac{S[\pm a_0 b_1 c_2 \ldots k_{n-1}]}{S[\pm a_0 b_1 c_2 \ldots h_{n-1}]}. \end{array}\right.$$

En résumé, les valeurs de

$$x, \quad y, \quad z, \quad \dots, \quad t,$$

tirées des équations (1), se présenteront sous la forme de fractions et seront respectivement

$$x = \frac{X}{K}, \quad y = \frac{Y}{K}, \quad z = \frac{Z}{K}, \quad \dots, \quad t = \frac{T}{K}, \tag{8}$$

le dénominateur commun K des diverses fractions désignant la résultante des coefficients que renferme le tableau (2), et les numérateurs

$$X, \quad Y, \quad Z, \quad \dots, \quad T$$

étant ce que devient le dénominateur quand la lettre k est substituée successivement aux lettres

$$a, \quad b, \quad c, \quad \dots, \quad h.$$

Observons d'ailleurs qu'en vertu de la formule (5) et autres semblables, les équations (8) pourront s'écrire comme il suit :

$$\left\{\begin{aligned} x &= \frac{A_0 k_0 + A_1 k_1 + \dots + A_{n-1} k_{n-1}}{K}, \\ y &= \frac{B_0 k_0 + B_1 k_1 + \dots + B_{n-1} k_{n-1}}{K}, \\ z &= \frac{C_0 k_0 + C_1 k_1 + \dots + C_{n-1} k_{n-1}}{K}, \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ t &= \frac{H_0 k_0 + H_1 k_1 + \dots + H_{n-1} k_{n-1}}{K}, \end{aligned}\right. \tag{9}$$

les termes qui composent le tableau

$$\left\{\begin{matrix} A_0, & B_0, & C_0, & \dots, & H_0, \\ A_1, & B_1, & C_1, & \dots, & H_1, \\ A_2, & B_2, & C_2, & \dots, & H_2, \\ \dots, & \dots, & \dots, & \dots, & \dots \\ A_{n-1}, & B_{n-1}, & C_{n-1}, & \dots, & H_{n-1}, \end{matrix}\right. \tag{10}$$

étant les coefficients respectifs de ceux qui composent le tableau (2)

dans la valeur de la résultante K. Ajoutons que ces divers termes se trouveront liés entre eux par n^2 équations semblables aux formules (4), et dont le système sera

$$\left\{\begin{aligned} &A_0 a_0 + \dots + A_{n-1} a_{n-1} = K, \\ &A_0 b_0 + \dots + A_{n-1} b_{n-1} = 0, \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ &A_0 h_0 + \dots + A_{n-1} h_{n-1} = 0, \\ &B_0 a_0 + \dots + B_{n-1} a_{n-1} = 0, \\ &B_0 b_0 + \dots + B_{n-1} b_{n-1} = K, \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ &B_0 h_0 + \dots + B_{n-1} h_{n-1} = 0. \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ &H_0 a_0 + \dots + H_{n-1} a_{n-1} = 0, \\ &H_0 b_0 + \dots + H_{n-1} b_{n-1} = 0, \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ &H_0 h_0 + \dots + H_{n-1} h_{n-1} = K. \end{aligned}\right. \tag{11}$$

Or, en vertu des formules (11) et du théorème III du paragraphe I, la résultante K^n des n^2 termes compris dans le tableau

$$\left\{\begin{matrix} K, & 0, & 0, & \dots, & 0, \\ 0, & K, & 0, & \dots, & 0, \\ \dots, & \dots, & \dots, & \dots, & \dots, \\ 0, & 0, & 0, & \dots, & K \end{matrix}\right. \tag{12}$$

sera évidemment égale au produit de la résultante K par la résultante

$$S[\pm A_0 B_1 C_2 \dots H_{n-1}]$$

des termes compris dans le tableau (10). On aura donc

$$S[\pm A_0 B_1 C_2 \dots H_{n-1}] = K^{n-1}. \tag{13}$$

Cette dernière formule est aussi l'une de celles que j'ai données dans le 17^e^ Cahier du *Journal de l'École Polytechnique*.

Observons encore que chacun des termes du tableau (10) est luimême une résultante. Ainsi, en particulier, à l'inspection seule de la formule (3), on reconnait immédiatement que le coefficient de a_0

dans K, savoir A_0, se réduit à

$$A_0 = S[\pm b_1 c_2 \ldots h_{n-1}]. \tag{14}$$

En d'autres termes, A_0 est la résultante des termes du tableau

$$\left\{\begin{array}{llll} b_1, & c_1, & \ldots, & h_1, \\ b_2, & c_2, & \ldots, & h_2, \\ \ldots, & \ldots, & \ldots, & \ldots, \\ b_{n-1}, & c_{n-1}, & \ldots, & h_{n-1}, \end{array}\right. \tag{15}$$

qu'on obtient en effaçant, dans le tableau (2), la première ligne horizontale et la première ligne verticale.

Dans le cas particulier où les indices

$$0, \quad 1, \quad 2, \quad \ldots, \quad n-1,$$

placés dans le tableau (2) au bas des lettres

$$a, \quad b, \quad c, \quad \ldots, \quad h,$$

se changent en exposants, les équations (1) se réduisent aux suivantes :

$$\left\{\begin{array}{l} x + y + z + \ldots + t = 1, \\ ax + by + cz + \ldots + ht = k, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ a^{n-1}x + b^{n-1}y + c^{n-1}z + \ldots + h^{n-1}t = k^{n-1}; \end{array}\right. \tag{16}$$

et, en vertu de la formule (19) du paragraphe I, les valeurs de

$$x, \quad y, \quad z, \quad \ldots, \quad t,$$

fournies par les équations (7), donnent, après la suppression des facteurs communs aux deux termes de chaque fraction,

$$\left\{\begin{array}{l} x = \dfrac{(b-k)(c-k)\ldots(h-k)}{(b-a)(c-a)\ldots(h-a)}, \\ y = \dfrac{(a-k)(c-k)\ldots(h-k)}{(a-b)(c-b)\ldots(h-b)}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ t = \dfrac{(a-k)(b-k)\ldots(g-k)}{(a-h)(b-h)\ldots(g-h)}. \end{array}\right. \tag{17}$$

Si l'on ne supprimait pas les facteurs communs aux deux termes de chaque fraction, alors des valeurs de

$$x, \quad y, \quad z, \quad \ldots, \quad t,$$

propres à vérifier les formules (16), on déduirait aisément les valeurs de $x, y, z, \ldots, t$ propres à vérifier les formules (1) ; et, pour retrouver par exemple la première des équations (7), il suffirait de développer, suivant les puissances de

$$a, \quad b, \quad c, \quad \ldots, \quad h,$$

les deux termes de la fraction

$$x = \frac{(b-k)(c-k)\ldots(h-k)(c-b)\ldots(h-b)\ldots(h-g)}{(b-a)(c-a)\ldots(h-a)(c-b)\ldots(h-b)\ldots(h-g)}, \tag{18}$$

puis de remplacer, dans les développements obtenus, l'exposant de chaque lettre par un indice. Sous cette condition, l'équation (18) pourrait être considérée comme une *formule symbolique* propre à représenter la valeur de x tirée des équations (1). (Voir l'*Analyse algébrique*, Chap. III, § 2.)

Concevons maintenant que n variables

$$x, \quad y, \quad z, \quad \ldots, \quad t$$

se trouvent liées à n autres variables

$$\mathrm{x}, \quad \mathrm{y}, \quad \mathrm{z}, \quad \ldots, \quad \mathrm{t}$$

par n équations linéaires de la forme

$$\left\{\begin{array}{l} a_0 x + b_0 y + c_0 z + \ldots + h_0 t = \mathrm{x}, \\ a_1 x + b_1 y + c_1 z + \ldots + h_1 t = \mathrm{y}, \\ a_2 x + b_2 y + c_2 z + \ldots + h_2 t = \mathrm{z}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ a_{n-1} x + b_{n-1} y + c_{n-1} z + \ldots + h_{n-1} t = \mathrm{t}. \end{array}\right. \tag{19}$$

Il suffira de résoudre ces équations par rapport aux variables

$$x, \quad y, \quad z, \quad \ldots, \quad t$$

pour obtenir n autres équations linéaires de la forme

$$\left\{\begin{array}{l} x = \mathrm{a}_0 \mathrm{x} + \mathrm{a}_1 \mathrm{y} + \mathrm{a}_2 \mathrm{z} + \ldots + \mathrm{a}_{n-1} \mathrm{t}, \\ y = \mathrm{b}_0 \mathrm{x} + \mathrm{b}_1 \mathrm{y} + \mathrm{b}_2 \mathrm{z} + \ldots + \mathrm{b}_{n-1} \mathrm{t}, \\ z = \mathrm{c}_0 \mathrm{x} + \mathrm{c}_1 \mathrm{y} + \mathrm{c}_2 \mathrm{z} + \ldots + \mathrm{c}_{n-1} \mathrm{t}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ t = \mathrm{h}_0 \mathrm{x} + \mathrm{h}_1 \mathrm{y} + \mathrm{h}_2 \mathrm{z} + \ldots + \mathrm{h}_{n-1} \mathrm{t}. \end{array}\right. \tag{20}$$

Les seconds membres de ces dernières équations devant être précisément ce que deviennent les seconds membres des formules (9), quand on y remplace

$$k_0,\quad k_1,\quad k_2,\quad \ldots,\quad k_{n-1}$$

par

$$\mathfrak{x},\quad \mathfrak{y},\quad \mathfrak{z},\quad \ldots,\quad \mathfrak{t},$$

il en résulte que les coefficients

$$(21)\qquad \left\{\begin{matrix} \mathfrak{a}_0, & \mathfrak{a}_1, & \mathfrak{a}_2, & \ldots, & \mathfrak{a}_{n-1}, \\ \mathfrak{b}_0, & \mathfrak{b}_1, & \mathfrak{b}_2, & \ldots, & \mathfrak{b}_{n-1}, \\ \mathfrak{c}_0, & \mathfrak{c}_1, & \mathfrak{c}_2, & \ldots, & \mathfrak{c}_{n-1}, \\ \ldots, & \ldots, & \ldots, & \ldots, & \ldots, \\ \mathfrak{h}_0, & \mathfrak{h}_1, & \mathfrak{h}_2, & \ldots, & \mathfrak{h}_{n-1} \end{matrix}\right.$$

doivent se réduire aux quotients qu'on obtient en divisant par la résultante K les divers termes du tableau (10). Donc les formules (11) entraînent les suivantes :

$$(22)\qquad \left\{\begin{array}{lll} \mathfrak{a}_0 a_0 & +\ldots+\mathfrak{h}_0 h_0 & =1. \\ \mathfrak{a}_0 a_1 & +\ldots+\mathfrak{h}_0 h_1 & =0 \\ \multicolumn{3}{l}{\dotfill,} \\ \mathfrak{a}_0 a_{n-1} & +\ldots+\mathfrak{h}_0 h_{n-1} & =0, \\ \mathfrak{a}_1 a_0 & +\ldots+\mathfrak{h}_1 h_0 & =0, \\ \mathfrak{a}_1 a_1 & +\ldots+\mathfrak{h}_1 h_1 & =1, \\ \multicolumn{3}{l}{\dotfill,} \\ \mathfrak{a}_1 a_{n-1} & +\ldots+\mathfrak{h}_1 h_{n-1} & =0, \\ \multicolumn{3}{l}{\dotfill.} \\ \mathfrak{a}_{n-1} a_0 & +\ldots+\mathfrak{h}_{n-1} h_0 & =0, \\ \mathfrak{a}_{n-1} a_1 & +\ldots+\mathfrak{h}_{n-1} h_1 & =0, \\ \multicolumn{3}{l}{\dotfill,} \\ \mathfrak{a}_{n-1} a_{n-1} & +\ldots+\mathfrak{h}_{n-1} h_{n-1} & =1. \end{array}\right.$$

Au reste on arrive directement aux formules (22) en substituant dans les équations (19) les valeurs de $x, y, z, \ldots, t$ tirées des formules (20) et observant que les nouvelles équations ainsi obtenues doivent être

identiques, c'est-à-dire qu'elles doivent subsister indépendamment des valeurs attribuées aux variables $x, y, z, \ldots, t$.

Il suit des formules (22), jointes au théorème III du paragraphe I, que la résultante 1 des n^2 termes renfermés dans le tableau

$$(23)\qquad \left\{\begin{matrix} 1, & 0, & 0, & \ldots, & 0, \\ 0, & 1, & 0, & \ldots, & 0, \\ 0, & 0, & 1, & \ldots, & 0, \\ ., & ., & ., & \ldots, & ., \\ 0, & 0, & 0, & \ldots, & 1 \end{matrix}\right.$$

est égale au produit des deux résultantes

$$S[\pm a_0 b_1 c_2 \ldots h_{n-1}],\qquad S[\mp \mathfrak{a}_0 \mathfrak{b}_1 \mathfrak{c}_2 \ldots \mathfrak{h}_{n-1}]$$

des termes que renferment les tableaux (2) et (21). On aura donc

$$(24)\qquad S[\pm a_0 b_1 c_2 \ldots h_{n-1}]\, S[\pm \mathfrak{a}_0 \mathfrak{b}_1 \mathfrak{c}_2 \ldots \mathfrak{h}_{n-1}] = 1,$$

et l'on peut énoncer la proposition suivante :

THÉORÈME. — *Si, n variables*

$$x,\quad y,\quad z,\quad \ldots,\quad t$$

étant liées à n autres variables

$$\mathfrak{x},\quad \mathfrak{y},\quad \mathfrak{z},\quad \ldots,\quad \mathfrak{t}$$

par n équations linéaires, on suppose les unes exprimées en fonctions linéaires des autres, et réciproquement ; les deux résultantes formées avec les coefficients que renfermeront ces fonctions linéaires dans les deux hypothèses offriront un produit équivalent à l'unité.

MÉMOIRE

SUR LES

FONCTIONS DIFFÉRENTIELLES ALTERNÉES.

I. — *Considérations générales.*

Une expression qui renferme les différentielles ou les dérivées d'une ou de plusieurs fonctions différentiées par rapport à une ou à plusieurs variables, est ce qu'on peut nommer une *fonction différentielle*. Si cette même expression change de signe en conservant, au signe près, la même valeur, tandis qu'on échange entre elles deux quelconques des variables qu'elle renferme, elle deviendra ce que nous appellerons une *fonction différentielle alternée*. Parmi les fonctions de cette espèce, on doit particulièrement remarquer certaines résultantes, dont j'ai déjà parlé dans le 19e Cahier du *Journal de l'École Polytechnique* [p. 536 et suivantes ([1])], et dont je vais m'occuper encore quelques instants.

Soient

$$x,\ y,\ z,\ \ldots,\ t$$

n variables indépendantes entre elles, et

$$\mathrm{x},\ \mathrm{y},\ \mathrm{z},\ \ldots,\ \mathrm{t}$$

n autres variables liées aux premières par n équations linéaires ou non linéaires. On pourra considérer

$$\mathrm{x},\ \mathrm{y},\ \mathrm{z},\ \ldots,\ \mathrm{t}$$

([1]) *Œuvres de Cauchy*, 2e série, t. I.

comme des fonctions des variables indépendantes

$$x,\ y,\ z,\ \ldots,\ t,$$

et calculer, dans cette hypothèse, les dérivées du premier ordre qui forment les divers termes du Tableau

$$(1)\qquad \left\{\begin{array}{lllll} D_x\mathrm{x}, & D_y\mathrm{x}, & D_z\mathrm{x}, & \ldots, & D_t\mathrm{x},\\ D_x\mathrm{y}, & D_y\mathrm{y}, & D_z\mathrm{y}, & \ldots, & D_t\mathrm{y},\\ D_x\mathrm{z}, & D_y\mathrm{z}, & D_z\mathrm{z}, & \ldots, & D_t\mathrm{z},\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots,\\ D_x\mathrm{t}, & D_y\mathrm{t}, & D_z\mathrm{t}, & \ldots, & D_t\mathrm{t}. \end{array}\right.$$

Cela posé, concevons que, suivant les conventions adoptées dans le précédent Mémoire, on se serve de la notation

$$(2)\qquad S[\pm D_x\mathrm{x}\, D_y\mathrm{y}\, D_z\mathrm{z} \ldots D_t\mathrm{t}]$$

pour indiquer la somme faite du produit partiel

$$D_x\mathrm{x}\, D_y\mathrm{y}\, D_z\mathrm{z} \ldots D_t\mathrm{t},$$

et de tous ceux dans lesquels il se transforme, quand on échange entre elles, une ou plusieurs fois de suite, les variables

$$x,\ y,\ z,\ \ldots,\ t$$

prises deux à deux, en changeant chaque fois le signe du produit obtenu. L'expression (2) sera tout à la fois la résultante des termes compris dans le tableau (1), et ce que nous appelons une *fonction différentielle alternée*. Observons d'ailleurs que, pour déduire les uns des autres les divers termes de cette résultante, il revient au même d'échanger entre elles, ou les variables

$$x,\ y,\ z,\ \ldots,\ t,$$

ou les fonctions

$$\mathrm{x},\ \mathrm{y},\ \mathrm{z},\ \ldots,\ \mathrm{t}.$$

En vertu des n équations de condition qu'on suppose exister entre les deux systèmes de variables

$$x,\ y,\ z,\ \ldots,\ t \quad \text{et} \quad \mathrm{x},\ \mathrm{y},\ \mathrm{z},\ \ldots,\ \mathrm{t},$$

on peut à volonté, ou considérer, ainsi que nous venons de le faire,

$$\mathrm{x},\quad \mathrm{y},\quad \mathrm{z},\quad \ldots,\quad \mathrm{t}$$

comme des fonctions données des variables indépendantes

$$x,\quad y,\quad z,\quad \ldots,\quad t,$$

ou, réciproquement, considérer

$$x,\quad y,\quad z,\quad \ldots,\quad t$$

comme des fonctions données des variables indépendantes

$$\mathrm{x},\quad \mathrm{y},\quad \mathrm{z},\quad \ldots,\quad \mathrm{t}.$$

Dans cette dernière hypothèse, la résultante formée avec les termes du tableau

$$(3)\qquad \left\{\begin{array}{lllll} D_{\mathrm{x}}x, & D_{\mathrm{y}}x, & D_{\mathrm{z}}x, & \ldots, & D_{\mathrm{t}}x, \\ D_{\mathrm{x}}y, & D_{\mathrm{y}}y, & D_{\mathrm{z}}y, & \ldots, & D_{\mathrm{t}}y, \\ D_{\mathrm{x}}z, & D_{\mathrm{y}}z, & D_{\mathrm{z}}z, & \ldots, & D_{\mathrm{t}}z, \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots, \\ D_{\mathrm{x}}t, & D_{\mathrm{y}}t, & D_{\mathrm{z}}t, & \ldots, & D_{\mathrm{t}}t, \end{array}\right.$$

et représentée par la notation

$$(4)\qquad S[\pm D_{\mathrm{x}}x\, D_{\mathrm{y}}y\, D_{\mathrm{z}}z\, \ldots\, D_{\mathrm{t}}t],$$

serait une fonction différentielle alternée par rapport aux variables indépendantes $\mathrm{x}, \mathrm{y}, \mathrm{z}, \ldots, \mathrm{t}$. Or il existe entre les résultantes (2) et (4) une relation remarquable, et qu'on peut aisément établir comme il suit.

Soit φ une fonction quelconque des variables $x, y, z, \ldots, t$, ou, ce qui revient au même, des variables $\mathrm{x}, \mathrm{y}, \mathrm{z}, \ldots, \mathrm{t}$. On aura, en considérant d'abord φ comme fonction des variables $x, y, z, \ldots, t$,

$$(5)\qquad d\varphi = D_x\varphi\, dx + D_y\varphi\, dy + D_z\varphi\, dz + \ldots + D_t\varphi\, dt;$$

puis, en considérant φ comme une fonction des variables $\mathrm{x}, \mathrm{y}, \mathrm{z}, \ldots, \mathrm{t}$,

$$(6)\qquad d\varphi = D_{\mathrm{x}}\varphi\, d\mathrm{x} + D_{\mathrm{y}}\varphi\, d\mathrm{y} + D_{\mathrm{z}}\varphi\, d\mathrm{z} + \ldots + D_{\mathrm{t}}\varphi\, d\mathrm{t}.$$

Si, dans la formule (5), on remplace successivement φ par chacune des variables

$$\mathrm{x},\quad \mathrm{y},\quad \mathrm{z},\quad \ldots,\quad \mathrm{t}$$

considérée comme fonction de $x, y, z, \ldots, t$, on trouvera

$$(7)\qquad \left\{\begin{array}{l} d\mathrm{x} = D_x\mathrm{x}\, dx + D_y\mathrm{x}\, dy + D_z\mathrm{x}\, dz + \ldots + D_t\mathrm{x}\, dt, \\ d\mathrm{y} = D_x\mathrm{y}\, dx + D_y\mathrm{y}\, dy + D_z\mathrm{y}\, dz + \ldots + D_t\mathrm{y}\, dt, \\ d\mathrm{z} = D_x\mathrm{z}\, dx + D_y\mathrm{z}\, dy + D_z\mathrm{z}\, dz + \ldots + D_t\mathrm{z}\, dt, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ d\mathrm{t} = D_x\mathrm{t}\, dx + D_y\mathrm{t}\, dy + D_z\mathrm{t}\, dz + \ldots + D_t\mathrm{t}\, dt. \end{array}\right.$$

Pareillement, si, dans la formule (6), on remplace successivement la fonction φ par chacune des variables

$$x,\quad y,\quad z,\quad \ldots,\quad t,$$

considérée comme fonction de $\mathrm{x}, \mathrm{y}, \mathrm{z}, \ldots, \mathrm{t}$, on trouvera

$$(8)\qquad \left\{\begin{array}{l} dx = D_{\mathrm{x}}x\, d\mathrm{x} + D_{\mathrm{y}}x\, d\mathrm{y} + D_{\mathrm{z}}x\, d\mathrm{z} + \ldots + D_{\mathrm{t}}x\, d\mathrm{t}, \\ dy = D_{\mathrm{x}}y\, d\mathrm{x} + D_{\mathrm{y}}y\, d\mathrm{y} + D_{\mathrm{z}}y\, d\mathrm{z} + \ldots + D_{\mathrm{t}}y\, d\mathrm{t}, \\ dz = D_{\mathrm{x}}z\, d\mathrm{x} + D_{\mathrm{y}}z\, d\mathrm{y} + D_{\mathrm{z}}z\, d\mathrm{z} + \ldots + D_{\mathrm{t}}z\, d\mathrm{t}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ dt = D_{\mathrm{x}}t\, d\mathrm{x} + D_{\mathrm{y}}t\, d\mathrm{y} + D_{\mathrm{z}}t\, d\mathrm{z} + \ldots + D_{\mathrm{t}}t\, d\mathrm{t}. \end{array}\right.$$

Les formules (7) et (8), qui fournissent le moyen d'opérer un changement de variables indépendantes, quand on s'arrête aux différentielles du premier ordre, doivent certainement s'accorder entre elles. Donc les équations (7) deviendront identiques, si l'on y substitue les valeurs de

$$dx,\quad dy,\quad dz,\quad \ldots,\quad dt$$

tirées des formules (8). Cette seule considération fournit immédiatement n^2 équations diverses, dont les unes, en nombre égal à n, sont de la forme

$$(9)\qquad D_x\mathrm{x}\, D_{\mathrm{x}}x + D_y\mathrm{x}\, D_{\mathrm{x}}y + D_z\mathrm{x}\, D_{\mathrm{x}}z + \ldots + D_t\mathrm{x}\, D_{\mathrm{x}}t = 1,$$

tandis que les autres, en nombre égal à $n^2 - n$, sont de la forme

$$(10)\qquad D_x\mathrm{x}\, D_{\mathrm{y}}x + D_y\mathrm{x}\, D_{\mathrm{y}}y + D_z\mathrm{x}\, D_{\mathrm{y}}z + \ldots + D_t\mathrm{x}\, D_{\mathrm{y}}t = 0.$$

D'ailleurs, comme les formules (7) et (8) servent à exprimer les différentielles

$$d\mathrm{x},\quad d\mathrm{y},\quad d\mathrm{z},\quad \ldots,\quad d\mathrm{t}$$

en fonctions linéaires des différentielles

$$dx,\quad dy,\quad dz,\quad \ldots,\quad dt$$

et réciproquement, on conclura du théorème énoncé à la page 201 que les résultantes formées avec les termes des tableaux (1) et (3), c'est-à-dire les expressions (2) et (4), fournissent un produit équivalent à l'unité. On aura donc

$$\text{(11)}\qquad S[\pm D_x\mathrm{x}\, D_y\mathrm{y}\, D_z\mathrm{z}\ldots D_t\mathrm{t}]\, S[\pm D_{\mathrm{x}}x\, D_{\mathrm{y}}y\, D_{\mathrm{z}}z\ldots D_{\mathrm{t}}t] = 1.$$

La formule (11) ne diffère que par la notation d'une formule déjà connue. (Voir un Mémoire de M. Jacobi, inséré dans le *Journal de M. Crelle*, 1841, p. 337.)

Non seulement les résultantes (2) et (4) se trouvent liées entre elles par la formule (11), mais, de plus, chacune de ces résultantes peut être exprimée par le rapport de deux autres. En effet, représentons par

$$\text{(12)}\qquad \Phi = 0,\qquad \mathrm{X} = 0,\qquad \Psi = 0,\qquad \ldots,\qquad \Omega = 0$$

les n équations en vertu desquelles les n variables

$$x,\quad y,\quad z,\quad \ldots,\quad t$$

se trouvent liées aux n variables

$$\mathrm{x},\quad \mathrm{y},\quad \mathrm{z},\quad \ldots,\quad \mathrm{t}.$$

En différentiant la première des équations (12), on trouvera

$$\text{(13)}\qquad D_x\Phi\, dx + \ldots + D_t\Phi\, dt + D_{\mathrm{x}}\Phi\, d\mathrm{x} + \ldots + D_{\mathrm{t}}\Phi\, d\mathrm{t} = 0;$$

puis, en substituant dans la formule (13) les valeurs de

$$d\mathrm{x},\quad d\mathrm{y},\quad \ldots,\quad d\mathrm{t},$$

tirées des formules (7), on obtiendra une équation qui devra être

identique et donnera par suite

$$\text{(14)}\qquad \left\{\begin{array}{l} -D_x\Phi = D_{\mathrm{x}}\Phi\, D_x\mathrm{x} + D_{\mathrm{y}}\Phi\, D_x\mathrm{y} + \ldots + D_{\mathrm{t}}\Phi\, D_x\mathrm{t},\\ -D_y\Phi = D_{\mathrm{x}}\Phi\, D_y\mathrm{x} + D_{\mathrm{y}}\Phi\, D_y\mathrm{y} + \ldots + D_{\mathrm{t}}\Phi\, D_y\mathrm{t},\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\ -D_t\Phi = D_{\mathrm{x}}\Phi\, D_t\mathrm{x} + D_{\mathrm{y}}\Phi\, D_t\mathrm{y} + \ldots + D_{\mathrm{t}}\Phi\, D_t\mathrm{t}. \end{array}\right.$$

Or, de ces dernières formules et de celles qu'on en déduit en remplaçant la lettre Φ par l'une des lettres X, Ψ, ..., Ω, il résulte que les divers termes du tableau

$$\text{(15)}\qquad \left\{\begin{array}{lllll} D_x\Phi, & D_x\mathrm{X}, & D_x\Psi, & \ldots, & D_x\Omega,\\ D_y\Phi, & D_y\mathrm{X}, & D_y\Psi, & \ldots, & D_y\Omega,\\ D_z\Phi, & D_z\mathrm{X}, & D_z\Psi, & \ldots, & D_z\Omega,\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ D_t\Phi, & D_t\mathrm{X}, & D_t\Psi, & \ldots, & D_t\Omega, \end{array}\right.$$

pris chacun avec le signe —, se trouveront liés à ceux du tableau (1) et du suivant :

$$\text{(16)}\qquad \left\{\begin{array}{lllll} D_{\mathrm{x}}\Phi, & D_{\mathrm{x}}\mathrm{X}, & D_{\mathrm{x}}\Psi, & \ldots, & D_{\mathrm{x}}\Omega,\\ D_{\mathrm{y}}\Phi, & D_{\mathrm{y}}\mathrm{X}, & D_{\mathrm{y}}\Psi, & \ldots, & D_{\mathrm{y}}\Omega,\\ D_{\mathrm{z}}\Phi, & D_{\mathrm{z}}\mathrm{X}, & D_{\mathrm{z}}\Psi, & \ldots, & D_{\mathrm{z}}\Omega,\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ D_{\mathrm{t}}\Phi, & D_{\mathrm{t}}\mathrm{X}, & D_{\mathrm{t}}\Psi, & \ldots, & D_{\mathrm{t}}\Omega, \end{array}\right.$$

par des équations semblables à la formule (14) de la page 191. Donc, en vertu du théorème III de cette même page, la résultante des termes qui composent le tableau (15), multipliée par $(-1)^n$, sera le produit des résultantes des termes qui composent les tableaux (1) et (16). On aura donc

$$\begin{aligned}&(-1)^n S[\pm D_x\Phi\, D_y\mathrm{X}\, D_z\Psi\ldots D_t\Omega]\\ &\quad = S[\pm D_x\mathrm{x}\, D_y\mathrm{y}\, D_z\mathrm{z}\ldots D_t\mathrm{t}]\, S[\pm D_{\mathrm{x}}\Phi\, D_{\mathrm{y}}\mathrm{X}\, D_{\mathrm{z}}\Psi\ldots D_{\mathrm{t}}\Omega],\end{aligned}$$

et par suite

$$\text{(17)}\qquad S[\pm D_x\mathrm{x}\, D_y\mathrm{y}\, D_z\mathrm{z}\ldots D_t\mathrm{t}] = (-1)^n \frac{S[\pm D_x\Phi\, D_y\mathrm{X}\, D_z\Psi\ldots D_t\Omega]}{S[\pm D_{\mathrm{x}}\Phi\, D_{\mathrm{y}}\mathrm{X}\, D_{\mathrm{z}}\Psi\ldots D_{\mathrm{t}}\Omega]}.$$

L'équation (17), en vertu de laquelle la résultante (2) s'exprime par le rapport de deux autres résultantes, a encore été obtenue par M. Jacobi, dans le Mémoire déjà cité, page 344. Elle conduit à la formule donnée par M. Catalan pour la transformation d'une intégrale multiple, dans le cas où aux variables que renfermait cette intégrale on substitue d'autrès variables liées aux premières par certaines équations.

Si, dans la formule (17), on échange l'un avec l'autre les deux systèmes de variables

$$x,\ y,\ z,\ \ldots,\ t \quad \text{et} \quad \mathrm{x},\ \mathrm{y},\ \mathrm{z},\ \ldots,\ \mathrm{t},$$

on obtiendra l'équation

$$(18) \qquad \mathrm{S}[\pm \mathrm{D_x}x\, \mathrm{D_y}y\, \mathrm{D_z}z \ldots \mathrm{D_t}t] = (-1)^n \frac{\mathrm{S}[\pm \mathrm{D_x}\Phi\, \mathrm{D_y}\mathrm{X}\, \mathrm{D_z}\Psi \ldots \mathrm{D_t}\Omega]}{\mathrm{S}[\pm \mathrm{D}_x\Phi\, \mathrm{D}_y\mathrm{X}\, \mathrm{D}_z\Psi \ldots \mathrm{D}_t\Omega]},$$

en vertu de laquelle la résultante (4) s'exprime par le rapport de deux autres résultantes. En combinant entre elles, par voie de multiplication, les formules (17) et (18), on retrouve évidemment la formule (11).

II. — *Exemples.*

Considérons, comme dans le paragraphe précédent, n variables

$$x,\ y,\ z,\ \ldots,\ t$$

liées à n autres variables

$$\mathrm{x},\ \mathrm{y},\ \mathrm{z},\ \ldots,\ \mathrm{t}$$

par n équations diverses ; et supposons d'abord que ces équations soient de la forme

$$(1) \qquad \begin{cases} \mathrm{x} = a_0x + b_0y + c_0z + \ldots + h_0t, \\ \mathrm{y} = a_1x + b_1y + c_1z + \ldots + h_1t, \\ \mathrm{z} = a_2x + b_2y + c_2z + \ldots + h_2t, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \mathrm{t} = a_{n-1}x + b_{n-1}y + c_{n-1}z + \ldots + h_{n-1}t. \end{cases}$$

Dans ce cas, les termes qui composeront le tableau (1) du paragraphe I seront précisément les coefficients

$$(2) \qquad \begin{cases} a_0, & b_0, & c_0, & \ldots, & h_0, \\ a_1, & b_1, & c_1, & \ldots, & h_1, \\ a_2, & b_2, & c_2, & \ldots, & h_2, \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots, \\ a_{n-1}, & b_{n-1}, & c_{n-1}, & \ldots, & h_{n-1}. \end{cases}$$

On aura donc

$$(3) \qquad \mathrm{S}[\pm \mathrm{D}_x\mathrm{x}\, \mathrm{D}_y\mathrm{y}\, \mathrm{D}_z\mathrm{z} \ldots \mathrm{D}_t\mathrm{t}] = \mathrm{S}[\pm a_0b_1c_2 \ldots h_{n-1}].$$

Concevons maintenant que les équations (1), étant résolues par rapport à $x, y, z, \ldots, t$, donnent

$$(4) \qquad \begin{cases} x = \mathfrak{a}_0\mathrm{x} + \mathfrak{a}_1\mathrm{y} + \mathfrak{a}_2\mathrm{z} + \ldots + \mathfrak{a}_{n-1}\mathrm{t}, \\ y = \mathfrak{b}_0\mathrm{x} + \mathfrak{b}_1\mathrm{y} + \mathfrak{b}_2\mathrm{z} + \ldots + \mathfrak{b}_{n-1}\mathrm{t}, \\ z = \mathfrak{c}_0\mathrm{x} + \mathfrak{c}_1\mathrm{y} + \mathfrak{c}_2\mathrm{z} + \ldots + \mathfrak{c}_{n-1}\mathrm{t}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ t = \mathfrak{h}_0\mathrm{x} + \mathfrak{h}_1\mathrm{y} + \mathfrak{h}_2\mathrm{z} + \ldots + \mathfrak{h}_{n-1}\mathrm{t}. \end{cases}$$

On trouvera encore

$$(5) \qquad \mathrm{S}[\pm \mathrm{D_x}x\, \mathrm{D_y}y\, \mathrm{D_z}z \ldots \mathrm{D_t}t] = \mathrm{S}[\pm \mathfrak{a}_0\mathfrak{b}_1\mathfrak{c}_2 \ldots \mathfrak{h}_{n-1}].$$

D'ailleurs, en vertu du théorème de la page 201, on aura

$$(6) \qquad \mathrm{S}[\pm a_0b_1c_2 \ldots h_{n-1}]\, \mathrm{S}[\pm \mathfrak{a}_0\mathfrak{b}_1\mathfrak{c}_2 \ldots \mathfrak{h}_{n-1}] = 1.$$

Donc les formules (3) et (5) donneront, dans l'hypothèse admise,

$$(7) \qquad \mathrm{S}[\pm \mathrm{D}_x\mathrm{x}\, \mathrm{D}_y\mathrm{y}\, \mathrm{D}_z\mathrm{z} \ldots \mathrm{D}_t]\, \mathrm{S}[\pm \mathrm{D_x}x\, \mathrm{D_y}y\, \mathrm{D_z}z \ldots \mathrm{D_t}t] = 1,$$

en sorte qu'on se trouvera précisément ramené à la formule (11) du paragraphe I.

Supposons en second lieu que

$$\mathrm{x},\ \mathrm{y},\ \mathrm{z},\ \ldots,\ \mathrm{t}$$

soient déterminés en fonction de

$$x,\ y,\ z,\ \ldots,\ t$$

par des équations de la forme

$$(8)\qquad \begin{cases} \mathrm{x} = A(x-a)(y-a)(z-a)\ldots(t-a), \\ \mathrm{y} = B(x-b)(y-b)(z-b)\ldots(t-b), \\ \mathrm{z} = C(x-c)(y-c)(z-c)\ldots(t-c), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \mathrm{t} = H(x-h)(y-h)(z-h)\ldots(t-h). \end{cases}$$

Il suffira de différentier par rapport à $x, y, z, \ldots, t$ les logarithmes des fonctions $\mathrm{x}, \mathrm{y}, \mathrm{z}, \ldots, \mathrm{t}$ pour obtenir immédiatement les termes du tableau (1) du paragraphe I sous les formes suivantes :

$$(9)\qquad \begin{cases} \dfrac{\mathrm{x}}{x-a}, & \dfrac{\mathrm{x}}{y-a}, & \dfrac{\mathrm{x}}{z-a}, & \ldots, & \dfrac{\mathrm{x}}{t-a}, \\ \dfrac{\mathrm{y}}{x-b}, & \dfrac{\mathrm{y}}{y-b}, & \dfrac{\mathrm{y}}{z-b}, & \ldots, & \dfrac{\mathrm{y}}{t-b}, \\ \dfrac{\mathrm{z}}{x-c}, & \dfrac{\mathrm{z}}{y-c}, & \dfrac{\mathrm{z}}{z-c}, & \ldots, & \dfrac{\mathrm{z}}{t-c}, \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots, \\ \dfrac{\mathrm{t}}{x-h}, & \dfrac{\mathrm{t}}{y-h}, & \dfrac{\mathrm{t}}{z-h}, & \ldots, & \dfrac{\mathrm{t}}{t-h}. \end{cases}$$

On trouvera donc

$$(10)\qquad \begin{aligned} & S[\pm D_x\mathrm{x}\, D_y\mathrm{y}\, D_z\mathrm{z}\ldots D_t\mathrm{t}] \\ & = \mathrm{xyz}\ldots\mathrm{t}\, S\left[\pm \frac{1}{(x-a)(y-b)(z-c)\ldots(t-h)}\right], \end{aligned}$$

ou, ce qui revient au même, eu égard à la formule (10) de la page 177,

$$(11)\qquad \begin{aligned} & S[\pm D_x\mathrm{x}\, D_y\mathrm{y}\, D_z\mathrm{z}\ldots D_t\mathrm{t}] \\ & = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\mathrm{xyz}\ldots\mathrm{t} \\ & \times \frac{(b-a)(c-a)\ldots(c-b)\ldots(y-x)(z-x)\ldots(z-y)\ldots}{(x-a)(x-b)(x-c)\ldots(y-a)(y-b)(y-c)\ldots(z-a)(z-b)(z-c)\ldots}. \end{aligned}$$

Si, dans la formule (11), on substitue les valeurs de $\mathrm{x}, \mathrm{y}, \mathrm{z}, \ldots, \mathrm{t}$, tirées des équations (8), on trouvera simplement

$$(12)\qquad S[\pm D_x\mathrm{x}\, D_y\mathrm{y}\, D_z\mathrm{z}\ldots D_t\mathrm{t}] = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} ABC\ldots H\mathfrak{P}\mathrm{P},$$

les valeurs de P et de $\mathfrak{P}$ étant

$$(13)\qquad \begin{cases} \mathrm{P} = (y-x)(z-x)\ldots(z-y)\ldots = S[\pm x^0 y^1 z^2\ldots t^{n-1}], \\ \mathfrak{P} = (b-a)(c-a)\ldots(c-b)\ldots = S[\pm a^0 b^1 c^2\ldots h^{n-1}]. \end{cases}$$

On peut aisément, des formules (8), déduire n autres formules dont chacune renferme une seule des variables

$$x,\quad y,\quad z,\quad \ldots,\quad t.$$

En effet, posons pour abréger

$$(14)\qquad \mathrm{f}(r) = (r-a)(r-b)(r-c)\ldots(r-h),$$

et

$$(15)\qquad \mathrm{F}(r) = (r-x)(r-y)(r-z)\ldots(r-t).$$

Chacun des rapports

$$\frac{\mathrm{F}(r)}{r-x},\quad \frac{\mathrm{F}(r)}{r-y},\quad \ldots,\quad \frac{\mathrm{F}(r)}{r-t}$$

sera une fonction entière de r, du degré $n-1$, et dans laquelle le coefficient de r^{n-1} se réduira simplement à l'unité. On aura donc, par suite, en vertu d'un théorème connu,

$$(16)\qquad \mathcal{E}\frac{1}{r-x}\frac{\mathrm{F}(r)}{[\mathrm{f}(r)]_r} = 1,\qquad \ldots,\qquad \mathcal{E}\frac{1}{r-t}\frac{\mathrm{F}(r)}{[\mathrm{f}(r)]_r} = 1.$$

Or, la première des équations (16), pouvant s'écrire comme il suit,

$$\frac{(a-y)\ldots(a-t)}{\mathrm{f}'(a)} + \frac{(b-y)\ldots(b-t)}{\mathrm{f}'(b)} + \ldots + \frac{(h-y)\ldots(h-t)}{\mathrm{f}'(h)} = 1,$$

donnera, eu égard aux formules (8),

$$(17)\qquad \begin{cases} \dfrac{1}{A\mathrm{f}'(a)}\dfrac{\mathrm{x}}{x-a} + \dfrac{1}{B\mathrm{f}'(b)}\dfrac{\mathrm{y}}{x-b} + \ldots + \dfrac{1}{H\mathrm{f}'(h)}\dfrac{\mathrm{t}}{x-h} = (-1)^{n-1}. \\ \quad\text{On aura de même} \\ \dfrac{1}{A\mathrm{f}'(a)}\dfrac{\mathrm{x}}{y-a} + \dfrac{1}{B\mathrm{f}'(b)}\dfrac{\mathrm{y}}{y-b} + \ldots + \dfrac{1}{H\mathrm{f}'(h)}\dfrac{\mathrm{t}}{y-h} = (-1)^{n-1}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \dfrac{1}{A\mathrm{f}'(a)}\dfrac{\mathrm{x}}{t-a} + \dfrac{1}{B\mathrm{f}'(b)}\dfrac{\mathrm{y}}{t-b} + \ldots + \dfrac{1}{H\mathrm{f}'(h)}\dfrac{\mathrm{t}}{t-h} = (-1)^{n-1}. \end{cases}$$

En d'autres termes,

$$x,\quad y,\quad z,\quad \ldots,\quad t,$$

considérés comme fonctions de

$$\mathrm{x},\quad \mathrm{y},\quad \mathrm{z},\quad \ldots,\quad \mathrm{t},$$

représenteront les n racines de l'équation

$$\text{(18)}\qquad \frac{1}{A\,\mathrm{F}'(a)}\,\frac{\mathrm{x}}{r-a}+\frac{1}{B\,\mathrm{F}'(b)}\,\frac{\mathrm{y}}{r-b}+\ldots+\frac{1}{H\,\mathrm{F}'(h)}\,\frac{\mathrm{t}}{r-h}=(-1)^{n-1},$$

résolue par rapport à r.

En partant des formules (17), on déterminerait aisément la valeur de la résultante

$$\mathrm{S}[\pm\mathrm{D_x}x\,\mathrm{D_y}y\,\mathrm{D_z}z\ldots\mathrm{D_t}t],$$

et en appliquant à cette résultante les méthodes de réduction employées par M. Catalan, dans son Mémoire sur la transformation des intégrales multiples, on trouverait qu'elle se réduit, comme cela doit être, à l'unité divisée par le second membre de la formule (12).

Si l'on supposait les variables

$$\mathrm{x},\quad \mathrm{y},\quad \mathrm{z},\quad \ldots.\quad \mathrm{t}$$

déterminées en fonctions de

$$x,\quad y,\quad z,\quad \ldots.\quad t$$

par des équations de la forme

$$\text{(19)}\qquad \left\{\begin{aligned}
\mathrm{x}&=A\,\frac{(x-a)(y-a)(z-a)\ldots(t-a)}{(x-k)(y-k)(z-k)\ldots(t-k)},\\
\mathrm{y}&=B\,\frac{(x-b)(y-b)(z-b)\ldots(t-b)}{(x-k)(y-k)(z-k)\ldots(t-k)},\\
\mathrm{z}&=C\,\frac{(x-c)(y-c)(z-c)\ldots(t-c)}{(x-k)(y-k)(z-k)\ldots(t-k)},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
\mathrm{t}&=H\,\frac{(x-h)(y-h)(z-h)\ldots(t-h)}{(x-k)(y-k)(z-k)\ldots(t-k)},
\end{aligned}\right.$$

alors, en opérant toujours de la même manière, on trouverait

$$\begin{array}{lll}
\mathrm{D}_x\mathrm{x}=\mathrm{x}\,\dfrac{a-k}{(x-a)(x-k)}, & \mathrm{D}_y\mathrm{x}=\mathrm{x}\,\dfrac{a-k}{(y-a)(y-k)}, & \ldots,\\
\mathrm{D}_x\mathrm{y}=\mathrm{y}\,\dfrac{b-k}{(x-b)(x-k)}, & \mathrm{D}_y\mathrm{y}=\mathrm{y}\,\dfrac{b-k}{(y-b)(y-k)}, & \ldots,\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, & \ldots,
\end{array}$$

et par suite

$$\text{(20)}\qquad \begin{aligned}
&\mathrm{S}[\pm\mathrm{D}_x\mathrm{x}\,\mathrm{D}_y\mathrm{y}\,\mathrm{D}_z\mathrm{z}\ldots\mathrm{D}_t\mathrm{t}]\\
&\quad=\mathrm{xyz}\ldots\mathrm{t}\,\frac{(a-k)\ldots(h-k)}{(x-k)\ldots(t-k)}\,\mathrm{S}\left[\pm\frac{1}{(x-a)(y-b)(z-c)\ldots(t-h)}\right],
\end{aligned}$$

ou, ce qui revient au même,

$$\text{(21)}\qquad \begin{aligned}
&\mathrm{S}[\pm\mathrm{D}_x\mathrm{x}\,\mathrm{D}_y\mathrm{y}\,\mathrm{D}_z\mathrm{z}\ldots\mathrm{D}_t\mathrm{t}]\\
&\quad=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\,\mathrm{xyz}\ldots\mathrm{t}\\
&\qquad\times\frac{(a-k)\ldots(h-k)}{(x-k)\ldots(t-k)}\,\frac{\mathfrak{P}\mathrm{P}}{(x-a)(x-b)\ldots(x-h)\ldots(t-a)\ldots(t-h)},
\end{aligned}$$

les valeurs de P, $\mathfrak{P}$ étant toujours déterminées par les formules (13).

Si, dans la formule (20), on substitue les valeurs de

$$\mathrm{x},\quad \mathrm{y},\quad \mathrm{z},\quad \ldots,\quad \mathrm{t}$$

tirées des équations (19), elle donnera simplement

$$\text{(22)}\qquad \begin{aligned}
&\mathrm{S}[\pm\mathrm{D}_x\mathrm{x}\,\mathrm{D}_y\mathrm{y}\,\mathrm{D}_z\mathrm{z}\ldots\mathrm{D}_t\mathrm{t}]\\
&\quad=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\,ABC\ldots H\,\frac{(a-k)(b-k)\ldots(h-k)}{[(x-k)(y-k)\ldots(t-k)]^{n+1}}\,\mathfrak{P}\mathrm{P}.
\end{aligned}$$