MÉMOIRE

SUR

L'ÉLIMINATION D'UNE VARIABLE

ENTRE DEUX ÉQUATIONS ALGÉBRIQUES.

Considérations générales.

Euler et Bezout ont reconnu que, dans l'élimination d'une variable entre deux équations algébriques, la multiplication peut être substituée à la division. Il y a plus : ces auteurs ont exposé trois méthodes remarquables d'élimination, toutes trois indépendantes de la division algébrique.

Une première méthode d'élimination, qui se trouve exposée par Euler dans les *Mémoires de l'Académie de Berlin* dès l'année 1748, et qui, au jugement d'Euler, pourrait être attribuée à Newton lui-même, consiste à remplacer deux équations algébriques d'un même degré n par deux équations algébriques du degré immédiatement inférieur $n-1$. Si, avec un auteur anglais M. Sylvester, on nomme équations dérivées toutes celles qui se déduisent du système des deux équations données, les deux nouvelles équations seront deux dérivées du degré $n-1$; savoir, celles qu'on obtient lorsque l'on combine entre elles, par voie de soustraction, les deux équations algébriques données, après avoir multiplié chacune d'elles par le premier et par le dernier des coefficients que renferme l'autre.

Cette première méthode est d'ailleurs applicable au cas même où les degrés des équations algébriques données sont inégaux, attendu qu'une équation d'un degré inférieur à n peut être considérée comme

une équation du degré n, dans laquelle les coefficients de quelques termes se réduisent à zéro.

Suivant une seconde méthode, donnée à Paris par Bezout et à Berlin par Euler dans les *Mémoires de l'Académie* de 1764, pour éliminer une inconnue x entre deux équations algébriques données dont les degrés sont n et m, il suffit de combiner ces équations entre elles par voie d'addition, après les avoir respectivement multipliées par deux polynomes dont le premier soit du degré $m-1$, le second du degré $n-1$; puis de choisir les coefficients de ces polynomes de manière à faire disparaître dans l'équation résultante toutes les puissances de x. L'élimination de x entre les deux équations algébriques données se réduit donc à l'élimination des coefficients dont nous venons de parler, entre les équations linéaires auxquelles ces mêmes coefficients doivent satisfaire, c'est-à-dire, en d'autres termes, au calcul d'une *fonction alternée*, formée avec les coefficients des deux équations algébriques, et l'on est ainsi conduit immédiatement à la règle d'élimination énoncée par M. Sylvester, dans le n° 101 du *Philosophical Magazine* (février 1840). La fonction alternée dont il s'agit est d'ailleurs, comme l'a remarqué M. Richelot, et comme on devait s'y attendre, celle qui se déduit directement de l'élimination des diverses puissances de x entre les équations algébriques données et ces mêmes équations respectivement multipliées par celles de ces puissances dont les degrés sont inférieurs aux nombres m ou n.

En examinant de près les deux méthodes d'élimination que nous venons de rappeler, et les comparant l'une à l'autre, on reconnait aisément que la première méthode introduit dans le premier membre de l'équation finale des facteurs qui sont naturellement étrangers à cette même équation. Il n'en est pas de même de la seconde méthode. Mais la fonction alternée, dont celle-ci exige la formation, résultera d'une élimination effectuée entre $m+n$ équations linéaires, m, n étant les degrés des équations algébriques données; et par conséquent de l'*ordre* $m+n$, si l'on mesure l'ordre d'une fonction alternée par le nombre des facteurs contenus dans chacun des termes dont elle se compose. D'ailleurs, pour une fonction alternée de l'ordre n, le nombre des termes serait égal au produit

$$1.2.3\ldots n.$$

Donc, pour une fonction alternée de l'ordre $n+m$, le nombre des termes sera représenté généralement par le produit

$$1.2.3\ldots(m+n).$$

Or ce produit devient très grand pour des valeurs même peu considérables de m et de n. Si, pour fixer les idées, on suppose

$$m=4, \qquad n=4,$$

c'est-à-dire si les équations algébriques données sont l'une et l'autre du quatrième degré, le premier membre de l'équation finale sera une fonction alternée du huitième ordre, et qui, en raison de cet ordre, devrait renfermer

$$1.2.3.4.5.6.7.8=40320$$

termes. Il est vrai que sur ces 40320 termes beaucoup s'évanouissent. Mais la recherche des valeurs et surtout des signes des termes qui ne s'évanouissent pas demandera trop d'attention, et le nombre même de ces termes sera encore trop considérable pour que l'on n'arrive pas sans beaucoup de peine à former la fonction alternée du huitième ordre, qu'il s'agissait d'obtenir.

Comme le nombre des termes d'une fonction alternée décroît très rapidement avec l'ordre de cette fonction, il est clair que, si le premier membre de l'équation finale peut être représenté par deux fonctions alternées d'ordres différents, formées avec deux systèmes de quantités déterminées, celle de ces deux fonctions qui sera d'un ordre moindre sera aussi généralement la plus facile à calculer. Or, comme Bezout l'a fait voir dans son Mémoire de 1764, le problème de l'élimination d'une inconnue x entre deux équations algébriques données peut être réduit à la formation d'une fonction alternée dont l'ordre ne surpasse pas le degré de chacune de ces équations, et cette réduction peut être effectuée sans qu'aucun facteur étranger se trouve introduit. C'est même

par un procédé très simple que Bezout réduit généralement l'élimination de x entre deux équations algébriques du degré n, à la formation d'une seule fonction alternée de l'ordre n. Si, pour faciliter les calculs, on dispose en carré les diverses quantités dont cette fonction alternée se compose, les quantités situées sur une diagonale seront les seules qui ne se trouveront pas répétées, et les autres seront deux à deux égales entre elles, deux quantités égales étant toujours placées symétriquement de part et d'autre de la diagonale dont il s'agit. En conséquence, l'équation finale, telle que Bezout l'obtient, a pour premier membre une fonction alternée de l'ordre n, formée avec des quantités dont le nombre se trouve représenté simplement par la somme

$$1+2+3+\ldots+n=\frac{n(n+1)}{2}.$$

Par suite, aussi, le nombre des termes distincts, dont se compose cette fonction alternée, s'abaisse au-dessous du produit

$$1.2.3\ldots n,$$

plusieurs de ces termes étant égaux deux à deux, et deux termes égaux pouvant être toujours réunis l'un à l'autre, de manière à former un seul terme qui renferme l'un des facteurs numériques

$$2, \quad 4, \quad 8, \quad \ldots.$$

Si, pour fixer les idées, on suppose que les deux équations algébriques données soient du quatrième degré, le premier membre de l'équation finale, obtenue comme on vient de le dire, sera représenté non plus par une fonction alternée du huitième ordre, c'est-à-dire de l'ordre de celles qui renferment généralement 40320 termes, mais par une fonction alternée du quatrième ordre, et qui, en raison de cet ordre, devra renfermer seulement 24 termes. Ajoutons même que ces 24 termes se réduiront à 17, 14 étant deux à deux égaux entre eux.

Il est encore essentiel d'observer que la fonction alternée dont il s'agit est du genre de celles que l'on obtient quand on élimine diverses variables $x, y, z, \ldots$ entre les diverses dérivées d'une équation homogène du second degré, et par conséquent, du genre de celle qui expriment que l'un des demi-axes d'une ellipse ou d'un ellipsoïde devient infini, l'ellipse se transformant alors en une droite, ou l'ellipsoïde en un cylindre.

C'est d'abord aux deux méthodes d'élimination ci-dessus rappelées, puis ensuite à la méthode abrégée de Bezout, que se rapporteront les deux premiers paragraphes de ce Mémoire. Dans le dernier paragraphe, je déduirai, d'un théorème donné par Euler, une quatrième méthode qui offre de grands avantages, quand les degrés des équations données ne se réduisent pas à des nombres peu considérables.

I. — *Méthodes d'élimination, de Bezout et d'Euler.*

Soient

$$\mathrm{f}(x) = 0, \qquad \mathrm{F}(x) = 0 \tag{1}$$

deux équations algébriques, la première du degré n, la seconde du degré $m =$ ou $< n$. Suivant la méthode donnée à Paris par Bezout et à Berlin par Euler en l'année 1764, pour éliminer x entre les deux équations données, il suffira de les combiner entre elles par addition, après les avoir respectivement multipliées par deux polynomes

$$u, \quad v,$$

dont le premier soit du degré $m - 1$, le second du degré $n - 1$, puis de choisir les coefficients de ces polynomes de manière à faire disparaitre, dans l'équation résultante, toutes les puissances de x. Supposons, pour fixer les idées, que les fonctions $\mathrm{f}(x)$, $\mathrm{F}(x)$ soient l'une du troisième degré, l'autre du second, en sorte qu'on ait

$$\mathrm{f}(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d, \qquad \mathrm{F}(x) = \mathrm{A}x^2 + \mathrm{B}x + \mathrm{C}.$$

Alors u, v devront être de la forme

$$u = \mathrm{P}x + \mathrm{Q}, \qquad v = px^2 + qx + r;$$

et, si l'on élimine x entre les deux équations

$$\mathrm{f}(x) = 0, \qquad \mathrm{F}(x) = 0,$$

l'équation résultante sera précisément celle qu'on obtiendra, lorsqu'on choisira les coefficients

$$p, \quad q, \quad r, \quad \mathrm{P}, \quad \mathrm{Q}$$

de manière à faire disparaitre x de la formule

$$u\,\mathrm{f}(x) + v\,\mathrm{F}(x) = 0, \tag{2}$$

par conséquent de la formule

$$(\mathrm{P}x + \mathrm{Q})\,\mathrm{f}(x) + (px^2 + qx + r)\,\mathrm{F}(x) = 0,$$

que l'on peut encore écrire comme il suit :

$$\mathrm{P}x\,\mathrm{f}(x) + \mathrm{Q}\,\mathrm{f}(x) + px^2\,\mathrm{F}(x) + qx\,\mathrm{F}(x) + r\,\mathrm{F}(x) = 0. \tag{3}$$

Les valeurs de

$$p, \quad q, \quad r, \quad \mathrm{P}, \quad \mathrm{Q}$$

qui remplissent cette condition sont celles qui vérifient les équations linéaires

$$\left\{\begin{array}{l} a\mathrm{P} + \mathrm{A}p = 0, \\ b\mathrm{P} + a\mathrm{Q} + \mathrm{B}p + \mathrm{A}q = 0, \\ c\mathrm{P} + b\mathrm{Q} + \mathrm{C}p + \mathrm{B}q + \mathrm{A}r = 0, \\ d\mathrm{P} + c\mathrm{Q} + \mathrm{C}q + \mathrm{B}r = 0, \\ d\mathrm{Q} + \mathrm{C}r = 0. \end{array}\right. \tag{4}$$

Donc pour obtenir la résultante cherchée, il suffira d'éliminer les coefficients

$$\mathrm{P}, \quad \mathrm{Q}, \quad p, \quad q, \quad r$$

entre les équations (4), ou, ce qui revient au même, d'égaler à zéro la fonction alternée formée avec les quantités que présente le Tableau

$$\left\{\begin{array}{lllll} a, & 0, & \mathrm{A}, & 0, & 0, \\ b, & a, & \mathrm{B}, & \mathrm{A}, & 0, \\ c, & b, & \mathrm{C}, & \mathrm{B}, & \mathrm{A}, \\ d, & c, & 0, & \mathrm{C}, & \mathrm{B}, \\ 0, & d, & 0, & 0, & \mathrm{C}. \end{array}\right. \tag{5}$$

On arriverait encore aux mêmes conclusions en partant de la formule (3). En effet, choisir les coefficients P, Q, p, q, r, de manière à faire disparaître de cette formule les diverses puissances

$$x, \quad x^2, \quad x^3, \quad \ldots, \quad x^{m+n-1},$$

de la variable x, c'est éliminer ces puissances des cinq équations

$$(6) \qquad x\,f(x)=0, \qquad f(x)=0, \qquad x^2 F(x)=0, \qquad x\,F(x)=0, \qquad F(x)=0,$$

ou

$$(7) \qquad \left\{ \begin{aligned} ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx \phantom{{}+d} &= 0, \\ ax^3 + bx^2 + cx + d &= 0, \\ Ax^4 + Bx^3 + Cx^2 \phantom{{}+Cx+C} &= 0, \\ Ax^3 + Bx^2 + Cx \phantom{{}+C} &= 0, \\ Ax^2 + Bx + C &= 0. \end{aligned} \right.$$

C'est donc égaler à zéro la fonction alternée formée avec les quantités que présente le Tableau

$$(8) \qquad \left\{ \begin{matrix} a, & b, & c, & d, & 0, \\ 0, & a, & b, & c, & d, \\ A, & B, & C, & 0, & 0, \\ 0, & A, & B, & C, & 0, \\ 0, & 0, & A, & B, & C. \end{matrix} \right.$$

Or cette fonction alternée ne différera pas de celle que nous avons déjà mentionnée, attendu que, pour passer du Tableau (5) au Tableau (8), il suffit de remplacer les lignes horizontales par les lignes verticales, et réciproquement. Ainsi la méthode d'élimination indiquée à la fois par Bezout et par Euler, en 1764, conduit précisément à la règle énoncée par M. Sylvester dans le n° 101 du *Philosophical Magazine* (février 1840). On pourrait même considérer la règle dont il s'agit comme établie par Bezout dans le Mémoire de 1764, page 318. D'ailleurs la considération des équations (6) ou (7), qui subsistent toujours en même temps que les équations (1), et s'en déduisent immédiatement, fournit de cette règle une démonstration tellement

simple, qu'elle peut être introduite sans inconvénient dans les éléments d'Algèbre.

Observons toutefois que l'ordre ou le degré de la fonction alternée, dont cette règle exige la formation, c'est-à-dire le nombre des quantités qui entrent comme facteurs dans chacun des termes dont cette fonction se compose, est toujours égal à la somme $m+n$ des degrés des deux équations données. Cette même somme, diminuée seulement d'une unité, représenterait le nombre des puissances de x qui doivent être éliminées des équations (6) ou d'autres semblables, ainsi que le degré de deux de ces équations. On peut demander s'il ne serait pas possible d'arriver à l'équation résultante, à l'aide de multiplications algébriques, en opérant de manière à ne pas introduire dans le calcul des puissances de x supérieures à celles que renferment les deux équations proposées. Cette dernière condition se trouve effectivement remplie, lorsqu'on se sert pour effectuer l'élimination d'une ancienne méthode indiquée par Euler dès l'année 1748 dans les *Mémoires de l'Académie de Berlin*. Suivant cette ancienne méthode, qu'Euler semble attribuer à Newton dans le Mémoire de 1764, étant données deux équations en x d'un même degré n, par exemple les deux suivantes

$$\begin{aligned} ax^n + bx^{n-1} + cx^{n-2} + \ldots + gx^2 + hx + k &= 0, \\ Ax^n + Bx^{n-1} + Cx^{n-2} + \ldots + Gx^2 + Hx + K &= 0, \end{aligned}$$

on commencera par leur substituer deux équations du degré $n-1$, savoir, celles que l'on obtient en combinant par voie de soustraction les deux premières, respectivement multipliées l'une par A, l'autre par a, ou l'une par $\frac{K}{x}$, l'autre par $\frac{k}{x}$. Après avoir ainsi remplacé les deux équations proposées par les deux suivantes

$$\begin{aligned} (Ab-aB)x^{n-1} + (Ac-aC)x^{n-2} + \ldots + (Ah-aH)x + Ak - aK &= 0, \\ (Ak-aK)x^{n-1} + (Bk-bK)x^{n-2} + \ldots + (Gk-gK)x + Hk - hK &= 0, \end{aligned}$$

on remplacera celles-ci à leur tour, à l'aide d'un semblable procédé, par deux équations du degré $n-2$; et, en continuant de la sorte, on finira par obtenir une seule équation du degré zéro qui sera la résultante cherchée.

Pour s'assurer que la même méthode reste applicable à l'élimination de la variable x entre deux équations de degrés inégaux n et $m < n$, il suffit d'observer qu'une équation de degré inférieur à n peut être envisagée comme une équation du degré n, dans laquelle les premiers coefficients se réduiraient à zéro.

En examinant les deux formes sous lesquelles peut se présenter l'équation résultante ou finale, suivant qu'on emploie pour l'élimination de x l'une ou l'autre des deux méthodes que nous venons de rappeler, on reconnaîtra que le premier membre de cette équation, considéré comme fonction des coefficients

$$a, \quad b, \quad c, \quad \ldots, \qquad A, \quad B, \quad C, \quad \ldots,$$

est, dans le cas où l'on se sert des polynomes multiplicateurs u et v, une fonction du degré $m + n$, et par suite, quand on suppose $m = n$, une fonction du degré $2n$. Au contraire, l'ancienne méthode substitue successivement à deux équations données, dont les premiers membres sont du degré n par rapport à la variable x, et du premier degré par rapport aux coefficients

$$a, \quad b, \quad c, \quad \ldots, \qquad A, \quad B, \quad C, \quad \ldots,$$

des équations diverses dont les premiers membres sont d'abord du degré $n - 1$ par rapport à x, et du second degré par rapport aux mêmes coefficients; puis du degré $n - 2$ par rapport à x, et du quatrième degré par rapport aux coefficients, etc. Donc l'équation finale, déduite de l'ancienne méthode, sera du deuxième degré par rapport aux coefficients

$$a, \quad b, \quad c, \quad \ldots, \qquad A, \quad B, \quad C, \quad \ldots.$$

Donc, lorsque n surpasse 2, l'ancienne méthode introduit dans l'équation finale un facteur étranger dont le degré est

$$2^n - 2n.$$

On trouve dans l'Ouvrage d'Euler qui a pour titre *Introductio in analysin infinitorum*, et mieux encore, dans un Mémoire de M. Gergonne, l'indication de procédés que l'on peut employer pour débarrasser le premier membre de l'équation finale du facteur étranger, ou même pour éviter l'introduction de ce facteur. Mais ces procédés exigent qu'on s'élève graduellement du cas où l'on suppose $n = 2$ au cas où l'on suppose $n = 3$, puis de ce dernier au cas ou l'on suppose $n = 4$, etc.; et l'on peut, comme Bezout l'a fait voir, substituer aux deux méthodes d'élimination ci-dessus rappelées une troisième méthode qui, sans introduire aucun facteur étranger dans le premier membre de l'équation finale, réduit la détermination de ce premier membre à la formation d'une fonction alternée dont l'ordre ne surpasse jamais le degré de chacune des équations données.

II. — *Méthode abrégée de Bezout.*

Soient toujours

$$\text{(1)} \qquad f(x) = 0, \qquad F(x) = 0$$

deux équations algébriques, la première du degré n, la seconde du degré $m =$ ou $< n$. On pourra supposer généralement

$$f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_{n-1} x + a_n,$$
$$F(x) = b_0 x^n + b_1 x^{n-1} + \ldots + b_{n-1} x + b_n,$$

un ou plusieurs des coefficients

$$b_0, \quad b_1, \quad b_2, \quad \ldots$$

devant être réduits à zéro, dans le cas où l'on aurait $m < n$; et l'équation finale, qui résultera de l'élimination de la variable x entre les formules (1), exprimera simplement la condition à laquelle les coefficients

$$a_0, \quad a_1, \quad \ldots, \quad a_n; \qquad b_0, \quad b_1, \quad \ldots, \quad b_n$$

devront satisfaire, pour que les équations (1) soient vérifiées par une seule et même valeur de x. Voyons maintenant comment on devra s'y prendre pour effectuer cette élimination, c'est-à-dire pour éliminer des deux formules

$$(2) \qquad \begin{cases} a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_{n-1} x + a_n = 0, \\ b_0 x^n + b_1 x^{n-1} + \ldots + b_{n-1} x + b_n = 0 \end{cases}$$

les puissances de la variable x, représentées par les divers termes de la suite

$$x^n, \quad x^{n-1}, \quad \ldots, \quad x.$$

J'observerai d'abord que, pour éliminer x^n entre les équations (2), il suffit de combiner entre elles, par voie de division, ces deux équations présentées sous les formes

$$a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_l x^{n-l} = -(a_{l+1} x^{n-l-1} + \ldots + a_{n-1} x + a_n),$$
$$b_0 x^n + b_1 x^{n-1} + \ldots + b_l x^{n-l} = -(b_{l+1} x^{n-l-1} + \ldots + b_{n-1} x + b_n),$$

l désignant l'un quelconque des nombres

$$0, \quad 1, \quad 2, \quad \ldots, \quad n-2, \quad n-1.$$

On trouvera ainsi

$$(3) \qquad \frac{a_0 x^l + a_1 x^{l-1} + \ldots + a_l}{b_0 x^l + b_1 x^{l-1} + \ldots + b_l} = \frac{a_{l+1} x^{n-l-1} + \ldots + a_{n-1} x + a_n}{b_{l+1} x^{n-l-1} + \ldots + b_{n-1} x + b_n},$$

puis, en faisant disparaître les dénominateurs,

$$(4) \qquad \begin{cases} (a_0 x^l + a_1 x^{l-1} + \ldots + a_l)(b_{l+1} x^{n-l-1} + \ldots + b_{n-1} x + b_n) \\ -(b_0 x^l + b_1 x^{l-1} + \ldots + b_l)(a_{l+1} x^{n-l-1} + \ldots + a_{n-1} x + a_n) = 0. \end{cases}$$

Si, pour abréger, on désigne par

$$A_{k,l}$$

le coefficient de x^{n-k-1} dans le premier membre de l'équation (4), on aura non seulement, quels que soient k et l,

$$(5) \qquad A_{k,l} = A_{l,k},$$

mais encore, pour $k < l$,

$$(6) \qquad \begin{cases} A_{0,l} = a_0 b_{l+1} - b_0 a_{l+1}, \\ A_{1,l} = a_1 b_{l+1} - b_1 a_{l+1} + A_{0,l+1}, \\ A_{2,l} = a_2 b_{l+1} - b_2 a_{l+1} + A_{1,l+1}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

et l'équation (4) deviendra

$$(7) \qquad A_{0,l} x^{n-1} + A_{1,l} x^{n-2} + \ldots + A_{n-2,l} x + A_{n-1,l} = 0.$$

Si, dans cette dernière équation, de laquelle la $n^{\text{ième}}$ puissance de x se trouve effectivement éliminée, on attribue successivement à l les valeurs

$$0, \quad 1, \quad 2, \quad \ldots, \quad n-2, \quad n-1,$$

on obtiendra le système des formules

$$(8) \qquad \begin{cases} A_{0,0}\ x^{n-1} + A_{1,0}\ x^{n-2} + \ldots + A_{n-2,0}\ x + A_{n-1,0} = 0, \\ A_{0,1}\ x^{n-1} + A_{1,1}\ x^{n-2} + \ldots + A_{n-2,1}\ x + A_{n-1,1} = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ A_{0,n-1} x^{n-1} + A_{1,n-1} x^{n-2} + \ldots + A_{n-2,n-1} x + A_{n-1,n-1} = 0, \end{cases}$$

dont la première et la dernière sont précisément celles qu'on emploie dans l'ancienne méthode d'élimination dont nous avons déjà parlé (p. 473). Cela posé, il est clair qu'on pourra éliminer d'un seul coup, entre les équations (8), les puissances de x représentées par les divers termes de la progression géométrique

$$x^{n-1}, \quad x^{n-2}, \quad \ldots, \quad x^2, \quad x.$$

L'équation finale, résultant de cette élimination, sera de la forme

$$(9) \qquad s = 0,$$

s étant la fonction alternée de l'ordre n, formée avec les quantités que renferme le Tableau

$$\left\{\begin{array}{lllll} A_{0,0}, & A_{0,1}, & \ldots, & A_{0,n-2}, & A_{0,n-1}, \\ A_{0,1}, & A_{1,1}, & \ldots, & A_{1,n-2}, & A_{1,n-1}, \\ \ldots, & \ldots, & \ldots, & \ldots\ldots, & \ldots\ldots, \\ A_{0,n-2}, & A_{1,n-2}, & \ldots, & A_{n-2,n-2}, & A_{n-2,n-1}, \\ A_{0,n-1}, & A_{1,n-1}, & \ldots, & A_{n-2,n-1}, & A_{n-1,n-1}: \end{array}\right. \tag{10}$$

C'est en effet ce qu'on conclura immédiatement des équations (8), jointes à la formule (5).

La méthode abrégée d'élimination, que nous venons de rappeler, ne diffère pas au fond de celle que Bezout a indiquée dans le Mémoire de 1764, page 319.

Il est facile de voir quel sera le degré de la quantité s, déterminée par cette méthode, et considérée comme fonction des coefficients

$$a_0, \quad a_1, \quad \ldots, \quad a_n; \qquad b_0, \quad b_1, \quad \ldots, \quad b_n.$$

En effet, chaque terme de s renfermant n facteurs de la forme $A_{k,l}$, et chacun de ces facteurs étant du second degré, en vertu des équations (6), s ou le premier membre de l'équation finale sera nécessairement du degré $2n$, tout comme dans le cas où l'on applique la règle énoncée par M. Sylvester. Il y a plus : on peut déjà pressentir la réalité d'une assertion qui sera plus tard changée en certitude, savoir, que la valeur de s, fournie par la méthode abrégée, coïncide, au signe près, avec celle que fournirait la règle dont il s'agit. Effectivement, d'après cette règle, lorsqu'on suppose $m = n$, le premier membre de l'équation finale renferme une seule fois le terme

$$a_0^n b_n^n.$$

Or ce même terme, pris avec son signe ou avec un signe contraire, se retrouve encore une seule fois dans la fonction alternée $\pm s$ formée à l'aide du Tableau (10), savoir, dans la partie de $\pm s$ qui est représentée par le produit

$$A_{0,n-1}A_{1,n-2}, \quad \ldots, \quad A_{1,n-2}A_{0,n-1},$$

et même dans la partie de ce produit qui, en vertu des formules

$$\begin{aligned} A_{1,n-1} &= a_1 b_{n-1} - b_1 a_{n-1} + A_{0,n-1}, \\ A_{2,n-2} &= a_2 b_{n-2} - b_2 a_{n-2} + A_{1,n-2} \\ &= a_2 b_{n-2} - b_2 a_{n-2} + a_1 b_{n-1} - b_1 a_{n-1} + A_{0,n-1}, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{aligned}$$

se réduit simplement à la puissance

$$A_{0,n-1}^n = (a_0 b_n - a_n b_0)^n.$$

Il importe d'observer que, dans le carré figuré par le Tableau (6), les termes de la forme

$$A_{l,l}$$

se trouvent tous situés sur une même diagonale, et que les autres termes sont égaux deux à deux, les termes égaux étant placés symétriquement par rapport à la diagonale dont il s'agit. Cette propriété du Tableau (6) est une conséquence immédiate de la formule (5) et entraîne à son tour la proposition suivante :

Théorème. — *L'équation finale* (9), *qui résulte de l'élimination de x entre les équations* (2), *est aussi celle qu'on obtiendrait en éliminant n variables*

$$x, \quad y, \quad z, \quad \ldots$$

entre les diverses dérivées d'une équation du second degré

$$s = 0, \tag{11}$$

dans laquelle on aurait

$$\left\{\begin{aligned} s = {} & A_{0,0}x^2 + A_{1,1}y^2 + A_{2,2}z^2 + \ldots \\ & + 2A_{0,1}xy + 2A_{0,2}xz + \ \ldots\ + 2A_{1,2}yz + \ldots. \end{aligned}\right. \tag{12}$$

L'équation (9) *est donc celle qu'on obtiendrait en assujettissant les variables $x, y, z, \ldots$ à la condition*

$$s = \text{const.}, \tag{13}$$

et cherchant la relation qui doit exister entre les coefficients

$$A_{0,0},\quad A_{0,1},\quad A_{0,2},\quad \ldots,\quad A_{1,1},\quad A_{1,2},\quad \ldots,\quad A_{2,2},\quad \ldots$$

pour qu'une valeur maximum ou minimum de la fonction r, déterminée par la formule

$$r=\sqrt{x^2+y^2+z^2\ldots}, \tag{14}$$

devienne infinie.

III. — *Usage des fonctions symétriques dans la théorie de l'élimination.*

Dans les paragraphes précédents, nous avons rappelé trois méthodes d'élimination ; et, quoique deux de ces méthodes n'introduisent dans l'équation finale aucun facteur étranger, toutes deux, même la plus concise, la méthode abrégée de Bezout, deviennent à peu près impraticables, lorsque les degrés des équations données s'élèvent au delà du cinquième ou du sixième ; à moins qu'on n'ait recours, pour la formation des fonctions alternées, à des artifices de calcul qui permettent, comme nous l'expliquerons dans un autre Mémoire, d'évaluer ces fonctions, sans calculer séparément chacun de leurs termes. De semblables artifices ne deviennent point nécessaires, lorsqu'on fait servir à l'élimination une quatrième méthode fondée sur un théorème d'Euler et sur la considération des fonctions symétriques. Entrons à ce sujet dans quelques détails.

Soient toujours

$$f(x)=0,\qquad F(x)=0 \tag{1}$$

deux équations algébriques, la première du degré n, la seconde du degré m ; et supposons, pour plus de commodité, les coefficients des plus hautes puissances de x, dans ces mêmes équations, réduits à l'unité ; en sorte qu'on ait, par exemple,

$$\begin{aligned} f(x)&=x^n+lx^{n-1}+\ldots+px+q,\\ F(x)&=x^m+Lx^{m-1}+\ldots+Px+Q.\end{aligned}$$

Enfin désignons respectivement par

$$\alpha,\quad 6,\quad \gamma,\quad \ldots\qquad \text{et par}\qquad \lambda,\quad \mu,\quad \nu,\quad \ldots$$

les racines de la première et de la seconde des équations (1), de sorte qu'on ait encore

$$\begin{aligned} f(x)&=(x-\alpha)(x-6)(x-\gamma)\ldots,\\ F(x)&=(x-\lambda)(x-\mu)(x-\nu)\ldots.\end{aligned}$$

Pour que les équations (1) subsistent simultanément, ou, en d'autres termes, soient vérifiées par une même valeur de x, il sera nécessaire et il suffira que les coefficients

$$l,\quad \ldots,\quad p,\quad q;\qquad L,\quad \ldots,\quad P,\quad Q$$

soient liés entre eux de manière que les racines

$$\alpha,\quad 6,\quad \gamma,\quad \ldots;\qquad \lambda,\quad \mu,\quad \nu,\quad \ldots$$

satisfassent à l'une des conditions

$$\begin{array}{llll} \alpha=\lambda, & \alpha=\mu, & \alpha=\nu, & \ldots,\\ 6=\lambda, & 6=\mu, & 6=\nu, & \ldots,\\ \gamma=\lambda, & \gamma=\mu, & \gamma=\nu, & \ldots,\\ \ldots\ldots, & \ldots\ldots, & \ldots\ldots, & \ldots\end{array}$$

par conséquent à la condition

$$s=0, \tag{2}$$

la valeur de s étant

$$s=(\alpha-\lambda)(\alpha-\mu)(\alpha-\nu)\ldots(6-\lambda)(6-\mu)6-\nu)\ldots(\gamma-\lambda)(\gamma-\mu)(\gamma-\nu)\ldots$$

Donc, si l'on adopte cette valeur de s, l'équation (2) devra s'accorder ou même coïncider avec l'équation finale que produirait l'élimination de x entre les équations (1). C'est en cela que consiste le théorème d'Euler.

Il est facile de s'assurer que la valeur de s, déterminée comme on vient de le dire, sera une fonction entière des coefficients

$$l,\quad \ldots,\quad p,\quad q;\qquad L,\quad \ldots,\quad P,\quad Q.$$

En effet cette valeur se réduit, au signe près, au dernier terme de l'équation qui aurait pour racines les binomes

$$\begin{array}{llll} \alpha-\lambda, & \alpha-\mu, & \alpha-\nu, & \ldots, \\ 6-\lambda, & 6-\mu, & 6-\nu, & \ldots, \\ \gamma-\lambda, & \gamma-\mu, & \gamma-\nu, & \ldots, \\ \ldots\ldots, & \ldots\ldots, & \ldots\ldots, & \ldots\ldots \end{array}$$

Donc elle sera une fonction entière des quantités de la forme

$$s_1, \quad s_2, \quad \ldots, \quad s_{mn},$$

si l'on pose généralement

$$(3) \qquad \left\{ \begin{aligned} s_i = {} & (\alpha-\lambda)^i + (\alpha-\mu)^i + (\alpha-\nu)^i \ldots \\ & + (6-\lambda)^i + (6-\mu)^i + (6-\nu)^i \ldots \\ & + (\gamma-\lambda)^i + (\gamma-\mu)^i + (\gamma-\nu)^i \ldots \\ & + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned} \right.$$

D'ailleurs, en développant les puissances de binomes renfermées dans la formule (3) et posant, pour abréger,

$$s_i = \alpha^i + 6^i + \gamma^i + \ldots, \qquad S_i = \lambda^i + \mu^i + \nu^i + \ldots,$$

on tirera généralement de cette formule

$$(4) \qquad s_i = s_i S_0 - \frac{i}{1} s_{i-1} S_1 + \frac{i(i-1)}{1.2} s_{i-2} S_2 - \ldots \pm s_0 S_i.$$

Donc, puisqu'en vertu de formules connues, s_i, S_i peuvent être exprimés en fonctions entières des coefficients

$$l, \quad \ldots, \quad p, \quad q; \qquad L, \quad \ldots, \quad P, \quad Q,$$

on pourra en dire autant de s_i, et par suite de s.

La série d'opérations que nous venons d'indiquer, en prouvant que le premier membre de l'équation (2) peut être réduit à une fonction entière des coefficients

$$l, \quad \ldots, \quad p, \quad q; \qquad L, \quad \ldots, \quad P, \quad Q,$$

fournit de plus un moyen d'effectuer cette réduction et constitue par conséquent une méthode d'élimination de la variable x entre les

équations (1). D'ailleurs la formule (4), qui, dans cette méthode, se trouve combinée avec d'autres formules déjà connues, comprend comme cas particulier une formule analogue, à l'aide de laquelle, dans son *Traité de la résolution des équations numériques*, Lagrange passe d'une équation donnée à une autre qui a pour racines les carrés des différences entre les racines de la première.

Observons encore qu'en vertu des deux équations identiques

$$\begin{aligned} f(x) &= (x-\alpha)(x-6)(x-\gamma)\ldots, \\ F(x) &= (x-\lambda)(x-\mu)(x-\nu)\ldots \end{aligned}$$

la formule

$$(5) \quad s = (\alpha-\lambda)(\alpha-\mu)(\alpha-\nu)\ldots(6-\lambda)(6-\mu)(6-\nu)\ldots(\gamma-\lambda)(\gamma-\mu)(\gamma-\nu)\ldots$$

peut être réduite, comme Euler l'a remarqué, à l'une quelconque des deux suivantes :

$$(6) \qquad s = F(\alpha)F(6)F(\gamma)\ldots,$$

$$(7) \qquad s = (-1)^{mn} f(\lambda) f(\mu) f(\nu)\ldots.$$

Or, pour transformer l'une quelconque de ces deux dernières valeurs de s, la première par exemple, en une fonction entière des coefficients

$$l, \quad \ldots, \quad p, \quad q; \qquad L, \quad \ldots, \quad P, \quad Q,$$

il suffit de suivre ou là marche indiquée par Euler dans les Mémoires de Berlin de 1748, ou mieux encore celle que j'ai indiquée moi-même dans un Mémoire présenté à l'Académie le 9 août 1824, et de convertir d'abord le produit

$$F(\alpha)F(6)F(\gamma)\ldots = (\alpha^m + L\alpha^{m-1} + \ldots + P\alpha + Q)(6^m + L6^{m-1} + \ldots + P6 + Q)\ldots$$

en une fonction entière des sommes de la forme

$$(\alpha^m + L\alpha^{m-1} + \ldots + P\alpha + Q)^i + (6^m + L6^{m-1} + \ldots + P6 + Q)^i + \ldots,$$

puis chacune de ces sommes, moyennant le développement des puissances des polynomes, en une fonction entière de

$$s_0, \quad s_1, \quad \ldots, \quad s_{mi}.$$

Le premier membre de l'équation (2), transformé comme on vient de le dire en une fonction entière des coefficients

$$l,\ \ldots,\ p,\ q;\quad L,\ \ldots,\ P,\ Q,$$

ne renfermera-t-il aucun facteur étranger à l'équation finale, et représenté lui-même par une fonction entière de ces coefficients, quelles que soient les valeurs qu'on leur attribue ? On lèvera facilement tous les doutes qu'on pourrait conserver à cet égard en s'appuyant sur la proposition suivante :

Premier théorème. — *Les coefficients*

$$l,\ \ldots,\ p,\ q;\quad L,\ \ldots,\ P,\ Q$$

étant supposés quelconques et indépendants les uns des autres, la fonction entière de ces coefficients qui représentera la valeur du produit

$$s = (\alpha-\lambda)(\alpha-\mu)(\alpha-\nu)\ldots(\beta-\lambda)(\beta-\mu)(\beta-\nu)\ldots(\gamma-\lambda)(\gamma-\mu)(\gamma-\nu)\ldots,$$

formé avec les différences entre les racines de la première et de la seconde des équations (1), *ne pourra être généralement et algébriquement décomposée en deux facteurs, représentés tous deux par des fonctions entières de ces mêmes coefficients.*

Démonstration. — En effet, supposons généralement

$$s = s's'',$$

s', s'' désignant, s'il est possible, deux fonctions entières de

$$l,\ \ldots;\ p,\ q;\quad L,\ \ldots,\ P,\ Q.$$

En vertu des relations qui existent entre les coefficients des équations (1) et leurs racines, on pourra exprimer

$$s',\ s''$$

en fonctions entières de

$$\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \ldots,\ \lambda,\ \mu,\ \nu,\ \ldots,$$

et alors on aura identiquement

$$(8)\quad s's'' = (\alpha-\lambda)(\alpha-\mu)(\alpha-\nu)\ldots(\beta-\lambda)(\beta-\mu)(\beta-\nu)\ldots(\gamma-\lambda)(\gamma-\mu)(\gamma-\nu)\ldots$$

Cette dernière équation, devant subsister indépendamment des valeurs attribuées aux racines

$$\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \ldots,\ \lambda,\ \mu,\ \nu,\ \ldots,$$

se vérifiera encore lorsqu'on établira entre ces racines des relations quelconques, par exemple lorsqu'on supposera

$$\alpha = \lambda.$$

Mais alors le second membre de l'équation (8) étant nul, le premier devra l'être aussi. Donc, en prenant $\alpha = \lambda$, on fera évanouir le produit $s's''$, et par suite l'un des facteurs s', s''. Concevons, pour fixer les idées, que ce soit le premier facteur s' qui s'évanouisse, en vertu de la supposition

$$\alpha = \lambda.$$

s', considéré comme fonction de α, sera divisible algébriquement par $\alpha - \lambda$. D'autre part s', pouvant être regardé comme une fonction entière, non seulement des coefficients

$$l,\ \ldots,\ p,\ q,$$

mais encore des coefficients

$$L,\ \ldots,\ P,\ Q,$$

sera par suite une fonction symétrique, non seulement des racines

$$\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \ldots,$$

mais encore des racines

$$\lambda,\ \mu,\ \nu,\ \ldots.$$

Donc s', algébriquement divisible par le binome

$$\alpha - \lambda,$$

aura pour facteur non seulement ce binome, mais encore tous ceux qu'on en déduit en remplaçant la racine α par l'une quelconque des autres racines β, γ, ... de l'équation $f(x) = 0$, et la racine λ par l'une quelconque des autres racines μ, ν, ... de l'équation $F(x) = 0$.

Observons maintenant qu'en vertu de l'équation (8), le produit

$$s's'',$$

considéré comme une fonction des racines

$$\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \ldots,\ \lambda,\ \mu,\ \nu,\ \ldots,$$

sera une fonction du degré mn. Donc mn représentera la somme des degrés des facteurs

$$s' \quad \text{et} \quad s''$$

considérés comme fonctions de ces mêmes racines. Mais, d'après ce qu'on vient de voir, le facteur s', c'est-à-dire celui des facteurs s', s'' qui s'évanouit quand on suppose

$$\alpha = \lambda,$$

sera divisible algébriquement par chacun des binomes que renferme le second membre de l'équation (8). Donc, puisque ces binomes sont généralements distincts et indépendants les uns des autres, s' sera divisible par le produit de tous ces binomes dont le nombre est mn, et, si l'on considère s' comme une fonction des racines

$$\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \ldots,\ \lambda,\ \mu,\ \nu,\ \ldots,$$

le degré de s' ne pourra généralement s'abaisser au-dessous de mn. Donc le degré de l'autre facteur s'' ne pourra s'élever au-dessus de zéro; et cet autre facteur ne pourra être qu'un facteur numérique, indépendant des racines des équations (1), et, par conséquent, des coefficients que renferment ces équations. Donc, tant qu'aucune relation particulière ne se trouve établie entre les coefficients

$$l,\ \ldots,\ p,\ q;\quad \mathrm{L},\ \ldots,\ \mathrm{P},\ \mathrm{Q},$$

ou, ce qui revient au même, entre les racines

$$\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \ldots;\quad \lambda,\ \mu,\ \nu,\ \ldots,$$

il est impossible de décomposer la fonction s en deux facteurs qui soient l'un et l'autre des fonctions entières de

$$l,\ \ldots,\ p,\ q;\quad \mathrm{L},\ \ldots,\ \mathrm{P},\ \mathrm{Q}.$$

Premier corollaire. — Si, contrairement à l'énoncé du théorème, les coefficients

$$l,\ \ldots;\ p,\ q;\quad \mathrm{L},\ \ldots,\ \mathrm{P},\ \mathrm{Q}$$

devaient satisfaire à certaines conditions particulières; si, par exemple, quelques-uns de ces coefficients se réduisaient à zéro, la valeur de s, considérée comme fonction des coefficients

$$l,\ \ldots,\ p,\ q;\quad \mathrm{L},\ \ldots,\ \mathrm{P},\ \mathrm{Q},$$

pourrait devenir décomposable en facteurs représentés par deux fonctions entières de ces mêmes coefficients.

Deuxième corollaire. — Supposons, pour fixer les idées, les équations du second degré

$$(9)\qquad x^2 + px + q = 0,\qquad x^2 + \mathrm{P}x + \mathrm{Q} = 0;$$

on aura

$$(10)\quad s = (\alpha-\lambda)(\alpha-\mu)(\beta-\lambda)(\beta-\mu) = (\alpha^2+\mathrm{P}\alpha+\mathrm{Q})(\beta^2+\mathrm{P}\beta+\mathrm{Q}),$$

et par suite, eu égard aux formules

$$\alpha^2 + p\alpha + q = 0,\qquad \beta^2 + p\beta + q = 0,$$
$$\alpha + \beta = -p,\qquad \alpha\beta = q,$$

on trouvera

$$\begin{aligned} s &= [\mathrm{Q} - q + (\mathrm{P}-p)\alpha][\mathrm{Q} - q + (\mathrm{P}-p)\beta] \\ &= (\mathrm{Q}-q)^2 + (\mathrm{P}-p)[(\mathrm{Q}-q)(\alpha+\beta) + (\mathrm{P}-p)\alpha\beta], \end{aligned}$$

ou plus simplement

$$(11)\qquad s = (\mathrm{Q}-q)^2 + (\mathrm{P}-p)(\mathrm{P}q - p\mathrm{Q}).$$

Or, tant que les coefficients

$$p,\ q,\ \mathrm{P},\ \mathrm{Q}$$

ne seront assujettis à aucune relation, à aucune condition particulière, alors, conformément au théorème établi, la valeur précédente de s ne pourra être décomposée en deux facteurs représentés tous deux par des fonctions entières de ces coefficients. Mais le même théorème pourra ne plus subsister dans le cas contraire; et si, par exemple, on annule deux des coefficients, en posant

$$p=0, \qquad P=0,$$

c'est-à-dire, en d'autres termes, si l'on réduit les équations proposées aux deux suivantes

$$x^2+q=0, \qquad x^2+Q=0, \tag{12}$$

alors la valeur de s, déterminée par la formule

$$s=(Q-q)^2, \tag{13}$$

sera décomposable en deux facteurs égaux à $Q-q$, ou, ce qui revient au même, en deux facteurs dont chacun sera une fonction entière des coefficients q, Q. Alors aussi, pour éliminer x entre les deux équations proposées, il suffira de retrancher l'une de l'autre; et l'équation finale ainsi obtenue, savoir

$$Q-q=0,$$

offrira un premier membre équivalent, non plus à la fonction s, mais seulement à sa racine carrée. Il est au reste facile de voir comment il arrive que la démonstration ci-dessus exposée du théorème en question devient, dans ce cas, inadmissible. En effet, lorsque p, P s'évanouissent, les formules

$$\alpha+\beta=p, \qquad \lambda+\mu=P$$

donnent

$$\beta=-\alpha, \qquad \mu=-\lambda.$$

On a donc alors

$$\beta-\lambda=-(\alpha-\mu), \qquad \beta-\mu=-(\alpha-\lambda);$$

et par suite, pour qu'une fonction des racines

$$\alpha, \quad \beta, \quad \lambda, \quad \mu$$

soit alors algébriquement divisible par chacun des quatre binomes

$$\alpha-\lambda, \quad \alpha-\mu, \quad \beta-\lambda, \quad \beta-\mu,$$

il suffit qu'elle soit algébriquement divisible par les deux premiers.

Troisième corollaire. — Lorsque, dans les équations (1), les coefficients

$$l, \quad \ldots, \quad p, \quad q; \quad L, \quad \ldots, \quad P, \quad Q$$

ne sont assujettis à aucune relation, à aucune condition particulière, le premier membre de la formule (2) ne peut renfermer aucun facteur étranger à l'équation finale, et représenté par une fonction entière des coefficients dont il s'agit, puisqu'il est alors impossible de décomposer ce premier membre en deux facteurs dont chacun soit une fonction entière de ces mêmes coefficients.

Il est facile de trouver à quel degré s'élève s considéré, soit comme fonction des coefficients

$$l, \quad \ldots, \quad p, \quad q,$$

soit comme fonction des coefficients

$$L, \quad \ldots, \quad P, \quad Q.$$

En effet, s pouvant être représenté par une fonction entière de tous les coefficients

$$l, \quad \ldots, \quad p, \quad q; \quad L, \quad \ldots, \quad P, \quad Q,$$

le degré de cette fonction, par rapport aux seuls coefficients

$$L, \quad \ldots, \quad P, \quad Q,$$

ne variera pas, si l'on exprime, comme on peut le faire, les coefficients

$$l, \quad \ldots, \quad p, \quad q$$

à l'aide des racines

$$\alpha, \quad \beta, \quad \gamma, \quad \ldots.$$

Mais alors la valeur obtenue de s devra coïncider, quels que soient L, ..., P, Q et α, β, γ, ..., avec celle que fournit l'équation (6); en sorte qu'on aura identiquement

$$s=(\alpha^m+L\alpha^{m-1}+\ldots+P\alpha+Q)(\beta^m+L\beta^{m-1}+\ldots+P\beta+Q)\ldots. \tag{14}$$

Donc, s étant le produit de n facteurs, dont chacun sera du premier degré par rapport aux coefficients

$$L, \quad \ldots, \quad P, \quad Q,$$

le degré de s par rapport à ces mêmes coefficients sera précisément le nombre n.

On conclura de même de l'équation (7) que le degré de s par rapport aux coefficients

$$l,\quad \ldots,\quad p,\quad q$$

est précisément le nombre m.

On peut être curieux de connaître généralement la partie de la fonction s qui dépendra uniquement des termes constants des équations (1), c'est-à-dire des coefficients q et Q. Or cette partie sera évidemment ce que deviendra la fonction s quand on supposera tous les autres coefficients

$$l,\quad \ldots,\quad p;\qquad \mathrm{L},\quad \ldots,\quad \mathrm{P}$$

réduits à zéro. D'ailleurs, dans cette supposition, les équations (1) deviendront

$$x^n + q = 0, \qquad x^m + \mathrm{Q} = 0; \tag{15}$$

et, en conséquence, la formule (14) donnera

$$s = (\alpha^m + \mathrm{Q})(\beta^m + \mathrm{Q})(\gamma^m + \mathrm{Q})\ldots. \tag{16}$$

Il y a plus : les rapports

$$\frac{\alpha}{\alpha},\quad \frac{\beta}{\alpha},\quad \frac{\gamma}{\alpha},\quad \ldots$$

étant respectivement égaux aux diverses racines de l'équation

$$x^n = 1,$$

les $m^{\text{ièmes}}$ puissances de ces rapports, ou les fractions

$$\frac{\alpha^m}{\alpha^m},\quad \frac{\beta^m}{\alpha^m},\quad \frac{\gamma^m}{\alpha^m},\quad \ldots,$$

seront respectivement égales aux diverses racines de l'équation

$$x^{\frac{n}{\omega}} = 1,$$

si l'on appelle ω le plus grand commun diviseur des nombres

$$m,\quad n,$$

et par suite respectivement égales aux divers termes de la progression géométrique

$$1,\quad \theta,\quad \theta^2,\quad \ldots,\quad \theta^{n-1},$$

si l'on nomme θ une racine primitive de l'équation

$$x^{\frac{n}{\omega}} = 1.$$

Cela posé, la formule (16) donnera

$$s = \left[(\mathrm{Q} + \alpha^m)(\mathrm{Q} + \theta\alpha^m)\ldots\left(\mathrm{Q} + \theta^{\frac{n}{\omega}-1}\alpha^m\right)\right]^{\omega};$$

et, comme on aura identiquement

$$x^{\frac{n}{\omega}} - 1 = (x-1)(x-\theta)(x-\theta^2)\ldots\left(x - \theta^{\frac{n}{\omega}-1}\right),$$

on en conclura, en remplaçant x par $-\frac{\mathrm{Q}}{\alpha^m}$,

$$\begin{aligned}(\mathrm{Q} + \alpha^m)(\mathrm{Q} + \theta\alpha^m)\ldots\left(\mathrm{Q} + \theta^{\frac{n}{\omega}-1}\alpha^m\right) &= \mathrm{Q}^{\frac{n}{\omega}} - (-1)^{\frac{n}{\omega}}\alpha^{\frac{mn}{\omega}} \\ &= \mathrm{Q}^{\frac{n}{\omega}} - (-1)^{\frac{m+n}{\omega}} q^{\frac{m}{\omega}};\end{aligned}$$

puis, eu égard à cette dernière formule, on trouvera définitivement

$$s = (-1)^n\left[(-\mathrm{Q})^{\frac{n}{\omega}} - (-q)^{\frac{m}{\omega}}\right]^{\omega}. \tag{17}$$

Jusqu'ici, pour plus de simplicité, nous avons supposé que, dans les équations (1), les coefficients des plus hautes puissances de x se réduisaient à l'unité. Admettons maintenant la supposition contraire, en sorte qu'on ait, par exemple,

$$\begin{aligned}f(x) &= ax^n + bx^{n-1} + \ldots + hx + k,\\ \mathrm{F}(x) &= \mathrm{A}x^m + \mathrm{B}x^{m-1} + \ldots + \mathrm{H}x + \mathrm{K}.\end{aligned}$$

Pour ramener les équations (1) à la forme précédemment adoptée, il suffira de diviser la première par a, la seconde par A ; par conséquent, il suffira de prendre

$$\begin{aligned}l &= \frac{b}{a},\quad \ldots,\quad p = \frac{h}{a},\quad q = \frac{k}{a},\\ \mathrm{L} &= \frac{\mathrm{B}}{\mathrm{A}},\quad \ldots,\quad \mathrm{P} = \frac{\mathrm{H}}{\mathrm{A}},\quad \mathrm{Q} = \frac{\mathrm{K}}{\mathrm{A}}.\end{aligned}$$

Cela posé, comme la valeur de s fournie par chacune des équations (5), (14) sera du degré m relativement aux quantités

$$l=\frac{b}{a},\quad \ldots,\quad p=\frac{h}{a},\quad q=\frac{k}{a},$$

et du degré n relativement aux quantités

$$\mathrm{L}=\frac{\mathrm{B}}{\mathrm{A}},\quad \ldots,\quad \mathrm{P}=\frac{\mathrm{H}}{\mathrm{A}},\quad \mathrm{Q}=\frac{\mathrm{K}}{\mathrm{A}};$$

comme d'ailleurs, dans cette valeur de s, la partie qui dépendra uniquement des coefficients q, Q se réduira, en vertu de la formule (17), à

$$(-1)^n\left[\left(-\frac{\mathrm{K}}{\mathrm{A}}\right)^{\frac{n}{\omega}}-\left(-\frac{k}{a}\right)^{\frac{m}{\omega}}\right]^{\omega},$$

il est clair que, pour transformer cette même valeur de s en une fonction entière des coefficients

$$a,\ b,\ \ldots,\ h,\ k;\quad \mathrm{A},\ \mathrm{B},\ \ldots,\ \mathrm{H},\ \mathrm{K},$$

il sera nécessaire et suffisant de la multiplier par le produit

$$a^m \mathrm{A}^n$$

Or, dans la fonction entière ainsi obtenue, la partie qui dépendra des seuls coefficients

$$a,\ \mathrm{A},\ k,\ \mathrm{K}$$

sera évidemment

$$(-1)^n\left[a^{\frac{m}{\omega}}(-\mathrm{K})^{\frac{n}{\omega}}-\mathrm{A}^{\frac{n}{\omega}}(-k)^{\frac{m}{\omega}}\right]^{\omega}.$$

De cette remarque, jointe au premier théorème, on déduira aisément la proposition suivante :

Deuxième théorème. — *Les coefficients*

$$a,\ b,\ \ldots,\ h,\ k;\quad \mathrm{A},\ \mathrm{B},\ \ldots,\ \mathrm{H},\ \mathrm{K}$$

étant supposés quelconques et indépendants les uns des autres dans les

deux équations algébriques

$$(18)\qquad \begin{cases} ax^n+bx^{n-1}+\ldots+hx+k=0,\\ \mathrm{A}x^m+\mathrm{A}x^{m-1}+\ldots+\mathrm{H}x+\mathrm{K}=0,\end{cases}$$

et les racines de ces équations étant respectivement

$$\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \ldots,$$
$$\lambda,\ \mu,\ \nu,\ \ldots,$$

si l'on prend

$$(19)\qquad \begin{cases} s=a^m\mathrm{A}^n(\alpha-\lambda)(\alpha-\mu)(\alpha-\nu)\ldots\\ \qquad\times(\beta-\lambda)(\beta-\mu)(\beta-\nu)\ldots(\gamma-\lambda)(\gamma-\mu)(\gamma-\nu)\ldots,\end{cases}$$

alors s *sera une fonction entière des coefficients*

$$a,\ b,\ \ldots,\ h,\ k;\quad \mathrm{A},\ \mathrm{B},\ \ldots,\ \mathrm{H},\ \mathrm{K},$$

qui ne pourra être généralement et algébriquement décomposée en deux facteurs représentés tous deux par d'autres fonctions entières de ces deux coefficients.

Démonstration. — Lorsqu'on suppose

$$(20)\qquad \begin{cases} b=al,\quad \ldots,\quad h=ap,\quad k=aq,\\ \mathrm{B}=\mathrm{AL},\quad \ldots,\quad \mathrm{H}=\mathrm{AP},\quad \mathrm{K}=\mathrm{AQ},\end{cases}$$

et par suite

$$(21)\qquad \begin{cases} l=\frac{b}{a},\quad \ldots,\quad p=\frac{h}{a},\quad q=\frac{k}{a},\\ \mathrm{L}=\frac{\mathrm{B}}{\mathrm{A}},\quad \ldots,\quad \mathrm{P}=\frac{\mathrm{H}}{\mathrm{A}},\quad \mathrm{Q}=\frac{\mathrm{K}}{\mathrm{A}},\end{cases}$$

les équations (18) se réduisent aux deux formules

$$(22)\qquad \begin{cases} x^n+lx^{n-1}+\ldots+px+q=0,\\ x^m+\mathrm{L}x^{m-1}+\ldots+\mathrm{P}x+\mathrm{Q}=0;\end{cases}$$

et alors, comme il suffit de multiplier par le produit

$$a^m\mathrm{A}^n$$

la valeur de s que donne l'équation (5), pour obtenir celle que donne l'équation (19), cette dernière se réduit, d'après ce qui a été dit ci-dessus, à une fonction entière des coefficients

$$a,\ b,\ \ldots,\ h,\ k;\quad A,\ B,\ \ldots,\ H,\ K.$$

J'ajoute que cette fonction entière ne pourra être généralement et algébriquement décomposée en deux facteurs représentés par d'autres fonctions entières des mêmes coefficients. En effet, soient, s'il est possible,

$$s',\ s''$$

deux semblables facteurs. En vertu des formules (20), jointes à celles qui serviront à exprimer les coefficients

$$l,\ \ldots,\ p,\ q;\quad L,\ \ldots,\ P,\ Q$$

des équations (22) en fonction des racines

$$\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \ldots;\quad \lambda,\ \mu,\ \nu,\ \ldots,$$

on pourra considérer les deux facteurs s', s'' comme des fonctions entières de ces racines et des deux coefficients

$$a,\ A.$$

Cela posé, la formule

$$(23)\quad \left\{\begin{aligned} s's'' = a^m A^n (\alpha-\lambda)(\alpha-\mu)(\alpha-\nu)\ldots \\ \times(\beta-\lambda)(\beta-\mu)(\beta-\nu)\ldots(\gamma-\lambda)(\gamma-\mu)(\gamma-\nu)\ldots \end{aligned}\right.$$

devant subsister, quelles que soient les valeurs attribuées aux racines

$$\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \ldots;\quad \lambda,\ \mu,\ \nu,\ \ldots$$

et aux deux coefficients

$$a,\ A,$$

on prouvera, en raisonnant comme nous l'avons fait pour démontrer le premier théorème, qu'un des facteurs s', s'', le facteur s' par exemple, est algébriquement divisible par le produit

$$(\alpha-\lambda)(\alpha-\mu)(\alpha-\nu)\ldots(\beta-\lambda)(\beta-\mu)(\beta-\nu)\ldots(\gamma-\lambda)(\gamma-\mu)(\gamma-\nu)\ldots.$$

Donc, parmi les facteurs simples que renferme le second membre de la formule (23), les seuls qui pourront entrer dans la composition

de s'' seront les coefficients

$$a,\ A,$$

dont l'un au moins devra être facteur de s'', puisque, dans l'hypothèse admise, s'' ne doit pas se réduire à un facteur numérique. Mais, pour que s'' pût devenir proportionnel à une puissance entière de l'un des coefficients

$$a,\ A,$$

sans dépendre d'ailleurs, en aucune manière, des racines

$$\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \ldots;\quad \lambda,\ \mu,\ \nu,\ \ldots,$$

par conséquent sans dépendre, en aucune manière, des coefficients

$$l,\ \ldots,\ p,\ q;\quad L,\ \ldots,\ P,\ Q,$$

ou, ce qui revient au même, des coefficients

$$b,\ \ldots,\ h,\ k;\quad B,\ \ldots,\ H,\ K,$$

il faudrait que chacun des coefficients a, A, ou au moins l'un deux, entrât comme facteur algébrique dans la fonction entière des quantités

$$a,\ b,\ \ldots,\ h,\ k;\quad A,\ B,\ \ldots,\ H,\ K$$

à laquelle peut se réduire le second membre de l'équation (23). Or cette condition n'est certainement pas remplie, puisque, dans la fonction entière dont il s'agit, la partie qui dépend uniquement des coefficients

$$a,\ A,\ k,\ K$$

se réduit à l'expression

$$(-1)^n\left[a^{\frac{m}{\omega}}(-K)^{\frac{n}{\omega}} - A^{\frac{n}{\omega}}(-k)^{\frac{m}{\omega}}\right],$$

qui n'est algébriquement divisible ni par A, ni par a. Donc l'hypothèse admise ne peut subsister, et le deuxième théorème est exact.

Corollaire. — Puisque, en vertu des formules (20) ou (21), les équations (18) coïncident avec les équations (22), l'équation finale qui résultera de l'élimination de x entre les équations (18) pourra être réduite à la formule

$$s = 0,$$

la valeur de s étant déterminée par la formule (5). D'autre part, comme la valeur de s déterminée par la formule (5) ne peut s'évanouir sans que la valeur de s déterminée par la formule (19) s'évanouisse pareillement, l'équation finale dont il s'agit entraînera la formule (2), si l'on prend pour s la fonction des coefficients

$$a, \quad b, \quad \ldots, \quad h, \quad k; \qquad \mathrm{A}, \quad \mathrm{B}, \quad \ldots, \quad \mathrm{H}, \quad \mathrm{K}$$

à laquelle peut se réduire le second membre de la formule (19). J'ajoute qu'alors, si ces coefficients ne sont assujettis à aucune relation, à aucune condition particulière, le premier membre s de la formule (2) ne renfermera aucun facteur étranger à l'équation finale, et représenté par une fonction entière de ces mêmes coefficients. C'est là, en effet, une conséquence immédiate du deuxième théorème, en vertu duquel il sera impossible de décomposer s en deux facteurs dont chacun soit une fonction entière des coefficients

$$a, \quad b, \quad \ldots, \quad h, \quad k; \qquad \mathrm{A}, \quad \mathrm{B}, \quad \ldots, \quad \mathrm{H}, \quad \mathrm{K}.$$

Puisque la valeur de s déterminée par la formule (5), c'est-à-dire le produit

$$(\alpha-\lambda)(\alpha-\mu)(\alpha-\nu)\ldots(\beta-\lambda)(\beta-\mu)(\beta-\nu)\ldots(\gamma-\lambda)(\gamma-\mu)(\gamma-\nu)\ldots,$$

se réduit à une fonction entière des rapports

$$l = \frac{b}{a}, \quad \ldots, \quad p = \frac{h}{a}, \quad q = \frac{k}{a}; \quad \mathrm{L} = \frac{\mathrm{B}}{\mathrm{A}}, \quad \ldots, \quad \mathrm{P} = \frac{\mathrm{H}}{\mathrm{A}}, \quad \mathrm{Q} = \frac{\mathrm{K}}{\mathrm{A}},$$

la valeur de s que déterminera la formule (19) ne sera pas seulement, comme on l'a déjà remarqué, une fonction entière des coefficients

$$a, \quad b, \quad \ldots, \quad h, \quad k; \qquad \mathrm{A}, \quad \mathrm{B}, \quad \ldots, \quad \mathrm{H}, \quad \mathrm{K},$$

elle sera, de plus, une fonction homogène et du degré m relativement aux coefficients

$$a, \quad b, \quad \ldots, \quad h, \quad k;$$

elle sera encore une fonction homogène et du degré n relativement aux coefficients

$$\mathrm{A}, \quad \mathrm{B}, \quad \ldots, \quad \mathrm{H}, \quad \mathrm{K};$$

donc elle sera, par rapport au système de tous les coefficients

$$a, \quad b, \quad \ldots, \quad h, \quad k; \qquad \mathrm{A}, \quad \mathrm{B}, \quad \ldots, \quad \mathrm{H}, \quad \mathrm{K},$$

une fonction entière et homogène du degré $m+n$. Désignons cette même fonction par

$$\varpi(a, b, \ldots, h, k; \mathrm{A}, \mathrm{B}, \ldots, \mathrm{H}, \mathrm{K});$$

on aura identiquement, eu égard aux formules (20),

$$\begin{aligned} &\varpi(a, b, \ldots, h, k; \mathrm{A}, \mathrm{B}, \ldots, \mathrm{H}, \mathrm{K}) \\ &\quad = a^m \mathrm{A}^n \varpi(1, l, \ldots, p, q; 1, \mathrm{L}, \ldots, \mathrm{P}, \mathrm{Q}), \end{aligned}$$

et l'équation finale résultant de l'élimination de x entre les équations données pourra être présentée sous la forme

$$\varpi(a, b, \ldots, h, k; \mathrm{A}, \mathrm{B}, \ldots, \mathrm{H}, \mathrm{K}) = 0, \tag{24}$$

si les équations données sont les formules (18), ou même sous la forme

$$\varpi(1, l, \ldots, p, q; 1, \mathrm{L}, \ldots, \mathrm{P}, \mathrm{Q}) = 0, \tag{25}$$

si les équations données sont réduites aux formules (22).

Ajoutons que, le second membre de la formule (19) devant être équivalent au produit

$$a^m \mathrm{A} \varpi^n(1, l, \ldots, p, q; 1, \mathrm{L}, \ldots, \mathrm{P}, \mathrm{Q}),$$

les relations subsistant entre les coefficients

$$l, \quad \ldots, \quad p, \quad q; \qquad \mathrm{L}, \quad \mathrm{P}, \quad \ldots, \quad \mathrm{Q}$$

et les racines

$$\alpha, \quad \beta, \quad \gamma, \quad \ldots; \qquad \lambda, \quad \mu, \quad \nu, \quad \ldots$$

devront entraîner la formule

$$\begin{aligned} &\varpi(1, l, \ldots, p, q; 1, \mathrm{L}, \ldots, \mathrm{P}, \mathrm{Q}) \\ &\quad = (\alpha-\lambda)(\alpha-\mu)(\alpha-\nu)\ldots \\ &\qquad \times (\beta-\lambda)(\beta-\mu)(\beta-\nu)\ldots(\gamma-\lambda)(\gamma-\mu)(\gamma-\nu)\ldots. \end{aligned}$$

On peut vouloir comparer l'équation finale (24) ou (25) à celle qu'on obtiendrait si à la méthode d'élimination dont nous avons ici fait usage on en substituait d'autres, par exemple celles qui se trouvent exposées dans les paragraphes I et II. On établira sans peine, à ce sujet, les propositions suivantes :

TROISIÈME THÉORÈME. — *Lorsque les coefficients*

$$l,\ \ldots,\ p,\ q;\quad \mathrm{L},\ \ldots,\ \mathrm{P},\ \mathrm{Q},$$

renfermés dans les équations

$$(22)\qquad \begin{cases} x^n + l x^{n-1} + \ldots + p x + q = 0, \\ x^m + \mathrm{L} x^{m-1} + \ldots + \mathrm{P} x + \mathrm{Q} = 0 \end{cases}$$

entre lesquelles on se propose d'éliminer la variable x, *demeurent arbitraires et indépendants les uns des autres, alors toute fonction entière de ces coefficients, propre à représenter le premier membre de l'équation finale produite par une méthode quelconque d'élimination, se réduit nécessairement à la fonction*

$$\varpi(1, l, \ldots, p, q;\ 1, \mathrm{L}, \ldots, \mathrm{P}, \mathrm{Q})$$

ou au produit de celle-ci par une autre fonction entière des coefficients

$$l,\ \ldots,\ p,\ q;\quad \mathrm{L},\ \ldots,\ \mathrm{P},\ \mathrm{Q}.$$

Démonstration. — En effet, supposons que l'élimination de x entre les équations (22), étant effectuée par une méthode quelconque, nous ait conduit à une équation finale de la forme

$$s = 0,$$

s désignant une fonction entière des coefficients

$$l,\ \ldots,\ p,\ q;\quad \mathrm{L},\ \ldots,\ \mathrm{P},\ \mathrm{Q}.$$

A l'aide des relations qui existent, d'une part, entre les coefficients

$$l,\ \ldots,\ p,\ q$$

et les racines

$$\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \ldots,$$

d'autre part, entre les coefficients

$$\mathrm{L},\ \ldots,\ \mathrm{P},\ \mathrm{Q}$$

et les racines

$$\lambda,\ \mu,\ \nu,\ \ldots,$$

on pourra transformer s en une fonction entière et symétrique des diverses racines de chacune des équations (22). D'ailleurs l'équation

$$s = 0,$$

résultant de l'élimination de x, devra être vérifiée toutes les fois qu'on établira entre ces racines une relation qui permettra de satisfaire par une même valeur de x à la première et à la seconde des équations (22), par exemple lorsqu'une des racines

$$\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \ldots$$

deviendra égale à l'une des racines

$$\lambda,\ \mu,\ \nu,\ \ldots.$$

Donc la fonction entière des racines

$$\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \ldots:\quad \lambda,\ \mu,\ \nu,\ \ldots,$$

en laquelle pourra se transformer le premier membre s de l'équation finale

$$s = 0,$$

devra s'évanouir avec chacun des binomes

$$\begin{matrix} \alpha-\lambda, & \alpha-\mu, & \alpha-\nu, & \ldots; \\ \beta-\lambda, & \beta-\mu, & \beta-\nu, & \ldots; \\ \gamma-\lambda, & \gamma-\mu, & \gamma-\nu, & \ldots, \end{matrix}$$

et être algébriquement divisible par leur produit. Donc cette fonction sera de la forme

$$(26)\qquad \begin{aligned} s = \mathfrak{R}&(\alpha-\lambda)(\alpha-\mu)(\alpha-\nu)\ldots \\ &\times(\beta-\lambda)(\beta-\mu)(\beta-\nu)\ldots(\gamma-\lambda)(\gamma-\mu)(\gamma-\nu)\ldots, \end{aligned}$$

$\mathfrak{R}$ désignant une nouvelle fonction entière des racines

$$\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \ldots:\quad \lambda,\ \mu,\ \nu,\ \ldots,$$

qui, comme la fonction s et comme le produit

$$(\alpha-\lambda)(\alpha-\mu)(\alpha-\nu)\ldots(\beta-\lambda)(\beta-\mu)(\beta-\nu)\ldots(\gamma-\lambda)(\gamma-\mu)(\gamma-\nu)\ldots,$$

aura, en vertu de la formule (26), la propriété de rester invariable, tandis qu'on échangera entre elles, ou les racines

$$\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \ldots,$$

ou les racines

$$\lambda,\ \mu,\ \nu,\ \ldots.$$

En d'autres termes, $\mathfrak{K}$ sera une nouvelle fonction entière et symétrique des diverses racines de chacune des équations (22). Par conséquent, dans le second membre de la formule (26), le facteur $\mathfrak{K}$ pourra être, aussi bien que le produit de tous les binomes, transformé en une fonction entière des coefficients

$$l,\ \ldots,\ p,\ q;\quad L,\ \ldots,\ P,\ Q.$$

Or, comme, après cette double transformation, la formule (26) donnera

$$s = \mathfrak{K}\,\varpi(1, l, \ldots, p, q;\ 1, L, \ldots, P, Q), \tag{27}$$

il est clair que le premier membre s de l'équation finale se réduira définitivement, si l'on a

$$\mathfrak{K} = 1,$$

à la fonction entière

$$\varpi(1, l, \ldots, p, q;\ 1, L, \ldots, P, Q),$$

et, dans le cas contraire, au produit de cette fonction par une fonction entière des coefficients

$$l,\ \ldots,\ p,\ q;\quad L,\ \ldots,\ P,\ Q.$$

Au reste, le dernier cas comprend le premier; et, lorsque le degré de la fonction entière représentée par $\mathfrak{K}$ se réduit à zéro, cette fonction se change en un facteur numérique qui peut être l'unité même.

Corollaire. — La valeur la plus simple qu'on puisse, dans la

formule (27), attribuer à la fonction $\mathfrak{K}$ étant

$$\mathfrak{K} = 1,$$

l'équation (25) offre évidemment la forme la plus simple à laquelle on puisse réduire généralement le premier membre de l'équation finale, en le supposant représenté par une fonction entière des coefficients

$$l,\ \ldots,\ p,\ q;\quad L,\ \ldots,\ P,\ Q$$

renfermés dans les équations (22).

Quatrième théorème. — *Lorsque les coefficients*

$$a,\ b,\ \ldots,\ h,\ k;\quad A,\ B,\ \ldots,\ H,\ K,$$

renfermés dans les équations

$$\left\{\begin{array}{l} ax^n + bx^{n-1} + \ldots + hx + k = 0, \\ Ax^m + Bx^{m-1} + \ldots + Hx + K = 0, \end{array}\right. \tag{18}$$

entre lesquelles on se propose d'éliminer la variable x, demeurent arbitraires et indépendants les uns des autres, alors toute fonction entière de ces coefficients, propre à représenter le premier membre de l'équation finale produite par une méthode quelconque d'élimination, se réduit nécessairement à la fonction

$$\varpi(a, b, \ldots, h, k;\ A, B, \ldots, H, K)$$

ou au produit de celle-ci par une autre fonction entière des coefficients

$$a,\ b,\ \ldots,\ h,\ k;\quad A,\ B,\ \ldots,\ H,\ K.$$

Démonstration. — En effet, supposons que l'élimination de x entre les équations (18), étant effectuée par une méthode quelconque, nous ait conduit à une équation finale de la forme

$$s = 0,$$

s désignant une fonction entière des coefficients

$$a,\ b,\ \ldots,\ h,\ k;\quad A,\ B,\ \ldots,\ H,\ K.$$

On réduira les équations (18) aux équations (22), en posant

$$b = al, \quad \ldots, \quad h = ap, \quad k = aq;$$
$$B = AL, \quad \ldots, \quad H = AP, \quad K = AQ;$$

et à l'aide de ces dernières formules jointes aux relations qui existent, d'une part, entre les coefficients

$$l, \quad \ldots, \quad p, \quad q$$

et les racines

$$\alpha, \quad \beta, \quad \gamma, \quad \ldots,$$

d'autre part, entre les coefficients

$$L, \quad \ldots, \quad P, \quad Q$$

et les racines

$$\lambda, \quad \mu, \quad \nu, \quad \ldots,$$

on pourra transformer s en une fonction entière de toutes les racines

$$\alpha, \quad \beta, \quad \gamma, \quad \ldots; \quad \lambda, \quad \mu, \quad \nu, \quad \ldots$$

et des deux coefficients

$$a, \quad A.$$

Il y a plus : la valeur de s, qu'on obtiendra ainsi, devant être une fonction symétrique des racines de chacune des équations (22), on prouvera, par des raisonnements semblables à ceux dont nous avons fait usage dans la démonstration du troisième théorème, que cette valeur de s peut être représentée par un produit de la forme

$$\mathcal{R}\,\varpi(1, l, \ldots, p, q; 1, L, \ldots, P, Q),$$

$\mathcal{R}$ désignant une fonction entière, non plus seulement des coefficients

$$l, \quad \ldots, \quad p, \quad q; \quad L, \quad \ldots, \quad P, \quad Q,$$

mais aussi des deux coefficients

$$a, \quad A.$$

Comme on aura d'ailleurs identiquement

$$\varpi(1, l, \ldots, p, q; 1, L, \ldots, P, Q) = \frac{\varpi(a, b, \ldots, h, k; A, B, \ldots, H, K)}{a^m A^n},$$

la valeur transformée de s ne différera pas de celle que donne la formule

$$(28) \qquad s = \frac{\mathcal{R}}{a^m A^n}\,\varpi(a, b, \ldots, h, k; A, B, \ldots, H, K).$$

Soit maintenant

$$\Theta = \frac{\mathcal{R}}{a^m A^n}$$

ce que deviendra la fraction

$$\frac{\mathcal{R}}{a^m A^n}$$

quand on y remplacera les quantités

$$l, \quad \ldots, \quad p, \quad q; \quad L, \quad \ldots, \quad P, \quad Q$$

par les rapports équivalents

$$\frac{b}{a}, \quad \ldots, \quad \frac{h}{a}, \quad \frac{k}{a}; \quad \frac{B}{A}, \quad \ldots, \quad \frac{H}{A}, \quad \frac{K}{A}.$$

Θ ne pourra être qu'une fonction entière des coefficients

$$a, \quad b, \quad \ldots, \quad h, k; \quad A, \quad B, \quad \ldots, \quad H, \quad K,$$

divisée ou non divisée par certaines puissances entières et positives des quantités a, A ; et, si l'on considère s comme une fonction entière des mêmes coefficients

$$a, \quad b, \quad \ldots, \quad h, \quad k; \quad A, \quad B, \quad \ldots, \quad H, \quad K,$$

la formule (28) donnera identiquement, c'est-à-dire quelles que soient les valeurs attribuées aux coefficients dont il s'agit,

$$(29) \qquad s = \Theta\,\varpi(a, b, \ldots, h, k; A, B, \ldots, H, K).$$

D'autre part, la fonction

$$\varpi(a, b, \ldots, h, k; A, B, \ldots, H, K),$$

qui, en vertu du deuxième théorème, n'est algébriquement divisible ni par a, ni par A, ne pourra s'évanouir ni avec a, ni avec A. Donc la fonction

$$\Theta = \frac{s}{\varpi(a, b, \ldots, h, k; A, B, \ldots, H, K)},$$

exprimée à l'aide des seuls coefficients

$$a,\ b,\ \ldots,\ h,\ k;\quad A,\ B,\ \ldots,\ H,\ K,$$

ne pourra devenir infinie pour une valeur nulle de a ou de A; donc cette fonction n'admettra point de diviseurs représentés par des puissances entières et positives des quantités a, A, et ne pourra être qu'une fonction entière des coefficients

$$a,\ b,\ \ldots,\ h,\ k;\quad A,\ B,\ \ldots,\ H,\ K.$$

Si le degré de cette fonction entière se réduit à zéro, elle se transformera en un facteur numérique qui pourra être l'unité même, et alors la valeur de s, fournie par l'équation (29), se réduira au premier membre de la formule (24).

Premier corollaire. — La valeur la plus simple qu'on puisse, dans la formule (29), attribuer à la fonction Θ, étant

$$\Theta = 1,$$

l'équation (24) offre évidemment la forme la plus simple à laquelle on puisse réduire généralement le premier membre de l'équation finale, en le supposant représenté par une fonction entière des coefficients

$$a,\ b,\ \ldots,\ h,\ k;\quad A,\ B,\ \ldots,\ H,\ K$$

renfermés dans les équations (18).

Deuxième corollaire. — La fonction

$$\varpi(a, b, \ldots, h, k;\ A, B, \ldots H, K)$$

étant, par rapport aux coefficients

$$a,\ b,\ \ldots,\ h,\ k;\quad A,\ B,\ \ldots,\ H,\ K,$$

une fonction entière et homogène du degré $m+n$, la valeur de s fournie par l'équation (29), ou le premier membre de l'équation finale produite par une méthode quelconque d'élimination, sera d'un degré

représenté par un nombre ou égal ou supérieur à $m+n$, suivant que Θ sera ou un facteur numérique, ou une fonction entière d'un degré supérieur à zéro. Dans le premier cas, les deux fonctions

$$s \quad \text{et} \quad \varpi(a, b, \ldots, h, k;\ A, B, \ldots, H, K)$$

se trouveront composées de termes correspondants et proportionnels, le rapport entre deux termes correspondants de la première et de la seconde étant précisément la valeur de Θ.

Troisième corollaire. — Si deux valeurs de s, fournies par deux méthodes diverses d'élimination, et représentées par deux fonctions entières des coefficients

$$a,\ b,\ \ldots,\ h,\ k;\quad A,\ B,\ \ldots,\ H,\ K,$$

sont l'une et l'autre du degré $m+n$, elles seront toutes deux proportionnelles à la fonction

$$\varpi(a, b, \ldots, h, k;\ A, B, \ldots, H, K),$$

de laquelle on les déduira en multipliant celle-ci par deux facteurs numériques. Donc aussi elles seront proportionnelles l'une à l'autre, l'une étant le produit de l'autre par un troisième facteur numérique égal au rapport des deux premières. Par suite, ces deux valeurs de s seront composées de termes correspondants et proportionnels, et deviendront égales, au signe près, si deux termes correspondants de l'une et de l'autre sont égaux ou ne diffèrent que par le signe.

Les démonstrations que nous avons données des troisième et quatrième théorèmes reposent sur ce principe : que l'équation finale, produite par l'élimination de x entre deux équations données, se vérifie toujours quand on établit, entre les racines ou les coefficients de celles-ci, des relations qui leur font acquérir des racines communes. Ce principe, admis par Euler, ne saurait être contesté en aucune manière, et s'étend au cas même où les équations données, cessant d'être algébriques, prendraient des formes quelconques. En effet, dire que l'élimination de x, entre deux équations algébriques ou transcendantes

$$f(x) = 0, \qquad F(x) = 0,$$

produit l'équation finale

$$s = 0,$$

dans laquelle s est indépendant de x, c'est dire que les deux premières équations considérées comme pouvant subsister simultanément, entraînent la troisième : c'est donc, en d'autres termes, dire que la troisième équation subsiste toutes les fois que les deux premières acquièrent des racines communes.

Au reste, les méthodes d'élimination, appliquées dans les deux premiers paragraphes de ce Mémoire à des équations algébriques, fournissent, comme on devait s'y attendre, des résultats conformes au principe que nous venons de rappeler. En effet, suivant la première des méthodes exposées dans le paragraphe I, le premier membre s de l'équation finale produite par l'élimination de x entre deux équations algébriques

$$f(x) = 0, \qquad F(x) = 0$$

se présentera immédiatement sous la forme

$$u\,f(x) + v\,F(x),$$

u, v désignant deux fonctions entières de la variable x et des coefficients que renferment les équations données. Donc ce premier membre, équivalent, quel que soit x, à la somme

$$u\,f(x) + v\,F(x),$$

s'évanouira si les valeurs des coefficients permettent d'attribuer à x une valeur qui fasse évanouir simultanément $f(x)$ et $F(x)$. On arrivera encore aux mêmes conclusions, si l'on adopte ou la seconde des méthodes exposées dans le paragraphe I, ou la méthode abrégée de Bezout, attendu que, dans l'une et dans l'autre hypothèse, les diverses équations successivement déduites des équations données, et par suite l'équation finale elle-même, seront toujours de la forme

$$u\,f(x) + v\,F(x) = 0,$$

u, v représentant ou deux fonctions entières de x et des coefficients renfermés dans $f(x)$, $F(x)$, ou les quotients qu'on obtient en divisant deux semblables fonctions par une certaine puissance de la variable x.

Lorsque, pour éliminer x entre deux équations algébriques de la forme

$$ax^n + bx^{n-1} + \ldots + hx + k = 0,$$
$$Ax^m + Bx^{m-1} + \ldots + Hx + K = 0,$$

on emploie ou la méthode exposée dans ce paragraphe et fondée sur la considération des fonctions symétriques, ou la première des méthodes rappelées dans le paragraphe I, ou, en supposant $m = n$, la méthode abrégée de Bezout, le premier membre s de l'équation finale, représenté par une fonction entière des coefficients

$$a, \quad b, \quad \ldots, \quad h, \quad k; \qquad A, \quad B, \quad \ldots, \quad H, \quad K,$$

est toujours, par rapport à ces coefficients (*voir* les pages 473, 478 et 504), du degré $m + n$, par conséquent, lorsque m devient égal à n, du degré $2n$. Donc, en vertu du troisième corollaire du quatrième théorème, les trois valeurs de s, fournies par les trois méthodes, seront proportionnelles l'une à l'autre, l'une étant le produit de l'autre par un facteur numérique. J'ajoute que ce facteur numérique se réduira constamment à $+1$ ou à -1. En effet, la valeur de s, que fournira la première des méthodes rappelées dans le paragraphe I, renfermera une seule fois le terme

$$a^m K^n.$$

Or, ce même terme se retrouve, avec le même signe, dans le développement de l'expression

$$(-1)^n \left[a^{\frac{m}{\omega}} (-K)^{\frac{n}{\omega}} - A^{\frac{n}{\omega}} (-k)^{\frac{m}{\omega}} \right]^{\omega},$$

qui, lorsqu'on a recours à la méthode fondée sur la considération des fonctions symétriques, représente la partie de s dépendant des seuls coefficients

$$a, \quad A, \quad k, \quad K.$$

Enfin, lorsqu'on supposera $m=n$, le même terme

$$a^m K^n = a^n K^m$$

sera encore, au signe près (*voir* p. 478), l'un des termes contenus dans la valeur de s que fournira la méthode abrégée de Bezout. Donc les trois valeurs de s fournies par les trois méthodes seront, au signe près, égales entre elles; et l'assertion émise à la page 478 se trouve complètement démontrée.

Remarquons encore que, dans le cas particulier où les degrés m, n des équations données sont des nombres premiers entre eux, et où l'on a par suite

$$\omega = 1,$$

la partie de s, qui dépend des seuls coefficients

$$a, \quad A, \quad k, \quad K$$

dans l'équation finale réduite à sa forme la plus simple, est représentée par le binome

$$a^m K^n - A^n k^m.$$

D'après ce qui a été dit dans ce paragraphe, pour éliminer x entre deux équations algébriques données, il suffit de joindre l'équation (4) aux formules qui servent à déduire des coefficients d'une équation algébrique les sommes des puissances entières des racines, ou de ces sommes les coefficients eux-mêmes. On peut d'ailleurs, pour atteindre ce but, employer deux sortes de formules qui déterminent les unes successivement, les autres d'un seul coup et d'une manière explicite, chacune des inconnues, c'est-à-dire chacune des sommes ou chacun des coefficients cherchés. Les formules de la première espèce sont celles qui ont été données par Newton, et dont la démonstration la plus élémentaire se trouve dans la *Résolution des équations numériques* de Lagrange (p. 133). Quant aux formules de la seconde espèce, on pourrait les déduire des premières par une marche analogue à celle qu'a suivie M. Libri dans un Mémoire publié en 1829, qui en rappelle deux autres présentés par le même auteur à l'Académie des Sciences

en 1823 et 1835. Mais alors ces formules, propres à déterminer immédiatement chaque inconnue, ne se présenteraient pas sous la forme la plus simple; et, pour diminuer autant que possible le nombre de leurs termes, il convient de les établir directement à l'aide de considérations analogues à celles dont j'ai fait usage dans l'extrait lithographié d'un Mémoire présenté à l'Académie le 9 août 1824. C'est au reste ce que j'expliquerai plus en détail dans un autre article.

FIN DU TOME XI DE LA SECONDE SÉRIE.

TABLE DES MATIÈRES.

DU TOME ONZIÈME.

SECONDE SÉRIE.

MÉMOIRES DIVERS ET OUVRAGES.

III. — MÉMOIRES PUBLIÉS EN CORPS D'OUVRAGES.

Exercices d'Analyse et de Physique mathématique.

FIN DE LA TABLE DES MATIÈRES DU TOME XI DE LA SECONDE SÉRIE.

48605 Paris. — Imprimerie GAUTHIER-VILLARS, quai des Grands-Augustins, 55.