



SUR LES  
RELATIONS QUI EXISTENT ENTRE L'AZIMUT

ET  
L'ANOMALIE D'UN RAYON SIMPLE

DOUÉ DE LA POLARISATION ELLIPTIQUE.

Considérons, dans un système isotrope de molécules, un mouvement simple, ou par ondes planes, qui se propage sans s'affaiblir. Prenons pour plan des  $x, y$  un plan invariable parallèle aux plans des ondes. Une molécule quelconque  $m$  fera toujours partie d'un rayon simple perpendiculaire au plan invariable. Cela posé, soient, au bout du temps  $t$  :

$\xi, \eta$  les déplacements de la molécule mesurés parallèlement aux axes rectangulaires des  $x, y$ ;

$x$  la distance mesurée sur le rayon simple entre le plan invariable et la molécule  $m$ , cette distance étant regardée comme positive quand elle se compte dans le sens de la vitesse de propagation des ondes planes.

Si l'on nomme  $T$  la durée des vibrations moléculaires, et  $l$  la longueur d'une ondulation, le mouvement de la molécule sera représenté par des équations de la forme

$$(1) \quad \xi = a \cos(kx - st + \lambda), \quad \eta = b \cos(kx - st + \mu),$$

dans lesquelles on aura

$$k = \frac{2\pi}{l}, \quad s = \frac{2\pi}{T};$$

tandis que les constantes positives  $a, b$  désigneront les demi-amplitudes des vibrations d'une molécule, mesurées parallèlement à l'axe des  $x$ , ou à l'axe des  $y$ , et  $\lambda, \mu$  les paramètres angulaires relatifs aux mêmes axes. Comme d'ailleurs les équations (1) donneront

$$\frac{\xi}{a} = \cos(kx - st) \cos \lambda - \sin(kx - st) \sin \lambda,$$

$$\frac{\eta}{b} = \cos(kx - st) \cos \mu - \sin(kx - st) \sin \mu,$$

on en tirera, moyennant l'élimination de l'une des lignes trigonométriques  $\sin(kx - st), \cos(kx - st)$ ,

$$\frac{\xi}{a} \cos \mu - \frac{\eta}{b} \cos \lambda = \sin(kx - st) \sin(\mu - \lambda),$$

$$\frac{\xi}{a} \sin \mu - \frac{\eta}{b} \sin \lambda = \cos(kx - st) \sin(\mu - \lambda);$$

puis, en combinant ces dernières formules par voie d'addition, après avoir élevé chaque membre au carré, et posant, pour abrégier,

$$\delta = \mu - \lambda,$$

on trouvera

$$(2) \quad \left(\frac{\xi}{a}\right)^2 - 2\frac{\xi}{a}\frac{\eta}{b}\cos\delta + \left(\frac{\eta}{b}\right)^2 = \sin^2\delta.$$

L'équation (2) représente généralement une ellipse et, comme cette ellipse se transformera : 1° en ligne droite, si l'on a

$$(3) \quad \sin\delta = 0,$$

2° en circonférence de cercle, si l'on a

$$(4) \quad \cos\delta = 0, \quad b = a,$$

il est clair que la polarisation, généralement elliptique, deviendra rectiligne dans le premier cas et circulaire dans le second.

Le rayon représenté par le système des équations (18) peut être censé résulter de la superposition de deux rayons plans, représentés séparément par chacune d'elles. L'anomalie du rayon résultant et son



*azimut*, relatifs au plan des  $x, z$ , sont, d'une part, la différence

$$(5) \quad \delta = \mu - \lambda$$

entre les paramètres angulaires  $\mu, \lambda$  des rayons composants, renfermés dans les plans des  $y, z$  et des  $x, z$ ; d'autre part, l'angle

$$(6) \quad \varpi = \text{arc tang} \frac{b}{a},$$

qui a pour tangente le rapport entre les amplitudes des vibrations  $2b, 2a$ , correspondant à ces mêmes rayons. Comme, dans les équations (1), chacun des paramètres angulaires  $\lambda, \mu$  peut être sans inconvénient augmenté ou diminué d'un multiple de la circonférence  $2\pi$ , on doit en dire autant de l'anomalie  $\delta$ , qui, en vertu des formules (3), (4), pourra être réduite à zéro ou à  $\pi$  dans un rayon plan, et à  $\pm \frac{\pi}{2}$  dans un rayon doué de la polarisation circulaire. Quant à l'azimut  $\varpi$ , il sera toujours compris entre les limites  $0, \frac{\pi}{2}$ , et, en vertu des formules (4), (6), il se réduira, pour un rayon polarisé circulairement, à  $\frac{\pi}{4}$ , c'est-à-dire, en d'autres termes, à la moitié d'un angle droit.

On tire de l'équation (6)

$$\frac{b}{a} = \text{tang} \varpi = \frac{\sin \varpi}{\cos \varpi}, \quad \frac{\cos \varpi}{a} = \frac{\sin \varpi}{b} = \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}},$$

et par suite

$$(7) \quad a = h \cos \varpi, \quad b = h \sin \varpi,$$

la valeur de  $h$  étant

$$(8) \quad h = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Le double de la longueur  $h$ , déterminée par l'équation (8), est, pour une valeur nulle de l'anomalie, l'amplitude du rayon représenté par les équations (1), et, dans tous les cas,  $2h$  exprime ce que nous appelons l'*amplitude quadratique* de ce même rayon.

Si l'on nomme  $r$  le rayon vecteur mené du centre de l'ellipse décrite

par une molécule au point avec lequel cette molécule coïncide au bout du temps  $t$ , et  $p$  l'angle polaire formé par le rayon vecteur avec l'axe des  $x$ , on aura

$$(9) \quad \xi = r \cos p, \quad \eta = r \sin p,$$

$$(10) \quad r^2 = \xi^2 + \eta^2, \quad \text{tang} p = \frac{\eta}{\xi}.$$

Si d'ailleurs le demi-axe des  $y$  positives est tellement choisi que le mouvement de la molécule  $m$ , autour du centre de l'ellipse qu'elle décrit, soit un mouvement de rotation direct, la vitesse angulaire de cette molécule sera

$$(11) \quad \frac{dp}{dt} = \frac{\xi \frac{d\eta}{dt} - \eta \frac{d\xi}{dt}}{\xi^2 + \eta^2} = \frac{ab \sin \delta}{r^2},$$

et  $\sin \delta$  devra être une quantité positive. Alors aussi l'aire décrite par le rayon vecteur  $r$  pendant le temps  $t$ , ayant pour différentielle

$$\frac{1}{2} r^2 dp = \frac{1}{2} ab \sin \delta dt,$$

sera proportionnelle au temps, et représentée par le produit

$$\frac{1}{2} ab t \sin \delta = \pi ab \frac{t}{T} \sin \delta.$$

Donc l'aire décrite pendant la durée  $T$  d'une vibration moléculaire, ou la surface entière  $s$  de l'ellipse, aura pour valeur

$$(12) \quad s = \pi ab \sin \delta,$$

et chacune des quatre parties, dans lesquelles cette aire est divisée par les deux axes de l'ellipse, sera décrite pendant un temps égal au quart de la durée d'une vibration.

Observons maintenant que si l'on nomme

$$\begin{array}{l} \xi', \quad \eta', \quad r' \\ \xi, \quad \eta, \quad r \end{array}$$

ce que deviennent

quand on fait croître le temps  $t$  de  $\frac{1}{4}T$ , ou  $st$  de  $\frac{\pi}{2}$ , on aura non seule-



ment

$$(13) \quad \begin{cases} \xi = a \sin(kx - st + \lambda), & \eta = b \sin(kx - st + \mu), \\ r^2 = \xi^2 + \eta^2, \end{cases}$$

et par suite

$$(14) \quad \xi^2 + \eta^2 = a^2, \quad \eta^2 + \eta'^2 = b^2,$$

$$(15) \quad r^2 + r'^2 = a^2 + b^2 = h^2,$$

mais encore

$$(16) \quad \xi\eta' - \xi'\eta = ab \sin \delta.$$

Chacune des formules (14) se rapportant à l'un des rayons plans dont la superposition produit le rayon simple donné, on conclura généralement de ces formules que, dans un rayon plan, les déplacements absolus d'une molécule, mesurés : 1° à un instant donné, 2° à un second instant séparé du premier par le quart de la durée d'une vibration moléculaire, fournissent des carrés dont la somme est le carré de la demi-amplitude. On conclura au contraire de la formule (15) que, dans tout rayon simple, la demi-amplitude quadratique a pour carré la somme des carrés des rayons vecteurs, qui joignent une molécule au centre de l'ellipse qu'elle décrit, à deux instants séparés l'un de l'autre par un intervalle égal au quart de la durée d'une vibration moléculaire. Donc cette demi-amplitude quadratique a pour carré la somme des carrés des deux demi-axes de l'ellipse et ne dépend nullement de la position des axes rectangulaires des  $x$  et  $y$ . Enfin, en vertu de l'équation (16), comparée à la formule (12), les rayons vecteurs qui joignent une molécule au centre de l'ellipse qu'elle décrit, à deux instants séparés l'un de l'autre par un intervalle du quart de la durée d'une vibration, sont les deux côtés d'un triangle dont la surface doublée est à la surface entière de l'ellipse dans le rapport de 1 à  $\pi$ .

Il est bon d'observer encore qu'en ayant égard aux formules (7), on tirera de la formule (12)

$$(17) \quad s = \frac{\pi}{2} h^2 \sin 2\varpi \sin \delta.$$

Nous avons dit que, dans un rayon simple, l'amplitude quadratique h demeure indépendante de la position des axes coordonnés. Il n'en est pas de même de l'azimut  $\varpi$  et de l'anomalie  $\delta$ , qui varient lorsqu'on fait tourner, dans le plan de l'ellipse décrite, les axes rectangulaires des  $x$  et  $y$ . Cela posé, si l'on nomme *plan principal* un plan qui renferme avec l'axe du rayon simple un des axes de l'ellipse décrite, et *azimut principal*, ou *anomalie principale*, un azimut ou une anomalie qui corresponde à un plan principal, on reconnaîtra aisément qu'une anomalie principale peut toujours être réduite, au signe près, à un angle droit. En effet, pour que l'équation (2) soit celle d'une ellipse rapportée à ses axes, il faut que l'on ait

$$\cos \delta = 0.$$

Donc, en nommant  $\Delta$  l'anomalie principale, on aura

$$\Delta = \pm \frac{\pi}{2},$$

si l'on suppose, comme on a droit de le faire,  $\delta$  toujours renfermé entre les limites  $-\pi$ ,  $+\pi$ . On aura en particulier

$$\Delta = \frac{\pi}{2},$$

si l'on admet, comme ci-dessus, que la quantité  $\sin \delta$  sera positive, et alors, en nommant  $\Pi$  l'azimut principal, on tirera de la formule (17)

$$(18) \quad s = \frac{\pi}{2} h^2 \sin 2\Pi.$$

Or de la formule (18), jointe à la formule (17), on conclut

$$(19) \quad \sin 2\varpi \sin \delta = \sin 2\Pi.$$

En laissant le signe de  $\sin \delta$  arbitraire, on aurait trouvé plus généralement, au lieu de l'équation (17), la suivante :

$$\pm s = \frac{\pi}{2} h^2 \sin 2\varpi \sin \delta,$$



et, au lieu de l'équation (19), la suivante :

$$(20) \quad \sin 2\varpi \sin \delta = \sin 2\Pi \sin \Delta.$$

Cette dernière, dont le second membre se réduit à  $\sin 2\Pi$ , ou à  $-\sin 2\Pi$ , suivant que l'on a  $\Delta = \frac{\pi}{2}$  ou  $\Delta = -\frac{\pi}{2}$ , entraîne évidemment le théorème que nous allons énoncer.

THÉORÈME I. — *Dans un rayon doué de la polarisation elliptique, le double de l'azimut relatif à un plan fixe, et le double d'un azimut principal, c'est-à-dire de l'azimut relatif à l'un des plans principaux, offrent des sinus dont le rapport est le sinus de l'anomalie relative au plan fixe, ou ce sinus pris en signe contraire, suivant que l'anomalie principale est réductible à  $+\frac{\pi}{2}$  ou à  $-\frac{\pi}{2}$ .*

Au reste, l'azimut et l'anomalie relatifs à un plan fixe, dans un rayon simple doué de la polarisation elliptique, satisfont encore à d'autres théorèmes qu'on peut établir à l'aide des considérations suivantes :

On tire des équations (1) jointes aux formules (7)

$$(21) \quad \xi = h \cos \varpi \cos (k\iota - st + \lambda), \quad \eta = h \sin \varpi \cos (k\iota - st + \mu).$$

Si d'ailleurs on prend pour axes coordonnés des  $x, y$  les axes de l'ellipse décrite par une molécule située dans le plan invariable, et si l'on choisit le demi-axe des  $y$  positives de manière que le mouvement de la molécule autour du centre de l'ellipse soit un mouvement de rotation direct, l'anomalie  $\delta = \mu - \nu$  sera réductible à l'anomalie principale  $\Delta = \frac{\pi}{2}$ , et, comme on aura par suite

$$\varpi = \Pi, \quad \mu = \lambda + \frac{\pi}{2},$$

les équations (21) donneront

$$(22) \quad \xi = h \cos \Pi \cos (st - k\iota - \lambda), \quad \eta = h \sin \Pi \sin (st - k\iota - \lambda).$$

Enfin, si l'on considère une molécule située, non plus dans le plan

invariable, mais à une distance  $\nu$  de ce plan déterminée par la formule

$$k\nu + \lambda = 0,$$

les équations (22) deviendront simplement

$$(23) \quad \xi = h \cos \Pi \cos st, \quad \eta = h \sin \Pi \sin st.$$

Au reste, la nouvelle molécule dont il s'agit sera évidemment l'une de celles qui, à l'origine du mouvement, c'est-à-dire pour une valeur nulle de  $t$ , se trouvaient situées sur l'axe des  $x$  et du côté des  $x$  positives. On peut d'ailleurs disposer du plan des  $x, y$  de manière qu'il renferme cette molécule, et par conséquent de manière qu'elle corresponde à une valeur nulle de  $\nu$ .

Supposons maintenant que, dans le plan invariable des  $x, y$ , on imprime un mouvement direct de rotation aux axes coordonnés, en faisant décrire à l'axe des  $x$  un certain angle, désigné par  $\iota$ . En nommant  $\xi, \eta$  ce que deviendront, après la rotation effectuée, les variables  $\xi, \eta$ , l'on trouvera, au lieu des formules (9),

$$(24) \quad \xi_i = r \cos (p - \iota), \quad \eta_i = r \sin (p - \iota);$$

et, comme on aura d'ailleurs

$$\cos (p - \iota) = \cos p \cos \iota + \sin p \sin \iota, \quad \sin (p - \iota) = \sin p \cos \iota - \cos p \sin \iota,$$

les formules (24), jointes aux équations (9), donneront

$$(25) \quad \xi_i = \xi \cos \iota + \eta \sin \iota, \quad \eta_i = \eta \cos \iota - \xi \sin \iota,$$

ou, ce qui revient au même, eu égard aux formules (23),

$$(26) \quad \begin{cases} \xi_i = h (\cos \iota \cos \Pi \cos st + \sin \iota \sin \Pi \sin st), \\ \eta_i = h (\cos \iota \sin \Pi \sin st - \sin \iota \cos \Pi \cos st). \end{cases}$$

Or, comme les valeurs de  $\xi, \eta$ , données par les équations (26), représentent les déplacements d'une molécule mesurés parallèlement à deux axes rectangulaires tracés arbitrairement dans le plan invariable, ces valeurs doivent être de la même forme que les valeurs de  $\xi, \eta$  fournies par les équations (21). Donc les paramètres angulaires  $\lambda, \mu$ ,





328 SUR LES RELATIONS QUI EXISTENT ENTRE L'AZIMUT relatifs à ces nouveaux axes, et l'azimut  $\varpi$  relatif au nouvel axe des  $x$ , vérifieront les formules

$$\begin{aligned} \cos \varpi \cos (k\tau - s\tau + \lambda) &= \cos \tau \cos \Pi \cos s\tau + \sin \tau \sin \Pi \sin s\tau, \\ \sin \varpi \cos (k\tau - s\tau + \mu) &= \cos \tau \sin \Pi \sin s\tau - \sin \tau \cos \Pi \cos s\tau, \end{aligned}$$

que l'on pourra réduire à

$$(27) \quad \begin{cases} \cos \varpi \cos (s\tau - \lambda) = \cos \tau \cos \Pi \cos s\tau + \sin \tau \sin \Pi \sin s\tau, \\ \sin \varpi \cos (s\tau - \mu) = \cos \tau \sin \Pi \sin s\tau - \sin \tau \cos \Pi \cos s\tau, \end{cases}$$

en choisissant le plan des  $x, y$  de manière à faire évanouir la distance  $\tau$ . Or, en posant successivement

$$t = 0, \quad t = \frac{\pi}{28} = \frac{1}{4}T,$$

on tirera des formules (27)

$$(28) \quad \begin{cases} \cos \varpi \cos \lambda = \cos \tau \cos \Pi, & \cos \varpi \sin \lambda = \sin \tau \sin \Pi, \\ \sin \varpi \cos \mu = -\sin \tau \cos \Pi, & \sin \varpi \sin \mu = \cos \tau \sin \Pi, \end{cases}$$

et comme, en nommant  $\delta$  l'anomalie relative aux nouveaux axes, on aura

$$\begin{aligned} \delta &= \mu - \nu, \\ \cos \delta &= \cos \lambda \cos \mu + \sin \lambda \sin \mu, & \sin \delta &= \sin \mu \cos \lambda - \sin \lambda \cos \mu, \end{aligned}$$

on trouvera définitivement

$$\cos \delta = \sin \tau \cos \tau \frac{\sin^2 \Pi - \cos^2 \Pi}{\sin \varpi \cos \varpi}, \quad \sin \delta = \frac{\sin \Pi \cos \Pi}{\sin \varpi \cos \varpi},$$

ou, ce qui revient au même,

$$(29) \quad \sin 2\varpi \cos \delta = -\sin 2\tau \cos 2\Pi, \quad \sin 2\varpi \sin \delta = \sin 2\Pi.$$

On tirera encore des formules (28)

$$\begin{aligned} \cos^2 \varpi &= \cos^2 \tau \cos^2 \Pi + \sin^2 \tau \sin^2 \Pi, \\ \sin^2 \varpi &= \sin^2 \tau \cos^2 \Pi + \cos^2 \tau \sin^2 \Pi, \end{aligned}$$

et par suite

$$\cos^2 \varpi - \sin^2 \varpi = (\cos^2 \tau - \sin^2 \tau) (\cos^2 \Pi - \sin^2 \Pi),$$

ou, ce qui revient au même,

$$(30) \quad \cos 2\varpi = \cos 2\tau \cos 2\Pi.$$

Enfin on tirera des formules (29)

$$(31) \quad \cot \delta = -\sin 2\tau \cot 2\Pi.$$

Les formules (27) et celles que nous en avons déduites supposent le demi-axe des  $y$  positives choisi de manière que le mouvement de la molécule  $m$ , autour du centre de l'ellipse décrite, soit un mouvement de rotation direct; en d'autres termes, elles supposent la valeur de l'anomalie principale  $\Delta$  réductible à celle que donne la formule  $\Delta = \frac{\pi}{2}$ . Si l'on supposait au contraire

$$\Delta = -\frac{\pi}{2},$$

alors, en raisonnant toujours de la même manière, on se trouverait conduit à remplacer  $\sin s\tau$  par  $-\sin s\tau$  dans la seconde des formules (23); par conséquent à changer, dans les seconds membres des formules (27), le signe du produit  $\sin \Pi \sin s\tau$ , et à remplacer  $\sin \Pi$  par  $-\sin \Pi$  dans les formules (28). Comme on a d'ailleurs, pour  $\Delta = \frac{\pi}{2}$ ,

$$\sin \Delta = 1$$

et, pour  $\Delta = -\frac{\pi}{2}$ ,

$$\sin \Delta = -1,$$

il suit, de ce qu'on vient de dire, qu'en laissant arbitraire le signe de  $\Delta$  et posant en conséquence

$$\Delta = \pm \frac{\pi}{2},$$

on devra, dans les formules (28), remplacer  $\sin \Pi$  par le produit  $\sin \Pi \sin \Delta$ . On trouvera ainsi généralement

$$(32) \quad \begin{cases} \cos \varpi \cos \lambda = \cos \tau \cos \Pi, & \cos \varpi \sin \lambda = \sin \tau \sin \Pi \sin \Delta, \\ \sin \varpi \cos \mu = -\sin \tau \cos \Pi, & \sin \varpi \sin \mu = \cos \tau \sin \Pi \sin \Delta. \end{cases}$$



Or, de ces dernières équations, jointes à la formule  $\sin \Delta = \pm 1$ , on déduira encore la première des formules (29) et l'équation (30). Mais, au lieu de la seconde des équations (29), on obtiendra l'équation (20), et au lieu de la formule (31) la suivante

$$(33) \quad \cot \delta = -\sin 2\epsilon \cot 2\Pi \sin \Delta.$$

Nous avons déjà énoncé le théorème que renferme la seconde des équations (29) ou plutôt l'équation (20). Quant aux formules (30) et (33), elles renferment encore deux propositions remarquables, dont nous avons donné d'autres démonstrations dans le Mémoire sur la réflexion et la réfraction de la lumière (voir le Recueil de *Mémoires sur divers points de Physique mathématique*) et dont voici les énoncés :

THEORÈME II. — Dans un rayon doué de la polarisation elliptique, le double de l'azimut relatif à un plan fixe et le double d'un azimut principal offrent des cosinus dont le rapport est le cosinus du double de l'angle formé par le plan fixe avec le plan principal que l'on considère.

THEORÈME III. — La cotangente de l'anomalie relative à un plan fixe est proportionnelle au sinus du double de l'angle formé par le plan fixe avec l'un des plans principaux, et se réduit, au signe près, au produit de ce sinus par la cotangente du double de l'azimut principal relatif au dernier de ces plans.

## CONSIDÉRATIONS NOUVELLES

SUR

## LA THÉORIE DES SUITES

ET SUR

## LES LOIS DE LEUR CONVERGENCE.

Parmi les théorèmes nouveaux, que contiennent mes Mémoires de 1831 et 1832 sur la Mécanique céleste, l'un des plus singuliers et, en même temps, l'un de ceux auxquels les géomètres paraissent attacher le plus de prix, est celui qui donne immédiatement les règles de la convergence des séries fournies par le développement des fonctions explicites et réduit simplement la loi de convergence à la loi de continuité, la définition des fonctions continues n'étant pas celle qui a été longtemps admise par les auteurs des *Traité d'Algèbre*, mais bien celle que j'ai adoptée dans mon *Analyse algébrique*, et suivant laquelle une fonction est continue entre des limites données de la variable, lorsque, entre ces limites, elle conserve constamment une valeur finie et déterminée, et qu'à un accroissement infiniment petit de la variable correspond un accroissement infiniment petit de la fonction elle-même. Comme le remarquait dernièrement un savant, que je m'honore d'avoir vu assister autrefois à mes leçons, M. l'abbé Moigno, le théorème que je viens de rappeler est si fécond en résultats utiles pour le progrès des sciences mathématiques, et il est d'ailleurs d'une application si facile, qu'il y aurait de grands avantages à le faire passer dans le calcul différentiel et à débarrasser sa démonstration des signes d'intégration qui ne paraissent pas devoir y entrer nécessairement. Ayant cherché les



moyens d'atteindre ce but, j'ai eu la satisfaction de reconnaître qu'on pouvait effectivement y parvenir, à l'aide des principes établis dans mon *Calcul différentiel* et dans le Résumé des leçons que j'ai données, à l'École Polytechnique, sur le Calcul infinitésimal. En effet, à l'aide de ces principes, on démontre aisément, comme on le verra dans le premier paragraphe de ce Mémoire, diverses propositions parmi lesquelles se trouve le théorème que je viens de citer, et l'on peut alors, non seulement reconnaître dans quels cas les fonctions sont développables en séries convergentes ordonnées suivant les puissances ascendantes des variables qu'elles renferment, mais encore assigner des limites aux erreurs que l'on commet en négligeant, dans ces mêmes séries, les termes dont le rang surpasse un nombre donné.

Le second paragraphe du Mémoire se rapporte plus spécialement au développement des fonctions implicites. Pour développer ces sortes de fonctions, on a souvent fait usage de la méthode des coefficients indéterminés. Mais cette méthode, qui suppose l'existence d'un développement et même sa forme déjà connues, ne peut servir à constater ni cette forme, ni cette existence, et détermine seulement les coefficients que les développements peuvent contenir, sans indiquer les valeurs entre lesquelles les variables doivent se renfermer pour que les fonctions restent développables. Il est clair, par ce motif, que beaucoup de démonstrations, admises autrefois sans contestation, doivent être regardées comme insuffisantes. Telle est, en particulier, la démonstration que M. Laplace a donnée de la formule de Lagrange et que Lagrange a insérée dans la *Théorie des fonctions analytiques*. Des démonstrations plus rigoureuses de la même formule sont celles où l'on commence par faire voir que la multiplication de deux séries semblables à la série de Lagrange reproduit une série de même forme et celle que j'ai donnée dans le Mémoire sur la Mécanique céleste, publié en 1832 <sup>(1)</sup>. Mais, de ces deux démonstrations, la première est assez longue et la seconde exige l'emploi des intégrales définies. Or, comme

<sup>(1)</sup> *Oeuvres de Cauchy*, 2<sup>e</sup> série, t. XV.

la formule de Lagrange et d'autres formules analogues servent à la solution d'un grand nombre de problèmes, j'ai pensé qu'il serait utile d'en donner une démonstration très simple, et en quelque sorte élémentaire. Tel est l'objet que je me suis proposé dans le second paragraphe du présent Mémoire.

## ANALYSE.

## § I. — Développement des fonctions en séries convergentes.

Règles sur la convergence de ces développements et limites des restes.

La théorie du développement des fonctions en séries ordonnées, suivant les puissances ascendantes des variables, est une conséquence immédiate de deux théorèmes, dont la démonstration se déduit, comme on va le voir, des principes établis dans mon *Calcul différentiel* et des propriétés connues des racines de l'unité.

THEOREME I. — Soit

$$x = re^{p\sqrt{-1}}$$

une variable imaginaire dont le module soit  $r$  et l'argument  $p$ . Soit encore

$$\omega(x)$$

une fonction de la variable  $x$  qui reste finie et continue, ainsi que sa dérivée  $\omega'(x)$ , pour des valeurs du module  $r$  comprises entre certaines limites,

$$r = r_0, \quad r = R.$$

Enfin, nommons  $n$  un nombre entier susceptible de croître indéfiniment, et prenons

$$\theta = e^{\frac{2\pi}{n}\sqrt{-1}},$$

$\theta$  représentera une racine primitive de l'équation

$$x^n = 1;$$

et si, en attribuant à  $r$  l'une quelconque des valeurs comprises entre les



limites  $r_0, R$ , on pose

$$(1) \quad \frac{\varpi'(r) + \theta \varpi'(\theta r) + \theta^2 \varpi'(\theta^2 r) + \dots + \theta^{n-1} \varpi'(\theta^{n-1} r)}{n} = \delta,$$

$\delta$  s'évanouira sensiblement pour de très grandes valeurs de  $n$ ; par conséquent la moyenne arithmétique entre les diverses valeurs du produit

$$\theta^m \varpi'(\theta^m r),$$

correspondant aux valeurs

$$0, 1, 2, \dots, n-1$$

du nombre  $m$ , se réduira sensiblement à zéro, en même temps que  $\frac{1}{n}$ .

*Démonstration.* — En effet, si l'on nomme  $i$  un accroissement attribué à une valeur de  $x$  dans le voisinage de laquelle la fonction  $\varpi(x)$  et sa dérivée  $\varpi'(x)$  restent finies et continues, on aura, pour les valeurs de  $i$  peu différentes de zéro (voir le Calcul différentiel),

$$\varpi(x+i) - \varpi(x) = i[\varpi'(x) + j],$$

$j$  devant s'évanouir avec  $i$ . On aura donc par suite

$$(2) \quad \begin{cases} \varpi(\theta r) - \varpi(r) &= (\theta-1)r[\varpi'(r) + \delta_0], \\ \varpi(\theta^2 r) - \varpi(\theta r) &= (\theta-1)r[\theta \varpi'(\theta r) + \delta_1], \\ \dots & \dots \\ \varpi(\theta^n r) - \varpi(\theta^{n-1} r) &= (\theta-1)r[\theta^{n-1} \varpi'(\theta^{n-1} r) + \delta_{n-1}], \end{cases}$$

$\delta_0, \delta_1, \dots, \delta_{n-1}$  devant s'évanouir avec  $\theta-1$ , ou, ce qui revient au même, avec  $\frac{1}{n}$ ; puis, en posant pour abréger

$$\frac{\delta_0 + \delta_1 + \dots + \delta_{n-1}}{n} = -\delta,$$

c'est-à-dire en représentant par  $-\delta$  la moyenne arithmétique entre les expressions imaginaires,

$$\delta_0, \delta_1, \dots, \delta_{n-1},$$

on tirera des équations (2)

$$(3) \quad \frac{\varpi(\theta^n r) - \varpi(r)}{(\theta-1)r} = \varpi'(r) + \theta \varpi'(\theta r) + \dots + \theta^{n-1} \varpi'(\theta^{n-1} r) - n\delta.$$

Enfin, comme on aura précisément

$$\theta^n = 1, \quad \varpi(\theta^n r) = \varpi(r),$$

l'équation (3) se réduira simplement à l'équation (1). D'autre part, comme la somme de plusieurs expressions imaginaires offre un module inférieur à la somme de leurs modules, la moyenne  $-\delta$  offrira un module inférieur au plus grand des modules de

$$\delta_0, \delta_1, \dots, \delta_{n-1}.$$

Donc  $\delta$  s'évanouira en même temps que chacun d'eux, c'est-à-dire en même temps que  $\frac{1}{n}$ ; ce qui démontre l'exactitude du théorème I.

*THÉORÈME II.* — Les mêmes choses étant posées que dans le théorème I, si l'on fait, pour abréger,

$$(4) \quad \Pi(r) = \frac{\varpi(r) + \varpi(\theta r) + \dots + \varpi(\theta^{n-1} r)}{n},$$

c'est-à-dire si l'on représente par  $\Pi(r)$  la moyenne arithmétique entre les diverses valeurs de

$$\varpi(\theta^m r)$$

correspondant aux valeurs

$$0, 1, 2, 3, \dots, n-1$$

du nombre  $m$ ; alors, pour de grandes valeurs de  $n$ , la fonction  $\Pi(r)$  restera sensiblement invariable entre les limites  $r = r_0, r = R$ .

*Démonstration.* — Supposons qu'à une valeur de  $r$  comprise entre les limites  $r_0, R$ , on attribue un accroissement  $\rho$  assez petit pour que  $r+\rho$  soit encore compris entre ces limites. Les accroissements correspondants des divers termes de la suite

$$\varpi(r), \varpi(\theta r), \dots, \varpi(\theta^{n-1} r)$$

seront de la forme

$$(5) \quad \begin{cases} \varpi(r+\rho) - \varpi(r) &= \rho[\varpi'(r) + \varepsilon_0], \\ \varpi[\theta(r+\rho)] - \varpi(\theta r) &= \rho[\theta \varpi'(\theta r) + \varepsilon_1], \\ \dots & \dots \\ \varpi[\theta^{n-1}(r+\rho)] - \varpi(\theta^{n-1} r) &= \rho[\theta^{n-1} \varpi'(\theta^{n-1} r) + \varepsilon_{n-1}], \end{cases}$$



$\varepsilon_0, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{n-1}$  désignant des expressions imaginaires qui s'évanouiront avec  $\frac{1}{n}$ ; et par suite la moyenne arithmétique entre ces mêmes accroissements ou la différence

$$\Pi(r + \rho) - \Pi(r)$$

se trouvera déterminée par la formule

$$(6) \quad \Pi(r + \rho) - \Pi(r) = \rho \left[ \frac{\varpi'(r) + \theta \varpi'(\theta r) + \dots + \theta^{n-1} \varpi'(\theta^{n-1} r)}{n} + \varepsilon \right],$$

la valeur de  $\varepsilon$  étant

$$(7) \quad \varepsilon = \frac{\varepsilon_0 + \varepsilon_1 + \dots + \varepsilon_{n-1}}{n}.$$

On aura donc, eu égard à la formule (1),

$$\Pi(r + \rho) - \Pi(r) = \rho(\varepsilon - \delta),$$

ou, ce qui revient au même,

$$(8) \quad \Pi(r + \rho) - \Pi(r) = \rho \varepsilon,$$

$\varepsilon$  représentant la différence  $\varepsilon - \delta$  et devant, comme  $\varepsilon$  et  $\delta$ , s'évanouir avec  $\frac{1}{n}$ .

On conclura facilement de la formule (8) que, pour de grandes valeurs de  $n$ , la fonction  $\Pi(r)$  reste sensiblement invariable entre les limites  $r = r_0, r = R$ , en sorte qu'on a, par exemple, sans erreur sensible,

$$(9) \quad \Pi(R) = \Pi(r_0).$$

Effectivement, pour établir cette dernière équation, il suffira de partager la différence

$$R - r_0$$

en éléments très petits égaux entre eux, et la différence

$$\Pi(R) - \Pi(r_0)$$

en éléments correspondants, puis d'observer que, si l'on prend pour  $\rho$  un des éléments de la première différence, la seconde différence sera,

en vertu de la formule (8), le produit de  $\rho$  par la somme des valeurs de  $\varepsilon$ , ou, ce qui revient au même, le produit de  $R - r_0$  par une moyenne arithmétique entre les diverses valeurs de  $\varepsilon$ . Soit  $I$  cette moyenne arithmétique, on aura

$$\Pi(R) - \Pi(r_0) = I(R - r_0);$$

et, comme le module de  $I$  ne pourra surpasser le plus grand des modules de  $\varepsilon$ , il est clair que  $I$ , tout comme  $\varepsilon$ , devra s'évanouir avec  $\frac{1}{n}$ . Donc le produit

$$I(R - r_0)$$

devra lui-même s'évanouir sensiblement pour de grandes valeurs de  $n$ , du moins tant que  $R$  conservera une valeur finie. On prouverait de la même manière que, si la valeur de  $r$  est comprise entre les limites  $r_0, R$ , on aura sensiblement, pour de grandes valeurs de  $n$ ,

$$(10) \quad \Pi(r) = \Pi(r_0).$$

*Nota.* — Le second membre de la formule (4) n'est autre chose que la moyenne arithmétique entre les diverses valeurs de la fonction

$$\varpi(x)$$

qui correspondent à un même module  $r$  de la variable  $x$ , et à des valeurs de  $\frac{x}{r}$  représentées par les diverses racines de l'unité du degré  $n$ . La limite vers laquelle converge cette moyenne arithmétique, tandis que le nombre  $n$  croît indéfiniment, est ce qu'on pourrait appeler la *valeur moyenne* de la fonction  $\varpi(x)$ , pour le module donné  $r$  de la variable  $x$ . Lorsqu'on admet cette définition, le théorème II peut s'énoncer de la manière suivante :

*Si la fonction  $\varpi(x)$  et sa dérivée  $\varpi'(x)$  restent finies et continues pour un module  $r$  de  $x$  renfermé entre les limites  $r_0, R$ , la valeur moyenne de  $\varpi(x)$  correspondant au module  $r$ , supposé compris entre les limites  $r_0, R$ , sera indépendante de ce module.*



*Corollaire I.* — Les mêmes choses étant posées que dans les théorèmes I et II, si la fonction  $\varpi(x)$  et sa dérivée restent encore continues, pour un module  $r$  de  $x$  renfermé entre les limites 0, R, on aura sensiblement, pour un semblable module et pour de grandes valeurs de  $n$ ,

$$(11) \quad \Pi(r) = \Pi(0).$$

*Corollaire II.* — Les mêmes choses étant posées que dans le corollaire I, si la fonction  $\varpi(x)$  s'évanouit avec  $x$ , on pourra en dire autant de la fonction  $\Pi(x)$ , et par suite on aura sensiblement, pour de grandes valeurs de  $n$ ,

$$(12) \quad \Pi(r) = 0.$$

*Corollaire III.* — Concevons maintenant que l'on pose

$$(13) \quad \varpi(z) = \frac{f(z) - f(x)}{z - x} z,$$

$f(z)$  désignant une fonction de  $z$  qui reste finie et continue avec sa dérivée  $f'(z)$ , pour un module  $r$  de  $z$  compris entre les limites 0, R.  $\Pi(z)$ , ainsi que  $\varpi(z)$ , s'évanouira pour une valeur nulle de  $z$ , et si, en posant pour abrégier

$$(14) \quad \varphi(z) = \frac{z}{z-x} f(z), \quad \psi(z) = \frac{z}{z-x} f(x),$$

on nomme

$$\Phi(z), \quad \Psi(z)$$

ce que devient  $\Pi(z)$  quand on remplace  $\varpi(z)$  par  $\varphi(z)$  ou par  $\psi(z)$ , alors, en vertu de la formule (12), on aura sensiblement, pour de grandes valeurs de  $n$  et pour un module  $r$  de  $z$  inférieur à R,

$$(15) \quad \Phi(r) - \Psi(r) = 0.$$

D'autre part, si l'on suppose le module  $r$  de  $z$  supérieur au module de  $x$ , on aura

$$\frac{z}{z-x} = 1 + z^{-1}x + z^{-2}x^2 + \dots = \Sigma z^{-m}x^m,$$

et par suite, en vertu de la formule (4),

$$\Psi(r) = f(x) \Sigma \frac{1 + \theta^{-m} + \theta^{-2m} + \dots + \theta^{-(n-1)m}}{n} r^{-m} x^m,$$

le signe  $\Sigma$  s'étendant à toutes les valeurs entières, nulles ou positives de  $m$ . D'ailleurs, comme le rapport

$$\frac{1 + \theta^{-m} + \theta^{-2m} + \dots + \theta^{-(n-1)m}}{n} = \frac{1}{n} \frac{1 - \theta^{-nm}}{1 - \theta^{-m}}$$

se réduira toujours évidemment ou à l'unité ou à zéro, suivant que  $m$  sera ou ne sera pas divisible par  $n$ , la valeur précédente de  $\Psi(r)$  deviendra

$$\Psi(r) = \left[ 1 + \left(\frac{x}{r}\right)^n + \left(\frac{x}{r}\right)^{2n} + \dots \right] f(x) = \frac{1}{1 - \left(\frac{x}{r}\right)^n} f(x).$$

Donc, le module de  $\frac{x}{r}$  étant inférieur à l'unité, on aura sensiblement, pour de grandes valeurs de  $n$ ,

$$\Psi(r) = f(x),$$

et par suite, en vertu de la formule (15),

$$(16) \quad f(x) = \Phi(r),$$

ou, ce qui revient au même,

$$(17) \quad f(x) = \frac{1}{n} \left[ \frac{r}{r-x} f(r) + \frac{\theta r}{\theta r-x} f(\theta r) + \dots + \frac{\theta^{n-1} r}{\theta^{n-1} r-x} f(\theta^{n-1} r) \right].$$

En vertu de cette dernière équation, qui devient rigoureuse quand  $n$  devient infini, la fonction  $f(x)$  pourra être généralement représentée par la valeur moyenne du produit

$$(18) \quad \frac{z}{z-x} f(z)$$

correspondant au module  $r$  de la variable  $z$ , si, le module de  $x$  étant inférieur au module  $r$  de  $z$ , la fonction  $f(z)$  et sa dérivée  $f'(z)$  restent finies et continues pour ce module de  $z$  ou pour un module plus petit.



D'ailleurs la fraction

$$\frac{z}{z-x},$$

et par suite le produit (18), seront, pour un module de  $x$  inférieur au module  $r$  de  $z$ , développables en séries convergentes ordonnées suivant les puissances ascendantes de  $x$ . On pourra donc en dire autant du second membre de la formule (17) et de la fonction  $f(x)$ , quand le module de  $x$  sera inférieur au plus petit des modules de  $z$  pour lesquels la fonction  $f(z)$  cesse d'être finie et continue. On peut donc énoncer la proposition suivante :

THEOREME III. — Si l'on attribue à la variable  $x$  un module inférieur au plus petit de ceux pour lesquels une des deux fonctions  $f(x)$ ,  $f'(x)$  cesse d'être finie et continue, la fonction  $f(x)$  pourra être représentée par la valeur moyenne du produit

$$\frac{z}{z-x} f(z),$$

correspondant à un module  $r$  de  $z$ , qui surpasse le module donné de  $x$ ; et sera par conséquent développable en série convergente, ordonnée suivant les puissances ascendantes de la variable  $x$ .

Nota. — Comme en supposant la fonction  $f(x)$  développable suivant les puissances ascendantes de  $x$ , et de la forme

$$(19) \quad f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots,$$

on tirera de l'équation (19) et de ses dérivées relatives à  $x$

$$a_0 = f(0), \quad a_1 = \frac{f'(0)}{1}, \quad a_2 = \frac{f''(0)}{1 \cdot 2}, \quad \dots,$$

il est clair que le développement de  $f(x)$ , déduit du théorème II, ne différera pas de celui que fournirait la formule de Taylor. On arrive encore aux mêmes conclusions en observant que le produit

$$\frac{z}{z-x} f(z),$$

développé suivant les puissances ascendantes de  $x$ , donne pour développement la série

$$f(z), \quad x \frac{f(z)}{z}, \quad x^2 \frac{f(z)}{z^2}, \quad \dots$$

Donc, dans le développement de  $f(x)$ , le terme constant devra se réduire à la valeur moyenne de  $f(z)$ , laquelle, en vertu du théorème II, est précisément  $f(0)$ ; le coefficient de  $x$ , à la valeur moyenne du rapport  $\frac{f(z)}{z}$  ou, ce qui revient au même, du rapport

$$\frac{f(z) - f(0)}{z},$$

et par conséquent à la valeur commune  $f'(0)$ , que prennent ce rapport et la fonction  $f'(z)$ , pour  $z = 0$ , etc.

Quant au reste qui devra compléter la série de Taylor, réduite à ses  $n$  premiers termes, il se déduira encore facilement des principes que nous venons d'établir. En effet, puisqu'on aura

$$\frac{z}{z-x} = 1 + \frac{x}{z} + \frac{x^2}{z^2} + \dots + \frac{x^{n-1}}{z^{n-1}} + \frac{x^n}{z^{n-1}(z-x)},$$

et, par suite,

$$\frac{z}{z-x} f(z) = f(z) + \frac{x}{z} f(z) + \frac{x^2}{z^2} f(z) + \dots + \frac{x^{n-1}}{z^{n-1}} f(z) + \frac{x^n}{z^{n-1}(z-x)} f(z),$$

il est clair que le reste dont il s'agit sera la valeur moyenne du produit

$$\frac{x^n}{z^{n-1}(z-x)} f(z),$$

considéré comme fonction de  $z$ , pour un module  $r$  de  $z$  supérieur au module donné de  $x$ . Donc, si l'on nomme  $R$  le plus grand des modules de  $f(z)$  correspondant au module  $r$  de  $z$ , et  $X$  le module attribué à la variable  $x$ , le reste de la série de Taylor aura pour module un nombre inférieur au produit

$$\frac{X^n}{r^{n-1}(r-X)} R,$$



par conséquent inférieur au reste de la progression géométrique que l'on obtient, en développant suivant les puissances ascendantes de  $x$ , le rapport

$$\frac{r^{\mathfrak{A}}}{r-X}$$

On peut donc énoncer encore la proposition suivante :

THEOREME IV. — *Les mêmes choses étant posées que dans le théorème III, si l'on arrête le développement de la fonction  $f(x)$  après le  $n^{\text{ème}}$  terme, le reste qui devra compléter le développement sera la valeur moyenne du produit*

$$\left(\frac{x}{z}\right)^{n-1} \frac{x f(z)}{z-x},$$

pour un module  $r$  de  $z$  supérieur au module donné de  $x$ . Si d'ailleurs on nomme  $\mathfrak{A}$  le plus grand des modules de  $f(z)$  correspondant au module  $r$  de  $z$ , et  $X$  le module attribué à  $x$ , le module du reste ne surpassera pas le produit

$$\left(\frac{X}{r}\right)^{n-1} \frac{X \mathfrak{A}}{r-X}.$$

Les principes ci-dessus exposés, particulièrement les notions des valeurs moyennes des fonctions pour des modules donnés des variables et les divers théorèmes que nous venons d'établir peuvent être immédiatement étendus et appliqués à des fonctions de plusieurs variables. On obtiendra de cette manière de nouveaux énoncés des propositions que renferme le Mémoire sur la *Mécanique céleste*, publié en 1832, et l'on arrivera, par exemple, au théorème suivant :

THEOREME V. — *Soient  $x, y, z, \dots$  plusieurs variables réelles ou imaginaires. La fonction  $f(x, y, z, \dots)$  sera développable par la formule de Maclaurin, étendue au cas de plusieurs variables, en une série convergente ordonnée suivant les puissances ascendantes de  $x, y, z, \dots$  si les modules  $X, Y, Z, \dots$  des variables  $x, y, z, \dots$  conservent des valeurs inférieures à celles pour lesquelles la fonction reste finie et continue. Soient  $r, r', r'', \dots$  ces dernières valeurs ou des valeurs plus petites, et  $\mathfrak{A}$  le plus*

grand des modules de  $f(x, y, z, \dots)$  correspondant au module  $r$  de  $x$ , au module  $r'$  de  $y$ , au module  $r''$  de  $z, \dots$ . Les modules du terme général et du reste de la série en question seront respectivement inférieurs aux modules du terme général et du reste de la série qui a pour somme le produit

$$\frac{r}{r-X} \frac{r'}{r'-Y} \frac{r''}{r''-Z} \dots \mathfrak{A}.$$

§ II. — Développement des fonctions implicites. Formule de Lagrange.

Les principes établis dans le paragraphe précédent peuvent être appliqués non seulement au développement des fonctions explicites, mais encore au développement des fonctions implicites, par exemple de celles qui représentent les racines des équations algébriques et transcendantes. Alors la loi de convergence se réduit encore à la loi de continuité. Concevons, pour fixer les idées, que la variable  $x$  soit déterminée en fonction de la variable  $\varepsilon$  par une équation algébrique ou transcendante de la forme

$$(1) \quad x = \varepsilon \varpi(x),$$

$\varpi(x)$  étant une fonction explicite et donnée de  $x$  qui ne renferme point  $\varepsilon$ , et ne devienne point nulle ni infinie pour  $x = 0$ . Parmi les racines de l'équation (1), il en existera une qui s'évanouira en même temps que  $\varepsilon$ . Or cette racine, si l'on fait croître le module de  $\varepsilon$  par degrés insensibles, variera elle-même insensiblement, ainsi que sa dérivée relative à  $\varepsilon$ , en restant fonction continue de la variable  $\varepsilon$ , jusqu'à ce que cette variable acquière une valeur pour laquelle deux racines de l'équation (1) deviennent égales (\*), pourvu toutefois que dans l'intervalle

(\*) Lorsque la variable  $\varepsilon$  acquiert une valeur pour laquelle la plus petite racine de l'équation (1) cesse d'être une racine simple, la dérivée de cette racine, relative à  $\varepsilon$ , devient infinie et par conséquent discontinue. En effet, on tire généralement de l'équation (1)

$$D_{\varepsilon} x = \frac{\varepsilon \varpi'(x)}{1 - \varepsilon \varpi'(x)},$$

et il est clair que cette valeur  $D_{\varepsilon} x$  se présente sous la forme  $\frac{1}{0}$ , quand on choisit  $\varepsilon$  de manière à vérifier l'équation (2).



la valeur de  $\varpi(x)$ , correspondant à la racine dont il s'agit, ne cesse pas d'être continue. Donc, si la fonction  $\varpi(x)$  reste continue pour des valeurs quelconques de  $x$ , celles des racines de l'équation (1) qui s'évanouit avec  $\varepsilon$  sera développable en série convergente ordonnée suivant les puissances ascendantes de  $\varepsilon$ , pour tout module de la variable  $\varepsilon$  inférieur au plus petit de ceux qui introduisent des racines égales dans l'équation (1), et rendent ces racines communes à l'équation (1) et à sa dérivée

$$(2) \quad 1 = \varepsilon \varpi'(x),$$

par conséquent, pour tout module de  $\varepsilon$  inférieur au plus petit de ceux qui répondent aux équations simultanées

$$(3) \quad \varepsilon = \frac{x}{\varpi(x)}, \quad \frac{\varpi(x)}{x} = \varpi'(x).$$

Ainsi, par exemple, la plus petite racine  $x$  de l'équation

$$(4) \quad x = \varepsilon \cos x$$

sera développable en série convergente ordonnée suivant les puissances ascendantes de  $\varepsilon$ , pour tout module de  $\varepsilon$  inférieur au plus petit de ceux qui répondent aux équations simultanées

$$(5) \quad \varepsilon = \frac{x}{\cos x}, \quad \frac{\cos x}{x} = -\sin x,$$

dont la seconde peut être réduite à

$$(6) \quad \cot x = -x,$$

ou bien encore remplacée par la formule

$$\cos x + x \sin x = 0,$$

qui, lorsqu'on développe  $\sin x$  et  $\cos x$ , devient

$$(7) \quad 1 + \frac{x^2}{2} - \frac{1}{1.2} \frac{x^4}{4} + \frac{1}{1.2.3.4} \frac{x^6}{6} - \dots = 0.$$

Or, si l'on nomme  $X$  le module de la variable réelle ou imaginaire  $x$ ,

le module du polynôme

$$\frac{x^2}{2} - \frac{1}{1.2} \frac{x^4}{4} + \frac{1}{1.2.3.4} \frac{x^6}{6} - \dots$$

ne pourra surpasser la somme des modules de ses divers termes, savoir

$$\frac{X^2}{2} + \frac{1}{1.2} \frac{X^4}{4} + \frac{1}{1.2.3.4} \frac{X^6}{6} + \dots;$$

d'où il résulte que l'équation (6) ou (7) n'admettra point de racines réelles ou imaginaires, dont les modules soient inférieurs à la racine positive unique de l'équation

$$(8) \quad \frac{X^2}{2} + \frac{1}{1.2} \frac{X^4}{4} + \frac{1}{1.2.3.4} \frac{X^6}{6} + \dots = 1$$

ou, ce qui revient au même, de l'équation

$$(9) \quad \frac{e^X + e^{-X}}{2} - X \frac{e^X - e^{-X}}{2} = 0,$$

qu'on peut encore présenter sous l'une ou l'autre des deux formes

$$(10) \quad X = 1 + \frac{2}{e^{2X} - 1},$$

$$(11) \quad 2X - 1(X+1) + 1(X-1) = 0,$$

la lettre  $l$  indiquant un logarithme népérien. D'ailleurs cette racine  $X$ , supérieure à l'unité en vertu de la formule (10), sera, en vertu de la formule (8), inférieure à la racine positive de l'équation

$$\frac{X^2}{2} + \frac{1}{1.2} \frac{X^4}{4} = 1,$$

c'est-à-dire au nombre

$$\sqrt{-2} + \sqrt{12} = 1,2100 \dots$$

et si l'on pose, dans l'équation (8) ou (11),

$$X = 1,2 + i,$$

$i$  sera renfermé entre les limites  $-0,2$  et  $0,1$ . Cela posé, en considé-



rant 1,2 comme une première valeur approchée de la racine positive X de l'équation (8), on obtiendra facilement par la méthode de Newton, ou par l'emploi de la formule de Taylor, de nouvelles valeurs de plus en plus approchées, et l'on trouvera (\*), en poussant l'approximation jusqu'aux millièmes inclusivement

$$X = 1,199\,678 \dots$$

Cette dernière valeur de X représente donc une limite inférieure que ne peuvent dépasser les modules des valeurs de  $x$  qui vérifient l'équation (6) ou (7). Mais ces modules peuvent atteindre la limite dont il

(\*) Si l'on désigne par  $F(X)$  le premier membre de l'équation (11), par  $a$  la valeur approchée 1,2 de la racine X et par  $a + i$  sa valeur exacte, on aura

$$F(X) = F(a+i) = F(a) + iF'(a+θi),$$

$θ$  désignant un nombre inférieur à l'unité, et les valeurs de  $F'(X)$ ,  $F'(a+θi)$  étant

$$F'(X) = \frac{2}{1-X^2}, \quad F'(a+θi) = \frac{2}{1-(a+θi)^2}.$$

Cela posé, l'équation

$$F(X) = 0$$

donnera

$$i = -\frac{1-(a+θi)^2}{2} F'(a).$$

et, comme on aura encore

$$a = 1,2, \quad F(a) = 2a - 1 \left( \frac{a+1}{a-1} \right) = 2,4 - 1(11) = 0,002105,$$

on trouvera définitivement

$$i = -0,002105 \frac{1-(1,2+θi)^2}{2}.$$

En vertu de cette dernière équation, non seulement  $i$  sera négatif, mais de plus sa valeur numérique sera inférieure au produit

$$0,002105 \frac{1-(1,2)^2}{2} = 0,0003216,$$

et par suite supérieure au produit

$$0,002105 \frac{1-(1,2-0,0003216)^2}{2} = 0,0003212 \dots$$

Donc, en poussant l'approximation jusqu'aux millièmes, on aura  $i = -0,000321 \dots$

$$X = 1,2 - 0,000321 \dots = 1,199\,678 \dots$$

s'agit, puisqu'on satisfait à l'équation (7) en supposant

$$x = X\sqrt{-1} = 1,199\,678 \dots \sqrt{-1}$$

et prenant pour X la valeur positive de l'équation (8). Ce n'est pas tout : comme, en vertu des formules (5), on aura

$$\varepsilon = \frac{x}{\cos x} = \frac{-1}{\sin x},$$

on en conclura

$$\varepsilon^2 = \frac{x^2}{\cos^2 x} = \frac{1}{\sin^2 x} = \frac{x^2+1}{\cos^2 x + \sin^2 x},$$

par conséquent

$$(12) \quad \varepsilon^2 = x^2 + 1.$$

Or, si l'on suppose le module X de  $x$  égal ou supérieur au nombre

$$1,199\,678, \dots$$

alors, en vertu de la formule (12), le module correspondant de  $\varepsilon^2$  sera égal ou supérieur à la différence

$$X^2 - 1$$

et le module de  $\varepsilon$  sera égal ou supérieur à

$$\sqrt{X^2 - 1},$$

par conséquent à la limite

$$\sqrt{(1,199\,678 \dots)^2 - 1} = 0,662\,742, \dots$$

qu'il atteindra si l'on suppose

$$x = 1,199\,678 \dots \sqrt{-1}.$$

Donc le plus petit des modules de  $\varepsilon$  qui répondent aux équations (5) sera

$$0,662\,742, \dots$$

et par conséquent la plus petite racine de l'équation

$$x = \varepsilon \cos x$$



sera développable en série convergente ordonnée suivant les puissances ascendantes de  $x$ , pour tout module de  $\varepsilon$  inférieur au nombre 0,662742 .... On se trouve ainsi ramené immédiatement à un résultat auquel M. Laplace est parvenu par des calculs assez longs dans son Mémoire sur la convergence de la série que fournit le développement du rayon vecteur d'une planète suivant les puissances ascendantes de l'excentricité.

Il nous reste à indiquer une méthode très simple, à l'aide de laquelle on peut souvent construire avec une grande facilité les développements des fonctions implicites. Pour ne pas trop allonger ce Mémoire, nous nous contenterons ici d'appliquer cette méthode au développement de la plus petite racine  $x$  de l'équation (1), ou d'une fonction de cette racine.

Nommons  $\alpha$  celle des racines de l'équation (1) qui s'évanouit avec  $\varepsilon$ , et que nous supposerons être une racine simple. On aura identiquement

$$(13) \quad x - \varepsilon \varpi(x) = (x - \alpha) \Pi(x),$$

$\Pi(x)$  désignant une fonction de  $x$  qui ne deviendra point nulle ni infinie pour  $x = \alpha$ . Or, de l'équation (13), jointe à sa dérivée, on déduira la suivante

$$(14) \quad \frac{1 - \varepsilon \varpi'(x)}{x - \varepsilon \varpi(x)} = \frac{1}{x - \alpha} + \frac{\Pi'(x)}{\Pi(x)},$$

qu'on obtiendrait immédiatement en prenant les dérivées logarithmiques des deux membres de l'équation (13). On aura donc, par suite,

$$(15) \quad \frac{\Pi'(x)}{\Pi(x)} = \frac{1 - \varepsilon \varpi'(x)}{x - \varepsilon \varpi(x)} - \frac{1}{x - \alpha}.$$

D'ailleurs, pour des valeurs de  $x$  suffisamment rapprochées de zéro, la fonction

$$\frac{\Pi'(x)}{\Pi(x)}$$

sera généralement développable en une série convergente ordonnée

suivant les puissances ascendantes, entières et positives de  $x$ . Ainsi, en particulier, si  $\Pi(x)$  est une fonction de  $x$ , et si l'on nomme  $\beta, \gamma, \dots$  les racines de l'équation

$$(16) \quad \Pi(x) = 0,$$

on aura identiquement

$$(17) \quad \Pi(x) = k(x - \beta)(x - \gamma) \dots,$$

$k$  désignant un coefficient indépendant de  $x$ , et par suite

$$(18) \quad \frac{\Pi'(x)}{\Pi(x)} = \frac{1}{x - \beta} + \frac{1}{x - \gamma} + \dots$$

Donc alors on aura, pour tout module de  $x$  inférieur aux modules des racines  $\beta, \gamma, \dots$ ,

$$(19) \quad \frac{\Pi'(x)}{\Pi(x)} = -\left(\frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma} + \dots\right) - \left(\frac{1}{\beta^2} + \frac{1}{\gamma^2} + \dots\right)x - \dots$$

Donc aussi le second membre de l'équation (15) devra être développable, pour des modules de  $x$  qui ne dépasseront pas certaines limites, en une série convergente ordonnée suivant les puissances ascendantes, entières et positives de  $x$ . Or il semble au premier abord que, pour de très petits modules de  $\varepsilon$  ou, ce qui revient au même, pour de très petits modules de  $\alpha$ , ce développement ne puisse s'effectuer. Car, si le module de  $\alpha$  devient inférieur à celui de  $x$  et le module de  $\varepsilon$  à celui de  $\frac{x}{\varpi(x)}$ , alors, en posant, pour abrégé,

$$\varpi(x) = \alpha,$$

on trouvera

$$(20) \quad \frac{1}{x - \alpha} = \frac{1}{x} + \frac{\alpha}{x^2} + \frac{\alpha^2}{x^3} + \dots$$

$$(21) \quad \frac{1 - \varepsilon \varpi'(x)}{x - \varepsilon \varpi(x)} = \frac{1}{x} - \varepsilon D_x \left( \frac{\alpha}{x} \right) - \frac{\varepsilon^2}{2} D_x \left( \frac{\alpha^2}{x^2} \right) - \frac{\varepsilon^3}{3} D_x \left( \frac{\alpha^3}{x^3} \right) - \dots$$

De plus, en désignant par  $\lambda$  un nombre infiniment petit qu'on devra réduire à zéro, après les différentiations effectuées, et par  $\alpha$  ce que devient  $\alpha$  quand on remplace  $x$  par 1, on aura encore, en vertu de la



formule de Maclaurin,

$$(22) \quad \begin{cases} x = \delta + \frac{x}{1} D_1 \delta + \frac{x^2}{1.2} D_1^2 \delta + \dots \\ x^2 = \delta^2 + \frac{x}{1} D_1 \delta^2 + \frac{x^2}{1.2} D_1^2 \delta^2 + \dots \\ \dots \end{cases}$$

et

$$(23) \quad \begin{cases} D_x \frac{x}{x} = -\frac{\delta}{x^2} + \frac{1}{1.2} D^2 \delta + \dots \\ D_x \frac{x^2}{x^2} = -2 \frac{\delta^2}{x^3} - \frac{1}{1} \frac{D_1 \delta^2}{x^3} + \frac{1}{1.2.3} D^3 \delta^2 + \dots \\ \dots \end{cases}$$

et par suite le second membre de la formule (15), développé suivant les puissances ascendantes de  $x$ , renfermera en apparence non seulement des puissances positives, mais encore des puissances négatives de  $x$ , ces dernières même étant, à ce qu'il semble, en nombre infini. Toutefois, il importe d'observer qu'en supposant le module de  $x$  très petit, on pourra développer  $\varepsilon$ ,  $\varepsilon^2$ , ... et par suite les seconds membres des formules (21) et (15), suivant les puissances ascendantes de  $x$ . Alors le second membre de la formule (15), développé suivant les puissances ascendantes de  $x$  et de  $\alpha$ , offrira, il est vrai, des puissances positives et des puissances négatives de  $x$ , mais seulement des puissances positives de  $\alpha$ , et le coefficient d'une puissance quelconque de  $\alpha$ , par exemple de  $\alpha^m$ , dans ce second membre, sera la somme  $u_m$  d'une série qui renfermera un nombre infini de puissances positives de  $x$ , avec les seules puissances négatives

$$\frac{1}{x^m}, \frac{1}{x^{m-1}}, \dots, \frac{1}{x}.$$

D'autre part, en vertu des principes établis dans le paragraphe précédent (théorème V), la fonction  $\frac{\Pi(x)}{\Pi(x)}$  sera développable en une série convergente ordonnée suivant les puissances ascendantes, entières et positives de  $x$  et de  $\alpha$ , tant que les modules de  $x$  et de  $\alpha$  ne dépasseront pas les limites au delà desquelles cette fonction cesse

d'être continue, et le coefficient de  $\alpha^m$  dans le développement sera la somme  $v_m$  d'une série qui renfermera seulement les puissances entières et positives de  $x$ . Donc, puisque deux développements ordonnés suivant les puissances ascendantes, entières et positives de  $x$ , ne peuvent devenir égaux sans qu'il y ait égalité entre les coefficients des mêmes puissances, les deux coefficients de  $\alpha^m$  que nous avons désignés par  $u_m$ ,  $v_m$ , et qui représentent les sommes de deux séries ordonnées suivant les puissances ascendantes de  $x$ , seront égaux; d'où il résulte que, dans la première de ces deux séries, chacun des  $m$  premiers termes, proportionnels à des puissances négatives de  $x$ , devra s'évanouir. Donc le terme proportionnel à  $\frac{1}{x^2}$ , en particulier, s'évanouira dans la série dont la somme  $u_m$  sert de coefficient à  $\alpha^m$ , quel que soit d'ailleurs le nombre  $m$ ; d'où il résulte que la somme des termes proportionnels à  $\frac{1}{x^2}$  s'évanouira elle-même, dans le développement du second membre de la formule (15) suivant les puissances ascendantes de  $x$  et de  $\alpha$ . Or, cette somme, en vertu des formules (19), (20), (23), sera évidemment

$$\varepsilon \delta + \frac{\varepsilon^2}{1.2} D_1 \delta^2 + \frac{\varepsilon^3}{1.2.3} D_1^2 \delta^3 + \dots - \alpha.$$

On aura donc

$$(24) \quad \alpha = \varepsilon \delta + \frac{\varepsilon^2}{1.2} D_1 \delta^2 + \frac{\varepsilon^3}{1.2.3} D_1^2 \delta^3 + \dots$$

la valeur de  $\varepsilon$  devant être réduite à zéro, après les différentiations effectuées. La formule (24), qui subsiste tant que  $\alpha$  et sa dérivée relative à  $\varepsilon$  restent fonctions continues de  $\varepsilon$ , est précisément la formule donnée par Lagrange pour le développement de  $\alpha$  suivant les puissances ascendantes de  $\varepsilon$ . Si l'on égalait à zéro, dans le développement du second membre de la formule (15), non plus le coefficient de  $\frac{1}{x^2}$ , mais ceux de  $\frac{1}{x^3}$ , de  $\frac{1}{x^4}$ , etc., on obtiendrait immédiatement les formules données par Lagrange pour le développement de  $\alpha^2$ ,  $\alpha^3$ , etc., suivant les puissances ascendantes de  $\varepsilon$ . Enfin, si l'on égalait les



coefficients des puissances positives

$$x, x^2, \dots$$

à ceux qui affectent les mêmes puissances dans le second membre de la formule (19), on obtiendrait les valeurs des sommes

$$\frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \dots, \quad \frac{1}{6^2} + \frac{1}{7^2} + \dots,$$

développées encore suivant les puissances ascendantes entières et positives de  $\varepsilon$ .

Soit maintenant  $f(x)$  une fonction qui ne devienne pas infinie pour  $x = 0$ . Après avoir multiplié par le rapport

$$\frac{f(x) - f(0)}{x}$$

les deux membres de la formule (15), on pourra, tant que la fonction  $f(x)$  ne deviendra pas discontinue, développer le second membre suivant les puissances ascendantes de  $x$ , et, comme, dans ce développement effectué à l'aide des équations (20), (21), (23) ou de formules analogues, le coefficient de  $\frac{1}{x^2}$  devra disparaître, on en conclura facilement

$$(25) \quad f(x) - f(0) = \varepsilon \delta \Gamma(\varepsilon) + \frac{\varepsilon^2}{1.2} D_1 [\delta^2 \Gamma(\varepsilon)] + \frac{\varepsilon^3}{1.2.3} D_1^2 [\delta^3 \Gamma(\varepsilon)] + \dots,$$

la valeur de  $\varepsilon$  devant être réduite à zéro après les différentiations effectuées. On retrouve encore ici la formule donnée par Lagrange pour le développement de  $f(x)$ . Il est bon d'observer que, dans cette formule, le coefficient de  $\frac{\varepsilon^n}{n}$ , déterminé par la méthode qu'on vient d'exposer, sera le coefficient de  $\frac{1}{x^n}$  dans le développement du produit

$$\frac{f(x) - f(0)}{x} D_x \left( \frac{x^n}{x^n} \right),$$

ou, ce qui revient au même, le coefficient  $\frac{1}{x^n}$  dans le développement

de la fonction

$$(26) \quad - D_x \left\{ [f(x) - f(0)] D_x \left( \frac{x^n}{x} \right) \right\}.$$

Mais, comme la dérivée du second ordre d'un développement ordonné suivant les puissances ascendantes et entières de  $x$ , ne peut renfermer la puissance négative  $\frac{1}{x^2}$ , cette puissance disparaîtra dans le développement de

$$D_x \left[ \frac{f(x) - f(0)}{x^n} x^n \right] = D_x \left\{ [f(x) - f(0)] D_x \left( \frac{x^n}{x} \right) \right\} + D_x \frac{x^n \Gamma'(x)}{x^n},$$

d'où il suit qu'elle sera multipliée par un même coefficient dans les développements de l'expression (26) et de la suivante

$$D_x \frac{x^n \Gamma'(x)}{x^n}.$$

Donc, dans le second membre de la formule (25), le coefficient de  $\frac{\varepsilon^n}{n}$  devra se réduire, comme nous l'avons admis, à

$$\frac{1}{1.2 \dots (n-1)} D_1^{n-1} [\delta^n \Gamma(\varepsilon)],$$

$\varepsilon$  devant être remplacé par zéro après les différentiations.

La même méthode, comme je l'expliquerai plus en détail dans un autre article, peut servir à développer, suivant les puissances ascendantes d'un paramètre contenu dans une équation algébrique ou transcendante, la somme des racines qui ne deviennent pas infinies quand le paramètre s'évanouit, ou plus généralement la somme des fonctions semblables de ces racines. On retrouve alors les résultats obtenus dans le Mémoire de 1831.

On pourrait, au reste, démontrer rigoureusement la formule de Lagrange, en combinant la méthode que M. Laplace a suivie avec la théorie que nous avons exposée dans le premier paragraphe.



MÉMOIRE  
SUR  
LES DEUX ESPÈCES D'ONDES PLANES

QUI PEUVENT SE PROPAGER  
DANS UN SYSTÈME ISOTROPE DE POINTS MATÉRIELS.

*Considérations générales.*

J'ai donné le premier, dans les *Exercices de Mathématiques*, les équations générales aux différences partielles qui représentent les mouvements infiniment petits d'un système de points matériels sollicités par des forces d'attraction et de répulsion mutuelle. De plus, dans divers Mémoires que j'ai publiés, les uns par extraits, les autres en totalité, dans les années 1829 et 1830, j'ai donné des intégrales particulières ou générales de ces mêmes équations, et j'ai conclu de mes calculs que les équations du mouvement de la lumière sont renfermées dans celles dont je viens de parler. D'ailleurs, parmi les mouvements infiniment petits que peut acquérir un système de molécules, ceux qu'il importait surtout de connaître étaient les mouvements simples et par ondes planes, qui peuvent être considérés comme les éléments de tous les autres. Or, ayant recherché directement, dans les *Exercices de Mathématiques*, les lois des mouvements simples propagés dans un système de molécules, j'ai trouvé, pour chaque système, trois mouvements de cette espèce et j'ai remarqué que, dans le cas où le système devient isotrope, ces trois mouvements se réduisent à deux, les vibrations des molécules étant transversales pour l'un, c'est-à-dire comprises dans les plans des ondes, et longitudinales pour l'autre, c'est-à-dire per-

SUR LES DEUX ESPÈCES D'ONDES PLANES, ETC. 353

pendiculaires aux plans des ondes. Enfin, comme les vibrations transversales correspondent à deux systèmes d'ondes planes, qui se confondent en un seul ou se séparent, suivant que le système de points matériels est isotrope ou non isotrope, je suis arrivé, dans les Mémoires publiés en 1829 et 1830, à cette conclusion définitive que, dans la propagation de la lumière à l'intérieur des corps isophanes, les vitesses des molécules éthérées sont transversales, c'est-à-dire perpendiculaires aux directions des rayons lumineux. Je me crus dès lors autorisé à soutenir et à considérer comme seule admissible cette hypothèse proposée par Fresnel, et à l'aide de laquelle s'expliquent si facilement les phénomènes de polarisation et d'interférences.

Le Mémoire qu'on va lire est relatif aux deux espèces d'ondes planes qui peuvent se propager dans un système isotrope de points matériels et aux vitesses de propagation de ces mêmes ondes. Ce qu'il importe surtout de remarquer, c'est qu'à l'aide des méthodes exposées dans les *Nouveaux Exercices de Mathématiques* et le Mémoire lithographié sous la date d'août 1836, on peut, sans réduire au second ordre les équations des mouvements infiniment petits, et en laissant au contraire à ces équations toute leur généralité, parvenir à déterminer complètement les vitesses dont il s'agit et à les exprimer, non par des sommes ou intégrales triples, mais par des sommes ou intégrales simples aux différences finies. Si l'on transforme ces mêmes sommes en intégrales aux différences infiniment petites, la première, celle qui représente la vitesse de propagation des vibrations transversales, s'évanouira lorsqu'on supposera l'action mutuelle de deux molécules réciproquement proportionnelle au cube de leur distance  $r$ , ou plus généralement à une puissance de  $r$  intermédiaire entre la seconde et la quatrième puissance. Mais cette vitesse cessera de s'évanouir, en offrant une valeur réelle, si l'action moléculaire est une force attractive réciproquement proportionnelle au carré de la distance  $r$ , ou une force répulsive réciproquement proportionnelle, au moins dans le voisinage du contact, au bicarré de  $r$ , et alors la propagation de vibrations, excitées en un point donné du système que l'on considère, sera due



principalement, dans la première hypothèse, aux molécules très éloignées, dans la seconde hypothèse, aux molécules très voisines de ce même point. Ajoutons que, pour un mouvement simple, la vitesse de propagation de vibrations transversales sera, dans la première hypothèse, proportionnelle à l'épaisseur des ondes planes, et, dans la seconde hypothèse, indépendante de cette épaisseur. Quant aux vibrations longitudinales, elles ne pourront, dans la première hypothèse, se propager sans s'affaiblir. Enfin, dans la seconde hypothèse, le rapport entre les vitesses de propagation des vibrations longitudinales et des vibrations transversales se présentera sous la forme infinie  $\frac{1}{0}$ , à moins que l'on ne prenne, pour origine de l'intégrale relative à  $r$ , non une valeur nulle, mais la distance entre deux molécules voisines.

Observons encore que, supposer la vitesse de propagation des ondes planes indépendante de leur épaisseur, c'est, dans la théorie de la lumière, supposer que la dispersion des couleurs devient insensible, comme elle paraît l'être, quand les rayons lumineux traversent le vide. Donc la nullité de la dispersion dans le vide semble indiquer que, dans le voisinage du contact, l'action mutuelle de deux molécules d'éther est répulsive et réciproquement proportionnelle au bicarré de la distance. Au reste, cette indication se trouve confirmée par les considérations suivantes.

Supposons que, l'action mutuelle de deux molécules étant répulsive et réciproquement proportionnelle, au moins dans le voisinage du contact, au bicarré de la distance, les vitesses de propagation des vibrations transversales et des vibrations longitudinales puissent être, sans erreur sensible, exprimées par des intégrales aux différences infiniment petites. Alors, d'après ce qui a été dit ci-dessus, la seconde de ces deux vitesses deviendra infinie, ou du moins très considérable par rapport à la première, et c'est même en ayant égard à cette circonstance que, d'une méthode exposée dans la première Partie du Mémoire lithographié de 1836, j'avais déduit les conditions relatives à la surface de séparation de deux milieux, telles qu'on les

trouve dans la septième livraison des *Nouveaux Exercices de Mathématiques* (1), publiée vers la même époque. M. Airy a donc eu raison de dire que mes formules donnent, pour la vitesse de propagation des vibrations longitudinales, une valeur infinie, et cette conséquence est conforme aux remarques que j'ai consignées, non seulement dans une lettre adressée à M. l'abbé Moigno le 6 octobre 1837, mais même dans une lettre antérieure adressée de Prague à M. Ampère, le 12 février 1836, et insérée dans les *Comptes rendus* de cette même année. Or, lorsque la vitesse de propagation des vibrations longitudinales devient infinie pour deux milieux séparés l'un de l'autre par une surface plane, les vibrations transversales peuvent être réfléchies sous un angle tel que le rayon résultant de la réflexion soit complètement polarisé dans le plan d'incidence, et l'angle dont il s'agit a pour tangente le rapport du sinus d'incidence au sinus de réfraction. D'ailleurs, la polarisation des rayons lumineux sous ce même angle est précisément un fait constaté par l'expérience, et c'est en cela que consiste, comme l'on sait, la belle loi découverte par M. Brewster. Par conséquent, notre théorie établit un rapport intime entre les deux propriétés que possèdent les rayons lumineux de se propager, sans dispersion des couleurs, dans le vide, c'est-à-dire dans l'éther considéré isolément, et de se polariser complètement sous l'angle indiqué par M. Brewster, quand ils sont réfléchis par la surface de certains corps; en sorte que, le premier phénomène étant donné, l'autre s'en déduit immédiatement par le calcul.

Au reste, comme je l'ai dit, c'est en supposant les sommes aux différences finies, transformées en intégrales aux différences infiniment petites, que j'ai pu déduire de la théorie la propriété que l'éther isolé paraît offrir de transmettre avec la même vitesse de propagation les rayons diversement colorés. La possibilité d'une semblable transformation résulte de la loi de répulsion que j'ai indiquée et du rapprochement considérable qui existe entre deux molé-

(1) *Œuvres de Cauchy*, 2<sup>e</sup> série, t. X.



cules voisines dans le fluide éthéré. Mais quelque grand que soit ce rapprochement, comme on ne peut supposer la distance de deux molécules voisines réduite absolument à zéro, il est naturel de penser que, dans le vide, la dispersion n'est pas non plus rigoureusement nulle, qu'elle est seulement assez petite pour avoir, jusqu'à ce jour, échappé aux observateurs. S'il y avait possibilité de la mesurer, ce serait, par exemple, à l'aide d'observations faites sur les étoiles périodiques, particulièrement sur celles qui paraissent et disparaissent, et sur les étoiles temporaires. En effet, dans l'hypothèse de la dispersion, les rayons colorés qui, en partant d'une étoile, suivent la même route, se propageraient avec des vitesses inégales, et par suite des vibrations, excitées au même instant dans le voisinage de l'étoile, pourraient parvenir à notre œil à des époques séparées entre elles par des intervalles de temps d'autant plus considérables que l'étoile serait plus éloignée. Ainsi, dans l'hypothèse dont il s'agit, la clarté d'une étoile venant à varier dans un temps peu considérable, cette variation devrait, à des distances suffisamment grandes, occasionner un changement de couleur qui aurait lieu dans un sens ou dans un autre, suivant que l'étoile deviendrait plus ou moins brillante, une même partie du spectre devant s'ajouter, dans le premier cas, à la lumière propre de l'étoile dont elle devrait être soustraite, au contraire, dans le second cas. Il était donc important d'examiner sous ce point de vue les étoiles périodiques, et en particulier Algol, qui passe dans un temps assez court de la seconde grandeur à la quatrième : c'est ce qu'a fait M. Arago dans le but que nous venons d'indiquer. Mais les observations qu'il a entreprises sur Algol, comme celles qui avaient pour objet l'ombre portée sur Jupiter par ses satellites, n'ont laissé apercevoir aucune trace de la dispersion des couleurs.

Aux considérations qui précèdent, je joindrai une remarque assez curieuse. Si l'on parvenait à mesurer la dispersion des couleurs dans le vide et si l'on admettait comme rigoureuse la loi du bicarré de la distance, la théorie que nous exposons dans ce Mémoire fournirait le moyen de calculer approximativement la distance qui sépare deux

molécules voisines dans le fluide éthéré. Déjà même, en partant de la loi dont il s'agit, nous pouvons calculer une limite supérieure à cette distance. En effet, comme la lumière d'Algol perd en moins de 4 heures plus de la moitié de son intensité, nous pouvons admettre, sans crainte de nous tromper, que les observations faites sur cette étoile parviendraient à rendre sensible la dispersion des couleurs dans le vide, si l'intervalle de temps, renfermé entre les deux instants qui nous laissent apercevoir des rayons rouges et violets partis simultanément de l'étoile, s'élevait seulement à un quart d'heure. D'ailleurs, vu la distance considérable qui sépare de la Terre les étoiles les plus voisines, distance que la lumière ne peut franchir en moins de 3 ou 4 années, le quart d'heure dont il s'agit n'équivaut pas assurément à la  $\frac{1}{100000}$  partie du temps que la lumière emploie pour venir d'Algol jusqu'à nous, et par conséquent il indiquerait, entre les vitesses de propagation des rayons violets et rouges, un rapport qui surpasserait l'unité au plus de  $\frac{1}{100000}$ . Enfin, en admettant ce rapport, on trouverait, pour la distance entre deux molécules voisines du fluide éthéré, environ  $\frac{3}{1000000}$  de millimètre, ou, ce qui revient au même, environ  $\frac{1}{200}$  de la longueur moyenne d'une ondulation lumineuse. Donc la longueur d'une ondulation lumineuse doit être considérable à l'égard de la distance qui sépare deux molécules voisines. Cette conclusion s'accorde au reste avec les remarques déjà faites dans un autre Mémoire. (Voir les pages 193 et 195.)

§ I. — *Vibrations transversales ou longitudinales des molécules, dans un système isotrope.*

Considérons un système isotrope de points matériels, et soient, dans l'état d'équilibre :

$x, y, z$  les coordonnées rectangulaires d'une première molécule  $m$  ;

$x + x', y + y', z + z'$  les coordonnées d'une seconde molécule  $m'$  ;

$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$  la distance qui sépare les deux molécules  $m, m'$  ;



en  $mrf(r)$ , l'action mutuelle des deux molécules  $m, m$ , prise avec le signe + ou avec le signe -, suivant que ces deux molécules s'attirent ou se repoussent ;

enfin,  $\varkappa$  étant une fonction quelconque des coordonnées  $x, y, z$ , désignons par

$$\Delta \varkappa$$

l'accroissement que prend cette fonction quand on passe de la molécule  $m$  à la molécule  $m$ , c'est-à-dire, en d'autres termes, quand on attribue aux coordonnées

$$x, y, z$$

les accroissements

$$\Delta x = x, \quad \Delta y = y, \quad \Delta z = z.$$

On aura généralement

$$\Delta \varkappa = (e^{\varkappa D_x + \gamma D_y + z D_z} - 1) \varkappa.$$

par conséquent

$$\Delta = e^{\varkappa D_x + \gamma D_y + z D_z} - 1.$$

Donc, en représentant, comme on l'a fait quelquefois, chacune des caractéristiques

$$D_x, D_y, D_z$$

par une seule lettre, et posant en conséquence

$$u = D_x, \quad v = D_y, \quad w = D_z,$$

on aura simplement

$$(1) \quad \Delta = e^{u\varkappa + v\gamma + wz} - 1.$$

Concevons maintenant que le système des molécules  $m, m, m', \dots$  vienne à se mouvoir, et soient, au bout du temps  $t$ ,

$$\xi, \eta, \zeta$$

les déplacements de la molécule  $m$  mesurés parallèlement aux axes coordonnés. D'après ce qui a été dit précédemment (p. 156), les équations des mouvements infiniment petits du système supposé

isotrope seront de la forme

$$(2) \quad \begin{cases} (E - D_x^2) \xi + FD_x(D_x \xi + D_y \eta + D_z \zeta) = 0, \\ (E - D_y^2) \eta + FD_y(D_x \xi + D_y \eta + D_z \zeta) = 0, \\ (E - D_z^2) \zeta + FD_z(D_x \xi + D_y \eta + D_z \zeta) = 0, \end{cases}$$

E, F étant deux fonctions déterminées du trinome

$$D_x^2 + D_y^2 + D_z^2$$

que nous désignerons pour abréger par  $k^2$ , en sorte qu'on aura

$$(3) \quad k^2 = u^2 + v^2 + w^2.$$

Ajoutons que, si, en indiquant par le signe S une sommation relative aux molécules  $m, m', \dots$  on pose

$$(4) \quad \begin{cases} G = S[m f(r) \Delta], \\ H = S \left\{ \frac{m}{r} \frac{df(r)}{dr} \left[ \Delta - (xu + yv + zw) - \frac{(xu + yv + zw)^2}{2} \right] \right\}, \end{cases}$$

G, H se réduiront, dans l'hypothèse admise, à deux fonctions de  $k^2$ , desquelles on déduira E, F à l'aide des formules

$$(5) \quad E = G + \frac{1}{k} \frac{dH}{dk}, \quad F = \frac{1}{k} \frac{d \left( \frac{1}{k} \frac{dH}{dk} \right)}{dk}.$$

Soient maintenant

$$\alpha, \beta, \gamma$$

les angles que forme le rayon vecteur  $r$  avec les demi-axes des coordonnées positives. On aura

$$x = r \cos \alpha, \quad y = r \cos \beta, \quad z = r \cos \gamma;$$

par conséquent, le trinome

$$xu + yv + zw,$$

dont G, H représentent des fonctions en vertu des formules (1) et (4), sera équivalent au produit

$$r(u \cos \alpha + v \cos \beta + w \cos \gamma).$$



D'ailleurs, G, H devant se réduire identiquement à des fonctions de

$$u^2 + v^2 + w^2,$$

on pourra opérer généralement cette réduction, et dans cette opération il importe peu que l'on considère  $u, v, w$  comme des caractéristiques ou comme des quantités véritables. Seulement, dans le dernier cas, on devra laisser les valeurs de  $u, v, w$  entièrement arbitraires. Or, lorsque l'on considère

$$u, v, w$$

comme des quantités véritables, alors, en supposant

$$k = \sqrt{u^2 + v^2 + w^2}$$

et nommant  $\delta$  un certain angle formé par le rayon vecteur  $r$  avec une droite OA menée par l'origine O des coordonnées perpendiculairement au plan que représente l'équation

$$ux + vy + wz = 0,$$

on a

$$(6) \quad u \cos \alpha + v \cos \beta + w \cos \gamma = k \cos \delta;$$

par conséquent

$$ux + vy + wz = kr \cos \delta.$$

Donc alors, en vertu des formules (1), (4), les sommes G, H, réduites à

$$(7) \quad \begin{cases} G = S[m f(r)(e^{kr \cos \delta} - 1)], \\ H = S\left[\frac{m}{r} \frac{df(r)}{dr} \left(e^{kr \cos \delta} - 1 - kr \cos \delta - \frac{k^2 r^2 \cos^2 \delta}{2}\right)\right], \end{cases}$$

sont l'une et l'autre de la forme

$$S \bar{f}(k \cos \delta),$$

et dire qu'elles doivent se réduire à des fonctions de  $k^2$ , c'est dire qu'elles demeurent constantes, tandis que l'on fait varier dans chaque terme l'angle  $\delta$ , en faisant tourner d'une manière quelconque l'axe OA autour du point O. D'ailleurs lorsqu'une somme de la forme

$$(8) \quad X = S \bar{f}(k \cos \delta)$$

remplit la condition que nous venons d'énoncer, on a, en vertu d'un théorème précédemment démontré (p. 38),

$$X = \frac{1}{2} S \int_0^\pi \bar{f}(k \cos \delta) \sin \delta d\delta,$$

ou, ce qui revient au même,

$$(9) \quad X = \frac{1}{2} S \int_{-1}^1 \bar{f}(k \theta) d\theta,$$

la valeur de  $\theta$  étant

$$\theta = \cos \delta.$$

Donc, en remplaçant successivement la fonction  $\bar{f}(k\theta)$  par les deux suivantes,

$$m f(r)(e^{kr\theta} - 1), \quad \frac{m}{r} \frac{df(r)}{dr} \left(e^{kr\theta} - 1 - kr\theta - \frac{k^2 r^2 \theta^2}{2}\right),$$

et ayant égard aux formules

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_{-1}^1 (e^{kr\theta} - 1) d\theta &= \frac{e^{kr} - e^{-kr}}{2kr} - 1, \\ \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \left(e^{kr\theta} - 1 - kr\theta - \frac{k^2 r^2 \theta^2}{2}\right) d\theta &= \frac{e^{kr} - e^{-kr}}{2kr} - 1 - \frac{1}{6} k^2 r^2, \end{aligned}$$

on tirera des équations (7)

$$(10) \quad \begin{cases} G = S \left[ m f(r) \left( \frac{e^{kr} - e^{-kr}}{2kr} - 1 \right) \right], \\ H = S \left[ \frac{m}{r} \frac{df(r)}{dr} \left( \frac{e^{kr} - e^{-kr}}{2kr} - 1 - \frac{1}{6} k^2 r^2 \right) \right]. \end{cases}$$

Les équations (10), jointes aux formules (5) et à la suivante,

$$(11) \quad \frac{e^{kr} - e^{-kr}}{2kr} = 1 + \frac{k^2 r^2}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{k^4 r^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} + \dots,$$

suffisent pour déterminer complètement les valeurs des caractéristiques E, F que renferment les formules (2), en fonction de la caractéristique

$$k^2 = D_2^2 + D_3^2 + D_4^2.$$



En effectuant les différentiations relatives à  $k$ , l'on trouve

$$(12) \quad \left\{ \begin{aligned} E &= S \left[ m f(r) \left( \frac{k^2 r^2}{1.2.3} + \frac{k^4 r^4}{1.2.3.4.5} + \dots \right) \right] \\ &+ S \left[ m r \frac{d f(r)}{d r} \left( \frac{1}{5} \frac{k^2 r^2}{1.2.3} + \frac{1}{7} \frac{k^4 r^4}{1.2.3.4.5} + \dots \right) \right], \\ F &= \frac{1}{k^2} S \left[ m r \frac{d f(r)}{d r} \left( \frac{1}{3.5} \frac{k^2 r^2}{1} + \frac{1}{5.7} \frac{k^4 r^4}{1.2.3} + \dots \right) \right]. \end{aligned} \right.$$

Si d'ailleurs on pose, pour abrégér,

$$r f(r) = f(r),$$

en sorte que l'action mutuelle de deux molécules  $m$ ,  $m$  soit représentée simplement par

$$m m f(r),$$

la première des équations (12) pourra encore être présentée sous la forme

$$(13) \quad E = \frac{1}{5} \frac{k^2}{1.2.3} S \left\{ \frac{m}{r^2} D_r [r^2 f(r)] \right\} + \frac{1}{7} \frac{k^4}{1.2.3.4.5} S \left\{ \frac{m}{r^4} D_r [r^4 f(r)] \right\} + \dots$$

Si, au lieu de développer E, F en séries, on se borne à substituer dans les formules (5) les valeurs de G, H fournies par les équations (10), on trouvera

$$(14) \quad \left\{ \begin{aligned} E &= S \left\{ \frac{m}{k^2 r^2} D_r \left[ \left( \frac{e^{kr} + e^{-kr}}{2} - \frac{e^{kr} - e^{-kr}}{2kr} - \frac{1}{3} k^2 r^2 \right) f(r) \right] \right\}, \\ F &= \frac{1}{k^2} S \left[ m r \frac{d f(r)}{d r} \left( \frac{e^{kr} - e^{-kr}}{2kr} - 3 \frac{e^{kr} + e^{-kr}}{2k^2 r^2} + 3 \frac{e^{kr} - e^{-kr}}{2k^2 r^2} \right) \right]. \end{aligned} \right.$$

Ces dernières formules, comme on devait s'y attendre, s'accordent avec les équations (12) et (13).

Soient maintenant

$$\bar{\xi}, \bar{\eta}, \bar{\zeta}$$

les déplacements symboliques des molécules dans un mouvement simple ou par ondes planes. Ces déplacements symboliques seront de la forme

$$(15) \quad \bar{\xi} = A e^{ix+iy+wz-st}, \quad \bar{\eta} = B e^{ix+iy+wz-st}, \quad \bar{\zeta} = C e^{ix+iy+wz-st},$$

pourvu que les lettres

$$u, v, w,$$

cessent de représenter les caractéristiques

$$D_x, D_y, D_z,$$

désignent avec les lettres

$$A, B, C, s$$

des constantes réelles ou imaginaires, et les équations (2), qui devront encore être vérifiées, quand on y remplacera

$$\text{par} \quad \bar{\xi}, \bar{\eta}, \bar{\zeta}$$

donneront, ou

$$(16) \quad s^2 = E, \quad uA + vB + wC = 0$$

ou

$$(17) \quad s^2 = E + k^2 F, \quad \frac{A}{u} = \frac{B}{v} = \frac{C}{w},$$

E, F désignant encore des fonctions de  $u, v, w$ , déterminées par les formules (14), et la valeur de  $k$  dans ces formules étant toujours choisie de manière que l'on ait

$$k^2 = u^2 + v^2 + w^2.$$

Si le mouvement simple que l'on considère est du nombre de ceux qui se propagent sans s'affaiblir, on aura

$$u = v \sqrt{-1}, \quad v = v \sqrt{-1}, \quad w = w \sqrt{-1}, \quad s = s \sqrt{-1},$$

$u, v, w, s$  désignant des quantités réelles; et, si l'on pose encore

$$k = k \sqrt{-1},$$

$k$  sera lui-même une quantité réelle liée à  $u, v, w$  par la formule

$$(18) \quad k^2 = v^2 + v^2 + w^2.$$

Ajoutons que, dans le cas dont il s'agit, la durée  $T$  d'une vibration, la longueur  $l$  d'une ondulation et la vitesse de propagation  $\Omega$  des ondes



planes seront respectivement

$$(19) \quad T = \frac{2\pi}{s}, \quad l = \frac{2\pi}{k}, \quad \Omega = \frac{s}{k} = \frac{l}{T},$$

et que le plan invariable parallèle aux plans des ondes sera représenté par la formule

$$ux + vy + wz = 0.$$

Comme d'ailleurs la seconde des formules (16) ou (17), jointe aux équations (15) et (18), donnera, ou

$$v\bar{\xi} + v\bar{\eta} + w\bar{\zeta} = 0, \quad v\zeta + v\eta + w\xi = 0,$$

ou

$$\frac{\bar{\xi}}{v} = \frac{\bar{\eta}}{v} = \frac{\bar{\zeta}}{w}, \quad \frac{\xi}{v} = \frac{\eta}{v} = \frac{\zeta}{w},$$

il est clair que les vibrations moléculaires seront ou transversales, c'est-à-dire comprises dans le plan des ondes, ou longitudinales, c'est-à-dire perpendiculaires à ces mêmes plans. Enfin de la première des formules (16) ou (17), jointe aux équations (14) et aux formules

$$(20) \quad s = s\sqrt{-1}, \quad k = k\sqrt{-1}, \quad \Omega = \frac{s}{k} = \frac{s}{k},$$

on conclura que le carré de la vitesse de propagation  $\Omega$  est, pour les vibrations transversales,

$$(21) \quad \Omega^2 = \frac{1}{k^2} S \left\{ \frac{m}{r^2} D_r \left[ \left( \cos kr - \frac{\sin kr}{kr} + \frac{1}{3} k^2 r^2 \right) f(r) \right] \right\},$$

et pour les vibrations longitudinales,

$$(22) \quad \left\{ \begin{aligned} \Omega^2 &= \frac{1}{k^2} S \left\{ \frac{m}{r^2} D_r \left[ \left( 2 \frac{\sin kr}{kr} - 2 \cos kr - kr \sin kr + \frac{1}{3} k^2 r^2 \right) f(r) \right] \right\} \\ &+ \frac{1}{k^2} S \left[ m \left( \cos kr - \frac{\sin kr}{kr} \right) \frac{f(r)}{r} \right]. \end{aligned} \right.$$

Les valeurs de  $\Omega$ , fournies par les équations (21), (22), sont précisément les deux vitesses de propagation relatives aux deux espèces d'ondes planes qui peuvent être propagées par un milieu isotrope. Si,

dans ces équations, on remplace  $\Omega$  par  $\frac{s}{k}$ , elles se réduiront aux formules (66) et (74) du septième paragraphe du Mémoire lithographié, sous la date d'août 1836 (1). Enfin, si l'on développe en séries les seconds membres des équations (20) et (21), on trouvera, pour les vibrations transversales,

$$(23) \quad \Omega^2 = \frac{1}{5} \frac{1}{1.2.3} S \left\{ \frac{m}{r^2} D_r [r^4 f(r)] \right\} - \frac{1}{7} \frac{k^2}{1.2.3.4.5} S \left\{ \frac{m}{r^2} D_r [r^4 f(r)] \right\} + \dots,$$

et, pour les vibrations longitudinales,

$$(24) \quad \Omega^2 = \frac{1}{1.2.3} S \left[ m r \frac{2f(r) + 3rf'(r)}{5} \right] - \frac{k^2}{1.2.3.4.5} S \left[ m r^3 \frac{2f(r) + 5rf'(r)}{7} \right] + \dots;$$

ce qu'on pourrait aussi conclure des formules (12) et (13) jointes aux équations (16), (17), (19), et ce qui s'accorde avec les formules données dans les *Nouveaux Exercices de Mathématiques*.

Il importe d'examiner ce que deviennent les formules précédentes, dans le cas particulier où les sommes indiquées par le signe S peuvent être, sans erreur sensible, remplacées par des intégrales aux différences infiniment petites. Or, en désignant toujours par  $r$  le rayon vecteur mené de la molécule  $m$  à la molécule  $m$ , nommons  $p$  l'angle compris entre le rayon vecteur  $r$  et l'axe des  $x$ ,  $q$  l'angle formé par le plan de ces deux droites avec le plan des  $x, y$ , et  $\alpha$  une quantité réelle ou une expression imaginaire dont la valeur change avec la position de la molécule  $m$ . Enfin, soit  $\rho$  la densité, supposée constante, du système de molécules que l'on considère,  $\alpha$  pourra être regardée comme une fonction des trois coordonnées rectangulaires  $x, y, z$ , ou bien encore comme une fonction des trois coordonnées polaires

$$p, \quad q, \quad r,$$

liées aux trois angles  $\alpha, \xi, \gamma$  par les équations

$$\cos \alpha = \cos p, \quad \cos \xi = \sin p \cos q, \quad \cos \gamma = \sin p \sin q$$

(1) *Œuvres de Cauchy*, 2<sup>e</sup> série, t. XV.



et si l'on suppose que la sommation indiquée par le signe S s'étende à toutes les molécules

$$m, m', \dots$$

distinctes de  $m$ , on aura sensiblement, dans le cas particulier dont il s'agit (en vertu des formules bien connues),

$$S(m\mathfrak{A}) = \iiint \mathfrak{A} r^2 \sin p \, dp \, dq \, dr,$$

les intégrations étant effectuées, par rapport aux angles  $p, q$ , entre les limites

$$p = 0, \quad p = \pi, \quad q = 0, \quad q = 2\pi,$$

et par rapport à  $r$  entre deux limites

$$r_0, \quad r_\infty,$$

dont la première soit nulle ou bien équivalente à la plus petite distance qui sépare deux molécules voisines, la seconde infinie ou du moins assez grande pour que dans l'expression

$$S(m\mathfrak{A})$$

la somme des termes correspondant à des valeurs plus considérables de  $r$  puisse être négligée sans erreur sensible. Par suite, en indiquant les limites des intégrations et plaçant le facteur constant  $\mathfrak{A}$  avant les signes  $\int$ , on trouvera

$$(25) \quad S(m\mathfrak{A}) = \mathfrak{A} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \int_{r_0}^{r_\infty} \mathfrak{A} r^2 \sin p \, dp \, dq \, dr.$$

Si la fonction  $\mathfrak{A}$  devient indépendante des variables  $p, q$ , c'est-à-dire, en d'autres termes, si  $\mathfrak{A}$  est simplement fonction de  $r$ , alors, en ayant égard aux deux formules

$$\int_0^\pi \sin p \, dp = 2, \quad \int_0^{2\pi} dq = 2\pi,$$

on tirera de l'équation (25)

$$(26) \quad S(m\mathfrak{A}) = 4\pi\mathfrak{A} \int_{r_0}^{r_\infty} \mathfrak{A} r^2 \, dr.$$

Donc, en vertu des formules (20) et (21), le carré de la vitesse de propagation  $\Omega$  se réduira, pour les vibrations transversales, à

$$(27) \quad \Omega^2 = \frac{4\pi\mathfrak{A}}{k^2} \int_{r_0}^{r_\infty} D_r \left[ \left( \cos kr - \frac{\sin kr}{kr} + \frac{1}{3} k^2 r^2 \right) f(r) \right] dr,$$

et, pour les vibrations longitudinales, à

$$(28) \quad \left\{ \begin{aligned} \Omega^2 &= \frac{4\pi\mathfrak{A}}{k^2} \int_{r_0}^{r_\infty} D_r \left[ \left( 2 \frac{\sin kr}{kr} - 2 \cos kr - kr \sin kr + \frac{1}{3} k^2 r^2 \right) f(r) \right] dr \\ &+ \frac{4\pi\mathfrak{A}}{k^2} \int_{r_0}^{r_\infty} \left( \cos kr - \frac{\sin kr}{kr} \right) r f(r) \, dr. \end{aligned} \right.$$

Les formules (27), (28) supposent : 1° que le système de molécules donné est isotrope ; 2° que, dans ce système, les mouvements simples se propagent sans s'affaiblir ; 3° que, dans la détermination des vitesses de propagation des mouvements simples, on peut, sans erreur sensible, substituer aux sommations indiquées par le signe S des intégrations aux différences infiniment petites. Or il est bon d'observer que, de ces trois suppositions, les deux dernières entraînent toujours la première et conduisent directement aux formules (27), (28), sans l'intermédiaire de la formule (9). En effet, lorsque les mouvements simples se propagent sans s'affaiblir, on a, dans les équations (15), (16) et (17),

$$u = v\sqrt{-1}, \quad v = v\sqrt{-1}, \quad w = w\sqrt{-1}, \quad k = k\sqrt{-1},$$

$v, w, k$  désignant des quantités réelles qui vérifient la formule (18) ; et par suite le carré de la vitesse de propagation  $\Omega$  est, en vertu des formules (16), (17) et (20), pour les vibrations transversales,

$$(29) \quad \Omega^2 = -\frac{E}{k^2}$$



et, pour les vibrations longitudinales,

$$(30) \quad \Omega^2 = -\frac{E}{k^2} + F,$$

les valeurs de E, F, G, H étant données par les équations (5) et (7), desquelles on tire

$$(31) \quad E = G - \frac{1}{k} \frac{dH}{dk}, \quad F = \frac{1}{k} \frac{d\left(\frac{1}{k} \frac{dH}{dk}\right)}{dk}$$

et

$$(32) \quad \left\{ \begin{array}{l} G = S \left[ m f(r) (e^{kr \cos \delta \sqrt{-1}} - 1) \right], \\ H = S \left[ \frac{m}{r} \frac{df(r)}{dr} \left( e^{kr \cos \delta \sqrt{-1}} - 1 - kr \cos \delta \sqrt{-1} + \frac{k^2 r^2 \cos^2 \delta}{2} \right) \right]. \end{array} \right.$$

Dans les deux dernières formules, l'angle  $\delta$  est lié aux angles  $\alpha$ ,  $\zeta$ ,  $\gamma$  par l'équation (6), de laquelle on tire

$$k \cos \delta = v \cos \alpha + v \cos \beta + w \cos \gamma,$$

ou, ce qui revient au même,

$$(33) \quad k \cos \delta = v \cos p + v \sin p \cos q + w \sin p \sin q.$$

Si d'ailleurs on peut substituer aux sommations indiquées par le signe S des intégrations aux différences infiniment petites, les formules (32), jointes à l'équation (25), donneront

$$(34) \quad \left\{ \begin{array}{l} G = \Omega \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \int_{r_0}^{r_\infty} (e^{kr \cos \delta \sqrt{-1}} - 1) r^2 f(r) \sin p \, dp \, dq \, dr, \\ H = \Omega \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \int_{r_0}^{r_\infty} \times \left( e^{kr \cos \delta \sqrt{-1}} - 1 - kr \cos \delta \sqrt{-1} + \frac{k^2 r^2 \cos^2 \delta}{2} \right) r \frac{df(r)}{dr} \sin p \, dp \, dq \, dr. \end{array} \right.$$

Mais, en supposant l'angle  $\delta$  lié aux angles  $p$ ,  $q$ , par la formule (33), on a, en vertu d'un théorème donné par M. Poisson (voir la 49<sup>e</sup> livraison des *Exercices de Mathématiques*, p. 17) (1),

$$\int_0^\pi \int_0^{2\pi} \tilde{f}(k \cos \delta) \sin p \, dp \, dq = 2\pi \int_0^\pi \tilde{f}(k \cos \delta) \sin \delta \, d\delta$$

(1) *Œuvres de Cauchy*, 2<sup>e</sup> série, t. IX, p. 387, 388.

ou, ce qui revient au même,

$$(35) \quad \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \tilde{f}(k \cos \delta) \sin p \, dp \, dq = 2\pi \int_{-1}^1 \tilde{f}(k \theta) \, d\theta,$$

la valeur de  $\theta$  étant

$$\theta = \cos \delta.$$

Donc, en remplaçant successivement la fonction  $\tilde{f}(k \theta)$  par les deux suivantes

$$e^{kr \theta \sqrt{-1}} - 1, \quad e^{kr \theta \sqrt{-1}} - 1 - kr \theta \sqrt{-1} + \frac{k^2 r^2 \theta^2}{2},$$

et ayant égard aux formules

$$\int_{-1}^1 (e^{kr \theta \sqrt{-1}} - 1) \, d\theta = 2 \left( \frac{\sin kr}{kr} - 1 \right),$$

$$\int_{-1}^1 \left( e^{kr \theta \sqrt{-1}} - 1 - kr \theta \sqrt{-1} + \frac{k^2 r^2 \theta^2}{2} \right) \, d\theta = 2 \left( \frac{\sin kr}{kr} - 1 + \frac{1}{6} k^2 r^2 \right),$$

on tirera des équations (34)

$$(36) \quad \left\{ \begin{array}{l} G = 4\pi \Omega \int_{r_0}^{r_\infty} \left( \frac{\sin kr}{kr} - 1 \right) r^2 f(r) \, dr, \\ H = 4\pi \Omega \int_{r_0}^{r_\infty} \left( \frac{\sin kr}{kr} - 1 + \frac{1}{6} k^2 r^2 \right) r \frac{df(r)}{dr} \, dr. \end{array} \right.$$

A ces dernières valeurs de G, H correspondront, en vertu des formules (31), des valeurs de E, F qui, substituées dans les équations (29) et (30), feront coïncider celles-ci avec les équations (27) et (28). D'ailleurs les seconds membres des formules (36) sont, ainsi que le second membre de la formule (35), des fonctions de la seule quantité  $k$ , qui changent de signe avec elle, par conséquent des fonctions de la seule quantité  $k^2$ ; ce qui ne peut avoir lieu que pour un système isotrope de molécules.

Il nous reste à discuter les valeurs de  $\Omega^2$  fournies par les équations (27) et (28).

La première de ces valeurs, ou celle qui correspond aux vibrations



transversales, est, en vertu de l'équation (27), le produit de

$$4\pi\Omega$$

par la différence entre les deux valeurs qu'acquiert l'expression

$$\frac{1}{k^3} \left( \cos kr - \frac{\sin kr}{kr} + \frac{1}{3} k^2 r^2 \right) f(r),$$

quand on y pose successivement  $r = r_+$ ,  $r = r_-$ . D'ailleurs le produit

$$\frac{1}{k^3} \left( \cos kr - \frac{\sin kr}{kr} + \frac{1}{3} k^2 r^2 \right) = \frac{1}{5} \frac{r^4}{1.2.3} - \frac{1}{7} \frac{k^2 r^6}{1.2.3.4.5} + \dots$$

se réduit sensiblement, pour de très grandes valeurs de  $r$ , à

$$\frac{1}{3} \frac{r^2}{k^3},$$

et, pour de très petites valeurs de  $r$ , à

$$\frac{1}{5} \frac{r^4}{1.2.3} = \frac{1}{30} r^4.$$

Donc,  $r_+$  désignant une très petite et  $r_-$  une très grande valeur de  $r$ , la formule (27) donnera sensiblement

$$(37) \quad \Omega^2 = \frac{4\pi\Omega}{3} \left[ \frac{1}{k^3} r_+^2 f(r_+) - \frac{1}{10} r_-^4 f(r_-) \right].$$

L'équation (37) fournit pour  $\Omega^2$  une valeur finie, positive et différente de zéro, dans deux cas dignes de remarque, savoir : 1° quand le produit  $r^2 f(r)$  se réduit, pour une valeur infiniment grande de la distance  $r$ , à une constante finie, mais positive; 2° quand le produit  $r^4 f(r)$  se réduit pour une valeur infiniment petite de  $r$ , à une constante finie, mais négative. Le premier cas aura lieu, par exemple, si l'action mutuelle de deux molécules est une force attractive, réciproquement proportionnelle au carré de la distance. Alors  $f(r)$  serait de la forme

$$(38) \quad f(r) = \frac{g}{r^2},$$

$g$  désignant une constante positive; et, comme de la formule (37), jointe à l'équation

$$s = \Omega k,$$

on tirerait sensiblement

$$(39) \quad \Omega^2 = \frac{4\pi\Omega}{3} \frac{g}{k^2}, \quad s^2 = \frac{4\pi\Omega}{3} g,$$

la durée

$$T = \frac{2\pi}{s}$$

des vibrations moléculaires deviendrait, ainsi que  $s$ , indépendante des quantités

$$k \quad \text{et} \quad l = \frac{2\pi}{k},$$

par conséquent de la longueur des ondulations. Pareillement, le second cas aura lieu si l'action mutuelle de deux molécules est une force répulsive, réciproquement proportionnelle au bicarré de la distance. Alors  $f(r)$  sera de la forme

$$(40) \quad f(r) = -\frac{h}{r^4},$$

$h$  désignant encore une constante positive, et, en vertu de l'équation (37), on aura sensiblement

$$(41) \quad \Omega^2 = \frac{4\pi\Omega}{30} h.$$

Donc alors la vitesse de propagation  $\Omega$  des vibrations moléculaires deviendra indépendante de  $k$  et de  $s$ , ou, ce qui revient au même, de  $T$  et de  $l$ , c'est-à-dire de la durée de ces vibrations et de l'épaisseur des ondes planes. Alors aussi l'on conclura de la formule

$$\Omega = \frac{s}{k} = \frac{l}{T},$$

que cette épaisseur et cette durée conservent toujours entre elles le même rapport.

Au reste, pour obtenir la formule (39), il n'est pas absolument nécessaire d'attribuer à la fonction  $f(r)$  la forme que présente l'équa-



tion (38); il suffirait de supposer

$$(42) \quad f(r) = \frac{\tilde{f}(r)}{r^4},$$

$\tilde{f}(r)$  étant une nouvelle fonction de  $r$ , qui se réduise à la constante positive  $g$  pour une valeur infinie de  $r$ , sans devenir infinie pour  $r = 0$ . Pareillement, pour obtenir la formule (41), il suffirait de supposer

$$(43) \quad f(r) = -\frac{\tilde{f}(r)}{r^4},$$

$\tilde{f}(r)$  étant une fonction de  $r$ , qui se réduise pour  $r = 0$ , à la constante positive  $h$ , sans devenir infinie pour  $r = \infty$ . C'est ce qui arriverait en particulier, si l'on posait

$$\tilde{f}(r) = he^{-ar} \quad \text{ou} \quad \tilde{f}(r) = he^{-ar} \cos br, \quad \dots$$

et par suite

$$(44) \quad f(r) = -\frac{he^{-ar}}{r^4} \quad \text{ou} \quad f(r) = -\frac{he^{-ar} \cos br}{r^4}, \quad \dots,$$

$a, b$  désignant des constantes réelles dont la première serait positive.

Il importe d'observer que, la formule (37) pouvant s'écrire comme il suit

$$(45) \quad \Omega^2 = \frac{4\pi(0)}{3k^2} r_\infty^2 f(r_\infty) - \frac{4\pi(0)}{3\sigma} r_0^4 f(r_0),$$

la valeur de  $\Omega^2$ , donnée par cette formule et relative aux vibrations transversales, est la différence entre les deux termes

$$\frac{4\pi(0)}{3k^2} r_\infty^2 f(r_\infty), \quad \frac{4\pi(0)}{3\sigma} r_0^4 f(r_0),$$

respectivement proportionnels aux deux quantités

$$r_\infty^2 f(r_\infty), \quad r_0^4 f(r_0),$$

dont la première dépend de l'action mutuelle de molécules situées à de grandes distances les unes des autres et la seconde de l'action mutuelle de deux molécules très voisines. Ces deux termes s'éva-

nouraient simultanément, si l'on supposait

$$(46) \quad f(r) = \frac{c}{r^m},$$

$c$  désignant une quantité positive ou négative, et  $m$  un exposant renfermé entre les limites 2 et 4. Par conséquent, la vitesse de propagation des vibrations transversales se réduirait à zéro, si l'action mutuelle de deux molécules était réciproquement proportionnelle au cube de la distance  $r$ , ou plus généralement à une puissance de  $r$  intermédiaire entre la seconde et la quatrième puissance. Mais cette vitesse cessera de s'évanouir, en offrant une valeur réelle, si l'on suppose  $m = 2$ ,  $c$  étant positif, ou  $m = 4$ ,  $c$  étant négatif, c'est-à-dire si l'action moléculaire est une force attractive réciproquement proportionnelle au carré de  $r$ , ou une force répulsive réciproquement proportionnelle au bicarré de  $r$ ; et alors, en vertu de l'observation que nous faisons tout à l'heure, la propagation de vibrations excitées en un point donné du système que l'on considère, sera due principalement, dans la première hypothèse aux molécules très éloignées, dans la seconde hypothèse aux molécules très voisines de ce même point. Au reste, la différence si marquante qui existe, sous ce rapport, entre les deux hypothèses n'a rien qui nous doive étonner. En effet, divisons le système de molécules en tranches très minces et d'égale épaisseur, par des surfaces sphériques équidistantes qui aient pour centre commun une molécule donnée  $m$ . Les portions élémentaires de ces tranches, interceptées par la surface extérieure d'un cône ou d'une pyramide qui aurait pour sommet la molécule  $m$ , offriront des volumes dont chacun sera sensiblement représenté par un produit de la forme

$$\alpha r^2 \Delta r,$$

$r, r + \Delta r$  étant les rayons des deux surfaces sphériques entre lesquelles la tranche se trouve comprise, et  $\alpha r^2$  la portion de la première surface interceptée par le cône dont il s'agit. Concevons maintenant que ce cône devienne très étroit, ou, ce qui revient au même, que la



constante  $\alpha$  soit très petite. La portion de tranche, dont le volume est sensiblement égal au produit

$$\alpha r^2 \Delta r,$$

et la masse au produit

$$\alpha m \Omega r^2 \Delta r,$$

$\Omega$  étant la densité du système, exercera sur la molécule  $m$  une action représentée à très peu près par l'expression

$$(47) \quad \alpha m \Omega r^2 f(r) \Delta r,$$

qui varie, avec la distance  $r$ , dans le même rapport que le produit  $r^2 f(r)$ . Or, ce produit décroîtra rapidement avec  $\frac{1}{r^2}$ , pour des valeurs croissantes de  $r$ , si l'on suppose  $f(r)$  réciproquement proportionnel au bicarré de  $r$ . Donc alors les actions exercées sur la molécule  $m$ , et dans une même direction, par des portions élémentaires et correspondantes de tranches d'égale épaisseur, deviendront de plus en plus faibles, à mesure que l'on s'éloignera de la molécule; en sorte que l'action des tranches situées à des distances considérables pourra être négligée sans erreur sensible. Mais si l'on suppose, au contraire,  $f(r)$  réciproquement proportionnel au carré de  $r$ , alors, le produit

$$r^2 f(r)$$

se réduisant à une constante, l'expression (47) deviendra indépendante de la distance  $r$ , et, comme par suite la même action sera exercée sur la molécule  $m$ , dans une direction donnée, par les portions élémentaires des diverses tranches, celles qui se trouveront plus éloignées seront, en raison de leur nombre très considérable et même infiniment grand, celles qui contribueront principalement à la production des phénomènes.

Concevons maintenant que  $\Omega$  désigne la vitesse de propagation, non plus des vibrations transversales, mais des vibrations longitudinales. Le carré de  $\Omega$  sera déterminé par l'équation (28), que l'on peut encore

écrire comme il suit :

$$(48) \quad \left\{ \begin{aligned} \Omega^2 &= \frac{4\pi\Omega}{k^3} \int_{r_0}^{r_\infty} D_r \left[ r^2 f(r) D_r \frac{\cos kr - \frac{\sin kr}{kr} + \frac{1}{3} k^2 r^2}{r} \right] dr \\ &+ \frac{4\pi\Omega}{k^3} \int_{r_0}^{r_\infty} r^2 f(r) D_r \left( \frac{\sin kr}{kr} \right) dr. \end{aligned} \right.$$

Or, dans la formule (28) ou (48), le premier terme du second membre est le produit de  $4\pi\Omega$  par la différence entre les deux valeurs qu'acquiert l'expression

$$\frac{1}{k^3} \left( 2 \frac{\sin kr}{kr} - 2 \cos kr - kr \sin kr + \frac{1}{3} k^2 r^2 \right) f(r),$$

quand on y pose successivement  $r = r_\infty$ ,  $r = r_0$ . De plus, le produit

$$\frac{1}{k^3} \left( 2 \frac{\sin kr}{kr} - 2 \cos kr - kr \sin kr + \frac{1}{3} k^2 r^2 \right) = \frac{r^3}{k^3} D_r \frac{\cos kr - \frac{\sin kr}{kr} + \frac{1}{3} k^2 r^2}{r},$$

que l'on peut encore présenter sous la forme

$$r^3 D_r \left( \frac{1}{5} \frac{r^2}{1 \cdot 2 \cdot 3} - \frac{1}{7} \frac{k^2 r^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} + \dots \right) = \frac{1}{5} \frac{r^4}{1 \cdot 2} - \frac{1}{7} \frac{k^2 r^6}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + \dots$$

se réduit sensiblement, pour de très grandes valeurs de  $r$ , à

$$\frac{1}{3} \frac{r^2}{k^3}$$

et, pour de très petites valeurs de  $r$ , à

$$\frac{1}{5} \frac{r^4}{1 \cdot 2} = \frac{1}{10} r^4.$$

Donc,  $r_0$  désignant une très petite, et  $r_\infty$  une très grande valeur de  $r$ , la formule (48) donne à très peu près

$$(49) \quad \left\{ \begin{aligned} \Omega^2 &= 4\pi\Omega \left[ \frac{1}{3k^3} r_\infty^2 f(r_\infty) - \frac{1}{10} r_0^4 f(r_0) \right] \\ &+ \frac{4\pi\Omega}{k^3} \int_{r_0}^{r_\infty} r^2 f(r) D_r \left( \frac{\sin kr}{kr} \right) dr. \end{aligned} \right.$$



Cherchons en particulier ce que devient la valeur de  $\Omega^2$ , fournie par l'équation (49), dans les deux hypothèses que nous avons précédemment considérées. Si d'abord nous supposons l'action mutuelle de deux molécules réciproquement proportionnelle au carré de la distance  $r$ , alors, la valeur de  $f(r)$  étant donnée par la formule (38), on tirera sensiblement de la formule (49)

$$(50) \quad \Omega^2 = \frac{4\pi\Omega}{k^2} g \left[ \frac{1}{3} + \int_{r_0}^{r_\infty} D_r \left( \frac{\sin kr}{kr} \right) dr \right].$$

D'un autre côté, comme le rapport

$$\frac{\sin kr}{kr}$$

se réduit à l'unité pour une valeur nulle, et à zéro pour une valeur infinie de  $r$ , on aura encore à très peu près

$$\int_{r_0}^{r_\infty} D_r \left( \frac{\sin kr}{kr} \right) dr = \int_0^\infty D_r \left( \frac{\sin kr}{kr} \right) dr = -1,$$

et, par suite, la formule (50) donnera

$$(51) \quad \Omega^2 = -\frac{8\pi\Omega}{3k^2} g.$$

Enfin, pour que les vibrations longitudinales puissent se propager sans s'affaiblir, il est nécessaire que l'équation (51) fournisse une valeur réelle de  $\Omega$ , par conséquent une valeur positive de  $\Omega^2$ ; ce qui exige que  $g$  soit négatif et l'action mutuelle de deux molécules répulsives. Donc, lorsque cette action est une force attractive réciproquement proportionnelle au carré de la distance, il devient impossible d'admettre que des vibrations longitudinales se propagent sans s'affaiblir.

Passons maintenant au cas où l'action mutuelle de deux molécules est une force répulsive réciproquement proportionnelle au bicarré de la distance. Alors la valeur de  $f(r)$  sera déterminée par la formule (40),

la constante  $h$  étant positive, et l'équation (49) donnera sensiblement

$$(52) \quad \Omega^2 = \frac{4}{10} \pi \Omega h - \frac{4\pi\Omega}{k^2} h \int_{r_0}^{r_\infty} D_r \left( \frac{\sin kr}{kr} \right) \frac{dr}{r^2}.$$

On aura d'ailleurs

$$\int D_r \left( \frac{\sin kr}{kr} \right) \frac{dr}{r^2} = \int \left( \cos kr - \frac{\sin kr}{kr} \right) \frac{dr}{r^2};$$

et comme, en intégrant par parties plusieurs fois de suite, on trouvera

$$\int \frac{\sin kr}{r^3} dr = -\frac{\sin kr}{3r^2} + \frac{k}{3} \int \frac{\cos kr}{r^2} dr,$$

$$\int \frac{\cos kr}{r^3} dr = -\frac{\cos kr}{2r^2} - \frac{k}{2} \int \frac{\sin kr}{r^2} dr,$$

$$\int \frac{\sin kr}{r^2} dr = -\frac{\sin kr}{r} + k \int \frac{\cos kr}{r} dr,$$

par conséquent

$$\int \frac{\cos kr}{r^2} dr = -\frac{\cos kr}{2r^2} + \frac{k \sin kr}{2r} - \frac{k^2}{2} \int \frac{\cos kr}{r} dr,$$

on aura encore

$$\begin{aligned} \int D_r \left( \frac{\sin kr}{kr} \right) \frac{dr}{r^2} &= \frac{\sin kr}{3kr^2} + \frac{2}{3} \int \frac{\cos kr}{r^2} dr \\ &= \frac{k^2}{3} \left( \frac{\sin kr}{kr} - \frac{\cos kr}{k^2 r^2} + \frac{\sin kr}{k^2 r^2} - \int \frac{\cos kr}{r} dr \right). \end{aligned}$$

D'autre part, le trinôme

$$\frac{\sin kr}{kr} - \frac{\cos kr}{k^2 r^2} + \frac{\sin kr}{k^2 r^2}$$

devient nul, à très peu près, pour une très grande valeur  $r_\infty$ , attribuée à la variable  $r$ , tandis que, pour une très petite valeur  $r_0$  de cette même variable, il se réduit sensiblement à

$$1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{6} = \frac{4}{3}.$$

Donc, si l'on effectue l'intégration relative à la variable  $r$ , entre les



limites  $r_1, r_2$  de cette variable, on trouvera, sans erreur sensible,

$$\int_{r_1}^{r_2} D_r \left( \frac{\sin kr}{kr} \right) \frac{dr}{r^2} = -\frac{k^2}{3} \left( \frac{4}{3} + \int_{r_1}^{r_2} \frac{\cos kr}{r} dr \right),$$

et par suite la formule (52) donnera

$$(53) \quad \Omega^2 = \frac{4}{3} \pi \omega h \left( \frac{4}{3} + \int_{r_1}^{r_2} \frac{\cos kr}{r} dr \right).$$

Il est aisé de s'assurer que l'intégration renfermée dans le second membre de l'équation (53) a une valeur très considérable. En effet, quand on pose  $r_1 = 0, r_2 = \infty$ , cette intégrale devient

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos kr}{r} dr.$$

Or, en désignant par  $\varepsilon$  un nombre positif, on a généralement

$$\int_0^{\infty} e^{-(\varepsilon + k\sqrt{-1})r} dr = \frac{1}{1 + k\sqrt{-1}},$$

et par suite

$$\int_0^{\infty} e^{-\varepsilon r} \sin kr dr = \frac{k}{k^2 + \varepsilon^2};$$

puis on en conclut, en intégrant par rapport à  $k$  et à partir de l'origine  $k = 0$ ,

$$\int_0^{\infty} e^{-\varepsilon r} \frac{1 - \cos kr}{r} dr = \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{\varepsilon^2}{k^2} \right).$$

On aura donc

$$\int_0^{\infty} e^{-\varepsilon r} \frac{\cos kr}{r} dr = \int_0^{\infty} e^{-\varepsilon r} \frac{dr}{r} - \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{\varepsilon^2}{k^2} \right).$$

Si maintenant on réduit  $\varepsilon$  à zéro, on tirera de la dernière formule

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos kr}{r} dr = \int_0^{\infty} \frac{dr}{r} = \infty.$$

Donc, puisque l'intégrale

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos kr}{r} dr$$

offre une valeur infinie, l'intégrale

$$\int_{r_1}^{r_2} \frac{\cos kr}{r} dr$$

deviendra infiniment grande quand on attribuera, comme on le suppose, une valeur très petite à  $r_1$  et une valeur très considérable à  $r_2$ .

Pour déduire directement les mêmes conclusions de l'équation (49), il suffirait de recourir à la considération des intégrales singulières et aux principes établis dans le *Résumé des leçons données à l'École Polytechnique sur le Calcul infinitésimal* (voir la 25<sup>e</sup> leçon) (\*). En effet, en vertu de ces principes, si le produit

$$r^2 f(r)$$

ne devient pas infini pour une valeur infinie de  $r$ , l'intégrale comprise dans le second membre de l'équation (49), savoir

$$\int_0^{r_2} r^2 f(r) D_r \left( \frac{\sin kr}{kr} \right) dr,$$

sera finie ou infiniment grande, suivant que l'intégrale singulière

$$\int_0^{\varepsilon} r^2 f(r) D_r \left( \frac{\sin kr}{kr} \right) dr = \int_0^{\varepsilon} \left( \cos kr - \frac{\sin kr}{kr} \right) r f(r) dr,$$

dans laquelle  $\varepsilon$  désigne un nombre infiniment petit, sera elle-même finie ou infinie. D'ailleurs, pour de très petites valeurs de  $r$ , le binôme

$$\cos kr - \frac{\sin kr}{kr}$$

est le produit de

$$-\frac{1}{3} r^2$$

par un facteur très peu différent de l'unité, et en conséquence l'intégrale

$$\int_0^{\varepsilon} \left( \cos kr - \frac{\sin kr}{kr} \right) r f(r) dr$$

(\*) *Oeuvres de Cauchy*, 2<sup>e</sup> série, t. IV, p. 145.



est le produit d'un semblable facteur par la suivante :

$$-\frac{1}{3} \int_0^{\infty} r^2 f(r) dr,$$

pourvu que la fonction  $f(r)$ , étant toujours continue pour des valeurs positives de  $r$ , ne s'évanouisse pas avec  $r$ . Donc, si la fonction  $f(r)$ , supposée continue, remplit la double condition de fournir une valeur finie du produit  $r^2 f(r)$  pour une valeur infinie de  $r$ , et de ne pas s'évanouir pour  $r = 0$ , la valeur de  $\Omega^2$  déterminée par l'équation (49) sera finie ou non en même temps que l'intégrale singulière

$$(54) \quad \int_0^{\infty} r^2 f(r) dr$$

et affectée d'un signe contraire au signe de cette intégrale. Donc, puisqu'en supposant

$$f(r) = -\frac{h}{r^3},$$

on trouve, pour  $r = \infty$ ,

$$r^2 f(r) = 0;$$

pour  $r = 0$ ,

$$f(r) = -\frac{h}{0},$$

et, de plus,

$$\int_0^{\infty} r^2 f(r) dr = -h \int_0^{\infty} \frac{dr}{r} = -h \times \infty,$$

nous devons conclure que, dans cette hypothèse, et pour des valeurs positives de  $h$ , la valeur de  $\Omega^2$ , fournie par l'équation (49), sera une quantité positive qui deviendra infinie quand on posera  $r = 0$ , et par conséquent infiniment grande quand on attribuera simplement à  $r$ , une valeur très petite.

Les mêmes raisonnements et les mêmes conclusions seraient encore évidemment applicables au cas où la fonction  $f(r)$  se trouverait déterminée, non plus par la formule (40), mais par la formule (43), par exemple au cas où la valeur de  $f(r)$  serait l'une de celles que fournissent les équations (44).

II. — *Sur la relation qui existe, dans les vibrations transversales d'un système isotrope de molécules, entre la longueur des ondulations et la vitesse de propagation des ondes planes.*

Soient, comme dans le paragraphe I,

$m$  une molécule donnée d'un système isotrope,

$m$  l'une quelconque des autres molécules

et  $mmf(r)$  l'action mutuelle des deux molécules  $m, m$ , prise avec le signe + ou avec le signe -, suivant que ces deux molécules s'attirent ou se repoussent.

Concevons d'ailleurs que, des vibrations transversales étant propagées dans le système dont il s'agit, on nomme

$l$  la longueur d'ondulation ou, ce qui revient au même, l'épaisseur commune de toutes les ondes planes

et  $\Omega$  leur vitesse de propagation.

Si l'on pose, pour abrégé,

$$(1) \quad k = \frac{2\pi}{l},$$

les deux quantités  $\Omega$  et  $l$  ou  $k$  se trouveront liées entre elles par l'équation (21) du paragraphe I, c'est-à-dire par la formule

$$(2) \quad \Omega^2 = \frac{1}{k^4} S \left\{ \frac{m}{r^3} D_r \left[ \left( \cos kr - \frac{\sin kr}{kr} + \frac{1}{3} k^2 r^2 \right) f(r) \right] \right\},$$

le signe  $S$  indiquant une somme de termes semblables relatifs aux diverses molécules  $m, m', \dots$ ; de sorte qu'on aura

$$(3) \quad \Omega^2 = S \left[ \frac{m}{r^3} F'(r) \right],$$

$F'(r)$  désignant la dérivée de la fonction  $F(r)$  déterminée par la formule

$$(4) \quad F(r) = \frac{1}{k^4} \left( \cos kr - \frac{\sin kr}{kr} + \frac{1}{3} k^2 r^2 \right) f(r).$$



Concevons maintenant que l'on décompose le système de molécules en couches infiniment minces, terminées par des surfaces de sphères qui aient pour centre commun la molécule  $m$ . Si l'on nomme

$\omega$  la densité du système supposé homogène  
et  $\Delta r$  un accroissement infiniment petit attribué à la variable  $r$ , les molécules comprises dans la couche renfermée entre les deux surfaces sphériques, qui auront pour rayons  $r$  et  $r + \Delta r$ , offriront une somme de masses représentée à très peu près par le produit

$$4\pi\omega r^2 \Delta r,$$

et par suite les termes correspondants à ces molécules, dans la somme

$$S \left[ \frac{m}{r^2} F'(r) \right],$$

fourniront une somme partielle qui sera généralement peu différente du produit

$$4\pi\omega r^2 F'(r) \Delta r.$$

Or, si l'on admet que l'on puisse, sans erreur sensible, substituer généralement ce dernier produit à la somme des termes dont il s'agit dans le second membre de l'équation (3), cette équation deviendra

$$(5) \quad \Omega^2 = 4\pi\omega S[F'(r) \Delta r].$$

D'autre part, comme on aura, en vertu de la formule de Taylor,

$$F(r + \Delta r) - F(r) = F'(r) \Delta r + \frac{1}{2} F''(r) \Delta r^2 + \dots,$$

on en conclura

$$S[F(r + \Delta r) - F(r)] = S[F'(r) \Delta r] + \frac{1}{2} S[F''(r) \Delta r^2] + \dots$$

Donc, en supposant le signe  $S$  étendu à toutes les valeurs de  $r$ , et désignant une très petite valeur de  $r$  par  $r_0$ , une très grande par  $r_\infty$ , on aura sensiblement

$$(6) \quad F(r_\infty) - F(r_0) = S[F'(r) \Delta r] + \frac{1}{2} S[F''(r) \Delta r^2] + \dots$$

Si dans cette dernière formule on néglige les termes qui renferment des puissances de  $\Delta r$  supérieures à la seconde, elle donnera pour valeur approchée de la somme

$$S[F'(r) \Delta r]$$

l'expression

$$F(r_\infty) - F(r_0) - \frac{1}{2} S[F''(r) \Delta r^2],$$

et, par suite, la formule (5) deviendra

$$(7) \quad \Omega^2 = 4\pi\omega[F(r_\infty) - F(r_0)] - 2\pi\omega S[F''(r) \Delta r^2].$$

Pour montrer une application des formules qui précèdent, considérons en particulier le cas où l'action mutuelle des deux molécules  $m$ ,  $m$  serait une action répulsive, réciproquement proportionnelle au bicarré de la distance. Alors la fonction  $f(r)$ , déterminée par l'équation (4) du paragraphe I, serait de la forme

$$(8) \quad f(r) = -\frac{h}{r^2},$$

$h$  désignant une constante positive, et l'équation (4) donnerait

$$(9) \quad \begin{cases} F(r) = -\frac{h}{k^2 r^2} \left( \cos kr - \frac{\sin kr}{kr} + \frac{1}{3} k^2 r^2 \right) \\ = -\frac{1}{3} \frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{7} \frac{k^2 r^2}{1.2.3.4.5} - \dots \end{cases}$$

On aurait donc, en réduisant  $r_0$  à zéro et  $r_\infty$  à l'infini positif,

$$F(r_\infty) = 0, \quad F(r_0) = -\frac{1}{3} \frac{1}{1.2.3}.$$

De plus, comme, dans ce même cas,  $F(r)$  deviendrait fonction du produit  $kr$ , on aurait encore

$$r^2 D_r^2 F(r) = k^2 D_k^2 F(r),$$

et par suite

$$F''(r) = D_k^2 F(r) = \frac{k^2}{r^2} D_k^2 F(r).$$



Donc la formule (7) donnerait

$$(10) \quad \Omega^2 = \frac{4\pi\Omega}{30} h - 2\pi\Omega k^2 D_1^2 S \left[ F(r) \left( \frac{\Delta r}{r} \right)^2 \right].$$

Si maintenant on suppose les diverses valeurs de  $\Delta r$  égales entre elles et à la distance  $\varepsilon$  qui sépare deux molécules voisines, les diverses valeurs de  $r$ , dans la somme indiquée à l'aide du signe S, pourront être censées réduites aux divers termes de la progression arithmétique

$$(11) \quad \varepsilon, 2\varepsilon, 3\varepsilon, 4\varepsilon, \dots$$

et, en posant, pour abrégér,

$$(12) \quad K = S \left[ \left( k \cos kr - \frac{\sin kr}{r} + \frac{1}{3} k^3 r^2 \right) \frac{1}{r^2} \right],$$

on tirera de la formule (9)

$$(13) \quad \frac{1}{r^2} F(r) = -\frac{h}{k^2} K,$$

puis de la formule (10)

$$(14) \quad \Omega^2 = \frac{4\pi\Omega}{30} h + 2\pi\Omega h k^2 \varepsilon^2 D_1^2 \left( \frac{K}{k^2} \right).$$

Il ne reste plus maintenant qu'à déterminer la valeur de la quantité K en fonction de k. Or, on tire de l'équation (12)

$$D_1 K = S \left[ (kr - \sin kr) \frac{k}{r^2} \right],$$

par conséquent

$$(15) \quad k^{-1} D_1 K = S \left( \frac{kr - \sin kr}{r^2} \right);$$

puis, en différentiant trois fois de suite cette dernière formule par rapport à k, on en conclut

$$(16) \quad D_1^3 (k^{-1} D_1 K) = S \left( \frac{\cos kr}{r^3} \right) = \frac{1}{\varepsilon^3} \left( \cos k\varepsilon + \frac{\cos 2k\varepsilon}{2^2} + \frac{\cos 3k\varepsilon}{3^2} + \dots \right).$$

D'ailleurs, pour des valeurs de  $x$  comprises entre les limites  $-\pi$ ,

+  $\pi$ , on a généralement, comme l'on sait,

$$\cos x - \frac{\cos 2x}{2^2} + \frac{\cos 3x}{3^2} + \dots = \frac{1}{4} \left( \frac{\pi^2}{3} - x^2 \right)$$

(voir le second Volume des *Exercices de Mathématiques*, p. 309) (1).

Donc, en remplaçant  $x$  par  $\pi - k\varepsilon$ , on aura encore

$$\cos k\varepsilon + \frac{\cos 2k\varepsilon}{2^2} + \frac{\cos 3k\varepsilon}{3^2} + \dots = \frac{1}{4} \left( \frac{2\pi^2}{3} - 2\pi k\varepsilon + k^2 \varepsilon^2 \right),$$

et la formule (16) donnera

$$(17) \quad D_1^3 (k^{-1} D_1 K) = a - bk + ck^3,$$

les valeurs de  $a$ ,  $b$ ,  $c$  étant

$$(18) \quad a = \frac{\pi^2}{6\varepsilon^2}, \quad b = \frac{\pi}{2\varepsilon}, \quad c = \frac{1}{4}.$$

Pour déduire de l'équation (17) la valeur de  $k^{-1} D_1 K$ , il suffira d'intégrer le second membre trois fois de suite par rapport à k, et à partir de  $k = 0$ , puisque, en vertu de l'équation (15), le produit

$$k^{-1} D_1 K$$

devra être divisible par  $k^3$ , aussi bien que la différence

$$kr - \sin kr = \frac{k^2 r^2}{1.2.3} - \frac{k^4 r^4}{1.2.3.4.5} + \dots$$

En opérant ainsi, on trouvera

$$k^{-1} D_1 K = a \frac{k^3}{1.2.3} - b \frac{k^4}{2.3.4} + c \frac{k^5}{3.4.5},$$

par conséquent

$$(19) \quad D_1 K = a \frac{k^3}{1.2.3} - b \frac{k^4}{2.3.4} + c \frac{k^5}{3.4.5}.$$

Enfin, pour obtenir la valeur même de K, il suffira d'intégrer le second membre de la formule (19) par rapport à k, et à partir de  $k = 0$ ,

(1) *Oeuvres de Cauchy*, 2<sup>e</sup> série, t. VII, p. 357.



puisque, en vertu des équations (9) et (13), la quantité  $K$ , proportionnelle au produit  $k^2 F(r)$ , sera, comme ce produit, divisible par  $k^3$ . On aura donc

$$K = \frac{a}{5} \frac{k^3}{1.2.3} - \frac{b}{7} \frac{k^4}{2.3.4} + \frac{c}{7} \frac{k^7}{3.4.5}$$

et par suite

$$D_k^2 \left( \frac{K}{k^3} \right) = \frac{2c}{7} \frac{1}{3.4.5} = \frac{1}{2.3.4.5.7}$$

Donc, la formule (14) donnera

$$(20) \quad \Omega^2 = \frac{4\pi^2 h}{30} (1 + \alpha k^2),$$

la valeur de  $\alpha$  étant

$$(21) \quad \alpha = \frac{\varepsilon^2}{56}.$$

L'équation (20) établit une relation digne de remarque entre les quantités  $\Omega$  et  $k$  ou  $l = \frac{2\pi}{k}$ , c'est-à-dire entre la vitesse de propagation des ondes planes et l'épaisseur de ces mêmes ondes dans un système de vibrations transversales.

La distance  $\varepsilon$  qui sépare deux molécules voisines devant être généralement considérée comme très petite, on pourra en dire autant, à plus forte raison, de la quantité positive  $\alpha$ , déterminée par la formule (21). Cela posé, on aura sensiblement

$$\frac{1}{1 + \alpha k^2} = 1 - \alpha k^2,$$

et, en divisant par  $1 + \alpha k^2$  les deux membres de la formule (20),

$$(22) \quad \Omega^2 (1 - \alpha k^2) = \frac{4\pi^2 h}{30}.$$

D'autre part, si, en nommant  $T$  la durée d'une vibration moléculaire, on pose

$$(23) \quad s = \frac{2\pi}{T},$$

on aura, conformément à la dernière des formules (19) du para-

graphe I,

$$(24) \quad s = \Omega k,$$

et par suite l'équation (22) pourra être réduite à

$$(25) \quad \Omega^2 - \alpha s^2 = \frac{4\pi^2 h}{30}.$$

Soient maintenant

$$\Omega, \quad \text{et} \quad s,$$

ce que donnent

$$\Omega \quad \text{et} \quad s$$

pour un second système de vibrations transversales, distinct de celui que l'on considérait d'abord, mais toujours propagé dans le même système de molécules. On aura encore

$$\Omega_1^2 - \alpha s_1^2 = \frac{4\pi^2 h}{30},$$

et de cette dernière équation, jointe à la formule (25), on tirera

$$\Omega^2 - \alpha s^2 = \Omega_1^2 - \alpha s_1^2,$$

par conséquent

$$\alpha = \frac{\Omega^2 - \Omega_1^2}{s^2 - s_1^2}$$

ou, ce qui revient au même, eu égard à la valeur de  $\alpha$ ,

$$(26) \quad \varepsilon^2 = 56 \frac{\Omega^2 - \Omega_1^2}{s^2 - s_1^2}.$$

L'équation (26) fournit le moyen de calculer approximativement la valeur de  $\varepsilon$ , quand on connaît les vitesses de propagation des ondes planes et les durées des vibrations moléculaires, dans deux systèmes de vibrations transversales.

Il est bon d'observer qu'en désignant par  $T$ , la durée des vibrations dans le second système de vibrations transversales, on aura généralement

$$\frac{\Omega^2 - \Omega_1^2}{s^2 - s_1^2} = \frac{\Omega^2}{s^2} \left( \frac{\Omega}{\Omega} - 1 \right) \left( \frac{\Omega}{\Omega} + 1 \right) = \left( \frac{1}{2\pi} \right)^2 \frac{\left( \frac{\Omega}{T} - 1 \right) \left( \frac{\Omega}{T} + 1 \right)}{\left( \frac{1}{T} - 1 \right) \left( \frac{1}{T} + 1 \right)},$$



et qu'en conséquence l'équation (26) peut s'écrire comme il suit

$$\left(\frac{\varepsilon}{i}\right)^2 = \frac{14}{\pi^2} \frac{\left(\frac{\Omega}{T} - 1\right)\left(\frac{\Omega}{T} + 1\right)}{\left(\frac{\Omega}{T} - 1\right)\left(\frac{\Omega}{T} + 1\right)}$$

On aura donc

$$(27) \quad \frac{\varepsilon}{i} = \frac{1}{\pi} \left[ 14 \frac{\left(\frac{\Omega}{T} - 1\right)\left(\frac{\Omega}{T} + 1\right)}{\left(\frac{\Omega}{T} - 1\right)\left(\frac{\Omega}{T} + 1\right)} \right]^{\frac{1}{2}}$$

A l'aide de cette dernière formule, étant données les valeurs de  $\Omega$  et  $T$ , correspondant à deux systèmes de vibrations transversales, on pourra déterminer immédiatement la valeur de  $\frac{\varepsilon}{i}$ , c'est-à-dire le rapport qui existe entre la distance de deux molécules voisines et la longueur d'ondulation relative à l'un de ces deux systèmes.

### III. — Sur la dispersion des couleurs dans le vide.

Si l'on attribue les phénomènes lumineux à des vibrations transversales de l'éther et si l'on admet, comme la théorie porte à le croire, que dans le vide, c'est-à-dire dans l'éther isolé, les rayons de diverses couleurs se propagent avec des vitesses qui ne soient pas rigoureusement égales, alors il suffira que la clarté d'une étoile varie dans un temps peu considérable, pour qu'à des distances suffisamment grandes, cette variation occasionne un changement de couleur. Cette proposition remarquable est due à M. Arago. On peut l'établir, comme il l'a fait lui-même, par la méthode analytique qui, dans les éléments d'Algèbre, sert à résoudre la question connue sous le nom de *problème des deux courriers*. En effet, considérons une étoile blanche qui paraîsse et disparaisse périodiquement, et, pour plus de simplicité, supposons que cette étoile, après avoir constamment brillé du même éclat pendant un certain temps  $\bar{e}$ , reste invisible pendant un autre temps encore égal à  $\bar{e}$ . Admettons d'ailleurs que ces deux phénomènes se repro-

duisent l'un après l'autre indéfiniment et que la couleur blanche de l'étoile résulte de la superposition de deux rayons simples dont les couleurs soient complémentaires, par exemple, d'un rayon rouge et d'un rayon vert. Enfin supposons que, les vitesses de propagation de ces deux rayons n'étant pas rigoureusement égales, la plus petite soit représentée par  $\Omega$ , la plus grande par  $\Omega'$ , en sorte qu'on ait

$$(1) \quad \frac{\Omega'}{\Omega} = 1 + \frac{1}{n} = \frac{n+1}{n},$$

$n$  désignant un nombre très considérable. Les temps que ces deux rayons, partant simultanément de l'étoile dans une direction commune, devront employer pour se propager en ligne droite jusqu'à un point donné de l'espace, seront réciproquement proportionnels à leurs vitesses de propagation. En d'autres termes, ces temps seront entre eux dans le rapport de  $\Omega$  à  $\Omega'$ , ou de  $n$  à  $n+1$ . Donc, si, à partir de l'étoile, on porte, sur la direction commune des deux rayons, des longueurs égales, dont chacune soit parcourue par le rayon doué de la plus grande vitesse  $\Omega'$ , dans un intervalle de temps représenté par

$$n\bar{e},$$

et si l'on nomme

$$E_1, E_2, E_3, E_4, \dots$$

les divers points auxquels aboutissent les extrémités de ces diverses longueurs, le rayon doué de la moindre vitesse  $\Omega$  parcourra chacune de ces mêmes longueurs dans un intervalle de temps représenté par le produit

$$(n+1)\bar{e} = n\bar{e} + \bar{e}.$$

Donc, pour des observateurs placés aux points

$$E_1, E_2, E_3, E_4, \dots$$

le retard d'un rayon sur l'autre se trouvera successivement exprimé par

$$\bar{e}, \bar{e} + \bar{e}, \bar{e} + \bar{e} + \bar{e}, \bar{e} + \bar{e} + \bar{e} + \bar{e}, \dots$$

ou, ce qui revient au même, par les divers termes de la progression



arithmétique

$$\varepsilon, 2\varepsilon, 3\varepsilon, 4\varepsilon, \dots$$

Cela posé, puisqu'au point de départ E les deux rayons restent simultanément visibles ou simultanément invisibles, pendant des intervalles de temps qui sont tous égaux à  $\varepsilon$ , on peut affirmer qu'il en sera de même, aux points où le retard de l'un des rayons sur l'autre se trouvera représenté par l'un des nombres

$$2\varepsilon, 4\varepsilon, \dots,$$

c'est-à-dire aux points

$$E_2, E_4, \dots,$$

séparés de l'étoile E par des distances que le rayon doué de la plus grande vitesse parcourt en temps égaux aux divers termes de la progression arithmétique

$$2n\varepsilon, 4n\varepsilon, \dots$$

Au contraire, les deux rayons se montreront successivement et toujours l'un sur l'autre, aux points où le retard de l'un à l'égard de l'autre se trouvera exprimé par l'un des nombres

$$\varepsilon, 3\varepsilon, \dots,$$

c'est-à-dire aux points

$$E_1, E_3, \dots,$$

séparés de l'étoile E par des distances que le rayon doué de la plus grande vitesse parcourt en temps égaux aux divers termes de la progression arithmétique

$$n\varepsilon, 3n\varepsilon, \dots$$

En général, vue d'un point quelconque de l'espace, l'étoile paraîtra périodique,  $2\varepsilon$  étant la durée de la période au bout de laquelle les mêmes phénomènes se reproduiront, et de plus l'aspect de ces phénomènes variera périodiquement avec la distance qui séparera le spectateur de l'étoile. Si cette distance est celle de l'un des points

$$E_2, E_4, \dots,$$

c'est-à-dire celle que parcourt le rayon doué de la plus grande vitesse,

dans un temps représenté par un multiple pair de  $n\varepsilon$ ; alors, d'après ce qu'on vient de dire, l'étoile paraîtra blanche durant une moitié de la période au bout de laquelle les mêmes phénomènes se reproduisent et disparaîtra complètement durant l'autre moitié. Si, au contraire, la distance du spectateur à l'étoile est celle de l'un des points

$$E_1, E_3, \dots,$$

c'est-à-dire celle que parcourt le rayon doué de la plus grande vitesse, dans un temps représenté par un multiple impair de  $n\varepsilon$ , l'étoile restera toujours visible, mais elle paraîtra rouge durant une moitié de la période et verte durant l'autre moitié. Enfin, si la distance du spectateur à l'étoile n'est celle d'aucun des points

$$E_1, E_3, E_5, E_7, \dots,$$

l'étoile, visible et blanche durant une partie de la période, disparaîtra durant une autre partie, et ces deux parties égales entre elles, mais dont chacune sera inférieure à la demi-période, se trouveront séparées l'une de l'autre par des intervalles de temps égaux, pendant lesquels l'étoile se montrera colorée tantôt en rouge et tantôt en vert.

Dans l'hypothèse que nous venons de considérer, les points d'où l'on observe les mêmes phénomènes, par exemple les points pour lesquels l'étoile reste invisible durant une moitié de la période et brille de tout son éclat durant l'autre moitié, sont évidemment situés sur des surfaces de sphères concentriques, qui, ayant l'étoile pour centre commun, renferment entre elles des couches dont l'épaisseur est la distance que parcourt le rayon doué de la plus grande vitesse durant un temps

$$2n\varepsilon,$$

égal au produit de la période  $2\varepsilon$  par le nombre  $n$ . En d'autres termes, pour obtenir la distance mesurée sur la direction d'un rayon, et au bout de laquelle les mêmes phénomènes se reproduisent, il suffit de multiplier le nombre

$$(2) \quad n = \frac{\Omega}{\Omega_1 - \Omega}$$



par la distance à laquelle se propage, durant le temps même de la période, le rayon doué de la plus grande vitesse. Cette dernière distance sera toujours très considérable, et déjà elle s'élèverait à plus de six mille millions de lieues, si la durée de la période se réduisait à un seul jour. La distance au bout de laquelle les phénomènes se reproduiront sera beaucoup plus considérable encore, puisqu'elle sera le produit de l'autre distance par le nombre  $n$ , dont la valeur, en vertu de la formule (2), deviendra d'autant plus grande que la différence entre les vitesses  $\Omega$  et  $\Omega'$ , deviendra plus petite.

On arriverait encore à des résultats semblables, si, la durée de la période restant égale à  $2\epsilon$ , les deux rayons simples, dont la superposition est censée produire la couleur blanche de l'étoile, s'éteignent périodiquement, durant des intervalles de temps égaux entre eux, mais inférieurs ou supérieurs à la moitié de la période, ou si ces deux rayons, sans s'éteindre complètement, perdaient périodiquement une partie de leur éclat. Alors la distance, au bout de laquelle se reproduiraient les mêmes phénomènes, serait toujours celle que nous venons de calculer. Alors aussi, vue de certains points, l'étoile à certaines époques paraîtrait colorée, tandis que, pour des observateurs placés en d'autres points, elle se montrerait toujours blanche lorsqu'elle ne serait pas invisible. Seulement, dans la nouvelle hypothèse, les deux couleurs pourraient être mêlées de blanc, et les intervalles de temps, pendant lesquels l'étoile paraîtrait blanche ou colorée, seraient plus longs ou plus courts que dans la première supposition.

On arriverait toujours à des conclusions du même genre, si la lumière blanche de l'étoile résultait de la superposition de plus de deux rayons simples, et, dans ce cas encore, comme dans les hypothèses ci-dessus admises, l'étoile, vue de loin, devrait le plus ordinairement paraître colorée. Il y a plus, il faudrait alors supposer remplies certaines conditions particulières, pour qu'à de très grandes distances les phénomènes observés dans le voisinage de l'étoile parvinssent à se reproduire exactement. Admettons, pour fixer les idées, que la lumière blanche de l'étoile résulte de la superposition

de trois rayons qui se propagent avec des vitesses représentées par

$$\Omega, \Omega', \Omega'';$$

soit toujours  $2\epsilon$  la durée de la période; et posons

$$(3) \quad \frac{\Omega'}{\Omega} = 1 + \frac{1}{n}, \quad \frac{\Omega''}{\Omega} = 1 + \frac{1}{n'}.$$

Si les nombres  $n, n'$ , qu'on doit supposer très grand l'un et l'autre, sont commensurables entre eux, c'est-à-dire, en d'autres termes, si le rapport  $\frac{n'}{n}$  est rationnel, on pourra déterminer une distance au bout de laquelle se reproduiront exactement les mêmes phénomènes, et cette distance sera celle que parcourt le rayon doué de la vitesse  $\Omega$ , dans un temps égal au plus petit des multiples de

$$2n\epsilon,$$

qui soit aussi un multiple de  $2n'\epsilon$ . Mais, si le rapport  $\frac{n'}{n}$  devient irrationnel, il deviendra impossible de trouver un multiple de  $2n\epsilon$  qui soit en même temps un multiple de  $2n'\epsilon$ , et il deviendra pareillement impossible de trouver une distance au bout de laquelle les mêmes phénomènes se reproduisent exactement pendant toute la durée de la période  $2\epsilon$ . Alors, par exemple, les phénomènes que l'on observe dans le voisinage de l'étoile ne pourront plus se reproduire en d'autres points de l'espace, et pour un observateur placé loin de l'étoile, celle-ci ne pourra demeurer constamment blanche tant qu'elle sera visible.

En résumé, si dans le vide les vitesses de propagation de rayons diversement colorés ne sont pas rigoureusement égales, un changement périodique de clarté dans une étoile suffira pour occasionner à de grandes distances des changements de couleur. Or, parmi les astres dont la clarté varie périodiquement, on doit surtout distinguer Algol ou  $\beta$  de Persée, dont l'éclat ordinaire, étant celui d'une étoile de deuxième grandeur, reste tel pendant 2 jours 14 heures, puis décroît soudain, de telle sorte qu'au bout d'environ 3 heures et demie, l'étoile se trouve réduite à la quatrième grandeur, sa lumière ayant alors



perdu plus de la moitié de son intensité. Alors, aussi, l'étoile recommence à croître, pour reprendre au bout de 3 heures et demie son éclat habituel, l'étendue entière de sa période étant d'environ 2 jours 20 heures 48 minutes. Cela posé, concevons que l'on observe attentivement la couleur d'Algol, tandis que son éclat diminue. Si l'intervalle de temps, renfermé entre les deux instants qui nous laissent apercevoir des rayons rouge et violet partis simultanément de l'étoile, s'élevait seulement à un quart d'heure, elle changerait de couleur d'une manière assez notable pour que le changement pût être remarqué. En effet, puisque l'astre aura perdu plus de la moitié de sa lumière en 3 heures et demie, la perte moyenne de lumière en un quart d'heure surpassera le rapport  $\frac{1}{34}$  ou  $\frac{1}{14}$ ; et il n'est pas douteux que cette perte subie, dans l'hypothèse admise, par un seul des deux rayons rouge et violet occasionnât une variation appréciable dans la couleur. Toutefois cette variation est demeurée insensible dans les expériences entreprises par M. Arago pour la constater. Cherchons maintenant ce que l'on peut en conclure relativement à l'intervalle qui sépare deux molécules voisines du fluide éthéré.

Vu la distance considérable qui sépare de la Terre les étoiles les plus rapprochées, distance que la lumière ne peut franchir en moins de trois ou quatre années, un quart d'heure n'équivaut pas, comme on l'a déjà dit, à la  $\frac{1}{100000}$  partie du temps que la lumière emploie pour venir d'Algol jusqu'à nous. Donc, en admettant que deux rayons, l'un rouge, l'autre violet, partis simultanément de cette étoile, se suivent d'assez près pour que l'un ne soit pas de 15 minutes en retard sur l'autre, nous admettons par cela même, non seulement que le rapport entre les vitesses de propagation de ces deux rayons diffère très peu de l'unité, mais encore que la différence est au-dessous de  $\frac{1}{100000}$ . Cela posé, si l'on adopte comme rigoureuse, pour l'éther considéré isolément, la loi de répulsion précédemment énoncée, c'est-à-dire si l'on suppose que l'action mutuelle de deux molécules d'éther soit répulsive et réciproquement proportionnelle au carré de la distance, la formule (27) du paragraphe II fournira le moyen de calculer une limite supérieure

à l'intervalle qui sépare deux molécules voisines du fluide éthéré. En effet, désignons par

$$l, l'; T, T'$$

les longueurs d'ondulation et les durées des vibrations moléculaires dans les rayons rouge et violet; et par

$$\Omega, \Omega'$$

les vitesses de propagation de ces rayons dans le vide. Les rapports entre les durées  $T, T'$  et l'intervalle de temps qui résulte de la division d'une seconde sexagésimale en mille millions de millions de parties égales, seront représentés à très peu près par les nombres

$$2 \quad \text{et} \quad 1,36,$$

en sorte qu'on aura sensiblement

$$\frac{T}{T'} = \frac{2}{1,36} = 1,47, \quad \left(\frac{T}{T'}\right)^2 = 2,16.$$

Cela posé, la formule (27) du paragraphe II donnera, pour le rapport entre la distance  $\varepsilon$  de deux molécules d'éther voisines et la longueur  $l$ ,

$$\frac{\varepsilon}{l} = \frac{1}{\pi} \left[ \frac{14 \left( \frac{\Omega}{\Omega'} - 1 \right) \left( \frac{\Omega}{\Omega'} + 1 \right)}{1,16} \right]^{\frac{1}{2}},$$

ou à très peu près, puisque  $\frac{\Omega}{\Omega'}$  diffère très peu de l'unité,

$$(4) \quad \frac{\varepsilon}{l} = \frac{2}{\pi} \left[ \frac{7}{1,16} \left( \frac{\Omega}{\Omega'} - 1 \right) \right]^{\frac{1}{2}}.$$

Pour que la valeur de  $\varepsilon$  reste réelle, on devra évidemment, dans la formule (4), supposer le rapport

$$\frac{\Omega}{\Omega'}$$

supérieur à l'unité. Si d'ailleurs on suppose la différence entre ce rapport et l'unité réduite à  $\frac{1}{100000}$ , alors de l'équation (4), jointe à



la formule

$$(5) \quad \frac{\Omega}{\Omega} = 1 + \frac{1}{100000},$$

on conclura

$$(6) \quad \frac{\varepsilon}{1} = \frac{2}{100} \frac{1}{\pi} \sqrt{\left(\frac{70}{110}\right)} = 0,005 \dots$$

En vertu de cette dernière formule,  $\varepsilon$  serait environ 5 millièmes ou  $\frac{1}{200}$  de la longueur d'ondulation des rayons rouges, c'est-à-dire environ 3 millièmes de millimètre. On voit ainsi quelle est la petitesse de la limite supérieure à la distance qui sépare deux molécules voisines d'éther, lorsqu'en adoptant la loi d'une répulsion réciproquement proportionnelle au bicarré de la distance, on part de ce fait, que l'observation d'Algol ne fournit point de traces de la dispersion des couleurs dans le vidé.

Il est bon de remarquer qu'en vertu de la formule (5), la vitesse de propagation des rayons violets surpasserait celle des rayons rouges, en sorte que les rayons qui se propagent plus rapidement dans les corps se propageraient au contraire avec plus de lenteur dans le vidé.

---

## MÉMOIRE SUR L'INTÉGRATION

DES

## ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES<sup>(1)</sup>.

---

I.

Le nombre des équations différentielles que l'on peut intégrer en termes finis étant très peu considérable, on a depuis longtemps essayé de substituer, pour de semblables équations, l'intégration par série à l'intégration directe. Ainsi, par exemple, étant donnée une équation différentielle du premier ordre entre  $x$  et  $y$  considéré comme fonction de  $x$ , avec la valeur particulière  $y_0$  de la fonction  $y$ , correspondant à la valeur particulière  $x_0$  de la variable  $x$ , on a supposé la fonction  $y$  développée par la formule de Maclaurin, en une série ordonnée suivant les puissances ascendantes et entières de la variable  $x$ ; et, comme on pouvait facilement déterminer les coefficients des diverses puissances de  $x$  dans cette série, en les déduisant des valeurs connues des quantités  $x_0, y_0$ , à l'aide de l'équation donnée et de ses dérivées des divers ordres, et en laissant d'ailleurs arbitraire la constante  $y_0$ , on en a conclu que toute équation différentielle du premier ordre entre  $x$  et  $y$  admettait une intégrale générale, et que cette intégrale se trouvait représentée par la série de Maclaurin, c'est-à-dire par la somme de cette série, les coefficients étant déterminés, comme on vient de l'expliquer, en fonction de  $x_0$  et de la constante arbitraire  $y_0$ . Toutefois,

(1) Ce Mémoire, déjà lithographié en 1835, n'a été tiré la première fois qu'à un petit nombre d'exemplaires; c'est ce qui nous engage à le reproduire ici tel qu'il a été rédigé à cette époque.



les considérations précédentes ne donnaient nulle certitude que l'on eût effectivement intégré l'équation proposée, ni même que cette équation admit une intégrale. Car, d'une part, rien ne prouvait que la série obtenue fût convergente, et l'on sait que les séries divergentes n'ont pas de sommes; d'autre part, une série même convergente, qui provient du développement d'une fonction effectué à l'aide de la formule de Maclaurin, ne représente pas toujours la fonction dont il s'agit. Ainsi, en particulier, si l'on applique la formule de Maclaurin à la fonction

$$e^{-x^2} + e^{-\frac{1}{x^2}},$$

on obtiendra pour développement la série convergente

$$1 - \frac{x^2}{1} + \frac{x^4}{1.2} - \frac{x^6}{1.2.3} + \dots$$

qui représente, non la fonction donnée, mais seulement son premier terme. L'intégration par série des équations différentielles était donc illusoire, tant qu'on ne fournissait aucun moyen de s'assurer que les séries obtenues étaient convergentes, et que leurs sommes étaient des fonctions propres à vérifier les équations proposées; en sorte qu'il fallait nécessairement ou trouver un tel moyen, ou chercher une autre méthode à l'aide de laquelle on pût établir généralement l'existence de fonctions propres à vérifier les équations différentielles et calculer des valeurs indéfiniment approchées de ces mêmes fonctions. La première et peut-être jusqu'à présent la seule méthode qui remplisse ce double but, pour un système quelconque d'équations différentielles, me paraît être celle que j'ai publiée dans mes *Leçons de seconde année pour l'École royale Polytechnique*. Suivant cette méthode, étant donnée, pour  $x = x_0$ , la valeur  $y_0$  de la fonction  $y$  déterminée par une équation différentielle de la forme

$$(1) \quad dx = f(x, y) dx,$$

si la supposition

$$x = x_0, \quad y = y_0$$

ne rend infinie aucune des deux fonctions

$$(2) \quad f(x, y), \quad \frac{df(x, y)}{dy},$$

alors, pour calculer approximativement une autre valeur  $Y$  de  $y$ , correspondant à une autre valeur  $X$  de  $x$ , on interposera entre les limites

$$x_0, X$$

une série croissante ou décroissante de nouvelles valeurs de  $x$ , puis on leur fera correspondre une série de nouvelles valeurs de  $y$  tellement calculées que, deux valeurs consécutives de  $x$  étant représentées par

$$x, x + \Delta x$$

et les valeurs correspondantes de  $y$  par

$$y, y + \Delta y,$$

on ait généralement

$$(3) \quad \Delta y = f(x, y) \Delta x.$$

On démontre que la dernière des valeurs de  $y$  ainsi calculées, ou celle qui correspond à la valeur  $X$  de  $x$ , converge, lorsqu'on fait décroître indéfiniment les valeurs numériques de  $\Delta x$ , vers une limite fixe qui est fonction continue de  $y_0$  et de  $X$ , pourvu toutefois que la valeur numérique de la différence

$$X - x_0$$

ne devienne pas trop considérable et supérieure à celle qu'une certaine condition détermine. Cela posé, en nommant

$$\bar{y}(X)$$

la limite dont il s'agit, on prouvera aisément que la fonction

$$(4) \quad y = \bar{y}(x)$$

à la double propriété de vérifier l'équation (1) et de se réduire à  $y_0$  pour  $x = x_0$ . Il y a plus, on déterminera sans peine les limites des erreurs que l'on peut commettre en prenant pour  $\bar{y}(X)$  la dernière des



valeurs de  $y$  calculées à l'aide de la formule (3), dans le cas où chacune des valeurs de  $\Delta x$  est inférieure, abstraction faite du signe, à un très petit nombre donné  $\delta$ .

Si l'on désigne par

$$A, C$$

deux nombres respectivement supérieurs aux valeurs numériques des fonctions (2); si, de plus, on désigne par

$$a$$

une quantité positive ou négative, choisie de telle manière que, pour des valeurs de  $x$  renfermées entre les limites

$$x_0, x_0 + a$$

et pour des valeurs de  $y$  renfermées entre les limites

$$y_0 - \Lambda a, y_0 + \Lambda a,$$

les fonctions (2) restent continues par rapport aux variables  $x, y$ , et renfermées, la première entre les limites

$$-A, +A,$$

la seconde entre les limites

$$-C, +C;$$

la condition ci-dessus mentionnée, et à laquelle devra satisfaire la différence  $X - x_0$ , sera que cette différence demeure comprise entre les limites  $0, a$ , ou, en d'autres termes, que la valeur  $X$  de  $x$  demeure elle-même comprise entre les limites

$$x_0, x_0 + a.$$

Alors, si l'on nomme  $H$  la valeur numérique de  $X - x_0$  et  $\omega$  la plus grande valeur numérique que puisse recevoir la quantité

$$f(x \pm \theta \delta, y \pm \Theta \Lambda \delta) - f(x, y),$$

tandis que l'on fait varier  $\theta$  et  $\Theta$  entre les limites  $0, a$ ;  $x$  et  $x \pm \theta \delta$  entre les limites  $x_0, x_0 + a$ ; enfin  $y$  et  $y \pm \Theta \Lambda \delta$  entre les limites  $y_0,$

$y_0 \pm \Lambda a$ ; l'erreur que l'on commettra, en supposant chacune des valeurs numériques de  $\Delta x$  inférieure à  $\delta$ , et prenant pour  $\delta(X)$  la dernière des valeurs de  $y$  calculées à l'aide de la formule (3), sera plus petite que le produit

$$(5) \quad H e^{H \omega} \omega,$$

$e$  désignant la base des logarithmes népériens. Ajoutons que, si, pour toutes les valeurs de  $x, y$ , comprises entre les limites

$$x_0, x_0 + a; y_0 - \Lambda a, y_0 + \Lambda a,$$

la fonction

$$(6) \quad \frac{\partial f(x, y)}{\partial x}$$

reste finie, continue et inférieure, abstraction faite du signe, au nombre

$$B,$$

le facteur  $\omega$  ne pourra surpasser le produit

$$(7) \quad (B + AC) \delta.$$

La valeur de  $y$  que la formule (4) détermine étant fonction continue, non seulement de la variable  $x$ , mais encore de la constante  $y_0$ , devient, lorsque cette constante est considérée comme arbitraire, ce qu'on appelle l'intégrale générale de l'équation (1). La méthode précédente fournit donc le moyen non seulement d'établir l'existence de l'intégrale générale d'une équation différentielle du premier ordre, mais encore de calculer, avec tel degré d'approximation qu'on le désire, la valeur  $Y$  de  $y$  correspondant à une valeur donnée  $X$  de la variable  $x$ , en supposant déjà connue une première valeur  $x_0$  de  $x$ . Ce calcul s'étend même à des valeurs de  $X$  non renfermées entre les limites

$$x_0, x_0 + a.$$

Car, après avoir déduit, de la première valeur de  $y$  représentée par  $y_0$ , une seconde valeur  $Y$ , on peut de celle-ci en déduire une troisième et continuer de la sorte jusqu'à ce que la valeur de  $y$  devienne infiniment grande ou rende infinie l'une des fonctions (2).



La méthode que je viens de rappeler se trouve rigoureusement établie et rendue plus sensible par des exemples numériques dans les Leçons déjà citées. J'ai montré dans les mêmes Leçons comment on pouvait étendre cette méthode à l'intégration d'équations différentielles simultanées du premier ordre, quel que fût le nombre des variables, et comment on pouvait obtenir, non seulement les intégrales générales et particulières de ces équations, mais encore leurs intégrales singulières. On sait d'ailleurs que l'intégration d'équations différentielles d'un ordre quelconque peut toujours être ramenée à l'intégration d'équations différentielles simultanées du premier ordre.

## II.

Les avantages qu'offre la méthode ci-dessus rappelée se retrouvent avec d'autres encore dans celle que je vais maintenant exposer.

Le beau Mémoire où M. Hamilton a fait dépendre l'intégration des équations différentielles que l'on rencontre en Dynamique, de la détermination d'une seule fonction, représentée par une intégrale définie qui satisfait à deux équations du second ordre aux différences partielles, a reporté mes idées vers un point qui m'avait paru depuis longtemps digne d'être examiné avec une attention particulière. J'avais pensé qu'il y aurait peut-être quelque avantage à réduire l'intégration d'un système d'équations différentielles à l'intégration d'une seule équation aux différences partielles du premier ordre. Or cette réduction peut toujours être facilement effectuée, comme on va le voir.

Soient  $x, y, z, \dots$  des fonctions inconnues de la variable  $t$ , déterminées par des équations différentielles du premier ordre, en vertu desquelles les différentielles

$$dx, dy, dz, \dots, dt,$$

des variables

$$x, y, z, \dots, t$$

soient respectivement proportionnelles à des fonctions connues

$$X, Y, Z, \dots, \mathfrak{E}$$

de ces mêmes variables. Les équations différentielles dont il s'agit seront comprises dans la formule

$$(1) \quad \frac{dx}{X} = \frac{dy}{Y} = \frac{dz}{Z} = \dots = \frac{dt}{\mathfrak{E}}$$

et se réduiront aux suivantes

$$(2) \quad dx = \frac{X}{\mathfrak{E}} dt, \quad dy = \frac{Y}{\mathfrak{E}} dt, \quad dz = \frac{Z}{\mathfrak{E}} dt, \quad \dots,$$

qui ne perdront rien de leur généralité, si l'on fait disparaître le dénominateur  $\mathfrak{E}$ , en prenant simplement  $\mathfrak{E} = 1$ . Or supposer que les équations (2) sont intégrables, c'est admettre que  $x, y, z, \dots, t$  peuvent varier simultanément de manière à les vérifier. Dans cette hypothèse,  $x, y, z, \dots$  variant avec  $t$ , si  $t$  prend une nouvelle valeur  $\tau$ ,  $x, y, z$  recevront des valeurs correspondantes  $\xi, \eta, \zeta, \dots$  qui ne pourront dépendre que de  $\tau$  et des valeurs primitivement attribuées à  $x, y, z, \dots, t$ ; par conséquent,  $\xi, \eta, \zeta, \dots$  seront des fonctions de  $x, y, z, \dots, t, \tau$ , qui se réduiront, pour  $\tau = t$ , à  $x, y, z, \dots$ , en sorte qu'on aura

$$(3) \quad \begin{cases} \xi = \varphi(x, y, z, \dots, t, \tau), \\ \eta = \chi(x, y, z, \dots, t, \tau), \\ \zeta = \psi(x, y, z, \dots, t, \tau), \\ \dots \end{cases}$$

les lettres caractéristiques  $\varphi, \chi, \psi, \dots$  désignant des fonctions déterminées qui vérifieront les conditions

$$(4) \quad \begin{cases} \varphi(x, y, z, \dots, t, t) = x, \\ \chi(x, y, z, \dots, t, t) = y, \\ \psi(x, y, z, \dots, t, t) = z, \\ \dots \end{cases}$$

Les équations (2) ne sont censées intégrées généralement qu'autant qu'on est parvenu à exprimer  $\xi, \eta, \zeta, \dots$  en fonction de  $\tau$ , par des équations de la forme (3), quelles que soient d'ailleurs les valeurs primitivement attribuées à

$$x, y, z, \dots, t.$$



Alors les équations (3), ou des équations équivalentes, c'est-à-dire propres à fournir les mêmes valeurs de

$$\xi, \eta, \zeta, \dots$$

sont ce qu'on appelle les intégrales générales des équations différentielles données. A l'aide de ces intégrales, on peut déterminer, pour une valeur  $\tau$  de la variable indépendante renfermée dans les équations (2), les valeurs correspondantes  $\xi, \eta, \zeta, \dots$  des variables dépendantes que contiennent les mêmes équations, quand on connaît un autre système de valeurs  $x, y, z, \dots$  de ces dernières correspondant à une autre valeur  $t$  de la première; et comme, en partant des valeurs  $\xi, \eta, \zeta, \dots$  qui correspondent à la valeur  $\tau$  de la variable indépendante, on devrait retrouver, pour la valeur  $t$  de cette variable, les valeurs des variables dépendantes représentées par  $x, y, z, \dots$ , il est clair que les équations (3) continueront de subsister, si l'on y échange entre eux les deux systèmes de valeurs des variables dépendantes et indépendantes, représentés par

$$\begin{array}{l} x, y, z, \dots, t, \\ \xi, \eta, \zeta, \dots, \tau. \end{array}$$

Donc les intégrales des équations (2) pourront encore se produire sous la forme

$$(5) \quad \begin{cases} x = \varphi(\xi, \eta, \zeta, \dots, \tau, t), & y = \chi(\xi, \eta, \zeta, \dots, \tau, t), \\ z = \psi(\xi, \eta, \zeta, \dots, \tau, t), & \dots \end{cases}$$

D'ailleurs les formules (4), étant identiques pour des valeurs quelconques de  $x, y, z, \dots, t$ , entraîneront les suivantes :

$$(6) \quad \begin{cases} \varphi(\xi, \eta, \zeta, \dots, \tau, \tau) = \xi, & \chi(\xi, \eta, \zeta, \dots, \tau, \tau) = \eta, \\ \psi(\xi, \eta, \zeta, \dots, \tau, \tau) = \zeta, & \dots \end{cases}$$

en sorte que les valeurs de  $x, y, z, \dots$  fournies par les équations (5) se réduiront, comme on devait s'y attendre, à  $\xi, \eta, \zeta, \dots$  quand on supposera

$$t = \tau.$$

Lorsqu'on attribue à  $\tau$  une valeur constante,

$$\xi, \eta, \zeta, \dots$$

deviennent, dans les intégrales générales (3) ou (5), d'autres constantes que l'on peut choisir arbitrairement, et que l'on nomme pour cette raison constantes *arbitraires*. Si l'on fait d'ailleurs, pour abrégér,

$$(7) \quad \begin{cases} \varphi(x, y, z, \dots, t, \tau) = X, & \chi(x, y, z, \dots, t, \tau) = Y, \\ \psi(x, y, z, \dots, t, \tau) = Z, & \dots \end{cases}$$

les équations (3) deviendront

$$(8) \quad \xi = X, \quad \eta = Y, \quad \zeta = Z, \quad \dots$$

$X, Y, Z, \dots$  étant des fonctions de  $x, y, z, \dots, t$ , qui se réduiront, la première à  $x$ , la deuxième à  $y$ , la troisième à  $z, \dots$  pour  $t = \tau$ , et qui ne renfermeront aucune des constantes arbitraires  $\xi, \eta, \zeta, \dots$ . Enfin si l'on désigne par

$$(9) \quad u = f(x, y, z, \dots)$$

une fonction déterminée des seules variables  $x, y, z, \dots$  et par

$$(10) \quad v = f(\xi, \eta, \zeta, \dots)$$

$$(11) \quad U = f(X, Y, Z, \dots),$$

ce que devient la fonction  $u$  quand on y remplace les variables  $x, y, z, \dots$  : 1<sup>o</sup> par les constantes arbitraires  $\xi, \eta, \zeta, \dots$ ; 2<sup>o</sup> par les fonctions  $X, Y, Z, \dots$ ;

$$U,$$

ainsi que  $X, Y, Z, \dots$ , dépendra uniquement des quantités

$$x, y, z, \dots, t, \tau,$$

et se réduira, pour  $t = \tau$ , à la nouvelle constante arbitraire désignée par  $v$ . De plus, les intégrales générales des équations (2) ou les formules (8) entraîneront évidemment la suivante

$$(12) \quad f(\xi, \eta, \zeta, \dots) = f(X, Y, Z, \dots)$$



ou

$$(13) \quad v = U,$$

qui sera une nouvelle intégrale générale et comprendra comme cas particuliers les formules (8), avec lesquelles on la ferait coïncider en posant successivement

$$f(x, y, z, \dots) = x, \quad f(x, y, z, \dots) = y, \quad f(x, y, z, \dots) = z, \quad \dots$$

Concevons maintenant que,

U

désignant une fonction quelconque des quantités

$$x, y, z, \dots, t \text{ et } \tau,$$

mais une fonction qui ne renferme aucune des constantes arbitraires

$$\xi, \eta, \zeta, \dots,$$

il s'agisse de savoir si les équations (2) admettent une intégrale générale de la forme

$$(14) \quad U = \text{const.}$$

Cela revient à savoir si les valeurs de  $x, y, z, \dots$ , tirées des équations (5) ou (8), réduisent U à une fonction de  $t$  ou à une constante arbitraire. Or la différentielle de cette fonction ou de cette constante sera, eu égard aux équations (2), ce que devient l'expression

$$(15) \quad dU = \left( \frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\alpha}{\epsilon} \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\beta}{\epsilon} \frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\zeta}{\epsilon} \frac{\partial U}{\partial z} + \dots \right) dt,$$

quand on y substitue pour  $x, y, z, \dots$  leurs valeurs tirées des équations (5) ou (8). Donc ces valeurs vérifieront ou non, quel que soit  $t$ , la formule

$$(16) \quad \frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\alpha}{\epsilon} \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\beta}{\epsilon} \frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\zeta}{\epsilon} \frac{\partial U}{\partial z} + \dots = 0,$$

suivant que les équations différentielles proposées admettront ou non une intégrale générale de la forme (14). D'ailleurs, si la formule (16)

n'était pas identique, elle établirait entre les seules quantités renfermées dans les fonctions

$$\alpha, \beta, \zeta, \dots, \epsilon, U,$$

c'est-à-dire entre les quantités

$$x, y, z, \dots, t \text{ et } \tau,$$

une relation qui devrait être une conséquence nécessaire des équations (8). Or cette dernière hypothèse ne saurait être admise; car on vérifie les équations (8) par des valeurs de  $x, y, z, \dots, t$  et  $\tau$ , arbitrairement choisies, et par des valeurs de

$$\xi, \eta, \zeta, \dots$$

déduites, à l'aide de ces mêmes équations, des valeurs attribuées à

$$x, y, z, \dots, t \text{ et } \tau,$$

La formule (16) ne peut donc être qu'une équation identique, exprimant que

$$(17) \quad s = U$$

est une intégrale particulière de l'équation aux différences partielles

$$(18) \quad \epsilon \frac{\partial s}{\partial t} + \alpha \frac{\partial s}{\partial x} + \beta \frac{\partial s}{\partial y} + \zeta \frac{\partial s}{\partial z} + \dots = 0.$$

Ajoutons que, si l'on nomme  $v$  la valeur particulière que prend la fonction U quand on y pose

$$x = \xi, \quad y = \eta, \quad z = \zeta, \quad \dots, \quad t = \tau,$$

celle des intégrales générales des équations (2), qui sera de la forme (14), se réduira nécessairement à

$$(19) \quad U = v.$$

Alors, aussi la forme

$$(20) \quad s = U - v$$

sera, en même temps que la formule (17), une intégrale particulière



de l'équation (18). En conséquence, on peut énoncer la proposition suivante;

PREMIER THÉORÈME. — *Les équations (2) étant supposées généralement intégrables, et U désignant une fonction qui ne renferme que les seules variables*

$$x, y, z, \dots, t,$$

*ou ces variables avec une valeur particulière  $\tau$  de la variable  $t$ ; pour savoir si les équations (2) admettent ou n'admettent pas une intégrale générale de la forme (19), il suffira d'examiner si la formule (17) ou (20) fournit ou non une intégrale particulière de l'équation (18).*

Cela posé, veut-on obtenir celle des intégrales générales qui serait de la forme (19),  $\upsilon$  désignant une constante arbitraire et U une fonction des variables  $x, y, z, \dots, t$ , qui aurait la propriété de se réduire pour une valeur particulière  $\tau$  de la variable  $t$ , à une fonction donnée de  $x, y, z, \dots$ , savoir à

$$u = f(x, y, z, \dots),$$

il suffira d'égaliser à zéro la valeur de  $s$  qui a la double propriété de représenter une intégrale de l'équation (18) et de se réduire à

$$u = \upsilon$$

pour  $t = \tau$ ; ou bien encore, il suffira d'égaliser à  $\upsilon$  celle des intégrales de l'équation (18) qui a la propriété de se réduire à  $u$  pour  $t = \tau$ .

Si, pour fixer les idées, on veut obtenir les intégrales générales des équations (2) sous la forme (8), de sorte qu'étant donné un système de valeurs des variables

$$x, y, z, \dots, t,$$

ces intégrales fournissent immédiatement les nouvelles valeurs

$$\xi, \eta, \zeta, \dots$$

que prennent les variables dépendantes pour une nouvelle valeur

$\tau$

de la variable indépendante, il suffira de chercher les diverses intégrales particulières de l'équation (18), qui ont la propriété de se réduire, pour  $t = \tau$ , à l'une des variables

Si l'on désigne par  $x, y, z, \dots$

$$(21) \quad s = X, \quad s = Y, \quad s = Z, \quad \dots,$$

ces intégrales particulières dans lesquelles  $X, Y, Z, \dots$  ne peuvent renfermer que les seules quantités

$$x, y, z, \dots, t \quad \text{et} \quad \tau,$$

on vérifiera encore l'équation (18), en attribuant à  $s$  l'une des valeurs

$$(22) \quad s = X - \xi, \quad s = Y - \eta, \quad s = Z - \zeta, \quad \dots;$$

et, en égalant à zéro ces dernières valeurs de  $s$ , on obtiendra sous la forme (8) les intégrales générales des équations (2).

Jusqu'à présent nous avons supposé, sans le démontrer, que les équations (2) étaient généralement intégrables. Mais, sans admettre *a priori* cette supposition, on peut faire voir que l'intégration générale de l'équation (18) entraîne l'intégration générale des équations (2), et même que, pour obtenir les intégrales générales de ces dernières équations, il suffit d'égaliser à des constantes arbitraires

les valeurs  $\xi, \eta, \zeta, \dots$   
 $X, Y, Z, \dots$

de  $u$ , qui ont la double propriété de vérifier l'équation (18) et de se réduire à  $x, y, z, \dots$  pour  $t = \tau$ . Effectivement on obtiendra de cette manière les équations (8), en vertu desquelles

$$x, y, z, \dots$$

seront des fonctions de  $t$  qui se réduiront respectivement à

$$\xi, \eta, \zeta, \dots$$

pour  $t = \tau$ . Or, en faisant varier  $x, y, z, \dots$  avec  $t$ , en observant



d'ailleurs que X est une intégrale particulière de l'équation (18) et vérifie en conséquence la formule

$$(23) \quad \frac{\partial X}{\partial t} + \frac{\alpha}{\epsilon} \frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\beta}{\epsilon} \frac{\partial X}{\partial y} + \frac{\gamma}{\epsilon} \frac{\partial X}{\partial z} + \dots = 0,$$

on tirera de la première des équations (8)

$$\frac{\partial X}{\partial t} + \frac{\partial X}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial X}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial X}{\partial z} \frac{dz}{dt} + \dots = 0;$$

puis en éliminant de cette dernière

$$\frac{\partial X}{\partial t},$$

à l'aide de la formule (23), et opérant de la même manière pour chacune des équations (8), on trouvera

$$(24) \quad \begin{cases} \frac{\partial X}{\partial x} \left( \frac{dx}{dt} - \frac{\alpha}{\epsilon} \right) + \frac{\partial X}{\partial y} \left( \frac{dy}{dt} - \frac{\beta}{\epsilon} \right) + \frac{\partial X}{\partial z} \left( \frac{dz}{dt} - \frac{\gamma}{\epsilon} \right) + \dots = 0, \\ \frac{\partial Y}{\partial x} \left( \frac{dx}{dt} - \frac{\alpha}{\epsilon} \right) + \frac{\partial Y}{\partial y} \left( \frac{dy}{dt} - \frac{\beta}{\epsilon} \right) + \frac{\partial Y}{\partial z} \left( \frac{dz}{dt} - \frac{\gamma}{\epsilon} \right) + \dots = 0, \\ \frac{\partial Z}{\partial x} \left( \frac{dx}{dt} - \frac{\alpha}{\epsilon} \right) + \frac{\partial Z}{\partial y} \left( \frac{dy}{dt} - \frac{\beta}{\epsilon} \right) + \frac{\partial Z}{\partial z} \left( \frac{dz}{dt} - \frac{\gamma}{\epsilon} \right) + \dots = 0, \\ \dots \end{cases}$$

Supposons maintenant que l'on combine entre elles par voie d'addition les formules (24), après les avoir multipliées par des facteurs choisis de manière que toutes les différences

$$\frac{dx}{dt} - \frac{\alpha}{\epsilon}, \quad \frac{dy}{dt} - \frac{\beta}{\epsilon}, \quad \frac{dz}{dt} - \frac{\gamma}{\epsilon}, \quad \dots$$

se trouvent éliminées à l'exception d'une seule. On substituera ainsi aux équations (24) d'autres équations de la forme

$$(25) \quad K \left( \frac{dx}{dt} - \frac{\alpha}{\epsilon} \right) = 0, \quad K \left( \frac{dy}{dt} - \frac{\beta}{\epsilon} \right) = 0, \quad K \left( \frac{dz}{dt} - \frac{\gamma}{\epsilon} \right) = 0, \quad \dots$$

la valeur de K étant

$$(26) \quad K = \frac{\partial X}{\partial x} \frac{\partial Y}{\partial y} \frac{\partial Z}{\partial z} \dots - \frac{\partial X}{\partial y} \frac{\partial Y}{\partial x} \frac{\partial Z}{\partial z} \dots + \dots;$$

et, comme la fonction de  $x, y, z, \dots, t$ , représentée ici par K, ne saurait être généralement nulle, puisqu'elle se réduit à l'unité, ainsi que

$$\frac{\partial X}{\partial x}, \quad \frac{\partial Y}{\partial y}, \quad \frac{\partial Z}{\partial z}, \quad \dots$$

pour  $t = \tau$ , les formules (25) entraîneront les équations (2). Donc celles-ci auront pour intégrales générales les équations (8), et l'on peut énoncer la proposition suivante :

DEUXIÈME THÉORÈME. — *L'intégration de l'équation (18) entraîne celle des équations (2), et, pour obtenir les intégrales générales de ces dernières, il suffit d'égaliser à des constantes arbitraires  $\xi, \eta, \zeta, \dots$  les intégrales particulières*

$$s = X, \quad s = Y, \quad s = Z, \quad \dots$$

de l'équation (18), qui ont la propriété de se réduire respectivement à  $x, y, z, \dots$  pour  $t = \tau$ .

Les intégrales générales des équations (2) étant obtenues comme on vient de le dire et représentées par les formules (8), la formule (19), dans laquelle

$$U = f(X, Y, Z, \dots)$$

désigne une fonction quelconque de  $X, Y, Z, \dots$ , représentera une nouvelle intégrale générale des équations (2); et, pour obtenir cette nouvelle intégrale, il suffira (voyez le premier théorème) d'égaliser à une constante arbitraire  $v$  celle des intégrales particulières de l'équation (18) qui a la propriété de se réduire à

$$u = f(x, y, z, \dots)$$

pour  $t = \tau$ . Ajoutons que, si l'on se sert du signe caractéristique

$$\nabla$$

pour indiquer un système d'opérations effectuées sur une fonction quelconque  $s$  de  $x, y, z, \dots, t$ , et définies par la formule

$$(27) \quad \nabla s = - \int_{\tau}^t \left( \frac{\alpha}{\epsilon} \frac{\partial s}{\partial x} + \frac{\beta}{\epsilon} \frac{\partial s}{\partial y} + \frac{\gamma}{\epsilon} \frac{\partial s}{\partial z} + \dots \right) dt,$$



on tirera de l'équation (16), intégrée par rapport à  $t$ , et à partir de  $t = \tau$ ,

$$(28) \quad U - u - \nabla U = 0$$

ou, ce qui revient au même,

$$(29) \quad U = u + \nabla U.$$

Si dans le second membre de l'équation (29) on substitue une ou plusieurs fois de suite à la fonction  $U$  sa valeur tirée de cette équation même, alors, en écrivant pour abrégier

$$\nabla^1 U, \nabla^2 U, \dots$$

au lieu de

$$\nabla \nabla U, \nabla \nabla \nabla U, \dots,$$

on trouvera

$$\begin{aligned} U &= u + \nabla u + \nabla^2 U \\ &= u + \nabla u + \nabla^2 u + \nabla^3 U \\ &= \dots \end{aligned}$$

et généralement

$$(30) \quad U = u + \nabla u + \nabla^2 u + \nabla^3 u + \dots + \nabla^{n-1} u + \nabla^n U,$$

$n$  étant un nombre entier quelconque. Si, dans l'équation (30), le terme

$$\nabla^n U$$

décroit indéfiniment pour des valeurs croissantes de  $n$ , la série

$$(31) \quad u, \nabla u, \nabla^2 u, \nabla^3 u, \dots$$

sera convergente, et cette équation donnera

$$(32) \quad U = u + \nabla u + \nabla^2 u + \nabla^3 u + \dots;$$

par suite, la formule (19), propre à représenter une intégrale générale quelconque des équations (2), deviendra

$$(33) \quad u + \nabla u + \nabla^2 u + \nabla^3 u + \dots = v;$$

et comme, dans le cas où  $\nabla$  désignerait non plus un système d'opérations à effectuer sur une fonction donnée, mais une quantité

vériable, on aurait

$$(34) \quad 1 + \nabla + \nabla^2 + \nabla^3 + \dots = \frac{1}{1 - \nabla},$$

l'intégrale générale dont il s'agit pourra être présentée sous la forme symbolique

$$(35) \quad \frac{u}{1 - \nabla} = v.$$

D'ailleurs, comme on tire de l'équation (32)

$$\nabla U = \nabla(u + \nabla u + \nabla^2 u + \dots) = \nabla u + \nabla^2 u + \nabla^3 u + \dots = U - u,$$

il est clair que la valeur de  $U$  fournie par cette équation vérifiera la formule (28), par conséquent la formule (18), tant que la série (31) sera convergente. On peut donc énoncer encore le théorème suivant :

THOÏSIÈME THÉOREME. — *Tant que la série (31) est convergente, la formule (33) ou (35) est propre à représenter l'une quelconque des intégrales générales des équations (2).*

Si l'on pose, pour abrégier,

$$(36) \quad \frac{x}{\epsilon} \frac{\partial s}{\partial x} + \frac{y}{\epsilon} \frac{\partial s}{\partial y} + \frac{z}{\epsilon} \frac{\partial s}{\partial z} + \dots = \square s,$$

l'équation (27) donnera

$$(37) \quad \nabla s = - \int_{\tau}^t \square s dt.$$

Lorsque  $x, y, z, \dots, \epsilon$  ne renferment pas explicitement la variable indépendante  $t$ , mais seulement les variables dépendantes  $x, y, z, \dots$ , alors, en substituant à  $s$ , dans l'équation (37), la fonction  $u$  qui ne renferme pas non plus la variable  $t$ , on tire successivement de cette équation

$$\nabla u = - \int_{\tau}^t \square u dt = - \square u \int_{\tau}^t dt = (\tau - t) \square u,$$

$$\nabla^2 u = - \int_{\tau}^t (\tau - t) \square^2 u dt = - \square^2 u \int_{\tau}^t (\tau - t) dt = \frac{(\tau - t)^2}{1.2} \square^2 u,$$

$$\dots \dots \dots$$



et généralement

$$(38) \quad \nabla^n u = \frac{(\tau-t)^n}{1.2 \dots n} \square^n u.$$

En vertu de cette dernière formule, l'équation (33) deviendra

$$(39) \quad u + \frac{\tau-t}{1} \square u + \frac{(\tau-t)^2}{1.2} \square^2 u + \dots = v;$$

et comme, dans le cas où  $\square$  représenterait non plus un système d'opérations à effectuer sur une fonction donnée, mais une quantité véritable, on aurait

$$(40) \quad 1 + \frac{\tau-t}{1} \square + \frac{(\tau-t)^2}{1.2} \square^2 + \dots = e^{(\tau-t)\square},$$

l'équation (39) pourra encore être présentée sous la forme symbolique

$$(41) \quad e^{(\tau-t)\square} u = v.$$

Ainsi le troisième théorème entraîne le suivant :

QUATRIÈME THÉORÈME. — *Lorsque les fonctions*

$$x, y, z, \dots, \xi$$

*ne renferment pas explicitement la variable indépendante  $t$ , l'équation (39) ou (41) est propre à représenter l'une quelconque des intégrales générales des équations (2), tant que la série*

$$(42) \quad u, \frac{\tau-t}{1} \square u, \frac{(\tau-t)^2}{1.2} \square^2 u, \dots$$

*est convergente.*

Si des formules (35) ou (41) on veut déduire les intégrales générales des équations (2) présentées sous la forme (8), ou, en d'autres termes, les valeurs des quantités  $\xi, \eta, \zeta, \dots$  qui sont ce que deviennent  $x, y, z, \dots$  considérées comme fonctions de la variable indépendante  $t$ , quand cette variable indépendante reçoit une nouvelle valeur  $\tau$ , il suffira de poser successivement dans la formule (35) ou (41)

$$u = x, \quad v = \xi,$$

puis

$$u = y, \quad v = \eta,$$

puis

$$u = z, \quad v = \zeta,$$

$$\dots, \dots$$

En conséquence, les intégrales générales des équations (2), étant réduites à la forme (8), seront représentées dans tous les cas par les formules

$$(43) \quad \xi = \frac{x}{1-\square}, \quad \eta = \frac{y}{1-\square}, \quad \zeta = \frac{z}{1-\square}, \quad \dots,$$

et, dans le cas où  $x, y, z, \dots, \xi$  ne renfermeraient pas explicitement la variable  $t$ , par les formules

$$(44) \quad \xi = e^{(\tau-t)\square} x, \quad \eta = e^{(\tau-t)\square} y, \quad \zeta = e^{(\tau-t)\square} z, \quad \dots$$

Si, pour fixer les idées, on suppose que les équations (2) se réduisent à

$$(45) \quad dx = x dt, \quad dy = y dt, \quad dz = z dt, \quad \dots,$$

en sorte qu'on ait

$$\frac{dx}{x} = dt, \quad \frac{dy}{y} = dt, \quad \frac{dz}{z} = dt, \quad \dots,$$

on tirera de la formule (36), en y remplaçant  $s$  par  $u$ ,

$$(46) \quad x \frac{du}{dx} + y \frac{du}{dy} + z \frac{du}{dz} + \dots = \square u.$$

Si d'ailleurs on prend pour  $u$  une fonction homogène du premier degré en  $x, y, z, \dots$ , on aura identiquement

$$x \frac{du}{dx} + y \frac{du}{dy} + z \frac{du}{dz} + \dots = u;$$

par conséquent, l'équation (46) donnera

$$\square u = u,$$

et l'on pourra poser simplement  $\square = 1$  dans les formules (41), (44),



qui deviendront respectivement

$$(47) \quad v = u e^{t-\tau},$$

$$(48) \quad \xi = x e^{t-\tau}, \quad \eta = y e^{t-\tau}, \quad \zeta = z e^{t-\tau}, \quad \dots$$

Telles sont en effet les intégrales générales des équations (45), intégrales qu'on peut encore écrire comme il suit

$$(49) \quad x = \xi e^{t-\tau}, \quad y = \eta e^{t-\tau}, \quad z = \zeta e^{t-\tau}, \quad \dots,$$

et dans lesquelles  $\xi, \eta, \zeta, \dots$  peuvent être considérées comme représentant les constantes arbitraires introduites par l'intégration.

Lorsqu'on remplace  $s$  par  $u$  dans la formule (36), on en tire

$$(50) \quad \frac{x}{\varepsilon} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{y}{\varepsilon} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{z}{\varepsilon} \frac{\partial u}{\partial z} + \dots = \square u.$$

Si  $x, y, z, \dots, \varepsilon$  ne renferment pas explicitement la variable  $t$ , alors, en désignant par  $k$  une quantité constante et choisissant la fonction  $u$  de manière à vérifier l'équation

$$(51) \quad \frac{x}{\varepsilon} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{y}{\varepsilon} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{z}{\varepsilon} \frac{\partial u}{\partial z} + \dots = ku,$$

on aura identiquement

$$(52) \quad \square u = ku,$$

et la formule (41), réduite à

$$v = u e^{k(t-\tau)}$$

ou, ce qui revient au même, à

$$(53) \quad u = v e^{k(t-\tau)},$$

sera propre à représenter une intégrale générale des équations (2).

Pour montrer une application des formules (51) et (53), supposons que les équations (2) soient de la forme

$$(54) \quad \begin{cases} dx = (a_1 x + b_1 y + c_1 z + \dots) dt, \\ dy = (a_2 x + b_2 y + c_2 z + \dots) dt, \\ dz = (a_3 x + b_3 y + c_3 z + \dots) dt, \\ \dots \end{cases}$$

$a_1, b_1, c_1, \dots, a_2, b_2, c_2, \dots, a_3, b_3, c_3, \dots$  étant des quantités constantes. L'équation (51) deviendra

$$(55) \quad \begin{cases} (a_1 x + b_1 y + c_1 z + \dots) \frac{\partial u}{\partial x} \\ + (a_2 x + b_2 y + c_2 z + \dots) \frac{\partial u}{\partial y} \\ + (a_3 x + b_3 y + c_3 z + \dots) \frac{\partial u}{\partial z} \\ + \dots = ku, \end{cases}$$

et on la vérifiera en posant

$$(56) \quad u = \lambda x + \mu y + \nu z + \dots,$$

pourvu que  $\lambda, \mu, \nu, \dots$  désignent des facteurs constants propres à remplir les conditions

$$(57) \quad \begin{cases} a_1 \lambda + a_2 \mu + a_3 \nu + \dots = k \lambda, \\ b_1 \lambda + b_2 \mu + b_3 \nu + \dots = k \mu, \\ c_1 \lambda + c_2 \mu + c_3 \nu + \dots = k \nu, \\ \dots \end{cases}$$

ou

$$(58) \quad \begin{cases} (a_1 - k) \lambda + a_2 \mu + a_3 \nu + \dots = 0, \\ b_1 \lambda + (b_2 - k) \mu + b_3 \nu + \dots = 0, \\ c_1 \lambda + c_2 \mu + (c_3 - k) \nu + \dots = 0, \\ \dots \end{cases}$$

desquelles on déduit, par l'élimination de  $\lambda, \mu, \nu, \dots$ , l'équation

$$(59) \quad (a_1 - k)(b_2 - k)(c_3 - k) \dots - a_2 b_1 (c_3 - k) \dots = 0,$$

qui renferme la seule inconnue  $k$  et dont le degré est égal au nombre des variables  $x, y, z, \dots$ . Les diverses racines de l'équation (59) fourniront le système des intégrales générales des équations (54), et ces intégrales générales se trouveront toutes comprises dans la formule (53) ou

$$(60) \quad \lambda x + \mu y + \nu z + \dots = (\lambda \xi + \mu \eta + \nu \zeta + \dots) e^{k(t-\tau)},$$



Si aux équations (54) on substitue les suivantes

$$(61) \quad \begin{cases} dx = [a_1x + b_1y + c_1z + \dots + f_1(t)] dt, \\ dy = [a_2x + b_2y + c_2z + \dots + f_2(t)] dt, \\ dz = [a_3x + b_3y + c_3z + \dots + f_3(t)] dt, \\ \dots \end{cases}$$

$f_1(t), f_2(t), f_3(t), \dots$  étant des fonctions quelconques de la variable  $t$ ; alors, en supposant toujours la fonction  $u$  déterminée par la formule (56), choisissant les quantités

$$\lambda, \mu, \nu, \dots, k$$

de manière à vérifier les conditions (58) (59), et faisant, pour abrégér,

$$(62) \quad \lambda f_1(t) + \mu f_2(t) + \nu f_3(t) + \dots = f(t),$$

on tirera des formules (36), (37)

$$\square u = ku + f(t),$$

par conséquent

$$\begin{aligned} \nabla u &= - \int_{\tau}^t \square u dt = k(\tau - t)u - \int_{\tau}^t f(t) dt, \\ \nabla^2 u &= - \int_{\tau}^t k(\tau - t) \square u dt = \frac{k^2(\tau - t)^2}{1.2} u - \int_{\tau}^t k(\tau - t) f(t) dt, \\ \nabla^3 u &= - \int_{\tau}^t \frac{k^2(\tau - t)^2}{1.2} \square u dt = \frac{k^3(\tau - t)^3}{1.2.3} u - \int_{\tau}^t \frac{k^2(\tau - t)^2}{1.2} f(t) dt, \\ &\dots \end{aligned}$$

Donc l'équation (33) donnera

$$(63) \quad v = u \left[ 1 + k(\tau - t) + \frac{k^2(\tau - t)^2}{1.2} + \dots \right] - \int_{\tau}^t \left[ 1 + k(\tau - t) + \frac{k^2(\tau - t)^2}{1.2} + \dots \right] f(t) dt$$

ou, ce qui revient au même,

$$(64) \quad v = u e^{k(\tau - t)} - \int_{\tau}^t e^{k(\tau - t)} f(t) dt.$$

La formule (64) peut encore s'écrire comme il suit

$$(65) \quad u e^{-k\tau} - v e^{-k} = \int_{\tau}^t e^{-kt} f(t) dt$$

et donne, quand on y transporte les valeurs de  $u$  et de  $f(t)$ , tirées des équations (56) et (62),

$$(66) \quad \lambda x + \mu y + \nu z + \dots = (\lambda \xi + \mu \eta + \nu \zeta + \dots) e^{k(t - \tau)} + e^{kt} \int_{\tau}^t e^{-kt} [\lambda f_1(t) + \mu f_2(t) + \nu f_3(t) + \dots] dt.$$

Les diverses équations que comprend la formule (66), eu égard aux diverses valeurs qu'on peut attribuer à la constante  $k$ , présentent le système des intégrales générales des équations (61). Si, après avoir substitué dans la même formule, les valeurs des quantités  $\lambda, \mu, \nu, \dots$  ou plutôt de leurs rapports exprimées en fonctions de  $k$ , on suppose que deux, trois, ... racines de l'équation (59) deviennent égales entre elles; les deux, trois, ... équations correspondantes à ces racines coïncideront et devront être remplacées, comme il est facile de le prouver, par l'une d'entre elles, jointe à l'équation dérivée du premier ordre, ou aux deux équations dérivées du premier et du second ordre, ..., qu'on obtiendra en différentiant une ou plusieurs fois de suite les deux membres de l'équation conservée par rapport à la seule quantité  $k$ .

Pour montrer une dernière application de la formule (33), supposons les équations (2) réduites à une seule qui soit du premier degré par rapport à  $x$ , ou de la forme

$$(67) \quad dx = [f(t) + x F(t)] dt,$$

$f(t), F(t)$  étant deux fonctions quelconques de  $t$ . Alors la formule (27) donnera

$$\nabla u = - \int_{\tau}^t [f(t) + x F(t)] \frac{\partial u}{\partial x} dt.$$



et par suite on tirera de la formule (33), en y posant  $u = x$ ,

$$(68) \quad \xi = x \left[ 1 - \int_{\tau}^t F(t) dt + \int_{\tau}^t F(t) \int_{\tau}^t F(t) dt - \dots \right] \\ - \int_{\tau}^t f(t) \left[ 1 - \int_{\tau}^t F(t) dt + \int_{\tau}^t F(t) \int_{\tau}^t F(t) dt - \dots \right] dt.$$

D'autre part,  $F(t)$  étant la dérivée de  $\int_{\tau}^t F(t) dt$ , on aura

$$\int_{\tau}^t F(t) \int_{\tau}^t F(t) dt = \frac{1}{2} \left[ \int_{\tau}^t F(t) dt \right]^2, \\ \int_{\tau}^t F(t) \int_{\tau}^t F(t) \int_{\tau}^t F(t) dt = \frac{1}{2 \cdot 3} \left[ \int_{\tau}^t F(t) dt \right]^3, \\ \dots$$

et par suite

$$1 - \int_{\tau}^t F(t) dt + \int_{\tau}^t F(t) \int_{\tau}^t F(t) dt - \dots \\ = 1 - \int_{\tau}^t F(t) dt + \frac{1}{2} \left[ \int_{\tau}^t F(t) dt \right]^2 - \dots = e^{-\int_{\tau}^t F(t) dt}.$$

Donc la formule (68), qui représente l'intégrale générale de l'équation (67), pourra être réduite à

$$(69) \quad \xi = x e^{-\int_{\tau}^t F(t) dt} - \int_{\tau}^t f(t) e^{-\int_{\tau}^t F(t) dt} dt.$$

Dans les divers exemples que nous venons de passer en revue, la formule (33) fournit, pour les équations différentielles proposées, les mêmes intégrales qui étaient déjà connues, et auxquelles on avait été conduit par diverses méthodes que nous nous dispenserons de rappeler.

Il est facile de prouver que la formule (39) ou (41) continuera de représenter une intégrale générale des équations (2), si,  $u$  devenant une fonction explicite de toutes les variables  $x, y, z, \dots, t$ , on détermine  $\square u$  non plus à l'aide de l'équation (50), mais à l'aide de la

suivante

$$(70) \quad \square u = \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z} + \dots$$

pourvu toutefois que la série (42) reste convergente et qu'on désigne par  $\nu$  la valeur de  $u$  correspondant aux valeurs

$$\xi, \eta, \zeta, \dots, \tau,$$

des variables

$$x, y, z, \dots, t.$$

Effectivement, si dans cette dernière hypothèse, on pose

$$(71) \quad U = u + \frac{\tau-t}{1} \square u + \frac{(\tau-t)^2}{1 \cdot 2} \square^2 u + \dots,$$

comme on aura généralement

$$\square \left[ \frac{(\tau-t)^n}{1 \cdot 2 \dots n} \square^n u \right] = \frac{(\tau-t)^n}{1 \cdot 2 \dots n} \square^{n+1} u - \frac{(\tau-t)^{n-1}}{1 \cdot 2 \dots (n-1)} \square^n u,$$

on en conclura

$$(72) \quad \square U = 0$$

ou, ce qui revient au même,

$$(73) \quad \frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial U}{\partial z} + \dots = 0.$$

Donc, dans l'hypothèse admise,

$$s = U$$

sera une intégrale particulière de l'équation (18); et la formule (19), qui coïncidera, en vertu de l'équation (71), avec la formule (39) ou (41), sera [voyez le premier théorème] une intégrale générale des équations (2). Au reste on peut, dans la même hypothèse, déduire directement des équations (2) la formule (39) ou (41), à l'aide de la formule de Taylor. Effectivement,  $u$  étant une fonction quelconque de la variable indépendante  $t$  et des variables  $x, y, z, \dots$  liées à  $t$  par les équations (2), on aura, en vertu de ces équations jointes à la



formule (70),

$$du = \square u dt.$$

On trouvera de même

$$d\square u = \square^2 u dt,$$

$$d^2 \square u = \square^3 u dt,$$

$$\dots\dots\dots;$$

et l'on aura par suite

$$(74) \quad du = \square u dt, \quad d^2 u = \square^2 u dt^2, \quad d^3 u = \square^3 u dt^3, \quad \dots$$

D'ailleurs, si l'on nomme  $v$  une nouvelle valeur de  $u$ , correspondant à une nouvelle valeur  $\tau$  de la variable indépendante  $t$ , la formule de Taylor donnera, pour les valeurs de la différence  $\tau - t$  qui permettront de développer  $v$  en une série ordonnée suivant les puissances ascendantes et entières de cette différence,

$$(75) \quad v = u + \frac{\tau - t}{dt} du + \frac{(\tau - t)^2}{1.2 dt^2} d^2 u + \frac{(\tau - t)^3}{1.2.3 dt^3} d^3 u + \dots$$

Or, en substituant dans l'équation (75) les valeurs de

$$du, d^2 u, d^3 u, \dots$$

tirées des formules (74), on retrouvera précisément la formule (39).

Pour vérifier sur un exemple très simple la formule (39), dans le cas où l'on y suppose  $\square u$  déterminé par la formule (70), concevons que les équations (2) se réduisent à

$$(76) \quad dx = \frac{x}{t} dt, \quad dy = \frac{y}{t} dt, \quad dz = \frac{z}{t} dt, \quad \dots,$$

on aura

$$(77) \quad \square u = \frac{1}{t} \left( t \frac{\partial u}{\partial t} + x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} + z \frac{\partial u}{\partial z} + \dots \right);$$

et par conséquent

$$(78) \quad \square u = \frac{u}{t},$$

lorsque  $u$  deviendra une fonction homogène du premier degré en  $x, y, z, \dots, t$ . Mais alors,  $\square u$  étant une fonction homogène d'un degré nul, on tirera de l'équation (77), en y remplaçant  $u$  par  $\square u$ ,

$$(79) \quad \square^2 u = 0;$$

done, par suite,

$$\square^2 u = 0, \quad \square^3 u = 0, \quad \dots$$

Cela posé, la formule (39) donnera simplement

$$v = u + \frac{\tau - t}{t} u = \frac{\tau}{t} u$$

ou, ce qui revient au même,

$$(80) \quad \frac{u}{v} = \frac{t}{\tau}.$$

Si, dans cette dernière formule, on réduit successivement la fonction  $u$  aux variables  $x, y, z, \dots$ , il faudra en même temps attribuer à la constante arbitraire  $v$  l'une des valeurs  $\xi, \eta, \zeta, \dots$ , et l'on obtiendra ainsi les intégrales des équations (76) sous la forme

$$(81) \quad \frac{x}{\xi} = \frac{t}{\tau}, \quad \frac{y}{\eta} = \frac{t}{\tau}, \quad \frac{z}{\zeta} = \frac{t}{\tau}, \quad \dots$$

On arriverait directement à ces dernières en intégrant les deux membres de chacune des équations (76) présentées sous la forme

$$\frac{dx}{x} = \frac{dt}{t}, \quad \frac{dy}{y} = \frac{dt}{t}, \quad \frac{dz}{z} = \frac{dt}{t}, \quad \dots$$

On pourrait généraliser encore la formule (39), en y remplaçant la variable indépendante  $t$ , et la quantité  $\tau$ , par une fonction donnée  $r$  des variables  $x, y, z, \dots, t$ , et par la valeur particulière  $\rho$  de  $r$  correspondant à  $t = \tau$ . Effectivement,  $r$  et  $u$  étant deux fonctions quelconques de  $x, y, z, \dots, t$ , les équations différentielles (2), qui se trouvent comprises dans la formule (1), obligent

$$x, y, z, \dots, t,$$

par conséquent aussi les fonctions

$$r \text{ et } u,$$

à varier simultanément; et, si l'on nomme

$$\rho \text{ et } v$$



deux valeurs correspondantes de ces fonctions,  $v$  sera ce que devient la fonction  $u$  quand la variable  $r$  reçoit l'accroissement  $\rho - r$ . Or, en admettant que  $v$  soit développable par la formule de Taylor en une série ordonnée suivant les puissances ascendantes de cet accroissement, on aura

$$(82) \quad v = u + \frac{\rho - r}{1} \frac{du}{dr} + \frac{(\rho - r)^2}{1.2} \frac{d^2 \left( \frac{du}{dr} \right)}{dr^2} + \dots,$$

$\frac{du}{dr}, \frac{d^2 \left( \frac{du}{dr} \right)}{dr^2}, \dots$  représentant les rapports entre les différentielles totales des fonctions

$$u, \frac{du}{dr}, \dots$$

et la différentielle totale de  $r$ . D'autre part, en se servant des notations

$$\frac{\partial r}{\partial x}, \frac{\partial r}{\partial y}, \dots, \frac{\partial r}{\partial t}, \quad \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \dots, \frac{\partial u}{\partial t}$$

pour désigner les dérivées partielles de  $r$  et de  $u$  considérées comme fonctions de

$$x, y, z, \dots, t,$$

on aura identiquement

$$(83) \quad \begin{cases} dr = \frac{\partial r}{\partial x} dx + \frac{\partial r}{\partial y} dy + \dots + \frac{\partial r}{\partial t} dt, \\ du = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy + \dots + \frac{\partial u}{\partial t} dt. \end{cases}$$

et l'on tirera de la formule (1)

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} = \frac{dz}{z} = \dots = \frac{dt}{t} = \frac{dr}{x \frac{\partial r}{\partial x} + y \frac{\partial r}{\partial y} + z \frac{\partial r}{\partial z} + \dots + t \frac{\partial r}{\partial t}}$$

$$= \frac{du}{x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} + z \frac{\partial u}{\partial z} + \dots + t \frac{\partial u}{\partial t}},$$

par conséquent

$$(84) \quad \frac{du}{dr} = \frac{x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} + z \frac{\partial u}{\partial z} + \dots + t \frac{\partial u}{\partial t}}{x \frac{\partial r}{\partial x} + y \frac{\partial r}{\partial y} + z \frac{\partial r}{\partial z} + \dots + t \frac{\partial r}{\partial t}}$$

Donc, si l'on fait pour abrégé

$$(85) \quad \square u = \frac{x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} + z \frac{\partial u}{\partial z} + \dots + t \frac{\partial u}{\partial t}}{x \frac{\partial r}{\partial x} + y \frac{\partial r}{\partial y} + z \frac{\partial r}{\partial z} + \dots + t \frac{\partial r}{\partial t}},$$

on aura simplement

$$\frac{du}{dr} = \square u.$$

On en conclura

$$\frac{d \left( \frac{du}{dr} \right)}{dr} = \frac{d \square u}{dr} = \square^2 u, \dots,$$

et par suite l'équation (82) donnera

$$(86) \quad v = u + \frac{\rho - r}{1} \square u + \frac{(\rho - r)^2}{1.2} \square^2 u + \dots$$

ou, si l'on emploie la forme symbolique,

$$(87) \quad v = e^{(\rho - r) \square} u.$$

J'ajoute que l'équation (86) représentera une intégrale générale des équations différentielles proposées, tant que la série

$$(88) \quad u, \frac{\rho - r}{1} \square u, \frac{(\rho - r)^2}{1.2} \square^2 u, \dots$$

sera convergente. Effectivement, si, dans cette hypothèse, on fait pour abrégé

$$(89) \quad U = u + \frac{\rho - r}{1} \square u + \frac{(\rho - r)^2}{1.2} \square^2 u + \dots,$$

comme on aura, en vertu de l'équation (85),

$$\square U = U,$$

et par suite

$$\square \left[ \frac{(\rho - r)^n}{1.2 \dots n} \square^n u \right] = \frac{(\rho - r)^n}{1.2 \dots n} \square^{n+1} u - \frac{(\rho - r)^{n-1}}{1.2 \dots (n-1)} \square^n u,$$

on trouvera

$$(90) \quad \square U = 0,$$



par conséquent

$$(91) \quad \alpha \frac{\partial U}{\partial x} + \beta \frac{\partial U}{\partial y} + \gamma \frac{\partial U}{\partial z} + \dots + \epsilon \frac{\partial U}{\partial t} = 0.$$

Donc

$$s = U$$

sera une intégrale particulière de l'équation (18), et la formule (19), qui coïncidera, en vertu de l'équation (89), avec la formule (86), sera (voyez le premier théorème) une intégrale générale des équations (2). On peut donc énoncer la proposition suivante :

CINQUIÈME THÉORÈME. — *Tant que la série (88) est convergente, l'équation (86) est propre à représenter une intégrale générale des équations (2).*

La formule (86), ainsi que la formule (33) ou (39), ne cesse pas de représenter une intégrale générale des équations (2), lorsqu'on y change entre eux les deux systèmes de quantités

$$\begin{aligned} x, y, z, \dots, t, \\ \xi, \eta, \zeta, \dots, \tau. \end{aligned}$$

Quelquefois l'échange dont il s'agit reproduit précisément la même formule. C'est ce qui arrive en particulier relativement aux équations (48), (60), (66), (80), (81).

Il ne sera pas inutile d'indiquer ici une forme digne de remarque, sous laquelle on peut offrir l'équation (33). Si, en supposant  $u$  fonction des seules variables  $x, y, z, \dots$ , et l'expression  $\square u$  définie par la formule (36), on nomme

$$\square' u, \square'' u, \square''' u, \dots$$

ce que devient  $\square u$  lorsque, dans les quantités

$$\alpha, \beta, \gamma, \dots, \epsilon,$$

considérées comme fonctions de

$$x, y, z, \dots, t,$$

on remplace la seule variable  $t$  par des nouvelles variables

$$t', t'', t''', \dots,$$

on aura évidemment, en vertu des formules (36) et (37),

$$\nabla u = - \int_{\tau}^t \square u dt = - \int_{\tau}^{t'} \square' u dt' = - \int_{\tau}^{t''} \square'' u dt'' = \dots,$$

$$\nabla^2 u = \int_{\tau}^t \square' \int_{\tau}^{\tau'} \square'' u dt' dt'' = \int_{\tau}^t \int_{\tau}^{\tau'} \square' \square'' u dt' dt'',$$

$$\nabla^3 u = - \int_{\tau}^t \square' \int_{\tau}^{\tau'} \square'' \int_{\tau}^{\tau''} \square''' u dt' dt'' dt''' = - \int_{\tau}^t \int_{\tau}^{\tau'} \int_{\tau}^{\tau''} \square' \square'' \square''' u dt' dt'' dt''',$$

et par suite la formule (33) deviendra

$$(92) \quad \left\{ \begin{aligned} u &= u - \int_{\tau}^t \square' u dt' + \int_{\tau}^t \int_{\tau}^{\tau'} \square' \square'' u dt' dt'' \\ &\quad - \int_{\tau}^t \int_{\tau}^{\tau'} \int_{\tau}^{\tau''} \square' \square'' \square''' u dt' dt'' dt''' + \dots \end{aligned} \right.$$

Lorsque les fonctions  $\alpha, \beta, \gamma, \dots, \epsilon$  ne renferment pas explicitement la variable  $t$ , on a

$$\square u = \square' u = \square'' u = \square''' u = \dots,$$

par conséquent

$$\square' u = \square u, \quad \square'' u = \square^2 u, \quad \square''' u = \square^3 u, \quad \dots$$

et de plus

$$(93) \quad \left\{ \begin{aligned} - \int_{\tau}^t dt &= \frac{\tau - t}{1}, & \int_{\tau}^t \int_{\tau}^{\tau'} dt' dt'' &= \frac{(\tau - t)^2}{1.2}, \\ - \int_{\tau}^t \int_{\tau}^{\tau'} \int_{\tau}^{\tau''} dt' dt'' dt''' &= \frac{(\tau - t)^3}{1.2.3}, & \dots \end{aligned} \right.$$

Donc, alors la formule (92) se trouve réduite, comme on devait s'y attendre, à la formule (39).

La formule (92) fournit le moyen d'écrire sous une forme très simple les intégrales générales des équations différentielles qui représentent les mouvements simultanés du Soleil, des planètes et de leurs satellites.



Il est bon d'observer que, dans le cas où l'on considère seulement deux variables  $x$  et  $t$ , et où l'équation (16) devient

$$(94) \quad \frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\lambda}{\epsilon} \frac{\partial U}{\partial x} = 0,$$

la différentielle complète de la fonction  $U$ , savoir

$$dU = \frac{\partial U}{\partial t} dt + \frac{\partial U}{\partial x} dx,$$

se réduit, quand on y substitue pour  $\frac{dU}{dt}$  sa valeur tirée de la formule (94), à un produit de la forme

$$(95) \quad V \left( dx - \frac{\lambda}{\epsilon} dt \right),$$

la valeur de  $V$  étant

$$(96) \quad V = \frac{\partial U}{\partial x}.$$

Donc, la fonction  $U$  étant déterminée par l'une des formules (32) ou (89), le facteur  $V = \frac{\partial U}{\partial x}$  sera propre à rendre intégrable le premier membre d'une équation différentielle entre  $x$  et  $t$ , présentée sous la forme

$$(97) \quad dx - \frac{\lambda}{\epsilon} dt = 0.$$

Effectivement l'équation (94), différenciée par rapport à  $x$ , donne

$$(98) \quad \frac{\partial V}{\partial t} = \frac{\partial \left( -\frac{\lambda}{\epsilon} V \right)}{\partial x},$$

et la formule (98) exprime la condition d'intégrabilité du produit (95). Cette formule peut d'ailleurs être considérée comme une équation aux différences partielles, propre à déterminer le facteur  $V$  en fonction des variables  $x$  et  $t$ .

Si, à la place des équations (2) qui sont du premier ordre, l'on considérait une ou plusieurs équations différentielles d'ordres supérieurs, pour réduire celles-ci à n'être plus que des équations diffé-

rentielles du premier ordre, il suffirait de leur adjoindre quelques-unes des formules

$$(99) \quad \begin{cases} \frac{dx}{dt} = x', & \frac{dx'}{dt} = x'', & \dots \\ \frac{dy}{dt} = y', & \frac{dy'}{dt} = y'', & \dots \\ \frac{dz}{dt} = z', & \frac{dz'}{dt} = z'', & \dots \\ \dots, & \dots, & \dots \end{cases}$$

c'est-à-dire de nouvelles équations différentielles, qui seraient elles-mêmes du premier ordre dans le cas où l'on prendrait pour inconnues non seulement  $x, y, z, \dots$ , mais encore quelques-unes des fonctions dérivées

$$x', x'', \dots, y', y'', \dots, z', z'', \dots, \dots$$

A l'aide de cet artifice, on déduira sans peine de la formule (66) l'intégrale générale sous forme finie d'une équation linéaire de l'ordre  $n$  à coefficients constants avec un second membre variable, c'est-à-dire d'une équation de la forme

$$(100) \quad \frac{d^n x}{dt^n} + a \frac{d^{n-1} x}{dt^{n-1}} + b \frac{d^{n-2} x}{dt^{n-2}} + \dots + g \frac{dx}{dt} + h x = f(t).$$

### III.

Il nous reste à faire voir comment on peut s'assurer généralement que les séries (31), (42), (88) du paragraphe précédent sont convergentes, du moins pour des valeurs de la différence  $t - \tau$  ou  $\tau - t$  suffisamment rapprochées de zéro, et comment on peut alors fixer des limites supérieures aux erreurs que l'on commet en conservant seulement dans chaque série les  $n$  premiers termes. Le nouveau calcul que j'ai désigné sous le nom de *calcul des limites* dans un Mémoire sur la Mécanique céleste, lithographié à Turin, et traduit en langue italienne par les savants éditeurs des *Opuscoli mathematici e fisici* qui se



publié à Milan, fournit diverses méthodes à l'aide desquelles on peut atteindre ce double but. Je me bornerai pour le moment à indiquer l'une de ces méthodes, me proposant de revenir sur cet objet dans un autre Mémoire.

Soient  $r$  une quantité positive,  $p$  un arc réel,  $\pi$  le rapport de la circonférence au diamètre et  $f(x)$  une fonction quelconque de la variable réelle ou imaginaire  $x$ . Dans l'expression imaginaire

$$r e^{p\sqrt{-1}} = r(\cos p + \sqrt{-1} \sin p),$$

$r$ , ou la racine carrée de la somme qu'on obtient en ajoutant les carrés de la partie réelle et du coefficient de  $\sqrt{-1}$ , sera ce qu'on nomme le *module*; et l'on aura évidemment

$$(1) \quad \frac{\partial f(x + r e^{p\sqrt{-1}})}{\partial r} = \frac{1}{r\sqrt{-1}} \frac{\partial f(x + r e^{p\sqrt{-1}})}{\partial p}.$$

Or, si l'on intègre les deux membres de l'équation précédente : 1° par rapport à  $r$  et à partir de  $r = 0$ ; 2° par rapport à  $p$  entre les limites  $p = -\pi$ ,  $p = \pi$ ; et si l'on suppose que la fonction de  $x$ ,  $r$  et  $p$ , représentée par

$$(2) \quad f(x + r e^{p\sqrt{-1}}),$$

reste finie et continue, quel que soit  $p$ , pour la valeur attribuée à  $r$  et pour une valeur plus petite, on trouvera

$$\int_{-\pi}^{\pi} \int_0^r \frac{\partial f(x + r e^{p\sqrt{-1}})}{\partial r} dp dr = 0$$

ou, ce qui revient au même,

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x + r e^{p\sqrt{-1}}) dp = \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dp = 2\pi f(x);$$

puis on en conclura

$$(3) \quad f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x + r e^{p\sqrt{-1}}) dp.$$

Si l'on différencie la formule (3)  $n$  fois de suite par rapport à  $x$ , on

en tirera

$$f^{(n)}(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^{(n)}(x + r e^{p\sqrt{-1}}) dp;$$

puis, en intégrant par parties le second membre de cette dernière  $n$  fois de suite, on aura

$$(4) \quad f^{(n)}(x) = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} r^{-n} e^{-np\sqrt{-1}} f(x + r e^{p\sqrt{-1}}) dp.$$

Concevons maintenant qu'ayant posé

$$(5) \quad r e^{p\sqrt{-1}} = \bar{x},$$

on adopte les notations du calcul des limites, et que l'on désigne en conséquence par

$$(6) \quad \Lambda f(x + \bar{x})$$

la plus grande valeur que puisse acquérir le module de la fonction imaginaire  $f(x + \bar{x})$ , lorsque dans

$$\bar{x} = r e^{p\sqrt{-1}}$$

on fait varier l'angle  $p$  sans changer le module  $r$ . Dans l'intégrale que renferme le second membre de l'équation (4), la fonction sous le signe  $\int$  offrira toujours un module inférieur ou tout au plus égal au produit

$$r^{-n} \Lambda f(x + \bar{x});$$

et, en multipliant ce produit par

$$\int_{-\pi}^{\pi} dp = 2\pi,$$

on en obtiendra un autre qui sera supérieur au module ou à la valeur numérique de l'intégrale elle-même. Par suite, si l'on indique le module ou la valeur numérique d'une expression imaginaire ou réelle à l'aide de l'abréviation

mod



placée devant l'expression dont il s'agit, on tirera de la formule (4)

$$(7) \quad \text{mod } f^{(n)}(x) < 1.2.3 \dots n r^{-n} \Lambda f(x + \bar{x}).$$

D'ailleurs, comme on aura généralement

$$1.2.3 \dots n r^{-n} = (-1)^n r \frac{d^n(r^{-1})}{dr^n},$$

l'équation (7) pourra encore s'écrire comme il suit :

$$(8) \quad \text{mod } f^{(n)}(x) < (-1)^n \frac{d^n(r^{-1})}{dr^n} r \Lambda f(x + \bar{x});$$

et, sous cette forme, elle subsistera même pour  $n = 0$ , de sorte qu'on aura encore

$$(9) \quad \text{mod } f(x) < \Lambda f(x + \bar{x}),$$

comme on peut le conclure directement de l'équation (3). Il est bon de rappeler que, dans les seconds membres des formules (8) et (9), la valeur de  $r$  devra toujours être telle que la fonction

$$f(x + \bar{x}) = f(x + r e^{p\sqrt{-1}})$$

reste finie et continue, quel que soit  $p$ , pour cette même valeur de  $r$  et pour une valeur plus petite.

Cela posé, considérons d'abord l'une des séries qui représentent l'intégrale d'une seule équation différentielle de la forme

$$(10) \quad dx = \mathcal{X} dt.$$

Si,

$$(11) \quad u = f(x)$$

étant une fonction de  $x$  seule, on peut en dire autant de la fonction  $\mathcal{X}$ , en sorte qu'on ait

$$(12) \quad \mathcal{X} = \bar{\mathcal{X}}(x),$$

l'intégrale de l'équation (10) sera fournie par la formule (39) du paragraphe II, c'est-à-dire par l'équation

$$(13) \quad f(\xi) = f(x) + (\tau - t) \square f(x) + \frac{(\tau - t)^2}{1.2} \square^2 f(x) + \frac{(\tau - t)^3}{1.2.3} \square^3 f(x) + \dots,$$

dans laquelle on aura

$$(14) \quad \square f(x) = \bar{\mathcal{X}}(x) \frac{d f(x)}{dx}$$

ou, ce qui revient au même,

$$(15) \quad \left\{ \begin{array}{l} \square f(x) = \bar{\mathcal{X}}(x) f'(x), \\ \text{et par suite} \\ \square^2 f(x) = [\bar{\mathcal{X}}(x)]^2 f''(x) + \bar{\mathcal{X}}(x) \bar{\mathcal{X}}'(x) f'(x), \\ \square^3 f(x) = [\bar{\mathcal{X}}(x)]^3 f'''(x) + 3[\bar{\mathcal{X}}(x)]^2 \bar{\mathcal{X}}'(x) f''(x) \\ \quad + 3[\bar{\mathcal{X}}(x)] \bar{\mathcal{X}}''(x) + \bar{\mathcal{X}}(x) [\bar{\mathcal{X}}'(x)]^2 f'(x), \\ \dots \dots \dots \end{array} \right.$$

Or, de ces dernières équations, combinées avec les formules (8) et (9), on tirera évidemment

$$(16) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{mod } \square f(x) < \mathfrak{A}_1 r \Lambda \bar{\mathcal{X}}(x + \bar{x}) r \Lambda f(x + \bar{x}), \\ \text{mod } \square^2 f(x) < \mathfrak{A}_2 [r \Lambda \bar{\mathcal{X}}(x + \bar{x})]^2 r \Lambda f(x + \bar{x}), \\ \text{mod } \square^3 f(x) < \mathfrak{A}_3 [r \Lambda \bar{\mathcal{X}}(x + \bar{x})]^3 r \Lambda f(x + \bar{x}), \\ \dots \dots \dots \end{array} \right.$$

$\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \mathfrak{A}_3, \dots$  étant des fonctions de  $r$  déterminées par les équations

$$(17) \quad \left\{ \begin{array}{l} -\mathfrak{A}_1 = r^{-1} \frac{d(r^{-1})}{dr}, \\ \mathfrak{A}_2 = (r^{-1})^2 \frac{d^2(r^{-1})}{dr^2} + r^{-1} \frac{d(r^{-1})}{dr} \frac{d(r^{-1})}{dr}, \\ -\mathfrak{A}_3 = (r^{-1})^3 \frac{d^3(r^{-1})}{dr^3} + 3(r^{-1})^2 \frac{d(r^{-1})}{dr} \frac{d^2(r^{-1})}{dr^2} \\ \quad + \left\{ (r^{-1})^2 \frac{d^2(r^{-1})}{dr^2} + r^{-1} \left[ \frac{d(r^{-1})}{dr} \right]^2 \right\} \frac{d(r^{-1})}{dr}, \\ \dots \dots \dots \end{array} \right.$$

et la valeur de  $r$  devant être telle que chacune des fonctions

$$(18) \quad f(x + \bar{x}), \quad \bar{\mathcal{X}}(x + \bar{x})$$

demeure finie et continue, quel que soit  $p$ , pour cette même valeur



de  $r$  et pour une valeur plus petite. D'ailleurs les valeurs de

$$-R_1, R_2, -R_3, \dots,$$

fournies par les équations (17), sont ce que deviennent les valeurs de  $\square f(x)$ ,  $\square^2 f(x)$ ,  $\square^3 f(x)$ , ..., fournies par les équations (15), quand, après y avoir posé

$$(19) \quad \tilde{f}(x) = f(x) = x^{-1},$$

on y remplace la variable  $x$  par le module  $r$ ; et il ne pouvait en être autrement, puisque, dans le second membre de la formule (8), le coefficient du produit

$$r \Lambda f(x + \bar{x})$$

est, abstraction faite du signe, ce que devient  $f^{(n)}(x)$  quand, après avoir posé

$$f(x) = x^{-1},$$

on substitue  $r$  à  $x$ . Donc les formules (16) donneront généralement

$$(20) \quad \text{mod } \square^n f(x) < R_n [r \Lambda \tilde{f}(x + \bar{x})]^n r \Lambda f(x + \bar{x}),$$

$(-1)^n R_n$  étant ce que devient la valeur de

$$\square^n f(x),$$

correspondant aux valeurs de  $\tilde{f}(x)$ ,  $f(x)$ , données par la formule (19), quand on remplace  $x$  par  $r$ . Or on tire de l'équation (14), jointe à la formule (19),

$$\square f(x) = x^{-1} \frac{d(x^{-1})}{dx} = -x^{-2},$$

$$\square^2 f(x) = x^{-1} \frac{d(-x^{-2})}{dx} = 3x^{-3},$$

$$\square^3 f(x) = x^{-1} \frac{d(3x^{-3})}{dx} = -3.5x^{-4},$$

et en général

$$\square^n f(x) = (-1)^n 1.3.5 \dots (2n-1) x^{-(2n+1)}.$$

On aura donc

$$(21) \quad R_n = 1.3.5 \dots (2n-1) r^{-(2n+1)},$$

et la formule (20) donnera

$$(22) \quad \text{mod } \square^n f(x) < 1.3.5 \dots (2n-1) r^{-n} [\Lambda \tilde{f}(x + \bar{x})]^n \Lambda f(x + \bar{x}).$$

Enfin, comme on a évidemment

$$\Lambda \frac{\tilde{f}(x + \bar{x})}{x} = \Lambda \frac{\tilde{f}(x + \bar{x})}{r},$$

la formule (22) pourra encore s'écrire comme il suit :

$$(23) \quad \text{mod } \square^n f(x) < 1.3.5 \dots (2n-1) \left[ \Lambda \frac{\tilde{f}(x + \bar{x})}{x} \right]^n \Lambda f(x + \bar{x}).$$

Cela posé, le terme général de la série comprise dans le second membre de la formule (13), savoir

$$(24) \quad \frac{(\tau - t)^n}{1.2 \dots n} \square^n f(x),$$

offrira une valeur numérique inférieure à celle du produit

$$(25) \quad \frac{1.3.5 \dots (2n-1)}{1.2.3 \dots n} \left[ (\tau - t) \Lambda \frac{\tilde{f}(x + \bar{x})}{x} \right]^n \Lambda f(x + \bar{x}),$$

par conséquent à celle du produit

$$(26) \quad \left[ 2(\tau - t) \Lambda \frac{\tilde{f}(x + \bar{x})}{x} \right]^n \Lambda f(x + \bar{x}).$$

attendu que l'on a certainement

$$\frac{1.3.5 \dots (2n-1)}{1.2.3 \dots n} < \frac{2.4.6 \dots 2n}{1.2.3 \dots n} = 2^n.$$

Donc les différents termes de la série en question offriront des valeurs numériques inférieures à celles des termes correspondants de la progression géométrique qui aurait pour terme général l'expression (26). Or cette progression sera convergente, si l'on a

$$(27) \quad \text{mod } \left[ 2(\tau - t) \Lambda \frac{\tilde{f}(x + \bar{x})}{x} \right] < 1,$$



ou, ce qui revient au même,

$$(28) \quad \text{mod}(\tau - t) < \frac{1}{2} \frac{1}{\Lambda \frac{\bar{f}(x + \bar{x})}{x}};$$

et alors, si l'on remplace la somme de la série par la somme de ses  $n$  premiers termes, le reste de la série, ou l'erreur commise, sera inférieur (abstraction faite du signe) à la somme des valeurs numériques que présentent dans la progression géométrique le terme (26) et les suivants, c'est-à-dire inférieur au produit

$$(29) \quad \frac{\left\{ \text{mod} \left[ 2(\tau - t) \Lambda \frac{\bar{f}(x + \bar{x})}{x} \right] \right\}^n}{1 - \text{mod} \left[ 2(\tau - t) \Lambda \frac{\bar{f}(x + \bar{x})}{x} \right]} \Lambda f(x + \bar{x}).$$

Supposons en particulier

$$f(x) = x;$$

alors l'équation (13) donnera

$$(30) \quad \xi = x + (\tau - t) \square x + \frac{(\tau - t)^2}{1.2} \square^2 x + \frac{(\tau - t)^3}{1.2.3} \square^3 x + \dots,$$

et le reste de la série comprise dans le second membre de la formule (30) sera inférieur, abstraction faite du signe, à

$$(31) \quad \frac{\left\{ \text{mod} \left[ 2(\tau - t) \Lambda \frac{\bar{f}(x + \bar{x})}{x} \right] \right\}^n}{1 - \text{mod} \left[ 2(\tau - t) \Lambda \frac{\bar{f}(x + \bar{x})}{x} \right]} \Lambda f(x + \bar{x}).$$

On peut donc énoncer la proposition suivante :

PREMIER THÉORÈME. — *Supposons que, la variable  $t$  et la fonction  $x$  de cette variable étant liées entre elles par l'équation différentielle*

$$(32) \quad dx = \bar{f}(x) dt,$$

*on nomme  $\xi$  une nouvelle valeur de la fonction  $x$  correspondant à une*

*nouvelle valeur  $\tau$  de la variable  $t$ ;  $\xi$  sera développable par la formule (30) en une série convergente ordonnée suivant les puissances ascendantes de la différence  $\tau - t$ , si la formule (28) est vérifiée, c'est-à-dire si la valeur numérique de  $\tau - t$  est inférieure à celle qui détermine l'équation*

$$(33) \quad \tau - t = \frac{1}{2} \frac{1}{\Lambda \frac{\bar{f}(x + \bar{x})}{x}};$$

*la valeur du module  $r$  de*

$$\bar{x} = r e^{p\sqrt{-1}}$$

*étant assujettie à la seule condition que la fonction*

$$\bar{f}(x + \bar{x})$$

*reste finie et continue, quel que soit l'angle  $p$ , pour cette valeur et pour une valeur plus petite. Alors le reste de la série réduite à ses  $n$  premiers termes sera inférieur, abstraction faite du signe, au produit (31). Alors, aussi une fonction quelconque de  $\xi$ , désignée par  $\Gamma(\xi)$ , sera elle-même développable en une série convergente ordonnée suivant les puissances ascendantes de  $\tau - t$ , et le reste de cette dernière série sera inférieur, abstraction faite du signe, au produit (29), si la valeur du module  $r$  est assujettie à la double condition que les deux fonctions*

$$f(x + \bar{x}), \quad \bar{f}(x + \bar{x})$$

*demeurent finies et continues, quel que soit l'angle  $p$ , pour cette valeur de  $r$  et pour une valeur plus petite.*

Il est avantageux de choisir le module  $r$  de  $\bar{x}$  de telle sorte que la limite assignée par la formule (28) à la valeur numérique de  $\tau - t$ , et représentée par le second membre de cette formule ou de l'équation (33), devienne la plus grande possible. On y parviendra en réduisant la quantité

$$\Lambda \frac{\bar{f}(x + \bar{x})}{x}$$

à la plus petite valeur qu'elle puisse acquérir, c'est-à-dire à ce que



nous avons nommé, dans un autre Mémoire, le module principal de l'expression

$$\frac{\bar{f}(x+\bar{x})}{x}$$

considérée comme fonction de  $x$ .

Pour montrer sur un exemple très simple une application des formules qui précèdent, concevons que l'équation (32) se réduise à

$$(34) \quad dx = x^i dt,$$

$i$  désignant une constante positive. On aura dans ce cas

$$\bar{f}(x) = x^i;$$

et, si l'on suppose  $x$  positive, afin que  $\bar{f}(x)$  soit réelle, la fonction

$$\bar{f}(x+\bar{x}) = (x+r e^{t\sqrt{-1}})^i$$

ne restera continue, pour des valeurs fractionnaires ou irrationnelles de l'exposant  $i$ , qu'autant que l'on aura

$$(35) \quad r < x.$$

Alors on trouvera

$$\Lambda(x+\bar{x}) = x+r, \quad \Lambda(x+\bar{x})^i = (x+r)^i$$

et par suite

$$(36) \quad \Lambda \frac{(x+\bar{x})^i}{x} = \frac{(x+r)^i}{r}.$$

La plus petite valeur que puisse acquérir cette dernière quantité, eu égard à la condition (35), sera : 1<sup>o</sup> si l'on suppose  $i < 2$ , la valeur qui correspond à  $r = x$ , savoir

$$(37) \quad 2^i x^{i-1};$$

2<sup>o</sup> si l'on suppose  $i > 2$ , la valeur qui correspond à la formule

$$\frac{d \left[ \frac{(x+r)^i}{r} \right]}{dr} = 0 \quad \text{ou} \quad r = \frac{x}{i-1},$$

savoir

$$(38) \quad \frac{i^i}{(i-1)^{i-1}} x^{i-1}.$$

Donc, en vertu du premier théorème,  $\xi$  et  $\tau$  désignant des valeurs qu'acquièrent simultanément les variables  $x$  et  $t$  assujetties à vérifier l'équation (34),  $\xi$  sera développable en une série convergente ordonnée suivant les puissances ascendantes de la différence  $\tau - t$ , tant que la valeur numérique de  $\tau - t$  restera inférieure à la moitié du rapport

$$(39) \quad \frac{1}{2^i x^{i-1}},$$

si l'on a  $i < 2$ , et à la moitié du rapport

$$(40) \quad \frac{(i-1)^{i-1}}{i^i x^{i-1}},$$

si l'on a  $i > 2$ . Or, en effet, on tire de l'équation (34), divisée par  $x^i$ , et intégrée directement,

$$(41) \quad \frac{\xi^{i-1} - x^{i-1}}{i-1} = \tau - t,$$

par conséquent

$$(42) \quad \xi = x [1 - (i-1)x^{i-1}(\tau - t)]^{\frac{1}{i-1}};$$

et la puissance

$$[1 - (i-1)x^{i-1}(\tau - t)]^{\frac{1}{i-1}}$$

sera développable en une série convergente, ordonnée suivant les puissances ascendantes de la différence  $\tau - t$ , si la valeur numérique de cette différence est inférieure à celle du rapport

$$(43) \quad \frac{1}{(i-1)x^{i-1}}.$$

D'ailleurs il est clair que ce dernier rapport surpassera toujours, abstraction faite du signe, le rapport (39) et à plus forte raison sa moitié, si l'on suppose  $i < 2$ , le rapport (40) et à plus forte raison sa moitié, si l'on suppose  $i > 2$ . En effet on aura, dans la première hypo-





thèse,

$$\text{mod } \frac{1}{i-1} > 1 > \frac{1}{2^i},$$

et dans la seconde hypothèse,  $i^i > (i-1)^i$ , par conséquent

$$\frac{1}{i-1} > \frac{(i-1)^{i-1}}{i^i}.$$

Donc le premier théorème se vérifie à l'égard de l'équation (34); et même de ce qu'on vient de dire il résulte que, pour une équation différentielle de cette forme, on obtiendra encore une limite supérieure à la valeur numérique que  $\tau - t$  peut acquérir dans la formule (30), si à l'équation (33) on substitue la suivante

$$(44) \quad \text{mod}(\tau - t) = \frac{1}{\Lambda \frac{\bar{f}(x + \bar{x})}{x}}$$

Cette remarque s'applique pareillement aux équations différentielles

$$dx = x^{-1} dt, \quad dx = e^{ix} dt, \quad dx = e^{-ix} dt, \quad \dots,$$

dont il est facile de calculer directement les intégrales.

Concevons à présent que, dans le second membre de l'équation (10), la fonction  $\varkappa$  renferme à la fois  $x$  et  $t$ , en sorte qu'on ait

$$(45) \quad \varkappa = \bar{f}(x, t).$$

Alors l'intégrale de l'équation (10) sera fournie par la formule (33) ou (92) du paragraphe II, c'est-à-dire par l'équation

$$(46) \quad f(\xi) = f(x) - \int_{\tau}^t \square' f(x) dt' + \int_{\tau}^t \int_{\tau}^{\tau'} \square' \square' f(x) dt' dt'' - \int_{\tau}^t \int_{\tau}^{\tau'} \int_{\tau}^{\tau''} \square' \square' \square' f(x) dt' dt'' dt''' + \dots$$

dans laquelle on aura : 1°

$$(47) \quad \square' f(x) = \bar{f}(x, t') f'(x);$$

$$\begin{aligned}
2^{\circ} & \left\{ \begin{aligned} \square'' f(x) &= \bar{f}(x, t'') f'(x) \\ \text{et, par suite,} \\ \square' \square' f(x) &= \bar{f}(x, t') \bar{f}(x, t'') f''(x) + \bar{f}(x, t') \frac{\partial \bar{f}(x, t'')}{\partial x} f'(x); \end{aligned} \right. \\
(48) & \\
3^{\circ} & \left\{ \begin{aligned} \square''' f(x) &= \bar{f}(x, t''') f'(x) \\ \text{et, par suite,} \\ \square'' \square' f(x) &= \bar{f}(x, t'') \bar{f}(x, t''') f''(x) + \bar{f}(x, t'') \frac{\partial \bar{f}(x, t''')}{\partial x} f'(x), \\ \square' \square' \square' f(x) &= \bar{f}(x, t') \bar{f}(x, t'') \bar{f}(x, t''') f'''(x) \\ &+ \bar{f}(x, t') \left[ 2 \bar{f}(x, t'') \frac{\partial \bar{f}(x, t''')}{\partial x} + \frac{\partial \bar{f}(x, t'')}{\partial x} \bar{f}(x, t''') \right] f''(x) \\ &+ \bar{f}(x, t') \left[ \bar{f}(x, t'') \frac{\partial^2 \bar{f}(x, t''')}{\partial x^2} + \frac{\partial \bar{f}(x, t'')}{\partial x} \frac{\partial \bar{f}(x, t''')}{\partial x} \right] f'(x), \\ &\dots \dots \dots \end{aligned} \right. \\
(49) &
\end{aligned}$$

D'autre part, comme, dans les intégrales définies que renferme le second membre de la formule (46), les variables

$$t', t'', \dots$$

devront rester comprises, la première entre les limites  $\tau$  et  $t$ , la seconde entre les limites  $\tau$  et  $t'$ , la troisième entre les limites  $\tau$  et  $t''$ , ..., il est clair que ces variables resteront toutes comprises entre les limites  $\tau$  et  $t$ ; d'où il suit que chacune d'elles pourra être représentée par une expression de la forme

$$t + \theta(\tau - t),$$

$\theta$  désignant un nombre renfermé entre les limites 0, 1. Cela posé, si, la valeur de  $\bar{x}$  étant toujours celle que détermine la formule (5), on représente par

$$(50) \quad \Lambda \bar{f}[x + \bar{x}, t + \theta(\tau - t)]$$

la plus grande valeur que puisse acquérir le module de la fonction imaginaire  $\bar{f}[x + \bar{x}, t + \theta(\tau - t)]$ , lorsque dans  $\bar{x}$  on fait varier l'angle  $p$ , sans changer la valeur de  $r$ , ni celle de  $\theta$ ; si d'ailleurs on nomme  $\Theta$  celle des valeurs de  $\theta$  pour laquelle le module (50) devient





le plus grand possible, et  $n$  un nombre entier quelconque, on tirera successivement de la formule (8)

$$(51) \begin{cases} \text{mod } \frac{d^n \bar{f}(x, t')}{dx^n} < (-1)^n \frac{d^n (r^{-1})}{dr^n} r \Lambda \bar{f}[x + \bar{x}, t + \theta(\tau - t)], \\ \text{mod } \frac{d^n \bar{f}(x, t'')}{dx^n} < (-1)^n \frac{d^n (r^{-1})}{dr^n} r \Lambda \bar{f}[x + \bar{x}, t + \theta(\tau - t)], \\ \text{mod } \frac{d^n \bar{f}(x, t''')}{dx^n} < (-1)^n \frac{d^n (r^{-1})}{dr^n} r \Lambda \bar{f}[x + \bar{x}, t + \theta(\tau - t)], \\ \dots \dots \dots \end{cases}$$

puis de ces dernières formules combinées avec les équations (47), (48), (49), ..., on conclura

$$(52) \begin{cases} \text{mod } \square' f(x) < \mathfrak{A}_1 r \Lambda \bar{f}[x + \bar{x}, t + \theta(\tau - t)] r \Lambda f(x + \bar{x}), \\ \text{mod } \square' \square' f(x) < \mathfrak{A}_2 r \Lambda \bar{f}[x + \bar{x}, t + \theta(\tau - t)] r \Lambda f(x + \bar{x}), \\ \text{mod } \square' \square' \square' f(x) < \mathfrak{A}_3 r \Lambda \bar{f}[x + \bar{x}, t + \theta(\tau - t)] r \Lambda f(x + \bar{x}), \\ \dots \dots \dots \end{cases}$$

$\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \mathfrak{A}_3, \dots$  étant des fonctions de  $r$  qui coïncideront avec celles que fournissent les équations (17). Il ne pouvait d'ailleurs en être autrement; car lorsqu'on réduit la fonction  $\bar{f}(x, t)$  à  $\bar{f}(x)$ , les formules (52) doivent coïncider avec les formules (16); et cela arrive effectivement, mais sous la condition que les valeurs de  $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \mathfrak{A}_3, \dots$  restent les mêmes dans ces deux systèmes de formules. Donc, dans les formules (52), comme dans les formules (16), la valeur générale de  $\mathfrak{A}_n$  sera celle que fournit la formule (21), et les formules (52) donneront, pour une valeur quelconque de  $n$ ,

$$(53) \text{mod } \square' \square' \square' \dots \square^{(n)} f(x) < 1.3.5 \dots (2n-1) r^{-n} \Lambda \bar{f}[x + \bar{x}, t + \theta(\tau - t)] r^n \Lambda f(x + \bar{x})$$

ou, ce qui revient au même,

$$(54) \text{mod } \square' \square' \square' \dots \square^{(n)} f(x) > 1.3.5 \dots (2n-1) \Lambda \frac{\bar{f}[x + \bar{x}, t + \theta(\tau - t)]}{x} r^n \Lambda f(x + \bar{x}).$$

Donc en égard aux formules (93) du paragraphe II, le terme général

de la série comprise dans le second membre de la formule (46) offrira une valeur numérique inférieure à celle du produit

$$(55) \frac{1.3.5 \dots (2n-1)}{1.2.3 \dots n} \left\{ (\tau - t) \Lambda \frac{\bar{f}[x + \bar{x}, t + \theta(\tau - t)]}{x} \right\}^n \Lambda f(x + \bar{x}),$$

et à plus forte raison à celle du produit

$$(56) \left\{ 2(\tau - t) \Lambda \frac{\bar{f}[x + \bar{x}, t + \theta(\tau - t)]}{x} \right\}^n \Lambda f(x + \bar{x}).$$

Donc enfin la série en question sera convergente, si l'on a

$$(57) \text{mod } \left\{ 2(\tau - t) \Lambda \frac{\bar{f}[x + \bar{x}, t + \theta(\tau - t)]}{x} \right\} < 1,$$

et alors le reste de la série réduite à ses  $n$  premiers termes offrira une valeur numérique inférieure au produit

$$(58) \frac{\left\{ \text{mod } \left[ 2(\tau - t) \Lambda \frac{\bar{f}[x + \bar{x}, t + \theta(\tau - t)]}{x} \right] \right\}^n}{1 - \text{mod } \left\{ 2(\tau - t) \Lambda \frac{\bar{f}[x + \bar{x}, t + \theta(\tau - t)]}{x} \right\}} \Lambda f(x + \bar{x}).$$

Il est important d'observer que le module  $r$  de  $\bar{x}$  doit être tel, que chacune des fonctions

$$(59) \bar{f}[\bar{x} + x, t + \theta(\tau - t)], f(x + \bar{x})$$

demeure finie et continue, quel que soit l'angle  $p$ , pour la valeur attribuée à ce module et pour une valeur plus petite. Il sera d'ailleurs avantageux de choisir ce même module, de telle sorte que la limite assignée par la formule (57) à la valeur numérique de  $\tau - t$  soit la plus grande possible.

Si l'on pose en particulier  $f(x) = x$ , l'équation (46) donnera

$$(60) \xi = x - \int_{\tau}^t \square' x dt' + \int_{\tau}^t \square'' \square' x dt' dt'' - \int_{\tau}^t \int_{\tau}^t \int_{\tau}^t \square' \square'' \square''' x dt' dt'' dt''' + \dots,$$



et le reste de la série comprise dans le second membre de la formule (60) sera inférieur, abstraction faite du signe, à

$$(61) \quad \frac{\left\{ \text{mod} \left[ \frac{\int [x + \bar{x}, t + \theta(\tau - t)]}{\bar{x}} \right] \right\}^n}{1 - \text{mod} \left\{ \frac{\int [x + \bar{x}, t + \theta(\tau - t)]}{\bar{x}} \right\}} \Lambda(x + \bar{x}).$$

On peut donc énoncer la proposition suivante :

DEUXIÈME THÉORÈME. — Supposons que, la variable  $t$  et la fonction  $x$  de cette valeur étant liées entre elles par l'équation différentielle

$$(62) \quad dx = \bar{f}(x, t) dt,$$

on nomme  $\xi$  une nouvelle valeur de la fonction  $x$ , correspondant à une nouvelle valeur  $\tau$  de la variable  $t$ ;  $\xi$  sera développable par la formule (60) en une série convergente, si la formule (57) est vérifiée, c'est-à-dire si la valeur numérique de la différence  $\tau - t$  est inférieure à celle que détermine l'équation

$$(63) \quad (\tau - t) \Lambda \frac{\int [x + \bar{x}, t + \theta(\tau - t)]}{\bar{x}} = \frac{1}{2},$$

la valeur du module  $r$  de  $\bar{x}$  étant assujettie à la seule condition que la fonction

$$\bar{f}[x + \bar{x}, t + \theta(\tau - t)]$$

demeure finie et continue, quel que soit l'angle  $p$ , pour cette valeur de  $r$  et pour une valeur plus petite. Alors le reste de la série réduite à ses  $n$  premiers termes sera inférieur, abstraction faite du signe, au produit (61). Alors aussi une fonction quelconque de  $\xi$  désignée par

$$f(\xi),$$

sera elle-même développable par la formule (46) en une série convergente, et le reste de cette série sera inférieur, abstraction faite du signe, au produit (58), si le module  $r$  est assujetti à la double condition que les deux fonctions

$$f(x + \bar{x}), \quad \bar{f}[x + \bar{x}, t + \theta(\tau - t)]$$

demeurent finies et continues, quel que soit l'angle  $p$ , pour la valeur attribuée à ce module et pour une valeur plus petite.

Pour montrer une application des formules qu'on vient d'établir, concevons que l'équation (62) se réduise à

$$(64) \quad dx = (x + t)^i dt,$$

$i$  désignant une quantité positive quelconque. On aura, dans ce cas,

$$\bar{f}(x, t) = (x + t)^i.$$

Si l'on suppose  $x + t$  positif, afin que  $\bar{f}(x, t)$  soit réelle, et

$$\tau < t,$$

la fonction

$$(65) \quad \bar{f}[x + \bar{x}, t + \theta(\tau - t)] = [x + \bar{x} + t + \theta(\tau - t)]^i$$

ne restera continue pour  $\theta = 0$ , qu'autant que l'on aura

$$(66) \quad r < x + t.$$

Alors on trouvera

$$(67) \quad \Lambda [x + \bar{x} + t + \theta(\tau - t)]^i = [x + r + t + \theta(\tau - t)]^i,$$

et, en nommant  $\theta$  la valeur de  $\theta$  pour laquelle l'expression (67) devient la plus grande possible, on aura  $\theta = 1$ ,

$$(68) \quad \Lambda \frac{[x + \bar{x} + t + \theta(\tau - t)]^i}{\bar{x}} = \frac{(x + \tau + r)^i}{r}.$$

La plus petite valeur que puisse acquérir cette dernière quantité, eu égard à la condition (66), sera celle qui correspond à  $r = x + t$ , savoir

$$(69) \quad \frac{(2x + t + \tau)^i}{x + t},$$

ou celle qui correspond à  $r = \frac{x + \tau}{i - 1}$ , savoir

$$(70) \quad \frac{i^i}{(i - 1)^{i-1}} (x + \tau)^{i-1},$$



suivant que  $x + t$  sera inférieur ou supérieur à  $\frac{x+\tau}{i-1}$ , c'est-à-dire, en d'autres termes, suivant que le nombre  $i$  sera inférieur ou supérieur à l'expression

$$(71) \quad 1 + \frac{x+\tau}{x+t} = 2 + \frac{\tau-t}{x+t}$$

Si, pour fixer les idées, on suppose le nombre  $i$  inférieur à 2, il sera inférieur, à plus forte raison, à l'expression (71); et, en remplaçant dans la formule (63) le coefficient de  $\tau - t$  par le produit (69), on réduira cette formule à

$$(72) \quad (\tau - t)(2x + t + \tau)^i = \frac{1}{2}(x + t).$$

L'équation (72) est évidemment vérifiée par une valeur positive de  $\tau$  comprise entre les limites  $\tau = t$ ,  $\tau = \infty$ , qui, substituées dans le premier membre, le rendent successivement nul et infini. Il y a plus: comme on a généralement

$$\frac{(2x + t + \tau)^{i+1} - (2x + 2t)^{i+1}}{i+1} = \int_t^\tau (2x + t + \tau)^i d\tau < (\tau - t)(2x + t + \tau)^i,$$

il est clair que la valeur de  $\tau$  propre à vérifier la formule (72) sera inférieure à celle qui vérifie la condition

$$\frac{(2x + t + \tau)^{i+1} - (2x + 2t)^{i+1}}{i+1} = \frac{1}{2}(2x + t),$$

c'est-à-dire à la limite

$$\tau = 2(x + t) \left[ 1 + \frac{i+1}{4} 2^{-i}(x + t)^{-i} \right]^{\frac{1}{i+1}} - (x + t);$$

donc elle sera comprise entre  $t$  et cette dernière limite, ce qui permettra de la calculer facilement pour chaque système de valeurs attribuées aux variables  $x$  et  $t$ . Or, pour toute valeur de  $\tau$  inférieure à celle qui vérifie l'équation (72), mais supérieure à  $t$ , la série comprise dans le second membre de la formule (60) deviendra convergente et offrira un reste inférieur, abstraction faite du signe, à l'expression (61), ou,

ce qui revient au même, à

$$(73) \quad \frac{\left[ \frac{2(\tau-t)(2x+t+\tau)^i}{x+t} \right]^n}{1 - \frac{2(\tau-t)(2x+t+\tau)^i}{x+t}} (2x+t).$$

Donc alors la formule (60) fournira l'intégrale générale de l'équation (64), et l'on pourra dire combien de termes on doit conserver dans le second membre de cette formule, pour obtenir la valeur de  $\xi$  avec un degré donné d'approximation. Ces conclusions subsistent, quel que soit le nombre désigné par  $i$ . Toutefois, dans le cas où ce nombre devient considérable, il est avantageux de remplacer dans la formule (63) le coefficient de  $\tau - t$ , non par le produit (69), mais par le produit (70). En opérant ainsi, à la place de l'équation (72) on obtient la suivante

$$(74) \quad (\tau - t)(x + \tau)^{i-1} = \frac{1}{2} \frac{(i-1)^{i-1}}{i^i},$$

que vérifie une valeur de  $\tau$  inférieure à celle qui remplit la condition

$$\frac{(x + \tau)^i - (x + t)^i}{i} = \frac{1}{2} \frac{(i-1)^{i-1}}{i^i},$$

par conséquent une valeur de  $\tau$  inférieure à la limite

$$\tau = (x + t) \left[ 1 + \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{1}{i} \right)^{i-1} (x + t)^{-i} \right]^{\frac{1}{i}} - x.$$

La valeur de  $\tau$  en question surpassera notablement, si  $i$  devient considérable, celle qui vérifierait l'équation (72); et une valeur plus petite, mais supérieure à  $t$ , rendra convergente la série que renferme la formule (60). Ajoutons que le reste de la même série sera inférieur, abstraction faite du signe, au produit

$$(75) \quad \frac{\left[ \frac{2 \frac{i^i}{(i-1)^{i-1}} (\tau-t)(x+\tau)^{i-1}}{i} \right]^n}{1 - 2 \frac{i^i}{(i-1)^{i-1}} (\tau-t)(x+\tau)^{i-1}} \left( x + \frac{x+\tau}{i-1} \right).$$



L'application des principes ci-dessus exposés peut être facilement étendue à un système quelconque d'équations différentielles entre une variable indépendante  $t$  et des fonctions  $x, y, z, \dots$  de ces mêmes variables. Effectivement, soit

$$f(x, y, z, \dots)$$

une fonction quelconque des variables réelles ou imaginaires

$$\text{Soient d'ailleurs} \quad \begin{array}{l} x, y, z, \dots \\ \bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, \dots \end{array}$$

des variables imaginaires dont les modules soient respectivement

$$r, r', r'', \dots$$

en sorte qu'on ait

$$(76) \quad \bar{x} = r e^{p' \sqrt{-1}}, \quad \bar{y} = r' e^{p'' \sqrt{-1}}, \quad \bar{z} = r'' e^{p''' \sqrt{-1}}, \dots$$

$p, p', p'', \dots$  étant des arcs réels; et supposons les modules  $r, r', r'', \dots$  choisis de manière que la fonction

$$f(x + \bar{x}, y + \bar{y}, z + \bar{z}, \dots)$$

reste finie et continue, quels que soient les arcs  $p, p', p'', \dots$ , pour les valeurs attribuées à ces modules ou pour des valeurs plus petites. On tirera successivement de la formule (3)

$$\begin{aligned} f(x, y, z, \dots) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x + \bar{x}, y, z, \dots) dp, \\ f(x + \bar{x}, y, z, \dots) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x + \bar{x}, y + \bar{y}, z, \dots) dp, \\ f(x + \bar{x}, y + \bar{y}, z, \dots) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x + \bar{x}, y + \bar{y}, z + \bar{z}, \dots) dp, \\ &\dots \dots \dots \end{aligned}$$

par conséquent

$$(77) \quad f(x, y, z, \dots) = \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \dots f(x + \bar{x}, y + \bar{y}, z + \bar{z}, \dots) \frac{dp}{2\pi} \frac{dp'}{2\pi} \frac{dp''}{2\pi} \dots$$

Pareillement on tirera de la formule (4), en désignant par  $h, k, l, \dots$

des nombres entiers quelconques,

$$(78) \quad \frac{\partial^{h+k+l+\dots} f(x, y, z, \dots)}{\partial x^h \partial y^k \partial z^l \dots} \\ = \frac{1 \cdot 2 \dots h}{r^h} \frac{1 \cdot 2 \dots k}{r'^k} \frac{1 \cdot 2 \dots l}{r''^l} \dots \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \dots e^{-i(hp+kp'+lp''+\dots)\sqrt{-1}} \\ \times f(x + \bar{x}, y + \bar{y}, z + \bar{z}, \dots) \frac{dp}{2\pi} \frac{dp'}{2\pi} \frac{dp''}{2\pi} \dots;$$

puis en indiquant, suivant l'algorithme du calcul des limites, à l'aide de la caractéristique  $\Lambda$  et par la notation

$$(79) \quad \Lambda f(x + \bar{x}, y + \bar{y}, z + \bar{z}, \dots),$$

la plus grande valeur que puisse acquérir le module de la fonction imaginaire

$$f(x + \bar{x}, y + \bar{y}, z + \bar{z}, \dots),$$

lorsque dans  $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, \dots$  on fait varier les angles  $p, p', p'', \dots$  sans changer les modules  $r, r', r'', \dots$ , on conclura de la formule (78)

$$(80) \quad \text{mod} \frac{\partial^{h+k+l+\dots} f(x, y, z, \dots)}{\partial x^h \partial y^k \partial z^l \dots} \\ < \frac{1 \cdot 2 \dots h}{r^h} \frac{1 \cdot 2 \dots k}{r'^k} \frac{1 \cdot 2 \dots l}{r''^l} \dots \Lambda f(x + \bar{x}, y + \bar{y}, z + \bar{z}, \dots),$$

ou, ce qui revient au même,

$$(81) \quad \text{mod} \frac{\partial^{h+k+l+\dots} f(x, y, z, \dots)}{\partial x^h \partial y^k \partial z^l \dots} < (-1)^{h+k+l+\dots} r r' r'' \dots \\ \times \frac{\partial^{h+k+l+\dots} (r r' r'' \dots)^{-1}}{\partial r^h \partial r'^k \partial r''^l \dots} \dots \Lambda f(x + \bar{x}, y + \bar{y}, z + \bar{z}, \dots).$$

Cette dernière formule subsiste, lors même que les nombres entiers  $h, k, l, \dots$  ou quelques-uns d'entre eux se réduisent à zéro. Il est d'ailleurs une remarque importante à faire. C'est que, pour obtenir au signe près le second membre de la formule (81), il suffit de prendre

$$(82) \quad f(x, y, z, \dots) = \frac{r r' r'' \dots}{x y z \dots} R,$$





puis d'effectuer les différentiations indiquées dans l'expression

$$\frac{\partial^{h+k+l+\dots} f(x, y, z, \dots)}{\partial x^h \partial y^k \partial z^l \dots}$$

et relatives aux variables  $x, y, z, \dots$  comme si R désignait une constante ou une quantité indépendante de ces variables, sauf à poser après les différentiations effectuées

(83)  $R = \Lambda f(x + \bar{x}, y + \bar{y}, z + \bar{z}, \dots),$

et hors de la fonction R,

(84)  $x = r, \quad y = r', \quad z = r'', \quad \dots$

Considérons maintenant un système d'équations différentielles de la forme

(85)  $dx = \bar{x} dt, \quad dy = \bar{y} dt, \quad dz = \bar{z} dt, \quad \dots$

Si,

(86)  $u = f(x, y, z, \dots)$

étant une fonction des seules variables  $x, y, z, \dots$ , on peut en dire autant des fonctions

$\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, \dots$

en sorte qu'on ait

(87)  $\bar{x} = \Phi(x, y, z, \dots), \quad \bar{y} = X(x, y, z, \dots), \quad \bar{z} = \Psi(x, y, z, \dots), \dots$

une intégrale générale des équations (85) sera fournie par la formule (39) du paragraphe II, c'est-à-dire par l'équation

(88)  $f(\bar{z}, \bar{y}, \bar{x}, \dots) = f(x, y, z, \dots) + (\tau - t) \square f(x, y, z, \dots) + \frac{(\tau - t)^2}{1.2} \square^2 f(x, y, z, \dots) + \dots$

dans laquelle on aura

(89)  $\square f(x, y, z, \dots) = \Phi(x, y, z, \dots) \frac{\partial f(x, y, z, \dots)}{\partial x} + X(x, y, z, \dots) \frac{\partial f(x, y, z, \dots)}{\partial y} + \Psi(x, y, z, \dots) \frac{\partial f(x, y, z, \dots)}{\partial z} + \dots$

Cela posé, il est clair que, dans le polynome représenté par  $\square^n f(x, y, z, \dots)$ , un terme quelconque sera le produit de plusieurs facteurs égaux ou inégaux dont chacun coïncidera soit avec l'une des fonctions

(90)  $f(x, y, z, \dots), \quad \Phi(x, y, z, \dots), \quad X(x, y, z, \dots), \quad \Psi(x, y, z, \dots), \quad \dots,$

soit avec l'une de leurs dérivées des divers ordres prises par rapport à une ou à plusieurs des variables  $x, y, z, \dots$ ; et, pour obtenir une limite supérieure au module de  $\square^n f(x, y, z, \dots)$ , il suffira évidemment de remplacer chacun des facteurs en question par une limite supérieure à son module. On y parviendra, à l'aide de la formule (81), et en substituant successivement dans cette formule, au lieu de  $f(x, y, z, \dots)$ , chacune des fonctions (89). En opérant ainsi, l'on obtiendra, pour limite supérieure au module du polynome représenté par

$\square^n f(x, y, z, \dots),$

un second polynome que nous désignerons par

K,

et qui, en vertu de la remarque précédemment faite, se déduira facilement du premier. En effet, pour avoir, au signe près, la valeur K, il suffira de chercher ce que devient

$\square^n f(x, y, z, \dots)$

quand on y pose, avant les différentiations relatives à  $x, y, z, \dots$ ,

(91)  $f(x, y, z, \dots) = \frac{rr'r' \dots}{xyz \dots} \beta,$

$\Phi(x, y, z, \dots) = \frac{rr'r' \dots}{xyz \dots} \alpha,$

(92)  $X(x, y, z, \dots) = \frac{rr'r' \dots}{xyz \dots} \eta,$

$\Psi(x, y, z, \dots) = \frac{rr'r' \dots}{xyz \dots} \theta,$

$\dots \dots \dots \dots \dots$



puis, après les différentiations,

$$x = r, \quad y = r', \quad z = r'', \quad \dots$$

et

$$(93) \quad \mathfrak{A} = \Lambda f(x + \bar{x}, y + \bar{y}, z + \bar{z}, \dots),$$

$$\mathfrak{A}_x = \Lambda \Phi(x + \bar{x}, y + \bar{y}, z + \bar{z}, \dots),$$

$$(94) \quad \mathfrak{A}_y = \Lambda \Psi(x + \bar{x}, y + \bar{y}, z + \bar{z}, \dots),$$

$$\mathfrak{A}_z = \Lambda \Psi'(x + \bar{x}, y + \bar{y}, z + \bar{z}, \dots),$$

D'autre part, comme, en ayant égard aux formules (91) et (92), on trouvera le polynome  $\square^n f(x, y, z, \dots)$  composé de termes tous positifs ou tous négatifs, suivant que  $n$  sera pair ou impair, il est clair qu'il suffira de multiplier par  $(-1)^n$  la valeur trouvée de  $\square^n f(x, y, z, \dots)$ , pour en déduire celle de  $K$ . Si, pour abrégé, on pose

$$(95) \quad s = \frac{rr'r'' \dots}{xyz \dots},$$

on tirera de la formule (89), jointe aux équations (92),

$$(96) \quad \square f(x, y, z, \dots) = s \left[ \mathfrak{A}_x \frac{\partial f(x, y, z, \dots)}{\partial x} + \mathfrak{A}_y \frac{\partial f(x, y, z, \dots)}{\partial y} + \mathfrak{A}_z \frac{\partial f(x, y, z, \dots)}{\partial z} + \dots \right].$$

Alors aussi la formule (91) donnera

$$f(x, y, z, \dots) = \mathfrak{A}s,$$

et l'on en conclura

$$\square^n f(x, y, z, \dots) = \mathfrak{A} \square^n s = \Lambda f(x + \bar{x}, y + \bar{y}, z + \bar{z}, \dots) \square^n s.$$

Par suite on aura

$$(97) \quad K = s_n \Lambda f(x + \bar{x}, y + \bar{y}, z + \bar{z}, \dots),$$

pourvu que l'on désigne par  $s_n$  ce que devient l'expression

$$(98) \quad (-1)^n \square^n s$$

quand on a égard aux formules (96), (84), (93) et (94). Il reste à déterminer  $s_n$ . Or, si l'on représente par  $u, v, w, \dots$  des fonctions quel-

conques de  $x, y, z, \dots$ , on tirera non seulement de la formule (96), mais encore de la formule (89), ou même des formules (36), (70), (85) du paragraphe II,

$$(99) \quad \square(u + v + w + \dots) = \square u + \square v + \square w + \dots,$$

$$(100) \quad \square(uv) = u \square v + v \square u,$$

et de la formule (96) en particulier

$$(101) \quad \square s^n = -ns^{n-1} \left( \frac{\mathfrak{A}_x}{x} + \frac{\mathfrak{A}_y}{y} + \frac{\mathfrak{A}_z}{z} + \dots \right),$$

$$(102) \quad \square \left( \frac{\mathfrak{A}_x^n}{x^n} + \frac{\mathfrak{A}_y^n}{y^n} + \frac{\mathfrak{A}_z^n}{z^n} + \dots \right) = -ns \left( \frac{\mathfrak{A}_x^{n+1}}{x^{n+1}} + \frac{\mathfrak{A}_y^{n+1}}{y^{n+1}} + \frac{\mathfrak{A}_z^{n+1}}{z^{n+1}} + \dots \right).$$

On trouvera en conséquence

$$(103) \quad \begin{cases} -\square s = s^2 \left( \frac{\mathfrak{A}_x}{x} + \frac{\mathfrak{A}_y}{y} + \frac{\mathfrak{A}_z}{z} + \dots \right), \\ \square^2 s = 2s^2 \left( \frac{\mathfrak{A}_x}{x} + \frac{\mathfrak{A}_y}{y} + \frac{\mathfrak{A}_z}{z} + \dots \right)^2 + s^2 \left( \frac{\mathfrak{A}_x^2}{x^2} + \frac{\mathfrak{A}_y^2}{y^2} + \frac{\mathfrak{A}_z^2}{z^2} + \dots \right), \\ -\square^3 s = 6s^3 \left( \frac{\mathfrak{A}_x}{x} + \frac{\mathfrak{A}_y}{y} + \frac{\mathfrak{A}_z}{z} + \dots \right)^3 + 7s^2 \left( \frac{\mathfrak{A}_x}{x} + \frac{\mathfrak{A}_y}{y} + \frac{\mathfrak{A}_z}{z} + \dots \right) \\ \quad \times \left( \frac{\mathfrak{A}_x^2}{x^2} + \frac{\mathfrak{A}_y^2}{y^2} + \frac{\mathfrak{A}_z^2}{z^2} + \dots \right) + 2s^2 \left( \frac{\mathfrak{A}_x^3}{x^3} + \frac{\mathfrak{A}_y^3}{y^3} + \frac{\mathfrak{A}_z^3}{z^3} + \dots \right), \\ \dots \dots \dots \end{cases}$$

puis on en conclura, en posant, hors des fonctions  $\mathfrak{A}_x, \mathfrak{A}_y, \mathfrak{A}_z, \dots$ ,

$$x = r, \quad y = r', \quad z = r'', \quad \dots,$$

et par suite  $s = 1$ ,

$$(104) \quad \begin{cases} s_1 = \frac{\mathfrak{A}_x}{r} + \frac{\mathfrak{A}_y}{r'} + \frac{\mathfrak{A}_z}{r''} + \dots, \\ s_2 = 2 \left( \frac{\mathfrak{A}_x}{r} + \frac{\mathfrak{A}_y}{r'} + \frac{\mathfrak{A}_z}{r''} + \dots \right)^2 + \left( \frac{\mathfrak{A}_x^2}{r^2} + \frac{\mathfrak{A}_y^2}{r'^2} + \frac{\mathfrak{A}_z^2}{r''^2} + \dots \right), \\ s_3 = 6 \left( \frac{\mathfrak{A}_x}{r} + \frac{\mathfrak{A}_y}{r'} + \frac{\mathfrak{A}_z}{r''} + \dots \right)^3 + 7 \left( \frac{\mathfrak{A}_x}{r} + \frac{\mathfrak{A}_y}{r'} + \frac{\mathfrak{A}_z}{r''} + \dots \right) \\ \quad \times \left( \frac{\mathfrak{A}_x^2}{r^2} + \frac{\mathfrak{A}_y^2}{r'^2} + \frac{\mathfrak{A}_z^2}{r''^2} + \dots \right) + 2 \left( \frac{\mathfrak{A}_x^3}{r^3} + \frac{\mathfrak{A}_y^3}{r'^3} + \frac{\mathfrak{A}_z^3}{r''^3} + \dots \right), \\ \dots \dots \dots \end{cases}$$



les valeurs de  $\mathcal{A}$ ,  $\mathcal{B}$ ,  $\mathcal{C}$ , ... étant déterminées par la formule (94). D'autre part, comme on aura évidemment

$$(105) \quad \frac{\mathcal{A}^n}{r^n} + \frac{\mathcal{B}^n}{r^n} + \frac{\mathcal{C}^n}{r^n} + \dots < \left( \frac{\mathcal{A}}{r} + \frac{\mathcal{B}}{r} + \frac{\mathcal{C}}{r} + \dots \right)^n,$$

les formules (104) donneront

$$(106) \quad \begin{cases} s_1 = \frac{\mathcal{A}}{r} + \frac{\mathcal{B}}{r} + \frac{\mathcal{C}}{r} + \dots, \\ s_2 < 3 \left( \frac{\mathcal{A}}{r} + \frac{\mathcal{B}}{r} + \frac{\mathcal{C}}{r} + \dots \right)^2, \\ s_3 < 15 \left( \frac{\mathcal{A}}{r} + \frac{\mathcal{B}}{r} + \frac{\mathcal{C}}{r} + \dots \right)^3, \\ \dots \end{cases}$$

et généralement

$$(107) \quad s_n < N \left( \frac{\mathcal{A}}{r} + \frac{\mathcal{B}}{r} + \frac{\mathcal{C}}{r} + \dots \right)^n,$$

N désignant le  $n^{\text{ième}}$  terme de la suite

$$1, \quad 2+1=3, \quad 6+7+2=15, \quad \dots,$$

c'est-à-dire la somme des coefficients numériques compris dans le second membre de la  $n^{\text{ième}}$  des équations (103). Or, ces coefficients conservant les mêmes valeurs, quel que soit le nombre des variables

$$x, \quad y, \quad z, \quad \dots,$$

il suffira, pour obtenir le nombre N, de considérer le cas où les formules (95), (96) se réduisent à

$$(108) \quad s = \frac{r}{x}, \quad \square f(x) = \mathcal{A} \frac{df(x)}{dx}.$$

Alors la  $n^{\text{ième}}$  des équations (103) donnera

$$(109) \quad (-1)^n \square^n s = N s^{n+1} \left( \frac{\mathcal{A}}{x} \right)^n,$$

et, comme on tirera directement des formules (108)

$$(110) \quad (-1)^n \square^n s = 1.3.5 \dots (2n-1) s^{n+1} \left( \frac{\mathcal{A}}{x} \right)^n,$$

on conclura des formules (109), (110) comparées entre elles

$$(111) \quad N = 1.3.5 \dots (2n-1).$$

Cela posé, la formule (107) deviendra

$$(112) \quad s_n < 1.3.5 \dots (2n-1) \left( \frac{\mathcal{A}}{r} + \frac{\mathcal{B}}{r} + \frac{\mathcal{C}}{r} + \dots \right)^n,$$

et l'on tirera de la formule (97)

$$(113) \quad K < 1.3.5 \dots (2n-1) \left( \frac{\mathcal{A}}{r} + \frac{\mathcal{B}}{r} + \frac{\mathcal{C}}{r} + \dots \right)^n \\ \times \mathcal{A} f(x + \bar{x}, y + \bar{y}, z + \bar{z}, \dots),$$

les valeurs de  $\mathcal{A}$ ,  $\mathcal{B}$ ,  $\mathcal{C}$ , ... étant toujours celles que déterminent les formules (94). Ainsi K, qui représente une limite supérieure au module de  $\square^n f(x, y, z, \dots)$ , ne pourra surpasser le second membre de la formule (113), qui représentera encore une semblable limite. Il en résulte que le terme général de la série qui constitue le second membre de l'équation (88), savoir

$$(114) \quad \frac{(\tau - t)^n}{1.2 \dots n} \square^n f(x, y, z, \dots),$$

offrira une valeur numérique inférieure à celle du produit

$$(115) \quad \frac{1.3.5 \dots (2n-1)}{1.2.3 \dots n} \left[ (\tau - t) \left( \frac{\mathcal{A}}{r} + \frac{\mathcal{B}}{r} + \frac{\mathcal{C}}{r} + \dots \right) \right]^n \\ \times \mathcal{A} f(x + \bar{x}, y + \bar{y}, z + \bar{z}, \dots),$$

par conséquent à celle du produit

$$(116) \quad \left[ 2(\tau - t) \left( \frac{\mathcal{A}}{r} + \frac{\mathcal{B}}{r} + \frac{\mathcal{C}}{r} + \dots \right) \right]^n \mathcal{A} f(x + \bar{x}, y + \bar{y}, z + \bar{z}, \dots).$$

Donc les différents termes de la série en question offriront des valeurs numériques inférieures à celles des termes correspondants de la progression géométrique qui aurait pour terme général le





produit (116). Or cette progression sera convergente, si l'on a

$$(117) \quad \text{mod} \left[ 2(\tau - t) \left( \frac{a^b}{r} + \frac{b^b}{r'} + \frac{c}{r''} + \dots \right) \right] < 1,$$

ou, ce qui revient au même, eu égard aux formules (94),

$$(118) \quad \text{mod}(\tau - t) < \frac{\binom{t}{2}}{\Lambda \frac{\Phi(x+\bar{x}, y+\bar{y}, \dots)}{x} + \Lambda \frac{X(x+\bar{x}, y+\bar{y}, \dots)}{y} + \Lambda \frac{\Psi(x+\bar{x}, y+\bar{y}, \dots)}{z} + \dots};$$

et alors, si l'on remplace la somme de la série par la somme de ses  $n$  premiers termes, le reste de la série, ou l'erreur commise, sera inférieur, abstraction faite du signe, au reste de la progression géométrique, c'est-à-dire à

$$(119) \quad \frac{\left\{ \text{mod} \left[ 2(\tau - t) \left( \frac{a^b}{r} + \frac{b^b}{r'} + \frac{c}{r''} + \dots \right) \right] \right\}^n}{1 - \text{mod} \left[ 2(\tau - t) \left( \frac{a^b}{r} + \frac{b^b}{r'} + \frac{c}{r''} + \dots \right) \right]} \Lambda f(x+\bar{x}, y+\bar{y}, z+\bar{z}, \dots).$$

Si l'on suppose en particulier

$$f(x, y, z, \dots) = x,$$

la formule (88), réduite à

$$(120) \quad \xi = x + (\tau - t) \square x + \frac{(\tau - t)^2}{1.2} \square^2 x + \frac{(\tau - t)^3}{1.2.3} \square^3 x + \dots,$$

deviendra semblable à la formule (30), et le reste de la série comprise dans le second membre offrira un module inférieur à

$$(121) \quad \frac{\left\{ \text{mod} \left[ 2(\tau - t) \left( \frac{a^b}{r} + \frac{b^b}{r'} + \frac{c}{r''} + \dots \right) \right] \right\}^n}{1 - \text{mod} \left[ 2(\tau - t) \left( \frac{a^b}{r} + \frac{b^b}{r'} + \frac{c}{r''} + \dots \right) \right]} \Lambda(x + \bar{x}).$$

On peut donc énoncer la proposition suivante :

TROISIÈME THÉORÈME. — Supposons que, la variable  $t$  et des fonctions

$$x, y, z, \dots$$

de cette variable étant liées entre elles par les équations différentielles

$$(122) \quad \begin{cases} dx = \Phi(x, y, z, \dots) dt, \\ dy = X(x, y, z, \dots) dt, \\ dz = \Psi(x, y, z, \dots) dt, \\ \dots \dots \dots \end{cases}$$

l'on nomme

$$\xi, \eta, \zeta, \dots$$

de nouvelles valeurs de

$$x, y, z, \dots$$

correspondant à une nouvelle valeur  $\tau$  de la variable indépendante  $t$ ;

$$\xi, \eta, \zeta, \dots$$

seront développables par la formule (120) et autres semblables en séries convergentes ordonnées suivant les puissances ascendantes de la différence  $\tau - t$ , si la formule (118) est vérifiée, c'est-à-dire si la valeur numérique de la différence  $\tau - t$  est inférieure à celle que détermine l'équation

$$(123) \quad \tau - t = \frac{1}{2} \frac{1}{\Lambda \frac{\Phi(x+\bar{x}, y+\bar{y}, \dots)}{x} + \Lambda \frac{X(x+\bar{x}, y+\bar{y}, \dots)}{y} + \Lambda \frac{\Psi(x+\bar{x}, y+\bar{y}, \dots)}{z} + \dots},$$

les modules  $r, r', r'', \dots$  des expressions imaginaires

$$\bar{x} = r e^{p\sqrt{-1}}, \quad \bar{y} = r' e^{p'\sqrt{-1}}, \quad \bar{z} = r'' e^{p''\sqrt{-1}}, \quad \dots$$

étant choisis de manière que les fonctions

$$(124) \quad \begin{cases} \Phi(x+\bar{x}, y+\bar{y}, z+\bar{z}, \dots), \\ X(x+\bar{x}, y+\bar{y}, z+\bar{z}, \dots), \\ \Psi(x+\bar{x}, y+\bar{y}, z+\bar{z}, \dots), \\ \dots \dots \dots \end{cases}$$

demeurent finies et continues, quels que soient les angles  $p, p', p'', \dots$  pour les valeurs attribuées à ces modules et pour des valeurs plus petites. Alors le reste de chaque série, réduite à ses  $n$  premiers termes, sera inférieur, abstraction faite du signe, au produit (121), ou à celui qu'on en déduirait en remplaçant

$$\Lambda(x + \bar{x})$$



par l'une des quantités

$$\Lambda(y + \bar{y}), \Lambda(z + \bar{z}), \dots$$

Alors aussi une fonction quelconque de  $\xi, \eta, \zeta, \dots$ , désignée par

$$f(\xi, \eta, \zeta, \dots),$$

sera elle-même développable en une série convergente ordonnée suivant les puissances ascendantes de  $\tau - t$ , et le reste de cette série sera inférieur, abstraction faite du signe, au produit (119), si pour les valeurs attribuées aux modules  $r, r', r'', \dots$ , ou pour des valeurs plus petites, la fonction

$$f(x + \bar{x}, y + \bar{y}, z + \bar{z}, \dots)$$

demeure finie et continue, aussi bien que les fonctions (124), quels que soient d'ailleurs les angles  $p, p', p'', \dots$

Si, dans les formules (85), les fonctions

$$x, \bar{y}, \bar{z}, \dots$$

renfermaient explicitement la variable  $t$ , des raisonnements pareils à ceux par lesquels nous avons établi le deuxième théorème fourniraient, au lieu du troisième théorème, celui que nous allons énoncer :

QUATRIÈME THÉORÈME. — Supposons que, la variable  $t$  et des fonctions  $x, y, z, \dots$  de cette variable étant liées entre elles par les équations différentielles

$$(125) \quad \begin{cases} dx = \Phi(x, y, z, \dots, t) dt, \\ dy = X(x, y, z, \dots, t) dt, \\ dz = \Psi(x, y, z, \dots, t) dt, \\ \dots \dots \dots \end{cases}$$

l'on nomme

$$\xi, \eta, \zeta, \dots$$

de nouvelles valeurs de

$$x, y, z, \dots$$

correspondant à une nouvelle valeur  $\tau$  de la variable  $t$ . Concevons d'ailleurs que

$$u = f(x, y, z, \dots)$$

étant une fonction quelconque de  $x, y, z$ , on pose, pour abrégér,

$$(126) \quad \left\{ \begin{aligned} \square u &= \Phi(x, y, z, \dots, t) \frac{\partial u}{\partial x} \\ &+ X(x, y, z, \dots, t) \frac{\partial u}{\partial y} + \Psi(x, y, z, \dots, t) \frac{\partial u}{\partial z} + \dots \end{aligned} \right.$$

et que l'on désigne par

$$\square' u, \square'' u, \square''' u, \dots$$

ce que devient  $\square u$  quand à la variable  $t$  on substitue d'autres variables

Soient encore  $t', t'', t''', \dots$

$$\theta, \theta', \theta'', \dots$$

des nombres inférieurs à l'unité, et supposons les modules

$$r, r', r'', \dots$$

des expressions imaginaires

$$\bar{x} = r e^{p\sqrt{-1}}, \quad \bar{y} = r' e^{p'\sqrt{-1}}, \quad \bar{z} = r'' e^{p''\sqrt{-1}}, \quad \dots$$

choisis de manière que chacune des fonctions

$$(127) \quad \left\{ \begin{aligned} &\Phi[x + \bar{x}, y + \bar{y}, z + \bar{z}, \dots, t + \theta(\tau - t)], \\ &X[x + \bar{x}, y + \bar{y}, z + \bar{z}, \dots, t + \theta'(\tau - t)], \\ &\Psi[x + \bar{x}, y + \bar{y}, z + \bar{z}, \dots, t + \theta''(\tau - t)], \\ &\dots \dots \dots \end{aligned} \right.$$

demeure finie et continue, quels que soient les angles  $p, p', p'', \dots$ , pour les valeurs attribuées à ces modules et pour des valeurs plus petites. Enfin posons

$$(128) \quad \left\{ \begin{aligned} \Lambda &= \Lambda \Phi[x + \bar{x}, y + \bar{y}, z + \bar{z}, \dots, t + \theta(\tau - t)], \\ \Lambda\theta &= \Lambda X[x + \bar{x}, y + \bar{y}, z + \bar{z}, \dots, t + \theta'(\tau - t)], \\ \Lambda\theta^2 &= \Lambda \Psi[x + \bar{x}, y + \bar{y}, z + \bar{z}, \dots, t + \theta''(\tau - t)], \\ &\dots \dots \dots \end{aligned} \right.$$



$\Lambda$  indiquant, suivant la notation du calcul des limites, le plus grand module que puisse acquérir chaque fonction, quand on fait varier les angles  $p, p', p'', \dots$ , sans changer  $r, r', r'', \dots$ , et

$$\theta, \theta', \theta'', \dots$$

représentant les valeurs qu'il faut attribuer à

$$\theta, \theta', \theta'', \dots$$

pour que chaque module devienne le plus grand possible.

$$\xi, \eta, \zeta, \dots$$

seront développables en séries convergentes par la formule

$$(129) \quad \left\{ \begin{aligned} \xi &= x - \int_{\tau}^t \square' x dt + \int_{\tau}^t \int_{\tau}^r \square' \square' x dt dr \\ &\quad - \int_{\tau}^t \int_{\tau}^r \int_{\tau}^{r'} \square' \square' \square' x dt dr' dr + \dots \end{aligned} \right.$$

et d'autres semblables, si la valeur numérique de  $\tau - t$  est inférieure à celle que détermine l'équation

$$(130) \quad (\tau - t) \left( \frac{ab}{r} + \frac{ab}{r'} + \frac{ab}{r''} + \dots \right) = \frac{1}{2}.$$

Alors le reste de chaque série réduite à ses  $n$  premiers termes sera inférieur, abstraction faite du signe, au produit (121), ou à celui qu'on en déduirait en remplaçant

$$\Lambda(x + \bar{x})$$

par l'une des quantités

$$\Lambda(y + \bar{y}), \quad \Lambda(z + \bar{z}), \quad \dots,$$

les valeurs de  $\Lambda, \eta, \xi, \dots$  étant toujours déterminées par les équations (128). Alors aussi la fonction

$$f(\xi, \eta, \zeta, \dots)$$

sera elle-même développable en série convergente par la formule

$$(131) \quad \left\{ \begin{aligned} f(\xi, \eta, \zeta, \dots) &= f(x, y, z, \dots) - \int_{\tau}^t \square' f(x, y, z, \dots) dt \\ &\quad + \int_{\tau}^t \int_{\tau}^r \square' \square' f(x, y, z, \dots) dt dr - \dots \end{aligned} \right.$$

et le reste de cette dernière sera inférieur, abstraction faite du signe, au produit (119), si pour les valeurs attribuées aux modules  $r, r', r'', \dots$ , ou pour des valeurs plus petites, la fonction

$$f(x + \bar{x}, y + \bar{y}, z + \bar{z}, \dots)$$

demeure finie et continue aussi bien que les fonctions (127), quels que soient d'ailleurs les angles  $p, p', p'', \dots$

Dans l'application des troisième et quatrième théorèmes, il est avantageux de choisir les modules  $r, r', r'', \dots$  de telle sorte que la limite assignée au module de  $\tau - t$ , et déterminée par la formule (123) ou (130), soit la plus grande possible.

Les principes à l'aide desquels nous avons établi le troisième théorème fournissent encore le moyen de fixer des limites supérieures aux valeurs numériques que peuvent acquérir les quantités représentées par  $\tau - t$  et par  $\tau - r$  dans les formules (71) et (86) du paragraphe II, sans que les séries comprises dans ces formules cessent d'être convergentes, ainsi que des limites supérieures aux restes de ces mêmes séries. On obtiendrait alors de nouveaux théorèmes entièrement semblables au troisième théorème. Ajoutons que ces nouveaux théorèmes, comme ceux que nous avons ici énoncés, peuvent être facilement étendus au cas où les variables et les fonctions comprises dans les équations différentielles données deviendraient imaginaires.

En résumé, les formules qui précèdent transforment en une théorie complètement rigoureuse l'intégration par séries d'un système quelconque d'équations différentielles.

Dans de nouveaux Mémoires je montrerai comment on peut déduire du calcul des limites diverses méthodes analogues à celle que je viens



d'exposer, et comme elle propres à fournir des règles sur la convergence des séries qui représentent les intégrales des équations différentielles, ainsi que des limites supérieures aux restes de ces mêmes séries; j'établirai d'ailleurs de nouveaux théorèmes relatifs à la détermination des quantités que je désigne à l'aide de la caractéristique  $\Lambda$ . Enfin j'appliquerai la méthode ci-dessus exposée, et le quatrième théorème en particulier, à l'intégration des équations différentielles qui expriment les mouvements simultanés des astres dont se compose notre système planétaire.

*Post-scriptum.* — Dans les *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, j'ai donné quelques nouveaux développements aux principes que renferme le précédent Mémoire, lithographié à Prague en l'année 1835. J'ai désigné, sous le nom d'*équation caractéristique*, l'équation aux dérivées partielles qui peut remplacer un système d'équations différentielles, et sous le nom d'*intégrales principales*, les intégrales générales de ce système, représentées par des intégrales particulières de l'équation caractéristique. Ainsi, par exemple, suivant ces définitions, la formule (18), dans le second paragraphe, sera l'équation caractéristique correspondant au système des équations (2), et chacune des formules (8) du même paragraphe sera une des intégrales principales de ce système, toutes comprises sous la forme que présente l'équation (13). En d'autres termes, une intégrale principale d'un système d'équations différentielles, réduites à des équations du premier ordre, sera une intégrale générale qui donnera la valeur d'une seule constante arbitraire exprimée en fonction des diverses variables.

On peut voir, dans le troisième Chapitre du second Livre de la *Mécanique céleste*, avec quelle facilité l'intégration d'une seule équation aux dérivées partielles fournit cinq intégrales générales du mouvement elliptique. On a ainsi, dans l'Astronomie, un premier exemple des avantages que présente la considération de l'équation linéaire que j'appelle *caractéristique*. La lecture du précédent Mémoire suffira, je l'espère, pour montrer tout le fruit que l'on peut retirer de cette consi-

dération. Si d'ailleurs on songe à la rigueur et à la simplicité des méthodes appliquées ci-dessus à l'intégration par séries des équations linéaires, on se trouvera naturellement amené à cette conclusion, que, dans l'exposition des principes du calcul intégral, l'intégration d'une équation différentielle, ou d'une équation aux dérivées partielles, qui renferme une seule fonction inconnue d'une ou de plusieurs variables, doit précéder l'intégration des équations simultanées qui renferment plusieurs fonctions inconnues, même d'une seule variable, et qu'en outre l'intégration des équations linéaires doit toujours précéder celle des équations non linéaires.