MÉMOIRE

SUR

LES MOUVEMENTS INFINIMENT PETITS

DONT

LES ÉQUATIONS PRÉSENTENT UNE FORME INDÉPENDANTE

DE

LA DIRECTION DES TROIS AXES COORDONNÉS, SUPPOSÉS RECTANGULAIRES,

OU

SEULEMENT DE DEUX DE CES AXES.

Considérations générales.

Comme on l'a vu dans les précédents Mémoires, les mouvements infiniment petits, d'un ou de plusieurs systèmes de molécules, peuvent être représentés par des équations linéaires aux différences partielles entre trois variables principales, savoir, les déplacements d'une molécule, mesurés parallèlement à trois axes coordonnés rectangulaires, et quatre variables indépendantes, savoir, les coordonnées et le temps. Il y a plus : dans ces équations, les coefficients des variables principales et de leurs dérivées deviennent constants, lorsque l'on considère un système unique et homogène de molécules, et que l'on s'arrête à une première approximation. Dans l'un ou l'autre cas, les coefficients dont il s'agit, et par conséquent la forme des équations linéaires, dépendront en général, non seulement de la nature du système ou des systèmes moléculaires, mais encore de la direction des axes coordonnés. Néanmoins il n'en est pas toujours ainsi. La constitution du

système ou des systèmes de molécules donnés peut être telle que les coefficients renfermés dans les équations des mouvements infiniment petits ne soient pas altérés quand on fait tourner d'une manière quelconque les trois axes coordonnés autour de l'origine ; et alors il est clair que la propagation de ces mouvements devra s'effectuer en tous sens suivant les mêmes lois. C'est ce qui arrive, par exemple, lorsque le son se propage dans un gaz ou dans un liquide. C'est ce qui arrivera encore si, l'un des systèmes de molécules donnés étant le fluide éthéré, l'autre système compose ce que dans la théorie de la lumière nous appelons un corps *isophane*. Ce n'est pas tout : la constitution du système ou des systèmes de molécules donnés peut être telle que les coefficients renfermés dans les équations des mouvements infiniment petits ne soient pas altérés quand, l'un des axes coordonnés demeurant fixe, on fait tourner les deux autres autour du premier; et alors il est clair que la propagation du mouvement devra s'effectuer en tous sens suivant les mêmes lois, non plus autour d'un point quelconque, mais seulement autour de tout axe parallèle à l'axe fixe. C'est ce qui arrivera, par exemple, si, le premier système de molécules étant le fluide éthéré, l'autre système compose ce qu'on nomme, dans la théorie de la lumière, *un cristal à un seul axe optique*. Il est donc important d'examiner ce que deviendront les équations des mouvements infiniment petits d'un ou de deux systèmes homogènes de molécules, quand elles acquerront la propriété de ne pouvoir être altérées, tandis que l'on fera tourner les trois axes coordonnés autour de l'origine, ou bien encore deux de ces axes autour du troisième supposé fixe. J'ai déjà traité cette question, en considérant un seul système de molécules : 1° pour le cas où les équations sont homogènes, dans les *Exercices de Mathématiques;* 2° pour le cas général, dans un Mémoire relatif à la *Théorie de la Lumière*, et lithographié sous la date d'août 1836. Mais d'une part ce dernier Mémoire, tiré à un petit nombre d'exemplaires, est assez rare aujourd'hui; et d'ailleurs, en réfléchissant de nouveau sur la même question, je suis parvenu à rendre la solution plus simple. J'ai donc tout lieu d'espérer que les

géomètres accueilleront encore avec intérêt ce nouveau Mémoire, qui permettra d'établir et d'exposer facilement quelques-unes des théories les plus délicates de la Physique mathématique.

Parmi les divers paragraphes dont le Mémoire se compose, le premier est consacré au développement de quelques théorèmes relatifs à la transformation des coordonnées rectangulaires, le second à la recherche des conditions nécessaires pour qu'une fonction de deux ou de trois coordonnées rectangulaires reste indépendante de la direction des axes coordonnés; et c'est la connaissance de ces conditions qui me conduit, dans les paragraphes suivants, à la solution de la question ci-dessus indiquée.

§ I. — *Sur quelques théorèmes relatifs à la transformation des coordonnées rectangulaires.*

Soient

$$x,\quad y,\quad z$$

les coordonnées rectangulaires d'un point P, relatives à trois axes rectangulaires, et

$$\mathrm{x},\quad \mathrm{y},\quad \mathrm{z}$$

ce que deviennent ces coordonnées, quand on a fait tourner d'une manière quelconque le système de ces trois axes autour de l'origine. On aura, comme on sait,

$$(1)\qquad \begin{cases} \mathrm{x} = ax + by + cz, \\ \mathrm{y} = a'x + b'y + c'z, \\ \mathrm{z} = a''x + b''y + c''z, \end{cases}$$

$a, b, c; a', b', c'; a'', b'', c''$ désignant neuf coefficients, dont six pourront se déduire des trois autres, attendu qu'on doit avoir, quels que soient x, y, z,

$$(2)\qquad \mathrm{x}^2 + \mathrm{y}^2 + \mathrm{z}^2 = x^2 + y^2 + z^2$$

et, par suite,

$$(3)\qquad \begin{cases} a^2 + a'^2 + a''^2 = 1, & b^2 + b'^2 + b''^2 = 1, & c^2 + c'^2 + c''^2 = 1, \\ bc + b'c' + b''c'' = 0, & ca + c'a' + c''a'' = 0, & ab + a'b' + a''b'' = 0. \end{cases}$$

De plus on tire des équations (1), jointes aux formules (3),

$$(4)\qquad \begin{cases} x = a\mathrm{x} + a'\mathrm{y} + a''\mathrm{z}, \\ y = b\mathrm{x} + b'\mathrm{y} + b''\mathrm{z}, \\ z = c\mathrm{x} + c'\mathrm{y} + c''\mathrm{z}; \end{cases}$$

puis de ces dernières, jointes à la formule (2),

$$(5)\qquad \begin{cases} a^2 + b^2 + c^2 = 1, & a'^2 + b'^2 + c'^2 = 1, & a''^2 + b''^2 + c''^2 = 1, \\ a'a'' + b'b'' + c'c'' = 0, & a''a + b''b + c''c = 0, & aa' + bb' + cc' = 0. \end{cases}$$

Enfin, si l'on nomme

$$x_{,},\quad y_{,},\quad z_{,}$$

et

$$\mathrm{x}_{,},\quad \mathrm{y}_{,},\quad \mathrm{z}_{,}$$

les coordonnées d'un nouveau point Q, relatives au premier et au second système d'axes coordonnés, on aura

$$(6)\qquad \begin{cases} \mathrm{x}_{,} = ax_{,} + by_{,} + cz_{,}, \\ \mathrm{y}_{,} = a'x_{,} + b'y_{,} + c'z_{,}, \\ \mathrm{z}_{,} = a''x_{,} + b''y_{,} + c''z_{,}; \end{cases}$$

et des formules (6), jointes aux équations (3), on tirera

$$(7)\qquad \mathrm{x}\mathrm{x}_{,} + \mathrm{y}\mathrm{y}_{,} + \mathrm{z}\mathrm{z}_{,} = xx_{,} + yy_{,} + zz_{,}.$$

Donc *la transformation des coordonnées n'altère point la valeur de la somme*

$$xx_{,} + yy_{,} + zz_{,}.$$

Cette somme représente effectivement une quantité indépendante de la direction des axes coordonnés, savoir, le produit des rayons vecteurs, menés de l'origine aux points P, Q, par le cosinus de l'angle que ces rayons vecteurs comprennent entre eux.

Soit maintenant z une fonction quelconque des coordonnées primitives

$$x,\quad y,\quad z.$$

Si l'on passe du cas où ces coordonnées sont prises pour variables

indépendantes au cas où l'on prend pour variables indépendantes les coordonnées nouvelles

$$\mathrm{x},\quad \mathrm{y},\quad \mathrm{z},$$

on aura, en vertu des formules (4),

$$\mathrm{D}_{\mathrm{x}}\mathrm{v} = a\mathrm{D}_x\mathrm{v} + b\mathrm{D}_y\mathrm{v} + c\mathrm{D}_z\mathrm{v} = (a\mathrm{D}_x + b\mathrm{D}_y + c\mathrm{D}_z)\mathrm{v},$$

.....

par conséquent,

$$(8)\qquad \begin{cases} \mathrm{D}_{\mathrm{x}} = a\,\mathrm{D}_x + b\,\mathrm{D}_y + c\,\mathrm{D}_z, \\ \mathrm{D}_{\mathrm{y}} = a'\mathrm{D}_x + b'\mathrm{D}_y + c'\mathrm{D}_z, \\ \mathrm{D}_{\mathrm{z}} = a''\mathrm{D}_x + b''\mathrm{D}_y + c''\mathrm{D}_z; \end{cases}$$

puis on tirera de ces dernières, eu égard aux formules (3),

$$(9)\qquad \begin{cases} \mathrm{D}_x = a\mathrm{D}_{\mathrm{x}} + a'\mathrm{D}_{\mathrm{y}} + a''\mathrm{D}_{\mathrm{z}}, \\ \mathrm{D}_y = b\mathrm{D}_{\mathrm{x}} + b'\mathrm{D}_{\mathrm{y}} + b''\mathrm{D}_{\mathrm{z}}, \\ \mathrm{D}_z = c\mathrm{D}_{\mathrm{x}} + c'\mathrm{D}_{\mathrm{y}} + c''\mathrm{D}_{\mathrm{z}}. \end{cases}$$

Enfin l'on tirera des formules (8), ou bien encore des formules (9),

$$(10)\qquad \mathrm{D}_{\mathrm{x}}^2 + \mathrm{D}_{\mathrm{y}}^2 + \mathrm{D}_{\mathrm{z}}^2 = \mathrm{D}_x^2 + \mathrm{D}_y^2 + \mathrm{D}_z^2.$$

Or les formules (8), (9) sont entièrement semblables aux formules (1), (4), et la formule (10) à la formule (2). Par conséquent *dans la transformation des coordonnées rectangulaires, les relations qui subsistent entre les coordonnées*

$$x,\quad y,\quad z \qquad \text{et} \qquad \mathrm{x},\quad \mathrm{y},\quad \mathrm{z},$$

relatives à deux systèmes d'axes, subsistent pareillement entre les caractéristiques

$$\mathrm{D}_x,\quad \mathrm{D}_y,\quad \mathrm{D}_z \qquad \text{et} \qquad \mathrm{D}_{\mathrm{x}},\quad \mathrm{D}_{\mathrm{y}},\quad \mathrm{D}_{\mathrm{z}}$$

qui indiquent des différentiations effectuées par rapport aux coordonnées

$$x,\quad y,\quad z \qquad \text{ou} \qquad \mathrm{x},\quad \mathrm{y},\quad \mathrm{z}$$

considérées comme variables indépendantes.

Au reste, on ne doit pas oublier que les formules (8), (9), (10), et celles qu'on peut en déduire, sont des formules symboliques, que l'on

transforme en équations véritables en plaçant une fonction quelconque v à la suite des expressions symboliques renfermées dans chaque membre. Ainsi en particulier la formule (10) n'est autre chose que la représentation symbolique de l'équation

$$(\mathrm{D}_{\mathrm{x}}^2 + \mathrm{D}_{\mathrm{y}}^2 + \mathrm{D}_{\mathrm{z}}^2)\mathrm{v} = (\mathrm{D}_x^2 + \mathrm{D}_y^2 + \mathrm{D}_z^2)\mathrm{v},$$

ou

$$(11)\qquad \frac{\partial^2\mathrm{v}}{\partial\mathrm{x}^2} + \frac{\partial^2\mathrm{v}}{\partial\mathrm{y}^2} + \frac{\partial^2\mathrm{v}}{\partial\mathrm{z}^2} = \frac{\partial^2\mathrm{v}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\mathrm{v}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\mathrm{v}}{\partial z^2},$$

v désignant une fonction quelconque des coordonnées x, y, z ou x, y, z.

Si l'on combine les équations (6), non plus avec les équations (1), mais avec les formules (8), alors, au lieu de la formule (7), on obtiendra la suivante

$$(12)\qquad \mathrm{x}_{\prime}\mathrm{D}_{\mathrm{x}} + \mathrm{y}_{\prime}\mathrm{D}_{\mathrm{y}} + \mathrm{z}_{\prime}\mathrm{D}_{\mathrm{z}} = x_{\prime}\mathrm{D}_x + y_{\prime}\mathrm{D}_y + z_{\prime}\mathrm{D}_z.$$

Donc *une transformation de coordonnées rectangulaires n'altérera point un produit symbolique de la forme*

$$x_{\prime}\mathrm{D}_x + y_{\prime}\mathrm{D}_y + z_{\prime}\mathrm{D}_z.$$

Les équations (6), et par suite les formules (7) et (12), continueront évidemment de subsister, si, en nommant toujours

$$x,\quad y,\quad z \qquad \text{ou} \qquad \mathrm{x},\quad \mathrm{y},\quad \mathrm{z}$$

les coordonnées primitives ou nouvelles du point P, on désigne les coordonnées primitives ou nouvelles d'un second point Q, non plus par

$$x_{\prime},\quad y_{\prime},\quad z_{\prime} \qquad \text{ou par} \qquad \mathrm{x}_{\prime},\quad \mathrm{y}_{\prime},\quad \mathrm{z}_{\prime},$$

mais par

$$x + x_{\prime},\quad y + y_{\prime},\quad z + z_{\prime} \qquad \text{ou par} \qquad \mathrm{x} + \mathrm{x}_{\prime},\quad \mathrm{y} + \mathrm{y}_{\prime},\quad \mathrm{z} + \mathrm{z}_{\prime},$$

en sorte que

$$x_{\prime},\quad y_{\prime},\quad z_{\prime} \qquad \text{ou} \qquad \mathrm{x}_{\prime},\quad \mathrm{y}_{\prime},\quad \mathrm{z}_{\prime}$$

représentent les projections algébriques de la distance PQ sur les axes

coordonnés des x, y, z ou des x, y, z. Cela posé, soient

$$\mathfrak{z}$$

une fonction quelconque des coordonnées x, y, z du point P, et

$$\Delta\mathfrak{z}$$

l'accroissement que reçoit cette fonction, quand on passe du point P au point Q, c'est-à-dire quand on fait croître x de $x_{,}$, y de $y_{,}$, z de $z_{,}$, ou, ce qui revient au même, x de $x_{,}$, y de $y_{,}$, z de $z_{,}$. On aura, en vertu du théorème de Taylor,

$$\mathfrak{z} + \Delta\mathfrak{z} = e^{x_{,}D_x + y_{,}D_y + z_{,}D_z}\mathfrak{z} = e^{\mathrm{x}_{,}D_x + \mathrm{y}_{,}D_y + \mathrm{z}_{,}D_z}\mathfrak{z},$$

par conséquent

$$(13) \qquad 1 + \Delta = e^{x_{,}D_x + y_{,}D_y + z_{,}D_z} = e^{\mathrm{x}_{,}D_x + \mathrm{y}_{,}D_y + \mathrm{z}_{,}D_z}$$

et

$$(14) \qquad \Delta = e^{x_{,}D_x + y_{,}D_y + z_{,}D_z} - 1 = e^{\mathrm{x}_{,}D_x + \mathrm{y}_{,}D_y + \mathrm{z}_{,}D_z} - 1.$$

Donc la caractéristique Δ, considérée successivement comme fonction des caractéristiques

$$D_x, \quad D_y, \quad D_z,$$

et comme fonction des caractéristiques

$$D_{\mathrm{x}}, \quad D_{\mathrm{y}}, \quad D_{\mathrm{z}},$$

sera représentée, dans le premier cas, par l'expression symbolique

$$e^{x_{,}D_x + y_{,}D_y + z_{,}D_z} - 1,$$

et dans le second cas par l'expression symbolique

$$e^{\mathrm{x}_{,}D_x + \mathrm{y}_{,}D_y + \mathrm{z}_{,}D_z} - 1.$$

Or, il résulte de la formule (12) que, pour passer de la première expression symbolique à la seconde, il suffit de chercher ce que devient la première quand on opère la transformation des coordonnées. On peut donc énoncer la proposition suivante.

THÉORÈME. — *Soient*

$$x, \quad y, \quad z$$

les coordonnées rectangulaires d'un point mobile P, *et désignons à l'aide de la caractéristique*

$$\Delta$$

l'accroissement que reçoit une fonction de x, y, z, *quand on passe du point* P *à un autre point* Q, *en attribuant aux coordonnées du premier point certains accroissements*

$$x_{,}, \quad y_{,}, \quad z_{,}.$$

Soient d'ailleurs

$$\mathrm{x}, \quad \mathrm{y}, \quad \mathrm{z} \quad \text{et} \quad \mathrm{x}_{,}, \quad \mathrm{y}_{,}, \quad \mathrm{z}_{,}$$

ce que deviennent

$$x, \quad y, \quad z \quad \text{et} \quad x_{,}, \quad y_{,}, \quad z_{,},$$

quand on a fait tourner autour de l'origine d'une manière quelconque, le système des trois axes coordonnés. Si l'on veut déduire l'une de l'autre les deux valeurs que le théorème de Taylor fournit immédiatement pour la caractéristique Δ, *considérée d'abord comme fonction de* D_x, D_y, D_z, *puis comme fonction de* D_{x}, D_{y}, D_{z}, *il suffira d'avoir égard aux formules qui servent à opérer la transformation des coordonnées rectangulaires avec un changement simultané de variables indépendantes.*

Les diverses formules établies dans ce paragraphe s'étendent évidemment au cas où l'on passerait d'un premier système de coordonnées à un second, en faisant tourner seulement les axes des x et des y autour de l'axe des z. Alors c, c' seraient nuls ainsi que a'', b'', et les formules (1), (2), (4), (7), (8), (9), (12) pourraient s'écrire comme il suit

$$(15) \qquad \mathrm{x} = x\cos\alpha + y\sin\alpha, \qquad \mathrm{y} = y\cos\alpha - x\sin\alpha,$$

$$(16) \qquad \mathrm{x}^2 + \mathrm{y}^2 = x^2 + y^2,$$

$$(17) \qquad x = \mathrm{x}\cos\alpha - \mathrm{y}\sin\alpha, \qquad y = \mathrm{y}\cos\alpha + \mathrm{x}\sin\alpha,$$

$$(18) \qquad \mathrm{x}\mathrm{x}_{,} + \mathrm{y}\mathrm{y}_{,} = xx_{,} + yy_{,},$$

$$(19) \qquad D_{\mathrm{x}} = \cos\alpha D_x + \sin\alpha D_y, \qquad D_{\mathrm{y}} = \cos\alpha D_y - \sin\alpha D_x,$$

$$(20) \qquad D_x = \cos\alpha D_{\mathrm{x}} - \sin\alpha D_{\mathrm{y}}, \qquad D_y = \cos\alpha D_{\mathrm{y}} + \sin\alpha D_{\mathrm{x}},$$

$$(21) \qquad D_{\mathrm{x}}^2 + D_{\mathrm{y}}^2 = D_x^2 + D_y^2.$$

§ II. — *Condition que doit remplir une fonction de deux ou de trois coordonnées rectangulaires, pour devenir indépendante de la direction des axes coordonnés.*

Pour arriver facilement à la condition dont il s'agit, nous aurons recours à une proposition qui est évidente par elle-même, et dont voici l'énoncé.

Premier Théorème. — *Si une équation entre plusieurs variables indépendantes*

$$x, \quad y, \quad z, \quad \ldots$$

et plusieurs paramètres ou constantes arbitraires

$$\alpha, \quad \beta, \quad \ldots$$

doit subsister, quelles que soient les valeurs réelles attribuées à ces variables et à ces paramètres, elle continuera de subsister, quelles que soient les variables $x, y, z, \ldots$ quand on établira des relations entre ces variables et les paramètres $\alpha, \beta, \ldots$ en transformant ces paramètres ou seulement quelques-uns d'entre eux en fonctions de x, y, z.

On conçoit, en effet, qu'une équation qui se vérifie indépendamment de valeurs attribuées à diverses quantités, subsiste, par cela même, dans le cas où l'on établit entre ces quantités des relations quelconques.

D'ailleurs le théorème qu'on vient d'énoncer entraîne évidemment la proposition suivante.

Deuxième Théorème. — *Soient*

$$x, \quad y, \quad z, \quad \ldots$$

plusieurs variables indépendantes, et

$$\mathrm{x}, \quad \mathrm{y}, \quad \mathrm{z}, \quad \ldots$$

des fonctions qui, renfermant avec ces variables certains paramètres

$$\alpha, \quad \beta, \quad \ldots,$$

se réduisent à

$$x, \quad y, \quad z, \quad \ldots$$

pour des valeurs particulières de ces paramètres. Enfin, supposons que des relations convenables, établies entre les paramètres $\alpha, \beta, \ldots$ et les variables indépendantes $x, y, z, \ldots$ puissent faire évanouir toutes les fonctions

$$\mathrm{x}, \quad \mathrm{y}, \quad \mathrm{z}, \quad \ldots$$

à l'exception d'une seule, de x, *par exemple, en réduisant celle-ci à une fonction déterminée* R *de $x, y, z, \ldots$. Si l'expression*

$$\mathrm{f}(\mathrm{x}, \mathrm{y}, \mathrm{z}, \ldots),$$

considérée comme fonction de $x, y, z, \ldots$, conserve la même forme, quelles que soient les valeurs attribuées aux paramètres

$$\alpha, \quad \beta, \quad \ldots,$$

en sorte que l'équation

$$\mathrm{f}(\mathrm{x}, \mathrm{y}, \mathrm{z}, \ldots) = \mathrm{f}(x, y, z, \ldots)$$

soit identique, on aura encore identiquement

$$\mathrm{f}(x, y, z, \ldots) = \mathrm{f}(\mathrm{R}, \mathrm{o}, \mathrm{o}, \ldots).$$

Pour montrer une application de ce dernier théorème, rapportons les différents points de l'espace à trois axes rectangulaires des x, y, z, et considérons l'un des points auxquels appartiennent les deux coordonnées

$$x, \quad y.$$

Si l'on fait tourner les axes des x et des y autour de l'axe des z, les deux coordonnées

$$x, \quad y$$

se trouveront remplacées par deux coordonnées nouvelles

$$\mathrm{x}, \quad \mathrm{y}$$

liées aux deux premières par deux équations linéaires et de la forme

$$(1)\qquad \mathrm{x} = x\cos\alpha + y\sin\alpha, \qquad \mathrm{y} = y\cos\alpha - x\sin\alpha.$$

Cela posé, pour qu'une expression de la forme

$$\mathrm{f}(\mathrm{x}, \mathrm{y})$$

devienne indépendante de la direction des axes mobiles, il faudra que l'on ait constamment

$$(2)\qquad \mathrm{f}(\mathrm{x}, \mathrm{y}) = \mathrm{f}(x, y),$$

ou, en d'autres termes,

$$(3)\qquad \mathrm{f}(x\cos\alpha + y\sin\alpha, y\cos\alpha - x\sin\alpha) = \mathrm{f}(x, y),$$

quelles que soient les valeurs, non seulement de x et de y, mais encore de l'angle α. D'ailleurs pour faire évanouir y, il suffira d'admettre, entre α, x, et y, la relation exprimée par la formule

$$y\cos\alpha - x\sin\alpha = 0$$

de laquelle on tire

$$\frac{\cos\alpha}{x} = \frac{\sin\alpha}{y} = \pm\frac{1}{r},$$

et par suite

$$\mathrm{x} = \pm r,$$

la valeur de r étant

$$(4)\qquad r = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Donc l'équation (2), lorsqu'elle se vérifiera pour des valeurs quelconques de x, y, quel que soit le paramètre α, entraînera la suivante

$$(5)\qquad \mathrm{f}(x, y) = \mathrm{f}(\pm r, 0),$$

et par conséquent les deux suivantes

$$(6)\qquad \mathrm{f}(x, y) = \mathrm{f}(r, 0),$$

$$(7)\qquad \mathrm{f}(r, 0) = \mathrm{f}(-r, 0).$$

Or les formules (6), (7) comprennent évidemment le théorème que nous allons énoncer.

Troisième Théorème. — *Pour qu'une fonction*

$$\mathrm{f}(x, y)$$

de deux coordonnées x, y, d'un même point, relatives à deux axes rectangulaires, ne soit point altérée, tandis qu'on fait varier ces coordonnées, non en changeant la position du point, mais en faisant tourner les deux axes dans leur plan, autour de l'origine, il est nécessaire que $\mathrm{f}(x, y)$ se réduise à une fonction du rayon vecteur r mené de l'origine à la projection du point donné sur le plan des x, y, et même à une fonction de r qui ne varie pas quand on y remplace r par $-r$.

On démontrerait encore facilement le théorème qui précède, en substituant aux coordonnées rectangulaires

$$x,\ y \quad \text{ou} \quad \mathrm{x},\ \mathrm{y}$$

deux coordonnées polaires

$$r,\ p \quad \text{ou} \quad r,\ \mathrm{p}$$

dont la première r serait toujours le rayon vecteur ci-dessus mentionné, la seconde p ou p désignant l'angle formé par ce rayon vecteur avec le demi-axe des x ou des x positives. Alors en effet, on aurait entre x, y et r, p, ou x, y, et r, p, des équations de la forme

$$(8)\qquad x = r\cos p, \qquad y = r\sin p,$$

ou

$$(9)\qquad \mathrm{x} = r\cos\mathrm{p}, \qquad \mathrm{y} = r\sin\mathrm{p},$$

la valeur de p étant elle-même de la forme

$$(10)\qquad \mathrm{p} = p - \alpha;$$

et l'équation (2) déviendrait

$$(11)\qquad \mathrm{f}(r\cos\mathrm{p}, r\sin\mathrm{p}) = \mathrm{f}(r\cos p, r\sin p).$$

Or, il résulte de cette dernière formule que la fonction des variables x, y, ou r, p, représentée par

$$f(x, y) = f(r\cos p, r\sin p),$$

ne varie pas quand on fait varier p, et se réduit en conséquence à la fonction de r en laquelle elle se transforme quand on pose $p = 0$ ou $p = \pi$, c'est-à-dire à

$$f(\pm r, 0),$$

le double signe pouvant être réduit arbitrairement au signe + ou au signe —.

Supposons maintenant que l'on fasse tourner autour de l'origine, d'une manière quelconque, les trois axes rectangulaires des x, des y et des z. Les trois coordonnées

$$x, \quad y, \quad z$$

d'un point donné, se trouveront remplacées par trois coordonnées nouvelles

$$\mathrm{x}, \quad \mathrm{y}, \quad \mathrm{z}$$

liées aux trois premières par trois équations de la forme

$$(12) \qquad \begin{cases} \mathrm{x} = ax + by + cz, \\ \mathrm{y} = a'x + b'y + c'z, \\ \mathrm{z} = a''x + b''y + c''z, \end{cases}$$

dans lesquelles six des neuf coefficients

$$a, \quad b, \quad c, \qquad a', \quad b', \quad c', \qquad a'', \quad b'', \quad c''$$

pourront se déduire des trois autres, en vertu des formules (3) ou (5) du paragraphe I, en sorte qu'on aura identiquement

$$(13) \qquad \mathrm{x}^2 + \mathrm{y}^2 + \mathrm{z}^2 = x^2 + y^2 + z^2.$$

Cela posé, pour qu'une expression de la forme

$$f(\mathrm{x}, \mathrm{y}, \mathrm{z})$$

devienne indépendante de la direction des axes mobiles, il faudra que

l'on ait constamment

$$(14) \qquad f(\mathrm{x}, \mathrm{y}, \mathrm{z}) = f(x, y, z),$$

quelles que soient les valeurs, non seulement de

$$x, \quad y, \quad z,$$

mais encore de trois des neuf coefficients

$$a, \quad b, \quad c, \qquad a', \quad b', \quad c', \qquad a'', \quad b'', \quad c''$$

dont on pourra disposer de manière à faire évanouir y et z. D'ailleurs, si l'on nomme r le rayon vecteur mené de l'origine au point donné, on aura

$$(15) \qquad r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2},$$

et l'équation (13), réduite à

$$(16) \qquad \mathrm{x}^2 + \mathrm{y}^2 + \mathrm{z}^2 = r^2,$$

donnera, pour des valeurs nulles de y et de z,

$$(17) \qquad \mathrm{x} = \pm r.$$

Donc la formule (14) entraînera la suivante

$$(18) \qquad f(x, y, z) = f(\pm r, 0, 0),$$

par conséquent les deux suivantes

$$(19) \qquad f(x, y, z) = f(r, 0, 0),$$
$$(20) \qquad f(r, 0, 0) = f(-r, 0, 0).$$

Or les formules (19), (20) comprennent évidemment le théorème que nous allons énoncer.

Quatrième Théorème. — *Pour qu'une fonction*

$$f(x, y, z)$$

de trois coordonnées x, y, z d'un même point, relatives à trois axes rectangulaires, ne soit point altérée, tandis qu'on fait varier ces coor-

données, non en changeant la position du point, mais en faisant tourner le système des trois axes rectangulaires autour de l'origine, il est nécessaire que $f(x, y, z)$ *se réduise à une fonction du rayon vecteur r mené de l'origine au point donné, et même à une fonction de r qui ne varie pas quand on y remplace r par* $-r$.

Au reste, on démontrerait encore facilement le théorème qui précède en substituant aux coordonnées rectangulaires

$$x, \quad y, \quad z \qquad \text{ou} \qquad \mathrm{x}, \quad \mathrm{y}, \quad \mathrm{z},$$

des coordonnées polaires

$$r, \quad p, \quad q \qquad \text{ou} \qquad r, \quad \mathrm{p}, \quad \mathrm{q},$$

liées aux premières par des équations de la forme

$$x = r\cos p, \qquad y = r\sin p\cos q, \qquad z = r\sin p\sin q,$$

ou

$$\mathrm{x} = r\cos \mathrm{p}, \qquad \mathrm{y} = r\sin \mathrm{p}\cos \mathrm{q}, \qquad \mathrm{z} = r\sin \mathrm{p}\sin \mathrm{q}.$$

En effet, en vertu de cette substitution, la formule (14) deviendrait

$$f(r\cos \mathrm{p}, r\sin \mathrm{p}\cos \mathrm{q}, r\sin \mathrm{p}\sin \mathrm{q}) = f(r\cos p, r\sin p\cos q, r\sin p\sin q).$$

Or comme, la direction des nouveaux axes étant complètement arbitraire, on pourrait en dire autant des valeurs des variables p, q, on conclurait de la formule précédente que la fonction

$$f(x, y, z) = f(r\cos p, r\sin p\cos q, r\sin p\sin q)$$

ne varie pas avec p et q, mais seulement avec r, et se réduit à la valeur de

$$f(r\cos p, r\sin p\cos q, r\sin p\sin q)$$

correspondante à $p = 0$ ou $p = \pi$, c'est-à-dire à

$$f(\pm r, 0, 0).$$

Lorsque les fonctions de x, y ou de x, y, z désignées, dans les théorèmes 3 et 4, par

$$f(x, y) \qquad \text{ou} \qquad f(x, y, z)$$

sont des fonctions entières composées d'un nombre fini ou infini de termes, alors

$$f(r, 0) \qquad \text{ou} \qquad f(r, 0, 0)$$

est pareillement une fonction entière de r, et même, en vertu de la formule (7) ou (20), une fonction entière de r^2, c'est-à-dire de

$$x^2 + y^2 \qquad \text{ou de} \qquad x^2 + y^2 + z^2.$$

Comme d'ailleurs toute fonction entière de r ou de r^2 remplit évidemment la condition mentionnée dans le troisième ou le quatrième théorème, il en résulte qu'on peut encore énoncer les propositions suivantes.

Cinquième Théorème. — *Pour qu'une fonction entière*

$$f(x, y)$$

de deux coordonnées x, y d'un même point, relatives à deux axes rectangulaires, ne soit point altérée, tandis qu'on fait varier ces coordonnées, non en changeant la position du point, mais en faisant tourner les deux axes dans leur plan autour de l'origine, il est nécessaire et il suffit que $f(x, y)$ *se réduise à une fonction entière de*

$$r^2 = x^2 + y^2.$$

Sixième Théorème. — *Pour qu'une fonction entière*

$$f(x, y, z)$$

des trois coordonnées x, y, z d'un même point, relatives à trois axes rectangulaires, ne soit point altérée, tandis qu'on fait varier ces coordonnées, non en changeant la position du point, mais en faisant tourner le système des trois axes coordonnés autour de l'origine, il est nécessaire et il suffit que $f(x, y, z)$ *se réduise à une fonction entière de*

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2.$$

Nous avons vu, dans le paragraphe I, que si l'on nomme

$$x, \quad y, \quad z \qquad \text{et} \qquad \mathrm{x}, \quad \mathrm{y}, \quad \mathrm{z}$$

les coordonnées d'un même point, relatives à un premier et à un second système d'axes rectangulaires, les caractéristiques

$$D_x,\quad D_y,\quad D_z$$

s'exprimeront en fonction des caractéristiques

$$D_x,\quad D_y,\quad D_z$$

de la même manière que les nouvelles coordonnées

$$x,\quad y,\quad z$$

en fonction des coordonnées primitives

$$x,\quad y,\quad z.$$

En conséquence, on pourra, dans les théorèmes 5 et 6, remplacer les coordonnées x, y, z par les caractéristiques

$$D_x,\quad D_y,\quad D_z,$$

et l'on obtiendra ainsi les propositions nouvelles que nous allons énoncer.

Septième Théorème. — *x, y étant deux coordonnées rectangulaires, et*

$$D_x,\quad D_y$$

les caractéristiques qui indiquent des différentiations relatives à ces coordonnées; pour qu'une fonction entière de ces caractéristiques ne soit point altérée, tandis qu'on fait tourner, dans le plan des x, y, les axes coordonnés autour de l'origine, il est nécessaire et il suffit que cette fonction se réduise à une fonction entière de

$$D_x^2 + D_y^2.$$

Huitième Théorème. — *x, y, z étant des coordonnées relatives à trois axes rectangulaires, et*

$$D_x,\quad D_y,\quad D_z$$

les caractéristiques qui indiquent des différentiations relatives à ces coordonnées; pour qu'une fonction entière de ces caractéristiques ne soit point altérée, tandis que l'on fait tourner d'une manière quelconque les axes coordonnés autour de l'origine, il est nécessaire et il suffit que cette fonction se réduise à une fonction entière de

$$D_x^2 + D_y^2 + D_z^2.$$

§ III. — *De la forme que prennent les équations des mouvements infiniment petits d'un système homogène de molécules, dans le cas où ces équations deviennent entièrement indépendantes de la direction des axes coordonnés.*

Les équations des mouvements infiniment petits d'un système homogène de molécules renferment, avec les déplacements moléculaires ξ, η, ζ mesurés parallèlement à trois axes rectangulaires, quatre variables indépendantes, savoir, les coordonnées x, y, z, relatives aux trois axes dont il s'agit, et le temps t. Ces mêmes équations, d'après ce qu'on a vu dans un autre Mémoire, peuvent s'écrire comme il suit

$$(1)\qquad \begin{cases} (L - D_t^2)\xi + R\eta + Q\zeta = 0, \\ R\xi + (M - D_t^2)\eta + P\zeta = 0, \\ Q\xi + P\eta + (N - D_t^2)\zeta = 0, \end{cases}$$

L, M, N, P, Q, R étant des fonctions entières de

$$D_x,\quad D_y,\quad D_z;$$

et si, comme l'ont fait quelques géomètres [1], on emploie, pour représenter les caractéristiques

$$D_x,\quad D_y,\quad D_z$$

de simples lettres

$$u,\quad v,\quad w,$$

on aura

$$(2)\qquad \begin{cases} L = G + D_u^2 H, & M = G + D_v^2 H, & N = G + D_w^2 H, \\ P = D_v D_w H, & Q = D_w D_u H, & R = D_u D_v H, \end{cases}$$

[1] On peut citer particulièrement à ce sujet un Mémoire de M. Poisson *Sur l'intégration de quelques équations linéaires aux différences partielles*, etc., lu à l'Académie des Sciences le 19 juillet 1819, et où cet illustre géomètre différentie et intègre des fonctions qui renferment des caractéristiques.

G, H étant deux fonctions de u, v, w, entières, mais généralement composées d'un nombre infini de termes. En conséquence, les formules (2) donneront

$$(3)\quad \begin{cases} (G - D_t^2)\xi + D_u(D_u H\xi + D_v H\eta + D_w H\zeta) = 0, \\ (G - D_t^2)\eta + D_v(D_u H\xi + D_v H\eta + D_w H\zeta) = 0, \\ (G - D^2)\zeta + D_w(D_u H\xi + D_v H\eta + D_w H\zeta) = 0, \end{cases}$$

pourvu que l'on effectue d'abord sur H, considéré comme fonction de u, v, w, les différentiations indiquées par les caractéristiques

$$D_u,\quad D_v,\quad D_w;$$

puis sur ξ, η, ζ, considérés comme fonctions de x, y, z les différentiations indiquées par les caractéristiques u, v, w. Quant aux valeurs de

$$G,\quad H,$$

considérés comme fonctions de

$$u = D_x,\qquad v = D_y,\qquad w = D_z,$$

on les obtiendra de la manière suivante.

x, y, z étant les coordonnées rectangulaires d'une molécule $\mathfrak{m}$ du système que l'on considère, nommons m une seconde molécule séparée de la première par la distance r;

$$x,\quad y,\quad z$$

les projections algébriques de cette distance r sur les axes coordonnés, et

$$\mathfrak{m} m r f(r)$$

l'action mutuelle des deux molécules $\mathfrak{m}$, m, prise avec le signe $+$ ou le signe $-$, suivant que ces deux molécules s'attirent ou se repoussent. Enfin, $\varkappa$ étant une fonction quelconque de x, y, z, désignons par

$$\Delta\varkappa$$

l'accroissement que prend cette fonction quand on passe de la molécule $\mathfrak{m}$ à la molécule m. On aura non seulement

$$\Delta\varkappa = (e^{xD_x + yD_y + zD_z} - 1)\varkappa,$$

par conséquent

$$(4)\qquad \Delta = e^{xD_x + yD_y + zD_z} - 1,$$

ou, ce qui revient au même,

$$(5)\qquad \Delta = e^{xu + yv + zw} - 1;$$

mais encore

$$G\varkappa = S[m f(r)\Delta\varkappa],$$

$$H\varkappa = S\left\{\frac{m}{r}\frac{df(r)}{dr}\left[\Delta\varkappa - (xu + yv + zw)\varkappa - \frac{(xu + yv + zw)^2\varkappa}{2}\right]\right\},$$

le signe S indiquant une somme relative aux diverses molécules m voisines de $\mathfrak{m}$; par conséquent

$$(6)\qquad G = S[m f(r)\Delta],$$

$$(7)\qquad H = S\left\{\frac{m}{r}\frac{df(r)}{dr}\left[\Delta - (xu + yv + zw) - \frac{(xu + yv + zw)^2}{2}\right]\right\},$$

ou, ce qui revient au même,

$$(8)\qquad H = S\left\{\frac{m}{r}\frac{df(r)}{dr}\left[\Delta - (xD_x + yD_y + zD_z) - \frac{(xD_x + yD_y + zD_z)^2}{2}\right]\right\}.$$

Or, en vertu de la formule (12) du paragraphe I, dans laquelle $x_,$, $y_,$, $z_,$ sont des quantités analogues à celles que nous désignons ici par x, y, z, les valeurs de G, H, fournies par les équations (6), (7), seront, aussi bien que la valeur de Δ (*voir* le théorème placé vers la fin du paragraphe I), indépendantes de la direction des axes coordonnés. Seulement, dans les développements de G, H suivant les puissances ascendantes de

$$D_x,\quad D_y,\quad D_z,$$

les coefficients de ces caractéristiques pourront varier, en même temps qu'elles, avec la direction des axes; et

$$G,\quad H,$$

considérés comme fonction de

$$D_x,\quad D_y,\quad D_z,$$

pourront alors prendre successivement diverses formes, sans néanmoins changer de valeurs.

Considérons maintenant le cas particulier où, la direction des axes coordonnés venant à varier, G, H, qui ne changeront pas de valeurs, ne changeraient pas non plus de forme. Il est clair que, dans ce cas particulier, la forme des équations des mouvements infiniment petits resterait elle-même invariable et indépendante de la direction des axes coordonnés. Il y a plus : pour que la forme des équations du mouvement reste invariable, il est nécessaire qu'en développant les valeurs de

$$L, \quad M, \quad N, \quad P, \quad Q, \quad R,$$

fournies par les équations (2), suivant les puissances ascendantes des caractéristiques

$$u = D_x, \qquad v = D_y, \qquad w = D_z,$$

on trouve pour coefficients de ces puissances des quantités indépendantes de la direction des axes coordonnés. Or, si cette dernière condition est remplie, non seulement

$$L, \quad M, \quad N, \quad P, \quad Q, \quad R,$$

considérés comme fonctions de u, v, w, présenteront une forme invariable, mais on pourra encore en dire autant des expressions

$$\begin{aligned} D_u G &= D_u M - D_v R = D_u N - D_w Q, \\ D_v G &= D_v N - D_w P = D_v L - D_u R, \\ D_w G &= D_w L - D_u Q = D_w M - D_v P, \end{aligned}$$

c'est-à-dire des dérivées partielles de la fonction G, relatives à u, v, w, par conséquent de sa différentielle totale, et de cette fonction elle-même qui, en vertu des formules (5) et (6), devra s'évanouir avec Δ, quand on y remplacera u, v, w par zéro. Ce n'est pas tout : la forme de la fonction G étant invariable, en même temps que les formes de

$$L, \quad M, \quad N, \quad P, \quad Q, \quad R,$$

on conclura des formules (2) que les six dérivées partielles du second

ordre de la fonction H, savoir

$$D_u^2 H, \quad D_v^2 H, \quad D_w^2 H, \quad D_v D_w H, \quad D_w D_u H, \quad D_u D_v H,$$

présenteront elles-mêmes dans l'hypothèse admise des formes invariables. Donc on pourra en dire autant de la différentielle totale du second ordre de H considéré comme fonction de u, v, w; et puisque, en vertu des formules (5) et (7), la fonction H s'évanouit avec sa différentielle totale du premier ordre, pour des valeurs nulles de u, v, w, nous devons conclure que, dans l'hypothèse admise, cette fonction H offrira elle-même une forme invariable.

Ainsi, en résumé, pour que les équations des mouvements infiniment petits d'un système homogène de molécules offrent une forme indépendante de la direction des axes coordonnés, c'est-à-dire, en d'autres termes, pour que les valeurs de

$$D_t^2 \xi, \quad D_t^2 \eta, \quad D_t^2 \zeta,$$

fournies par ces équations, soient des fonctions invariables des déplacements ξ, η, ζ et de leurs dérivées de divers ordres, prises par rapport à x, y, z, il est nécessaire et il suffit que les fonctions de D_x, D_y, D_z, représentées par G, H, et déterminées par les formules (6) et (7) ou (6) et (8), conservent non seulement, comme il arrive toujours, la même valeur, mais aussi la même forme, après un changement de variables indépendantes correspondant à une transformation de coordonnées rectangulaires. D'ailleurs, pour que cette dernière condition soit remplie, il sera nécessaire et il suffira, en vertu du huitième théorème du paragraphe II, que G, H se réduisent à des fonctions de la somme

$$D_x^2 + D_y^2 + D_z^2.$$

On peut donc énoncer la proposition suivante.

Théorème. — *Pour que les équations des mouvements infiniment petits d'un système homogène de molécules soient indépendantes, dans leur forme, de la direction attribuée aux axes coordonnés, il est nécessaire et*

il suffit que les fonctions de

$$u = D_x, \qquad v = D_y, \qquad w = D_z,$$

représentées par

$$G, \quad H,$$

et déterminées par les formules (6) *et* (7) *ou* (6) *et* (8), *se réduisent à des fonctions de*

$$u^2 + v^2 + w^2 = D_x^2 + D_y^2 + D_z^2.$$

Posons maintenant, pour abréger,

$$k^2 = u^2 + v^2 + w^2 = D_x^2 + D_y^2 + D_z^2. \tag{9}$$

Lorsque G, H se réduiront à des fonctions de $u^2 + v^2 + w^2$, par conséquent de k^2, alors, en prenant

$$E = G + \frac{1}{k}\frac{dH}{dk}, \qquad F = \frac{1}{k}\frac{d\left(\frac{1}{k}\frac{dH}{dk}\right)}{dk}, \tag{10}$$

on tirera des formules (2),

$$\left\{\begin{array}{lll} L = E + Fu^2, & M = E + Fv^2 & N = E + Fw^2, \\ P = Fvw, & Q = Fwu, & R = Fuv, \end{array}\right. \tag{11}$$

ou, ce qui revient au même,

$$\left\{\begin{array}{lll} L = E + FD_x^2, & M = E + FD_y^2, & N = E + FD_z^2, \\ P = FD_yD_z, & Q = FD_zD_x, & R = FD_xD_y, \end{array}\right. \tag{12}$$

Donc alors les formules (1) se réduiront aux suivantes

$$\left\{\begin{array}{l} (E - D_t^2)\xi + FD_x(D_x\xi + D_y\eta + D_z\zeta) = 0, \\ (E - D_t^2)\eta + FD_y(D_x\xi + D_y\eta + D_z\zeta) = 0, \\ (E - D_t^2)\zeta + FD_z(D_x\xi + D_y\eta + D_z\zeta) = 0. \end{array}\right. \tag{13}$$

Au reste, à l'aide des principes établis dans le paragraphe II, on s'assurera sans peine qu'effectivement les équations (13) ne changent pas de forme quand on change la direction des axes coordonnés.

Il est bon d'observer que, si l'on pose

$$\upsilon = D_x\xi + D_y\eta + D_z\zeta, \tag{14}$$

la nouvelle variable υ représentera toujours, abstraction faite du signe,

la dilatation ou la condensation du volume, mesurée au point (x, y, z), dans le système de molécules donné. Cela posé, les équations (13) pourront être présentées sous la forme

$$(D_t^2 - E)\xi = FD_x\upsilon, \qquad (D_t^2 - E)\eta = FD_y\upsilon, \qquad (D_t^2 - E)\zeta = FD_z\upsilon, \tag{15}$$

et l'on tirera de ces mêmes équations, respectivement multipliées par

$$D_x, \quad D_y, \quad D_z,$$

puis combinées entre elles par voie d'addition,

$$[D_t^2 - E - F(D_x^2 + D_y^2 + D_z^2)]\upsilon = 0. \tag{16}$$

Lorsque dans un système homogène de molécules, les équations des mouvements infiniment petits prennent une forme indépendante de la direction des axes coordonnés, ce système est évidemment du nombre de ceux où la propagation du mouvement s'effectue en tous sens suivant les mêmes lois. Or, d'après ce qu'on vient de dire, les mouvements infiniment petits d'un semblable système peuvent être représentés par les équations (13), dans lesquelles

$$E \text{ et } F$$

sont deux fonctions déterminées de

$$D_x^2 + D_y^2 + D_z^2,$$

ou bien encore, par les formules (15) jointes à l'équation (16). D'ailleurs il est important d'observer : 1° que la dilatation du volume peut se déduire immédiatement de l'intégration de la seule équation (16); 2° que, cette dilatation une fois connue, les valeurs de ξ, de η et de ζ, se trouveront déterminées chacune séparément par les trois formules (15).

Nous observerons encore que des formules (15), combinées entre elles, on tire

$$\left\{\begin{array}{l} (D_t^2 - E)(D_z\eta - D_y\zeta) = 0, \\ (D_t^2 - E)(D_x\zeta - D_z\xi) = 0, \\ (D_t^2 - E)(D_y\xi - D_x\eta) = 0. \end{array}\right. \tag{17}$$

§ IV. — *De la forme que prennent les équations des mouvements infiniment petits d'un système homogène de molécules, dans le cas où elles deviennent indépendantes de la direction assignée à deux des trois axes coordonnés.*

Après avoir réduit les équations des mouvements infiniment petits d'un système homogène de molécules aux équations (1) du paragraphe III, concevons qu'on fasse tourner deux des axes coordonnés autour du troisième, par exemple les axes des x et des y autour de l'axe des z, et considérons en particulier le cas où, pendant cette rotation, G, H, qui ne changeront pas de valeur, ne changeraient pas non plus de forme. Il est clair que, dans ce cas, la forme des équations des mouvements infiniment petits restera elle-même invariable, pendant la rotation des axes des x et des y. Il y a plus : pour que cette rotation ne fasse pas varier la forme des équations du mouvement, il sera nécessaire qu'elle laisse invariables les formes de

$$L,\quad M,\quad N,\quad P,\quad Q,\quad R,$$

exprimées en fonction des caractéristiques

$$u = D_x,\qquad v = D_y,\qquad w = D_z,$$

à l'aide des formules (2) du paragraphe III, jointes aux formules (5), (6) et (7) du même paragraphe; par conséquent il sera nécessaire qu'elle laisse invariable la forme des fonctions de D_x, D_y, D_z, représentées par G, H. C'est du moins ce qu'on démontrera sans peine, par des raisonnements entièrement semblables à ceux dont nous avons fait usage dans le troisième paragraphe.

Ainsi, en résumé, pour que les équations des mouvements infiniment petits d'un système homogène de molécules offrent une forme indépendante de la direction assignée, dans le plan des x, y, aux axes rectangulaires des x et des y, il sera nécessaire et il suffira que les fonctions

$$D_x,\quad D_y,\quad D_z,$$

représentées par

$$G,\quad H,$$

et déterminées par les formules (6), (7) du paragraphe III, conservent non seulement, comme il arrive toujours, la même valeur, mais aussi la même forme, après le changement de deux variables indépendantes, correspondant au déplacement de deux des trois axes coordonnés. D'ailleurs, pour que cette dernière condition soit remplie, il sera nécessaire, et il suffira, en vertu du septième théorème du paragraphe III, que G, H se réduisent à des fonctions de la somme

$$D_x^2 + D_y^2,$$

si les axes déplacés sont ceux des x et des y, par conséquent à des fonctions de la somme

$$D_y^2 + D_z^2,$$

si les axes déplacés sont au contraire ceux des y et des z. On peut donc énoncer la proposition suivante.

Théorème. — *Pour que les équations des mouvements infiniment petits d'un système homogène de molécules offrent une forme indépendante de la direction assignée, dans le plan des y, z, aux axes coordonnés rectangulaires des y et des z, il est nécessaire et il suffit que les fonctions de*

$$u = D_x,\qquad v = D_y,\qquad w = D_z,$$

représentées par G, H, *et déterminées par les formules* (6), (7) *du paragraphe III, se réduisent à des fonctions de*

$$v^2 + w^2 = D_y^2 + D_z^2.$$

Posons maintenant, pour abréger,

$$h^2 = v^2 + w^2 = D_y^2 + D_z^2. \tag{1}$$

Lorsque G, H se réduiront à des fonctions de u^2 et de $v^2 + w^2$, par conséquent à des fonctions de u et de h, alors, en prenant

$$E = G + \frac{1}{h}\frac{\partial H}{\partial h},\qquad F = \frac{1}{h}\frac{\partial\left(\frac{1}{h}\frac{\partial H}{\partial h}\right)}{\partial h},\qquad K = \frac{\partial\left(\frac{1}{h}\frac{\partial H}{\partial h}\right)}{\partial u}, \tag{2}$$

on tirera des formules (2) du paragraphe III

$$(3)\qquad \begin{cases} M = E + Fv^2, & N = E + Fw^2, \\ P = Fvw, & Q = Kw, \qquad R = Kv; \end{cases}$$

ou, ce qui revient au même,

$$(4)\qquad \begin{cases} M = E + FD_y^2, & N = E + FD_z^2, \\ P = FD_yD_z, & Q = KD_z, \qquad R = KD_y. \end{cases}$$

Donc alors les formules (1) du paragraphe III se réduiront aux suivantes

$$(5)\qquad (D_t^2 - L)\xi - K(D_y\eta + D_z\zeta) = 0,$$

$$(6)\qquad \begin{cases} (D_t^2 - E)\eta - D_y[K\xi + F(D_y\eta + D_z\zeta)] = 0, \\ (D_t^2 - E)\zeta - D_z[K\xi + F(D_y\eta + D_z\zeta)] = 0. \end{cases}$$

D'ailleurs on tire des formules (6), non seulement

$$(7)\qquad [D_t^2 - E - F(D_y^2 + D_z^2)](D_y\eta + D_z\zeta) - K(D_y^2 + D_z^2)\xi = 0,$$

mais encore

$$(8)\qquad (D_t^2 - E)(D_z\eta - D_y\zeta) = 0;$$

puis des formules (5) et (7), combinées entre elles,

$$(9)\qquad \{[D_t^2 - E - F(D_y^2 + D_z^2)](D_t^2 - E) - K^2(D_y^2 + D_z^2)\}\xi = 0.$$

Lorsque, dans un système homogène de molécules, les équations des mouvements infiniment petits prennent une forme indépendante de la direction attribuée aux axes rectangulaires des y et des z, ce système est évidemment du nombre de ceux dans lesquels la propagation du mouvement s'effectue de la même manière en tous sens autour d'un axe quelconque parallèle à l'axe des x. Or, d'après ce qu'on vient de dire, les équations des mouvements infiniment petits d'un semblable système peuvent être représentées par les équations (5) et (6), dans lesquelles

$$E,\quad F,\quad K,\quad L$$

sont des fonctions déterminées de

$$D_y^2 + D_z^2.$$

Observons d'ailleurs que les deux variables

$$\xi \quad \text{et} \quad D_y\eta + D_z\zeta,$$

dont la seconde représente la dilatation superficielle du système moléculaire dans un plan parallèle au plan des y, z, se trouvent simultanément déterminées par les formules (5), (7), tandis que la variable

$$D_z\eta - D_y\zeta$$

se trouve déterminée par la seule formule (8).

§ V. — *De la forme que prennent les équations des mouvements infiniment petits de deux systèmes homogènes de molécules qui se pénètrent mutuellement, dans le cas où ces équations deviennent indépendantes de la direction des axes coordonnés.*

Les équations des mouvements infiniment petits de deux systèmes de molécules, qui se pénètrent mutuellement, renferment avec les déplacements moléculaires

$$\xi,\quad \eta,\quad \zeta \quad \text{ou} \quad \xi_{,},\quad \eta_{,},\quad \zeta_{,},$$

mesurés dans le premier ou dans le second système, parallèlement à trois axes rectangulaires, quatre variables indépendantes, savoir, les coordonnées x, y, z, relatives aux trois axes dont il s'agit, et le temps t. Ces mêmes équations, d'après ce qu'on a vu dans un précédent Mémoire, peuvent s'écrire comme il suit

$$(1)\qquad \begin{cases} (L - D_t^2)\xi + R\eta + Q\zeta + L_{,}\xi_{,} + R_{,}\eta_{,} + Q_{,}\zeta_{,} = 0, \\ R\xi + (M - D_t^2)\eta + P\zeta + R_{,}\xi_{,} + M_{,}\eta_{,} + P_{,}\zeta_{,} = 0, \\ Q\xi + P\eta + (N - D_t^2)\zeta + Q_{,}\xi_{,} + P_{,}\eta_{,} + N_{,}\zeta_{,} = 0; \end{cases}$$

$$(2)\qquad \begin{cases} {}_{,}L\xi + {}_{,}R\eta + {}_{,}Q\zeta + (L_{,} - D_t^2)\xi_{,} + R_{,}\eta_{,} + Q_{,}\zeta_{,} = 0, \\ {}_{,}R\xi + {}_{,}M\eta + {}_{,}P\zeta + R_{,}\xi_{,} + (M_{,} - D_t^2)\eta_{,} + P_{,}\zeta_{,} = 0, \\ {}_{,}Q\xi + {}_{,}P\eta + {}_{,}N\zeta + Q_{,}\xi_{,} + P_{,}\eta_{,} + (N_{,} - D_t^2)\zeta_{,} = 0, \end{cases}$$

L, M, N, P, Q, R, $L_{,}$, $M_{,}$, ..., $Q_{,}$, $R_{,}$ désignant des fonctions des caractéristiques

$$D_x,\quad D_y,\quad D_z.$$

D'ailleurs comme on l'a prouvé, si l'on développe ces fonctions suivant les puissances entières de D_x, D_y, D_z, les coefficients de ces puissances ou de leurs produits pourront, dans beaucoup de cas, être, sans erreur sensible, considérés comme constants. C'est ce qui pourra en effet arriver si, le second système de molécules étant homogène, le rapprochement des molécules est beaucoup plus considérable dans le premier système que dans le second. Alors les sommes qui représenteront les coefficients dont il s'agit seront les unes constantes, les autres variables, et, pour qu'on puisse, sans erreur sensible, substituer aux sommes variables leurs valeurs moyennes, il suffira que ces sommes reprennent périodiquement les mêmes valeurs, quand on fera croître en progression arithmétique chacune des trois coordonnées x, y, z, et que les produits de ces sommes par les rapports des trois progressions arithmétiques correspondantes aux trois coordonnées soient très petits.

Les coefficients que renferment les fonctions

$$L,\ M,\ N,\ P,\ Q,\ R;\quad L_{,},\ M_{,},\ \ldots,\ Q_{,},\ R_{,},$$

étant regardés comme constants ; si, pour représenter les caractéristiques

$$D_x,\quad D_y,\quad D_z,$$

on emploie de simples lettres

$$u,\quad v,\quad w,$$

on aura

$$(3)\quad \begin{cases} L = G + D_u^2 H, & M = G + D_v^2 H, & N = G + D_w^2 H, \\ P = D_v D_w H, & Q = D_w D_u H, & R = D_u D_v H; \end{cases}$$

$$(4)\quad \begin{cases} L_{,} = G_{,} + D_u^2 H_{,}, & M_{,} = G_{,} + D_v^2 H_{,}, & N_{,} = G_{,} + D_w^2 H_{,}, \\ P_{,} = D_v D_w H_{,}, & Q_{,} = D_w D_u H_{,}, & R_{,} = D_u D_v H_{,}; \end{cases}$$

$$(5)\quad \begin{cases} {}_{,}L = {}_{,}G + D_{u_{,}}^2 H, & {}_{,}M = {}_{,}G + D_{v_{,}}^2 H, & {}_{,}N = {}_{,}G + D_{w_{,}}^2 H, \\ {}_{,}P = D_v D_{w_{,}} H, & {}_{,}Q = D_w D_{u_{,}} H, & {}_{,}R = D_u D_{v_{,}} H; \end{cases}$$

$$(6)\quad \begin{cases} L_{,} = G_{,} + D_u^2 H_{,}, & M_{,} = G_{,} + D_v^2 H_{,}, & N_{,} = G_{,} + D_w^2 H_{,}, \\ P_{,} = D_v D_w H_{,}, & Q_{,} = D_w D_u H_{,}, & R_{,} = D_u D_v H_{,}; \end{cases}$$

$G, H, G_{,}, H_{,}, {}_{,}G, {}_{,}H, G_{,}, H_{,}$ désignant huit fonctions entières de D_x,

D_y, D_z, composées chacune généralement d'un nombre infini de termes.

Si l'on nomme

$$x,\quad y,\quad z$$

les coordonnées rectangulaires d'une molécule

$$\mathfrak{m} \quad \text{ou} \quad \mathfrak{m}_{,}$$

du premier ou du second système;

$$p$$

la distance de cette molécule $\mathfrak{m}$ ou $\mathfrak{m}_{,}$ à une molécule voisine m ou $m_{,}$;

$$\mathrm{x},\quad \mathrm{y},\quad \mathrm{z}$$

les projections algébriques de la distance r;

$$\mathfrak{m} m r f(r)$$

l'action mutuelle de deux molécules $\mathfrak{m}$, m du premier système, prise avec le signe + ou avec le signe − suivant que ces molécules s'attirent ou se repoussent;

$$\mathfrak{m} m_{,} r f_{,}(r) \quad \text{et} \quad \mathfrak{m}_{,} m r f_{,}(r)$$

l'action mutuelle d'une molécule $\mathfrak{m}$ ou m du premier système et d'une molécule $\mathfrak{m}_{,}$ ou $m_{,}$ du second; enfin

$$\mathfrak{m}_{,} m_{,} f_{,,}(r)$$

l'action mutuelle de deux molécules $\mathfrak{m}_{,}$ et $m_{,}$ du second système; alors en posant, pour abréger,

$$(7)\qquad \Delta = e^{xu+yv+zw} - 1,$$

on trouvera

$$(8)\quad \begin{cases} G = S[mf(r)\Delta] - S[m_{,}f_{,}(r)], \\ H = S\left\{\frac{m}{r}\frac{df(r)}{dr}\left[\Delta - (xu + yv + zw) - \frac{(xu + yv + zw)^2}{2}\right]\right\} \\ \qquad - S\left[\frac{m_{,}}{r}\frac{df_{,}(r)}{dr}\frac{(ux + vy + wz)^2}{2}\right] \end{cases}$$

$$(9)\quad \begin{cases} G_{,} = S[m_{,}f_{,}(r)(1 + \Delta)], \\ H_{,} = S\left[\frac{m_{,}}{r}\frac{df_{,}(r)}{dr}(1 + \Delta)\right]; \end{cases}$$

$$(10)\quad \begin{cases} {}_{,}G = S[mf_{,}(r)(1 + \Delta)], \\ {}_{,}H = S\left[\frac{m}{r}\frac{df_{,}(r)}{dr}(1 + \Delta)\right]; \end{cases}$$

$$(11)\quad \begin{cases} G_{,,} = S[m_{,}f_{,,}(r)\Delta] - S[mf_{,}(r)], \\ H_{,,} = S\left\{\frac{m_{,}}{r}\frac{df_{,,}(r)}{dr}\left[\Delta - (xu + yv + zw) - \frac{(xu + yv + zw)^2}{2}\right]\right\} \\ \qquad - S\left[\frac{m}{r}\frac{df_{,}(r)}{dr}\frac{(ux + vy + wz)^2}{2}\right], \end{cases}$$

le signe S indiquant une somme de termes semblables entre eux, et relatifs aux diverses molécules m ou $m_{,}$, voisines de $\mathfrak{m}$ ou de $\mathfrak{m}_{,}$.

Concevons maintenant que, pour opérer un changement de variables indépendantes, on fasse tourner ou les trois axes coordonnés d'une manière quelconque autour de l'origine, ou les axes des y et z autour de l'axe des x. Il suit évidemment des formules (3), (4), (5), (6), que la rotation dont il s'agit ne changera pas la forme des équations des mouvements infiniment petits, si elle ne change pas les formes de

$$G,\quad H,\quad G_{,},\quad H_{,},\quad {}_{,}G,\quad {}_{,}H,\quad G_{,,},\quad H_{,,}.$$

De plus, par des raisonnements semblables à ceux dont nous nous sommes servis dans les paragraphes III et IV, on démontrera sans peine que, si le déplacement des axes coordonnés laisse invariable la forme des équations du mouvement, il laissera pareillement invariables les formes des différentielles totales du second ordre de

$$G,\quad G_{,},\quad {}_{,}G,\quad G_{,,},$$

considérées comme fonctions de u, v, w, et les formes des différentielles totales du second ordre de

$$H,\quad H_{,},\quad {}_{,}H,\quad H_{,,}.$$

Donc alors les fonctions

$$G,\quad G_{,},\quad {}_{,}G.\quad G_{,,},$$

qui se réduisent respectivement à

$$-S[m_{,}f_{,}(r)],\quad S[m_{,}f_{,}(r)],\quad S[mf_{,}(r)],\quad -S[mf_{,}(r)],$$

quand on y remplace u, v, w par zéro, ne changeront pas de forme; et l'on pourra encore en dire autant : 1° des fonctions

$$H,\quad H_{,},$$

qui s'évanouiront avec leurs différentielles totales du premier ordre, quand on y remplacera u, v, w par zéro; 2° de la somme des termes qui, dans chacune des fonctions

$$H_{,},\quad {}_{,}H,$$

seront par rapport à u, v, w d'un ordre supérieur au premier.

Ainsi, en résumé, pour que la rotation des trois axes coordonnés autour de l'origine, ou des axes des y et des z autour de l'axe des x, n'altère pas la forme des équations (1), (2), il sera nécessaire et il suffira que cette rotation n'altère ni les formes de

$$G,\quad G_{,},\quad {}_{,}G,\quad G_{,,},\quad H,\quad H_{,},$$

considérées comme fonctions de u, v, w, ni les formes des expressions auxquelles se réduisent les deux fonctions

$$H_{,},\quad {}_{,}H,$$

lorsque, dans ces dernières, on conserve seulement les termes d'un degré supérieur au premier. D'ailleurs, pour que ces dernières conditions soient remplies, il suffira, en vertu des théorèmes 7 ou 8 du paragraphe II, que les six fonctions

$$G,\quad G_{,},\quad {}_{,}G,\quad G_{,,},\quad H,\quad H_{,},$$

et les parties conservées des deux fonctions

$$H_{,}, \quad {}_{,}H,$$

se réduisent à des fonctions de la somme

$$D_x^2 + D_y^2 + D_z^2 = u^2 + v^2 + w^2,$$

ou de la somme

$$D_y^2 + D_z^2 = v^2 + w^2.$$

On peut donc énoncer les propositions suivantes.

Premier Théorème. — *Pour que les équations* (1) *et* (2) *soient indépendantes, dans leur forme, de la direction des axes coordonnés, supposés rectangulaires entre eux, il est nécessaire et il suffit que les six fonctions de u, v, w, représentées par*

$$G, \quad G_{,}, \quad {}_{,}G, \quad G_{,}, \quad H, \quad H_{,},$$

et les sommes des termes du second degré ou d'un degré plus élevé, renfermées dans chacune des fonctions

$$H_{,}, \quad {}_{,}H,$$

se réduisent à des fonctions de la somme

$$u^2 + v^2 + w^2 = D_x^2 + D_y^2 + D_z^2.$$

Deuxième Théorème. — *Pour que les équations* (1) *et* (2) *offrent une forme indépendante de la position assignée, dans le plan des y, z, aux axes coordonnés rectangulaires des y et des z, il est nécessaire et il suffit que les six fonctions de u, v, w, représentées par*

$$G, \quad G_{,}, \quad {}_{,}G, \quad G_{,}, \quad H, \quad H_{,},$$

et les sommes des termes du second degré, ou d'un degré plus élevé, renfermées dans chacune des fonctions

$$H_{,} \quad \text{et} \quad {}_{,}H,$$

se réduisent à des fonctions de u et de la somme

$$v^2 + w^2 = D_y^2 + D_z^2.$$

Posons maintenant, pour abréger,

$$k^2 = u^2 + v^2 + w^2 = D_x^2 + D_y^2 + D_z^2.$$

Lorsque les six fonctions

$$G, \quad G_{,}, \quad {}_{,}G, \quad G_{,}, \quad H, \quad H_{,}$$

et les sommes des termes du second degré ou d'un degré supérieur dans les fonctions

$$H_{,}, \quad {}_{,}H,$$

se réduiront à des fonctions de $u^2 + v^2 + w^2$, par conséquent à des fonctions de k; alors, en raisonnant comme dans le paragraphe III, on trouvera

$$(12)\quad \begin{cases} L = E + F\,D_x^2, & M = E + F\,D_y^2, & N = E + F\,D_z^2, \\ P = F\,D_y D_z, & Q = F\,D_z D_x, & R = F\,D_x D_y; \end{cases}$$

$$(13)\quad \begin{cases} L_{,} = E_{,} + F_{,} D_x^2, & M_{,} = E_{,} + F_{,} D_y^2, & N_{,} = E_{,} + F_{,} D_z^2, \\ P_{,} = F_{,} D_y D_z, & Q_{,} = F_{,} D_z D_x, & R_{,} = F_{,} D_x D_y; \end{cases}$$

$$(14)\quad \begin{cases} {}_{,}L = {}_{,}E + {}_{,}F\,D_x^2, & {}_{,}M = {}_{,}E + {}_{,}F\,D_y^2, & {}_{,}N = {}_{,}E + {}_{,}F\,D_z^2, \\ {}_{,}P = {}_{,}F\,D_y D_z, & {}_{,}Q = {}_{,}F\,D_z D_x, & {}_{,}R = {}_{,}F\,D_x D_y; \end{cases}$$

$$(15)\quad \begin{cases} L_{,} = E_{,} + F_{,} D_x^2, & M_{,} = E_{,} + F_{,} D_y^2, & N_{,} = E_{,} + F_{,} D_z^2, \\ P_{,} = F_{,} D_y D_z, & Q_{,} = F_{,} D_z D_x, & R_{,} = F_{,} D_x D_y, \end{cases}$$

E, F, $E_{,}$, $F_{,}$, ${}_{,}E$, ${}_{,}F$, $E_{,}$, $F_{,}$ désignant des fonctions entières de la somme

$$D_x^2 + D_y^2 + D_z^2,$$

mais généralement composées d'un nombre infini de termes; et par suite, si l'on pose, pour abréger,

$$(16)\quad \begin{cases} \upsilon = D_x \xi + D_y \eta + D_z \zeta, \\ \upsilon_{,} = D_x \xi_{,} + D_y \eta_{,} + D_z \zeta_{,}, \end{cases}$$

les équations (1) et (2) deviendront

$$(17)\quad \begin{cases} (D_t^2 - E)\xi - E_{,}\xi_{,} = D_x(F\upsilon + F_{,}\upsilon_{,}), \\ (D_t^2 - E)\eta - E_{,}\eta_{,} = D_y(F\upsilon + F_{,}\upsilon_{,}), \\ (D_t^2 - E)\zeta - E_{,}\zeta_{,} = D_z(F\upsilon + F_{,}\upsilon_{,}), \end{cases}$$

$$(18)\quad \begin{cases} (D_t^2 - E_{,})\xi_{,} - {}_{,}E\,\xi = D_x({}_{,}F\upsilon + F_{,}\upsilon_{,}), \\ (D_t^2 - E_{,})\eta_{,} - {}_{,}E\,\eta = D_y({}_{,}F\upsilon + F_{,}\upsilon_{,}), \\ (D_t^2 - E_{,})\zeta_{,} - {}_{,}E\,\zeta = D_z({}_{,}F\upsilon + F_{,}\upsilon_{,}). \end{cases}$$

On tire d'ailleurs des équations (17) ou (18), respectivement multipliées par

$$D_x, \quad D_y, \quad D_z,$$

puis combinées entre elles par voie d'addition,

$$(19)\quad \begin{cases} [D_t^2 - E - F(D_x^2 + D_y^2 + D_z^2)]\upsilon - [E_{,} + F_{,}(D_x^2 + D_y + D_z^2)]\upsilon_{,} = 0, \\ [D_t^2 - E_{,} - F_{,}(D_x^2 + D_y^2 + D_z^2)]\upsilon_{,} - [{}_{,}E + {}_{,}F(D_x^2 + D_y^2 + D_z^2)]\upsilon = 0. \end{cases}$$

Les nouvelles variables qui sont ici représentées par $\upsilon, \upsilon_{,}$, et qui peuvent être séparément déterminées à l'aide des formules (19), ne sont autre chose que les dilatations de volume mesurées, au point (x, y, z), dans les deux systèmes de molécules qu'on considère. Ces dilatations étant calculées, si l'on nomme

$$a, \quad b, \quad c$$

les cosinus des angles formés par un axe fixe avec les demi-axes des coordonnées positives et

$$\varkappa, \quad \varkappa_{,}$$

les déplacements moléculaires, mesurés dans les deux systèmes de molécules parallèlement à cet axe; alors des formules

$$(20)\quad \begin{cases} \varkappa = a\xi + b\eta + c\zeta, \\ \varkappa_{,} = a\xi_{,} + b\eta_{,} + c\zeta_{,}, \end{cases}$$

combinées avec les équations (17) et (18), on tirera les suivantes

$$(21)\quad \begin{cases} (D_t^2 - E)\varkappa - E_{,}\varkappa_{,} = (aD_x + bD_y + cD_z)(F\upsilon + F_{,}\upsilon_{,}), \\ (D_t^2 - E_{,})\varkappa_{,} - {}_{,}E\varkappa = (aD_x + bD_y + cD_z)({}_{,}F\upsilon + F_{,}\upsilon_{,}), \end{cases}$$

et l'on pourra déduire immédiatement de ces dernières les valeurs des déplacements $\varkappa, \varkappa_{,}$.

Si l'on élimine $\upsilon_{,}$ ou υ entre les formules (19), et $\varkappa_{,}$ ou $\varkappa$ entre les formules (21), alors, en posant pour abréger

$$(22)\quad \nabla' = (D_t^2 - E)(D_t^2 - E_{,}) - {}_{,}EE_{,},$$

$$(23)\quad \begin{cases} \nabla' = [D_t^2 - E - F(D_x^2 + D_y^2 + D_z^2)][D_t^2 - E_{,} - F_{,}(D_x^2 + D_y^2 + D_z^2)] \\ \qquad - [E_{,} + F_{,}(D_x^2 + D_y^2 + D_z^2)][{}_{,}E + {}_{,}F(D_x^2 + D_y^2 + D_z^2)]. \end{cases}$$

et

$$(24)\quad \begin{cases} \square = F(D_t^2 - E_{,}) + {}_{,}FE_{,}, & \square_{,} = F_{,}(D_t^2 - E_{,}) + F_{,}E_{,}, \\ {}_{,}\square = {}_{,}F(D_t^2 - E) + {}_{,}EF, & \square_{,} = F_{,}(D_t^2 - E) + {}_{,}EF_{,}, \end{cases}$$

on trouvera

$$(25)\quad \nabla'\upsilon = 0, \qquad \nabla'\upsilon_{,} = 0,$$

et de plus

$$(26)\quad \begin{cases} \nabla'\varkappa = (aD_x + bD_y + cD_z)(\square\upsilon + \square_{,}\upsilon_{,}), \\ \nabla'\varkappa_{,} = (aD_x + bD_y + cD_z)({}_{,}\square\upsilon + \square_{,}\upsilon_{,}). \end{cases}$$

Enfin, si l'on pose

$$(27)\quad \nabla'\nabla^2 = \nabla,$$

on tirera des formules (25) et (26)

$$(28)\quad \nabla\varkappa = 0, \qquad \nabla\varkappa_{,} = 0,$$

et par conséquent

$$(29)\quad \begin{cases} \nabla\xi = 0, & \nabla\eta = 0, & \nabla\zeta = 0, \\ \nabla\xi_{,} = 0, & \nabla\eta_{,} = 0, & \nabla\zeta_{,} = 0. \end{cases}$$

Lorsque, dans un double système de molécules, les équations des mouvements infiniment petits, prenant une forme indépendante de la direction des axes coordonnés, se réduisent aux formules (17) ou (18), ce double système est évidemment du nombre de ceux dans lesquels la propagation du mouvement s'effectue en tous sens suivant les mêmes lois. Alors, après avoir déterminé les dilatations de volume

$$\upsilon, \quad \upsilon_{,}$$

à l'aide des formules (25), on pourra obtenir les valeurs des déplacements

$$\varkappa, \quad \varkappa_{,}$$

en intégrant les seules formules (21) ou (26). Au reste, les déplacements

$$\varkappa, \quad \varkappa_{,}$$

et

$$\xi,\quad \eta,\quad \zeta,\quad \xi_{\prime},\quad \eta_{\prime},\quad \zeta_{\prime}$$

sont, en vertu des formules (28), (29), des intégrales d'une même équation aux différences partielles, dont la forme dépend de la caractéristique ∇.

Nous observerons encore que des formules (17) ou (18), combinées entre elles, on tire

$$(30)\quad \begin{cases} (D_t^2 - E)(D_z\eta - D_y\zeta) = E_{\prime}(D_z\eta_{\prime} - D_y\zeta_{\prime}), \\ (D_t^2 - E)(D_x\zeta - D_z\xi) = E_{\prime}(D_x\zeta_{\prime} - D_z\xi_{\prime}), \\ (D_t^2 - E)(D_y\xi - D_x\eta) = E_{\prime}(D_y\xi_{\prime} - D_x\eta_{\prime}), \end{cases}$$

$$(31)\quad \begin{cases} (D_t^2 - E_{\prime\prime})(D_z\eta_{\prime} - D_y\zeta_{\prime}) = {}_{\prime}E(D_z\eta - D_y\zeta), \\ (D_t^2 - E_{\prime\prime})(D_x\zeta_{\prime} - D_z\xi_{\prime}) = {}_{\prime}E(D_x\zeta - D_z\xi), \\ (D_t^2 - E_{\prime\prime})(D_y\xi_{\prime} - D_x\eta_{\prime}) = {}_{\prime}E(D_y\xi - D_x\eta); \end{cases}$$

et par suite

$$(32)\quad \begin{cases} \nabla'(D_z\eta - D_y\zeta) = 0, & \nabla'(D_x\zeta - D_z\xi) = 0, & \nabla'(D_y\xi - D_x\eta) = 0, \\ \nabla'(D_z\eta_{\prime} - D_y\zeta_{\prime}) = 0, & \nabla'(D_x\zeta_{\prime} - D_z\xi_{\prime}) = 0, & \nabla'(D_y\xi_{\prime} - D_x\eta_{\prime}) = 0. \end{cases}$$

Considérons maintenant le cas où les six fonctions

$$G,\quad G_{\prime},\quad {}_{\prime}G,\quad G_{\prime\prime},\quad H,\quad H_{\prime\prime}$$

et les sommes des termes du second degré ou d'un degré supérieur, renfermées dans les fonctions

$$H_{\prime},\quad H,$$

se réduisent à des fonctions de μ et de $v^2 + w^2$; alors, en raisonnant comme dans le paragraphe IV, on trouve

$$(33)\quad \begin{cases} M = E + F D_y^2, & N = E + F D_z^2, \\ P = F D_y D_z, & Q = K D_z, \quad R = K D_y; \end{cases}$$

$$(34)\quad \begin{cases} M_{\prime} = E_{\prime} + F_{\prime} D_y^2, & N_{\prime} = E_{\prime} + F_{\prime} D_z^2, \\ P_{\prime} = F_{\prime} D_y D_z, & Q_{\prime} = K_{\prime} D_z, \quad R_{\prime} = K_{\prime} D_y; \end{cases}$$

$$(35)\quad \begin{cases} {}_{\prime}M = {}_{\prime}E + {}_{\prime}F D_y^2, & {}_{\prime}N = {}_{\prime}E + {}_{\prime}F D_z^2, \\ {}_{\prime}P = {}_{\prime}F D_y D_z, & {}_{\prime}Q = {}_{\prime}K D_z, \quad {}_{\prime}R = {}_{\prime}K D_y; \end{cases}$$

$$(36)\quad \begin{cases} M_{\prime\prime} = E_{\prime\prime} + F_{\prime\prime} D_y^2, & N_{\prime\prime} = E_{\prime\prime} + F_{\prime\prime} D_z^2, \\ {}_{\prime\prime}P = F_{\prime\prime} D_y D_z, & Q_{\prime\prime} = K_{\prime\prime} D_z, \quad R_{\prime\prime} = K_{\prime\prime} D_y; \end{cases}$$

et par suite

$$(37)\quad (L - D_t^2)\xi + K(D_y\eta + D_z\zeta) \quad + \quad L_{\prime}\xi_{\prime} + K_{\prime}(D_y\eta_{\prime} + D_z\zeta_{\prime}) = 0,$$

$$(38)\quad \begin{cases} (E - D_t^2)\eta + D_y[K\xi + F(D_y\eta + D_z\zeta)] + E_{\prime}\eta_{\prime} + D_y[K_{\prime}\xi_{\prime} + F_{\prime}(D_y\eta_{\prime} + D_z\zeta_{\prime})] = 0, \\ (E - D_t^2)\zeta + D_z[K\xi + F(D_y\eta + D_z\zeta)] + E_{\prime}\zeta_{\prime} + D_z[K_{\prime}\xi_{\prime} + F_{\prime}(D_y\eta_{\prime} + D_z\zeta_{\prime})] = 0; \end{cases}$$

$$(39)\quad (L_{\prime\prime} - D_t^2)\xi_{\prime} + K_{\prime\prime}(D_y\eta_{\prime} + D_z\zeta_{\prime}) \quad + \quad {}_{\prime}L\xi + {}_{\prime}K(D_y\eta + D_z\zeta) = 0,$$

$$(40)\quad \begin{cases} (E_{\prime\prime} - D_t^2)\eta_{\prime} + D_y[K_{\prime\prime}\xi_{\prime} + F_{\prime\prime}(D_y\eta_{\prime} + D_z\zeta_{\prime})] + {}_{\prime}E\eta + D_y[{}_{\prime}K\xi + {}_{\prime}F(D_y\eta + D_z\zeta)] = 0, \\ (E_{\prime\prime} - D_t^2)\zeta_{\prime} + D_z[K_{\prime\prime}\xi_{\prime} + F_{\prime\prime}(D_y\eta_{\prime} + D_z\zeta_{\prime})] + {}_{\prime}E\zeta + D_z[{}_{\prime}K\xi + {}_{\prime}F(D_y\eta + D_z\zeta)] = 0; \end{cases}$$

E, F, K, L ; $E_{\prime}, F_{\prime}, K_{\prime}, L_{\prime}$; ${}_{\prime}E, {}_{\prime}F, {}_{\prime}K, {}_{\prime}L$; $E_{\prime\prime}, F_{\prime\prime}, K_{\prime\prime}, L_{\prime\prime}$ désignant des fonctions entières de $u = D_x$, et de la somme

$$v^2 + w^2 = D_y^2 + D_z^2,$$

mais généralement composées chacune d'un nombre infini de termes. D'ailleurs on tire des formules (38) et (40), non seulement

$$(41)\quad \begin{cases} [D_t^2 - E - F(D_y^2 + D_z^2)](D_y\eta + D_z\zeta) - K(D_y^2 + D_z^2)\xi \\ \quad - [E_{\prime} + F_{\prime}(D_y^2 + D_z^2)](D_y\eta_{\prime} + D_z\zeta_{\prime}) - K_{\prime}(D_y^2 + D_z^2)\xi_{\prime} = 0, \\ [D_t^2 - E_{\prime\prime} - F_{\prime\prime}(D_y^2 + D_z^2)](D_y\eta_{\prime} + D_z\zeta_{\prime}) - K_{\prime\prime}(D_y^2 + D_z^2)\xi_{\prime} \\ \quad - [{}_{\prime}E + {}_{\prime}F(D_y^2 + D_z^2)](D_y\eta + D_z\zeta) - {}_{\prime}K(D_y^2 + D_z^2)\xi = 0, \end{cases}$$

mais encore

$$(42)\quad \begin{cases} (D_t^2 - E)(D_z\eta - D_y\zeta) - E_{\prime}(D_z\eta_{\prime} - D_y\zeta_{\prime}) = 0, \\ (D_t^2 - E_{\prime\prime})(D_z\eta_{\prime} - D_y\zeta_{\prime}) - {}_{\prime}E(D_z\eta - D_y\zeta) = 0; \end{cases}$$

puis des formules (42), combinées entre elles,

$$(43)\quad \begin{cases} [D_t^2 - E)(D_t^2 - E_{\prime\prime}) - {}_{\prime}EE_{\prime}](D_z\eta - D_y\zeta) = 0, \\ [D_t^2 - E)(D_t^2 - E_{\prime\prime}) - {}_{\prime}EE_{\prime}](D_z\eta_{\prime} - D_y\zeta_{\prime}) = 0. \end{cases}$$

Lorsque, dans un double système de molécules, les équations des mouvements infiniment petits, prenant une forme indépendante de la direction assignée aux axes rectangulaires des y et z, se réduisent aux formules (37), (38), (39), (40), ce double système est évidemment du nombre de ceux dans lesquels la propagation du mouvement s'effectue en tous sens suivant les mêmes lois autour d'un axe quelconque paral-

lèle à l'axe des x. Alors les sommes

$$D_y\eta + D_z\zeta, \quad D_y\eta_{,} + D_z\zeta_{,}$$

représentent les dilatations en surface, mesurées, pour les deux systèmes de molécules, dans un plan parallèle au plan des y, z; et les équations (37), (39), (41) déterminent séparément ces dilatations, avec les déplacements moléculaires

$$\xi, \quad \xi_{,}$$

mesurés parallèlement au même plan.

Quant aux équations (43), elles déterminent séparément les deux différences

$$D_z\eta - D_y\zeta, \quad D_z\eta_{,} - D_y\zeta_{,},$$

et se confondent avec la première et la seconde des formules (32).

Les diverses formules, rappelées ou obtenues dans ce paragraphe, paraissent spécialement applicables à la recherche des lois suivant lesquelles les ondulations de l'éther se propagent à travers les différents corps solides ou fluides. Dans cette recherche, les équations (17), (18) doivent correspondre aux corps isophanes, les équations (37), (38), (39), (40), aux cristaux qui offrent un seul axe optique, et les équations (1), (2), aux cristaux qui présentent deux axes optiques distincts l'un de l'autre.

MÉMOIRE

SUR

LA RÉFLEXION ET LA RÉFRACTION

D'UN MOUVEMENT SIMPLE

TRANSMIS

D'UN SYSTÈME DE MOLÉCULES A UN AUTRE,

CHACUN DE CES DEUX SYSTÈMES ÉTANT SUPPOSÉ HOMOGÈNE ET TELLEMENT CONSTITUÉ QUE LA PROPAGATION DES MOUVEMENTS INFINIMENT PETITS S'Y EFFECTUE EN TOUS SENS SUIVANT LES MÊMES LOIS.

Considérations générales.

Pour résoudre un grand nombre de problèmes de Physique mathématique, et en particulier le problème de la réflexion ou de la réfraction d'un mouvement simple, il fallait d'abord trouver un moyen d'obtenir les équations de condition relatives aux limites des corps considérés comme des systèmes de molécules. Tel est l'objet d'un Mémoire que j'ai publié il y a quelques mois, et qui a pour titre *Méthode générale propre à fournir les équations de condition relatives aux limites des corps, etc.* (*voir* les *Comptes rendus* des séances de l'Académie pour le premier semestre de l'année 1839 [1], et aussi l'Ouvrage intitulé *Recueil de Mémoires sur divers points de Physique mathématique*). Je me propose maintenant d'appliquer la méthode générale, exposée dans le Mémoire que je viens de rappeler, à la recherche des lois suivant lesquelles un mouvement simple, propagé dans un système homogène de

[1] *Œuvres de Cauchy*, série I, t. IV, extraits 33, 34, 35, p. 193, 199, 214.

molécules, se trouve réfléchi ou réfracté par la surface qui sépare ce premier système d'un second. Pour fixer les idées, je considère spécialement ici le cas où chacun des systèmes donnés est du nombre de ceux dans lesquels les équations des mouvements infiniment petits prennent une forme indépendante de la direction des axes coordonnés, et dans lesquels, en conséquence, la propagation du mouvement s'effectue en tous sens suivant les mêmes lois. Je suppose encore qu'on peut, sans erreur possible, réduire les équations dont il s'agit, à des équations homogènes, comme on le fait dans la théorie de la lumière, lorsqu'on néglige la dispersion. Enfin, je considère un mouvement simple dans lequel la densité reste invariable. Cela posé, en joignant aux équations des mouvements infiniment petits les équations de condition relatives à la surface de séparation des deux systèmes, j'établis les lois de la réflexion et de la réfraction des mouvements infiniment petits. Ces lois sont de deux espèces. Les unes, indépendantes de la forme des équations de condition, ont été déjà développées dans un Mémoire antérieur sur la réflexion et la réfraction de la lumière. Elles sont relatives aux changements qu'éprouvent les épaisseurs des ondes planes et les directions de leurs plans, quand on passe des ondes incidentes aux ondes réfléchies ou réfractées. Les autres lois dépendent de la forme des équations de condition, et se rapportent aux changements que les amplitudes des vibrations des molécules, et les paramètres angulaires, propres à déterminer les positions des plans qui terminent ces ondes, éprouvent en vertu de la réflexion et de la réfraction. Elles sont exprimées par des équations finies qui renferment avec les angles d'incidence et de réfraction, non seulement les amplitudes et les paramètres angulaires relatifs à chaque espèce d'ondes, mais encore deux constantes correspondant à chaque milieu. Lorsqu'on suppose ces équations finies applicables à la théorie de la lumière, il suffit de réduire à l'unité la seconde des deux constantes dont nous venons de parler, et d'attribuer à l'autre une valeur réelle pour obtenir les formules de Fresnel, relatives à la réflexion et à la réfraction opérées par la première ou la seconde surface des corps transpa-

rents; et alors il existe toujours un angle de polarisation complète, c'est-à-dire un angle d'incidence pour lequel la lumière est complètement polarisée dans le plan de réflexion. Lorsqu'en réduisant la seconde constante à l'unité, on attribue à la première une valeur imaginaire, on obtient les formules dont il est question dans une lettre que j'ai adressée de Prague à M. Libri, et qui a été insérée dans les *Comptes rendus* des séances de l'Académie des Sciences en l'année 1836 (*voir* la séance du 2 mars) [1]; formules dont plusieurs ne diffèrent pas au fond de celles que M. Mac-Cullagh a données dans un article publié sous la date du 24 octobre de la même année. Enfin, lorsqu'en supposant la première constante réelle ou imaginaire, on suppose la seconde différente de l'unité, alors, en considérant les formules auxquelles on arrive comme applicables à la théorie de la lumière, on trouve, dans la réflexion opérée sur la surface d'un corps transparent, une polarisation qui demeure incomplète sous tous les angles d'incidence, comme l'est effectivement la polarisation produite par le diamant, et l'on obtient, pour représenter les rayons réfléchis ou réfractés par un corps opaque, des formules distinctes de celles que j'avais trouvées en 1836. Des expériences faites avec beaucoup de soin pourront seules nous apprendre si les phénomènes, déjà représentés avec une assez grande précision par les anciennes formules, le seront mieux encore par les autres.

La bienveillance avec laquelle les géomètres et les physiciens ont accueilli mes précédents Mémoires, m'encourage à leur présenter avec confiance ce nouveau travail, dans lequel se trouve traité, pour la première fois, par des méthodes rigoureuses substituées à des formules empiriques ou à des hypothèses plus ou moins gratuites, le problème de la réflexion et de la réfraction des mouvements infiniment petits.

(1) *Œuvres de Cauchy*, série I, t. IV, extrait 4, p. 11.

§ 1. — *Équations des mouvements infiniment petits d'un système homogène de molécules. Réduction de ces équations, dans le cas où elles deviennent indépendantes de la direction des axes coordonnés.*

Pour obtenir, sous la forme la plus simple, les équations des mouvements infiniment petits d'un système homogène de molécules, il suffit de réduire à zéro les variables $\xi_{,}$, $\eta_{,}$, $\zeta_{,}$, dans les équations (6) de la page 59 qui deviennent alors

$$(1)\qquad \begin{cases} (L - D_t^2)\xi + R\eta + Q\zeta = 0, \\ R\xi - (M - D_t^2)\eta + P\zeta = 0, \\ Q\xi - P\eta + (N - D_t^2)\zeta = 0. \end{cases}$$

Dans ces équations,

$$\xi,\quad \eta,\quad \zeta$$

sont les trois déplacements d'une molécule, considérés comme fonctions du temps t et des coordonnées rectangulaires x, y, z; tandis que

$$L,\quad M,\quad N,\quad P,\quad Q,\quad R$$

peuvent être censés représenter des fonctions entières des caractéristiques

$$D_x,\quad D_y,\quad D_z.$$

Seulement, dans le cas général, ces fonctions entières, développées suivant les puissances ascendantes de D_x, D_y, D_z, sont composées d'un nombre infini de termes.

Dans le cas où les équations (1) prennent une forme indépendante de la direction des axes coordonnés (*voir* les pages 134 et suivantes, et aussi le Mémoire sur la théorie de la lumière, lithographié sous la date d'août 1836, page 55 et 59) [1], on a

$$\begin{aligned} L &= E + F D_x^2, & M &= E + F D_y^2, & N &= E + F D_z^2, \\ P &= F D_y D_z, & Q &= F D_z D_x, & R &= F D_x D_y, \end{aligned}$$

[1] *Œuvres de Cauchy*, série II, t. XV.

E, F, désignant deux fonctions entières du trinome

$$D_x^2 + D_y^2 + D_z^2;$$

et par suite,

$$(2)\qquad (D_t^2 - E)\xi = F D_x \upsilon,\qquad (D_t^2 - E)\eta = F D_y \upsilon,\qquad (D_t^2 - E)\zeta = F D_z \upsilon,$$

υ désignant, pour le point (x, y, z), la dilatation du volume déterminée par la formule

$$(3)\qquad \upsilon = D_x\xi + D_y\eta + D_z\zeta,$$

de laquelle on tire, en la combinant avec les équations (2),

$$(4)\qquad [D_t^2 - E - (D_x^2 + D_y^2 + D_z^2)F]\upsilon = 0.$$

Soient d'ailleurs

$$a,\quad b,\quad c$$

les cosinus des angles formés par un axe fixe, prolongé dans un certain sens, avec les demi-axes des x, y, z positives; et $\varkappa$ le déplacement d'une molécule, mesuré parallèlement à cet axe. On aura

$$(5)\qquad \varkappa = a\xi + b\eta + c\zeta,$$

et l'on tirera des formules (2)

$$(6)\qquad (D_t^2 - E)\varkappa = (a D_x + b D_y + c D_z) F\upsilon,$$

puis de celle-ci, combinée avec la formule (4),

$$(7)\qquad (D_t^2 - E)[D_t^2 - E - (D_x^2 + D_y^2 + D_z^2)F]\varkappa = 0.$$

Lorsque la dilatation υ, et sa dérivée du premier ordre, relative à t, savoir $D_t\upsilon$, sont nulles à l'origine du mouvement, elles sont toujours nulles, en vertu de la formule (4). Alors la densité du système de molécules donné reste invariable pendant la durée du mouvement; et c'est ce qui paraît avoir lieu à l'égard des mouvements infiniment petits de l'éther qui, dans des corps isophanes, occasionnent la sensation de la lumière. Alors aussi la formule (3) donne

$$(8)\qquad D_x\xi + D_y\eta + D_z\zeta = 0,$$

et les formules (2) se réduisent à

$$(9)\qquad (D_t^2 - E)\xi = 0, \qquad (D_t^2 - E)\eta = 0, \qquad (D_t^2 - E)\zeta = 0.$$

Lorsque les équations des mouvements infiniment petits sont homogènes, E devient proportionnel à $D_x^2 + D_y^2 + D_z^2$, et F se réduit à une constante. On peut donc alors supposer

$$(10)\qquad E = \iota(D_x^2 + D_y^2 + D_z^2)$$

et

$$(11)\qquad F = \iota f,$$

ι, f désignant deux constantes réelles. Cela posé, les formules (2), (4) et (7) donneront

$$(12)\qquad \begin{cases} [D_t^2 - \iota(D_x^2 + D_y^2 + D_z^2)]\xi = \iota f D_x \upsilon, \\ [D_t^2 - \iota(D_x^2 + D_y^2 + D_z^2)]\eta = \iota f D_y \upsilon, \\ [D_t^2 - \iota(D_x^2 + D_y^2 + D_z^2)]\zeta = \iota f D_z \upsilon; \end{cases}$$

$$(13)\qquad [D_t^2 - \iota(1+f)(D_x^2 + D_y^2 + D_z^2)]\upsilon = 0,$$

$$(14)\qquad [D_t^2 - \iota(D_x^2 + D_y^2 + D_z^2)][D_t^2 - \iota(1+f)(D_x^2 + D_y^2 + D_z^2)]\varpi = 0.$$

§ II. — *Équations symboliques des mouvements infiniment petits. Mouvements simples.*

Les équations (1), (2), (3), (4), (7), ... du paragraphe précédent se trouveront vérifiées, si l'on prend pour

$$\xi,\ \eta,\ \zeta,\ \varpi,\ \upsilon$$

les parties réelles de variables imaginaires

$$\bar{\xi},\ \bar{\eta},\ \bar{\zeta},\ \bar{\varpi},\ \bar{\upsilon}$$

propres à vérifier des équations de même forme. Ces nouvelles variables sont ce qu'on peut appeler les *déplacements symboliques*, mesurés parallèlement aux axes coordonnés ou à un axe fixe, et la *dilatation symbolique* du volume. Les nouvelles équations dont il s'agit peuvent

être pareillement désignées sous le nom d'*équations symboliques*. Dans le cas où les équations des mouvements infiniment petits deviendront indépendantes de la direction des axes coordonnés, on aura, en vertu des formules (2) et (3) du paragraphe I,

$$(1)\qquad (D_t^2 - E)\bar{\xi} = F D_x \bar{\upsilon}, \qquad (D_t^2 - E)\bar{\eta} = F D_y \bar{\upsilon}, \qquad (D_t^2 - E)\bar{\zeta} = F D_z \bar{\upsilon},$$

la valeur de $\bar{\upsilon}$ étant

$$(2)\qquad \upsilon = D_x\bar{\xi} + D_y\bar{\eta} + D_z\bar{\zeta},$$

ou, ce qui revient au même,

$$(3)\qquad \begin{cases} (D_t^2 - E)\bar{\xi} = F D_x(D_x\bar{\xi} + D_y\bar{\eta} + D_z\bar{\zeta}), \\ (D_t^2 - E)\bar{\eta} = F D_y(D_x\bar{\xi} + D_y\bar{\eta} + D_z\bar{\zeta}), \\ (D_t^2 - E)\bar{\zeta} = F D_z(D_x\bar{\xi} + D_y\bar{\eta} + D_z\bar{\zeta}). \end{cases}$$

Un moyen fort simple d'obtenir un système d'intégrales particulières des équations (3), ou, ce qui revient au même, des équations (1) et (2), est de supposer

$$(4)\qquad \bar{\xi} = A e^{ux+vy+wz-st}, \qquad \bar{\eta} = B e^{ux+vy+wz-st}, \qquad \bar{\zeta} = C e^{ux+vy+wz-st};$$

et par suite

$$(5)\qquad \bar{\upsilon} = (uA + vB + wC)e^{ux+vy+wz-st},$$

u, v, w, s, A, B, C étant des constantes réelles ou imaginaires propres à vérifier les formules

$$(6)\qquad \begin{cases} (s^2 - \mathcal{E})A = \mathcal{F} u\,(uA + vB + wC), \\ (s^2 - \mathcal{E})B = \mathcal{F} v\,(uA + vB + wC), \\ (s^2 - \mathcal{E})C = \mathcal{F} w\,(uA + vB + wC) \end{cases}$$

dans lesquelles

$$\mathcal{E},\ \mathcal{F}$$

représentent ce que deviennent

$$E,\ F$$

quand on y remplace les lettres caractéristiques

$$D_x,\ D_y,\ D_z,\ D_t$$

par les coefficients

$$u, \quad v, \quad w, \quad s.$$

D'ailleurs on pourra toujours supposer que, dans les formules (4), la partie imaginaire de la constante s est le produit de $\sqrt{-1}$ par une quantité positive.

En posant pour abréger

$$(7) \qquad u^2 + v^2 + w^2 = k^2,$$

on tire des équations (6), respectivement multipliées par u, v, w, puis combinées entre elles par voie d'addition

$$(8) \qquad (s^2 - \mathcal{E} - \mathcal{F} k^2)(u\mathrm{A} + v\mathrm{B} + w\mathrm{C}) = 0;$$

et à l'aide de cette dernière formule, on reconnaît facilement que, pour satisfaire aux équations (6), on devra supposer ou

$$(9) \qquad s^2 = \mathcal{E}, \qquad u\mathrm{A} + v\mathrm{B} + w\mathrm{C} = 0,$$

ou

$$(10) \qquad s^2 = \mathcal{E} + \mathcal{F} k^2, \qquad \frac{\mathrm{A}}{u} = \frac{\mathrm{B}}{v} = \frac{\mathrm{C}}{w}.$$

On arriverait aux mêmes conclusions en observant que, si l'on nomme

$$a, \quad b, \quad c$$

les cosinus des angles formés par un axe fixe avec les demi-axes des x, y, z positives, $\varkappa$ le déplacement mesuré parallèlement à cet axe, et $\bar{\varkappa}$ le déplacement symbolique correspondant, on aura, en vertu des formules (5), (7) du paragraphe I,

$$(11) \qquad \bar{\varkappa} = a\bar{\xi} + b\bar{\eta} + c\bar{\zeta},$$

$$(12) \qquad (\mathrm{D}_t^2 - \mathrm{E})[\mathrm{D}_t^2 - \mathrm{E} - (\mathrm{D}_x^2 + \mathrm{D}_y^2 + \mathrm{D}_z^2)\mathrm{F}]\bar{\varkappa} = 0,$$

et que de ces dernières, combinées avec les formules (4), on tirera

$$(13) \qquad (s^2 - \mathcal{E})(s^2 - \mathcal{E} - \mathcal{F} k^2) = 0.$$

Le système d'intégrales particulières des équations (3), représenté

par les équations (4) jointes aux formules (9) ou (10), est ce que nous appelons un système d'*intégrales simples*; et le mouvement représenté par ces intégrales simples est un *mouvement simple*. Dans un semblable mouvement, si l'on pose pour abréger

$$(14) \qquad a\mathrm{A} + b\mathrm{B} + c\mathrm{C} = 0,$$

la valeur de $\bar{\varkappa}$ déterminée par la formule (11) sera

$$(15) \qquad \bar{\varkappa} = \mathrm{O}\, e^{ux + vy + wz - st}.$$

Cela posé, soient

$$(16) \qquad u = \mathrm{U} + \mathrm{u}\sqrt{-1}, \qquad v = \mathrm{V} + \mathrm{v}\sqrt{-1}, \qquad w = \mathrm{W} + \mathrm{w}\sqrt{-1},$$

$$(17) \qquad s = \mathrm{S} + \mathrm{s}\sqrt{-1},$$

$$(18) \qquad \mathrm{O} = \mathrm{h}\, e^{\varpi\sqrt{-1}},$$

u, v, w, s, U, V, W, S, h, ϖ désignant des constantes réelles, parmi lesquelles

$$\mathrm{s}, \quad \mathrm{h}$$

peuvent être censées positives, et prenons encore

$$(19) \qquad \mathrm{k} = \sqrt{\mathrm{u}^2 + \mathrm{v}^2 + \mathrm{w}^2}, \qquad \mathrm{K} = \sqrt{\mathrm{U}^2 + \mathrm{V}^2 + \mathrm{W}^2},$$

$$(20) \qquad \mathrm{k}_\iota = \mathrm{u}x + \mathrm{v}y + \mathrm{w}z, \qquad \mathrm{K}_\mathrm{R} = \mathrm{U}x + \mathrm{V}y + \mathrm{W}z.$$

Les valeurs numériques de

$$\iota, \quad \mathrm{R}$$

exprimeront les distances d'une molécule aux deux *plans invariables* représentés par les équations

$$(21) \qquad \mathrm{u}x + \mathrm{v}y + \mathrm{w}z = 0,$$

$$(22) \qquad \mathrm{U}x + \mathrm{V}y + \mathrm{W}z = 0,$$

et la formule (14) donnera

$$(23) \qquad \bar{\varkappa} = \mathrm{h}\, e^{\mathrm{K}\mathrm{R} - \mathrm{S}t}\, e^{(\mathrm{k}\iota - \mathrm{s}t + \varpi)\sqrt{-1}},$$

puis on en conclura

$$(24) \qquad \varkappa = \mathrm{h}\, e^{\mathrm{K}\mathrm{R} - \mathrm{S}t} \cos(\mathrm{k}\iota - \mathrm{s}t + \varpi).$$

En vertu de cette dernière formule, le déplacement $\varkappa$ s'évanouit : 1° pour une molécule donnée, à des instants séparés les uns des autres par des intervalles dont le double

$$T = \frac{2\pi}{s} \tag{25}$$

est la *durée d'une vibration* moléculaire ; 2° à un instant donné, pour toutes les molécules comprises dans des plans équidistants, parallèles au plan invariable que représente l'équation (21), et séparés les uns des autres par des intervalles dont le double

$$l = \frac{2\pi}{k} \tag{26}$$

est la *longueur d'une ondulation*, ou l'épaisseur d'une *onde plane*. L'exponentielle

$$e^{Kn-St}$$

représente le *module* du mouvement simple,

$$K, \quad S$$

étant les *coefficients d'extinction* relatifs à l'espace et au temps ; ϖ désigne le *paramètre angulaire* relatif à l'axe fixe que l'on considère,

$$h\, e^{Kn-St}$$

la *demi-amplitude* des vibrations relatives au même axe, et

$$h$$

la valeur initiale de cette demi-amplitude en chaque point du plan invariable représenté par l'équation (22). Enfin la vitesse de propagation Ω des ondes planes est déterminée par la formule

$$\Omega = \frac{s}{k} = \frac{l}{T}. \tag{27}$$

Dans un mouvement simple, déterminé par le système des formules (4) et (9), l'équation (5) donne

$$\bar{\upsilon} = 0, \tag{28}$$

par conséquent

$$\upsilon = 0. \tag{29}$$

Donc, dans un semblable mouvement, la dilatation du volume est nulle, ou, en d'autres termes, la densité demeure constante. Tels paraissent être, dans les corps isophanes, les mouvements de l'éther qui donnent naissance aux phénomènes lumineux.

De la seconde des formules (9) ou (10) jointe aux formules (4) on tire

$$u\bar{\xi} + v\bar{\eta} + w\bar{\zeta} = 0 \tag{30}$$

ou

$$\frac{\bar{\xi}}{u} = \frac{\bar{\eta}}{v} = \frac{\bar{\zeta}}{w}. \tag{31}$$

D'ailleurs la formule (30) ou (31) entraîne la suivante :

$$u\xi + v\eta + w\zeta = 0 \tag{32}$$

ou

$$\frac{\xi}{u} = \frac{\eta}{v} = \frac{\zeta}{w}, \tag{33}$$

1° lorsque les coefficients u, v, w sont réels ; 2° lorsque ces coefficients n'offrent pas de parties réelles. Dans le premier cas, les formules (32) et (33) donneront

$$U\xi + V\eta + W\zeta = 0, \tag{34}$$

ou

$$\frac{\xi}{U} = \frac{\eta}{V} = \frac{\zeta}{W}; \tag{35}$$

dans le second cas elles donneront

$$\mathfrak{u}\xi + \mathfrak{v}\eta + \mathfrak{w}\zeta = 0 \tag{36}$$

ou

$$\frac{\xi}{\mathfrak{u}} = \frac{\eta}{\mathfrak{v}} = \frac{\zeta}{\mathfrak{w}}. \tag{37}$$

En conséquence les vibrations moléculaires, représentées par les équations (4) jointes aux formules (9) ou (10), seront, dans le premier cas, parallèles ou perpendiculaires au plan invariable représenté par l'équation (22), et dans le second cas parallèles ou perpendiculaires au plan invariable représenté par l'équation (21).

Si les équations des mouvements infiniment petits deviennent homogènes, on aura, en vertu des formules (10), (11) du paragraphe I,

$$(38)\qquad \mathcal{E} = \iota k^2, \qquad \mathcal{F} = \iota \mathrm{f},$$

ι, f désignant des constantes réelles, et par conséquent les valeurs de s^2 que fournissent les équations (9), (10) deviendront

$$(39)\qquad s^2 = \iota k^2, \qquad s^2 = \iota(1+\mathrm{f})k^2,$$

ou, ce qui revient au même,

$$(40)\qquad s^2 = \iota(u^2+v^2+w^2), \qquad s^2 = \iota(1+\mathrm{f})(u^2+v^2+w^2).$$

§ III. — *Sur les perturbations qu'éprouvent les mouvements simples, lorsque les équations des mouvements infiniment petits sont altérées dans le voisinage d'une surface plane.*

Concevons que, les molécules qui composent le système donné étant toutes situées d'un même côté d'un plan fixe, la constitution du système, et par suite les équations des mouvements infiniment petits se trouvent altérées dans le voisinage de ce plan. Supposons, par exemple, que toutes les molécules étant situées du côté des x positives, les équations des mouvements infiniment petits conservent constamment la même forme pour des valeurs de x positives et sensiblement différentes de zéro, mais que, dans le voisinage du plan des y, z, ces équations changent de forme sans cesser d'être linéaires, et de telle sorte que les coefficients des variables principales

$$\xi,\quad \eta,\quad \zeta$$

et de leurs dérivées, devenus fonctions de la coordonnée x, varient

très rapidement avec elle entre les limites très rapprochées

$$x = 0, \qquad x = \varepsilon.$$

Supposons d'ailleurs que, dans ces mêmes équations, transformées d'abord en équations différentielles par la méthode développée dans un précédent Mémoire, puis ramenées au premier ordre, et résolues par rapport à

$$\frac{d\xi}{dx},\quad \frac{d\eta}{dy},\quad \ldots,$$

les produits des coefficients ou plutôt des variations par la distance ε restent très petits. Alors un ou plusieurs mouvements simples, propagés séparément ou simultanément dans le système donné, éprouveront dans le voisinage du plan fixe des y, z des perturbations en vertu desquelles les valeurs des déplacements effectifs

$$\xi,\quad \eta,\quad \zeta$$

et par suite des déplacements symboliques

$$\bar{\xi},\quad \bar{\eta},\quad \bar{\zeta}$$

se trouveront altérées pour de très petites valeurs positives de x; mais, à l'aide des principes établis dans le Mémoire dont il s'agit, on prouvera que les valeurs altérées et les valeurs non altérées sont liées entre elles par certaines équations de condition qui subsistent dans le voisinage du plan fixe, et spécialement pour une valeur nulle de la coordonnée x. Entrons à ce sujet dans quelques détails.

Considérons, pour fixer les idées, le cas où, avant d'être altérées, les équations des mouvements infiniment petits sont homogènes et indépendantes de la direction des axes coordonnés. Alors les équations symboliques de ces mouvements, c'est-à-dire les équations (3) du paragraphe II, seront, pour des valeurs de x positives et sensiblement différentes de zéro, déterminées par des équations de la forme

$$(1)\qquad \left\{\begin{aligned}
&[\mathrm{D}_t^2 - \iota(\mathrm{D}_x^2+\mathrm{D}_y^2+\mathrm{D}_z^2)]\bar{\xi} = \iota\mathrm{f}\,\mathrm{D}_x(\mathrm{D}_x\bar{\xi}+\mathrm{D}_y\bar{\eta}+\mathrm{D}_z\bar{\zeta}),\\
&[\mathrm{D}_t^2 - \iota(\mathrm{D}_x^2+\mathrm{D}_y^2+\mathrm{D}_z^2)]\bar{\eta} = \iota\mathrm{f}\,\mathrm{D}_y(\mathrm{D}_x\bar{\xi}+\mathrm{D}_y\bar{\eta}+\mathrm{D}_z\bar{\zeta}),\\
&[\mathrm{D}_t^2 - \iota(\mathrm{D}_x^2+\mathrm{D}_y^2+\mathrm{D}_z^2)]\bar{\zeta} = \iota\mathrm{f}\,\mathrm{D}_z(\mathrm{D}_x\bar{\xi}+\mathrm{D}_y\bar{\eta}+\mathrm{D}_z\bar{\zeta}).
\end{aligned}\right.$$

Alors aussi les déplacements symboliques, correspondants à un mouvement simple, seront, pour les valeurs de x positives et sensiblement différentes de zéro, déterminées par des équations de la forme

$$(2)\qquad \bar{\xi} = A\, e^{ux+vy+wz-st}, \qquad \bar{\eta} = B\, e^{ux+vy+wz-st}, \qquad \bar{\zeta} = C\, e^{ux+vy+wz-st},$$

les constantes

$$u,\quad v,\quad w,\quad s,\qquad A,\quad B,\quad C$$

étant assujetties à vérifier l'un des deux systèmes d'équations

$$(3)\qquad s^2 = \iota(u^2+v^2+w^2), \qquad uA + vB + wC = 0,$$

$$(4)\qquad s^2 = \iota(1+f)(u^2+v^2+w^2), \qquad \frac{A}{u} = \frac{B}{v} = \frac{C}{w},$$

dans lesquels ι, f représentent deux quantités réelles. Le mouvement simple dont il s'agit sera du nombre de ceux qui ne s'éteignent point en se propageant, si les coefficients d'extinction relatifs à l'espace et au temps s'évanouissent, c'est-à-dire, en d'autres termes, si les coefficients

$$u,\quad v,\quad w,\quad s$$

des variables indépendantes dans l'exponentielle

$$e^{ux+vy+wz-st}$$

n'offrent pas de parties réelles, par conséquent si l'on a

$$(5)\qquad u = \mathrm{u}\sqrt{-1}, \qquad v = \mathrm{v}\sqrt{-1}, \qquad w = \mathrm{w}\sqrt{-1}, \qquad s = \mathrm{s}\sqrt{-1},$$

u, v, w, s étant des quantités réelles. Le même mouvement simple sera du nombre de ceux dans lesquels la densité de l'éther reste invariable, si les valeurs précédentes de

$$u,\quad v,\quad w,\quad s$$

vérifient la première des équations (3), réduite à

$$(6)\qquad \mathrm{s}^2 = \iota(\mathrm{u}^2+\mathrm{v}^2+\mathrm{w}^2),$$

ce qui suppose la constante ι positive. C'est ce qui aura lieu, par exemple, si en posant pour abréger

$$(7)\qquad \mathrm{k} = \sqrt{\mathrm{u}^2+\mathrm{v}^2+\mathrm{w}^2}, \qquad \Omega = \sqrt{\iota},$$

on prend

$$(8)\qquad \mathrm{s} = \Omega\mathrm{k}.$$

Alors, le mouvement simple sera représenté par le système des équations

$$(9)\qquad \begin{cases} \bar{\xi} = A\, e^{(\mathrm{u}x+\mathrm{v}y+\mathrm{w}z-\mathrm{s}t)\sqrt{-1}}, \\ \bar{\eta} = B\, e^{(\mathrm{u}x+\mathrm{v}y+\mathrm{w}z-\mathrm{s}t)\sqrt{-1}}, \\ \bar{\zeta} = C\, e^{(\mathrm{u}x+\mathrm{v}y+\mathrm{w}z-\mathrm{s}t)\sqrt{-1}}, \end{cases}$$

jointes à la formule (8) et à la seconde des formules (3), ou, ce qui revient au même, à la suivante

$$(10)\qquad \mathrm{u}A + \mathrm{v}B + \mathrm{w}C = 0.$$

Si d'ailleurs on pose

$$(11)\qquad \mathrm{u}x + \mathrm{v}y + \mathrm{w}z = \mathrm{k}\iota$$

et

$$(12)\qquad A = a\, e^{\lambda\sqrt{-1}}, \qquad B = b\, e^{\mu\sqrt{-1}}, \qquad C = c\, e^{\nu\sqrt{-1}},$$

a, b, c désignant des quantités positives et λ, μ, ν des arcs réels, les formules (9) deviendront

$$(13)\qquad \bar{\xi} = a\, e^{(\mathrm{k}\iota-\mathrm{s}t+\lambda)\sqrt{-1}}, \qquad \bar{\eta} = b\, e^{(\mathrm{k}\iota-\mathrm{s}t+\mu)\sqrt{-1}}, \qquad \bar{\zeta} = c\, e^{(\mathrm{k}\iota-\mathrm{s}t+\nu)\sqrt{-1}},$$

et l'on en conclura

$$(14)\qquad \xi = a\cos(\mathrm{k}\iota-\mathrm{s}t+\lambda), \quad \eta = b\cos(\mathrm{k}\iota-\mathrm{s}t+\mu), \quad \zeta = c\cos(\mathrm{k}\iota-\mathrm{s}t+\nu).$$

Soient maintenant

$$(15)\qquad \frac{\partial\xi}{\partial x} = \varphi, \qquad \frac{\partial\eta}{\partial x} = \chi, \qquad \frac{\partial\zeta}{\partial x} = \psi,$$

et

$$(16)\qquad \frac{\partial\bar{\xi}}{\partial x} = \bar{\varphi}, \qquad \frac{\partial\bar{\eta}}{\partial x} = \bar{\chi}, \qquad \frac{\partial\bar{\zeta}}{\partial x} = \bar{\psi},$$

et nommons

$$\xi_0,\quad \eta_0,\quad \zeta_0,\quad \varphi_0,\quad \chi_0,\quad \psi_0$$

ou

$$\bar{\xi}_0,\quad \bar{\eta}_0,\quad \bar{\zeta}_0,\quad \bar{\varphi}_0,\quad \bar{\chi}_0,\quad \bar{\psi}_0$$

ce que deviennent, pour $x = 0$, les valeurs des variables principales

$$\xi,\quad \eta,\quad \zeta,\quad \varphi,\quad \chi,\quad \psi$$

ou

$$\bar{\xi},\quad \bar{\eta},\quad \bar{\zeta},\quad \bar{\varphi},\quad \bar{\chi},\quad \bar{\psi}$$

déterminées par le système des formules (14) et (15), ou (13) et (16), quand on commence par modifier ces valeurs, de manière qu'elles vérifient non plus les équations (1), mais ces équations altérées par la variation que subissent les coefficients des variables principales et de leurs dérivées dans le voisinage du plan des y, z. En vertu des principes établis dans le Mémoire ci-dessus mentionné, les différences

$$\bar{\xi}-\bar{\xi}_0,\quad \bar{\eta}-\bar{\eta}_0,\quad \bar{\zeta}-\bar{\zeta}_0,\quad \bar{\varphi}-\bar{\varphi}_0,\quad \bar{\chi}-\bar{\chi}_0,\quad \bar{\psi}-\bar{\psi}_0$$

vérifieront certaines équations de condition, et, pour obtenir celles-ci, on devra d'abord chercher les divers systèmes d'intégrales simples que peuvent représenter les équations (2), jointes aux formules (3) ou (4), quand on y regarde les coefficients

$$v,\quad w,\quad s$$

comme invariables, et devant acquérir, dans chaque système d'intégrales simples, les valeurs fournies par les trois dernières des équations (5). Or, dans cette hypothèse, on tirera des équations (3) ou (4), jointes à la formule (6) et à la première des formules (7),

$$(17)\qquad u^2 = -v^2,\qquad uA + (vB + wC)\sqrt{-1} = 0$$

ou

$$(18)\qquad u^2 = v^2 + w^2 - \frac{k^2}{1+f},\qquad \frac{A}{u} = \frac{B}{v\sqrt{-1}} = \frac{C}{w\sqrt{-1}}.$$

Il en résulte que, dans un mouvement simple correspondant aux valeurs imaginaires données de v, w, s, le coefficient u peut acquérir quatre valeurs distinctes, puisqu'on peut satisfaire à la première des équations (17), en prenant non seulement

$$(19)\qquad u = v\sqrt{-1}$$

mais encore

$$(20)\qquad u = -v\sqrt{-1},$$

puis à la première des équations (18), en prenant

$$(21)\qquad u = \left(\frac{k^2}{1+f} - v^2 - w^2\right)^{\frac{1}{2}}\sqrt{-1},\quad \text{ou}\quad u = -\left(\frac{k^2}{1+f} - v^2 - w^2\right)^{\frac{1}{2}}\sqrt{-1},$$

si l'on a

$$(22)\qquad \frac{k^2}{1+f} > v^2 + w^2,$$

et en prenant au contraire

$$(23)\qquad u = \left(v^2 + w^2 - \frac{k^2}{1+f}\right)^{\frac{1}{2}},\quad \text{ou}\quad u = -\left(v^2 + w^2 - \frac{k^2}{1+f}\right)^{\frac{1}{2}},$$

si l'on a

$$(24)\qquad v^2 + w^2 > \frac{k^2}{1+f}.$$

Observons à présent que, si la formule (22) se vérifie, aucune des quatre valeurs de u n'offrira de partie réelle, et qu'en conséquence aucune d'elles n'offrira de partie réelle négative, ou, en d'autres termes, inférieure à celle de

$$u = v\sqrt{-1}.$$

Donc alors, en vertu des principes établis dans le Mémoire ci-dessus rappelé, les valeurs de

$$\bar{\xi},\quad \bar{\eta},\quad \bar{\zeta},\quad \bar{\varphi},\quad \bar{\chi},\quad \bar{\psi},$$

relatives au mouvement simple qui correspond à la valeur précédente de u, vérifieront pour $x = 0$ les équations de condition

$$(25)\qquad \bar{\xi} = \bar{\xi}_0,\quad \bar{\eta} = \bar{\eta}_0,\quad \bar{\zeta} = \bar{\zeta}_0,\quad \bar{\varphi} = \bar{\varphi}_0,\quad \bar{\chi} = \bar{\chi}_0,\quad \bar{\psi} = \bar{\psi}_0.$$

Si, au contraire, la formule (24) se vérifie, alors des quatre valeurs de u, celle que détermine la seconde des équations (23) offrira seule une partie réelle négative. Donc alors les valeurs de $\bar{\xi}$, $\bar{\eta}$, ... relatives

au mouvement simple dont il s'agit vérifieront pour $x = 0$ les équations de condition qu'on obtiendra en supposant dans la formule

$$\frac{\bar{\xi}-\bar{\xi}_0}{A} = \frac{\bar{\eta}-\bar{\eta}_0}{B} = \frac{\bar{\zeta}-\bar{\zeta}_0}{C} = \frac{\bar{\varphi}-\bar{\varphi}_0}{uA} = \frac{\bar{\chi}-\bar{\chi}_0}{vB} = \frac{\bar{\psi}-\bar{\psi}_0}{wC},$$

les constantes

$$u, \quad v, \quad w, \qquad A, \quad B, \quad C$$

choisies de manière qu'on ait

$$u = -\mathfrak{v}, \qquad v = \mathrm{v}\sqrt{-1}, \qquad w = \mathrm{w}\sqrt{-1}, \qquad \frac{A}{u} = \frac{B}{\mathrm{v}\sqrt{-1}} = \frac{C}{\mathrm{w}\sqrt{-1}};$$

la valeur de $\mathfrak{v}$ étant

$$(26) \qquad \mathfrak{v} = \left(\mathrm{v}^2 + \mathrm{w}^2 - \frac{\mathrm{k}^2}{1+\mathrm{f}}\right)^{\frac{1}{2}},$$

on aura, dans ce cas, pour $x = 0$,

$$(27) \quad \frac{\bar{\xi}-\bar{\xi}_0}{-\mathfrak{v}} = \frac{\bar{\eta}-\bar{\eta}_0}{\mathrm{v}\sqrt{-1}} = \frac{\bar{\zeta}-\bar{\zeta}_0}{\mathrm{w}\sqrt{-1}} = \frac{\bar{\varphi}-\bar{\varphi}_0}{\mathfrak{v}^2} = \frac{\bar{\chi}-\bar{\chi}_0}{-\mathrm{v}\mathfrak{v}\sqrt{-1}} = \frac{\bar{\psi}-\bar{\psi}_0}{-\mathrm{w}\mathfrak{v}\sqrt{-1}}.$$

Avant d'aller plus loin, cherchons à reconnaître, d'une manière précise, dans quels cas subsistent les diverses formules ci-dessus établies.

Pour y parvenir, nous remarquerons d'abord que les diverses puissances des caractéristiques

$$D_x, \quad D_y, \quad D_z$$

renfermées dans les équations symboliques des mouvements infiniment petits se transforment en puissances, de mêmes degrés, des coefficients

$$u, \quad v, \quad w,$$

quand on suppose ces mouvements infiniment petits réduits à des mouvements simples, c'est-à-dire quand on suppose les déplacements symboliques proportionnels à une seule exponentielle de la forme

$$e^{ux+vy+wz-st}.$$

Alors les fonctions de D_x, D_y, D_z, représentées par

$$L, \quad M, \quad N, \quad P, \quad Q, \quad R$$

dans les équations (1) du paragraphe I, se transforment en des fonctions de u, v, w, désignées par

$$\mathfrak{L}, \quad \mathfrak{M}, \quad \mathfrak{N}, \quad \mathfrak{P}, \quad \mathfrak{Q}, \quad \mathfrak{R}$$

dans les précédents Mémoires. Dans cette hypothèse, réduire, comme nous l'avons fait, les équations des mouvements infiniment petits à des équations du second ordre, ou, en d'autres termes, réduire

$$L, \quad M, \quad N, \quad P, \quad Q, \quad R$$

à des fonctions qui soient du second degré par rapport au système des caractéristiques D_x, D_y, D_z, c'est évidemment réduire

$$\mathfrak{L}, \quad \mathfrak{M}, \quad \mathfrak{N}, \quad \mathfrak{P}, \quad \mathfrak{Q}, \quad \mathfrak{R}$$

à des fonctions qui soient du second degré par rapport au système des coefficients u, v, w. D'ailleurs, comme on l'a vu dans le Mémoire sur les mouvements infiniment petits d'un système de molécules, si l'on nomme

$$x, \quad y, \quad z$$

les coordonnées d'une molécule $\mathfrak{m}$ du système donné, et

$$x+\mathrm{x}, \quad y+\mathrm{y}, \quad z+\mathrm{z}$$

les coordonnées d'une autre molécule m, les valeurs de

$$\mathfrak{L}, \quad \mathfrak{M}, \quad \mathfrak{N}, \quad \mathfrak{P}, \quad \mathfrak{Q}, \quad \mathfrak{R}$$

seront représentées par des sommes de termes correspondant aux diverses molécules m voisines de $\mathfrak{m}$, et dont chacun, considéré comme fonction de u, v, w, sera proportionnel à la différence

$$e^{u\mathrm{x}+v\mathrm{y}+w\mathrm{z}} - 1,$$

mais s'évanouira sensiblement hors de la sphère d'activité de la molécule $\mathfrak{m}$. Donc réduire les équations des mouvements infiniment petits

au second ordre, c'est négliger dans le développement de cette différence, c'est-à-dire dans la somme

$$ux + vy + wz + \frac{(ux + vy + wz)^2}{1.2} + \frac{(ux + vy + wz)^3}{1.2.3} + \ldots,$$

les puissances du trinome

$$ux + vy + wz$$

d'un degré supérieur au second. Or, il sera généralement permis de négliger ces puissances, au moins dans une première approximation, si le module du trinome

$$ux + vy + wz$$

reste très petit pour tous les points situés dans l'intérieur de la sphère d'activité sensible d'une molécule ; et cette dernière condition sera remplie elle-même, si le rayon de la sphère dont il s'agit est très petit par rapport aux longueurs d'ondulations mesurées dans un mouvement simple qui ne s'éteigne pas en se propageant. En effet, dans un semblable mouvement, u, v, w seront de la forme

$$u = \mathrm{u}\sqrt{-1}, \qquad v = \mathrm{v}\sqrt{-1}, \qquad w = \mathrm{w}\sqrt{-1},$$

u, v, w désignant des constantes réelles ; et le plan d'une onde, parallèle au plan invariable représenté par l'équation

$$\mathrm{u}x + \mathrm{v}y + \mathrm{w}z = 0,$$

formera avec les demi-axes des coordonnées positives des angles dont les cosinus seront respectivement proportionnels à

$$\mathrm{u}, \quad \mathrm{v}, \quad \mathrm{w},$$

tandis que l'épaisseur d'une onde sera représentée par

$$\mathrm{l} = \frac{2\pi}{\mathrm{k}},$$

la valeur de k étant

$$\mathrm{k} = \sqrt{\mathrm{u}^2 + \mathrm{v}^2 + \mathrm{w}^2}.$$

D'autre part, si l'on nomme r le rayon vecteur mené de la molécule m

à la molécule m, et δ l'angle formé par le rayon vecteur r avec la perpendiculaire au plan d'une onde, on aura

$$r = \sqrt{\mathrm{x}^2 + \mathrm{y}^2 + \mathrm{z}^2},$$
$$\mathrm{ux} + \mathrm{vy} + \mathrm{wz} = \mathrm{k}r\cos\delta = 2\pi\frac{r}{\mathrm{l}}\cos\delta;$$

et il est clair que le produit

$$2\pi\frac{r}{\mathrm{l}}\cos\delta$$

deviendra très petit en même temps que le rapport

$$\frac{r}{\mathrm{l}}.$$

Donc le module du trinome

$$ux + vy + wz,$$

représenté dans le mouvement simple que l'on considère par la valeur numérique de la somme

$$\mathrm{ux} + \mathrm{vy} + \mathrm{wz} = 2\pi\frac{r}{\mathrm{l}}\cos\delta,$$

restera très petit, si le rayon vecteur r, supposé inférieur ou égal au rayon de la sphère d'activité sensible d'une molécule, est très petit par rapport à la longueur d'une ondulation.

Lorsque la condition ici énoncée sera remplie, et qu'en conséquence les équations des mouvements infiniment petits pourront être, sans erreur sensible, réduites à des équations du second ordre, ces dernières renfermeront généralement des termes du premier ordre et des termes du second ordre. Il semblerait au premier abord que ceux-ci devraient encore être considérés comme très petits par rapport aux autres. Mais on doit observer que les coefficients des dérivées du premier ordre seront des sommes composées de parties, les unes positives, les autres négatives, et qui, dans beaucoup de cas, se détruiront réciproquement. C'est ce qui arrive, en particulier, quand le système de molécules est constitué de telle manière, que la propagation du mouvement s'effectue en tous sens suivant les mêmes lois. Il en résulte

que, loin de négliger les termes du second ordre vis-à-vis des termes du premier ordre, on devra plus généralement négliger ceux-ci vis-à-vis des termes du second ordre, ce qui suffira pour rendre homogènes les équations du second ordre auxquelles on sera parvenu.

Considérons maintenant en particulier les conditions relatives aux points situés dans le plan fixe des y, z. D'après ce qu'on a dit, ces conditions supposent qu'on obtient des produits très petits en multipliant la constante ε, c'est-à-dire la distance au plan fixe, en deçà de laquelle les perturbations des mouvements infiniment petits deviennent sensibles, par certains coefficients renfermés dans ces mêmes équations. D'ailleurs, en vertu des principes développés dans le Mémoire qui a pour titre *Méthode générale propre à fournir les équations de condition relatives aux limites des corps*, les coefficients dont il s'agit seront généralement ceux par lesquels se trouveront multipliées les variables principales

$$\bar{\xi},\ \bar{\eta},\ \bar{\zeta},\ \bar{\varphi},\ \bar{\chi},\ \bar{\psi}$$

dans les équations symboliques des mouvements infiniment petits, transformées d'abord en équations différentielles par la substitution des constantes

$$v,\ w,\ s$$

aux caractéristiques

$$D_y,\ D_z,\ D_t,$$

puis ramenées au premier ordre par l'adjonction des variables principales $\bar{\varphi}$, $\bar{\chi}$, $\bar{\psi}$ aux variables principales $\bar{\xi}$, $\bar{\eta}$, $\bar{\zeta}$, et résolues par rapport à

$$\frac{\partial\bar{\xi}}{\partial x},\ \frac{\partial\bar{\eta}}{\partial x},\ \frac{\partial\bar{\zeta}}{\partial x},\ \frac{\partial\bar{\varphi}}{\partial x},\ \frac{\partial\bar{\chi}}{\partial x},\ \frac{\partial\bar{\psi}}{\partial x}.$$

Mais il est important d'observer que, si, dans un mouvement simple, l'épaisseur l des ondes planes devient très petite, les constantes

$$u,\ v,\ w$$

offriront de très grands modules comparables à la quantité

$$k = \frac{2\pi}{l}.$$

Alors les dérivées

$$\bar{\varphi} = D_x\bar{\xi} = u\bar{\xi},\qquad \bar{\chi} = D_x\bar{\eta} = u\bar{\eta},\qquad \bar{\psi} = D_x\bar{\zeta} = u\bar{\zeta}$$

seront elles-mêmes comparables aux produits

$$k\bar{\xi},\ k\bar{\eta},\ k\bar{\zeta};$$

et comme, dans les équations des mouvements infiniment petits réduites à des équations homogènes du second ordre, puis transformées en équations différentielles, les divers termes resteront tous comparables les uns aux autres, les coefficients qui, multipliés par ε, devront fournir des produits très petits seront, dans les valeurs de

$$\frac{\partial\bar{\varphi}}{\partial x},\ \frac{\partial\bar{\chi}}{\partial x},\ \frac{\partial\bar{\psi}}{\partial x},$$

exprimées en fonctions linéaires de

$$\bar{\xi},\ \bar{\eta},\ \bar{\zeta},\ \bar{\varphi},\ \bar{\chi},\ \bar{\psi},$$

les coefficients de

$$\bar{\varphi},\ \bar{\chi},\ \bar{\psi}$$

ou ceux de

$$k\bar{\xi},\ k\bar{\eta},\ k\bar{\zeta}.$$

On peut ajouter que les coefficients de $\bar{\varphi}$ dans la valeur $\frac{\partial\bar{\varphi}}{\partial x}$, de $\bar{\chi}$ dans la valeur de $\frac{\partial\bar{\chi}}{\partial x}$, ... auront, dans le mouvement troublé, des valeurs comparables à celles qu'ils acquièrent dans le mouvement simple et non troublé, c'est-à-dire au coefficient u, par conséquent à la constante k. Donc, en définitive, pour que la valeur de la distance ε permette aux conditions relatives à la surface de subsister, il suffira que le produit

$$k\varepsilon = 2\pi\frac{\varepsilon}{l}$$

reste très petit, ou, en d'autres termes, que la distance ε soit très petite relativement à la longueur d'une ondulation.

Cette condition étant supposée remplie, les formules (25) ou (27) subsisteront, pour $x = 0$, dans les circonstances que nous avons indi-

quées, si les variables

$$\bar{\xi},\quad \bar{\eta},\quad \bar{\zeta}$$

représentent les déplacements symboliques relatifs à un mouvement simple pour lequel on aurait

$$\alpha = \mathrm{u}\sqrt{-1}.$$

Il y a plus : en vertu des principes établis dans le Mémoire déjà cité, on arrivera encore aux formules (25) ou (27), si les variables

$$\bar{\xi},\quad \bar{\eta},\quad \bar{\zeta}$$

représentent les déplacements symboliques relatifs à un mouvement simple pour lequel on aurait

$$\alpha = -\mathrm{u}\sqrt{-1},$$

ou même les déplacements symboliques relatifs à un mouvement résultant de la superposition de deux mouvements simples, pour l'un desquels on aurait

$$\alpha = \mathrm{u}\sqrt{-1},$$

tandis qu'on aurait pour l'autre

$$\alpha = -\mathrm{u}\sqrt{-1}.$$

Cela posé, on pourra énoncer la proposition suivante :

Théorème. — *Considérons un système homogène de molécules situé par rapport au plan des y, z du côté des x positives, et pour lequel les équations des mouvements infiniment petits, indépendantes de la direction des axes coordonnés, puissent se réduire, sans erreur sensible, à des équations homogènes du second ordre, par conséquent aux formules* (1). *Supposons en outre que, dans le voisinage du plan des y, z, et entre les limites très rapprochées*

$$x = 0,\qquad x = \varepsilon,$$

ces équations changent de forme, les coefficients des déplacements effectifs ou des déplacements symboliques et de leurs dérivées devenant alors

fonctions de la coordonnée x. Nommons

$$\bar{\varphi},\quad \bar{\chi},\quad \bar{\psi}$$

les dérivées premières de

$$\bar{\xi},\quad \bar{\eta},\quad \bar{\zeta}$$

relatives à x, et

$$\bar{\xi}_0,\quad \bar{\eta}_0,\quad \bar{\zeta}_0,\quad \bar{\varphi}_0,\quad \bar{\chi}_0,\quad \bar{\psi}_0$$

ce que deviennent, pour $x = 0$, les valeurs de

$$\bar{\xi},\quad \bar{\eta},\quad \bar{\zeta},\quad \bar{\varphi},\quad \bar{\chi},\quad \bar{\psi},$$

correspondant à un mouvement infiniment petit, propagé dans le système de molécules donné, quand on a égard aux perturbations de ce mouvement indiquées par l'altération des équations (1) *dans le voisinage du plan des y, z. Enfin, supposons que le mouvement dont il s'agit soit un mouvement simple qui ne s'éteigne point en se propageant, ou bien encore qu'il résulte de la superposition de deux mouvements simples de cette espèce, correspondant aux mêmes valeurs imaginaires des coefficients*

$$v,\quad w,\quad s,$$

mais à des valeurs imaginaires de u, qui, étant égales au signe près, se trouvent affectées de signes contraires. Si d'ailleurs la distance ε est très petite relativement à la longueur d'une ondulation, les valeurs de

$$\bar{\xi},\quad \bar{\eta},\quad \bar{\zeta},\quad \bar{\varphi},\quad \bar{\chi},\quad \bar{\psi},$$

calculées comme si le mouvement simple n'éprouvait aucune perturbation dans le voisinage du plan des y, z, vérifieront, pour $x = 0$, les conditions (25) *ou* (27), *savoir les conditions*

$$\bar{\xi} = \bar{\xi}_0 \qquad \bar{\eta} = \bar{\eta}_0, \qquad \bar{\zeta} = \bar{\zeta}_0, \qquad \bar{\varphi} = \bar{\varphi}_0, \qquad \bar{\chi} = \bar{\chi}_0, \qquad \bar{\psi} = \bar{\psi}_0,$$

si l'on a

$$\frac{\mathrm{k}^2}{1+\mathrm{f}} > \mathrm{v}^2 + \mathrm{w}^2,$$

et les conditions

$$\frac{\bar{\xi} - \bar{\xi}_0}{-\mho} = \frac{\bar{\eta} - \bar{\eta}_0}{\mathrm{v}\sqrt{-1}} = \frac{\bar{\zeta} - \bar{\zeta}_0}{\mathrm{w}\sqrt{-1}} = \frac{\bar{\varphi} - \bar{\varphi}_0}{\mho^2} = \frac{\bar{\chi} - \bar{\chi}_0}{-\mho\mathrm{v}\sqrt{-1}} = \frac{\bar{\psi} - \bar{\psi}_0}{-\mho\mathrm{w}\sqrt{-1}},$$

si l'on a

$$\frac{k^2}{1+f} < v^2 + w^2.$$

Les mêmes principes peuvent servir encore à établir les équations de condition auxquelles devraient satisfaire, pour $x = 0$, les valeurs de

$$\bar{\xi},\ \bar{\eta},\ \bar{\zeta},\ \bar{\varphi},\ \bar{\chi},\ \bar{\psi}$$

relatives soit à des mouvements qui s'éteindraient en se propageant, soit à des mouvements accompagnés d'un changement de densité. Mais, nous bornant pour l'instant à indiquer ces diverses applications de nos formules générales, nous allons nous occuper plus spécialement des formules particulières que nous venons de trouver et développer les conséquences qui s'en déduisent.

Les valeurs de v, w étant

$$(28)\qquad v = v\sqrt{-1}, \qquad w = w\sqrt{-1},$$

la formule (27) peut s'écrire comme il suit

$$(29)\qquad \frac{\bar{\xi}-\bar{\xi}_0}{-\mho} = \frac{\bar{\eta}-\bar{\eta}_0}{v} = \frac{\bar{\zeta}-\bar{\zeta}_0}{w} = \frac{\bar{\varphi}-\bar{\varphi}_0}{\mho^2} = \frac{\bar{\chi}-\bar{\chi}_0}{-\mho v} = \frac{\bar{\psi}-\bar{\psi}_0}{-\mho w}.$$

D'ailleurs on tire de cette dernière, non seulement

$$\frac{\bar{\eta}-\bar{\eta}_0}{v} = \frac{\bar{\zeta}-\bar{\zeta}_0}{w}$$

et

$$\bar{\xi}-\bar{\xi}_0 = \frac{\bar{\chi}-\bar{\chi}_0}{v} = \frac{\bar{\psi}-\bar{\psi}_0}{w},$$

par conséquent

$$(30)\qquad w\bar{\eta} - v\bar{\zeta} = w\bar{\eta}_0 - v\bar{\zeta}_0, \qquad \bar{\psi} - w\bar{\xi} = \bar{\psi}_0 - w\bar{\xi}_0, \qquad v\bar{\xi} - \bar{\chi} = v\bar{\xi}_0 - \bar{\chi}_0,$$

mais encore

$$\frac{1}{v}\bar{\eta} - \frac{1}{v}\bar{\eta}_0 = \frac{\bar{\xi}-\bar{\xi}_0}{-\mho} = \frac{\bar{\varphi}-\bar{\varphi}_0}{\mho^2} = \frac{\bar{\varphi}-\bar{\varphi}_0 + \alpha(\bar{\xi}-\bar{\xi}_0) + \beta\left(\frac{1}{v}\bar{\eta} - \frac{1}{v}\bar{\eta}_0\right)}{\mho^2 - \alpha\mho + \beta},$$

quels que soient les facteurs α, β, et par suite

$$(31)\qquad \bar{\varphi} + \alpha\bar{\xi} + \frac{\beta}{v}\bar{\eta} = \bar{\varphi}_0 + \alpha\bar{\xi}_0 + \frac{\beta}{v}\bar{\eta}_0,$$

si l'on choisit α, β de manière à vérifier la formule

$$(32)\qquad \mho^2 + \alpha\mho + \beta = 0.$$

§ IV. — *Sur les conditions générales de la coexistence de mouvements simples, que l'on suppose propagés dans deux portions différentes d'un système moléculaire, diversement constituées et séparées l'une de l'autre par une surface plane.*

Considérons deux systèmes homogènes de molécules, séparés par une surface plane que nous prendrons pour plan des y, z, ces deux systèmes n'étant autre chose que deux portions différentes d'un même système dont la constitution change quand la coordonnée x passe du négatif au positif, et reste sensiblement invariable de chaque côté de la surface de séparation, excepté dans le voisinage de cette surface. Soient

$$\xi,\ \eta,\ \zeta \quad \text{et} \quad \bar{\xi},\ \bar{\eta},\ \bar{\zeta}$$

les déplacements effectifs et symboliques d'une molécule, correspondant à un ou à plusieurs mouvements simples propagés dans le premier des systèmes donnés, que nous supposerons situé du côté des x négatives ; et nommons

$$\varphi,\ \chi,\ \psi \quad \text{ou} \quad \bar{\varphi},\ \bar{\chi},\ \bar{\psi}$$

les dérivées de ces déplacements effectifs ou symboliques, prises par rapport à x. Soient pareillement

$$\xi',\ \eta',\ \zeta' \quad \text{et} \quad \bar{\xi}',\ \bar{\eta}',\ \bar{\zeta}'$$

les déplacements effectifs ou symboliques correspondant à un ou plusieurs mouvements simples propagés dans le second système, situé du côté des x positives ; et nommons encore

$$\varphi',\ \chi',\ \psi' \quad \text{ou} \quad \bar{\varphi}',\ \bar{\chi}',\ \bar{\psi}'$$

les dérivées de ces déplacements effectifs ou symboliques, prises par rapport à x. Soient enfin

$$\xi_0,\quad \eta_0,\quad \zeta_0,\quad \varphi_0,\quad \chi_0,\quad \psi_0$$

ou

$$\bar{\xi}_0,\quad \bar{\eta}_0,\quad \bar{\zeta}_0,\quad \bar{\varphi}_0,\quad \bar{\chi}_0,\quad \bar{\psi}_0$$

ce que deviennent les déplacements effectifs ou symboliques et leurs dérivées pour les points situés dans le plan des y, z. Si les deux espèces de mouvements simples qu'on suppose propagés dans les deux systèmes donnés de molécules peuvent coexister, alors, en raisonnant comme dans le paragraphe II, on obtiendra : 1° entre les différences

$$\bar{\xi}-\bar{\xi}_0,\quad \bar{\eta}-\bar{\eta}_0,\quad \bar{\zeta}-\bar{\zeta}_0,\quad \bar{\varphi}-\bar{\varphi}_0,\quad \bar{\chi}-\bar{\chi}_0,\quad \bar{\psi}-\bar{\psi}_0,$$

2° entre les différences

$$\bar{\xi}'-\bar{\xi}_0,\quad \bar{\eta}'-\bar{\eta}_0,\quad \bar{\zeta}'-\bar{\zeta}_0,\quad \bar{\varphi}'-\bar{\varphi}_0,\quad \bar{\chi}'-\bar{\chi}_0,\quad \bar{\psi}'-\bar{\psi}_0,$$

des équations de condition qui devront se vérifier pour une valeur nulle de x; puis, en éliminant

$$\bar{\xi}_0,\quad \bar{\eta}_0,\quad \bar{\zeta}_0,\quad \bar{\varphi}_0,\quad \bar{\chi}_0,\quad \bar{\psi}_0$$

entre ces deux espèces d'équations de condition, on en obtiendra d'autres entre les seules variables

$$\bar{\xi},\quad \bar{\eta},\quad \bar{\zeta},\quad \bar{\varphi},\quad \bar{\chi},\quad \bar{\psi};\qquad \bar{\xi}',\quad \bar{\eta}',\quad \bar{\zeta}',\quad \bar{\varphi}',\quad \bar{\chi}',\quad \bar{\psi}'.$$

Les nouvelles équations de condition, ainsi obtenues, devront, comme les précédentes, subsister seulement pour une valeur nulle de x, et les unes comme les autres seront linéaires par rapport aux déplacements symboliques et à leurs dérivées. En conséquence, après l'élimination de

$$\bar{\xi}_0,\quad \bar{\eta}_0,\quad \bar{\zeta}_0,\quad \bar{\varphi}_0,\quad \bar{\chi}_0,\quad \bar{\psi}_0,$$

la forme la plus générale d'une équation de condition sera

$$\Gamma+\Gamma'=0, \tag{1}$$

Γ désignant une fonction linéaire des variables

$$\bar{\xi},\quad \bar{\eta},\quad \bar{\zeta},\quad \bar{\varphi},\quad \bar{\chi},\quad \bar{\psi},$$

composée de six termes respectivement proportionnels à ces mêmes variables, et Γ' une fonction de la même espèce, mais composée avec les variables

$$\bar{\xi}',\quad \bar{\eta}',\quad \bar{\zeta}',\quad \bar{\varphi}',\quad \bar{\chi}',\quad \bar{\psi}'.$$

Si l'on suppose qu'un seul mouvement simple se propage dans le système de molécules situé du côté des x négatives, les valeurs de

$$\bar{\xi},\quad \bar{\eta},\quad \bar{\zeta},\quad \bar{\varphi},\quad \bar{\chi},\quad \bar{\psi},$$

correspondant à une valeur de x, seront de la forme

$$\begin{aligned}
&\bar{\xi}=\mathrm{A}\,e^{vy+wz-st}, &&\bar{\eta}=\mathrm{B}\,e^{vy+wz-st}, &&\bar{\zeta}=\mathrm{C}\,e^{vy+wz-st},\\
&\bar{\varphi}=\mathrm{A}\,u\,e^{vy+wz-st}, &&\bar{\chi}=\mathrm{B}\,u\,e^{vy+wz-st}, &&\bar{\psi}=\mathrm{C}\,u\,e^{vy+wz-st},
\end{aligned}$$

u, v, w, s, A, B, C désignant des constantes réelles ou imaginaires; et par suite, la valeur de Γ correspondant à $x=0$ sera de la forme

$$\Gamma=\gamma\,e^{vy+wz-st},$$

γ désignant une nouvelle constante. Si, au contraire, plusieurs mouvements simples, superposés les uns aux autres, se propagent simultanément dans le premier des systèmes donnés, et si l'on admet que les déplacements symboliques deviennent proportionnels, dans l'un de ces mouvements simples, à l'exponentielle

$$e^{ux+vy+wz-st},$$

dans un autre à l'exponentielle

$$e^{u_1x+v_1y+w_1z-s_1t},\qquad \ldots,$$

la valeur de Γ, correspondant à $x=0$, sera de la forme

$$\Gamma=\gamma\,e^{vy+wz-st}+\gamma_1\,e^{v_1y+w_1z-s_1t}+\ldots, \tag{2}$$

$\gamma, \gamma_1, \ldots$ désignant diverses constantes. Pareillement, si divers mouve-

ments simples se propagent dans le second système de molécules, et si l'on admet que les déplacements symboliques deviennent proportionnels, dans l'un de ces mouvements simples, à l'exponentielle

$$e^{ux+vy+wz-st},$$

dans un autre à l'exponentielle

$$e^{u'x+v'y+w'z-s't}, \quad \ldots,$$

la valeur de Γ, correspondant à $x = 0$, sera de la forme

$$\Gamma' = \gamma' e^{v'y+w'z-s't} + \ldots. \tag{3}$$

Cela posé, l'équation (1), réduite à

$$\gamma e^{vy+wz-st} + \gamma_1 e^{v_1y+w_1z-s_1t} + \ldots + \gamma' e^{v'y+w'z-s't} + \ldots = 0, \tag{4}$$

entraînera la formule

$$\gamma + \gamma_1 + \ldots + \gamma' + \ldots = 0, \tag{5}$$

à laquelle elle se réduira identiquement si l'on a

$$\left\{\begin{aligned} v &= v_1 = \ldots = v' = \ldots, \\ w &= w_1 = \ldots = w' = \ldots, \\ s &= s_1 = \ldots = s' = \ldots. \end{aligned}\right. \tag{6}$$

Il y a plus : si les constantes

$$\gamma, \quad \gamma_1, \quad \ldots, \quad \gamma', \quad \ldots$$

diffèrent de zéro, l'équation (4), qui doit subsister quelles que soient les valeurs attribuées aux variables indépendantes y, z, t, entraînera toujours non seulement l'équation (5), en laquelle elle se transforme quand on réduit y, z et t à zéro, mais encore les formules (6). C'est ce qu'on démontrera sans peine à l'aide des considérations suivantes.

L'équation (4), devant subsister quels que soient y, z et t, donnera, pour $z = 0$ et $t = 0$,

$$\gamma e^{vy} + \gamma_1 e^{v_1y} + \ldots + \gamma' e^{v'y} + \ldots = 0.$$

Si, dans cette dernière équation, et dans ses dérivées des divers ordres relatives à y, on pose $y = 0$, on trouvera

$$\left\{\begin{aligned} &\gamma + \gamma_1 + \ldots + \gamma' + \ldots = 0, \\ &\gamma v + \gamma_1 v_1 + \ldots + \gamma' v' + \ldots = 0, \\ &\gamma v^2 + \gamma_1 v_1^2 + \ldots + \gamma' v'^2 + \ldots = 0, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right. \tag{7}$$

Or, il est facile de s'assurer que les équations (7), dont on peut supposer le nombre égal à celui des coefficients

$$\gamma, \quad \gamma_1, \quad \ldots, \quad \gamma', \quad \ldots,$$

entraînent la première des formules (6). En effet, admettons, par exemple, que ces coefficients se réduisent à trois

$$\gamma, \quad \gamma_1, \quad \gamma'.$$

Alors, en éliminant deux d'entre eux des équations (7), c'est-à-dire des formules

$$\begin{aligned} \gamma + \gamma_1 + \gamma' &= 0, \\ \gamma v + \gamma_1 v_1 + \gamma' v' &= 0, \\ \gamma v^2 + \gamma_1 v_1^2 + \gamma' v'^2 &= 0, \end{aligned}$$

on trouvera successivement

$$\gamma(v - v_1)(v - v') = 0, \qquad \gamma_1(v_1 - v')(v_1 - v) = 0, \qquad \gamma'(v' - v)(v' - v_1) = 0;$$

et, par suite, si

$$\gamma, \quad \gamma_1, \quad \gamma'$$

diffèrent de zéro, les trois différences

$$v - v_1, \qquad v - v', \qquad v_1 - v'$$

devront s'évanouir, en sorte que la première des formules (6) devra être vérifiée. Eu égard à la forme des équations (7), la même démonstration reste applicable quel que soit le nombre des coefficients γ, $\gamma_1, \ldots, \gamma', \ldots$, et d'ailleurs on pourra évidemment établir de la même manière la seconde et la troisième des formules (6).

Lorsqu'un mouvement simple propagé dans un système de molécules atteint une surface plane qui sépare ce premier système d'un se-

cond, il donne très souvent naissance à d'autres mouvements simples, les uns réfléchis, les autres réfractés, qui coexistent tous ensemble, mais qui ne pourraient plus coexister, dans le double système de molécules que l'on considère, si l'on venait à supprimer quelques-uns d'entre eux. Ainsi, par exemple, lorsque ces deux systèmes sont tels qu'un mouvement simple, propagé jusqu'à leur surface de séparation, donne naissance à deux mouvements de cette espèce, l'un réfléchi, l'autre réfracté, on ne saurait concevoir deux de ces trois mouvements propagés seuls dans le double système de molécules. Donc alors l'équation (1) ou (4) ne peut subsister, lorsqu'on supprime l'un des trois mouvements simples; ce qui aurait lieu, toutefois, si l'une des constantes

$$\gamma, \quad \gamma_{\prime}, \quad \gamma'$$

venait à s'évanouir. Donc, si l'on applique l'équation (1) ou (4) à la réflexion et à la réfraction des mouvements simples, elle entraînera généralement les formules (6).

Supposons l'équation (4) effectivement appliquée à la réflexion et à la réfraction d'un mouvement simple; et soient dans cette même équation

$$\gamma\, e^{uy+wz-st}$$

le terme qui correspond aux ondes incidentes,

$$\gamma_{\prime}\, e^{u_{\prime}y+w_{\prime}z-s_{\prime}t}, \qquad \ldots$$

ceux qui correspondent aux ondes réfléchies; enfin

$$\gamma'\, e^{u'y+w'z-st'}, \qquad \ldots$$

ceux qui correspondent aux ondes réfractées. Si l'on pose, comme dans le paragraphe II,

(8) $$u = \mathrm{U} + \mathrm{u}\sqrt{-1}, \qquad v = \mathrm{V} + \mathrm{v}\sqrt{-1}, \qquad w = \mathrm{W} + \mathrm{w}\sqrt{-1},$$

(9) $$s = \mathrm{S} + \mathrm{s}\sqrt{-1},$$

(10) $$\mathrm{k} = \sqrt{\mathrm{u}^2 + \mathrm{v}^2 + \mathrm{w}^2}, \qquad \mathrm{K} = \sqrt{\mathrm{U}^2 + \mathrm{V}^2 + \mathrm{W}^2},$$

(11) $$\mathrm{l} = \frac{2\pi}{\mathrm{k}}, \qquad \mathrm{T} = \frac{2\pi}{\mathrm{s}},$$

(12) $$\Omega = \frac{\mathrm{s}}{\mathrm{k}} = \frac{\mathrm{l}}{\mathrm{T}},$$

u, v, w, s, U, V, W, S désignant des quantités réelles, parmi lesquelles s pourra être censée positive, les constantes réelles

$$\mathrm{K}, \quad \mathrm{S}$$

représenteront, dans le mouvement incident, les coefficients d'extinction relatifs à l'espace et au temps, et

$$\mathrm{T}$$

la durée des vibrations moléculaires, tandis que

$$\mathrm{l}$$

représentera l'épaisseur des ondes planes, et

$$\Omega$$

leur vitesse de propagation. De plus, les plans des ondes étant tous parallèles au plan invariable représenté par l'équation

(13) $$\mathrm{u}x + \mathrm{v}y + \mathrm{w}z = 0,$$

et la constante u devant être positive dans le cas où, comme on doit le supposer, les ondes incidentes en se propageant se rapprochent du plan des y, z; si l'on nomme τ *l'angle d'incidence*, c'est-à-dire l'angle aigu formé par une droite perpendiculaire aux plans des ondes avec l'axe des x, on aura, dans le cas dont il s'agit,

$$\cos\tau = \frac{\mathrm{u}}{\sqrt{\mathrm{u}^2 + \mathrm{v}^2 + \mathrm{w}^2}} = \frac{\mathrm{u}}{\mathrm{k}},$$

et par suite

$$\sin\tau = \frac{\sqrt{\mathrm{v}^2 + \mathrm{w}^2}}{\sqrt{\mathrm{u}^2 + \mathrm{v}^2 + \mathrm{w}^2}} = \frac{\sqrt{\mathrm{v}^2 + \mathrm{w}^2}}{\mathrm{k}};$$

puis on en conclura

(14) $$\mathrm{u} = \mathrm{k}\cos\tau, \qquad \sqrt{\mathrm{v}^2 + \mathrm{w}^2} = \mathrm{k}\sin\tau.$$

Quant au plan invariable représenté par l'équation

(15) $$\mathrm{U}x + \mathrm{V}y + \mathrm{W}z = 1,$$

il sera celui duquel s'éloignent de plus en plus les molécules dont les

vibrations deviennent de plus en plus petites, et disparaîtra si le mouvement incident est du nombre de ceux qui ne s'éteignent point en se propageant.

Soient maintenant

$$u_{,},\ v_{,},\ w_{,},\ s_{,},\ U_{,},\ V_{,},\ W_{,},\ S_{,},\ k_{,},\ K_{,},\ l_{,},\ T_{,},\ \Omega_{,},\ \tau_{,},\ \ldots$$

ou

$$u',\ v',\ w',\ s',\ U',\ V',\ W',\ S',\ k',\ K',\ l',\ T',\ \Omega',\ \tau',\ \ldots$$

ce que deviennent les constantes réelles

$$u,\ v,\ w,\ s,\ U,\ V,\ W,\ S,\ k,\ K,\ l,\ T,\ \Omega,\ \tau,\ \ldots$$

quand on passe des ondes incidentes aux ondes réfléchies ou réfractées. Les formules (6), jointes aux équations (8), (9), (10), (11), (12), (14), entraîneront évidemment les suivantes :

$$(16)\qquad \begin{cases} v = v_{,} = \ldots = v' = \ldots, \\ w = w_{,} = \ldots = w' = \ldots, \end{cases}$$

$$(17)\qquad s = s_{,} = \ldots = s' = \ldots,$$

$$(18)\qquad \begin{cases} V = V_{,} = \ldots = V' = \ldots, \\ W = W_{,} = \ldots = W' = \ldots, \end{cases}$$

$$(19)\qquad S = S_{,} = \ldots = S' = \ldots.$$

On tirera d'ailleurs, de la formule (17),

$$(20)\qquad T = T_{,} = \ldots = T' = \ldots,$$

et, des formules (16),

$$\sqrt{v^2 + w^2} = \sqrt{v_{,}^2 + w_{,}^2} = \ldots = \sqrt{v'^2 + w'^2} = \ldots,$$

ou, ce qui revient au même,

$$(21)\qquad k \sin\tau = k_{,} \sin\tau_{,} = \ldots = k' \sin\tau' = \ldots,$$

et par suite

$$(22)\qquad \frac{\sin\tau}{l} = \frac{\sin\tau_{,}}{l_{,}} = \ldots = \frac{\sin\tau'}{l'} = \ldots.$$

Il résulte de la formule (20) que la durée des vibrations moléculaires reste la même dans les mouvements incidents, réfléchis et réfractés. Il résulte de la formule (22) que *l'angle d'incidence* τ, *l'angle de réflexion* $\tau_{,}$, ..., *l'angle de réfraction* τ' ... offrent des sinus respectivement proportionnels aux épaisseurs l, $l_{,}$, ..., l', ... des ondes incidentes réfléchies et réfractées. De plus, comme les plans invariables, représentés par les formules (13) et (15), ont pour traces, sur le plan des y, z, les droites représentées par les équations

$$(23)\qquad vy + wz = 0,$$

$$(24)\qquad Vy + Wz = 0,$$

il résulte des formules (16) et (18) que ces traces restent les mêmes quand on passe du mouvement incident aux mouvements réfléchis ou réfractés. Donc les plans des ondes incidentes, réfléchies et réfractées coupent le plan des y, z ou, en d'autres termes, la surface réfléchissante suivant des droites qui sont toutes parallèles les unes aux autres ; et, si par un point donné de la même surface on mène des perpendiculaires aux plans de ces différentes espèces d'ondes, ces perpendiculaires seront toutes renfermées dans un plan unique qu'on peut appeler indifféremment le *plan d'incidence* ou le *plan de réflexion* ou le *plan de réfraction*.

On tire des formules (22)

$$(25)\qquad \frac{\sin\tau}{\sin\tau_{,}} = \frac{l}{l_{,}} = \ldots \quad \text{et} \quad \frac{\sin\tau}{\sin\tau'} = \frac{l}{l'} = \ldots.$$

Donc *le rapport du sinus d'incidence au sinus de réflexion est en même temps le rapport entre les épaisseurs des ondes incidentes et réfléchies*, tandis que *le rapport entre les sinus d'incidence et de réfraction se confond avec le rapport entre les épaisseurs des ondes incidentes et réfractées*. Le premier de ces rapports est ce que nous nommerons l'*indice d'incidence*, le second est celui qu'on nomme l'*indice de réfraction*.

Lorsque le premier système de molécules sera du nombre de ceux dans lesquels la propagation du mouvement s'effectue en tous sens

suivant les mêmes lois, et que pour cette raison nous appellerons *isotropes*, s deviendra fonction de la somme $u^2+v^2+w^2$, à laquelle s^2 sera même proportionnel si les équations des mouvements infiniment petits sont homogènes. Alors le mouvement incident, que nous supposerons simple, pourra donner naissance à un seul mouvement simple, réfléchi ; et l'équation

$$s=s_{,}$$

entrainera la suivante

$$u^2+v^2+w^2=u_{,}^2+v_{,}^2+w_{,}^2.$$

Celle-ci, jointe aux équations

$$v=v_{,}, \qquad w=w_{,},$$

donnera

$$u^2=u_{,}^2; \tag{26}$$

et, comme on ne pourrait supposer à la fois

$$u=u_{,}, \qquad v=v_{,}, \qquad w=w_{,},$$

sans rendre parallèles les plans des ondes incidentes et réfléchies, ce qui ne permettrait plus de vérifier les équations de condition, et ce qui est effectivement contraire à toutes les expériences, la formule (26) entrainera l'équation

$$u_{,}=-u, \tag{27}$$

par conséquent aussi l'équation

$$\mathrm{u}_{,}=-\mathrm{u}. \tag{28}$$

Or de cette dernière, jointe aux formules

$$\mathrm{v}_{,}=\mathrm{v}, \qquad \mathrm{w}_{,}=\mathrm{w},$$

on tirera

$$\sqrt{\mathrm{u}_{,}^2+\mathrm{v}_{,}^2+\mathrm{w}_{,}^2}=\sqrt{\mathrm{u}^2+\mathrm{v}^2+\mathrm{w}^2}$$

ou

$$\mathrm{k}_{,}=\mathrm{k}, \tag{29}$$

et par suite

$$\mathrm{l}_{,}=\mathrm{l}. \tag{30}$$

Cela posé, la première des formules (25) donnera $\sin\tau_{,}=\sin\tau$,

$$\tau_{,}=\tau. \tag{31}$$

Donc, *dans un milieu isotrope, l'angle de réflexion est toujours égal à l'angle d'incidence.*

Supposons maintenant le second système de molécules isotrope, comme le premier. Alors le mouvement incident, étant simple, pourra donner naissance d'une part à un seul mouvement simple, réfléchi, d'autre part à un seul mouvement simple réfracté. Si, d'ailleurs, ces trois mouvements simples sont du nombre de ceux qui ne s'éteignent pas en se propageant, on aura

$$\left\{\begin{array}{llll} u=\mathrm{u}\sqrt{-1}, & v=\mathrm{v}\sqrt{-1}, & w=\mathrm{w}\sqrt{-1}, & s=\mathrm{s}\sqrt{-1}, \\ u'=\mathrm{u}'\sqrt{-1}, & v'=\mathrm{v}'\sqrt{-1}, & w'=\mathrm{w}'\sqrt{-1}, & s'=\mathrm{s}'\sqrt{-1}. \end{array}\right. \tag{32}$$

Dans ce cas particulier, s étant fonction de

$$u^2+v^2+w^2=-(\mathrm{u}^2+\mathrm{v}^2+\mathrm{w}^2)=-\mathrm{k}^2,$$

et s' fonction de

$$u'^2+v'^2+w'^2=-(\mathrm{u}'^2+\mathrm{v}'^2+\mathrm{w}'^2)=-\mathrm{k}'^2,$$

à une valeur déterminée de s, et par suite de $s'=s$, correspondront des valeurs déterminées non seulement de k, mais aussi de k', quel que soit d'ailleurs l'angle d'incidence τ. Donc alors, *l'indice de réfraction*, savoir

$$\frac{\sin\tau}{\sin\tau'}=\frac{\mathrm{l}}{\mathrm{l}'}=\frac{\mathrm{k}'}{\mathrm{k}},$$

sera indépendant de l'angle d'incidence.

§ V. — *Sur les lois de la réflexion des mouvements simples dans les milieux isotropes.*

Pour obtenir complètement les lois de la réflexion et de la réfraction des mouvements simples dans les milieux isotropes, il faut joindre

aux lois générales établies dans le paragraphe précédent celles qui résultent de la forme particulière sous laquelle se présentent les équations de condition relatives à la surface de séparation de deux semblables milieux. Pour fixer les idées, nous nous bornerons ici à considérer le cas où, dans chaque système de molécules, les équations des mouvements infiniment petits peuvent être réduites sans erreur sensible à des équations homogènes du second ordre ; et nous supposerons que le mouvement incident, étant simple, donne naissance d'une part à un seul mouvement simple réfléchi, d'autre part à un mouvement simple réfracté, ces trois mouvements étant du nombre de ceux dans lesquels la densité reste invariable. Enfin nous prendrons la surface réfléchissante pour plan des y, z. Cela posé, soient pour le premier milieu, situé du côté des x négatives,

$$\xi,\quad \overline{\eta},\quad \overline{\zeta},\quad \overline{\varphi},\quad \overline{\chi},\quad \overline{\psi}$$

les déplacements symboliques d'une molécule et leurs dérivées relatives à x, dans le mouvement incident, ou dans le mouvement réfléchi, ou bien encore dans le mouvement résultant de la superposition des ondes incidentes et réfléchies. Soient, au contraire, pour le second milieu situé du côté des x positives,

$$\overline{\xi}',\quad \overline{\eta}',\quad \overline{\zeta}',\quad \overline{\varphi}',\quad \overline{\chi}',\quad \overline{\psi}'$$

les déplacements symboliques d'une molécule et leurs dérivées relatives à x dans le rayon réfracté. Les valeurs $\overline{\xi}, \overline{\eta}, \overline{\zeta}$, relatives au mouvement incident, seront de la forme

$$(1)\qquad \overline{\xi} = \mathrm{A}\, e^{ux+vy+wz-st},\qquad \overline{\eta} = \mathrm{B}\, e^{ux+vy+wz-st},\qquad \overline{\zeta} = \mathrm{C}\, e^{ux+vy+wz-st},$$

les constantes réelles ou imaginaires u, v, w, s, A, B, C étant liées entre elles par les équations

$$(2)\qquad s^2 = \iota(u^2+v^2+w^2),\qquad \mathrm{A}u + \mathrm{B}v + \mathrm{C}w = 0,$$

et la lettre ι désignant une constante réelle. Si maintenant on passe du mouvement incident au mouvement réfléchi ou réfracté, les valeurs

de

$$v,\quad w,\quad s$$

resteront les mêmes, d'après ce qu'on a vu dans le paragraphe VI ; mais on ne pourra en dire autant des coefficients

$$u,\quad \mathrm{A},\quad \mathrm{B},\quad \mathrm{C}$$

qui feront place à d'autres représentés par

$$u_{,},\quad \mathrm{A}_{,},\quad \mathrm{B}_{,},\quad \mathrm{C}_{,}$$

ou par

$$u',\quad \mathrm{A}',\quad \mathrm{B}',\quad \mathrm{C}',$$

la valeur de $u_{,}$ étant

$$(3)\qquad u_{,} = -u.$$

En conséquence, les valeurs de $\overline{\xi}, \overline{\eta}, \overline{\zeta}$, relatives au mouvement réfléchi, seront de la forme

$$(4)\qquad \overline{\xi} = \mathrm{A}_{,}\, e^{-ux+vy+wz-st},\qquad \overline{\eta} = \mathrm{B}_{,}\, e^{-ux+vy+wz-st},\qquad \overline{\zeta} = \mathrm{C}_{,}\, e^{-ux+vy+wz-st},$$

les coefficients $\mathrm{A}_{,}$, $\mathrm{B}_{,}$, $\mathrm{C}_{,}$ étant liés à u, v, w par la formule

$$(5)\qquad -\mathrm{A}_{,}u + \mathrm{B}_{,}v + \mathrm{C}_{,}w = 0,$$

et pareillement les valeurs de $\overline{\xi}', \overline{\eta}', \overline{\zeta}'$, relatives au mouvement réfracté, seront de la forme

$$(6)\qquad \overline{\xi}' = \mathrm{A}'\, e^{u'x+vy+wz-st},\qquad \overline{\eta}' = \mathrm{B}'\, e^{u'x+vy+wz-st},\qquad \overline{\zeta}' = \mathrm{C}'\, e^{u'x+vy+wz-st},$$

les constantes u', v, w, s, A', B', C' étant liées entre elles par les équations

$$(7)\qquad s^2 = \iota'(u'^2+v^2+w^2),\qquad \mathrm{A}'u' + \mathrm{B}'v + \mathrm{C}'w = 0,$$

et ι' étant ce que devient la constante réelle ι quand on passe du premier milieu au second. Ajoutons que, si, dans le premier milieu, on considère à la fois les ondes incidentes et réfléchies, la superposition de ces ondes produira un mouvement dans lequel les valeurs de $\overline{\xi}, \overline{\eta}, \overline{\zeta}$

deviendront

$$(8)\quad \begin{cases} \overline{\xi} = A\, e^{ux+vy+wz-st} + A_{,}\, e^{-ux+vy+wz-st}, \\ \overline{\eta} = B\, e^{ux+vy+wz-st} + B_{,}\, e^{-ux+vy+wz-st}, \\ \overline{\zeta} = C\, e^{ux+vy+wz-st} + C_{,}\, e^{-ux+vy+wz-st}. \end{cases}$$

C'est entre les valeurs de $\overline{\xi}$, $\overline{\eta}$, $\overline{\zeta}$, $\overline{\varphi}$, $\overline{\chi}$, $\overline{\psi}$ et de $\overline{\xi'}$, $\overline{\eta'}$, $\overline{\zeta'}$, $\overline{\varphi'}$, $\overline{\chi'}$, $\overline{\psi'}$, tirées des formules (6) et (8), que devront subsister, pour $x = 0$, les équations de condition relatives à la surface réfléchissante.

Considérons spécialement le cas où les mouvements incident, réfléchi et réfracté sont du nombre de ceux qui ne s'éteignent pas en se propageant, et où l'on a par suite

$$(9)\quad \begin{cases} u = \mathfrak{v}\sqrt{-1}, \quad v = \mathrm{v}\sqrt{-1}, \quad w = \mathrm{w}\sqrt{-1}, \quad s = \mathrm{s}\sqrt{-1}, \\ u' = \mathfrak{v}'\sqrt{-1}, \end{cases}$$

$\mathfrak{v}$, v, w, s, $\mathfrak{v}'$ désignant des quantités réelles. Posons d'ailleurs

$$(10)\qquad k = \sqrt{\mathfrak{v}^2 + \mathrm{v}^2 + \mathrm{w}^2}, \qquad k' = \sqrt{\mathfrak{v}'^2 + \mathrm{v}^2 + \mathrm{w}^2}.$$

Comme les formules (2) et (7), jointes aux formules (9) et (10), donneront

$$\iota = \frac{s^2}{k^2}, \qquad \iota' = \frac{s^2}{k'^2},$$

il est clair que les constantes réelles ι, ι' seront positives. Soient maintenant

$$\overline{\xi}_0, \quad \overline{\eta}_0, \quad \overline{\zeta}_0, \quad \overline{\varphi}_0, \quad \overline{\chi}_0, \quad \overline{\psi}_0$$

ce que deviennent les déplacements symboliques d'une molécule et leurs dérivées relatives à x, en un point de la surface réfléchissante, quand on tient compte des perturbations qu'éprouvent dans le voisinage de cette surface les mouvements infiniment petits. On obtiendra pour $x = 0$, entre les expressions

$$\overline{\xi}, \quad \overline{\eta}, \quad \overline{\zeta}, \quad \overline{\varphi}, \quad \overline{\chi}, \quad \overline{\psi}$$

et

$$\overline{\xi}_0, \quad \overline{\eta}_0, \quad \overline{\zeta}_0, \quad \overline{\varphi}_0, \quad \overline{\chi}_0, \quad \overline{\psi}_0,$$

des équations de condition représentées par les formules (25) ou (27)

du paragraphe III. Donc alors, si la constante réelle que nous avons désignée par f est telle que l'on ait

$$(11)\qquad \frac{k^2}{1+f} > v^2 + w^2,$$

on trouvera

$$(12)\quad \overline{\xi} = \overline{\xi}_0, \quad \overline{\eta} = \overline{\eta}_0, \quad \overline{\zeta} = \overline{\zeta}_0, \quad \overline{\varphi} = \overline{\varphi}_0, \quad \overline{\chi} = \overline{\chi}_0, \quad \overline{\psi} = \psi_0.$$

Si au contraire on a

$$(13)\qquad \frac{k^2}{1+f} < v^2 + w^2,$$

alors les équations de condition se trouveront comprises dans la formule

$$(14)\quad \frac{\overline{\xi} - \overline{\xi}_0}{-\mathfrak{v}} = \frac{\overline{\eta} - \overline{\eta}_0}{\varphi} = \frac{\overline{\zeta} - \overline{\zeta}_0}{\omega} = \frac{\overline{\varphi} - \overline{\varphi}_0}{\mathfrak{v}^2} = \frac{\overline{\chi} - \overline{\chi}_0}{-\mathfrak{v}\varphi} = \frac{\overline{\psi} - \overline{\psi}_0}{-\mathfrak{v}\omega},$$

le valeur de $\mathfrak{v}$ étant

$$(15)\qquad \mathfrak{v} = -\left(v^2 + w^2 - \frac{k^2}{1+f}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Pareillement, si, en nommant f' ce que devient f quand on passe du premier milieu au second, l'on a

$$(16)\qquad \frac{k'^2}{1+f'} > v^2 + w^2,$$

on trouvera

$$(17)\quad \overline{\xi'} = \overline{\xi}_0, \quad \overline{\eta'} = \overline{\eta}_0, \quad \overline{\zeta'} = \overline{\zeta}_0, \quad \overline{\varphi'} = \overline{\varphi}_0, \quad \overline{\chi'} = \overline{\chi}_0, \quad \overline{\psi'} = \overline{\psi}_0.$$

Si l'on a au contraire

$$(18)\qquad \frac{k'^2}{1+f'} < v^2 + w^2,$$

on trouvera

$$(19)\quad \frac{\overline{\xi'} - \overline{\xi}_0}{-\mathfrak{v}'} = \frac{\overline{\eta'} - \overline{\eta}_0}{\varphi} = \frac{\overline{\zeta'} - \overline{\zeta}_0}{\omega} = \frac{\overline{\varphi'} - \overline{\varphi}_0}{\mathfrak{v}'^2} = \frac{\overline{\chi'} - \overline{\chi}_0}{-\mathfrak{v}'\varphi} = \frac{\overline{\psi'} - \overline{\psi}_0}{-\mathfrak{v}'\omega},$$

la valeur de $\mathfrak{v}'$ étant

$$(20)\qquad \mathfrak{v}' = \left(v^2 + w^2 - \frac{k'^2}{1+f'}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Comme on ne connaît pas *a priori* la loi des actions moléculaires, ni par suite les valeurs des constantes f, f′, le seul moyen de savoir si ces constantes vérifient les formules (11) et (16) ou (13) et (18), est de chercher les conséquences qui se déduisent de l'une et l'autre supposition, et de les comparer aux résultats de l'expérience. Or, si l'on admet les formules (11) et (16), alors les conditions (12) jointes aux conditions (17) donneront, pour $x = 0$,

$$(21)\qquad \bar{\xi} = \bar{\xi}', \quad \bar{\eta} = \bar{\eta}', \quad \bar{\zeta} = \bar{\zeta}', \quad \bar{\varphi} = \bar{\varphi}', \quad \bar{\chi} = \bar{\chi}', \quad \bar{\psi} = \bar{\psi}'.$$

De ces dernières équations, combinées avec les formules (6), (8), on tirera

$$(22)\qquad \left\{\begin{array}{lll} A + A_{,} = A', & B + B_{,} = B', & C + C_{,} = C', \\ u(A - A_{,}) = u'A', & u(B - B_{,}) = u'B', & u(C - C_{,}) = u'C', \end{array}\right.$$

et par suite

$$(23)\qquad \frac{A_{,}}{A} = \frac{B_{,}}{B} = \frac{C_{,}}{C} = \frac{u - u'}{u + u'},$$

$$(24)\qquad \frac{A'}{A} = \frac{B'}{B} = \frac{C'}{C} = \frac{2u}{u + u'};$$

puis de ces dernières, jointes aux formules (2), (5) et (7), on conclura

$$(25)\qquad \left\{\begin{array}{l} Au + Bv + Cw = 0, \\ -Au + Bv + Cw = 0, \\ Au' + Bv + Cw = 0. \end{array}\right.$$

D'ailleurs on tire des formules (25)

$$(26)\qquad Au = Au' = 0, \qquad Bv + Cw = 0,$$

puis de celles-ci, combinées avec les formules (9) et (1),

$$(27)\qquad Au = A'u' = 0, \qquad Bv + Cw = 0$$

et

$$(28)\qquad u\bar{\xi} = u'\bar{\xi} = 0, \qquad v\bar{\eta} + w\bar{\zeta} = 0;$$

par conséquent

$$(29)\qquad u\xi = u'\xi = 0, \qquad v\eta + w\zeta = 0.$$

Enfin, pour satisfaire à la première des équations (29), il faut supposer que l'on a

$$(30)\qquad u = u' = 0,$$

c'est-à-dire que les plans des ondes incidentes et réfractées sont parallèles au plan des y, z, ou que l'on a

$$(31)\qquad \xi = 0,$$

c'est-à-dire que les vibrations des molécules sont perpendiculaires à l'axe des x. Donc, lorsque les formules (11) ou (16) se vérifient, un mouvement incident, que nous supposons simple, ne peut donner naissance à un seul mouvement simple réfléchi, et à un seul mouvement simple réfracté, que dans des cas très particuliers, savoir, lorsque les plans des ondes ou les directions des vibrations moléculaires sont parallèles à la surface réfléchissante.

Au contraire, un mouvement simple pourra se réfléchir et se réfracter, quelle que soit la direction des plans des ondes ou des vibrations moléculaires, si l'on suppose vérifiées non plus les formules (11) et (16), mais les formules (13) et (18). Alors les variables

$$\bar{\xi}, \quad \bar{\eta}, \quad \bar{\zeta}, \quad \bar{\varphi}, \quad \bar{\chi}, \quad \bar{\psi}$$

d'une part, et les variables

$$\bar{\xi}', \quad \bar{\eta}', \quad \bar{\zeta}', \quad \bar{\varphi}', \quad \bar{\chi}', \quad \bar{\psi}'$$

d'autre part, se trouveront liées à

$$\bar{\xi}_0, \quad \bar{\eta}_0, \quad \bar{\zeta}_0, \quad \bar{\varphi}_0, \quad \bar{\chi}_0, \quad \bar{\psi}_0$$

par les formules (14), (19), dont chacune comprendra cinq équations distinctes ; et l'élimination de

$$\bar{\xi}_0, \quad \bar{\eta}_0, \quad \bar{\zeta}_0, \quad \bar{\varphi}_0, \quad \bar{\chi}_0, \quad \bar{\psi}_0$$

entre les dix équations, dont le système est représenté par ces deux formules, fournira, entre les seules variables

$$\bar{\xi},\quad \bar{\eta},\quad \bar{\zeta},\quad \bar{\varphi},\quad \bar{\chi},\quad \bar{\psi},$$
$$\bar{\xi}',\quad \bar{\eta}',\quad \bar{\zeta}',\quad \bar{\varphi}',\quad \bar{\chi}',\quad \bar{\psi}',$$

quatre équations de condition qui devront subsister pour $x = 0$. Pour obtenir ces équations de condition, on observera qu'en raisonnant comme dans le paragraphe III, on tire des formules (14) et (19) non seulement

$$w\bar{\eta} - v\bar{\zeta} = w\bar{\eta}_0 - v\bar{\zeta}_0, \qquad \bar{\psi} - w\bar{\xi} = \bar{\psi}_0 - w\bar{\xi}_0, \qquad v\bar{\xi} - \bar{\chi} = v\bar{\xi}_0 - \bar{\chi}_0$$

et

$$w\bar{\eta}' - v\bar{\zeta}' = w\bar{\eta}_0 - v\bar{\zeta}_0, \qquad \bar{\psi}' - w\bar{\xi}' = \bar{\psi}_0 - w\bar{\xi}_0, \qquad v\bar{\xi}' - \bar{\chi}' = v\bar{\xi}_0 - \bar{\chi}_0,$$

mais encore

$$\bar{\varphi} + \alpha\bar{\xi} + \frac{\beta}{v}\bar{\eta} = \bar{\varphi}_0 + \alpha\bar{\xi}_0 + \frac{\beta}{v}\bar{\eta}_0$$

et

$$\bar{\varphi}' + \alpha\bar{\xi}' + \frac{\beta}{v}\bar{\eta}' = \bar{\varphi}_0 + \alpha\bar{\xi}_0 + \frac{\beta}{v}\bar{\eta}_0,$$

pourvu que l'on choisisse α, β de manière à vérifier simultanément les deux formules

$$(32) \qquad \mathrm{U}^2 - \alpha\mathrm{U} + \beta = 0, \qquad \mathrm{U}'^2 - \alpha\mathrm{U}' + \beta = 0.$$

On devra donc avoir alors, pour $x = 0$,

$$(33) \quad w\bar{\eta} - v\bar{\zeta} = w\bar{\eta}' - v\bar{\zeta}', \qquad \bar{\psi} - w\bar{\xi} = \bar{\psi}' - w\bar{\xi}', \qquad v\bar{\xi} - \bar{\chi} = v\bar{\xi}' - \bar{\chi}'$$

et

$$(34) \qquad \bar{\varphi} + \alpha\bar{\xi} + \frac{\beta}{v}\bar{\eta} = \bar{\varphi}' + \alpha\bar{\xi}' + \frac{\beta}{v}\bar{\eta}'.$$

De plus, comme, en vertu des équations (32), U, U' sont les deux racines de l'équation du second degré

$$\varkappa^2 - \alpha\varkappa + \beta = 0,$$

on aura nécessairement

$$(35) \qquad \alpha = \mathrm{U} + \mathrm{U}', \qquad \beta = \mathrm{U}\mathrm{U}',$$

et par suite la formule (34) pourra être réduite à

$$(36) \qquad \bar{\varphi} + (\mathrm{U} + \mathrm{U}')\bar{\xi} + \frac{\mathrm{U}\mathrm{U}'}{v}\bar{\eta} = \bar{\varphi}' + (\mathrm{U} + \mathrm{U}')\bar{\xi}' + \frac{\mathrm{U}\mathrm{U}'}{v}\bar{\eta}'.$$

Les formules (33) et (36) seront précisément les quatre équations de condition demandées.

Avant d'aller plus loin, il est bon d'observer qu'en vertu des formules (6), (8), les équations (33) peuvent être réduites aux trois suivantes

$$(37) \qquad \left\{\begin{aligned} \mathrm{D}_z\bar{\eta} - \mathrm{D}_y\bar{\zeta} &= \mathrm{D}_z\bar{\eta}' - \mathrm{D}_y\bar{\zeta}', \\ \mathrm{D}_x\bar{\zeta} - \mathrm{D}_z\bar{\xi} &= \mathrm{D}_x\bar{\zeta}' - \mathrm{D}_z\bar{\xi}', \\ \mathrm{D}_y\bar{\xi} - \mathrm{D}_x\bar{\eta} &= \mathrm{D}_y\bar{\xi}' - \mathrm{D}_x\bar{\eta}', \end{aligned}\right.$$

desquelles on tire évidemment

$$(38) \qquad \left\{\begin{aligned} \mathrm{D}_z\eta - \mathrm{D}_y\zeta &= \mathrm{D}_z\eta' - \mathrm{D}_y\zeta', \\ \mathrm{D}_x\zeta - \mathrm{D}_z\xi &= \mathrm{D}_x\zeta' - \mathrm{D}_z\xi', \\ \mathrm{D}_y\xi - \mathrm{D}_x\eta &= \mathrm{D}_y\xi' - \mathrm{D}_x\eta', \end{aligned}\right.$$

ou, ce qui revient au même,

$$(39) \qquad \left\{\begin{aligned} \frac{\partial\eta}{\partial z} - \frac{\partial\zeta}{\partial y} &= \frac{\partial\eta'}{\partial z} - \frac{\partial\zeta'}{\partial y}, \\ \frac{\partial\zeta}{\partial x} - \frac{\partial\xi}{\partial z} &= \frac{\partial\zeta'}{\partial x} - \frac{\partial\xi'}{\partial z}, \\ \frac{\partial\xi}{\partial y} - \frac{\partial\eta}{\partial x} &= \frac{\partial\xi'}{\partial y} - \frac{\partial\eta'}{\partial x}. \end{aligned}\right.$$

Les formules (39) sont précisément les trois premières des quatre formules que j'ai données en 1836 comme propres à représenter les équations de condition relatives à la surface réfléchissante. (Voir les *Nouveaux Exercices*, p. 203) [1].

[1] Œuvres de C. S. II, t. X, p. 425-426.

Ajoutons que l'équation (36) peut s'écrire comme il suit

$$(40)\qquad \overline{\eta} + D_y\left(\frac{1}{\mathfrak{v}} + \frac{1}{\mathfrak{v}'} + \frac{D_x}{\mathfrak{v}\mathfrak{v}'}\right)\overline{\xi} = \overline{\eta}' + D_y\left(\frac{1}{\mathfrak{v}} + \frac{1}{\mathfrak{v}'} + \frac{D_x}{\mathfrak{v}\mathfrak{v}'}\right)\overline{\xi}'.$$

Observons encore qu'en vertu des formules (1) et (2) ou (4) et (5), on vérifiera l'équation

$$(41)\qquad D_x\overline{\xi} + D_y\overline{\eta} + D_z\overline{\zeta} = 0,$$

en supposant les déplacements symboliques

$$\overline{\xi},\quad \overline{\eta},\quad \overline{\zeta}$$

relatifs au mouvement incident, ou au mouvement réfléchi, par conséquent aussi, en supposant ces déplacements symboliques relatifs au mouvement résultant de la superposition des ondes incidentes et réfléchies. Pareillement il suit des formules (6) et (7) que les déplacements symboliques

$$\overline{\xi}',\quad \overline{\eta}',\quad \overline{\zeta}',$$

relatifs au mouvement réfracté, vérifient la formule

$$(42)\qquad D_x\overline{\xi}' + D_y\overline{\eta}' + D_z\overline{\zeta}' = 0.$$

Au reste, les formules (41) et (42) entraînent les deux suivantes

$$(43)\qquad \begin{cases} D_x\xi + D_y\eta + D_z\zeta = 0, \\ D_x\xi' + D_y\eta' + D_z\zeta' = 0, \end{cases}$$

qui se déduisent immédiatement de l'hypothèse admise, puisqu'elles expriment que les mouvements propagés dans chaque système de molécules ont lieu sans changement de densité. On tirera d'ailleurs des formules (41), (42)

$$D_x(\overline{\xi} - \overline{\xi}') + D_y(\overline{\eta} - \overline{\eta}') + D_z(\overline{\zeta} - \overline{\zeta}') = 0,$$

ou, ce qui revient au même, eu égard aux équations (6) et (8),

$$D_x(\overline{\xi} - \overline{\xi}') + v(\overline{\eta} - \overline{\eta}') + w(\overline{\zeta} - \overline{\zeta}') = 0,$$

et par conséquent

$$(44)\qquad \begin{cases} v(\overline{\eta} - \overline{\eta}') + w(\overline{\zeta} - \overline{\zeta}') = -D_x(\overline{\xi} - \overline{\xi}'), \\ v(\overline{\chi} - \overline{\chi}') + w(\overline{\Psi} - \overline{\Psi}') = -D_x^2(\overline{\xi} - \overline{\xi}'), \end{cases}$$

quelles que soient les valeurs attribuées aux variables x, y, z.

Les quatre équations de condition (37) et (40) peuvent être remplacées par d'autres que l'on déduit aisément des formules (14) et (19) combinées avec les équations (44). En effet, les formules (14) et (19) donnent non seulement

$$\overline{\xi} - \overline{\xi}_0 = \frac{\overline{\chi} - \overline{\chi}_0}{v} = \frac{\overline{\Psi} - \overline{\Psi}_0}{w}, \qquad \frac{\overline{\eta} - \overline{\eta}_0}{v} = \frac{\overline{\zeta} - \overline{\zeta}_0}{w},$$

$$\overline{\xi}' - \overline{\xi}_0 = \frac{\overline{\chi}' - \overline{\chi}_0}{v} = \frac{\overline{\Psi}' - \overline{\Psi}_0}{w}, \qquad \frac{\overline{\eta}' - \overline{\eta}_0}{v} = \frac{\overline{\zeta}' - \overline{\zeta}_0}{w},$$

et par suite

$$(45)\qquad \overline{\xi} - \overline{\xi}' = \frac{\overline{\chi} - \overline{\chi}'}{v} = \frac{\overline{\Psi} - \overline{\Psi}'}{w}, \qquad \frac{\overline{\eta} - \overline{\eta}'}{v} = \frac{\overline{\zeta} - \overline{\zeta}'}{w},$$

mais encore

$$\overline{\varphi} + \alpha\overline{\xi} + \frac{\beta}{v}\overline{\eta} = \overline{\varphi}_0 + \alpha\overline{\xi}_0 + \frac{\beta}{v}\overline{\eta}_0, \qquad \overline{\varphi}' + \alpha\overline{\xi}' + \frac{\beta}{v}\overline{\eta}' = \overline{\varphi}_0 + \alpha\overline{\xi}_0 + \frac{\beta}{v}\overline{\eta}_0,$$

et par suite

$$(46)\qquad \overline{\varphi} - \overline{\varphi}' + \alpha(\overline{\xi} - \overline{\xi}') + \frac{\beta}{v}(\overline{\eta} - \overline{\eta}') = 0,$$

pourvu que l'on suppose

$$\alpha = \mathfrak{v} + \mathfrak{v}', \qquad \beta = \mathfrak{v}\mathfrak{v}'.$$

Or les formules (45) et (46), qui ne diffèrent pas au fond des formules (33), (34), donneront d'abord

$$(47)\qquad \frac{\eta - \eta'}{v} = \frac{\zeta - \zeta'}{w}, \qquad \frac{\chi - \chi'}{v} = \frac{\psi - \psi'}{w},$$

ou, ce qui revient au même,

$$(48)\qquad D_z\overline{\eta} - D_y\overline{\zeta} = D_z\overline{\eta}' - D_y\overline{\zeta}', \qquad D_x(D_z\overline{\eta} - D_y\overline{\zeta}) = D_x(D_z\overline{\eta}' - D_y\overline{\zeta}');$$

puis, eu égard aux formules (44),

$$\xi - \xi' = \frac{v(\overline{\gamma} - \overline{\gamma}') + w(\overline{\psi} - \overline{\psi}')}{v^2 + w^2} = -\frac{D_x^2(\overline{\xi} - \overline{\xi}')}{v^2 + w^2},$$

$$(\alpha + D_x)(\overline{\xi} - \overline{\xi}') = -\mathfrak{E}\frac{\overline{\eta} - \overline{\eta}'}{v}$$

$$= -\mathfrak{E}\frac{\overline{\zeta} - \overline{\zeta}'}{w} = -\mathfrak{E}\frac{v(\overline{\eta} - \overline{\eta}') + w(\overline{\zeta} - \overline{\zeta}')}{v^2 + w^2} = \mathfrak{E}\frac{D_x(\overline{\xi} - \overline{\xi}')}{v^2 + w^2},$$

et par conséquent

$$(49)\qquad \begin{cases} (D_x^2 + v^2 + w^2)(\overline{\xi} - \overline{\xi}') = 0, \\ [\mathfrak{E} D_x - (v^2 + w^2)(\alpha + D_x)](\overline{\xi} - \overline{\xi}') = 0, \end{cases}$$

ou, ce qui revient au même, eu égard aux formules (35),

$$(50)\qquad \begin{cases} (D_x^2 + D_y^2 + D_z^2)\overline{\xi} = (D_x^2 + D_y^2 + D_z^2)\overline{\xi}', \\ \left[D_x - (D_y^2 + D_z^2)\left(\frac{1}{\mathfrak{V}} + \frac{1}{\mathfrak{V}'} + \frac{D_x}{\mathfrak{V}\mathfrak{V}'}\right)\right]\overline{\xi} \\ = \left[D_x - (D_y^2 + D_z^2)\left(\frac{1}{\mathfrak{V}} + \frac{1}{\mathfrak{V}'} + \frac{D_x}{\mathfrak{V}\mathfrak{V}'}\right)\right]\overline{\xi}'. \end{cases}$$

D'ailleurs on tirera immédiatement des formules (48) et (50)

$$(51)\qquad D_z\eta - D_y\zeta = D_z\eta' - D_y\zeta', \qquad D_x(D_z\eta - D_y\zeta) = D_x(D_z\eta' - D_y\zeta')$$

$$(52)\qquad \begin{cases} (D_x^2 + D_y^2 + D_z^2)\xi = (D_x^2 + D_y^2 + D_z^2)\xi', \\ \left[D_x - (D_y^2 + D_z^2)\left(\frac{1}{\mathfrak{V}} + \frac{1}{\mathfrak{V}'} + \frac{D_x}{\mathfrak{V}\mathfrak{V}'}\right)\right]\xi \\ = \left[D_x - (D_y^2 + D_z^2)\left(\frac{1}{\mathfrak{V}} + \frac{1}{\mathfrak{V}'} + \frac{D_x}{\mathfrak{V}\mathfrak{V}'}\right)\right]\xi'. \end{cases}$$

Les équations de condition (51) et (52) offrent cela de remarquable, que les deux dernières renferment seulement les déplacements ξ, ξ' mesurés, dans l'un et l'autre milieu, suivant des droites perpendiculaires à la surface réfléchissante, tandis que les deux premières renferment seulement les déplacements η, ζ, ou η', ζ', mesurés suivant des droites parallèles à cette surface.

Posons maintenant pour abréger

$$(53)\qquad k^2 = u^2 + v^2 + w^2 = -\mathbf{k}^2 \qquad \text{et} \qquad k'^2 = u'^2 + v^2 + w^2 = -\mathbf{k}'^2.$$

Les conditions (48), (50), qui doivent subsister pour $x = 0$, étant jointes aux formules (6), (8), donneront

$$B w - C v + B_{,} w - C_{,} v = B' w - C' v,$$
$$u[(B w - C v) - (B_{,} w - C_{,} v)] = u'(B' w - C' v),$$

et

$$k^2(A + A_{,}) = k'^2 A',$$

$$u\left(1 - \frac{v^2 + w^2}{\mathfrak{V}\mathfrak{V}'}\right)(A - A_{,}) - \left(\frac{1}{\mathfrak{V}} + \frac{1}{\mathfrak{V}'}\right)(v^2 + w^2)(A + A_{,})$$
$$= \left[u' - (v^2 + w^2)\left(\frac{1}{\mathfrak{V}} + \frac{1}{\mathfrak{V}'} + \frac{u'}{\mathfrak{V}\mathfrak{V}'}\right)\right]A',$$

ou, ce qui revient au même,

$$\frac{B' w - C' v}{u} = \frac{(B w - C v) + (B_{,} w - C_{,} v)}{u} = \frac{(B w - C v) - (B_{,} w - C_{,} v)}{u'},$$

$$\frac{A'}{k^2 u\left(1 - \frac{v^2 + w^2}{\mathfrak{V}\mathfrak{V}'}\right)} = \frac{A + A_{,}}{k'^2 u\left(1 - \frac{v^2 + w^2}{\mathfrak{V}\mathfrak{V}'}\right)}$$
$$= \frac{A - A_{,}}{k^2 u'\left(1 - \frac{v^2 + w^2}{\mathfrak{V}\mathfrak{V}'}\right) + (k'^2 - k^2)(v^2 + w^2)\left(\frac{1}{\mathfrak{V}} + \frac{1}{\mathfrak{V}'}\right)};$$

par conséquent

$$(54)\qquad \begin{cases} B_{,} w - C_{,} v = \frac{u - u'}{u + u'}(B w - C v), \\ B' w - C' v = \frac{2u}{u + u'}(B w - C v), \end{cases}$$

$$(55)\qquad \begin{cases} A_{,} = \dfrac{(k'^2 u - k^2 u')\left(1 - \frac{v^2 + w^2}{\mathfrak{V}\mathfrak{V}'}\right) - (k'^2 - k^2)(v^2 + w^2)\left(\frac{1}{\mathfrak{V}} + \frac{1}{\mathfrak{V}'}\right)}{(k'^2 u + k^2 u')\left(1 - \frac{v^2 + w^2}{\mathfrak{V}\mathfrak{V}'}\right) + (k'^2 - k^2)(v^2 + w^2)\left(\frac{1}{\mathfrak{V}} + \frac{1}{\mathfrak{V}'}\right)} A, \\ A' = \dfrac{2k^2 u\left(1 - \frac{v^2 + w^2}{\mathfrak{V}\mathfrak{V}'}\right)}{(k'^2 u + k^2 u')\left(1 - \frac{v^2 + w^2}{\mathfrak{V}\mathfrak{V}'}\right) + (k'^2 - k^2)(v^2 + w^2)\left(\frac{1}{\mathfrak{V}} + \frac{1}{\mathfrak{V}'}\right)} A. \end{cases}$$

Comme, en vertu des formules (53), on a

$$\begin{aligned} k'^2 - k^2 &= (u' - u)(u' + u), \\ k'^2 u - k^2 u' &= (v^2 + w^2 - uu')(u - u'), \\ k'^2 u + k^2 u' &= (v^2 + w^2 + uu')(u + u'), \end{aligned}$$

il est clair que les équations (55) peuvent s'écrire comme il suit

$$(56)\quad \left\{ \begin{aligned} \frac{A_{,}}{A} &= \frac{(v^2+w^2-uu')\left(1-\frac{v^2+w^2}{\upsilon\upsilon'}\right)+(u'+u)(v^2+w^2)\left(\frac{1}{\upsilon}+\frac{1}{\upsilon'}\right)}{(v^2+w^2+uu')\left(1-\frac{v^2+w^2}{\upsilon\upsilon'}\right)+(u'-u)(v^2+w^2)\left(\frac{1}{\upsilon}+\frac{1}{\upsilon'}\right)}\,\frac{u-u'}{u+u'}, \\ \frac{A'}{A} &= \frac{k^2\left(1-\frac{v^2+w^2}{\upsilon\upsilon'}\right)}{(v^2+w^2+uu')\left(1-\frac{v^2+w^2}{\upsilon\upsilon'}\right)+(u'-u)(v^2+w^2)\left(\frac{1}{\upsilon}+\frac{1}{\upsilon'}\right)}\,\frac{2u}{u+u'}. \end{aligned} \right.$$

Les équations (54) et (55) ou (56), jointes aux formules (5) et (7), suffisent pour déterminer complètement les valeurs des constantes

$$A_{,},\quad B_{,},\quad C_{,},\qquad \text{et}\qquad u',\quad A'\quad B'\quad C'$$

relatives aux mouvements réfléchi et réfracté, quand on connait les valeurs des constantes

$$u,\quad v,\quad w,\quad s,\quad A,\quad B,\quad C$$

relatives au mouvement incident.

Si l'on veut, dans les valeurs de

$$A,\quad B,\quad C,\quad A',\quad B',\quad C',$$

introduire les coefficients réels

$$\mathrm{u},\quad \mathrm{v},\quad \mathrm{w},\quad \mathrm{u}',$$

à la place des coefficients imaginaires

$$u,\quad v,\quad w,\quad u'.$$

il suffira d'avoir égard aux formules (9). Alors les formules (54)

et (56), jointes aux formules (5) et (7), donneront

$$(57)\quad \left\{ \begin{aligned} \frac{B_{,}w - C_{,}v}{Bw - Cv} &= \frac{\mathrm{u}-\mathrm{u}'}{\mathrm{u}+\mathrm{u}'}, \\ \frac{B'w - C'v}{Bw - Cv} &= \frac{2\mathrm{u}}{\mathrm{u}+\mathrm{u}'}, \end{aligned} \right.$$

$$(58)\quad \left\{ \begin{aligned} \frac{A_{,}}{A} &= \frac{(\mathrm{v}^2+\mathrm{w}^2-\mathrm{u}\mathrm{u}')\left(1-\frac{\mathrm{v}^2+\mathrm{w}^2}{\upsilon\upsilon'}\right)+(\mathrm{u}'+\mathrm{u})(\mathrm{v}^2+\mathrm{w}^2)\left(\frac{1}{\upsilon}+\frac{1}{\upsilon'}\right)\sqrt{-1}}{(\mathrm{v}^2+\mathrm{w}^2+\mathrm{u}\mathrm{u}')\left(1-\frac{\mathrm{v}^2+\mathrm{w}^2}{\upsilon\upsilon'}\right)+(\mathrm{u}'-\mathrm{u})(\mathrm{v}^2+\mathrm{w}^2)\left(\frac{1}{\upsilon}+\frac{1}{\upsilon'}\right)\sqrt{-1}}\,\frac{\mathrm{u}-\mathrm{u}'}{\mathrm{u}+\mathrm{u}'}, \\ \frac{A'}{A} &= \frac{k^2\left(1-\frac{\mathrm{v}^2+\mathrm{w}^2}{\upsilon\upsilon'}\right)}{(\mathrm{v}^2+\mathrm{w}^2+\mathrm{u}\mathrm{u}')\left(1-\frac{\mathrm{v}^2+\mathrm{w}^2}{\upsilon\upsilon'}\right)+(\mathrm{u}'-\mathrm{u})(\mathrm{v}^2+\mathrm{w}^2)\left(\frac{1}{\upsilon}+\frac{1}{\upsilon'}\right)\sqrt{-1}}\,\frac{\mathrm{u}-\mathrm{u}'}{\mathrm{u}+\mathrm{u}'}. \end{aligned} \right.$$

et

$$(59)\quad \left\{ \begin{aligned} -A_{,}\mathrm{u} + B_{,}\mathrm{v} + C_{,}\mathrm{w} &= 0, \\ A'\mathrm{u}' + B'\mathrm{v} + C'\mathrm{w} &= 0. \end{aligned} \right.$$

Les calculs se simplifient lorsqu'on suppose l'axe des z parallèle aux traces des plans des ondes sur la surface réfléchissante. Alors, la formule (23) du paragraphe IV devant se réduire à

$$y = 0,$$

on aura nécessairement

$$\mathrm{w} = 0,\qquad w = \mathrm{w}\sqrt{-1} = 0,$$

et par suite les formules (1), (4), (6) deviendront

$$(60)\quad \bar{\xi} = A\,e^{nx+vy-st},\qquad \bar{\eta} = B\,e^{nx+vy-st},\qquad \bar{\zeta} = C\,e^{nx+vy-st},$$

$$(61)\quad \bar{\xi} = A_{,}\,e^{-nx+vy-st},\qquad \bar{\eta} = B_{,}\,e^{-nx+vy-st},\qquad \bar{\zeta} = C_{,}\,e^{-nx+vy-st},$$

$$(62)\quad \bar{\xi}' = A'\,e^{n'x+vy-st},\qquad \bar{\eta}' = B'\,e^{n'x+vy-st},\qquad \bar{\zeta}' = C'\,e^{n'x+vy-st}.$$

Alors aussi, les valeurs des déplacements symboliques étant indépendantes de z, dans chacun des mouvements incident, réfléchi et réfracté, les dérivées de ces déplacements, relatives à z, s'évanouiront dans les formules (48) et (50) qui se réduiront aux suivantes

$$(63)\quad D_y\bar{\zeta} = D_y\bar{\eta},\qquad D_x D_y\bar{\zeta} = D_x D_y\bar{\xi},$$

$$(64)\quad \left\{ \begin{aligned} (D_x^2 + D_y^2)\,\bar{\xi} &= (D_x^2 + D_y^2)\,\bar{\xi}', \\ \left[D_x - D_y^2\left(\frac{1}{\upsilon}+\frac{1}{\upsilon'}+\frac{D_x}{\upsilon\upsilon'}\right)\right]\bar{\xi} &= \left[D_x - D_y^2\left(\frac{1}{\upsilon}+\frac{1}{\upsilon'}+\frac{D_x}{\upsilon\upsilon'}\right)\right]\bar{\xi}'. \end{aligned} \right.$$

Comme on pourra d'ailleurs, dans celles-ci, remplacer D_y par v, les formules (63) donneront

$$\bar{\zeta} = \bar{\zeta}', \qquad D_x\bar{\zeta} = D_x\bar{\zeta}',$$

ou, ce qui revient au même,

$$\bar{\zeta} = \bar{\zeta}', \qquad \bar{\psi} = \bar{\psi}'.$$

Ces dernières, qui se trouvent déjà comprises parmi les conditions (21), donneront encore

$$C + C_i = C', \qquad u(C - C_i) = u'C',$$

par conséquent

$$(65) \qquad \frac{C_i}{C} = \frac{u - u'}{u + u'}, \qquad \frac{C'}{C} = \frac{2u}{u + u'};$$

et l'on tirera des formules (64)

$$(66) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{A_i}{A} &= \frac{(v^2 - uu')\left(1 - \frac{v^2}{\mathfrak{v}\mathfrak{v}'}\right) + (u' + u)\,v^2\left(\frac{1}{\mathfrak{v}} + \frac{1}{\mathfrak{v}'}\right)}{(v^2 + uu')\left(1 - \frac{v^2}{\mathfrak{v}\mathfrak{v}'}\right) + (u' - u)\,v^2\left(\frac{1}{\mathfrak{v}} + \frac{1}{\mathfrak{v}'}\right)}\,\frac{u - u'}{u + u'}, \\ \frac{A'}{A} &= \frac{k^2\left(1 - \frac{v^2}{\mathfrak{v}\mathfrak{v}'}\right)}{(v^2 + uu')\left(1 - \frac{v^2}{\mathfrak{v}\mathfrak{v}'}\right) + (u' - u)\,v^2\left(\frac{1}{\mathfrak{v}} + \frac{1}{\mathfrak{v}'}\right)}\,\frac{2u}{u + u'}. \end{aligned} \right.$$

D'autre part, en vertu des formules (2), (5), (7) et (53), on aura non seulement

$$(67) \qquad Au + Bv = 0$$

et

$$(68) \qquad -A_i u + B_i v = 0, \qquad A'u' + B'v = 0,$$

mais encore

$$(69) \qquad k^2 = u^2 + v^2 = \frac{s^2}{t}, \qquad k'^2 = u'^2 + v^2 = \frac{s^2}{t'}.$$

Nous avons supposé, dans ce qui précède, que les mouvements

incident, réfléchi et réfracté sont du nombre de ceux qui ne s'éteignent pas en se propageant. Alors les valeurs de u, v, s, u' sont de la forme

$$(70) \qquad u = \mathfrak{u}\sqrt{-1}, \qquad v = \mathfrak{v}\sqrt{-1}, \qquad s = \mathfrak{s}\sqrt{-1}, \qquad u' = \mathfrak{u}'\sqrt{-1},$$

et par suite la partie réelle de u' s'évanouit, aussi bien que la partie réelle de u. Mais les formules trouvées s'étendent à des cas mêmes où cette condition ne serait pas remplie. Ainsi, en particulier, si l'on a

$$\mathfrak{k}' < \mathfrak{k},$$

la valeur de u'^2, déterminée par l'équation $u'^2 + v^2 + w^2 = k'^2$, ou

$$(71) \qquad u'^2 = \mathfrak{v}^2 + \mathfrak{w}^2 - \mathfrak{k}'^2,$$

pourra s'écrire comme il suit,

$$u'^2 = \mathfrak{k}^2 - \mathfrak{k}'^2 - \mathfrak{u}^2,$$

et cette valeur deviendra positive quand on aura

$$u^2 < \mathfrak{k}^2 - \mathfrak{k}'^2.$$

Donc alors l'équation (71) fournira pour u' deux valeurs réelles qui ne s'évanouiront pas, savoir

$$(72) \qquad u' = -\sqrt{\mathfrak{v}^2 + \mathfrak{w}^2 - \mathfrak{k}'^2}, \qquad u' = \sqrt{\mathfrak{v}^2 + \mathfrak{w}^2 - \mathfrak{k}'^2};$$

et, comme de ces deux valeurs réelles la première sera négative, elle indiquera un mouvement réfracté qui s'éteindra en se propageant dans le second milieu. Cela posé, si l'on a

$$(73) \qquad \frac{1}{1 + \Gamma} < 1,$$

et par suite

$$\frac{\mathfrak{k}'^2}{1 + \Gamma} < \mathfrak{k}'^2,$$

il est clair que des valeurs de u', fournies par l'équation (71) et par la suivante

$$(74) \qquad u'^2 = \mathfrak{v}^2 + \mathfrak{w}^2 - \frac{\mathfrak{k}'^2}{1 + \Gamma},$$

une seule, savoir la racine négative de l'équation (74), sera inférieure à la racine négative de l'équation (71), c'est-à-dire à la valeur de u' fournie par la première des formules (72). Donc alors, en vertu des principes établis dans le Mémoire sur les équations de condition relatives aux limites des corps, les valeurs de

$$A,\ B,\ C,\quad A_{,},\ B_{,},\ C_{,},\quad A',\ B',\ C',$$

correspondant aux mouvements incident, réfléchi, réfracté, seront encore liées entre elles par les formules (54) et (56).

MÉMOIRE

SUR

LA TRANSFORMATION ET LA RÉDUCTION DES INTÉGRALES GÉNÉRALES

D'UN

SYSTÈME D'ÉQUATIONS LINÉAIRES

AUX DIFFÉRENCES PARTIELLES.

Considérations générales.

Considérons un système d'équations linéaires aux différences partielles entre plusieurs variables principales

$$\xi,\ \eta,\ \zeta,\ \ldots$$

et des variables indépendantes

$$x,\ y,\ z,\ t$$

qui, dans les problèmes de Mécanique, représenteront, par exemple, trois coordonnées rectangulaires et le temps. Comme je l'ai prouvé dans un précédent Mémoire, on pourra, en supposant connues les valeurs initiales des variables principales et de quelques-unes de leurs dérivées, réduire la recherche des intégrales générales des équations proposées à l'évaluation d'une seule fonction des variables indépendantes, que j'ai nommée la *fonction principale*. Cette fonction principale n'est autre chose qu'une intégrale particulière de l'équation unique aux différences partielles, à laquelle doit satisfaire chacune des variables principales, ou même une fonction linéaire quelconque de ces variables; et, si, dans tous les termes de cette équation aux diffé-

rences partielles, on efface la lettre employée pour représenter la fonction principale, on obtiendra entre les puissances des signes de différentiation

$$D_x, \quad D_y, \quad D_z, \quad D_t,$$

ce qu'on peut appeler l'*équation caractéristique*. Ajoutons : 1° que l'ordre n de cette équation caractéristique est généralement la somme des nombres qui, dans les équations données, représentent les ordres des dérivées les plus élevées des variables principales, différentiées par rapport au temps t ; 2° que la fonction principale, assujettie à s'évanouir au premier instant, c'est-à-dire pour $t = 0$, avec ses dérivées relatives au temps et d'un ordre inférieur à $n - 1$, doit fournir une dérivée de l'ordre $n - 1$, qui se réduise alors à une fonction de x, y, z choisie arbitrairement. Ainsi déterminée, la fonction principale peut toujours être représentée par une intégrale définie sextuple, relative à six variables auxiliaires, et qui renferme sous le signe $\int$ une exponentielle trigonométrique dont l'exposant est une fonction linéaire des variables indépendantes.

Observons maintenant que, dans beaucoup de cas, on peut abaisser l'ordre de l'équation caractéristique. De plus, l'intégrale définie sextuple, qui représente la fonction principale, peut souvent être remplacée par des intégrales d'un ordre moindre, ou se réduire même à une expression en termes finis. En conséquence, les intégrales générales d'un système d'équations linéaires peuvent admettre des transformations et des réductions qu'il est bon de connaître, et dont nous allons maintenant nous occuper.

I. — *Sur la réduction de l'équation caractéristique.*

Concevons, comme dans le Mémoire ci-dessus mentionné, que les variables indépendantes

$$x, \quad y, \quad z, \quad t$$

représentent trois coordonnées et le temps ; et considérons en particulier le cas où, dans les équations données, les dérivées des ordres

les plus élevés par rapport au temps t se trouvent multipliées par des quantités constantes, sans être soumises à des différentiations relatives aux coordonnées x, y, z. Si l'on nomme $\varkappa$ l'une quelconque des variables principales, et si l'on élimine toutes les autres entre les équations linéaires données, en supposant les seconds membres réduits à zéro, on obtiendra une équation résultante

$$(1) \qquad \nabla \varkappa = 0,$$

dans laquelle ∇ sera une fonction entière des caractéristiques

$$D_x, \quad D_y, \quad D_z, \quad D_t;$$

et l'on vérifiera l'équation (1) en prenant pour $\varkappa$, non seulement l'une quelconque des variables principales, mais encore une fonction linéaire quelconque de ces variables.

Cela posé, nous appellerons *équation caractéristique* la formule symbolique

$$(2) \qquad \nabla = 0$$

à laquelle on parvient en effaçant la variable principale $\varkappa$ dans le premier membre de l'équation (1) ; ou bien encore, l'équation

$$(3) \qquad \delta = 0$$

qu'on obtient en remplaçant dans la formule (1),

$$D_x, \quad D_y, \quad D_z, \quad D_t$$

par de simples lettres

$$u, \quad v, \quad w, \quad s.$$

Si la fonction symbolique ∇ est du degré n par rapport à D_t, on pourra y supposer le coefficient de D_t^n réduit à l'unité, et le nombre n représentera l'*ordre* ou le degré de l'équation caractéristique. Si d'ailleurs on nomme

$$\varpi(x, y, z)$$

une fonction quelconque des trois coordonnées x, y, z ;

$$\lambda, \quad \mu, \quad \nu, \quad \mathrm{u}, \quad \mathrm{v}, \quad \mathrm{w}$$

des variables auxiliaires et réelles ;

$$u, \quad v, \quad w$$

des variables imaginaires liées à u, v, w par les formules

$$u = \mathrm{u}\sqrt{-1}, \qquad v = \mathrm{v}\sqrt{-1}, \qquad w = \mathrm{w}\sqrt{-1};$$

et ϖ la fonction principale, on trouvera

$$(4) \qquad \varpi = \mathfrak{L}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{\mathrm{u}(x-\lambda)+\mathrm{v}(y-\mu)+\mathrm{w}(z-\nu)+st}}{((\delta))} \times \varpi(\lambda, \mu, \nu)\frac{d\lambda\, d\mathrm{u}}{2\pi}\frac{d\mu\, d\mathrm{v}}{2\pi}\frac{d\nu\, d\mathrm{w}}{2\pi},$$

le signe $\mathfrak{L}$ du calcul des résidus étant relatif à la variable s considérée comme racine de l'équation

$$\delta = 0.$$

Ajoutons que la fonction principale ϖ, dont la formule (4) fournit la valeur, sera complètement déterminée par la double condition de vérifier, quel que soit t, l'équation aux différences partielles

$$(5) \qquad \nabla\varpi = 0,$$

et, pour une valeur nulle de t, les formules

$$(6) \qquad \varpi = 0, \quad \mathrm{D}_t\varpi = 0, \quad \ldots, \quad \mathrm{D}_t^{n-2}\varpi = 0, \quad \mathrm{D}_t^{n-1}\varpi = \varpi(x, y, z).$$

Cela posé, nous allons indiquer les avantages que peut offrir la réduction de l'équation caractéristique

$$\nabla = 0$$

à une autre plus simple et de la même forme.

Admettons d'abord que chacune des équations linéaires données ait zéro pour second membre. Alors, les valeurs initiales des variables principales ξ, η, ζ, ... et d'un nombre suffisant de leurs dérivées relatives à t, étant supposées connues, les valeurs générales de

$$\xi, \quad \eta, \quad \zeta, \quad \ldots,$$

par conséquent aussi la valeur générale d'une fonction linéaire z de ces variables et de leurs dérivées, se composeront de termes de la forme

$$\square\varpi,$$

$\square$ désignant une fonction entière de

$$\mathrm{D}_x, \quad \mathrm{D}_y, \quad \mathrm{D}_z, \quad \mathrm{D}_t,$$

et $\varpi(x, y, z)$ l'une des valeurs initiales données des variables principales ou de leurs dérivées relatives à t. Or le terme

$$\square\varpi$$

pourra être réduit à une forme plus simple, si $\square$ et ∇ ont un commun diviseur algébrique. C'est ce que l'on prouvera sans peine, en cherchant l'intégrale définie sextuple qui, eu égard à la formule (4), devra représenter $\square\varpi$, ou bien encore, en raisonnant comme il suit.

Soit $\mathfrak{D}$ un commun diviseur algébrique de ∇ et de $\square$, représenté par une fonction entière des caractéristiques

$$\mathrm{D}_x, \quad \mathrm{D}_y, \quad \mathrm{D}_z, \quad \mathrm{D}_t,$$

en sorte qu'on ait

$$\nabla = \mathfrak{D}\nabla_{,} \qquad \text{et} \qquad \square = \mathfrak{D}\square_{,},$$

$\nabla_{,}$, $\square_{,}$ désignant encore deux fonctions entières des mêmes caractéristiques. Si l'on nomme $n_{,}$ le degré de $\nabla_{,}$ par rapport à D_t, $n - n_{,}$ sera celui de $\mathfrak{D}$, et l'on pourra, dans les fonctions symboliques $\mathfrak{D}$, $\nabla_{,}$, comme dans la fonction ∇, supposer les coefficients des puissances de D_t les plus élevées réduits à l'unité. Cela posé, il est clair d'une part que l'équation (5) prendra la forme

$$(7) \qquad \nabla_{,}\mathfrak{D}\varpi = 0,$$

et que les conditions (6) relatives à une valeur nulle de t entraîneront les suivantes

$$(8) \qquad \mathfrak{D}\varpi = 0, \quad \mathrm{D}_t\mathfrak{D}\varpi = 0, \quad \ldots, \quad \mathrm{D}_t^{n_{,}-2}\mathfrak{D}\varpi = 0, \quad \mathrm{D}_t^{n_{,}-1}\mathfrak{D}\varpi = \varpi(x, y, z);$$

d'autre part, que l'on aura identiquement

$$\square\varpi = \square_{,}\mathfrak{D}\varpi.$$

Faisons maintenant, pour abréger,

$$\mathfrak{D}\varpi = \varpi_{,}.$$

l'équation (7) deviendra

$$\nabla_1 \varpi_1 = 0, \tag{9}$$

et, en vertu des conditions (8), on aura, pour une valeur nulle de t,

$$\varpi_1 = 0, \quad D_t \varpi_1 = 0, \quad \ldots, \quad D_t^{n_1-2} \varpi_1 = 0, \quad D_t^{n_1-1} \varpi_1 = \varpi(x, y, z); \tag{10}$$

tandis que la formule

$$\square \varpi = \square_1 \mathfrak{D} \varpi$$

donnera

$$\square \varpi = \square_1 \varpi_1. \tag{11}$$

D'ailleurs les formules (9), (10), qui suffisent pour déterminer complètement la fonction ϖ_1, sont entièrement semblables aux formules (5), (6), qui déterminent la fonction ϖ; et, pour passer des unes aux autres, il suffit de réduire, dans la recherche de la fonction principale ϖ ou ϖ_1, l'équation caractéristique

$$\nabla = 0$$

à l'équation caractéristique plus simple

$$\nabla_1 = 0,$$

dont le premier membre est par rapport à D_t, non plus du degré n, mais seulement du degré n_1. En conséquence, la formule (11) entraînera la proposition suivante :

Premier Théorème. — *Soit donné entre les variables principales*

$$\xi, \quad \eta, \quad \zeta, \quad \ldots$$

et les variables indépendantes

$$x, \quad y, \quad z, \quad t,$$

un système d'équations linéaires aux différences partielles et à coefficients constants, dans lesquelles les dérivées des ordres les plus élevés par rapport à t se trouvent multipliées par des constantes, sans être soumises à des différentiations relatives aux coordonnées x, y, z; on pourra sup-

poser, dans le premier membre de l'équation caractéristique, le coefficient de la puissance de D_t la plus élevée réduit à l'unité. Cela posé, soit

$$\square \varpi$$

l'un des termes dont se composera la valeur générale de l'une des variables principales, ou d'une fonction linéaire z de ces variables et de leurs dérivées, la lettre ϖ désignant dans ce même terme la fonction principale. S'il existe un commun diviseur algébrique $\mathfrak{D}$ entre le premier membre de l'équation caractéristique et la fonction de

$$D_x, \quad D_y, \quad D_z, \quad D_t,$$

désignée par $\square$, on pourra, dans la recherche de la fonction principale ϖ, qui correspond au terme $\square \varpi$, réduire l'équation caractéristique à une forme plus simple, en divisant par $\mathfrak{D}$ le premier membre de cette équation, pourvu que l'on divise aussi par $\mathfrak{D}$ la valeur trouvée de $\square$.

Corollaire. — Si $\mathfrak{D}$, étant diviseur de ∇, c'est-à-dire du premier membre de l'équation caractéristique, est aussi diviseur de $\square$ dans chacun des termes

$$\square \varpi$$

dont se compose la valeur générale d'une fonction linéaire z des variables principales et de leurs dérivées ; alors, dans la recherche de la fonction principale correspondant à chaque terme de la valeur générale de z, on pourra réduire le premier membre ∇ de l'équation caractéristique au rapport

$$\frac{\nabla}{\mathfrak{D}} = \nabla_1,$$

pourvu que l'on divise aussi par $\mathfrak{D}$, dans chaque terme $\square \varpi$, la valeur de $\square$. Mais alors z pourra être représenté par une somme de termes de la forme

$$\square_1 \varpi_1,$$

pour chacun desquels la fonction principale ϖ_1 vérifiera la formule

$$\nabla_1 \varpi_1 = 0;$$

et par suite on aura encore, quel que soit t,

$$\nabla_{,}\varkappa = 0.$$

Le cas où la réduction indiquée s'appliquerait à tous les termes compris dans la valeur de $\varkappa$ est donc précisément le cas où, des équations linéaires données, jointes à la formule qui détermine $\varkappa$ en fonction de $\xi, \eta, \zeta, \ldots$, on pourrait déduire par élimination, non seulement l'équation

$$\nabla\varkappa = 0,$$

mais encore une équation plus simple

$$\nabla_{,}\varkappa = 0,$$

$\nabla_{,}$ étant le quotient de ∇ par un diviseur algébrique $\mathfrak{D}$. Réciproquement, si la variable $\varkappa$ satisfait en général non seulement à l'équation

$$\nabla\varkappa = 0,$$

mais encore à une équation plus simple

$$\nabla_{,}\varkappa = 0,$$

dans laquelle on ait

$$\nabla_{,} = \frac{\nabla}{\mathfrak{D}},$$

le troisième théorème du paragraphe IV du Mémoire sur l'intégration des équations linéaires pourra être appliqué à la détermination des variables principales $\xi, \eta, \zeta, \ldots$ et par suite à la détermination de la variable $\varkappa$, de telle sorte que chaque terme de $\varkappa$ se présente successivement sous la forme

$$\frac{\square}{\nabla}\nabla\varpi = \square\varpi,$$

puis sous la forme plus simple

$$\frac{\square_{,}}{\nabla_{,}}\nabla\varpi = \square_{,}\mathfrak{D}\varpi = \square_{,}\varpi_{,}.$$

Il en résulte évidemment qu'on pourra substituer au théorème dont il s'agit la proposition suivante :

Deuxième Théorème. — *Soient données entre plusieurs variables principales*

$$\xi, \quad \eta, \quad \zeta, \quad \ldots$$

et les variables indépendantes

$$x, \quad y, \quad z, \quad t$$

des équations linéaires aux différences partielles et à coefficients constants, en nombre égal à celui des variables principales. Concevons d'ailleurs que l'ordre des dérivées de $\xi, \eta, \zeta, \ldots$, relatives à t, puisse s'élever jusqu'à n' pour la variable principale ξ, jusqu'à n'' pour la variable principale $\eta, \ldots$, les coefficients de

$$D_t^{n'-1}\xi, \quad D_t^{n''}\eta, \quad \ldots$$

étant indépendants de D_x, D_y, D_z, et se réduisant en conséquence à des quantités constantes. Supposons les variables principales

$$\xi, \quad \eta, \quad \zeta, \quad \ldots$$

assujetties non seulement à vérifier, quel que soit t, les équations linéaires données, mais aussi à vérifier, pour $t = 0$, les conditions

$$\begin{array}{llll}
\xi = \varphi(x, y, z), & D_t\xi = \varphi_{,}(x, y, z), & \ldots, & D_t^{n'-1}\xi = \varphi_{n'-1}(x, y, z), \\
\eta = \chi(x, y, z), & D_t\eta = \chi_{,}(x, y, z), & \ldots, & D_t^{n''-1}\eta = \chi_{n''-1}(x, y, z), \\
\ldots\ldots\ldots\ldots, & \ldots\ldots\ldots\ldots, & \ldots, & \ldots\ldots\ldots\ldots
\end{array}$$

Soient encore

$$\varkappa$$

une fonction linéaire des variables principales $\zeta, \eta, \zeta, \ldots$ et de leurs dérivées de divers ordres, et

$$\nabla\varkappa = 0$$

l'équation différentielle la plus simple à laquelle $\varkappa$ doive généralement satisfaire en vertu des équations données, ∇ étant une fonction entière des caractéristiques

$$D_x, \quad D_y, \quad D_z, \quad D_t,$$

tellement choisie que le coefficient de la puissance de D_t la plus élevée s'y réduise à l'unité. Enfin, supposons la fonction principale ϖ déterminée

de manière qu'on ait : 1° *quel que soit* t,

$$\nabla\varpi = 0;$$

2° *pour* $t = 0$,

$$\varpi = 0, \quad D_t\varpi = 0, \quad \ldots, \quad D_t^{i-2}\varpi = 0, \quad D_t^{i-1}\varpi = \varpi(x, y, z),$$

i *désignant le degré de* ∇ *par rapport à* D_t ; *et nommons*

$$\begin{array}{llll} \varphi, & \varphi_{,}, & \ldots, & \varphi_{n'-1}, \\ \chi, & \chi_{,}, & \ldots, & \chi_{n''-1}, \\ \ldots, & \ldots, & \ldots, & \ldots\ldots, \end{array}$$

ce que devient ϖ *quand on réduit* $\varpi(x, y, z)$ *à l'une des fonctions*

$$\begin{array}{llll} \varphi(x, y, z), & \varphi_{,}(x, y, z), & \ldots, & \varphi_{n'-1}(x, y, z), \\ \chi(x, y, z), & \chi_{,}(x, y, z), & \ldots, & \chi_{n''-1}(x, y, z), \\ \ldots\ldots\ldots, & \ldots\ldots\ldots, & \ldots, & \ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}$$

Pour obtenir, dans l'hypothèse admise, la valeur générale de u, *il suffira de remplacer, dans les équations linéaires données, les dérivées*

$$\begin{array}{llll} D_t\xi, & D_t^2\xi, & \ldots, & D_t^{n'-1}\xi, \\ D_t\eta, & D_t^2\eta, & \ldots, & D_t^{n''-1}\eta, \\ \ldots, & \ldots, & \ldots, & \ldots\ldots \end{array}$$

par les différences

$$\begin{array}{l} D_t\xi - \nabla\varphi, \quad D_t^2\xi - \nabla(\varphi_{,} + D_t\varphi), \quad \ldots, \\ D_t^{n'-1}\xi - \nabla(\varphi_{n'-1} + \ldots + D_t^{n'-2}\varphi_{,} + D_t^{n'-1}\varphi), \\ D_t\eta - \nabla\chi, \quad D_t^2\eta - \nabla(\chi_{,} + D_t\chi), \quad \ldots, \\ D_t^{n''-1}\eta - \nabla(\chi_{n''-1} + \ldots + D_t^{n''-2}\chi_{,} + D_t^{n''-1}\chi), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}$$

puis d'éliminer $\xi, \eta, \zeta, \ldots$ *entre les nouvelles équations ainsi obtenues et celle qui fournit la valeur de* u, *en opérant comme si*

$$D_x, \quad D_y, \quad D_z, \quad D_t$$

étaient de véritables quantités.

Corollaire. — Le théorème précédent offre le moyen d'obtenir sous une forme plus simple les valeurs générales des variables principales elles-mêmes, lorsque l'équation aux différences partielles la plus simple, à laquelle chacune de ces variables puisse satisfaire, est, par rapport à t, d'un ordre inférieur à la somme

$$n = n' + n'' + \ldots.$$

Si, comme il arrive ordinairement dans la Mécanique, les équations linéaires données ne contiennent d'autres dérivées relatives au temps que des dérivées du second ordre dont les coefficients se réduisent à l'unité, alors, au lieu du deuxième théorème, on obtiendra la proposition suivante :

Troisième Théorème. — *Soient données, entre* n *variables principales*

$$\xi, \quad \eta, \quad \zeta, \quad \ldots$$

et les variables indépendantes

$$x, \quad y, \quad z, \quad t,$$

n *équations linéaires aux différences partielles et à coefficients constants, qui renferment, avec les variables principales et leurs dérivées de divers ordres obtenues par des différentiations relatives aux coordonnées* x, y, z, *les dérivées du second ordre relatives au temps, savoir*

$$D_t^2\xi, \quad D_t^2\eta, \quad D_t^2\zeta, \quad \ldots,$$

les coefficients de ces dernières dérivées étant égaux à l'unité. Supposons d'ailleurs les variables principales

$$\xi, \quad \eta, \quad \zeta, \quad \ldots$$

assujetties non seulement à vérifier, quel que soit t, *les équations données, mais aussi à vérifier, pour* $t = 0$, *les conditions*

$$\begin{array}{llll} \xi = \varphi(x, y, z), & \eta = \chi(x, y, z), & \zeta = \psi(x, y, z), & \ldots, \\ D_t\xi = \Phi(x, y, z), & D_t\eta = X(x, y, z), & D_t\zeta = \Psi(x, y, z), & \ldots. \end{array}$$

Soient encore

$$\varkappa,$$

l'une quelconque des variables principales

$$\xi, \quad \eta, \quad \zeta, \quad \ldots$$

ou bien une fonction linéaire de ces variables et de leurs dérivées de divers ordres, et

$$\nabla\varkappa = 0$$

l'équation aux différences partielles la plus simple à laquelle $\varkappa$ doive généralement satisfaire, en vertu des équations données, ∇ étant une fonction entière des caractéristiques

$$D_x, \quad D_y, \quad D_z, \quad D_t$$

tellement choisie que le coefficient de la puissance de D_t la plus élevée s'y réduise à l'unité. Enfin, soit i le degré de cette puissance, qui pourra être ou égal ou inférieur à $2n$; supposons la fonction principale ϖ déterminée de manière que l'on ait : 1° quel que soit t,

$$\nabla\varpi = 0,$$

2° pour $t = 0$,

$$\varpi = 0, \quad D_t\varpi = 0, \quad \ldots, \quad D_t^{i-2}\varpi = 0, \quad D_t^{i-1}\varpi = \varpi(x, y, z),$$

et nommons

$$\varphi, \quad \chi, \quad \psi, \quad \ldots, \quad \Phi, \quad X, \quad \Psi, \quad \ldots$$

ce que devient ϖ quand on réduit $\varpi(x, y, z)$ à l'une des fonctions

$$\varphi(x, y, z), \quad \chi(x, y, z), \quad \psi(x, y, z), \quad \ldots,$$
$$\Phi(x, y, z), \quad X(x, y, z), \quad \Psi(x, y, z), \quad \ldots.$$

Pour obtenir, dans l'hypothèse admise, la valeur générale de $\varkappa$, il suffira de remplacer, dans les équations linéaires données, les dérivées du second ordre

$$D_t^2\xi, \quad D_t^2\eta, \quad D_t^2\zeta, \quad \ldots$$

par les différences

$$D_t^2\xi - \nabla(\Phi + D_t\varphi), \quad D_t^2\eta - \nabla(X + D_t\chi), \quad D_t^2\zeta - \nabla(\Psi + D_t\psi), \quad \ldots,$$

puis d'éliminer $\xi, \eta, \zeta, \ldots$ entre les nouvelles équations ainsi obtenues et celle qui fournit la valeur de $\varkappa$, en opérant comme si

$$D_x, \quad D_y, \quad D_z, \quad D_t$$

étaient de véritables quantités.

Les théorèmes deuxième et troisième supposent que les seconds membres des équations linéaires données se réduisent à zéro. Si ces seconds membres devenaient fonctions des variables indépendantes

$$x, \quad y, \quad z, \quad t,$$

on pourrait appliquer à la détermination des valeurs générales de

$$\xi, \quad \eta, \quad \zeta, \quad \ldots$$

le théorème IV du paragraphe IV du Mémoire sur l'intégration des équations linéaires, en combinant ce théorème avec les propositions nouvelles que nous venons d'établir.

II. — *Sur la décomposition de la fonction principale.*

La fonction principale ϖ, relative à un système d'équations linéaires aux différences partielles, peut être, comme on l'a dit, représentée par une intégrale définie sextuple, savoir, par celle qui constitue le second membre de l'équation (4) du paragraphe I. Dans cette intégrale, la fraction rationnelle

$$\frac{1}{s}$$

dépend des variables auxiliaires

$$u, \quad v, \quad w, \quad s$$

et se décompose en fractions plus simples, lorsque le polynome s, considéré comme fonction de s, est lui-même décomposé en facteurs de degré moindre. Or, la décomposition de la fraction rationnelle

$$\frac{1}{s}$$

en plusieurs autres, entraîne évidemment la décomposition correspondante de l'intégrale sextuple qui représente ou la fonction principale ϖ, ou l'une de ses dérivées prises par rapport au temps, en d'autres intégrales de même espèce. Il peut d'ailleurs arriver que ces dernières représentent de nouvelles fonctions principales correspondant à de nouvelles équations caractéristiques, ou que, sans les représenter, elles leur soient respectivement proportionnelles. C'est ce qui aura lieu, par exemple, si, le degré n de l'équation caractéristique étant un nombre pair, le premier membre ∇ de cette équation se présente sous la forme

$$\nabla = (D_t^2 - G)(D_t^2 - H)\ldots, \tag{1}$$

G, H, ... désignant des fonctions qui renferment seulement

$$D_x, \quad D_y, \quad D_z,$$

et qui soient entre elles dans des rapports constants. En effet, supposons que, m étant un nombre entier quelconque, on différentie m fois par rapport à t, la fonction principale ϖ déterminée par l'équation (4) du paragraphe I. On trouvera

$$\left\{\begin{aligned} D_t^m \varpi = \mathcal{E}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{s^m \varpi(\lambda, \mu, \nu)}{((\delta))} \\ \times e^{u(x-\lambda)+v(y-\mu)+w(z-\nu)+st}\frac{d\lambda\, du}{2\pi}\,\frac{d\mu\, dv}{2\pi}\,\frac{d\nu\, dw}{2\pi}, \end{aligned}\right. \tag{2}$$

le signe $\mathcal{E}$ du calcul des résidus étant relatif aux diverses racines de l'équation

$$\delta = 0.$$

D'autre part, si l'on nomme

$$\mathcal{G}, \quad \mathcal{H}, \quad \ldots$$

ce que deviennent

$$G, \quad H, \quad \ldots$$

quand on y remplace

$$D_x, \quad D_y, \quad D_z \quad \text{par} \quad u, \quad v, \quad w,$$

on aura, en vertu de la formule (1),

$$\delta = (s^2 - \mathcal{G})(s^2 - \mathcal{H})\ldots, \tag{3}$$

et par conséquent

$$\frac{s^m}{\delta} = \frac{g}{s^2 - \mathcal{G}} + \frac{h}{s^2 - \mathcal{H}} + \ldots, \tag{4}$$

les numérateurs $g, h, \ldots$ désignant, en général, ainsi que $\mathcal{G}, \mathcal{H}, \ldots$, des fonctions des seules variables u, v, w. Mais ce qu'il importe de remarquer c'est que, dans l'hypothèse admise, où les fonctions G, H, ... et par suite les fonctions $\mathcal{G}, \mathcal{H}, \ldots$ sont entre elles dans des rapports constants, le numérateur g, ou la véritable valeur acquise par la fraction

$$\frac{s^m(s^2 - \mathcal{G})}{\delta} = \frac{s^m}{(s^2 - \mathcal{H})\ldots},$$

quand on pose $s^2 = \mathcal{G}$, se réduira simplement à une constante si l'on prend

$$m = n - 2,$$

attendu qu'alors

$$s^m \quad \text{et} \quad (s^2 - \mathcal{H})\ldots = \frac{\delta}{s^2 - \mathcal{G}}$$

deviendront proportionnels à $\mathcal{G}^{\frac{n}{2}-1}$. La même remarque étant applicable à chacun des numérateurs

$$g, \quad h, \quad \ldots,$$

il est clair que, si, dans les équations (2) et (4), on pose $m = n - 2$, on en tirera

$$\left\{\begin{aligned} D_t^{n-2}\varpi = {} & g\,\mathcal{E}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varpi(\lambda, \mu, \nu)}{((s^2 - \mathcal{G}))} \\ & \times e^{u(x-\lambda)+v(y-\mu)+w(z-\nu)+st}\frac{d\lambda\, du}{2\pi}\,\frac{d\mu\, dv}{2\pi}\,\frac{d\nu\, dw}{2\pi} \\ & + h\,\mathcal{E}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varpi(\lambda, \mu, \nu)}{((s^2 - \mathcal{H}))} \\ & \times e^{u(x-\lambda)+v(y-\mu)+w(z-\nu)+st}\frac{d\lambda\, du}{2\pi}\,\frac{d\mu\, dv}{2\pi}\,\frac{d\nu\, dw}{2\pi} \\ & + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right. \tag{5}$$

Soient d'ailleurs

$$\varpi_1, \quad \varpi_2, \quad \ldots$$

les fonctions principales correspondant, non plus à l'équation carac-

téristique

$$\nabla = 0,$$

mais aux suivantes

$$D_t^2 - G = 0, \quad D_t^2 - H = 0, \quad \ldots.$$

Il est clair que, pour obtenir les valeurs de

$$\varpi_1, \quad \varpi_2, \quad \ldots,$$

exprimées par des intégrales définies, il suffira de remplacer successivement dans la formule (4) du paragraphe I, la fonction

$$s$$

par chacun des binomes

$$s^2 - \mathcal{G}, \quad s^2 - \mathcal{H}, \quad \ldots.$$

On aura donc encore

$$(6)\quad \left\{\begin{aligned} \varpi_1 &= \mathcal{E}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\varpi(\lambda, \mu, \nu)}{((s^2 - \mathcal{G}))} \\ &\quad \times e^{u(x-\lambda)+v(y-\mu)+w(z-\nu)+st}\frac{d\lambda\, d\nu}{2\pi}\,\frac{d\mu\, d\nu}{2\pi}\,\frac{d\nu\, dw}{2\pi}, \\ \varpi_2 &= \mathcal{E}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\varpi(\lambda, \mu, \nu)}{((s^2 - \mathcal{H}))} \\ &\quad \times e^{u(x-\lambda)+v(y-\mu)+w(z-\nu)+st}\frac{d\lambda\, d\nu}{2\pi}\,\frac{d\mu\, d\nu}{2\pi}\,\frac{d\nu\, dw}{2\pi}, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots; \end{aligned}\right.$$

et par suite la formule (5) donnera

$$(7)\quad D_t^{n-2}\varpi = g\varpi_1 + h\varpi_2 + \ldots.$$

Donc, si l'on différentie $n-2$ fois, par rapport à t, la fonction principale ϖ correspondant à l'équation caractéristique

$$\nabla = 0,$$

la dérivée ainsi obtenue se composera de plusieurs termes respectivement proportionnels aux fonctions principales

$$\varpi_1, \quad \varpi_2, \quad \ldots.$$

Observons d'ailleurs : 1° que la fonction principale ϖ est complètement déterminée par la double condition de vérifier, quel que soit t, l'équation

$$(8)\quad \nabla\varpi = 0,$$

et pour $t = 0$, les formules

$$(9)\quad \varpi = 0, \quad D_t\varpi = 0, \quad \ldots, \quad D_t^{n-2}\varpi = 0, \quad D_t^{n-1}\varpi = \varpi(x, y, z);$$

2° que pareillement les fonctions principales ϖ_1, ϖ_2, ... sont complètement déterminées par la double condition de vérifier, quel que soit t, les équations

$$(10)\quad (D_t^2 - G)\varpi_1 = 0, \quad (D_t^2 - H)\varpi_2 = 0, \quad \ldots,$$

et pour $t = 0$, les formules

$$(11)\quad \left\{\begin{aligned} &\varpi_1 = 0, \quad \varpi_2 = 0, \quad \ldots, \\ &D_t\varpi_1 = D_t\varpi_2 = \ldots = \varpi(x, y, z). \end{aligned}\right.$$

Cela posé, si l'on indique à l'aide des caractéristiques

$$D_t^{-1}, \quad D_t^{-2}, \quad D_t^{-3}, \quad \ldots,$$

une, deux, trois ... intégrations effectuées par rapport à t, à partir de l'origine $t = 0$, on tirera évidemment de la formule (7)

$$(12)\quad \varpi = D_t^{-(n-2)}(g\varpi_1 + h\varpi_2 + \ldots).$$

Il est bon de remarquer encore que, dans le cas où, m étant égal à $n-2$, les numérateurs g, h deviennent constants dans la formule (4), cette formule entraîne la suivante

$$(13)\quad \frac{D_t^{n-2}}{\nabla} = \frac{g}{D_t^2 - G} + \frac{h}{D_t^2 - H} + \ldots.$$

Effectivement, lorsque les fonctions

$$D_x, \quad D_y, \quad D_z,$$

représentées par g, h, ..., sont entre elles dans des rapports constants, il résulte de la formule (1) qu'on peut satisfaire à l'équation (13), en

attribuant à g, h des valeurs constantes. Ces valeurs sont précisément celles qu'il convient d'employer dans la formule (7) ou (12).

Au reste, sans recourir à la transformation de la fonction principale ϖ en intégrale définie, on peut établir directement la formule (7) ou (12), en prouvant que la valeur de ϖ, déterminée par la formule (12), vérifie non seulement les conditions (9), mais encore l'équation (8); et d'abord il est clair que cette valeur et ses dérivées, prises par rapport au temps, mais d'un ordre inférieur à $n-1$, s'évanouiront pour $t=0$. De plus, on tirera de la formule (12) : 1° quel que soit t,

$$D_t^{n-1}\varpi = gD_t\varpi_1 + hD_t\varpi_2 + \ldots;$$

2° pour $t=0$, ayant égard aux formules (11),

$$D_t^{n-1}\varpi = (g+h+\ldots)\varpi(x, y, z);$$

et, comme d'autre part on conclura de l'équation (13), en réduisant les deux membres au même dénominateur,

$$g+h+\ldots=1,$$

on peut affirmer que la valeur de ϖ, déterminée par l'équation (12), vérifiera encore la dernière des conditions (9). Il reste à prouver que la même valeur vérifiera, quel que soit t, l'équation (8). Or considérons, par exemple, le cas où l'on aurait $n=4$. Dans ce cas, la formule (13), réduite à

$$\frac{D_t^2}{(D_t^2-G)(D_t^2-H)} = \frac{g}{D_t^2-G} + \frac{h}{D_t^2-H},$$

donnera, non seulement

$$g+h=1,$$

mais encore

$$gH+hG=0, \qquad hG=-gH;$$

et de l'équation (7), réduite à la forme

$$D_t^2\varpi = g\varpi_1 + h\varpi_2, \tag{14}$$

on tirera

$$GD_t^2\varpi = G(g\varpi_1+h\varpi_2) = gG\varpi_1 - gH\varpi_2;$$

puis, en ayant égard aux formules (10),

$$D_t^2G\varpi = D_t^2g(\varpi_1-\varpi_2),$$

et, en intégrant deux fois de suite, à partir de $t=0$,

$$G\varpi = g(\varpi_1-\varpi_2). \tag{15}$$

Si maintenant on combine entre elles les formules (14), (15), on en conclura

$$(D_t^2-G)\varpi = (g+h)\varpi_2,$$

et par suite, eu égard à la seconde des formules (10),

$$(D_t^2-G)(D_t^2-H)\varpi = 0. \tag{16}$$

Or l'équation (16) est précisément celle à laquelle se réduit l'équation (8), dans le cas où l'on suppose $n=4$: par conséquent

$$\nabla = (D_t^2-G)(D_t^2-H);$$

et il est aisé de s'assurer que des raisonnements semblables suffiraient pour déduire l'équation (8) de l'équation (12) dans le cas même où le nombre n deviendrait supérieur à 4.

Ajoutons que la proposition contenue dans la formule (12) peut être généralisée ; et, en effet, on peut établir, à l'aide des mêmes raisonnements, celle que nous allons énoncer.

THÉORÈME. — *Supposons que, dans l'équation caractéristique*

$$\nabla = 0,$$

la plus haute puissance de D_t *ait pour coefficient l'unité, et que le premier membre* ∇ *de cette équation soit décomposable en facteurs de même forme, en sorte qu'on ait*

$$\nabla = \nabla'\nabla''\ldots.$$

Soient d'ailleurs

$$\varpi, \quad \varpi_1, \quad \varpi_2, \quad \ldots$$

les fonctions principales correspondant aux équations caractéristiques

$$\nabla = 0, \quad \nabla' = 0, \quad \nabla'' = 0, \quad \ldots.$$

Si l'on a identiquement

$$\frac{D_t^m}{\nabla} = \frac{g}{\nabla'} + \frac{h}{\nabla''} + \ldots, \tag{17}$$

$g, h, \ldots$ désignant des quantités constantes, on en conclura

$$D_t^m \varpi = g\varpi_1 + h\varpi_2 + \ldots,$$

et par conséquent

$$\varpi = D_t^{-m}(g\varpi_1 + h\varpi_2 + \ldots). \tag{18}$$

III. — *Transformation de la fonction principale.*

Soit

$$\nabla = F(D_x, D_y, D_z, D_t)$$

le premier membre de l'équation caractéristique correspondant à un système d'équations linéaires qui renferment les variables indépendantes x, y, z, t. Soit encore n l'ordre de cette équation, dans laquelle nous supposerons le coefficient de D_t^n réduit à l'unité ; et nommons

$$\delta = F(u, v, w, s) \tag{1}$$

ce que devient le premier membre ∇, quand on y remplace

$$D_x, \quad D_y, \quad D_z, \quad D_t$$

par de simples lettres

$$u, \quad v, \quad w, \quad s.$$

Enfin, représentons par

$$\mathrm{u}, \quad \mathrm{v}, \quad \mathrm{w}, \quad \lambda, \quad \mu, \quad \nu$$

six variables auxiliaires, dont les trois premières soient liées avec u, v, w par les formules

$$u = \mathrm{u}\sqrt{-1}, \quad v = \mathrm{v}\sqrt{-1}, \quad w = \mathrm{w}\sqrt{-1}; \tag{2}$$

et considérons s comme une fonction de u, v, w déterminée par l'équation

$$\delta = 0. \tag{3}$$

Ainsi que nous l'avons déjà dit, la fonction principale ϖ, assujettie à vérifier, quel que soit t, l'équation linéaire

$$\nabla\varpi = 0,$$

et, pour $t = 0$, les conditions

$$\varpi = 0, \quad D_t\varpi = 0, \quad \ldots, \quad D_t^{n-2}\varpi = 0, \quad D_t^{n-1}\varpi = \varpi(x, y, z),$$

sera déterminée par la formule

$$\left\{\begin{aligned} \varpi = \mathcal{E}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varpi(\lambda, \mu, \nu)}{((\delta))} \\ \times e^{u(x-\lambda)+v(y-\mu)+w(z-\nu)+st}\frac{d\lambda\, d\mathrm{u}}{2\pi}\frac{d\mu\, d\mathrm{v}}{2\pi}\frac{d\nu\, d\mathrm{w}}{2\pi}, \end{aligned}\right. \tag{4}$$

le signe $\mathcal{E}$ du calcul des résidus étant relatif aux différentes valeurs de s qui vérifient l'équation (3). Par suite, si l'on nomme m un nombre entier quelconque, on trouvera

$$\left\{\begin{aligned} D_t^m\varpi = \mathcal{E}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{s^m\varpi(\lambda, \mu, \nu)}{((\delta))} \\ \times e^{u(x-\lambda)+v(y-\mu)+w(z-\nu)+st}\frac{d\lambda\, d\mathrm{u}}{2\pi}\frac{d\mu\, d\mathrm{v}}{2\pi}\frac{d\nu\, d\mathrm{w}}{2\pi}. \end{aligned}\right. \tag{5}$$

Or les valeurs précédentes de la fonction principale ϖ et de sa dérivée de l'ordre m, c'est-à-dire de $D_t^m\varpi$, peuvent subir des transformations diverses que nous allons indiquer.

Si l'on considère les trois variables auxiliaires

$$\mathrm{u}, \quad \mathrm{v}, \quad \mathrm{w}$$

comme représentant des coordonnées rectangulaires, on pourra les transformer en trois coordonnées polaires, dont la première sera le rayon vecteur k mené de l'origine au point (u, v, w), c'est-à-dire au point qui a pour coordonnées rectangulaires u, v, w, à l'aide d'équations

de la forme

$$(6)\qquad \mathrm{u} = \mathrm{k}\cos\mathrm{p},\qquad \mathrm{v} = \mathrm{k}\sin\mathrm{p}\cos\mathrm{q},\qquad \mathrm{w} = \mathrm{k}\sin\mathrm{p}\sin\mathrm{q}.$$

Pareillement, si l'on considère les trois variables auxiliaires

$$\lambda,\quad \mu,\quad \nu,$$

ou plutôt les trois différences

$$\lambda - x,\quad \mu - y,\quad \nu - z,$$

comme représentant des coordonnées rectangulaires, on pourra les transformer en trois coordonnées polaires, dont la première soit le rayon vecteur ρ mené du point (x, y, z) au point (λ, μ, ν), ou plutôt de l'origine au point $(\lambda - x, \mu - y, \nu - z)$, à l'aide d'équations de la forme

$$(7)\qquad \lambda - x = \rho\cos\theta,\qquad \mu - y = \rho\sin\theta\cos\tau,\qquad \nu - z = \rho\sin\theta\sin\tau.$$

Soit d'ailleurs δ l'angle compris entre les rayons vecteurs k, ρ; on aura

$$\cos\delta = \frac{\mathrm{u}(\lambda - x) + \mathrm{v}(\mu - y) + \mathrm{w}(\nu - z)}{\mathrm{k}\rho}$$

ou, ce qui revient au même,

$$(8)\qquad \cos\delta = \cos\mathrm{p}\cos\theta + \sin\mathrm{p}\cos\mathrm{q}\sin\theta\cos\tau + \sin\mathrm{p}\sin\mathrm{q}\sin\theta\sin\tau.$$

Cela posé, comme, en désignant par

$$f(x, y, z)$$

une fonction quelconque des trois variables x, y, z, on aura généralement, eu égard aux formules (6),

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(\mathrm{u}, \mathrm{v}, \mathrm{w})\, d\mathrm{u}\, d\mathrm{v}\, d\mathrm{w} = \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{\infty} f(\mathrm{u}, \mathrm{v}, \mathrm{w})\, \mathrm{k}^2 \sin\mathrm{p}\, d\mathrm{p}\, d\mathrm{q}\, d\mathrm{k}$$
$$= \frac{1}{2}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(\mathrm{u}, \mathrm{v}, \mathrm{w})\, \mathrm{k}^2 \sin\mathrm{p}\, d\mathrm{p}\, d\mathrm{q}\, d\mathrm{k},$$

et, eu égard aux formules (7),

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(\lambda - x, \mu - y, \nu - z)\, d\lambda\, d\mu\, d\nu$$
$$= \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{\infty} f(\lambda - x, \mu - y, \nu - z)\, \rho^2 \sin\theta\, d\theta\, d\tau\, d\rho$$
$$= \frac{1}{2}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(\lambda - x, \mu - y, \nu - z)\, \rho^2 \sin\theta\, d\theta\, d\tau\, d\rho,$$

l'équation (4) donnera

$$(9)\qquad \left\{\begin{aligned} \varpi = \frac{1}{4}\mathcal{E}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} & \frac{\varpi(\lambda, \mu, \nu)}{((s))} \\ & \times e^{st - \mathrm{k}\rho\cos\delta\sqrt{-1}}\, \mathrm{k}^2\rho^2 \sin\mathrm{p}\sin\theta\, \frac{d\mathrm{p}\, d\mathrm{q}\, d\mathrm{k}\, d\theta\, d\tau\, d\rho}{(2\pi)^3}, \end{aligned}\right.$$

le signe $\mathcal{E}$ du calcul des résidus étant toujours relatif aux diverses valeurs de s qui vérifient l'équation (3).

On tirera pareillement de la formule (5)

$$(10)\qquad \left\{\begin{aligned} \mathrm{D}_t^m\varpi = \frac{1}{4}\mathcal{E}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} & \frac{s^m\varpi(\lambda, \mu, \nu)}{((s))} \\ & \times e^{st - \mathrm{k}\rho\cos\delta\sqrt{-1}}\, \mathrm{k}^2\rho^2 \sin\mathrm{p}\sin\theta\, \frac{d\mathrm{p}\, d\mathrm{q}\, d\mathrm{k}\, d\theta\, d\tau\, d\rho}{(2\pi)^3}. \end{aligned}\right.$$

Admettons maintenant que

$$\mathrm{F}(\mathrm{D}_x, \mathrm{D}_y, \mathrm{D}_z, \mathrm{D}_t)$$

soit une fonction homogène de

$$\mathrm{D}_x,\quad \mathrm{D}_y,\quad \mathrm{D}_z,\quad \mathrm{D}_t.$$

Alors, si l'on pose

$$(11)\qquad s = \mathrm{k}\omega\sqrt{-1},$$

la formule (1), jointe aux équations (2), (6) et (11), donnera

$$s = (\mathrm{k}\sqrt{-1})^n\, \mathrm{F}(\cos\mathrm{p}, \sin\mathrm{p}\cos\mathrm{q}, \sin\mathrm{p}\sin\mathrm{q}, \omega);$$

et, par suite, l'expression

$$\mathcal{E}\frac{s^m}{((s))}e^{st}$$

se transformera dans la suivante

$$\mathcal{E}\frac{s^m}{((8))}e^{st}\frac{ds}{d\omega}=\mathcal{E}\frac{\omega^m(\mathrm{k}\sqrt{-1})^{m-n+1}}{((\mathrm{F}(\cos\mathrm{p},\sin\mathrm{p}\cos\mathrm{q},\sin\mathrm{p}\sin\mathrm{q},\omega)))}e^{\mathrm{k}\omega t\sqrt{-1}},$$

lorsqu'on supposera le signe $\mathcal{E}$ relatif, non plus à la variable s, mais à ω considéré comme racine de l'équation

$$\mathrm{F}(\cos\mathrm{p},\sin\mathrm{p}\cos\mathrm{q},\sin\mathrm{p}\sin\mathrm{q},\omega)=0 \tag{12}$$

(*voir* le Tome I des *Exercices de Mathématiques*, p. 171) [1]. Cela posé, la formule (10) donnera

$$\left\{\begin{aligned}\mathrm{D}_t^m\varpi=-\frac{1}{2^3\pi^3}\mathcal{E}\int_0^\pi\int_0^{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_0^\pi\int_0^{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}(\mathrm{k}\sqrt{-1})^{m-n+3}\\ \times e^{\mathrm{k}(\omega t-\rho\cos\delta)\sqrt{-1}}\frac{\omega^m\rho^2\sin\mathrm{p}\sin\theta\varpi(\lambda,\mu,\nu)\,d\mathrm{p}\,d\mathrm{q}\,d\mathrm{k}\,d\theta\,d\tau\,d\rho}{((\mathrm{F}(\cos\mathrm{p},\sin\mathrm{p}\cos\mathrm{q},\sin\mathrm{p}\sin\mathrm{q},\omega)))}.\end{aligned}\right. \tag{13}$$

Si, dans cette dernière équation, on prend

$$m=n-3,$$

afin de réduire à zéro l'exposant de $\mathrm{k}\sqrt{-1}$, on trouvera simplement

$$\left\{\begin{aligned}\mathrm{D}_t^{n-3}\varpi=-\frac{1}{2^3\pi^3}\mathcal{E}\int_0^\pi\int_0^{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_0^\pi\int_0^{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\\ \times e^{\mathrm{k}(\omega t-\rho\cos\delta)\sqrt{-1}}\frac{\omega^{n-3}\rho^2\sin\mathrm{p}\sin\theta\varpi(\lambda,\mu,\nu)\,d\mathrm{p}\,d\mathrm{q}\,d\mathrm{k}\,d\theta\,d\tau\,d\rho}{((\mathrm{F}(\cos\mathrm{p},\sin\mathrm{p}\cos\mathrm{q},\sin\mathrm{p}\sin\mathrm{q},\omega)))};\end{aligned}\right. \tag{14}$$

et si, dans la formule (14), on remplace

$$\mathrm{k}\quad\text{par}\quad\frac{\mathrm{k}}{\cos\delta},$$

on devra en même temps, pour que les limites de l'intégration relatives à k ne soient pas interverties quand $\cos\delta$ changera de signe, remplacer

$$d\mathrm{k}\quad\text{par}\quad\frac{d\mathrm{k}}{\sqrt{\cos^2\delta}}.$$

(1) *Œuvres de Cauchy*, série II, t. VI, p. 214, 215.

En conséquence, la formule (14) donnera encore

$$\left\{\begin{aligned}\mathrm{D}_t^{n-3}\varpi=-\frac{1}{2^3\pi^3}\mathcal{E}\int_0^\pi\int_0^{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_0^\pi\int_0^{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{\mathrm{k}\left(\frac{\omega t}{\cos\delta}-\rho\right)\sqrt{-1}}\\ \times\frac{\omega^{n-3}\rho^2\sin\mathrm{p}\sin\theta\varpi(\lambda,\mu,\nu)}{((\mathrm{F}(\cos\mathrm{p},\sin\mathrm{p}\cos\mathrm{q},\sin\mathrm{p}\sin\mathrm{q},\omega)))}\frac{d\mathrm{p}\,d\mathrm{q}\,d\mathrm{k}\,d\theta\,d\tau\,d\rho}{\sqrt{\cos^2\delta}}.\end{aligned}\right. \tag{15}$$

D'autre part, si l'on désigne par r une quantité quelconque, et par $f(r)$ une fonction quelconque de r, on aura, en vertu d'une formule connue,

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}f(\rho)\,e^{\mathrm{k}(r-\rho)\sqrt{-1}}\,d\mathrm{k}\,d\rho=2\pi f(r);$$

et par suite, en ayant égard aux équations

$$\lambda=x+\rho\cos\theta,\qquad\mu=y+\rho\sin\theta\cos\tau,\qquad\nu=z+\rho\sin\theta\sin\tau, \tag{16}$$

qui se déduisent immédiatement des formules (7), on trouvera

$$\begin{aligned}&\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}e^{\mathrm{k}\left(\frac{\omega t}{\cos\delta}-\rho\right)\sqrt{-1}}\rho^2\varpi(\lambda,\mu,\nu)\,d\mathrm{k}\,d\rho\\ &=2\pi\frac{\omega^2t^2}{\cos^2\delta}\varpi\left(x+\frac{\omega t}{\cos\delta}\cos\theta,\ y+\frac{\omega t}{\cos\delta}\sin\theta\cos\tau,\ z+\frac{\omega t}{\cos\delta}\sin\theta\sin\tau\right).\end{aligned}$$

Donc l'équation (15) entraînera la suivante

$$\left\{\begin{aligned}\mathrm{D}_t^{n-3}\varpi=-\frac{1}{2^2\pi^2}\mathcal{E}\int_0^\pi\int_0^{2\pi}\int_0^\pi\int_0^{2\pi}\\ \times\frac{\omega^{n-1}t^2\sin\mathrm{p}\sin\theta\varpi(\lambda,\mu,\nu)}{((\mathrm{F}(\cos\mathrm{p},\sin\mathrm{p}\cos\mathrm{q},\sin\mathrm{p}\sin\mathrm{q},\omega)))}\frac{d\mathrm{p}\,d\mathrm{q}\,d\theta\,d\tau}{\cos^2\delta\sqrt{\cos^2\delta}},\end{aligned}\right. \tag{17}$$

le signe $\mathcal{E}$ étant relatif aux diverses valeurs de ω qui vérifient l'équation (12), et les valeurs de λ, μ, ν étant données, non plus par les formules (16), mais par celles-ci

$$\lambda=x+\frac{\omega t}{\cos\delta}\cos\theta,\quad\mu=y+\frac{\omega t}{\cos\delta}\sin\theta\cos\tau,\quad\nu=z+\frac{\omega t}{\cos\delta}\sin\theta\sin\tau. \tag{18}$$

On tirera d'ailleurs de l'équation (17),

$$(19)\quad \left\{\begin{aligned} \varpi = -\frac{D_t^{-(n-3)}}{2^3\pi^2}\,\mathcal{E}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} \\ \times\frac{\omega^{n-1}t^2\sin p\sin\theta\,\varpi(\lambda,\mu,\nu)}{((F(\cos p,\sin p\cos q,\sin p\sin q,\omega)))}\,\frac{dp\,dq\,d\theta\,d\tau}{\cos^2\delta\sqrt{\cos^2\delta}}, \end{aligned}\right.$$

la caractéristique

$$D_t^{-(n-3)}$$

devant être remplacée par l'unité dans le cas où l'on aurait

$$n = 3,$$

et indiquant, lorsqu'on suppose

$$n > 3,$$

$n - 3$ intégrations effectuées par rapport à t, à partir de l'origine $t = 0$. Si l'on supposait

$$n < 3,$$

par conséquent,

$$n = 1 \quad \text{ou} \quad n = 2,$$

l'équation (14), réduite à la forme

$$(20)\quad \left\{\begin{aligned} \varpi = -\frac{D_t^{-(n-3)}}{2^3\pi^2}\,\mathcal{E}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} \\ \times\frac{\omega^{n-1}t^2\sin p\sin\theta\,\varpi(\lambda,\mu,\nu)}{((F(\cos p,\sin p\cos q,\sin p\sin q,\omega)))}\,\frac{dp\,dq\,d\theta\,d\tau}{\cos^2\delta\sqrt{\cos^2\delta}}, \end{aligned}\right.$$

continuerait de subsister, et se déduirait directement, à l'aide des raisonnements dont nous avons fait usage, non plus de l'équation (10), mais de la formule (5).

IV. — *De la fonction principale qui correspond à une équation caractéristique homogène et du second ordre.*

Considérons en particulier le cas où, l'équation caractéristique étant homogène et du second ordre, la formule

$$\nabla\varpi = 0$$

se réduit à

$$(1)\quad D_t^2\varpi = (aD_x^2 + bD_y^2 + cD_z^2 + 2dD_yD_z + 2eD_zD_x + 2fD_xD_y)\varpi,$$

a, b, c, d, e, f désignant des quantités constantes. On aura, dans ce cas,

$$\begin{aligned} \nabla &= F(D_x, D_y, D_z, D_t) \\ &= D_t^2 - (aD_x^2 + bD_y^2 + cD_z^2 + 2dD_yD_z + 2eD_zD_x + 2fD_xD_y); \end{aligned}$$

par conséquent

$$F(x, y, z, t) = t^2 - (ax^2 + by^2 + cz^2 + 2dyz + 2ezx + 2fxy);$$

et comme on devra poser $n = 2$ dans la formule (19) du paragraphe III, cette formule donnera

$$(2)\quad \left\{\begin{aligned} \varpi = -\frac{D_t}{2^3\pi^2}\,\mathcal{E}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} \\ \times\frac{\omega t^2\sin p\sin\theta\,\varpi(\lambda,\mu,\nu)}{((F(\cos p,\sin p\cos q,\sin p\sin q,\omega)))}\,\frac{dp\,dq\,d\theta\,d\tau}{\cos^2\delta\sqrt{\cos^2\delta}}, \end{aligned}\right.$$

les valeurs de λ, μ, ν et de $\cos\delta$ étant

$$(3)\quad \lambda = x + \frac{\omega t}{\cos\delta}\cos\theta,\quad \mu = y + \frac{\omega t}{\cos\delta}\sin\theta\cos\tau,\quad \nu = z + \frac{\omega t}{\cos\delta}\sin\theta\sin\tau,$$

$$(4)\quad \cos\delta = \cos p\cos\theta + \sin p\cos q\sin\theta\cos\tau + \sin p\sin q\sin\theta\sin\tau,$$

le signe $\mathcal{E}$ étant relatif aux deux valeurs de ω qui vérifient la formule

$$(5)\quad F(\cos p, \sin p\cos q, \sin p\sin q, \omega) = 0.$$

Lorsque le polynome

$$ax^2 + by^2 + cz^2 + 2dyz + 2ezx + 2fxy$$

conserve une valeur positive pour des valeurs réelles quelconques de x, y, z, les deux valeurs de ω fournies par l'équation (5) sont réelles. Alors, si l'on désigne par Ω celle des deux valeurs qui est positive, la valeur négative sera $-\Omega$; et, comme on aura

$$F(\cos p, \sin p\cos q, \sin p\sin q, \omega) = \omega^2 - \Omega^2,$$

on trouvera

$$(6)\quad \left\{\begin{aligned}
&\mathcal{E}\frac{\omega}{((\mathrm{F}(\cos p, \sin p\cos q, \sin p\sin q, \omega)))}\varpi(\lambda,\mu,\nu)\\
&=\mathcal{E}\frac{\omega}{((\omega^2-\Omega^2))}\varpi\left(x+\frac{\omega t}{\cos\delta}\cos\theta, y+\frac{\omega t}{\cos\delta}\sin\theta\cos\tau, z+\frac{\varpi t}{\cos\delta}\sin\theta\sin\tau\right)\\
&\quad=\frac{1}{2}\varpi\left(x+\frac{\Omega t}{\cos\delta}\cos\theta, y+\frac{\Omega t}{\cos\delta}\sin\theta\cos\tau, z+\frac{\Omega t}{\cos\delta}\sin\theta\sin\tau\right)\\
&\quad+\frac{1}{2}\varpi\left(x-\frac{\Omega t}{\cos\delta}\cos\theta, y-\frac{\Omega t}{\cos\delta}\sin\theta\cos\tau, z-\frac{\Omega t}{\cos\delta}\sin\theta\sin\tau\right),
\end{aligned}\right.$$

D'ailleurs, si les quantités

$$\cos p,\quad \sin p\cos q,\quad \sin p\sin q$$

viennent à changer de signe, $\cos\delta$ changera de signe, mais Ω ne variera pas; et comme, en supposant les intégrations effectuées par rapport aux angles p, q entre les limites

$$p=0,\quad p=\pi,\quad q=0,\quad q=2\pi,$$

on a généralement, quelle que soit la fonction $f(x, y, z)$,

$$\int_0^\pi\int_0^{2\pi} f(\cos p, \sin p\cos q, \sin p\sin q)\sin p\,dp\,dq$$
$$=\int_0^\pi\int_0^{2\pi} f(-\cos p, -\sin p\cos q, -\sin p\sin q)\sin p\,dp\,dq,$$

on trouvera encore

$$\int_0^\pi\int_0^{2\pi}\varpi\left(x+\frac{\Omega t}{\cos\delta}\cos\theta, y+\frac{\Omega t}{\cos\delta}\sin\theta\cos\tau,\right.$$
$$\left.z+\frac{\Omega t}{\cos\delta}\sin\theta\sin\tau\right)\frac{\sin p\,dp\,dq}{\cos^2\delta\sqrt{\cos^2\delta}}$$
$$=\int_0^\pi\int_0^{2\pi}\varpi\left(x-\frac{\Omega t}{\cos\delta}\cos\theta, y-\frac{\Omega t}{\cos\delta}\sin\theta\cos\tau,\right.$$
$$\left.z-\frac{\Omega t}{\cos\delta}\sin\theta\sin\tau\right)\frac{\sin p\,dp\,dq}{\cos^2\delta\sqrt{\cos^2\delta}}.$$

Cela posé, on tirera évidemment de l'équation (2), jointe à la for-

mule (6)

$$(7)\quad \varpi=-\frac{D_t}{2^3\pi^2}\int_0^\pi\int_0^{2\pi}\int_0^\pi\int_0^{2\pi} t^2\sin p\sin\theta\,\varpi(\lambda,\mu,\nu)\frac{dp\,dq\,d\theta\,d\tau}{\cos^2\delta\sqrt{\cos^2\delta}},$$

les valeurs de λ, μ, ν étant

$$(8)\quad \lambda=x+\frac{\Omega t}{\cos\delta}\cos\theta,\quad \mu=y+\frac{\Omega t}{\cos\delta}\sin\theta\cos\tau,\quad \nu=z+\frac{\Omega t}{\cos\delta}\sin\theta\sin\tau.$$

Concevons maintenant que les formules

$$\begin{aligned}
\mathrm{x}&=ax+fy+ez,\\
\mathrm{y}&=fx+by+dz,\\
\mathrm{z}&=ex+dy+cz,
\end{aligned}$$

en vertu desquelles x, y, z sont des fonctions linéaires de x, y, z, étant résolues par rapport à x, y, z, on en tire

$$\begin{aligned}
x&=\mathrm{ax}+\mathrm{fy}+\mathrm{ez},\\
y&=\mathrm{fx}+\mathrm{by}+\mathrm{dz},\\
z&=\mathrm{ex}+\mathrm{dy}+\mathrm{cz};
\end{aligned}$$

et posons pour plus de commodité

$$\mathfrak{F}(\mathrm{x},\mathrm{y},\mathrm{z},\mathrm{t})=t^2-(\mathrm{ax}^2+\mathrm{by}^2+\mathrm{cz}^2+2\mathrm{dyz}+2\mathrm{ezx}+2\mathrm{fxy}).$$

Si l'on fait pour abréger

$$(9)\qquad \mathfrak{D}=(abc-ad^2-be^2-cf^2+2def)^{\frac{1}{2}},$$

les coefficients

$$\mathrm{a},\quad \mathrm{b},\quad \mathrm{c},\quad \mathrm{d},\quad \mathrm{e},\quad \mathrm{f},$$

contenus dans la fonction $\mathfrak{F}(\mathrm{x},\mathrm{y},\mathrm{z},\mathrm{t})$, se déduiront des coefficients

$$a,\quad b,\quad c,\quad d,\quad e,\quad f,$$

contenus dans la fonction $\mathrm{F}(x, y, z, t)$, à l'aide des formules

$$(10)\quad \left\{\begin{aligned}
&\mathrm{a}=\frac{bc-d^2}{\mathfrak{D}^2},\quad \mathrm{b}=\frac{ca-e^2}{\mathfrak{D}^2},\quad \mathrm{c}=\frac{ab-f^2}{\mathfrak{D}^2},\\
&\mathrm{d}=\frac{ef-ad}{\mathfrak{D}^2},\quad \mathrm{e}=\frac{fd-be}{\mathfrak{D}^2},\quad \mathrm{f}=\frac{de-cf}{\mathfrak{D}^2};
\end{aligned}\right.$$

et, comme les deux polynomes

$$ax^2 + by^2 + cz^2 + 2dyz + 2ezx + 2fxy,$$
$$\mathrm{a}x^2 + \mathrm{b}y^2 + \mathrm{c}z^2 + 2\mathrm{d}yz + 2\mathrm{e}zx + 2\mathrm{f}xy$$

seront égaux l'un et l'autre à la somme

$$x\mathrm{x} + y\mathrm{y} + z\mathrm{z},$$

il est clair qu'ils seront égaux entre eux, et que, si le premier reste positif pour des valeurs réelles quelconques des variables qu'il renferme, on pourra en dire autant du second. Cela posé, on pourra satisfaire à la formule

$$(11) \qquad \vec{\mathcal{F}}(\cos\theta, \sin\theta\cos\tau, \sin\theta\sin\tau, \Theta) = 0$$

par une valeur réelle et positive de Θ. Si l'on adopte cette valeur, et si l'on observe d'ailleurs qu'en vertu de l'équation (4) et de la suivante

$$(12) \qquad \mathrm{F}(\cos\mathrm{p}, \sin\mathrm{p}\cos\mathrm{q}, \sin\mathrm{p}\sin\mathrm{q}, \Omega) = 0,$$

$\cos\delta$ et Ω^2 sont deux fonctions homogènes des monomes

$$\cos\mathrm{p}, \quad \sin\mathrm{p}\cos\mathrm{q}, \quad \sin\mathrm{p}\sin\mathrm{q},$$

l'une du premier degré, l'autre du second; alors, en désignant par $\mathrm{f}(x)$ une fonction quelconque de x, on tirera d'une formule établie dans la 49e livraison des *Exercices de Mathématiques* [*voir* la 5e année, p. 16, formule (47)] (1)

$$(13) \qquad \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} \mathrm{f}\left(\frac{\cos\delta}{\Omega}\right) \frac{\sin\mathrm{p}\,d\mathrm{p}\,d\mathrm{q}}{\Omega^2} = \frac{2\pi}{\mathfrak{O}} \int_0^{\pi} \mathrm{f}(\Theta\cos\mathrm{p})\sin\mathrm{p}\,d\mathrm{p};$$

puis, en remplaçant

$$\mathrm{f}(x) \quad \text{par} \quad \frac{1}{x^2\sqrt{x^2}}\,\mathrm{f}\left(\frac{t}{x}\right),$$

on trouvera

$$(14) \qquad \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} \mathrm{f}\left(\frac{\Omega t}{\cos\delta}\right) \frac{\sin\mathrm{p}\,d\mathrm{p}\,d\mathrm{q}}{\cos^2\delta\sqrt{\cos^2\delta}} = \frac{2\pi}{\mathfrak{O}} \int_0^{\pi} \mathrm{f}\left(\frac{t}{\Theta\cos\mathrm{p}}\right) \frac{\sin\mathrm{p}\,d\mathrm{p}}{\Theta^3\cos^2\mathrm{p}\sqrt{\cos^2\mathrm{p}}},$$

(1) *Œuvres de Cauchy*, série II, t. IX, p. 388.

et par suite l'équation (7) donnera

$$(15) \qquad \varpi = -\frac{\mathrm{D}_t}{2^3\pi\mathfrak{O}} \int_0^{\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} t^2 \sin\mathrm{p}\sin\theta\,\varpi(\lambda, \mu, \nu)\,\frac{d\mathrm{p}\,d\theta\,d\tau}{\Theta^3\cos^2\mathrm{p}\sqrt{\cos^2\mathrm{p}}},$$

les valeurs de λ, μ, ν étant

$$(16) \quad \lambda = x + \frac{1}{\Theta\cos\mathrm{p}}\cos\theta, \quad \mu = y + \frac{1}{\Theta\cos\mathrm{p}}\sin\theta\cos\tau, \quad \nu = z + \frac{1}{\Theta\cos\mathrm{p}}\sin\theta\sin\tau.$$

D'autre part, on aura encore

$$\begin{aligned}
\mathrm{D}_t \int_0^{\pi} \mathrm{f}\left(\frac{t}{\cos\mathrm{p}}\right) \frac{\sin\mathrm{p}\,d\mathrm{p}}{\sqrt{\cos^2\mathrm{p}}} &= \int_0^{\pi} \mathrm{f}'\left(\frac{t}{\cos\mathrm{p}}\right) \frac{\sin\mathrm{p}\,d\mathrm{p}}{\cos\mathrm{p}\sqrt{\cos^2\mathrm{p}}} \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\mathrm{f}'\left(\frac{t}{\cos\mathrm{p}}\right) - \mathrm{f}'\left(-\frac{t}{\cos\mathrm{p}}\right)\right] \frac{\sin\mathrm{p}\,d\mathrm{p}}{\cos^2\mathrm{p}} \\
&= \frac{1}{t}\left[\mathrm{f}\left(\frac{t}{0}\right) + \mathrm{f}\left(-\frac{t}{0}\right)\right] - \frac{\mathrm{f}(t) + \mathrm{f}(-t)}{t}.
\end{aligned}$$

Donc si la fonction $\mathrm{f}(x)$ s'évanouit pour des valeurs infinies de x, ou si du moins elle acquiert pour $x = -\infty$ et pour $x = \infty$ deux valeurs égales au signe près, mais affectées de signes contraires, on aura

$$(17) \qquad \mathrm{D}_t \int_0^{\pi} \mathrm{f}\left(\frac{t}{\cos\mathrm{p}}\right) \frac{\sin\mathrm{p}\,d\mathrm{p}}{\sqrt{\cos^2\mathrm{p}}} = -\frac{\mathrm{f}(t) + \mathrm{f}(-t)}{t}.$$

Si dans cette dernière formule on remplace

$$\mathrm{f}(x) \quad \text{par} \quad x^2\,\mathrm{f}\left(\frac{x}{\Theta}\right),$$

on trouvera

$$\mathrm{D}_t \int_0^{\pi} t^2\,\mathrm{f}\left(\frac{t}{\Theta\cos\mathrm{p}}\right) \frac{\sin\mathrm{p}\,d\mathrm{p}}{\cos^2\mathrm{p}\sqrt{\cos^2\mathrm{p}}} = -t\left[\mathrm{f}\left(\frac{t}{\Theta}\right) + \mathrm{f}\left(-\frac{t}{\Theta}\right)\right].$$

Donc la formule (14) entrainera la suivante

$$(18) \quad \mathrm{D}_t \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} t^2\,\mathrm{f}\left(\frac{\Omega t}{\cos\delta}\right) \frac{\sin\mathrm{p}\,d\mathrm{p}\,d\mathrm{q}}{\cos^2\delta\sqrt{\cos^2\delta}} = -\frac{2\pi}{\mathfrak{O}}\,\frac{t}{\Theta^3}\left[\mathrm{f}\left(\frac{t}{\Theta}\right) + \mathrm{f}\left(-\frac{t}{\Theta}\right)\right],$$

pourvu que le produit

$$x^2\,\mathrm{f}(x)$$

s'évanouisse quand x devient infini, ou du moins change alors de signe avec x, en conservant au signe près la même valeur. Donc, par suite, si le produit

$$t^2\varpi(x+t\cos\theta,\ y+t\sin\theta\cos\tau,\ z+t\sin\theta\sin\tau)$$

s'évanouit pour des valeurs infinies de t, ou si du moins il acquiert pour $t=-\infty$ et pour $t=\infty$ deux valeurs égales au signe près, mais affectées de signes contraires, la formule (7) donnera

$$(19)\quad \left\{\begin{aligned} \varpi = {} & \frac{1}{2^3\pi\Theta}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} t\sin\theta\,\varpi\Big(x+\frac{t}{\Theta}\cos\theta,\ y+\frac{t}{\Theta}\sin\theta\cos\tau,\\ & \qquad z+\frac{t}{\Theta}\sin\theta\sin\tau\Big)\frac{d\theta\,d\tau}{\Theta^3}\\ & +\frac{1}{2^3\pi\Theta}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} t\sin\theta\,\varpi\Big(x-\frac{t}{\Theta}\cos\theta,\ y-\frac{t}{\Theta}\sin\theta\cos\tau,\\ & \qquad z-\frac{t}{\Theta}\sin\theta\sin\tau\Big)\frac{d\theta\,d\tau}{\Theta^3}; \end{aligned}\right.$$

et, comme les deux termes compris dans le second membre de la formule (19) seront évidemment égaux entre eux, on pourra réduire simplement cette formule à la suivante

$$(20)\qquad \varpi=\frac{1}{4\pi\Theta}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} t\sin\theta\,\varpi(\lambda,\mu,\nu)\frac{d\theta\,d\tau}{\Theta^3},$$

les valeurs de λ, μ, ν étant

$$(21)\quad \lambda=x+\frac{t}{\Theta}\cos\theta,\qquad \mu=y+\frac{t}{\Theta}\sin\theta\cos\tau,\qquad \nu=z+\frac{t}{\Theta}\sin\theta\sin\tau.$$

Les méthodes dont j'ai fait usage, dans le précédent paragraphe et dans celui-ci, pour réduire l'intégrale sextuple qui représente la fonction principale d'abord à une intégrale quadruple, quand l'équation caractéristique est homogène, puis à une intégrale double, quand cette équation homogène est du second ordre, sont précisément les méthodes qui déjà se trouvaient appliquées à de semblables réductions, dans un Mémoire présenté à l'Académie en l'année 1830, et dans un article que

renferme le *Bulletin des Sciences* du mois d'avril de la même année. J'ai d'ailleurs indiqué dans cet article les conséquences remarquables qu'entrainent les réductions dont il s'agit, et le parti qu'on peut en tirer pour déterminer la forme des ondes sonores, lumineuses, etc., qui se propagent dans l'espace, sans laisser de traces de leur passage, quand l'équation caractéristique, étant homogène, se rapporte à une question de physique mathématique. Au reste, c'est là un sujet que je me propose de traiter avec plus de détail dans un nouveau Mémoire.

Observons encore que la formule (20) est analogue à celle par laquelle je suis parvenu à représenter l'intégrale de l'équation (1), dans le 20e cahier du *Journal de l'École Polytechnique*.

Dans le cas particulier où les constantes a, b, c, d, e, f vérifient les conditions

$$a=b=c,\qquad d=e=f=0,$$

le polynome

$$ax^2+by^2+cz^2+2dyz+2ezx+2fxy,$$

réduit à la forme

$$a(x^2+y^2+z^2),$$

ne peut obtenir une valeur constamment positive qu'autant que la constante a est elle-même positive. Alors aussi la formule (12) donnera

$$\Omega^2=a,\qquad \Omega=a^{\frac{1}{2}};$$

en sorte que l'équation (1) deviendra

$$(22)\qquad D_t^2\varpi=\Omega^2(D_x^2+D_y^2+D_z^2)\varpi;$$

et comme on trouvera

$$\mathrm{a}=\mathrm{b}=\mathrm{c}=\frac{1}{a},\qquad \mathrm{d}=\mathrm{e}=\mathrm{f}=0,\qquad \Theta=a^{\frac{3}{2}}=\Omega^3,$$

par conséquent

$$\mathrm{F}(\mathrm{x},\mathrm{y},\mathrm{z},\mathrm{t})=t^2-\frac{1}{a}(\mathrm{x}^2+\mathrm{y}^2+\mathrm{z}^2),$$

$$\Theta^2=\frac{1}{a},\qquad \Theta=\frac{1}{\Omega},$$

$$\Omega\Theta^3=1,$$

il est clair qu'à l'équation caractéristique (22) correspondra une valeur de la fonction principale ϖ déterminée, non plus par l'équation (20), mais par la suivante

$$(23)\qquad \varpi = \frac{1}{4\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} t\sin\theta\,\varpi(\lambda,\mu,\nu)\,d\theta\,d\tau,$$

les valeurs de λ, μ, ν étant

$$(24)\qquad \lambda = x + \Omega t\cos\theta,\qquad \mu = y + \Omega t\sin\theta\cos\tau,\qquad \nu = z + \Omega t\sin\theta\sin\tau.$$

La valeur précédente de la fonction principale ϖ conduit immédiatement à la forme sous laquelle M. Poisson a obtenu, en 1819, l'intégrale de l'équation linéaire aux différences partielles, généralement considérée comme propre à représenter le mouvement des fluides élastiques (*voir* le Tome III des *Mémoires de l'Académie des Sciences*).

V. — *Application des principes établis dans les paragraphes précédents à l'intégration des équations linéaires qui représentent les mouvements infiniment petits d'un système isotrope.*

Comme nous l'avons prouvé dans un précédent Mémoire (p. 156), les équations qui représentent les mouvements infiniment petits d'un système isotrope de molécules sollicitées par des forces d'attraction ou de répulsion mutuelle, sont de la forme

$$(1)\qquad \begin{cases} (E - D_t^2)\xi + FD_x(D_x\xi + D_y\eta + D_z\zeta) = 0,\\ (E - D_t^2)\eta + FD_y(D_x\xi + D_y\eta + D_z\zeta) = 0,\\ (E - D_t^2)\zeta + FD_z(D_x\xi + D_y\eta + D_z\zeta) = 0, \end{cases}$$

ξ, η, ζ désignant les déplacements d'une molécule, mesurés parallèlement aux axes des x, y, z au bout du temps t, et

$$E,\quad F$$

étant deux fonctions de

$$D_x^2 + D_y^2 + D_z^2$$

entières, mais généralement composées d'un nombre infini de termes.

Cela posé, le premier membre ∇ de l'équation caractéristique sera de la forme

$$\nabla = \nabla'\nabla'',$$

les valeurs de ∇', ∇'' étant

$$\nabla' = (D_t^2 - E),\qquad \nabla'' = D_t^2 - E - (D_x^2 + D_y^2 + D_z^2)F.$$

Soit d'ailleurs

$$\varpi$$

la fonction principale correspondant à l'équation caractéristique

$$\nabla = 0.$$

Désignons par

$$(2)\qquad \varphi(x,y,z),\quad \chi(x,y,z),\quad \psi(x,y,z),\quad \Phi(x,y,z),\quad X(x,y,z),\quad \Psi(x,y,z)$$

les valeurs initiales de

$$\xi,\quad \eta,\quad \zeta,\quad D_t\xi,\quad D_t\eta,\quad D_t\zeta,$$

et par

$$\varphi,\quad \chi,\quad \psi,\quad \Phi,\quad X,\quad \Psi$$

ce que devient la fonction principale ϖ, quand on y remplace successivement la fonction arbitraire

$$\varpi(x,y,z)$$

par chacune des fonctions (2). Pour obtenir les valeurs générales des variables principales ξ, η, ζ, il suffira de résoudre, par rapport à ces variables, les équations (1), après avoir remplacé les seconds membres par

$$\nabla(\Phi + D_t\varphi),\qquad \nabla(X + D_t\chi),\qquad \nabla(\Psi + D_t\psi).$$

En opérant ainsi, l'on trouvera, pour intégrales générales d'un système isotrope, les équations suivantes :

$$(3)\qquad \begin{cases} \xi = \nabla''(\Phi + D_t\varphi) + F\,D_x\Pi,\\ \eta = \nabla''(X + D_t\chi) + F\,D_y\Pi,\\ \zeta = \nabla''(\Psi + D_t\psi) + F\,D_z\Pi, \end{cases}$$

la valeur de Π étant

$$(4)\qquad \Pi = D_x(\Phi + D_t\varphi) + D_y(X + D_t\chi) + D_z(\Psi + D_t\Psi).$$

Si, pour abréger, on désigne par

$$\varpi_1, \quad \varpi_2$$

les fonctions principales qui correspondraient séparément aux deux équations caractéristiques

$$\nabla' = 0, \qquad \nabla'' = 0,$$

on aura

$$\nabla''\varpi = \varpi_1, \qquad \nabla'\varpi = \varpi_2;$$

et, en nommant

$$\varphi_1, \quad \chi_1, \quad \psi_1, \quad \Phi_1, \quad X_1, \quad \Psi_1$$

ou

$$\varphi_2, \quad \chi_2, \quad \psi_2, \quad \Phi_2, \quad X_2 \quad \Psi_2$$

ce que devient la fonction principale

$$\varpi_1 \quad \text{ou} \quad \varpi_2$$

quand on remplace successivement la fonction arbitraire

$$\varpi(x, y, z)$$

par chacune des fonctions (2), on verra les formules (3) se réduire aux suivantes

$$(5) \qquad \begin{cases} \xi = \Phi_t + D_t\varphi_t + F D_y \Pi, \\ \eta = X_t + D_t\chi_t + F D_x \Pi, \\ \zeta = \Psi_t + D_t\psi_t + F D_z \Pi. \end{cases}$$

Si les équations des mouvements infiniment petits deviennent homogènes, on aura (p. 178)

$$E = \iota(D_x^2 + D_y^2 + D_z^2), \qquad F = \iota f,$$

ι, f désignant deux constantes réelles, et par suite

$$\frac{D_t^2}{\nabla} = \frac{1+f}{f}\frac{1}{\nabla''} - \frac{1}{f}\frac{1}{\nabla'}.$$

Donc alors la formule (12) du paragraphe II donnera

$$(6) \qquad \varpi = D_t^{-2}\frac{(1+f)\varpi_2 - \varpi_1}{f},$$

et la valeur de ϖ se déduira immédiatement de celles des fonctions

$$\varpi_1, \quad \varpi_2,$$

dont chacune, en vertu de la formule (8) du paragraphe IV, se trouvera représentée par une intégrale double. Cela posé, les intégrales (5), dans le cas particulier que nous considérons ici, deviendront analogues à celles qu'a données M. Poisson dans les Tomes VIII et X des *Mémoires de l'Académie*. Si l'on y pose $f = 2$, elles coïncideront précisément avec celles que j'avais moi-même obtenues à l'époque où je m'occupais de la théorie des corps élastiques, et qui ne diffèrent qu'en apparence des intégrales données par M. Ostrogradsky. Mais, si l'on admet la supposition $f = -1$, la formule (6) donnera simplement

$$(7) \qquad \varpi = D_t^{-2}\varpi_1 = \int_0^t\int_0^t \varpi_1\, dt\, dt,$$

et se déduira immédiatement de l'équation

$$\nabla''\varpi = \varpi_1,$$

puisqu'on aura, dans cette supposition,

$$\nabla = D_t^2.$$

Remarque.

En vertu des principes établis dans ce Mémoire, on peut souvent transformer la fonction principale correspondant à un système d'équations aux différences partielles et, par suite les intégrales de ce système, en leur faisant subir des réductions qui ne diminuent en rien leur généralité. Mais, outre ces réductions, il en est d'autres qui tiennent à des formes spéciales des fonctions arbitraires introduites par l'intégration. Lorsqu'on adopte ces formes spéciales, on obtient non plus les intégrales générales des équations données, mais des intégrales particulières qui peuvent quelquefois se présenter sous une forme très simple, et même s'exprimer en termes finis. Telles sont,

par exemple, les intégrales qui représentent ce que nous avons nommé les mouvements simples d'un ou de plusieurs systèmes de molécules. Au reste, les mouvements simples, et par ondes planes, ne sont pas les seuls dans lesquels les variables principales puissent être exprimées par des fonctions finies des variables indépendantes. Il existe d'autres cas où cette condition se trouve pareillement remplie. Ainsi, en particulier, lorsque dans un système isotrope les équations des mouvements infiniment petits deviennent homogènes, des intégrales en termes finis peuvent représenter des ondes sphériques du genre de celles que j'ai mentionnées dans le n° 19 des *Comptes rendus* des séances de l'Académie des Sciences pour l'année 1836 (1er semestre), savoir, des ondes dans lesquelles les vibrations moléculaires soient dirigées suivant les éléments de circonférences de cercles parallèles tracées sur des surfaces sphériques, ces vibrations étant semblables entre elles, et isochrones pour tous les points d'une même circonférence. De plus, si ce qu'on appelle la *surface des ondes* est un ellipsoïde, des intégrales en termes finis représenteront encore des ondes ellipsoïdales dans lesquelles les vibrations moléculaires resteront les mêmes pour tous les points situés sur une même surface d'ellipsoïde, ces vibrations étant alors dirigées suivant des droites parallèles. Au reste, je reviendrai plus en détail dans un autre Mémoire sur ces diverses espèces d'ondes qui se propagent en conservant constamment les mêmes épaisseurs.

MÉMOIRE

SUR

LES RAYONS SIMPLES QUI SE PROPAGENT

DANS

UN SYSTÈME ISOTROPE DE MOLÉCULES

ET

SUR CEUX QUI SE TROUVENT RÉFLÉCHIS OU RÉFRACTÉS

PAR

LA SURFACE DE SÉPARATION DE DEUX SEMBLABLES SYSTÈMES.

I. — *Rayons simples. Polarisation de ces rayons.*

Dans un système de molécules sollicitées par des forces d'attraction ou de répulsion mutuelle, un *mouvement simple* est, comme on l'a prouvé, un *mouvement par ondes planes*, les plans qui terminent les ondes étant des plans parallèles qui renferment à un instant donné les molécules dont les déplacements, mesurés parallèlement à un axe fixe, s'évanouissent et l'*épaisseur d'une onde plane* ou la *longueur d'une ondulation* étant le double de la distance qui sépare deux plans consécutifs de cette espèce. Dans un mouvement simple, lorsqu'il est durable et persistant, chaque molécule décrit une droite, un cercle ou une ellipse, et la *durée d'une vibration moléculaire* reste la même, non seulement à toutes les époques, mais encore pour toutes les molécules du système que l'on considère. En divisant la longueur d'une ondulation par cette durée, on obtient pour quotient la *vitesse de propagation* d'une onde plane. De plus, lorsque chaque molécule décrit une courbe

plane, savoir un cercle ou une ellipse, le rayon vecteur mené du centre de la courbe à la molécule trace des aires proportionnelles au temps. Alors aussi les plans des courbes décrites par les diverses molécules sont tous parallèles à un certain *plan invariable*, mené par l'origine des coordonnées, et généralement distinct d'un *second plan invariable*, qui serait parallèle à ceux par lesquels se terminent les ondes. Quant à l'*amplitude des vibrations moléculaires*, mesurée par la portion de droite que parcourt une molécule ou par le grand axe de l'ellipse décrite, elle ne reste la même, pour les différentes molécules, que dans le cas où le mouvement simple se propage sans s'affaiblir. Dans le cas contraire, cette amplitude décroît en raison inverse de la distance des molécules à un *troisième plan invariable*.

Il est essentiel d'observer que, une droite étant menée par les deux points qui indiquent la position initiale d'une molécule quelconque et la position de la même molécule à un instant donné, le déplacement de la molécule, mesuré à cet instant, parallèlement à un axe fixe, s'évanouira si cet axe est perpendiculaire à la droite dont il s'agit. Il en résulte que, dans un mouvement simple d'un système de molécules, un plan mené par un point quelconque parallèlement au premier plan invariable, peut être considéré à chaque instant comme le plan qui termine une certaine onde. On peut donc nommer *plans des ondes* tous les plans parallèles au premier plan invariable.

Lorsque le système de molécules devient *isotrope*, alors, dans un mouvement simple qui se propage sans s'affaiblir, les vibrations moléculaires sont toujours, ou comprises dans les plans des ondes, ou perpendiculaires à ces mêmes plans. Alors aussi nous nommerons *rayon simple* une file de molécules originairement situées sur une droite perpendiculaire aux plans des ondes, l'*axe* de ce rayon n'étant autre chose que la droite même dont il s'agit. Cela posé, il est clair que, si, dans un système isotrope, un mouvement simple se propage sans s'affaiblir, les vibrations de chaque molécule pourront être, ou dirigées suivant le rayon dont elle fait partie, ou comprises dans un plan perpendiculaire à ce même rayon. Ainsi l'hypothèse admise par Fresnel, des

vibrations transversales, c'est-à-dire perpendiculaires aux rayons, devient une réalité ; et il reste prouvé, comme j'en ai fait le premier la remarque dans les Tomes IX et X des *Mémoires de l'Académie*, que les vibrations transversales sont compatibles avec la constitution d'un système isotrope de molécules qui s'attirent ou se repoussent mutuellement. A la vérité les idées de Fresnel sur cet objet ont été vivement combattues par un illustre académicien, dans plusieurs articles que renferment les *Annales de Physique et de Chimie*, et dont l'un est relatif au mouvement de deux fluides superposés. Mais l'auteur de ces articles, en discutant les intégrales des équations considérées par M. Navier et par lui-même, comme propres à représenter les mouvements infiniment petits d'un système isotrope, a finalement reconnu qu'au moment où les ondes, occasionnées par un ébranlement d'abord circonscrit dans un très petit espace, parviennent à une distance du centre d'ébranlement assez grande pour que les surfaces qui les terminent deviennent sensiblement planes, il ne reste, en effet, que deux espèces de vibrations moléculaires dirigées les unes suivant les rayons, les autres perpendiculairement à ces mêmes rayons. Quant aux différences qui subsistent encore entre les résultats obtenus par M. Poisson et ceux auxquels j'arrive, elles tiennent à ce que M. Poisson est parti des équations aux différences partielles indiquées en 1821 par M. Navier, équations qui me paraissent propres à représenter seulement dans un cas particulier, et dans une première approximation, les mouvements infiniment petits d'un système isotrope de molécules. Dans le cas général, les équations de ces mouvements ne sont pas homogènes comme celles que M. Poisson a intégrées, et si on les rend homogènes, en négligeant les termes d'un ordre supérieur au second, le rapport entre les vitesses de propagation des deux espèces d'ondes pourra différer notablement du rapport obtenu par M. Poisson, c'est-à-dire de la racine carrée de 3. Il pourra même, comme on le verra dans ce Mémoire, devenir supérieur à toute limite et acquérir une valeur infinie.

Parlons maintenant des phénomènes qui se rapportent à ce que,

dans la théorie de la lumière, on a nommé la *polarisation*. Si dans un rayon simple, défini comme ci-dessus, les vibrations moléculaires sont transversales, ce qui constituera le mode de *polarisation*, ce sera la nature de la ligne droite ou courbe décrite par chaque molécule. Le rayon sera *polarisé rectilignement*, si chaque molécule décrit une droite. Alors on pourra le désigner encore sous le nom de *rayon plan*, puisqu'à un instant quelconque la série des molécules qui feront partie de ce rayon figurera dans l'espace une courbe plane. Au contraire, le rayon sera polarisé *circulairement* ou *elliptiquement*, si chaque molécule décrit un cercle ou une ellipse. Alors la série des molécules qui font partie du rayon figure, à un instant quelconque, une hélice tracée sur un cylindre à base circulaire ou elliptique, qui a pour axe l'axe même de ce rayon. Lorsque la base est un cercle, le rayon vecteur, mené du centre du cercle au point de la circonférence occupé par la molécule que l'on considère, décrit en temps égaux, non seulement des aires égales, mais encore des angles égaux, et par suite chaque molécule se meut, sur la circonférence qu'elle parcourt, avec une vitesse constante égale au rapport de cette circonférence à la durée d'une vibration moléculaire. Donc, pour se faire une idée des vibrations des molécules dans un rayon polarisé circulairement, il suffira, comme l'a dit Fresnel, de faire tourner l'hélice, qui représente un tel rayon, avec le cylindre qui la porte, en imprimant à ce dernier une vitesse angulaire constante autour de son axe.

Quant au rayon plan, ou polarisé en ligne droite, il présente une courbe, plane et sinueuse, composée d'arcs alternativement situés de part et d'autre de la direction primitive du rayon; et, pour obtenir cette courbe, il suffit, comme on le verra ci-après, de projeter sur le plan qui la renferme une hélice propre à représenter un rayon doué de la polarisation circulaire. Dans un rayon plan, considéré à une époque quelconque du mouvement, quelques molécules conservent leurs positions primitives, c'est-à-dire les positions qu'elles occupaient dans l'état d'équilibre; les autres s'en écartent à droite ou à gauche. Les *nœuds* du rayon, comme ceux d'une corde vibrante, sont à chaque

instant les points où les molécules conservent ou reprennent leurs positions initiales. Seulement, ces nœuds, qui sont fixes dans une corde vibrante, se déplacent d'un moment à l'autre dans le rayon lumineux. Ces nœuds sont, d'ailleurs, de deux espèces différentes, chaque nœud étant de *première* ou de *seconde espèce*, suivant que les molécules desquelles il s'approche en se déplaçant dans l'espace se trouvent situées d'un côté ou de l'autre par rapport à la direction primitive du rayon. Enfin, les distances qui séparent les nœuds de même espèce sont toutes équivalentes à l'épaisseur d'une onde plane, ou, en d'autres termes, à la longueur d'une ondulation; et pareillement la vitesse de propagation avec laquelle chaque nœud se déplace, en passant d'une molécule à une autre, n'est autre chose que la vitesse de propagation des ondes planes.

Observons encore que, dans un rayon polarisé en ligne droite, on doit soigneusement distinguer le *plan du rayon*, c'est-à-dire le *plan qui le renferme*, et le *plan suivant lequel le rayon est polarisé*, ou ce qu'on nomme le *plan de polarisation*, ce dernier plan étant toujours perpendiculaire à l'autre et passant de même par l'axe du rayon.

Si, dans un mouvement simple d'un système de molécules, on désigne au bout du temps t par

$$\xi, \quad \eta, \quad \zeta$$

les déplacements d'une molécule m mesurés parallèlement à trois axes rectangulaires de x, y, z, et par

$$\bar{\xi}, \quad \bar{\eta}, \quad \bar{\zeta}$$

les déplacements symboliques correspondants, c'est-à-dire trois variables dont les déplacements effectifs soient les parties réelles; ces derniers, en vertu de la définition même des mouvements simples, seront proportionnels à une seule exponentielle népérienne dont l'exposant sera une fonction linéaire des variables indépendantes. On aura donc

$$(1) \qquad \bar{\xi} = \mathrm{A}e^{ux+vy+wz-st}, \qquad \bar{\eta}\,\mathrm{B}e^{ux+vy+wz-st}, \qquad \bar{\zeta} = \mathrm{C}e^{ux+vy+wz-st},$$

u, v, w, s, A, B, C désignant des constantes réelles ou imaginaires. Si le mouvement simple dont il s'agit est du nombre de ceux qui se propagent sans s'affaiblir,

$$u, \quad v, \quad w, \quad s$$

seront de la forme

$$u\sqrt{-1}, \quad v\sqrt{-1}, \quad w\sqrt{-1}, \quad s\sqrt{-1},$$

u, v, w, s désignant des constantes réelles dont la dernière pourra être censée positive. Si, d'ailleurs, en nommant

$$a, \quad b, \quad c$$

les modules de

$$A, \quad B, \quad C,$$

et λ, μ, ν des arcs réels, on pose

$$A = ae^{\lambda\sqrt{-1}}, \qquad B = be^{\mu\sqrt{-1}}, \qquad C = ce^{\nu\sqrt{-1}},$$

alors, en faisant pour abréger

$$k = \sqrt{u^2 + v^2 + w^2}, \qquad kr = ux + vy + wz,$$

on tirera des formules (1)

$$(2) \quad \xi = a\cos(kr - st + \lambda), \quad \eta = b\cos(kr - st + \mu), \quad \zeta = c\cos(kr - st + \nu).$$

Alors aussi les plans des ondes seront parallèles au plan invariable représenté par l'équation

$$(3) \qquad ux + vy + wz = 0;$$

r sera la distance d'une molécule à ce plan, ou, ce qui revient au même, la distance de l'origine des coordonnées au plan d'une onde mené par le point (x, y, z); la longueur l d'une ondulation, la durée T d'une vibration moléculaire, et la vitesse de propagation Ω des ondes planes, seront respectivement

$$l = \frac{2\pi}{k}, \qquad T = \frac{2\pi}{s}, \qquad \Omega = \frac{l}{T};$$

enfin,

$$a, \quad b, \quad c$$

représenteront les *demi-amplitudes* des vibrations moléculaires,

mesurées parallèlement aux axes des x, y, z, et la *phase* du mouvement simple projeté sur chacun de ces axes deviendra successivement égale à chacun des trois angles

$$kr - st + \lambda, \quad kr - st + \mu, \quad kr - st + \nu,$$

dans lesquels la partie variable

$$kr - st$$

représentera l'*argument du mouvement simple*, tandis que la constante

$$\lambda, \quad \text{ou} \quad \mu, \quad \text{ou} \quad \nu$$

représentera le *paramètre angulaire*, correspondant à l'axe des x, ou des y, ou des z. Cela posé, comme le cosinus d'un angle ne varie pas, lorsque l'angle est augmenté ou diminué d'une ou de plusieurs circonférences, il est clair qu'on pourra, sans inconvénient, augmenter ou diminuer chaque phase et par suite chaque paramètre angulaire d'un multiple du nombre 2π.

Si chaque molécule se meut en ligne droite, les déplacements

$$\xi, \quad \eta, \quad \zeta$$

devront conserver entre eux des rapports constants, ce qui suppose remplies les conditions

$$(4) \qquad \sin(\mu - \nu) = 0, \qquad \sin(\nu - \lambda) = 0, \qquad \sin(\lambda - \mu) = 0,$$

dont deux entraînent la troisième et réduisent les équations (2) aux suivantes

$$(5) \qquad \begin{cases} \xi = \, a\cos(kr - st + \lambda), \\ \eta = \pm\, b\cos(kr - st + \lambda), \\ \zeta = \pm\, c\cos(kr - st + \lambda). \end{cases}$$

Mais, si chaque molécule décrit un cercle ou une ellipse, le plan de ce cercle ou de cette ellipse sera parallèle au plan invariable représenté par l'équation

$$(6) \qquad \frac{x}{a}\sin(\mu - \nu) + \frac{y}{b}\sin(\nu - \lambda) + \frac{z}{c}\sin(\lambda - \mu) = 0.$$

Lorsque le système de molécules donné sera isotrope, les vibrations

des molécules seront comprises dans les plans des ondes. Donc alors le second plan invariable, représenté par l'équation (3), devra coïncider avec le premier, représenté par l'équation (6), et l'on aura

$$(7)\qquad \frac{au}{\sin(\mu-\nu)} = \frac{bv}{\sin(\nu-\lambda)} = \frac{cw}{\sin(\lambda-\mu)}.$$

Alors aussi les équations (2) représenteront un rayon simple qui sera polarisé rectilignement, si les conditions (4) sont remplies, et circulairement ou elliptiquement dans le cas contraire.

Pour que la polarisation soit circulaire, il est nécessaire et il suffit que le déplacement absolu d'une molécule, c'est-à-dire le radical

$$\sqrt{\xi^2+\eta^2+\zeta^2},$$

se réduise à une quantité constante. Or, comme on aura généralement

$$\cos^2(kx-st+\lambda) = \frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos 2(kx-st+\lambda), \qquad \ldots,$$

il est clair que le radical dont il s'agit deviendra constant ou variable avec la somme

$$\xi^2+\eta^2+\zeta^2,$$

suivant que le trinome

$$(8)\qquad a^2\cos 2(kx-st+\lambda)+b^2\cos 2(kx-st+\mu)+c^2\cos 2(kx-st+\nu)$$

offrira lui-même une valeur constante ou variable. D'ailleurs, ce trinome étant une fonction continue de l'arc $kx-st$, et changeant toujours de signe quand cet arc reçoit un accroissement égal à $\frac{\pi}{2}$, s'évanouira nécessairement pour une certaine valeur de t qu'on pourra supposer comprise, par exemple, entre les limites

$$0 \quad \text{et} \quad \frac{\pi}{2s} = \frac{1}{4}T.$$

Donc, pour qu'il offre une valeur constante, il sera nécessaire et il suffira qu'il se réduise constamment à zéro. Dans cette hypothèse, en attribuant à $kx-st$ les deux valeurs

$$0 \quad \text{et} \quad \frac{\pi}{2},$$

on trouvera successivement

$$(9)\qquad \begin{cases} a^2\cos 2\lambda + b^2\cos 2\mu + c^2\cos 2\nu = 0, \\ a^2\sin 2\lambda + b^2\sin 2\mu + c^2\sin 2\nu = 0, \end{cases}$$

et par suite

$$(10)\qquad \frac{a^2}{\sin 2(\mu-\nu)} = \frac{b^2}{\sin 2(\nu-\lambda)} = \frac{c^2}{\sin 2(\lambda-\mu)}.$$

Réciproquement, si les conditions (9), dont le système équivaut à la formule (10), se vérifient, le trinome (8) sera constamment nul; et, comme on aura par suite

$$(11)\qquad \xi^2+\eta^2+\zeta^2 = \frac{a^2+b^2+c^2}{2},$$

il est clair que chaque molécule décrira une circonférence de cercle inscrite au carré qui aura pour diagonale le double de la longueur

$$\sqrt{a^2+b^2+c^2}.$$

Les formules qui précèdent se simplifient dans le cas où l'on fait coïncider le plan des x, y avec le second plan invariable, ou, ce qui revient au même, l'axe des z avec une droite perpendiculaire aux plans des ondes. Alors, l'équation (3) devant se réduire à

$$z = 0,$$

on a nécessairement

$$u = 0, \qquad v = 0, \qquad w = \pm k$$

et, par suite, en vertu de la formule (7),

$$c = 0.$$

Donc alors, comme on devait s'y attendre, la dernière des équations (2) se réduit à

$$\zeta = 0,$$

et les vibrations de chaque molécule, comprises dans un plan perpendiculaire à l'axe des z, se trouvent déterminées dans ce plan par le système des deux équations

$$(12)\qquad \xi = a\cos(kx-st+\lambda), \qquad \eta = b\cos(kx-st+\mu),$$

qui, eu égard à la formule

$$k\iota = wz, \quad \text{où} \quad \iota = \pm z,$$

pourront s'écrire comme il suit :

$$(13) \qquad \xi = a\cos(wz - st + \lambda), \qquad \eta = b\cos(wz - st + \mu).$$

Si la polarisation est rectiligne, la dernière des conditions (4), savoir

$$(14) \qquad \sin(\lambda - \mu) = 0,$$

réduira les équations (12) à la forme

$$(15) \qquad \xi = a\cos(k\iota - st + \lambda), \qquad \eta = \pm b\cos(k\iota - st + \lambda);$$

et, si le plan du rayon simple devient parallèle au plan des x, z, alors, η étant constamment nul aussi bien que ζ, on pourra représenter ce rayon par la seule formule

$$(16) \qquad \xi = a\cos(k\iota - st + \lambda).$$

Si, au contraire, le plan du rayon simple devenait parallèle au plan des y, z, alors ξ étant constamment nul aussi bien que η, on pourrait représenter ce rayon par la seule formule

$$(17) \qquad \eta = b\cos(k\iota - st + \mu).$$

Si la polarisation devient circulaire, les conditions (9), réduites aux suivantes

$$b^2\cos 2\mu = -a^2\cos 2\lambda, \qquad b^2\sin 2\mu = -a^2\sin 2\lambda,$$

donneront

$$b^4 = a^4, \qquad b = a$$

et

$$\cos 2\mu = -\cos 2\lambda, \qquad \sin 2\mu = -\sin 2\lambda;$$

par conséquent,

$$2\mu = 2\lambda + (2n+1)\pi$$

et

$$(18) \qquad \mu = \lambda + (2n+1)\frac{\pi}{2},$$

n désignant, au signe près, un nombre entier. Donc alors les formules (12) deviendront

$$(19) \qquad \xi = a\cos(k\iota - st + \lambda), \qquad \eta = \pm a\sin(k\iota - st + \lambda).$$

Dans la seconde des formules (19), le double signe doit se réduire au signe + ou au signe − suivant que, pour décrire l'hélice propre à représenter à un instant donné le rayon simple, un point mobile doit tourner dans un sens ou dans un autre, en s'éloignant du plan des x, y.

Dans le rayon simple représenté généralement par le système des équations (12), les déplacements d'une molécule, mesurés parallèlement à l'axe des x, sont les mêmes que dans le rayon plan représenté par la seule équation (16), et les déplacements parallèles à l'axe des y, les mêmes que dans le rayon plan représenté par la seule équation (17). C'est ce qu'on exprime en disant que le premier rayon *résulte de la superposition* des deux autres. D'ailleurs, les plans de ces deux derniers peuvent coïncider avec deux plans rectangulaires menés par l'axe du premier. Donc un rayon quelconque, doué de la polarisation rectiligne, ou circulaire, ou elliptique, peut toujours être censé résulter de la superposition de deux rayons polarisés rectilignement, et renfermés, le premier dans un plan fixe donné, le second dans un plan perpendiculaire. Ces deux derniers rayons, appelés *rayons composants*, offriront en général des phases distinctes, représentées, dans les formules (12), par les angles

$$k\iota - st + \lambda, \qquad k\iota - st + \mu.$$

La différence entre ces deux phases a été elle-même désignée par quelques auteurs sous le nom de *phase;* mais, pour éviter toute équivoque, nous l'appellerons l'*anomalie* du rayon résultant. Cette anomalie, comme chacune des phases, peut être, sans inconvénient, augmentée ou diminuée d'un multiple du nombre 2π; par conséquent, elle peut être réduite à zéro ou au nombre π, en vertu de la formule (14), lorsque la polarisation est rectiligne, et à $\frac{1}{2}\pi$ ou à $-\frac{1}{2}\pi$, en vertu de la formule (18), lorsque la polarisation est circulaire. Mais lorsque la

polarisation devient elliptique, l'anomalie peut varier avec la direction du plan fixe que l'on considère. Concevons d'ailleurs que, dans chacun des deux rayons composants, on nomme *nœuds de première espèce* ceux qui précèdent des molécules dont les déplacements sont représentés par des quantités positives. Alors, le rapport de l'anomalie à la constante k représentera, au signe près, la distance entre un nœud de l'un des rayons composants et un nœud de même espèce de l'autre. Ainsi, en particulier, si l'on prend pour plan fixe le plan des x, z, les nœuds de première espèce du premier rayon composant pourront être censés correspondre aux valeurs de ι pour lesquelles le déplacement

$$\xi = a\cos(k\iota - st + \lambda)$$

s'évanouit, en passant, lorsque ι vient à croître, du négatif au positif; en d'autres termes, les nœuds de première espèce du premier rayon composant correspondront aux valeurs de ι comprises dans la formule

$$k\iota - st + \lambda = 2n\pi = \frac{(4n+1)\pi}{2} 2n\pi + \frac{3\pi}{2} = \frac{4n+3}{2}\pi$$

ou

$$(20)\qquad \iota = \frac{2n\pi + st - \lambda}{k} = \frac{(4n+1)\frac{\pi}{2} + st - \lambda}{k} \frac{\left(2n + \frac{3}{2}\right)\pi + st - \lambda}{k},$$

n désignant, au signe près, un nombre entier. Pareillement les nœuds de première espèce du second rayon composant pourront être censés correspondre aux valeurs de ι pour lesquelles le déplacement

$$\eta = b\cos(k\iota - st + \mu)$$

s'évanouit, en passant, lorsque ι vient à croître, du négatif au positif, par conséquent aux valeurs de ι comprises dans la formule

$$(21)\qquad \iota = \frac{2n\pi + st - \mu}{k} = \frac{(4n+1)\frac{\pi}{2} + st - \mu}{k}.$$

Donc, pour passer d'un nœud de première espèce du premier rayon composant à un nœud de première espèce du second rayon, il suffira de parcourir, sur l'axe commun des deux rayons, une longueur repré-

sentée, au signe près, par le rapport

$$\frac{\mu - \lambda}{k},$$

qui est précisément la différence entre les valeurs de ι fournies par les formules (20) et (21). Cela posé, faire croître ou diminuer l'anomalie d'un multiple de 2π, revient évidemment à faire croître ou diminuer la première ou la seconde valeur de ι d'une ou de plusieurs épaisseurs d'ondes, par conséquent à remplacer, pour l'un des rayons composants, un nœud de première espèce par un autre nœud de même espèce. Alors aussi, quand le rayon résultant sera polarisé en ligne droite, l'anomalie pourra être réduite à zéro, ou au nombre π, suivant qu'un nœud donné de l'un des rayons composants viendra se placer sur un nœud de même espèce, ou sur un nœud d'espèce différente, appartenant à l'autre.

Il est bon d'observer qu'on tire des formules (19), non seulement

$$\xi^2 + \eta^2 = a^2,$$

et par suite

$$a = \sqrt{\xi^2 + \eta^2},$$

mais encore

$$\cos(k\iota - st + \lambda) = \frac{\xi}{\sqrt{\xi^2 + \eta^2}}, \qquad \sin(k\iota - st + \lambda) = \pm\frac{\eta}{\sqrt{\xi^2 + \eta^2}}.$$

Donc, dans un rayon doué de la polarisation circulaire, la phase du mouvement projeté sur l'axe des x, savoir

$$k\iota - st + \lambda,$$

peut être censée se confondre, au signe près, avec l'un quelconque des angles qui ont pour cosinus et sinus les rapports

$$\frac{\xi}{\sqrt{\xi^2 + \eta^2}}, \quad \frac{\eta}{\sqrt{\xi^2 + \eta^2}},$$

par conséquent avec l'angle compris entre le demi-axe des x positives et le rayon vecteur mené du centre du cercle à la molécule déplacée. En d'autres termes, la phase relative à un axe fixe peut alors être censée

se confondre, au signe près, avec la distance angulaire de la molécule à cet axe fixe.

Observons encore que si l'on décompose un rayon quelconque, représenté par les équations (12), en deux rayons renfermés dans deux plans rectangulaires, tels que les rayons représentés par l'équation (16) et par l'équation (17), ces deux derniers seront précisément les projections du premier sur les deux plans rectangulaires. Comme, d'ailleurs, rien n'empêche de supposer le premier rayon doué de la polarisation circulaire, il en résulte qu'un rayon plan, par exemple le rayon représenté par l'équation (16), se réduit toujours à la projection orthogonale d'un rayon polarisé circulairement sur un plan mené par l'axe de celui-ci. On en conclut que, pour obtenir à un instant quelconque la phase d'un rayon plan, correspondant à un point donné de son axe, il suffit de construire une circonférence de cercle qui ait pour diamètre l'amplitude des vibrations exécutées par la molécule dont ce point était la position initiale; puis de chercher la distance angulaire entre ce diamètre, prolongé du côté où se mesurent les déplacements positifs, et le point de la circonférence qui, étant projeté sur le même diamètre, offre pour projection la position de la molécule à l'instant donné.

On appelle souvent *azimut* l'angle formé par un plan variable avec un plan fixe : par exemple, en Astronomie, l'angle formé par le méridien d'un lieu avec le plan d'un cercle vertical. Nous conformant sur ce point à l'usage établi, lorsqu'un rayon simple sera polarisé en ligne droite, nous appellerons *azimut de ce rayon* l'angle aigu formé par le plan qui le renferme avec un plan fixe. Si d'ailleurs le plan fixe passe, comme nous le supposerons généralement, par l'axe du rayon simple, et si ce rayon est considéré comme résultant de la superposition de deux autres, polarisés l'un suivant le plan fixe, l'autre perpendiculairement à ce plan, l'azimut du rayon résultant et l'azimut de son plan de polarisation seront les deux angles complémentaires l'un de l'autre, qui auront pour tangentes trigonométriques les rapports direct et inverse des amplitudes des vibrations moléculaires dans les

deux rayons composants. Ainsi, en particulier, si, en supposant un rayon plan représenté par les équations (13) ou (15), on nomme ϖ l'azimut de ce rayon par rapport au plan des x, z, on aura

$$\tang \varpi = \frac{b}{a}. \tag{22}$$

Si un rayon simple cesse d'être polarisé rectilignement, rien n'empêchera d'appeller encore *azimut* de ce rayon, relativement à un plan fixe, l'azimut qu'on obtiendrait dans le cas où, après avoir décomposé ce rayon en deux autres polarisés, l'un suivant le plan fixe, l'autre perpendiculairement à ce plan, on ferait varier l'un des paramètres angulaires, sans changer les amplitudes, et de manière à replacer les nœuds de l'un des rayons composants sur les nœuds de l'autre. Ainsi défini, l'*azimut d'un rayon simple*, par rapport à un plan fixe, sera toujours l'angle aigu qui a pour tangente trigonométrique le rapport entre les amplitudes des vibrations moléculaires du rayon composant, polarisé suivant le plan fixe, et du rayon polarisé perpendiculairement à ce plan; de sorte que, dans un rayon représenté par les équations (13), l'azimut ϖ, relatif au plan des x, z sera toujours déterminé par la formule (22). Cela posé, lorsque le rayon résultant sera doué de la polarisation circulaire, son azimut sera la moitié d'un angle droit, quelle que soit d'ailleurs la direction du plan fixe auquel cet azimut se rapporte. Mais, si le rayon résultant est doué de la polarisation elliptique, l'azimut dépendra de la position du plan fixe, et changera de valeur avec cette position en même temps que l'anomalie.

II. — *Rayons réfléchis ou réfractés par la surface de séparation de deux milieux isotropes.*

Supposons deux systèmes isotropes de molécules séparés par une surface plane que nous prendrons pour plan des y, z; et concevons qu'un mouvement simple ou par ondes planes, mais sans changement de densité, se propage dans le premier milieu situé du côté des x

négatives. Si le mouvement simple dont il s'agit, à l'instant où il atteint la surface de séparation, donne toujours naissance à un seul mouvement simple réfléchi et à un seul mouvement simple réfracté, les lois de la réflexion et de la réfraction se déduiront sans peine des formules que nous avons données dans un précédent Mémoire. Entrons à ce sujet dans quelques détails.

Soient au bout du temps t, et pour le point (x, y, z),

$$\xi,\quad \eta,\quad \zeta \quad \text{et} \quad \bar{\xi},\quad \bar{\eta},\quad \bar{\zeta},$$

ou

$$\xi_{,},\quad \eta_{,},\quad \zeta_{,} \quad \text{et} \quad \bar{\xi}_{,},\quad \bar{\eta}_{,},\quad \bar{\zeta}_{,},$$

ou enfin

$$\xi',\quad \eta',\quad \zeta' \quad \text{et} \quad \bar{\xi}',\quad \bar{\eta}',\quad \bar{\zeta}',$$

les déplacements effectifs d'une molécule, mesurés parallèlement aux axes rectangulaires des x, y, z, et les déplacements symboliques correspondants, c'est-à-dire les variables imaginaires dont les déplacements effectifs sont les parties réelles : 1° dans un rayon incident, qui rencontre la surface de séparation de deux milieux isotropes; 2° dans le rayon réfléchi par cette surface; 3° dans le rayon réfracté. Si l'on prend pour axe des z une droite parallèle aux traces des ondes incidentes sur la surface de séparation des deux milieux, les trois rayons seront représentés par trois systèmes d'équations symboliques de la forme

$$(1)\qquad \bar{\xi} = \mathrm{A}\, e^{ux+vy-st},\qquad \bar{\eta} = \mathrm{B}\, e^{ux+vy-st},\qquad \bar{\zeta} = \mathrm{C}\, e^{ux+vy-st},$$

$$(2)\qquad \bar{\xi}_{,} = \mathrm{A}_{,} e^{-ux+vy-st},\qquad \bar{\eta}_{,} = \mathrm{B}_{,} e^{-ux+vy-st},\qquad \bar{\zeta}_{,} = \mathrm{C}_{,} e^{-ux+vy-st},$$

$$(3)\qquad \bar{\xi}' = \mathrm{A}' e^{u'x+vy-st},\qquad \bar{\eta}' = \mathrm{B}' e^{u'x+vy-st},\qquad \bar{\zeta}' = \mathrm{C}' e^{u'x+vy-st},$$

u, v, u', s, $\mathrm{A}_{,}$, $\mathrm{B}_{,}$, $\mathrm{C}_{,}$, A, B, C, A′, B′, C′ désignant des constantes qui pourront être imaginaires. Si les trois rayons, comme nous le supposerons dans ce paragraphe, se propagent sans s'affaiblir, on aura nécessairement

$$(4)\qquad \begin{cases} u = \mathrm{u}\sqrt{-1}, \\ u' = \mathrm{u}'\sqrt{-1}, \end{cases}\qquad v = \mathrm{v}\sqrt{-1},\qquad s = \mathrm{s}\sqrt{-1},$$

u, v, s, u′ désignant des constantes réelles. On pourra même supposer

toutes ces constantes réelles, positives. En effet, chaque déplacement symbolique pouvant être l'une quelconque de deux expressions imaginaires conjuguées, qui ne diffèrent entre elles que par le signe de $\sqrt{-1}$, on pourra toujours admettre que, dans l'exponentielle népérienne à laquelle chaque déplacement symbolique est proportionnel, le coefficient de $t\sqrt{-1}$, représenté par la quantité s, est positif. De plus, pour que le coefficient v de y soit positif, ainsi que s, il suffira de choisir convenablement le demi-axe suivant lequel se compteront les y positives. Enfin, le rayon incident qui passera par l'origine des coordonnées étant perpendiculaire au plan invariable représenté par l'équation

$$\mathrm{u}x + \mathrm{v}y = 0,$$

on aura pour ce rayon

$$\frac{x}{\mathrm{u}} = \frac{y}{\mathrm{v}},$$

et par suite les nœuds de ce rayon, qui correspondront à des valeurs constantes de l'argument

$$\mathrm{u}x + \mathrm{v}y - \mathrm{s}t = \frac{\mathrm{u}^2 + \mathrm{v}^2}{\mathrm{u}}x - \mathrm{s}t,$$

se déplaceront dans l'espace avec une vitesse dont la projection algébrique sur l'axe des x sera le rapport entre des accroissements Δx, Δt de x et de t, choisis de manière que l'accroissement de l'argument s'évanouisse. Cette projection algébrique, déterminée par la formule

$$\frac{\mathrm{u}^2 + \mathrm{v}^2}{\mathrm{u}}\Delta x - \mathrm{s}\Delta t = 0,$$

sera donc

$$\frac{\Delta x}{\Delta t} = \mathrm{u}\frac{\mathrm{s}}{\mathrm{u}^2 + \mathrm{v}^2};$$

et pour qu'elle soit positive, ou, en d'autres termes, pour que les ondes planes incidentes se meuvent dans le sens des x positives, comme elles devront le faire en approchant de la surface de séparation des deux milieux, il sera nécessaire que le coefficient u soit positif. Pour la même raison, le coefficient u′ devra encore être positif, les ondes réfractées devant évidemment s'éloigner de la surface de

séparation des deux milieux, en se mouvant elles-mêmes dans le sens des x positives.

Considérons en particulier le cas où les mouvements simples propagés dans les deux milieux sont du nombre de ceux dans lesquels la densité reste invariable, c'est-à-dire, en d'autres termes, le cas où, dans les rayons incident, réfléchi, réfracté, les vibrations des molécules sont transversales. Alors les coefficients

$$A,\quad B,\quad A_{\prime},\quad B_{\prime},\quad A',\quad B'$$

se trouveront liés entre eux, et avec les constantes imaginaires

$$u,\quad v,\quad u',$$

par les formules

$$(5)\qquad A u + B v = 0,$$

$$(6)\qquad -A_{\prime} u + B_{\prime} v = 0,\qquad A' u' + B' v = 0.$$

Soient maintenant

$$(7)\qquad k = \sqrt{v^2 + v^2},\qquad k' = \sqrt{v'^2 + v^2};$$

et faisons, pour abréger,

$$(8)\qquad k = k\sqrt{-1},\qquad k' = k'\sqrt{-1}.$$

On aura non seulement

$$(9)\qquad k^2 = u^2 + v^2,\qquad k'^2 = u'^2 + v^2,$$

mais encore, en supposant les équations des mouvements infiniment petits des deux milieux réduites à des équations homogènes, et désignant par ι, ι' deux constantes qui dépendront de la nature de ces milieux,

$$(10)\qquad k^2 = \frac{s^2}{\iota},\qquad k'^2 = \frac{s^2}{\iota'}.$$

Or, après avoir déterminé k', à l'aide de la seconde des deux formules (10), on déduira facilement de la seconde des équations (7) la valeur de

$$(11)\qquad v' = \sqrt{k'^2 - v^2}.$$

Si d'ailleurs il existe un rayon réfléchi et un rayon réfracté, quels que soient la direction et le mode de polarisation du rayon incident;

alors, en vertu des principes développés dans un précédent Mémoire (*voir* la page 224), on pourra, des valeurs de

$$\mathfrak{u},\quad \mathfrak{v},\quad s,\quad A,\quad B,\quad C$$

supposées connues, déduire les valeurs de

$$A_{\prime},\quad B_{\prime},\quad C_{\prime},\quad A',\quad B',\quad C'$$

à l'aide des formules (6), jointes aux formules (4), (11) et aux suivantes :

$$(12)\qquad \frac{C_{\prime}}{C} = \frac{u - u'}{u + u'},\qquad \frac{C'}{C} = \frac{2u}{u + u'},$$

$$(13)\qquad \left\{\begin{aligned} \frac{A_{\prime}}{A} &= \frac{(v^2 - uu')\left(1 - \frac{v^2}{\mathfrak{v}\mathfrak{v}'}\right) + (u' + u)v^2\left(\frac{1}{\mathfrak{v}} + \frac{1}{\mathfrak{v}'}\right)}{(v^2 + uu')\left(1 - \frac{v^2}{\mathfrak{v}\mathfrak{v}'}\right) + (u' - u)v^2\left(\frac{1}{\mathfrak{v}} + \frac{1}{\mathfrak{v}'}\right)}\,\frac{u - u'}{u + u'},\\ \frac{A'}{A} &= \frac{k^2\left(1 - \frac{v^2}{\mathfrak{v}\mathfrak{v}'}\right)}{(v^2 + uu')\left(1 - \frac{v^2}{\mathfrak{v}\mathfrak{v}'}\right) + (u' - u)v^2\left(\frac{1}{\mathfrak{v}} + \frac{1}{\mathfrak{v}'}\right)}\,\frac{2u}{u + u'};\end{aligned}\right.$$

les valeurs de $\mathfrak{v}$, $\mathfrak{v}'$ étant données par les équations

$$(14)\qquad -\mathfrak{v} = \left(v^2 - \frac{k^2}{1 + \iota}\right)^{\frac{1}{2}},\qquad \mathfrak{v}' = \left(v^2 - \frac{k'^2}{1 + \iota'}\right)^{\frac{1}{2}},$$

dans lesquelles $\mathfrak{v}$, $\mathfrak{v}'$ désignent encore deux constantes réelles qui dépendent de la nature du premier et du second milieu.

Si dans les formules (12) et (13), on substitue aux constantes imaginaires

$$u,\quad v,\quad k,\quad u'$$

leurs valeurs tirées des équations (4) et (8), on aura simplement

$$(15)\qquad \frac{C_{\prime}}{C} = \frac{\mathfrak{u} - \mathfrak{u}'}{\mathfrak{u} + \mathfrak{u}'},\qquad \frac{C'}{C} = \frac{2\mathfrak{u}}{\mathfrak{u} + \mathfrak{u}'},$$

$$(16)\qquad \left\{\begin{aligned} \frac{A_{\prime}}{A} &= \frac{(\mathfrak{v}^2 - \mathfrak{u}\mathfrak{u}')\left(1 + \frac{\mathfrak{v}^2}{\mathfrak{v}\mathfrak{v}'}\right) + (\mathfrak{u}' + \mathfrak{u})\mathfrak{v}^2\left(\frac{1}{\mathfrak{v}} + \frac{1}{\mathfrak{v}'}\right)\sqrt{-1}}{(\mathfrak{v}^2 + \mathfrak{u}\mathfrak{u}')\left(1 + \frac{\mathfrak{v}^2}{\mathfrak{v}\mathfrak{v}'}\right) + (\mathfrak{u}' - \mathfrak{u})\mathfrak{v}^2\left(\frac{1}{\mathfrak{v}} + \frac{1}{\mathfrak{v}'}\right)\sqrt{-1}}\,\frac{\mathfrak{u} - \mathfrak{u}'}{\mathfrak{u} + \mathfrak{u}'},\\ \frac{A'}{A} &= \frac{k^2\left(1 + \frac{\mathfrak{v}^2}{\mathfrak{v}\mathfrak{v}'}\right)}{(\mathfrak{v}^2 + \mathfrak{u}\mathfrak{u}')\left(1 + \frac{\mathfrak{v}^2}{\mathfrak{v}\mathfrak{v}'}\right) + (\mathfrak{u}' - \mathfrak{u})\mathfrak{v}^2\left(\frac{1}{\mathfrak{v}} + \frac{1}{\mathfrak{v}'}\right)\sqrt{-1}}\,\frac{2\mathfrak{u}}{\mathfrak{u} + \mathfrak{u}'}.\end{aligned}\right.$$

La constante s, comprise dans les formules (4) et (10), est, comme on sait, liée à *la durée* T des vibrations moléculaires par la formule

$$T = \frac{2\pi}{s};$$

et l'on a pareillement

$$l = \frac{2\pi}{k}, \qquad l' = \frac{2\pi}{k'},$$

l, l' désignant les *longueurs d'ondulation* ou les plus courtes distances entre deux nœuds de même espèce : 1° dans le rayon incident ou réfléchi ; 2° dans le rayon réfracté. Si d'ailleurs on nomme

$$\Omega, \quad \Omega'$$

les vitesses de propagation des nœuds ou des ondes planes dans le premier et le second milieu, on aura

$$\Omega = \frac{s}{k} = \frac{l}{T}, \qquad \Omega' = \frac{s}{k'} = \frac{l'}{T},$$

et, par suite,

$$\Omega^2 = \iota, \qquad \Omega'^2 = \iota'.$$

Enfin, si l'on nomme τ, τ' les angles d'incidence et de réfraction, c'est-à-dire les angles aigus formés par les directions des rayons incident et réfracté avec la normale à la surface de séparation des deux milieux, on aura

$$(17) \qquad \begin{cases} u = k\cos\tau, & v = k\sin\tau, \\ u' = k'\cos\tau', & v' = v = k'\sin\tau', \end{cases}$$

puis on en conclura

$$\begin{aligned} uu' - v^2 &= kk'\cos(\tau+\tau'), & uu' + v^2 &= kk'\cos(\tau-\tau'), \\ (u'+u)v &= kk'\sin(\tau+\tau'), & (u'-u)v &= kk'\sin(\tau-\tau'), \end{aligned}$$

et par suite, en posant pour abréger

$$(18) \qquad -\mathfrak{C} = \left[1 - \frac{1}{(1+\mathfrak{f})\sin^2\tau}\right]^{-\frac{1}{2}}, \qquad \mathfrak{C}' = \left[1 - \frac{1}{(1+\mathfrak{f}')\sin^2\tau'}\right]^{-\frac{1}{2}},$$

on tirera des formules (15), (16), jointes aux équations (14),

$$(19) \qquad \frac{C_{,}}{C} = \frac{\sin(\tau'-\tau)}{\sin(\tau'+\tau)}, \qquad \frac{C'}{C} = \frac{2\sin\tau'\cos\tau}{\sin(\tau'+\tau)},$$

$$(20) \qquad \begin{cases} \dfrac{A_{,}}{A} = \dfrac{-(1+\mathfrak{C}\mathfrak{C}')\cos(\tau+\tau') + (\mathfrak{C}+\mathfrak{C}')\sin(\tau+\tau')\sqrt{-1}}{(1+\mathfrak{C}\mathfrak{C}')\cos(\tau+\tau') + (\mathfrak{C}+\mathfrak{C}')\sin(\tau-\tau')\sqrt{-1}}\,\dfrac{C_{,}}{C}, \\[2ex] \dfrac{A'}{A} = \dfrac{k}{k'}\,\dfrac{1+\mathfrak{C}\mathfrak{C}'}{(1+\mathfrak{C}\mathfrak{C}')\cos(\tau-\tau') + (\mathfrak{C}+\mathfrak{C}')\sin(\tau-\tau')\sqrt{-1}}\,\dfrac{C'}{C}. \end{cases}$$

Soient maintenant

$$\mathfrak{s}, \quad \mathfrak{s}_{,}, \quad \mathfrak{s}'$$

les déplacements d'une molécule mesurés dans les rayons incident, réfléchi et réfracté, parallèlement au plan d'incidence, et

$$\bar{\mathfrak{s}}, \quad \bar{\mathfrak{s}}_{,}, \quad \bar{\mathfrak{s}}'$$

les déplacements symboliques correspondants, chacun des déplacements effectifs $\mathfrak{s}$, $\mathfrak{s}_{,}$, $\mathfrak{s}'$ étant positif ou négatif, suivant que la molécule déplacée est transportée du côté des x positives ou du côté des x négatives. Comme les déplacements

$$\mathfrak{s}, \quad \mathfrak{s}_{,}, \quad \mathfrak{s}',$$

lorsqu'ils seront positifs, auront pour projections algébriques sur l'axe des x

$$\xi, \quad \xi_{,}, \quad \xi',$$

on aura nécessairement

$$\xi = \mathfrak{s}\sin\tau, \qquad \xi_{,} = \mathfrak{s}_{,}\sin\tau, \qquad \xi' = \mathfrak{s}'\sin\tau',$$

ou, ce qui revient au même,

$$\xi = \frac{v}{k}\mathfrak{s}, \qquad \xi_{,} = \frac{v}{k}\mathfrak{s}_{,}, \qquad \xi' = \frac{v}{k'}\mathfrak{s}',$$

et, par suite,

$$\mathfrak{s} = \frac{k}{v}\xi, \qquad \mathfrak{s}_{,} = \frac{k}{v}\xi_{,}, \qquad \mathfrak{s}' = \frac{k'}{v}\xi'.$$

On pourra donc prendre

$$\bar{\mathfrak{s}} = \frac{k}{v}\bar{\xi}, \qquad \bar{\mathfrak{s}}_{,} = \frac{k}{v}\bar{\xi}_{,}, \qquad \bar{\mathfrak{s}}' = \frac{k'}{v}\bar{\xi}';$$

de sorte qu'en posant, pour abréger,

$$(21)\qquad H = \frac{k}{v}A, \qquad H_{,} = \frac{k}{v}A_{,}, \qquad H' = \frac{k'}{v}A',$$

on tirera des équations (1), (2), (3)

$$(22)\qquad \bar{\varkappa} = H\, e^{ux+vy-st}, \qquad \bar{\xi} = C\, e^{ux+vy-st},$$

$$(23)\qquad \bar{\varkappa}_{,} = H_{,} e^{-ux+vy-st}, \qquad \bar{\xi}_{,} = C_{,} e^{-ux+vy-st},$$

$$(24)\qquad \bar{\varkappa}' = H' e^{u'x+vy-st}, \qquad \bar{\xi}' = C' e^{u'x+vy-st}.$$

Si, maintenant, on nomme

$$h, \quad c, \quad h_{,}, \quad c_{,}, \quad h', \quad c'$$

les modules des expressions imaginaires

$$H, \quad C, \quad H_{,}, \quad C_{,}, \quad H', \quad C',$$

et si l'on pose en conséquence

$$(25)\qquad \begin{cases} H = h e^{\mu\sqrt{-1}}, & H_{,} = h_{,} e^{\mu_{,}\sqrt{-1}}, \qquad H' = h' e^{\mu'\sqrt{-1}}, \\ C = c\, e^{\nu\sqrt{-1}}, & C_{,} = c_{,} e^{\nu_{,}\sqrt{-1}}, \qquad C' = c'\, e^{\nu'\sqrt{-1}}, \end{cases}$$

μ, ν, $\mu_{,}$, $\nu_{,}$, μ', ν' désignant des arcs réels, les formules (22), (23), (24) donneront

$$(26)\qquad \varkappa = h\cos(\ \ ux + vy - st + \mu), \qquad \xi = c\cos(\ \ ux + vy - st + \nu),$$

$$(27)\qquad \varkappa_{,} = h_{,}\cos(-ux + vy - st + \mu_{,}), \qquad \xi_{,} = c_{,}\cos(-ux + vy - st + \nu_{,}),$$

$$(28)\qquad \varkappa' = h'\cos(\ \ u'x + vy - st + \mu'), \qquad \xi' = c'\cos(\ \ u'x + vy - st + \nu').$$

Le système des formules (26) représente le rayon incident; $\varkappa$ et ξ désignant, dans ce rayon, les déplacements d'une molécule mesurés parallèlement au plan d'incidence et perpendiculairement à ce plan. Si l'un de ces déplacements venait à s'évanouir, le rayon incident deviendrait un rayon plan renfermé dans le plan d'incidence, ou polarisé suivant ce même plan, et qui pourrait être représenté, dans le premier cas, par la seule formule

$$(29)\qquad \varkappa = h\cos(ux + vy - st + \mu),$$

dans le second cas, par la seule formule

$$(30)\qquad \xi = c\cos(ux + vy - st + \nu).$$

Comme le rayon représenté par le système des formules (26) offre tout à la fois les deux espèces de déplacements moléculaires, observés dans les rayons plans que représentent les formules (29) et (30) prises chacune à part, on peut dire que le premier rayon *résulte* de la *superposition* des deux autres. Chacun des rayons réfléchi et réfracté peut, d'ailleurs, aussi bien que le rayon incident, être considéré comme résultant de la superposition de deux rayons plans; l'un de ces derniers étant renfermé dans le plan d'incidence, ou, ce qui revient au même, polarisé perpendiculairement à ce plan, et l'autre étant, au contraire, polarisé suivant ce même plan. Cela posé, après la réflexion ou la réfraction, le rayon plan, renfermé dans le plan d'incidence, sera représenté par la première des formules (27) ou (28), et le rayon polarisé suivant le plan d'incidence par la seconde.

Observons encore que, dans les formules (26), (27), (28), les *demi-amplitudes des vibrations* et les *paramètres angulaires* se trouvent représentés par

$$h, \quad h_{,} \quad h' \qquad \text{et} \qquad \mu, \quad \mu_{,}, \quad \mu'$$

pour les rayons renfermés dans le plan d'incidence, et par

$$c, \quad c_{,}, \quad c' \qquad \text{et} \qquad \nu, \quad \nu_{,}, \quad \nu'$$

pour les rayons polarisés suivant le même plan.

Au point où le rayon incident rencontre la surface réfléchissante, on a

$$x = 0,$$

ce qui réduit les formules (22), (23), (24) aux suivantes :

$$(31)\qquad \bar{\varkappa} = H\, e^{vy-st}, \qquad \bar{\xi} = C\, e^{vy-st},$$

$$(32)\qquad \bar{\varkappa}_{,} = H_{,} e^{vy-st}, \qquad \bar{\xi}_{,} = C_{,} e^{vy-st},$$

$$(33)\qquad \bar{\varkappa}' = H' e^{vy-st}, \qquad \bar{\xi}' = C' e^{vy-st},$$

et les formules (26), (27), (28) aux suivantes :

$$(34)\qquad \varkappa = h\cos(vy - st + \mu),\qquad \xi = c\cos(vy - st + \nu),$$

$$(35)\qquad \varkappa_{,} = h_{,}\cos(vy - st + \mu_{,}),\qquad \zeta_{,} = c_{,}\cos(vy - st + \nu_{,}),$$

$$(36)\qquad \varkappa' = h'\cos(vy - st + \mu'),\qquad \zeta' = c'\cos(vy - st + \nu').$$

Il suit des formules (31), (32), (33) que la réflexion ou la réfraction d'un rayon simple renfermé dans le plan d'incidence, ou polarisé suivant ce plan, fait varier dans ce rayon le déplacement symbolique

$$\bar{\varkappa} \quad \text{ou} \quad \bar{\zeta},$$

dans un rapport constant. Ce rapport, qui sera d'ailleurs imaginaire, est ce que nous nommerons le *coefficient de réflexion* ou *de réfraction*. Si on le désigne par

$$\bar{I} \quad \text{ou} \quad \bar{I}'$$

pour le rayon plan renfermé dans le plan d'incidence, et par

$$\bar{J} \quad \text{ou} \quad \bar{J}'$$

pour le rayon polarisé suivant ce plan, on aura

$$(37)\qquad \left\{\begin{aligned} \bar{J} &= \frac{C_{,}}{C}, & \bar{J}' &= \frac{C'}{C},\\ \bar{I} &= \frac{H_{,}}{H} = \frac{A_{,}}{A}, & \bar{I}' &= \frac{H'}{H} = \frac{k'A'}{kA},\end{aligned}\right.$$

et par suite, eu égard aux formules (19), (20),

$$(38)\qquad \bar{J} = \frac{\sin(\tau' - \tau)}{\sin(\tau' + \tau)},\qquad \bar{J}' = \frac{2\sin\tau'\cos\tau}{\sin(\tau' + \tau)},$$

$$(39)\qquad \left\{\begin{aligned} \bar{I} &= \frac{-(1 + \mathfrak{C}\mathfrak{C}')\cos(\tau + \tau') + (\mathfrak{C} + \mathfrak{C}')\sin(\tau + \tau')\sqrt{-1}}{(1 + \mathfrak{C}\mathfrak{C}')\cos(\tau - \tau') + (\mathfrak{C} + \mathfrak{C}')\sin(\tau + \tau')\sqrt{-1}}\bar{J},\\ \bar{I}' &= \frac{1 + \mathfrak{C}\mathfrak{C}'}{(1 + \mathfrak{C}\mathfrak{C}')\cos(\tau - \tau') + (\mathfrak{C} + \mathfrak{C}')\sin(\tau - \tau')\sqrt{-1}}\bar{J}',\end{aligned}\right.$$

les valeurs de $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{C}'$ étant toujours données par les équations [1]

$$(18)\qquad \mathfrak{C} = -\left(1 - \frac{1}{(1 + f)\sin^2\tau}\right)^{-\frac{1}{2}},\qquad \mathfrak{C}' = \left(1 - \frac{1}{(1 + f')\sin^2\tau'}\right)^{-\frac{1}{2}}.$$

[1] Il est bon d'expliquer comment il arrive que les valeurs de $\mathfrak{V}$, $\mathfrak{V}'$ ou de $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{C}'$,

Il suit des formules (34), (35), (36) que la réflexion ou la réfraction d'un rayon simple, renfermé dans le plan d'incidence ou polarisé suivant ce plan, fait varier, dans ce rayon, l'amplitude des vibrations moléculaires dans un certain rapport donné, et ajoute en même temps au paramètre angulaire un certain angle. Ce rapport et cet angle sont ce que nous nommerons le *module et l'argument de réflexion ou de réfraction*. Si l'on désigne le module et l'argument de réflexion ou de réfraction par

$$I \text{ et } i \quad \text{ou par} \quad I' \text{ et } i'$$

pour le rayon renfermé dans le plan d'incidence, et par

$$J \text{ et } j \quad \text{ou par} \quad J' \text{ et } j'$$

fournies par les équations (14) ou (18), sont affectées de signes contraires, les valeurs de $\mathfrak{V}'$, $\mathfrak{C}'$ étant positives et celles de $\mathfrak{V}$, $\mathfrak{C}$ négatives. En voici la raison.

En vertu des principes établis dans le Mémoire qui a pour titre *Méthode générale propre à fournir les équations de condition relatives aux limites des corps* [1], on doit, dans la formule (27) de la page 190, supposer la valeur de $\mathfrak{V}$ positive et déterminée par l'équation (26) [*ibidem*], lorsque l'on considère un système de molécules situé, par rapport au plan des y, z, du côté des x positives. Dire alors qu'on doit avoir

$$\mathfrak{V} > 0$$

c'est dire, en d'autres termes, que l'exponentielle

$$e^{-\mathfrak{V}x}$$

doit devenir sensiblement nulle, dans ce système, à de grandes distances du plan des y, z; et cette dernière condition est effectivement l'une de celles que, suivant la théorie développée dans le Mémoire, il importe de vérifier. Mais, pour que la même exponentielle

$$e^{-\mathfrak{V}x}$$

devienne sensiblement nulle, à de grandes distances du plan des y, z, dans un système de molécules situé du côté des x négatives, il faudra au contraire qu'on ait

$$\mathfrak{V} < 0.$$

Cela posé, en considérant deux milieux au lieu d'un seul, et posant d'ailleurs $w = 0$, on doit évidemment à l'équation (26) de la page 190 substituer les formules (14). Par la même raison on devra, dans la formule (15) de la page 213, remplacer $\mathfrak{V}$ par $-\mathfrak{V}$.

[1] *Œuvres de Cauchy*, 1re série, t. IV, *Extraits* 33, 34, 35.

pour le rayon polarisé suivant ce même plan, les constantes positives

$$(40)\qquad \mathrm{I}=\frac{\mathrm{h}_{\prime}}{\mathrm{h}},\quad \mathrm{I}'=\frac{\mathrm{h}'}{\mathrm{h}},\quad \mathrm{J}=\frac{\mathrm{c}_{\prime}}{\mathrm{c}}\quad \mathrm{J}'=\frac{\mathrm{c}'}{\mathrm{c}}$$

seront, en vertu des formules (37), les modules des expressions imaginaires

$$\bar{\mathrm{I}},\quad \bar{\mathrm{I}}',\quad \bar{\mathrm{J}},\quad \bar{\mathrm{J}}',$$

tandis que les arcs réels

$$(41)\qquad i=\mu_{\prime}-\mu,\quad i'=\mu'-\mu,\quad j=\nu_{\prime}-\nu,\quad j'=\nu'-\nu$$

représenteront les arguments de ces mêmes expressions. On aura donc

$$(42)\qquad \begin{cases} \bar{\mathrm{J}}=\mathrm{J}e^{j\sqrt{-1}}, & \bar{\mathrm{J}}'=\mathrm{J}'e^{j'\sqrt{-1}},\\ \bar{\mathrm{I}}=\mathrm{I}e^{i\sqrt{-1}}, & \bar{\mathrm{I}}'=\mathrm{I}'e^{i'\sqrt{-1}}.\end{cases}$$

Ces dernières formules, jointes aux équations (38) et (39), suffiront pour déterminer complètement les valeurs des modules et des arguments de réflexion et de réfraction.

Si l'on compte à partir du plan d'incidence l'azimut du rayon incident, ou réfléchi, ou réfracté, la tangente de cet azimut sera le rapport entre les amplitudes de vibration mesurées dans les deux rayons composants et polarisés, l'un suivant le plan d'incidence, l'autre perpendiculairement à ce plan, tandis que l'anomalie sera la différence entre les paramètres angulaires de ces mêmes rayons composants. Donc alors, dans le rayon incident, ou réfléchi, ou réfracté, la tangente de l'azimut se trouvera représentée, en vertu des notations ci-dessus admises, par le rapport

$$\frac{c}{h},\quad \text{ou}\quad \frac{c_{\prime}}{h_{\prime}},\quad \text{ou}\quad \frac{c'}{h'},$$

et l'anomalie par la différence

$$\nu-\mu,\quad \text{ou}\quad \nu_{\prime}-\mu_{\prime},\quad \text{ou}\quad \nu'-\mu'.$$

Cela posé, la tangente de l'azimut et l'anomalie, mesurées dans le rayon réfléchi ou réfracté, se déduiront aisément de la tangente de l'azimut

et de l'anomalie mesurées dans le rayon incident. On tirera en effet des formules (40) et (41)

$$(43)\qquad \frac{c_{\prime}}{h_{\prime}}=\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{I}}\frac{c}{h},\quad \frac{c'}{h'}=\frac{\mathrm{J}'}{\mathrm{I}'}\frac{c}{h},$$

et

$$(44)\qquad \nu_{\prime}-\mu_{\prime}=(j-i)+(\nu-\mu),\quad \nu'-\mu'=(j'-i')+(\nu-\mu).$$

On doit surtout remarquer le cas où l'anomalie du rayon incident se réduit à zéro, et la tangente de son azimut à l'unité, en sorte que ce rayon soit non seulement doué de la polarisation rectiligne, mais de plus renfermé dans un plan qui forme avec le plan d'incidence un angle égal à la moitié d'un angle droit. Nous appellerons *anomalie* et *azimut de réflexion* ou *de réfraction* ce que deviennent, dans ce cas particulier, l'anomalie et l'azimut du rayon réfléchi ou réfracté. Si l'on désigne par

$$\varpi,\quad \varpi'$$

les azimuts et par

$$\delta,\quad \delta'$$

les anomalies de réflexion et de réfraction; alors, en posant dans les formules (43) et (44)

$$\frac{c}{h}=1,\quad \nu-\mu=0.$$

on en tirera

$$(45)\qquad \begin{cases} \operatorname{tang}\varpi=\dfrac{\mathrm{J}}{\mathrm{I}}, & \operatorname{tang}\varpi'=\dfrac{\mathrm{J}'}{\mathrm{I}'};\\ \delta=j-i, & \delta'=j'-i';\end{cases}$$

et, en vertu de ces dernières, on réduira les équations (43), (44) à la forme

$$(46)\qquad \begin{cases} \dfrac{c_{\prime}}{h_{\prime}}=\dfrac{c}{h}\operatorname{tang}\varpi, & \dfrac{c'}{h'}=\dfrac{c}{h}\operatorname{tang}\varpi,\\ \nu_{\prime}-\mu_{\prime}=\nu-\mu+\delta, & \nu'-\mu'=\nu-\mu+\delta'.\end{cases}$$

Observons encore qu'en vertu des formules (42) et (45) on aura

$$(47)\qquad \frac{\bar{\mathrm{J}}}{\bar{\mathrm{I}}}=\operatorname{tang}\varpi e^{\delta\sqrt{-1}},\quad \frac{\bar{\mathrm{J}}'}{\bar{\mathrm{I}}'}=\operatorname{tang}\varpi' e^{\delta'\sqrt{-1}};$$

et que, pour déterminer à l'aide des formules (47) les valeurs de

$$\varpi, \quad \varpi', \quad \delta, \quad \delta',$$

il suffira d'y substituer les valeurs des rapports

$$\frac{\bar{J}}{\bar{I}}, \quad \frac{\bar{J}'}{\bar{I}'},$$

tirées des équations (39).

Avant de terminer ce paragraphe, nous ferons une remarque importante. Nous avons déjà observé que chacun des rayons incident, réfléchi, réfracté peut être censé résulter de la superposition de deux rayons polarisés rectilignement, dont l'un est renfermé dans le plan d'incidence, et l'autre dans un second plan perpendiculaire au premier. Or, parmi les formules (31), (32), (33) ou (34), (35), (36), ainsi que parmi les formules (37), (38), (39), (40), (41), (42), les unes se rapportent exclusivement aux rayons composants renfermés dans le premier plan, c'est-à-dire dans le plan d'incidence, les autres aux rayons composants renfermés dans le second plan. Il y a plus : les amplitudes de vibration et les paramètres angulaires des rayons renfermés dans l'un de ces plans, entrent uniquement dans les formules relatives à ces rayons. Donc les modifications qu'éprouvent, en vertu de la réflexion ou de la réfraction, les rayons renfermés dans l'un des plans dont il s'agit, sont entièrement indépendantes des modifications qu'éprouvent les rayons renfermés dans l'autre, et de la nature de ces derniers rayons. On peut donc énoncer la proposition suivante :

Théorème. — *Supposons qu'un mouvement simple et par ondes planes rencontre la surface de séparation de deux milieux isotropes, et considérons le rayon incident, dont l'axe aboutit à un point donné de la surface, comme résultant de la superposition de deux rayons plans, l'un renfermé dans le plan d'incidence, l'autre polarisé suivant ce même plan. Ces deux derniers rayons se trouveront réfléchis et réfractés indépendamment l'un de l'autre.*

Nous observerons encore qu'en vertu des équations (38), (39) *et* (42), *jointes aux formules* (18), *les quantités*

$$\mathrm{I} \text{ et } i, \quad \mathrm{J} \text{ et } j,$$

ou

$$\mathrm{I}' \text{ et } i', \quad \mathrm{J}' \text{ et } j',$$

c'est-à-dire les modules et les arguments de réflexion ou de réfraction, relatifs à chacun des rayons composants, dépendent uniquement de l'angle d'incidence τ, *de l'angle de réfraction* τ' *et des deux constantes*

$$\mathrm{f}, \quad \mathrm{f}'.$$

Ces dernières constantes dépendent elles-mêmes, ainsi que les constantes

$$\mathrm{k}, \quad \mathrm{k}',$$

comprises dans les formules (17), *de la nature des deux milieux que l'on considère. Comme on a, d'ailleurs, en vertu des formules* (17),

$$\mathrm{k} \sin\tau = k' \sin\tau',$$

et par suite

$$\frac{\sin\tau}{\sin\tau'} = \frac{\mathrm{k}'}{\mathrm{k}}, \tag{48}$$

l'angle de réfraction sera complètement déterminé quand on connaîtra l'angle d'incidence et le rapport constant

$$\frac{\mathrm{k}'}{\mathrm{k}} = \frac{\mathrm{I}}{\mathrm{I}'},$$

qui s'appelle, comme on sait, l'indice de réfraction. Donc, en définitive, les modules et les arguments de réflexion ou de réfraction, et par suite les amplitudes ainsi que les paramètres angulaires des rayons réfléchis ou réfractés, pourront être considérés comme dépendant uniquement de l'angle d'incidence et des valeurs que prendront les trois constantes

$$\frac{\mathrm{k}'}{\mathrm{k}}, \quad \mathrm{f}, \quad \mathrm{f}'.$$

Les formules établies dans ce paragraphe comprennent, comme cas particulier, celles que Fresnel a données pour représenter les lois de

la réflexion et de la réfraction de la lumière à la première et à la seconde surface des corps transparents, lorsqu'il existe un angle d'incidence pour lequel un rayon simple est toujours après la réflexion complètement polarisé dans le plan d'incidence. Elles montrent aussi les modifications que doivent subir ces mêmes lois, dans la supposition contraire. C'est là en effet ce qui résulte des considérations qui seront développées dans les paragraphes suivants et dans d'autres Mémoires.

§ III. — *Sur les deux espèces de mouvements simples qui, dans un milieu isotrope, peuvent se propager sans s'affaiblir.*

Avant de développer les conséquences des principes établis dans le paragraphe précédent, il sera bon d'examiner de nouveau la nature des mouvements simples qui, dans un système de points matériels homogène et isotrope, peuvent se propager sans s'affaiblir.

D'après ce qui a été dit dans un autre Mémoire, si l'on nomme

$$\xi, \quad \eta, \quad \zeta$$

les déplacements d'une molécule mesurés, au point (x, y, z), parallèlement aux axes coordonnés et rectangulaires des x, y et z, les équations des mouvements infiniment petits d'un milieu homogène et isotrope seront de la forme

$$(1) \quad (D_t^2 - E)\xi = FD_x\upsilon, \qquad (D_t^2 - E)\eta = FD_y\upsilon, \qquad (D_t^2 - E)\zeta = FD_z\upsilon,$$

E, F désignant deux fonctions entières du trinome

$$D_x^2 + D_y^2 + D_z^2,$$

et υ la dilatation du volume, déterminée au point (x, y, z) par la formule

$$(2) \qquad \upsilon = D_x\xi + D_y\eta + D_z\zeta.$$

En d'autres termes, on aura

$$(3) \qquad \begin{cases} (D_t^2 - E)\xi = FD_x(D_x\xi + D_y\eta + D_z\zeta), \\ (D_t^2 - E)\eta = FD_y(D_x\xi + D_y\eta + D_z\zeta), \\ (D_t^2 - E)\zeta = FD_z(D_x\xi + D_y\eta + D_z\zeta). \end{cases}$$

Soit d'ailleurs ϖ le déplacement d'une molécule mesuré parallèlement à un axe fixe quelconque. On tirera des équations (1) et (2), ou, ce qui revient au même, des formules (3), non seulement

$$(4) \qquad [D_t^2 - E - (D_x^2 + D_y^2 + D_z^2)F]\upsilon = 0,$$

mais encore

$$(5) \qquad (D_t^2 - E)[D_t^2 - E - (D_x^2 + D_y^2 + D_z^2)F]\varpi = 0.$$

Soient maintenant

$$\bar{\xi}, \quad \bar{\eta}, \quad \bar{\zeta}$$

les déplacements symboliques d'une molécule. Ces déplacements symboliques, dont les déplacements effectifs

$$\xi, \quad \eta, \quad \zeta$$

représenteront les parties réelles, seront déterminés, dans un mouvement simple (*voir* les pages 179 et 180), par des équations de la forme

$$(6) \qquad \bar{\xi} = Ae^{ux+vy+wz-st}, \qquad \bar{\eta} = Be^{ux+vy+wz-st}, \qquad \bar{\zeta} = Ce^{ux+vy+wz-st},$$

les constantes réelles ou imaginaires

$$u, \quad v, \quad w, \quad s, \quad A, \quad B, \quad C$$

étant assujetties à vérifier l'un des deux systèmes d'équations

$$(7) \qquad s^2 = \mathcal{E}, \qquad uA + vB + wC = 0,$$

$$(8) \qquad s^2 = \mathcal{E} + \mathcal{F}k^2, \qquad \frac{A}{u} = \frac{B}{v} = \frac{C}{w},$$

dans lesquels on représente par k^2 la somme $u^2 + v^2 + v^2$, et par

$$\mathcal{E}, \quad \mathcal{F}$$

ce que deviennent

$$E, \quad F$$

quand on y substitue à D_x, D_y, D_z les lettres u, v, w, par conséquent à

$$D_x^2 + D_y^2 + D_z^2$$

la somme

$$u^2 + v^2 + w^2 = k^2. \tag{9}$$

Lorsque les équations des mouvements infiniment petits du système de molécules deviennent homogènes, E devient proportionnel à $D_x^2 + D_y^2 + D_z^2$, et F se réduit à une quantité constante. On peut donc alors supposer

$$E = \iota(D_x^2 + D_y^2 + D_z^2), \qquad F = \iota f, \tag{10}$$

ι, f désignant deux constantes réelles; et par suite les formules (3), (4), (5) se réduisent à celles-ci :

$$\left\{\begin{aligned} &[D_t^2 - \iota(D_x^2 + D_y^2 + D_z^2)]\xi = \iota f D_x \upsilon, \\ &[D_t^2 - \iota(D_x^2 + D_y^2 + D_z^2)]\eta = \iota f D_y \upsilon, \\ &[D_t^2 - \iota(D_x^2 + D_y^2 + D_z^2)]\zeta = \iota f D_z \upsilon; \end{aligned}\right. \tag{11}$$

$$[D_t^2 - \iota(1 + f)(D_x^2 + D_y^2 + D_z^2)]\upsilon = 0; \tag{12}$$

$$[D_t^2 - \iota(D_x^2 + D_y^2 + D_z^2)][D_t^2 - \iota(1 + f)(D_x^2 + D_y^2 + D_z^2)]\upsilon = 0. \tag{13}$$

Alors aussi, les formules (10) entraînent les suivantes :

$$\mathcal{C} = \iota k^2, \qquad \mathcal{F} = \iota f, \tag{14}$$

la première des équations (7) se réduit à

$$s^2 = \iota k^2, \tag{15}$$

et la première des équations (8) à

$$s^2 = \iota(1 + f)k^2. \tag{16}$$

Considérons maintenant un mouvement simple qui, dans un système homogène de molécules, se propage sans s'affaiblir. Alors, dans les équations (6), (7), (8), les constantes imaginaires

$$u, \quad v, \quad w, \quad s$$

devront perdre leurs parties réelles, de manière à se présenter sous les formes

$$u = \mathrm{u}\sqrt{-1}, \qquad v = \mathrm{v}\sqrt{-1}, \qquad w = \mathrm{w}\sqrt{-1}, \qquad s = \mathrm{s}\sqrt{-1}, \tag{17}$$

u, v, w, s désignant des quantités réelles; et l'équation du second plan invariable, c'est-à-dire du plan mené par l'origine parallèlement aux plans des ondes, sera

$$\mathrm{u}x + \mathrm{v}y + \mathrm{w}z = 0. \tag{18}$$

Or, comme, en joignant les formules (6) et (17) à la seconde des équations (7), ou à la seconde des équations (8), on en tire dans le premier cas

$$\mathrm{u}\bar{\xi} + \mathrm{v}\bar{\eta} + \mathrm{w}\bar{\zeta} = 0,$$

par conséquent

$$\mathrm{u}\xi + \mathrm{v}\eta + \mathrm{w}\zeta = 0, \tag{19}$$

et dans le second cas

$$\frac{\bar{\xi}}{\mathrm{u}} = \frac{\bar{\eta}}{\mathrm{v}} = \frac{\bar{\zeta}}{\mathrm{w}},$$

par conséquent

$$\frac{\xi}{\mathrm{u}} = \frac{\eta}{\mathrm{v}} = \frac{\zeta}{\mathrm{w}}, \tag{20}$$

il résulte des formules (19) et (20), comparées à l'équation (18), que les vibrations moléculaires, représentées symboliquement par les équations (6), sont, dans le premier cas, parallèles aux plans des ondes, ou *transversales* par rapport aux rayons simples, et dans le second cas perpendiculaires aux plans de ces ondes, ou *longitudinales*, c'est-à-dire dirigées dans le sens des rayons. Si d'ailleurs on prend

$$\mathrm{k} = \sqrt{\mathrm{u}^2 + \mathrm{v}^2 + \mathrm{w}^2}, \tag{21}$$

et de plus

$$\mathrm{l} = \frac{2\pi}{\mathrm{k}}, \qquad \mathrm{T} = \frac{2\pi}{\mathrm{s}}, \qquad \Omega = \frac{\mathrm{s}}{\mathrm{k}} = \frac{\mathrm{l}}{\mathrm{T}}, \tag{22}$$

l représentera la longueur d'une ondulation, T la durée d'une vibration moléculaire, Ω la vitesse de propagation d'une onde plane; et l'on

pourra supposer, dans la formule (9),

$$k = \mathrm{k}\sqrt{-1}. \tag{23}$$

Cela posé, la première des formules (7) ou (8) établira généralement une relation entre s et k ou, ce qui revient au même, entre l et T, c'est-à-dire entre la longueur d'ondulation et la durée des vibrations moléculaires. Cette relation est précisément celle qui, dans la théorie de la lumière, fournit l'explication et les lois du phénomène de la dispersion (*voir* le Mémoire *Sur la Dispersion* dans les *Nouveaux Exercices de Mathématiques*).

Dans le cas particulier où les équations des mouvements infiniment petits deviennent homogènes, la première des équations (7) ou (8) se trouve remplacée par la formule (15) ou (16), de laquelle on tire, eu égard aux équations (17), (21), (22),

$$s^2 = \iota k^2, \qquad \Omega^2 = \iota$$

ou

$$s^2 = \iota(1 + \mathrm{f})\mathrm{k}^2, \qquad \Omega^2 = \iota(1 + \mathrm{f}).$$

Donc alors la vitesse de propagation des vibrations transversales se réduit à

$$\Omega = \sqrt{\iota} \tag{24}$$

et la vitesse de propagation des vibrations longitudinales à

$$\Omega = \sqrt{\iota(1 + \mathrm{f})}. \tag{25}$$

Ces deux vitesses étant alors indépendantes de la durée des vibrations moléculaires et de la longueur d'ondulation, cette longueur et cette durée sont proportionnelles l'une à l'autre, en vertu de la formule

$$\frac{l}{T} = \Omega,$$

et le phénomène de la dispersion n'a plus lieu. Alors aussi le rapport entre la vitesse de propagation des vibrations longitudinales et la vitesse de propagation des vibrations transversales sera, en vertu des

formules (24) et (25), la racine carrée de

$$1 + \mathrm{f}.$$

Donc ce rapport deviendra nul ou infini, avec la vitesse de propagation des ondes longitudinales, si l'on suppose

$$\mathrm{f} = -1 \tag{26}$$

ou

$$\mathrm{f} = \frac{1}{0}. \tag{27}$$

Dans la première supposition, les formules (11), (12), (13) donneraient

$$\left\{\begin{aligned} &[\mathrm{D}_t^2 - \iota(\mathrm{D}_x^2 + \mathrm{D}_y^2 + \mathrm{D}_z^2)]\xi + \iota \mathrm{D}_x \upsilon = 0, \\ &[\mathrm{D}_t^2 - \iota(\mathrm{D}_x^2 + \mathrm{D}_y^2 + \mathrm{D}_z^2)]\eta + \iota \mathrm{D}_y \upsilon = 0, \\ &[\mathrm{D}_t^2 - \iota(\mathrm{D}_x^2 + \mathrm{D}_y^2 + \mathrm{D}_z^2)]\zeta + \iota \mathrm{D}_z \upsilon = 0, \end{aligned}\right. \tag{28}$$

$$\mathrm{D}_t^2 \upsilon = 0, \tag{29}$$

$$[\mathrm{D}_t^2 - \iota(\mathrm{D}_x^2 + \mathrm{D}_y^2 + \mathrm{D}_z^2)]\mathrm{D}_t^2 \varkappa = 0. \tag{30}$$

Ajoutons que les vibrations transversales disparaîtraient, au moins à de grandes distances des centres d'ébranlement, si la constante ι devenait négative, et les vibrations longitudinales, si le produit $\iota(1 + \mathrm{f})$ devenait négatif.

§ IV. — *Des milieux dont les surfaces de séparation polarisent, suivant le plan d'incidence, les rayons réfléchis sous un certain angle.*

Considérons, comme dans le second paragraphe, deux systèmes de molécules homogènes et isotropes, séparés par une surface plane que nous prendrons pour plan des y, z. Concevons encore qu'un mouvement simple, mais sans changement de densité, se propage dans le premier milieu situé du côté des x négatives, et qu'à l'instant où ce mouvement atteint la surface de séparation, il donne généralement naissance à un seul mouvement simple réfléchi, et à un seul mouve-

ment simple réfracté. Enfin, prenons pour axe des z une droite parallèle aux traces des plans des ondes sur la surface réfléchissante; nommons τ l'angle d'incidence, τ' l'angle de réfraction; et regardons le rayon incident comme résultant de la superposition de deux rayons polarisés rectilignement, l'un suivant le plan d'incidence, l'autre perpendiculairement à ce plan. Ces deux derniers rayons se trouveront réfléchis et réfractés indépendamment l'un de l'autre. Si l'on considère en particulier celui des rayons composants qui se trouve polarisé suivant le plan d'incidence, ou, en d'autres termes, le rayon dans lequel les vibrations des molécules sont parallèles à la surface réfléchissante; si d'ailleurs, pour ce rayon, l'on nomme

$$\mathrm{J} \quad \text{ou} \quad \mathrm{J}'$$

le *module de réflexion* ou *de réfraction*, c'est-à-dire le rapport suivant lequel la réflexion ou la réfraction fait varier l'amplitude des vibrations moléculaires, et

$$j \quad \text{ou} \quad j'$$

l'argument de réflexion ou *de réfraction*, c'est-à-dire l'angle que la réflexion ou la réfraction ajoute au paramètre angulaire; les valeurs des quantités

$$\mathrm{J} \text{ et } j \quad \text{ou} \quad \mathrm{J}' \text{ et } j'$$

se déduiront de l'équation

$$(1) \qquad \mathrm{J}e^{j\sqrt{-1}} = \bar{\mathrm{J}}$$

ou

$$(2) \qquad \mathrm{J}'e^{j'\sqrt{-1}} = \bar{\mathrm{J}}',$$

dans laquelle le *coefficient de réflexion* $\bar{\mathrm{J}}$ ou le *coefficient de réfraction* $\bar{\mathrm{J}}'$ sera déterminé par la formule

$$(3) \qquad \bar{\mathrm{J}} = \frac{\sin(\tau' - \tau)}{\sin(\tau' + \tau)}$$

ou

$$(4) \qquad \bar{\mathrm{J}}' = \frac{2\sin\tau'\cos\tau}{\sin(\tau' + \tau)}.$$

Si, au contraire, on considère celui des rayons composants qui se trouve renfermé dans le plan d'incidence, et si l'on nomme pour ce rayon,

$$\mathrm{I} \text{ et } i \quad \text{ou} \quad \mathrm{I}' \text{ et } i'$$

le module et l'argument de réflexion ou de réfraction, on aura

$$(5) \qquad \mathrm{I}e^{i\sqrt{-1}} = \bar{\mathrm{I}}$$

ou

$$(6) \qquad \mathrm{I}'e^{i'\sqrt{-1}} = \bar{\mathrm{I}}',$$

le coefficient de réflexion $\bar{\mathrm{I}}$ ou le coefficient de réfraction $\bar{\mathrm{I}}'$ étant déterminé par la formule

$$(7) \qquad \bar{\mathrm{I}} = \frac{-(1 + \mathfrak{E}\mathfrak{E}')\cos(\tau + \tau') + (\mathfrak{E} + \mathfrak{E}')\sin(\tau + \tau')\sqrt{-1}}{(1 + \mathfrak{E}\mathfrak{E}')\cos(\tau - \tau') + (\mathfrak{E} + \mathfrak{E}')\sin(\tau - \tau')\sqrt{-1}}\bar{\mathrm{J}},$$

ou

$$(8) \qquad \bar{\mathrm{I}}' = \frac{1 + \mathfrak{E}\mathfrak{E}'}{(1 + \mathfrak{E}\mathfrak{E}')\cos(\tau - \tau') + (\mathfrak{E} + \mathfrak{E}')\sin(\tau - \tau')\sqrt{-1}}\bar{\mathrm{J}}',$$

et les valeurs de $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{E}'$ étant de la forme

$$(9) \qquad \mathfrak{E} = -\left[1 - \frac{1}{(1 + \mathrm{f})\sin^2\tau}\right]^{-\frac{1}{2}}, \qquad \mathfrak{E}' = \left[1 - \frac{1}{(1 + \mathrm{f}')\sin^2\tau'}\right]^{-\frac{1}{2}}.$$

Ajoutons que l'angle de réflexion τ et l'angle de réfraction τ' se trouveront liés l'un à l'autre, conformément à la loi de Descartes, par la formule (48) du paragraphe II, ou, ce qui revient au même, par la suivante :

$$(10) \qquad \frac{\sin\tau}{\sin\tau'} = \theta,$$

θ désignant l'*indice de réfraction*, dont la valeur sera

$$(11) \qquad \theta = \frac{\mathrm{k}'}{\mathrm{k}}.$$

Dans les formules qui précèdent, les trois constantes réelles

$$\theta, \quad \mathrm{f}, \quad \mathrm{f}'$$

dépendent de la nature des deux systèmes de molécules proposés.

Pour que la réflexion fasse disparaître le rayon polarisé suivant le plan d'incidence, ou le rayon polarisé perpendiculairement à ce plan, il est nécessaire et il suffit que, dans ce rayon, la demi-amplitude des vibrations moléculaires se réduise à zéro après réflexion et, par suite, que le module de réflexion

$$J \quad \text{ou} \quad I$$

s'évanouisse avec le coefficient de réflexion

$$\bar{J} \quad \text{ou} \quad \bar{I}.$$

Pour que l'un de ces mêmes rayons ne se trouve point modifié par la réfraction, il est nécessaire et il suffit que l'amplitude des vibrations et le paramètre angulaire, ou du moins le sinus et le cosinus de ce paramètre, restent les mêmes avant et après la réfraction; par conséquent, il est nécessaire et il suffit que le module de réfraction

$$J' \quad \text{ou} \quad I$$

se réduise à l'unité, et l'argument de réfraction

$$j' \quad \text{ou} \quad i'$$

à zéro ou à un multiple de circonférence 2π. Au reste cette double condition peut être remplacée par une seule, savoir que le coefficient de réfraction

$$\bar{J}' \quad \text{ou} \quad \bar{I}'$$

soit équivalent à l'unité.

Lorsqu'on suppose l'indice de réfraction réduit à l'unité, c'est-à-dire lorsqu'on a

$$\theta = 1, \tag{12}$$

et par suite

$$k' = k,$$

la formule (10) donne

$$\tau' = \tau; \tag{13}$$

et alors, le coefficient de réflexion

$$\bar{J} \quad \text{ou} \quad \bar{I}$$

se réduisant à zéro, en vertu de la formule (3) ou (7), on voit complètement disparaître le rayon réfléchi. Alors aussi le coefficient de réfraction

$$\bar{J}' \quad \text{ou} \quad \bar{I}'$$

se réduit à l'unité, en vertu de la formule (4) ou (8), et par suite le rayon réfracté ne diffère point du rayon incident. La supposition que nous venons de faire comprend évidemment le cas où les deux systèmes proposés seraient de même nature. Dans ce cas, on aurait non seulement

$$k' = k,$$

mais encore

$$f' = f;$$

et, puisque les deux systèmes proposés pourraient être considérés comme n'en formant plus qu'un seul, il serait tout naturel que le rayon réfléchi disparût, et que le rayon incident ne fût pas altéré par la réfraction.

Si la condition (12) n'est pas remplie, la condition (13) ne le sera pas non plus, à moins que τ ne s'évanouisse, et par suite l'équation (3) fournira généralement pour le coefficient de réflexion $\bar{J}$ une valeur différente de zéro. On ne doit pas même excepter le cas où l'angle τ s'évanouirait, attendu que, dans ce cas, on tirerait des formules (3) et (10)

$$\frac{\tau}{\tau'} = 0, \qquad \bar{J} = \frac{\tau' - \tau}{\tau' + \tau} = \frac{1-\theta}{1+\theta}. \tag{14}$$

Donc, lorsque l'indice de réfraction θ diffère de l'unité, un rayon incident, polarisé suivant le plan d'incidence, se trouve toujours réfléchi par la surface de séparation des deux milieux. S'agit-il au contraire d'un rayon incident renfermé dans le plan d'incidence ? Il ne pourra disparaître après la réflexion que pour des valeurs de

$$f, \quad f', \quad \tau$$

propres à faire évanouir le coefficient de réflexion $\bar{I}$, et par conséquent

à vérifier l'équation

$$(1+\mathfrak{C}\mathfrak{C}')\cos(\tau+\tau')+(\mathfrak{C}+\mathfrak{C}')\sin(\tau+\tau')\sqrt{-1}=0,$$

de laquelle on tire

$$(15)\qquad (1+\mathfrak{C}\mathfrak{C}')\cos(\tau+\tau')=0,\qquad (\mathfrak{C}+\mathfrak{C}')\sin(\tau+\tau')=0.$$

Il y a plus : comme des deux rapports

$$\frac{\mathfrak{C}+\mathfrak{C}'}{1+\mathfrak{C}\mathfrak{C}'},\qquad \frac{1+\mathfrak{C}\mathfrak{C}'}{\mathfrak{C}+\mathfrak{C}'}$$

l'un ne peut devenir infini sans que l'autre s'évanouisse, il est clair que, pour chaque valeur de τ, l'un d'eux, au moins, conservera une valeur finie; et par suite l'expression imaginaire $\bar{\mathrm{I}}$, qui, en vertu de l'équation (7), peut être présentée à volonté sous l'une ou l'autre des formes

$$\bar{\mathrm{I}}=\frac{-\cos(\tau+\tau')+\dfrac{\mathfrak{C}+\mathfrak{C}'}{1+\mathfrak{C}\mathfrak{C}'}\sin(\tau+\tau')\sqrt{-1}}{\cos(\tau-\tau')+\dfrac{\mathfrak{C}+\mathfrak{C}'}{1+\mathfrak{C}\mathfrak{C}'}\sin(\tau-\tau')\sqrt{-1}}\bar{\mathrm{J}},$$

$$\bar{\mathrm{I}}=\frac{-\dfrac{1+\mathfrak{C}\mathfrak{C}'}{\mathfrak{C}+\mathfrak{C}'}\cos(\tau+\tau')+\sin(\tau+\tau')\sqrt{-1}}{\dfrac{1+\mathfrak{C}\mathfrak{C}'}{\mathfrak{C}+\mathfrak{C}'}\cos(\tau-\tau')+\sin(\tau-\tau')\sqrt{-1}}\bar{\mathrm{J}},$$

ne pourra s'évanouir, sans que τ, τ' vérifient l'une des deux conditions

$$(16)\qquad \cos(\tau+\tau')=0,\qquad \sin(\tau+\tau')=0.$$

D'ailleurs, θ étant différent de l'unité, $\bar{\mathrm{I}}$ ne se réduirait point à zéro si l'on supposait

$$\sin(\tau+\tau')=0.$$

Car de cette supposition, jointe à la formule (10), on conclurait

$$\sin\tau'=\pm\sin\tau,\qquad (1\pm\theta)\sin\tau=0,\qquad \sin\tau=0,\qquad \tau=\tau'=0,$$

et par suite

$$\mathfrak{C}=\mathfrak{C}'=0,\qquad \bar{\mathrm{I}}=-\bar{\mathrm{J}}=\frac{\theta-1}{\theta+1}.$$

Donc, si la condition (12) n'est pas remplie, les angles τ, τ' vérifieront, non la seconde, mais la première des formules (16), de laquelle on tirera

$$(17)\qquad \tau+\tau'=\frac{\pi}{2},$$

tandis que la seconde des équations (15) donnera

$$\mathfrak{C}+\mathfrak{C}'=0,$$

ou, ce qui revient au même, eu égard aux formules (9) et (10),

$$(18)\qquad \theta^2=\frac{1+\mathfrak{f}'}{1+\mathfrak{f}},$$

et, en vertu de la formule (11),

$$(19)\qquad \frac{\mathfrak{k}^2}{1+\mathfrak{f}}=\frac{\mathfrak{k}'^2}{1+\mathfrak{f}'}.$$

La condition (17) peut toujours être remplie pour une certaine valeur de τ, que l'on déduira sans peine des formules (17) et (10), en vertu desquelles on aura non seulement

$$\sin\tau'=\cos\tau,$$

mais encore

$$(20)\qquad \operatorname{tang}\tau=\theta.$$

On peut remarquer d'ailleurs qu'au moment où l'angle d'incidence τ vérifiera la formule (20), l'angle

$$\pi-\tau-\tau',$$

compris entre les rayons incident et réfracté, deviendra précisément égal à $\frac{\pi}{2}$. Donc la formule (17) sera vérifiée au moment où le rayon réfracté deviendra perpendiculaire au rayon incident.

Quant à la condition (19), elle peut être ou n'être pas remplie suivant la nature des deux systèmes. Si elle se trouve effectivement vérifiée, alors, sous l'incidence τ déterminée par la formule (20), un rayon, renfermé dans le plan d'incidence et polarisé perpendiculai-

rement à ce plan, disparaîtra toujours après la réflexion, et par suite un rayon incident quelconque sera transformé par la réflexion en un rayon complètement polarisé suivant le plan d'incidence. Pour cette raison, l'on nomme, dans le cas dont il s'agit, *angle de polarisation complète*, ou simplement *angle de polarisation*, l'angle τ déterminé par la formule (20). Si l'on désigne par φ ce même angle, on aura, en vertu de la formule (20),

$$\varphi = \operatorname{arc\,tang}\theta. \tag{21}$$

Lorsque la condition (19) se vérifie, alors

$$\mathfrak{E},\quad \mathfrak{E}'$$

étant nuls, les équations (7) et (8) se réduisent aux suivantes:

$$\bar{\mathrm{I}} = -\frac{\cos(\tau+\tau')}{\cos(\tau-\tau')}\bar{\mathrm{J}}, \tag{22}$$

$$\bar{\mathrm{I}}' = \frac{1}{\cos(\tau-\tau')}\bar{\mathrm{J}}', \tag{23}$$

Alors aussi les modules et les arguments de réflexion ou de réfraction sont donnés immédiatement par les formules (1) et (2) jointes aux formules (3), (4), (22) et (23). Seulement il convient ici de distinguer deux cas différents, savoir: le cas où, l'indice de réfraction θ étant supérieur à l'unité, on a, par suite, en vertu de la formule (10),

$$\tau > \tau',$$

et le cas où, l'indice de réfraction θ étant inférieur à l'unité, on a, par suite, en vertu de la formule (10),

$$\tau < \tau'.$$

Or, supposons d'abord

$$\theta > 1, \qquad \tau > \tau'. \tag{24}$$

Dans ce cas, en vertu de la formule (1), jointe aux équations (3) et (22), le module et l'argument de réflexion pourront être réduits,

pour le rayon polarisé suivant le plan d'incidence, aux deux quantités

$$\mathrm{J} = \frac{\sin(\tau-\tau')}{\sin(\tau+\tau')}, \qquad j = \pi, \tag{25}$$

et, pour le rayon renfermé dans le plan d'incidence: 1° lorsque τ sera compris entre les limites o, φ, aux deux quantités

$$\mathrm{I} = \frac{\operatorname{tang}(\tau-\tau')}{\operatorname{tang}(\tau+\tau')}, \qquad i = 0; \tag{26}$$

2° lorsque τ surpassera l'angle φ, aux deux quantités

$$\mathrm{I} = \frac{\operatorname{tang}(\tau-\tau')}{\operatorname{tang}(\pi-\tau-\tau')}, \qquad i = \pi. \tag{27}$$

Considérons maintenant le cas où l'on aurait

$$\theta < 1, \qquad \tau < \tau'. \tag{28}$$

Dans ce cas, le module et l'argument de réflexion pourront être réduits, pour le rayon polarisé suivant le plan d'incidence, aux deux quantités

$$\mathrm{J} = \frac{\sin(\tau'-\tau)}{\sin(\tau'+\tau)}, \qquad j = 0 \tag{29}$$

et, pour le rayon renfermé dans le plan d'incidence: 1° lorsque τ sera compris entre les limites o, φ, aux deux quantités

$$\mathrm{I} = \frac{\operatorname{tang}(\tau'-\tau)}{\operatorname{tang}(\tau'+\tau)}, \qquad i = \pi; \tag{30}$$

2° lorsque τ surpassera l'angle φ, aux deux quantités

$$\mathrm{I} = \frac{\operatorname{tang}(\tau'-\tau)}{\operatorname{tang}(\pi-\tau-\tau')}, \qquad i = 0. \tag{31}$$

Dans l'un et l'autre cas, en vertu de la formule (2), jointe aux équations (4) et (23), le module et l'argument de réfraction pourront être réduits, pour le rayon polarisé suivant le plan d'incidence, aux deux quantités

$$\mathrm{J}' = \frac{2\sin\tau'\cos\tau}{\sin(\tau+\tau')}, \qquad j' = 0 \tag{32}$$

et, pour le rayon renfermé dans le plan d'incidence, aux deux quantités

$$(33)\qquad I' = \frac{2\sin\tau'\cos\tau}{\sin(\tau+\tau')\cos(\tau-\tau')}, \qquad i' = 0.$$

On peut observer que, dans les formules précédentes, l'argument de réfraction se réduit toujours à zéro. Donc, si, dans un rayon incident polarisé suivant le plan d'incidence ou perpendiculairement à ce plan, on considère un nœud quelconque de première ou de seconde espèce, à l'instant où ce nœud, en vertu de son mouvement de propagation, atteindra la surface réfringente, il passera immédiatement, sans changer d'espèce, dans le rayon réfracté. Il passera aussi, sans changer d'espèce, dans le rayon réfléchi si, l'indice de réfraction étant supérieur à l'unité, le rayon incident est polarisé suivant le plan d'incidence et tombe sur la surface réfléchissante, sous une incidence inférieure à l'angle de polarisation complète, ou si, ces deux conditions n'étant pas simultanément remplies, l'indice de réfraction devient supérieur à l'unité. Dans les autres hypothèses, l'argument de réflexion se réduisant à la demi-circonférence ou au nombre π, on peut affirmer qu'à l'instant où un nœud du rayon incident atteindra la surface réfléchissante, il changera d'espèce en passant dans le rayon réfléchi. C'est au reste ce que l'on peut encore exprimer en disant qu'alors un nœud d'espèce donnée se trouvera déplacé par la réflexion, et transporté en avant de la position qu'il occupait, à une distance égale à la moitié de la longueur d'une ondulation.

Nous ajouterons que, pour passer des formules (25), (26), (27), qui supposent $\theta > 1$, aux formules (29), (30), (31), qui supposent $\theta < 1$, il suffit évidemment d'écrire, dans les valeurs des modules de réflexion I et J,

$$\tau' - \tau \quad \text{au lieu de} \quad \tau - \tau',$$

et de faire croître ou diminuer les arguments de réflexion i et j d'un angle égal à la demi-circonférence π.

Les modules et les arguments de réflexion ou de réfraction étant déterminés comme ci-dessus, les azimuts

$$\varpi, \quad \varpi'$$

et les anomalies

$$\delta, \quad \delta'$$

de réflexion ou de réfraction, se déduiront immédiatement (*voir* la page 291) des formules

$$(34)\qquad \operatorname{tang}\varpi = \frac{J}{I}, \qquad \operatorname{tang}\varpi' = \frac{J'}{I'},$$

$$(35)\qquad \delta = j - i, \qquad \delta' = j' - i',$$

ou, ce qui revient au même, des formules

$$(36)\qquad \operatorname{tang}\varpi\, e^{\delta\sqrt{-1}} = \frac{\bar{J}}{\bar{I}}, \qquad \operatorname{tang}\varpi'\, e^{\delta'\sqrt{-1}} = \frac{\bar{J}'}{\bar{I}'}.$$

De ces dernières, jointes aux formules (22), (23), on tirera

$$(37)\qquad \operatorname{tang}\varpi\, e^{\delta\sqrt{-1}} = -\frac{\cos(\tau-\tau')}{\cos(\tau+\tau')},$$

$$(38)\qquad \operatorname{tang}\varpi'\, e^{\delta'\sqrt{-1}} = \cos(\tau-\tau').$$

Or on vérifiera la formule (37): 1° lorsque l'angle d'incidence τ sera compris entre les limites 0, φ, en supposant

$$(39)\qquad \operatorname{tang}\varpi = \frac{\cos(\tau-\tau')}{\cos(\tau+\tau')}, \qquad \delta = \pm\pi;$$

2° lorsque l'angle d'incidence τ surpassera l'angle de polarisation φ, en supposant

$$(40)\qquad \operatorname{tang}\varpi = \frac{\cos(\tau-\tau')}{\cos(\pi-\tau-\tau')}, \qquad \delta = 0.$$

Quant à la formule (38), on la vérifiera, dans tous les cas, en prenant

$$(41)\qquad \operatorname{tang}\varpi' = \cos(\tau-\tau'), \qquad \delta' = 0.$$

Ainsi, *l'anomalie de réfraction δ' pourra toujours être censée réduite à zéro*, et *l'anomalie de réflexion δ pourra être censée réduite à zéro ou à π, suivant que l'angle d'incidence sera supérieur ou inférieur à l'angle de*

polarisation. Il en résulte qu'*un rayon plan, mais polarisé suivant un plan quelconque, sera encore doué de la polarisation rectiligne, lorsqu'il aura été réfléchi ou réfracté par la surface de séparation des deux milieux que l'on considère.* Ajoutons qu'en vertu des formules (41) et (39) ou (40), *les azimuts de réfraction et de réflexion,* ϖ' *et* ϖ, *offriront des tangentes respectivement égales, l'une au cosinus de la différence entre les angles d'incidence et de réfraction, l'autre à la valeur numérique du rapport de ce cosinus au cosinus de la somme des mêmes angles.* La détermination de ces azimuts fera connaître immédiatement les variations que la réfraction et la réflexion occasionnent dans l'azimut du rayon incident, ou, si celui-ci est doué de la polarisation rectiligne, ce qu'on nomme le *mouvement du plan de polarisation.*

Une remarque importante à faire, c'est que, dans le cas où l'indice de réfraction deviendra inférieur à l'unité, l'équation (10), ou

$$\sin\tau' = \frac{\sin\tau}{\theta}, \tag{42}$$

ne pourra fournir une valeur réelle de τ' si l'angle d'incidence τ n'a pas une valeur inférieure à celle que détermine la formule

$$\sin\tau = \theta. \tag{43}$$

Nommons ψ cette dernière valeur, et prenons en conséquence

$$\psi = \operatorname{arc}\sin\theta. \tag{44}$$

Pour que les formules ci-dessus établies soient applicables, il faudra que l'on ait

$$\tau < \psi. \tag{45}$$

Suivant que la condition (45) sera ou ne sera pas remplie, le mouvement incident pourra ou non donner naissance à un mouvement réfracté qui se propagera dans le second milieu sans s'affaiblir. Le rayon simple, correspondant à ce mouvement réfracté, sera donc un rayon réfracté qui pourra ou non se propager dans le second milieu sans s'affaiblir, suivant que l'angle d'incidence sera inférieur ou supérieur

à la limite ψ. Ce rayon réfracté, qui ne subsistera que pour certaines incidences, du moins à une grande distance de la surface réfléchissante, est ce que nous nommons le *rayon émergent.* L'angle ψ, ou la limite que ne peut dépasser l'angle d'incidence sans que le rayon émergent vienne à s'éteindre, sera l'*angle d'émersion.* Cet angle surpasse nécessairement l'angle de polarisation auquel répond toujours une valeur réelle de τ', donnée par la formule (17), savoir:

$$\tau' = \frac{\pi}{2} - \varphi.$$

C'est d'ailleurs ce que l'on démontrera sans peine à l'aide des formules (21) et (44), desquelles on tire

$$\operatorname{tang}\varphi = \theta, \qquad \operatorname{tang}\psi = \frac{\theta}{\sqrt{1-\theta^2}} > \operatorname{tang}\varphi,$$

et par suite

$$\psi > \varphi.$$

Les formules que nous avons établies dans ce paragraphe, en supposant la condition (19) vérifiée, ne diffèrent pas au fond de celles que Fresnel a données pour représenter les lois de la réflexion et de la réfraction des rayons lumineux à la première et à la seconde surface des corps transparents. La formule (20) ou (21) fournit immédiatement la loi découverte par M. Brewster, et suivant laquelle l'*angle de polarisation complète des rayons lumineux, réfléchis par la surface de la séparation de deux milieux transparents et isophanes, a généralement pour tangente l'indice de réfraction.* La détermination des quantités

$$J, \quad I, \quad J', \quad I',$$

c'est-à-dire des modules de réflexion et de réfraction, conduit, comme on le sait, et comme nous l'expliquerons dans un autre Mémoire, à la détermination de l'intensité de la lumière dans les rayons réfléchis et réfractés. Enfin, dans la réflexion et la réfraction des rayons lumineux doués de la polarisation rectiligne, le mouvement du plan de polarisation, déterminé à l'aide des formules (39) ou (40), et (41), s'accorde d'une manière très remarquable avec les nombreuses observations

relatives à ce plan, et publiées par divers physiciens, surtout par Fresnel et par M. Brewster.

Dans les diverses applications que l'on peut faire des formules ci-dessus établies, il importe de ne jamais perdre de vue la signification des quantités qu'elles renferment. On devra se rappeler en particulier que le module de réflexion

$$\mathrm{I} \quad \text{ou} \quad \mathrm{J}$$

représente le rapport

$$\frac{\mathrm{h}_{,}}{\mathrm{h}} \quad \text{ou} \quad \frac{\mathrm{c}_{,}}{\mathrm{c}}$$

entre les amplitudes des vibrations moléculaires, mesurées dans les rayons réfléchi et incident, qui se trouvent polarisés ou suivant le plan d'incidence, ou perpendiculairement à ce plan. On devra se rappeler encore que l'argument de réflexion

$$i \quad \text{ou} \quad j$$

représente la différence

$$\mu_{,} - \mu \quad \text{ou} \quad \nu_{,} - \nu$$

entre les paramètres angulaires, mesurés dans ces mêmes rayons. Cela posé, on conclura immédiatement des formules (34), (35) du second paragraphe, qu'en chaque point de la surface réfléchissante les déplacements moléculaires

$$\varkappa \text{ et } \varkappa_{,} \quad \text{ou} \quad \zeta \text{ et } \zeta_{,}$$

sont, dans les rayons incident et réfléchi, affectés du même signe quand on a

$$(46) \qquad i = 0 \quad \text{ou} \quad j = 0,$$

et affectés de signes contraires quand on a

$$(47) \qquad i = \pi \quad \text{ou} \quad j = \pi.$$

D'ailleurs les déplacements

$$\zeta, \ \zeta_{,}$$

mesurés perpendiculairement au plan d'incidence, seront affectés du

même signe ou de signes contraires, suivant qu'ils se compteront dans le même sens ou en sens contraires, à partir de ce plan. Quant aux déplacements

$$\varkappa, \ \varkappa_{,}$$

mesurés dans le plan d'incidence, et liés aux déplacements

$$\xi, \ \xi_{,}$$

(*voir* la page 285) par les deux formules

$$\xi = \varkappa \sin\tau, \qquad \xi_{,} = \varkappa_{,} \sin\tau,$$

ils seront, comme ξ et $\xi_{,}$, affectés du même signe ou de signes contraires, suivant qu'ils feront passer les molécules primitivement situées en un point de la surface réfléchissante, d'un même côté de cette surface ou de deux côtés opposés. Il y a plus : comme, en adoptant les notations du second paragraphe, on trouvera

$$\eta = \varkappa \cos\tau, \qquad \eta_{,} = -\varkappa_{,} \cos\tau,$$

il est clair que les déplacements

$$\varkappa, \ \varkappa_{,}$$

seront encore affectés du même signe, ou de signes contraires, suivant que les déplacements

$$\eta, \ \eta_{,},$$

mesurés dans le plan d'incidence à partir d'une droite normale à la surface réfléchissante, se compteront en sens opposés ou dans le même sens. En conséquence, il deviendra facile, dans tous les cas, d'interpréter celles des formules (25), (26), (27), (29), (30), (31) qui renferment les arguments de réflexion

$$i \quad \text{ou} \quad j.$$

Ainsi, en particulier, on conclura des formules (25) et (29) que, dans les rayons incident et réfléchi, les déplacements moléculaires, mesurés sur la surface réfléchissante perpendiculairement au plan d'incidence,

se compteront de deux côtés opposés à partir de ce plan, si l'indice de réfraction θ surpasse l'unité, et du même côté si l'on a $\theta < 1$. Pareillement on conclura des formules (26) et (27), ou (30) et (31), que, dans les rayons incident et réfléchi, les déplacements moléculaires mesurés perpendiculairement à la surface réfléchissante, pour une molécule située sur la surface, se compteront de deux côtés opposés à partir de cette même surface, si l'on suppose

$$\theta > 1, \quad \tau > \varphi \quad \text{ou} \quad \theta < 1, \quad \tau < \varphi,$$

et du même côté si l'on suppose

$$\theta > 1, \quad \tau < \varphi \quad \text{ou} \quad \theta < 1, \quad \tau > \varphi.$$

Au contraire les déplacements moléculaires mesurés dans le plan d'incidence et sur la surface réfléchissante, à partir d'une droite normale à cette surface, se compteront du même côté, pour les rayons incident et réfléchi, dans les deux premières suppositions, et de côtés opposés dans les deux dernières.

Observons maintenant qu'on devra réduire à zéro les déplacements mesurés sur la normale à la surface réfléchissante, si le rayon incident devient perpendiculaire à cette surface, et les déplacements mesurés sur la surface dans le plan d'incidence, si le rayon incident rase la surface dont il s'agit. De cette observation, jointes aux conclusions précédentes, il résulte immédiatement que les déplacements moléculaires, mesurés sur un axe quelconque, se compteront en sens opposés, dans les rayons incident et réfléchi, si, l'indice de réfraction étant supérieur à l'unité, le rayon incident devient perpendiculaire à la surface réfléchissante ou rase cette surface; tandis qu'ils devront se compter dans le même sens, si, le rayon incident étant perpendiculaire à la surface, l'indice de réfraction devient inférieur à l'unité.

Observons encore que, si le rayon incident est perpendiculaire à la surface réfléchissante, on pourra prendre pour plan d'incidence un plan quelconque mené arbitrairement par l'axe du rayon. Si d'ailleurs ce rayon est doué de la polarisation rectiligne, alors, en vertu des

principes que nous venons d'établir, les déplacements absolus d'une molécule, mesurés sur la surface réfléchissante, d'une part dans ce rayon, d'autre part dans le rayon réfléchi, se compteront en sens opposés ou dans le même sens, suivant que l'on aura

$$\theta > 1 \quad \text{ou} \quad \theta < 1.$$

Si l'on suppose en particulier

$$\theta > 1,$$

les déplacements absolus dont il s'agit se compteront en sens opposés, et cette circonstance pourra être indiquée, ou par la seule formule

$$i = 0,$$

si l'on prend pour plan d'incidence le plan même du rayon, ou par la seule formule

$$j = \pi,$$

si l'on prend pour plan d'incidence le plan de polarisation. La différence qui existe entre les arguments de réflexion i et j, déterminés par ces deux formules, peut sembler d'autant plus singulière au premier abord que, dans l'hypothèse admise, on reste complètement libre de prendre pour plan d'incidence un plan parallèle ou un plan perpendiculaire aux directions des vibrations des molécules. Toutefois, pour se rendre compte de cette différence, et de la réduction de i à zéro, il suffit de considérer le cas où le rayon incident, polarisé dans le plan d'incidence, serait, non plus rigoureusement, mais sensiblement perpendiculaire à la surface réfléchissante. En effet, dans ce cas, les paramètres angulaires

$$\mu, \quad \mu_{,},$$

liés à i par la formule

$$i = \mu_{,} - \mu,$$

se rapporteront aux déplacements

$$\xi, \quad \xi_{,},$$

mesurés parallèlement à la surface, et, comme, en vertu des deux for-

mules

$$\xi = \varkappa \sin\tau, \qquad \xi_{,} = \varkappa_{,} \sin\tau,$$
$$\eta = \varkappa \cos\tau, \qquad \eta_{,} = -\varkappa_{,} \cos\tau,$$

on aura

$$\frac{\xi_{,}}{\xi} = -\frac{\eta_{,}}{\eta},$$

il est clair que les déplacements

$$\xi, \quad \xi_{,}$$

seront affectés du même signe si les déplacements

$$\eta, \quad \eta_{,}$$

sont affectés de signes contraires. Or cette dernière condition sera certainement remplie si l'on a

$$\theta > 1;$$

et alors, en supposant le rayon incident sensiblement perpendiculaire à la surface réfléchissante, on trouvera, pour chaque point de cette surface,

$$\frac{\eta_{,}}{\eta} < 0, \qquad \frac{\zeta_{,}}{\zeta} < 0, \qquad j = \pi.$$

Donc alors aussi l'on aura, en chaque point de la surface réfléchissante,

$$\frac{\xi_{,}}{\xi} > 0 \qquad \text{et par suite} \qquad i = 0.$$

Les arguments de réflexion j et i étant connus pour les rayons polarisés suivant le plan d'incidence et perpendiculairement à ce plan, on pourra en déduire immédiatement, en vertu de la première des formules (35), l'anomalie de réflexion, telle que la donne la seconde des équations (39) ou (40). Cette anomalie pouvant d'ailleurs être augmentée ou diminuée d'un multiple de la circonférence 2π, on peut, lorsqu'elle est représentée par π, la représenter aussi par

$$\pi - 2\pi = -\pi;$$

et il en résulte que, dans la seconde des formules (39), on peut indifféremment réduire le double signe soit au signe $+$, soit au signe $-$.

Si du rayon réfléchi l'on passe au rayon réfracté, alors aux formules (46) ou (47) on devra substituer la seconde des formules (32) ou (33), savoir :

$$i' = 0 \qquad \text{ou} \qquad j' = 0. \tag{48}$$

Or il résulte de ces dernières qu'en chaque point de la surface réfringente les déplacements d'une molécule, mesurés dans le plan d'incidence ou perpendiculairement à ce plan, se compteront dans le même sens, soit avant, soit après la réfraction. Par suite, l'anomalie de réfraction sera nulle, comme on en a déjà fait la remarque, et comme l'indique la seconde des formules (41).

Il nous reste à déduire des formules obtenues les valeurs des arguments et des azimuts de réflexion ou de réfraction, pour certaines incidences qui méritent une attention spéciale.

Lorsque le rayon incident sera perpendiculaire à la surface réfléchissante, on pourra en dire autant du rayon réfléchi ou réfracté, et l'on aura

$$\tau = 0, \qquad \tau' = 0, \qquad \frac{\tau}{\tau'} = \frac{\sin\tau}{\sin\tau'} = \theta. \tag{49}$$

Donc alors, en vertu des formules (25), (26) ou (28), (29), on trouvera : 1° en supposant l'indice de réfraction θ supérieur à l'unité,

$$\mathrm{I} = \mathrm{J} = \frac{\theta - 1}{\theta + 1} = \operatorname{tang}\left(\varphi - \frac{\pi}{4}\right); \tag{50}$$

2° en supposant l'indice de réfraction θ inférieur à l'unité,

$$\mathrm{I} = \mathrm{J} = \frac{1 - \theta}{1 + \theta} = \operatorname{tang}\left(\frac{\pi}{4} - \varphi\right); \tag{51}$$

et l'on aura, dans l'une ou l'autre supposition, non seulement, en vertu des formules (32), (33),

$$\mathrm{I}' = \mathrm{J}' = \frac{2}{1 + \theta} = 1 - \operatorname{tang}\left(\varphi - \frac{\pi}{4}\right), \tag{52}$$

mais encore, en vertu des formules (39) ou (40),

$$\text{(53)} \qquad \operatorname{tang}\varpi = 1, \qquad \varpi = \frac{\pi}{4},$$

$$\text{(54)} \qquad \operatorname{tang}\varpi' = 1, \qquad \varpi' = \frac{\pi}{4};$$

en sorte que l'azimut de réflexion ou de réfraction se trouvera réduit à la moitié d'un angle droit. Les formules (50), (51), (52) coïncident avec celles que M. Young a données pour le cas de l'incidence perpendiculaire.

Lorsque l'angle d'incidence sera précisément l'angle de polarisation, l'on aura

$$\text{(55)} \qquad \tau = \varphi, \qquad \tau' = \frac{\pi}{2} - \varphi, \qquad \sin\tau' = \cos\tau, \qquad \cos\tau' = \sin\tau.$$

Donc alors on trouvera : 1° en supposant l'indice de réfraction θ supérieur à l'unité,

$$\text{(56)} \qquad I = 0, \qquad J = \frac{\theta^2 - 1}{\theta^2 + 1} = \sin\left(2\varphi - \frac{\pi}{2}\right) = -\cos 2\varphi;$$

2° en supposant l'indice de réfraction inférieur à l'unité,

$$\text{(57)} \qquad I = 0, \qquad J = \frac{1 - \theta^2}{1 + \theta^2} = \cos 2\varphi,$$

et l'on aura, dans l'une ou l'autre supposition, non seulement

$$\text{(58)} \qquad I' = \frac{1}{\theta} = \cot\varphi, \qquad J' = \frac{2}{1 + \theta^2} = 2\cos^2\varphi,$$

mais encore

$$\text{(59)} \qquad \operatorname{tang}\varpi = \frac{1}{0}, \qquad \varpi = \frac{\pi}{2},$$

$$\text{(60)} \qquad \operatorname{tang}\varpi' = \frac{2\theta}{1 + \theta^2} = \sin 2\varphi.$$

Lorsque, l'indice de réfraction étant inférieur à l'unité, l'angle d'incidence τ sera précisément l'angle d'émersion, l'on aura

$$\text{(61)} \qquad \tau = \psi, \qquad \tau' = \frac{\pi}{2}, \qquad \sin\tau' = 1, \qquad \cos\tau' = 0.$$

Donc alors on tirera des formules (29) et (31)

$$\text{(62)} \qquad I = J = 1,$$

et des formules (32), (33), (34)

$$\text{(63)} \qquad I' = \frac{2}{\theta} = \frac{2}{\sin\psi}, \qquad J' = 2,$$

$$\text{(64)} \qquad \operatorname{tang}\varpi = 1, \qquad \varpi = \frac{\pi}{4},$$

$$\text{(65)} \qquad \operatorname{tang}\varpi' = \theta' = \sin\psi.$$

Enfin, lorsque, l'indice de réfraction θ étant supérieur à l'unité, le rayon incident rasera la surface réfléchissante, on aura

$$\tau = \frac{\pi}{2}, \qquad \sin\tau' = \frac{1}{\theta}.$$

Donc alors les formules (25), (27) entraîneront de nouveau les équations (62) et (64); mais on tirera des formules (32), (33) et (41)

$$\text{(66)} \qquad I' = J' = 0,$$

$$\text{(67)} \qquad \operatorname{tang}\varpi' = \sin\tau' = \frac{1}{\theta} = \cot\varphi.$$