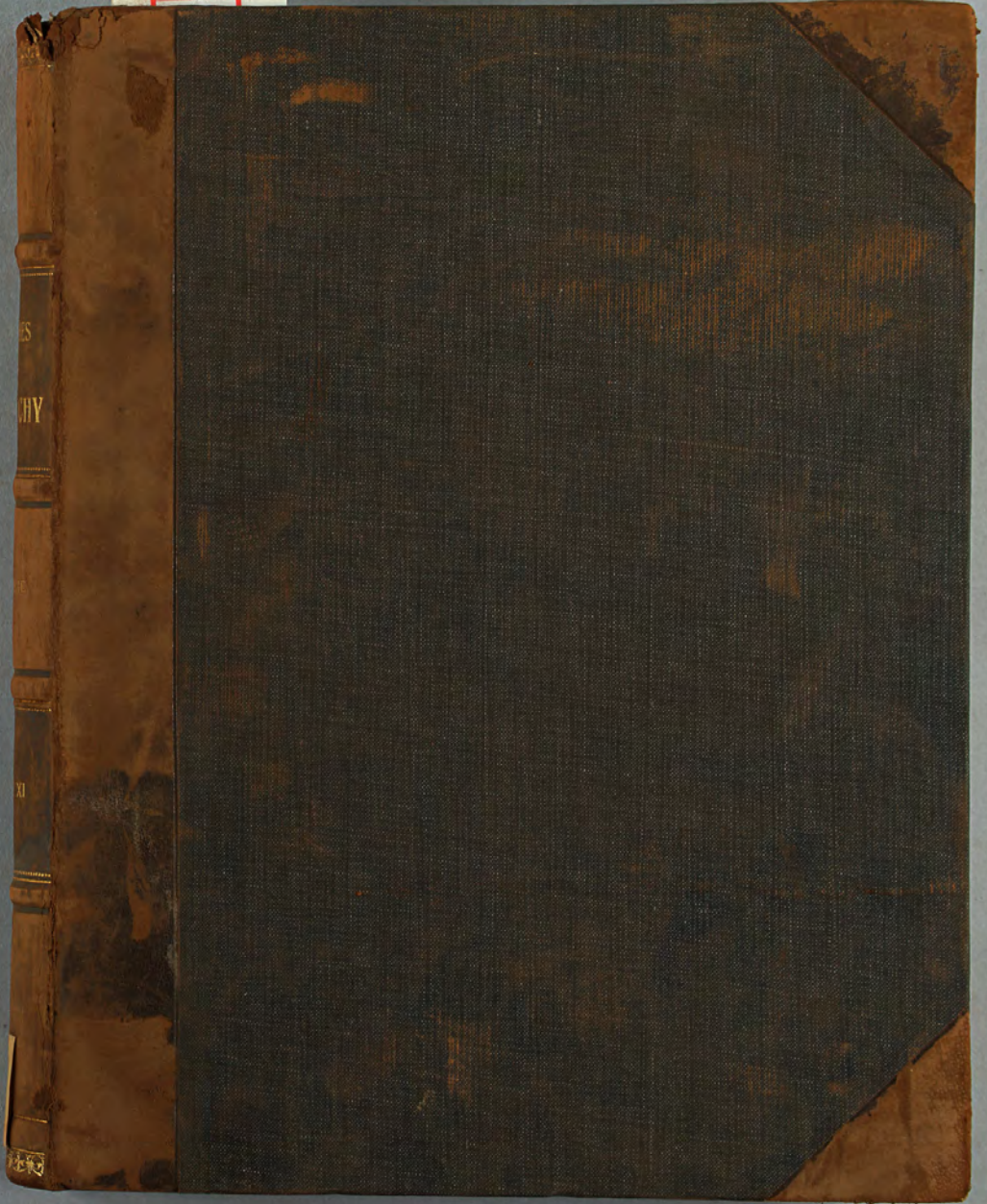


桑本文庫
洋書



物理
08
C
2.2.2

九州帝國大學理學部
8213
物理學教室

桑木文庫
洋書
0162

理學部 洋 透及
022232002002222

九州大學藏書

物
0
3.2



801875

ŒUVRES

COMPLÈTES

D'AUGUSTIN CAUCHY



物
0
2.1

PARIS. — IMPRIMERIE GAUTHIER-VILLARS,
48003 Quai des Grands-Augustins, 55.

ŒUVRES

COMPLÈTES

D'AUGUSTIN CAUCHY

PUBLIÉS SOUS LA DIRECTION SCIENTIFIQUE

DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES

ET SOUS LES AUSPICES

DE M. LE MINISTRE DE L'INSTRUCTION PUBLIQUE.

II^e SÉRIE. — TOME XI.



PARIS,
GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE
DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,
Quai des Grands-Augustins, 55.

MCMXIII



物
0
2.1



SECONDE SÉRIE.

- I. — MÉMOIRES PUBLIÉS DANS DIVERS RECUEILS
AUTRES QUE CEUX DE L'ACADÉMIE.
- II. — OUVRAGES CLASSIQUES.
- III. — MÉMOIRES PUBLIÉS EN CORPS D'OUVRAGE.
- IV. — MÉMOIRES PUBLIÉS SÉPARÉMENT.





物
0
C
2.1

III.

MÉMOIRES

PUBLIÉS EN CORPS D'OUVRAGE.



物
0
C
2.1

EXERCICES D'ANALYSE
ET DE
PHYSIQUE MATHÉMATIQUE

(NOUVEAUX EXERCICES)

TOME I. — PARIS, 1840.

DEUXIÈME ÉDITION

RÉIMPRIMÉE

D'APRÈS LA PREMIÈRE ÉDITION.



物
0
C
2.1

EXERCICES D'ANALYSE

ET DE

PHYSIQUE MATHÉMATIQUE,

PAR LE BARON AUGUSTIN CAUCHY,

Membre de l'Académie des Sciences de Paris, de la Société Italienne, de la Société royale de Londres,
des Académies de Berlin, de Saint-Petersbourg, de Prague, de Stockholm
de Copenhague, de l'Académie Américaine, etc.

—
TOME PREMIER.
—

PARIS,

BACHELIER, IMPRIMEUR-LIBRAIRE

DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE, DU BUREAU DES LONGITUDES, ETC.

QUAI DES AUGUSTINS, N° 55.

—
1840



物

0

0

2.1

EXERCICES D'ANALYSE
ET DE
PHYSIQUE MATHÉMATIQUE.

AVERTISSEMENT.

La bienveillance avec laquelle les géomètres ont accueilli mes anciens et nouveaux *Exercices de Mathématiques*, publiés successivement à Paris et à Prague, ainsi que mes *Résumés analytiques* publiés à Turin, m'encourage à faire paraître un quatrième recueil, dans lequel je traiterai encore des diverses questions relatives soit à l'Analyse pure, soit à la Physique mathématique. Je me propose en particulier d'offrir ici aux Amis des sciences la suite de mes recherches sur les mouvements des systèmes de molécules, et sur la théorie de la lumière; des règles générales sur la convergence des séries suivant lesquelles se développent les fonctions explicites ou implicites; des méthodes générales pour la détermination et la réduction des intégrales définies ou indéfinies, ainsi que pour l'intégration des équations différentielles, et aux différences partielles; enfin de nouvelles applications du *calcul des résidus*, et de celui que, dans quelques Mémoires relatifs à l'Astronomie, j'ai nommé le *calcul des limites*. Un puissant motif de poursuivre mes travaux sur la Mécanique céleste était l'honneur que m'a fait le Bureau des Longitudes, en m'appelant, dans la séance du 13 novembre 1839, à la place précédemment occupée par un savant confrère (M. de Prony) qui jadis parut prendre quelque plaisir à me compter au



物
0
2.

AVERTISSEMENT.

nombre de ses élèves, et plus anciennement par Lagrange lui-même, par cet illustre géomètre qui eut aussi pour moi tant de bontés, et voulut bien guider mes premiers pas dans la carrière des sciences. Je devais redoubler d'efforts pour essayer de répondre de mon mieux à ce témoignage de considération, auquel j'attache d'autant plus de prix que je l'avais moins recherché et me tenais plus à l'écart, pour me livrer, dans le silence du cabinet, à mes études favorites. L'indulgence avec laquelle ont été reçus mes derniers Mémoires prouve que l'on m'a tenu compte de ma bonne volonté. Pour la consolation de ma patrie, comme j'en ai déjà fait ailleurs la remarque, il y a deux sentiments qu'en France on aime à voir profondément gravés dans les cœurs et auxquels, je le sais par expérience, on se plaît à rendre justice; je veux dire : le dévouement à l'infortune et l'amour sincère de la vérité.



MÉMOIRE

SUR LES

MOUVEMENTS INFINIMENT PETITS

D'UN

SYSTÈME DE MOLÉCULES

SOLLICITÉES

PAR DES FORCES D'ATTRACTION OU DE RÉPULSION MUTUELLE.



§ I^{er}. — *Équations d'équilibre et de mouvement d'un système de molécules.*

Considérons un système de molécules sollicitées au mouvement par des forces d'attraction ou de répulsion mutuelle. Soient, au premier instant et dans l'état d'équilibre :

- x, y, z les coordonnées d'une molécule m ,
- $x + x, y + y, z + z$ les coordonnées d'une autre molécule m ,
- r le rayon vecteur mené de la molécule m à la molécule m ;

on aura

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2,$$

et les cosinus des angles formés par le rayon vecteur r avec les demi axes des coordonnées positives, seront respectivement

$$\frac{x}{r}, \frac{y}{r}, \frac{z}{r}.$$

Supposons d'ailleurs que l'attraction ou la répulsion mutuelle des deux masses m, m , étant proportionnelle à ces masses et à une fon-



tion de la distance r , soit représentée, au signe près, par

$$mm f(r),$$

$f(r)$ désignant une quantité positive, lorsque les molécules s'attirent, et négative, lorsqu'elles se repoussent. Les projections algébriques de la force

$$mm f(r)$$

sur les axes coordonnés seront les produits de cette force par les cosinus des angles que forme le rayon vecteur r avec ces axes, et, en conséquence, si l'on fait pour abrégé

$$(2) \quad \frac{f(r)}{r} = f(r),$$

elles se réduiront à

$$m m x f(r), \quad m m y f(r), \quad m m z f(r).$$

Cela posé, les équations d'équilibre de la molécule m seront évidemment

$$(3) \quad \begin{cases} 0 = S[m x f(r)], \\ 0 = S[m y f(r)], \\ 0 = S[m z f(r)], \end{cases}$$

la lettre caractéristique S indiquant une somme de termes semblables entre eux et relatifs aux diverses molécules m du système donné.

Concevons maintenant que les molécules

$$m, m, \dots$$

viennent à se mouvoir. Soient, au bout du temps t ,

$$\xi, \eta, \zeta$$

les déplacements de la molécule m , mesurés parallèlement aux axes coordonnés. Soient d'ailleurs

$$\xi + \Delta\xi, \quad \eta + \Delta\eta, \quad \zeta + \Delta\zeta$$

ce que deviennent ces déplacements, lorsqu'on passe de la molécule m à la molécule m . Les coordonnées de la molécule m , au bout du

temps t , seront

$$x + \xi, \quad y + \eta, \quad z + \zeta,$$

tandis que celles de la molécule m seront

$$x + x + \xi + \Delta\xi, \quad y + y + \eta + \Delta\eta, \quad z + z + \zeta + \Delta\zeta.$$

Soit à cette même époque

$$r + \rho$$

la distance des molécules m, m . La distance

$$r + \rho$$

offrira pour projections algébriques, sur les axes des x, y, z , les différences entre les coordonnées des molécules m, m ; savoir :

$$x + \Delta\xi, \quad y + \Delta\eta, \quad z + \Delta\zeta.$$

On aura en conséquence

$$4) \quad (r + \rho)^2 = (x + \Delta\xi)^2 + (y + \Delta\eta)^2 + (z + \Delta\zeta)^2.$$

Cela posé, pour déduire les équations du mouvement de la molécule m de ses équations d'équilibre, c'est-à-dire des formules (3), il suffira évidemment de remplacer, dans ces formules, les premiers membres par

$$\frac{d^2\xi}{dt^2}, \quad \frac{d^2\eta}{dt^2}, \quad \frac{d^2\zeta}{dt^2},$$

puis de substituer, à la distance

$$r$$

et à ses projections algébriques

$$x, \quad y, \quad z,$$

la distance

$$r + \rho$$

et ses projections algébriques

$$x + \Delta\xi, \quad y + \Delta\eta, \quad z + \Delta\zeta;$$



en opérant ainsi, on trouvera

$$(5) \quad \begin{cases} \frac{d^2\xi}{dt^2} = S[m(x + \Delta\xi)f(r + \rho)], \\ \frac{d^2\eta}{dt^2} = S[m(y + \Delta\eta)f(r + \rho)], \\ \frac{d^2\zeta}{dt^2} = S[m(z + \Delta\zeta)f(r + \rho)]. \end{cases}$$

§ II. — *Équations des mouvements infiniment petits d'un système de molécules.*

Considérons, dans le système de molécules donné, un mouvement vibratoire, en vertu duquel chaque molécule s'écarte très peu de sa position initiale. Si l'on cherche les lois du mouvement, celles du moins qui subsistent quelque petite que soit l'étendue des vibrations moléculaires, alors en regardant les déplacements

$$\xi, \eta, \zeta$$

et leurs différences

$$\Delta\xi, \Delta\eta, \Delta\zeta,$$

comme des quantités infiniment petites du premier ordre, on pourra négliger les carrés et les puissances supérieures, non seulement de ces déplacements et de leurs différences, mais aussi de la quantité ρ , dans les développements des expressions que renferment les formules (4), (5) du premier paragraphe; et l'on pourra encore supposer indifféremment que, des quatre variables indépendantes

$$x, y, z, t,$$

les trois premières représentent ou les coordonnées initiales de la molécule m , ou ses coordonnées courantes qui, en vertu de l'hypothèse admise, différeront très peu des premières. Cela posé, si l'on a égard aux formules (3) du paragraphe I^{er}, les formules (4) et (5) du même paragraphe donneront

$$(1) \quad \rho = \frac{x\Delta\xi + y\Delta\eta + z\Delta\zeta}{r}$$

et

$$(2) \quad \begin{cases} \frac{d^2\xi}{dt^2} = S[mf(r)\Delta\xi] + S\left[m\frac{df(r)}{dr}x\rho\right], \\ \frac{d^2\eta}{dt^2} = S[mf(r)\Delta\eta] + S\left[m\frac{df(r)}{dr}y\rho\right], \\ \frac{d^2\zeta}{dt^2} = S[mf(r)\Delta\zeta] + S\left[m\frac{df(r)}{dr}z\rho\right], \end{cases}$$

ou, ce qui revient au même,

$$(3) \quad \begin{cases} \frac{d^2\xi}{dt^2} = L\xi + R\eta + Q\zeta, \\ \frac{d^2\eta}{dt^2} = R\xi + M\eta + P\zeta, \\ \frac{d^2\zeta}{dt^2} = Q\xi + P\eta + N\zeta, \end{cases}$$

pourvu que, ρ désignant une fonction quelconque des variables x, y, z et

$$\Delta\rho$$

l'accroissement de ρ dans le cas où l'on fait croître

$$x \text{ de } x, \quad y \text{ de } y, \quad z \text{ de } z,$$

on représente, à l'aide des lettres

$$L, M, N, P, Q, R,$$

non pas des quantités, mais des caractéristiques déterminées par les formules

$$\begin{aligned} L &= S\left\{m\left[f(r) + \frac{x^2}{r}\frac{df(r)}{dr}\right]\Delta\rho\right\}, & M &= \dots, & N &= \dots, \\ P &= S\left[m\frac{yz}{r}\frac{df(r)}{dr}\Delta\rho\right], & Q &= \dots, & R &= \dots \end{aligned}$$

Comme d'ailleurs ces diverses formules doivent servir à déterminer les caractéristiques

$$L, M, N, P, Q, R,$$

quelle que soit la fonction de x, y, z désignée par ρ , elles peuvent être,

pour plus de simplicité, présentées sous la forme

$$(4) \quad \begin{cases} L = S \left\{ m \left[f(r) + \frac{x^2}{r} \frac{df(r)}{dr} \right] \Delta \right\}, & M = \dots, & N = \dots, \\ P = S \left[m \frac{yz}{r} \frac{df(r)}{dr} \Delta \right], & Q = \dots, & R = \dots \end{cases}$$

Enfin, si l'on désigne, à l'aide des caractéristiques

$$D_x, D_y, D_z, D_t$$

et de leurs puissances entières, les dérivées qu'on obtient quand on différencie une ou plusieurs fois de suite une fonction des variables indépendantes

$$x, y, z, t,$$

par rapport à ces mêmes variables, les équations (3) pourront s'écrire comme il suit :

$$(5) \quad \begin{cases} (L - D_t^2)\xi + R\eta + Q\zeta = 0, \\ R\xi + (M - D_t^2)\eta + P\zeta = 0, \\ Q\xi + P\eta + (N - D_t^2)\zeta = 0. \end{cases}$$

Pour réduire les équations (5) à la forme d'équations linéaires aux différences partielles, il suffira de développer les différences finies des variables principales

$$\xi, \eta, \zeta$$

en séries ordonnées suivant leurs dérivées des divers ordres. On y parviendra aisément à l'aide de la formule de Taylor, en vertu de laquelle on aura

$$u + \Delta u = e^{x D_x + y D_y + z D_z} u,$$

quelle que soit la fonction de

$$x, y, z$$

désignée par u , et par conséquent

$$(6) \quad 1 + \Delta = e^{x D_x + y D_y + z D_z}$$

$$(7) \quad \Delta = e^{x D_x + y D_y + z D_z} - 1 = x D_x + y D_y + z D_z + \frac{(x D_x + y D_y + z D_z)^2}{2} + \dots$$

Cela posé, dans les équations (5), ramenées à la forme d'équations aux différences partielles, les coefficients des dérivées des variables principales se réduiront toujours à des sommes de l'une des formes

$$(8) \quad S[m x^n y^m z^n f(r)], \quad S \left[m x^n y^m z^n \frac{df(r)}{dr} \right],$$

par conséquent à des sommes dans chacune desquelles la masse m se trouvera multipliée, sous le signe S , par des puissances entières de x, y, z et par une fonction de r .

On pourra regarder la constitution du système donné de molécules comme étant partout la même, si les sommes (8) se réduisent à des quantités constantes, c'est-à-dire à des quantités indépendantes des coordonnées

$$x, y, z$$

de la molécule m . C'est ce qui aura lieu, par exemple, quand le système donné sera un corps homogène, gazeux ou liquide ou cristallisé. Alors les équations des mouvements infiniment petits du système donné, c'est-à-dire les équations (5), pourront être considérées comme des équations linéaires aux différences partielles et à coefficients constants entre les trois variables principales

$$\xi, \eta, \zeta$$

et les quatre variables indépendantes

$$x, y, z, t.$$

De semblables équations sont propres à représenter, par exemple, les mouvements infiniment petits du fluide lumineux dans le vide, ou bien encore les mouvements infiniment petits d'un corps élastique.

§ III. — *Mouvements simples.*

La solution de plusieurs problèmes de Physique mathématique pouvant dépendre de l'intégration des équations (3) du paragraphe pré-



cédent, considérées comme équations linéaires à coefficients constants, nous allons rechercher ici les intégrales de ces équations, en nous bornant pour l'instant aux intégrales qui représentent les mouvements simples, définis comme on le verra ci-après.

Lorsque les sommes (8) du paragraphe II demeurent constantes, alors, pour satisfaire aux équations (5) du même paragraphe, il suffit de supposer les variables principales

$$\xi, \eta, \zeta$$

toutes proportionnelles à une même exponentielle népérienne dont l'exposant soit une fonction linéaire des variables indépendantes

$$x, y, z, t,$$

et de prendre en conséquence

$$(1) \quad \xi = A e^{ux+vy+wz-st}, \quad \eta = B e^{ux+vy+wz-st}, \quad \zeta = C e^{ux+vy+wz-st},$$

u, v, w, s, A, B, C désignant des constantes réelles ou imaginaires convenablement choisies. En effet, si l'on substitue les valeurs précédentes de

$$\xi, \eta, \zeta,$$

dans les équations (5) du second paragraphe, tous les termes seront divisibles par l'exponentielle

$$e^{ux+vy+wz-st},$$

et, après la division effectuée, ces équations seront réduites à d'autres de la forme

$$(2) \quad \begin{cases} (\mathcal{L} - s^2)A + \mathfrak{R}B + \mathfrak{Q}C = 0, \\ \mathfrak{R}A + (\mathfrak{M} - s^2)B + \mathfrak{P}C = 0, \\ \mathfrak{Q}A + \mathfrak{P}B + (\mathfrak{N} - s^2)C = 0, \end{cases}$$

les valeurs des coefficients

$$\mathcal{L}, \mathfrak{M}, \mathfrak{N}, \mathfrak{P}, \mathfrak{Q}, \mathfrak{R}$$

étant déterminées par les formules

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= S \left\{ m \left[f(r) + \frac{x^2}{r} \frac{df(r)}{dr} \right] (e^{ux+vy+wz-1}) \right\}, & \mathfrak{M} &= \dots, & \mathfrak{N} &= \dots, \\ \mathfrak{P} &= S \left[m \frac{yz}{r} \frac{df(r)}{dr} (e^{ux+vy+wz-1}) \right], & \mathfrak{Q} &= \dots, & \mathfrak{R} &= \dots, \end{aligned}$$

ou, ce qui revient au même, par les formules

$$(3) \quad \begin{cases} \mathcal{L} = \mathcal{G} + \frac{\partial^2 \mathcal{H}}{\partial u^2}, & \mathfrak{M} = \mathcal{G} + \frac{\partial^2 \mathcal{H}}{\partial v^2}, & \mathfrak{N} = \mathcal{G} + \frac{\partial^2 \mathcal{H}}{\partial w^2}, \\ \mathfrak{P} = \frac{\partial^2 \mathcal{H}}{\partial v \partial w}, & \mathfrak{Q} = \frac{\partial^2 \mathcal{H}}{\partial v \partial u}, & \mathfrak{R} = \frac{\partial^2 \mathcal{H}}{\partial u \partial v}, \end{cases}$$

et les valeurs de \mathcal{G}, \mathcal{H} étant

$$(4) \quad \begin{cases} \mathcal{G} = S [m f(r) (e^{ux+vy+wz-1})], \\ \mathcal{H} = S \left\{ \frac{m}{r} \frac{df(r)}{dr} \left[e^{ux+vy+wz-1} - (ux+vy+wz) - \frac{(ux+vy+wz)^2}{2} \right] \right\}. \end{cases}$$

Or, lorsque les sommes (8) du paragraphe II demeurent constantes, on peut en dire autant des valeurs de

$$\mathcal{L}, \mathfrak{M}, \mathfrak{N}, \mathfrak{P}, \mathfrak{Q}, \mathfrak{R}$$

qui fournissent les équations (3) jointes aux formules (4), et qui sont développables avec l'exponentielle

$$e^{ux+vy+wz}$$

en séries ordonnées suivant les puissances ascendantes de u, v, w . Donc alors on peut satisfaire aux équations (2) par des valeurs constantes des facteurs

$$A, B, C.$$

Soit maintenant

$$s = 0$$

l'équation du troisième degré en s^2 que produit l'élimination des facteurs

$$A, B, C$$

entre les équations (2), la valeur de s étant

$$(5) \quad s = (s^3 - \mathcal{L})(s^2 - \mathfrak{M})(s^2 - \mathfrak{N}) - \mathfrak{P}^2(s^2 - \mathcal{L}) - \mathfrak{Q}^2(s^2 - \mathfrak{M}) - \mathfrak{R}^2(s^2 - \mathfrak{N}) - 2\mathfrak{P}\mathfrak{Q}\mathfrak{R}.$$



Si l'on prend pour s^2 une quelconque des trois racines de l'équation (5), et si d'ailleurs on désigne par

$$\alpha, \beta, \gamma$$

des coefficients arbitraires, on pourra représenter les équations (2) sous la forme

$$(6) \quad \begin{cases} (s^2 - \xi)A - \alpha B - \beta C = \alpha s, \\ -\alpha A + (s^2 - \eta)B - \beta C = \beta s, \\ -\beta A - \alpha B + (s^2 - \zeta)C = \gamma s. \end{cases}$$

Or, en laissant à s une valeur indéterminée, on tirera de ces dernières équations, résolues par rapport aux facteurs A, B, C.

$$(7) \quad \begin{cases} A = \xi \alpha + \eta \beta + \zeta \gamma, \\ B = \alpha \alpha + \eta \beta + \gamma \gamma, \\ C = \alpha \alpha + \beta \beta + \gamma \gamma, \end{cases}$$

et par suite

$$(8) \quad \frac{A}{\xi \alpha + \eta \beta + \zeta \gamma} = \frac{B}{\alpha \alpha + \eta \beta + \gamma \gamma} = \frac{C}{\alpha \alpha + \beta \beta + \gamma \gamma},$$

les valeurs de

$$(9) \quad \begin{cases} \xi = (s^2 - \eta)(s^2 - \zeta) - \alpha^2, \\ \eta = (s^2 - \zeta)(s^2 - \xi) - \beta^2, \\ \zeta = (s^2 - \xi)(s^2 - \eta) - \gamma^2, \\ \alpha = \beta(s^2 - \xi) + \alpha \alpha, \\ \beta = \alpha(s^2 - \eta) + \beta \beta, \\ \gamma = \alpha(s^2 - \zeta) + \gamma \gamma. \end{cases}$$

Donc, lorsqu'on prendra pour s une racine de l'équation (5), elles vérifieront les formules (2), quelles que soient d'ailleurs les valeurs attribuées aux constantes

$$\alpha, \beta, \gamma;$$

et celles-ci demeurant arbitraires, les valeurs des rapports

$$\frac{B}{A}, \frac{C}{A},$$

propres à vérifier les formules (2), seront précisément celles que

fournit la formule (8). Si l'on suppose en particulier les constantes

$$\alpha, \beta, \gamma$$

toutes réduites à zéro, à l'exception d'une seule, la formule (8) donnera successivement

$$(10) \quad \begin{cases} \frac{A}{\xi} = \frac{B}{\eta} = \frac{C}{\zeta}, \\ \frac{A}{\eta} = \frac{B}{\alpha} = \frac{C}{\beta}, \\ \frac{A}{\zeta} = \frac{B}{\beta} = \frac{C}{\alpha}. \end{cases}$$

Les formules (1), lorsqu'on y suppose les constantes

$$s, \frac{B}{A}, \frac{C}{A}$$

déterminées en fonctions de

$$u, v, w$$

par l'équation (5) jointe à la formule (8), ou, ce qui revient au même, à l'une des trois formules (10), représentent ce qu'on peut nommer un système d'intégrales simples des équations (3) du paragraphe II. Les coefficients

$$u, v, w,$$

dans ces intégrales simples, restent entièrement arbitraires, ainsi que la constante A. De plus, les valeurs des diverses constantes

$$u, v, w, s, A, B, C,$$

et, par suite, les valeurs des variables principales

$$\xi, \eta, \zeta$$

tirées des formules (1), peuvent être réelles ou imaginaires. Dans le premier cas, ces variables représenteront les déplacements infiniment petits des molécules dans un mouvement infiniment petit compatible avec la constitution du système donné; dans le second cas, les parties réelles des variables principales vérifieront encore les équations des mouvements infiniment petits, et ce seront évidemment ces parties réelles qui pourront être censées représenter les déplacements infini-



niment petits des molécules dans un mouvement de vibration compatible avec la constitution du système. Dans l'un et l'autre cas, le mouvement infiniment petit, qui correspondra aux valeurs de ξ , η , ζ fournies par les équations (1), sera un *mouvement simple*, dans lequel ces valeurs représenteront ou les déplacements effectifs des molécules, mesurées parallèlement aux axes coordonnés, ou leurs *déplacements symboliques*, c'est-à-dire des variables imaginaires dont les déplacements effectifs seront les parties réelles. Les équations (1) elles-mêmes seront les équations finies, et, dans le second cas, les équations finies *symboliques* du mouvement simple dont il s'agit.

Si l'on pose

$$(11) \quad \begin{cases} a = U + v\sqrt{-1}, & v = V + v\sqrt{-1}, & w = W + w\sqrt{-1}, \\ s = S + s\sqrt{-1}, \end{cases}$$

$$(12) \quad A = ae^{s\sqrt{-1}}, \quad B = be^{v\sqrt{-1}}, \quad C = ce^{w\sqrt{-1}},$$

$u, v, w, U, V, W, s, S, a, b, c, \lambda, \mu, \nu$ désignant des quantités réelles; et si d'ailleurs on fait, pour abrégér,

$$(13) \quad k = \sqrt{v^2 + v^2 + w^2}, \quad K = \sqrt{U^2 + V^2 + W^2},$$

$$(14) \quad kv = ux + vy + wz, \quad KR = Ux + Vy + Wz,$$

les formules (1) donneront

$$(15) \quad \begin{cases} \xi = ae^{kR - St} \cos(kv - st + \lambda), \\ \eta = be^{kR - St} \cos(kv - st + \mu), \\ \zeta = ce^{kR - St} \cos(kv - st + \nu). \end{cases}$$

Or, on tire des équations (15) :

1° Lorsque λ, μ, ν sont égaux

$$(16) \quad \frac{\xi}{a} = \frac{\eta}{b} = \frac{\zeta}{c};$$

2° Lorsque λ, μ, ν ne sont pas égaux

$$(17) \quad \begin{cases} \frac{\xi}{a} \sin(\mu - \nu) + \frac{\eta}{b} \sin(\nu - \lambda) + \frac{\zeta}{c} \sin(\lambda - \mu) = 0, \\ \left(\frac{\eta}{b}\right)^2 - 2\frac{\eta}{b}\frac{\zeta}{c} \cos(\mu - \nu) + \left(\frac{\zeta}{c}\right)^2 = e^{2kR - 2St} \sin^2(\mu - \nu). \end{cases}$$

Donc la ligne décrite par chaque molécule du système est toujours une droite représentée par la formule (16), ou bien une ellipse représentée par les formules (17), cette ellipse pouvant se réduire à une circonférence de cercle. Le *plan invariable*, auquel le plan de l'ellipse reste constamment parallèle, est d'ailleurs représenté par l'équation

$$(18) \quad \frac{x}{a} \sin(\mu - \nu) + \frac{y}{b} \sin(\nu - \lambda) + \frac{z}{c} \sin(\lambda - \mu) = 0.$$

Ajoutons que l'aire décrite, au bout du temps t , par le rayon vecteur de l'ellipse est représentée par le produit

$$(19) \quad \frac{S}{4S} e^{2kR} (1 - e^{-2St}) [b^2 c^2 \sin^2(\mu - \nu) + c^2 a^2 \sin^2(\nu - \lambda) + a^2 b^2 \sin^2(\lambda - \mu)]^{\frac{1}{2}}.$$

Enfin, dans le cas particulier où S s'évanouit, chacune de ces aires croît proportionnellement au temps, puisqu'on a dans ce cas

$$\frac{1 - e^{-2St}}{2S} = t.$$

Si, en nommant

$$a, b, c$$

les cosinus des angles formés par un axe fixe avec les demi-axes des coordonnées positives, on nomme

*

le déplacement d'une molécule mesuré parallèlement à l'axe fixe, on aura

$$(20) \quad * = a\xi + b\eta + c\zeta;$$

et, en posant pour abrégér

$$a a \cos \lambda + b b \cos \mu + c c \cos \nu = h \cos \varpi, \quad a a \sin \lambda + b b \sin \mu + c c \sin \nu = k \sin \varpi,$$

on tirera, des formules (15),

$$(21) \quad * = h e^{kR - St} \cos(kv - st + \varpi).$$



物

3.

24 SUR LES MOUVEMENTS INFINIMENT PETITS

Dans cette dernière équation, ainsi que dans les équations (15),

$$v, R$$

sont déterminés par les formules (14), et leurs valeurs numériques expriment les distances du point (x, y, z) à un *second* et à un *troisième plan invariable*, représentés par les équations

$$(22) \quad ux + vy + wz = 0, \quad (23) \quad Ux + Vy + Wz = 0,$$

distincts par conséquent du premier plan invariable auquel appartenait l'équation (18). D'ailleurs le produit

$$he^{kR - St}$$

représentera la *demi-amplitude* des vibrations moléculaires, mesurée parallèlement à l'axe fixe que l'on considère, tandis que l'arc

$$kv - st + \varpi$$

représentera la *phase* du mouvement simple projeté sur cet axe, et

$$\varpi$$

le *paramètre angulaire* relatif à ce même axe. Ajoutons que l'exponentielle népérienne

$$e^{kR - St}$$

sera le *module* du mouvement simple, et que l'arc

$$kv - st$$

en sera l'*argument*.

Il est bon d'observer qu'en vertu des formules (15) et (20), toutes les molécules situées sur une parallèle à la droite d'intersection du second et du troisième plan invariable se trouveront toujours, au même instant, déplacées de la même manière.

La valeur du déplacement z , déterminée par la formule (21), s'évanouit lorsqu'on a

$$(24) \quad \cos(kv - st + \varpi) = 0;$$

D'UN SYSTÈME DE MOLÉCULES, ETC.

25

par conséquent elle s'évanouit, lorsque t demeure constant, pour des valeurs équidistantes de v qui forment une progression arithmétique dont la raison est

$$\frac{\pi}{k},$$

et lorsque v demeure constant, pour des valeurs équidistantes de t , qui forment une progression arithmétique dont la raison est

$$\frac{\pi}{s}.$$

D'ailleurs, le cosinus de la phase

$$kv - st + \varpi$$

reprenra la même valeur numérique avec le même signe, ou avec un signe contraire, suivant qu'on fera varier la distance v d'un multiple pair ou impair de $\frac{\pi}{k}$, ou bien encore le temps t d'un multiple pair ou impair de $\frac{\pi}{s}$. Cela posé, si l'on prend

$$(25) \quad I = \frac{2\pi}{k}, \quad (26) \quad T = \frac{2\pi}{s},$$

on conclura de la formule (21) ou (24) que, dans un mouvement simple, le déplacement d'une molécule mesuré parallèlement à un axe fixe, s'évanouit : 1° à un instant donné, pour toutes les molécules situées dans des plans, parallèles au second plan invariable, qui divisent le système en tranches dont l'épaisseur est $\frac{1}{2}I$; 2° pour une molécule donnée, à des instants séparés les uns des autres par des intervalles de temps égaux à $\frac{1}{2}T$. Ces tranches et ces intervalles seront de *première espèce* ou de *seconde espèce*, suivant qu'ils répondront à des valeurs positives ou négatives de

$$\cos(kv - st + \varpi)$$

et du déplacement z . Enfin, deux tranches consécutives composent une

onde plane, dont l'épaisseur l sera ce qu'on nomme la *longueur d'une ondulation*, et deux intervalles de temps consécutifs, pendant lesquelles l'extrémité de l'arc

$$kx - st + \varpi$$

parcourra la circonférence entière, composeront la *durée T d'une vibration moléculaire*. Quant aux plans qui termineront les différentes tranches et ondes, ils répondront évidemment, pour une valeur donnée du temps t , aux diverses valeurs de x qui vérifieront la formule (24).

Si l'on fait croître, dans la formule (24), t de Δt et x de Δx , cette formule continuera de subsister, pourvu qu'on suppose

$$k \Delta x - s \Delta t = 0,$$

par conséquent

$$\frac{\Delta x}{\Delta t} = \Omega,$$

la valeur de Ω étant

$$(27) \quad \Omega = \frac{s}{k} = \frac{l}{T}.$$

Il suit de cette observation que, le temps venant à croître, les ondes planes, comme les plans qui les terminent, se déplaceront, dans le système de molécules donnée, avec une vitesse de propagation dont la valeur Ω sera celle que fournit la formule (27).

Considérons maintenant en particulier le module du mouvement simple, ou l'exponentielle népérienne

$$e^{KR - St}$$

qui entre comme facteur dans l'amplitude relative à chaque axe. On ne pourra pas supposer que le logarithme népérien de ce module, c'est-à-dire l'exposant

$$KR - St,$$

croisse indéfiniment avec le temps, puisqu'il s'agit de mouvements infiniment petits; et par conséquent le coefficient S dans cet exposant

devra être nul ou positif. Dans le premier cas l'amplitude des vibrations demeurera constante, et le mouvement simple sera *durable* ou *persistant*. Dans le second cas, au contraire, cette amplitude décroîtra indéfiniment, et pour des valeurs croissantes de t , le mouvement s'éteindra de plus en plus.

Quant au coefficient K , par lequel se trouve multipliée, dans le logarithme népérien du module, la distance R d'une molécule au troisième plan invariable, il pourra lui-même se réduire à zéro; et, s'il n'est pas nul, on pourra le supposer négatif, pourvu qu'on choisisse convenablement le sens suivant lequel se compteront les valeurs positives de R . Alors, pour des valeurs positives et croissantes de R , on verra encore le module du mouvement simple décroître indéfiniment; ce qui montre que, pour un instant donné, le mouvement deviendra de plus en plus insensible, à mesure qu'on s'éloignera davantage dans un certain sens du troisième plan invariable.

Dans le cas particulier où l'on aurait à la fois

$$K = 0, \quad S = 0,$$

les formules (15) et (21) se réduiraient à

$$(28) \quad \xi = a \cos(kx - st + \lambda), \quad \eta = b \cos(kx - st + \mu), \quad \zeta = c \cos(kx - st + \nu),$$

$$(29) \quad s = h \cos(kx - st + \varpi).$$

Alors toutes les molécules décriraient évidemment des courbes pareilles les unes aux autres. Alors aussi la seconde des équations (17) se réduirait à la formule connue

$$(30) \quad \left(\frac{\eta}{b}\right)^2 - 2\frac{\eta}{b} \frac{\zeta}{c} \cos(\mu - \nu) + \left(\frac{\zeta}{c}\right)^2 = \sin^2(\alpha - \nu).$$

物
3.



NOTE SUR LES SOMMES FORMÉES

PAR

L'ADDITION DE FONCTIONS SEMBLABLES

DES

COORDONNÉES DE DIFFÉRENTS POINTS.

Considérons différents points P, Q, R, ... situés dans un plan ou dans l'espace. Soient x, y ou x, y, z les coordonnées rectangulaires du point P,

(1) $K = F(x, y)$

ou

(2) $K = F(x, y, z),$

une fonction de ces coordonnées; et désignons par

(3) $\mathcal{K} = \sum K$

la somme formée par l'addition de fonctions semblables des coordonnées des différents points. Si l'on remplace les coordonnées rectangulaires x, y, z par des coordonnées polaires r, p, q , dont la première soit le rayon vecteur mené de l'origine O au point P, la seconde l'angle formé par ce rayon vecteur avec l'axe des x , et la troisième l'angle formé par le plan des xy avec celui qui renferme le même rayon vecteur et l'axe des x ; on aura, en supposant tous les points compris dans le plan des x, y ,

(4) $x = r \cos p, \quad y = r \sin p;$

par conséquent

(5) $K = F(r \cos p, r \sin p),$

et, dans le cas contraire,

(6) $x = r \cos p, \quad y = r \sin p \cos q, \quad z = r \sin p \sin q;$

par conséquent

(7) $K = F(r \cos p, r \sin p \cos q, r \sin p \sin q).$

Concevons maintenant que l'on déplace les axes coordonnés, en les faisant tourner autour de l'origine. Ce déplacement changera généralement la valeur de K et par suite celle de la somme \mathcal{K} . Si d'ailleurs, comme nous le supposons dans ce qui va suivre, K est une fonction continue des coordonnées x, y , ou x, y, z , cette fonction variera par degrés insensibles, tandis qu'on imprimera au système des axes coordonnés un mouvement de rotation continu; d'où il résulte qu'en passant d'une valeur à une autre, \mathcal{K} recevra successivement toutes les valeurs intermédiaires. Cela posé, concevons qu'en vertu de plusieurs déplacements successifs des axes coordonnés la somme (3) acquière successivement diverses valeurs représentées par

(8) $\mathcal{K}' = \sum K', \quad \mathcal{K}'' = \sum K'', \quad \dots,$

et soient

ℓ, ℓ', \dots

des facteurs positifs quelconques. L'expression

(9) $\frac{\ell^2 \mathcal{K}' + \ell' \mathcal{K}'' + \dots}{\ell^2 + \ell' + \dots} = \frac{\sum (\ell^2 K' + \ell' K'' + \dots)}{\ell^2 + \ell' + \dots},$

qui sera toujours comprise entre la plus petite et la plus grande des sommes $\mathcal{K}', \mathcal{K}'', \dots$, représentera nécessairement une nouvelle valeur particulière de \mathcal{K} , correspondant à une position particulière des axes coordonnés pour lesquelles on aura

(10) $\mathcal{K} = \frac{\ell^2 \mathcal{K}' + \ell' \mathcal{K}'' + \dots}{\ell^2 + \ell' + \dots} = \frac{\sum (\ell^2 K' + \ell' K'' + \dots)}{\ell^2 + \ell' + \dots}.$



物
2.

Or, de la formule (10) on peut en déduire plusieurs autres, qui nous seront fort utiles, en suivant la marche que nous allons indiquer.

Supposons d'abord tous les points P, Q, R, ... renfermés dans le plan des x, y . La valeur de K sera donnée par la formule (5), et si l'on imprime à l'axe des x un mouvement de rotation rétrograde en le faisant tourner autour de l'origine, de manière qu'il décrive l'angle ω , la formule (5) se trouvera remplacé par la suivante :

$$(11) \quad K = F[r \cos(p + \omega), r \sin(p + \omega)].$$

Si dans cette dernière on attribue successivement à ω diverses valeurs $\omega', \omega'',$ elles fourniront pour K diverses valeurs $K', K'',$... auxquelles correspondront diverses valeurs $\mathcal{X}', \mathcal{X}''$ de la somme \mathcal{X} . Cela posé, concevons que du point O comme centre, avec l'unité pour rayon, l'on décrive une circonférence de cercle, et partageons cette circonférence en éléments infiniment petits. Si l'on admet : 1° que les extrémités des arcs ω', ω'' soient respectivement situées sur ces divers éléments; 2° que dans la formule (10) on prenne, pour valeurs de $i', i'',$... les éléments dont il s'agit, on aura

$$(12) \quad i' + i'' + \dots = 2\pi$$

et

$$(13) \quad \left\{ \begin{aligned} i' K' + i'' K'' + \dots &= i' F[r \cos(p + \omega'), r \sin(p + \omega')] \\ &+ i'' F[r \cos(p + \omega''), r \sin(p + \omega'')] \\ &+ \dots = \int_0^{2\pi} F[r \cos(p + \omega), r \sin(p + \omega)] d\omega. \end{aligned} \right.$$

ou, ce qui revient au même,

$$(14) \quad i' K' + i'' K'' + \dots = \int_0^{2\pi} F(r \cos p, r \sin p) dp = \int_0^{2\pi} K dp,$$

la valeur de K étant déterminée par la formule (5). On trouvera par suite

$$(15) \quad i' \mathcal{X}' + i'' \mathcal{X}'' + \dots = \int_0^{2\pi} F(r \cos p, r \sin p) dp = \int_0^{2\pi} K dp,$$

et la formule (10) donnera

$$(16) \quad \mathcal{X} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} K dp.$$

Donc, parmi les diverses valeurs de la somme \mathcal{X} relatives aux diverses positions des axes coordonnés, il y en aura toujours une équivalente à l'intégrale

$$(17) \quad \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} K dp = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F(r \cos p, r \sin p) dp.$$

Or, il est important d'observer que cette intégrale dépend uniquement des valeurs du rayon vecteur r relatives aux différents points P, Q, R, ... et reste entièrement indépendante des valeurs de l'angle p relatives à ces mêmes points.

Supposons maintenant les points P, Q, R, ... distribués d'une manière quelconque dans l'espace, ...; si l'on imprime au plan des yz un mouvement de rotation rétrograde autour de l'origine, de manière que l'axe des y et le plan des xy décrivent l'angle ν , la formule (7) se trouvera remplacée par la suivante :

$$(18) \quad K = F[r \cos p, r \sin p \cos(q + \nu), r \sin p \sin(q + \nu)];$$

et, en attribuant à ν , dans cette dernière, diverses valeurs particulières

$$\nu', \nu'', \dots,$$

on obtiendra des valeurs correspondantes $K', K'',$... de la fonction K, puis on en déduira autant de valeurs $\mathcal{X}', \mathcal{X}''$... de la somme \mathcal{X} . Cela posé, concevons que dans le plan des yz , z on décrive, du point O comme centre et avec l'unité pour rayon, une circonférence de cercle, et partageons cette circonférence en éléments infiniment petits. Si l'on admet : 1° que les extrémités des arcs $\nu', \nu'',$... mesurés dans le plan des yz , soient situés en dehors de ces divers éléments; 2° que dans la formule (10) on prenne pour valeurs de $i', i'',$... les éléments dont il s'agit, l'équation (12) subsistera en même temps que la suivante :

$$(19) \quad i' K' + i'' K'' + \dots = \int_0^{2\pi} F[r \cos p, r \sin p \cos(q + \nu), r \sin p \sin(q + \nu)] d\nu,$$



et l'on aura par suite

$$(20) \quad i^r K^r + i^s K^s + \dots = \int_0^{2\pi} F(r \cos p, r \sin p \cos q, r \sin p \sin q) dq,$$

$$(21) \quad \left\{ \begin{aligned} i^r \partial^r + i^s \partial^s + \dots &= \int_0^{2\pi} F(r \cos p, r \sin p \cos q, r \sin p \sin q) dq \\ &= \int_0^{2\pi} K dq, \end{aligned} \right.$$

la valeur de K étant déterminée par l'équation (7). En conséquence la formule (10) donnera

$$(22) \quad \mathfrak{X} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} K dq.$$

Donc, parmi les diverses valeurs de la somme \mathfrak{X} relatives aux diverses positions des axes des y et des z , il y en aura toujours une équivalente à l'intégrale

$$(23) \quad \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} K dq = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F(r \cos p, r \sin p \cos q, r \sin p \sin q) dq.$$

Or il est important d'observer que cette intégrale dépend uniquement des valeurs de r et de p relatives aux différents points P, Q, R, \dots , et nullement des valeurs de l'angle q relatives à ces mêmes points. Ajoutons qu'en vertu de la formule

$$\begin{aligned} & \int_0^{2\pi} F(r \cos p, r \sin p \cos q, r \sin p \sin q) dq \\ &= \int_0^{\pi} F(r \cos p, r \sin p \cos q, r \sin p \sin q) dq \\ & \quad + \int_{\pi}^{2\pi} F(r \cos p, r \sin p \cos q, r \sin p \sin q) dq \\ &= \int_0^{\pi} F(r \cos p, r \sin p \cos q, r \sin p \sin q) dq \\ & \quad + \int_0^{\pi} F(r \cos p, -r \sin p \cos q, -r \sin p \sin q) dq \\ &= \int_0^{\pi} F(r \cos p, r \cos q \sqrt{1 - \cos^2 p}, r \sin q \sqrt{1 - \cos^2 p}) dq \\ & \quad + \int_0^{\pi} F(r \cos p, -r \cos q \sqrt{1 - \cos^2 p}, -r \sin q \sqrt{1 - \cos^2 p}) dq, \end{aligned}$$

l'intégrale (23) sera une fonction des seules quantités r et $\cos p$. Concevons maintenant qu'on pose pour abrégé

$$(24) \quad I = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F(r \cos p, r \sin p \cos q, r \sin p \sin q) dq = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} K dq.$$

L'équation (22) deviendra

$$(25) \quad \mathfrak{X} = SI,$$

et I , qui sera une fonction de r et de p , changera de valeur avec l'angle p , quand on déplacera l'axe des x , en le faisant tourner autour du point O . Si d'ailleurs on désigne par I, I', \dots et par $\mathfrak{X}, \mathfrak{X}', \dots$ les valeurs de I et de \mathfrak{X} correspondantes à diverses positions de l'axe des x , on aura

$$(26) \quad \mathfrak{X}' = SI', \quad \mathfrak{X}'' = SI'', \quad \dots;$$

et en nommant

$$j, j', \dots$$

des facteurs positifs quelconques, on prouvera, par des raisonnements semblables à ceux qui ont servi à démontrer la formule (10), qu'il existe une valeur particulière de \mathfrak{X} déterminée par l'équation

$$(27) \quad \mathfrak{X} = \frac{j^r \mathfrak{X}^r + j^s \mathfrak{X}^s + \dots}{j^r + j^s + \dots} = \frac{S(j^r I^r + j^s I^s + \dots)}{j^r + j^s + \dots}.$$

Cela posé, admettons que du point O comme centre, avec l'unité pour rayon, l'on décrive une surface sphérique, puis qu'après avoir divisé cette surface sphérique en éléments infiniment petits, on prenne, dans la formule (27), pour valeurs de j^r et j^s, \dots les éléments dont il s'agit, et pour valeurs de I, I', \dots celles qu'on obtient, lorsque dans I , considéré comme fonction de $\cos p$, on substitue les valeurs de p , correspondant au cas où l'axe des x traverse ces mêmes éléments. On aura non seulement

$$(28) \quad j^r + j^s + \dots = 4\pi,$$



mais encore

$$(29) \quad j^1 V + j^2 V + \dots = \int_0^\pi \int_0^{2\pi} I \sin p \, dp \, dq = 2\pi \int_0^\pi I \sin p \, dp,$$

et par suite l'équation (27) donnera

$$(30) \quad \mathfrak{X} = \frac{1}{2} \mathbf{S} \int_0^\pi I \sin p \, dp.$$

Si dans cette dernière formule on substitue la valeur de I fournie par l'équation (24), on trouvera définitivement

$$(31) \quad \mathfrak{X} = \frac{1}{4\pi} \mathbf{S} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} K \sin p \, dp \, dq;$$

la valeur de K étant toujours déterminée par l'équation (7). Donc, parmi les diverses valeurs de la somme \mathfrak{X} correspondant aux diverses positions des axes coordonnés, il y en aura toujours une équivalente à l'intégrale

$$(32) \quad \left\{ \begin{aligned} & \frac{1}{4\pi} \mathbf{S} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} K \sin p \, dp \, dq \\ & = \frac{1}{4\pi} \mathbf{S} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} F(r \cos p, r \sin p \cos q, r \sin p \sin q) \sin p \, dp \, dq, \end{aligned} \right.$$

qui dépend uniquement des valeurs de r relatives aux différents points et nullement des angles p, q .

Si l'on désignait par α, β, γ les angles que forme la droite OP avec les axes coordonnés des x, y, z , ou plutôt avec les demi-axes des coordonnées positives, on aurait, en supposant cette droite renfermée dans le plan des xy ,

$$(33) \quad \cos \alpha = \cos p, \quad \cos \beta = \sin p,$$

et dans la supposition contraire

$$(34) \quad \cos \alpha = \cos p, \quad \cos \beta = \sin p \cos q, \quad \cos \gamma = \sin p \sin q.$$

Par suite, les formules (5), (7) deviendraient

$$(35) \quad K = F(r \cos \alpha, r \cos \beta),$$

$$(36) \quad K = F(r \cos \alpha, r \cos \beta, r \cos \gamma).$$

Si les diverses valeurs de r se réduisent à l'unité, les formules (35), (36) donneront simplement

$$(37) \quad K = F(\cos \alpha, \cos \beta),$$

$$(38) \quad K = F(\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma).$$

Cela posé, on déduira immédiatement des formules (16), (22) et (31), les propositions suivantes :

PREMIER THÉORÈME. — *Considérons un système de droites OP, OQ, OR, ... , menées par le point O dans un même plan. Prenons le point O pour origine, deux axes tracés dans le plan pour axes des x et y , et nommons p l'angle que forme la droite OP avec l'axe des x . Soient encore α, β les angles formés par la même droite avec les demi-axes des coordonnées positives, par conséquent des angles liés avec la variable p par les formules (33); K une fonction continue des cosinus de ces angles, et*

$$\mathfrak{X} = \mathbf{S} K$$

une somme de fonctions semblables, relatives aux différentes droites. Tandis qu'on fera tourner les axes des x, y autour de l'origine O, la somme \mathfrak{X} recevra diverses valeurs dont l'une sera indépendante de p et déterminée par l'équation

$$(16) \quad \mathfrak{X} = \frac{1}{2\pi} \mathbf{S} \int_0^{2\pi} K \, dp.$$

DEUXIÈME THÉORÈME. — *Concevons que, par un point O commun à plusieurs droites OP, OQ, OR, ... , on mène arbitrairement trois axes rectangulaires des x, y, z . Soient p l'angle formé par la droite OP avec l'axe des x , et q l'angle formé par le plan qui renferme la droite OP et l'axe des x avec le plan des xy . Soient encore α, β, γ les angles formés*



par la droite OP avec les demi-axes des coordonnées positives, par conséquent des angles liés aux coordonnées positives p, q par les formules (34); K une fonction continue des cosinus de ces angles, et

$$\varkappa = \int K$$

une somme de fonctions semblables, relatives aux différentes droites. Tandis qu'on fera tourner les axes des x, y, z autour de l'origine O, la somme \varkappa recevra diverses valeurs dont l'une sera indépendante des variables p, q et déterminée par l'équation

$$(31) \quad \varkappa = \frac{1}{4\pi} \int_0^\pi \int_0^\pi K \sin p \, dp \, dq.$$

TROISIÈME THÉORÈME. — Les mêmes choses étant posées que dans le théorème précédent, si l'on fait tourner les axes des y et z autour de l'axe des x , la somme \varkappa recevra successivement diverses valeurs dont l'une sera déterminée par la formule

$$(22) \quad \varkappa = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} K \, dq,$$

et indépendante des valeurs de q relatives aux différentes droites.

Pour montrer une application des théorèmes qui précèdent, concevons qu'à partir de l'origine O l'on porte une longueur k sur une droite OA tracée de manière à former avec les demi-axes des coordonnées positives des angles dont les cosinus soient a, b, c . Si l'on désigne par u, v, w les projections algébriques de la longueur k sur les axes des x, y, z , et par δ l'angle compris entre les droites OA, OP, on aura

$$(39) \quad k = (u^2 + v^2 + w^2)^{\frac{1}{2}},$$

$$(40) \quad u = ka, \quad v = kb, \quad w = kc,$$

$$(41) \quad \cos \delta = a \cos \alpha + b \cos \beta + c \cos \gamma;$$

et la quantité

$$(42) \quad k \cos \delta = u \cos \alpha + v \cos \beta + w \cos \gamma$$

représentera la projection de la longueur k sur la droite OP. Or, en supposant K fonction de cette même projection, c'est-à-dire en prenant

$$(43) \quad K = F(k \cos \delta) = F(u \cos \alpha + v \cos \beta + w \cos \gamma),$$

et en réduisant w et $\cos \gamma$ à zéro lorsque les droites OA, OP, OQ, OR, ... seront situées dans le plan des xy , on tirera de la formule (16) jointe aux équations (33), ou des formules (22), (31) jointes aux équations (34),

$$(44) \quad \varkappa = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi F(u \cos \alpha + v \cos \beta) \, dp = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F(u \cos p + v \sin p) \, dp$$

et

$$(45) \quad \begin{aligned} \varkappa &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi F(u \cos \alpha + v \cos \beta + w \cos \gamma) \, dq \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F(u \cos p + v \sin p \cos q + w \sin p \sin q) \, dq, \end{aligned}$$

$$(46) \quad \begin{aligned} \varkappa &= \frac{1}{4\pi} \int_0^\pi \int_0^\pi F(u \cos \alpha + v \cos \beta + w \cos \gamma) \sin p \, dp \, dq \\ &= \frac{1}{4\pi} \int_0^\pi \int_0^\pi F(u \cos p + v \sin p \cos q + w \sin p \sin q) \sin p \, dp \, dq. \end{aligned}$$

Si maintenant on applique à la détermination de ces trois valeurs de \varkappa des théorèmes connus dont l'un a été démontré par M. Poisson (voir la 4^e livr. des *Exercices de Mathématiques*), on trouvera : 1^o en supposant les droites OA, OP, OQ, OR, ... toutes situées dans le plan des xy ,

$$(47) \quad \varkappa = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F(k \cos p) \, dp = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi F(k \cos p) \, dp;$$

2^o dans la supposition contraire,

$$(48) \quad \begin{aligned} \varkappa &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F[u \cos p + (v^2 + w^2)^{\frac{1}{2}} \sin p \cos q] \, dq \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi F[u \cos p + (k^2 - u^2)^{\frac{1}{2}} \sin p \cos q] \, dq \end{aligned}$$

et

$$(49) \quad \mathfrak{X} = \frac{1}{4\pi} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} F(k \cos p) \sin p \, dp \, dq = \frac{1}{2} \int_0^\pi F(k \cos p) \sin p \, dp.$$

Le cas où la somme \mathfrak{X} reste invariable, tandis qu'on fait tourner les axes coordonnés autour de l'origine, ou même seulement autour de l'axe des x , mérite une attention spéciale. Alors, en effet, chacune des formules (16), (22), (31), (47), (48), (49), fournit non plus une valeur particulière, mais la valeur générale de la somme

$$\mathfrak{X} = \mathfrak{S}K.$$

En conséquence, on peut énoncer les propositions suivantes :

QUATRIÈME THÉORÈME. — Concevons que, dans un plan donné, et par un point O commun à plusieurs droites OP , OQ , OR , on mène une nouvelle droite OA ; soient k une longueur portée sur cette nouvelle droite, δ l'angle compris entre les droites OP , OA , et par conséquent $k \cos \delta$, la projection de la longueur k sur la droite OP . Soient encore

$$K = F(k \cos \delta)$$

une fonction continue de la projection dont il s'agit, et

$$\mathfrak{X} = \mathfrak{S}K$$

une somme de fonctions semblables relatives aux différentes droites OP , OQ , OR , ... Si la somme \mathfrak{X} demeure constante, tandis qu'on fait tourner la droite OA autour de l'origine O , cette somme sera indépendante des valeurs de δ relatives aux différentes droites OP , OQ , OR , ... et l'on aura en vertu de l'équation (47)

$$(50) \quad \mathfrak{X} = \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi F(k \cos \delta) \, d\delta = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \mathfrak{X} \, d\delta.$$

CINQUIÈME THÉORÈME. — Concevons que, par un point O commun à plusieurs droites OP , OQ , OR , ... on mène arbitrairement trois axes rectan-

gulaires des x , y , z , et une nouvelle droite OA sur laquelle on mesure une certaine longueur k dont les projections algébriques et orthogonales soient respectivement désignées par

$$u, v, w.$$

Enfin soient

$$\alpha = p, \quad \beta, \quad \gamma, \quad \delta$$

les angles formés par la droite OP avec les demi-axes des x , y , z positives, et avec la droite OA ; q l'angle formé par le plan qui renferme la droite OP et l'axe des x avec le plan des xy ; $K = F(\cos \delta)$ une fonction continue de la projection $k \cos \delta$ de la longueur k sur la droite OP , et $\mathfrak{X} = \mathfrak{S}K$ une somme de fonctions semblables relatives aux droites OP , OQ , OR , ... Si la somme \mathfrak{X} demeure constante tandis qu'on fait tourner les axes des y et z avec la droite OA , autour de l'axe des x , cette somme sera indépendante des valeurs particulières de q relatives aux droites OP , OQ , OR , ... et l'on aura, en vertu de la formule (48),

$$(51) \quad \mathfrak{X} = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi F[u \cos p + (k^2 - u^2)^{\frac{1}{2}} \sin p \cos q] \, dq.$$

SIXIÈME THÉORÈME. — Les mêmes choses étant posées que dans le théorème précédent, si la somme \mathfrak{X} demeure constante tandis que l'on fait tourner d'une manière quelconque les axes des x , y , z avec la droite OA autour de l'origine O , cette somme sera indépendante des diverses valeurs de p , q , relatives aux droites OP , OQ , OR , ... et l'on aura, en vertu de la formule (49),

$$(52) \quad \mathfrak{X} = \frac{1}{2} \int_0^\pi F(k \cos \delta) \sin \delta \, d\delta.$$

Nota. — Dans plusieurs des formules qui précèdent, comme dans le Mémoire lithographié sous la date d'août 1836 (1), on a indifféremment placé le signe \mathfrak{S} avant ou après le signe \int . A la vérité la seconde disposition permet d'offrir certaines équations sous une forme

(1) Œuvres de C., S. II, T. XV.



plus simple, comme on le voit dans la formule (50); mais il est plus exact d'écrire le signe \int le premier, comme on l'a fait dans les formules (51), (52). Ajoutons que si, au lieu de réduire les formules (35), (36) aux formules (37), (38), en supposant $r = 1$, on laisse varier r , on obtiendra, au lieu des théorèmes ci-dessus énoncés, d'autres théorèmes analogues. Ainsi en particulier le sixième théorème pourra s'énoncer comme il suit :

SIXIÈME THÉOREME. — *Concevons qu'à partir du point O commun à un certain axe OA, et à plusieurs droites OP, OQ, OR, ... on porte sur ces droites des longueurs r, r', r'', \dots . Soient d'ailleurs δ l'angle formé par la droite OP avec l'axe OA, k une longueur portée sur cet axe,*

$$K = F(kr \cos \delta)$$

une fonction continue du produit $kr \cos \delta$, et

$$\mathfrak{X} = \int K$$

une somme de fonctions semblables relatives aux droites OP, OQ, OR, Si la somme \mathfrak{X} demeure constante, tandis que l'on fait tourner d'une manière quelconque l'axe OA autour du point O, l'on aura

$$(52) \quad \mathfrak{X} = \frac{1}{2} \int_0^\pi F(kr \cos \delta) \sin \delta \, d\delta.$$



NOTE SUR LA TRANSFORMATION

DES

COORDONNÉES RECTANGULAIRES

EN

COORDONNÉES POLAIRES.

La transformation des coordonnées rectangulaires en coordonnées polaires est particulièrement utile, lorsque l'on se propose d'évaluer l'attraction exercée par un sphéroïde sur un point matériel. Or il se trouve que les formules auxquelles on est conduit par cette transformation dans le problème dont il s'agit, et dans un grand nombre de questions de Physique mathématique, peuvent être simplifiées à l'aide d'un artifice de calcul que je vais indiquer.

Soient

$$x, y, z$$

les coordonnées rectangulaires d'un point matériel;

$$p, q, r$$

ses coordonnées polaires liées aux premières par les équations

$$(1) \quad x = r \cos p, \quad y = r \sin p \cos q, \quad z = r \sin p \sin q;$$

K une fonction quelconque des coordonnées x, y, z ; et

$$(2) \quad S = \frac{\partial^2 K}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 K}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 K}{\partial z^2}.$$

Si l'on transforme les coordonnées rectangulaires en coordonnées

polaires, à l'aide des équations (1), alors en posant

$$(3) \quad \cos p = \varphi,$$

on obtiendra la formule connue

$$(4) \quad S = \frac{1}{r} \frac{\partial^2(rK)}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \left\{ \frac{1}{1-\varphi^2} \frac{\partial^2 K}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial \left[(1-\varphi^2) \frac{\partial K}{\partial \varphi} \right]}{\partial \varphi} \right\}.$$

Mais si l'on pose

$$(5) \quad \tan \frac{p}{2} = e^\psi$$

et par conséquent

$$(6) \quad \psi = \log \tan \frac{p}{2},$$

alors, au lieu de l'équation (4), on obtiendra la suivante :

$$(7) \quad S = \frac{1}{r} \frac{\partial^2(rK)}{\partial r^2} + \left(\frac{e^\psi + e^{-\psi}}{2r} \right)^2 \left(\frac{\partial^2 K}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 K}{\partial \psi^2} \right),$$

qu'on peut encore écrire comme il suit :

$$(8) \quad rS = \frac{\partial^2(rK)}{\partial r^2} + \left(\frac{e^\psi + e^{-\psi}}{2r} \right)^2 \left[\frac{\partial^2(rK)}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2(rK)}{\partial \psi^2} \right].$$

ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

MOUVEMENTS PLANÉTAIRES.

Théorème fondamental.

Dans un Mémoire publié à Turin en 1831⁽¹⁾, reproduit depuis dans une traduction italienne, et qui, comme l'indique son titre, a spécialement pour objet la Mécanique céleste et un nouveau calcul applicable à un grand nombre de questions diverses, j'ai donné des formules à l'aide desquelles on peut déterminer directement chacun des coefficients numériques relatifs aux perturbations des mouvements planétaires, et simplifier des calculs qui exigent quelquefois des astronomes plusieurs années de travail. Pour établir les formules dont il s'agit, et d'autres formules analogues renfermées dans le Mémoire ci-dessus mentionné, il suffisait d'appliquer au développement de la fonction, désignée par R dans la *Mécanique céleste*, des théorèmes bien connus tels que le théorème de Taylor et le théorème de Lagrange sur le développement des fonctions des racines d'équations algébriques ou transcendentes. Mais il était nécessaire de recourir à d'autres principes et à de nouvelles méthodes pour obtenir des résultats plus importants, que je vais rappeler en peu de mots.

En joignant à la série de Maclaurin le reste qui la complète, et représentant ce reste sous la forme que Lagrange lui a donnée, ou sous

⁽¹⁾ *Oeuvres de C.*, S. II, T. XV.



d'autres formes du même genre, on peut s'assurer, dans un grand nombre de cas, qu'une fonction explicite d'une seule variable x est développable, pour certaines valeurs de x , en une série convergente ordonnée suivant les puissances ascendantes de cette variable, et déterminer la limite supérieure des modules des valeurs réelles ou imaginaires de x , pour lesquels le développement subsiste. De plus, la théorie du développement des fonctions explicites de plusieurs variables peut être aisément ramenée à la théorie du développement des fonctions explicites d'une seule variable. Mais il importe d'observer que l'application des règles à l'aide desquelles on peut décider si la série de Maclaurin est convergente ou divergente, devient souvent très difficile, attendu que dans cette série le terme général, ou proportionnel à la $n^{\text{ème}}$ puissance de la variable, renferme la dérivée de l'ordre n de la fonction explicite donnée, ou du moins la valeur de cette dérivée qui correspond à une valeur nulle de x , et que, hormis certains cas particuliers, la dérivée de l'ordre n prend une forme de plus en plus compliquée à mesure que n augmente.

Quant aux fonctions implicites, on avait présenté, pour leurs développements en séries, diverses formules déduites le plus souvent de la méthode des coefficients indéterminés. Mais les démonstrations qu'on avait données de ces formules étaient généralement insuffisantes : 1^o parce qu'on n'examinait pas d'ordinaire si les séries étaient convergentes ou divergentes, et qu'en conséquence on ne pouvait dire le plus souvent dans quels cas les formules devaient être admises ou rejetées; 2^o parce qu'on ne s'était point attaché à démontrer que les développements obtenus avaient pour sommes les fonctions développées, et qu'il peut arriver qu'une série convergente provienne du développement d'une fonction sans que la somme de la série soit équivalente à la fonction elle-même. Il est vrai que l'établissement de règles générales propres à déterminer dans quels cas les développements des fonctions implicites sont convergents, et représentent ces mêmes fonctions, paraissait offrir de grandes difficultés. On peut en juger en lisant attentivement le Mémoire de M. Laplace sur la conver-

gence ou la divergence de la série que fournit, dans le mouvement elliptique d'une planète, le développement du rayon vecteur suivant les puissances ascendantes de l'excentricité. Je pensai donc que les astronomes et les géomètres attacheraient quelque prix à un travail qui avait pour but d'établir sur le développement des fonctions, soit explicites, soit implicites, des principes généraux et d'une application facile, à l'aide desquels on pût non seulement démontrer avec rigueur les formules et indiquer les conditions de leur existence, mais encore fixer les limites des erreurs que l'on commet en négligeant les restes qui doivent compléter les séries. Parmi ces règles, celles qui se rapportent à la fixation des limites des erreurs commises présentaient dans leur ensemble un nouveau calcul que je désignai sous le nom de calcul des limites. Les principes de ce nouveau calcul se trouvent exposés, avec des applications à la Mécanique céleste, dans les Mémoires lithographiés à Turin, sous les dates du 15 octobre 1831, de 1832, et du 6 mars 1833. L'accueil bienveillant que reçurent ces Mémoires, dès qu'ils eurent été publiés, dut m'encourager à suivre la route qui s'était ouverte devant moi, et à exécuter le dessein que j'avais annoncé (Mémoire du 15 octobre 1831) de faire voir comment le nouveau calcul peut être appliqué aux séries qui représentent les intégrales d'un système d'équations différentielles linéaires ou non linéaires. Tel est effectivement l'objet d'un Mémoire lithographié à Prague en 1835, et dans lequel je montre, d'une part, comment on peut s'assurer de la convergence des séries en question; d'autre part, comment on peut fixer des limites supérieures aux modules des restes qui complètent ces mêmes séries. Toutefois, quoique les résultats auxquels je suis parvenu dans le Mémoire de 1835 paraissent déjà dignes de remarque, cependant ils ne forment qu'une partie de ceux auxquels on se trouve conduit par la méthode dont j'ai fait usage. C'est ce que j'ai observé dans une lettre adressée à M. Coriolis, le 28 janvier 1837. Cette lettre, insérée dans les *Comptes rendus* des séances de l'Académie, renferme l'énoncé de quelques théorèmes importants que je me propose maintenant de développer, surtout sous



le rapport de leurs applications à la Mécanique céleste, à laquelle ils semblent promettre d'heureux et utiles perfectionnements. Je me bornerai, dans ce premier article, à donner l'énoncé précis et la démonstration d'un théorème fondamental inséré dans la lettre dont il s'agit :

THEOREME. — x désignant une variable réelle ou imaginaire, une fonction réelle ou imaginaire de x sera développable en une série convergente ordonnée suivant les puissances ascendantes de x , tant que le module de x conservera une valeur inférieure à la plus petite de celles pour lesquelles la fonction ou sa dérivée cesse d'être finie et continue.

Démonstration. — Soit

$$f(x)$$

une fonction donnée de la variable x . Si l'on attribue à cette variable une valeur imaginaire \bar{x} dont le module soit X et l'argument p , en sorte qu'on ait

$$\bar{x} = X e^{p\sqrt{-1}},$$

on aura identiquement

$$(1) \quad \frac{\partial f(\bar{x})}{\partial X} = \frac{1}{X\sqrt{-1}} \frac{\partial f(\bar{x})}{\partial p}.$$

Si, comme nous l'avons supposé, le module X de \bar{x} conserve une valeur inférieure à la plus petite de celles pour lesquelles la fonction $f(\bar{x})$ ou sa dérivée $f'(\bar{x})$ cesse d'être finie et continue; alors, la valeur commune des deux membres de la formule (1), savoir

$$e^{p\sqrt{-1}} f'(\bar{x}) = e^{p\sqrt{-1}} f'(X e^{p\sqrt{-1}}),$$

restant finie et déterminée, on pourra en dire autant des fonctions réelles

$$\varphi(X, p) = \frac{1}{2} [e^{p\sqrt{-1}} f'(X e^{p\sqrt{-1}}) + e^{-p\sqrt{-1}} f'(X e^{-p\sqrt{-1}})],$$

$$\chi(X, p) = \frac{1}{2\sqrt{-1}} [e^{p\sqrt{-1}} f'(X e^{p\sqrt{-1}}) - e^{-p\sqrt{-1}} f'(X e^{-p\sqrt{-1}})],$$

et par conséquent des intégrales doubles

$$\int_{-\pi}^{\pi} \int_0^X \varphi(X, p) dp dX = \int_0^X \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(X, p) dX dp,$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \int_0^X \chi(X, p) dp dX = \int_0^X \int_{-\pi}^{\pi} \chi(X, p) dX dp.$$

Donc, puisqu'on aura identiquement

$$e^{p\sqrt{-1}} f'(\bar{x}) = \varphi(X, p) + \sqrt{-1} \chi(X, p),$$

l'intégrale double

$$\int_{-\pi}^{\pi} \int_0^X e^{p\sqrt{-1}} f'(\bar{x}) dp dX = \int_0^X \int_{-\pi}^{\pi} e^{p\sqrt{-1}} f'(\bar{x}) dX dp$$

conservera elle-même une valeur finie et déterminée. D'ailleurs, la fonction $f(\bar{x})$ restant, par hypothèse, finie et continue pour la valeur attribuée à X et pour une valeur plus petite, on aura encore

$$\int_0^X e^{p\sqrt{-1}} f'(\bar{x}) dX = \int_0^X \frac{\partial f(\bar{x})}{\partial X} dX = f(\bar{x}) - f(0),$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{p\sqrt{-1}} f'(\bar{x}) dp = \frac{1}{X\sqrt{-1}} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\partial f(\bar{x})}{\partial p} dp = 0,$$

comme on le conclura sans peine des principes établis dans le résumé des leçons données à l'École Polytechnique sur le Calcul infinitésimal. Donc, dans l'hypothèse admise, l'équation (1) entraînera la formule

$$\int_{-\pi}^{\pi} [f(\bar{x}) - f(0)] dp = 0,$$

ou

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(\bar{x}) dp = \int_{-\pi}^{\pi} f(0) dp,$$

ou enfin

$$(2) \quad \int_{-\pi}^{\pi} f(\bar{x}) dp = 2\pi f(0).$$

Si, de plus, la fonction $f(x)$ s'évanouit avec x , l'équation (2) don-



nera simplement

$$(3) \quad \int_{-\pi}^{\pi} f(\bar{x}) dp = 0.$$

Cela posé, si dans la formule (3) on remplace $f(\bar{x})$ par le produit

$$\frac{f(\bar{x}) - f(x)}{x - \bar{x}},$$

x étant différent de \bar{x} , et le module de x inférieur à X , on en conclura

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{f(\bar{x}) - f(x)}{x - \bar{x}} dp = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{f(x) - f(\bar{x})}{x - \bar{x}} dp = f(x) \int_{-\pi}^{\pi} \left(1 + \frac{x}{\bar{x}} + \frac{x^2}{\bar{x}^2} + \dots \right) dp = 2\pi f(x),$$

et par suite

$$(4) \quad f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{f(\bar{x})}{x - \bar{x}} dp.$$

L'équation (4) suppose, comme les équations (2) et (3), que la fonction de X et de p , représentée par $f(\bar{x})$, reste, avec sa dérivée $f'(\bar{x})$, finie et continue, pour la valeur attribuée à X et pour des valeurs plus petites. D'ailleurs, comme le rapport

$$\frac{\bar{x}}{x - \bar{x}}$$

est la somme de la progression géométrique

$$1, \frac{x}{\bar{x}}, \frac{x^2}{\bar{x}^2}, \dots$$

qui demeure convergente tant que le module de x reste inférieur au module X de \bar{x} , il suit de la formule (4) que

$$f(x)$$

sera développable en une série convergente ordonnée suivant les puissances ascendantes de x , si le module de la variable réelle ou imaginaire x conserve une valeur inférieure à la plus petite de celles pour lesquelles la fonction $f(x)$ et sa dérivée $f'(x)$ cessent d'être finies et continues.

Ainsi, en particulier, puisque les fonctions

$$\cos x, \sin x, e^x, e^{x^2}, \cos(1-x^2), \dots$$

et leurs dérivées du premier ordre ne cessent jamais d'être finies et continues, elles seront toujours développables en séries convergentes ordonnées suivant les puissances ascendantes de x . Au contraire, les fonctions

$$(1+x)^{\frac{1}{2}}, \frac{1}{1-x}, \frac{x}{1+\sqrt{1-x^2}}, \log(1+x), \operatorname{arctang} x, \dots$$

qui, lorsqu'on attribue à x une valeur imaginaire de la forme

$$X e^{i\sqrt{-1}},$$

cessent d'être, avec leurs dérivées du premier ordre, fonctions continues de x , au moment où le module X devient égal à 1, seront certainement développables en séries convergentes ordonnées suivant les puissances ascendantes de la variable x , si la valeur réelle ou imaginaire de x offre un module inférieur à l'unité; mais elles pourront devenir et deviendront en effet divergentes, si le module de x surpasse l'unité. Enfin, comme les fonctions

$$e^{\frac{1}{x}}, \frac{1}{e^{\frac{1}{x}}}, \cos \frac{1}{x}, \dots$$

deviennent discontinues avec leurs dérivées du premier ordre pour une valeur nulle de x , par conséquent lorsque le module de x est le plus petit possible, elles ne seront jamais développables en séries convergentes ordonnées suivant les puissances ascendantes de x .

On sera peut-être étonné de nous voir placer $\operatorname{arctang} x$ au nombre des fonctions qui deviennent infinies ou discontinues, quand le module de x devient égal à 1. Il est vrai que, si l'on attribue à x une valeur réelle de la forme

$$x = \pm X,$$

la fonction $\operatorname{arctang} x$ ne cessera pas d'être finie et continue pour $X = 1$. Mais il n'en sera plus de même, si x devenant imaginaire,

50 INTÉGRATION DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES, ETC.
on suppose par exemple

$$x = X\sqrt{-1}.$$

Alors, en effet, la fonction

$$\text{arc tang } x = \text{arc tang}(X\sqrt{-1}) = \frac{1(1-X) - 1(1+X)}{2\sqrt{-1}}$$

deviendra évidemment infinie et discontinue, pour la valeur 1 attribuée au module X.

Nous remarquerons en finissant que les fonctions ci-dessus prises pour exemples, et leurs dérivées du premier ordre, deviennent toujours infinies ou discontinues pour les mêmes valeurs du module de la variable indépendante. Si l'on était assuré qu'il en fût toujours ainsi, on pourrait, dans le théorème énoncé, se dispenser de parler de la fonction dérivée; mais, comme on n'a point à cet égard une certitude suffisante, il est plus rigoureux d'énoncer le théorème dans les termes dont nous nous sommes servis plus haut.



MÉMOIRE

SUR LES

MOUVEMENTS INFINIMENT PETITS

DE

DEUX SYSTÈMES DE MOLÉCULES QUI SE PÉNÈTRENT MUTUELLEMENT.

§ 1^{er}. — *Équations d'équilibre et de mouvement de ces deux systèmes.*

Considérons deux systèmes de molécules qui coexistent dans une portion donnée de l'espace. Soient au premier instant, et dans l'état d'équilibre,

x, y, z les coordonnées d'une molécule m du premier système,
ou d'une molécule m , du second système,
 $x+x', y+y', z+z'$ les coordonnées d'une autre molécule m du 1^{er} système,
ou d'une autre molécule m , du 2^e système,
 r le rayon vecteur mené de la molécule m ou m , à la molécule m ou m ;
on aura

$$(1) \quad r^2 = x^2 + y^2 + z^2,$$

et les cosinus des angles formés par le rayon vecteur r avec les demi-axes des coordonnées positives, seront respectivement

$$\frac{x}{r}, \quad \frac{y}{r}, \quad \frac{z}{r}.$$

Supposons d'ailleurs que l'attraction ou la répulsion mutuelle des deux masses m et m ou m , et m , étant proportionnelle à ces masses,



et à une fonction de la distance r , soit représentée, au signe près, par

$${}^m m f(r)$$

pour les molécules m et m , et par

$${}^{m m_1} f_1(r)$$

pour les molécules m et m_1 , chacune des fonctions

$$f(r), f_1(r)$$

désignant une quantité positive, lorsque les molécules s'attirent, et négative, lorsqu'elles se repoussent. Les projections algébriques de la force

$${}^m m f(r) \text{ ou } {}^{m m_1} f_1(r)$$

sur les axes coordonnés seront les produits de cette force par les cosinus des angles que forme le rayon vecteur r avec ces axes, et, en conséquence, si l'on fait pour abréger

$$(2) \quad \frac{f(r)}{r} = f(r), \quad \frac{f_1(r)}{r} = f_1(r),$$

elles se réduiront, pour la force ${}^m m f(r)$, à

$${}^{m m} x f(r), \quad {}^{m m} y f(r), \quad {}^{m m} z f(r),$$

et, pour la force ${}^{m m_1} f_1(r)$, à

$${}^{m m_1} x f_1(r), \quad {}^{m m_1} y f_1(r), \quad {}^{m m_1} z f_1(r).$$

Cela posé, les équations d'équilibre de la molécule m seront évidemment

$$(3) \quad \begin{cases} 0 = S[{}^{m m} x f(r)] + S[{}^{m m_1} x f_1(r)], \\ 0 = S[{}^{m m} y f(r)] + S[{}^{m m_1} y f_1(r)], \\ 0 = S[{}^{m m} z f(r)] + S[{}^{m m_1} z f_1(r)]. \end{cases}$$

la lettre caractéristique S indiquant une somme de termes semblables entre eux et relatifs aux diverses molécules m du premier système, ou aux diverses molécules m_1 du second système.

Concevons maintenant que les diverses molécules

$$m, m, \dots, m, m, \dots$$

viennent à se mouvoir. Soient alors, au bout du temps t ,

$$\xi, \eta, \zeta$$

les déplacements de la molécule m , et

$$\xi_1, \eta_1, \zeta_1$$

les déplacements de la molécule m_1 , mesurés parallèlement aux axes coordonnés. Soient d'ailleurs

$$\xi + \Delta\xi, \quad \eta + \Delta\eta, \quad \zeta + \Delta\zeta$$

et

$$\xi_1 + \Delta\xi_1, \quad \eta_1 + \Delta\eta_1, \quad \zeta_1 + \Delta\zeta_1$$

ce que deviennent ces déplacements, lorsqu'on passe de la molécule m à la molécule m , ou de la molécule m_1 à la molécule m_1 . Les coordonnées de la molécule m , au bout du temps t , seront

$$x + \xi, \quad y + \eta, \quad z + \zeta,$$

tandis que celles de la molécule m ou m_1 seront

$$x + x + \xi + \Delta\xi, \quad y + y + \eta + \Delta\eta, \quad z + z + \zeta + \Delta\zeta,$$

ou

$$x + x + \xi_1 + \Delta\xi_1, \quad y + y + \eta_1 + \Delta\eta_1, \quad z + z + \zeta_1 + \Delta\zeta_1.$$

Soient à cette même époque

$$r + \rho$$

la distance des molécules m , m et

$$r + \rho_1$$

la distance des molécules m , m_1 . La distance

$$r + \rho$$

offrira pour projections algébriques, sur les axes des x, y, z , les différences entre les coordonnées des molécules m, m , savoir :

$$x + \Delta\xi, \quad y + \Delta\eta, \quad z + \Delta\zeta,$$

tandis que la distance

$$r + \rho_1$$

offrira pour projections algébriques les différences entre les coordonnées des molécules m, m_1 , savoir

$$x + \xi, -\xi + \Delta\xi, \quad y + \eta, -\eta + \Delta\eta, \quad z + \zeta, -\zeta + \Delta\zeta,$$

On aura en conséquence

$$(4) \begin{cases} (r + \rho)^2 = (x - \Delta\xi)^2 + (y + \Delta\eta)^2 + (z + \Delta\zeta)^2, \\ (r + \rho)^2 = (x + \xi, -\xi + \Delta\xi)^2 + (y + \eta, -\eta + \Delta\eta)^2 + (z + \zeta, -\zeta + \Delta\zeta)^2. \end{cases}$$

Cela posé, pour déduire les équations du mouvement de la molécule m de ses équations d'équilibre, c'est-à-dire des formules (3), il suffira évidemment de remplacer, dans ces formules, les premiers membres par

$$\frac{d^2\xi}{dt^2}, \quad \frac{d^2\eta}{dt^2}, \quad \frac{d^2\zeta}{dt^2},$$

puis de substituer, à la distance

$$r$$

et à ses projections algébriques

$$x, \quad y, \quad z,$$

1° dans les premiers termes des seconds membres, la distance

$$r + \rho$$

et ses projections algébriques

$$x + \Delta\xi, \quad y + \Delta\eta, \quad z + \Delta\zeta;$$

2° dans les derniers termes des seconds membres, la distance

$$r + \rho,$$

et ses projections algébriques

$$x + \xi, -\xi + \Delta\xi, \quad y + \eta, -\eta + \Delta\eta, \quad z + \zeta, -\zeta + \Delta\zeta.$$

En opérant ainsi, on trouvera

$$(5) \begin{cases} \frac{d^2\xi}{dt^2} = S[m(x + \Delta\xi)f(r + \rho)] + S[m(x + \xi, -\xi + \Delta\xi)f_1(r + \rho)], \\ \frac{d^2\eta}{dt^2} = S[m(y + \Delta\eta)f(r + \rho)] + S[m(y + \eta, -\eta + \Delta\eta)f_1(r + \rho)], \\ \frac{d^2\zeta}{dt^2} = S[m(z + \Delta\zeta)f(r + \rho)] + S[m(z + \zeta, -\zeta + \Delta\zeta)f_1(r + \rho)]. \end{cases}$$

On établirait avec la même facilité les équations d'équilibre ou les équations de mouvement de la molécule m . En effet, supposons que l'attraction ou la répulsion mutuelle des deux masses m , et m_1 , ou m , et m , étant proportionnelle à ces masses et à une fonction de la distance r , soit représentée, au signe près, par

$$m_1 m f_1(r)$$

pour les molécules m , et m_1 ; elle devra être représentée par

$$m m f_1(r)$$

pour les molécules m , et m , l'action mutuelle de m , et m étant de même nature que l'action mutuelle de m_1 , et m . Donc, si l'on pose pour abrégir

$$(6) \quad f_1(r) = \frac{f_1(r)}{r},$$

les équations d'équilibre de la molécule m se réduiront non plus aux formules (3), mais aux suivantes :

$$(7) \begin{cases} 0 = S[m_1 x f_1(r)] + S[m x f_1(r)], \\ 0 = S[m_1 y f_1(r)] + S[m y f_1(r)], \\ 0 = S[m_1 z f_1(r)] + S[m z f_1(r)]. \end{cases}$$

Concevons d'ailleurs qu'au bout du temps t , la distance des molécules m_1, m , soit représentée par

$$r + \rho,$$

et celles de molécules m_1, m par

$$r + \rho.$$

On aura

$$(8) \begin{cases} (r + \rho)^2 = (x + \Delta\xi)^2 + (y + \Delta\eta)^2 + (z + \Delta\zeta)^2, \\ (r + \rho)^2 = (x + \xi, -\xi + \Delta\xi)^2 + (y + \eta, -\eta + \Delta\eta)^2 + (z + \zeta, -\zeta + \Delta\zeta)^2; \end{cases}$$

et les équations du mouvement de la molécule m , seront

$$(9) \begin{cases} \frac{d^2\xi}{dt^2} = S[m_1(x + \Delta\xi)f_1(r + \rho)] + S[m(x + \xi, -\xi + \Delta\xi)f_1(r + \rho)], \\ \frac{d^2\eta}{dt^2} = S[m_1(y + \Delta\eta)f_1(r + \rho)] + S[m(y + \eta, -\eta + \Delta\eta)f_1(r + \rho)], \\ \frac{d^2\zeta}{dt^2} = S[m_1(z + \Delta\zeta)f_1(r + \rho)] + S[m(z + \zeta, -\zeta + \Delta\zeta)f_1(r + \rho)]. \end{cases}$$



Si dans chacune des formules (5) on réduit le dernier terme du second membre à zéro, on retrouvera précisément les équations du mouvement d'un seul système de molécules sollicitées par des forces d'attraction et de répulsion mutuelle; et pour ramener ces équations à la forme sous laquelle je les ai présentées dans le Mémoire sur la *Dispersion de la lumière*, il suffirait d'écrire er au lieu de $\frac{f(r)}{r}$ au lieu de $f(r)$ et $r \cos \alpha$, $r \cos \beta$, $r \cos \gamma$ au lieu de x , y , z .

Les équations qui précèdent, et celles que nous en déduirons dans les paragraphes suivants, doivent comprendre, comme cas particuliers, les formules dont M. Lloyd a fait mention dans un article fort intéressant, publié sous la date du 9 janvier 1837, où l'auteur, convaincu qu'on ne pouvait résoudre complètement le problème de la propagation des ondes, sans tenir compte des actions des molécules des corps, annonce qu'il est parvenu à la solution dans le cas le plus simple, savoir lorsque les molécules de l'éther et des corps sont uniformément distribuées dans l'espace. [*Proceedings of the royal Irish Academy, for the year 1836-1837.*]

§ II. — *Équations des mouvements infiniment petits de deux systèmes de molécules qui se pénètrent mutuellement.*

Considérons, dans les deux systèmes de molécules qui se pénètrent mutuellement, un mouvement vibratoire, en vertu duquel chaque molécule s'écarte très peu de sa position initiale. Si l'on cherche les lois du mouvement, celles du moins qui subsistent quelque petite que soit l'étendue des vibrations moléculaires, alors en regardant les déplacements

$$\xi, \eta, \zeta, \xi', \eta', \zeta',$$

et leurs différences

$$\Delta \xi, \Delta \eta, \Delta \zeta, \Delta \xi', \Delta \eta', \Delta \zeta',$$

comme des quantités infiniment petites du premier ordre, on pourra négliger les carrés et les puissances supérieures, non seulement de

ces déplacements et de leurs différences, mais aussi des quantités

$$\rho \text{ et } \rho', \quad \rho \text{ et } \rho',$$

dans les développements des expressions que renferment les formules (4), (5), (8), (9) du premier paragraphe; et l'on pourra encore supposer indifféremment que, des quatre variables indépendantes

$$x, y, z, t.$$

les trois premières représentent ou les coordonnées initiales de la molécule m ou m' , ou ses coordonnées courantes qui, en vertu de l'hypothèse admise, différeront très peu des premières. Cela posé, si l'on a égard aux formules (3) du paragraphe 1^{er}, les formules (4) et (5) du même paragraphe donneront

$$(1) \quad \begin{cases} \rho = \frac{x \Delta \xi + y \Delta \eta + z \Delta \zeta}{r}, \\ \rho' = \frac{x(\xi' - \xi + \Delta \xi') + y(\eta' - \eta + \Delta \eta') + z(\zeta' - \zeta + \Delta \zeta')}{r}, \end{cases}$$

et

$$(2) \quad \begin{cases} \frac{d^2 \xi}{dt^2} = S[m f(r) \Delta \xi] + S \left[m \frac{df(r)}{dr} x \rho \right] \\ \quad + S[m, f(r) (\xi' - \xi + \Delta \xi')] + S \left[m, \frac{df(r)}{dr} x \rho' \right], \\ \frac{d^2 \eta}{dt^2} = S[m f(r) \Delta \eta] + S \left[m \frac{df(r)}{dr} y \rho \right] \\ \quad + S[m, f(r) (\eta' - \eta + \Delta \eta')] + S \left[m, \frac{df(r)}{dr} y \rho' \right], \\ \frac{d^2 \zeta}{dt^2} = S[m f(r) \Delta \zeta] + S \left[m \frac{df(r)}{dr} z \rho \right] \\ \quad + S[m, f(r) (\zeta' - \zeta + \Delta \zeta')] + S \left[m, \frac{df(r)}{dr} z \rho' \right]; \end{cases}$$

ou, ce qui revient au même,

$$(3) \quad \begin{cases} \frac{d^2 \xi}{dt^2} = L \xi + R \eta + Q \zeta + L' \xi' + R' \eta' + Q' \zeta', \\ \frac{d^2 \eta}{dt^2} = R \xi + M \eta + P \zeta + R' \xi' + M' \eta' + P' \zeta', \\ \frac{d^2 \zeta}{dt^2} = Q \xi + P \eta + N \zeta + Q' \xi' + P' \eta' + N' \zeta', \end{cases}$$



pourvu que, x désignant une fonction quelconque des variables x, y, z et

$$\Delta x$$

l'accroissement de x dans le cas où l'on fait croître

$$x \text{ de } x, \quad y \text{ de } y, \quad z \text{ de } z,$$

on représente, à l'aide des lettres

$$\begin{aligned} L, M, N, P, Q, R, \\ L_1, M_1, N_1, P_1, Q_1, R_1, \end{aligned}$$

non pas des quantités, mais des caractéristiques déterminées par les formules

$$\begin{aligned} Lx &= S \left\{ m \left[f(r) + \frac{x^2}{r} \frac{df(r)}{dr} \right] \Delta x \right\} - S \left\{ m_1 \left[f_1(r) + \frac{x^2}{r} \frac{df_1(r)}{dr} \right] x \right\}, & M &= \dots, & N &= \dots, \\ Px &= S \left\{ m \frac{yz}{r} \frac{df(r)}{dr} \Delta x \right\} - S \left\{ m_1 \frac{yz}{r} \frac{df_1(r)}{dr} x \right\}, & Q &= \dots, & R &= \dots, \\ L_1 x &= S \left\{ m_1 \left[f_1(r) + \frac{x^2}{r} \frac{df_1(r)}{dr} \right] (x + \Delta x) \right\}, & M_1 &= \dots, & N_1 &= \dots, \\ P_1 x &= S \left\{ m_1 \frac{yz}{r} \frac{df_1(r)}{dr} (x + \Delta x) \right\}, & Q_1 &= \dots, & R_1 &= \dots \end{aligned}$$

Comme d'ailleurs ces diverses formules doivent servir à déterminer les caractéristiques

$$L, M, N, P, Q, R, L_1, M_1, N_1, P_1, Q_1, R_1,$$

quelle que soit la fonction de x, y, z désignée par x , elles peuvent être, pour plus de simplicité, présentées sous la forme

$$\begin{aligned} (4) \quad \begin{cases} L = S \left\{ m \left[f(r) + \frac{x^2}{r} \frac{df(r)}{dr} \right] \Delta \right\} - S \left\{ m_1 \left[f_1(r) + \frac{x^2}{r} \frac{df_1(r)}{dr} \right] \right\}, & M = \dots, & N = \dots, \\ P = S \left\{ m \frac{yz}{r} \frac{df(r)}{dr} \Delta \right\} - S \left\{ m_1 \frac{yz}{r} \frac{df_1(r)}{dr} \right\}, & Q = \dots, & R = \dots, \end{cases} \\ (5) \quad \begin{cases} L_1 = S \left\{ m_1 \left[f_1(r) + \frac{x^2}{r} \frac{df_1(r)}{dr} \right] (1 + \Delta) \right\}, & M_1 = \dots, & N_1 = \dots, \\ P_1 = S \left\{ m_1 \frac{yz}{r} \frac{df_1(r)}{dr} (1 + \Delta) \right\}, & Q_1 = \dots, & R_1 = \dots \end{cases} \end{aligned}$$

Enfin, si l'on désigne, à l'aide des caractéristiques

$$D_x, D_y, D_z, D_t$$

et de leurs puissances entières, les dérivées qu'on obtient quand on différencie une ou plusieurs fois de suite une fonction des variables indépendantes

$$x, y, z, t,$$

par rapport à ces mêmes variables, les équations (3) pourront s'écrire comme il suit :

$$(6) \quad \begin{cases} (L - D_x^2)\xi + R\eta + Q\zeta + L_1\xi_1 + R_1\eta_1 + Q_1\zeta_1 = 0, \\ R\xi + (M - D_y^2)\eta + P\zeta + R_1\xi_1 + M_1\eta_1 + P_1\zeta_1 = 0, \\ Q\xi + P\eta + (N - D_z^2)\zeta + Q_1\xi_1 + P_1\eta_1 + N_1\zeta_1 = 0. \end{cases}$$

De même, en supposant les caractéristiques

$$\begin{aligned} L_2, M_2, N_2, P_2, Q_2, R_2, \\ L_3, M_3, N_3, P_3, Q_3, R_3, \end{aligned}$$

déterminées par les formules

$$\begin{aligned} (7) \quad \begin{cases} L_2 = S \left\{ m_2 \left[f_2(r) + \frac{x^2}{r} \frac{df_2(r)}{dr} \right] \Delta \right\} - S \left\{ m \left[f(r) + \frac{x^2}{r} \frac{df(r)}{dr} \right] \right\}, & M_2 = \dots, & N_2 = \dots, \\ P_2 = S \left\{ m_2 \frac{yz}{r} \frac{df_2(r)}{dr} \Delta \right\} - S \left\{ m \frac{yz}{r} \frac{df(r)}{dr} \right\}, & Q_2 = \dots, & R_2 = \dots, \end{cases} \\ (8) \quad \begin{cases} L_3 = S \left\{ m_3 \left[f_3(r) + \frac{x^2}{r} \frac{df_3(r)}{dr} \right] (1 + \Delta) \right\}, & M_3 = \dots, & N_3 = \dots, \\ P_3 = S \left\{ m_3 \frac{yz}{r} \frac{df_3(r)}{dr} (1 + \Delta) \right\}, & Q_3 = \dots, & R_3 = \dots \end{cases} \end{aligned}$$

on tirera des formules (9) du paragraphe 1^{er}, pour le cas où le mouvement est infiniment petit,

$$(9) \quad \begin{cases} L_3\xi + M_3\eta + Q_3\zeta + (L_2 - D_x^2)\xi_2 + R_2\eta_2 + Q_2\zeta_2 = 0, \\ R_3\xi + M_3\eta + P_3\zeta + R_2\xi_2 + (M_2 - D_y^2)\eta_2 + P_2\zeta_2 = 0, \\ Q_3\xi + P_3\eta + N_3\zeta + Q_2\xi_2 + R_2\eta_2 + (N_2 - D_z^2)\zeta_2 = 0. \end{cases}$$

On ne doit pas oublier que, dans les formules (4), (5), (7), (8), on a

$$(10) \quad f(r) = \frac{f(r)}{r}, \quad f_1(r) = \frac{f_1(r)}{r}, \quad f_2(r) = \frac{f_2(r)}{r},$$

les fonctions

$$f(r), f_1(r), f_2(r)$$

étant celles qui représentent le rapport entre l'action mutuelle de deux molécules, séparées par la distance r , et le produit de leurs masses, 1° dans le cas où les deux molécules font partie du premier des systèmes donnés; 2° dans le cas où l'une appartient au premier système et l'autre au second; 3° dans le cas où toutes deux font partie du second système.

Pour réduire les équations (6) et (9) à la forme d'équations linéaires aux différences partielles, il suffira de développer, dans les seconds membres de ces équations, les différences finies des variables principales

$$\xi, \eta, \zeta, \xi', \eta', \zeta',$$

en séries ordonnées suivant leurs dérivées des divers ordres. On y parviendra aisément à l'aide de la formule de Taylor, en vertu de laquelle on aura

$$x + \Delta x = e^{x\Delta x + y\Delta y + z\Delta z},$$

quelle que soit la fonction de

$$x, y, z,$$

désignée par x , et par conséquent

$$(11) \quad 1 + \Delta = e^{x\Delta x + y\Delta y + z\Delta z}, \quad \Delta = e^{x\Delta x + y\Delta y + z\Delta z} - 1.$$

Cela posé, dans les équations (6) et (9) ramenées à la forme d'équations aux différences partielles, les coefficients des dérivées des variables principales se réduiront toujours à des sommes dans chacune desquelles la masse m ou m_2 se trouvera multipliée sous le signe S par des puissances de x, y, z , et par une fonction de r . Ainsi, en particulier, les coefficients dont il s'agit se réduiront, dans les seconds membres des équations (6), à des sommes de l'une des formes

$$(12) \quad S[m x^n y^{n'} z^{n''} f(r)], \quad S\left[m x^n y^{n'} z^{n''} \frac{df(r)}{dr}\right],$$

$$(13) \quad S[m_2 x^n y^{n'} z^{n''} f_1(r)], \quad S\left[m_2 x^n y^{n'} z^{n''} \frac{df_1(r)}{dr}\right];$$

et, dans les seconds membres des équations (9), à des sommes de l'une des formes

$$(14) \quad S[m_2 x^n y^{n'} z^{n''} f_2(r)], \quad S\left[m_2 x^n y^{n'} z^{n''} \frac{df_2(r)}{dr}\right],$$

$$(15) \quad S[m_1 x^n y^{n'} z^{n''} f_1(r)], \quad S\left[m_1 x^n y^{n'} z^{n''} \frac{df_1(r)}{dr}\right],$$

n, n', n'' désignant des nombres entiers.

On pourra regarder la constitution du second système de molécules comme étant partout la même, si les sommes (14), (15) se réduisent à des quantités constantes, c'est-à-dire à des quantités indépendantes des coordonnées

$$x, y, z$$

de la molécule m . C'est ce qui aura lieu, par exemple, quand le second système sera un corps homogène, gazeux ou liquide ou cristallisé. Si d'ailleurs, les molécules étant dans le premier système beaucoup plus rapprochées les unes des autres que dans le second, les sommes (12) et (13) reprennent périodiquement les mêmes valeurs quand on fait croître ou décroître en progression arithmétique chacune des trois coordonnées x, y, z , et si les rapports des trois progressions arithmétiques, correspondantes aux trois coordonnées, sont très petits; alors, en vertu d'un théorème que nous avons établi ailleurs, on pourra substituer à ces mêmes sommes leurs valeurs moyennes sans qu'il en résulte d'erreur sensible dans le calcul des vibrations du système et des déplacements moléculaires. Donc alors les équations des mouvements infiniment petits des deux systèmes, c'est-à-dire les équations (6) et (9), pourront être considérées comme des équations linéaires aux différences partielles et à coefficients constants entre les six variables principales

$$\xi, \eta, \zeta, \xi', \eta', \zeta',$$

et les quatre variables indépendantes

$$x, y, z, t.$$

De semblables équations sont propres à représenter, par exemple, les

mouvements infiniment petits du fluide lumineux renfermé dans un corps homogène, isophane ou non isophane, opaque ou transparent.

Comme nous venons de le dire, dans le cas où les sommes (12) et (13) reprennent périodiquement les mêmes valeurs, tandis qu'on fait croître ou décroître les coordonnées en progression arithmétique, une condition nécessaire pour qu'on puisse sans erreur sensible substituer à ces mêmes sommes leurs valeurs moyennes, c'est que les rapports des trois progressions arithmétiques correspondantes aux trois coordonnées soient très petits. Il y a plus, si l'on veut appliquer le théorème rappelé ci-dessus, et qui met cette condition en évidence, à un mouvement simple caractérisé par une exponentielle népérienne dans l'exposant de laquelle les coefficients des coordonnées soient imaginaires, on reconnaîtra que, pour rendre légitime la substitution dont il s'agit, on doit supposer très petits non seulement les rapports des trois progressions arithmétiques, mais encore les produits des sommes (12) ou (13) par l'un quelconque de ces rapports.

§ III. — *Mouvements simples.*

Les équations (6) et (9) du paragraphe précédent peuvent être traitées comme des équations linéaires à coefficients constants, non seulement dans le cas où, la constitution des deux systèmes de molécules étant partout la même, les sommes (12), (13), (14), (15) demeurent constantes, mais aussi dans le cas où, les sommes (14), (15), étant constantes, les sommes (12), (13) varient périodiquement quand on fait croître ou décroître les coordonnées en progression arithmétique, pourvu que dans ce dernier cas les produits des sommes (12) ou (13) par le rapport de l'une quelconque des trois progressions arithmétiques correspondantes aux trois coordonnées soient très petits. Seulement, on devra, dans le dernier cas, après avoir intégré les formules (6), (9), comme si toutes les sommes (12), (13), (14), (15) étaient constantes, remplacer dans les intégrales trouvées chacune de ces sommes par sa valeur moyenne. C'est ainsi que l'on obtiendra, par

exemple, les vibrations de la lumière dans un corps diaphane, en supposant que le rayon de la sphère d'activité d'une molécule du corps, c'est-à-dire au delà de laquelle cette action devient insensible et peut être négligée, soit peu considérable relativement à la longueur d'une ondulation lumineuse.

La solution de plusieurs problèmes de Physique mathématique pouvant dépendre de l'intégration des équations (6) et (9) du paragraphe précédent, considérées comme équations linéaires à coefficients constants, nous allons rechercher ici les intégrales de ces équations, en nous bornant pour l'instant aux intégrales qui représentent des mouvements simples, c'est-à-dire en supposant les déplacements effectifs ou du moins les déplacements symboliques tous proportionnels à une même exponentielle népérienne, dont l'exposant soit une fonction linéaire des coordonnées et du temps.

Lorsque les sommes (12), (13), (14), (15) du paragraphe II demeurent constantes, alors, pour satisfaire aux équations (6) et (9) du même paragraphe, il suffit de supposer les variables principales

$$\xi, \eta, \zeta, \xi', \eta', \zeta'$$

toutes proportionnelles à une même exponentielle népérienne dont l'exposant soit une fonction linéaire des variables indépendantes

$$x, y, z, t.$$

et de prendre en conséquence

$$\begin{aligned} (1) \quad \xi &= A e^{ux+vy+wz-st}, & \eta &= B e^{ux+vy+wz-st}, & \zeta &= C e^{ux+vy+wz-st}, \\ (2) \quad \xi' &= A' e^{ux+vy+wz-st}, & \eta' &= B' e^{ux+vy+wz-st}, & \zeta' &= C' e^{ux+vy+wz-st}, \end{aligned}$$

$u, v, w, s, A, B, C, A', B', C'$ désignant des constantes réelles ou imaginaires convenablement choisies. En effet, si l'on substitue les valeurs précédentes de

$$\xi, \eta, \zeta, \xi', \eta', \zeta',$$



dans les équations (6) et (9) du second paragraphe, tous les termes seront divisibles par l'exponentielle

$$e^{ux+vy+wz-rt},$$

et, après la division effectuée, ces équations seront réduites à d'autres de la forme

$$(3) \quad \begin{cases} (\mathcal{L} - s^2)A + \mathcal{R}B + \mathcal{Q}C + \mathcal{L}_1A_1 + \mathcal{R}_1B_1 + \mathcal{Q}_1C_1 = 0, \\ \mathcal{R}A + (\mathcal{M} - s^2)B + \mathcal{P}C + \mathcal{R}_1A_1 + \mathcal{M}_1B_1 + \mathcal{P}_1C_1 = 0, \\ \mathcal{Q}A + \mathcal{P}B + (\mathcal{N} - s^2)C + \mathcal{Q}_1A_1 + \mathcal{P}_1B_1 + \mathcal{N}_1C_1 = 0; \end{cases}$$

$$(4) \quad \begin{cases} \mathcal{L}A + \mathcal{R}B + \mathcal{Q}C + (\mathcal{L}_2 - s^2)A_2 + \mathcal{R}_2B_2 + \mathcal{Q}_2C_2 = 0, \\ \mathcal{R}A + \mathcal{M}B + \mathcal{P}C + \mathcal{R}_2A_2 + (\mathcal{M}_2 - s^2)B_2 + \mathcal{P}_2C_2 = 0, \\ \mathcal{Q}A + \mathcal{P}B + \mathcal{N}C + \mathcal{Q}_2A_2 + \mathcal{P}_2B_2 + (\mathcal{N}_2 - s^2)C_2 = 0; \end{cases}$$

les valeurs des coefficients

$$\begin{aligned} \mathcal{L}, \mathcal{M}, \mathcal{N}, \mathcal{P}, \mathcal{Q}, \mathcal{R}; \quad \mathcal{L}_1, \mathcal{M}_1, \mathcal{N}_1, \mathcal{P}_1, \mathcal{Q}_1, \mathcal{R}_1; \\ \mathcal{L}_2, \mathcal{M}_2, \mathcal{N}_2, \mathcal{P}_2, \mathcal{Q}_2, \mathcal{R}_2 \end{aligned}$$

étant déterminées par les formules

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= S \left\{ m \left[f(r) + \frac{x^2}{r} \frac{df(r)}{dr} \right] (e^{ux+vy+wz-1}) \right\} - S \left\{ m_1 \left[f_1(r) + \frac{x^2}{r} \frac{df_1(r)}{dr} \right] \right\}, & \mathcal{M} &= \dots & \mathcal{N} &= \dots \\ \mathcal{P} &= S \left\{ m \frac{yz}{r} \frac{df(r)}{dr} (e^{ux+vy+wz-1}) \right\} - S \left\{ m_1 \frac{yz}{r} \frac{df_1(r)}{dr} \right\}, & \mathcal{Q} &= \dots & \mathcal{R} &= \dots \\ \mathcal{L}_1 &= S \left\{ m_1 \left[f_1(r) + \frac{x^2}{r} \frac{df_1(r)}{dr} \right] e^{ux+vy+wz} \right\}, & \mathcal{M}_1 &= \dots & \mathcal{N}_1 &= \dots \\ \mathcal{P}_1 &= S \left\{ m_1 \frac{yz}{r} \frac{df_1(r)}{dr} e^{ux+vy+wz} \right\}, & \mathcal{Q}_1 &= \dots & \mathcal{R}_1 &= \dots \\ \mathcal{L}_2 &= S \left\{ m_2 \left[f_2(r) + \frac{x^2}{r} \frac{df_2(r)}{dr} \right] e^{ux+vy+wz} \right\}, & \mathcal{M}_2 &= \dots & \mathcal{N}_2 &= \dots \\ \mathcal{P}_2 &= S \left\{ m_2 \frac{yz}{r} \frac{df_2(r)}{dr} e^{ux+vy+wz} \right\}, & \mathcal{Q}_2 &= \dots & \mathcal{R}_2 &= \dots \\ \mathcal{L}_s &= S \left\{ m_s \left[f_s(r) + \frac{x^2}{r} \frac{df_s(r)}{dr} \right] (e^{ux+vy+wz-1}) \right\} - S \left\{ m_s \left[f_s(r) + \frac{x^2}{r} \frac{df_s(r)}{dr} \right] \right\}, & \mathcal{M}_s &= \dots & \mathcal{N}_s &= \dots \\ \mathcal{P}_s &= S \left\{ m_s \frac{yz}{r} \frac{df_s(r)}{dr} (e^{ux+vy+wz-1}) \right\} - S \left\{ m_s \frac{yz}{r} \frac{df_s(r)}{dr} \right\}, & \mathcal{Q}_s &= \dots & \mathcal{R}_s &= \dots \end{aligned}$$

ou, ce qui revient au même, par les formules

$$(5) \quad \begin{cases} \mathcal{L} = \mathcal{G} + \frac{\partial^2 \mathcal{G}}{\partial u^2}, & \mathcal{M} = \mathcal{G} + \frac{\partial^2 \mathcal{G}}{\partial v^2}, & \mathcal{N} = \mathcal{G} + \frac{\partial^2 \mathcal{G}}{\partial w^2}, \\ \mathcal{P} = \frac{\partial^2 \mathcal{G}}{\partial v \partial w}, & \mathcal{Q} = \frac{\partial^2 \mathcal{G}}{\partial w \partial u}, & \mathcal{R} = \frac{\partial^2 \mathcal{G}}{\partial u \partial v}; \end{cases}$$

$$(6) \quad \begin{cases} \mathcal{L}_1 = \mathcal{G}_1 + \frac{\partial^2 \mathcal{G}_1}{\partial u^2}, & \mathcal{M}_1 = \mathcal{G}_1 + \frac{\partial^2 \mathcal{G}_1}{\partial v^2}, & \mathcal{N}_1 = \mathcal{G}_1 + \frac{\partial^2 \mathcal{G}_1}{\partial w^2}, \\ \mathcal{P}_1 = \frac{\partial^2 \mathcal{G}_1}{\partial v \partial w}, & \mathcal{Q}_1 = \frac{\partial^2 \mathcal{G}_1}{\partial w \partial u}, & \mathcal{R}_1 = \frac{\partial^2 \mathcal{G}_1}{\partial u \partial v}; \end{cases}$$

$$(7) \quad \begin{cases} \mathcal{L}_2 = \mathcal{G}_2 + \frac{\partial^2 \mathcal{G}_2}{\partial u^2}, & \mathcal{M}_2 = \mathcal{G}_2 + \frac{\partial^2 \mathcal{G}_2}{\partial v^2}, & \mathcal{N}_2 = \mathcal{G}_2 + \frac{\partial^2 \mathcal{G}_2}{\partial w^2}, \\ \mathcal{P}_2 = \frac{\partial^2 \mathcal{G}_2}{\partial v \partial w}, & \mathcal{Q}_2 = \frac{\partial^2 \mathcal{G}_2}{\partial w \partial u}, & \mathcal{R}_2 = \frac{\partial^2 \mathcal{G}_2}{\partial u \partial v}; \end{cases}$$

$$(8) \quad \begin{cases} \mathcal{L}_s = \mathcal{G}_s + \frac{\partial^2 \mathcal{G}_s}{\partial u^2}, & \mathcal{M}_s = \mathcal{G}_s + \frac{\partial^2 \mathcal{G}_s}{\partial v^2}, & \mathcal{N}_s = \mathcal{G}_s + \frac{\partial^2 \mathcal{G}_s}{\partial w^2}, \\ \mathcal{P}_s = \frac{\partial^2 \mathcal{G}_s}{\partial v \partial w}, & \mathcal{Q}_s = \frac{\partial^2 \mathcal{G}_s}{\partial w \partial u}, & \mathcal{R}_s = \frac{\partial^2 \mathcal{G}_s}{\partial u \partial v}; \end{cases}$$

les valeurs de

$$\mathcal{G}, \mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2, \mathcal{G}_s; \quad \mathcal{G}, \mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2, \mathcal{G}_s$$

étant respectivement

$$\begin{aligned} (9) \quad \begin{cases} \mathcal{G} = S[m f(r) (e^{ux+vy+wz-1})] - S[m_1 f_1(r)], \\ \mathcal{G}_s = S \left\{ \frac{m}{r} \frac{df(r)}{dr} \left[e^{ux+vy+wz-1} - (ux+vy+wz) - \frac{(ux+vy+wz)^2}{2} \right] \right\} \\ \quad - S \left\{ \frac{m_1}{r} \frac{df_1(r)}{dr} \frac{(ux+vy+wz)^2}{2} \right\}; \end{cases} \\ (10) \quad \begin{cases} \mathcal{G}_1 = S[m_1 f_1(r) e^{ux+vy+wz}], \\ \mathcal{G}_2 = S \left[\frac{m_2}{r} \frac{df_2(r)}{dr} e^{ux+vy+wz} \right]; \end{cases} \\ (11) \quad \begin{cases} \mathcal{G}_s = S[m_s f_s(r) e^{ux+vy+wz}], \\ \mathcal{G}_s = S \left[\frac{m_s}{r} \frac{df_s(r)}{dr} e^{ux+vy+wz} \right]; \end{cases} \\ (12) \quad \begin{cases} \mathcal{G}_s = S[m_s f_s(r) (e^{ux+vy+wz-1})] - S[m_s f_s(r)], \\ \mathcal{G}_s = S \left\{ \frac{m_s}{r} \frac{df_s(r)}{dr} \left[e^{ux+vy+wz-1} - (ux+vy+wz) - \frac{(ux+vy+wz)^2}{2} \right] \right\} \\ \quad - S \left\{ \frac{m_s}{r} \frac{df_s(r)}{dr} \frac{(ux+vy+wz)^2}{2} \right\}. \end{cases} \end{aligned}$$



Or, lorsque les sommes (12), (13), (14), (15) du paragraphe IV demeurent constantes, on peut en dire autant des valeurs de

$$\xi, \mathfrak{M}, \mathfrak{N}, \mathfrak{P}, \mathfrak{Q}, \mathfrak{R}, \xi', \mathfrak{M}', \dots$$

que fournissent les équations (5), (6), (7), (8), jointes aux formules (9), (10), (11), (12), et qui sont développables avec l'exponentielle

$$e^{ax+by+cz}$$

en séries ordonnées suivant les puissances ascendantes de u, v, w . Donc alors on peut satisfaire aux équations (3) et (4) par des valeurs constantes des facteurs

$$A, B, C, A', B', C',$$

Soit maintenant

$$(13) \quad s = 0$$

l'équation du sixième degré en s^2 que produit l'élimination des facteurs

$$A, B, C, A', B', C',$$

entre les équations (3) et (4), la valeur de s étant

$$(14) \quad s = (\xi - s^2)(\mathfrak{M} - s^2)(\mathfrak{N} - s^2)(\xi' - s^2)(\mathfrak{M}' - s^2)(\mathfrak{N}' - s^2) - \dots$$

Si l'on prend pour s une quelconque des racines de l'équation (13), et si d'ailleurs on désigne par

$$\alpha, \beta, \gamma, \alpha', \beta', \gamma',$$

des coefficients arbitraires, on pourra présenter les équations (3) et (4) sous la forme

$$(15) \quad \begin{cases} (\xi - s^2)A + \mathfrak{R}B + \mathfrak{Q}C + \xi'A_1 + \mathfrak{R}_1B_1 + \mathfrak{Q}_1C_1 = \alpha s, \\ \mathfrak{M}A + (\mathfrak{N} - s^2)B + \mathfrak{P}C + \mathfrak{M}_1A_1 + \mathfrak{N}_1B_1 + \mathfrak{P}_1C_1 = \beta s, \\ \mathfrak{Q}A + \mathfrak{Q}B + (\mathfrak{N} - s^2)C + \mathfrak{Q}_1A_1 + \mathfrak{Q}_1B_1 + \mathfrak{N}_1C_1 = \gamma s. \end{cases}$$

$$(16) \quad \begin{cases} \xi'A + \mathfrak{R}B + \mathfrak{Q}C + (\xi' - s^2)A_1 + \mathfrak{R}_1B_1 + \mathfrak{Q}_1C_1 = \alpha' s, \\ \mathfrak{M}_1A + \mathfrak{N}_1B + \mathfrak{P}_1C + \mathfrak{M}_1A_1 + (\mathfrak{N}_1 - s^2)B_1 + \mathfrak{P}_1C_1 = \beta' s, \\ \mathfrak{Q}_1A + \mathfrak{Q}_1B + \mathfrak{N}_1C + \mathfrak{Q}_1A_1 + \mathfrak{Q}_1B_1 + (\mathfrak{N}_1 - s^2)C_1 = \gamma' s. \end{cases}$$

Or, en laissant à s une valeur indéterminée, on tirera de ces dernières

équations résolues par rapport aux facteurs $A, B, C, A', B', C',$

$$(17) \quad \begin{cases} A = \xi \alpha + \mathfrak{U} \beta + \mathfrak{O} \gamma + \xi' \alpha_1 + \mathfrak{U}_1 \beta_1 + \mathfrak{O}_1 \gamma_1, \\ B = \mathfrak{U} \alpha + \mathfrak{M} \beta + \mathfrak{P} \gamma + \mathfrak{U}_1 \alpha_1 + \mathfrak{M}_1 \beta_1 + \mathfrak{P}_1 \gamma_1, \\ C = \mathfrak{O} \alpha + \mathfrak{P} \beta + \mathfrak{N} \gamma + \mathfrak{O}_1 \alpha_1 + \mathfrak{P}_1 \beta_1 + \mathfrak{N}_1 \gamma_1, \end{cases}$$

$$(18) \quad \begin{cases} A = \xi' \alpha + \mathfrak{U} \beta + \mathfrak{O} \gamma + \xi' \alpha_1 + \mathfrak{U}_1 \beta_1 + \mathfrak{O}_1 \gamma_1, \\ B = \mathfrak{U} \alpha + \mathfrak{M} \beta + \mathfrak{P} \gamma + \mathfrak{U}_1 \alpha_1 + \mathfrak{M}_1 \beta_1 + \mathfrak{P}_1 \gamma_1, \\ C = \mathfrak{O} \alpha + \mathfrak{P} \beta + \mathfrak{N} \gamma + \mathfrak{O}_1 \alpha_1 + \mathfrak{P}_1 \beta_1 + \mathfrak{N}_1 \gamma_1, \end{cases}$$

et par suite

$$(19) \quad \begin{cases} \frac{A}{\xi \alpha + \mathfrak{U} \beta + \mathfrak{O} \gamma + \xi' \alpha_1 + \mathfrak{U}_1 \beta_1 + \mathfrak{O}_1 \gamma_1} \\ = \frac{B}{\mathfrak{U} \alpha + \mathfrak{M} \beta + \mathfrak{P} \gamma + \mathfrak{U}_1 \alpha_1 + \mathfrak{M}_1 \beta_1 + \mathfrak{P}_1 \gamma_1} \\ = \frac{C}{\mathfrak{O} \alpha + \mathfrak{P} \beta + \mathfrak{N} \gamma + \mathfrak{O}_1 \alpha_1 + \mathfrak{P}_1 \beta_1 + \mathfrak{N}_1 \gamma_1} \\ = \frac{A_1}{\xi' \alpha + \mathfrak{U} \beta + \mathfrak{O} \gamma + \xi' \alpha_1 + \mathfrak{U}_1 \beta_1 + \mathfrak{O}_1 \gamma_1} \\ = \frac{B_1}{\mathfrak{U} \alpha + \mathfrak{M} \beta + \mathfrak{P} \gamma + \mathfrak{U}_1 \alpha_1 + \mathfrak{M}_1 \beta_1 + \mathfrak{P}_1 \gamma_1} \\ = \frac{C_1}{\mathfrak{O} \alpha + \mathfrak{P} \beta + \mathfrak{N} \gamma + \mathfrak{O}_1 \alpha_1 + \mathfrak{P}_1 \beta_1 + \mathfrak{N}_1 \gamma_1}, \end{cases}$$

les nouveaux facteurs

$$\xi, \mathfrak{M}, \mathfrak{U}, \mathfrak{P}, \mathfrak{O}, \mathfrak{U}, \xi', \mathfrak{M}', \dots$$

étant des fonctions entières de s , toutes du huitième degré, à l'exception des seuls facteurs

$$\xi, \mathfrak{M}, \mathfrak{U}, \xi', \mathfrak{M}', \mathfrak{U}',$$

qui seront du cinquième degré par rapport à s^2 , et du dixième par rapport à s . Donc les valeurs des facteurs

$$A, B, C, A', B', C',$$

déterminées par les formules (17), (18), vérifieront généralement les formules (15) et (16). Donc, lorsqu'on prendra pour s une racine de l'équation (13), elles vérifieront les formules (3) et (4), quelles que soient d'ailleurs les valeurs attribuées aux constantes

$$\alpha, \beta, \gamma, \alpha', \beta', \gamma',$$



et celles-ci demeurant arbitraires, les valeurs des rapports

$$\frac{B}{A}, \frac{C}{A}, \frac{A_1}{A}, \frac{B_1}{A}, \frac{C_1}{A},$$

propres à vérifier les formules (3) et (4), seront précisément celles que fournit la formule (19). Si l'on suppose en particulier les constantes

$$\alpha, \beta, \gamma, \alpha_1, \beta_1, \gamma_1,$$

toutes réduites à zéro, à l'exception d'une seule, la formule (19) donnera successivement

$$(20) \quad \begin{cases} \frac{A}{x} = \frac{B}{u} = \frac{C}{e} = \frac{A_1}{c_1} = \frac{B_1}{u_1} = \frac{C_1}{e_1}, \\ \frac{A}{u} = \frac{B}{m} = \frac{C}{p} = \frac{A_1}{u_1} = \frac{B_1}{m_1} = \frac{C_1}{p_1}, \\ \frac{A}{e} = \frac{B}{p} = \frac{C}{u} = \frac{A_1}{e_1} = \frac{B_1}{p_1} = \frac{C_1}{u_1}; \end{cases}$$

$$(21) \quad \begin{cases} \frac{A}{x} = \frac{B}{u} = \frac{C}{e} = \frac{A_1}{c_1} = \frac{B_1}{u_1} = \frac{C_1}{e_1}, \\ \frac{A}{u} = \frac{B}{m} = \frac{C}{p} = \frac{A_1}{u_1} = \frac{B_1}{m_1} = \frac{C_1}{p_1}, \\ \frac{A}{e} = \frac{B}{p} = \frac{C}{u} = \frac{A_1}{e_1} = \frac{B_1}{p_1} = \frac{C_1}{u_1}. \end{cases}$$

Les formules (1) et (2), lorsqu'on y suppose les constantes

$$s, \frac{B}{A}, \frac{C}{A}, \frac{A_1}{A}, \frac{B_1}{A}, \frac{C_1}{A}$$

déterminées en fonctions de

$$u, v, w,$$

par l'équation (13) jointe à la formule (19), ou, ce qui revient au même, à l'une des six formules (20) et (21), représentent ce qu'on peut nommer un système d'intégrales simples des équations (6) et (9) du paragraphe II. Les coefficients

$$u, v, w,$$

dans ces intégrales simples, restent entièrement arbitraires, ainsi que

la constante A. De plus, les valeurs des diverses constantes

$$u, v, w, s, A, B, C, A_1, B_1, C_1,$$

et, par suite, les valeurs des variables principales

$$\xi, \eta, \zeta, \xi_1, \eta_1, \zeta_1,$$

tirées des formules (1), (2), peuvent être réelles ou imaginaires. Dans le premier cas ces variables représenteront les déplacements infiniment petits des molécules dans un mouvement infiniment petit compatible avec la constitution des deux systèmes donnés. Dans le second cas, les parties réelles des variables principales vérifieront encore les équations des mouvements infiniment petits, et ce seront évidemment ces parties réelles qui pourront être censées représenter les déplacements infiniment petits des molécules dans un mouvement de vibration compatible avec la constitution des deux systèmes. Dans l'un et l'autre cas, le mouvement infiniment petit qui correspondra aux valeurs de

$$\xi, \eta, \zeta, \xi_1, \eta_1, \zeta_1,$$

fournies par les équations (1) et (2), sera un mouvement simple, dans lequel ces valeurs représenteront ou les déplacements effectifs des molécules, mesurés parallèlement aux axes coordonnés, ou leurs déplacements symboliques, c'est-à-dire les variables imaginaires dont les déplacements effectifs sont les parties réelles. Les équations (1), (2) elles-mêmes seront les équations finies, et dans le second cas les équations finies symboliques du mouvement simple dont il s'agit.

Si l'on pose

$$(22) \quad u = U + u\sqrt{-1}, \quad v = V + v\sqrt{-1}, \quad w = W + w\sqrt{-1},$$

$$(23) \quad s = S + s\sqrt{-1},$$

$$(24) \quad A = a e^{\lambda\sqrt{-1}}, \quad B = b e^{\mu\sqrt{-1}}, \quad C = c e^{\nu\sqrt{-1}},$$

$$(25) \quad A_1 = a_1 e^{\lambda_1\sqrt{-1}}, \quad B_1 = b_1 e^{\mu_1\sqrt{-1}}, \quad C_1 = c_1 e^{\nu_1\sqrt{-1}},$$

u, v, w, U, V, W, s, S, a, b, c, λ, μ, ν , $a_1, b_1, c_1, \lambda_1, \mu_1, \nu_1$, dési-



gnant des quantités réelles, et si d'ailleurs on fait, pour abrégér,

$$(26) \quad k = \sqrt{v^2 + v'^2 + w^2}, \quad K = \sqrt{U^2 + V^2 + W^2}.$$

$$(27) \quad kv = vx + vy + wz, \quad Ku = Ux + Vy + Wz.$$

les formules (1), (2) donneront

$$(28) \quad \begin{cases} \xi = a e^{kv - st} \cos(kv - st + \lambda), \\ \eta = b e^{kv - st} \cos(kv - st + \mu), \\ \zeta = c e^{kv - st} \cos(kv - st + \nu); \end{cases}$$

$$(29) \quad \begin{cases} \xi_1 = a_1 e^{kv - st} \cos(kv - st + \lambda_1), \\ \eta_1 = b_1 e^{kv - st} \cos(kv - st + \mu_1), \\ \zeta_1 = c_1 e^{kv - st} \cos(kv - st + \nu_1). \end{cases}$$

Comme la forme des équations (28) reste invariable, quel que soit le second système de molécules, et dans le cas même où ce second système disparaît, il en résulte qu'un mouvement simple, susceptible de se propager à travers deux systèmes moléculaires qui se pénètrent mutuellement, est, pour chacun de ces deux systèmes, de la même nature qu'un mouvement simple capable de se propager à travers un système unique, et se réduit toujours à un mouvement par ondes planes, dans lequel chaque molécule décrit une droite, un cercle, ou une ellipse. C'est d'ailleurs ce que démontrent évidemment les formules suivantes.

On tire des équations (28):

1° Lorsque λ, μ, ν sont égaux

$$(30) \quad \frac{\xi}{a} = \frac{\eta}{b} = \frac{\zeta}{c};$$

2° Lorsque λ, μ, ν ne sont pas égaux

$$(31) \quad \begin{cases} \frac{\xi}{a} \sin(\mu - \nu) + \frac{\eta}{b} \sin(\nu - \lambda) + \frac{\zeta}{c} \sin(\lambda - \mu) = 0, \\ \left(\frac{\eta}{b}\right)^2 - 2 \frac{\eta}{b} \frac{\zeta}{c} \cos(\mu - \nu) + \left(\frac{\zeta}{c}\right)^2 = e^{2kv - 2st} \sin^2(\mu - \nu). \end{cases}$$

Pareillement on tire des équations (29):

1° Lorsque λ, μ, ν , sont égaux

$$(32) \quad \frac{\xi_1}{a_1} = \frac{\eta_1}{b_1} = \frac{\zeta_1}{c_1};$$

2° Lorsque λ, μ, ν , ne sont pas égaux

$$(33) \quad \begin{cases} \frac{\xi_1}{a_1} \sin(\mu_1 - \nu_1) + \frac{\eta_1}{b_1} \sin(\nu_1 - \lambda_1) + \frac{\zeta_1}{c_1} \sin(\lambda_1 - \mu_1) = 0, \\ \left(\frac{\eta_1}{b_1}\right)^2 - 2 \frac{\eta_1}{b_1} \frac{\zeta_1}{c_1} \cos(\mu_1 - \nu_1) + \left(\frac{\zeta_1}{c_1}\right)^2 = e^{2k_1 v_1 - 2s_1 t_1} \sin^2(\mu_1 - \nu_1). \end{cases}$$

Donc la ligne décrite par chaque molécule du premier ou du second système est toujours une droite représentée par les formules (30) ou (32), ou bien une ellipse représentée par les formules (31) ou (33), cette ellipse pouvant se réduire à une circonférence de cercle. Le plan invariable, auquel le plan de l'ellipse reste constamment parallèle, est d'ailleurs représenté, pour le premier système de molécules, par l'équation

$$(34) \quad \frac{x}{a} \sin(\mu - \nu) + \frac{y}{b} \sin(\nu - \lambda) + \frac{z}{c} \sin(\lambda - \mu) = 0,$$

et, pour le second système de molécules, par l'équation

$$(35) \quad \frac{x_1}{a_1} \sin(\mu_1 - \nu_1) + \frac{y_1}{b_1} \sin(\nu_1 - \lambda_1) + \frac{z_1}{c_1} \sin(\lambda_1 - \mu_1) = 0.$$

Ajoutons que l'aire décrite, au bout du temps t , par le rayon vecteur de l'ellipse est représentée, dans le premier système de molécules, par l'expression

$$(36) \quad \frac{s}{4S} e^{2kv} (1 - e^{-2st}) \sqrt{[b^2 c^2 \sin^2(\mu - \nu) + c^2 a^2 \sin^2(\nu - \lambda) + a^2 b^2 \sin^2(\lambda - \mu)]}$$

et, dans le second système, par l'expression

$$(37) \quad \frac{s_1}{4S_1} e^{2k_1 v_1} (1 - e^{-2s_1 t_1}) \sqrt{[b_1^2 c_1^2 \sin^2(\mu_1 - \nu_1) + c_1^2 a_1^2 \sin^2(\nu_1 - \lambda_1) + a_1^2 b_1^2 \sin^2(\lambda_1 - \mu_1)]}.$$

Donc le rapport entre les aires décrites par les rayons vecteurs des ellipses, que parcourent deux molécules correspondantes des deux

systèmes donnés, reste le même à tous les instants et dans tous les points de l'espace. Enfin, dans le cas particulier où S s'évanouit, c'est-à-dire où le mouvement simple est durable et persistant, chacune de ces aires croît proportionnellement au temps, puisqu'on a dans ce cas

$$\frac{1 - e^{-2St}}{2S} = t.$$

Si, en nommant

$$a, b, c$$

les cosinus des angles formés par un axe fixe avec les demi-axes des coordonnées positives, on nomme

$$x \text{ et } y,$$

les déplacements des molécules du premier et du second système, mesurés parallèlement à l'axe fixe, on aura

$$(38) \quad x = a\xi + b\eta + c\xi, \quad y = a\xi_1 + b\eta_1 + c\xi_1,$$

et, en posant pour abrégir

$$\begin{aligned} a a \cos \lambda + b b \cos \mu + c c \cos \nu &= h \cos \omega, & a a \sin \lambda + b b \sin \mu + c c \sin \nu &= h \sin \omega, \\ a a \cos \lambda_1 + b b \cos \mu_1 + c c \cos \nu_1 &= h_1 \cos \omega_1, & a a \sin \lambda_1 + b b \sin \mu_1 + c c \sin \nu_1 &= h_1 \sin \omega_1, \end{aligned}$$

on tirera des formules (28) et (29)

$$(39) \quad x = h e^{ks - st} \cos(kv - st + \omega),$$

$$(40) \quad y = h_1 e^{k_1 s - s_1 t} \cos(k_1 v_1 - s_1 t + \omega_1).$$

En vertu de ces dernières équations, le déplacement d'une molécule mesuré parallèlement à un axe fixe quelconque, s'évanouit pour chaque système : 1° à un instant donné, dans une suite de plans équidistants parallèles au plan invariable que représente la formule $v = 0$, ou

$$(41) \quad vx + vy + wz = 0.$$

la distance entre deux plans consécutifs étant la moitié de la longueur

$$(42) \quad l = \frac{2\pi}{k},$$

2° pour une molécule donnée, à des instants séparés les uns des autres par la moitié de l'intervalle

$$(43) \quad T = \frac{2\pi}{s}.$$

Ainsi cette distance et cet intervalle, qui représentent l'épaisseur d'une onde plane, ou la *longueur d'une ondulation*, et la *durée d'une vibration moléculaire*, restent les mêmes pour les deux systèmes, comme le plan invariable auquel les plans de toutes les ondes sont parallèles. On peut en dire autant, non seulement de la quantité Ω déterminée par la formule

$$(44) \quad \Omega = \frac{s}{k} = \frac{1}{T},$$

c'est-à-dire de la vitesse de propagation des ondes planes, mais aussi de l'exponentielle

$$e^{ks - st},$$

qui représente le *module* du mouvement simple, et du binôme

$$kv - st,$$

qui en représente l'*argument*.

Observons encore qu'en vertu des formules (39) et (40), l'*amplitude* des vibrations moléculaires, mesurée parallèlement à un axe fixe donné, sera représentée, pour le premier système, par le produit

$$2h e^{ks - st}$$

et, pour le second système, par le produit

$$2h_1 e^{k_1 s - s_1 t}.$$

Cette amplitude variera donc en général, dans le passage d'un système à l'autre, avec le *paramètre angulaire* qui correspondra au même axe fixe, et qui sera représenté par ω pour le premier système, par ω_1 pour le second. Toutefois le rapport des amplitudes calculées pour deux molécules correspondantes des deux systèmes, étant constamment égal au rapport $\frac{h}{h_1}$, restera le même partout et à tous les instants. Si K

et S se réduisent tous deux à zéro, les formules (39), (40) se réduiront à

$$(45) \quad x = h \cos(kv - st + \omega),$$

$$(46) \quad y = h_1 \cos(kv - st + \omega_1),$$

et les amplitudes des vibrations moléculaires représentées par

$$2h \text{ et } 2h_1,$$

deviendront constantes. Enfin le mouvement s'éteindra dans les deux systèmes pour des valeurs infinies de t , si la constante S diffère de zéro, et pour des valeurs infinies de n , si la constante K diffère de zéro. Ajoutons que, dans cette dernière hypothèse, les amplitudes des vibrations moléculaires décroîtront en progression géométrique avec le module

$$e^{kn-st},$$

tandis que l'on fera croître en progression arithmétique les distances au plan invariable représenté par l'équation $x = 0$, ou

$$(47) \quad Ux + Vy + Wz = 0.$$

D'après ce qu'on vient de dire, dans un mouvement simple de deux systèmes de molécules qui se pénètrent mutuellement, il existe, pour chacun de ces deux systèmes, trois plans invariables, et parallèles, le premier aux plans des courbes décrites par les diverses molécules, le second aux plans des ondes, le troisième à tout plan dans lequel se trouvent renfermées des molécules qui exécutent des vibrations de même amplitude. D'ailleurs, de ces trois plans le second reste commun, ainsi que le troisième, aux deux systèmes de molécules, mais on ne saurait, du moins en général, en dire autant du premier.

Quant aux intégrales générales des équations (6), (9), du paragraphe II, on les obtiendra sans peine à l'aide des méthodes qui feront l'objet du Mémoire suivant.

MÉMOIRE

SUR

L'INTÉGRATION DES ÉQUATIONS LINÉAIRES.

Considérations générales.

C'est de l'intégration des *équations linéaires*, et surtout des équations linéaires à *coefficients constants* que dépend la solution d'un grand nombre de problèmes de Physique mathématique. Dans ces problèmes, les variables indépendantes que renferment les équations linéaires *différentielles* ou aux *différences partielles* sont ordinairement au nombre de quatre, savoir, les coordonnées et le temps; mais les inconnues ou *variables principales* peuvent être en nombre quelconque, et la question consiste à trouver les *valeurs générales* des variables principales quand on connaît leurs *valeurs initiales* correspondantes à un premier instant, et les valeurs initiales de leurs dérivées. Supposons, pour fixer les idées, ces valeurs initiales connues, quelles que soient les coordonnées. Alors la question pourrait à la rigueur se résoudre, pour un système d'équations différentielles linéaires et à coefficients constants, à l'aide des méthodes données par Lagrange, dans le cas même où ces équations offriraient pour seconds membres des fonctions de la variable indépendante. Car, après avoir réduit par l'élimination les variables principales à une seule, on pourrait, à l'aide de ces méthodes, exprimer la variable principale en fonction de la variable indépendante et de constantes arbitraires, puis assujettir la variable principale et ses dérivées à fournir les valeurs initiales données; ce qui permettrait de fixer les valeurs des constantes arbi-



traies, à l'aide d'équations simultanées du premier degré. On sait d'ailleurs qu'en suivant la méthode de Lagrange on obtient, pour valeur générale de la variable principale, une fonction dans laquelle entrent avec la variable principale les racines d'une certaine équation que j'appellerai *l'équation caractéristique*, le degré de cette équation étant précisément l'ordre de l'équation différentielle qu'il s'agit d'intégrer. On peut donc dire, en un certain sens, que la méthode de Lagrange réduit l'intégration d'une équation différentielle linéaire à coefficients constants à la résolution de l'équation caractéristique. Toutefois, on doit observer : 1° que Lagrange est forcé lui-même de modifier sa méthode dans le cas où l'équation caractéristique offre des racines égales ; 2° qu'il est bien dur pour un géomètre, qui veut suivre cette méthode, de se croire obligé à introduire dans le calcul des constantes arbitraires qui doivent être éliminées plus tard, et remplacées par les valeurs initiales de la variable principale et de ses dérivées ; 3° qu'il y a même quelque inconvénient, sous le rapport de la complication des calculs, à commencer par réduire un système d'équations différentielles données à une seule, qui renferme une seule variable principale, sauf à revenir par un calcul inverse de la valeur générale de cette variable principale aux valeurs de toutes les autres. Il m'a donc paru qu'un service important à rendre non seulement aux géomètres, mais encore aux physiciens, serait de leur fournir les moyens d'exprimer immédiatement les valeurs générales des variables principales, qui doivent vérifier un système d'équations différentielles linéaires à coefficients constants, en fonction de la variable indépendante et des valeurs initiales des variables principales et de leurs dérivées, sans avoir à établir aucune distinction et à s'occuper séparément du cas où l'équation caractéristique offre deux, trois, quatre . . . racines égales. J'ai déjà fait voir, dans les *Exercices des Mathématiques*, avec quelle facilité on atteint ce but à l'aide du calcul des résidus, quand on considère une seule variable principale déterminée par une seule équation différentielle. Je vais montrer dans ce Mémoire qu'à l'aide du même calcul on peut encore arriver au même but pour un système quelconque d'équa-

tions linéaires et à coefficients constants. La simplicité de la solution est telle qu'elle ne peut manquer, ce me semble, d'être favorablement accueillie par tous ceux qui redoutent la longueur et la complication des calculs, et qui attachent quelque prix à l'élégance ainsi qu'à la généralité des formules. Il y a plus : la méthode que je propose ici peut être étendue et appliquée à l'intégration d'un système d'équations linéaires aux différences partielles et à coefficients constants. Pour opérer cette extension, il suffit de recourir aux principes que j'ai développés dans le XIX^e Cahier du *Journal de l'École Polytechnique*, et dans mes leçons au Collège de France. En conséquence, étant donné un système d'équations linéaires aux différences partielles et à coefficients constants entre les coordonnées, le temps et plusieurs variables principales, avec les fonctions qui représentent les valeurs initiales de ces variables principales et de leurs dérivées, on pourra immédiatement exprimer, au bout d'un temps quelconque, les variables principales en fonction des variables indépendantes, et des racines d'une certaine équation que je continuerai de nommer *l'équation caractéristique*. Ainsi, dans la Physique mathématique, on n'aura plus à s'occuper de rechercher séparément les intégrales qui représentent le mouvement du son, de la chaleur, les vibrations des corps élastiques, etc. La question devra être censée résolue dans tous les cas dès que l'on sera parvenu aux équations différentielles ou aux différences partielles. Seulement les intégrales obtenues seront, dans certains cas, réductibles à des formes plus simples que celles sous lesquelles elles se présentent d'abord. Mais, comme on le verra plus tard, et comme je l'ai déjà expliqué ailleurs, en traitant de l'intégration d'une seule équation linéaire, on peut établir, pour cette réduction même, des règles générales. C'est ainsi, par exemple, que l'intégrale définie sextuple, à l'aide de laquelle s'exprime la valeur générale de la variable principale d'une seule équation aux différences partielles, se réduit à une intégrale définie quadruple, dans le cas où cette équation devient homogène, ou même à une intégrale double, quand le premier membre de l'équation caractéristique est décomposable en facteurs du second



degré. On peut consulter à ce sujet, dans le *Bulletin des Sciences* d'avril 1830, l'extrait d'un Mémoire que j'avais présenté cette même année à l'Académie.

Parmi les conséquences dignes de remarque qui se déduisent de la méthode d'intégration exposée dans le présent Mémoire, je citerai la suivante :

Étant donné un système d'équations linéaires aux différences partielles et à coefficients constants entre les coordonnées, le temps, et plusieurs variables principales avec les valeurs initiales de ces variables principales et de leurs dérivées, on peut réduire la recherche des valeurs générales des variables principales à l'évaluation d'une intégrale définie sextuple relative à six variables auxiliaires, la fonction sous le signe \int étant proportionnelle à une exponentielle dont l'exposant est une fonction linéaire des variables indépendantes, et réciproquement proportionnelle au premier membre de l'équation caractéristique.

En appliquant la méthode développée dans le présent Mémoire aux équations à différences partielles qui représentent le mouvement des ondes, du son, de la chaleur, des corps élastiques, ... et généralement les vibrations d'un système de molécules sollicitées par des forces d'attraction ou de répulsion mutuelle, on retrouve les intégrales connues, dont les unes ont été données par M. Poisson, et les autres par moi-même, soit dans mes anciens Mémoires, soit dans ceux que j'ai présentés récemment à l'Académie. J'ajouterai que la même méthode, appliquée aux équations différentielles contenues dans mes derniers Mémoires, fournira généralement les intégrales des mouvements infiniment petits de deux ou de plusieurs systèmes de molécules qui se pénétreraient mutuellement, dans le cas où l'on regarde comme constants les coefficients renfermés dans ces équations différentielles.

§ 1^{er}. — *Intégration d'un système d'équations différentielles du premier ordre, linéaires et à coefficients constants.*

Considérons n équations différentielles du premier ordre linéaires et à coefficients constants, entre n variables principales

$$\xi, \eta, \zeta, \dots$$

considérées comme fonctions d'une seule variable indépendante t qui pourra désigner le temps. Supposons ces équations, présentées sous une forme telle qu'elles fournissent respectivement les valeurs de

$$\frac{d\xi}{dt}, \frac{d\eta}{dt}, \frac{d\zeta}{dt}, \dots;$$

de sorte que, en faisant passer tous les termes dans les premiers membres, on les réduise à

$$(1) \quad \begin{cases} \frac{d\xi}{dt} + \mathcal{L}\xi + \mathcal{M}\eta + \dots = 0, \\ \frac{d\eta}{dt} + \mathcal{P}\xi + \mathcal{Q}\eta + \dots = 0, \\ \dots \dots \dots \end{cases}$$

ou, ce qui revient au même, à

$$(2) \quad \begin{cases} (D_t + \mathcal{L})\xi + \mathcal{M}\eta + \dots = 0, \\ \mathcal{P}\xi + (D_t + \mathcal{Q})\eta + \dots = 0, \\ \dots \dots \dots \end{cases}$$

$\mathcal{L}, \mathcal{M}, \dots, \mathcal{P}, \mathcal{Q}, \dots$ étant des coefficients constants. On vérifiera évidemment les équations (1) ou (2) si l'on prend

$$(3) \quad \xi = A e^{st}, \quad \eta = B e^{st}, \quad \dots,$$

s, A, B, \dots désignant des constantes réelles ou imaginaires, choisies de manière à vérifier les formules

$$(4) \quad \begin{cases} (s + \mathcal{L})A + \mathcal{M}B + \dots = 0, \\ \mathcal{P}A + (s + \mathcal{Q})B + \dots = 0, \\ \dots \dots \dots \end{cases}$$

qu'on obtient en remplaçant, dans les équations (2), D_i par s , et

$$\xi, \eta, \dots \text{ par } A, B, \dots$$

D'ailleurs, comme l'élimination des facteurs A, B, C, \dots entre les formules (4), fournira une *équation caractéristique*

$$(5) \quad s = 0,$$

qui sera du degré n par rapport à s , la valeur de s étant

$$(6) \quad s = (s + \zeta)(s + \eta) \dots - \mathfrak{R}\mathfrak{P} \dots + \dots$$

on pourra, dans les formules (3), prendre pour s une quelconque des n racines de l'équation (5). Il y a plus : comme, étant donnés, pour les variables principales, deux ou plusieurs systèmes de valeurs propres à vérifier les équations (1), on obtiendra de nouvelles intégrales de ces mêmes équations en ajoutant l'une à l'autre les diverses valeurs de chaque variable principale, il est clair qu'on vérifiera encore les équations (1) en posant

$$(7) \quad \xi = \int \frac{A e^{st}}{((8))}, \quad \eta = \int \frac{B e^{st}}{((8))}, \quad \dots,$$

pourvu que, le signe c du calcul des résidus étant relatif aux diverses racines de l'équation caractéristique, on prenne pour

$$A, B, C, \dots$$

des fonctions entières de s , propres à vérifier les formules (4). Or, on obtiendra de telles valeurs, en substituant aux équations (4) les suivantes

$$(8) \quad \begin{cases} (s + \zeta)A + \mathfrak{R}B + \dots = \alpha s, \\ \mathfrak{P}A + (s + \eta)B + \dots = \beta s, \\ \dots \end{cases}$$

qui s'accordent avec elles, quand on prend pour s une racine de l'équation caractéristique, quelles que soient d'ailleurs les valeurs attribuées aux nouvelles constantes

$$\alpha, \beta, \gamma, \dots$$

Soient en conséquence

$$(9) \quad \begin{cases} A = \zeta\alpha + \mathfrak{M}\beta + \dots, \\ B = \mathfrak{P}\alpha + \mathfrak{Q}\beta + \dots, \\ \dots \end{cases}$$

les valeurs de A, B, C, \dots tirées des formules (8), ou, ce qui revient au même, les numérateurs des fractions qui représentent les valeurs de A, B, C, \dots déterminées par les formules

$$(10) \quad \begin{cases} (s + \zeta)A + \mathfrak{R}B + \dots = \alpha, \\ \mathfrak{P}A + (s + \eta)B + \dots = \beta, \\ \dots \end{cases}$$

et qui offrent s pour commun dénominateur. On vérifiera les équations (1) en prenant

$$(11) \quad \xi = \int \frac{(\zeta\alpha + \mathfrak{M}\beta + \dots)e^{st}}{((8))}, \quad \eta = \int \frac{(\mathfrak{P}\alpha + \mathfrak{Q}\beta + \dots)e^{st}}{((8))}, \quad \dots$$

On remarquera maintenant que, dans les formules (9), les facteurs

$$\zeta, \mathfrak{M}, \dots, \mathfrak{P}, \mathfrak{Q}, \dots,$$

considérés comme fonctions de s , sont tous du degré $n - 2$, à l'exception de ceux qui servent de coefficients, dans la valeur A à α , dans la valeur de B à β , ... c'est-à-dire à l'exception des coefficients

$$\zeta, \mathfrak{Q}, \dots,$$

qui seront du degré $n - 1$, et qui, étant développés suivant les puissances descendantes de s , donneront chacun pour premier terme

$$s^{n-1}.$$

D'ailleurs le développement de s offrira pour premier terme s^n ; et l'on aura, en vertu des principes du calcul des résidus : 1° en prenant pour m un nombre entier inférieur à $n - 1$,

$$(12) \quad \int \frac{s^m}{((8))} = 0;$$

2° en prenant $m = n - 1$,

$$(13) \quad \int \frac{s^{n-1}}{((s))} = 1.$$

Cela posé, on aura évidemment

$$(14) \quad \begin{cases} \int \frac{c}{((s))} = 1, & \int \frac{m}{((s))} = 0, & \dots \\ \int \frac{p}{((s))} = 0, & \int \frac{e}{((s))} = 1, & \dots \end{cases}$$

Donc les formules (7) donneront, pour $t = 0$,

$$(15) \quad \xi = \alpha, \quad \eta = \varepsilon, \quad \dots$$

et réciproquement, si l'on veut que les variables principales

$$\xi, \eta, \zeta, \dots$$

soient assujetties à la double condition de vérifier, quel que soit t , les équations (1), et de vérifier, pour $t = 0$, les formules (15), il suffira de prendre pour ces variables les valeurs que fournissent les formules (11).

Il est bon d'observer que si l'on désigne par

$$L, M, \dots, P, Q, \dots$$

les fonctions de la caractéristique D , dans lesquelles se transforment les facteurs

$$c, m, \dots, p, e, \dots$$

quand on y remplace s par cette caractéristique, les formules (11) pourront s'écrire comme il suit :

$$(16) \quad \xi = (\alpha L + \varepsilon M + \dots) \int \frac{e^{st}}{((s))}, \quad \eta = (\alpha P + \varepsilon Q + \dots) \int \frac{e^{st}}{((s))}, \quad \dots$$

Donc, si l'on pose, pour abrégér,

$$(17) \quad \theta = \int \frac{e^{st}}{((s))},$$

on aura simplement

$$(18) \quad \xi = (\alpha L + \varepsilon M + \dots)\theta, \quad \eta = (\alpha P + \varepsilon Q + \dots)\theta, \quad \dots$$

Si l'on représente par

$$\nabla$$

ce que devient s , quand on y remplace la lettre s par la caractéristique D , la fonction θ déterminée par la formule (17) ne sera évidemment autre chose qu'une nouvelle variable principale assujettie : 1° à vérifier, quel que soit t , l'équation différentielle de l'ordre n ,

$$(19) \quad \nabla \theta = 0;$$

2° à vérifier, pour $t = 0$, les conditions

$$(20) \quad \theta = 0, \quad \frac{d\theta}{dt} = 0, \quad \dots, \quad \frac{d^{n-2}\theta}{dt^{n-2}} = 0, \quad \frac{d^{n-1}\theta}{dt^{n-1}} = 1.$$

Cette fonction est ce que nous appellerons la *fonction principale*. Quant aux valeurs de

$$\xi, \eta, \zeta,$$

déterminées par les formules (18), elles ne différeront pas de celles que l'on déduirait par élimination des équations différentielles

$$(21) \quad \begin{cases} (D_t + L)\xi + M\eta + \dots = \alpha \nabla \theta, \\ P\xi + (D_t + Q)\eta + \dots = \varepsilon \nabla \theta, \\ \dots \end{cases}$$

en opérant comme si D_t et ∇ étaient de véritables quantités. D'ailleurs, pour obtenir les formules (21), il suffira d'égaliser le premier membre de chacune des équations différentielles données, non plus à zéro, mais au produit de $\nabla \theta$ par ce que devient ce premier membre, quand on remplace les variables principales

$$\xi, \eta, \zeta, \dots$$

par zéro, et leurs dérivées par les valeurs initiales

$$\alpha, \varepsilon, \gamma, \dots$$

de ces variables principales ; en d'autres termes, il suffira de remplacer, dans les équations différentielles données, les dérivées

$$D_t \xi, D_t \eta, \dots$$

par les différences

$$D_1\xi - z\nabla\theta, \quad D_1\eta - z\nabla\theta, \quad \dots$$

Enfin, il est aisé de s'assurer que, pour passer des équations différentielles données à des équations intégrales qui fournissent immédiatement les valeurs générales de ξ, η, ζ, \dots , on devra suivre encore la règle que nous venons d'indiquer, dans le cas même où les équations données, étant linéaires du premier ordre et à coefficients constants, ne seraient pas ramenées primitivement à la forme sous laquelle se présentent les équations (1) ou (2). On peut donc énoncer la proposition suivante :

THEOREME. — Supposons que les n variables principales

$$\xi, \eta, \zeta, \dots$$

soient assujetties : 1° à vérifier n équations différentielles linéaires du premier ordre à coefficients constants, c'est-à-dire n équations dont les premiers membres soient des fonctions linéaires de ces variables principales et de leurs dérivées

$$\frac{d\xi}{dt}, \frac{d\eta}{dt}, \frac{d\zeta}{dt}, \dots$$

prises par rapport à la variable indépendante t , les seconds membres étant nuls ; 2° à vérifier, pour une valeur nulle de t , les équations de condition

$$\xi = \alpha, \quad \eta = \beta, \quad \zeta = \gamma, \quad \dots$$

Pour obtenir les valeurs générales de

$$\xi, \eta, \zeta, \dots,$$

on écrira les dérivées

$$\frac{d\xi}{dt}, \frac{d\eta}{dt}, \frac{d\zeta}{dt}, \dots,$$

sous les formes

$$D_1\xi, \quad D_1\eta, \quad D_1\zeta, \quad \dots;$$

puis on recherchera l'équation

$$\nabla = 0.$$

qui résulterait de l'élimination des variables principales ξ, η, ζ, \dots entre les équations différentielles données si l'on considérait D , comme désignant une quantité véritable ; et à cette équation $\nabla = 0$, dont le premier membre ∇ sera une fonction de D , du degré n , qui pourra être choisie de manière à offrir pour premier terme D^n , on substituera la formule

$$\nabla\theta = 0,$$

que l'on regardera comme une équation différentielle de l'ordre n entre la variable indépendante t , et la fonction principale θ . Enfin on déterminera cette fonction principale de telle sorte que, pour $t = 0$, elle s'évanouisse avec ses dérivées d'un ordre inférieur à $n - 1$, la dérivée de l'ordre $n - 1$ se réduisant à l'unité ; et l'on égalera le premier membre de chacune des équations différentielles données, non plus à zéro, mais au produit de $\nabla\theta$ par ce que devient ce premier membre quand on y remplace les variables principales ξ, η, ζ, \dots par zéro, et leurs dérivées

$$\frac{d\xi}{dt}, \frac{d\eta}{dt}, \frac{d\zeta}{dt}, \dots$$

par les valeurs initiales

$$\alpha, \beta, \gamma, \dots$$

de ces mêmes variables. Les nouvelles équations différentielles ainsi formées, étant résolues par rapport à

$$\xi, \eta, \zeta, \dots$$

comme si D , désignait une quantité véritable, fourniront immédiatement les valeurs générales de ξ, η, ζ, \dots exprimées au moyen de la fonction principale et de ses dérivées relatives à t .

Ce théorème, qui ramène simplement l'intégration d'un système d'équations différentielles linéaires, à coefficients constants et du premier ordre, à la recherche de la fonction principale, devient surtout utile dans l'intégration des équations aux différences partielles, comme nous le verrons plus tard. Il est d'ailleurs facile de l'établir directement et de s'assurer qu'il fournit pour les variables principales

ξ, η, ζ, \dots des valeurs qui satisfont à toutes les conditions requises. En effet, dire que les valeurs de

$$\xi, \eta, \zeta, \dots$$

données par les formules (18), sont celles que l'on tire des équations (21), quand on opère comme si D_t était une quantité véritable, c'est dire que l'on a

$$\begin{aligned} (D_t + \zeta)(\alpha L + \beta M + \dots) + \beta R(\alpha P + \beta Q + \dots) + \dots = \alpha V, \\ \alpha(\alpha L + \beta M + \dots) + (D_t + \varrho)(\alpha P + \beta Q + \dots) + \dots = \beta V, \\ \dots \dots \dots \end{aligned}$$

quels que soient α, β, \dots ; en d'autres termes, c'est dire que l'on a identiquement

$$(22) \begin{cases} (D_t + \zeta)L + \beta R P + \dots = V, & (D_t + \zeta)M + \beta R Q + \dots = 0, & \dots \\ \alpha L + (D_t + \varrho)P + \dots = 0, & \alpha M + (D_t + \varrho)Q + \dots = V, & \dots \\ \dots \dots \dots \end{cases}$$

Or il est clair qu'en vertu des formules (19) et (22) on vérifiera les équations (2), si l'on y substitue les valeurs ξ, η, ζ, \dots fournies par les équations (18). De plus, V étant une fonction entière de D_t choisie de manière que dans cette fonction la plus haute puissance de D_t , savoir D_t^n , offre pour coefficient l'unité; si l'on regarde D_t comme une quantité véritable, on aura, pour des valeurs infiniment grandes de cette quantité,

$$\frac{V}{D_t^n} = 1,$$

et par suite, en vertu des formules (22) divisées par D_t^n ,

$$\begin{aligned} \frac{L}{D_t^{n-1}} = 1, & \quad \frac{M}{D_t^{n-1}} = 0, & \dots \\ \frac{P}{D_t^{n-1}} = 0, & \quad \frac{Q}{D_t^{n-1}} = 1, & \dots \\ \dots \dots \dots \end{aligned}$$

Donc parmi ces fonctions entières de D_t désignées par

$$L, M, \dots, P, Q, \dots,$$

les unes, savoir

$$L, Q, \dots$$

seront du degré $n - 1$ et offriront D_t^{n-1} pour premier terme, tandis que les autres seront d'un degré inférieur à $n - 1$. Done, en vertu des formules (20), on aura, pour $t = 0$,

$$\begin{aligned} L\theta = 1, & \quad M\theta = 0, & \dots \\ P\theta = 0, & \quad Q\theta = 1, & \dots \\ \dots \dots \dots \end{aligned}$$

D_t étant considéré non plus comme une quantité, mais comme une caractéristique, et les valeurs de

$$\xi, \eta, \zeta, \dots$$

fournies par les équations (18), vérifieront les conditions (15).

§ II. — *Intégration d'un système d'équations différentielles du premier ordre, linéaires et à coefficients constants, dans le cas où les seconds membres, au lieu de se réduire à zéro, deviennent des fonctions de la variable indépendante.*

Supposons que, dans les équations (1) du paragraphe I^{er}, les seconds membres, d'abord nuls, se transforment en diverses fonctions

$$X, Y, Z, \dots$$

de la variable indépendante t , en sorte que ces équations deviennent respectivement

$$(1) \begin{cases} \frac{d\xi}{dt} + \zeta\xi + \beta R \eta + \dots = X, \\ \frac{d\eta}{dt} + \alpha\xi + \varrho\eta + \dots = Y, \\ \dots \dots \dots \end{cases}$$

ou, ce qui revient au même,

$$(2) \begin{cases} (D_t + \zeta)\xi + \beta R \eta + \dots = X, \\ \alpha\xi + (D_t + \varrho)\eta + \dots = Y, \\ \dots \dots \dots \end{cases}$$

Si l'on veut obtenir des valeurs des variables principales qui aient la double propriété de vérifier ces nouvelles équations, et de s'évanouir pour $t = 0$, il suffira évidemment de remplacer, dans les formules (11) du paragraphe précédent, les constantes

$$\alpha, \beta, \dots$$

par les intégrales

$$\int_0^t X e^{-st} dt, \int_0^t Y e^{-st} dt, \dots$$

En effet, on opérant ainsi et désignant par

$$\mathcal{X}, \mathcal{Y}, \dots$$

ce que deviennent

$$X, Y, \dots$$

quand on y remplace la variable indépendante t par une variable auxiliaire τ , on trouvera

$$(3) \quad \begin{cases} \xi = \int_0^t \frac{(\mathcal{L}\mathcal{X} + \mathcal{M}\mathcal{Y} + \dots) e^{s(t-\tau)} d\tau}{((8))}, \\ \eta = \int_0^t \frac{(\mathcal{P}\mathcal{X} + \mathcal{Q}\mathcal{Y} + \dots) e^{s(t-\tau)} d\tau}{((8))}, \\ \dots \end{cases}$$

Or il est clair : 1° que les valeurs précédentes des variables principales s'évanouissent pour $t = 0$; 2° qu'elles vérifieront les équations (1), en vertu des formules (14) du paragraphe I^{er}, si l'on a identiquement

$$(4) \quad \begin{cases} (s + \mathcal{L})(\mathcal{L}\mathcal{X} + \mathcal{M}\mathcal{Y} + \dots) + \mathcal{M}(\mathcal{P}\mathcal{X} + \mathcal{Q}\mathcal{Y} + \dots) + \dots = 0, \\ \mathcal{Q}(\mathcal{L}\mathcal{X} + \mathcal{M}\mathcal{Y} + \dots) + (s + \mathcal{Q})(\mathcal{P}\mathcal{X} + \mathcal{Q}\mathcal{Y} + \dots) + \dots = 0, \\ \dots \end{cases}$$

D'ailleurs ces dernières équations seront effectivement identiques, attendu que les valeurs de A, B, C, ... fournies par les équations (9) du paragraphe I^{er}, vérifient les formules (4) du même paragraphe, indépendamment des valeurs attribuées aux facteurs α, β, \dots et par conséquent dans le cas même où l'on remplacerait

$$\alpha, \beta, \dots \quad \text{par} \quad \mathcal{X}, \mathcal{Y}, \dots$$

Si maintenant on veut obtenir pour les variables principales

$$\xi, \eta, \zeta, \dots,$$

des valeurs qui aient la double propriété de vérifier, quel que soit t , les équations (1), et de se réduire aux constantes

$$\alpha, \beta, \gamma, \dots$$

pour $t = 0$, il suffira évidemment d'ajouter les valeurs ζ, η, \dots , fournies par les équations (3), à celles que donnent les formules (11) du paragraphe I^{er}. On trouvera ainsi

$$(5) \quad \begin{cases} \xi = \int_0^t \frac{(\mathcal{L}\alpha + \mathcal{M}\beta + \dots) e^{st}}{((8))} + \int_0^t \frac{(\mathcal{L}\mathcal{X} + \mathcal{M}\mathcal{Y} + \dots) e^{s(t-\tau)} d\tau}{((8))}, \\ \eta = \int_0^t \frac{(\mathcal{P}\alpha + \mathcal{Q}\beta + \dots) e^{st}}{((8))} + \int_0^t \frac{(\mathcal{P}\mathcal{X} + \mathcal{Q}\mathcal{Y} + \dots) e^{s(t-\tau)} d\tau}{((8))}, \\ \dots \end{cases}$$

Il y a plus : si l'on nomme Θ la fonction principale déterminée par la formule

$$(6) \quad \Theta = \int_0^t \frac{e^{st}}{((8))},$$

et \bar{c} ce que devient cette fonction quand on y remplace la variable indépendante t par la différence $t - \tau$, en sorte qu'on ait

$$(7) \quad \bar{c} = \int_0^{t-\tau} \frac{e^{s\tau}}{((8))};$$

si d'ailleurs, comme dans le paragraphe I^{er}, on désigne par

$$L, M, \dots, P, Q, \dots$$

les fonctions de D, dans lesquelles se transforment les facteurs

$$\mathcal{L}, \mathcal{M}, \dots, \mathcal{P}, \mathcal{Q}, \dots$$

quand on y remplace s par D , les formules (5) donneront simplement

$$(8) \quad \begin{cases} \xi = (\alpha L + \varepsilon M + \dots)\theta + \int_0^t (\alpha L + \varepsilon M + \dots)\varepsilon d\tau, \\ \eta = (\alpha P + \varepsilon Q + \dots)\theta + \int_0^t (\alpha P + \varepsilon Q + \dots)\varepsilon d\tau, \\ \dots \end{cases}$$

D'autre part, si l'on fait pour abrégier

$$(9) \quad \Xi = (\alpha L + \varepsilon M + \dots)\varepsilon, \quad \Pi = (\alpha P + \varepsilon Q + \dots)\varepsilon, \quad \dots$$

Ξ, Π, \dots représenteront de nouvelles variables assujetties : 1° à vérifier, quel que soit t , les formules

$$(10) \quad \begin{cases} (D_t + \zeta)\Xi + \mathfrak{M}\Pi + \dots = 0, \\ \mathfrak{Q}\Xi + (D_t + \mathfrak{Q})\Pi + \dots = 0, \\ \dots \end{cases}$$

2° à vérifier, pour $t - \tau = 0$, ou, ce qui revient au même, pour $\tau = t$, les conditions

$$(11) \quad \Xi = \alpha = X, \quad \Pi = \varepsilon = Y, \quad \dots$$

et les intégrales

$$\int_0^t \Xi d\tau, \quad \int_0^t \Pi d\tau, \quad \dots$$

désigneront évidemment les valeurs de ξ, η, \dots correspondant au cas particulier où l'on aurait

$$\alpha = 0, \quad \varepsilon = 0, \quad \dots$$

Cela posé, on déduira immédiatement des formules (8) la proposition suivante :

THÉORÈME. — Supposons que les n variables principales

$$\xi, \eta, \dots$$

soient assujetties : 1° à vérifier n équations différentielles dont les premiers membres se réduisent à des fonctions linéaires de ces variables et de l'une

des dérivées

$$\frac{d\xi}{dt}, \quad \frac{d\eta}{dt}, \quad \dots$$

le coefficient de cette dérivée étant l'unité, et les seconds membres étant des fonctions

$$X, Y, \dots$$

de la variable indépendante t ; 2° à vérifier, pour $t = 0$, les conditions

$$\xi = \alpha, \quad \eta = \varepsilon, \quad \dots$$

Pour obtenir les valeurs générales de

$$\xi, \eta, \dots$$

il suffira d'ajouter à celles que l'on obtiendrait si

$$X, Y, \dots$$

se réduisaient à zéro, les valeurs de ξ, η, \dots correspondant au cas particulier où l'on aurait

$$\alpha = 0, \quad \varepsilon = 0, \quad \dots$$

ces dernières seront d'ailleurs de la forme

$$(12) \quad \xi = \int_0^t \Xi d\tau, \quad \eta = \int_0^t \Pi d\tau, \quad \dots$$

Ξ, Π, \dots étant ce que deviennent les valeurs de ξ, η, \dots relatives à des valeurs nulles de X, Y, \dots quand on y remplace

$$t \quad \text{par} \quad t - \tau,$$

et

$$\alpha, \varepsilon, \dots$$

par les quantités

$$\alpha, \varepsilon, \dots$$

dans lesquelles se forment

$$X, Y, \dots$$

en vertu de la substitution de τ à t .

Au reste, pour établir directement ce nouveau théorème, il suffit de

montrer que les valeurs de

$$\xi, \eta, \dots$$

fournies par les équations (12), non seulement s'évanouissent, comme on le reconait à la première vue, pour $t = 0$, mais encore vérifient les équations (1) ou (2). Or effectivement ces valeurs, substituées dans les équations (1) ou (2), les réduiront, en vertu des formules (11), aux suivantes

$$X + \int_0^t [D_t + \varrho] \Xi + \mathfrak{R} H + \dots dt = X,$$

$$Y + \int_0^t [\mathfrak{X} \Xi + (D_t + \varrho) H + \dots] dt = Y,$$

.....

et ces dernières seront identiques, eu égard aux équations (10).

§ III. — *Intégration d'un système d'équations différentielles linéaires et à coefficients constants d'un ordre quelconque, le second membre de chaque équation pouvant être ou zéro, ou une fonction de la variable indépendante.*

Supposons que les équations différentielles données, étant par rapport à une ou plusieurs des variables principales

$$\xi, \eta, \dots$$

d'un ordre supérieur au premier, contiennent avec ces variables principales les dérivées de ξ , de η , ... relatives à t , et dont l'ordre ne surpasse pas n' pour la variable ξ , n'' pour la variable de η , ...; supposons d'ailleurs que ces équations soient linéaires et à coefficients constants, les seconds membres pouvant être des fonctions de la variable indépendante t . Les premiers membres, dans le cas le plus général, seront des fonctions linéaires, à coefficients constants, des quantités

$$\xi, \quad \xi' = \frac{d\xi}{dt}, \quad \xi'' = \frac{d^2\xi}{dt^2}, \quad \dots, \quad \xi^{(n')} = \frac{d^{n'}\xi}{dt^{n'}}$$

$$\eta, \quad \eta' = \frac{d\eta}{dt}, \quad \eta'' = \frac{d^2\eta}{dt^2}, \quad \dots, \quad \eta^{(n'')} = \frac{d^{n''}\eta}{dt^{n''}}$$

.....

et les variables principales

$$\xi, \eta, \dots$$

pourront être complètement déterminées si on les assujettit : 1° à vérifier les équations différentielles données, quel que soit t ; 2° à vérifier, pour $t = 0$, des conditions de la forme

$$(1) \quad \begin{cases} \xi = \alpha, & \xi' = \alpha', & \dots, & \xi^{(n'-1)} = \alpha^{(n'-1)}; \\ \eta = \beta, & \eta' = \beta', & \dots, & \eta^{(n''-1)} = \beta^{(n''-1)}; \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{cases}$$

$\alpha, \alpha', \dots, \alpha^{(n'-1)}; \beta, \beta', \dots, \beta^{(n''-1)}; \dots$ désignant des constantes arbitraires dont le nombre n sera

$$(2) \quad n' + n'' + \dots = n.$$

Cela posé, les équations différentielles données pourront être considérées comme établissant entre les variables

$$\xi, \xi', \dots, \xi^{(n'-1)}, \xi^{(n')}; \quad \eta, \eta', \dots, \eta^{(n''-1)}, \eta^{(n'')}; \quad \dots$$

des relations en vertu desquelles les dérivées des ordres les plus élevés, savoir

$$\xi^{(n')}, \eta^{(n'')}, \dots,$$

s'exprimeront à l'aide des dérivées d'ordres inférieurs

$$\xi, \xi', \dots, \xi^{(n'-1)}; \quad \eta, \eta', \dots, \eta^{(n''-1)}; \quad \dots;$$

et, pour ramener le système des équations différentielles données à un système d'équations différentielles du premier ordre, il suffira de les remplacer par les suivantes :

$$(3) \quad \begin{cases} D_t \xi - \xi' = 0, & D_t \xi' - \xi'' = 0, & \dots, & D_t \xi^{(n'-1)} - \xi^{(n')} = 0, \\ D_t \eta - \eta' = 0, & D_t \eta' - \eta'' = 0, & \dots, & D_t \eta^{(n''-1)} - \eta^{(n'')} = 0, \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{cases}$$

en prenant pour inconnues ou variables principales les n dérivées d'ordres inférieurs, savoir

$$\xi, \xi', \dots, \xi^{(n'-1)}; \quad \eta, \eta', \dots, \eta^{(n''-1)}; \quad \dots,$$

et supposant, comme on vient de le dire, les dérivées d'ordres supérieurs, savoir

$$\xi^{(n)}, \eta^{(n)}, \dots,$$

exprimées en fonction des autres et de la variable t par le moyen des équations données. Or, si les seconds membres des équations données s'évanouissent, les valeurs qu'elles fourniront pour

$$\xi^{(n)}, \eta^{(n)}, \dots$$

se réduiront à des fonctions linéaires de

$$\xi, \xi', \dots, \xi^{(n-1)}; \eta, \eta', \dots, \eta^{(n-1)}; \dots;$$

et si, après avoir substitué ces valeurs dans les équations (3), on veut intégrer ces dernières équations, on devra, suivant ce qu'on a vu dans le paragraphe I^{er}, opérer de la manière suivante :

1^o On éliminera les variables

$$\xi, \xi', \dots, \xi^{(n-1)}; \eta, \eta', \dots, \eta^{(n-1)}; \dots$$

entre les équations (3), ou, ce qui revient au même, on éliminera les seules variables

$$\xi, \eta, \dots$$

entre les équations différentielles données, en opérant comme si D_t désignait une quantité véritable : et, après avoir ainsi trouvé une équation résultante

$$\nabla = 0,$$

dont le premier membre ∇ sera une fonction entière de D_t du degré n , on assujettira la *fonction principale* θ à la double condition de vérifier, quel que soit t , l'équation différentielle de l'ordre n ,

$$(4) \quad \nabla \theta = 0,$$

et de vérifier, pour $t = 0$, les formules

$$(5) \quad \theta = 0, \quad D_t \theta = 0, \quad D_t^2 \theta = 0, \quad \dots, \quad D_t^{n-2} \theta = 0, \quad D_t^{n-1} \theta = 1.$$

Pour satisfaire à cette double condition, il suffira de prendre

$$(6) \quad \theta = \int \frac{e^{st}}{((s))},$$

s désignant la variable auxiliaire à laquelle le signe \mathcal{E} se rapporte, et la fonction de s en laquelle ∇ se transforme, quand on y remplace D_t par s .

2^o Après avoir substitué dans les équations (3) les valeurs de

$$\xi^{(n)}, \eta^{(n)}, \dots$$

exprimées en fonctions linéaires des inconnues ou variables principales

$$\xi, \xi', \dots, \xi^{(n-1)}; \\ \eta, \eta', \dots, \eta^{(n-1)}; \\ \dots, \dots, \dots, \dots$$

on y remplacera les dérivées de ces variables, savoir

$$D_t \xi, \quad D_t \xi', \quad \dots, \quad D_t \xi^{(n-1)}, \\ D_t \eta, \quad D_t \eta', \quad \dots, \quad D_t \eta^{(n-1)}, \\ \dots, \dots, \dots, \dots$$

par les différences

$$D_t \xi - \alpha \nabla \theta, \quad D_t \xi' - \alpha' \nabla \theta, \quad \dots, \quad D_t \xi^{(n-1)} - \alpha^{(n-1)} \nabla \theta; \\ D_t \eta - \mathcal{E} \nabla \theta, \quad D_t \eta' - \mathcal{E}' \nabla \theta, \quad \dots, \quad D_t \eta^{(n-1)} - \mathcal{E}^{(n-1)} \nabla \theta. \\ \dots, \dots, \dots, \dots$$

puis on résoudra, par rapport à

$$\xi, \xi', \dots, \xi^{(n-1)}; \eta, \eta', \dots, \eta^{(n-1)}; \dots$$

les nouvelles équations ainsi obtenues, en opérant comme si D_t était une quantité véritable. D'ailleurs, les remplacements dont il est ici question transformeront les équations (3) en celles qui suivent :

$$(7) \quad \left\{ \begin{array}{l} D_t \xi - \xi' = \alpha \nabla \theta, \quad D_t \xi' - \xi'' = \alpha' \nabla \theta, \quad \dots, \quad D_t \xi^{(n-1)} - \xi^{(n)} = \alpha^{(n-1)} \nabla \theta, \\ D_t \eta - \eta' = \mathcal{E} \nabla \theta, \quad D_t \eta' - \eta'' = \mathcal{E}' \nabla \theta, \quad \dots, \quad D_t \eta^{(n-1)} - \eta^{(n)} = \mathcal{E}^{(n-1)} \nabla \theta, \\ \dots, \dots, \dots, \dots \end{array} \right.$$

et l'on tire immédiatement des formules (7)

$$(8) \begin{cases} \xi' = D_t \xi - \alpha \nabla \theta, & \xi'' = D_t^2 \xi - (\alpha' + \alpha D_t) \nabla \theta, & \dots \\ \xi^{(n)} = D_t^n \xi - (\alpha^{(n-1)} + \dots + \alpha' D_t^{n-2} + \alpha D_t^{n-1}) \nabla \theta; \\ \eta' = D_t \eta - \varepsilon \nabla \theta, & \eta'' = D_t^2 \eta - (\varepsilon' + \varepsilon D_t) \nabla \theta, & \dots \\ \eta^{(n)} = D_t^n \eta - (\varepsilon^{(n-1)} + \dots + \varepsilon' D_t^{n-2} + \varepsilon D_t^{n-1}) \nabla \theta; \end{cases}$$

Donc, pour intégrer, dans l'hypothèse admise, les équations différentielles données, il suffira de les considérer comme établissant des relations entre les quantités

$$\xi, \xi', \xi'', \dots, \xi^{(n)}; \quad \eta, \eta', \eta'', \dots, \eta^{(n)}; \quad \dots;$$

puis d'y substituer les valeurs de

$$\xi', \xi'', \dots, \xi^{(n)}; \quad \eta', \eta'', \dots, \eta^{(n)}; \quad \dots$$

fournies par les équations (8), et de les résoudre ensuite par rapport aux variables principales

$$\xi, \eta, \dots,$$

en opérant comme si D_t était une quantité véritable. Cette règle très simple fournira immédiatement les intégrales générales d'un système d'équations différentielles linéaires et à coefficients constants d'un ordre quelconque, lorsque les seconds membres de ces équations se réduiront à zéro.

Si les seconds membres des équations différentielles données étaient supposés, non plus égaux à zéro, mais fonctions de la variable indépendante t , il faudrait, aux valeurs de

$$\xi, \eta, \dots$$

obtenues comme on vient de le dire, ajouter des accroissements représentés par des intégrales définies de la forme

$$\int_0^t \Xi d\tau, \quad \int_0^t \Pi d\tau, \quad \dots$$

Soient d'ailleurs, dans cette seconde hypothèse,

$$X, Y, \dots$$

les valeurs de

$$\xi^{(n)} = \frac{d^n \xi}{dt^n}, \quad \eta^{(n)} = \frac{d^n \eta}{dt^n}, \quad \dots$$

que fournissent les équations données quand on y remplace

$$\xi, \xi', \dots, \xi^{(n-1)}; \quad \eta, \eta', \dots, \eta^{(n-1)}; \quad \dots$$

ou, ce qui revient au même,

$$\xi, \frac{d\xi}{dt}, \dots, \frac{d^{n-1}\xi}{dt^{n-1}}; \quad \eta, \eta', \dots, \frac{d^{n-1}\eta}{dt^{n-1}}; \quad \dots$$

par zéro; et nommons

$$\mathcal{N}, \mathcal{F}, \dots$$

les fonctions de τ , dans lesquelles se changent

$$X, Y, \dots$$

quand on y remplace la variable indépendante t par la variable auxiliaire τ . Pour obtenir les valeurs de

$$\Xi, \Pi, \dots$$

il suffira, d'après ce qui a été dit dans le paragraphe II, de chercher ce que deviennent les valeurs générales de

$$\xi, \eta, \dots$$

relatives à la première hypothèse, quand on y remplace

$$t \text{ par } t - \tau$$

et

$$\alpha, \alpha', \dots, \alpha^{(n-2)}, \alpha^{(n-1)}; \quad \varepsilon, \varepsilon', \dots, \varepsilon^{(n-2)}, \varepsilon^{(n-1)}; \quad \dots$$

par

$$0, 0, \dots, 0, \mathcal{N}; \quad 0, 0, \dots, 0, \mathcal{F}; \quad \dots$$

Applications. — Pour montrer une application des principes que nous venons d'établir, proposons-nous d'abord d'intégrer une seule équation différentielle de l'ordre n et de la forme

$$\frac{d^n \xi}{dt^n} + a \frac{d^{n-1} \xi}{dt^{n-1}} + b \frac{d^{n-2} \xi}{dt^{n-2}} + \dots + g \frac{d^2 \xi}{dt^2} + h \frac{d\xi}{dt} + k \xi = X,$$



a, b, \dots, g, h, k désignant des coefficients constants, et X une fonction quelconque de t . Si l'on suppose d'abord X réduit à zéro, l'équation donnée deviendra

$$\nabla \xi = 0,$$

la valeur de ∇ étant

$$\nabla = D_t^n + aD_t^{n-1} + bD_t^{n-2} + \dots + gD_t + hD_t + k;$$

et par suite, si l'on pose

$$s = s^n + as^{n-1} + bs^{n-2} + \dots + gs + hs + k = F(s),$$

la fonction principale Θ sera déterminée par la formule

$$\Theta = \int \frac{e^{st}}{(F(s))} = \int \frac{e^{st}}{(F(s))}.$$

D'ailleurs, lorsqu'on regardera la proposée comme établissant une relation entre les quantités

$$\xi, \xi', \dots, \xi^{(n-1)}, \xi^{(n)},$$

elle se présentera sous la forme

$$\xi^{(n)} + a\xi^{(n-1)} + b\xi^{(n-2)} + \dots + g\xi' + h\xi + k\xi = 0;$$

et, si l'on substitue dans cette dernière formule les valeurs de

$$\xi', \xi'', \dots, \xi^{(n)}$$

fournies par les équations (8), on en conclura

$$\nabla \xi = \{[\alpha^{(n-1)} + \dots + \alpha D_t^{n-2} + \alpha D_t^{n-1}] + \dots + g(\alpha' + \alpha D_t) + h\alpha\} \nabla \Theta;$$

puis, en opérant comme si D_t et ∇ étaient des quantités véritables,

$$\xi = \{[\alpha^{(n-1)} + \dots + \alpha D_t^{n-2} + \alpha D_t^{n-1}] + \dots + g(\alpha' + \alpha D_t) + h\alpha\} \Theta.$$

Telle sera effectivement la valeur générale de ξ , que l'on pourra présenter sous la forme

$$\xi = \frac{F(D_t) - F(\alpha)}{D_t - \alpha} \Theta,$$

pourvu que, dans le développement du rapport

$$\frac{F(D_t) - F(\alpha)}{D_t - \alpha},$$

on remplace les puissances entières de z , savoir

$$\alpha^n = 1, \alpha^1, \alpha^2, \dots, \alpha^{n-1},$$

par les constantes arbitraires

$$\alpha, \alpha', \alpha'', \dots, \alpha^{(n-1)}.$$

Si, dans la dernière valeur de ξ , on substitue la valeur trouvée de Θ , on obtiendra la formule symbolique

$$\xi = \int \frac{F(s) - F(\alpha)}{s - \alpha} \frac{e^{st}}{(F(s))},$$

à laquelle nous sommes déjà parvenus dans les *Exercices de Mathématiques*.

Pour passer du cas où X s'évanouit au cas où X est fonction de t , il suffira d'ajouter à la valeur précédente de ξ l'intégrale définie

$$\int_0^t \Xi dt,$$

Ξ désignant ce que devient la valeur précédente de ξ quand on y remplace

$$t \text{ par } t - \tau, \quad \alpha, \alpha', \dots, \alpha^{(n-1)} \text{ par zéro,}$$

et $\alpha^{(n-1)}$ la fonction x en laquelle se transforme X en vertu de la substitution de τ à t . Cela posé, soit

$$\Theta = \int \frac{e^{s(t-\tau)}}{(F(s))}.$$

L'équation en ξ trouvée plus haut, savoir

$$\xi = [\alpha^{(n-1)} + \dots] \Theta,$$

entraînera la suivante

$$\Xi = \alpha \Theta = \alpha \int \frac{e^{s(t-\tau)}}{(F(s))};$$

et, par suite, en intégrant l'équation

$$\frac{d^n \xi}{dt^n} + a \frac{d^{n-1} \xi}{dt^{n-1}} + b \frac{d^{n-2} \xi}{dt^{n-2}} + \dots + g \frac{d^2 \xi}{dt^2} + h \frac{d \xi}{dt} + k \xi = X,$$

de manière à vérifier, pour $t = 0$, les conditions

$$\xi = \alpha, \quad \frac{d\xi}{dt} = \alpha', \quad \dots, \quad \frac{d^{n-1}\xi}{dt^{n-1}} = \alpha^{(n-1)},$$

on trouvera

$$\xi = \frac{F(D_t) - F(x)}{D_t - x} \theta + \int_0^t X e^{x(t-\tau)} d\tau,$$

ou, ce qui revient au même,

$$\xi = \int_0^t \frac{F(s) - F(x)}{s - x} \frac{e^{xt}}{(F(s))} + \int_0^t X e^{x(t-\tau)} d\tau \frac{e^{xt}}{(F(s))},$$

pourvu que, dans le développement du rapport qui renferme la lettre x , on remplace x^0, x^1, \dots, x^{n-1} par $\alpha, \alpha', \dots, \alpha^{(n-1)}$. On se trouve ainsi ramené aux résultats déjà obtenus dans les *Exercices de Mathématiques*.

Proposons-nous maintenant d'intégrer les équations simultanées

$$\frac{d^2\xi}{dt^2} = \rho\xi + \pi\eta + \varrho\zeta + X,$$

$$\frac{d^2\eta}{dt^2} = \mu\xi + \nu\eta + \omega\zeta + Y,$$

$$\frac{d^2\zeta}{dt^2} = \vartheta\xi + \phi\eta + \gamma\zeta + Z,$$

$\rho, \pi, \mu, \nu, \omega, \vartheta, \phi, \gamma$ désignant des coefficients constants, et

$$X, Y, Z$$

des fonctions de la variable indépendante t . Si l'on suppose d'abord ces fonctions nulles, les équations données se réduiront aux suivantes

$$(\rho - D_t^2)\xi + \pi\eta + \varrho\zeta = 0,$$

$$\mu\xi + (\nu - D_t^2)\eta + \omega\zeta = 0,$$

$$\vartheta\xi + \phi\eta + (\gamma - D_t^2)\zeta = 0.$$

En éliminant ξ, η, ζ entre ces dernières, et opérant comme si D , était une quantité véritable, on obtiendra une équation résultante

$$\nabla = 0,$$

dont le premier membre ∇ pourra être censé déterminé par la for-

mule

$$\begin{aligned} \nabla = & (D_t^2 - \rho)(D_t^2 - \pi)(D_t^2 - \varrho) \\ & - \varrho^2(D_t^2 - \rho) - \omega^2(D_t^2 - \pi) - \omega\vartheta(D_t^2 - \varrho) - 2\varrho\omega\pi. \end{aligned}$$

Soit s ce que devient la valeur précédente de ∇ quand on y remplace D_t par s , en sorte qu'on ait

$$\begin{aligned} s = & (s^2 - \rho)(s^2 - \pi)(s^2 - \varrho) \\ & - \varrho^2(s^2 - \rho) - \omega^2(s^2 - \pi) - \omega\vartheta(s^2 - \varrho) - 2\varrho\omega\pi, \end{aligned}$$

et posons

$$\theta = \int \frac{e^{st}}{(s)};$$

si l'on veut déterminer les variables principales

$$\xi, \eta, \zeta$$

de manière qu'elles vérifient, quel que soit t , les équations données, et pour $t = 0$, les conditions

$$\xi = \alpha, \quad \eta = \beta, \quad \zeta = \gamma, \quad \frac{d\xi}{dt} = \alpha', \quad \frac{d\eta}{dt} = \beta', \quad \frac{d\zeta}{dt} = \gamma'.$$

il suffira de remplacer, dans les équations données, les dérivées du second ordre

$$\xi'' = D_t^2\xi, \quad \eta'' = D_t^2\eta, \quad \zeta'' = D_t^2\zeta$$

par les différences

$$D_t^2\xi - (\alpha' + \alpha D_t)\nabla\theta, \quad D_t^2\eta - (\beta' + \beta D_t)\nabla\theta, \quad D_t^2\zeta - (\gamma' + \gamma D_t)\nabla\theta,$$

puis de résoudre par rapport à

$$\xi, \eta, \zeta,$$

et en opérant comme si D , était une quantité véritable, les nouvelles équations formées comme on vient de le dire, savoir

$$\begin{aligned} & (D_t^2 - \rho)\xi - \pi\eta - \varrho\zeta = (\alpha' + \alpha D_t)\nabla\theta, \\ & -\mu\xi + (D_t^2 - \nu)\eta - \omega\zeta = (\beta' + \beta D_t)\nabla\theta, \\ & -\vartheta\xi - \phi\eta + (D_t^2 - \gamma)\zeta = (\gamma' + \gamma D_t)\nabla\theta. \end{aligned}$$

On trouvera de cette manière

$$\begin{aligned} \xi &= [(D_t^2 - \alpha R) (D_t^2 - \beta C) - \alpha^2] (\alpha' + \alpha D_t) \Theta \\ &+ [\alpha (D_t^2 - \beta C) + \alpha \beta] (\beta' + \beta D_t) \Theta \\ &+ [\beta (D_t^2 - \alpha R) + \alpha \beta] (\gamma' + \gamma D_t) \Theta, \end{aligned}$$

et, en posant, pour abrégier,

$$\begin{aligned} \epsilon &= (D_t^2 - \alpha R) (D_t^2 - \beta C) - \alpha^2, & \mathfrak{m} &= (D_t^2 - \beta C) (D_t^2 - \alpha R) - \alpha^2, \\ \mathfrak{u} &= (D_t^2 - \alpha R) (D_t^2 - \beta C) - \alpha^2, \\ \mathfrak{p} &= \alpha (D_t^2 - \alpha R) + \alpha \beta, & \mathfrak{e} &= \beta (D_t^2 - \alpha R) + \alpha \beta, & \mathfrak{u} &= \alpha (D_t^2 - \beta C) + \alpha \beta, \end{aligned}$$

on aura simplement

$$\begin{aligned} \xi &= [(\alpha' + \alpha D_t) \epsilon + (\beta' + \beta D_t) \mathfrak{u} + (\gamma' + \gamma D_t) \mathfrak{e}] \Theta, \\ \eta &= [(\alpha' + \alpha D_t) \mathfrak{u} + (\beta' + \beta D_t) \mathfrak{m} + (\gamma' + \gamma D_t) \mathfrak{p}] \Theta, \\ \zeta &= [(\alpha' + \alpha D_t) \mathfrak{e} + (\beta' + \beta D_t) \mathfrak{p} + (\gamma' + \gamma D_t) \mathfrak{u}] \Theta. \end{aligned}$$

Si maintenant les fonctions de t désignées par

$$X, Y, Z$$

cessent d'être nulles, et si l'on nomme

$$x, y, z$$

ce que deviennent ces fonctions quand on y remplace la variable indépendante t par la variable auxiliaire τ , alors, pour obtenir les valeurs générales de

$$\xi, \eta, \zeta,$$

il suffira d'ajouter celles qu'on vient de trouver à celles que déterminent les formules

$$\begin{aligned} \xi &= \int_0^t (\alpha \epsilon + \beta \mathfrak{u} + \gamma \mathfrak{e}) \varpi \, d\tau, \\ \eta &= \int_0^t (\alpha \mathfrak{u} + \beta \mathfrak{m} + \gamma \mathfrak{p}) \varpi \, d\tau, \\ \zeta &= \int_0^t (\alpha \mathfrak{e} + \beta \mathfrak{p} + \gamma \mathfrak{u}) \varpi \, d\tau, \end{aligned}$$

la valeur de ϖ étant

$$\varpi = \sum \frac{e^{\alpha t (t-\tau)}}{\binom{s}{s}}$$

§ IV. — *Intégration d'un système d'équations linéaires, aux différences partielles, et à coefficients constants, d'un ordre quelconque, le second membre de chaque équation pouvant être ou zéro, ou une fonction des variables indépendantes.*

Soit donné un système d'équations aux différences partielles entre plusieurs variables principales

$$\xi, \eta, \zeta, \dots$$

et plusieurs variables indépendantes

$$x, y, z, \dots, t,$$

que, pour fixer les idées, nous réduirons à quatre, les trois premières x, y, z pouvant représenter trois coordonnées, et la quatrième t désignant le temps. Supposons d'ailleurs que les premiers membres de ces équations soient des fonctions linéaires, à coefficients constants, des variables principales et de leurs dérivées, l'ordre des dérivées relatives à t pouvant s'élever jusqu'au nombre n' pour la variable principale ξ , jusqu'au nombre n'' pour la variable η , jusqu'au nombre n''' pour la variable principale ζ , ... Faisons, pour abrégier,

$$(1) \quad n = n' + n'' + n''' + \dots$$

Enfin nommons

$$\begin{aligned} \varphi(x, y, z), \quad \chi(x, y, z), \quad \psi(x, y, z), \quad \dots, \\ \varphi_1(x, y, z), \quad \chi_1(x, y, z), \quad \psi_1(x, y, z), \quad \dots, \\ \dots, \dots, \dots, \dots, \dots, \\ \varphi_{(n-1)}(x, y, z), \quad \chi_{(n-1)}(x, y, z), \quad \psi_{(n-1)}(x, y, z), \quad \dots \end{aligned}$$

les valeurs initiales des variables principales

$$\xi, \eta, \zeta, \dots$$

et de leurs dérivées d'ordres inférieurs à l'un des nombres

$$n', \quad n'', \quad n''', \quad \dots;$$

en sorte que ces variables soient assujetties à vérifier, quel que soit t ,

les équations données aux différences partielles, et, pour $t = 0$, les conditions

$$(2) \begin{cases} \xi = \varphi(x, y, z), & \eta = \chi(x, y, z), & \zeta = \psi(x, y, z), & \dots, \\ D_t \xi = \varphi_1(x, y, z), & D_t \eta = \chi_1(x, y, z), & D_t \zeta = \psi_1(x, y, z), & \dots, \\ \dots, & \dots, & \dots, & \dots, \\ D_t^{n-1} \xi = \varphi_{n-1}(x, y, z), & D_t^{n-1} \eta = \chi_{n-1}(x, y, z), & D_t^{n-1} \zeta = \psi_{n-1}(x, y, z), & \dots \end{cases}$$

Pour ramener l'intégration des équations proposées à l'intégration d'un système d'équations linéaires et à coefficients constants, il suffira de recourir à la formule connue

$$(3) \quad \varpi(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(x-\lambda)\sqrt{-1}} \varpi(\lambda) \frac{d\lambda}{2\pi},$$

de laquelle on tire, en remplaçant successivement $\varpi(x)$ par $\varpi(x, y)$ et par $\varpi(x, y, z)$,

$$(4) \quad \begin{aligned} \varpi(x, y) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(x-\lambda)+iy-\mu\sqrt{-1}} \varpi(\lambda, \mu) \frac{d\lambda}{2\pi} \frac{d\mu}{2\pi}, \\ \varpi(x, y, z) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(x-\lambda)+iy-\mu\sqrt{-1}+iz-\nu\sqrt{-1}} \\ &\quad \times \varpi(\lambda, \mu, \nu) \frac{d\lambda}{2\pi} \frac{d\mu}{2\pi} \frac{d\nu}{2\pi}; \end{aligned}$$

puis, en écrivant $\varpi(x, y, z, t)$ au lieu de $\varpi(x, y, z)$,

$$(5) \quad \begin{aligned} \varpi(x, y, z, t) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(x-\lambda)+iy-\mu\sqrt{-1}+iz-\nu\sqrt{-1}} \\ &\quad \times \varpi(\lambda, \mu, \nu, t) \frac{d\lambda}{2\pi} \frac{d\mu}{2\pi} \frac{d\nu}{2\pi}. \end{aligned}$$

En effet, chacune des équations données sera de la forme

$$(6) \quad R = \varpi(x, y, z, t),$$

R désignant une fonction linéaire, et à coefficients constants, des variables principales

$$\xi, \eta, \zeta$$

et de leurs dérivées prises par rapport à une ou plusieurs des variables

indépendantes. D'autre part, en désignant par

$$f, g, h$$

des nombres entiers quelconques, et posant pour abrégé

$$(7) \quad u = v\sqrt{-1}, \quad v = \nu\sqrt{-1}, \quad w = \omega\sqrt{-1},$$

on tirera généralement de la formule (4)

$$(8) \quad D_x^f D_y^g D_z^h \varpi(x, y, z) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(x-\lambda)+iy-\mu\sqrt{-1}+iz-\nu\sqrt{-1}} \\ \times u^f v^g w^h \varpi(\lambda, \mu, \nu) \frac{d\lambda}{2\pi} \frac{d\mu}{2\pi} \frac{d\nu}{2\pi}.$$

Cela posé, si l'on nomme

$$\bar{\xi}, \bar{\eta}, \bar{\zeta}, \dots$$

ce que deviennent les variables principales

$$\xi, \eta, \zeta, \dots$$

considérées comme fonctions de x, y, z, t , quand on y remplace

$$x, y, z$$

par

$$\lambda, \mu, \nu;$$

si, de plus, après avoir exprimé R à l'aide des caractéristiques

$$D_x, D_y, D_z, D_t,$$

on appelle à ce qui devient R, quand on remplace

$$\xi, \eta, \zeta, \dots \quad \text{par} \quad \bar{\xi}, \bar{\eta}, \bar{\zeta}, \dots$$

et les puissances entières des caractéristiques

$$D_x, D_y, D_z$$

par les puissances semblables des facteurs

$$u, v, w,$$

on aura évidemment

$$(9) \quad R = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(x-\lambda)+iy-\mu\sqrt{-1}+iz-\nu\sqrt{-1}} R \frac{d\lambda}{2\pi} \frac{d\mu}{2\pi} \frac{d\nu}{2\pi} \frac{d\nu}{2\pi};$$

et par suite l'équation (6) pourra être présentée sous la forme

$$(10) \quad \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} [\mathfrak{R} - \mathfrak{W}(\lambda, \mu, \nu, t)] \times e^{i(\lambda x - \lambda y + \nu z - \mu t + w(z-y))} \frac{d\lambda}{2\pi} \frac{d\mu}{2\pi} \frac{d\nu}{2\pi} \frac{dw}{2\pi} = 0.$$

Or, pour que la formule (10) soit vérifiée, il suffira qu'on ait

$$\mathfrak{R} - \mathfrak{W}(\lambda, \mu, \nu, t) = 0,$$

ou, ce qui revient au même,

$$(11) \quad \mathfrak{R} = \mathfrak{W}(\lambda, \mu, \nu, t),$$

et cette dernière formule n'est autre chose qu'une équation différentielle linéaire à coefficients constants entre les inconnues

$$\bar{\xi}, \bar{\eta}, \bar{\zeta}, \dots$$

considérées comme variables principales, et t considéré comme variable indépendante. Ce n'est pas tout : pour que les conditions (2) soient vérifiées, il suffira, en vertu de la formule (4), qu'on ait, pour $t = 0$,

$$(12) \quad \begin{cases} \bar{\xi} = \varphi(\lambda, \mu, \nu), & \bar{\eta} = \chi(\lambda, \mu, \nu), & \bar{\zeta} = \psi(\lambda, \mu, \nu), & \dots \\ D_x \bar{\xi} = \varphi_1(\lambda, \mu, \nu), & D_t \bar{\eta} = \chi_1(\lambda, \mu, \nu), & D_t \bar{\zeta} = \psi_1(\lambda, \mu, \nu), & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ D_x^{n-1} \bar{\xi} = \varphi_{n-1}(\lambda, \mu, \nu), & D_x^{n-1} \bar{\eta} = \chi_{n-1}(\lambda, \mu, \nu), & D_x^{n-1} \bar{\zeta} = \psi_{n-1}(\lambda, \mu, \nu), & \dots \end{cases}$$

Donc en définitive, pour que les variables principales

$$\xi, \eta, \zeta$$

possèdent la double propriété de vérifier, quel que soit t , les équations données et, pour $t = 0$, les conditions (2), il suffira que les variables principales auxiliaires

$$\bar{\xi}, \bar{\eta}, \bar{\zeta}, \dots$$

possèdent la double propriété de vérifier, quel que soit t , un système d'équations différentielles semblables à la formule (11), et, pour

$t = 0$, le conditions (12). On pourra donc énoncer la proposition suivante.

PREMIER THÉORÈME. — Les variables principales

$$\xi, \eta, \zeta, \dots,$$

assujetties : 1° à vérifier, quel que soit t , un système d'équations linéaires aux différences partielles, et à coefficients constants, ces équations pouvant offrir pour seconds membres ou zéro, ou des fonctions connues des variables indépendantes

$$x, y, z, t;$$

2° à vérifier, pour $t = 0$, les conditions (2), seront, dans tous les cas, immédiatement déterminées par les formules

$$(13) \quad \begin{cases} \bar{\xi} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(\lambda x - \lambda y + \nu z - \mu t + w(z-y))} \sqrt{-1} \frac{d\lambda}{2\pi} \frac{d\mu}{2\pi} \frac{d\nu}{2\pi} \frac{dw}{2\pi}, \\ \bar{\eta} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(\lambda x - \lambda y + \nu z - \mu t + w(z-y))} \sqrt{-1} \eta \frac{d\lambda}{2\pi} \frac{d\mu}{2\pi} \frac{d\nu}{2\pi} \frac{dw}{2\pi}, \\ \bar{\zeta} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(\lambda x - \lambda y + \nu z - \mu t + w(z-y))} \sqrt{-1} \zeta \frac{d\lambda}{2\pi} \frac{d\mu}{2\pi} \frac{d\nu}{2\pi} \frac{dw}{2\pi}, \\ \dots \end{cases}$$

pourvu qu'on désigne par

$$\bar{\xi}, \bar{\eta}, \bar{\zeta}, \dots$$

* de nouvelles variables principales assujetties : 1° à vérifier, quel que soit t , certaines équations différentielles, qui seront nommées les équations auxiliaires; 2° à vérifier, pour $t = 0$, les conditions (12). D'ailleurs, pour obtenir les équations différentielles auxiliaires, il suffira d'exprimer les dérivées de ξ, η, ζ, \dots , que renferment les premiers membres des équations linéaires données, à l'aide des caractéristiques

$$D_x, D_y, D_z, D_t,$$

puis de remplacer dans ces premiers membres

$$\xi, \eta, \zeta, \dots \quad \text{par} \quad \bar{\xi}, \bar{\eta}, \bar{\zeta}, \dots$$

et

$$D_x, D_y, D_z$$

par

$$\mu, \nu, \omega,$$

ou, ce qui revient au même, par

$$u\sqrt{-1}, v\sqrt{-1}, w\sqrt{-1};$$

enfin de remplacer dans les seconds membres

$$x, y, z \quad \text{par} \quad \lambda, \mu, \nu.$$

Considérons en particulier le cas où, dans les équations linéaires données, les dérivées de ξ, η, ζ, \dots relatives à t se réduiraient aux dérivées du premier ordre

$$D_t \xi, D_t \eta, D_t \zeta, \dots$$

et se trouveraient simplement multipliées par des coefficients constants indépendants de

$$D_x, D_y, D_z.$$

Alors les conditions (2), qui devront être vérifiées pour $t=0$, se réduiront à

$$\xi = \varphi(x, y, z), \quad \eta = \chi(x, y, z), \quad \zeta = \psi(x, y, z), \quad \dots$$

et les équations auxiliaires seront des équations différentielles du premier ordre, linéaires et à coefficients constants, auxquelles devront satisfaire les nouvelles variables principales

$$\bar{\xi}, \bar{\eta}, \bar{\zeta}, \dots$$

assujetties en outre à vérifier, pour $t=0$, les conditions

$$\bar{\xi} = \varphi(\lambda, \mu, \nu), \quad \bar{\eta} = \chi(\lambda, \mu, \nu), \quad \bar{\zeta} = \psi(\lambda, \mu, \nu), \quad \dots$$

Or, si l'on suppose d'abord que les seconds membres des équations linéaires données s'évanouissent, on pourra en dire autant des seconds

membres des équations auxiliaires; et, d'après ce qu'on a vu dans le paragraphe premier, les valeurs générales de $\bar{\xi}, \bar{\eta}, \dots$ seront de la forme

$$(14) \quad \begin{cases} \bar{\xi} = [\varphi(\lambda, \mu, \nu) \mathfrak{C} + \chi(\lambda, \mu, \nu) \mathfrak{M} + \dots] \Theta, \\ \bar{\eta} = [\varphi(\lambda, \mu, \nu) \mathfrak{P} + \chi(\lambda, \mu, \nu) \mathfrak{E} + \dots] \Theta, \\ \dots \dots \dots \end{cases}$$

Θ désignant la fonction principale, et

$$\mathfrak{C}, \mathfrak{M}, \dots, \mathfrak{P}, \mathfrak{E}, \dots$$

des fonctions entières de la fonction D_t . D'ailleurs, pour obtenir la fonction principale Θ relative aux équations auxiliaires, on devra : 1° exprimer, dans les équations auxiliaires données, les diverses dérivées de ξ, η, ζ, \dots à l'aide des caractéristiques D_x, D_y, D_z, D_t ; 2° éliminer ξ, η, ζ, \dots entre ces équations, comme si

$$D_x, D_y, D_z, D_t$$

désignaient des quantités véritables; 3° remplacer, dans le premier membre ∇ de l'équation résultante

$$(15) \quad \nabla = 0,$$

les caractéristiques D_x, D_y, D_z par μ, ν, ω , ce qui réduira ∇ à une fonction de la seule caractéristique D_t , puis choisir Θ de manière à vérifier, quel que soit t , l'équation différentielle

$$\nabla \Theta = 0.$$

et, pour $t=0$, les conditions

$$\Theta = 0, \quad D_t \Theta = 0, \quad \dots, \quad D_t^{n-1} \Theta = 0, \quad D_t^n \Theta = 1.$$

Si l'on nomme s ce que devient le premier membre ∇ de l'équation (15) quand on y remplace, non seulement

$$D_x, D_y, D_z \quad \text{par} \quad u, v, w,$$

ce que deviennent

$$c, m, \dots, p, \phi, \dots$$

quand on y remplace

$$u, v, w$$

par les caractéristiques

$$D_x, D_y, D_z.$$

Les valeurs de ξ, η, \dots fournies par les équations (18) et (20) pourront évidemment s'écrire comme il suit

$$(22) \quad \begin{cases} \xi = L\varphi + M\chi + \dots \\ \eta = P\varphi + Q\chi + \dots \\ \dots \end{cases}$$

En d'autres termes, on aura

$$(23) \quad \begin{cases} \xi = c\varphi + m\chi + \dots \\ \eta = p\varphi + \phi\chi + \dots \\ \dots \end{cases}$$

pourvu qu'on transforme les fonctions de u, v, w, D_x désignées par

$$c, m, \dots, p, \phi, \dots$$

en fonctions des caractéristiques

$$D_x, D_y, D_z, D_t.$$

en y remplaçant u, v, w par D_x, D_y, D_z . D'ailleurs, pour déduire les formules (23) des formules (14), il suffit de remplacer, dans les formules (14), les variables auxiliaires

$$\bar{\xi}, \bar{\eta}, \dots$$

par les variables principales

$$\xi, \eta, \dots$$

et les produits

$$\Theta_\varphi(\lambda, \mu, \nu), \Theta_\chi(\lambda, \mu, \nu), \dots$$

par les fonctions

$$\varphi, \chi, \dots$$

Donc, puisqu'on arrive directement aux formules (14), quand on

résout par rapport aux variables auxiliaires $\bar{\xi}, \bar{\eta}, \dots$, non pas les équations différentielles auxiliaires, mais celles qu'on en déduit en remplaçant

$$D_i \bar{\xi}, D_i \bar{\eta}, \dots$$

par les différences

$$D_i \bar{\xi} - \nabla[\Theta_\varphi(\lambda, \mu, \nu)], \quad D_i \bar{\eta} - \nabla[\Theta_\chi(\lambda, \mu, \nu)], \quad \dots,$$

et considérant ∇ comme une fonction de

$$u, v, w, D_i;$$

on pourra encore arriver directement aux formules (22) ou (23), en résolvant, par rapport aux variables principales

$$\xi, \eta, \dots$$

non pas les équations linéaires données, mais celles qu'on en déduit en remplaçant

$$D_i \bar{\xi}, D_i \bar{\eta}, \dots$$

par les différences

$$D_i \bar{\xi} - \nabla\varphi, \quad D_i \bar{\eta} - \nabla\chi, \quad \dots,$$

et considérant ∇ comme une fonction de

$$D_x, D_y, D_z, D_t.$$

Dans l'un et l'autre cas on devra opérer comme si les notations D_x et D_x, D_y, D_z étaient employées pour désigner de simples quantités, sauf à regarder, dans les équations définitives (14) ou (23), chacune de ces notations comme indiquant une différentiation relative à l'une des variables indépendantes t, x, y, z .

Si, comme nous l'avons supposé, la fonction de D_x, D_y, D_z, D_t désignée par ∇ est tellement choisie que, dans cette fonction, le coefficient de D_t^m , c'est-à-dire de la plus haute puissance de D_t , se réduise à l'unité, alors la fonction de u, v, w, s désignée par s , étant développée suivant les puissances descendantes de s , offrira pour premier terme s^n . On aura donc : 1° pour $m < n-1$,

$$\mathcal{L} \frac{s^m}{(s)} = 0;$$

2° pour $m = n - 1$,

$$\int \frac{s^{n-1}}{(s)} = 1;$$

en conséquence la fonction de x, y, z, t , désignée par ω et déterminée par la formule (21), vérifiera, quel que soit t , l'équation aux différences partielles

$$(24) \quad \nabla \omega = 0,$$

et, pour $t = 0$, les conditions

$$(25) \quad \omega = 0, \quad D_t \omega = 0, \quad D_t^2 \omega = 1, \quad \dots, \quad D_t^{n-1} \omega = 0, \quad D_t^n \omega = \omega(x, y, z).$$

Cela posé, il suffira de résumer ce qui a été dit ci-dessus pour établir la proposition suivante :

DEUXIÈME THÉORÈME. — Soient données, entre n variables principales

$$\xi, \eta, \zeta, \dots$$

et les variables indépendantes

$$x, y, z, t,$$

n équations linéaires aux différences partielles et à coefficients constants, c'est-à-dire n équations dont les premiers membres soient des fonctions linéaires des variables principales et de leurs dérivées, les seconds membres étant nuls. Supposons d'ailleurs que, parmi les dérivées relatives au temps, celles du premier ordre, savoir

$$D_t \xi, D_t \eta, \dots$$

soient les seules qui entrent dans les premiers membres des équations données, et s'y trouvent multipliées par des facteurs constants, sans y être soumises à aucune différentiation nouvelle relative aux variables x, y, z . Nommons

$$\varphi(x, y, z), \chi(x, y, z), \dots$$

les valeurs initiales des variables principales ξ, η, \dots , ces variables étant assujetties à vérifier, pour une valeur nulle de t , les conditions

$$\xi = \varphi(x, y, z), \quad \eta = \chi(x, y, z), \quad \dots$$

Soient encore

$$\nabla = 0$$

l'équation en D_x, D_y, D_z, D_t , résultant de l'élimination de ξ, η, ζ, \dots entre les équations données, et

$$s = 0$$

l'équation caractéristique en laquelle se transforme la précédente quand on y remplace

$$D_x, D_y, D_z, D_t$$

par

$$u, v, w, s,$$

la fonction ∇ qui sera du degré n par rapport à D_t , étant d'ailleurs choisie de manière que, dans cette fonction, le coefficient de D_t^n se réduise à l'unité. Enfin,

$$\omega(x, y, z)$$

étant l'une quelconque des fonctions initiales

$$\varphi(x, y, z), \chi(x, y, z), \dots$$

désignons par ω une fonction de x, y, z, t , déterminée par la formule (21), par conséquent assujettie : 1° à vérifier, quel que soit t , l'équation aux différences partielles

$$\nabla \omega = 0;$$

2° à vérifier, pour une valeur nulle de t , les conditions

$$\omega = 0, \quad D_t \omega = 0, \quad D_t^2 \omega = 0, \quad \dots, \quad D_t^{n-1} \omega = 0, \quad D_t^n \omega = \omega(x, y, z),$$

et nommons

$$\varphi, \chi, \dots$$

ce que devient ω , quand on réduit $\omega(x, y, z)$ à

$$\varphi(x, y, z), \chi(x, y, z), \dots$$

Pour intégrer les équations linéaires données, de manière à remplir les conditions requises, il suffira d'y remplacer les dérivées

$$D_t \xi, D_t \eta, \dots$$

par les différences

$$D_t \xi - \nabla \varphi, \quad D_t \eta - \nabla \chi, \quad \dots$$

puis de résoudre par rapport à ξ, η, \dots les nouvelles équations ainsi obtenues, en opérant comme si D_x, D_y, D_z, D_t étaient de véritables quantités.

En raisonnant toujours de la même manière, et ayant égard aux principes développés dans le paragraphe III, on établira encore la proposition suivante :

THROISIÈME THÉORÈME. — Soient données entre plusieurs variables principales

$$\xi, \eta, \zeta, \dots$$

et les variables indépendantes

$$x, y, z, t.$$

des équations linéaires aux différences partielles et à coefficients constants, en nombre égal à celui des variables principales. Concevons d'ailleurs que l'ordre des dérivées de ξ, η, \dots relatives à t puisse s'élever jusqu'à n' pour la variable principale ξ , jusqu'à n'' pour la variable principale η, \dots , les coefficients de

$$D_t^{n'} \xi, \quad D_t^{n''} \eta, \quad \dots$$

étant indépendants de D_x, D_y, D_z et se réduisant en conséquence à des quantités constantes. Faisons

$$n = n' + n'' + \dots$$

et supposons les variables principales

$$\xi, \eta, \zeta, \dots$$

assujetties non seulement à vérifier, quel que soit t , les équations linéaires données, mais aussi à vérifier, pour $t = 0$, les conditions

$$\begin{aligned} \xi &= \varphi(x, y, z), & D_t \xi &= \varphi_t(x, y, z), & \dots, & & D_t^{n'-1} \xi &= \varphi_{n'-1}(x, y, z), \\ \eta &= \chi(x, y, z), & D_t \eta &= \chi_t(x, y, z), & \dots, & & D_t^{n''-1} \eta &= \chi_{n''-1}(x, y, z), \\ \dots & & \dots & & \dots & & \dots & \dots \end{aligned}$$

Soient encore

$$\nabla = 0$$

l'équation en D_x, D_y, D_z, D_t , résultant de l'élimination de ξ, η, \dots entre les équations données, et

$$s = 0$$

l'équation caractéristique en laquelle se transforme la précédente quand on y remplace

$$D_x, D_y, D_z, D_t$$

par

$$u, v, w, s,$$

la fonction ∇ , qui est du degré n par rapport à D_t , étant choisie de manière que, dans cette fonction, le coefficient de D_t^n se réduise à l'unité. Enfin, supposons la fonction ω définie, comme dans le deuxième théorème, par conséquent déterminée par la formule (21) et nommons

$$\begin{aligned} \varphi, \quad \varphi_t, \quad \dots, \quad \varphi_{n-1} \\ \chi, \quad \chi_t, \quad \dots, \quad \chi_{n'-1} \\ \dots, \quad \dots, \quad \dots \end{aligned}$$

ce que devient ω quand on réduit $\omega(x, y, z)$ à l'une des fonctions initiales

$$\begin{aligned} \omega(x, y, z), \quad \varphi_t(x, y, z), \quad \dots, \quad \varphi_{n-1}(x, y, z), \\ \chi_t(x, y, z), \quad \chi_t(x, y, z), \quad \dots, \quad \chi_{n'-1}(x, y, z), \\ \dots \end{aligned}$$

Pour intégrer les équations linéaires données, de manière à remplir toutes les conditions requises, il suffira d'y remplacer les dérivées

$$\begin{aligned} D_t \xi, \quad D_t^2 \xi, \quad \dots, \quad D_t^n \xi; \\ D_t \eta, \quad D_t^2 \eta, \quad \dots, \quad D_t^{n''} \eta; \\ \dots \end{aligned}$$

par les différences

$$\begin{aligned} D_t \xi - \nabla \varphi, \quad D_t^2 \xi - \nabla(\varphi_t + D_t \varphi), \quad \dots, \quad D_t^n \xi - \nabla(\varphi_{n-1} + \dots + D_t^{n-2} \varphi_t + D_t^{n-1} \varphi); \\ D_t \eta - \nabla \chi, \quad D_t^2 \eta - \nabla(\chi_t + D_t \chi), \quad \dots, \quad D_t^{n''} \eta - \nabla(\chi_{n''-1} + \dots + D_t^{n''-2} \chi_t + D_t^{n''-1} \chi); \\ \dots \end{aligned}$$

puis de résoudre par rapport à ξ, η, \dots les nouvelles équations ainsi

obtenues, en opérant comme si

$$D_x, D_y, D_z, D_t$$

étaient de véritables quantités.

Les deux théorèmes qui précèdent offrent cela de remarquable qu'ils font dépendre l'intégration d'un système quelconque d'équations linéaires aux différences partielles et à coefficients constants de l'évaluation de la seule fonction ϖ . Lorsque les variables indépendantes

$$x, y, z, t$$

sont au nombre de quatre, savoir trois coordonnées et le temps, la fonction ϖ , déterminée par l'équation (21), se trouve représentée en conséquence par une intégrale définie sextuple, et la valeur initiale de

$$D_t^{\alpha-1} \varpi,$$

désignée par $\varpi(x, y, z)$, peut être une fonction quelconque des coordonnées x, y, z . Si au contraire les variables indépendantes se réduisaient à une seule t , la valeur initiale de $D_t^{\alpha-1} \varpi$ se réduirait à une constante, et l'on pourrait faire dépendre l'intégration des équations différentielles données de l'évaluation de ϖ , en supposant même que dans cette évaluation l'on attribuât à la constante une valeur particulière, par exemple la valeur 1, ce qui reviendrait à prendre pour ϖ la fonction principale Θ . Cela posé, en généralisant la définition que nous avons donnée de la *fonction principale*, on pourra désigner sous ce nom, pour un système d'équations linéaires aux différences partielles et à coefficients constants, la fonction ϖ déterminée par la formule (21). La fonction principale étant ainsi définie, on pourra dire que les théorèmes 2 et 3 ramènent l'intégration d'un système quelconque d'équations linéaires et à coefficients constants, à l'évaluation de l'intégrale définie qui représente la fonction principale.

Au reste, il est bon d'observer, d'une part, que le deuxième théorème peut être établi directement, comme la proposition analogue

énoncée dans le premier paragraphe, et relative à un système d'équations différentielles; d'autre part, que le troisième théorème se déduit immédiatement du deuxième, par des raisonnements semblables à ceux dont nous nous sommes servi dans le paragraphe III.

Les théorèmes 2 et 3 supposent que les seconds membres des équations linéaires données se réduisent à zéro. Si ces seconds membres devenaient fonctions des variables indépendantes x, y, z, t , on pourrait appliquer à la détermination des valeurs générales de ξ, η, \dots ou le premier théorème, ou la proposition suivante qu'on déduit de ce théorème combiné avec les principes établis dans le troisième paragraphe.

QUATRIÈME THÉORÈME. — Soient données, entre plusieurs variables principales

$$\xi, \eta, \dots$$

et les variables indépendantes

$$x, y, z, t,$$

des équations linéaires aux différences partielles et à coefficients constants, en nombre égal à celui des variables principales. Supposons d'ailleurs que, dans les premiers membres de ces équations, les dérivées des ordres les plus élevés par rapport à t soient respectivement

$$D_t^\alpha \xi \text{ pour la variable principale } \xi, \\ D_t^\alpha \eta \text{ pour la variable principale } \eta, \\ \dots \dots \dots$$

les coefficients de ces dérivées se réduisant à des quantités constantes, et les seconds membres des équations données pouvant être des fonctions quelconques des variables indépendantes. Enfin supposons que les valeurs initiales de

$$\xi, D_t \xi, \dots, D_t^{\alpha-1} \xi, \\ \eta, D_t \eta, \dots, D_t^{\alpha-1} \eta, \\ \dots \dots \dots$$

doivent se réduire, pour $t = 0$, à des fonctions connues de x, y, z . Pour



intégrer sous cette condition les équations linéaires données, on déterminera d'abord, à l'aide du second théorème, les valeurs générales de ξ, η, \dots correspondantes au cas où les seconds membres des équations données s'évanouiraient; puis à ces valeurs on ajoutera celles qui auraient la propriété de vérifier, quel que soit t , les équations données, et de vérifier, pour $t = 0$, les conditions

$$\begin{aligned} \xi = 0, & \quad D_t \xi = 0, & \quad D_t^{n-1} \xi = 0, \\ \eta = 0, & \quad D_t \eta = 0, & \quad D_t^{n-1} \eta = 0, \\ \dots, & \quad \dots, & \quad \dots \end{aligned}$$

Ces dernières valeurs de ξ, η, \dots seront d'ailleurs de la forme

$$\xi = \int_0^t \Xi dz, \quad \eta = \int_0^t H dz, \quad \dots$$

Ξ, H, \dots étant des fonctions de

$$x, y, z, t$$

et de la variable auxiliaire τ , déterminées par la règle suivante :

Soient

$$X, Y, \dots$$

des fonctions de x, y, z, t , propres à représenter les valeurs de

$$D_t^n \xi, D_t^n \eta, \dots$$

qui vérifient les équations données quand on y remplace

$$\begin{aligned} \xi, D_t \xi, \dots, D_t^{n-1} \xi, \\ \eta, D_t \eta, \dots, D_t^{n-1} \eta \end{aligned}$$

par zéro. Soient encore

$$\alpha, \beta, \dots$$

ce que deviennent

$$X, Y, \dots$$

quand on y remplace la variable indépendante t par la variable auxiliaire τ . Pour obtenir les valeurs générales de

$$\Xi, H, \dots$$

il suffira de réduire à zéro les seconds membres des équations données et de chercher ce que deviendront alors les valeurs de

$$\xi, \eta, \dots$$

fournies par le troisième théorème, quand on y remplacera

$$t \text{ par } t - \tau,$$

et les valeurs initiales de

$$\xi, D_t \xi, \dots, D_t^{n-1} \xi; \eta, D_t \eta, \dots, D_t^{n-1} \eta; \dots,$$

par

$$0, 0, \dots, 0, \alpha; 0, 0, \dots, 0, \beta; \dots$$

Jusqu'à présent nous avons supposé que le premier membre ∇ de l'équation produite par l'élimination de ξ, η, \dots entre les équations données, dans le cas où l'on remplace leurs seconds membres par zéro, était une fonction entière de D_x, D_y, D_z, D_t , dans laquelle on pouvait réduire le coefficient de D_t^n à l'unité. Cette réduction est en effet possible dans l'hypothèse que nous avons admise, savoir : lorsque, dans les équations données, les dérivées des ordres les plus élevés par rapport à t se trouvent multipliées par des quantités constantes, sans être soumises à des différentiations relatives aux variables x, y, z . Considérons maintenant le cas général où cette réduction ne pourrait s'effectuer sans que ∇ cessât d'être une fonction entière de D_x, D_y, D_z , et désignons par K la fonction de cette espèce qui représente généralement le coefficient de D_t^n , dans le développement de ∇ . Si l'on nomme α, s ce que devient K, ∇ , quand on y remplace D_x, D_y, D_z, D_t , par u, v, w, s ; si d'ailleurs on continue de nommer *fonction principale* une fonction ϖ de x, y, z, t , définie par l'équation (21), on trouvera dans le cas général : 1° pour $m < n - 1$,

$$\int \frac{s^m}{(s)} = 0;$$

2° pour $m = n - 1$,

$$\int \frac{s^{n-1}}{(s)} = \frac{1}{\alpha},$$

ou, ce qui revient au même,

$$\int \frac{\mathfrak{K} s^{n-1}}{(s)} = 1;$$

et par suite la fonction principale, qui vérifiera toujours, quel que soit t , l'équation (24), vérifiera, pour une valeur nulle de t , non plus les conditions (25), mais les suivantes :

$$(26) \quad \varpi = 0, \quad D_x \varpi = 0, \quad D_y^2 \varpi = 0, \quad \dots, \quad D_t^{n-1} \varpi = 0, \quad KD_t^{n-1} \varpi = \varpi(x, y, z).$$

Or, ces conditions, jointes à l'équation (24), ne suffiront pas pour déterminer complètement la fonction principale ϖ . Au reste, la seule considération de la formule (21) conduit à une conclusion du même genre. En effet, lorsque le coefficient de D_t^n dans ∇ , savoir \mathfrak{K} , sera fonction de D_x, D_y, D_z , le coefficient de s^n dans s , savoir \mathfrak{X} , sera fonction de u, v, w , et l'intégrale sextuple, comprise dans le second membre de la formule (21), ne sera plus généralement une intégrale complètement déterminée, attendu, par exemple, que la fonction sous le signe \int deviendra infinie pour les valeurs de u, v, w qui vérifieraient l'équation $\mathfrak{X} = 0$. Mais on tirera de la formule (21),

$$(27) \quad K\varpi = \int \int \int \int \int \int \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(\lambda x - \lambda y + \mu z - \nu t + w)} \varpi(\lambda, \mu, \nu) \frac{\mathfrak{X}}{(s)} \frac{d\lambda}{2\pi} \frac{d\nu}{2\pi} \frac{d\mu}{2\pi} \frac{d\nu}{2\pi} \frac{d\omega}{2\pi},$$

et cette dernière sera propre à fournir une valeur complètement déterminée de la fonction $K\varpi$. Si, après avoir calculé la fonction Π à l'aide de l'équation

$$(28) \quad \Pi = \int \int \int \int \int \int \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(\lambda x - \lambda y + \mu z - \nu t + w)} \varpi(\lambda, \mu, \nu) \frac{\mathfrak{X}}{(s)} \frac{d\lambda}{2\pi} \frac{d\nu}{2\pi} \frac{d\mu}{2\pi} \frac{d\nu}{2\pi} \frac{d\omega}{2\pi},$$

on pose généralement

$$(29) \quad K\varpi = \Pi,$$

on pourra prendre, pour valeur générale de la fonction principale ϖ ,

l'une quelconque de celles qui vérifieront la formule (29). A chacune d'elles correspondra un système de valeurs de

$$\xi, \eta, \dots$$

qu'on pourra obtenir à l'aide des théorèmes 2, 3 ou 4, et qui vérifiera toutes les conditions énoncées dans ces mêmes théorèmes.

Pour montrer une application des principes que nous venons d'exposer, concevons qu'il s'agisse d'intégrer les équations simultanées

$$\frac{d^2 \xi}{dx dt} + \frac{d\eta}{dy} = 0, \quad \frac{d^2 \eta}{dy dt} - \frac{d\xi}{dx} = 0,$$

ou, ce qui revient au même, les équations

$$D_x D_t \xi + D_y \eta = 0, \quad D_y D_t \eta - D_x \xi = 0,$$

de manière qu'on ait, pour $t = 0$,

$$\xi = \varphi(x, y), \quad \eta = \chi(x, y).$$

On trouvera, dans ce cas,

$$\nabla = D_x D_y (D_t^2 + 1), \quad s = uv(s^2 + 1), \\ K = D_x D_y, \quad \mathfrak{X} = uv;$$

par suite, la fonction principale ϖ , assujettie : 1° à vérifier, quel que soit t , l'équation

$$D_x D_y (D_t^2 + 1) \varpi = 0;$$

2° à vérifier, pour $t = 0$, les conditions

$$\varpi = 0, \quad D_x D_y D_t \varpi = \varpi(x, y),$$

sera définie par la formule

$$\varpi = \int \int \int \int \int \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i(\lambda x - \lambda y + \mu z - \nu t + w)}}{uv(s^2 + 1)} \varpi(\lambda, \mu) \frac{d\lambda}{2\pi} \frac{d\nu}{2\pi} \\ = \sin t \int \int \int \int \int \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i(\lambda x - \lambda y + \mu z + \nu \sqrt{-1} + w)}}{uv} \varpi(\lambda, \mu) \frac{d\lambda}{2\pi u} \frac{d\nu}{2\pi v},$$

qui n'en déterminera pas complètement la valeur, et pourra être l'une quelconque de celles qui, s'évanouissant avec t , vérifient l'équation

$$D_x D_y \varpi = \sin t \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(\lambda x - \mu y + \nu t - 2t)} \sqrt{-1} \varpi(\lambda, \mu) \frac{d\lambda}{2\pi} \frac{d\mu}{2\pi} \frac{d\nu}{2\pi} \\ = \sin t \varpi(x, y).$$

Soient pareillement φ, γ deux fonctions de x, y, t qui, s'évanouissant avec t , vérifient les équations

$$D_x D_y \varphi = \sin t \varphi(x, y), \quad D_x D_y \gamma = \sin t \gamma(x, y).$$

Les valeurs générales de ξ, η , qu'on déduira des formules

$$D_x D_t \xi + D_y \eta = D_x \nabla \varphi, \quad D_y D_t \eta - D_x \xi = D_y \nabla \gamma$$

en opérant comme si D_x, D_y, D_t, ∇ désignaient de véritables quantités, seront

$$\xi = D_y (D_x D_t \varphi - D_y \gamma), \quad \eta = D_x (D_y D_t \gamma + D_x \varphi),$$

ou, ce qui revient au même,

$$\xi = \cos t \varphi(x, y) - \sin t D_y \int \gamma(x, y) dx - X(y, t), \\ \eta = \cos t \gamma(x, y) + \sin t D_x \int \varphi(x, y) dy + \Phi(x, t),$$

les intégrations relatives aux variables x, y étant effectuées à partir de valeurs déterminées de ces variables, par exemple à partir de

$$x = 0, \quad y = 0,$$

et $\Phi(x, t), X(y, t)$ désignant deux fonctions arbitraires de x, t ou de y, t , assujetties à la seule condition de s'évanouir pour une valeur nulle de t . Il est d'ailleurs facile de s'assurer que les valeurs précédentes de ξ, η vérifient les deux équations données aux différences partielles et se réduisent respectivement à

$$\varphi(x, y), \quad \gamma(x, y).$$

quand on y pose $t = 0$.

§ V. — Application des principes exposés dans le paragraphe précédent à l'intégration des équations qui représentent les mouvements infiniment petits de divers points matériels.

Lorsqu'on recherche les lois des mouvements infiniment petits de divers points matériels dont le nombre est limité ou illimité, les équations différentielles ou aux différences partielles que fournissent les principes de la Mécanique ne contiennent généralement d'autres dérivées relatives au temps que des dérivées du second ordre, dont les coefficients se réduisent à l'unité. Il est donc utile d'appliquer en particulier les troisième et quatrième théorèmes du paragraphe précédent, au cas où l'on aurait

$$n' = n'' = n''' = \dots = 2.$$

Si dans ce cas on désigne par n , non plus la somme

$$n' + n'' + n''' + \dots,$$

mais le nombre des variables principales

$$\xi, \eta, \zeta, \dots$$

on obtiendra, au lieu du troisième théorème du paragraphe IV, la proposition suivante :

THEOREME. — Soient données, entre n variables principales

$$\xi, \eta, \zeta, \dots$$

et les variables indépendantes

$$x, y, z, t,$$

n équations linéaires aux différences partielles et à coefficients constants, qui renferment, avec les variables principales et leurs dérivées de divers ordres obtenues par des différentiations relatives aux coordonnées x, y, z ,

les dérivées du second ordre relatives au temps t , savoir

$$D_t^2 \xi, D_t^2 \eta, D_t^2 \zeta, \dots$$

les coefficients de ces dernières dérivées étant égaux à l'unité. Supposons d'ailleurs les variables principales ξ, η, ζ, \dots assujetties non seulement à vérifier, quel que soit t , les équations données, mais aussi à vérifier, pour $t = 0$, les conditions

$$(1) \begin{cases} \xi = \varphi(x, y, z), & \eta = \chi(x, y, z), & \zeta = \psi(x, y, z), & \dots \\ D_t \xi = \Phi(x, y, z), & D_t \eta = X(x, y, z), & D_t \zeta = \Psi(x, y, z), & \dots \end{cases}$$

Soient encore

$$(2) \quad \nabla = 0$$

l'équation en D_x, D_y, D_z, D_t résultant de l'élimination de ξ, η, ζ, \dots entre les équations données et

$$(3) \quad \delta = 0$$

l'équation caractéristique en laquelle se transforme la précédente, quand on y remplace les notations

$$\text{par} \quad \begin{matrix} D_x, D_y, D_z, D_t \\ u = v\sqrt{-1}, \quad v = \sqrt{-1}, \quad w = w\sqrt{-1}, \quad s, \end{matrix}$$

la fonction ∇ étant du degré $2n$ par rapport à D_t , et choisie de manière que le coefficient de D_t^{2n} se réduise à l'unité. Enfin soit

$$\varpi(x, y, z)$$

l'une quelconque des fonctions

$$\begin{matrix} \varphi(x, y, z), & \chi(x, y, z), & \psi(x, y, z), & \dots \\ \Phi(x, y, z), & X(x, y, z), & \Psi(x, y, z), & \dots \end{matrix}$$

Nommons ϖ la fonction principale déterminée par la formule

$$(4) \quad \varpi = \mathcal{L} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i(\lambda x + \mu y + \nu z + st)}}{(\delta)} \varpi(\lambda, \mu, \nu) \frac{d\lambda}{2\pi} \frac{d\mu}{2\pi} \frac{d\nu}{2\pi} \frac{ds}{2\pi},$$

par conséquent une fonction assujettie : ϖ à vérifier, quel que soit t , l'équation aux différences partielles

$$(5) \quad \nabla \varpi = 0;$$

2° à vérifier, pour $t = 0$, les conditions

$$(6) \quad \varpi = 0, \quad D_t \varpi = 0, \quad D_t^2 \varpi = 0, \quad \dots, \quad D_t^{2n-1} \varpi = 0, \quad D_t^{2n-1} \varpi = \varpi(x, y, z);$$

et désignons par

$$\varphi, \chi, \psi, \dots, \Phi, X, \Psi, \dots$$

ce que devient ϖ quand on réduit $\varpi(x, y, z)$ à l'une des fonctions

$$\begin{matrix} \varphi(x, y, z), & \chi(x, y, z), & \psi(x, y, z), & \dots \\ \Phi(x, y, z), & X(x, y, z), & \Psi(x, y, z), & \dots \end{matrix}$$

Pour intégrer les équations linéaires données de manière à remplir toutes les conditions requises, il suffira d'y remplacer les dérivées du second ordre

par les différences

$$D_t^2 \xi - \nabla(\Phi + D_t \varphi), \quad D_t^2 \eta - \nabla(X + D_t \chi), \quad D_t^2 \zeta - \nabla(\Psi + D_t \psi), \quad \dots$$

puis de résoudre par rapport à

$$\xi, \eta, \zeta, \dots$$

les nouvelles équations ainsi obtenues, en opérant comme si les notations

$$D_x, D_y, D_z, D_t$$

désignaient des quantités véritables.

Applications. — Les équations qui représentent les mouvements infiniment petits d'un système homogène de molécules sont de la forme

$$\begin{aligned} (L - D_t^2) \xi + R \eta + Q \zeta &= 0, \\ R \xi + (M - D_t^2) \eta + P \zeta &= 0, \\ Q \xi + P \eta + (N - D_t^2) \zeta &= 0, \end{aligned}$$

ξ, η, ζ étant les déplacements d'une molécule mesurés parallèlement aux axes coordonnés, et les lettres

$$L, M, N, P, Q, R$$

désignant des fonctions entières des caractéristiques

$$D_x, D_y, D_z.$$

Or concevons qu'on veuille intégrer ces équations de manière à vérifier, pour $t=0$, les six conditions

$$\begin{aligned} \xi &= \varphi(x, y, z), & \eta &= \chi(x, y, z), & \zeta &= \psi(x, y, z), \\ D_t \xi &= \Phi(x, y, z), & D_t \eta &= X(x, y, z), & D_t \zeta &= \Psi(x, y, z); \end{aligned}$$

par conséquent, en supposant connues les valeurs initiales des déplacements et des vitesses de chaque molécule suivant des directions parallèles aux axes des x, y, z . En appliquant le théorème ci-dessus énoncé à la recherche des valeurs générales de ξ, η, ζ , et nommant

$$\varrho, \mathfrak{R}, \mathfrak{S}, \mathfrak{U}, \mathfrak{V}, \mathfrak{W}$$

ce que deviennent

$$L, M, N, P, Q, R$$

quand on y remplace

$$D_x, D_y, D_z \text{ par } u, v, w,$$

on trouvera

$$\begin{aligned} \nabla &= (D_x^2 - L)(D_y^2 - M)(D_z^2 - N) - P^2(D^2 - L) - Q^2(D^2 - M) - R^2(D^2 - N) - 2PQR, \\ \delta &= (s^2 - \varrho)(s^2 - \mathfrak{R})(s^2 - \mathfrak{S}) - \mathfrak{U}^2(s^2 - \varrho) - \mathfrak{V}^2(s^2 - \mathfrak{R}) - \mathfrak{W}^2(s^2 - \mathfrak{S}) - 2\mathfrak{U}\mathfrak{V}\mathfrak{W}. \end{aligned}$$

Cela posé, soient

\mathfrak{m}

la fonction principale, déterminée par l'équation (4), et

$$\varphi, \chi, \psi, \Phi, X, \Psi$$

ce que devient cette fonction principale quand on remplace

$$\mathfrak{m}(x, y, z)$$

par l'une des fonctions initiales

$$\varphi(x, y, z), \chi(x, y, z), \psi(x, y, z), \Phi(x, y, z), X(x, y, z), \Psi(x, y, z).$$

Pour intégrer les équations données, de manière à remplir toutes les conditions requises, il suffira de résoudre par rapport à

$$\xi, \eta, \zeta$$

ces équations présentées sous les formes

$$\begin{aligned} (D_x^2 - L)\xi - R\eta - Q\zeta &= \nabla(\Phi + D_t \varphi), \\ -R\xi + (D_y^2 - M)\eta - P\zeta &= \nabla(X + D_t \chi), \\ -Q\xi - P\eta + (D_z^2 - N)\zeta &= \nabla(\Psi + D_t \psi), \end{aligned}$$

en opérant comme si D_x, D_y, D_z, D_t étaient de véritables quantités. Alors, en posant pour abrégé

$$\begin{aligned} \mathfrak{C} &= (D_x^2 - M)(D_y^2 - N) - P^2, & \mathfrak{P} &= P(D_x^2 - L) + QR, \\ \mathfrak{M} &= (D_x^2 - N)(D_y^2 - L) - Q^2, & \mathfrak{Q} &= Q(D_x^2 - M) + RP, \\ \mathfrak{U} &= (D_x^2 - L)(D_y^2 - M) - R^2, & \mathfrak{U} &= R(D_x^2 - N) + PQ, \end{aligned}$$

on trouvera

$$\begin{aligned} \xi &= D_x(\mathfrak{C}\varphi + \mathfrak{U}\chi + \mathfrak{Q}\psi) + (\mathfrak{C}\Phi + \mathfrak{U}X + \mathfrak{Q}\Psi), \\ \eta &= D_x(\mathfrak{U}\varphi + \mathfrak{M}\chi + \mathfrak{P}\psi) + (\mathfrak{U}\Phi + \mathfrak{M}X + \mathfrak{P}\Psi), \\ \zeta &= D_x(\mathfrak{Q}\varphi + \mathfrak{P}\chi + \mathfrak{U}\psi) + (\mathfrak{Q}\Phi + \mathfrak{P}X + \mathfrak{U}\Psi). \end{aligned}$$

Telles sont effectivement, sous leur forme la plus simple, les équations des mouvements infiniment petits d'un système homogène de molécules sollicitées par des forces d'attraction ou de répulsion mutuelle.

Considérons maintenant deux systèmes de molécules qui se pénètrent mutuellement. Les équations de leurs mouvements infiniment petits seront de la forme

$$\begin{aligned} (L - D_x^2)\xi + R\eta + Q\zeta + L_1\xi_1 + R_1\eta_1 + Q_1\zeta_1 &= 0, \\ R\xi + (M - D_y^2)\eta + P\zeta + R_1\xi_1 + M_1\eta_1 + P_1\zeta_1 &= 0, \\ Q\xi + P\eta + (N - D_z^2)\zeta + Q_1\xi_1 + P_1\eta_1 + N_1\zeta_1 &= 0, \\ L_1\xi + R_1\eta + Q_1\zeta + (L_2 - D_x^2)\xi_2 + R_2\eta_2 + Q_2\zeta_2 &= 0, \\ R_1\xi + M_1\eta + P_1\zeta + R_2\xi_2 + (M_2 - D_y^2)\eta_2 + P_2\zeta_2 &= 0, \\ Q_1\xi + P_1\eta + N_1\zeta + Q_2\xi_2 + P_2\eta_2 + (N_2 - D_z^2)\zeta_2 &= 0, \end{aligned}$$

ξ, η, ζ , ou ξ_1, η_1, ζ_1 étant les déplacements d'une molécule du premier ou du second système mesurés parallèlement aux axes coordonnés,

et les lettres

L, M, N, P, Q, R, L_i, M_i, ...

indiquant des fonctions entières des caractéristiques

D_x, D_y, D_z

Or supposons que les coefficients des différents termes proportionnels à D_x, D_y, D_z ou à leurs puissances soient, dans ces mêmes fonctions, regardés comme constants, ce qu'on peut admettre, au moins dans une première approximation, lorsque chaque système de molécules est homogène, et que le rayon de la sphère d'activité d'une molécule est très petit. Concevons d'ailleurs que l'on veuille intégrer les six équations données, dont chacune est du second ordre, de manière à vérifier, pour $t = 0$, les douze conditions

$$\begin{aligned} \xi &= \varphi(x, y, z), & \eta &= \chi(x, y, z), & \zeta &= \psi(x, y, z), \\ \xi_i &= \varphi_i(x, y, z), & \eta_i &= \chi_i(x, y, z), & \zeta_i &= \psi_i(x, y, z), \\ D_i \xi &= \Phi(x, y, z), & D_i \eta &= X(x, y, z), & D_i \zeta &= \Psi(x, y, z), \\ D_i \xi_i &= \Phi_i(x, y, z), & D_i \eta_i &= X_i(x, y, z), & D_i \zeta_i &= \Psi_i(x, y, z); \end{aligned}$$

par conséquent en supposant connues les valeurs initiales des déplacements et des vitesses de chaque molécule, suivant des directions parallèles aux axes des x, y, z . En appliquant le théorème ci-dessus énoncé à la recherche des valeurs générales de

$$\xi, \eta, \zeta, \xi_i, \eta_i, \zeta_i,$$

et nommant

$$\xi, \eta, \zeta, \xi_i, \eta_i, \zeta_i, \dots, \xi_n, \eta_n, \zeta_n,$$

ce que deviennent

$$L, M, N, P, Q, R, L_i, M_i, \dots, Q_i, R_i,$$

quand on y remplace

$$D_x, D_y, D_z \text{ par } u, v, w,$$

on trouvera

$$\begin{aligned} \nabla &= (D_x^2 - L)(D_y^2 - M)(D_z^2 - N)(D_x^2 - L_i)(D_y^2 - M_i)(D_z^2 - N_i) - \dots, \\ \delta &= (s^2 - \xi)(s^2 - \eta)(s^2 - \zeta)(s^2 - \xi_i)(s^2 - \eta_i)(s^2 - \zeta_i) - \dots \end{aligned}$$

Cela posé, soient

σ

la fonction principale, déterminée par l'équation (4), et

$$\begin{aligned} \varphi, \chi, \psi, \varphi_i, \chi_i, \psi_i, \\ \Phi, X, \Psi, \Phi_i, X_i, \Psi_i \end{aligned}$$

ce que devient cette fonction principale quand on remplace

$$\sigma(x, y, z)$$

par l'une des fonctions initiales

$$\varphi(x, y, z), \chi(x, y, z), \psi(x, y, z), \varphi_i(x, y, z), \chi_i(x, y, z), \psi_i(x, y, z), \\ \Phi(x, y, z), X(x, y, z), \Psi(x, y, z), \Phi_i(x, y, z), X_i(x, y, z), \Psi_i(x, y, z).$$

Pour intégrer les équations données de manière à remplir toutes les conditions requises, il suffira de résoudre par rapport à

$$\xi, \eta, \zeta, \xi_i, \eta_i, \zeta_i,$$

ces équations présentées sous les formes

$$\begin{aligned} (D_x^2 - L)\xi - R\eta - Q\zeta - L_i\xi_i - R_i\eta_i - Q_i\zeta_i &= \nabla(\Phi + D_i\varphi), \\ -R\xi + (D_y^2 - M)\eta - P\zeta - R_i\xi_i - M_i\eta_i - P_i\zeta_i &= \nabla(X + D_i\chi), \\ -Q\xi - P\eta + (D_z^2 - N)\zeta - Q_i\xi_i - P_i\eta_i - N_i\zeta_i &= \nabla(\Psi + D_i\psi), \\ -L_i\xi_i - R_i\eta_i - Q_i\zeta_i + (D_x^2 - L_i)\xi - R_i\eta_i - Q_i\zeta_i &= \nabla(\Phi_i + D_i\varphi_i), \\ -R_i\xi_i - M_i\eta_i - P_i\zeta_i - R_i\xi_i + (D_y^2 - M_i)\eta_i - P_i\zeta_i &= \nabla(X_i + D_i\chi_i), \\ -Q_i\xi_i - P_i\eta_i - N_i\zeta_i - Q_i\xi_i - P_i\eta_i + (D_z^2 - N_i)\zeta_i &= \nabla(\Psi_i + D_i\psi_i), \end{aligned}$$

en opérant comme si

$$D_x, D_y, D_z, D_i$$

étaient de véritables quantités. On trouvera de cette manière

$$\begin{aligned} \xi &= \xi(\Phi + D_i\varphi) + \mathfrak{u}(X + D_i\chi) + \mathfrak{e}(\Psi + D_i\psi) \\ &\quad + \xi_i(\Phi_i + D_i\varphi_i) + \mathfrak{u}_i(X_i + D_i\chi_i) + \mathfrak{e}_i(\Psi_i + D_i\psi_i), \\ \eta &= \mathfrak{u}(\Phi + D_i\varphi) + \mathfrak{m}(X + D_i\chi) + \mathfrak{p}(\Psi + D_i\psi) \\ &\quad + \mathfrak{u}_i(\Phi_i + D_i\varphi_i) + \mathfrak{m}_i(X_i + D_i\chi_i) + \mathfrak{p}_i(\Psi_i + D_i\psi_i), \\ \zeta &= \mathfrak{e}(\Phi + D_i\varphi) + \mathfrak{p}(X + D_i\chi) + \mathfrak{u}(\Psi + D_i\psi) \\ &\quad + \mathfrak{e}_i(\Phi_i + D_i\varphi_i) + \mathfrak{p}_i(X_i + D_i\chi_i) + \mathfrak{u}_i(\Psi_i + D_i\psi_i), \\ \xi_i &= \xi(\Phi + D_i\varphi) + \mathfrak{u}(X + D_i\chi) + \mathfrak{e}(\Psi + D_i\psi) \\ &\quad + \xi_i(\Phi_i + D_i\varphi_i) + \mathfrak{u}_i(X_i + D_i\chi_i) + \mathfrak{e}_i(\Psi_i + D_i\psi_i), \\ \eta_i &= \mathfrak{u}(\Phi + D_i\varphi) + \mathfrak{m}(X + D_i\chi) + \mathfrak{p}(\Psi + D_i\psi) \\ &\quad + \mathfrak{u}_i(\Phi_i + D_i\varphi_i) + \mathfrak{m}_i(X_i + D_i\chi_i) + \mathfrak{p}_i(\Psi_i + D_i\psi_i), \\ \zeta_i &= \mathfrak{e}(\Phi + D_i\varphi) + \mathfrak{p}(X + D_i\chi) + \mathfrak{u}(\Psi + D_i\psi) \\ &\quad + \mathfrak{e}_i(\Phi_i + D_i\varphi_i) + \mathfrak{p}_i(X_i + D_i\chi_i) + \mathfrak{u}_i(\Psi_i + D_i\psi_i), \end{aligned}$$

les lettres

$$\xi, \eta, \zeta, \dots, \xi, \eta, \dots, \xi, \eta, \dots$$

indiquant des fonctions entières des caractéristiques

$$D_x, D_y, D_z, D_t$$

et la forme de ces nouvelles fonctions se déduisant immédiatement de celle des fonctions représentées par

$$L, M, N, P, Q, R, L, M, \dots, Q, R,$$

Nota. — Étant donné, entre les variables principales ξ, η, ζ, \dots et les variables indépendantes x, y, z, t , un système d'équations linéaires aux différences partielles et à coefficients constants, écrites à l'aide des caractéristiques D_x, D_y, D_z, D_t ; si, en supposant les seconds membres de ces équations linéaires réduits à zéro, on élimine entre elles toutes les variables principales à l'exception d'une seule ξ , ou η , ou ζ, \dots , on obtiendra une équation résultante de l'une des formes

$$\nabla \xi = 0, \quad \nabla \eta = 0, \quad \nabla \zeta = 0, \quad \dots$$

∇ étant une fonction entière de D_x, D_y, D_z, D_t qui restera la même, quelle que soit la variable principale conservée, et qui sera précisément le premier membre de l'équation (15) du paragraphe IV. Ainsi chacune des variables principales devra vérifier, quel que soit t , une équation aux différences partielles semblable à celle que vérifie la fonction principale σ , c'est-à-dire la forme

$$\nabla \sigma = 0;$$

et il est clair qu'on pourra en dire autant d'une fonction linéaire quelconque ν des variables principales et de leurs dérivées, en sorte qu'on devra encore avoir

$$\nabla \nu = 0.$$

Si, dans les équations linéaires données, l'ordre des dérivées relatives à t s'élève jusqu'à n' pour la variable principale ξ , jusqu'à n'' pour η , jusqu'à n''' pour ζ, \dots , la plus haute puissance de D_t renfermée dans ∇

sera en général le nombre n déterminé par la formule

$$n = n' + n'' + n''' + \dots$$

Toutefois, il peut arriver, dans certains cas, que l'exposant de cette plus haute puissance de D_t s'abaisse au-dessous de la somme $n' + n'' + n''' + \dots$, ou bien encore que $\nabla \nu = 0$ ne soit pas l'équation aux différences partielles la plus simple à laquelle satisfasse la valeur générale de ν . Dans des cas semblables, les méthodes ci-dessus exposées ne cessent pas d'être applicables à l'intégration des équations linéaires données. Seulement il convient de les appliquer de manière que les valeurs générales de $\xi, \eta, \zeta, \dots, \nu$ se présentent sous la forme la plus simple possible. Les moyens qui peuvent conduire à ce but seront l'objet d'un autre Mémoire.

Nous remarquerons en finissant que, dans le cas où les seconds membres des équations linéaires données se réduisent, non pas à zéro, mais à des fonctions des seules variables x, y, z , en demeurant indépendants de la variable t , le quatrième théorème du paragraphe IV fournit la seconde partie de la valeur générale de chaque variable principale sous la forme à laquelle on serait conduit par une règle très simple qu'a donnée M. Liouville dans son *Journal de Mathématiques* (août 1838).