



§ VII. — Suite des applications numériques.

La valeur corrigée de  $\theta$ , qui dans le paragraphe VI se trouve représentée par

$$\theta - \Delta^1 \theta,$$

et déterminée en fonction de  $U, U', U'', U'''$  par la formule (136), ne vérifie qu'approximativement la condition de se réduire à l'unité, quand on remplace l'un des milieux réfringents par l'air (voir le Tableau XIX), ce qui revient à supposer

$$U = 7, \quad U' = 1, \quad U'' = 1, \quad U''' = 1.$$

Mais on pourrait modifier nos formules de manière que cette même condition se trouvât rigoureusement remplie. Pour y parvenir, il suffira de considérer la quantité  $\theta$ , que détermine, dans le paragraphe VI, l'équation (123), comme représentant la première valeur approchée de chacune des quantités

$$\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4, \theta_5, \theta_6, \theta_7,$$

et de substituer en conséquence aux équations (113), (114) les formules suivantes

$$(1) \begin{cases} \theta_1 = \theta + \Delta\theta_1, & \theta_2 = \theta + \Delta\theta_2, & \dots, & \theta_7 = \theta + \Delta\theta_7, \\ \Delta\theta_1 = \varpi'_1 + \Delta^1\theta_1, & \Delta\theta_2 = \varpi'_2 + \Delta^1\theta_2, & \dots, & \Delta\theta_7 = \varpi'_7 + \Delta^1\theta_7, \\ \Delta^2\theta_1 = \varpi''_1 + \Delta^2\theta_1, & \Delta^2\theta_2 = \varpi''_2 + \Delta^2\theta_2, & \dots, & \Delta^2\theta_7 = \varpi''_7 + \Delta^2\theta_7, \\ \Delta^3\theta_1 = \varpi'''_1 + \Delta^3\theta_1, & \Delta^3\theta_2 = \varpi'''_2 + \Delta^3\theta_2, & \dots, & \Delta^3\theta_7 = \varpi'''_7 + \Delta^3\theta_7, \\ \dots, & \dots, & \dots, & \dots \end{cases}$$

$$(2) \begin{cases} \theta = \frac{1}{7} S\theta = \frac{\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 + \theta_4 + \theta_5 + \theta_6 + \theta_7}{7}, \\ \varpi'_1 = \frac{\sum \Delta\theta_1}{\sum S^1 \Delta\theta_1} S^1 \Delta\theta_1, & \varpi'_2 = \frac{\sum \Delta\theta_2}{\sum S^1 \Delta\theta_2} S^1 \Delta\theta_2, & \dots, & \varpi'_7 = \frac{\sum \Delta\theta_7}{\sum S^1 \Delta\theta_7} S^1 \Delta\theta_7, \\ \varpi''_1 = \frac{\sum \Delta^2\theta_1}{\sum S^2 \Delta^2\theta_1} S^2 \Delta^2\theta_1, & \varpi''_2 = \frac{\sum \Delta^2\theta_2}{\sum S^2 \Delta^2\theta_2} S^2 \Delta^2\theta_2, & \dots, & \varpi''_7 = \frac{\sum \Delta^2\theta_7}{\sum S^2 \Delta^2\theta_7} S^2 \Delta^2\theta_7, \\ \varpi'''_1 = \frac{\sum \Delta^3\theta_1}{\sum S^3 \Delta^3\theta_1} S^3 \Delta^3\theta_1, & \varpi'''_2 = \frac{\sum \Delta^3\theta_2}{\sum S^3 \Delta^3\theta_2} S^3 \Delta^3\theta_2, & \dots, & \varpi'''_7 = \frac{\sum \Delta^3\theta_7}{\sum S^3 \Delta^3\theta_7} S^3 \Delta^3\theta_7, \\ \dots, & \dots, & \dots, & \dots \end{cases}$$

dans lesquelles on désigne par

$$S\theta, S^1\Delta\theta, S^2\Delta^2\theta, S^3\Delta^3\theta, \dots$$

les sommes des valeurs de

$$\theta, \Delta\theta, \Delta^2\theta, \Delta^3\theta, \dots$$

relatives aux divers rayons, mais prises tantôt avec le signe +, tantôt avec le signe -, de manière que les valeurs numériques de ces sommes se réduisent, du moins pour certaines substances, aux sommes des valeurs numériques, et par

$$\sum S^1 \Delta\theta, \sum S^2 \Delta^2\theta, \sum S^3 \Delta^3\theta, \dots$$

les sommes des valeurs numériques de

$$S^1 \Delta\theta, S^2 \Delta^2\theta, S^3 \Delta^3\theta, \dots$$

relatives aux diverses substances. Effectivement, si l'on remplace le milieu réfringent par l'air, ce qui revient à poser généralement

$$\theta = 1,$$

on tirera des formules (1) et (2) :

1°  $\theta = 1$  et, par suite,  $\Delta\theta = 0$ , quel que soit  $i$ ,

donc aussi  $S^1 \Delta\theta = 0$ ;

2°  $\varpi'_i = 0$  et, par suite,  $\Delta^2\theta = 0$ , quel que soit  $i$ ,

donc aussi  $S^2 \Delta^2\theta = 0$ ;

3°  $\varpi''_i = 0$ , et, par suite,  $\Delta^3\theta = 0$ , quel que soit  $i$ ,

donc aussi  $S^3 \Delta^3\theta = 0$ ;

4°  $\varpi'''_i = 0$ , et, par suite,  $\Delta^4\theta = 0$ , quel que soit  $i$ ,

etc. Donc, en définitive, les formules (1) et (2) donneront, quand on substituera l'air au milieu réfringent,

$$\Delta\theta = 0, \quad \Delta^2\theta = 0, \quad \Delta^3\theta = 0, \quad \Delta^4\theta = 0, \quad \dots$$



et, par conséquent,

$$\theta_i - \Delta\theta_i = \theta_i - \Delta^2\theta_i = \theta_i - \Delta^3\theta_i = \theta_i - \Delta^4\theta_i = \dots = 1.$$

D'ailleurs les formules (1) diffèrent des formules (113) du paragraphe VI en un seul point, savoir, que les valeurs de  $\Delta\theta_i$  s'y trouvent déterminées, non plus par des équations de la forme

$$\theta_i = \xi_i + \Delta\theta_i \quad \text{ou} \quad \Delta\theta_i = \theta_i - \xi_i,$$

mais par des équations de la forme

$$\theta_i = \theta + \Delta\theta_i \quad \text{ou} \quad \Delta\theta_i = \theta_i - \theta.$$

Du reste, les nouvelles valeurs de  $\Delta\theta_i$ , comme les premières, s'évanouiraient si l'on pouvait réduire la formule (42) du paragraphe VI à la formule (56) du même paragraphe, puisqu'on aurait alors

$$\theta_i = \theta_2 = \theta_3 = \theta_4 = \theta_5 = \theta_6 = \theta.$$

Donc les nouvelles valeurs de  $\Delta\theta_i$ , comme les premières, seront des quantités du même ordre que  $b_2$ . Elles satisferont aussi, comme elles, à l'équation

$$K_1 \Delta\theta_1 + K_2 \Delta\theta_2 + \dots + K_n \Delta\theta_n = 0,$$

que l'on déduira immédiatement des équations (41) et (42) du paragraphe VI, jointes aux formules

$$\theta_1 = \theta + \Delta\theta_1, \quad \theta_2 = \theta + \Delta\theta_2, \quad \dots, \quad \theta_n = \theta + \Delta\theta_n;$$

et c'est à l'aide des mêmes règles que, dans les formules (113), § VI, et (1), § VII, on déduira successivement les valeurs de  $\Delta^2\theta_i$ ,  $\Delta^3\theta_i$ ,  $\Delta^4\theta_i$ , ... des valeurs déjà calculées de  $\Delta\theta_i$ . Enfin les formules (1) et (2), aussi bien que les formules (113) et (114) du paragraphe VI, entraîneront les conditions (116), (117), (118), (119) du paragraphe VI, à l'exception de la première des conditions (116) et de celles des conditions (118), (119) qui renferment le signe  $\Sigma$ . Cela posé, en raisonnant toujours de la même manière, on prouvera que les formules (1), comme les formules (113), § VI, fournissent: 1° des valeurs de

$$\Delta\theta_i, \quad \Delta^2\theta_i, \quad \Delta^3\theta_i, \quad \Delta^4\theta_i, \quad \dots$$

respectivement comparables aux coefficients

$$b_1, \quad b_2, \quad b_3, \quad b_4, \quad \dots,$$

par conséquent des valeurs de  $\Delta^i\theta_i$ , comparables aux erreurs d'observation, puisqu'on a vu qu'on peut sans erreur sensible supposer  $b_2 = 0$ : 2° des valeurs de

$$\theta_i - \Delta^i\theta_i,$$

ou valeurs corrigées de  $\theta_i$ , qui pourront être substituées aux valeurs de  $\theta_i$  directement tirées des expériences, et mériteront même plus de confiance que ces dernières.

Si l'on fait, pour abrégér,

$$(3) \quad \begin{cases} \beta_1 = \frac{\Sigma \Delta\theta_1}{\Sigma S' \Delta\theta_1}, & \beta_2 = \frac{\Sigma \Delta^2\theta_1}{\Sigma S' \Delta^2\theta_1}, & \dots, & \beta_3 = \frac{\Sigma \Delta^3\theta_1}{\Sigma S' \Delta^3\theta_1}, \\ \gamma_1 = \frac{\Sigma \Delta^2\theta_1}{\Sigma S'' \Delta^2\theta_1}, & \gamma_2 = \frac{\Sigma \Delta^3\theta_1}{\Sigma S'' \Delta^3\theta_1}, & \dots, & \gamma_3 = \frac{\Sigma \Delta^4\theta_1}{\Sigma S'' \Delta^4\theta_1}, \\ \delta_1 = \frac{\Sigma \Delta^3\theta_1}{\Sigma S''' \Delta^3\theta_1}, & \delta_2 = \frac{\Sigma \Delta^4\theta_1}{\Sigma S''' \Delta^4\theta_1}, & \dots, & \delta_3 = \frac{\Sigma \Delta^5\theta_1}{\Sigma S''' \Delta^5\theta_1}, \\ \dots, & \dots, & \dots, & \dots \end{cases}$$

les formules (2) donneront

$$(4) \quad \begin{cases} \xi_1 = \beta_1 S' \Delta\theta_1, & \xi_2 = \beta_2 S' \Delta^2\theta_1, & \dots, & \xi_3 = \beta_3 S' \Delta^3\theta_1, \\ \xi_1 = \gamma_1 S'' \Delta^2\theta_1, & \xi_2 = \gamma_2 S'' \Delta^3\theta_1, & \dots, & \xi_3 = \gamma_3 S'' \Delta^4\theta_1, \\ \xi_1 = \delta_1 S''' \Delta^3\theta_1, & \xi_2 = \delta_2 S''' \Delta^4\theta_1, & \dots, & \xi_3 = \delta_3 S''' \Delta^5\theta_1, \\ \dots, & \dots, & \dots, & \dots \end{cases}$$

et l'on tirera des équations (3) jointes aux équations (117), § VI,

$$(5) \quad \begin{cases} S\beta_i = 0, & S'\beta_i = 1, \\ S\gamma_i = 0, & S'\gamma_i = 0, & S''\gamma_i = 1, \\ S\delta_i = 0, & S'\delta_i = 0, & S''\delta_i = 0, & S'''\delta_i = 1, \\ \dots, & \dots, & \dots, & \dots \end{cases}$$

Si maintenant on applique aux expériences de Fraunhofer les formules (1), (3) et (4), alors, en partant des valeurs de  $\theta$  données par



le Tableau VIII du paragraphe VI, on reconnaîtra que les sommes désignées par

$$S^{\circ}\theta, S^{\circ}\theta, S^{\circ}\theta,$$

peuvent rester composées comme l'indiquent les équations (49) du même paragraphe; et, en posant en conséquence

$$(6) \begin{cases} S^{\circ}\theta = \theta_1 + \theta_2 + \theta_3 + \theta_4 - \theta_5 - \theta_6 - \theta_7, \\ S^{\circ}\theta = -\theta_1 - \theta_2 + \theta_3 + \theta_4 + \theta_5 + \theta_6 - \theta_7, \\ S^{\circ}\theta = -\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 - \theta_4 - \theta_5 + \theta_6 + \theta_7, \end{cases}$$

on obtiendra successivement les valeurs de

$$\Delta^0\theta, \beta_1, \gamma_1, \Delta^1\theta, \gamma_2, \Delta^2\theta, \delta_1, \gamma_3, \Delta^3\theta,$$

que fournissent les Tableaux suivants.

Les nombres compris dans la dernière colonne verticale du Tableau I servent à prouver la justesse de nos calculs; car ces nombres, qui représentent les diverses valeurs des trois sommes

$$\Sigma^0\theta, \Sigma^1\theta, \Sigma^2\theta,$$

dont chacune se compose uniquement de termes positifs, vérifient les formules

$$\Sigma^0\theta_1 = \Sigma^0\theta + \Sigma^1\Delta^0\theta, \quad \Sigma^0\theta_2 = \Sigma^0\theta + \Sigma^1\Delta^0\theta, \quad \dots, \quad \Sigma^0\theta_n = \Sigma^0\theta + \Sigma^1\Delta^0\theta,$$

que l'on déduit immédiatement des premières des équations (153).

TABLEAU I.  
Valeurs de  $\Delta^0\theta$ .

	EQU.		SOLUTION de l'équation.	HUILE le plus blanc.	GROUPEMENT.			PÉRIODES.			SOMMES.	
	1 <sup>re</sup> série.	2 <sup>de</sup> série.			1 <sup>re</sup> espèce.	2 <sup>de</sup> espèce.	3 <sup>e</sup> espèce.	1 <sup>re</sup> espèce.	2 <sup>de</sup> espèce.	3 <sup>e</sup> espèce.		
$\theta_1$	1,786201	1,786186	1,978320	2,189883	2,338877	2,448460	2,615351	2,790331	2,973825	3,165192	3,364831	35,360606
$\theta_2$	1,771387	1,771500	1,958661	2,169366	2,328164	2,441322	2,603338	2,783581	2,970320	3,163910	3,364556	37,876836
$\Delta^0_1$	-0,014814	-0,014986	-0,019359	-0,027223	-0,023223	-0,023938	-0,024883	-0,025740	-0,026592	-0,027444	-0,028296	-0,449330
$\theta_3$	1,786201	1,786186	1,978320	2,189883	2,338877	2,448460	2,615351	2,790331	2,973825	3,165192	3,364831	38,360606
$\theta_4$	1,771387	1,771500	1,958661	2,169366	2,328164	2,441322	2,603338	2,783581	2,970320	3,163910	3,364556	40,876836
$\Delta^0_2$	-0,014814	-0,014986	-0,019359	-0,027223	-0,023223	-0,023938	-0,024883	-0,025740	-0,026592	-0,027444	-0,028296	-0,379663
$\theta_5$	1,786201	1,786186	1,978320	2,189883	2,338877	2,448460	2,615351	2,790331	2,973825	3,165192	3,364831	39,360606
$\theta_6$	1,771387	1,771500	1,958661	2,169366	2,328164	2,441322	2,603338	2,783581	2,970320	3,163910	3,364556	41,876836
$\Delta^0_3$	-0,014814	-0,014986	-0,019359	-0,027223	-0,023223	-0,023938	-0,024883	-0,025740	-0,026592	-0,027444	-0,028296	-0,319663
$\theta_7$	1,786201	1,786186	1,978320	2,189883	2,338877	2,448460	2,615351	2,790331	2,973825	3,165192	3,364831	42,360606
$\theta_8$	1,771387	1,771500	1,958661	2,169366	2,328164	2,441322	2,603338	2,783581	2,970320	3,163910	3,364556	44,876836
$\Delta^0_4$	-0,014814	-0,014986	-0,019359	-0,027223	-0,023223	-0,023938	-0,024883	-0,025740	-0,026592	-0,027444	-0,028296	-0,259663
$\theta_9$	1,786201	1,786186	1,978320	2,189883	2,338877	2,448460	2,615351	2,790331	2,973825	3,165192	3,364831	45,360606
$\theta_{10}$	1,771387	1,771500	1,958661	2,169366	2,328164	2,441322	2,603338	2,783581	2,970320	3,163910	3,364556	47,876836
$\Delta^0_5$	-0,014814	-0,014986	-0,019359	-0,027223	-0,023223	-0,023938	-0,024883	-0,025740	-0,026592	-0,027444	-0,028296	-0,199663
$\theta_{11}$	1,786201	1,786186	1,978320	2,189883	2,338877	2,448460	2,615351	2,790331	2,973825	3,165192	3,364831	48,360606
$\theta_{12}$	1,771387	1,771500	1,958661	2,169366	2,328164	2,441322	2,603338	2,783581	2,970320	3,163910	3,364556	50,876836
$\Delta^0_6$	-0,014814	-0,014986	-0,019359	-0,027223	-0,023223	-0,023938	-0,024883	-0,025740	-0,026592	-0,027444	-0,028296	-0,139663
$\theta_{13}$	1,786201	1,786186	1,978320	2,189883	2,338877	2,448460	2,615351	2,790331	2,973825	3,165192	3,364831	49,360606
$\theta_{14}$	1,771387	1,771500	1,958661	2,169366	2,328164	2,441322	2,603338	2,783581	2,970320	3,163910	3,364556	51,876836
$\Delta^0_7$	-0,014814	-0,014986	-0,019359	-0,027223	-0,023223	-0,023938	-0,024883	-0,025740	-0,026592	-0,027444	-0,028296	-0,079663
$\theta_{15}$	1,786201	1,786186	1,978320	2,189883	2,338877	2,448460	2,615351	2,790331	2,973825	3,165192	3,364831	52,360606
$\theta_{16}$	1,771387	1,771500	1,958661	2,169366	2,328164	2,441322	2,603338	2,783581	2,970320	3,163910	3,364556	54,876836
$\Delta^0_8$	-0,014814	-0,014986	-0,019359	-0,027223	-0,023223	-0,023938	-0,024883	-0,025740	-0,026592	-0,027444	-0,028296	-0,019663
$\theta_{17}$	1,786201	1,786186	1,978320	2,189883	2,338877	2,448460	2,615351	2,790331	2,973825	3,165192	3,364831	53,360606
$\theta_{18}$	1,771387	1,771500	1,958661	2,169366	2,328164	2,441322	2,603338	2,783581	2,970320	3,163910	3,364556	55,876836
$\Delta^0_9$	-0,014814	-0,014986	-0,019359	-0,027223	-0,023223	-0,023938	-0,024883	-0,025740	-0,026592	-0,027444	-0,028296	-0,059663
$\theta_{19}$	1,786201	1,786186	1,978320	2,189883	2,338877	2,448460	2,615351	2,790331	2,973825	3,165192	3,364831	54,360606
$\theta_{20}$	1,771387	1,771500	1,958661	2,169366	2,328164	2,441322	2,603338	2,783581	2,970320	3,163910	3,364556	56,876836
$\Delta^0_{10}$	-0,014814	-0,014986	-0,019359	-0,027223	-0,023223	-0,023938	-0,024883	-0,025740	-0,026592	-0,027444	-0,028296	-0,039663
$\theta_{21}$	1,786201	1,786186	1,978320	2,189883	2,338877	2,448460	2,615351	2,790331	2,973825	3,165192	3,364831	55,360606
$\theta_{22}$	1,771387	1,771500	1,958661	2,169366	2,328164	2,441322	2,603338	2,783581	2,970320	3,163910	3,364556	57,876836
$\Delta^0_{11}$	-0,014814	-0,014986	-0,019359	-0,027223	-0,023223	-0,023938	-0,024883	-0,025740	-0,026592	-0,027444	-0,028296	-0,079663
$\theta_{23}$	1,786201	1,786186	1,978320	2,189883	2,338877	2,448460	2,615351	2,790331	2,973825	3,165192	3,364831	56,360606
$\theta_{24}$	1,771387	1,771500	1,958661	2,169366	2,328164	2,441322	2,603338	2,783581	2,970320	3,163910	3,364556	58,876836
$\Delta^0_{12}$	-0,014814	-0,014986	-0,019359	-0,027223	-0,023223	-0,023938	-0,024883	-0,025740	-0,026592	-0,027444	-0,028296	-0,119663
$\theta_{25}$	1,786201	1,786186	1,978320	2,189883	2,338877	2,448460	2,615351	2,790331	2,973825	3,165192	3,364831	57,360606
$\theta_{26}$	1,771387	1,771500	1,958661	2,169366	2,328164	2,441322	2,603338	2,783581	2,970320	3,163910	3,364556	59,876836
$\Delta^0_{13}$	-0,014814	-0,014986	-0,019359	-0,027223	-0,023223	-0,023938	-0,024883	-0,025740	-0,026592	-0,027444	-0,028296	-0,159663
$\theta_{27}$	1,786201	1,786186	1,978320	2,189883	2,338877	2,448460	2,615351	2,790331	2,973825	3,165192	3,364831	58,360606
$\theta_{28}$	1,771387	1,771500	1,958661	2,169366	2,328164	2,441322	2,603338	2,783581	2,970320	3,163910	3,364556	60,876836
$\Delta^0_{14}$	-0,014814	-0,014986	-0,019359	-0,027223	-0,023223	-0,023938	-0,024883	-0,025740	-0,026592	-0,027444	-0,028296	-0,199663
$\theta_{29}$	1,786201	1,786186	1,978320	2,189883	2,338877	2,448460	2,615351	2,790331	2,973825	3,165192	3,364831	59,360606
$\theta_{30}$	1,771387	1,771500	1,958661	2,169366	2,328164	2,441322	2,603338	2,783581	2,970320	3,163910	3,364556	61,876836
$\Delta^0_{15}$	-0,014814	-0,014986	-0,019359	-0,027223	-0,023223	-0,023938	-0,024883	-0,025740	-0,026592	-0,027444	-0,028296	-0,239663
$\theta_{31}$	1,786201	1,786186	1,978320	2,189883	2,338877	2,448460	2,615351	2,790331	2,973825	3,165192	3,364831	60,360606
$\theta_{32}$	1,771387	1,771500	1,958661	2,169366	2,328164	2,441322	2,603338	2,783581	2,970320	3,163910	3,364556	62,876836
$\Delta^0_{16}$	-0,014814	-0,014986	-0,019359	-0,027223	-0,023223	-0,023938	-0,024883	-0,025740	-0,026592	-0,027444	-0,028296	-0,279663
$\theta_{33}$	1,786201	1,786186	1,978320	2,189883	2,338877	2,448460	2,615351	2,790331	2,973825	3,165192	3,364831	61,360606
$\theta_{34}$	1,771387	1,771500	1,958661	2,169366	2,328164	2,441322	2,603338	2,783581	2,970320	3,163910	3,364556	63,876836
$\Delta^0_{17}$	-0,014814	-0,014986	-0,019359	-0,027223	-0,023223	-0,023938	-0,024883	-0,025740	-0,026592	-0,027444	-0,028296	-0,319663
$\theta_{35}$	1,786201	1,786186	1,978320	2,189883	2,338877	2,448460	2,615351	2,790331	2,973825	3,165192	3,364831	62,360606
$\theta_{36}$	1,771387	1,771500	1,958661	2,169366	2,328164	2,441322	2,603338	2,783581	2,970320	3,163910	3,364556	64,876836
$\Delta^0_{18}$	-0,014814	-0,014986	-0,019359	-0,027223	-0,023223	-0,023938	-0,024883	-0,025740	-0,026592	-0,027444	-0,028296	-0,359663
$\theta_{37}$	1,786201	1,786186	1,978320	2,189883	2,338877	2,448460	2,615351	2,790331	2,973825	3,165192	3,364831	63,360606
$\theta_{38}$	1,771387	1,771500	1,958661	2,169366	2,328164	2,441322	2,603338	2,783581	2,970320	3,163910	3,364556	65,876836
$\Delta^0_{19}$	-0,014814	-0,014986	-0,019359	-0,027223	-0,023223	-0,023938	-0,024883	-0,025740	-0,026592	-0,027444	-0,028296	-0,399663
$\theta_{39}$	1,786201	1,786186	1,978320	2,189883	2,338877	2,448460	2,615351	2,7				









TABLEAU VII (suite).

	E.A.		SOLUTION de potasse.		HUILE de bonnet blanc.		CHOWNGLASS.			PLINTGLASS.			SOMMES.	
	1 <sup>re</sup> espèce.	2 <sup>e</sup> espèce.	1 <sup>re</sup> espèce.	2 <sup>e</sup> espèce.	1 <sup>re</sup> espèce.	2 <sup>e</sup> espèce.	1 <sup>re</sup> espèce.	2 <sup>e</sup> espèce.	3 <sup>e</sup> espèce.	1 <sup>re</sup> espèce.	2 <sup>e</sup> espèce.	3 <sup>e</sup> espèce.	1 <sup>re</sup> espèce.	2 <sup>e</sup> espèce.
$L(\pm S^* \Delta^* \Theta)$	313638	1986571	3483649	7817354	7923917	440734	4335389	7534383	9731279	3979400	2455127	3747484	3747484	
$L(-\Theta)$	652847	6622817	6652847	817554	7923917	440734	4335389	7534383	9731279	3979400	2455127	3747484	6652847	
$L(\pm S^* \Delta^* \Theta)$	1986571	313638	3483649	7817354	7923917	440734	4335389	7534383	9731279	3979400	2455127	3747484	6652847	
$\Sigma_1^*$	31	18	26	79	7	3	16	66	11	29	20	28	28	
$\Delta^* \Theta_1$	43	11	27	113	12	36	17	58	24	9	70	91	91	
$\Delta^* \Theta_2$	12	7	1	43	5	33	1	8	35	30	90	66	66	
$L(\pm S^* \Delta^* \Theta)$	313638	1986571	3483649	7817354	7923917	440734	4335389	7534383	9731279	3979400	2455127	3747484	6652847	
$L(-\Theta)$	6652847	6622817	6652847	817554	7923917	440734	4335389	7534383	9731279	3979400	2455127	3747484	6652847	
$L(\pm S^* \Delta^* \Theta)$	1986571	313638	3483649	7817354	7923917	440734	4335389	7534383	9731279	3979400	2455127	3747484	6652847	
$\Sigma_2^*$	60	23	43	89	9	4	20	8	35	26	35	35	35	
$\Delta^* \Theta_1$	4	20	43	61	44	36	12	98	16	55	67	13	13	
$\Delta^* \Theta_2$	38	3	9	38	35	40	8	14	22	16	41	22	22	
$L(\pm S^* \Delta^* \Theta)$	313638	1986571	3483649	7817354	7923917	440734	4335389	7534383	9731279	3979400	2455127	3747484	6652847	
$L(-\Theta)$	6652847	6622817	6652847	817554	7923917	440734	4335389	7534383	9731279	3979400	2455127	3747484	6652847	
$L(\pm S^* \Delta^* \Theta)$	1986571	313638	3483649	7817354	7923917	440734	4335389	7534383	9731279	3979400	2455127	3747484	6652847	
$\Sigma_3^*$	6	3	5	13	43	67	17	7	60	9	38	85	85	
$\Delta^* \Theta_1$	11	20	18	21	43	17	7	7	7	38	38	85	85	
$\Delta^* \Theta_2$	17	23	13	34	42	48	20	5	58	4	32	80	80	
$L(\pm S^* \Delta^* \Theta)$	313638	1986571	3483649	7817354	7923917	440734	4335389	7534383	9731279	3979400	2455127	3747484	6652847	
$L(-\Theta)$	6652847	6622817	6652847	817554	7923917	440734	4335389	7534383	9731279	3979400	2455127	3747484	6652847	
$L(\pm S^* \Delta^* \Theta)$	1986571	313638	3483649	7817354	7923917	440734	4335389	7534383	9731279	3979400	2455127	3747484	6652847	
$\Sigma_4^*$	34	20	28	77	8	3	17	72	12	32	32	78	78	
$\Delta^* \Theta_1$	17	40	35	84	1	29	36	91	34	47	91	73	73	
$\Delta^* \Theta_2$	17	20	3	4	9	36	13	19	36	15	72	103	103	

D'après le Tableau qui précède, la plus grande des valeurs numériques de  $\Delta^* \Theta_1$ , représentée par le nombre

$$0,000103,$$

est de beaucoup inférieure au nombre

$$0,000159$$

qui représente la plus grande des valeurs numériques des variations de  $\Theta$ , comprises dans la 7<sup>e</sup> ligne horizontale du Tableau VII du § VI, d'où il résulte encore que, dans l'application de nos formules aux expériences de Fraunhofer, on peut, sans erreur sensible, réduire le second membre de l'équation (1) ou (9) (§ VI) à ses quatre premiers termes. Il y a plus : en raisonnant comme dans le § VI, on prouvera que les valeurs de  $\Theta$ , déduites de l'expérience méritent moins de confiance que les valeurs corrigées de  $\Theta_i$  qu'on tirerait des équations (1) en y remplaçant généralement  $\Delta^* \Theta$  par zéro. D'ailleurs, comme en vertu des formules (1) on aura

$$(7) \quad \Theta_i = \Theta + \Sigma_1^* + \Sigma_2^* + \Sigma_3^* + \Delta^* \Theta_i,$$

les valeurs corrigées de  $\Theta_i$ , ou celles qu'on obtiendra en remplaçant, dans le second membre de l'équation (7),  $\Delta^* \Theta$  par zéro, seront évidemment les diverses valeurs du polynôme

$$(8) \quad \Theta + \Sigma_1^* + \Sigma_2^* + \Sigma_3^* = \Theta_i - \Delta^* \Theta_i.$$

Cela posé, on tirera sans peine des Tableaux I, III, V et VII le Tableau suivant qui offre, non seulement les valeurs de  $\Theta_i$  immédiatement déduites de l'expérience, mais aussi les valeurs corrigées de  $\Theta_i$  ou, en d'autres termes, les valeurs de

$$\Theta_i - \Delta^* \Theta_i,$$

et montre comment ces dernières valeurs se trouvent formées par l'addition des quantités

$$\Theta, \Sigma_1^*, \Sigma_2^*, \Sigma_3^*.$$







Dans le Tableau VIII, ainsi qu'on devait s'y attendre, les valeurs numériques des quatre quantités

$$(9) \quad \theta, \varpi', \varpi'', \varpi'''$$

forment généralement une suite décroissante. La seule substance pour laquelle cette condition ne soit pas toujours remplie est l'huile de térébenthine. Encore, pour cette substance, les exceptions sont-elles seulement relatives à la valeur numérique de  $\varpi''$ , qui devient supérieure, quand il s'agit des rayons B, C, D, F, à la valeur numérique de  $\varpi''$ .

Les valeurs de

$$\theta_i - \Delta^i \theta_i$$

fournies par le Tableau VIII, c'est-à-dire, en d'autres termes, les carrés des indices de réfraction, calculés pour les rayons et les substances auxquelles se rapportent les expériences de Fraunhofer, et corrigés d'après les principes ci-dessus exposés, se réduisent évidemment, pour chaque substance, à sept valeurs particulières d'une même fonction linéaire des quantités

$$\beta_i, \gamma_i, \delta_i,$$

et pour chaque rayon à des valeurs particulières d'une fonction linéaire des seules quantités

$$(10) \quad \theta = \frac{1}{2} S \theta_i, \quad U' = S' \theta_i, \quad U'' = S'' \theta_i, \quad U''' = S''' \theta_i.$$

En effet, on tirera successivement des équations (1) et (4)

$$\Delta \theta_i = \theta_i - \theta,$$

$$S' \Delta \theta_i = S'(\theta_i - \theta) = S' \theta_i - \theta = U' - \theta,$$

puis

$$\varpi'_i = (U' - \theta) \beta_i,$$

$$\Delta^2 \theta_i = \Delta \theta_i - \varpi'_i = \theta_i - \theta - (U' - \theta) \beta_i,$$

$$S'' \Delta^2 \theta_i = S''[\theta_i - \theta - (U' - \theta) \beta_i] = S'' \theta_i - \theta - (U' - \theta) S'' \beta_i \\ = U'' - \theta - (U' - \theta) S'' \beta_i,$$

puis encore

$$\varpi''_i = [U'' - \theta - (U' - \theta) S'' \beta_i] \gamma_i,$$

$$\Delta^3 \theta_i = \Delta^2 \theta_i - \varpi''_i = \theta_i - \theta - (U' - \theta) \beta_i - [U'' - \theta - (U' - \theta) S'' \beta_i] \gamma_i,$$

$$S''' \Delta^3 \theta_i = S'''[\theta_i - \theta - (U' - \theta) \beta_i - [U'' - \theta - (U' - \theta) S'' \beta_i] \gamma_i] \\ = U''' - \theta - (U' - \theta) S''' \beta_i - [U'' - \theta - (U' - \theta) S'' \beta_i] S''' \gamma_i,$$

et enfin

$$\varpi'''_i = \frac{1}{2} U''' - \theta - (U' - \theta) S''' \beta_i - [U'' - \theta - (U' - \theta) S'' \beta_i] S''' \gamma_i \frac{1}{2} \delta_i.$$

Or, en substituant les valeurs précédentes de

$$\varpi_i, \varpi'_i, \varpi''_i$$

dans le premier membre de l'équation (8), on tirera de cette équation

$$(11) \quad \left\{ \begin{aligned} \theta_i - \Delta^4 \theta_i &= \theta + (U' - \theta) \beta_i + [U'' - \theta - (U' - \theta) S'' \beta_i] \gamma_i \\ &+ \frac{1}{2} [U''' - \theta - (U' - \theta) S''' \beta_i - [U'' - \theta - (U' - \theta) S'' \beta_i] S''' \gamma_i] \delta_i. \end{aligned} \right.$$

Telle est la formule à l'aide de laquelle la valeur corrigée de  $\theta_i$ , ou, ce qui revient au même, la valeur de  $\theta_i - \Delta^4 \theta_i$ , se trouve déterminée pour chaque substance en fonction linéaire des quantités

$$\beta_i, \gamma_i, \delta_i$$

qui varient avec les divers rayons, et pour chaque rayon en fonction linéaire des quantités

$$\theta, U, U', U''$$

qui varient avec la substance que l'on considère. D'ailleurs on reconnaîtra sans peine : 1° que, si le second membre de la formule (11) est substitué à la place de  $\theta_i - \Delta^4 \theta_i$ , dans les quatre sommes

$$S(\theta_i - \Delta^4 \theta_i), \quad S'(\theta_i - \Delta^4 \theta_i), \quad S''(\theta_i - \Delta^4 \theta_i), \quad S'''(\theta_i - \Delta^4 \theta_i),$$

ces quatre sommes, réduites à leur expression la plus simple en vertu des équations (5), deviendront, comme on devait s'y attendre,

$$\frac{1}{2} \theta = S \theta_i, \quad U' = S' \theta_i, \quad U'' = S'' \theta_i, \quad U''' = S''' \theta_i;$$

2° que, en substituant l'air au milieu réfringent et posant en conséquence

$$\theta_i = 1, \quad \theta = U' = U'' = U''' = 1,$$

on réduit le second membre de la formule (11) à l'unité.

TABEAU IX.  
Valeurs de  $u, v, w$ .

	EAU.		SOLUTIONS de poasse.	HUILE de sésaméline.	CROUILLAS.		PLANTAINS.					
	1 <sup>re</sup> espèce.	2 <sup>e</sup> espèce.			1 <sup>re</sup> espèce.	2 <sup>e</sup> espèce.	1 <sup>re</sup> espèce.	2 <sup>e</sup> espèce.	3 <sup>e</sup> espèce.	4 <sup>e</sup> espèce.	5 <sup>e</sup> espèce.	
$\theta$ .	1,786204	1,580186	1,078370	2,189883	2,348729	2,343887	2,448960	2,613551	2,469721	2,701331	2,1701322	2,1765825
$u$ .	-0,051605	-0,053746	-0,068109	-0,144576	-0,130439	-0,132743	-0,161972	-0,257449	-0,289966	-0,295015	-0,294035	-0,296565
$v$ .	0,003058	0,003133	0,003256	0,003379	0,003502	0,003625	0,003748	0,003871	0,003994	0,004117	0,004240	0,004363
$w$ .	0,000270	0,000158	0,000223	-0,000605	0,000062	0,000028	-0,000136	0,000568	0,000994	-0,000250	-0,000176	-0,000237

TABEAU X.  
Valeurs de  $\beta_i, \gamma_i, \delta_i$ .

$i$ .	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	SOMME des valeurs numériques.
$\beta_i$ .	0,109836	0,168772	0,109002	0,031390	-0,038191	-0,171698	-0,296181	1,000000
$\gamma_i$ .	-0,161623	-0,087907	0,097200	0,181608	0,202259	0,044608	-0,248796	1,000001
$\delta_i$ .	-0,2337	0,1691	0,2435	-0,1162	-0,1176	0,0297	0,1269	1,00000

Pour tirer de la seule formule (11) les valeurs corrigées de  $\theta$ , relatives aux divers rayons et aux diverses substances, il suffirait d'y substituer aux quantités  $\theta, U' - \theta, \dots, \beta_i, \gamma_i, \delta_i$  les valeurs de

$$\theta, u = S' \Delta \theta, \quad v = S'' \Delta^2 \theta, \quad w = S''' \Delta^3 \theta,$$

et de

$$\beta_i, \gamma_i, \delta_i$$

fournies par les Tableaux I, II, III, IV, V, VI, VII ou, ce qui revient au même, par les Tableaux IX et X.

Alors les valeurs de

$$S' \beta_i, S'' \gamma_i, S''' \delta_i,$$

déduites des formules (6), ou, ce qui revient au même, des formules (137) du § VI, deviendront respectivement

$$(12) \quad \begin{cases} S' \beta_i = 0,430573 - 0,569427 = -0,138854, \\ S'' \gamma_i = 0,315965 - 0,684035 = -0,368070, \\ S''' \delta_i = 0,27751 - 0,72250 = -0,44499. \end{cases}$$

Aux valeurs corrigées de  $\theta_i$ , fournies par le Tableau VIII, ou, ce qui revient au même, par la formule (11), et représentées par

$$\theta_i - \Delta^2 \theta_i,$$

correspondront des valeurs corrigées de  $\theta_i$ , que nous représenterons par

$$\theta_i - \Delta^2 \theta_i,$$

et qui seront déterminées par la formule (139) du § VI, à laquelle on pourra substituer encore la formule (142) du même paragraphe, savoir

$$(13) \quad \Delta^2 \theta_i = \frac{\Delta^4 \theta_i}{2 \theta_i} = \frac{1}{2} \theta_i^{-1} \Delta^4 \theta_i.$$

Or, de cette dernière formule, combinée avec le Tableau III du § VI et le Tableau VII du § VII, on tirera, en effectuant le calcul par logarithmes, les valeurs suivantes de

$$\theta_i^{-1} \Delta^4 \theta_i \text{ et de } \Delta^4 \theta_i.$$

TABLEAU XI.  
Valeurs de  $\theta_1^1 \Delta^1 \theta$ , et de  $\Delta^1 \theta$ , exprimées en millionnièmes.

	EAU.		SOLUTION de poisson.		HUILE de térébenthine.		CROUYOLLES.		PLINTOLAS.	
	1 <sup>re</sup> série.	2 <sup>e</sup> série.	1 <sup>er</sup> espèce.	2 <sup>e</sup> espèce.	1 <sup>er</sup> espèce.	2 <sup>e</sup> espèce.	1 <sup>er</sup> espèce.	2 <sup>e</sup> espèce.	1 <sup>er</sup> espèce.	2 <sup>e</sup> espèce.
$L(\pm \Delta^1 \theta)$	324	654	979	156	501	912	778	1139	3010	7076
$L(\theta)$	1242	1242	1160	1675	1831	1835	1917	2037	2113	2116
Différence	2182	3172	932	9786	1680	7797	5865	9031	6879	4319
$\theta_1^1 \Delta^1 \theta$	17	8	8	—	10	26	—	4	8	—
$\Delta^1 \theta$	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
$L(\pm \Delta^1 \theta)$	6138	9514	8151	9553	4915	7788	7282	6902	6416	3424
$L(\theta)$	1242	1242	1163	1678	1831	1838	1920	2052	2110	2118
Différence	4881	8282	6988	6885	3680	6950	5862	4792	8406	1366
$\theta_1^1 \Delta^1 \theta$	31	—	—	—	12	20	—	16	30	7
$\Delta^1 \theta$	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
$L(\pm \Delta^1 \theta)$	7282	1129	0	672	5771	7729	4161	6414	8213	7782
$L(\theta)$	1242	1242	1166	1866	1851	1846	1920	2061	2132	2132
Différence	6040	989	8526	5235	3920	5883	2241	8550	6390	5650
$\theta_1^1 \Delta^1 \theta$	—	4	19	—	—	30	—	7	44	4
$\Delta^1 \theta$	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
$L(\pm \Delta^1 \theta)$	9792	8431	0	6335	6990	4182	6931	5111	3010	9542
$L(\theta)$	1242	1242	1169	1698	1855	1855	1940	2080	2151	2150
Différence	8550	7189	8521	4637	5120	3320	8060	6951	3300	8860
$\theta_1^1 \Delta^1 \theta$	—	5	—	—	3	—	1	5	—	—
$\Delta^1 \theta$	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
$L(\pm \Delta^1 \theta)$	5563	4721	9542	4472	6931	6931	1165	4472	9541	6128
$L(\theta)$	1242	1242	1186	1798	1861	1861	1931	2055	2158	2166
Différence	4321	3479	8356	2674	5070	4127	703	966	1406	975
$\theta_1^1 \Delta^1 \theta$	—	2	—	—	—	—	—	—	—	—
$\Delta^1 \theta$	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
$L(\pm \Delta^1 \theta)$	2364	3617	1139	5185	6322	8325	3010	6990	7684	6201
$L(\theta)$	1242	1242	1174	1724	1859	1860	1959	2074	2168	2168
Différence	1092	2375	6659	3468	4557	6435	1011	4860	5415	3823
$\theta_1^1 \Delta^1 \theta$	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
$\Delta^1 \theta$	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
$L(\pm \Delta^1 \theta)$	3604	3610	4771	6091	5542	4156	1139	4770	2015	1761
$L(\theta)$	1242	1242	1174	1724	1859	1860	1959	2074	2168	2168
Différence	2362	1368	3597	4367	3683	2296	1055	6630	3316	4953
$\theta_1^1 \Delta^1 \theta$	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
$\Delta^1 \theta$	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—

Les valeurs précédentes de  $\Delta^1 \theta$ , doivent satisfaire aux mêmes conditions que les valeurs de  $\Delta^1 \theta$ , contenues dans le Tableau XXII du § VI, et fournir, pour les quantités (150) ou (151) du même paragraphe, des valeurs numériques égales, mais affectées de signes contraires. Ces conditions se trouvent effectivement remplies avec une exactitude suffisante, comme le prouve le nouveau Tableau que nous allons tracer.

TABLEAU XII.  
Valeurs de  $\Delta^1 \theta$ ,  $\Delta^1 \theta$ ,  $\Delta^1 \theta$ , ... exprimées en millionnièmes.

	EAU.		SOLUTION de poisson.		HUILE de térébenthine.		CROUYOLLES.		PLINTOLAS.	
	1 <sup>re</sup> série.	2 <sup>e</sup> série.	1 <sup>er</sup> espèce.	2 <sup>e</sup> espèce.	1 <sup>er</sup> espèce.	2 <sup>e</sup> espèce.	1 <sup>er</sup> espèce.	2 <sup>e</sup> espèce.	1 <sup>er</sup> espèce.	2 <sup>e</sup> espèce.
$\Delta^1 \theta$	—	8	4	—	5	—	13	—	2	—
$\Delta^1 \theta$	15	—	—	6	—	10	—	6	—	15
$\Delta^1 \theta$	—	2	0	—	6	—	1	—	3	—
$\Delta^1 \theta$	4	—	—	15	—	2	—	13	—	7
$\Delta^1 \theta$	—	4	1	—	11	—	—	—	2	—
$\Delta^1 \theta$	6	—	5	—	11	—	14	—	16	—
$\Delta^1 \theta$	—	6	7	—	1	—	3	—	—	—
$\Delta^1 \theta$	7	—	2	—	1	—	3	—	6	—
$\Delta^1 \theta$	—	7	0	—	1	—	3	—	—	—
$\Delta^1 \theta$	6	—	7	—	2	—	3	—	6	—
$\Delta^1 \theta$	—	8	1	—	2	—	8	—	—	—
$\Delta^1 \theta$	8	—	4	—	5	—	13	—	2	—
$\Delta^1 \theta$	—	8	5	—	5	—	13	—	4	—
$\Delta^1 \theta$	9	—	—	—	6	—	13	—	2	—

Les résultats fournis par les Tableaux XI ou XII peuvent encore être invoqués à l'appui de l'assertion précédemment émise, suivant laquelle les valeurs de  $\Delta^4\theta_i$ , et par suite celles de  $\Delta^3\theta_i$ , doivent être comparables aux erreurs d'observation. Effectivement, il résulte du Tableau XXIII (§ VI) que les valeurs de  $\theta_i$  données par les expériences de Fraunhofer admettent des erreurs comparables aux nombres 0,000042, 0,000049, et ces nombres surpassent notablement les nombres 0,000027, 0,000037, qui, dans les Tableaux XI et XII, représentent les plus grandes valeurs numériques de  $\Delta^4\theta_i$ .

Si l'on retranche les valeurs de  $\Delta^4\theta_i$  fournies par le Tableau XI des valeurs de  $\theta_i$  données par le Tableau I du § VI, on obtiendra les valeurs corrigées de  $\theta_i$ , ou, en d'autres termes, les valeurs de

$$\theta_i - \Delta^4\theta_i,$$

telles que les présente le Tableau XIII.

Si maintenant on remplace les deux valeurs d'une même quantité, qui correspondent aux deux séries d'expériences faites sur l'eau ou la troisième espèce de flintglass par la moyenne arithmétique entre ces deux valeurs, on réduira le Tableau XIII au Tableau XIV.

TABLEAU XIII.  
Valeurs de  $\theta_i - \Delta^4\theta_i$ .

	EAU.		SOLUTION de potasse.	HUILE de téréb. thine.	CROWNGLASS.			FLINTGLASS.				
	1 <sup>re</sup> série.	2 <sup>de</sup> série.			1 <sup>re</sup> espèce.	2 <sup>e</sup> espèce.	3 <sup>e</sup> espèce.	1 <sup>re</sup> espèce.	2 <sup>e</sup> espèce.	3 <sup>e</sup> espèce.	1 <sup>re</sup> série.	2 <sup>e</sup> série.
$\theta_1$	1,330435	1,330277	1,396929	1,470496	1,524312	1,554774	1,600019	1,633570	1,666564	1,697749	1,72719	1,7549
$\Delta^4\theta_1$	—8	—4	—4	—5	13	—3	2	—4	1	10	—14	—14
$\theta_1 - \Delta^4\theta_1$	1,330443	1,330381	1,396955	1,470501	1,524399	1,554835	1,599774	1,633574	1,666565	1,697763	1,72719	1,7549
$\theta_2$	1,331712	1,331709	1,400513	1,474536	1,525299	1,568849	1,613809	1,651477	1,688451	1,724688	1,759818	1,7938
$\Delta^4\theta_2$	—15	—9	—2	0	—16	—6	—8	—13	—1	—2	—18	—18
$\theta_2 - \Delta^4\theta_2$	1,331697	1,331718	1,400511	1,474534	1,525309	1,568855	1,613808	1,651464	1,688450	1,724690	1,759806	1,7938
$\theta_3$	1,333172	1,333271	1,408205	1,474534	1,527985	1,569251	1,608494	1,646783	1,684106	1,720464	1,755869	1,790316
$\Delta^4\theta_3$	—	—	0	—1	—1	—19	—4	—22	—2	—6	—11	—11
$\theta_3 - \Delta^4\theta_3$	1,333179	1,333279	1,408205	1,474536	1,527983	1,569251	1,608491	1,646761	1,684084	1,720458	1,755858	1,790305
$\theta_4$	1,334851	1,334840	1,405024	1,478353	1,531374	1,583605	1,634559	1,683736	1,731644	1,778695	1,824491	1,869534
$\Delta^4\theta_4$	—4	—3	0	15	—2	—11	—2	11	—6	—97	—20	—20
$\theta_4 - \Delta^4\theta_4$	1,334855	1,334840	1,405024	1,478338	1,531374	1,583616	1,634556	1,683733	1,731638	1,778671	1,824471	1,869514
$\theta_5$	1,337818	1,337788	1,408683	1,481736	1,534337	1,586559	1,637911	1,688012	1,736981	1,784981	1,832456	1,879860
$\Delta^4\theta_5$	—	—	—3	—9	—14	—13	—4	—2	—5	—12	—7	—7
$\theta_5 - \Delta^4\theta_5$	1,337805	1,337787	1,408683	1,481745	1,534348	1,586559	1,637916	1,688016	1,736976	1,784969	1,832449	1,879853
$\theta_6$	1,341293	1,341261	1,412279	1,488198	1,539908	1,591657	1,642723	1,692316	1,740849	1,788849	1,836848	1,884848
$\Delta^4\theta_6$	—6	—9	—3	11	—14	—23	—6	—2	—18	—4	—20	—24
$\theta_6 - \Delta^4\theta_6$	1,341299	1,341270	1,412279	1,488187	1,539894	1,591670	1,642729	1,692331	1,740871	1,788875	1,836880	1,884884
$\theta_7$	1,344177	1,344169	1,416169	1,493874	1,544884	1,596106	1,646979	1,697027	1,746273	1,795086	1,843901	1,892729
$\Delta^4\theta_7$	—6	—6	—1	—3	—8	—11	—6	—11	—4	—23	—31	—31
$\theta_7 - \Delta^4\theta_7$	1,344183	1,344155	1,416169	1,493879	1,544887	1,596117	1,646984	1,697038	1,746287	1,795109	1,843930	1,892760

TABLEAU XIV.  
Valeurs de  $\theta_i - \Delta\theta_i$ .

	EAD.	SOLUTION de potasse.	BULE de térahéline.	CROWNGLASS.		FLINTGLASS.			
				1 <sup>re</sup> espèce.	2 <sup>e</sup> espèce.	1 <sup>re</sup> espèce.	2 <sup>e</sup> espèce.	3 <sup>e</sup> espèce.	
$\theta_1$	1,330956	1,309029	1,470196	1,508832	1,551774	1,602042	1,603370	1,603580	1,627749
$\Delta\theta_1$	-6	4	-5	-3	2	2	-4	8	-14
$\theta_2$	1,330962	1,309035	1,470301	1,508835	1,551772	1,602040	1,603371	1,603572	1,627763
$\Delta\theta_2$	6	-2	6	-6	2	-8	15	5	-18
$\theta_3$	1,331711	1,400515	1,471316	1,508819	1,555933	1,603800	1,603177	1,608169	1,629681
$\Delta\theta_3$	6	-2	6	-6	2	-8	15	5	-18
$\theta_4$	1,331705	1,400517	1,471504	1,508835	1,555931	1,603800	1,603162	1,608155	1,629699
$\Delta\theta_4$	1	0	-16	19	-4	3	-22	4	11
$\theta_5$	1,333576	1,402865	1,471456	1,509383	1,559970	1,608491	1,604607	1,603663	1,633055
$\Delta\theta_5$	1	0	15	-2	0	2	11	-16	20
$\theta_6$	1,334850	1,405622	1,478333	1,513372	1,563150	1,614532	1,607336	1,604020	1,629054
$\Delta\theta_6$	-1	0	15	-2	0	2	11	-16	20
$\theta_7$	1,335851	1,405652	1,478338	1,513374	1,563150	1,614536	1,607345	1,604036	1,629064
$\Delta\theta_7$	2	-3	-9	13	-3	4	-7	8	-7
$\theta_8$	1,337803	1,406882	1,481715	1,533348	1,566731	1,620046	1,613153	1,605560	1,638467
$\Delta\theta_8$	7	5	11	11	6	-2	18	5	-24
$\theta_9$	1,341277	1,412379	1,488198	1,541697	1,573535	1,630772	1,625466	1,628819	1,660285
$\Delta\theta_9$	-8	5	11	-22	6	-2	18	5	-24
$\theta_{10}$	1,341285	1,412374	1,488187	1,541679	1,573529	1,630771	1,625388	1,628844	1,660309
$\Delta\theta_{10}$	1	-1	-4	8	-4	6	-11	-11	13
$\theta_{11}$	1,341170	1,410368	1,493874	1,540548	1,572174	1,630367	1,625074	1,628683	1,660303
$\Delta\theta_{11}$	1	-1	-4	8	-4	6	-11	-11	13

En comparant les Tableaux XII et XIII aux Tableaux analogues qui portent les numéros XXII et XXIV dans le § VI, on reconnaît que les changements apportés dans le § VII aux formules à l'aide desquelles on détermine les valeurs corrigées de  $\theta$ , font très peu varier ces mêmes valeurs. Effectivement, les différences entre les valeurs de  $\Delta\theta$ , que fournissent les Tableaux XXII du § VI et XII du § VII, étant exprimées en millièmes, seront telles que les offre le Tableau suivant.

TABLEAU XV.

Différences entre les valeurs de  $\Delta\theta_i$  obtenues dans les § VI et VII.

Pour $i =$	EAD.		SOLUTION de potasse.	BULE de térahéline.	CROWNGLASS.			FLINTGLASS.					
	1 <sup>re</sup> série.	2 <sup>e</sup> série.			1 <sup>re</sup> espèce.	2 <sup>e</sup> espèce.	3 <sup>e</sup> espèce.	1 <sup>re</sup> espèce.	2 <sup>e</sup> espèce.	3 <sup>e</sup> espèce.	1 <sup>re</sup> série.	2 <sup>e</sup> série.	
1	4	2	5	-6	-2	-1	-2	-1	-1	-3	0	-4	12
2	3	1	3	-3	-1	-1	-1	-2	-1	-1	0	-2	6
3	3	2	3	-3	1	1	0	3	2	0	2	2	-7
4	4	3	3	-3	2	1	2	5	3	1	3	5	-10
5	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1	0	1	-11
6	6	5	5	-9	-2	-2	-2	-6	-5	-1	-6	-6	17
7	-6	-1	8	8	2	2	3	6	4	1	6	6	-17

Done, parmi ces différences, celles qui se rapportent au cinquième rayon ou bien à la 3<sup>e</sup> espèce de flintglass (1<sup>re</sup> série), lorsqu'on les considère abstraction faite de leurs signes, ne surpassent pas 1 millième; celles qui se rapportent aux trois espèces de crownglass ne surpassent pas 3 millièmes; et toutes généralement sont (abstraction faite de leurs signes) inférieures à 10 millièmes, à l'exception toutefois de celles qui sont relatives à la 4<sup>e</sup> espèce de flintglass et dont les valeurs numériques s'élèvent au plus à 12 ou 17 millièmes. Au reste, comme, des deux systèmes de formules employés dans les § VI et VII, le dernier seul a la propriété de réduire exactement les indices de réfraction à l'unité quand on remplace le milieu réfringent



par l'air, il est clair que les valeurs de  $\Delta^i \theta_i$  et de  $\theta_i - \Delta^i \theta_i$  fournies par les Tableaux XII, XIII et XIV du § VII méritent plus de confiance que les valeurs fournies pour les mêmes quantités par les Tableaux XXII, XXIV et XXV du § VI.

Si dans la formule (11) on pose, pour abrégér,

$$(14) \quad \begin{cases} \mathbf{u} = U' - \theta, \\ \mathbf{v} = U'' - \theta - (U' - \theta)S^r \beta_i, \\ \mathbf{w} = U''' - \theta - (U' - \theta)S^r \beta_i - [U'' - \theta - (U' - \theta)S^r \beta_i]S^r \gamma_i, \end{cases}$$

on tirera de cette formule

$$(15) \quad \theta_i - \Delta^i \theta_i = \theta + \mathbf{u} \beta_i + \mathbf{v} \gamma_i + \mathbf{w} \delta_i,$$

puis, en négligeant  $\Delta^i \theta_i$ , qui est, comme on l'a vu, comparable aux erreurs d'observation, on trouvera

$$(16) \quad \theta_i = \theta + \mathbf{u} \beta_i + \mathbf{v} \gamma_i + \mathbf{w} \delta_i.$$

A l'aide de l'équation (16), jointe au Tableau X, on déterminerait immédiatement, pour une substance quelconque, des valeurs de  $\theta$ , très voisines de celles que fourniraient les observations, si l'on connaissait les valeurs des quatre coefficients  $\theta$ ,  $\mathbf{u}$ ,  $\mathbf{v}$ ,  $\mathbf{w}$  relatives à la substance dont il s'agit. Ajoutons que ces coefficients pourraient se déduire, moyennant les formules (14) et (12), des valeurs supposées connues des quatre quantités

$$\theta, U', U'', U''.$$

Mais, comme on ne saurait obtenir directement et sans recourir à l'expérience les valeurs de ces quatre dernières quantités, ce qu'il y aura de mieux à faire sera de faire servir quatre valeurs particulières de  $\theta_i$  données par l'observation, par exemple celles de

$$\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4,$$

à la détermination de  $\theta$ ,  $\mathbf{u}$ ,  $\mathbf{v}$ ,  $\mathbf{w}$ , ou, ce qui revient au même, à la détermination de la valeur générale de  $\theta_i$ . On y parviendra facilement en opérant comme il suit.

Si dans l'équation (16) on pose successivement

$$i=1, \quad i=3, \quad i=5, \quad i=7,$$

cette équation donnera

$$(17) \quad \begin{cases} \theta_1 = \theta + \mathbf{u} \beta_1 + \mathbf{v} \gamma_1 + \mathbf{w} \delta_1, \\ \theta_3 = \theta + \mathbf{u} \beta_3 + \mathbf{v} \gamma_3 + \mathbf{w} \delta_3, \\ \theta_5 = \theta + \mathbf{u} \beta_5 + \mathbf{v} \gamma_5 + \mathbf{w} \delta_5, \\ \theta_7 = \theta + \mathbf{u} \beta_7 + \mathbf{v} \gamma_7 + \mathbf{w} \delta_7. \end{cases}$$

Or, des formules (17), jointes au Tableau X, on pourra déduire les valeurs de

$$\theta, \mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$$

exprimées en fonctions linéaires de

$$\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4.$$

Par suite, la valeur générale de  $\theta_i$ , que détermine l'équation (16), deviendra elle-même une fonction linéaire de  $\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4$ . On arriverait encore aux mêmes conclusions de la manière suivante.

Si l'on combine, par voie de soustraction, la première des formules (17) avec la formule (16), on aura

$$\theta_i - \theta_1 = \mathbf{u}(\beta_i - \beta_1) + \mathbf{v}(\gamma_i - \gamma_1) + \mathbf{w}(\delta_i - \delta_1);$$

puis, en divisant les deux membres par  $\beta_i - \beta_1$ , et posant, pour abrégér,

$$(18) \quad \gamma'_i = \frac{\gamma_i - \gamma_1}{\beta_i - \beta_1}, \quad \delta'_i = \frac{\delta_i - \delta_1}{\beta_i - \beta_1},$$

on trouvera

$$(19) \quad \frac{\theta_i - \theta_1}{\beta_i - \beta_1} = \mathbf{u} + \mathbf{v} \gamma'_i + \mathbf{w} \delta'_i.$$

Si l'on combine encore, par voie de soustraction, la formule (19) avec celle qu'on en déduit en posant  $i=3$ , c'est-à-dire avec l'équation

$$(20) \quad \frac{\theta_3 - \theta_1}{\beta_3 - \beta_1} = \mathbf{u} + \mathbf{v} \gamma'_3 + \mathbf{w} \delta'_3,$$



on aura

$$\frac{\theta_i - \theta_1}{\beta_i - \beta_1} - \frac{\theta_2 - \theta_1}{\beta_2 - \beta_1} = v(\gamma_i' - \gamma_1') + w(\delta_i' - \delta_1');$$

puis, en divisant les deux membres par  $\gamma_i' - \gamma_1'$ , et faisant, pour abrégier,

$$(21) \quad \delta_i'' = \frac{\delta_i' - \delta_1'}{\gamma_i' - \gamma_1'},$$

on trouvera

$$(22) \quad \frac{\theta_i - \theta_1}{\beta_i - \beta_1} - \frac{\theta_2 - \theta_1}{\beta_2 - \beta_1} = v + w \delta_i''.$$

Enfin, si l'on combine, par voie de soustraction, la formule (22) avec celle qu'on en déduit en posant  $i = 5$ , c'est-à-dire avec l'équation

$$(23) \quad \frac{\theta_2 - \theta_1}{\beta_2 - \beta_1} - \frac{\theta_3 - \theta_1}{\beta_3 - \beta_1} = v + w \delta_5'',$$

on aura

$$\frac{\theta_i - \theta_1}{\beta_i - \beta_1} - \frac{\theta_2 - \theta_1}{\beta_2 - \beta_1} - \frac{\theta_2 - \theta_1}{\beta_2 - \beta_1} + \frac{\theta_3 - \theta_1}{\beta_3 - \beta_1} = w(\delta_i'' - \delta_5'')$$

ou, ce qui revient au même,

$$(24) \quad \frac{\frac{\theta_i - \theta_1}{\beta_i - \beta_1} - \frac{\theta_2 - \theta_1}{\beta_2 - \beta_1} - \frac{\theta_2 - \theta_1}{\beta_2 - \beta_1} + \frac{\theta_3 - \theta_1}{\beta_3 - \beta_1}}{\gamma_i' - \gamma_1'} = w;$$

et comme, en prenant  $i = 7$ , on tirera de cette dernière équation

$$(25) \quad \frac{\frac{\theta_2 - \theta_1}{\beta_2 - \beta_1} - \frac{\theta_3 - \theta_1}{\beta_3 - \beta_1} - \frac{\theta_2 - \theta_1}{\beta_2 - \beta_1} + \frac{\theta_3 - \theta_1}{\beta_3 - \beta_1}}{\gamma_7' - \gamma_1'} = w,$$

l'élimination de  $w$  entre les formules (24) et (25) donnera

$$(26) \quad \frac{\frac{\theta_i - \theta_1}{\beta_i - \beta_1} - \frac{\theta_2 - \theta_1}{\beta_2 - \beta_1} - \frac{\theta_2 - \theta_1}{\beta_2 - \beta_1} + \frac{\theta_3 - \theta_1}{\beta_3 - \beta_1}}{\gamma_i' - \gamma_1'} - \frac{\frac{\theta_2 - \theta_1}{\beta_2 - \beta_1} - \frac{\theta_3 - \theta_1}{\beta_3 - \beta_1} - \frac{\theta_2 - \theta_1}{\beta_2 - \beta_1} + \frac{\theta_3 - \theta_1}{\beta_3 - \beta_1}}{\gamma_7' - \gamma_1'} = \frac{\delta_i'' - \delta_5''}{\delta_7'' - \delta_5''}$$

ou, ce qui revient au même,

$$(27) \quad \left\{ \begin{aligned} \theta_i &= \theta_1 + \frac{\beta_i - \beta_1}{\beta_2 - \beta_1} (\theta_2 - \theta_1) + \frac{\beta_i - \beta_1}{\beta_2 - \beta_1} \frac{\gamma_i' - \gamma_1'}{\gamma_2' - \gamma_1'} \left[ \theta_2 - \theta_1 - \frac{\beta_2 - \beta_1}{\beta_2 - \beta_1} (\theta_2 - \theta_1) \right] \\ &+ \frac{\beta_i - \beta_1}{\beta_2 - \beta_1} \frac{\gamma_i' - \gamma_1'}{\gamma_2' - \gamma_1'} \frac{\delta_i'' - \delta_5''}{\delta_7'' - \delta_5''} \left\{ \theta_2 - \theta_1 - \frac{\beta_2 - \beta_1}{\beta_2 - \beta_1} (\theta_2 - \theta_1) \right. \\ &\quad \left. - \frac{\beta_2 - \beta_1}{\beta_2 - \beta_1} \frac{\gamma_2' - \gamma_1'}{\gamma_2' - \gamma_1'} \left[ \theta_2 - \theta_1 - \frac{\beta_2 - \beta_1}{\beta_2 - \beta_1} (\theta_2 - \theta_1) \right] \right\}. \end{aligned} \right.$$

Afin de montrer l'utilité de la formule (27), supposons que pour une substance quelconque on ait déduit de l'expérience les valeurs de  $\theta$ , représentées par

$$\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4,$$

et correspondantes aux rayons B, D, F, H de Fraunhofer. Pour tirer de la formule (27) les valeurs de  $\theta$ , correspondantes aux rayons

$$C, E, G,$$

il suffira d'y poser successivement

$$i = 2, \quad i = 4, \quad i = 6.$$

D'ailleurs les formules (18) et (21) jointes au Tableau X fourniront les valeurs de  $\gamma_i'$ ,  $\delta_i'$ ,  $\delta_i''$  comprises dans le Tableau XVI.

Il y a plus : si l'on pose, pour abrégier,

$$(28) \quad B_i = \frac{\beta_i - \beta_1}{\beta_2 - \beta_1}, \quad C_i = \frac{(\beta_i - \beta_1)(\gamma_i' - \gamma_1')}{(\beta_2 - \beta_1)(\gamma_2' - \gamma_1')}, \quad D_i = \frac{(\beta_i - \beta_1)(\gamma_i' - \gamma_1')(\delta_i'' - \delta_5'')}{(\beta_2 - \beta_1)(\gamma_2' - \gamma_1')(\delta_7'' - \delta_5'')},$$

la formule (27) sera réduite à

$$(29) \quad \left\{ \begin{aligned} \theta &= \theta_1 + B_i(\theta_2 - \theta_1) + C_i[\theta_2 - \theta_1 - B_2(\theta_2 - \theta_1)] \\ &+ D_i[\theta_2 - \theta_1 - B_2(\theta_2 - \theta_1) - C_2[\theta_2 - \theta_1 - B_2(\theta_2 - \theta_1)]]. \end{aligned} \right.$$





TABLEAU XVI.  
Détermination des valeurs de  $\gamma_i$ ,  $\delta_i$  et  $\delta'_i$ .

$i$ .	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	SOMMES.
$\beta_i$ .....	0,190836	0,168772	0,109002	0,031390	-0,038191	-0,171628	-0,290181	0,000000
$\beta_1$ .....	0,190836	0,190836	0,190836	0,190836	0,190836	0,190836	0,190836	1,333852
$\beta_i - \beta_1$ .....	0,000000	-0,022064	-0,081834	-0,150446	-0,229027	-0,362464	-0,481017	-1,333852
$\gamma_i$ .....	-0,16423	-0,08707	0,06720	0,18408	0,20259	0,04608	-0,24876	-0,00011
$\gamma_1$ .....	-0,16423	-0,16423	-0,16423	-0,16423	-0,16423	-0,16423	-0,16423	-1,14961
$\gamma_i - \gamma_1$ .....	0,000000	0,07716	0,23143	0,34831	0,36682	0,21031	-0,08453	1,14950
$\delta_i$ .....	-0,2357	0,1094	0,2435	-0,1162	-0,1476	0,0207	0,1269	0,0010
$\delta_1$ .....	-0,2357	-0,2357	-0,2357	-0,2357	-0,2357	-0,2357	-0,2357	-1,6192
$\delta_i - \delta_1$ .....	0,000000	0,3451	0,4792	0,1195	0,0879	0,2564	0,3626	1,6502
$L[\pm(\gamma_i - \gamma_1)]$ .....		8873922	3644197	5419650	5644530	3228599	9270109	
$L[-(\beta_i - \beta_1)]$ .....		3436842	9129338	2026137	3598867	5592649	6821605	
$L(+\gamma_i)$ .....		5437080	4514859	3393522	2045063	7635950	2448504	
$\gamma_i$ .....		-3,4971	-2,8280	-2,1845	-1,6016	-0,5802	0,1757	-10,5157
$\gamma_1$ .....		-2,8280	-2,8280	-2,8280	-2,8280	-2,8280	-2,8280	-16,9680
$\gamma_i - \gamma_1$ .....		-0,6691	0,0000	0,6435	1,2264	2,2478	3,0037	6,4523
$L(\delta_i - \delta_1)$ .....		5379450	6805168	0773679	9439889	4089180	5594278	
$L[-(\beta_i - \beta_1)]$ .....		3436842	9129338	2026137	3598867	5592649	6821605	
$L(-\delta_i)$ .....		1942608	7675830	8747542	5841022	8496531	8772673	
$\delta'_i$ .....		-15,6409	-5,8558	-0,7495	-0,3838	-0,7074	-0,7538	-24,0912
$\delta'_1$ .....		-5,8558	-5,8558	-5,8558	-5,8558	-5,8558	-5,8558	-35,1348
$\delta'_i - \delta'_1$ .....		-9,7851	0,0000	5,1063	5,4720	5,1484	5,1020	11,0436
$L[\pm(\delta'_i - \delta'_1)]$ .....		9905653		7081063	7381461	7116723	7077403	
$L[\pm(\gamma_i - \gamma_1)]$ .....		8254910		8085486	6886321	3517577	4776566	
$L(\delta'_i)$ .....		1650743		8995577	6495140	3599146	2300839	
$\delta'_i$ .....		14,6243		7,9352	4,4618	2,2904	1,6986	31,0103
$\delta'_1$ .....		4,4618		4,4618	4,4618	4,4618	4,4618	22,3090
$\delta'_i - \delta'_1$ .....		10,1625		3,4734	0,0000	-2,1714	-2,7632	8,7013
$L[\pm(\delta'_i - \delta'_1)]$ .....		0070006		5407548		3367398	4414123	

Or, les logarithmes des rapports  $B_i$ ,  $C_i$ ,  $D_i$ , et par suite ces rapports eux-mêmes, se calculent aisément à l'aide du Tableau XVI et offriront les valeurs comprises dans le Tableau suivant.

TABLEAU XVII.  
Valeurs de  $B_i$ ,  $C_i$ ,  $D_i$ .

$i$ .	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.
$L[-(\beta_i - \beta_1)]$ .....		3436842	9129338	2026137	3598867	5592649	6821605
$L[\mp(\gamma_i - \gamma_1)]$ .....		8254910		8085486	6886321	3517577	4776566
Somme.....		1691752		0111623	4485188	9110226	1598171
$L[\pm(\delta'_i - \delta'_1)]$ .....		0070006		5407548		3367398	4414123
Somme.....		1761758		5519171		2477624	6012294
		6012294		6012294		6012294	
$L(\pm D_i)$ .....		5749464		9506877		6465330	
$D_i$ .....	0,000000	0,03759	0,000000	-0,08927	0,000000	0,44313	1,000000
$L[\pm(\beta_i - \beta_1)(\gamma_i - \gamma_1)]$ .....		1691752		0111623	4485188	9110226	1598171
$L[-(\beta_i - \beta_1)(\gamma'_i - \gamma'_1)]$ .....		4485188		4485188		4485188	4485188
$L(\pm C_i)$ .....		7206564		5626435		4625038	7112983
$C_i$ .....	0,000000	-0,02226	0,000000	0,36530	1,000000	2,90072	5,14397
$L[-(\beta_i - \beta_1)]$ .....		3436842	9129338	2026137	3598867	5592649	6821605
$L[-(\beta_1 - \beta_1)]$ .....		9129338	9129338	9129338	9129338	9129338	9129338
$L(B_i)$ .....		4307504		2896799	4469529	6463311	7692267
$B_i$ .....	0,000000	0,26963	1,000000	1,94841	2,79868	4,42926	5,87796

Pour montrer une application de la formule (29), concevons que l'on y substitue les valeurs de  $\Theta_1$ ,  $\Theta_2$ ,  $\Theta_3$ ,  $\Theta_4$ , tirées du Tableau VIII (§ VI) et relatives à la solution de potasse. On aura

$$(30) \quad \Theta_1 = 1,958961, \quad \Theta_2 = 1,967862, \quad \Theta_3 = 1,982695, \quad \Theta_4 = 2,006099,$$

et l'on en conclura

$$(31) \quad \Theta_2 - \Theta_1 = 0,008901, \quad \Theta_3 - \Theta_1 = 0,023734, \quad \Theta_4 - \Theta_1 = 0,047138,$$



puis, en ayant égard au Tableau XV,

$$(32) \begin{cases} \theta_2 - \theta_1 - B_2(\theta_2 - \theta_1) = 0,023734 - 0,024911 = -0,001177, \\ \theta_2 - \theta_1 - B_7(\theta_2 - \theta_1) = 0,047138 - 0,052320 = -0,005182, \\ \theta_2 - \theta_1 - B_1(\theta_2 - \theta_1) - C_1[\theta_2 - \theta_1 - B_2(\theta_2 - \theta_1)] = -0,005182 + 0,006054 \\ = 0,000872. \end{cases}$$

Par suite, la formule (29) deviendra

$$(33) \quad \theta_i = 1,958961 + 0,008901 B_i - 0,001177 C_i + 0,000872 D_i.$$

Si dans cette dernière on pose successivement

$$i = 2, \quad i = 4, \quad i = 6,$$

les valeurs correspondantes de  $\theta_i$ , calculées à l'aide du Tableau XVII, seront celles que présente le Tableau suivant.

TABLEAU XVIII.

Valeurs de  $\theta_2, \theta_4, \theta_6$  déduites des valeurs de  $\theta_1, \theta_3, \theta_5, \theta_7$ , et relatives à la solution de potasse.

$i$ .	2.	4.	6.
$L(\pm D_i)$ .....	5749464	9506877	6465330
$L(872)$ .....	9405165	9405165	9405165
Somme.....	5154629	8912042	5870495
$0,000872 D_i$ .....	0,000033	-0,000078	0,000386
$L(\mp C_i)$ .....	7206564	5696435	4625038
$L(1177)$ .....	0707765	0707765	0707765
Somme.....	7914329	6334200	5328803
$-0,001177 C_i$ .....	0,000062	-0,000430	-0,003114
$L(B_i)$ .....	4307504	2896799	6463311
$L(8901)$ .....	9494388	9494388	9494388
Somme.....	3801892	2391187	5957699
$0,008901 B_i$ .....	0,002400	0,017343	0,039425
$\theta_1$ .....	1,958961	1,958961	1,958961
$0,008901 B_i$ .....	2400	17343	39425
$-0,001177 C_i$ .....	62	-430	-3114
$0,000872 D_i$ .....	33	-78	386
$\theta_i$ .....	1,961456	1,975796	1,995358

Ainsi, pour la solution de potasse, lorsqu'on fait servir les valeurs de

$$\theta_1, \theta_3, \theta_5, \theta_7,$$

fournies par l'expérience, à la détermination des valeurs de

$$\theta_2, \theta_4, \theta_6,$$

on trouve

$$(34) \quad \theta_2 = 1,961456, \quad \theta_4 = 1,975796, \quad \theta_6 = 1,995358.$$

D'ailleurs les valeurs de  $\theta_2, \theta_4, \theta_6$ , fournies par les expériences de Fraunhofer, sont respectivement (voir le Tableau VIII, § VI)

$$(35) \quad \theta_2 = 1,961442, \quad \theta_4 = 1,975801, \quad \theta_6 = 1,995381.$$

Les différences entre ces dernières valeurs et les précédentes, savoir

$$(36) \quad -0,000014, \quad -0,000005, \quad -0,000023,$$

sont comparables et même notablement inférieures, comme le prouve le Tableau VII du § VI, aux plus grandes erreurs que comportent les observations.

Si dans la formule (29) on pose, pour abrégér,

$$(37) \quad \begin{cases} E_i = C_i - C_i D_i, \\ F_i = B_i - B_i D_i - B_i(C_i - C_i D_i) = B_i - B_i D_i - B_i E_i, \end{cases}$$

cette formule donnera

$$(38) \quad \theta_i = D_i(\theta_1 - \theta_1) + E_i(\theta_2 - \theta_1) + F_i(\theta_3 - \theta_1) + \theta_1$$

ou, ce qui revient au même,

$$(39) \quad \theta_i = (1 - D_i - E_i - F_i)\theta_1 + F_i\theta_2 + E_i\theta_3 + D_i\theta_4.$$

D'ailleurs, des formules (37), jointes au Tableau XVII, on déduira facilement les valeurs suivantes des coefficients que renferment les formules (38) et (39).



TABLEAU XIX.  
Valeurs de  $D_i$ ,  $E_i$ ,  $F_i$ .

$i$ .	2.	4.	6.
$D_i$ .....	0,03759	-0,08927	0,44313
$L(\pm D_i)$ .....	5749464	9506877	6465330
$L(C_i)$ .....	7112983	7112983	7112983
$L(\pm C_i D_i)$ .....	-282447	6619860	3578313
$C_i$ .....	-0,05256	0,36530	2,90072
$-C_i D_i$ .....	-0,19331	0,45918	-2,27946
$E_i$ .....	-0,24587	0,82448	0,62126
$L(\mp E_i)$ .....	3907055	9161801	7932734
$L(B_i)$ .....	4469529	4469529	4469529
$L(\mp B_i E_i)$ .....	8376584	3631330	2402263
$L(\pm D_i)$ .....	5749464	9506877	6465330
$L(B_i)$ .....	7692267	7692267	7692267
$L(\pm B_i D_i)$ .....	3441731	7199144	4157597
$B_i$ .....	0,26963	1,94841	4,42926
$-B_i D_i$ .....	-0,22089	0,52470	-2,60471
$-B_i E_i$ .....	0,68811	-2,30745	-1,73871
$F_i$ .....	0,73685	0,16566	0,08584
$L(F_i)$ .....	8673791	2192177	9336897
$1$ .....	1,00000	1,00000	1,00000
$-D_i$ .....	-0,03759	0,08927	-0,44313
$-E_i$ .....	0,24587	-0,82448	-0,62126
$-F_i$ .....	-0,73685	-0,16566	-0,08584
$1 - D_i - E_i - F_i$ .....	0,47143	0,09913	-0,15023
$L[\pm(1 - D_i - E_i - F_i)]$ .....	6734172	9962051	1767567

En conséquence, on tirera de la formule (38)

$$(40) \begin{cases} \theta_2 = \theta_1 + 0,73685(\theta_3 - \theta_1) - 0,24587(\theta_4 - \theta_1) + 0,03759(\theta_5 - \theta_1), \\ \theta_3 = \theta_1 + 0,16566(\theta_3 - \theta_1) + 0,82448(\theta_4 - \theta_1) - 0,08927(\theta_5 - \theta_1), \\ \theta_4 = \theta_1 + 0,08584(\theta_3 - \theta_1) + 0,62126(\theta_4 - \theta_1) + 0,44313(\theta_5 - \theta_1), \end{cases}$$

et de la formule (39)

$$(41) \begin{cases} \theta_2 = 0,47143\theta_1 + 0,73685\theta_3 - 0,24587\theta_4 + 0,03759\theta_5, \\ \theta_3 = 0,09913\theta_1 + 0,16566\theta_3 + 0,82448\theta_4 - 0,08927\theta_5, \\ \theta_4 = -0,15023\theta_1 + 0,08584\theta_3 + 0,62126\theta_4 + 0,44313\theta_5. \end{cases}$$

Les formules (40) ou (41), appliquées à une substance quelconque, donneront pour cette substance les valeurs de

$$\theta_1, \theta_2, \theta_3$$

quand on aura déduit de l'expérience celles de

$$\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4.$$

Pour montrer un exemple de cette application, considérons de nouveau la solution de potasse. Alors les valeurs des quantités  $\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4$ , et de leurs différences successives seront fournies par les équations (30), (31), et la substitution de ces valeurs dans les formules (40) ou, ce qui revient au même, dans la formule (38), donnera naissance au Tableau suivant.



TABLEAU XX.

Valeurs de  $\theta_2, \theta_1, \theta_0$  déduites de la formule (40) et relatives à la solution de potasse.

i.	2.	4.	6.
$L(F_i)$ .....	8673791	2192177	9336897
$L(\theta_2 - \theta_1)$ .....	9494388	9494388	9494388
$L[(\theta_2 - \theta_1)F_i]$ .....	8168179	1686565	8831285
$L(\mp E_i)$ .....	3907055	9164801	7932734
$L(\theta_2 - \theta_1)$ .....	3753709	3753709	3753709
$L[\mp (\theta_2 - \theta_1)E_i]$ .....	7660764	2915510	1686443
$L(\pm D_i)$ .....	5749464	9506877	6465330
$L(\theta_2 - \theta_1)$ .....	6733712	6733712	6733712
$L[\pm (\theta_2 - \theta_1)D_i]$ .....	2483176	6240589	3199042
$\theta_2$ .....	1,958961	1,958961	1,958961
$F_i(\theta_2 - \theta_1)$ .....	6559	1475	764
$E_i(\theta_2 - \theta_1)$ .....	— 5835	19568	14745
$D_i(\theta_2 - \theta_1)$ .....	1771	— 4208	20888
$\theta_1$ .....	1,961456	1,975796	1,993358

Or ce Tableau, comme on devait s'y attendre, reproduit précisément les valeurs de  $\theta_2, \theta_1, \theta_0$  ci-dessus déduites de la formule (29) et déterminées par les formules (34).

On pourrait faire servir les valeurs de  $\Delta^i \theta_i$ , données par le Tableau VII, à la détermination des valeurs corrigées de  $\theta_i$  que fournirait la formule (40) ou (41) appliquée successivement aux diverses substances. Observons, en effet, que ces formules, comprises elles-mêmes dans l'équation (38) ou (39), sont déduites d'une équation qui ne subsiste qu'approximativement, savoir de l'équation (16), qui devient rigoureuse, et se transforme en l'équation (15) lorsqu'on y remplace  $\theta_i$  par

$$\theta_i - \Delta^i \theta_i$$

en substituant à  $\theta_i$  la valeur observée. Il en résulte qu'à leur tour

les équations (38) et (39) deviendront rigoureuses si l'on y remplace

$$\theta_i, \theta_2, \theta_1, \theta_0, \theta_i$$

par

$$\theta_i - \Delta^i \theta_i, \theta_2 - \Delta^i \theta_2, \theta_1 - \Delta^i \theta_1, \theta_0 - \Delta^i \theta_0, \theta_i - \Delta^i \theta_i.$$

Ainsi, par exemple, les valeurs observées de

$$\theta_i, \theta_2, \theta_1, \theta_0, \theta_i$$

vérifient en toute rigueur l'équation

$$(42) \quad \left\{ \begin{aligned} \theta_i - \Delta^i \theta_i &= (1 - D_i - E_i - F_i)(\theta_i - \Delta^i \theta_i) \\ &+ F_i(\theta_2 - \Delta^i \theta_2) + E_i(\theta_1 - \Delta^i \theta_1) + D_i(\theta_0 - \Delta^i \theta_0). \end{aligned} \right.$$

Or on tire de cette dernière formule

$$(43) \quad \left\{ \begin{aligned} &(1 - D_i - E_i - F_i)\theta_i + F_i\theta_2 + E_i\theta_1 + D_i\theta_0 \\ &= \theta_i - \Delta^i \theta_i + (1 - D_i - E_i - F_i)\Delta^i \theta_i \\ &+ F_i\Delta^i \theta_2 + E_i\Delta^i \theta_1 + D_i\Delta^i \theta_0. \end{aligned} \right.$$

Donc le second membre de l'équation (39), ou la valeur corrigée de  $\theta_i$  fournie par cette équation, est la somme des deux quantités

$$\theta_i - \Delta^i \theta_i$$

et

$$(44) \quad (1 - D_i - E_i - F_i)\Delta^i \theta_i + F_i\Delta^i \theta_2 + E_i\Delta^i \theta_1 + D_i\Delta^i \theta_0,$$

dont la première se trouve, pour chaque substance et pour chaque rayon, immédiatement donnée par le Tableau VIII, tandis que la seconde peut être facilement déduite des valeurs obtenues pour

$$\Delta^i \theta_i, \Delta^i \theta_2, \Delta^i \theta_1, \Delta^i \theta_0.$$

Si dans l'expression (44) on pose successivement

$$i = 2, \quad i = 4, \quad i = 6,$$



cette expression acquerra, eu égard au Tableau XIX, les formes suivantes :

$$(45) \begin{cases} 0,47143 \Delta^1 \Theta_1 + 0,73865 \Delta^1 \Theta_2 - 0,24587 \Delta^1 \Theta_3 + 0,03759 \Delta^1 \Theta_4, \\ 0,09913 \Delta^1 \Theta_1 + 0,16566 \Delta^1 \Theta_2 + 0,82448 \Delta^1 \Theta_3 - 0,08927 \Delta^1 \Theta_4, \\ -0,15023 \Delta^1 \Theta_1 + 0,08584 \Delta^1 \Theta_2 + 0,62126 \Delta^1 \Theta_3 + 0,44313 \Delta^1 \Theta_4. \end{cases}$$

Comme des valeurs numériques de  $\Delta^1 \Theta_i$ , exprimées en millièmes et fournies par le Tableau VII, la plus grande 103 est seule composée de trois chiffres, chacune des autres renferme deux chiffres au plus, il est clair que, dans l'évaluation en nombres des polynômes (45), on pourra, sans erreur sensible, réduire chaque coefficient à ses deux premiers chiffres décimaux et, par suite, ces polynômes eux-mêmes aux trois suivants :

$$(46) \begin{cases} 0,47 \Delta^1 \Theta_1 + 0,74 \Delta^1 \Theta_2 - 0,25 \Delta^1 \Theta_3 + 0,04 \Delta^1 \Theta_4, \\ 0,10 \Delta^1 \Theta_1 + 0,17 \Delta^1 \Theta_2 + 0,82 \Delta^1 \Theta_3 - 0,09 \Delta^1 \Theta_4, \\ -0,15 \Delta^1 \Theta_1 + 0,09 \Delta^1 \Theta_2 + 0,62 \Delta^1 \Theta_3 + 0,44 \Delta^1 \Theta_4. \end{cases}$$

En substituant dans ces derniers polynômes les valeurs de  $\Delta^1 \Theta_i$ ,  $\Delta^1 \Theta_2$ ,  $\Delta^1 \Theta_3$ ,  $\Delta^1 \Theta_4$ , tirées du Tableau VII, et retranchant des résultats ainsi calculés les valeurs de  $\Delta^1 \Theta_i$ , on obtiendra les corrections que doivent subir les valeurs de  $\Theta_i$  fournies par l'expérience pour se transformer en celles que donneraient les formules (39). Les corrections dont il s'agit se trouvent déterminées, pour chacun des trois rayons C, F, G de Fraunhofer, dans le Tableau que nous allons tracer.

TABLEAU XXI.

Corrections de  $\Theta_1$ ,  $\Theta_2$ ,  $\Theta_3$ , exprimées en millièmes.

	EAU.		SOLUTION de potasse.	HUILE de cerise.	CROWNGLASS.			FLINTGLASS.				SOMME.	
	1 <sup>re</sup> espèce.	2 <sup>de</sup> espèce.			1 <sup>re</sup> espèce.	2 <sup>de</sup> espèce.	3 <sup>e</sup> espèce.	1 <sup>re</sup> espèce.	2 <sup>de</sup> espèce.	3 <sup>e</sup> espèce.	4 <sup>e</sup> espèce.		
$\Delta^1 \Theta_1$ .....	-22	-11	12	-14	39	-9	6	6	-13	2	51	-44	0
$\Delta^1 \Theta_2$ .....	-6	13	-1	-47	-3	59	-14	11	-71	6	19	37	1
$\Delta^1 \Theta_3$ .....	36	3	-9	-28	-35	40	-8	-14	-22	16	41	-22	-2
$\Delta^1 \Theta_4$ .....	-17	20	-3	-4	-9	26	-13	19	-36	-15	-72	103	-1
$0,47 \Delta^1 \Theta_1$ .....	-10	-5	6	-7	18	-4	3	3	-6	1	24	-21	2
$0,74 \Delta^1 \Theta_2$ .....	-4	10	-1	-35	-2	44	-10	8	-52	4	14	27	3
$-0,25 \Delta^1 \Theta_3$ .....	-9	-1	2	7	9	-10	2	3	5	-4	-10	5	-1
$0,04 \Delta^1 \Theta_4$ .....	-1	1	0	0	0	1	0	1	-1	-1	-3	4	1
Somme .....	-24	5	7	-35	25	31	-5	15	-54	0	25	15	5
$\Delta^1 \Theta_1$ .....	41	-9	-7	18	-31	19	6	-25	49	11	22	-59	-3
Correction de $\Theta_1$ .....	-65	14	14	-53	56	50	-11	40	-103	-14	3	74	3
$0,10 \Delta^1 \Theta_1$ .....	-2	-1	1	-1	4	-1	1	1	-1	0	5	-4	2
$0,17 \Delta^1 \Theta_2$ .....	-1	2	0	-8	0	10	-2	-2	-12	1	3	6	1
$0,82 \Delta^1 \Theta_3$ .....	30	2	-7	-23	-29	33	-7	-12	-18	13	34	-18	-2
$-0,09 \Delta^1 \Theta_4$ .....	2	-2	0	0	1	-2	1	-2	3	1	6	-9	-1
Somme .....	29	1	-6	-32	-24	40	-7	-11	-28	15	48	-25	0
$\Delta^1 \Theta_1$ .....	-12	7	-1	43	-5	-33	-1	8	35	-20	-90	66	-1
Correction de $\Theta_1$ .....	41	-6	-5	-75	19	73	-8	-19	-63	35	138	-91	1
$-0,15 \Delta^1 \Theta_1$ .....	3	2	-2	2	-6	1	-1	-1	2	0	-8	7	-1
$0,09 \Delta^1 \Theta_2$ .....	-1	1	0	-4	0	5	-1	1	-6	1	2	3	1
$0,62 \Delta^1 \Theta_3$ .....	22	2	-6	-17	-22	25	-5	-9	-14	10	25	-14	-3
$0,44 \Delta^1 \Theta_4$ .....	-8	9	-1	-2	-4	12	-6	-8	-16	-7	-32	46	-1
Somme .....	16	14	-9	-21	-32	43	-13	-1	-34	4	-13	42	-4
$\Delta^1 \Theta_2$ .....	-17	-23	13	34	42	-68	20	-5	58	-4	32	-80	2
Correction de $\Theta_2$ .....	33	37	-22	-55	-74	111	-33	4	-92	8	-45	122	-6



Pour atteindre une plus grande exactitude, nous avons, dans les multiplications, remplacé les valeurs approchées des coefficients de  $\Delta^1\theta_1, \Delta^1\theta_2, \dots$ , c'est-à-dire les nombres

$$0,47, 0,74, \dots,$$

écrits à la marge du Tableau XXI, par les nombres

$$0,47143, 0,73865, \dots,$$

c'est-à-dire par les valeurs des mêmes coefficients prises dans les expressions (45), toutes les fois que la réduction de l'un de ces coefficients à sa valeur approchée pouvait augmenter ou diminuer d'une unité le dernier chiffre du produit. La dernière colonne verticale du Tableau XXI, composée de sommes qui se déduisent les unes des autres et dont chacune, comme on devait s'y attendre, diffère très peu de zéro, sert à confirmer la justesse de nos calculs.

Si l'on fait subir les corrections indiquées par le Tableau XXI aux valeurs de

$$\theta_2, \theta_3, \theta_4$$

déduites de l'expérience, on obtiendra celles que déterminerait la formule (3g) et que présente le Tableau XXII.

La dernière colonne verticale de ce Tableau, composée de sommes qui se déduisent les unes des autres, sert à confirmer la justesse de nos calculs.

TABLEAU XXII.  
Valeurs corrigées de  $\theta_2, \theta_3, \theta_4$ , en vertu de la formule (3g).

	EAU.		SOLUTION de Poisson.	HUILE de Mélange.	CROWNGLASS.			FLINTGLASS.			SOMMES.
	1 <sup>re</sup> série.	2 <sup>e</sup> série.			1 <sup>re</sup> espèce.	2 <sup>e</sup> espèce.	3 <sup>e</sup> espèce.	1 <sup>re</sup> espèce.	2 <sup>e</sup> espèce.	3 <sup>e</sup> espèce.	
$\theta_2$ .....	1,273457	1,273449	1,991442	2,165402	2,331269	2,400927	2,572125	2,642472	2,651912	2,651861	27,916163
Correction.	—65	14	—53	—53	56	50	40	—103	—11	—74	8
Val. corr...	1,273392	1,273463	1,991389	2,165349	2,331325	2,400976	2,572215	2,642369	2,651843	2,651915	27,916171
$\theta_3$ .....	1,284497	1,284489	1,973801	2,185528	2,331501	2,350105	2,413438	2,460572	2,468036	2,4691384	28,235463
Correction.	41	—6	—5	—75	—19	73	—8	—19	—63	35	—91
Val. corr...	1,284538	1,284486	1,973796	2,185453	2,331582	2,350178	2,413430	2,460663	2,468073	2,469149	28,235464
$\theta_4$ .....	1,290608	1,290598	1,995381	2,214234	2,371317	2,396709	2,426012	2,459418	2,474070	2,4751781	28,660292
Correction.	33	—5	—22	—55	—74	111	—33	—4	—92	8	—6
Val. corr...	1,290641	1,290603	1,995359	2,214179	2,371243	2,396818	2,425979	2,459422	2,474078	2,475173	28,660286



Les valeurs corrigées de  $\Theta_2$ ,  $\Theta_1$ ,  $\Theta_0$  que fournit le Tableau XX, étant déduites chacune des valeurs de  $\Theta_i$  correspondantes à quatre rayons différents, savoir aux rayons B, D, F, H de Fraunhofer, méritent plus de confiance que les valeurs de  $\Theta_2$ ,  $\Theta_1$ ,  $\Theta_0$  directement fournies par l'expérience, puisque chacune de ces dernières est tirée d'une seule observation. Mais on doit avoir plus de confiance encore dans les valeurs corrigées de  $\Theta_2$ ,  $\Theta_1$ ,  $\Theta_0$  que présente le Tableau VIII, et qui s'y trouvent représentées par

$$\Theta_2 - \Delta^1 \Theta_2, \quad \Theta_1 - \Delta^1 \Theta_1, \quad \Theta_0 - \Delta^1 \Theta_0,$$

puisque, à la détermination de chacune d'elles, concourent les observations faites, non plus seulement sur quatre rayons, mais sur les sept rayons B, C, D, E, F, G, H. Cette conclusion se trouve d'accord avec la remarque facile à faire que les corrections de  $\Theta_2$ ,  $\Theta_1$ ,  $\Theta_0$ , déterminées dans le Tableau XXI, offrent en général des valeurs numériques supérieures aux valeurs numériques correspondantes des quantités  $\Delta^1 \Theta_2$ ,  $\Delta^1 \Theta_1$ ,  $\Delta^1 \Theta_0$ , qui représentent au signe près dans le Tableau VIII les corrections de  $\Theta_2$ ,  $\Theta_1$ ,  $\Theta_0$ . Effectivement, dans le Tableau XXI, la correction de  $\Theta_2$ , par exemple, est, pour toutes les substances, excepté pour la 3<sup>e</sup> espèce de flintglass, la différence qu'on obtient quand on retranche la quantité  $\Delta^1 \Theta_2$  d'une autre quantité affectée d'un signe contraire, en sorte que les valeurs numériques de ces deux quantités s'ajoutent pour former celle de la correction de  $\Theta_2$ . Au reste, les plus grandes des valeurs numériques des corrections de  $\Theta_2$ ,  $\Theta_1$ ,  $\Theta_0$  exprimées en millièmes dans le Tableau XXI, ou les quantités

$$0,000122, \quad 0,000138,$$

sont encore inférieures au nombre

$$0,000150,$$

qui représente la plus grande des valeurs numériques des variations de  $\Theta_i$ , comprises dans la 7<sup>e</sup> ligne horizontale du Tableau VII du § VI, et, par conséquent, se trouvent renfermées entre les limites que comportent les erreurs d'observation.

§ VIII. — *Remarques sur les résultats obtenus dans les paragraphes précédents.*

En établissant les formules à l'aide desquelles ont été calculés les nombres que renferment les divers Tableaux des deux derniers paragraphes, et spécialement le Tableau VIII du § VII, nous avons supposé que, dans chaque substance, l'élasticité de l'éther restait la même en tous sens, et qu'en conséquence les milieux traversés par la lumière étaient du nombre de ceux qui offrent les phénomènes de la réfraction simple. Dans cette supposition, les quatre quantités dont se composent les valeurs corrigées de  $\Theta_i$ , c'est-à-dire les quantités désignées dans le Tableau VIII du § VII par

$$(1) \quad \Theta, \quad \vartheta_1, \quad \vartheta_2, \quad \vartheta_3,$$

doivent, comme on l'a dit, former généralement, abstraction faite de leurs signes, une suite décroissante. Mais nos formules pourraient cesser d'être rigoureusement applicables si l'une des substances possédait, même à un faible degré, la propriété de faire subir aux rayons lumineux une réfraction double, et alors la condition ci-dessus énoncée, savoir que les valeurs numériques des quantités (1) forment une suite décroissante, pourrait cesser d'être vérifiée, surtout pour la substance dont il s'agit. Or, dans le Tableau VIII du § VII, la seule substance pour laquelle la condition énoncée ne soit pas toujours remplie est l'huile de térébenthine. Donc l'inspection de ce Tableau nous conduit à penser que, si l'une des substances employées par Fraunhofer produit à un faible degré la double réfraction, ce doit être l'huile de térébenthine. Effectivement, M. Biot a reconnu que le plan de polarisation d'un rayon lumineux, et par suite le plan mené par le rayon et dans lequel se déplacent les molécules d'éther, change plus ou moins de direction lorsqu'il a traversé une couche plus ou moins épaisse d'huile de térébenthine; et cette observation, comme nous le verrons plus tard, prouve que l'huile de térébenthine possède, quoiqu'à un faible degré, la propriété d'être dou-













Aux valeurs corrigées de  $\theta_i$ , fournies par le Tableau IV et représentées par

$$\theta_i - \Delta^i \theta_i,$$

correspondront des valeurs corrigées de  $\theta_i$ , que nous représenterons encore par

$$\theta_i - \Delta^i \theta_i,$$

et dans lesquelles on déterminera  $\Delta^i \theta_i$ , avec une approximation suffisante à l'aide de la formule (13) du § VII. Effectivement les valeurs de  $\Delta^i \theta_i$ , ainsi obtenues, et inscrites dans le Tableau suivant, vérifient sensiblement la double condition de fournir, pour les quantités (150) ou pour les quantités (151) du § VI, quatre valeurs égales au signe près, mais alternativement affectées de signes contraires.

TABLEAU VII.

Valeurs de  $\Delta^i \theta_i$ , ... exprimées en millièmes.

	EAU.		SOLUTION de poisson.	CROWGLASS.			FLINTGLASS.				
	1 <sup>re</sup> série.	2 <sup>e</sup> série.		1 <sup>re</sup> espèce.	2 <sup>e</sup> espèce.	3 <sup>e</sup> espèce.	1 <sup>re</sup> espèce.	2 <sup>e</sup> espèce.	3 <sup>e</sup> espèce.	1 <sup>re</sup> série.	2 <sup>e</sup> série.
$\Delta^1 \theta_1$ .....	-8	-5	5	11	-5	-1	8	-2	-2	14	-17
$\Delta^1 \theta_2$ .....	14	-3	-4	-8	-4	7	-18	13	8	10	-13
$\Delta^1 \theta_3$ .....	0	3	0	-4	15	-12	17	-18	-4	2	3
$\Delta^1 \theta_4$ .....	-5	5	0	1	-7	6	-8	8	-2	-25	26
$\Delta^1 \theta_5$ .....	13	1	-4	-13	11	-5	-1	-6	4	12	-9
$\Delta^1 \theta_6$ .....	-7	-7	5	16	-19	11	-9	16	2	11	-20
$\Delta^1 \theta_7$ .....	-6	7	0	-3	8	-5	9	-10	-6	-22	29
$\Delta^1 \theta_1 + \Delta^1 \theta_2$ ...	6	-8	1	3	-9	6	-10	11	6	24	-30
$\Delta^1 \theta_2 + \Delta^1 \theta_3$ ...	-5	8	0	-3	8	-6	9	-10	-6	-23	29
$\Delta^1 \theta_3 + \Delta^1 \theta_4$ ...	6	-6	1	3	-8	6	-10	10	6	23	-29
$\Delta^1 \theta_4 + \Delta^1 \theta_5$ ...	-6	7	0	-3	8	-5	9	-10	-6	-22	29
$\Delta^1 \theta_1$ .....	-8	-5	5	11	-5	-1	8	-2	-2	14	-17
$\Delta^1 \theta_2 + \Delta^1 \theta_3$ ...	8	4	-4	-11	4	2	-9	3	2	-12	16
$\Delta^1 \theta_3 + \Delta^1 \theta_4$ ...	-7	-4	5	12	-4	-1	8	-2	-2	13	-17
$\Delta^1 \theta_4 + \Delta^1 \theta_5$ ...	8	6	-4	-12	4	1	-9	2	2	-13	17

Au reste, les valeurs de  $\Delta^i \theta_i$ , inscrites dans le Tableau précédent, diffèrent très peu de celles que fournissait le Tableau XII du § VII. En effet, les différences entre les unes et les autres, étant exprimées en millièmes, sont telles que les offre le Tableau suivant.

TABLEAU VIII.

Différences entre les valeurs de  $\Delta^i \theta_i$ , obtenues dans les §§ VIII et VII.

	EAU.		SOLUTION de poisson.	CROWGLASS.			FLINTGLASS.				
	1 <sup>re</sup> série.	2 <sup>e</sup> série.		1 <sup>re</sup> espèce.	2 <sup>e</sup> espèce.	3 <sup>e</sup> espèce.	1 <sup>re</sup> espèce.	2 <sup>e</sup> espèce.	3 <sup>e</sup> espèce.	1 <sup>re</sup> série.	2 <sup>e</sup> série.
Pour $i = 1$ .....	0	-1	1	-2	-2	-3	6	2	-3	-2	-3
2.....	-1	0	-2	2	2	5	-10	-2	5	3	5
3.....	2	-2	0	-3	-4	-8	14	4	-6	-4	-8
4.....	-1	2	0	3	4	6	-10	-3	4	2	6
5.....	0	0	-1	-2	-2	-3	3	1	-1	0	-2
6.....	-1	2	0	2	3	5	-7	-2	3	1	4
7.....	0	0	1	0	0	-1	3	1	-2	0	-2

Donc ces différences sont généralement très petites et inférieures ou tout au plus égales à 10 millièmes, si l'on en excepte une qui s'élève à 14 millièmes seulement.

En retranchant les valeurs de  $\Delta^i \theta_i$ , fournies par le Tableau VII des valeurs de  $\theta_i$ , données par le Tableau I du § VI, et remplaçant les deux valeurs d'une même quantité qui correspondent aux deux séries d'expériences faites sur l'eau ou la troisième espèce de flintglass par la moyenne arithmétique entre ces deux valeurs, on obtiendra les valeurs corrigées de  $\theta_i$ , ou, en d'autres termes, les valeurs de

$$\theta_i - \Delta^i \theta_i$$

inscrites dans le Tableau suivant.

TABLEAU IX.  
Valeurs de  $\theta_i - \Delta^i \theta_i$ .

	EAU.	SOLUTION de potasse.	CROWNGLASS.			FLINTGLASS.			
			1 <sup>re</sup> espèce.	2 <sup>e</sup> espèce.	3 <sup>e</sup> espèce.	1 <sup>re</sup> espèce.	2 <sup>e</sup> espèce.	3 <sup>e</sup> espèce.	4 <sup>e</sup> espèce.
$\theta_1 - \Delta^1 \theta_1$	1,330963	1,399624	1,524301	1,525837	1,554775	1,602034	1,623572	1,626574	1,627766
$\theta_2 - \Delta^2 \theta_2$	1,331705	1,400519	1,525307	1,526853	1,555926	1,603818	1,625464	1,628451	1,629694
$\theta_3 - \Delta^3 \theta_3$	1,333576	1,402805	1,527986	1,529572	1,559087	1,608777	1,630663	1,633668	1,635033
$\theta_4 - \Delta^4 \theta_4$	1,335850	1,405633	1,531371	1,533012	1,563146	1,614540	1,637348	1,640533	1,641998
$\theta_5 - \Delta^5 \theta_5$	1,337796	1,408086	1,534350	1,536041	1,566746	1,620043	1,643472	1,646760	1,648369
$\theta_6 - \Delta^6 \theta_6$	1,341285	1,412574	1,539892	1,541676	1,573524	1,630781	1,655390	1,658842	1,660305
$\theta_7 - \Delta^7 \theta_7$	1,344169	1,416368	1,544687	1,546558	1,579475	1,640364	1,666082	1,669697	1,671033

D'après ce qui a été dit, les valeurs corrigées de  $\theta_i$ , représentées ici par  $\theta_i - \Delta^i \theta_i$ , doivent mériter plus de confiance que les valeurs de  $\theta_i$  fournies par les observations, ou même que les valeurs de  $\theta_i - \Delta^i \theta_i$  calculées dans les §§ VI et VII.

§ IX. — Sur la propagation de la lumière dans les milieux où sa vitesse reste la même pour toutes les couleurs.

On ne peut douter que, dans le vide, c'est-à-dire dans cet espace dont l'étendue effraye l'imagination et au travers duquel les rayons des astres parviennent jusqu'à nous, la vitesse de la lumière ne reste la même pour toutes les couleurs. Autrement les étoiles nous apparaîtraient, non plus comme des points brillants, mais comme des bandes lumineuses et très étroites qui offriraient à nos yeux les diverses nuances du spectre solaire. Ainsi le fluide éthéré, lorsqu'il est seul, et que sa constitution naturelle n'est pas modifiée par la présence des corps pondérables, a la propriété de transmettre avec la même vitesse les rayons diversement colorés, par exemple les rayons rouges et les rayons violets. Il y a plus : l'éther paraît conserver encore cette propriété lorsque ses molécules se trouvent en présence de celles d'un

corps gazeux; du moins jusqu'à ce jour on n'a pu découvrir dans les gaz aucune trace de la dispersion des couleurs. Donc, sous certaines conditions, la vitesse de propagation de la lumière, ou la quantité représentée par  $\Omega$ , dans le § II et les suivants, doit devenir indépendante de l'épaisseur  $l$  des ondes lumineuses. En d'autres termes, les formules (1) et (3) du § III, savoir

(1)  $\Omega T = l$

et

(2)  $s = k \Omega,$

doivent, sous certaines conditions, fournir pour la durée  $T$  des vibrations lumineuses une valeur proportionnelle à  $l$ , et pour la quantité

(3)  $s = \frac{2\pi}{T}$

une valeur proportionnelle à celle de

(4)  $k = \frac{2\pi}{l}.$

C'est de la recherche de ces conditions que nous allons maintenant nous occuper.

Considérons des vibrations lumineuses propagées dans le vide, ou généralement dans un milieu où l'élasticité de l'éther reste la même en tous sens. Alors les quantités  $s$  et  $k$  seront liées entre elles par la formule (79) ou (80) du § III. On pourra même débarrasser cette formule de l'angle  $\alpha$ , en ayant égard aux équations (50) et (51) de la page 232, et à l'équation identique

(5)  $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1.$

Effectivement, en vertu de cette dernière, et en étendant les sommes indiquées par le signe  $\Sigma$  à toutes les valeurs paires de  $\lambda, \mu, \nu$  qui vérifient la condition

(6)  $\frac{\lambda}{2} + \frac{\mu}{2} + \frac{\nu}{2} = n,$



on trouvera

$$(7) \quad \left\{ \begin{aligned} S[mr^{2n-1}f(r)] &= S[mr^{2n-1}f(r)(\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma)^n] \\ &= \Sigma \left\{ \frac{1.2.3\dots n}{\left(1.2\dots\frac{\lambda}{2}\right)\left(1.2\dots\frac{\mu}{2}\right)\left(1.2\dots\frac{\nu}{2}\right)} S[mr^{2n-1}f(r)\cos^2\alpha\cos^2\beta\cos^2\gamma] \right\}, \end{aligned} \right.$$

puis on conclura de l'équation (7) combinée avec la formule (50) du § III

$$(8) \quad S[mr^{2n-1}f(r)] = \frac{1.2.3\dots n}{1.3.5\dots(2n-1)} S[mr^{2n-1}f(r)\cos^{2n}\alpha] \Sigma \left[ \frac{1.3\dots(\lambda-1)}{1.2\dots\frac{\lambda}{2}} \frac{1.3\dots(\mu-1)}{1.2\dots\frac{\mu}{2}} \frac{1.3\dots(\nu-1)}{1.2\dots\frac{\nu}{2}} \right].$$

D'ailleurs, en désignant par  $x, y, z$  des variables quelconques, on aura, en vertu d'une formule connue,

$$\Sigma \left[ \frac{x(x+1)\dots\left(x+\frac{\lambda}{2}-1\right)}{1.2\dots\frac{\lambda}{2}} \frac{y(y+1)\dots\left(y+\frac{\mu}{2}-1\right)}{1.2\dots\frac{\mu}{2}} \frac{z(z+1)\dots\left(z+\frac{\nu}{2}-1\right)}{1.2\dots\frac{\nu}{2}} \right] = \frac{(x+y+z)(x+y+z+1)\dots(x+y+z+n-1)}{1.2.3\dots n},$$

puis on tirera de cette dernière équation, en  $y$  posant

$$x = y = z = \frac{1}{2}$$

et multipliant les deux membres par  $2^n$ ,

$$(9) \quad \Sigma \left[ \frac{1.3\dots(\lambda-1)}{1.2\dots\frac{\lambda}{2}} \frac{1.3\dots(\mu-1)}{1.2\dots\frac{\mu}{2}} \frac{1.3\dots(\nu-1)}{1.2\dots\frac{\nu}{2}} \right] = \frac{3.5\dots(2n-1)(2n+1)}{1.2.3\dots n}.$$

Donc la formule (8) donnera

$$S[mr^{2n-1}f(r)] = (2n+1) S[mr^{2n-1}f(r)\cos^{2n}\alpha]$$

et, par suite,

$$(10) \quad S[mr^{2n-1}f(r)\cos^{2n}\alpha] = \frac{1}{2n+1} S[mr^{2n-1}f(r)].$$

Pareillement, on tirera de la formule (5) jointe à l'équation (51) du § III

$$(11) \quad S[mr^{2n-3}f(r)\cos^{2n}\alpha] = \frac{1}{2n+1} S[mr^{2n-3}f(r)].$$

Cela posé, la valeur de  $s^2$  déterminée par l'équation (80) du même paragraphe deviendra

$$(12) \quad \left\{ \begin{aligned} s^2 &= k^2 S \left\{ \frac{mr}{1.2.3} \left[ f(r) + \frac{1}{5} f(r) \right] \right\} - k^2 S \left\{ \frac{mr^3}{1.2.3.4.5} \left[ f(r) + \frac{1}{7} f(r) \right] \right\} \\ &+ k^4 S \left\{ \frac{mr^5}{1.2.3.4.5.6.7} \left[ f(r) + \frac{1}{9} f(r) \right] \right\} - \dots \end{aligned} \right.$$

D'autre part, comme la formule (13) du § I donne

$$(13) \quad f(r) = r f'(r) - f(r),$$

on aura généralement, pour une valeur quelconque du nombre entier  $n$ ,

$$\begin{aligned} r^{2n-1} \left[ f(r) + \frac{1}{2n+3} f(r) \right] \\ = \frac{r^{2n} f'(r) + (2n+2)r^{2n-1} f(r)}{2n+3} = \frac{1}{(2n+3)r^2} \frac{d[r^{2n+2} f(r)]}{dr}, \end{aligned}$$

et, en conséquence, l'équation (12) pourra être réduite à

$$(14) \quad \left\{ \begin{aligned} s^2 &= \frac{1}{5} \frac{k^2}{1.2.3} S \left\{ \frac{m}{r^2} \frac{d[r^4 f(r)]}{dr} \right\} - \frac{1}{7} \frac{k^4}{1.2.3.4.5} S \left\{ \frac{m}{r^2} \frac{d[r^6 f(r)]}{dr} \right\} \\ &+ \frac{1}{9} \frac{k^6}{1.2.3.4.5.6.7} S \left\{ \frac{m}{r^2} \frac{d[r^8 f(r)]}{dr} \right\} + \dots \end{aligned} \right.$$

Enfin on a évidemment

$$\begin{aligned} \frac{1}{5} \frac{k^2 r^4}{1.2.3} - \frac{1}{7} \frac{k^4 r^6}{1.2.3.4.5} + \frac{1}{9} \frac{k^6 r^8}{1.2.3.4.5.6.7} - \dots \\ = \frac{r}{k^2} \frac{d \left( \frac{k^4 r^4}{1.2.3.4.5} - \frac{k^6 r^6}{1.2.3.4.5.6.7} + \frac{k^8 r^8}{1.2.3.4.5.6.7.8.9} - \dots \right)}{dr} \\ = \frac{r}{k^2} \frac{d \left[ \frac{\sin kr}{kr} - \left( 1 - \frac{k^2 r^2}{1.2.3} \right) \right]}{dr} = \frac{1}{k^2} \left( \cos kr - \frac{\sin kr}{kr} + \frac{1}{3} k^2 r^2 \right). \end{aligned}$$

Donc la formule (14) pourra s'écrire comme il suit :

$$(15) \quad s^2 = S \left\{ \frac{m}{k^2 r^2} \frac{d \left[ \left( \cos kr - \frac{\sin kr}{kr} + \frac{1}{3} k^2 r^2 \right) f(r) \right]}{dr} \right\}.$$

Au reste, la formule (15), comme nous le prouverons dans un autre Mémoire, pourrait encore se déduire immédiatement de la formule (79) du § III.

Les formules (79) et (80) du § III, ou la formule (15), à laquelle on peut les réduire, se rapportent au cas où, les conditions (48), (49), (50), (51) (§ III) se trouvant remplies, la propagation de la lumière s'effectue de la même manière en tous sens; et nous devons ajouter que ce phénomène, qui a rigoureusement lieu dans le vide, subsiste approximativement dans les divers milieux, puisque, dans les corps doués de la double réfraction, la différence entre les vitesses de propagation des rayons ordinaire et extraordinaire est généralement fort petite. Or les conditions que nous venons de rappeler se vérifient toujours, comme il est facile de s'en assurer, lorsque, dans les sommes indiquées par le signe S et qui sont de l'une des formes

$$S[mr^{2\alpha-1} f(r) \cos^2 \alpha \cos^2 \beta \cos^2 \gamma], \quad S[mr^{2\alpha-1} f(r) \cos^2 \alpha \cos^2 \beta \cos^2 \gamma].$$

les sommations relatives aux angles  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ , compris entre le rayon vecteur  $r$  et les demi-axes des coordonnées positives, peuvent être remplacées par des intégrations aux différences infiniment petites et relatives à deux angles auxiliaires  $p$ ,  $q$  liés aux trois premiers par les équations

$$(16) \quad \cos \alpha = \cos p, \quad \cos \beta = \sin p \cos q, \quad \cos \gamma = \sin p \sin q,$$

l'angle  $p$  étant celui que forme le rayon vecteur  $r$  avec un axe fixe, et l'angle  $q$  celui que forme un plan fixe mené par l'axe fixe avec le plan mobile qui renferme le même axe et le rayon  $r$ . Il est donc naturel de penser qu'on obtiendra une première approximation des mouvements de l'éther dans tous les milieux, et probablement avec une grande précision les lois de son mouvement dans le vide, si l'on change les som-

mations doubles relatives aux angles  $p$ ,  $q$  en intégrations doubles, ou même les sommations triples relatives aux variables  $p$ ,  $q$ ,  $r$  en intégrations triples. Alors, en désignant par  $\rho$  la densité de l'éther au point avec lequel coïncide la molécule  $m$ ; par  $m$  une seconde molécule dont les coordonnées polaires soient  $p$ ,  $q$ ,  $r$ ; par  $F(r)$  une fonction du rayon vecteur  $r$  qui s'évanouisse pour  $r = \infty$ , et par  $\pi$  le rapport de la circonférence au diamètre, ou le nombre 3,14159265..., on trouvera

$$(17) \quad S[m F(r)] = \int_{r_0}^{r_\infty} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \rho r^2 F(r) \sin p \, dr \, dq \, dp,$$

le signe S s'étendant, dans le premier membre de l'équation (18), à toutes les molécules  $m$  distinctes de  $m$ , et

$$r_0, \quad r_\infty$$

représentant deux valeurs de  $r$ , dont la première soit nulle ou bien équivalente à la plus petite distance qui sépare deux molécules voisines d'éther, la seconde infinie ou du moins assez grande pour que, dans l'expression

$$S[m F(r)],$$

la somme des termes correspondants à des valeurs plus considérables de  $r$  puisse être négligée sans erreur sensible. Comme on aura d'ailleurs

$$\int_0^\pi \sin p \, dp = 2, \quad \int_0^{2\pi} dq = 2\pi,$$

on pourra, en supposant la densité  $\rho$  constante, réduire la formule (17) à

$$(18) \quad S[m F(r)] = 4\pi\rho \int_{r_0}^{r_\infty} r^2 F(r) \, dr,$$

et par suite l'équation (15) donnera

$$(19) \quad s^2 = 4\pi\rho \int_{r_0}^{r_\infty} \frac{d \left[ \frac{1}{k^2} \left( \cos kr - \frac{\sin kr}{kr} + \frac{1}{3} k^2 r^2 \right) f(r) \right]}{dr} dr.$$



Or, pour de très grandes ou de très petites valeurs de  $r$ , le produit

$$(20) \quad \begin{cases} \frac{1}{k^2} \left( \cos kr - \frac{\sin kr}{kr} + \frac{1}{3} k^2 r^2 \right) \\ = \frac{1}{3} r^2 + \frac{\cos kr}{k^2} - \frac{\sin kr}{k^2 r} = \frac{1}{5} \frac{k^2 r^4}{1 \cdot 2 \cdot 3} - \frac{1}{7} \frac{k^4 r^6}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} + \dots \end{cases}$$

développé en un trinôme ou en une série ordonnée suivant les puissances ascendantes de  $r$ , pourra être remplacé sans erreur sensible par le premier terme de son développement; et ce premier terme, vis-à-vis duquel tous les autres pourront être négligés, sera, pour de très grandes valeurs de  $r$ ,

$$\frac{1}{3} r^2,$$

et, pour de très petites valeurs de  $r$ ,

$$\frac{1}{5} \frac{k^2 r^4}{1 \cdot 2 \cdot 3} = \frac{1}{30} k^2 r^4.$$

Donc la formule (19) donnera sensiblement

$$(21) \quad s^2 = \frac{4\pi\rho}{3} \left[ r_0^2 f(r_\infty) - \frac{1}{10} k^2 r_0^6 f(r_0) \right].$$

Supposons maintenant  $r_0 = 0$ ,  $r_\infty = \infty$ . L'équation (21) fournira pour  $s^2$  une valeur finie, positive et différente de zéro, dans deux cas dignes de remarque, savoir : 1° quand le produit

$$(22) \quad r^2 f(r)$$

se réduira, pour une valeur infiniment grande de la distance  $r$ , à une constante finie et positive; 2° quand le produit

$$(23) \quad r^4 f(r)$$

se réduira, pour une valeur infiniment petite de  $r$ , à une constante finie mais négative. Le premier cas aura lieu, par exemple, si l'on suppose

$$(24) \quad f(r) = \frac{G}{r^2},$$

$G$  désignant une constante positive, et alors la valeur de  $s^2$ , réduite à

$$(25) \quad s^2 = \frac{4\pi}{3} \rho G,$$

deviendra indépendante de la quantité  $k$ . Pareillement, le second cas aura lieu si l'on suppose

$$(26) \quad f(r) = -\frac{H}{r^4},$$

$H$  désignant encore une constante positive, et alors la valeur de  $s$ , déterminée par l'équation

$$(27) \quad s^2 = \frac{4\pi}{30} \rho H k^2,$$

deviendra proportionnelle à  $k$ . Comme d'ailleurs le produit

$$(28) \quad m m f(r)$$

représente l'attraction ou la répulsion mutuelle des deux molécules  $m$ , la quantité  $f(r)$  étant positive lorsque les masses  $m$ ,  $m$  s'attirent, et négative lorsqu'elles se repoussent; il résulte des formules (24) et (25), ou (26) et (27), que la quantité  $s$  deviendra indépendante de  $k$ , si deux molécules s'attirent en raison inverse du carré de la distance qui les sépare et proportionnelle à  $k$ , si deux molécules se repoussent en raison inverse de la quatrième puissance de cette distance. Au reste, pour obtenir la formule (25), il ne sera pas absolument nécessaire d'attribuer à la fonction  $f(r)$  la forme que présente l'équation (24), et il suffira, par exemple, de supposer

$$(29) \quad f(r) = \frac{\mathcal{F}(r)}{r^2},$$

$\mathcal{F}(r)$  étant une nouvelle fonction qui se réduise à  $G$  pour  $r = \infty$ , sans devenir infinie pour  $r = 0$ . Pareillement, pour obtenir la formule (27), il suffira de supposer

$$(30) \quad f(r) = \frac{\mathcal{F}(r)}{r^4},$$





$\mathcal{F}(r)$  étant une fonction de  $r$  qui se réduit à  $H$  pour  $r=0$ , sans devenir infinie pour  $r=\infty$ . C'est ce qui arriverait, en particulier, si l'on posait

$$\mathcal{F}(r) = He^{-ar} \quad \text{ou} \quad \mathcal{F}(r) = He^{-ar} \cos br, \quad \dots$$

et, par suite,

$$(31) \quad f(r) = -\frac{He^{-ar}}{r^2} \quad \text{ou} \quad f(r) = -\frac{He^{-ar} \cos br}{r^2}, \quad \dots,$$

$a, b$  désignant des constantes réelles dont la première serait positive, etc.

De la formule (27), combinée avec la formule (2), on tire

$$(32) \quad \Omega^2 = \frac{4\pi}{30} \rho H.$$

En vertu de cette dernière, la vitesse de propagation  $\Omega$  des vibrations moléculaires devient indépendante de la durée de ces vibrations. On peut donc considérer la formule (27) comme propre à représenter la loi de propagation de la lumière dans le vide ou même dans les gaz; et alors l'action mutuelle de deux molécules d'éther doit prendre l'une des formes qui répondent à l'équation (27), de telle sorte que, dans le voisinage du contact, cette action soit répulsive et réciproquement proportionnelle au bicarré de la distance.

Rømer et Cassini ont remarqué, les premiers, que les éclipses des satellites de Jupiter, calculées d'après les observations faites pour une distance donnée de cette planète à la Terre, cessaient d'être aperçues aux époques déterminées par le calcul lorsque cette distance venait à croître ou à diminuer. En comparant l'avance ou le retard qui avait lieu dans l'observation de chaque éclipse avec la diminution ou l'accroissement de la distance des deux planètes, ils en ont conclu que la lumière emploie  $8^m 13^s$  ou 493 secondes sexagésimales de temps pour parcourir un espace égal au rayon moyen de l'orbite terrestre, c'est-à-dire 39 229 000 lieues de 2000 toises chacune ou de 389 807 318<sup>m</sup>. Il en résulte que la vitesse de propagation de la lumière est de 79 752 lieues ou environ 310 177 500<sup>m</sup>. Donc, en prenant le mètre pour unité de lon-

gueur et la seconde sexagésimale pour unité de temps, on aura, dans les formules (2) et (32),

$$(33) \quad \Omega = 310\,177\,500 \quad \text{et} \quad L\Omega = 8,4916103.$$

Cela posé, l'équation (32) donnera

$$(34) \quad \rho H = 22\,968 (10)^{12} \quad \text{environ.}$$

La valeur du produit  $\rho H$  déterminée par la formule (30) étant très considérable, il est nécessaire qu'au moins l'un des facteurs de ce produit soit un très grand nombre. D'ailleurs, si, pour plus de simplicité, on suppose que les masses de toutes les molécules d'éther soient égales entre elles, et si l'on prend alors la masse d'une molécule pour unité de masse, le facteur  $H$  représentera l'intensité de la répulsion qu'exerceraient, l'une sur l'autre, deux molécules d'éther placées à 1<sup>m</sup> de distance, dans le cas où l'on étendrait à des distances quelconques la loi de répulsion déterminée par la formule (26), et ci-dessus établie pour de très petites distances. Or nous n'avons point de raisons de croire que le facteur  $H$  ainsi défini ait une valeur considérable. Nous devons plutôt penser qu'il offre une valeur très petite, ou, en d'autres termes, que la vitesse propre à mesurer la force répulsive dont il s'agit, c'est-à-dire la vitesse communiquée par cette force dans la première seconde sexagésimale à chacune des deux molécules prises dans l'état de repos, et placées en présence l'une de l'autre à 1<sup>m</sup> de distance, serait une vitesse très peu considérable, en vertu de laquelle chaque molécule ne parcourrait en une seconde de temps qu'un espace représenté par une très petite fraction du mètre. Mais il est essentiel d'ajouter que, dans l'hypothèse admise, la densité de l'éther ou le facteur  $\rho$  se réduira au nombre des molécules éthérées comprises sous l'unité de volume, c'est-à-dire sous le volume de 1<sup>m<sup>3</sup></sup>. Cela posé, de l'équation (34), présentée sous la forme

$$(35) \quad \rho = 22\,968 (10)^{12} \frac{1}{H},$$

il résulte seulement que, pour obtenir la millionième partie de  $\rho$ ,



c'est-à-dire le nombre de molécules d'éther comprises dans 1<sup>mmc</sup>, on doit répéter plus de vingt-deux mille millions de millions de fois le nombre vraisemblablement déjà très considérable qui se trouve exprimé par  $\frac{1}{H}$ .

Si l'on nomme  $D$  la densité moyenne du globe terrestre, évaluée comme celle de l'éther vient de l'être, c'est-à-dire la valeur moyenne du nombre des molécules de matière pondérable comprises dans ce globe sous le volume de 1<sup>mc</sup>, et  $G$  la valeur moyenne de l'attraction qu'exercent l'une sur l'autre deux de ces molécules, placées à 1<sup>m</sup> de distance; le rapport

$$\frac{G}{r^2}$$

représentera l'action des mêmes molécules placées à la distance  $r$ ; et, comme, en nommant  $u$  le rayon moyen de la Terre, on trouvera le volume du globe terrestre sensiblement égal à

$$\frac{4\pi}{3} u^3,$$

l'intensité  $g$  de la pesanteur à la surface de la Terre aura pour mesure le produit des trois facteurs

$$D, \frac{G}{u^2}, \frac{4\pi}{3} u^3.$$

On aura donc

$$(36) \quad g = \frac{4\pi}{3} D G u.$$

De cette dernière formule, combinée avec l'équation (32), on tirera

$$(37) \quad \rho H = 10 \frac{\Omega^2 u}{g} D G.$$

D'ailleurs, en prenant le mètre pour unité de longueur et la seconde sexagésimale pour unité de temps, on a trouvé, à l'Observatoire de Paris,

$$g = 9,8088,$$

et le rayon moyen de la Terre, exprimé en mètres, est environ

$$u = 6\,366\,745.$$

Par suite on tirera de l'équation (36)

$$(38) \quad DG = 0,0000003678$$

et, de l'équation (37), environ

$$(39) \quad \rho H = 62448(10)^{12} DG.$$

Comme le nombre  $D$  des molécules du globe comprises sous le volume d'un mètre cube ne peut être supposé que très considérable, il résulte de l'équation (38) que l'intensité  $G$  de la force qui représente l'attraction de deux de ces molécules placées à un mètre de distance doit être fort petite et de beaucoup inférieure à

$$\left(\frac{1}{10}\right)^2,$$

c'est-à-dire à un milliardième. Quant à l'équation (39), elle donnera

$$(40) \quad \frac{\rho}{D} = 62448(10)^{12} \frac{G}{H},$$

et l'on en déduira une très grande valeur du rapport  $\frac{\rho}{D}$ , à moins toutefois de supposer, ce qui n'est guère probable, que la répulsion  $H$  de deux molécules d'éther transportées à un mètre de distance, sans que la loi de répulsion se trouve altérée, surpasse extraordinairement l'attraction  $G$  de deux molécules pondérables placées à la même distance. En rejetant cette dernière hypothèse et supposant au contraire le nombre  $H$  comparable au nombre  $G$ , on conclura de la formule (40) que, dans un espace qui renferme seulement quelques molécules de matière pondérable, les molécules d'éther se comptent par mille millions de millions. On peut dire en ce sens que la densité de l'éther est considérablement supérieure à celle des gaz, des liquides ou même des solides. Mais cette proposition cesserait d'être exacte, et l'on pourrait même soutenir la proposition contraire si l'on



prenait pour mesure de la densité le poids des molécules comprises sous l'unité de volume, au lieu du nombre de ces molécules.

Si l'on applique la formule (32) à la propagation de la lumière, non seulement dans le vide, mais aussi dans les milieux où l'on n'aperçoit nulle trace de dispersion, par exemple dans l'air atmosphérique, si d'ailleurs on nomme

$$\rho' \text{ et } \Omega'$$

ce que deviennent la densité  $\rho$  de l'éther et la vitesse  $\Omega$  de la lumière quand on substitue l'air atmosphérique au vide, ou plus généralement le nouveau milieu au vide, on aura simultanément

$$\Omega^2 = \frac{4\pi}{30} \rho h, \quad \Omega'^2 = \frac{4\pi}{30} \rho' h$$

et, par suite,

$$(41) \quad \frac{\Omega'^2}{\rho'} = \frac{\Omega^2}{\rho} \quad \text{ou} \quad \frac{\Omega'}{\sqrt{\rho'}} = \frac{\Omega}{\sqrt{\rho}}.$$

En vertu de cette dernière formule, la vitesse de propagation de la lumière, dans les milieux qui ne dispersent pas les couleurs, serait proportionnelle à la racine carrée de la densité de l'éther dans ces mêmes milieux.

D'ailleurs, si l'on nomme  $\theta$  l'indice de réfraction de la lumière passant du vide dans le milieu que l'on considère, on aura [voir la formule (8) du § VI]

$$(42) \quad \Omega = \frac{\Omega'}{\theta},$$

et par suite la formule (41) donnera

$$(43) \quad \rho' = \frac{\rho}{\theta^2}.$$

Or, comme l'indice de réfraction  $\theta$  surpasse toujours l'unité, la valeur de  $\rho'$  déterminée par l'équation (43) sera toujours inférieure à celle de  $\rho$ . Ainsi l'application de la formule (32) aux divers milieux qui ne dispersent pas les couleurs nous conduit à supposer que la densité de l'éther, ou le nombre des molécules étherées comprises sous l'unité

de volume, est plus considérable dans le vide que dans tout autre milieu. Au reste, en vertu de la formule (43), la diminution de densité de l'éther, quand on passera du vide dans un gaz quelconque, devra être généralement fort petite, attendu que, pour tous les gaz, l'indice de réfraction  $\theta$  diffère très peu de l'unité, et que pour chacun d'eux la valeur de  $\theta - 1$  fournie par l'observation ne s'est jamais élevée à 16 dix-millièmes.

L'indice de réfraction de l'air atmosphérique peut être déterminé directement pour une température donnée et sous une pression donnée. C'est ce qu'ont fait MM. Biot et Arago, qui ont trouvé cet indice égal à 1,000294 pour la température zéro et sous la pression représentée par une colonne de mercure de 76 centimètres de hauteur. On peut aussi déduire le même indice des observations astronomiques, et l'on trouve alors pour sa valeur moyenne le nombre

$$1,000276.$$

En multipliant par ce dernier nombre les diverses valeurs de  $l_i$  que fournit le Tableau II du § VI, c'est-à-dire les épaisseurs des ondes lumineuses mesurées dans l'air et correspondantes aux rayons

B, C, D, E, F, G, H

de Fraunhofer, on obtiendra les épaisseurs de ces ondes dans le vide, telles que les présente le Tableau suivant.

TABLEAU I.

Épaisseur des ondes dans le vide, en dix-millionièmes de millimètre.

	$i = 1.$	$i = 2.$	$i = 3.$	$i = 4.$	$i = 5.$	$i = 6.$	$i = 7.$
Valeurs de $l_i$ dans l'air..	6878	6564	5888	5260	4843	4291	3928
Logarithmes.....	8374930	8172000	7699476	7209611	6850986	6325176	5941557
$L(1,000276)$ .....	0001198	0001198	0001198	0001198	0001198	0001198	0001198
Sommes...	8376128	8173198	7700674	7210809	6852184	6326374	5942755
Valeurs de $l_i$ dans le vide.	6880	6566	5889	5261	4844	4292	3929



Ainsi les épaisseurs des ondes lumineuses sont un peu plus grandes dans le vide que dans l'air. Mais, tandis que l'on passe de l'air dans le vide, la variation de l'épaisseur d'une onde ne s'élève point au delà de 2 dix-millionièmes de millimètre, et reste toujours inférieure à 3 dix-millièmes de cette même épaisseur; d'où il résulte que la variation dont il s'agit pourrait être négligée comme comparable aux erreurs des observations qui ont fourni les valeurs de  $l$ , exprimées en cent-millionièmes de pouce et inscrites dans le Tableau II du § VI.

En joignant le Tableau qui précède aux formules (1), (2), (3), (4) et à l'équation (33), prenant toujours le mètre et la seconde sexagésimale pour unités de longueur et de temps, effectuant les calculs par logarithmes et désignant par

$$(44) \quad N = \frac{1}{T}$$

le nombre des vibrations lumineuses qui se succèdent l'une à l'autre dans une seconde de temps, on obtiendra sans peine, pour les rayons

B, C, D, E, F, G, H

de Fraunhofer, les valeurs de

$k$ , T, N et  $s$

et de leurs logarithmes, données par le Tableau suivant.

TABLEAU II.  
Valeurs de  $k$ , T, N,  $s$ .

INDICATION DES RAYONS.	B.	C.	D.	E.	F.	G.	H.
$Ll$ .....	8376128	8173198	7700674	7210809	6852184	6326374	5942755
$L\left(\frac{1}{T}\right)$ .....	1623872	1826802	2299326	2789194	3147816	3673626	4072745
$L(2\pi)$ .....	7981799	7981799	7981799	7981799	7981799	7981799	7981799
Logarithme de $k = \frac{2\pi}{T}$ .....	9605671	9808601	0281125	0770990	1129615	1655425	2039044
$Ll$ .....	8376128	8173198	7700674	7210809	6852184	6326374	5942755
$L\Omega$ .....	4916103	4916103	4916103	4916103	4916103	4916103	4916103
Logarithme de $T = \frac{l}{\Omega}$ .....	3460025	3257095	2784571	2294706	1936081	1410271	1026652
Logarithme de $N = \frac{1}{T}$ .....	6539975	6712905	7215429	7705294	8063919	8389729	8673348
$L(2\pi)$ .....	7981799	7981799	7981799	7981799	7981799	7981799	7981799
Logarithme de $s = \frac{2\pi}{T}$ .....	4521774	4724704	5197228	5687093	6045718	6671528	6955147
$\frac{1}{1000} k$ .....	9132	9569	10669	11943	12971	14640	15992
$(1000000)^3 T$ .....	2218	2117	1899	1696	1562	1384	1267
$\frac{10}{(1000000)^3} N$ .....	4508	4724	5267	5896	6403	7227	7895
$\frac{1}{(1000000)^2} s$ .....	2833	2968	3309	3704	4023	4541	4960

En égalant les nombres que renferment, dans le Tableau II, les quatre dernières lignes horizontales aux produits placés en avant de ces mêmes lignes, on en conclut immédiatement les valeurs de  $k$ , T, N,  $s$  relatives aux divers rayons. Ainsi, par exemple, de ce que pour le rayon B le produit

$$\frac{10}{(1000000)^3} N$$

est sensiblement égal à 4508, il résulte que le nombre des vibrations



lumineuses accomplies dans ce rayon en une seconde de temps est la dixième partie de 4508 millions de millions, de sorte que, pendant ce court intervalle, environ 451 millions de millions de vibrations se succèdent l'une à l'autre. Pour obtenir la durée de chacune de ces vibrations, il faudra évaluer le produit

$$(1000000)^3 T$$

au nombre 2218 et, par suite, la durée de chaque vibration, dans le rayon B, sera représentée par la fraction

$$(45) \quad \frac{2218}{(1000000)^3}$$

qui est un peu plus grande que

$$(46) \quad \frac{2}{1000(1000000)^2}$$

Si au rayon B on substituait le rayon C ou D, il faudrait à la fraction (45) substituer le rapport

$$\frac{2117}{(1000000)^3} \text{ ou } \frac{1899}{(1000000)^3}$$

qui différerait encore très peu de la fraction (46). Donc, si l'on partage une seconde de temps en 1000 millions de millions de parties égales, deux de ces parties représenteront à très peu près la durée d'une vibration lumineuse dans les rayons B, C, D placés vers l'extrémité rouge du spectre solaire. Cette durée ne surpasserait que d'un quart environ l'une des mêmes parties dans le rayon situé vers l'extrémité opposée du spectre parmi les rayons violets.

Les épaisseurs des ondes relatives aux couleurs principales du spectre solaire et aux limites de ces couleurs ont été déterminées par Fresnel avec une grande précision. Ces épaisseurs, exprimées en millionnièmes de millimètre, sont telles que les présente le Tableau suivant.

TABLEAU III.

Valeurs de  $l$ , exprimées en millionnièmes de millimètre.

LIMITES DES COULEURS PRINCIPALES.		COULEURS PRINCIPALES.	
Violet extrême.....	406	Violet.....	423
Violet indigo.....	430	Indigo.....	449
Indigo bleu.....	459	Bleu.....	475
Bleu vert.....	492	Vert.....	511
Vert jaune.....	532	Jaune.....	551
Jaune orangé.....	571	Orangé.....	583
Orangé rouge.....	596	Rouge.....	620
Rouge extrême.....	643		

Les valeurs précédentes de  $l$ , mesurées dans l'air, ne seront pas sensiblement altérées si l'on passe de l'air dans le vide; car ce passage, en les faisant varier dans le rapport de 1 à 1,000276, n'ajoutera pas même à chacune d'elles le tiers de sa millième partie. En les divisant par la vitesse  $\Omega$  de la lumière dans le vide, on obtiendra, pour les couleurs principales et pour leurs limites, les durées des vibrations de l'éther. Ces durées seront comparables à l'intervalle de temps insensible qui résulte de la division d'une seconde sexagésimale en mille millions de millions de parties égales, et leurs rapports avec ce même intervalle se trouveront exprimés par les nombres que renferme le Tableau que nous allons tracer.





seconde dans le rayon F de Fraunhofer, qui est un rayon bleu situé dans le spectre solaire vers la limite du bleu et du vert.

Les nombres compris dans le Tableau V diffèrent de ceux que l'on trouve dans le Traité de M. Herschel sur la lumière. En recherchant la cause de cette différence, j'ai reconnu qu'elle devait être principalement attribuée à ce que les épaisseurs d'onde ou longueurs d'ondulation adoptées par cet auteur, et relatives aux diverses couleurs ou à leurs limites, diffèrent assez notablement des valeurs de  $l$  inscrites dans le Tableau III et données par Fresnel.

En terminant ce paragraphe, nous ferons observer que, dans les milieux qui ne dispersent pas les couleurs, les valeurs de  $k$  relatives à deux rayons différents conservent entre elles, en vertu de la formule (7), le même rapport que les deux valeurs correspondantes de  $s$ . Ce rapport est donc, ainsi que les valeurs de  $s$ , indépendant de la nature du milieu que l'on considère, pourvu que la dispersion soit nulle; en sorte qu'il reste le même, par exemple, dans le vide et dans l'air atmosphérique. On peut en dire autant du rapport entre deux valeurs diverses de  $l$ , qui est toujours l'inverse du rapport entre les valeurs correspondantes de  $k$ . Si, pour fixer les idées, on divise successivement la valeur  $l$ , de  $L$ , qui répond au rayon B de Fraunhofer, par les valeurs de  $l$  relatives aux autres rayons, c'est-à-dire par les quantités

$$l_2, l_3, l_4, l_5, l_6, l_7,$$

on trouvera pour quotients les nombres dont les logarithmes sont

$$(47) \quad 0202930, 0675454, 1165319, 1523944, 2049754, 2433373,$$

c'est-à-dire les nombres

$$(48) \quad 1,0478, 1,1683, 1,3078, 1,4203, 1,6032, 1,7512.$$

Or ces derniers nombres représenteront dans l'air et dans le vide, non seulement les valeurs des rapports

$$(49) \quad \frac{l_1}{l_2}, \frac{l_1}{l_3}, \frac{l_1}{l_4}, \frac{l_1}{l_5}, \frac{l_1}{l_6}, \frac{l_1}{l_7},$$

mais encore celles des rapports

$$(50) \quad \frac{k_2}{k_1}, \frac{k_3}{k_1}, \frac{k_4}{k_1}, \frac{k_5}{k_1}, \frac{k_6}{k_1}, \frac{k_7}{k_1}$$

ou même des suivants

$$(51) \quad \frac{s_2}{s_1}, \frac{s_3}{s_1}, \frac{s_4}{s_1}, \frac{s_5}{s_1}, \frac{s_6}{s_1}, \frac{s_7}{s_1}.$$

§ X. — *Considérations nouvelles sur la réfraction de la lumière.*

Les lois de la réfraction simple, telles que l'expérience les donne, se trouvent comprises dans les formules (8) et (9) du § V. Or il est important d'observer que la méthode à l'aide de laquelle nous avons établi ces formules les reproduira encore si l'on suppose que les valeurs des déplacements  $\xi$ ,  $\eta$ ,  $\zeta$  relatives soit au premier, soit au second milieu, et tirées en conséquence soit des équations (1), soit des équations (2), fournissent, pour les points situés sur la surface de séparation, des valeurs égales d'une fonction linéaire quelconque de ces mêmes déplacements et de leurs dérivées prises par rapport aux variables indépendantes  $x$ ,  $y$ ,  $t$ . En effet, désignons par  $\varkappa$  la fonction linéaire dont il s'agit. Si l'on y substitue les valeurs de  $\xi$ ,  $\eta$ ,  $\zeta$ , qui représentent les déplacements moléculaires dans le rayon incident, c'est-à-dire les valeurs de  $\xi$ ,  $\eta$ ,  $\zeta$  données par les équations (33) du § IV,  $\varkappa$  deviendra une fonction linéaire des sinus et cosinus de l'arc

$$k(x \cos \tau + y \sin \tau) - st,$$

en sorte qu'on aura, par exemple,

$$(1) \quad \varkappa = \mathfrak{C} \cos[k(x \cos \tau + y \sin \tau) - st] + \mathfrak{F} \sin[k(x \cos \tau + y \sin \tau) - st],$$

les coefficients  $\mathfrak{C}$ ,  $\mathfrak{F}$  étant uniquement fonctions des quantités

$$(2) \quad \mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}, \mathfrak{D}, s, k, \cos \tau, \sin \tau.$$

Soient maintenant

$$\mathfrak{C}_1, \mathfrak{F}_1 \quad \text{ou} \quad \mathfrak{C}', \mathfrak{F}'$$



ce que deviennent les coefficients

$$\mathfrak{E}, \mathfrak{F}$$

quand on passe du rayon incident au rayon réfléchi ou réfracté, c'est-à-dire quand on remplace les quantités (2) par les suivantes

$$(3) \quad \mathfrak{A}_1, \mathfrak{B}_1, \mathfrak{C}_1, \mathfrak{D}_1, s, k, -\cos\tau, \sin\tau$$

ou par

$$(4) \quad \mathfrak{A}', \mathfrak{B}', \mathfrak{C}', \mathfrak{D}', s', k', \cos\tau', \sin\tau'.$$

En considérant à la fois les deux systèmes d'ondes propagées dans le premier milieu, on devra, pour ce milieu, remplacer la formule (1) par la suivante

$$(5) \quad \begin{cases} u = \mathfrak{E} \cos[k(x \cos\tau + y \sin\tau) - st] + \mathfrak{F} \sin[k(x \cos\tau + y \sin\tau) - st] \\ + \mathfrak{E}_1 \cos[k(-x \cos\tau + y \sin\tau) - st] + \mathfrak{F}_1 \sin[k(-x \cos\tau + y \sin\tau) - st], \end{cases}$$

tandis qu'on trouvera par le second milieu

$$(6) \quad \begin{cases} u = \mathfrak{E}' \cos[k'(x \cos\tau' + y \sin\tau') - s't'] \\ + \mathfrak{F}' \sin[k'(x \cos\tau' + y \sin\tau') - s't']. \end{cases}$$

Si maintenant l'on suppose que les deux valeurs précédentes de  $u$  deviennent égales entre elles pour les points situés sur la surface de séparation des deux milieux et correspondants à  $x = 0$ , on aura

$$(7) \quad \begin{cases} (\mathfrak{E} + \mathfrak{E}_1) \cos(ky \sin\tau - st) + (\mathfrak{F} + \mathfrak{F}_1) \sin(ky \sin\tau - st) \\ = \mathfrak{E}' \cos(k'y \sin\tau' - s't) + \mathfrak{F}' \sin(k'y \sin\tau' - s't). \end{cases}$$

Or, cette dernière équation devant subsister indépendamment des valeurs attribuées aux variables  $y$  et  $t$ , les coefficients des puissances semblables de  $y$  et de  $t$  devront être égaux dans les deux membres développés en séries convergentes ordonnées suivant les puissances dont il s'agit; et de cette seule considération on déduira immédiatement les formules

$$(8) \quad \mathfrak{E} + \mathfrak{E}_1 = \mathfrak{E}', \quad \mathfrak{F} + \mathfrak{F}_1 = \mathfrak{F}',$$

$$(9) \quad k \sin\tau = k' \sin\tau', \quad s = s',$$

auxquelles on parvient encore très simplement de la manière suivante.

Si dans l'équation (7) on pose, pour abrégér,

$$(10) \quad ky \sin\tau - st = Y, \quad -t = \frac{1}{s}(Y - ky \sin\tau),$$

on obtiendra la formule

$$(11) \quad \begin{cases} (\mathfrak{E} + \mathfrak{E}_1) \cos Y + (\mathfrak{F} + \mathfrak{F}_1) \sin Y \\ = \mathfrak{E}' \cos \left[ \frac{s'}{s} Y + \left( k' \sin\tau' - \frac{s'}{s} k \sin\tau \right) y \right] \\ + \mathfrak{F}' \sin \left[ \frac{s'}{s} Y + \left( k' \sin\tau' - \frac{s'}{s} k \sin\tau \right) y \right], \end{cases}$$

qui devra subsister à son tour, quelles que soient les valeurs de  $Y$  et de  $y$ . Or, le premier membre étant indépendant de  $y$ , le second devra l'être pareillement, ce qui entraîne la condition

$$(12) \quad k' \sin\tau' = \frac{s'}{s} k \sin\tau.$$

Cela posé, la formule (11) deviendra

$$(13) \quad (\mathfrak{E} + \mathfrak{E}_1) \cos Y + (\mathfrak{F} + \mathfrak{F}_1) \sin Y = \mathfrak{E}' \cos \left( \frac{s'}{s} Y \right) + \mathfrak{F}' \sin \left( \frac{s'}{s} Y \right),$$

et, comme, en remplaçant  $Y$  par  $-Y$ , on en tirera

$$(14) \quad (\mathfrak{E} + \mathfrak{E}_1) \cos Y - (\mathfrak{F} + \mathfrak{F}_1) \sin Y = \mathfrak{E}' \cos \left( \frac{s'}{s} Y \right) - \mathfrak{F}' \sin \left( \frac{s'}{s} Y \right),$$

on aura encore

$$(15) \quad (\mathfrak{E} + \mathfrak{E}_1) \cos Y = \mathfrak{E}' \cos \left( \frac{s'}{s} Y \right), \quad (\mathfrak{F} + \mathfrak{F}_1) \sin Y = \mathfrak{F}' \sin \left( \frac{s'}{s} Y \right).$$

Si maintenant on réduit  $Y$  à zéro dans la première des formules (15), elle donnera

$$(16) \quad \mathfrak{E} + \mathfrak{E}_1 = \mathfrak{E}'.$$

Donc cette formule donnera généralement

$$(17) \quad \cos Y = \cos \left( \frac{s'}{s} Y \right).$$





Cette dernière devant subsister, quel que soit  $Y$ , entraînera l'équation

$$(18) \quad s' = s,$$

qui réduira la seconde des formules (15) à

$$(19) \quad \xi + \xi_1 = \xi'$$

et l'équation (12) à

$$(20) \quad k' \sin \tau' = k \sin \tau.$$

On se trouve ainsi ramené aux équations (8) et (9), dont les deux dernières coïncident avec les formules (8) et (9) du § V.

En supposant que la fonction linéaire  $z$  des déplacements  $\xi, \eta, \zeta$  et de leurs dérivées relatives à  $x, y, t$  se réduise simplement à la variable  $\xi$ , on ferait coïncider les équations (8) avec les formules (7) du § V. Mais adopter ces formules, ce serait admettre, comme nous l'avons déjà observé, que l'on peut sans erreur sensible ne pas tenir compte des altérations produites par le voisinage du second milieu dans la valeur de  $\xi$  que détermine la première des équations (1) du § V, ou par le voisinage du premier milieu dans la valeur de  $\xi$  que détermine la première des équations (2) du même paragraphe. A la vérité, en prenant successivement pour  $z$  la variable  $\xi$ , ou, ce qui revient au même, la vitesse  $\frac{\partial \xi}{\partial t}$ , puis la composante, parallèle à l'axe des  $x$ , de la pression supportée par un plan perpendiculaire à cet axe, puis enfin les composantes, parallèles aux axes des  $y$  et  $z$ , de la pression supportée par un plan perpendiculaire à l'axe des  $z$ , on déduirait immédiatement des équations (8) celles que j'ai données dans le *Bulletin des Sciences* de M. de Férussac pour l'année 1830, et qui s'accordent si bien avec les formules et les expériences de Fresnel, quand on suppose que la densité de l'éther reste la même dans tous les milieux. Mais les principes développés dans le § IX ne nous permettent plus d'adopter cette dernière hypothèse; et d'ailleurs il n'est pas suffisamment démontré

que la variable  $\xi$  et les pressions ci-dessus mentionnées doivent, dans le voisinage de la surface de séparation de deux milieux, conserver la même valeur, tandis qu'on passe de l'un à l'autre. Des recherches approfondies sur ce sujet délicat m'ont conduit à un nouveau principe de Mécanique, propre à fournir, dans plusieurs questions de Physique mathématique, les conditions relatives aux limites des corps et aux surfaces qui terminent des systèmes de molécules sollicitées par des forces d'attraction ou de répulsion mutuelle. Ce principe, que je développerai dans un autre Mémoire, étant appliqué à la théorie de la lumière, on en conclut que, dans le voisinage de la surface de séparation de deux milieux, les déplacements  $\xi, \eta, \zeta$  des molécules d'éther relatifs, soit au premier milieu, soit au second, devront fournir les mêmes valeurs de  $z$ , si l'on prend pour  $z$  l'une quelconque des trois fonctions

$$(21) \quad \frac{\partial \eta}{\partial z} - \frac{\partial \zeta}{\partial y}, \quad \frac{\partial \zeta}{\partial x} - \frac{\partial \xi}{\partial z}, \quad \frac{\partial \xi}{\partial y} - \frac{\partial \eta}{\partial x},$$

ou bien encore si l'on suppose

$$(22) \quad \left\{ \begin{aligned} u &= a \left( \frac{\partial \xi}{\partial x} + b \frac{\partial \eta}{\partial y} + c \frac{\partial \zeta}{\partial z} + bc \left( \frac{\partial \eta}{\partial z} + \frac{\partial \zeta}{\partial y} \right) \right. \\ &\quad \left. + ca \left( \frac{\partial \zeta}{\partial x} + \frac{\partial \xi}{\partial z} \right) + ab \left( \frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial \eta}{\partial x} \right), \right\}$$

$a, b, c$  désignant les cosinus des angles formés par la normale à la surface de séparation des deux milieux avec les demi-axes des coordonnées positives. Il est bon d'observer que la valeur de  $u$ , déterminée par l'équation (22), représente la dilatation linéaire de l'éther mesurée suivant cette même normale.

Lorsque, les deux milieux étant séparés l'un de l'autre par le plan des  $y, z$ , on suppose l'axe des  $z$  parallèle aux plans des ondes lumineuses, et par conséquent perpendiculaire au plan d'incidence, on a dans la formule (22)

$$a = \pm 1, \quad b = 0, \quad c = 0,$$

et, de plus,  $\xi, \eta, \zeta$  deviennent indépendants de  $z$ . Donc alors, en chan-



geant, ce qui est permis, le signe de la première des différences (21), on trouvera que les fonctions (21) et (22) peuvent être réduites à

$$(23) \quad \frac{\partial \xi}{\partial y}, \quad \frac{\partial \zeta}{\partial x}, \quad \frac{\partial \xi}{\partial y} - \frac{\partial \eta}{\partial x}, \quad \frac{\partial \xi}{\partial x}$$

Donc, si l'on nomme  $\xi'$ ,  $\eta'$ ,  $\zeta'$  ce que deviennent les déplacements  $\xi$ ,  $\eta$ ,  $\zeta$  tandis que l'on passe du premier milieu au second, on aura, pour les points situés sur la surface de séparation, c'est-à-dire pour  $x = 0$ ,

$$(24) \quad \frac{\partial \xi}{\partial x} = \frac{\partial \xi'}{\partial x}, \quad \frac{\partial \xi}{\partial y} - \frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{\partial \xi'}{\partial y} - \frac{\partial \eta'}{\partial x}$$

et

$$(25) \quad \frac{\partial \zeta}{\partial x} = \frac{\partial \zeta'}{\partial x}, \quad \frac{\partial \zeta}{\partial y} = \frac{\partial \zeta'}{\partial y}$$

Lorsque dans les équations (24) et (25) on substitue à  $\xi$ ,  $\eta$ ,  $\zeta$  les seconds membres des formules (1) du § V, et à  $\xi'$ ,  $\eta'$ ,  $\zeta'$  les seconds membres des formules (2) du même paragraphe, on obtient les lois de la réflexion et de la réfraction qui ont lieu à la surface des corps transparents, avec les diverses formules que contiennent les deux lettres adressées à M. Libri les 19 et 27 mars, et imprimées dans le n° 14 des *Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des Sciences*, pour l'année 1836. On déduit aussi des conditions (24) et (25) les lois de la réflexion opérée par la surface extérieure d'un corps opaque ou par la surface intérieure d'un corps transparent, dans le cas où l'angle d'incidence devient assez considérable pour qu'il n'y ait plus de lumière transmise, c'est-à-dire dans le cas où la réflexion devient totale (*voir* à ce sujet les deux lettres que j'ai adressées à M. Ampère les 1<sup>er</sup> et 16 avril 1836). Comme je l'ai montré dans ces différentes lettres, les formules auxquelles conduisent les conditions (24) et (25), non seulement déterminent l'intensité de la lumière polarisée rectilignement par réflexion ou par réfraction et les plans de polarisation des rayons réfléchis ou réfractés, mais encore elles font connaître les diverses circonstances de la polarisation circulaire ou elliptique pro-

duite par la réflexion totale ou par la réflexion opérée à la surface d'un corps opaque et, en particulier, d'un métal. D'ailleurs, les divers résultats de notre analyse se trouvent d'accord avec les lois déjà connues, particulièrement avec les formules proposées par MM. Fresnel et Brewster, ainsi qu'avec les observations de tous les physiciens. Au reste, je reviendrai sur ces résultats dans de nouveaux Mémoires, où je déduirai directement des équations (15) du § I les lois des divers phénomènes lumineux, y compris les phénomènes de l'ombre et de la diffraction.

§ XI. — *Sur la relation qui existe entre la vitesse de propagation de la lumière et l'épaisseur des ondes lumineuses.*

Pour une couleur donnée, la durée T des vibrations lumineuses, ou, ce qui revient au même, la quantité

$$(1) \quad s = \frac{2\pi}{T}$$

reste la même dans les différents milieux. Mais l'épaisseur  $l$  des ondes lumineuses, aussi appelée *longueur d'ondulation*, et, par suite, le rapport

$$(2) \quad k = \frac{2\pi}{l},$$

devront, si l'on adopte la théorie exposée dans ce Mémoire, se trouver liés à la vitesse de propagation

$$(3) \quad \Omega = \frac{s}{k}$$

par la formule (1) ou (5) du § VI, c'est-à-dire par l'équation

$$(4) \quad \frac{s^2}{k^2} = \Omega^2 = a_1 + a_2 k^2 + a_3 k^4 + \dots,$$

en vertu de laquelle  $\Omega^2$  se développera en une série convergente ordonnée suivant les puissances ascendantes de  $k$ . D'ailleurs, en



posant, comme dans le § VI,

$$(5) \quad b_1 = \frac{1}{a_1}, \quad b_2 = -\frac{a_2}{a_1^2}, \quad b_3 = \frac{2a_2^2 - a_1 a_3}{a_1^3}, \quad \dots,$$

on tirera de l'équation (4)

$$(6) \quad k^2 = b_1 s^2 + b_2 s^4 + b_3 s^6 + \dots$$

Les coefficients  $a_1, a_2, a_3, \dots, b_1, b_2, b_3, \dots$  que renferment les seconds membres des équations (4) et (5), dépendent de la nature du milieu dans lequel se propage la lumière; les quantités  $k, \Omega$  dépendent en outre de la valeur attribuée à  $s$ , c'est-à-dire de la couleur. Dans le vide et dans les milieux qui ne dispersent pas les couleurs, par exemple dans l'air atmosphérique, les coefficients

$$a_2, a_3, \dots, b_2, b_3, \dots$$

s'évanouissent; alors la formule (4), réduite à

$$(7) \quad \frac{s^2}{k^2} = \Omega^2 = a_1,$$

exprime que la vitesse de propagation  $\Omega$  est indépendante de  $s$ , et  $s^2$  proportionnel à  $k^2$ .

Concevons maintenant que, les valeurs de  $k$  et de  $\Omega$  étant relatives à l'air atmosphérique, on désigne par

$$(8) \quad k' = \theta k$$

ce que devient la quantité  $k$  lorsqu'on substitue à l'air un autre milieu. La valeur de  $\theta$ , déterminée par l'équation (8), ou, ce qui revient au même, par l'équation (16) du § V, ne sera autre chose que l'indice de réfraction d'un rayon lumineux qui passerait de l'air dans le nouveau milieu que l'on considère, et la formule (6) deviendra

$$(9) \quad k'^2 = \theta^2 k^2 = b_1 s^2 + b_2 s^4 + b_3 s^6 + \dots$$

Si dans cette dernière formule on remplace  $s$  par sa valeur tirée de l'équation (3), on trouvera

$$(10) \quad \theta^2 = b_1 \Omega^2 + b_2 \Omega^4 s^2 + b_3 \Omega^6 s^4 + \dots$$

Donc en posant, pour abréger,

$$(11) \quad b_1 \Omega^2 = a, \quad b_2 \Omega^4 = b, \quad b_3 \Omega^6 = c, \quad \dots,$$

on aura simplement

$$(12) \quad \theta^2 = a + b s^2 + c s^4 + \dots$$

On ne doit pas oublier que, dans les formules (10) et (11),  $\Omega$  représente la vitesse de propagation de la lumière dans l'air, vitesse qui reste la même pour toutes les couleurs.

Soient maintenant

$$\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4, \theta_5, \theta_6, \theta_7$$

les valeurs de  $\theta$  relatives aux rayons

$$B, C, D, E, F, G, H$$

de Fraunhofer, et

$$s_1, s_2, s_3, s_4, s_5, s_6, s_7$$

les valeurs correspondantes de  $s$ . Si l'on désigne par  $i$  l'un quelconque des nombres entiers

$$1, 2, 3, 4, 5, 6, 7,$$

et si l'on pose en outre

$$(13) \quad \theta_i = \theta_i^1,$$

la formule (12) donnera

$$(14) \quad \theta_i = a + b s_i^2 + c s_i^4 + \dots$$

Or il résulte des calculs développés dans les §§ VI, VII, VIII qu'on peut, sans erreur sensible, réduire le second membre de l'équation (4) ou (6), et par conséquent le second membre de la formule (14), à ses quatre premiers termes. Donc cette formule pourra s'écrire comme il suit :

$$(15) \quad \theta_i = a + b s_i^2 + c s_i^4 + d s_i^6.$$

D'autre part, on pourra encore négliger  $\Delta^4 \theta_i$  dans le premier membre



de la formule (11) du § VII, et réduire cette formule à

$$(16) \begin{cases} \theta_i = \theta + (U' - \theta)\beta_i + [U'' - \theta - (U' - \theta)S''\beta_i]\gamma_i \\ + \{U''' - \theta - (U' - \theta)S''\beta_i - [U'' - \theta - (U' - \theta)S''\beta_i]S''\gamma_i\}\delta_i, \end{cases}$$

les valeurs de

$$\theta, U', U'', U'''$$

étant celles que fournissent les équations (10) et (6) du § VII, savoir

$$(17) \begin{cases} \theta = \frac{1}{7} S\theta = \frac{\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 + \theta_4 + \theta_5 + \theta_6}{7}, \\ U' = S'\theta = \theta_1 + \theta_2 + \theta_3 + \theta_4 - \theta_5 - \theta_6 - \theta_7, \\ U'' = S''\theta = -\theta_1 - \theta_2 + \theta_3 + \theta_4 + \theta_5 + \theta_6 - \theta_7, \\ U''' = S'''\theta = -\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 - \theta_4 - \theta_5 + \theta_6 + \theta_7, \end{cases}$$

et l'on tirera de ces dernières équations combinées avec la formule (14)

$$(18) \begin{cases} \theta = a + \frac{b}{7} S s_1^2 + \frac{c}{7} S s_2^2 + \frac{d}{7} S s_3^2, \\ U' = a + b S' s_1^2 + c S' s_2^2 + d S' s_3^2, \\ U'' = a + b S'' s_1^2 + c S'' s_2^2 + d S'' s_3^2, \\ U''' = a + b S''' s_1^2 + c S''' s_2^2 + d S''' s_3^2, \end{cases}$$

les notations  $Ss_1^2, S's_1^2, S''s_1^2, S'''s_1^2, Ss_2^2, \dots$  exprimant ce que deviennent les sommes désignées par  $S\theta, S'\theta, S''\theta, S'''\theta$  dans les équations (17), quand on y remplace  $\theta$  par  $s_1^2$  ou par  $s_2^2, \dots$ . Enfin il est clair que la substitution des valeurs de

$$\theta, \theta, U', U'',$$

fournies par les équations (15) et (18), transformera les deux membres de l'équation (16) en deux fonctions linéaires des quantités

$$(19) \quad a, b, c, d,$$

qui varient avec la nature du milieu réfringent. Or, ces deux fonctions devant être égales entre elles, quel que soit le milieu réfringent, on peut en conclure que dans l'une et l'autre les coefficients des

quantités (19) devront être les mêmes. Par suite, l'équation (16) devra continuer de subsister si, dans cette équation et dans les formules (17), on remplace  $\theta_i$  par l'une quelconque des quatre quantités

$$(20) \quad 1, s_1^2, s_2^2, s_3^2,$$

ce qui revient à supposer, dans les formules (15) et (18), l'une des quantités  $a, b, c, d$  réduite à l'unité et les trois autres à zéro.

Remplacer  $\theta_i$  par l'unité, c'est substituer l'air au milieu qui devait réfracter la lumière. Alors on trouve, non seulement  $\theta_i = 1$ , mais aussi

$$\theta = U' = U'' = U''' = 1,$$

et l'équation (16) devient identique, comme on l'a déjà remarqué (p. 363).

Remplaçons maintenant, dans l'équation (16),  $\theta_i$  par  $s_n^2$ ,  $n$  désignant l'un des trois nombres entiers 2, 4, 6, et faisons, pour abrégé,

$$(21) \begin{cases} \zeta = \frac{1}{7} S s_n^2 = \frac{s_1^2 + s_2^2 + s_3^2 + s_4^2 + s_5^2 + s_6^2 + s_7^2}{7}, \\ \zeta' = S' s_n^2 = s_1^2 + s_2^2 + s_3^2 + s_4^2 - s_5^2 - s_6^2 - s_7^2, \\ \zeta'' = S'' s_n^2 = -s_1^2 - s_2^2 + s_3^2 + s_4^2 + s_5^2 + s_6^2 - s_7^2, \\ \zeta''' = S''' s_n^2 = -s_1^2 + s_2^2 + s_3^2 - s_4^2 - s_5^2 + s_6^2 + s_7^2; \end{cases}$$

l'équation (16), jointe aux formules (17), donnera

$$(22) \begin{cases} s_n^2 = \zeta + (\zeta' - \zeta)\beta_i + [\zeta'' - \zeta - (\zeta' - \zeta)S''\beta_i]\gamma_i \\ + \{\zeta''' - \zeta - (\zeta' - \zeta)S''\beta_i - [\zeta'' - \zeta - (\zeta' - \zeta)S''\beta_i]S''\gamma_i\}\delta_i. \end{cases}$$

L'équation (22) fournira pour  $s_n^2$  des valeurs approchées de divers ordres, si l'on réduit le polynôme que renferme le second membre au seul terme  $\zeta$  ou à la somme de ses deux, trois, quatre premiers termes, et, si l'on nomme

$$\Delta s_n^2, \Delta^2 s_n^2, \Delta^3 s_n^2, \Delta^4 s_n^2$$

les différences finies des divers ordres qui doivent compléter les



valeurs approchées dont il s'agit, on aura rigoureusement

$$(23) \begin{cases} s_i^n = \varsigma + \Delta s_i^n \\ = \varsigma + (\varsigma' - \varsigma) \beta_i + \Delta^2 s_i^n \\ = \varsigma + (\varsigma' - \varsigma) \beta_i + [\varsigma'' - \varsigma - (\varsigma' - \varsigma) S' \beta_i] \gamma_i + \Delta^3 s_i^n \\ = \varsigma + (\varsigma' - \varsigma) \beta_i + [\varsigma'' - \varsigma - (\varsigma' - \varsigma) S' \beta_i] \gamma_i \\ + \frac{1}{2} \varsigma''' - \varsigma - (\varsigma' - \varsigma) S'' \beta_i - [\varsigma''' - \varsigma - (\varsigma' - \varsigma) S'' \beta_i] S' \gamma_i + \Delta^4 s_i^n. \end{cases}$$

On trouvera, par suite,

$$(24) \begin{cases} \Delta s_i^n = s_i^n - \varsigma, \\ \Delta^2 s_i^n = s_i^n - \varsigma - (\varsigma' - \varsigma) \beta_i, \\ \Delta^3 s_i^n = s_i^n - \varsigma - (\varsigma' - \varsigma) \beta_i - [\varsigma'' - \varsigma - (\varsigma' - \varsigma) S' \beta_i] \gamma_i; \end{cases}$$

puis on en conclura

$$S' \Delta s_i^n = S'(s_i^n - \varsigma) = S' s_i^n - \varsigma, \dots$$

ou, ce qui revient au même,

$$(25) \begin{cases} S' \Delta s_i^n = \varsigma' - \varsigma, \\ S'' \Delta^2 s_i^n = \varsigma'' - \varsigma - (\varsigma' - \varsigma) S' \beta_i, \\ S''' \Delta^3 s_i^n = \varsigma''' - \varsigma - (\varsigma' - \varsigma) S'' \beta_i - [\varsigma'' - \varsigma - (\varsigma' - \varsigma) S' \beta_i] \gamma_i, \end{cases}$$

de sorte que la formule (23) donnera

$$(26) \begin{cases} s_i^n = \frac{1}{2} S s_i^n + \Delta s_i^n \\ = \frac{1}{2} S s_i^n + \beta_i S' \Delta s_i^n + \Delta^2 s_i^n \\ = \frac{1}{2} S s_i^n + \beta_i S' \Delta s_i^n + \gamma_i S'' \Delta^2 s_i^n + \Delta^3 s_i^n \\ = \frac{1}{2} S s_i^n + \beta_i S' \Delta s_i^n + \gamma_i S'' \Delta^2 s_i^n + \delta_i S''' \Delta^3 s_i^n + \Delta^4 s_i^n \end{cases}$$

et pourra être remplacée par le système des équations

$$(27) \begin{cases} s_i^n = \frac{1}{2} S s_i^n + \Delta s_i^n, & \Delta s_i^n = \beta_i S' \Delta s_i^n + \Delta^2 s_i^n, \\ \Delta^2 s_i^n = \gamma_i S'' \Delta^2 s_i^n + \Delta^3 s_i^n, & \Delta^3 s_i^n = \delta_i S''' \Delta^3 s_i^n + \Delta^4 s_i^n. \end{cases}$$

De plus, la formule (22), réduite à

$$(28) \quad s_i^n = \frac{1}{2} S s_i^n + \beta_i S' \Delta s_i^n + \gamma_i S'' \Delta^2 s_i^n + \delta_i S''' \Delta^3 s_i^n,$$

fournira précisément pour  $s_i^n$  la valeur que l'on tirerait de l'équa-

tion (26) ou des équations (27), en y posant

$$(29) \quad \Delta^4 s_i^n = 0.$$

On tire des équations (2) et (3)

$$(30) \quad s = \Omega k = 2\pi \Omega l^{-1}.$$

Si, dans cette dernière formule, on suppose  $\Omega$ ,  $k$  et  $l$  relatifs à l'air atmosphérique, la valeur de  $\Omega$  sera la même pour toutes les couleurs; et, en désignant par

$$k_i, \quad l_i$$

les valeurs de  $k$ ,  $l$  relatifs à  $s = s_i$ , on trouvera

$$(31) \quad s_i = \Omega k_i = 2\pi \Omega l_i^{-1},$$

par conséquent

$$(32) \quad s_i^n = \Omega^n k_i^n = (2\pi \Omega)^n l_i^{-n}.$$

Soient maintenant  $\Delta k_i^n$ ,  $\Delta^2 k_i^n$ , ...,  $\Delta l_i^n$ ,  $\Delta^2 l_i^n$ , ... ce que deviennent les différences  $\Delta s_i^n$ ,  $\Delta^2 s_i^n$ , ... déterminées par le système des équations (27), quand on remplace dans ces équations  $s_i^n$  par  $k_i^n$  ou par  $l_i^n$ . On aura

$$(33) \quad \begin{cases} k_i^n = \frac{1}{2} S k_i^n + \Delta k_i^n, & \Delta k_i^n = \beta_i S' \Delta k_i^n + \Delta^2 k_i^n, \\ \Delta^2 k_i^n = \gamma_i S'' \Delta^2 k_i^n + \Delta^3 k_i^n, & \Delta^3 k_i^n = \delta_i S''' \Delta^3 k_i^n + \Delta^4 k_i^n, \end{cases}$$

$$(34) \quad \begin{cases} l_i^n = \frac{1}{2} S l_i^n + \Delta l_i^n, & \Delta l_i^n = \beta_i S' \Delta l_i^n + \Delta^2 l_i^n, \\ \Delta^2 l_i^n = S'' \Delta^2 l_i^n + \Delta^3 l_i^n, & \Delta^3 l_i^n = S''' \Delta^3 l_i^n + \Delta^4 l_i^n; \end{cases}$$

puis on tirera des formules (33), (34), combinées avec les équations (27) et (32),

$$(35) \quad \begin{cases} \Delta k_i^n = \left(\frac{1}{\Omega}\right)^n \Delta s_i^n, & \Delta^2 k_i^n = \left(\frac{1}{\Omega}\right)^n \Delta^2 s_i^n, \\ \Delta^3 k_i^n = \left(\frac{1}{\Omega}\right)^n \Delta^3 s_i^n, & \Delta^4 k_i^n = \left(\frac{1}{\Omega}\right)^n \Delta^4 s_i^n; \end{cases}$$

$$(36) \quad \begin{cases} \Delta l_i^n = \left(\frac{1}{2\pi\Omega}\right)^n \Delta s_i^n, & \Delta^2 l_i^n = \left(\frac{1}{2\pi\Omega}\right)^n \Delta^2 s_i^n, \\ \Delta^3 l_i^n = \left(\frac{1}{2\pi\Omega}\right)^n \Delta^3 s_i^n, & \Delta^4 l_i^n = \left(\frac{1}{2\pi\Omega}\right)^n \Delta^4 s_i^n. \end{cases}$$

Cela posé, en multipliant les deux membres de l'équation (28) par



$\left(\frac{1}{\Omega}\right)^n$  ou par  $\left(\frac{1}{2\pi\Omega}\right)^n$ , on en conclura

$$(37) \quad k_i^n = \frac{1}{2} S k_i^n + \beta_i S' \Delta k_i^n + \gamma_i S'' \Delta^2 k_i^n + \delta_i S''' \Delta^3 k_i^n,$$

$$(38) \quad l_i^n = \frac{1}{2} S l_i^n + \beta_i S' \Delta l_i^n + \gamma_i S'' \Delta^2 l_i^n + \delta_i S''' \Delta^3 l_i^n.$$

Les formules (37) et (38), entièrement semblables à l'équation (28), fournissent précisément les valeurs de  $k_i^n$  et de  $l_i^n$  que l'on tirerait des équations (33) et (34) en y posant

$$(39) \quad \Delta^4 k_i^n = 0, \quad \Delta^4 l_i^n = 0.$$

Les valeurs de  $\theta_i$ , ou des indices de réfraction, déterminées par les expériences de Fraunhofer, sont composées chacune de sept chiffres, et le Tableau XXIII du § VI montre que l'on peut compter sur l'exactitude des cinq ou six premiers chiffres. Les valeurs de  $l_i$  n'ont pu être déterminées avec la même précision, et, pour chacune d'elles, on ne peut regarder comme exacts que les trois ou quatre premiers chiffres. Il en résulte que, dans les valeurs de  $k_i$ ,  $s_i$ , et par suite dans les valeurs de  $l_i^n$ ,  $k_i^n$ ,  $s_i^n$ , on ne saurait compter sur l'exactitude du cinquième chiffre et des suivants. On ne doit donc pas être surpris, lorsqu'on veut appliquer au calcul des différences finies des divers ordres de  $s_i^n$ ,  $k_i^n$ ,  $l_i^n$  les formules (27), (33) ou (34), de trouver les différences finies du troisième ordre, sensiblement nulles, aussi bien que les différences finies du quatrième ordre, c'est-à-dire comparables aux variations que produisent les erreurs d'observation. Or c'est précisément ce qui arrive. Si, pour fixer les idées, on applique les formules (27) à la détermination des différences finies

$$\Delta s_i^n, \quad \Delta^2 s_i^n, \quad \Delta^3 s_i^n,$$

et si l'on prend pour unité de temps, non plus la seconde sexagésimale, mais le quotient que fournirait la division de cette seconde en mille millions de millions de parties égales, alors, en faisant usage des logarithmes de  $\pm \beta_i$ , et de  $\mp \gamma_i$ , renfermés dans les deux premiers Tableaux du § VI, et posant successivement  $n = 2$ , puis  $n = 4$ , on obtiendra les valeurs de  $s_i^n$ ,  $\Delta s_i^n$ ,  $\Delta^2 s_i^n$ ,  $\Delta^3 s_i^n$  comprises dans les Tableaux suivants.

TABLEAU I.  
Valeurs de  $s_i^n$ ,  $\Delta s_i^n$ ,  $\Delta^2 s_i^n$ ,  $\Delta^3 s_i^n$ .

$i$	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	SOMMES.
$s_i$	2,833	2,968	3,309	3,704	4,033	4,541	4,960	
$L(s_i)$	4521724	4724704	5197228	5687093	6045718	6571528	6925147	
$L(\Delta s_i)$	9043548	9449408	9394456	1374186	2091436	3143056	3910294	$S s_i^n$
$\frac{1}{2} S s_i^n$	8,0233	8,8093	10,9508	13,7220	16,1860	20,6208	24,6653	$102,9177$
$\Delta s_i^n$	14,7025	14,7025	14,7025	14,7025	14,7025	14,7025	14,7025	$102,9175$
$\Delta^2 s_i^n$	-6,0792	-5,8932	-3,7517	-0,9805	1,4837	5,9183	9,9028	$-34,6094$
$L(\pm \beta_i)$	2867340	2272021	0371132	4979974	5812101	2345423	4627934	
$L(-S \Delta s_i^n)$	5391941	5391941	5391941	5391941	5391941	5391941	5391941	
Somme...	8199281	7663962	5793073	0371915	1204042	7737364	0019875	
$\beta_i S' \Delta s_i^n$	-6,1658	-5,8398	-3,7697	-1,0894	1,3195	5,0393	10,0450	$0,0000$
$\Delta^2 s_i^n$	-0,0734	-0,0534	0,0180	0,1089	0,1644	-0,0210	-0,1431	$0,0002$
$L(\mp \gamma_i)$	2296904	9299187	8770350	2334450	3010033	6552454	3898998	
$L(S \Delta^2 s_i^n)$	7323938	7323938	7323938	7323938	7323938	7323938	7323938	
Somme...	9620842	5623125	6094228	9858388	0333971	3876392	1222936	
$\gamma_i S'' \Delta^2 s_i^n$	-0,0916	-0,0460	0,0407	0,0968	0,1080	0,0244	-0,1325	$-0,0002$
$\Delta^3 s_i^n$	0,0182	-0,0074	-0,0227	0,0121	0,0562	-0,0454	-0,0106	$0,0004$

TABLEAU II.  
Valeurs de  $s_i^n$ ,  $\Delta s_i^n$ ,  $\Delta^2 s_i^n$ ,  $\Delta^3 s_i^n$ .

$i$	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	SOMMES.
$L(s_i^n)$	8087096	8898816	0788912	2748372	4182872	6286112	7820588	
$s_i^n$	64,374	77,604	119,920	188,294	261,992	423,218	603,423	$1742,825$
$\frac{1}{2} S s_i^n$	248,975	248,975	248,975	248,975	248,975	248,975	248,975	$1742,825$
$\Delta s_i^n$	-184,601	-171,371	-129,055	-60,681	-13,017	176,243	356,448	$0,0000$
$L(\pm \beta_i)$	2867340	2272021	0371132	4979974	5812101	2345423	4627934	
$L(-S \Delta s_i^n)$	0379903	0379903	0379903	0379903	0379903	0379903	0379903	
Somme...	3187243	2651924	0751635	5399877	6192004	2723326	5007837	
$\beta_i S' \Delta s_i^n$	-208,317	-184,159	-118,879	-34,355	41,610	187,298	316,799	$-0,0003$
$\Delta^2 s_i^n$	23,716	12,788	-10,176	-26,326	-28,593	-11,035	39,469	$0,0003$
$L(\mp \gamma_i)$	2296904	9299187	8770350	2334450	3010033	6552454	3898998	
$L(-S \Delta^2 s_i^n)$	1827085	1827085	1827085	1827085	1827085	1827085	1827085	
Somme...	4123989	1126272	0397435	4361555	4837118	8379559	5726083	
$\gamma_i S'' \Delta^2 s_i^n$	23,846	12,961	-11,475	-27,299	-30,459	-6,866	37,377	$0,0005$
$\Delta^3 s_i^n$	-2,130	-0,173	1,299	0,973	1,866	-4,169	2,272	$-0,0002$



Pour s'assurer que les valeurs de  $\Delta^3 s_i^n$ , renfermées dans les dernières lignes horizontales de ces deux Tableaux, sont, en effet, comparables aux variations que produisent dans les valeurs de  $s_i^n$  les erreurs d'observation, il suffit de calculer les diverses valeurs de  $\Delta^3 l_i$ , ou de  $\frac{\Delta^3 l_i}{l_i}$ , en supposant que l'on désigne par

$$l_i - \Delta^3 l_i$$

ce que devient  $l_i$  en vertu de la formule (32), quand on remplace dans cette formule  $s_i^n$  par

$$s_i^n - \Delta^3 s_i^n.$$

Or, dans cette supposition, on tire de la formule (32)

$$(40) \quad s_i^n - \Delta^3 s_i^n = (2\pi\Omega)^n (l_i - \Delta^3 l_i)^{-n}$$

et, par suite,

$$1 - \frac{\Delta^3 s_i^n}{s_i^n} = \left(1 - \frac{\Delta^3 l_i}{l_i}\right)^{-n}$$

ou

$$(41) \quad 1 - \frac{\Delta^3 l_i}{l_i} = \left(1 - \frac{\Delta^3 s_i^n}{s_i^n}\right)^{-\frac{1}{n}}.$$

D'ailleurs,  $\Delta^3 s_i^n$  étant très petit par rapport à  $s_i^n$ , le second membre de l'équation (41) se réduira sensiblement à

$$1 + \frac{1}{n} \frac{\Delta^3 s_i^n}{s_i^n},$$

et cette équation elle-même à

$$(42) \quad \frac{\Delta^3 l_i}{l_i} = -\frac{1}{n} \frac{\Delta^3 s_i^n}{s_i^n}.$$

Enfin les valeurs de

$$-\frac{1}{n} \frac{\Delta^3 s_i^n}{s_i^n},$$

tirées des Tableaux I ou II, et par suite les valeurs correspondantes de  $\frac{\Delta^3 l_i}{l_i}$ , seront, en vertu de la formule (42), celles que présente le Tableau suivant.

TABLEAU III.

Valeur de  $\frac{\Delta^3 l_i}{l_i}$  déduites de la formule (42).

$i.$	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	
Pour $n = 2$	$\left\{ \begin{array}{l} \Delta^3 s_i^2 \dots\dots \\ s_i^2 \dots\dots \end{array} \right.$	0,0182 8,0233	-0,0074 8,8093	-0,0227 10,9508	0,0121 13,7220	0,0562 16,1862	-0,0454 20,6208	-0,0106 24,6053
$\frac{\Delta^3 l_i}{l_i} = -\frac{1}{2} \frac{\Delta^3 s_i^2}{s_i^2}$	-0,0011	0,0004	0,0010	-0,0004	-0,0017	0,0011	0,0002	
Pour $n = 4$	$\left\{ \begin{array}{l} \Delta^3 s_i^4 \dots\dots \\ s_i^4 \dots\dots \end{array} \right.$	-2,130 64,374	-0,173 77,604	1,299 119,920	0,973 188,294	1,866 261,992	-4,169 325,218	2,272 605,423
$\frac{\Delta^3 l_i}{l_i} = -\frac{1}{4} \frac{\Delta^3 s_i^4}{s_i^4}$	0,0083	0,0006	-0,0027	-0,0013	-0,0018	0,0025	-0,0009	

D'autre part, en ayant recours à diverses expériences successives, dans son Mémoire sur la diffraction, pour déterminer l'épaisseur des ondes lumineuses qui donnent naissance à un certain rayon, et supposant cette épaisseur exprimée en millimètres, Fresnel a obtenu des nombres qui varient entre les limites

$$0,000635 \text{ et } 0,000640,$$

dont la différence, divisée par le plus petit, donne pour quotient environ

$$0,0079.$$

Donc, puisque ce quotient surpasse, et même assez notablement, tous les nombres renfermés dans la quatrième et la dernière ligne horizontale du Tableau III, si l'on en excepte le seul nombre 0,0083, qui diffère peu du quotient dont il s'agit, nous devons conclure que les valeurs de  $\Delta^3 s_i^2$  et  $\Delta^3 s_i^4$ , renfermées dans les Tableaux I et II, sont comparables aux variations que produisent dans les valeurs de  $s_i^n$  les erreurs d'observation. La même conclusion se déduirait aussi des ex-



périences de Fraunhofer, qui fournissent pour les épaisseurs des ondes lumineuses des variations du même ordre que les expériences de Fresnel.

On peut donc négliger

$$\Delta^2 s_i^n, \Delta^2 k_i^n, \Delta^2 t_i^n$$

dans les formules (27), (33), (34), et par suite

$$S^n \Delta^2 s_i^n, S^n \Delta^2 k_i^n, S^n \Delta^2 t_i^n,$$

dans les formules (28), (37), (38), ce qui permet de réduire les trois dernières formules à

$$(43) \quad s_i^n = \frac{1}{2} S s_i^n + \beta_i S' \Delta s_i^n + \gamma_i S'' \Delta^2 s_i^n,$$

$$(44) \quad k_i^n = \frac{1}{2} S k_i^n + \beta_i S' \Delta k_i^n + \gamma_i S'' \Delta^2 k_i^n,$$

$$(45) \quad t_i^n = \frac{1}{2} S t_i^n + \beta_i S' \Delta t_i^n + \gamma_i S'' \Delta^2 t_i^n.$$

Si, dans la formule (43), on pose successivement  $n = 2$  et  $n = 4$ , on en tirera, eu égard aux Tableaux I et II,

$$(46) \quad \begin{cases} s_i^2 = 14,7025 - 34,6094 \beta_i + 0,540 \gamma_i, \\ s_i^4 = 248,975 - 1091,416 \beta_i - 152,303 \gamma_i \end{cases}$$

ou, ce qui revient au même,

$$(47) \quad \begin{cases} \beta_i - 0,01560 \gamma_i = 0,42481 - 0,028894 s_i^2, \\ \beta_i + 0,13955 \gamma_i = 0,22812 - 0,00091624 s_i^2, \end{cases}$$

puis on conclura de ces dernières équations

$$\begin{aligned} \gamma_i &= -\frac{0,19669}{0,15515} + \frac{0,028894}{0,15515} s_i^2 - \frac{0,00091624}{0,15515} s_i^4, \\ \beta_i &= 0,01560 \gamma_i + 0,42481 - 0,028894 s_i^2, \end{aligned}$$

ou plus simplement

$$(48) \quad \begin{cases} \beta_i = 0,40503 - 0,025988 s_i^2 - 0,000021 s_i^4, \\ \gamma_i = -1,2677 + 0,18623 s_i^2 - 0,0059055 s_i^4. \end{cases}$$

Si d'ailleurs on pose, comme à la page 372,

$$(49) \quad \begin{cases} u = U' - \theta = S' \Delta \theta_i, \\ v = U'' - \theta - (U' - \theta) S'' \beta_i = S'' \Delta^2 \theta_i, \\ w = U''' - \theta - (U' - \theta) S''' \beta_i - [U'' - \theta - (U' - \theta) S'' \beta_i] S'' \gamma_i = S'' \Delta^2 \theta_i, \end{cases}$$

c'est-à-dire, si l'on prend pour

$$\theta, u, v, w$$

les nombres renfermés dans le Tableau V du § VIII, on réduira la formule (16) à

$$(50) \quad \theta_i = \theta + u \beta_i + v \gamma_i + w \delta_i;$$

puis, en négligeant dans le second membre le terme  $w \delta_i$ , qui est du même ordre que  $\Delta^2 s_i$  ou  $\Delta^2 \theta_i$ , on trouvera

$$(51) \quad \theta_i = \theta + u \beta_i + v \gamma_i.$$

Cela posé, on tirera de la formule (51) jointe aux équations (48)

$$(52) \quad \begin{cases} \theta_i = \theta + 0,40503 u - 1,2677 v - (0,025988 u - 0,18623 v) s_i^2 \\ \quad \quad \quad - (0,000021 u + 0,0059055 v) s_i^4 \end{cases}$$

et, par suite,

$$(53) \quad \theta_i = a + b s_i^2 + c s_i^4,$$

les valeurs de  $a$ ,  $b$ ,  $c$  étant

$$(54) \quad \begin{cases} a = \theta + 0,40503 u - 1,2677 v, \\ b = -0,025988 u + 0,18623 v, \\ c = -0,000021 u - 0,0059055 v; \end{cases}$$

puis, en écrivant simplement

$$\theta^2 \text{ au lieu de } \theta_i = \theta_i^2 \quad \text{et} \quad s^2 \text{ au lieu de } s_i^2,$$

on aura définitivement

$$(55) \quad \theta^2 = a + b s^2 + c s^4.$$

En substituant dans les formules (54) à la place de  $\theta$ ,  $u$ ,  $v$  les nombres que renferme le Tableau V du § VIII, on obtiendra les valeurs de  $a$ ,  $b$ ,  $c$  comprises dans celui que nous allons tracer.







TABLEAU V.

Valeurs de  $\theta$  tirées de la formule (56).

	EAU.		SOLUTION de potasse.	CROWNGLASS.			FLINTGLASS.				
	1 <sup>re</sup> série.	2 <sup>e</sup> série.		1 <sup>re</sup> espèce.	2 <sup>e</sup> espèce.	3 <sup>e</sup> espèce.	1 <sup>re</sup> espèce.	2 <sup>e</sup> espèce.	3 <sup>e</sup> espèce, 1 <sup>re</sup> série.	3 <sup>e</sup> espèce, 2 <sup>e</sup> série.	4 <sup>e</sup> espèce.
L(b)....	4148731	4679175	5005658	5830627	5888653	6456777	7919291	8344443	8434446	8386098	8660923
L( $\frac{1}{2}$ S $\frac{1}{2}$ )...	1673921	1673921	1673921	1673921	1673921	1673921	1673921	1673921	1673921	1673921	1673921
Somme.	5822652	5753096	6679579	7504548	7562574	8130698	9593212	1018064	1018367	1006019	10334844
L(c)....	1633105	1319393	10096208	2787536	1532049	8761601	5964871	6910815	6917444	7122118	5883053
L( $\frac{1}{2}$ S $\frac{1}{2}$ )...	3961558	3961558	3961558	3961558	3961558	3961558	3961558	3961558	3961558	3961558	3961558
Somme.	5594663	5280951	14057266	6749094	5493607	2723159	9926429	10872373	10879002	1083676	9844611
a.....	1,751609	1,751950	1,934311	2,292959	2,297191	2,381364	2,514461	2,578081	2,586562	2,587096	2,588160
$\frac{1}{2}$ S $\frac{1}{2}$ ...	38218	37611	46554	56293	57050	65023	91059	100417	102527	101391	108015
$\frac{1}{2}$ cS $\frac{1}{2}$ ...	-3626	-3374	-2510	-473	-354	1872	9832	12225	12243	12834	9649
$\theta$ .....	1,786201	1,786187	1,978319	2,348779	2,353887	2,448259	2,615352	2,690723	2,701332	2,701321	2,705824

En adoptant les valeurs de a, b, c fournies par le Tableau IV, on aura

(57)	Pour l'eau, 1 <sup>re</sup> série.....	$\theta^2 = 1,751609 + 0,0025994s^2 - 0,000014565s^4,$
	» 2 <sup>e</sup> série.....	$\theta^2 = 1,751950 + 0,0025581s^2 - 0,000013550s^4,$
	Pour la solution de potasse.....	$\theta^2 = 1,934311 + 0,0031664s^2 - 0,000010224s^4,$
	Pour le crownglass, 1 <sup>re</sup> espèce.....	$\theta^2 = 2,292959 + 0,0038288s^2 - 0,000001900s^4,$
	» 2 <sup>e</sup> espèce.....	$\theta^2 = 2,297191 + 0,0038803s^2 - 0,000001423s^4,$
	» 3 <sup>e</sup> espèce.....	$\theta^2 = 2,381364 + 0,0044226s^2 + 0,000007519s^4,$
	Pour le flintglass, 1 <sup>re</sup> espèce.....	$\theta^2 = 2,514461 + 0,0061934s^2 + 0,000039490s^4,$
	» 2 <sup>e</sup> espèce.....	$\theta^2 = 2,578081 + 0,0068299s^2 + 0,000049100s^4,$
	» 3 <sup>e</sup> espèce, 1 <sup>re</sup> série....	$\theta^2 = 2,586562 + 0,0069734s^2 + 0,000049175s^4,$
	» 2 <sup>e</sup> série....	$\theta^2 = 2,587096 + 0,0068962s^2 + 0,000051548s^4,$
» 4 <sup>e</sup> espèce.....	$\theta^2 = 2,588160 + 0,0073467s^2 + 0,000038753s^4,$	

En substituant successivement dans chacune des formules (57) les valeurs de s correspondantes aux rayons

B, C, D, E, F, G, H

de Fraunhofer, c'est-à-dire les valeurs de  $s_i$  comprises dans le Tableau I, on obtiendrait des valeurs de  $\theta^2$ , et par suite des valeurs de  $\theta$ , très peu différentes de celles que l'expérience a données. Au reste, pour trouver les différences des unes aux autres et constater l'accord des formules (57) avec les observations, il n'est pas même nécessaire d'effectuer la substitution dont il s'agit. On arrive plus facilement au même but à l'aide des considérations suivantes.

La formule (50), c'est-à-dire, en d'autres termes, la formule (16) de la page 372 ne subsiste qu'approximativement. Mais, comme nous l'avons déjà remarqué (p. 383), cette formule deviendra rigoureuse si l'on y remplace  $\theta_i$  par  $\Theta_i - \Delta^4 \theta_i$ , en attribuant à  $\Theta_i$  la valeur fournie par les observations. Pareillement les formules (43) et (51) deviendront exactes, si l'on y remplace

$$s_i^2 \text{ et } \theta_i$$

par

$$s_i^2 - \Delta^4 s_i^2 \text{ et } \theta_i - \Delta^4 \theta_i,$$

et attribuant à  $s_i^2, \theta_i$  les valeurs fournies par les observations, c'est-à-dire qu'alors on aura rigoureusement

$$(58) \quad s_i^2 - \Delta^4 s_i^2 = \frac{1}{2} S s_i^2 + \beta_i S' \Delta s_i^2 + \gamma_i S'' \Delta^2 s_i^2$$

et

$$(59) \quad \theta_i - \Delta^4 \theta_i = \theta + u \beta_i + v \gamma_i.$$

Effectivement l'équation (58) se déduit immédiatement des trois premières des formules (27), et l'équation (59), que l'on peut encore écrire comme il suit

$$(60) \quad \theta_i - \Delta^4 \theta_i = \frac{1}{2} S \theta_i + \beta_i S' \Delta \theta_i + \gamma_i S'' \Delta^2 \theta_i,$$

est, aussi bien que l'équation (133) de la page 325, une conséquence



nécessaire des formules (113) du § VI. D'ailleurs, pour obtenir l'équation (53), il a suffi d'éliminer de la formule (51) les valeurs de

$$\beta, \gamma$$

tirées des équations (46) auxquelles se réduit la formule (43) quand on y pose successivement  $n=2, n=4$ ; et, si au lieu des formules (43), (51) on emploie dans l'élimination dont il s'agit les formules (58), (59), on trouvera de la même manière

$$(61) \quad \Theta_1 - \Delta^2 \Theta_1 = a + b(s_1^2 - \Delta^2 s_1^2) + c(s_1^2 - \Delta^2 s_1^2).$$

Donc, en vertu de ce qui a été dit ci-dessus, la formule (61) sera exacte, si l'on y substitue les valeurs de  $s_1$  et  $\Theta_1$  fournies par l'expérience, en attribuant à

$$\Delta^2 s_1^2, \Delta^2 s_1^2, \Delta^2 \Theta_1$$

les valeurs précédemment calculées et comprises dans les Tableaux I, II, ainsi que dans le Tableau III du § VIII. Or on tire de la formule (61)

$$(62) \quad a + b s_1^2 + c s_1^2 = \Theta_1 + b \Delta^2 s_1^2 + c \Delta^2 s_1^2 - \Delta^2 \Theta_1,$$

et le premier membre de la formule (62) est précisément la valeur de  $\Theta_1 = \theta_1^2$  ou de  $\theta^2$  que fournit chacune des équations (53), (55), (57). Donc, pour obtenir les valeurs de  $\theta_1^2$  que déterminent les formules (57), il suffira d'ajouter aux diverses valeurs de  $\Theta_1 = \theta_1^2$  fournies par l'expérience les valeurs correspondantes du trinôme

$$(63) \quad \lambda_1 = b \Delta^2 s_1^2 + c \Delta^2 s_1^2 - \Delta^2 \Theta_1,$$

qui se trouvent comprises dans le Tableau suivant.

TABLEAU VI.

Valeurs de  $\lambda_1 = b \Delta^2 s_1^2 + c \Delta^2 s_1^2 - \Delta^2 \Theta_1$ , exprimées en millièmes.

	EAU.		SOLUTION de poisson.	CROWNGLASS.			FLINTGLASS.				
	1 <sup>re</sup> espèce.	2 <sup>e</sup> espèce.		1 <sup>re</sup> espèce.	2 <sup>e</sup> espèce.	3 <sup>e</sup> espèce.	1 <sup>re</sup> espèce.	2 <sup>e</sup> espèce.	3 <sup>e</sup> espèce.	4 <sup>e</sup> espèce.	5 <sup>e</sup> espèce.
$b \Delta^2 s_1^2$ .....	47	47	58	70	71	81	113	124	127	126	134
$c \Delta^2 s_1^2$ .....	31	29	22	4	3	-16	-84	-105	-105	-110	-83
$-\Delta^2 \Theta_1$ .....	62	25	17	-45	-5	-55	127	38	-58	-88	-20
$\lambda_1$ .....	140	101	97	29	69	10	156	57	-36	-72	31
$b \Delta^2 s_2^2$ .....	-19	-19	-23	-28	-29	-33	-46	-51	-52	-51	-54
$c \Delta^2 s_2^2$ .....	2	2	2	0	0	-1	-7	-8	-9	-9	-7
$-\Delta^2 \Theta_2$ .....	-62	1	-8	31	23	15	-37	-60	15	-5	88
$\lambda_2$ .....	-79	-16	-29	3	-6	-19	-90	-119	-46	-65	27
$b \Delta^2 s_3^2$ .....	-59	-58	-72	-87	-88	-100	-141	-155	-158	-157	-167
$c \Delta^2 s_3^2$ .....	-19	-18	-13	-2	-2	10	51	64	64	67	50
$-\Delta^2 \Theta_3$ .....	-23	-16	-17	19	-35	72	-147	43	52	17	33
$\lambda_3$ .....	-101	-92	-102	-70	-125	-18	-237	-48	-42	-73	-84
$b \Delta^2 s_4^2$ .....	31	31	38	46	47	54	75	83	84	83	89
$c \Delta^2 s_4^2$ .....	-14	-13	-10	-2	-1	7	38	48	48	50	38
$-\Delta^2 \Theta_4$ .....	22	-10	7	-6	18	-31	56	-21	-7	73	-101
$\lambda_4$ .....	39	8	35	38	64	30	169	110	125	206	26
$b \Delta^2 s_5^2$ .....	146	144	178	215	218	249	348	384	392	388	413
$c \Delta^2 s_5^2$ .....	-27	-25	-19	-3	-3	14	74	92	92	96	72
$-\Delta^2 \Theta_5$ .....	-8	10	31	33	-47	-20	97	37	-53	-65	-16
$\lambda_5$ .....	111	129	190	245	168	243	519	513	431	419	469
$b \Delta^2 s_6^2$ .....	-118	-116	-144	-174	-176	-201	-281	-310	-317	-313	-334
$c \Delta^2 s_6^2$ .....	61	56	43	8	6	-31	-165	-205	-205	-215	-162
$-\Delta^2 \Theta_6$ .....	8	17	-22	-46	65	-20	-7	-59	9	-27	85
$\lambda_6$ .....	-49	-43	-123	-212	-105	-252	-453	-574	-513	-555	-411
$b \Delta^2 s_7^2$ .....	-28	-27	-34	-41	-41	-47	-66	-72	-74	-73	-78
$c \Delta^2 s_7^2$ .....	-33	-31	-23	-4	-3	17	90	112	112	117	88
$-\Delta^2 \Theta_7$ .....	1	-25	-11	13	-16	40	-91	22	45	91	-67
$\lambda_7$ .....	-60	-83	-68	-32	-60	10	-67	62	83	135	-57



Ainsi, par exemple, si l'on ajoute à la valeur de  $\Theta$ , trouvée pour l'eau (1<sup>re</sup> série), c'est-à-dire à

$$\Theta_1 = 1,771387$$

la première des valeurs de  $\lambda$  fournies par le Tableau VI ou le nombre

$$0,000140,$$

on obtiendra pour somme le nombre

$$1,771527,$$

qui représente précisément la valeur de  $\theta^2$  à laquelle on parvient en posant dans la première des formules (57)

$$s = s_1 = 2,833, \quad L(s) = 4521774.$$

Pareillement, si de la valeur de  $\Theta_6$  relative au flintglass (2<sup>e</sup> espèce), c'est-à-dire de

$$\Theta_6 = 2,740370,$$

on retranche le nombre 574, qui, pris avec le signe  $-$ , représente la valeur de  $\lambda_6$  correspondante à la même substance, on aura pour reste le nombre

$$2,739796,$$

qui est précisément la valeur de  $\theta^2$  à laquelle on parvient en posant dans la huitième des formules (57)

$$s = s_6 = 4,541, \quad L(s) = 6571528.$$

Au reste, l'exactitude des valeurs de  $\lambda_i$  comprises dans le Tableau VI peut être confirmée comme il suit.

Les formules (117) du § VI donnent

$$S \Delta^2 \Theta = 0, \quad S' \Delta^2 \Theta_i = 0, \quad S'' \Delta^2 \Theta_i = 0.$$

On aura de même, en désignant par  $n$  l'un des nombres entiers 2 et 4.

$$(64) \quad S \Delta^2 s_i^n = 0, \quad S' \Delta^2 s_i^n = 0, \quad S'' \Delta^2 s_i^n = 0,$$

et par suite on tirera de l'équation (63)

$$(65) \quad \begin{cases} S \lambda_i = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 + \lambda_5 + \lambda_6 + \lambda_7 = 0, \\ S' \lambda_i = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 - \lambda_5 - \lambda_6 - \lambda_7 = 0, \\ S'' \lambda_i = -\lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 + \lambda_5 + \lambda_6 - \lambda_7 = 0. \end{cases}$$

Enfin de ces dernières équations combinées entre elles on conclura

$$(66) \quad \lambda_1 + \lambda_2 = -(\lambda_3 + \lambda_4) = \lambda_5 + \lambda_6 = -\lambda_7.$$

Donc les quatre quantités

$$(67) \quad \lambda_1 + \lambda_2, \quad \lambda_3 + \lambda_4, \quad \lambda_5 + \lambda_6, \quad \lambda_7$$

devront être égales au signe près et alternativement affectées de signes contraires. Or cette condition se trouve effectivement remplie avec une exactitude suffisante par les valeurs de  $\lambda_i$  que fournit le Tableau VI, comme le prouve celui que nous allons tracer.

TABLEAU VII.

Valeurs de  $\lambda_1 + \lambda_2, \lambda_3 + \lambda_4, \dots$  exprimées en millionnièmes.

	EAD.		SOLUTION de posasse.	CROWNGLASS.			FLINTGLASS.				
	1 <sup>re</sup> série.	2 <sup>e</sup> série.		1 <sup>re</sup> espèce.	2 <sup>e</sup> espèce.	3 <sup>e</sup> espèce.	1 <sup>re</sup> espèce.	2 <sup>e</sup> espèce.	3 <sup>e</sup> espèce.	1 <sup>re</sup> série.	2 <sup>e</sup> série.
$\lambda_1 + \lambda_2 \dots \dots$	61	85	68	32	63	-9	66	-62	-82	-137	58
$\lambda_3 + \lambda_4 \dots \dots$	-62	-84	-67	-32	-61	12	-68	62	83	133	-58
$\lambda_5 + \lambda_6 \dots \dots$	62	86	67	33	63	-9	66	-61	-82	-136	58
$\lambda_7 \dots \dots$	-60	-83	-68	-32	-60	10	-67	62	83	135	-57

D'après ce qu'on vient de dire, les valeurs de  $\theta^2$  fournies par les équations (57) coïncident avec celles que l'on déduit de la formule

$$(68) \quad \theta^2 = \Theta_i + \lambda_i,$$

en attribuant à  $\Theta_i$  les valeurs données par l'expérience et à  $\lambda_i$  les valeurs très petites que présente le Tableau VI. Or on tire de la for-



mule (68)

$$(69) \quad \theta = (\theta_i + \lambda_i)^{\frac{1}{2}} = (\theta_i^2 + \lambda_i)^{\frac{1}{2}} = \theta_i + \frac{1}{2} \frac{\lambda_i}{\theta_i} - \frac{1}{8} \frac{\lambda_i^2}{\theta_i^3} + \dots;$$

et, comme, pour chacune des valeurs attribuées à  $\lambda_i$  et à  $\theta_i$ , le troisième terme et les suivants, dans le dernier membre de l'équation (69), offriront une somme inférieure à un millionième, on pourra sans erreur sensible réduire cette équation à

$$(70) \quad \theta = \theta_i + \frac{1}{2} \frac{\lambda_i}{\theta_i}.$$

Donc la différence entre la valeur de  $\theta$  déterminée par l'une des formules (57) et la valeur de  $\theta_i$  donnée par l'expérience se réduira simplement à la quantité

$$(71) \quad \frac{\lambda_i}{2\theta_i} = \frac{1}{2} \theta_i^{-1} \lambda_i,$$

dont les diverses valeurs se tirent aisément du Tableau VI, et se trouvent comprises dans celui que nous allons tracer.

TABLEAU VIII.

Valeurs de  $\frac{1}{2} \theta_i^{-1} \lambda_i$  exprimées en millièmes.

	EAU.		SOLUTION de jaisins.	CROWNGLASS.			FLINTGLASS.					
	1 <sup>re</sup> série.	2 <sup>e</sup> série.		1 <sup>re</sup> espèce.	2 <sup>e</sup> espèce.	3 <sup>e</sup> espèce.	1 <sup>re</sup> espèce.	2 <sup>e</sup> espèce.	3 <sup>e</sup> espèce.	1 <sup>re</sup> série.	2 <sup>e</sup> série.	3 <sup>e</sup> espèce.
Pour $i = 1 \dots$	53	38	35	10	23	4	49	18	-11	-22	10	
2....	-30	-6	-10	1	-2	-6	-28	-37	-14	-20	8	
3....	-38	-34	-36	-23	-41	-6	-74	-15	-13	-22	-26	
4....	15	3	12	12	20	10	52	34	38	63	8	
5....	41	48	67	80	55	78	160	156	131	127	142	
6....	-18	-16	-44	-69	-34	-80	-139	-173	-155	-167	-124	
7....	-22	-31	-24	-10	-19	3	-20	19	25	40	-17	
Sommes	$i = 1$ et $2.$	23	32	25	11	21	-2	21	-19	-25	-42	18
	3 et 4.	-23	-31	-24	-11	-21	4	-22	17	25	41	-18
	5 et 6.	23	32	23	11	21	-2	21	-17	-24	-40	18
	7....	-22	-31	-24	-10	-19	3	-20	19	25	40	-17

Dans le Tableau VIII nous avons joint, pour chaque substance, aux diverses valeurs de

$$\frac{1}{2} \theta_i^{-1} \lambda_i,$$

les sommes de ces valeurs prises deux à deux à partir de celle qui correspond à  $i = 1$ , c'est-à-dire les valeurs des quatre quantités

$$(72) \quad \frac{\lambda_1}{2\theta_1} + \frac{\lambda_2}{2\theta_2}, \quad \frac{\lambda_3}{2\theta_3} + \frac{\lambda_4}{2\theta_4}, \quad \frac{\lambda_5}{2\theta_5} + \frac{\lambda_6}{2\theta_6}, \quad \frac{\lambda_7}{2\theta_7}.$$

En ayant égard aux formules (65) ou (66) et raisonnant, comme dans le § VI (p. 337 et 338), on démontre sans peine que les quantités (72) doivent être sensiblement égales, au signe près, et alternativement affectées de signes contraires. Or cette condition se trouve en effet remplie, avec une exactitude suffisante, par les quantités comprises dans les quatre dernières lignes horizontales du Tableau VIII; ce qui prouve la justesse de nos calculs.

D'après le Tableau VIII, la différence entre la valeur de  $\theta$  déterminée par l'une des formules (57) et la valeur de  $\theta_i$  fournie par l'expérience est généralement inférieure, abstraction faite du signe, à un dix-millième. Il n'y a d'exception que pour le flintglass, dans le cas où l'on pose  $i = 6$  ou  $i = 7$ , et alors même la différence dont il s'agit, prise, abstraction faite du signe, ne dépasse jamais 173 millièmes, ou environ un dix-millième trois quarts. Les formules (57) reproduisent donc, avec de légères variations, les valeurs de  $\theta_i$  fournies par l'expérience. Toutefois les variations dont il s'agit deviennent, pour certains rayons et certaines substances, supérieures aux variations observées dans le passage d'une série d'expériences à une autre; puisque ces dernières variations, d'après le Tableau XXIII du § VI, n'ont jamais surpassé la moitié d'un dix-millième. Ainsi les équations (57), appliquées à la détermination des valeurs de  $\theta^2$  et de  $\theta$ , n'atteignent pas le même degré de précision que les formules établies dans les §§ VI, VII et VIII, par exemple les formules (11), (27) et (39) (§ VII), desquelles on déduisait pour  $\theta_i = \theta_i^2$ , et par suite pour  $\theta_i$ , des valeurs dont l'exactitude était comparable ou même supérieure à celle des



résultats directement fournis par l'expérience. Mais il est juste de remarquer que les coefficients renfermés dans les équations (57), ou les valeurs de

$$a, b, c$$

relatives aux diverses substances, dépendent à la fois des valeurs de  $\theta$  et de  $l$  fournies par l'expérience, les unes avec sept chiffres, les autres avec quatre chiffres seulement, tandis que les coefficients compris dans les formules des §§ VI, VII et VIII dépendent uniquement des valeurs observées de  $\theta$ . Pour cette raison, en établissant les formules (57), on a dû négliger les différences du troisième ordre, dont on avait tenu compte dans les §§ VI, VII et VIII. On ne doit donc pas s'étonner que, pour certains rayons et certaines substances, les nombres compris dans le Tableau VIII surpassent un dix-millième et s'élèvent jusqu'à un dix-millième trois quarts environ.

Les plus grands nombres que renferment les Tableaux VI et VIII étant 574 et 173 millièmes, il en résulte que les formules (57) déterminent les valeurs de  $\theta^2$  à 5 ou 6 dix-millièmes près et les valeurs de  $\theta$  à 1 ou 2 dix-millièmes près. Comme d'ailleurs, dans les Tableaux I et II, les valeurs de  $s^2$  sont toutes inférieures à 25 et celles de  $s$  à 606, il est clair qu'on pourra simplifier les formules (57), en supprimant les deux derniers chiffres décimaux dans les coefficients de  $s^2$  et de  $s$ , car cette suppression produira, dans la valeur de  $\theta^2$ , une variation inférieure à la somme des produits

$$25 \times 0,00001 = 0,00025 \quad \text{et} \quad 606 \times 0,0000001 = 0,0000606,$$

par conséquent inférieure au nombre

$$0,0003106,$$

et à plus forte raison à

$$0,000574.$$

Après cette suppression, les deux valeurs de chaque coefficient  $b$  ou  $c$ , correspondantes à deux séries d'expériences faites sur la même substance, seront, comme on devait s'y attendre, très peu différentes

l'une de l'autre, et si l'on remplace ces mêmes valeurs par leur demi-somme, si de plus on supprime encore les deux dernières décimales dans les valeurs de  $a$ , on réduira les formules (57) aux suivantes :

$$(73) \left\{ \begin{array}{l} \text{Eau} \dots\dots\dots \theta^2 = 1,7518 + 0,00258s^2 - 0,0000141s, \\ \text{Solution de potasse} \dots\dots \theta^2 = 1,9343 + 0,00317s^2 - 0,0000102s, \\ \text{Crown-glass, 1}^{\text{re}} \text{ espèce} \dots\dots \theta^2 = 2,2930 + 0,00383s^2 - 0,0000019s, \\ \quad \text{''} \quad 2^{\text{e}} \text{ espèce} \dots\dots \theta^2 = 2,2972 + 0,00388s^2 - 0,0000014s, \\ \quad \text{''} \quad 3^{\text{e}} \text{ espèce} \dots\dots \theta^2 = 2,3814 + 0,00442s^2 + 0,0000075s, \\ \text{Flint-glass, 1}^{\text{re}} \text{ espèce} \dots\dots \theta^2 = 2,5145 + 0,00619s^2 + 0,0000395s, \\ \quad \text{''} \quad 2^{\text{e}} \text{ espèce} \dots\dots \theta^2 = 2,5781 + 0,00683s^2 + 0,0000491s, \\ \quad \text{''} \quad 3^{\text{e}} \text{ espèce} \dots\dots \theta^2 = 2,5868 + 0,00693s^2 + 0,0000504s, \\ \quad \text{''} \quad 4^{\text{e}} \text{ espèce} \dots\dots \theta^2 = 2,5882 + 0,00735s^2 + 0,0000388s. \end{array} \right.$$

Si, en désignant par  $\Omega$  la vitesse de propagation de la lumière dans l'air, on pose

$$(74) \quad \frac{\Omega^2}{a^2} = 3,$$

on tirera des formules (5) et (11)

$$(75) \quad a_1 = a\mathfrak{J}, \quad a_2 = -ab\mathfrak{J}^2, \quad a_3 = a(2b^2 - ac)\mathfrak{J}^3.$$

Par suite, si l'on réduit le dernier membre de la formule (4) à ses trois premiers termes, on tirera de cette formule, en supposant les valeurs de  $\Omega$  et de  $k$  relatives, non plus à l'air, mais à un milieu quelconque,

$$(76) \quad \frac{s^2}{k^2} = \Omega^2 - a\mathfrak{J}[1 - b\mathfrak{J}k^2 + (2b^2 - ac)\mathfrak{J}^2k^4];$$

puis on en conclura

$$(77) \quad s^2 = a\mathfrak{J}[k^2 - b\mathfrak{J}k^4 + (2b^2 - ac)\mathfrak{J}^2k^6]$$

ou, ce qui revient au même,

$$(78) \quad s^2 = a\mathfrak{J}k^2 - ab\mathfrak{J}^2k^4 + (2ab^2 - a^2c)\mathfrak{J}^3k^6.$$

Si l'on continue de prendre pour unité de temps le quotient qu'on



obtient en divisant une seconde sexagésimale par mille millions de millions, c'est-à-dire par  $(10)^{15}$ , on devra, dans les formules (77) et (78), aussi bien que dans la formule (55), attribuer aux coefficients  $a$ ,  $b$ ,  $c$  les valeurs que fournit le Tableau V. Si, au contraire, on prend simplement pour unité de temps la seconde sexagésimale, on devra diviser les valeurs de  $b$  tirées du Tableau V par  $(10)^{20}$  et les valeurs de  $b^2$  et de  $c$  par  $(10)^{40}$ . Alors la formule (77) donnera

(79)

$$\begin{aligned} \text{Pour l'eau} & \dots \dots \dots \frac{s^2}{(10)^{20}} = 5,4890 \left[ \frac{k^2}{(10)^{15}} - 0,00808 \frac{k^4}{(10)^{25}} + 0,000373 \frac{k^6}{(10)^{35}} \right], \\ \text{Pour la solution de potasse} & \dots \dots \frac{s^2}{(10)^{20}} = 4,9712 \left[ \frac{k^2}{(10)^{15}} - 0,00815 \frac{k^4}{(10)^{25}} + 0,000263 \frac{k^6}{(10)^{35}} \right], \\ \text{Pour le crown-glass, 1}^{\text{re}} \text{ espèce.} & \dots \dots \frac{s^2}{(10)^{20}} = 4,1935 \left[ \frac{k^2}{(10)^{15}} - 0,00700 \frac{k^4}{(10)^{25}} + 0,000113 \frac{k^6}{(10)^{35}} \right], \\ \text{„ 2}^{\text{e}} \text{ espèce.} & \dots \dots \frac{s^2}{(10)^{20}} = 4,1858 \left[ \frac{k^2}{(10)^{15}} - 0,00707 \frac{k^4}{(10)^{25}} + 0,000111 \frac{k^6}{(10)^{35}} \right], \\ \text{„ 3}^{\text{e}} \text{ espèce.} & \dots \dots \frac{s^2}{(10)^{20}} = 4,0378 \left[ \frac{k^2}{(10)^{15}} - 0,00749 \frac{k^4}{(10)^{25}} + 0,000061 \frac{k^6}{(10)^{35}} \right], \\ \text{Pour le flint-glass, 1}^{\text{re}} \text{ espèce} & \dots \dots \frac{s^2}{(10)^{20}} = 3,8241 \left[ \frac{k^2}{(10)^{15}} - 0,00941 \frac{k^4}{(10)^{25}} - 0,000053 \frac{k^6}{(10)^{35}} \right], \\ \text{„ 2}^{\text{e}} \text{ espèce} & \dots \dots \frac{s^2}{(10)^{20}} = 3,7298 \left[ \frac{k^2}{(10)^{15}} - 0,00988 \frac{k^4}{(10)^{25}} - 0,000069 \frac{k^6}{(10)^{35}} \right], \\ \text{„ 3}^{\text{e}} \text{ espèce} & \dots \dots \frac{s^2}{(10)^{20}} = 3,7172 \left[ \frac{k^2}{(10)^{15}} - 0,00996 \frac{k^4}{(10)^{25}} - 0,000071 \frac{k^6}{(10)^{35}} \right], \\ \text{„ 4}^{\text{e}} \text{ espèce} & \dots \dots \frac{s^2}{(10)^{20}} = 3,7152 \left[ \frac{k^2}{(10)^{15}} - 0,01055 \frac{k^4}{(10)^{25}} + 0,000016 \frac{k^6}{(10)^{35}} \right], \end{aligned}$$

la valeur de  $k$  étant variable, non seulement avec la couleur, mais encore avec la substance que l'on considère, et déterminée par l'équation

$$(2) \quad k = \frac{2\pi}{l}.$$

Si dans les seconds membres des formules (79) on écrivait  $\theta k$  au lieu de  $k$ , les valeurs de  $k$  deviendraient relatives à l'air, et seraient telles que les présente le Tableau suivant.

TABLEAU IX.  
Valeurs de  $k$  dans l'air.

INDICATION DES RAYONS.	B.	C.	D.	E.	F.	G.	H.
$L(l)$ .....	8374930	8172000	7699476	7209611	6850986	6325176	5941557
$L\left(\frac{1}{7}\right)$ .....	1625070	1828000	2300524	2790389	3149014	3674824	4058443
$L(2\pi)$ .....	7981799	7981799	7981799	7981799	7981799	7981799	7981799
Logarithmes de $k = \frac{2\pi}{l}$ .	9606869	9809799	0282323	0772188	1130813	1656623	2040242
$\frac{k}{(10)^7}$ .....	0,9135	0,9571	1,0672	1,1916	1,2974	1,4644	1,5996

En multipliant une des valeurs de  $\frac{k}{(10)^7}$  tirées du Tableau IX par la valeur de  $\theta$  relative au même rayon et à une substance donnée, on obtiendra la valeur de  $\frac{k}{(10)^7}$  relative au rayon et à la substance dont il s'agit. Ainsi, par exemple, en faisant usage des logarithmes, on trouvera, pour les valeurs de  $k$  relatives à la solution de potasse, celles que fournit le Tableau suivant.

TABLEAU X.  
Valeurs de  $k$  relatives à la solution de potasse.

INDICATION DES RAYONS.	B.	C.	D.	E.	F.	G.	H.
$L\theta$ .....	1460129	1462878	1460974	1478716	1486280	1500129	1511762
$Lk$ (air).....	9606869	9809799	0282323	0772188	1130813	1656623	2040242
$Lk$ (solution de potasse).	1066998	1272677	1752297	2250904	2617093	3156752	3552004
$\frac{k}{(10)^7}$ (solution de potasse).	1,2785	1,3405	1,4970	1,6792	1,8209	2,0686	2,2657



Or, si l'on substitue ces dernières valeurs de  $\frac{k}{(10)^7}$  dans la seconde des équations (79) ou, ce qui revient au même, dans la formule

$$(80) \quad \frac{s^2}{(10)^{20}} = 4,9712 \frac{k^2}{(10)^{14}} - 0,04045 \frac{k^4}{(10)^{18}} + 0,00131 \frac{k^6}{(10)^{22}},$$

on obtiendra, comme on devait s'y attendre, des valeurs de  $\frac{s^2}{(10)^{20}}$  et de  $\frac{s}{(10)^{10}}$  sensiblement égales aux valeurs de  $s^2$  et de  $s$  renfermées dans le Tableau I, et telles qu'on les trouve inscrites dans celui que nous allons tracer.

TABLEAU XI.  
Valeurs de  $s^2$  tirées de la formule (79).

INDICATION DES RAYONS.	B.	C.	D.	E.	F.	G.	H.
$4,9712 \frac{k^2}{(10)^{14}}$ .....	8,1256	8,9329	11,141	14,016	16,591	21,272	25,519
$-0,04045 \frac{k^4}{(10)^{18}}$ .....	-0,1081	-0,1306	-0,203	-0,322	-0,451	-0,741	-1,066
$0,00131 \frac{k^6}{(10)^{22}}$ .....	0,0057	0,0076	0,015	0,029	0,049	0,102	0,177
$\frac{s^2}{(10)^{20}}$ .....	8,0232	8,8099	10,953	13,723	16,189	20,633	24,630
$\frac{s}{(10)^{10}}$ .....	2,833	2,968	3,310	3,704	4,024	4,542	4,963

Les différences qui existent entre les valeurs de  $s$  ou de  $\frac{s}{(10)^{10}}$  fournies par les Tableaux I et XI sont inférieures aux variations que produisent les erreurs d'observations. Effectivement, on tire des formules (2) et (3)

$$(81) \quad l = \frac{2\pi\Omega}{s};$$

et, si l'on substitue dans l'équation (81) les valeurs de  $s$  fournies par

le Tableau XI, en prenant pour  $\Omega$  la vitesse de propagation de la lumière dans l'air, c'est-à-dire en posant

$$\Omega = \frac{310177500}{1,000276}, \quad L(\Omega) = 8,4914905,$$

on obtiendra les valeurs suivantes des longueurs d'ondulation dans l'air :

TABLEAU XII.

Valeurs de  $l$  tirées de la formule (81) jointe au Tableau XI.

INDICATION DES RAYONS.	B.	C.	D.	E.	F.	G.	H.
En dix-millionièmes de millimètre. ....	6879	6564	5887	5260	4842	4289	3926
En cent-millionièmes de pouce.....	2541	2425	2175	1943	1789	1585	1450

Or, si l'on compare les valeurs de  $l$  inscrites dans la dernière ligne horizontale du Tableau XII à celles qui ont été fournies par l'expérience et que nous avons placées en tête du Tableau II (§ VI), on reconnaîtra qu'elles ne diffèrent point les unes des autres, si l'on en excepte toutefois les valeurs relatives au rayon H. Observons d'ailleurs que la différence des nombres

1451 et 1450

qui, dans les deux Tableaux, représentent l'épaisseur des ondes relatives au rayon H, exprimée en cent-millionièmes de pouce, se réduit à une seule unité de l'ordre indiqué par le dernier chiffre, et que les expériences de Fraunhofer qui déterminent les épaisseurs d'ondes, exprimées en cent-millionièmes de pouce, fournissent souvent pour un même rayon des nombres dont les derniers chiffres diffèrent entre eux d'une ou de plusieurs unités.

C'est en observant les phénomènes produits par des réseaux composés de fils métalliques parallèles les uns aux autres, que Fraunhofer a obtenu les nombres inscrits en tête du Tableau II (§ VI),





savoir

(a) 2541, 2425, 2175, 1943, 1789, 1585, 1451.

On peut consulter à ce sujet le Mémoire lu par ce physicien à l'Académie de Munich le 14 juin 1823. Les nombres dont il s'agit y sont donnés dans les premières pages et se trouvent, à la fin du Mémoire, remplacés par les suivants :

(b) ... 2422, 2175, 1945, 1794, 1587, 1464.

Les épaisseurs d'ondes représentées par les nombres (a) et transformées en millimètres ont été adoptées par quelques physiciens (voir entre autres la *Physique* de Pouillet). D'autres physiciens, Herschel par exemple, ont adopté les épaisseurs d'ondes représentées par les nombres (b), en plaçant à la tête de ceux-ci le premier des nombres (a). Par conséquent ils ont supposé que les longueurs des ondes, exprimées en cent-millionièmes de pouce, étaient représentées, pour les rayons

B, C, D, E, F, G, H,

par les nombres

(c) 2541, 2422, 2175, 1945, 1794, 1587, 1464.

Les deux suites de nombres (a) et (c) sont complètement d'accord dans le premier et le troisième terme. Elles s'accordent encore sensiblement dans le quatrième et le sixième; mais elles diffèrent assez notablement dans le septième ou dernier terme. D'ailleurs les formules établies dans le présent Mémoire permettent de faire servir trois termes supposés connus à la détermination des quatre autres, ainsi que nous allons le faire voir.

En raisonnant comme dans le § VII (p. 373 et 374), et négligeant les différences du quatrième ordre, ou même celles du troisième, on déduira des formules (50) et (51) d'autres formules propres à déterminer la valeur générale de  $\Theta$ , quand on connaîtra les valeurs particulières de

$$\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4.$$

ou même simplement les valeurs de

$$\theta_1, \theta_2, \theta_3.$$

Ces formules coïncideront avec l'équation (27) du § VII et avec celle qu'on en déduit quand on supprime le dernier terme du second membre, par conséquent avec la suivante

(82) 
$$\left\{ \begin{aligned} \theta_2 &= \theta_1 + \frac{\beta_1 - \beta_2}{\beta_3 - \beta_1} (\theta_3 - \theta_1) \\ &+ \frac{\beta_1 - \beta_2}{\beta_3 - \beta_1} \frac{\gamma_1 - \gamma_2}{\gamma_4 - \gamma_3} \left[ \theta_3 - \theta_1 - \frac{\beta_2 - \beta_1}{\beta_3 - \beta_1} (\theta_3 - \theta_1) \right], \end{aligned} \right.$$

la valeur de  $\gamma_i$  étant

(83) 
$$\gamma_i = \frac{\gamma_1 - \gamma_2}{\beta_1 - \beta_2}.$$

Pareillement, en supposant toujours que l'on néglige les différences finies du troisième ordre, c'est-à-dire les quantités

$$\Delta^3 \theta, \Delta^3 s_i^n, \Delta^3 k_i^n, \Delta^3 t_i^n,$$

on déduira des équations (43), (44), (45) d'autres équations qui serviront à déterminer les valeurs générales des quantités

$$s_i^n, k_i^n, t_i^n$$

quand on connaîtra leurs valeurs particulières correspondantes à trois valeurs données de  $i$ . Ainsi, par exemple, en posant  $n = 2$ , et regardant comme connues les valeurs de  $t_i^2$  correspondantes à  $i = 1, i = 3, i = 6$ , on tirera de l'équation (45)

(84) 
$$\left\{ \begin{aligned} t_i^2 &= t_1^2 + \frac{\beta_1 - \beta_2}{\beta_3 - \beta_1} (t_3^2 - t_1^2) \\ &+ \frac{\beta_1 - \beta_2}{\beta_3 - \beta_1} \frac{\gamma_1 - \gamma_2}{\gamma_4 - \gamma_3} \left[ t_3^2 - t_1^2 - \frac{\beta_2 - \beta_1}{\beta_3 - \beta_1} (t_3^2 - t_1^2) \right]. \end{aligned} \right.$$

Si maintenant on fait, pour abrégér,

(85) 
$$B_i = \frac{\beta_1 - \beta_2}{\beta_3 - \beta_1}, \quad C_i = \frac{(\beta_1 - \beta_2)(\gamma_1 - \gamma_2)}{(\beta_3 - \beta_1)(\gamma_4 - \gamma_3)}, \quad D_i = B_i - B_i C_i,$$



la formule (84) donnera simplement

$$(86) \quad t_i^2 = t_1^2 + B_i(t_3^2 - t_1^2) + C_i[t_5^2 - t_1^2 - B_i(t_3^2 - t_1^2)]$$

ou, ce qui revient au même,

$$(87) \quad t_i^2 = (1 - D_i - C_i)t_1^2 + D_it_3^2 + C_it_5^2.$$

Enfin, si dans les équations (83) et (85) on substitue les valeurs de  $\beta_i$  et de  $\gamma_i$  trouvées dans le § VIII, on déduira aisément de ces formules les valeurs de

$$\gamma_i, B_i, C_i \text{ et } D_i$$

comprises dans le Tableau que nous allons tracer.

TABLEAU XIII.  
Valeurs de  $\gamma_i, B_i, C_i, D_i$ .

$i$	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	SOMME.
$\beta_1$	0,100868	0,168734	0,108921	0,031477	-0,038125	-0,171610	-0,290265	0,000001
$\beta_2$	0,190868	0,190868	0,190868	0,190868	0,190868	0,190868	0,190868	1,336076
$\beta_3 - \beta_1$	0,000000	-0,022134	-0,081947	-0,159301	-0,228993	0,362478	-0,481132	-1,336075
$\gamma_1$	-0,16970	-0,08510	0,07534	0,17924	0,19999	0,04521	-0,24541	-0,00043
$\gamma_2$	-0,16970	-0,16970	-0,16970	-0,16970	-0,16970	-0,16970	-0,16970	-1,18790
$\gamma_3 - \gamma_1$	0,00000	0,08460	0,24564	0,34894	0,36969	0,21491	-0,07571	1,18747
$L[\pm(\gamma_1 - \gamma_2)]$		9273704	3892370	5427508	5678377	3322566	8791532	
$L[-(\beta_2 - \beta_1)]$		3450599	9135331	2024638	3598222	5592817	6822640	
$L[\mp \gamma_1]$		5823105	4757039	3402870	2080155	7729749	1968892	
$\gamma'_1$		-3,8222	-2,9992	-2,1892	-1,6144	-0,5929	0,1574	-11,0515
$\gamma'_2$		-2,9992	-2,9992	-2,9992	-2,9992	-2,9992	-2,9992	-17,0412
$\gamma'_3 - \gamma'_1$		-0,8320	0,0000	0,8010	1,3758	2,3973	3,1476	6,8897
$L(\gamma_1 - \gamma_2)$		9201233		9036325	1385553	3797224	4979795	
$L[-(\beta_2 - \beta_1)]$		3450599		2024638	3598222	5592817	6822640	
$L[\pm(\beta_2 - \beta_1)(\gamma'_1 - \gamma'_2)]$		2651832		1060963	4983775	9390041	1802435	
$L[-(\beta_4 - \beta_1)(\gamma'_4 - \gamma'_3)]$		9390041		9390041	9390041	9390041	9390041	
$L[\mp C_1]$		3261791		1670922	5593734	0,00000	2412394	
$C_1$		-0,02119		0,14692	0,36255	1,00000	1,74277	3,23105
$L[-(\beta_2 - \beta_1)]$		3450599	9135331	2024638	3598222	5592817	6822640	
$L[-(\beta_3 - \beta_1)]$		9135331	9135331	9135331	9135331	9135331	9135331	
$L(B_1)$		4815268	0,00000	2889307	4462891	6457486	7687309	
$L(B_2)$		6457486		6457486	6457486	6457486	6457486	
$L[\mp C_1]$		3261791		1670922	5593734		2412394	
$L[\mp B_1 C_1]$		9719277		8128408	2051220		6457486	8869880
$B_1$		0,27010		1,94505	2,79440	4,42332	5,87125	15,30412
$B_2 C_1$		-0,09374		0,64989	1,60370	4,42332	7,70882	14,29199
$D_1$		0,36384		1,29516	1,19070	0,00000	-1,83757	0,01213
$C_1 + D_1$		0,34265		1,44208	1,55325		-0,09480	3,24318
$1 - C_1 - D_1$		0,63735		-0,44208	-0,55325		1,09480	0,75682

En conséquence, on tirera de la formule (87)

$$(88) \quad \begin{cases} t_1^2 = 0,65735 t_1^2 + 0,36384 t_2^2 - 0,02119 t_3^2, \\ t_2^2 = -0,44208 t_1^2 + 1,29516 t_3^2 + 0,14692 t_4^2, \\ t_3^2 = -0,55325 t_1^2 + 1,19070 t_2^2 + 0,36255 t_4^2, \\ t_4^2 = 1,09480 t_1^2 - 1,83757 t_2^2 + 1,74277 t_3^2. \end{cases}$$



Si dans ces dernières équations on substitue les valeurs de  $l_1, l_2, l_3, l_4$  qui font partie de la suite (a) ou, ce qui revient au même, si, en prenant pour unité de longueur un cent-millième de pouce, on pose

$$l_1 = 2,541, \quad l_2 = 2,175, \quad l_3 = 1,585,$$

on obtiendra pour

$$l_2, \quad l_3, \quad l_4, \quad l_5,$$

les valeurs que détermine le Tableau suivant.

TABLEAU XIV.  
Valeurs de  $l_2, l_3, l_4, l_5$  déduites de la formule (87).

1.	2.	4.	5.	7.
$L[\pm(1-C_i-D_i)]$ .....	8177967	6455009	7329214	0393348
$L(l_1^2)$ .....	1899906	1899906	1899906	1899906
$L[\pm(1-C_i-D_i)l_1^2]$ .....	007873	8334915	9329120	2293254
$L(\pm D_i)$ .....	5609104	1123235	0758024	2642439
$L(l_2^2)$ .....	3250814	3250814	3250814	3250814
$L(\pm D_i l_2^2)$ .....	8859918	4374049	4008838	5893253
$L(\pm C_i)$ .....	3261791	1670922	5593734	2412594
$L(l_3^2)$ .....	5999114	5999114	5999114	5999114
$L(\pm C_i l_3^2)$ .....	9261205	7670336	1593148	8411808
$(1-C_i-D_i)l_1^2$ .....	0,10181	-0,06817	-0,08569	0,16956
$D_i l_2^2$ .....	0,07691	0,27378	0,25170	-0,38844
$C_i l_3^2$ .....	-0,00844	0,05848	0,14432	0,69371
$l_1^2$ .....	0,17028	0,26379	0,31053	0,47483
$L(l_1^2)$ .....	2311636	4212583	4918238	6765382
$L(l_1^3)$ .....	6155818	7106292	7459119	8382691
$L(l_1^4)$ .....	3844182	2393708	2540881	1617309
$l_1$ .....	2,423	1,947	1,795	1,451

Ainsi, en adoptant comme exactes les valeurs de  $l_1, l_2$  et  $l_3$  repré-

sentées par le premier, le troisième et le sixième terme de la suite (a), nous sommes conduits, par l'application de la formule (87), à remplacez la suite dont il s'agit par cette autre suite de nombres

$$(d) \quad 2541, \quad 2423, \quad 2175, \quad 1947, \quad 1795, \quad 1585, \quad 1451.$$

Si au sixième terme de la suite (a) on substituait le sixième terme de la suite (b), les nombres (d) se trouveraient, en vertu de la formule (87), remplacés par les suivants :

$$(e) \quad 2541, \quad 2423, \quad 2175, \quad 1948, \quad 1796, \quad 1587, \quad 1454.$$

En comparant les nombres (d) et (e) aux nombres (a) et (c), on reconnaît que, si des deux suites (a) et (c) la première s'accorde moins bien avec les suites (d) et (e) dans le second, le quatrième et le cinquième terme, elle s'en rapproche beaucoup plus dans le septième terme, dont la variation, quand on passe de la suite (a) à la suite (d) ou (e), est nulle ou seulement égale à trois unités de l'ordre indiqué par le dernier chiffre, et s'élève au contraire à treize unités du même ordre lorsqu'on passe des nombres (c) aux nombres (d).

En terminant ce paragraphe, nous ferons observer que les équations (43), (44), (45) et (50) ont une grande analogie avec une formule du même genre que j'ai donnée dans un Mémoire lithographié sur l'interpolation, et à l'aide de laquelle on pourrait encore développer aisément deux des trois quantités

$$\theta, \quad s \quad \text{et} \quad k \quad \text{ou} \quad l^{-1}$$

suivant les puissances ascendantes de la troisième.

§ XII. — Sur les résultats que fournit l'approximation du premier ordre.

Le Tableau XI du § XI fournit les valeurs approchées de  $s^2$  que l'on déduit de la formule (77) ou (78), en supposant les valeurs de  $a, b, c, \mathfrak{J}$  relatives à la solution de potasse. Chacune de ces valeurs appro-



chées se compose de trois termes dont les deux derniers sont comparables aux valeurs de  $\Delta\theta$ , et de  $\Delta^2\theta$ , c'est-à-dire aux différences finies du premier et du second ordre; et l'on reconnaît immédiatement à l'inspection du Tableau XI (§ XI) que le troisième terme, c'est-à-dire le terme du second ordre, est toujours moindre que la centième partie du premier. Il en est ainsi pour toutes les substances, même pour l'eau, quoique le coefficient de  $\frac{k^2}{(10)^2}$  soit, dans la première des formules (79), beaucoup plus considérable que dans les suivantes. Effectivement la valeur de  $\frac{k}{(10)^2}$  relative à l'eau et au rayon H, ou le produit

$$1,3442 \times 1,5996 = 2,1502,$$

a pour quatrième puissance le nombre

$$21,375,$$

et le produit de ces derniers nombres par le coefficient 0,000373, savoir

$$21,375 \times 0,000373 = 0,00797,$$

est inférieur à  $\frac{1}{100}$ . Or ce produit représentera évidemment le rapport des termes proportionnels à  $k^0$  et à  $k^2$  dans le trinôme que renferme la première des formules (79).

Il suit de ce qu'on vient de dire que les formules (79) et autres du § XI précédent seront encore sensiblement exactes, si l'on y néglige les termes du second ordre. Alors, en posant, pour abrégér,

$$(1) \quad a\beta = u, \quad b\beta = v, \quad Av = w,$$

on réduira la formule (76) à

$$(2) \quad \frac{s^2}{k^2} = \Omega^2 = u(1 - v k^2) = u - w k^2.$$

On peut d'ailleurs établir directement cette dernière formule de la manière suivante.

Concevons que les vibrations du fluide éthéré s'exécutent dans un milieu où la propagation du mouvement reste la même en tous sens,

et considérons un rayon dans lequel les déplacements moléculaires soient parallèles à l'axe des  $x$ . On devra, dans la première des formules (16) du § I, supposer

$$\eta = 0, \quad \zeta = 0,$$

et  $\xi$  fonction des seules variables indépendantes  $y, t$ . Donc cette formule donnera simplement

$$(3) \quad \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = S \left[ m \frac{f(r) + f(r) \cos^2 \alpha}{r} \Delta \xi \right].$$

De plus,  $\Delta \xi$  étant l'accroissement de la fonction  $\xi$ , correspondant à l'accroissement  $\Delta y$  ou  $r \cos \beta$  de la variable  $y$ , on aura, par le théorème de Taylor,

$$(4) \quad \Delta \xi = r \cos \beta \frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{r^2 \cos^2 \beta}{1.2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} + \frac{r^3 \cos^3 \beta}{1.2.3} \frac{\partial^3 \xi}{\partial y^3} + \frac{r^4 \cos^4 \beta}{1.2.3.4} \frac{\partial^4 \xi}{\partial y^4} + \dots$$

En substituant la valeur précédente de  $\Delta \xi$  dans l'équation (3), négligeant les sommes qui renferment sous le signe S des puissances impaires de  $\cos \beta$ , et posant, pour abrégér,

$$(5) \quad \left\{ \begin{aligned} u &= S \left\{ \frac{mr}{2} [f(r) + f(r) \cos^2 \alpha] \cos^2 \beta \right\}, \\ w &= S \left\{ \frac{mr^3}{2.3.4} [f(r) + f(r) \cos^2 \alpha] \cos^4 \beta \right\}, \end{aligned} \right.$$

on obtiendra la formule

$$(6) \quad \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = u \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + w \frac{\partial^4 \xi}{\partial x^4} + \dots,$$

qui devient

$$(7) \quad \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = u \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + w \frac{\partial^4 \xi}{\partial x^4}$$

lorsqu'on réduit la série comprise dans le second membre à ses deux premiers termes. Si d'ailleurs on choisit pour origine des coordonnées un point où les molécules d'éther ne soient pas déplacées dans



le premier instant,  $\xi$  devra s'évanouir quand on supposera simultanément

$$y=0, \quad t=0,$$

et l'on vérifiera cette condition, ainsi que la formule (7), en posant

$$(8) \quad \xi = A \sin[k(y \pm \Omega t)],$$

$$(9) \quad \Omega^2 = u - u'/k^2.$$

C'est à très peu près en suivant cette méthode que j'avais établi la formule (2) ou (9) dans un Mémoire présenté à l'Académie des Sciences le 14 juin 1830. Cette même méthode a été publiée, ainsi que les formules (7), (8) et (9), dans le *Bulletin des Sciences* de M. de Férussac (t. XIV, p. 9, année 1830) (1); et, si elle a été proposée depuis dans un article du *Philosophical Magazine* (janvier 1836) comme propre à simplifier les calculs développés dans le Mémoire sur la dispersion, cela tient évidemment à ce que l'auteur de l'article n'avait point sous les yeux le Tome XIV du *Bulletin* ci-dessus mentionné.

Lorsque l'on considère le terme

$$Ak^2 = \frac{u}{u'} k^2$$

comme une quantité dont le carré peut être négligé, on a

$$(10) \quad 1 - u k^2 = \frac{\sin(k\sqrt{6A})}{k\sqrt{6A}},$$

et l'équation (2) ou (9) devient

$$(11) \quad \Omega^2 = u \frac{\sin(k\sqrt{6A})}{k\sqrt{6A}}.$$

C'est sous cette dernière forme que l'équation (9) a été présentée et vérifiée à l'aide des expériences de Fraunhofer par M. B. Powel dans plusieurs articles que renferment les *Philosophical Transactions* et le *Philosophical Magazine*.

(1) *Oeuvres de Cauchy*, S. II, T. II.

## TABLE DES MATIÈRES

DES NOUVEAUX EXERCICES DE MATHÉMATIQUES.

	Pages
PRÉFACE ET AVIS AU LECTEUR.....	189
Considérations générales.....	195
I. Équations différentielles du mouvement d'un système de molécules sollicitées par des forces d'attraction ou de répulsion mutuelle.....	196
II. Intégration des équations établies dans le paragraphe précédent.....	201
III. Application des formules précédentes à la théorie de la lumière.....	221
IV. Propagation des ondes lumineuses dans un milieu où l'élasticité de l'éther reste la même en tous sens.....	250
V. Sur la réfraction de la lumière.....	256
VI. Applications numériques.....	261
VII. Suite des applications numériques.....	344
VIII. Remarques sur les résultats obtenus dans les paragraphes précédents.....	389
IX. Sur la propagation de la lumière dans les milieux où sa vitesse reste la même pour toutes les couleurs.....	400
X. Considérations nouvelles sur la réfraction de la lumière.....	421
XI. Sur la relation qui existe entre la vitesse de propagation de la lumière et l'épaisseur des ondes lumineuses.....	427
XII. Sur les résultats que fournit l'approximation du premier ordre.....	461

FIN DU TOME X DE LA SECONDE SÉRIE.



---

## TABLE DES MATIÈRES

DU TOME DIXIÈME.

---

### SECONDE SÉRIE.

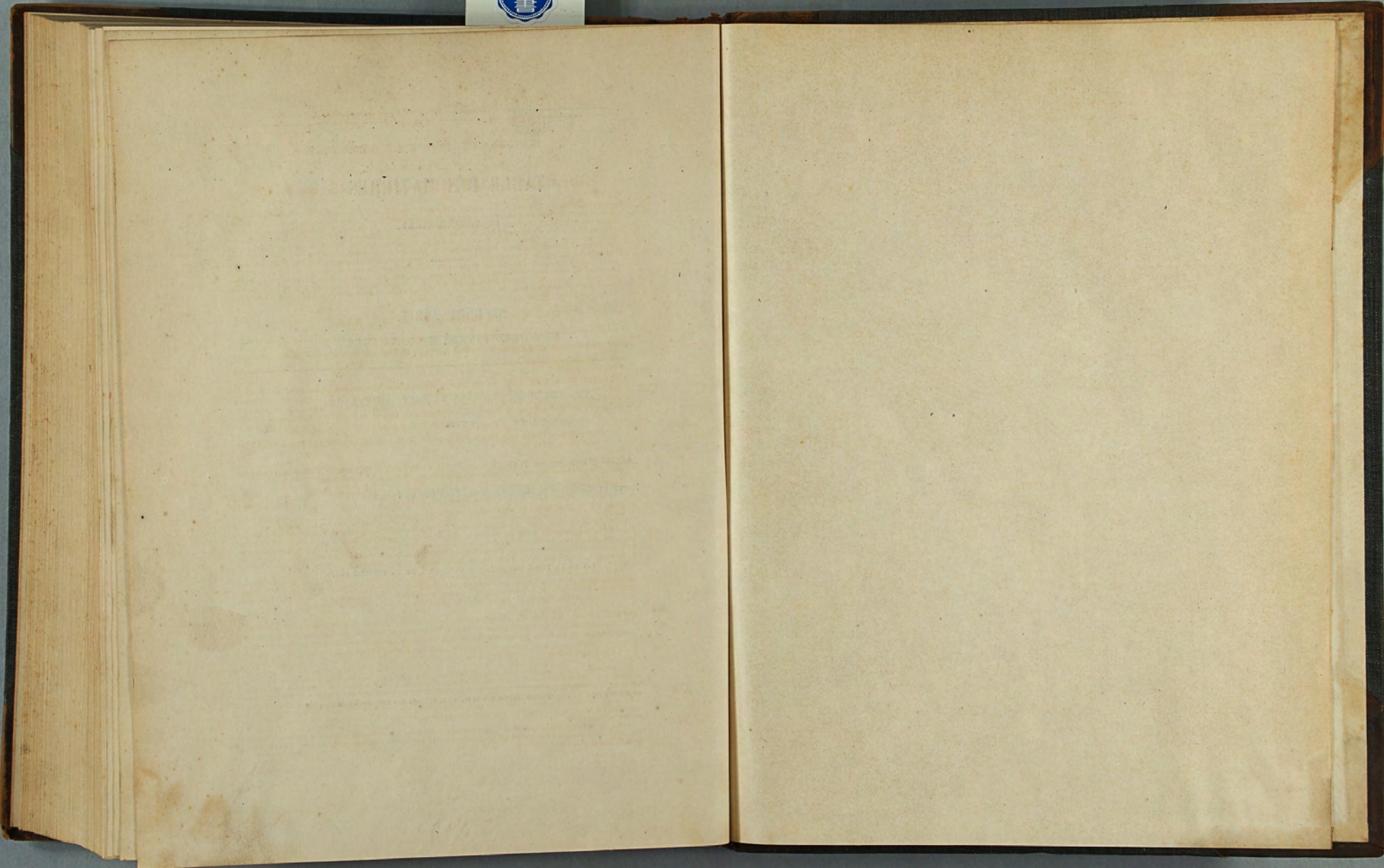
MÉMOIRES DIVERS ET OUVRAGES.

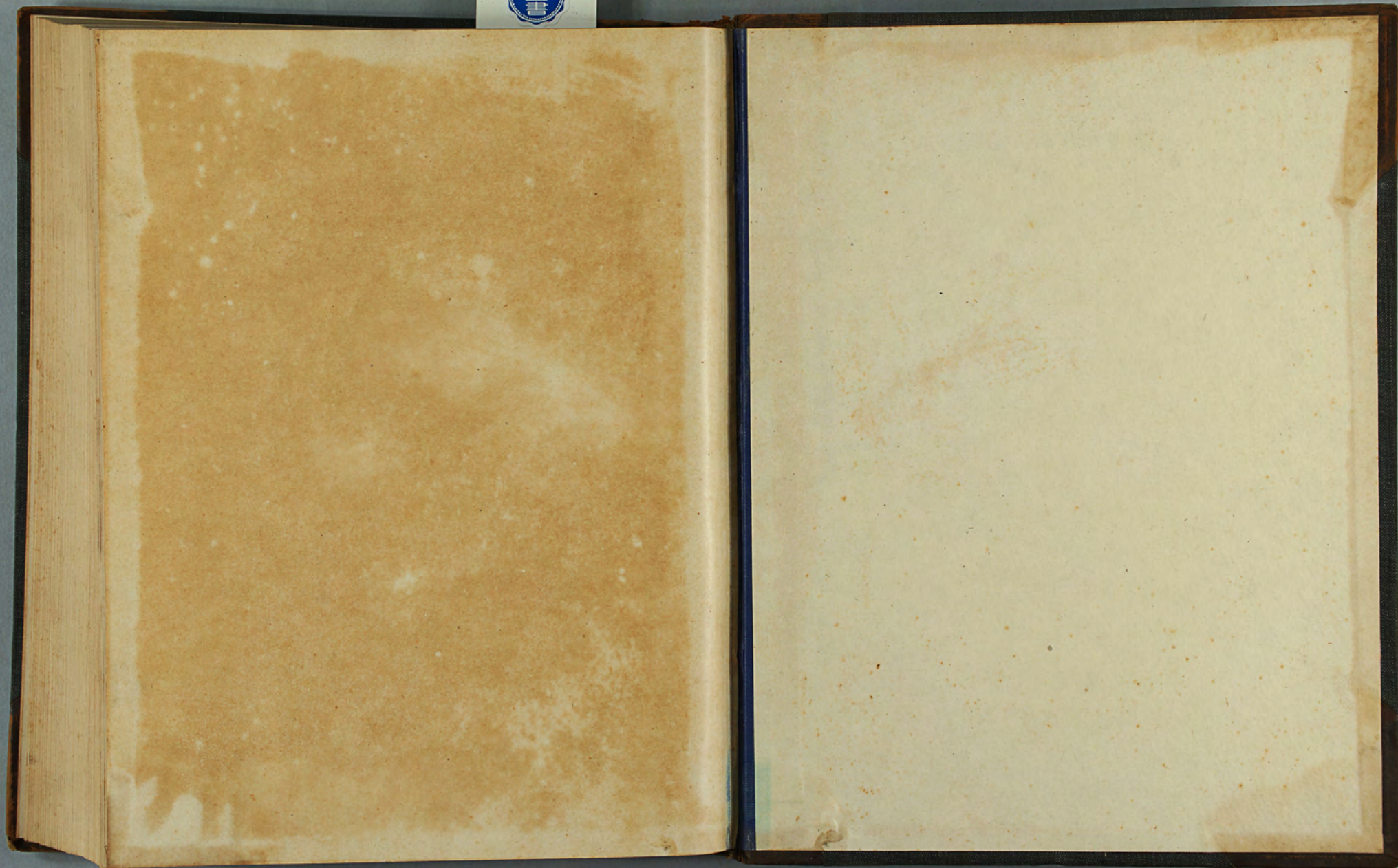
---

#### III. — MÉMOIRES PUBLIÉS EN CORPS D'OUVRAGES.

	Pages
RÉSUMÉS ANALYTIQUES DE TURIN.....	9-184
NOUVEAUX EXERCICES DE MATHÉMATIQUES (EXERCICES DE PRAGUE).....	185-464

FIN DE LA TABLE DES MATIÈRES DU TOME X DE LA SECONDE SÉRIE.









高  
重  
十