Ce travail a été l'objet de deux éditions distinctes, ou, plus exactement, il y a eu deux tirages séparés de la même édition.

Le premier, destiné aux savants français, a paru en France sous le titre suivant : *Nouveaux Exercices de Mathématiques,* avec une préface (*voir* page 189) expliquant comment ils faisaient suite aux anciens *Exercices de Mathématiques* composés pendant les années 1826 à 1830.

Le second a paru à Prague, sous le titre suivant : *Mémoire sur la dispersion de la lumière.* Il était précédé d'un *Avis au Lecteur,* qu'on trouvera plus loin (*voir* page 193), et qui fait connaître les motifs de cette édition spéciale.

NOUVEAUX EXERCICES

DE

MATHÉMATIQUES,

PAR

M. AUGUSTIN LOUIS CAUCHY,

MEMBRE DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE PARIS, DE LA SOCIÉTÉ ROYALE DE LONDRES, ETC.

Prague.

1835.

IMPRIMÉ CHEZ JEAN SPURNY.

NOUVEAUX EXERCICES
DE
MATHÉMATIQUES,

PAR

M. Augustin Louis. Cauchy.

La bienveillance avec laquelle les géomètres, et les personnes adonnées à la culture des sciences, ont accueilli les deux ouvrages que j'ai publiés, à Paris sous le titre d'Exercices de Mathématiques, à Turin sous le titre de Résumés analytiques, m'encourage à faire paraitre aujourd'hui un troisième recueil destiné à offrir le développement des théories exposées dans les deux premiers, et les résultats aux quels de nouvelles recherches m'auront conduit. On sait assez quels événements m'ont fait un devoir de renoncer aux trois chaires que j'occupais en France, et quelle voix auguste a pu seule me déterminer à quitter encore la chaire de Physique Mathématique que le Roi de Sardaigne avait daigné me confier. Mais ce n'est pas sans doute auprès des descendants de Louis XIV, auprès de ces Princes protecteurs si éclairés des lettres et des sciences, que je pourrais me croire dispensé de faire de continuels efforts pour contribuer à leurs progrès. Les nouveaux Exercices paraîtront comme les précédents par livraisons qui, s'il est possible, car sur cette terre et dans ce siècle surtout on ne saurait répondre du lendemain, se succéderont à des époques peu éloignées les unes des autres. Les premières livraisons offriront en totalité le Mémoire sur la dispersion de la lumière, Mémoire dont les deux premiers paragraphes seulement ont été déjà publiés en 1830.

A la dernière livraison de chaque année sera jointe une table des matières.

MÉMOIRE

SUR

LA DISPERSION DE LA LUMIÈRE

PAR

M. A. L. CAUCHY,

MEMBRE DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE PARIS, DES SOCIÉTÉS ROYALES DE LONDRES, DE BERLIN, DE PRAGUE, ETC.

PUBLIÉ PAR LA SOCIÉTÉ ROYALE DES SCIENCES DE PRAGUE.

PRAGUE,

CHEZ *J. G. CALVE*, LIBRAIRE.

1836.

Avis au Lecteur.

Il y a environ un an, que Monsieur ***A. L. Cauchy***, connu par des ouvrages qui le mettent au rang des premiers mathématiciens, présenta à la Société royale des Sciences son dernier traité, intitulé: *Mémoire sur la Dispersion de la Lumière*, pour le recevoir au nombre des dissertations, que cette Société publie de temps à autre, et qu' elle fait imprimer à ses frais.

La Société royale, toujours empressée de contribuer à l'avancement des sciences, et par cette raison prête à tous les sacrifices, résolut de faire examiner, par une commission choisie dans son sein, le traité de M. ***Cauchy***, et d'en faire statuer sur le mérite pour l'impression.

Le rapport de cette commission, étant de la teneur: »que ce traité »concernait une des branches les plus importantes de la physique et de la »mécanique, qu'il étendait de beaucoup les connaissances dans ces matières, »qu'il surpassait tous les traités semblables d'autres écrivains dans cette par- »tie, et qu'en conséquence les sciences physico-mathématiques feraient, par »cette publication, un progrès considérable;« la Société royale accepta le manuscrit de M. ***Cauchy***, pour le faire imprimer.

Mais, comme, par des présentations supplémentaires de la continuation du manuscrit, le traité dépassait les bornes d'une dissertation, il ne pouvait être reçu dans la série de celles, que la Société royale publie de temps en temps, et il a du être imprimé comme un ouvrage séparé et indépendant. On a choisi pour cet effet, un plus grand format, savoir le format in-quarto afin de mieux rendre les longues formules et les tables très-étendues de l'auteur, et de mettre au jour une édition aussi élégante et correcte que possible.

Prague, le 10 juin 1836.

La Société royale des Sciences de Prague en Bohème.

NOUVEAUX EXERCICES DE MATHÉMATIQUES.

CONSIDÉRATIONS GÉNÉRALES.

Dans un Mémoire précédent, nous avons fait voir comment les lois de propagation et de polarisation de la lumière pouvaient se déduire des équations aux différences partielles qui représentent le mouvement d'un système de molécules sollicitées par des forces d'attraction ou de répulsion mutuelle (*voir* le V^e Volume des *Exercices de Mathématiques*). Toutefois, comme les formules (11) de la page 131 du IV^e Volume des *Exercices* [1], auxquelles nous avons eu recours, ne sont qu'approximatives, les lois que nous avons établies ne sont pas rigoureusement exactes. Pour s'en convaincre, il suffit d'observer que, dans l'énoncé de ces lois, on ne trouve rien qui soit relatif à la nature de la couleur. Or la dispersion des couleurs par le prisme prouve que, dans les corps transparents, la vitesse de propagation de la lumière n'est pas la même pour les différentes couleurs. D'ailleurs les physiciens qui ont adopté l'hypothèse des ondulations lumineuses supposent avec raison que la nature de chaque couleur est déterminée par la durée plus ou moins grande des oscillations des molécules de l'éther, de même que la nature du son produit dans un corps solide ou fluide est déterminée par la durée plus ou moins grande des oscillations des molécules de ce corps. Il est donc naturel d'admettre qu'il existe une relation entre la vitesse de propagation de la lumière et

[1] *Œuvres de Cauchy*, S. II, T. IX, p. 166.

la durée des vibrations lumineuses. Or cette relation ne saurait se déduire des équations aux différences partielles inscrites sous le n° 11, à la page 131 du IV[e] Volume des *Exercices* (¹). Mais il importe de remarquer que ces équations se tirent elles-mêmes de formules plus générales que j'ai données dans le III[e] Volume (p. 190 et suiv.) (²). Frappé de cette idée, M. Coriolis me conseilla de rechercher si la considération des termes que j'avais négligés en passant des unes aux autres ne fournirait pas le moyen d'expliquer la dispersion des couleurs. En suivant ce conseil, je suis heureusement parvenu à des formules à l'aide desquelles on peut, non seulement assigner la cause du phénomène dont il s'agit, mais encore en découvrir les lois qui, malgré les nombreux et importants travaux des physiciens sur cette matière, étaient restées inconnues jusqu'à ce jour.

Pour que l'on puisse saisir plus facilement les principes sur lesquels repose l'analyse dont je vais faire usage, je reproduirai d'abord en peu de mots les équations différentielles qui déterminent le mouvement d'un système de molécules sollicitées par des forces d'attraction ou de répulsion mutuelle.

§ I. — *Équations différentielles du mouvement d'un système de molécules sollicitées par des forces d'attraction ou de répulsion mutuelle.*

Considérons un système de molécules ou points matériels distribués arbitrairement dans une portion de l'espace et sollicités au mouvement par des forces d'attraction ou de répulsion mutuelle. Soient

$\mathfrak{m}$ la masse d'une de ces molécules;

$m, m', m'', \ldots$ celles des autres, et supposons que, dans un état d'équilibre du système, x, y, z désignent les coordonnées de la molécule $\mathfrak{m}$ rapportées à trois axes rectangulaires;

$x+\Delta x, y+\Delta y, z+\Delta z$ les coordonnées d'une autre molécule m;

r la distance des molécules $\mathfrak{m}$ et m;

(¹) *Œuvres de Cauchy*, S. II, T. IX, p. 166.
(²) *Id.*, S. II, T. VIII, p. 229 et suiv.

α, β, γ les angles formés par le rayon vecteur r avec les demi-axes des coordonnées positives.

Admettons d'ailleurs que l'attraction ou la répulsion mutuelle des deux masses $\mathfrak{m}$ et m, étant proportionnelle à ces masses et à une fonction de la distance r, soit représentée, au signe près, par

$$\mathfrak{m} m\, \mathrm{f}(r), \tag{1}$$

$\mathrm{f}(r)$ désignant une quantité positive lorsque les masses $\mathfrak{m}$, m s'attirent, et négative lorsqu'elles se repoussent. La résultante des attractions ou répulsions exercées sur la molécule $\mathfrak{m}$ par les molécules m, m', ... aura pour projections algébriques sur les axes coordonnés

$$\mathfrak{m}\, \mathrm{S}[m \cos\alpha\, \mathrm{f}(r)], \quad \mathfrak{m}\, \mathrm{S}[m \cos\beta\, \mathrm{f}(r)], \quad \mathfrak{m}\, \mathrm{S}[m \cos\gamma\, \mathrm{f}(r)], \tag{2}$$

la lettre S indiquant une somme de termes semblables, mais relatifs aux diverses molécules $m, m', \ldots$, et, puisque le système est, par hypothèse, en équilibre, on aura nécessairement

$$\mathrm{S}[m \cos\alpha\, \mathrm{f}(r)] = 0, \quad \mathrm{S}[m \cos\beta\, \mathrm{f}(r)] = 0, \quad \mathrm{S}[m \cos\gamma\, \mathrm{f}(r)] = 0. \tag{3}$$

Ajoutons que les quantités Δx, Δy, Δz pourront être exprimées en fonction de r et des angles α, β, γ par les formules

$$\Delta x = r\cos\alpha, \quad \Delta y = r\cos\beta, \quad \Delta z = r\cos\gamma. \tag{4}$$

Supposons maintenant que, le système venant à se mouvoir, les molécules $\mathfrak{m}, m, m', \ldots$ se déplacent dans l'espace, mais de manière que la distance de deux molécules $\mathfrak{m}$ et m varie dans un rapport peu différent de l'unité. Soient, au bout du temps t,

$$\xi, \quad \eta, \quad \zeta$$

des fonctions de x, y, z, t qui représentent les déplacements très petits de la molécule $\mathfrak{m}$, mesurés parallèlement aux axes coordonnés, et

$$r(1+\varepsilon)$$

la distance des deux molécules $\mathfrak{m}$, m. La quantité très petite ε exprimera la dilatation linéaire mesurée suivant le rayon vecteur r; et, comme les coordonnées respectives des molécules $\mathfrak{m}$, m deviendront

$$x+\xi,\quad y+\eta,\quad z+\zeta,$$
$$x+\xi+\Delta(x+\xi),\quad y+\eta+\Delta(y+\eta),\quad z+\zeta+\Delta(z+\zeta),$$

les projections algébriques de la distance $r(1+\varepsilon)$ seront évidemment

$$\Delta x+\Delta\xi,\quad \Delta y+\Delta\eta,\quad \Delta z+\Delta\zeta$$

ou, ce qui revient au même,

$$r\cos\alpha+\Delta\xi,\quad r\cos\beta+\Delta\eta,\quad r\cos\gamma+\Delta\zeta.$$

On trouvera par suite

$$(5)\qquad r^2(1+\varepsilon)^2=(r\cos\alpha+\Delta\xi)^2+(r\cos\beta+\Delta\eta)^2+(r\cos\gamma+\Delta\zeta)^2,$$

et l'on en conclura

$$(6)\qquad 1+\varepsilon=\sqrt{1+\frac{2}{r}(\cos\alpha\,\Delta\xi+\cos\beta\,\Delta\eta+\cos\gamma\,\Delta\zeta)+\frac{1}{r^2}(\Delta\xi^2+\Delta\eta^2+\Delta\zeta^2)}.$$

D'ailleurs, au bout du temps t, le rayon vecteur mené de la molécule $\mathfrak{m}$ à la molécule m formera, avec les demi-axes des coordonnées positives, des angles dont les cosinus seront représentés, non plus par

$$(7)\qquad \cos\alpha=\frac{\Delta x}{r},\qquad \cos\beta=\frac{\Delta y}{r},\qquad \cos\gamma=\frac{\Delta z}{r},$$

mais par

$$(8)\qquad \begin{cases} \dfrac{\Delta x+\Delta\xi}{r(1+\varepsilon)}=\dfrac{\cos\alpha+\dfrac{\Delta\xi}{r}}{1+\varepsilon}, \\[2ex] \dfrac{\Delta y+\Delta\eta}{r(1+\varepsilon)}=\dfrac{\cos\beta+\dfrac{\Delta\eta}{r}}{1+\varepsilon}, \\[2ex] \dfrac{\Delta z+\Delta\zeta}{r(1+\varepsilon)}=\dfrac{\cos\gamma+\dfrac{\Delta\zeta}{r}}{1+\varepsilon}. \end{cases}$$

En conséquence, les projections algébriques de la force motrice résultante des attractions ou répulsions exercées par les molécules m,

m', ... sur la molécule $\mathfrak{m}$, deviendront respectivement égales aux trois produits

$$(9)\qquad \begin{cases} \mathfrak{m}\,\mathrm{S}\left\{m\left(\cos\alpha+\dfrac{\Delta\xi}{r}\right)\dfrac{\mathfrak{f}[r(1+\varepsilon)]}{1+\varepsilon}\right\}, \\[2ex] \mathfrak{m}\,\mathrm{S}\left\{m\left(\cos\beta+\dfrac{\Delta\eta}{r}\right)\dfrac{\mathfrak{f}[r(1+\varepsilon)]}{1+\varepsilon}\right\}, \\[2ex] \mathfrak{m}\,\mathrm{S}\left\{m\left(\cos\gamma+\dfrac{\Delta\zeta}{r}\right)\dfrac{\mathfrak{f}[r(1+\varepsilon)]}{1+\varepsilon}\right\}, \end{cases}$$

tandis que les coefficients de $\mathfrak{m}$ dans ces produits, savoir

$$(10)\qquad \begin{cases} \mathrm{S}\left\{m\left(\cos\alpha+\dfrac{\Delta\xi}{r}\right)\dfrac{\mathfrak{f}[r(1+\varepsilon)]}{1+\varepsilon}\right\}, \\[2ex] \mathrm{S}\left\{m\left(\cos\beta+\dfrac{\Delta\eta}{r}\right)\dfrac{\mathfrak{f}[r(1+\varepsilon)]}{1+\varepsilon}\right\}, \\[2ex] \mathrm{S}\left\{m\left(\cos\gamma+\dfrac{\Delta\zeta}{r}\right)\dfrac{\mathfrak{f}[r(1+\varepsilon)]}{1+\varepsilon}\right\}, \end{cases}$$

représenteront les projections algébriques de la force accélératrice qui sollicitera la molécule $\mathfrak{m}$, et qui sera due aux actions des molécules m, m', ... D'autre part, si l'on prend x, y, z, t pour variables indépendantes, les projections algébriques de la force accélératrice capable de produire le mouvement observé de la molécule m pourront être représentées par les expressions

$$\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2},\quad \frac{\partial^2\eta}{\partial t^2},\quad \frac{\partial^2\zeta}{\partial t^2},$$

puisque ξ, η, ζ désignent les déplacements très petits de la molécule $\mathfrak{m}$ mesurés parallèlement aux axes de x, y, z. Donc, si le mouvement est uniquement dû aux actions moléculaires, on aura

$$(11)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial^2\xi}{\partial t^2}=\mathrm{S}\left\{m\left(\cos\alpha+\dfrac{\Delta\xi}{r}\right)\dfrac{\mathfrak{f}[r(1+\varepsilon)]}{1+\varepsilon}\right\}, \\[2ex] \dfrac{\partial^2\eta}{\partial t^2}=\mathrm{S}\left\{m\left(\cos\beta+\dfrac{\Delta\eta}{r}\right)\dfrac{\mathfrak{f}[r(1+\varepsilon)]}{1+\varepsilon}\right\}, \\[2ex] \dfrac{\partial^2\zeta}{\partial t^2}=\mathrm{S}\left\{m\left(\cos\gamma+\dfrac{\Delta\zeta}{r}\right)\dfrac{\mathfrak{f}[r(1+\varepsilon)]}{1+\varepsilon}\right\}. \end{cases}$$

Concevons à présent que, les déplacements ξ, η, ζ et leurs différences finies étant considérés comme des quantités infiniment petites du premier ordre, on néglige, dans les seconds membres des formules (11), les infiniment petits des ordres supérieurs au premier. Alors, comme on aura, en vertu de l'équation (6),

$$\varepsilon = \frac{1}{r}(\cos\alpha\,\Delta\xi + \cos\beta\,\Delta\eta + \cos\gamma\,\Delta\zeta), \tag{12}$$

on ne devra conserver dans le calcul que la première puissance de ε, et, en faisant, pour abréger,

$$f(r) = r\,\mathfrak{f}'(r) - \mathfrak{f}(r), \tag{13}$$

on trouvera

$$\frac{\mathfrak{f}[r(1+\varepsilon)]}{1+\varepsilon} = \mathfrak{f}(r) + \varepsilon f(r). \tag{14}$$

Par suite on tirera des formules (11), réunies aux équations (3),

$$\left\{\begin{aligned} \frac{\partial^2\xi}{\partial t^2} &= \mathrm{S}\left[m\frac{\mathfrak{f}(r)}{r}\Delta\xi\right] + \mathrm{S}[m f(r)\varepsilon\cos\alpha],\\ \frac{\partial^2\eta}{\partial t^2} &= \mathrm{S}\left[m\frac{\mathfrak{f}(r)}{r}\Delta\eta\right] + \mathrm{S}[m f(r)\varepsilon\cos\beta],\\ \frac{\partial^2\zeta}{\partial t^2} &= \mathrm{S}\left[m\frac{\mathfrak{f}(r)}{r}\Delta\zeta\right] + \mathrm{S}[m f(r)\varepsilon\cos\gamma] \end{aligned}\right. \tag{15}$$

ou, ce qui revient au même,

$$\left\{\begin{aligned} \frac{\partial^2\xi}{\partial t^2} &= \mathrm{S}\left[m\frac{\mathfrak{f}(r)+\cos^2\alpha\, f(r)}{r}\Delta\xi\right] + \mathrm{S}\left[m\frac{\cos\alpha\cos\beta\, f(r)}{r}\Delta\eta\right] + \mathrm{S}\left[m\frac{\cos\alpha\cos\gamma\, f(r)}{r}\Delta\zeta\right],\\ \frac{\partial^2\eta}{\partial t^2} &= \mathrm{S}\left[m\frac{\cos\beta\cos\alpha\, f(r)}{r}\Delta\xi\right] + \mathrm{S}\left[m\frac{\mathfrak{f}(r)+\cos^2\beta\, f(r)}{r}\Delta\eta\right] + \mathrm{S}\left[m\frac{\cos\beta\cos\gamma\, f(r)}{r}\Delta\zeta\right],\\ \frac{\partial^2\zeta}{\partial t^2} &= \mathrm{S}\left[m\frac{\cos\gamma\cos\alpha\, f(r)}{r}\Delta\xi\right] + \mathrm{S}\left[m\frac{\cos\gamma\cos\beta\, f(r)}{r}\Delta\eta\right] + \mathrm{S}\left[m\frac{\mathfrak{f}(r)+\cos^2\gamma\, f(r)}{r}\Delta\zeta\right]. \end{aligned}\right. \tag{16}$$

Telles sont les équations propres à représenter le mouvement d'un système de molécules qui, étant sollicitées par des forces d'attraction ou de répulsion mutuelle, s'écartent très peu des positions qu'elles occupaient dans un état d'équilibre du système.

§ II. — *Intégration des equations établies dans le paragraphe précédent.*

Quelles que soient les valeurs générales de ξ, η, ζ propres à vérifier les équations (16) du paragraphe précédent, on pourra toujours les supposer développées en séries d'exponentielles dont les exposants soient des fonctions linéaires des variables indépendantes x, y, z. En d'autres termes, on pourra représenter ξ, η, ζ par des expressions de la forme

$$\left\{\begin{aligned} \xi &= \Sigma\mathfrak{a}\, e^{(ux+vy+wz)\sqrt{-1}},\\ \eta &= \Sigma\mathfrak{b}\, e^{(ux+vy+wz)\sqrt{-1}},\\ \zeta &= \Sigma\mathfrak{c}\, e^{(ux+vy+wz)\sqrt{-1}}, \end{aligned}\right. \tag{1}$$

u, v, w désignant des constantes arbitraires, mais réelles, $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}$ des fonctions réelles ou imaginaires de x, y, z, t, convenablement choisies, et le signe Σ indiquant une somme de termes semblables les uns aux autres, mais correspondants à divers systèmes de valeurs des constantes arbitraires u, v, w. Cela posé, soient $\mathfrak{d}, \mathfrak{e}, \mathfrak{f}$ les parties réelles des fonctions $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}$, et $-\mathfrak{g}, -\mathfrak{h}, -\mathfrak{i}$ les coefficients de $\sqrt{-1}$ dans ces mêmes fonctions. Les formules (1) deviendront

$$\left\{\begin{aligned} \xi &= \Sigma(\mathfrak{d} - \mathfrak{g}\sqrt{-1})\, e^{(ux+vy+wz)\sqrt{-1}},\\ \eta &= \Sigma(\mathfrak{e} - \mathfrak{h}\sqrt{-1})\, e^{(ux+vy+wz)\sqrt{-1}},\\ \zeta &= \Sigma(\mathfrak{f} - \mathfrak{i}\sqrt{-1})\, e^{(ux+vy+wz)\sqrt{-1}}. \end{aligned}\right. \tag{2}$$

Comme on aura d'ailleurs

$$e^{(ux+vy+wz)\sqrt{-1}} = \cos(ux+vy+wz) + \sqrt{-1}\sin(ux+vy+wz), \tag{3}$$

on tirera des équations (2), en développant les produits renfermés sous le signe Σ et supprimant les parties imaginaires dans les valeurs de ξ, η, ζ qui doivent rester réelles,

$$\left\{\begin{aligned} \xi &= \Sigma[\mathfrak{d}\cos(ux+vy+wz) + \mathfrak{g}\sin(ux+vy+wz)],\\ \eta &= \Sigma[\mathfrak{e}\cos(ux+vy+wz) + \mathfrak{h}\sin(ux+vy+wz)],\\ \zeta &= \Sigma[\mathfrak{f}\cos(ux+vy+wz) + \mathfrak{i}\sin(ux+vy+wz)]. \end{aligned}\right. \tag{4}$$

Soient maintenant

$$(u^2+v^2+w^2)^{\frac{1}{2}}=k \tag{5}$$

et

$$\frac{u}{k}=a, \quad \frac{v}{k}=b, \quad \frac{w}{k}=c. \tag{6}$$

Les constantes a, b, c vérifieront la formule

$$a^2+b^2+c^2=1 \tag{7}$$

et représenteront les cosinus des angles formés par une certaine droite OP avec les demi-axes des coordonnées positives. De plus, comme on tirera des équations (6)

$$u=ka, \quad v=kb, \quad w=kc \tag{8}$$

et, par suite,

$$ux+vy+wz=k(ax+by+cz), \tag{9}$$

il est clair qu'en posant, pour abréger,

$$\iota=ax+by+cz, \tag{10}$$

on réduira les équations (4) aux suivantes :

$$\left\{\begin{aligned} \xi &= \Sigma(\mathfrak{d}\cos k\iota+\mathfrak{g}\sin k\iota),\\ \eta &= \Sigma(\mathfrak{e}\cos k\iota+\mathfrak{h}\sin k\iota),\\ \zeta &= \Sigma(\mathfrak{f}\cos k\iota+\mathfrak{i}\sin k\iota). \end{aligned}\right. \tag{11}$$

Alors ι représentera la distance du point (x, y, z) à un plan $OO'O''$ mené par l'origine et perpendiculaire au demi-axe OP, cette distance étant prise avec le signe $+$ ou avec le signe $-$, suivant qu'elle se mesurera dans le même sens que le demi-axe OP, ou en sens inverse, à partir du plan $OO'O''$ dont l'équation sera

$$ax+by+cz=0. \tag{12}$$

Il reste à faire voir comment on pourra trouver les valeurs des coefficients $\mathfrak{d}$, $\mathfrak{e}$, $\mathfrak{f}$, $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{h}$, $\mathfrak{i}$ exprimées en fonctions de la variable t et des constantes arbitraires k, a, b, c. On y parviendra sans peine à l'aide des considérations suivantes.

Considérons d'abord le cas particulier où chacune des inconnues ξ, η, ζ serait représentée par un seul des termes compris sous le signe Σ dans les formules (11), c'est-à-dire le cas où l'on aurait

$$\left\{\begin{aligned} \xi &= \mathfrak{d}\cos k\iota+\mathfrak{g}\sin k\iota,\\ \eta &= \mathfrak{e}\cos k\iota+\mathfrak{h}\sin k\iota,\\ \zeta &= \mathfrak{f}\cos k\iota+\mathfrak{i}\sin k\iota. \end{aligned}\right. \tag{13}$$

Alors, en indiquant par la caractéristique Δ l'accroissement que reçoit une fonction de x, y, z, quand on fait croître x de Δx, y de Δy, z de Δz, et par la lettre δ l'angle que forme le rayon r avec le demi-axe OP, on trouvera

$$\cos\delta=a\cos\alpha+b\cos\beta+c\cos\gamma; \tag{14}$$

puis on tirera : 1° de l'équation (10), jointe aux formules (4) du § I,

$$\Delta\iota=a\,\Delta x+b\,\Delta y+c\,\Delta z=r\cos\delta \tag{15}$$

et, par suite,

$$\left\{\begin{aligned} \Delta\cos k\iota &= \cos(k\iota+k\,\Delta\iota)-\cos k\iota\\ &= -[1-\cos(kr\cos\delta)]\cos k\iota-\sin(kr\cos\delta)\sin k\iota,\\ \Delta\sin k\iota &= \sin(k\iota+k\,\Delta\iota)-\sin k\iota\\ &= -[1-\cos(kr\cos\delta)]\sin k\iota+\sin(kr\cos\delta)\cos k\iota; \end{aligned}\right. \tag{16}$$

2° de la première des équations (13)

$$\left\{\begin{aligned} \Delta\xi = &-(\mathfrak{d}\cos k\iota+\mathfrak{g}\sin k\iota)[1-\cos(kr\cos\delta)]\\ &+(\mathfrak{g}\cos k\iota-\mathfrak{d}\sin k\iota)\sin(kr\cos\delta). \end{aligned}\right. \tag{17}$$

Donc, si l'on prend pour variables indépendantes ι et t, au lieu de x, y, z, t, on aura simplement

$$\Delta\xi=-[1-\cos(kr\cos\delta)]\xi+\frac{\sin(kr\cos\delta)}{k}\frac{\partial\xi}{\partial\iota} \tag{18}$$

ou, ce qui revient au même,

$$(19)\quad \left\{\begin{array}{l} \Delta\xi = -2\xi \sin^2\left(\dfrac{kr\cos\delta}{2}\right) + \dfrac{\sin(kr\cos\delta)}{k}\dfrac{\partial\xi}{\partial t}; \\ \text{on trouvera de même} \\ \Delta\eta = -2\eta \sin^2\left(\dfrac{kr\cos\delta}{2}\right) + \dfrac{\sin(kr\cos\delta)}{k}\dfrac{\partial\eta}{\partial t}, \\ \Delta\zeta = -2\zeta \sin^2\left(\dfrac{kr\cos\delta}{2}\right) + \dfrac{\sin(kr\cos\delta)}{k}\dfrac{\partial\zeta}{\partial t}. \end{array}\right.$$

En substituant les valeurs précédentes de $\Delta\xi$, $\Delta\eta$, $\Delta\zeta$ dans les équations (16) du § I et faisant, pour abréger,

$$(20)\quad \left\{\begin{array}{l} \mathcal{L} = \mathrm{S}\left[\dfrac{2m\,\mathfrak{f}(r)}{r}\sin^2\left(\dfrac{kr\cos\delta}{2}\right)\right] + \mathrm{S}\left[\dfrac{2m\,f(r)}{r}\cos^2\alpha\sin^2\left(\dfrac{kr\cos\delta}{2}\right)\right], \\ \mathcal{M} = \mathrm{S}\left[\dfrac{2m\,\mathfrak{f}(r)}{r}\sin^2\left(\dfrac{kr\cos\delta}{2}\right)\right] + \mathrm{S}\left[\dfrac{2m\,f(r)}{r}\cos^2\beta\sin^2\left(\dfrac{kr\cos\delta}{2}\right)\right], \\ \mathcal{N} = \mathrm{S}\left[\dfrac{2m\,\mathfrak{f}(r)}{r}\sin^2\left(\dfrac{kr\cos\delta}{2}\right)\right] + \mathrm{S}\left[\dfrac{2m\,f(r)}{r}\cos^2\gamma\sin^2\left(\dfrac{kr\cos\delta}{2}\right)\right]; \end{array}\right.$$

$$(21)\quad \left\{\begin{array}{l} \mathcal{P} = \mathrm{S}\left[\dfrac{2m\,f(r)}{r}\cos\beta\cos\gamma\sin^2\left(\dfrac{kr\cos\delta}{2}\right)\right], \\ \mathcal{Q} = \mathrm{S}\left[\dfrac{2m\,f(r)}{r}\cos\gamma\cos\alpha\sin^2\left(\dfrac{kr\cos\delta}{2}\right)\right], \\ \mathcal{R} = \mathrm{S}\left[\dfrac{2m\,f(r)}{r}\cos\alpha\cos\beta\sin^2\left(\dfrac{kr\cos\delta}{2}\right)\right]; \end{array}\right.$$

$$(22)\quad \left\{\begin{array}{l} \mathcal{L}' = \mathrm{S}\left[\dfrac{m\,\mathfrak{f}(r)}{kr}\sin(kr\cos\delta)\right] + \mathrm{S}\left[\dfrac{m\,f(r)}{kr}\cos^2\alpha\sin(kr\cos\delta)\right], \\ \mathcal{M}' = \mathrm{S}\left[\dfrac{m\,\mathfrak{f}(r)}{kr}\sin(kr\cos\delta)\right] + \mathrm{S}\left[\dfrac{m\,f(r)}{kr}\cos^2\beta\sin(kr\cos\delta)\right], \\ \mathcal{N}' = \mathrm{S}\left[\dfrac{m\,\mathfrak{f}(r)}{kr}\sin(kr\cos\delta)\right] + \mathrm{S}\left[\dfrac{m\,f(r)}{kr}\cos^2\gamma\sin(kr\cos\delta)\right]; \end{array}\right.$$

$$(23)\quad \left\{\begin{array}{l} \mathcal{P}' = \mathrm{S}\left[\dfrac{m\,f(r)}{kr}\cos\beta\cos\gamma\sin(kr\cos\delta)\right], \\ \mathcal{Q}' = \mathrm{S}\left[\dfrac{m\,f(r)}{kr}\cos\gamma\cos\alpha\sin(kr\cos\delta)\right], \\ \mathcal{R}' = \mathrm{S}\left[\dfrac{m\,f(r)}{kr}\cos\alpha\cos\beta\sin(kr\cos\delta)\right], \end{array}\right.$$

on en conclura

$$(24)\quad \left\{\begin{array}{l} \dfrac{\partial^2\xi}{\partial t^2} = -(\mathcal{L}\xi + \mathcal{R}\eta + \mathcal{Q}\zeta) + \left(\mathcal{L}'\dfrac{\partial\xi}{\partial t} + \mathcal{R}'\dfrac{\partial\eta}{\partial t} + \mathcal{Q}'\dfrac{\partial\zeta}{\partial t}\right), \\ \dfrac{\partial^2\eta}{\partial t^2} = -(\mathcal{R}\xi + \mathcal{M}\eta + \mathcal{P}\zeta) + \left(\mathcal{R}'\dfrac{\partial\xi}{\partial t} + \mathcal{M}'\dfrac{\partial\eta}{\partial t} + \mathcal{P}'\dfrac{\partial\zeta}{\partial t}\right), \\ \dfrac{\partial^2\zeta}{\partial t^2} = -(\mathcal{Q}\xi + \mathcal{P}\eta + \mathcal{N}\zeta) + \left(\mathcal{Q}'\dfrac{\partial\xi}{\partial t} + \mathcal{P}'\dfrac{\partial\eta}{\partial t} + \mathcal{N}'\dfrac{\partial\zeta}{\partial t}\right). \end{array}\right.$$

Les équations (24) se simplifient lorsque, dans l'état d'équilibre du système proposé, les masses des molécules m, m', m'', ... sont deux à deux égales entre elles et distribuées symétriquement de part et d'autre d'une molécule quelconque $\mathfrak{m}$ sur des droites menées par le point avec lequel cette molécule coïncide. En effet, comme la valeur de $\cos\delta$ déterminée par l'équation (14), et par suite les termes dont se composent les sommes indiquées par le signe S dans chacune des formules (22), (23), changent de signe en même temps que les cosinus des trois angles α, β, γ, il est clair que ces termes, comparés deux à deux, seront, dans le cas dont il s'agit, équivalents au signe près, mais affectés de signes contraires. Donc alors les coefficients désignés par $\mathcal{L}'$, $\mathcal{M}'$, $\mathcal{N}'$, $\mathcal{P}'$, $\mathcal{Q}'$, $\mathcal{R}'$ s'évanouiront, et les équations (24) se réduiront à

$$(25)\quad \left\{\begin{array}{l} \dfrac{\partial^2\xi}{\partial t^2} = -(\mathcal{L}\xi + \mathcal{R}\eta + \mathcal{Q}\zeta), \\ \dfrac{\partial^2\eta}{\partial t^2} = -(\mathcal{R}\xi + \mathcal{M}\eta + \mathcal{P}\zeta), \\ \dfrac{\partial^2\zeta}{\partial t^2} = -(\mathcal{Q}\xi + \mathcal{P}\eta + \mathcal{N}\zeta). \end{array}\right.$$

Les équations (25) fournissent le moyen de déterminer, au bout du temps t, les trois fonctions ξ, η, ζ, ou, ce qui revient au même, les six fonctions $\mathfrak{d}$, $\mathfrak{e}$, $\mathfrak{f}$, $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{h}$, $\mathfrak{i}$, lorsque l'on connaît les valeurs initiales de ces mêmes fonctions et de leurs dérivées prises par rapport à t. En effet, représentons par

$$\xi_0,\quad \eta_0,\quad \zeta_0,\quad \mathfrak{d}_0,\quad \mathfrak{e}_0,\quad \mathfrak{f}_0,\quad \mathfrak{g}_0,\quad \mathfrak{h}_0,\quad \mathfrak{i}_0$$

les valeurs initiales de

$$\xi,\quad \eta,\quad \zeta,\quad \mathfrak{d},\quad \mathfrak{e},\quad \mathfrak{f},\quad \mathfrak{g},\quad \mathfrak{h},\quad \mathfrak{i},$$

et par

$$\xi_1,\quad \eta_1,\quad \zeta_1,\quad \mathfrak{d}_1,\quad \mathfrak{e}_1,\quad \mathfrak{f}_1,\quad \mathfrak{g}_1,\quad \mathfrak{h}_1,\quad \mathfrak{i}_1$$

les valeurs initiales de

$$\frac{\partial \xi}{\partial t},\quad \frac{\partial \eta}{\partial t},\quad \frac{\partial \zeta}{\partial t},\quad \frac{\partial \mathfrak{d}}{\partial t},\quad \frac{\partial \mathfrak{e}}{\partial t},\quad \frac{\partial \mathfrak{f}}{\partial t},\quad \frac{\partial \mathfrak{g}}{\partial t},\quad \frac{\partial \mathfrak{h}}{\partial t},\quad \frac{\partial \mathfrak{i}}{\partial t}.$$

On aura, en vertu des formules (13),

$$(26)\qquad \begin{cases} \xi_0 = \mathfrak{d}_0 \cos k\tau + \mathfrak{g}_0 \sin k\tau, \\ \eta_0 = \mathfrak{e}_0 \cos k\tau + \mathfrak{h}_0 \sin k\tau, \\ \zeta_0 = \mathfrak{f}_0 \cos k\tau + \mathfrak{i}_0 \sin k\tau, \end{cases}$$

$$(27)\qquad \begin{cases} \xi_1 = \mathfrak{d}_1 \cos k\tau + \mathfrak{g}_1 \sin k\tau, \\ \eta_1 = \mathfrak{e}_1 \cos k\tau + \mathfrak{h}_1 \sin k\tau, \\ \zeta_1 = \mathfrak{f}_1 \cos k\tau + \mathfrak{i}_1 \sin k\tau, \end{cases}$$

et l'on pourra déduire des équations (25) les valeurs de ξ, η, ζ relatives à un instant quelconque, en suivant la méthode que nous allons indiquer.

Soient $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$ les cosinus des angles que forme, avec les demi-axes des x, y, z positives, une droite OA menée par l'origine et prolongée dans un certain sens. On aura

$$(28)\qquad \mathcal{A}^2 + \mathcal{B}^2 + \mathcal{C}^2 = 1,$$

et la droite OA sera représentée par la formule

$$(29)\qquad \frac{x}{\mathcal{A}} = \frac{y}{\mathcal{B}} = \frac{z}{\mathcal{C}}.$$

Soit encore

$$(30)\qquad \mathfrak{s} = \mathcal{A}\xi + \mathcal{B}\eta + \mathcal{C}\zeta.$$

La valeur de $\mathfrak{s}$, déterminée par la formule (30), représentera le déplacement de la molécule $\mathfrak{m}$ mesuré parallèlement à la droite OA, et sera

positive si ce déplacement se compte dans le même sens que la direction OA, mais négative dans le cas contraire. D'ailleurs, si l'on combine par voie d'addition les formules (25) après avoir multiplié les deux membres de la première par $\mathcal{A}$, de la seconde par $\mathcal{B}$, de la troisième par $\mathcal{C}$, et si l'on choisit $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$, ou plutôt le rapport $\frac{\mathcal{B}}{\mathcal{A}}$, $\frac{\mathcal{C}}{\mathcal{A}}$, de manière que les trois fractions

$$(31)\qquad \frac{\mathcal{L}\mathcal{A} + \mathcal{R}\mathcal{B} + \mathcal{Q}\mathcal{C}}{\mathcal{A}},\quad \frac{\mathcal{R}\mathcal{A} + \mathcal{M}\mathcal{B} + \mathcal{P}\mathcal{C}}{\mathcal{B}},\quad \frac{\mathcal{Q}\mathcal{A} + \mathcal{P}\mathcal{B} + \mathcal{N}\mathcal{C}}{\mathcal{C}}$$

deviennent égales entre elles, on trouvera, en désignant par s^2 la valeur commune de ces trois fractions,

$$(32)\qquad \frac{\partial^2 \mathfrak{s}}{\partial t^2} = -s^2 \mathfrak{s}.$$

Or il existe trois valeurs de s^2 propres à vérifier la formule

$$(33)\qquad \frac{\mathcal{L}\mathcal{A} + \mathcal{R}\mathcal{B} + \mathcal{Q}\mathcal{C}}{\mathcal{A}} = \frac{\mathcal{R}\mathcal{A} + \mathcal{M}\mathcal{B} + \mathcal{P}\mathcal{C}}{\mathcal{B}} = \frac{\mathcal{Q}\mathcal{A} + \mathcal{P}\mathcal{B} + \mathcal{N}\mathcal{C}}{\mathcal{C}} = s^2$$

et, par conséquent, les trois équations

$$(34)\qquad \begin{cases} (\mathcal{L} - s^2)\mathcal{A} + \mathcal{R}\mathcal{B} + \mathcal{Q}\mathcal{C} = 0, \\ \mathcal{R}\mathcal{A} + (\mathcal{M} - s^2)\mathcal{B} + \mathcal{P}\mathcal{C} = 0, \\ \mathcal{Q}\mathcal{A} + \mathcal{P}\mathcal{B} + (\mathcal{N} - s^2)\mathcal{C} = 0, \end{cases}$$

desquelles on tire

$$(35)\qquad \begin{cases} (\mathcal{L} - s^2)(\mathcal{M} - s^2)(\mathcal{N} - s^2) \\ \quad - \mathcal{P}^2(\mathcal{L} - s^2) - \mathcal{Q}^2(\mathcal{M} - s^2) - \mathcal{R}^2(\mathcal{N} - s^2) + 2\mathcal{P}\mathcal{Q}\mathcal{R} = 0. \end{cases}$$

De plus, à ces trois valeurs de s^2 correspondent trois systèmes de valeurs pour les rapports $\frac{\mathcal{B}}{\mathcal{A}}$, $\frac{\mathcal{C}}{\mathcal{A}}$, et, par conséquent, trois droites OA′, OA″, OA‴ avec lesquelles on peut faire coïncider successivement la droite OA. Enfin, il résulte de la forme des équations (34) que ces trois droites se confondent avec les trois axes de la surface du second degré représentée par l'équation

$$(36)\qquad \mathcal{L}x^2 + \mathcal{M}y^2 + \mathcal{N}z^2 + 2\mathcal{P}yz + 2\mathcal{Q}zx + 2\mathcal{R}xy = 1,$$

x, y, z désignant de nouvelles coordonnées relatives à de nouveaux axes rectangulaires qui seraient menées par le point O parallèlement aux axes des x, y, z; et l'on peut ajouter que, dans le cas où cette surface est un ellipsoïde, les trois valeurs de $\frac{1}{s^2}$ sont précisément les carrés des trois demi-axes. Donc, à l'aide de la formule (32), on pourra déterminer, au bout du temps t, les trois déplacements de la molécule m mesurés parallèlement aux trois axes de l'ellipsoïde et, par suite, à trois droites perpendiculaires entre elles. Si l'on désigne ces trois déplacements par $\mathfrak{s}'$, $\mathfrak{s}''$, $\mathfrak{s}'''$ et les valeurs correspondantes de $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$ par

$$\mathcal{A}',\quad \mathcal{B}',\quad \mathcal{C}',\quad \mathcal{A}'',\quad \mathcal{B}'',\quad \mathcal{C}'',\quad \mathcal{A}''',\quad \mathcal{B}''',\quad \mathcal{C}''',$$

on tirera de la formule (30)

$$(37)\qquad \left\{\begin{aligned} \mathfrak{s}' &= \mathcal{A}'\xi + \mathcal{B}'\eta + \mathcal{C}'\zeta,\\ \mathfrak{s}'' &= \mathcal{A}''\xi + \mathcal{B}''\eta + \mathcal{C}''\zeta,\\ \mathfrak{s}''' &= \mathcal{A}'''\xi + \mathcal{B}'''\eta + \mathcal{C}'''\zeta; \end{aligned}\right.$$

et, comme on aura d'ailleurs

$$(38)\qquad \left\{\begin{aligned} &\mathcal{A}'^2 + \mathcal{B}'^2 + \mathcal{C}'^2 = 1,\\ &\mathcal{A}''^2 + \mathcal{B}''^2 + \mathcal{C}''^2 = 1,\\ &\mathcal{A}'''^2 + \mathcal{B}'''^2 + \mathcal{C}'''^2 = 1,\\ &\mathcal{A}''\mathcal{A}''' + \mathcal{B}''\mathcal{B}''' + \mathcal{C}''\mathcal{C}''' = 0,\\ &\mathcal{A}'''\mathcal{A}' + \mathcal{B}'''\mathcal{B}' + \mathcal{C}'''\mathcal{C}' = 0,\\ &\mathcal{A}'\mathcal{A}'' + \mathcal{B}'\mathcal{B}'' + \mathcal{C}'\mathcal{C}'' = 0, \end{aligned}\right.$$

puisque les trois droites OA', OA'', OA''' se coupent à angles droits, on conclura des formules (37)

$$(39)\qquad \left\{\begin{aligned} \xi &= \mathcal{A}'\mathfrak{s}' + \mathcal{A}''\mathfrak{s}'' + \mathcal{A}'''\mathfrak{s}''',\\ \eta &= \mathcal{B}'\mathfrak{s}' + \mathcal{B}''\mathfrak{s}'' + \mathcal{B}'''\mathfrak{s}''',\\ \zeta &= \mathcal{C}'\mathfrak{s}' + \mathcal{C}''\mathfrak{s}'' + \mathcal{C}'''\mathfrak{s}'''. \end{aligned}\right.$$

Quant aux valeurs générales de $\mathfrak{s}'$, $\mathfrak{s}''$, $\mathfrak{s}'''$, on les déduira de l'équation (32) en opérant comme il suit.

Soient $\mathfrak{s}_0$, $\mathfrak{s}_1$ les valeurs initiales de $\mathfrak{s}$ et de $\frac{\partial \mathfrak{s}}{\partial t}$. On aura

$$(40)\qquad \mathfrak{s}_0 = \mathcal{A}\xi_0 + \mathcal{B}\eta_0 + \mathcal{C}\zeta_0,$$

$$(41)\qquad \mathfrak{s}_1 = \mathcal{A}\xi_1 + \mathcal{B}\eta_1 + \mathcal{C}\zeta_1$$

ou, ce qui revient au même,

$$(42)\qquad \mathfrak{s}_0 = (\mathfrak{d}_0\mathcal{A} + \mathfrak{e}_0\mathcal{B} + \mathfrak{f}_0\mathcal{C})\cos k\mathfrak{t} + (\mathfrak{g}_0\mathcal{A} + \mathfrak{h}_0\mathcal{B} + \mathfrak{i}_0\mathcal{C})\sin k\mathfrak{t},$$

$$(43)\qquad \mathfrak{s}_1 = (\mathfrak{d}_1\mathcal{A} + \mathfrak{e}_1\mathcal{B} + \mathfrak{f}_1\mathcal{C})\cos k\mathfrak{t} + (\mathfrak{g}_1\mathcal{A} + \mathfrak{h}_1\mathcal{B} + \mathfrak{i}_1\mathcal{C})\sin k\mathfrak{t},$$

et l'on tire de l'équation (32)

$$(44)\qquad \mathfrak{s} = \mathfrak{s}_0\cos st + \mathfrak{s}_1\frac{\sin st}{s} = \mathfrak{s}_0\cos st + \mathfrak{s}_1\int_0^t \cos st\,dt$$

ou, en d'autres termes,

$$(45)\qquad \left\{\begin{aligned} \mathfrak{s} = {} & (\mathfrak{d}_0\mathcal{A} + \mathfrak{e}_0\mathcal{B} + \mathfrak{f}_0\mathcal{C})\frac{\cos(k\mathfrak{t}+st)+\cos(k\mathfrak{t}-st)}{2} + (\mathfrak{g}_0\mathcal{A} + \mathfrak{h}_0\mathcal{B} + \mathfrak{i}_0\mathcal{C})\frac{\sin(k\mathfrak{t}+st)+\sin(k\mathfrak{t}-st)}{2}\\ & + \int_0^t\left[(\mathfrak{d}_1\mathcal{A} + \mathfrak{e}_1\mathcal{B} + \mathfrak{f}_1\mathcal{C})\frac{\cos(k\mathfrak{t}+st)+\cos(k\mathfrak{t}-st)}{2} + (\mathfrak{g}_1\mathcal{A} + \mathfrak{h}_1\mathcal{B} + \mathfrak{i}_1\mathcal{C})\frac{\sin(k\mathfrak{t}+st)+\sin(k\mathfrak{t}-st)}{2}\right]dt. \end{aligned}\right.$$

Cela posé, faisons, pour abréger,

$$(46)\qquad \left\{\begin{aligned} \mathfrak{d}_0\cos k\mathfrak{t} + \mathfrak{g}_0\sin k\mathfrak{t} &= \varphi(\mathfrak{t}),\\ \mathfrak{e}_0\cos k\mathfrak{t} + \mathfrak{h}_0\sin k\mathfrak{t} &= \chi(\mathfrak{t}),\\ \mathfrak{f}_0\cos k\mathfrak{t} + \mathfrak{i}_0\sin k\mathfrak{t} &= \psi(\mathfrak{t}), \end{aligned}\right.$$

$$(47)\qquad \left\{\begin{aligned} \mathfrak{d}_1\cos k\mathfrak{t} + \mathfrak{g}_1\sin k\mathfrak{t} &= \Phi(\mathfrak{t}),\\ \mathfrak{e}_1\cos k\mathfrak{t} + \mathfrak{h}_1\sin k\mathfrak{t} &= \mathrm{X}(\mathfrak{t}),\\ \mathfrak{f}_1\cos k\mathfrak{t} + \mathfrak{i}_1\sin k\mathfrak{t} &= \Psi(\mathfrak{t}) \end{aligned}\right.$$

et

$$(48)\qquad \frac{s}{k} = \Omega.$$

Les fonctions

$$(49)\qquad \varphi(\mathfrak{t}),\quad \chi(\mathfrak{t}),\quad \psi(\mathfrak{t}),\quad \Phi(\mathfrak{t}),\quad \mathrm{X}(\mathfrak{t}),\quad \Psi(\mathfrak{t})$$

représenteront les valeurs initiales de

$$\xi,\quad \eta,\quad \zeta,\quad \frac{\partial\xi}{\partial t},\quad \frac{\partial\eta}{\partial t},\quad \frac{\partial\zeta}{\partial t},$$

et l'on tirera de l'équation (44), réunie aux formules (42), (43),

$$(50)\quad \left\{\begin{aligned} \mathfrak{s} = {} & \mathcal{A}\,\frac{\varphi(\iota+\Omega t)+\varphi(\iota-\Omega t)}{2} + \mathcal{B}\,\frac{\chi(\iota+\Omega t)+\chi(\iota-\Omega t)}{2} + \mathcal{C}\,\frac{\psi(\iota+\Omega t)+\psi(\iota-\Omega t)}{2} \\ & + \int_0^t \left[\mathcal{A}\,\frac{\Phi(\iota+\Omega t)+\Phi(\iota-\Omega t)}{2} + \mathcal{B}\,\frac{\mathrm{X}(\iota+\Omega t)+\mathrm{X}(\iota-\Omega t)}{2} + \mathcal{C}\,\frac{\Psi(\iota+\Omega t)+\Psi(\iota-\Omega t)}{2}\right] dt. \end{aligned}\right.$$

Concevons maintenant que, les trois valeurs de s^2 propres à vérifier l'équation (35) étant positives, les valeurs correspondantes et positives de s soient désignées par s', s'', s''' et les valeurs correspondantes de Ω par Ω', Ω'', Ω'''. La formule (50) donnera

$$(51)\quad \left\{\begin{aligned} \mathfrak{s}' = {} & \mathcal{A}'\,\frac{\varphi(\iota+\Omega' t)+\varphi(\iota-\Omega' t)}{2} + \mathcal{B}'\,\frac{\chi(\iota+\Omega' t)+\chi(\iota-\Omega' t)}{2} + \mathcal{C}'\,\frac{\psi(\iota+\Omega' t)+\psi(\iota-\Omega' t)}{2} \\ & + \int_0^t \left[\mathcal{A}'\,\frac{\Phi(\iota+\Omega' t)+\Phi(\iota-\Omega' t)}{2} + \mathcal{B}'\,\frac{\mathrm{X}(\iota+\Omega' t)+\mathrm{X}(\iota-\Omega' t)}{2} + \mathcal{C}'\,\frac{\Psi(\iota+\Omega' t)+\Psi(\iota-\Omega' t)}{2}\right] dt, \end{aligned}\right.$$

$$(52)\quad \left\{\begin{aligned} \mathfrak{s}'' = {} & \mathcal{A}''\,\frac{\varphi(\iota+\Omega'' t)+\varphi(\iota-\Omega'' t)}{2} + \mathcal{B}''\,\frac{\chi(\iota+\Omega'' t)+\chi(\iota-\Omega'' t)}{2} + \mathcal{C}''\,\frac{\psi(\iota+\Omega'' t)+\psi(\iota-\Omega'' t)}{2} \\ & + \int_0^t \left[\mathcal{A}''\,\frac{\Phi(\iota+\Omega'' t)+\Phi(\iota-\Omega'' t)}{2} + \mathcal{B}''\,\frac{\mathrm{X}(\iota+\Omega'' t)+\mathrm{X}(\iota-\Omega'' t)}{2} + \mathcal{C}''\,\frac{\Psi(\iota+\Omega'' t)+\Psi(\iota-\Omega'' t)}{2}\right] dt, \end{aligned}\right.$$

$$(53)\quad \left\{\begin{aligned} \mathfrak{s}''' = {} & \mathcal{A}'''\,\frac{\varphi(\iota+\Omega''' t)+\varphi(\iota-\Omega''' t)}{2} + \mathcal{B}'''\,\frac{\chi(\iota+\Omega''' t)+\chi(\iota-\Omega''' t)}{2} + \mathcal{C}'''\,\frac{\psi(\iota+\Omega''' t)+\psi(\iota-\Omega''' t)}{2} \\ & + \int_0^t \left[\mathcal{A}'''\,\frac{\Phi(\iota+\Omega''' t)+\Phi(\iota-\Omega''' t)}{2} + \mathcal{B}'''\,\frac{\mathrm{X}(\iota+\Omega''' t)+\mathrm{X}(\iota-\Omega''' t)}{2} + \mathcal{C}'''\,\frac{\Psi(\iota+\Omega''' t)+\Psi(\iota-\Omega''' t)}{2}\right] dt. \end{aligned}\right.$$

En substituant les valeurs précédentes de $\mathfrak{s}'$, $\mathfrak{s}''$, $\mathfrak{s}'''$ dans les équations (39), on obtiendra pour ξ, η, ζ des fonctions de ι et de t qui auront la double propriété de satisfaire, au bout d'un temps quelconque t, aux équations (25) et de vérifier, pour une valeur nulle de t, les conditions

$$(54)\quad \left\{\begin{aligned} & \xi = \varphi(\iota), && \eta = \chi(\iota), && \zeta = \psi(\iota), \\ & \frac{\partial \xi}{\partial t} = \Phi(\iota), && \frac{\partial \eta}{\partial t} = \mathrm{X}(\iota), && \frac{\partial \zeta}{\partial t} = \Psi(\iota). \end{aligned}\right.$$

Les inconnues ξ, η, ζ et $\mathfrak{s}'$, $\mathfrak{s}''$, $\mathfrak{s}'''$, ou les déplacements de la molécule m mesurés parallèlement aux axes des x, y, z et à ceux de l'ellipsoïde (36), étant déterminées comme on vient de le dire, on en déduira sans peine la vitesse ω de la molécule m au bout d'un temps

quelconque t. En effet, si l'on projette cette vitesse : 1° sur les axes des x, y, z; 2° sur les axes de l'ellipsoïde (36), on trouvera pour projections algébriques, dans le premier cas,

$$(55)\qquad \frac{\partial \xi}{\partial t},\quad \frac{\partial \eta}{\partial t},\quad \frac{\partial \zeta}{\partial t},$$

dans le second cas

$$(56)\qquad \frac{\partial \mathfrak{s}'}{\partial t},\quad \frac{\partial \mathfrak{s}''}{\partial t},\quad \frac{\partial \mathfrak{s}'''}{\partial t},$$

et par suite on aura

$$(57)\qquad \omega^2 = \left(\frac{\partial \xi}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial \eta}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial \zeta}{\partial t}\right)^2 = \left(\frac{\partial \mathfrak{s}'}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial \mathfrak{s}''}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial \mathfrak{s}'''}{\partial t}\right)^2.$$

Il est bon d'observer que les équations (51), (52), (53) sont toutes trois comprises dans la formule (50), de laquelle on les déduit en prenant successivement $s = s'$, $s = s''$, $s = s'''$. Si d'ailleurs on pose

$$(58)\qquad \varpi(\iota) = \mathcal{A}\,\varphi(\iota) + \mathcal{B}\,\chi(\iota) + \mathcal{C}\,\psi(\iota),$$

$$(59)\qquad \Pi(\iota) = \mathcal{A}\,\Phi(\iota) + \mathcal{B}\,\mathrm{X}(\iota) + \mathcal{C}\,\Psi(\iota)$$

ou, ce qui revient au même,

$$(60)\qquad \varpi(\iota) = (\mathfrak{d}_0\mathcal{A} + \mathfrak{e}_0\mathcal{B} + \mathfrak{f}_0\mathcal{C})\cos k\iota + (\mathfrak{g}_0\mathcal{A} + \mathfrak{h}_0\mathcal{B} + \mathfrak{i}_0\mathcal{C})\sin k\iota,$$

$$(61)\qquad \Pi(\iota) = (\mathfrak{d}_1\mathcal{A} + \mathfrak{e}_1\mathcal{B} + \mathfrak{f}_1\mathcal{C})\cos k\iota + (\mathfrak{g}_1\mathcal{A} + \mathfrak{h}_1\mathcal{B} + \mathfrak{i}_1\mathcal{C})\sin k\iota,$$

la formule (50) sera réduite à

$$(62)\qquad \mathfrak{s} = \frac{\varpi(\iota+\Omega t)+\varpi(\iota-\Omega t)}{2} + \int_0^t \frac{\Pi(\iota+\Omega t)+\Pi(\iota-\Omega t)}{2}\,dt.$$

Dans le mouvement que représentent les équations (39) réunies aux formules (51), (52), (53), les déplacements et les vitesses des molécules dépendent des seules variables ι et t. Donc, au bout d'un temps quelconque t, ces déplacements et ces vitesses seront les mêmes pour les molécules situées à la même distance ι du plan représenté par l'équation (12).

Lorsque, à l'origine du mouvement, les vitesses et les déplacements des molécules sont parallèles à l'un des trois axes de l'ellipsoïde (36), les fonctions $\varpi(\mathfrak{r})$, $\Pi(\mathfrak{r})$ déterminées par les formules (60), (61), et l'inconnue $\mathfrak{s}$ déterminée par l'équation (62) s'évanouissent pour deux des valeurs de s représentées par s', s'', s'''; en d'autres termes, deux des déplacements absolus et les vitesses absolues des molécules restent toujours parallèles au même axe de l'ellipsoïde. Si, dans le cas dont il s'agit, celui des déplacements $\mathfrak{s}'$, $\mathfrak{s}''$, $\mathfrak{s}'''$ qui diffère de zéro étant désigné par $\mathfrak{s}$, les valeurs initiales de $\mathfrak{s}$ et $\frac{\partial \mathfrak{s}}{\partial t}$, savoir $\varpi(\mathfrak{r})$ et $\Pi(\mathfrak{r})$, vérifient la condition

$$\Pi(\mathfrak{r}) = \Omega\,\varpi'(\mathfrak{r}), \tag{63}$$

la formule (62) donnera

$$\mathfrak{s} = \varpi(\mathfrak{r} + \Omega t). \tag{64}$$

Alors la valeur de $\mathfrak{s}$ sera la même pour les molécules situées, au bout du temps t, à la distance $\mathfrak{r}$ du plan $O'O''O'''$ représenté par l'équation (12), et pour les molécules situées au bout du temps $t + \Delta t$, à la distance $\mathfrak{r} + \Delta\mathfrak{r}$, la quantité $\Delta\mathfrak{r}$ étant déterminée par la formule

$$\Delta\mathfrak{r} = -\Omega\,\Delta t. \tag{65}$$

Donc le mouvement d'une molécule quelconque $\mathfrak{m}$ se transmettra immédiatement à d'autres molécules voisines situées du côté des $\mathfrak{r}$ négatives, et la vitesse avec laquelle le mouvement se propagera dans une direction perpendiculaire au plan $OO'O''$, ou la valeur numérique de $\frac{\Delta\mathfrak{r}}{\Delta t}$ fournie par l'équation (20), sera précisément la constante positive Ω. De plus, comme la fonction $\varpi(\mathfrak{r})$, déterminée par l'équation (60), reprend la même valeur quand on y fait croître $\mathfrak{r}$ de $\frac{2\pi}{k}$, il est clair que la fonction $\mathfrak{s} = \varpi(\mathfrak{r} + \Omega t)$ reprendra la même valeur quand on attribuera l'accroissement $\frac{2\pi}{k}$ à la variable $\mathfrak{r}$, ou l'accroissement $\frac{2\pi}{k\Omega}$ à la variable t. Cela posé, faisons

$$l = \frac{2\pi}{k} \tag{66}$$

et

$$T = \frac{2\pi}{k\Omega}. \tag{67}$$

Si, au bout du temps t, on divise l'espace en une infinité de tranches par des plans parallèles les uns aux autres, et correspondants aux valeurs de $\mathfrak{r}$ qui reproduisent des valeurs données de la fonction $\mathfrak{s}$ et de sa dérivée $\frac{\partial \mathfrak{s}}{\partial t}$, la constante l représentera évidemment l'épaisseur de chaque tranche, tandis que la constante T représentera la durée des oscillations isochrones, successivement exécutées par une molécule. Nous nommerons *ondes planes* les tranches dont nous venons de parler, et, pour fixer les idées, nous supposerons ces ondes comprises entre des plans tracés de manière qu'au bout du temps t l'épaisseur de l'une d'elles soit divisée en parties égales par le plan auquel appartient l'équation

$$\mathfrak{r} = -\Omega t \tag{68}$$

ou

$$ax + by + cz = -\Omega t. \tag{69}$$

Alors on aura constamment

$$\mathfrak{s} = \varpi(0) \quad \text{et} \quad \frac{\partial \mathfrak{s}}{\partial t} = \Omega\,\varpi'(0) \tag{70}$$

ou, ce qui revient au même,

$$\mathfrak{s} = \mathfrak{d}_0 \mathcal{A} + \mathfrak{e}_0 \mathcal{B} + \mathfrak{f}_0 \mathcal{C} \quad \text{et} \quad \frac{\partial \mathfrak{s}}{\partial t} = k\Omega(\mathfrak{g}_0 \mathcal{A} + \mathfrak{h}_0 \mathcal{B} + \mathfrak{i}_0 \mathcal{C}) \tag{71}$$

pour tous les points situés dans les plans qui diviseront en parties égales les épaisseurs des différentes ondes, et

$$\mathfrak{s} = \varpi\left(\frac{l}{2}\right), \quad \frac{\partial \mathfrak{s}}{\partial t} = k\Omega\,\varpi'\left(\frac{l}{2}\right) \tag{72}$$

ou, ce qui revient au même,

$$\mathfrak{s} = -(\mathfrak{d}_0 \mathcal{A} + \mathfrak{e}_0 \mathcal{B} + \mathfrak{f}_0 \mathcal{C}), \quad \frac{\partial \mathfrak{s}}{\partial t} = -k\Omega(\mathfrak{g}_0 \mathcal{A} + \mathfrak{h}_0 \mathcal{B} + \mathfrak{i}_0 \mathcal{C}) \tag{73}$$

pour les points situés dans les surfaces planes qui sépareront ces mêmes ondes les unes des autres. De plus, la vitesse de propagation d'une onde plane, c'est-à-dire, en d'autres termes, la vitesse de déplacement du plan (68) ou (69), mesurée dans une direction perpendiculaire à ce plan, sera constante, en vertu de la formule (68), et représentée par Ω. Comme on aura d'ailleurs, en vertu des formules (66), (67),

$$\Omega \mathrm{T} = l \tag{74}$$

ou

$$\Omega = \frac{l}{\mathrm{T}}, \tag{75}$$

il est clair que la vitesse Ω sera en raison directe des épaisseurs des ondes et en raison inverse des durées des oscillations moléculaires. Enfin on tirera des équations (48), (66), (67)

$$k = \frac{2\pi}{l}, \tag{76}$$

$$s = k\Omega = \frac{2\pi}{\mathrm{T}}, \tag{77}$$

et par suite la formule (60), qui détermine s en fonction de k pour une direction donnée au plan $OO'O''$, pourra servir encore à déterminer T ou Ω en fonction de l. Donc il existera généralement une relation entre la vitesse de propagation Ω d'une onde plane et son épaisseur l.

Si la condition (63) était remplacée par la suivante

$$\Pi(\text{r}) = -\Omega\varpi'(\text{r}), \tag{78}$$

la formule (62) donnerait

$$8 = \varpi(\text{r} - \Omega t). \tag{79}$$

Alors la valeur de 8 serait la même pour les molécules situées au bout du temps t à la distance r, et au bout du temps $t + \Delta t$ à la distance $\text{r} + \Delta\text{r}$ du plan $OO'O''$, la quantité Δr étant déterminée par l'équation

$$\Delta\text{r} = \Omega\,\Delta t. \tag{80}$$

Donc le mouvement d'une molécule quelconque m se transmettrait immédiatement à d'autres molécules voisines, situées du côté des r positives, et la vitesse avec laquelle le mouvement se propagerait dans une direction perpendiculaire au plan $OO'O''$, ou la valeur de $\frac{\Delta\text{r}}{\Delta t}$ fournie par l'équation (68), serait toujours la constante positive Ω.

Dans ce cas, on pourrait encore diviser l'espace en une infinité de tranches ou ondes planes égales de même épaisseur, à l'aide des plans parallèles au plan $OO'O''$, et correspondants aux valeurs de r qui reproduisent les valeurs de 8 et $\frac{\partial 8}{\partial t}$ fournies par les équations (72) et (73). Alors aussi l'épaisseur de l'une des ondes serait divisée en deux parties égales par le plan auquel appartiendrait l'équation

$$\text{r} = \Omega t \tag{81}$$

ou

$$ax + by + cz = \Omega t, \tag{82}$$

et les formules (80) et (71) continueraient de subsister pour tous les points situés dans les plans qui diviseraient en parties égales les épaisseurs des différentes ondes. Enfin, l'épaisseur l d'une onde plane, sa vitesse de propagation Ω et la durée T des oscillations moléculaires vérifieraient toujours les équations (66), (67), qui entraîneraient encore les formules (74), (75), (77).

Si les fonctions $\varpi(\text{r})$, $\Pi(\text{r})$ ne vérifiaient ni la condition (63), ni la condition (78), le mouvement ne cesserait pas d'être déterminé par les trois formules (51), (52), (53), dont chacune est semblable à la formule (62), et on pourrait le considérer comme produit par la composition de six mouvements pareils à ceux que représentent les équations (64) et (79). Les ondes planes, correspondantes aux six mouvements dont il s'agit, se propageraient dans l'espace avec des vitesses deux à deux égales entre elles, mais dirigées en sens inverses, et représentées par Ω', Ω'', Ω'''.

Si, au premier instant, les déplacements et les vitesses des molécules, mesurés parallèlement aux axes coordonnés, étaient représentés par des sommes de termes semblables à ceux que renferment les seconds membres des formules (26), (27), en sorte qu'on eût

$$(83)\qquad \begin{cases} \xi_0 = \Sigma(\mathfrak{d}_0 \cos k\iota + \mathfrak{g}_0 \sin k\iota), \\ \eta_0 = \Sigma(\mathfrak{e}_0 \cos k\iota + \mathfrak{h}_0 \sin k\iota), \\ \zeta_0 = \Sigma(\mathfrak{f}_0 \cos k\iota + \mathfrak{i}_0 \sin k\iota), \end{cases}$$

$$(84)\qquad \begin{cases} \xi_1 = \Sigma(\mathfrak{d}_1 \cos k\iota + \mathfrak{g}_1 \sin k\iota), \\ \eta_1 = \Sigma(\mathfrak{e}_1 \cos k\iota + \mathfrak{h}_1 \sin k\iota), \\ \zeta_1 = \Sigma(\mathfrak{f}_1 \cos k\iota + \mathfrak{i}_1 \sin k\iota) \end{cases}$$

ou, ce qui revient au même,

$$(85)\qquad \begin{cases} \xi_0 = \Sigma[\mathfrak{d}_0 \cos(ux+vy+wz) + \mathfrak{g}_0 \sin(ux+vy+wz)], \\ \eta_0 = \Sigma[\mathfrak{e}_0 \cos(ux+vy+wz) + \mathfrak{h}_0 \sin(ux+vy+wz)], \\ \zeta_0 = \Sigma[\mathfrak{f}_0 \cos(ux+vy+wz) + \mathfrak{i}_0 \sin(ux+vy+wz)], \end{cases}$$

$$(86)\qquad \begin{cases} \xi_1 = \Sigma[\mathfrak{d}_1 \cos(ux+vy+wz) + \mathfrak{g}_1 \sin(ux+vy+wz)], \\ \eta_1 = \Sigma[\mathfrak{e}_1 \cos(ux+vy+wz) + \mathfrak{h}_1 \sin(ux+vy+wz)], \\ \zeta_1 = \Sigma[\mathfrak{f}_1 \cos(ux+vy+wz) + \mathfrak{i}_1 \sin(ux+vy+wz)], \end{cases}$$

la fonction ι étant toujours déterminée par la formule (10), et le signe Σ indiquant l'addition de plusieurs ou même d'une infinité de termes correspondants à divers systèmes de valeurs des constantes a, b, c, k ou u, v, w; alors, à la place des formules (39), on obtiendrait les suivantes

$$(87)\qquad \begin{cases} \xi = \Sigma(\mathcal{A}'\mathfrak{s}' + \mathcal{A}''\mathfrak{s}'' + \mathcal{A}'''\mathfrak{s}'''), \\ \eta = \Sigma(\mathcal{B}'\mathfrak{s}' + \mathcal{B}''\mathfrak{s}'' + \mathcal{B}'''\mathfrak{s}'''), \\ \zeta = \Sigma(\mathcal{C}'\mathfrak{s}' + \mathcal{C}''\mathfrak{s}'' + \mathcal{C}'''\mathfrak{s}'''), \end{cases}$$

les valeurs de $\mathfrak{s}'$, $\mathfrak{s}''$, $\mathfrak{s}'''$ étant encore celles qui se déduisent des équations (51), (52), (53), jointes aux formules (46), (47). Alors aussi le mouvement du système pourrait être considéré comme produit par la composition de plusieurs ou même d'une infinité de mouvements semblables à ceux que représentent les équations (64) et (76).

Il est bon d'observer que, dans les formules (85), (86), (87), les

sommes indiquées par le signe Σ peuvent être composées de termes très peu différents les uns des autres, et se changer, par suite, en intégrales définies. Concevons, pour fixer les idées, que l'on remplace le signe Σ par trois signes $\int$, indiquant une intégration triple effectuée par rapport aux quantités u, v, w entre les limites $-\infty$, $+\infty$. Substituons en même temps aux coefficients

$$(88)\qquad \begin{cases} \mathfrak{d}_0, & \mathfrak{e}_0, & \mathfrak{f}_0, & \mathfrak{g}_0, & \mathfrak{h}_0, & \mathfrak{i}_0, \\ \mathfrak{d}_1, & \mathfrak{e}_1, & \mathfrak{f}_1, & \mathfrak{g}_1, & \mathfrak{h}_1, & \mathfrak{i}_1 \end{cases}$$

et aux fonctions

$$(89)\qquad \begin{cases} \mathfrak{s},\quad \mathfrak{s}',\quad \mathfrak{s}'',\quad \mathfrak{s}''', \\ \mathfrak{s}_0 = \varpi(\iota), \qquad \mathfrak{s}_1 = \Pi(\iota) \end{cases}$$

des produits de la forme

$$(90)\qquad \begin{cases} \mathfrak{D}_0\,du\,dv\,dw, & \mathfrak{E}_0\,du\,dv\,dw, & \mathfrak{F}_0\,du\,dv\,dw, & \mathfrak{G}_0\,du\,dv\,dw, & \mathfrak{H}_0\,du\,dv\,dw, & \mathfrak{I}_0\,du\,dv\,dw, \\ \mathfrak{D}_1\,du\,dv\,dw, & \mathfrak{E}_1\,du\,dv\,dw, & \mathfrak{F}_1\,du\,dv\,dw, & \mathfrak{G}_1\,du\,dv\,dw, & \mathfrak{H}_1\,du\,dv\,dw, & \mathfrak{I}_1\,du\,dv\,dw \end{cases}$$

et

$$(91)\qquad \begin{cases} \Theta\,du\,dv\,dw,\quad \Theta'\,du\,dv\,dw,\quad \Theta''\,du\,dv\,dw,\quad \Theta'''\,du\,dv\,dw, \\ \Theta_0\,du\,dv\,dw = \Pi_0(\iota)\,du\,dv\,dw, \qquad \Theta_1\,du\,dv\,dw = \Pi_1(\iota)\,du\,dv\,dw. \end{cases}$$

Alors, au lieu des formules (85), (86), on obtiendra les suivantes

$$(92)\qquad \begin{cases} \xi_0 = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}[\mathfrak{D}_0 \cos(ux+vy+wz) + \mathfrak{G}_0 \sin(ux+vy+wz)]\,du\,dv\,dw, \\ \eta_0 = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}[\mathfrak{E}_0 \cos(ux+vy+wz) + \mathfrak{H}_0 \sin(ux+vy+wz)]\,du\,dv\,dw, \\ \zeta_0 = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}[\mathfrak{F}_0 \cos(ux+vy+wz) + \mathfrak{I}_0 \sin(ux+vy+wz)]\,du\,dv\,dw, \end{cases}$$

$$(93)\qquad \begin{cases} \xi_1 = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}[\mathfrak{D}_1 \cos(ux+vy+wz) + \mathfrak{G}_1 \sin(ux+vy+wz)]\,du\,dv\,dw, \\ \eta_1 = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}[\mathfrak{E}_1 \cos(ux+vy+wz) + \mathfrak{H}_1 \sin(ux+vy+wz)]\,du\,dv\,dw, \\ \zeta_1 = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}[\mathfrak{F}_1 \cos(ux+vy+wz) + \mathfrak{I}_1 \sin(ux+vy+wz)]\,du\,dv\,dw, \end{cases}$$

dans lesquelles

$$\mathfrak{D}_0,\ \mathfrak{E}_0,\ \mathfrak{F}_0,\ \mathfrak{G}_0,\ \mathfrak{H}_0,\ \mathfrak{I}_0;\quad \mathfrak{D}_1,\ \mathfrak{E}_1,\ \mathfrak{F}_1,\ \mathfrak{G}_1,\ \mathfrak{H}_1,\ \mathfrak{I}_1$$

pourront être des fonctions quelconques de u, v, w. De plus, les formules (60), (61), (62) donneront

$$(94)\quad \Pi_0(\iota) = (\mathfrak{D}_0\mathcal{A} + \mathfrak{E}_0\mathcal{B} + \mathfrak{F}_0\mathcal{C})\cos k\iota + (\mathfrak{G}_0\mathcal{A} + \mathfrak{H}_0\mathcal{B} + \mathfrak{I}_0\mathcal{C})\sin k\iota,$$

$$(95)\quad \Pi_1(\iota) = (\mathfrak{D}_1\mathcal{A} + \mathfrak{E}_1\mathcal{B} + \mathfrak{F}_1\mathcal{C})\cos k\iota + (\mathfrak{G}_1\mathcal{A} + \mathfrak{H}_1\mathcal{B} + \mathfrak{I}_1\mathcal{C})\sin k\iota,$$

$$(96)\quad \Theta = \frac{\Pi_0(\iota + \Omega t) + \Pi_0(\iota - \Omega t)}{2} + \int_0^t \frac{\Pi_1(\iota + \Omega t) + \Pi_1(\iota - \Omega t)}{2}\,dt,$$

et l'on en déduira les valeurs de Θ', Θ'', Θ''' en attribuant à $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$ les trois systèmes de valeurs $\mathcal{A}'$, $\mathcal{B}'$, $\mathcal{C}'$; $\mathcal{A}''$, $\mathcal{B}''$, $\mathcal{C}''$; $\mathcal{A}'''$, $\mathcal{B}'''$, $\mathcal{C}'''$. Cela posé, les valeurs de ξ, η, ζ, précédemment déterminées par les équations (87), deviendront

$$(97)\quad \left\{\begin{aligned} \xi &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} (\mathcal{A}'\Theta' + \mathcal{A}''\Theta'' + \mathcal{A}'''\Theta''')\,du\,dv\,dw,\\ \eta &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} (\mathcal{B}'\Theta' + \mathcal{B}''\Theta'' + \mathcal{B}'''\Theta''')\,du\,dv\,dw,\\ \zeta &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} (\mathcal{C}'\Theta' + \mathcal{C}''\Theta'' + \mathcal{C}'''\Theta''')\,du\,dv\,dw. \end{aligned}\right.$$

On peut choisir les coefficients

$$\mathfrak{D}_0,\ \mathfrak{E}_0,\ \mathfrak{F}_0,\ \mathfrak{G}_0,\ \mathfrak{H}_0,\ \mathfrak{I}_0;\quad \mathfrak{D}_1,\ \mathfrak{E}_1,\ \mathfrak{F}_1,\ \mathfrak{G}_1,\ \mathfrak{H}_1,\ \mathfrak{I}_1,$$

de manière que les valeurs de

$$\xi_0,\ \eta_0,\ \zeta_0;\quad \xi_1,\ \eta_1,\ \zeta_1,$$

fournies par les équations (92), (93), se réduisent à des fonctions quelconques de x, y, z, savoir à

$$(98)\quad \xi_0 = \varphi(x, y, z),\qquad \eta_0 = \chi(x, y, z),\qquad \zeta_0 = \psi(x, y, z),$$

$$(99)\quad \xi_1 = \Phi(x, y, z),\qquad \eta_1 = \mathrm{X}(x, y, z),\qquad \zeta_1 = \Psi(x, y, z).$$

En effet, comme on a généralement, quelle que soit la fonction $f(x, y, z)$,

$$(100)\quad f(x,y,z) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^3 \int\!\!\int\!\!\int\!\!\int\!\!\int\!\!\int e^{u(x-\lambda)\sqrt{-1}}\, e^{v(y-\mu)\sqrt{-1}}\, e^{w(z-\nu)\sqrt{-1}} f(\lambda,\mu,\nu)\,d\lambda\,d\mu\,d\nu\,du\,dv\,dw,$$

toutes les intégrations étant effectuées entre les limites $-\infty$, $+\infty$, ou, ce qui revient au même,

$$(101)\quad \left\{\begin{aligned} f(x,y,z) &= \left(\frac{1}{2\pi}\right)^3 \int\!\!\int\!\!\int\!\!\int\!\!\int\!\!\int \cos[u(x-\lambda) + v(y-\mu) + w(z-\nu)]\, f(\lambda,\mu,\nu)\,d\lambda\,d\mu\,d\nu\,du\,dv\,dw\\ &= \left(\frac{1}{2\pi}\right)^3 \int\!\!\int\!\!\int\!\!\int\!\!\int\!\!\int \cos(ux + vy + wz)\cos(u\lambda + v\mu + w\nu)\, f(\lambda,\mu,\nu)\,d\lambda\,d\mu\,d\nu\,du\,dv\,dw\\ &+ \left(\frac{1}{2\pi}\right)^3 \int\!\!\int\!\!\int\!\!\int\!\!\int\!\!\int \sin(ux + vy + wz)\sin(u\lambda + v\mu + w\nu)\, f(\lambda,\mu,\nu)\,d\lambda\,d\mu\,d\nu\,du\,dv\,dw, \end{aligned}\right.$$

il est clair qu'on fera coïncider les équations (92), (93) avec les formules (95), (96), si l'on prend

$$(102)\quad \left\{\begin{aligned} \mathfrak{D}_0 &= \left(\frac{1}{2\pi}\right)^3 \int\!\!\int\!\!\int \cos(u\lambda + v\mu + w\nu)\, \varphi\ \lambda,\mu,\nu)\,d\lambda\,d\mu\,d\nu, & \mathfrak{G}_0 &= \left(\frac{1}{2\pi}\right)^3 \int\!\!\int\!\!\int \sin(u\lambda + v\mu + w\nu)\, \varphi(\lambda,\mu,\nu)\,d\lambda\,d\mu\,d\nu,\\ \mathfrak{E}_0 &= \left(\frac{1}{2\pi}\right)^3 \int\!\!\int\!\!\int \cos(u\lambda + v\mu + w\nu)\, \chi(\lambda,\mu,\nu)\,d\lambda\,d\mu\,d\nu, & \mathfrak{H}_0 &= \left(\frac{1}{2\pi}\right)^3 \int\!\!\int\!\!\int \sin(u\lambda + v\mu + w\nu)\, \chi(\lambda,\mu,\nu)\,d\lambda\,d\mu\,d\nu,\\ \mathfrak{F}_0 &= \left(\frac{1}{2\pi}\right)^3 \int\!\!\int\!\!\int \cos(u\lambda + v\mu + w\nu)\, \psi(\lambda,\mu,\nu)\,d\lambda\,d\mu\,d\nu, & \mathfrak{I}_0 &= \left(\frac{1}{2\pi}\right)^3 \int\!\!\int\!\!\int \sin(u\lambda + v\mu + w\nu)\, \psi(\lambda,\mu,\nu)\,d\lambda\,d\mu\,d\nu, \end{aligned}\right.$$

$$(103)\quad \left\{\begin{aligned} \mathfrak{D}_1 &= \left(\frac{1}{2\pi}\right)^3 \int\!\!\int\!\!\int \cos(u\lambda + v\mu + w\nu)\, \Phi(\lambda,\mu,\nu)\,d\lambda\,d\mu\,d\nu, & \mathfrak{G}_1 &= \left(\frac{1}{2\pi}\right)^3 \int\!\!\int\!\!\int \sin(u\lambda + v\mu + w\nu)\, \Phi(\lambda,\mu,\nu)\,d\lambda\,d\mu\,d\nu,\\ \mathfrak{E}_1 &= \left(\frac{1}{2\pi}\right)^3 \int\!\!\int\!\!\int \cos(u\lambda + v\mu + w\nu)\, \mathrm{X}(\lambda,\mu,\nu)\,d\lambda\,d\mu\,d\nu, & \mathfrak{H}_1 &= \left(\frac{1}{2\pi}\right)^3 \int\!\!\int\!\!\int \sin(u\lambda + v\mu + w\nu)\, \mathrm{X}(\lambda,\mu,\nu)\,d\lambda\,d\mu\,d\nu,\\ \mathfrak{F}_1 &= \left(\frac{1}{2\pi}\right)^3 \int\!\!\int\!\!\int \cos(u\lambda + v\mu + w\nu)\, \Psi(\lambda,\mu,\nu)\,d\lambda\,d\mu\,d\nu, & \mathfrak{I}_1 &= \left(\frac{1}{2\pi}\right)^3 \int\!\!\int\!\!\int \sin(u\lambda + v\mu + w\nu)\, \Psi(\lambda,\mu,\nu)\,d\lambda\,d\mu\,d\nu. \end{aligned}\right.$$

En ayant égard à ces dernières formules, on tirera des équations (94) et (95)

$$(104)\quad \Pi_0(\iota) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^3 \int\!\!\int\!\!\int [\mathcal{A}\,\varphi(\lambda,\mu,\nu) + \mathcal{B}\,\chi(\lambda,\mu,\nu) + \mathcal{C}\,\psi(\lambda,\mu,\nu)] \cos(k\iota - u\lambda - v\mu - w\nu)\,d\lambda\,d\mu\,d\nu,$$

$$(105)\quad \Pi_1(\iota) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^3 \int\!\!\int\!\!\int [\mathcal{A}\,\Phi(\lambda,\mu,\nu) + \mathcal{B}\,\mathrm{X}(\lambda,\mu,\nu) + \mathcal{C}\,\Psi(\lambda,\mu,\nu)] \cos(k\iota - u\lambda - v\mu - w\nu)\,d\lambda\,d\mu\,d\nu$$

ou, ce qui revient au même,

$$(106)\quad \Pi_0(\iota)=\left(\frac{1}{2\pi}\right)^3\int\!\!\int\!\!\int[\mathcal{A}\,\varphi(\lambda,\mu,\nu)+\mathcal{B}\,\chi(\lambda,\mu,\nu)+\mathcal{C}\,\psi(\lambda,\mu,\nu)]\cos[u(x-\lambda)+v(y-\mu)+w(z-\nu)]\,d\lambda\,d\mu\,d\nu,$$

$$(107)\quad \Pi_1(\iota)=\left(\frac{1}{2\pi}\right)^3\int\!\!\int\!\!\int[\mathcal{A}\,\Phi(\lambda,\mu,\nu)+\mathcal{B}\,\mathrm{X}(\lambda,\mu,\nu)+\mathcal{C}\,\Psi(\lambda,\mu,\nu)]\cos[u(x-\lambda)+v(y-\mu)+w(z-\nu)]\,d\lambda\,d\mu\,d\nu.$$

Si, après avoir déduit de l'équation (96), réunie aux équations (106), (107), les valeurs de Θ', Θ'', Θ''', ..., on les substitue dans les formules (97), ces formules représenteront les intégrales générales des équations (15) ou (16) du § I, pourvu que les valeurs de s^2 déterminées par la formule (44) soient réelles, et que, dans l'état d'équilibre du système proposé, les masses m', m'', m''', ... des diverses molécules soient deux à deux égales entre elles, et distribuées symétriquement de part et d'autre d'une molécule quelconque $\mathfrak{m}$ sur des droites menées par le point avec lequel cette molécule coïncide.

Dans les formules (102), (103), et (104), (105), ou (106), (107), les intégrations relatives aux variables λ, μ, ν doivent être, comme dans l'équation (100), généralement effectuées entre les limites $-\infty$, $+\infty$. Toutefois, si les valeurs initiales des déplacements ξ, η, ζ et des vitesses $\frac{\partial\xi}{\partial t}$, $\frac{\partial\eta}{\partial t}$, $\frac{\partial\zeta}{\partial t}$, c'est-à-dire les fonctions

$$\varphi(x,y,z),\quad \chi(x,y,z),\quad \psi(x,y,z),\qquad \Phi(x,y,z),\quad \mathrm{X}(x,y,z),\quad \Psi(x,y,z),$$

ne différaient de zéro que pour des valeurs de x, y, z correspondantes aux points situés dans un certain espace, par exemple aux points renfermés entre deux surfaces courbes, deux surfaces cylindriques et deux surfaces planes représentées par des équations de la forme

$$(108)\qquad z=\mathrm{F}_0(x,y),\qquad z=\mathrm{F}_1(x,y),$$
$$(109)\qquad y=\mathrm{f}_0(x),\qquad y=\mathrm{f}_1(x),$$
$$(110)\qquad x=x_0,\qquad x=x_1,$$

on pourrait évidemment, dans les formules dont il s'agit, supposer les intégrales prises entre les limites

$$(111)\qquad \nu=\mathrm{F}_0(\lambda,\mu),\qquad \nu=\mathrm{F}_1(\lambda,\mu),$$
$$(112)\qquad \mu=\mathrm{f}_0(\lambda),\qquad \mu=\mathrm{f}_1(\lambda),$$
$$(113)\qquad \lambda=x_0,\qquad \lambda=x_1.$$

§ III. — *Application des formules précédentes à la théorie de la lumière.*

Supposons que le système de molécules, mentionné dans les deux précédents paragraphes, soit le fluide éthéré dont les vibrations produisent la sensation de la lumière. Pour déterminer les lois suivant lesquelles de semblables vibrations, d'abord circonscrites dans des limites très resserrées autour d'un certain point O, se propageront à travers ce fluide, il suffit de considérer dans le premier instant un grand nombre d'ondes planes (*voir* la page 213) qui se superposent dans le voisinage du point O, et d'admettre que, les plans de ces ondes étant peu inclinés les uns sur les autres, les vibrations des molécules sont assez petites pour rester insensibles dans chaque onde prise séparément, mais deviennent sensibles par la superposition indiquée. Le temps venant à croître, les ondes dont il s'agit viendront successivement se superposer en différents points de l'espace, et l'on nomme *rayons lumineux* la droite qui renferme tous les points de superposition. Toutefois, pour que ce rayon soit unique lorsque l'élasticité de l'éther n'est pas la même en tous sens, il est nécessaire que, dans chaque onde considérée isolément, les vitesses et les déplacements des molécules soient parallèles à l'un des trois axes de l'ellipsoïde représenté par l'équation (36) du § II. Alors le rayon lumineux sera ce qu'on appelle un *rayon polarisé* parallèlement à cet axe, et, si l'on nomme l l'épaisseur d'une onde plane, Ω sa vitesse de propagation, T la durée des oscillations moléculaires, on aura

$$(1)\qquad \Omega\mathrm{T}=l.$$

Ajoutons que, si l'on pose

$$(2)\qquad k=\frac{2\pi}{l}=\frac{2\pi}{\Omega\mathrm{T}},$$

$$(3)\qquad s=k\Omega=\frac{2\pi}{\mathrm{T}},$$

les valeurs de $\frac{1}{s^2}$, pour trois rayons polarisés parallèlement aux trois axes de l'ellipsoïde, seront précisément les carrés de ces trois demi-axes. Observons d'ailleurs que, si l'on nomme r le rayon vecteur mené du point O à une molécule voisine m; α, β, γ les angles formés par ce rayon vecteur avec les demi-axes des coordonnées positives; a, b, c les cosinus des angles formés avec ces demi-axes par une droite OP perpendiculaire au plan de l'onde; δ l'angle compris entre cette perpendiculaire et le rayon vecteur r, on aura [*voir* l'équation (14) du § II]

$$\cos\delta = a\cos\alpha + b\cos\beta + c\cos\gamma, \tag{4}$$

et que, en faisant, pour abréger,

$$ka = u, \qquad kb = v, \qquad kc = w, \tag{5}$$

on tirera de l'équation (4)

$$k\cos\delta = u\cos\alpha + v\cos\beta + w\cos\gamma. \tag{6}$$

Cela posé, les coefficients $\mathcal{L}$, $\mathcal{M}$, $\mathcal{N}$, $\mathcal{P}$, $\mathcal{Q}$, $\mathcal{R}$, renfermés dans l'équation de l'ellipsoïde ci-dessus mentionné, c'est-à-dire dans la formule

$$\mathcal{L}x^2 + \mathcal{M}y^2 + \mathcal{N}z^2 + 2\mathcal{P}yz + 2\mathcal{Q}zx + 2\mathcal{R}xy = 1, \tag{7}$$

se trouveront, en vertu de l'équation (6) jointe aux formules (20), (21) du § II, déterminés comme il suit :

$$\mathcal{L} = \mathfrak{v} + \frac{\partial^2 \mathfrak{V}}{\partial u^2}, \qquad \mathcal{M} = \mathfrak{v} + \frac{\partial^2 \mathfrak{V}}{\partial v^2}, \qquad \mathcal{N} = \mathfrak{v} + \frac{\partial^2 \mathfrak{V}}{\partial w^2}, \tag{8}$$

$$\mathcal{P} = \frac{\partial^2 \mathfrak{V}}{\partial v\,\partial w}, \qquad \mathcal{Q} = \frac{\partial^2 \mathfrak{V}}{\partial w\,\partial u}, \qquad \mathcal{R} = \frac{\partial^2 \mathfrak{V}}{\partial u\,\partial v}, \tag{9}$$

les valeurs de $\mathfrak{v}$ et $\mathfrak{V}$ étant

$$\mathfrak{v} = \mathrm{S}\left\{\frac{m\,\mathrm{f}(r)}{r}\left[1 - \cos[r(u\cos\alpha + v\cos\beta + w\cos\gamma)]\right]\right\}, \tag{10}$$

$$\mathfrak{V} = \mathrm{S}\left\{\frac{m\,f(r)}{r}\left[\tfrac{1}{2}(u\cos\alpha + v\cos\beta + w\cos\gamma)^2 + \frac{\cos[r(u\cos\alpha + v\cos\beta + w\cos\gamma)]}{r^2}\right]\right\}. \tag{11}$$

Lorsque, au premier instant, les vitesses et les déplacements des molécules dans une onde plane sont effectivement parallèles à l'un des trois axes de l'ellipsoïde représenté par l'équation (7), ces déplacements et ces vitesses restent constamment parallèles au même axe, la lumière se trouve polarisée parallèlement à cet axe, et l'onde plane se propage avec une vitesse constante Ω, sans jamais se subdiviser. Mais il n'en est pas toujours ainsi, et l'on peut concevoir une onde plane dans laquelle au premier instant les vitesses et les déplacements des molécules cesseraient d'être parallèles à l'un des trois axes de l'ellipsoïde. En effet, pour composer une onde de cette espèce, il suffit de réunir trois ondes planes tellement choisies que, dans la première, la seconde et la troisième, la lumière se trouve polarisée parallèlement au premier, au second et au troisième axe de l'ellipsoïde, et d'admettre que, dans l'onde composée, la vitesse ou le déplacement d'une molécule est représentée par la diagonale du parallélépipède qui aurait pour côtés trois longueurs propres à représenter cette vitesse ou ce déplacement dans chacune des trois ondes composantes. Alors, le temps venant à croître, l'onde composée se subdivisera en ses trois composantes, qui se propageront à travers le fluide éthéré avec trois vitesses différentes. Ainsi, lorsque l'élasticité de l'éther n'est pas la même en tous sens, une onde plane, dans laquelle la lumière n'était point polarisée, se partage généralement en trois ondes planes, dans lesquelles la lumière est polarisée suivant trois directions distinctes; et par suite un rayon de lumière non polarisée se partage en trois rayons de lumière polarisée suivant les trois directions dont il s'agit.

Comme, en laissant les trois côtés d'un parallélépipède dirigés parallèlement à trois axes donnés, on peut toujours tracer ces côtés de manière que la diagonale devienne parallèle à une droite choisie arbitrairement, on doit conclure de ce qui a été dit ci-dessus que, dans une onde plane de lumière non polarisée, les vitesses et les déplacements des molécules peuvent être parallèles à une droite quelconque.

Les coefficients $\mathcal{L}$, $\mathcal{M}$, $\mathcal{N}$, $\mathcal{P}$, $\mathcal{Q}$, $\mathcal{R}$ renfermés dans l'équation (7) et, par suite, les lois de polarisation de la lumière dans une onde plane dépendent, non seulement de la constitution géométrique du fluide éthéré, c'est-à-dire du mode suivant lequel ses molécules se trouvent distribuées dans l'espace, mais encore de l'épaisseur l de l'onde plane et de sa direction, c'est-à-dire des cosinus a, b, c des angles formés par la perpendiculaire au plan de l'onde avec les demi-axes des coordonnées positives, ou, ce qui revient au même, des trois quantités

$$u = ka, \qquad v = kb, \qquad w = kc.$$

Nous dirons que l'élasticité du fluide éthéré est la même en tous sens autour d'un point quelconque O, si la constitution de ce fluide est telle que l'ellipsoïde (7), qui détermine les lois de polarisation d'une onde plane passant par ce point, conserve une forme invariable, tandis que l'on fait varier la direction du plan de l'onde, et si d'ailleurs la position de cet ellipsoïde est uniquement dépendante de la direction de ce plan. Alors, tandis que l'on fera tourner le plan de l'onde sur lui-même, la surface de l'ellipsoïde devra toujours passer par les mêmes points de l'espace et du plan. Donc cet ellipsoïde devra être de révolution autour de la droite perpendiculaire au plan de l'onde; et, de plus, l'axe de révolution ainsi que le rayon de l'équateur, étant indépendants de la direction du plan de l'onde, demeureront constants, quelles que soient les valeurs attribuées aux trois quantités a, b, c.

Nous dirons que l'élasticité du fluide éthéré est la même en tous sens autour d'un axe quelconque parallèle à un axe donné, par exemple à l'axe des z, si la forme de l'ellipsoïde (7) dépend uniquement de l'angle compris entre le plan de l'onde et l'axe des z, et si cet ellipsoïde tourne seulement autour de cet axe en même temps que la perpendiculaire au plan de l'onde.

Cela posé, il sera facile d'obtenir les conditions analytiques propres à exprimer que l'élasticité de l'éther est la même en tous sens autour d'un point quelconque, ou autour d'un axe quelconque parallèle à l'axe des z. On y parviendra effectivement à l'aide des considérations suivantes.

Outre le système des trois axes coordonnés des x, y, z, considérons un second système d'axes rectangulaires des x_1, y_1, z_1 qui partent de la même origine O que les trois premiers. Supposons d'ailleurs que les axes des x_1, y_1, z_1, après avoir d'abord coïncidé avec les axes des x, y, z, s'en séparent et entraînent dans leur mouvement le plan de l'onde et la droite perpendiculaire à ce plan, en sorte que cette droite passe de la position OP à une nouvelle position OQ, l'épaisseur l de l'onde restant invariable. Le rayon vecteur r, dont la direction n'aura pas changé, formera : 1° avec les demi-axes des x, y, z positives les angles α, β, γ, et avec les demi-axes des x_1, y_1, z_1 positives d'autres angles α_1, β_1, γ_1; 2° avec les droites OP et OQ des angles δ, δ_1, déterminés par l'équation (4) et par la suivante

$$\cos\delta_1 = a\cos\alpha_1 + b\cos\beta_1 + c\cos\gamma_1, \tag{12}$$

de laquelle on tirera, en ayant égard aux équations (5),

$$k\cos\delta_1 = u\cos\alpha_1 + v\cos\beta_1 + w\cos\gamma_1. \tag{13}$$

Soient maintenant

$$\mathcal{L}_1, \quad \mathcal{M}_1, \quad \mathcal{N}_1, \quad \mathcal{P}_1, \quad \mathcal{Q}_1, \quad \mathcal{R}_1, \quad \mathfrak{V}_1, \quad \mathfrak{W}_1$$

ce que deviennent les quantités

$$\mathcal{L}, \quad \mathcal{M}, \quad \mathcal{N}, \quad \mathcal{P}, \quad \mathcal{Q}, \quad \mathcal{R}, \quad \mathfrak{V}, \quad \mathfrak{W},$$

déterminées par les équations (8), (9), (10), (11), quand on remplace α, β, γ par α_1, β_1, γ_1, en sorte qu'on ait

$$\mathcal{L}_1 = \mathfrak{V}_1 + \frac{\partial^2 \mathfrak{W}_1}{\partial u^2}, \qquad \mathcal{M}_1 = \mathfrak{V}_1 + \frac{\partial^2 \mathfrak{W}_1}{\partial v^2}, \qquad \mathcal{N}_1 = \mathfrak{V}_1 + \frac{\partial^2 \mathfrak{W}_1}{\partial w^2}, \tag{14}$$

$$\mathcal{P}_1 = \frac{\partial^2 \mathfrak{W}_1}{\partial v\,\partial w}, \qquad \mathcal{Q}_1 = \frac{\partial^2 \mathfrak{W}_1}{\partial w\,\partial u}, \qquad \mathcal{R}_1 = \frac{\partial^2 \mathfrak{W}_1}{\partial u\,\partial v}, \tag{15}$$

les valeurs de $\mathfrak{V}_1$, $\mathfrak{W}_1$ étant

$$\mathfrak{V}_1 = \mathrm{S}\left\{\frac{m\,\mathrm{f}(r)}{r}\left[1 - \cos[r(u\cos\alpha_1 + v\cos\beta_1 + w\cos\gamma_1)]\right]\right\}, \tag{16}$$

$$\mathfrak{W}_1 = \mathrm{S}\left\{\frac{m\,f(r)}{r}\left[\tfrac{1}{2}(u\cos\alpha_1 + v\cos\beta_1 + w\cos\gamma_1)^2 + \frac{\cos[r(u\cos\alpha_1 + v\cos\beta_1 + w\cos\gamma_1)]}{r^2}\right]\right\}. \tag{17}$$

Les deux ellipsoïdes qui détermineront les lois de la polarisation pour les ondes planes perpendiculaires aux deux droites OP, OQ seront représentés, le premier par l'équation (7), le second par la suivante :

$$\mathcal{L}_1 x_1^2 + \mathcal{M}_1 y_1^2 + \mathcal{N}_1 z_1^2 + 2\mathcal{P}_1 y_1 z_1 + 2\mathcal{Q}_1 z_1 x_1 + 2\mathcal{R}_1 x_1 y_1 = 1. \tag{18}$$

De plus, le second ellipsoïde sera pareil au premier et placé à l'égard des axes coordonnés des x_1, y_1, z_1 comme le premier l'est à l'égard des axes coordonnés des x, y, z, si l'on a

$$\mathcal{L}_1 = \mathcal{L}, \qquad \mathcal{M}_1 = \mathcal{M}, \qquad \mathcal{N}_1 = \mathcal{N}, \tag{19}$$

$$\mathcal{P}_1 = \mathcal{P}, \qquad \mathcal{Q}_1 = \mathcal{Q}, \qquad \mathcal{R}_1 = \mathcal{R}. \tag{20}$$

Enfin, ces dernières conditions, si elles doivent être vérifiées quels que soient u, v, w, pourront être remplacées par les deux suivantes :

$$\mathcal{V}_1 = \mathcal{V}, \qquad \mathfrak{V}_1 = \mathfrak{V}. \tag{21}$$

Effectivement, il suit des équations (8), (9), (14) et (15) que les conditions (19) et (20) peuvent être présentées sous la forme

$$\mathcal{V}_1 - \mathcal{V} + \frac{\partial^2(\mathfrak{V}_1 - \mathfrak{V})}{\partial u^2} = 0, \qquad \mathcal{V}_1 - \mathcal{V} + \frac{\partial^2(\mathfrak{V}_1 - \mathfrak{V})}{\partial v^2} = 0, \qquad \mathcal{V}_1 - \mathcal{V} + \frac{\partial^2(\mathfrak{V}_1 - \mathfrak{V})}{\partial w^2} = 0, \tag{22}$$

$$\frac{\partial^2(\mathfrak{V}_1 - \mathfrak{V})}{\partial v\,\partial w} = 0, \qquad \frac{\partial^2(\mathfrak{V}_1 - \mathfrak{V})}{\partial w\,\partial u} = 0, \qquad \frac{\partial^2(\mathfrak{V}_1 - \mathfrak{V})}{\partial u\,\partial v} = 0. \tag{23}$$

Or les formules (22), (23) seront évidemment vérifiées, si l'on a pour des valeurs quelconques de u, v, w

$$\mathcal{V}_1 = \mathcal{V}, \qquad \mathfrak{V}_1 = \mathfrak{V}.$$

Réciproquement, si les conditions (22) et (23) subsistent pour des valeurs quelconques de u, v, w, alors, en vertu des conditions (23), les trois quantités

$$\frac{\partial(\mathfrak{V}_1 - \mathfrak{V})}{\partial u}, \qquad \frac{\partial(\mathfrak{V}_1 - \mathfrak{V})}{\partial v}, \qquad \frac{\partial(\mathfrak{V}_1 - \mathfrak{V})}{\partial w}, \tag{24}$$

et, par suite, les trois quantités

$$\frac{\partial^2(\mathfrak{V}_1 - \mathfrak{V})}{\partial u^2}, \qquad \frac{\partial^2(\mathfrak{V}_1 - \mathfrak{V})}{\partial v^2}, \qquad \frac{\partial^2(\mathfrak{V}_1 - \mathfrak{V})}{\partial w^2} \tag{25}$$

seront seulement fonctions, la première de u, la seconde de v, la troisième de w. Donc ces trois quantités ne pourront, comme l'exigent les conditions (22), acquérir une valeur commune $\mathcal{V} - \mathcal{V}_1$, qu'autant que cette valeur commune sera une quantité constante, c'est-à-dire indépendante des trois variables u, v, w. D'ailleurs, lorsqu'on pose $k = 0$, et, par suite, $u = 0$, $v = 0$, $w = 0$, on tire des équations (10) et (16)

$$\mathcal{V} = 0, \qquad \mathcal{V}_1 = 0, \qquad \mathcal{V} - \mathcal{V}_1 = 0.$$

Par conséquent, dans l'hypothèse admise, on aura généralement

$$\mathcal{V} - \mathcal{V}_1 = 0$$

ou, ce qui revient au même,

$$\mathcal{V}_1 = \mathcal{V}, \tag{26}$$

et les conditions (22) se réduiront à

$$\frac{\partial^2(\mathfrak{V}_1 - \mathfrak{V})}{\partial u^2} = 0, \qquad \frac{\partial^2(\mathfrak{V}_1 - \mathfrak{V})}{\partial v^2} = 0, \qquad \frac{\partial^2(\mathfrak{V}_1 - \mathfrak{V})}{\partial w^2} = 0. \tag{27}$$

De ces dernières, jointes aux conditions (23), on conclura que les quantités (24) se réduisent à des constantes ; et, comme, en vertu des formules (11), (17), les expressions

$$\frac{\partial \mathfrak{V}}{\partial u}, \quad \frac{\partial \mathfrak{V}}{\partial v}, \quad \frac{\partial \mathfrak{V}}{\partial w}, \qquad \frac{\partial \mathfrak{V}_1}{\partial u}, \quad \frac{\partial \mathfrak{V}_1}{\partial v}, \quad \frac{\partial \mathfrak{V}_1}{\partial w}$$

s'évanouiront pour des valeurs nulles de u, v, w, il est clair qu'on aura généralement

$$\frac{\partial(\mathfrak{V}_1 - \mathfrak{V})}{\partial u} = 0, \qquad \frac{\partial(\mathfrak{V}_1 - \mathfrak{V})}{\partial v} = 0, \qquad \frac{\partial(\mathfrak{V}_1 - \mathfrak{V})}{\partial w} = 0. \tag{28}$$

Donc la différence

$$\mathfrak{V}_1 - \mathfrak{V}$$

se réduira elle-même à une constante qui sera encore nulle, attendu que $\mathfrak{V}_1$ et $\mathfrak{V}$ s'évanouissent en même temps que les trois variables u, v, w. On aura donc encore, dans l'hypothèse admise,

$$\mathfrak{V}_1 = \mathfrak{V}, \tag{29}$$

et les formules (21), ou (26) et (29), seront alors une conséquence nécessaire des conditions (22) et (23).

Pour que l'élasticité de l'éther puisse être censée rester la même en tous sens autour d'un point quelconque, il est nécessaire et il suffit évidemment que, des deux ellipsoïdes représentés par les équations (7), (18), le second soit toujours pareil au premier et placé à l'égard des axes des x_1, y_1, z_1 comme le premier l'est à l'égard des axes des x, y, z; par conséquent il est nécessaire et il suffit que les conditions (21) soient toujours vérifiées, c'est-à-dire que ces conditions subsistent quelles que soient les valeurs de u, v, w et quel que soit le nouveau système d'axes rectangulaires des x_1, y_1, z_1.

Si l'on demande les conditions nécessaires pour que l'élasticité de l'éther puisse être censée rester la même en tous sens autour d'un axe quelconque parallèle à l'axe des z, ces conditions ne cesseront pas d'être exprimées par les formules (21), qui devront subsister encore, indépendamment des valeurs attribuées à u, v, w, non plus quels que soient les nouveaux axes des x_1, y_1, z_1, mais seulement quels que soient les nouveaux axes des x_1 et y_1, l'axe des z_1 étant superposé à l'axe des z.

Il nous reste à développer les conditions (21) et à montrer les diverses formules qui s'en déduisent.

Observons d'abord que, en vertu des équations (10), (11), (16), (17), jointes aux formules (4) et (13), les conditions (21) peuvent s'écrire comme il suit :

$$\text{(30)} \qquad S\left\{\frac{m\,\mathrm{f}(r)}{r}[1-\cos(kr\cos\delta_1)]\right\} = S\left\{\frac{m\,\mathrm{f}(r)}{r}[1-\cos(kr\cos\delta)]\right\},$$

$$\text{(31)} \qquad \left\{\begin{aligned} &S\left\{\frac{m\,f(r)}{r}\left[\tfrac{1}{2}k^2\cos^2\delta_1+\frac{\cos(kr\cos\delta_1)}{r^2}\right]\right\} \\ &= S\left\{\frac{m\,f(r)}{r}\left[\tfrac{1}{2}k^2\cos^2\delta+\frac{\cos(kr\cos\delta)}{r^2}\right]\right\}.\end{aligned}\right.$$

Ainsi les conditions nécessaires et suffisantes pour que l'élasticité de l'éther puisse être censée rester la même en tous sens autour d'un

point quelconque ou autour d'un axe quelconque parallèle à l'axe des z se réduisent à ce que les deux quantités

$$\text{(32)} \qquad \mathfrak{V} = S\left\{\frac{m\,\mathrm{f}(r)}{r}[1-\cos(kr\cos\delta)]\right\},$$

$$\text{(33)} \qquad \mathcal{V} = S\left\{\frac{m\,f(r)}{r}\left[\tfrac{1}{2}k^2\cos^2\delta+\frac{\cos(kr\cos\delta)}{r^2}\right]\right\}$$

ne changent pas de valeur quand on y remplace l'angle δ compris entre le rayon vecteur r et la droite OP par l'angle δ_1 compris entre le rayon vecteur r et la droite OQ; les droites OP, OQ pouvant être choisies arbitrairement dans le premier cas, et étant assujetties dans le second à la seule condition de former toutes deux le même angle avec l'axe des z. Observons encore : 1° que, en vertu des équations (5), u, v, w représentent évidemment les coordonnées d'un point P situé sur la droite OP à la distance k du point O et vérifient la condition

$$\text{(34)} \qquad k^2 = u^2+v^2+w^2,$$

de laquelle on tire

$$\text{(35)} \qquad k = \sqrt{u^2+v^2+w^2};$$

2° que si l'on nomme u, v, w les coordonnées d'un point Q situé sur la droite OQ à la distance k du point O, il suffira de substituer la droite OQ à la droite OP pour déduire des formules (6) et (35) les deux suivantes

$$\text{(36)} \qquad k\cos\delta_1 = u_1\cos\alpha + v_1\cos\beta + w_1\cos\gamma,$$

$$\text{(37)} \qquad k = \sqrt{u_1^2+v_1^2+w_1^2},$$

dans lesquelles on devra remplacer w_1 par w, si les droites OP, OQ forment le même angle avec l'axe des z. Cela posé, les conditions nécessaires et suffisantes pour que l'élasticité de l'éther puisse être censée rester la même en tous sens autour d'un point quelconque ou bien autour d'un axe quelconque parallèle à l'axe des z, c'est-à-dire les conditions (30) et (31) pourront s'écrire comme il suit

$$(38)\quad \left\{\begin{aligned} &\mathrm{S}\left\{\frac{m\,\mathrm{f}(r)}{r}\left[1-\cos[r(u_1\cos\alpha+v_1\cos\beta+w_1\cos\gamma)]\right]\right\}\\ &=\mathrm{S}\left\{\frac{m\,\mathrm{f}(r)}{r}\left[1-\cos[r(u\cos\alpha+v\cos\beta+w\cos\gamma)]\right]\right\},\end{aligned}\right.$$

$$(39)\quad \left\{\begin{aligned} &\mathrm{S}\left\{\frac{m\,f(r)}{r}\left[\tfrac{1}{2}(u_1\cos\alpha+v_1\cos\beta+w_1\cos\gamma)^2+\frac{\cos[r(u_1\cos\alpha+v_1\cos\beta+w_1\cos\gamma)]}{r^2}\right]\right\}\\ &=\mathrm{S}\left\{\frac{m\,f(r)}{r}\left[\tfrac{1}{2}(u\cos\alpha+v\cos\beta+w\cos\gamma)^2+\frac{\cos[r(u\cos\alpha+v\cos\beta+w\cos\gamma)]}{r^2}\right]\right\},\end{aligned}\right.$$

les quantités variables u_1, v_1, w_1 se trouvant liées avec les quantités u, v, w par l'équation

$$(40)\qquad u_1^2+v_1^2+w_1^2=u^2+v^2+w^2,$$

qui, dans le second cas seulement, se partage en deux autres, savoir

$$(41)\qquad u_1^2+v_1^2=u^2+v^2,\qquad w_1=w.$$

On vérifie la formule (40) en supposant

$$(42)\qquad v_1=0,\qquad w_1=0,\qquad u_1=\pm\sqrt{u^2+v^2+w^2}=\pm k.$$

En vertu de cette supposition, les formules (38) et (39) deviennent

$$(43)\quad \left\{\begin{aligned} &\mathrm{S}\left\{\frac{m\,\mathrm{f}(r)}{r}\left[1-\cos[r(u\cos\alpha+v\cos\beta+w\cos\gamma)]\right]\right\}\\ &\qquad=\mathrm{S}\left\{\frac{m\,\mathrm{f}(r)}{r}[1-\cos(kr\cos\alpha)]\right\},\end{aligned}\right.$$

$$(44)\quad \left\{\begin{aligned} &\mathrm{S}\left\{\frac{m\,f(r)}{r}\left[\tfrac{1}{2}(u\cos\alpha+v\cos\beta+w\cos\gamma)^2+\frac{\cos[r(u\cos\alpha+v\cos\beta+w\cos\gamma)]}{r^2}\right]\right\}\\ &\qquad=\mathrm{S}\left\{\frac{m\,f(r)}{r}\left[\tfrac{1}{2}k^2\cos^2\alpha+\frac{\cos(kr\cos\alpha)}{r^2}\right]\right\}.\end{aligned}\right.$$

Réciproquement, si ces dernières subsistent, quelles que soient les valeurs de u, v, w, leurs premiers membres ne seront point altérés quand on y remplacera les quantités u, v, w par d'autres quantités u_1, v_1, w_1 propres à vérifier l'équation

$$u_1^2+v_1^2+w_1^2=k^2=u^2+v^2+w^2.$$

Donc les équations (43), (44), déduites des formules (38), (39), entraineront à leur tour ces formules auxquelles on pourra les substituer sans inconvénient. D'autre part, comme on aura généralement

$$\begin{aligned}\cos[r(u\cos\alpha+v\cos\beta+w\cos\gamma)]&\\ =1-\frac{r^2}{1.2}&(u\cos\alpha+v\cos\beta+w\cos\gamma)^2\\ &+\frac{r^4}{1.2.3.4}(u\cos\alpha+v\cos\beta+w\cos\gamma)^4\\ &-\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\cos(kr\cos\alpha)&=1-\frac{r^2}{1.2}k^2\cos^2\alpha+\frac{r^4}{1.2.3.4}k^4\cos^4\alpha-\ldots\\ &=1-\frac{r^2}{1.2}(u^2+v^2+w^2)\cos^2\alpha\\ &\quad+\frac{r^4}{1.2.3.4}(u^2+v^2+w^2)^2\cos^4\alpha-\ldots,\end{aligned}$$

il suffira d'égaler entre eux les termes qui, dans les deux membres des équations (43) et (44), représenteront des fonctions homogènes de u, v, w du degré $2n$ pour obtenir les formules

$$(45)\quad \mathrm{S}[mr^{2n-1}\,\mathrm{f}(r)\,(u\cos\alpha+v\cos\beta+w\cos\gamma)^{2n}]=k^{2n}\,\mathrm{S}[mr^{2n-1}\,\mathrm{f}(r)\cos^{2n}\alpha]$$

et

$$(46)\quad \mathrm{S}[mr^{2n-3}f(r)\,(u\cos\alpha+v\cos\beta+w\cos\gamma)^{2n}]=k^{2n}\,\mathrm{S}[mr^{2n-3}f(r)\cos^{2n}\alpha],$$

dont la première devra être étendue à toutes les valeurs positives du nombre entier n, et la seconde à toutes les valeurs de n qui surpassent l'unité. Enfin, comme les deux expressions

$$(u\cos\alpha+v\cos\beta+w\cos\gamma)^{2n},\quad k^{2n}(u^2+v^2+w^2)^n,$$

étant développées, fournissent, la première des termes de la forme

$$\frac{1.2.3\ldots2n}{(1.2\ldots\lambda)(1.2\ldots\mu)(1.2\ldots\nu)}u^\lambda v^\mu w^\nu\cos^\lambda\alpha\cos^\mu\beta\cos^\nu\gamma,$$

dans lesquels les exposants λ, μ, ν, liés entre eux par l'équation

$$(47)\qquad \lambda+\mu+\nu=2n,$$

peuvent être pairs ou impairs, et la seconde des termes de la forme

$$\begin{aligned}
&\frac{1.2.3\ldots n}{\left(1.2\ldots\frac{\lambda}{2}\right)\left(1.2\ldots\frac{\mu}{2}\right)\left(1.2\ldots\frac{\nu}{2}\right)}u^\lambda v^\mu w^\nu \\
&= \frac{2.4.6\ldots 2n}{(2.4\ldots\lambda)(2.4\ldots\mu)(2.4\ldots\nu)}u^\lambda v^\mu w^\nu \\
&= \frac{1.3\ldots(\lambda-1).1.3\ldots(\mu-1).1.3\ldots(\nu-1)}{1.3.5\ldots(2n-1)}\,\frac{1.2.3\ldots 2n}{(1.2\ldots\lambda)(1.2\ldots\mu)(1.2\ldots\nu)}u^\lambda v^\mu w^\nu,
\end{aligned}$$

dans lesquels les exposants λ, μ, ν sont toujours pairs; comme d'ailleurs les formules (45) et (46) doivent subsister indépendamment des valeurs attribuées à u, v, w et offrir chacune dans le premier et dans le second membre les mêmes puissances de u, v, w multipliées par les mêmes coefficients, on tirera de ces formules : 1° pour des valeurs impaires de λ, de μ ou de ν,

$$\mathrm{S}[mr^{2n-1}\,\mathrm{f}(r)\cos^\lambda\alpha\cos^\mu\beta\cos^\nu\gamma]=0 \tag{48}$$

et

$$\mathrm{S}[mr^{2n-3}f(r)\cos^\lambda\alpha\cos^\mu\beta\cos^\nu\gamma]=0; \tag{49}$$

2° pour des valeurs paires de λ, μ et ν

$$\mathrm{S}[mr^{2n-1}\,\mathrm{f}(r)\cos^\lambda\alpha\cos^\mu\beta\cos^\nu\gamma]=\frac{1.3\ldots(\lambda-1).1.3\ldots(\mu-1).1.3\ldots(\nu-1)}{1.3.5\ldots(2n-1)}\mathrm{S}[mr^{2n-1}\,\mathrm{f}(r)\cos^{2n}\alpha] \tag{50}$$

et

$$\mathrm{S}[mr^{2n-3}f(r)\cos^\lambda\alpha\cos^\mu\beta\cos^\nu\gamma]=\frac{1.3\ldots(\lambda-1).1.3\ldots(\mu-1).1.3\ldots(\nu-1)}{1.3.5\ldots(2n-1)}\mathrm{S}[mr^{2n-3}f(r)\cos^{2n}\alpha], \tag{51}$$

le nombre n, dont le double équivaut à la somme $\lambda+\mu+\nu$, pouvant être quelconque dans les équations (48), (50), mais devant surpasser l'unité dans les équations (49), (51). Ainsi, en particulier, on conclura des formules (48), (50), en posant $n=1$,

$$\begin{aligned}
&\mathrm{S}[mr\,\mathrm{f}(r)\cos\beta\cos\gamma]=\mathrm{S}[mr\,\mathrm{f}(r)\cos\gamma\cos\alpha]=\mathrm{S}[mr\,\mathrm{f}(r)\cos\alpha\cos\beta]=0,\\
&\mathrm{S}[mr\,\mathrm{f}(r)\cos^2\alpha]\quad=\mathrm{S}[mr\,\mathrm{f}(r)\cos^2\beta]\quad=\mathrm{S}[mr\,\mathrm{f}(r)\cos^2\gamma];
\end{aligned}$$

et des formules (49), (51), en posant $n=2$,

$$\begin{aligned}
&\mathrm{S}[mr\,f(r)\cos\beta\cos^3\gamma]=\mathrm{S}[mr\,f(r)\cos\gamma\cos^3\alpha]=\mathrm{S}[mr\,f(r)\cos\alpha\cos^3\beta]\\
&=\mathrm{S}[mr\,f(r)\cos^3\beta\cos\gamma]=\mathrm{S}[mr\,f(r)\cos^3\gamma\cos\alpha]=\mathrm{S}[mr\,f(r)\cos^3\alpha\cos\beta]=0,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\mathrm{S}[mr\,f(r)\cos^2\beta\cos^2\gamma]=\mathrm{S}[mr\,f(r)\cos^2\gamma\cos^2\alpha]=\mathrm{S}[mr\,f(r)\cos^2\alpha\cos^2\beta]\\
&=\tfrac{1}{3}\mathrm{S}[mr\,f(r)\cos^4\alpha]\quad=\tfrac{1}{3}\mathrm{S}[mr\,f(r)\cos^4\beta]\quad=\tfrac{1}{3}\mathrm{S}[mr\,f(r)\cos^4\gamma].
\end{aligned}$$

Ajoutons que des formules (48), (49), (50), (51) on peut remonter immédiatement aux formules (41), (46), par conséquent aux formules (43), (44), ainsi qu'aux formules (38), (39). Donc, en définitive, les formules (48), (49), (50) et (51), étendues à toutes les valeurs positives du nombre entier n, ou du moins, s'il s'agit des formules (49) et (51), aux valeurs entières de n qui surpassent l'unité, expriment les conditions nécessaires et suffisantes pour que l'élasticité de l'éther puisse être censée rester la même en tous sens autour d'un point quelconque.

Lorsque ces conditions sont remplies, on tire des équations (10) et (11) jointes aux formules (43) et (44)

$$\upsilon=\mathrm{S}\left\{\frac{m\,\mathrm{f}(r)}{r}[1-\cos(kr\cos\alpha)]\right\}, \tag{52}$$

$$\mathcal{V}=\mathrm{S}\left\{\frac{m\,f(r)}{r}\left[\tfrac{1}{2}k^2\cos^2\alpha+\frac{\cos(kr\cos\alpha)}{r^2}\right]\right\}. \tag{53}$$

D'autre part, si, après avoir fait, pour abréger,

$$\mathrm{K}=\tfrac{1}{2}k^2=\frac{u^2+v^2+w^2}{2}, \tag{54}$$

on désigne par

$$\mathcal{V}'=\frac{\partial\mathcal{V}}{\partial\mathrm{K}},\qquad \mathcal{V}''=\frac{\partial^2\mathcal{V}}{\partial\mathrm{K}^2} \tag{55}$$

les dérivées du premier et du second ordre de $\mathcal{V}$ considéré comme fonction de K, on trouvera

$$\frac{\partial\mathrm{K}}{\partial u}=u,\qquad \frac{\partial\mathrm{K}}{\partial v}=v,\qquad \frac{\partial\mathrm{K}}{\partial w}=w$$

et, par suite,

$$\frac{\partial\mathfrak{v}}{\partial u} = u\mathfrak{v}', \qquad \frac{\partial\mathfrak{v}}{\partial v} = v\mathfrak{v}', \qquad \frac{\partial\mathfrak{v}}{\partial w} = w\mathfrak{v}',$$

$$\frac{\partial^2\mathfrak{v}}{\partial u^2} = \mathfrak{v}' + u^2\mathfrak{v}'', \qquad \frac{\partial^2\mathfrak{v}}{\partial v^2} = \mathfrak{v}' + v^2\mathfrak{v}'', \qquad \frac{\partial^2\mathfrak{v}}{\partial w^2} = \mathfrak{v}' + w^2\mathfrak{v}'',$$

$$\frac{\partial^2\mathfrak{v}}{\partial v\,\partial w} = vw\mathfrak{v}'', \qquad \frac{\partial^2\mathfrak{v}}{\partial w\,\partial u} = wu\mathfrak{v}'', \qquad \frac{\partial^2\mathfrak{v}}{\partial u\,\partial v} = uv\mathfrak{v}''.$$

En conséquence, les formules (8), (9) donneront

$$(56)\qquad \mathfrak{L} = \mathfrak{V} + \mathfrak{v}' + u^2\mathfrak{v}'', \qquad \mathfrak{M} = \mathfrak{V} + \mathfrak{v}' + v^2\mathfrak{v}'', \qquad \mathfrak{N} = \mathfrak{V} + \mathfrak{v}' + w^2\mathfrak{v}'',$$

$$(57)\qquad \mathfrak{P} = vw\mathfrak{v}'', \qquad \mathfrak{Q} = wu\mathfrak{v}'', \qquad \mathfrak{R} = uv\mathfrak{v}'',$$

et l'équation (7), c'est-à-dire l'équation de l'ellipsoïde qui détermine les lois de la polarisation, deviendra

$$(58)\qquad \mathfrak{v}''(u\mathrm{x} + v\mathrm{y} + w\mathrm{z})^2 + (\mathfrak{V} + \mathfrak{v}')(\mathrm{x}^2 + \mathrm{y}^2 + \mathrm{z}^2) = 1.$$

Pour reconnaître plus aisément la forme de cet ellipsoïde, concevons que l'on fasse coïncider l'axe des z avec la droite OP perpendiculaire au plan de l'onde. Comme on aura dans cette hypothèse

$$u = 0, \qquad v = 0,$$

la formule (34) donnera

$$w = \pm k,$$

et la formule (58) sera réduite à

$$(59)\qquad k^2\mathfrak{v}''\mathrm{z}^2 + (\mathfrak{V} + \mathfrak{v}')(\mathrm{x}^2 + \mathrm{y}^2 + \mathrm{z}^2) = 1.$$

D'ailleurs, en vertu de ce qui a été dit plus haut (page 229), les valeurs de $\mathfrak{V}$, $\mathfrak{v}$, et par suite celles de $\mathfrak{v}'$, $\mathfrak{v}''$, ne varieront pas dans le passage de l'équation (58) à l'équation (59). Maintenant, il est clair que l'ellipsoïde représenté par l'équation (59) sera de révolution autour de l'axe des z et que, dans cet ellipsoïde, le carré du rayon de l'équateur sera égal au rapport

$$(60)\qquad \frac{1}{\mathfrak{V} + \mathfrak{v}'},$$

le carré du demi-axe de révolution étant

$$(61)\qquad \frac{1}{\mathfrak{V} + \mathfrak{v}' + k^2\mathfrak{v}''}.$$

Au reste, la discussion de l'équation (58) conduirait immédiatement aux mêmes conclusions. Ainsi, comme nous l'avions prévu (page 224), lorsque l'élasticité de l'éther est la même en tous sens autour d'un point quelconque, l'ellipsoïde qui détermine les lois de polarisation d'une onde plane est de révolution autour de la droite perpendiculaire au plan de l'onde; et dans cet ellipsoïde l'axe de révolution et le rayon de l'équateur ne dépendent pas des quantités a, b, c, mais seulement de la quantité k renfermée dans les valeurs de $\mathfrak{V}$, $\mathfrak{v}$ que fournissent les équations (52) et (53). Ajoutons : 1° que les formules (53) et (55) jointes à l'équation (54) donneront

$$(62)\qquad \mathfrak{v}' = \frac{1}{k}\frac{\partial\mathfrak{v}}{\partial k} = \mathrm{S}\left\{\frac{m\,f(r)\cos^2\alpha}{r}\left[1 - \frac{\sin(kr\cos\alpha)}{kr\cos\alpha}\right]\right\},$$

$$(63)\qquad \mathfrak{v}'' = \frac{1}{k}\frac{\partial\mathfrak{v}'}{\partial k} = \frac{1}{k^2}\mathrm{S}\left\{\frac{m\,f(r)\cos^2\alpha}{r}\left[\frac{\sin(kr\cos\alpha)}{kr\cos\alpha} - \cos(kr\cos\alpha)\right]\right\};$$

2° qu'en développant suivant les puissances ascendantes de k les derniers membres des formules (52), (62) et (63) on en tirera

$$(64)\qquad \mathfrak{V} = k^2\,\mathrm{S}\,\frac{mr\,\mathrm{f}(r)\cos^2\alpha}{1.2} - k^4\,\mathrm{S}\,\frac{mr^3\,\mathrm{f}(r)\cos^4\alpha}{1.2.3.4} + k^6\,\mathrm{S}\,\frac{mr^5\,\mathrm{f}(r)\cos^6\alpha}{1.2.3.4.5.6} - \ldots,$$

$$(65)\qquad k\,\mathfrak{v}' = k^2\,\mathrm{S}\,\frac{mr\,f(r)\cos^4\alpha}{1.2.3} - k^4\,\mathrm{S}\,\frac{mr^3\,f(r)\cos^6\alpha}{1.2.3.4.5} + k^6\,\mathrm{S}\,\frac{mr^5\,f(r)\cos^8\alpha}{1.2.3.4.5.6.7} - \ldots,$$

$$(66)\qquad k^2\mathfrak{v}'' = 2k^2\,\mathrm{S}\,\frac{mr\,f(r)\cos^4\alpha}{1.2.3} - 4k^4\,\mathrm{S}\,\frac{mr^3\,f(r)\cos^6\alpha}{1.2.3.4.5} + 6k^6\,\mathrm{S}\,\frac{mr^5\,f(r)\cos^8\alpha}{1.2.3.4.5.6.7} - \ldots.$$

Chacune des séries comprises dans les trois formules qui précèdent offre, pour coefficients des puissances paires et ascendantes de k, des sommes dans lesquelles la fonction $\mathrm{f}(r)$ ou $f(r)$ se trouve successivement multipliée par

$$r, \quad r^3, \quad r^5, \quad \ldots.$$

D'ailleurs l'action moléculaire, par conséquent les fonctions $\mathrm{f}(r)$,

$f(r)$, ne conservent de valeurs sensibles que pour de très petites valeurs de r; et, comme, d'autre part, r étant une quantité très petite du premier ordre, r^3, r^5, ... seront des quantités très petites du troisième, du cinquième ordre, ..., il est clair que, dans les séries en question, les coefficients des puissances successives de k doivent décroître très rapidement. Si l'on réduit ces mêmes séries à leurs premiers termes, on obtiendra seulement des valeurs approchées de

$$\upsilon, \quad \mathfrak{V}', \quad k^2\mathfrak{V}'',$$

et alors, en faisant, pour abréger,

$$\mathrm{S}\frac{mr\,\mathfrak{f}(r)\cos^2\alpha}{1.2} = \mathrm{I}, \qquad \mathrm{S}\frac{mr\,f(r)\cos^4\alpha}{1.2.3} = \mathrm{R}, \tag{67}$$

on trouvera

$$\upsilon = k^2\mathrm{I}, \qquad \mathfrak{V}' = k^2\mathrm{R}, \qquad k^2\mathfrak{V}'' = 2k^2\mathrm{R}. \tag{68}$$

En vertu des formules (5) et (68), les équations (56) et (57) se réduisent à

$$\mathfrak{L} = (2\mathrm{R}a^2 + \mathrm{R} + \mathrm{I})k^2, \qquad \mathfrak{M} = (2\mathrm{R}b^2 + \mathrm{R} + \mathrm{I})k^2, \qquad \mathfrak{N} = (2\mathrm{R}c^2 + \mathrm{R} + \mathrm{I})k^2, \tag{69}$$

$$\mathfrak{P} = 2\mathrm{R}bck^2, \qquad \mathfrak{Q} = 2\mathrm{R}cak^2 \qquad \mathfrak{R} = 2\mathrm{R}abk^2. \tag{70}$$

On aura d'ailleurs, en vertu des formules (50) et (51) jointes aux équations (67),

$$\mathrm{I} = \mathrm{S}\frac{mr\,\mathfrak{f}(r)\cos^2\alpha}{1.2} = \mathrm{S}\frac{mr\,\mathfrak{f}(r)\cos^2\beta}{1.2} = \mathrm{S}\frac{mr\,\mathfrak{f}(r)\cos^2\gamma}{1.2}, \tag{71}$$

$$\left\{\begin{aligned} \mathrm{R} &= \mathrm{S}\frac{mr\,f(r)\cos^4\alpha}{1.2.3} = \mathrm{S}\frac{mr\,f(r)\cos^4\beta}{1.2.3} = \mathrm{S}\frac{mr\,f(r)\cos^4\gamma}{1.2.3} \\ &= \mathrm{S}\frac{mr\,f(r)\cos^2\beta\cos^2\gamma}{1.2} = \mathrm{S}\frac{mr\,f(r)\cos^2\gamma\cos^2\alpha}{1.2} = \mathrm{S}\frac{mr\,f(r)\cos^2\alpha\cos^2\beta}{1.2}; \end{aligned}\right. \tag{72}$$

et par conséquent les coefficients, représentés ici par les lettres I et R, ne différeront pas de ceux que déterminent les formules (37), (39) de la page 199 du III[e] Volume des *Exercices de Mathématiques* (¹).

(¹) *Œuvres de Cauchy*, S. II, T. VIII, p. 238.

Cela posé, il suffira évidemment de diviser par k^2 les valeurs précédentes de

$$\mathfrak{L}, \quad \mathfrak{M}, \quad \mathfrak{N}, \quad \mathfrak{P}, \quad \mathfrak{Q}, \quad \mathfrak{R}$$

pour obtenir, comme on devait s'y attendre, celles que fournissent les équations (45), (46) de la page 27 du V[e] Volume (¹).

Si nous désignons, comme nous l'avons fait ci-dessus (§ II), par s', s'', s''' les trois valeurs de s correspondantes aux trois rayons polarisés dans lesquels se divise généralement un rayon quelconque,

$$\frac{1}{s'^2}, \quad \frac{1}{s''^2}, \quad \frac{1}{s'''^2} \tag{73}$$

seront les carrés des trois demi-axes de l'ellipsoïde qui détermine les lois de la polarisation. Donc, lorsque cet ellipsoïde, étant de révolution, se trouve représenté par l'équation (58), ou, ce qui revient au même, par l'équation (59), deux des rapports (73) sont égaux à l'expression (60), et le troisième à l'expression (61), en sorte qu'on peut prendre

$$s'^2 = s''^2 = \upsilon + \mathfrak{V}', \tag{74}$$

$$s'''^2 = \upsilon + \mathfrak{V}' + k^2\mathfrak{V}''. \tag{75}$$

Alors aussi, en vertu des équations (3), (74) et (75), les trois quantités

$$\Omega', \quad \Omega'', \quad \Omega''',$$

c'est-à-dire les trois vitesses de propagation des trois ondes planes dans lesquelles se divise généralement une onde primitive de lumière non polarisée, se réduisent à celles que déterminent les formules

$$\Omega'^2 = \Omega''^2 = \frac{\upsilon + \mathfrak{V}'}{k^2}, \tag{76}$$

$$\Omega'''^2 = \frac{\upsilon + \mathfrak{V}'}{k^2} + \mathfrak{V}''. \tag{77}$$

Par suite, des trois ondes planes dont il s'agit, les deux premières, se propageant avec la même vitesse, se superposeront de manière à n'en plus former qu'une seule, dans laquelle la lumière sera polarisée

(¹) *Œuvres de Cauchy*, S. II, T. IX, p. 399.

parallèlement au plan de l'équateur de l'ellipsoïde représenté par l'équation (58), ou, ce qui revient au même, parallèlement au plan de l'onde primitive, tandis que, dans la troisième, la lumière sera polarisée perpendiculairement à ce plan. Cela posé, la troisième onde disparaîtra si les déplacements et les vitesses des molécules éthérées dans le premier instant sont parallèles au plan de l'onde lumineuse, et alors il n'y aura plus de polarisation. Au reste, pour que la polarisation de la lumière devienne tout à fait insensible dans les milieux dont l'élasticité est la même en tous sens, il n'est pas absolument nécessaire que la troisième onde disparaisse, et il suffit, comme un jeune géomètre, M. Blanchet, en a fait la remarque, que le rayon correspondant à cette troisième onde soit du nombre de ceux qui échappent au sens de la vue. On conçoit, en effet, que, en raison de la trop grande ou trop courte durée des oscillations de l'éther, l'œil peut cesser de percevoir certains rayons, de même que, en raison de la trop grande ou trop courte durée des oscillations des molécules aériennes, l'oreille cesse de percevoir des sons trop graves ou trop aigus, et l'on pourrait encore supposer l'œil organisé de manière à percevoir les vibrations des molécules éthérées quand elles sont dirigées dans les plans des ondes lumineuses, mais non lorsqu'elles deviennent perpendiculaires à ces mêmes plans. Quoi qu'il en soit, en faisant abstraction de la troisième onde, désignant par T la durée des oscillations des molécules éthérées, et posant [*voir* la formule (3)]

$$s = \frac{2\pi}{\mathrm{T}},$$

on aura, en vertu de la formule (74),

$$s^2 = \mathfrak{v} + \mathfrak{v}', \tag{78}$$

ou, ce qui revient au même, eu égard aux formules (52) et (62),

$$\left\{\begin{aligned} s^2 = {} & \mathrm{S}\left\{\frac{m\,\mathrm{f}(r)}{r}[1 - \cos(kr\cos\alpha)]\right\} \\ & + \mathrm{S}\left\{\frac{m\,f(r)\cos^2\alpha}{r}\left[1 - \frac{\sin(kr\cos\alpha)}{kr\cos\alpha}\right]\right\}; \end{aligned}\right. \tag{79}$$

ou bien encore, eu égard aux formules (64) et (65),

$$\left\{\begin{aligned} s^2 = {} & k^2\,\mathrm{S}\left\{\frac{mr\cos^2\alpha}{1.2}\left[\mathrm{f}(r) + \tfrac{1}{3}f(r)\cos^2\alpha\right]\right\} \\ & - k^4\,\mathrm{S}\left\{\frac{mr^3\cos^4\alpha}{1.2.3.4}\left[\mathrm{f}(r) + \tfrac{1}{5}f(r)\cos^2\alpha\right]\right\} \\ & + k^6\,\mathrm{S}\left\{\frac{mr^5\cos^6\alpha}{1.2.3.4.5.6}\left[\mathrm{f}(r) + \tfrac{1}{7}f(r)\cos^2\alpha\right]\right\} - \ldots. \end{aligned}\right. \tag{80}$$

Telle est l'équation qui, dans un milieu dont l'élasticité reste la même en tous sens, lie entre elles les deux quantités

$$s = \frac{2\pi}{\mathrm{T}} \quad \text{et} \quad k = \frac{2\pi}{l},$$

par conséquent les deux quantités T et l, c'est-à-dire la durée des oscillations moléculaires du fluide éthéré et l'épaisseur d'une onde plane.

Lorsque, dans les équations (74), (75), (76), (77), on substitue à $\mathfrak{v}$, $\mathfrak{v}'$, $\mathfrak{v}''$ leurs valeurs approchées tirées des formules (68), on trouve

$$s'^2 = s''^2 = k^2(\mathrm{R} + \mathrm{I}), \tag{81}$$

$$s'''^2 = k^2(3\mathrm{R} + \mathrm{I}), \tag{82}$$

$$\Omega'^2 = \Omega''^2 = \mathrm{R} + \mathrm{I}, \tag{83}$$

$$\Omega'''^2 = 3\mathrm{R} + \mathrm{I}. \tag{84}$$

Il suit des deux dernières que, dans un milieu dont l'élasticité reste la même en tous sens, les vitesses de propagation des ondes planes correspondantes au rayon visible et au rayon invisible ont respectivement pour valeurs approchées

$$(\mathrm{R} + \mathrm{I})^{\frac{1}{2}} \quad \text{et} \quad (3\mathrm{R} + \mathrm{I})^{\frac{1}{2}}, \tag{85}$$

ce qui s'accorde avec les résultats obtenus dans le V^e Volume des *Exercices* (page 41) [1].

Passons maintenant au cas où l'élasticité de l'éther reste la même

[1] *Œuvres de Cauchy*, S. II, T. IX, p. 416.

en tous sens, non plus autour d'un point quelconque, mais seulement autour d'un axe quelconque parallèle à l'axe des z. Alors les conditions (38), (39) devront être remplies seulement pour les valeurs de u_1, v_1, w_1 propres à vérifier les formules (41). D'ailleurs on vérifiera ces formules en supposant

$$(86)\qquad v_1 = 0, \qquad w_1 = w, \qquad u_1 = \pm\sqrt{u^2+v^2} = \pm\sqrt{k^2-w^2};$$

et, en vertu de cette supposition, les conditions (38), (39) deviendront

$$(87)\quad \left\{\begin{aligned} &\mathrm{S}\left\{\frac{m\,\mathrm{f}(r)}{r}\left\{1-\cos[r(u\cos\alpha+v\cos\beta+w\cos\gamma)]\right\}\right\}\\ &=\mathrm{S}\left\{\frac{m\,\mathrm{f}(r)}{r}\left[1-\cos\left\{r\left[\pm(u^2+v^2)^{\frac{1}{2}}\cos\alpha+v\cos\gamma\right]\right\}\right]\right\},\end{aligned}\right.$$

$$(88)\quad \left\{\begin{aligned} &\mathrm{S}\left\{\frac{m\,f(r)}{r}\left[\tfrac{1}{2}(u\cos\alpha+v\cos\beta+w\cos\gamma)^2+\frac{\cos[r(u\cos\alpha+v\cos\beta+w\cos\gamma)]}{r^2}\right]\right\}\\ &=\mathrm{S}\left\{\frac{m\,f(r)}{r}\left[\tfrac{1}{2}\left[\pm(u^2+v^2)^{\frac{1}{2}}\cos\alpha+w\cos\gamma\right]^2+\frac{\cos\left\{r\left[\pm(u^2+v^2)^{\frac{1}{2}}\cos\alpha+w\cos\gamma\right]\right\}}{r^2}\right]\right\}\end{aligned}\right.$$

ou, ce qui revient au même,

$$(89)\quad \left\{\begin{aligned} &\mathrm{S}\left\{\frac{m\,\mathrm{f}(r)}{r}\left\{1-\cos[r(u\cos\alpha+v\cos\beta+w\cos\gamma)]\right\}\right\}\\ &=\mathrm{S}\left\{\frac{m\,\mathrm{f}(r)}{r}\left[1-\cos\left\{r\left[\pm(k^2-w^2)^{\frac{1}{2}}\cos\alpha+w\cos\gamma\right]\right\}\right]\right\},\end{aligned}\right.$$

$$(90)\quad \left\{\begin{aligned} &\mathrm{S}\left\{\frac{m\,f(r)}{r}\left[\tfrac{1}{2}(u\cos\alpha+v\cos\beta+w\cos\gamma)^2+\frac{\cos[r(u\cos\alpha+v\cos\beta+w\cos\gamma)]}{r^2}\right]\right\}\\ &=\mathrm{S}\left\{\frac{m\,f(r)}{r}\left[\tfrac{1}{2}\left[\pm(k^2-w^2)^{\frac{1}{2}}\cos\alpha+w\cos\gamma\right]^2+\frac{\cos\left\{r\left[\pm(k^2-w^2)^{\frac{1}{2}}\cos\alpha+w\cos\gamma\right]\right\}}{r^2}\right]\right\},\end{aligned}\right.$$

le double signe $\pm$ pouvant être réduit arbitrairement soit au signe $+$ soit au signe $-$. Réciproquement, si les équations (89), (90) continuent de subsister, tandis que u, v varient, mais de manière à vérifier toujours la formule (34) ou

$$u^2+v^2 = k^2-w^2,$$

elles ne seront point altérées quand on remplacera dans leurs premiers membres les quantités u, v par d'autres quantités u_1, v_1 propres à vérifier la formule

$$u_1^2+v_1^2 = k^2-w^2 = u^2+v^2;$$

et par conséquent les équations (87) et (88), ou (89) et (90), que nous avons déduites des formules (38), (39) jointes aux formules (41), entraîneront à leur tour ces formules auxquelles on pourra les substituer sans inconvénient. Donc, pour que l'élasticité de l'éther reste la même en tous sens autour d'un axe quelconque parallèle à l'axe des z, il est nécessaire et il suffit que les formules (87), (88) subsistent, non seulement quelles que soient les valeurs de w, mais encore quelles que soient les valeurs de u, v. Or, s'il en est ainsi, en développant les cosinus que ces formules renferment en séries convergentes, puis égalant entre eux les termes qui, dans les deux membres des mêmes formules, représenteront des fonctions homogènes de u, v, w du degré $2n$, on obtiendra les équations

$$(91)\quad \mathrm{S}[mr^{2n-1}\,\mathrm{f}(r)\,(u\cos\alpha+v\cos\beta+w\cos\gamma)^{2n}] = \mathrm{S}\left\{mr^{2n-1}\,\mathrm{f}(r)\left[\pm(u^2+v^2)^{\frac{1}{2}}\cos\alpha+w\cos\gamma\right]^{2n}\right\}$$

et

$$(92)\quad \mathrm{S}[mr^{2n-3}f(r)\,(u\cos\alpha+v\cos\beta+w\cos\gamma)^{2n}] = \mathrm{S}\left\{mr^{2n-3}f(r)\left[\pm(u^2+v^2)^{\frac{1}{2}}\cos\alpha+w\cos\gamma\right]^{2n}\right\},$$

dont la première devra être étendue à toutes les valeurs positives du nombre entier n, et la seconde à toutes les valeurs de n qui surpassent l'unité. De plus, en développant les expressions

$$(u\cos\alpha+v\cos\beta+w\cos\gamma)^{2n}, \quad \left[\pm(u^2+v^2)^{\frac{1}{2}}\cos\alpha+w\cos\gamma\right]^{2n}$$

suivant les puissances ascendantes de w dans les deux membres de chacune des formules (91), (92), on tirera de ces formules : 1° pour des valeurs impaires de ν,

$$(93)\quad \mathrm{S}[mr^{2n-1}\,\mathrm{f}(r)\,(u\cos\alpha+v\cos\beta)^{2n-\nu}\cos^\nu\gamma] = \pm(u^2+v^2)^{n-\frac{\nu}{2}}\,\mathrm{S}[mr^{2n-1}\,\mathrm{f}(r)\cos^{2n-\nu}\alpha\cos^\nu\gamma]$$

et

$$(94)\quad \mathrm{S}[mr^{2n-3}f(r)\,(u\cos\alpha+v\cos\beta)^{2n-\nu}\cos^\nu\gamma] = \pm(u^2+v^2)^{n-\frac{\nu}{2}}\,\mathrm{S}[mr^{2n-3}f(r)\cos^{2n-\nu}\alpha\cos^\nu\gamma],$$

le double signe $\pm$ pouvant être remplacé à volonté par le signe $+$ ou par le signe $-$; 2° pour des valeurs paires de ν,

$$S[mr^{2n-1}\mathrm{f}(r)(u\cos\alpha+v\cos\beta)^{2n-\nu}\cos^\nu\gamma]=(u^2+v^2)^{n-\frac{\nu}{2}}S[mr^{2n-1}\mathrm{f}(r)\cos^{2n-\nu}\alpha\cos^\nu\gamma] \tag{95}$$

et

$$S[mr^{2n-3}f(r)(u\cos\alpha+v\cos\beta)^{2n-\nu}\cos^\nu\gamma]=(u^2+v^2)^{n-\frac{\nu}{2}}S[mr^{2n-3}f(r)\cos^{2n-\nu}\alpha\cos^\nu\gamma]. \tag{96}$$

Les équations (93), (94) n'étant pas altérées, tandis que leurs seconds membres changent de signes, on doit en conclure que ces seconds membres sont rigoureusement nuls. On aura donc, pour des valeurs impaires de ν,

$$S[mr^{2n-1}\mathrm{f}(r)\cos^{2n-\nu}\alpha\cos^\nu\gamma]=0, \tag{97}$$
$$S[mr^{2n-3}f(r)\cos^{2n-\nu}\alpha\cos^\nu\gamma]=0, \tag{98}$$

et par suite les équations (93), (94) se réduiront à

$$S[mr^{2n-1}\mathrm{f}(r)(u\cos\alpha+v\cos\beta)^{2n-\nu}\cos^\nu\gamma]=0, \tag{99}$$
$$S[mr^{2n-3}f(r)(u\cos\alpha+v\cos\beta)^{2n-\nu}\cos^\nu\gamma]=0. \tag{100}$$

Enfin, comme les deux expressions

$$(u\cos\alpha+v\cos\beta)^{2n-\nu},\quad (u^2+v^2)^{n-\frac{\nu}{2}}$$

étant développées fournissent, la première, des termes de la forme

$$\frac{1.2.3\ldots(2n-\nu)}{(1.2\ldots\lambda)(1.2\ldots\mu)}u^\lambda v^\mu\cos^\lambda\alpha\cos^\mu\beta,$$

dans lesquels les nombres λ, μ, ν, liés entre eux par l'équation

$$\lambda+\mu+\nu=2n, \tag{47}$$

peuvent être pairs ou impairs, et, la seconde, lorsque ν est un nombre pair, des termes de la forme

$$\frac{1.2.3\ldots\left(n-\frac{\nu}{2}\right)}{\left(1.2\ldots\frac{\lambda}{2}\right)\left(1.2\ldots\frac{\mu}{2}\right)}u^\lambda v^\mu$$
$$=\frac{2.4.6\ldots(2n-\nu)}{(2.4\ldots\lambda)(2.4\ldots\mu)}u^\lambda v^\mu=\frac{1.3\ldots(\lambda-1).1.3\ldots(\mu-1)}{1.3\ldots(2n-\nu-1)}\,\frac{1.2.3\ldots(2n-\nu)}{(1.2\ldots\lambda)(1.2\ldots\mu)}u^\lambda v^\mu,$$

dans lesquels λ, μ sont pareillement des nombres pairs, on tirera des formules (99), (100), (95) et (96) : 1° pour des valeurs impaires de λ, de μ ou de ν,

$$S[mr^{2n-1}\mathrm{f}(r)\cos^\lambda\alpha\cos^\mu\beta\cos^\nu\gamma]=0 \tag{48}$$

et

$$S[mr^{2n-3}f(r)\cos^\lambda\alpha\cos^\mu\beta\cos^\nu\gamma]=0; \tag{49}$$

2° pour des valeurs paires de λ, μ et ν,

$$S[mr^{2n-1}\mathrm{f}(r)\cos^\lambda\alpha\cos^\mu\beta\cos^\nu\gamma]=\frac{1.3\ldots(\lambda-1).1.3\ldots(\mu-1)}{1.3.5\ldots(2n-\nu-1)}S[mr^{2n-1}\mathrm{f}(r)\cos^{2n-\nu}\alpha\cos^\nu\gamma] \tag{101}$$

et

$$S[mr^{2n-3}f(r)\cos^\lambda\alpha\cos^\mu\beta\cos^\nu\gamma]=\frac{1.3\ldots(\lambda-1).1.3\ldots(\mu-1)}{1.3.5\ldots(2n-\nu-1)}S[mr^{2n-3}f(r)\cos^{2n-\nu}\alpha\cos^\nu\gamma], \tag{102}$$

le nombre entier n dont le double équivaut à la somme $\lambda+\mu+\nu$ pouvant être quelconque dans les équations (48), (101), mais devant surpasser l'unité dans les équations (49), (102). Il importe d'observer que les conditions (48), (49), déjà obtenues dans le cas où l'élasticité de l'éther était censée rester la même en tous sens autour d'un point quelconque, renferment comme cas particuliers les conditions (97), (98). Ajoutons que des formules (48), (49), (101) et (102) on peut remonter immédiatement aux formules (99), (100), (95) et (96), ou même aux formules (91), (92), par conséquent aux formules (89), (90), qui peuvent à leur tour être remplacées par les équations (38), (39) jointes aux équations (41). Donc en définitive les formules (48), (49), (101) et (102), étendues à toutes les valeurs positives du nombre entier n, ou du moins, s'il s'agit des formules (49) et (102), aux valeurs entières de n qui surpassent l'unité, expriment les conditions nécessaires et suffisantes pour que l'élasticité de l'éther puisse être censée rester la même en tous sens autour d'un axe quelconque parallèle à l'axe des z.

Lorsque ces conditions sont remplies, on tire des formules (10) et (11) jointes aux formules (87) et (88)

$$(103)\quad \mathfrak{v} = \mathrm{S}\left[\frac{m\,\mathrm{f}(r)}{r}\left\{1 - \cos r\left[\pm(u^2+v^2)^{\frac{1}{2}}\cos\alpha + w\cos\gamma\right]\right\}\right],$$

$$(104)\quad \mathfrak{V} = \mathrm{S}\left\{\frac{m\,f(r)}{r}\left[\tfrac{1}{2}\left[\pm(u^2+v^2)^{\frac{1}{2}}\cos\alpha + w\cos\gamma\right]^2 + \frac{\cos\left\{r\left[\pm(u^2+v^2)^{\frac{1}{2}}\cos\alpha + w\cos\gamma\right]\right\}}{r^2}\right]\right\};$$

et, comme dans ces dernières on peut supposer le double signe $\pm$ arbitrairement réduit soit au signe $+$, soit au signe $-$, il est clair qu'on pourra prendre encore pour valeur de $\mathfrak{v}$ ou de $\mathfrak{V}$ la demi-somme des résultats obtenus dans ces deux suppositions. En opérant ainsi et ayant égard aux formules

$$\frac{\left[(u^2+v^2)^{\frac{1}{2}}\cos\alpha + w\cos\gamma\right]^2 + \left[-(u^2+v^2)^{\frac{1}{2}}\cos\alpha + w\cos\gamma\right]^2}{2} = (u^2+v^2)\cos^2\alpha + w^2\cos^2\gamma,$$

$$\cos\left\{r\left[(u^2+v^2)^{\frac{1}{2}}\cos\alpha + w\cos\gamma\right]\right\} + \cos\left\{r\left[-(u^2+v^2)^{\frac{1}{2}}\cos\alpha + w\cos\gamma\right]\right\} = 2\cos\left[r(u^2+v^2)^{\frac{1}{2}}\cos\alpha\right]\cos(rw\cos\gamma),$$

on trouvera

$$(105)\quad \mathfrak{v} = \mathrm{S}\left[\frac{m\,\mathrm{f}(r)}{r}\left\{1 - \cos\left[r(u^2+v^2)^{\frac{1}{2}}\cos\alpha\right]\cos(rw\cos\gamma)\right\}\right],$$

$$(106)\quad \mathfrak{V} = \mathrm{S}\left\{\frac{m\,f(r)}{r}\left[\frac{(u^2+v^2)\cos^2\alpha + w^2\cos^2\gamma}{2} + \frac{\cos\left[r(u^2+v^2)^{\frac{1}{2}}\cos\alpha\right]\cos(rw\cos\gamma)}{r^2}\right]\right\}.$$

En résumé, $\mathfrak{v}$ et $\mathfrak{V}$ seront seulement fonctions des quantités variables

$$u^2+v^2 \quad \text{et} \quad w^2.$$

D'autre part, si, après avoir fait, pour abréger,

$$(107)\qquad \mathrm{K}_1 = \tfrac{1}{2}(u^2+v^2), \qquad \mathrm{K}_2 = \tfrac{1}{2}w^2,$$

on désigne par

$$\mathfrak{V}_1, \quad \mathfrak{V}_{1,1}$$

les dérivées du premier et du second ordre de $\mathfrak{V}$ considéré comme fonction de K_1, par

$$\mathfrak{V}_2, \quad \mathfrak{V}_{2,2}$$

les dérivées du premier et du second ordre de $\mathfrak{V}$ considéré comme fonction de K_2, et par

$$\mathfrak{V}_{1,2}$$

la dérivée du second ordre de $\mathfrak{V}$ différentié une fois par rapport à chacune des variables K_1, K_2, on trouvera

$$(108)\qquad \frac{\partial \mathrm{K}_1}{\partial u} = u, \qquad \frac{\partial \mathrm{K}_1}{\partial v} = v, \qquad \frac{\partial \mathrm{K}_2}{\partial w} = w,$$

et, par suite,

$$(109)\qquad \frac{\partial \mathfrak{V}}{\partial u} = u\mathfrak{V}_1, \qquad \frac{\partial \mathfrak{V}}{\partial v} = v\mathfrak{V}_1, \qquad \frac{\partial \mathfrak{V}}{\partial w} = w\mathfrak{V}_2,$$

$$(110)\qquad \frac{\partial^2 \mathfrak{V}}{\partial u^2} = \mathfrak{V}_1 + u^2\mathfrak{V}_{1,1}, \qquad \frac{\partial^2 \mathfrak{V}}{\partial v^2} = \mathfrak{V}_1 + v^2\mathfrak{V}_{1,1}, \qquad \frac{\partial^2 \mathfrak{V}}{\partial w^2} = \mathfrak{V}_2 + w^2\mathfrak{V}_{2,2},$$

$$(111)\qquad \frac{\partial^2 \mathfrak{V}}{\partial v\,\partial w} = vw\mathfrak{V}_{1,2}, \qquad \frac{\partial^2 \mathfrak{V}}{\partial w\,\partial u} = wu\mathfrak{V}_{1,2}, \qquad \frac{\partial^2 \mathfrak{V}}{\partial u\,\partial v} = uv\mathfrak{V}_{1,1}.$$

En conséquence, les formules (8), (9) donneront

$$(112)\qquad \mathcal{L} = \mathfrak{v} + \mathfrak{V}_1 + u^2\mathfrak{V}_{1,1}, \qquad \mathcal{M} = \mathfrak{v} + \mathfrak{V}_1 + v^2\mathfrak{V}_{1,1}, \qquad \mathcal{N} = \mathfrak{v} + \mathfrak{V}_2 + w^2\mathfrak{V}_{2,2},$$

$$(113)\qquad \mathcal{P} = vw\mathfrak{V}_{1,2}, \qquad \mathcal{Q} = wu\mathfrak{V}_{1,2}, \qquad \mathcal{R} = uv\mathfrak{V}_{1,1};$$

et l'équation (7), c'est-à-dire l'équation de l'ellipsoïde qui détermine les lois de la polarisation, deviendra

$$(114)\qquad \left\{\begin{aligned} &(\mathfrak{v} + \mathfrak{V}_1)(\mathrm{x}^2+\mathrm{y}^2) + \mathfrak{V}_{1,1}(u\mathrm{x} + v\mathrm{y})^2 \\ &\quad + 2\mathfrak{V}_{1,2}(u\mathrm{x} + v\mathrm{y})w\mathrm{z} + (\mathfrak{v} + \mathfrak{V}_2 + \mathfrak{V}_{2,2}w^2)\mathrm{z}^2 = 1.\end{aligned}\right.$$

Lorsque le plan de l'onde primitive coïncide avec le plan de x, y, on a

$$a = 0, \qquad b = 0, \qquad c = \pm 1;$$

on en conclut

$$u = 0, \qquad v = 0, \qquad w = \pm k,$$

et la formule (114) se réduit à

$$(115)\qquad (\mathfrak{v} + \mathfrak{V}_1)(\mathrm{x}^2+\mathrm{y}^2) + (\mathfrak{v} + \mathfrak{V}_2 + \mathfrak{V}_{2,2}k^2)\mathrm{z}^2 = 1.$$

Donc alors, comme il était facile de le prévoir, l'ellipsoïde (7) est de révolution autour de l'axe des z, et dans cet ellipsoïde le carré du rayon de l'équateur est

$$\frac{1}{\mathfrak{V}+\vartheta_1},$$

le carré du demi-axe de révolution étant

$$\frac{1}{\mathfrak{V}+\vartheta_2+\vartheta_{2,2}k^2}.$$

Donc, si l'on nomme généralement Ω', Ω'', Ω''' les vitesses de propagation des trois ondes planes dans lesquelles se divise une onde primitive de lumière non polarisée, on pourra prendre, dans le cas particulier dont il s'agit,

$$\Omega'^2=\Omega''^2=\frac{\mathfrak{V}+\vartheta_1}{k^2}, \tag{116}$$

$$\Omega'''^2=\frac{\mathfrak{V}+\vartheta_2}{k^2}+\vartheta_{2,2}, \tag{117}$$

et les deux premières ondes, se propageant avec la même vitesse, se superposeront de manière à n'en plus former qu'une seule. C'est ce qui arrive dans certains cristaux où les deux rayons polarisés que l'œil peut apercevoir, et qui produisent ce qu'on appelle la *double réfraction*, se confondent dès que le plan de l'onde devient perpendiculaire à un certain axe nommé l'*axe optique* du cristal.

Sans rien changer à la direction de l'axe des z, on peut disposer du plan des y, z, de manière à simplifier l'équation (114). Effectivement, on y parviendra en faisant coïncider le plan des y, z avec celui qui, passant par l'axe des z, sera perpendiculaire au plan de l'onde. Alors la droite OP, perpendiculaire au plan de l'onde, se trouvera comprise dans le plan des y, z; et comme on aura par suite

$$u=0,$$

la formule (34) donnera

$$v=\pm(k^2-w^2)^{\frac{1}{2}}.$$

En conséquence, l'équation (114) deviendra

$$\left\{\begin{aligned}&(\mathfrak{V}+\vartheta_1)x^2+[\mathfrak{V}+\vartheta_1+\vartheta_{1,1}(k^2-w^2)]y^2\\&\quad\pm 2\vartheta_{1,2}(k^2-w^2)^{\frac{1}{2}}wyz+(\mathfrak{V}+\vartheta_2+\vartheta_{2,2}w^2)z^2=1.\end{aligned}\right. \tag{118}$$

Dans cette dernière, le double signe $\pm$ pourra être réduit arbitrairement soit au signe $+$, soit au signe $-$. D'ailleurs, en vertu de ce qui a été dit précédemment (page 229), les valeurs de $\mathfrak{V}$, ϑ, et par suite celles de ϑ', ϑ'', ne varieront pas dans le passage de l'équation (114) à l'équation (118). Maintenant il est clair que l'ellipsoïde représenté par l'équation (118) offrira un axe dirigé suivant l'axe des x, c'est-à-dire suivant la trace du plan de l'onde sur le plan des x, y. Les deux autres axes de l'ellipsoïde se confondront avec les axes de la section faite dans cet ellipsoïde par le plan des y, z, c'est-à-dire avec les deux axes de l'ellipse représentée par l'équation

$$\left\{\begin{aligned}&[\mathfrak{V}+\vartheta_1+\vartheta_{1,1}(k^2-w^2)]y^2\\&\quad\pm 2\vartheta_{1,2}(k^2-w^2)^{\frac{1}{2}}wyz+(\mathfrak{V}+\vartheta_2+\vartheta_{2,2}w^2)z^2=1.\end{aligned}\right. \tag{119}$$

Cela posé, soient

$$\frac{1}{s'^2}$$

le carré du demi-axe qui, dans l'ellipsoïde, coïncide avec la trace du plan de l'onde primitive sur le plan mené par le point O perpendiculairement à l'axe des z, et

$$\frac{1}{s''^2},\quad \frac{1}{s'''^2}$$

les carrés des demi-axes de l'ellipse (119). Les vitesses de propagation

$$\Omega',\quad \Omega'',\quad \Omega'''$$

des trois ondes polarisées seront déterminées par les formules

$$\Omega'^2=\frac{s'^2}{k^2},\qquad \Omega''^2=\frac{s''^2}{k^2},\qquad \Omega'''^2=\frac{s'''^2}{k^2}, \tag{120}$$

la valeur de s'^2 étant

$$s'^2 = \mathfrak{V} + \mathcal{V}_1, \tag{121}$$

tandis que s''^2, s'''^2 représenteront les deux valeurs de s^2 propres à vérifier l'équation

$$\left\{ \begin{aligned} &\{s^2 - [\mathfrak{V} + \mathcal{V}_1 + \mathcal{V}_{1,1}(k^2 - w^2)]\}[s^2 - (\mathfrak{V} + \mathcal{V}_2 + \mathcal{V}_{2,2}w^2)] \\ &\qquad - \mathcal{V}_{1,2}^2(k^2 - w^2)w^2 = 0. \end{aligned} \right. \tag{122}$$

Lorsque le plan de l'onde primitive est perpendiculaire à l'axe des z, ou, ce qui revient au même, lorsqu'on a

$$u = 0, \qquad v = 0, \qquad w = \pm k,$$

l'équation (122) se réduit à

$$[s^2 - (\mathfrak{V} + \mathcal{V}_1)][s^2 - (\mathfrak{V} + \mathcal{V}_2 + \mathcal{V}_{2,2}k_2)] = 0. \tag{123}$$

On peut donc prendre alors

$$s''^2 = \mathfrak{V} + \mathcal{V}_1, \qquad s'''^2 = \mathfrak{V} + \mathcal{V}_2 + \mathcal{V}_{2,2}k^2; \tag{124}$$

et, en combinant les formules (120) avec les formules (121), (124), on se trouve immédiatement ramené aux équations (116), (117).

Lorsque le plan de l'onde primitive passe par l'axe des z, c'est-à-dire lorsqu'on a

$$w = 0,$$

l'équation (122) se réduit à

$$[s^2 - (\mathfrak{V} + \mathcal{V}_1 + \mathcal{V}_{1,1}k^2)][s^2 - (\mathfrak{V} + \mathcal{V}_2)] = 0. \tag{125}$$

On peut donc prendre alors

$$s''^2 = \mathfrak{V} + \mathcal{V}_2, \qquad s'''^2 = \mathfrak{V} + \mathcal{V}_1 + \mathcal{V}_{1,1}k^2. \tag{126}$$

Alors aussi l'équation (118), réduite à

$$(\mathfrak{V} + \mathcal{V}_1)x^2 + (\mathfrak{V} + \mathcal{V}_1 + \mathcal{V}_{1,1}k^2)y^2 + (\mathfrak{V} + \mathcal{V}_2)z^2 = 1, \tag{127}$$

représente un ellipsoïde qui a pour axes les axes coordonnés; et l'on peut affirmer que, des trois ondes planes produites par la subdivision

de l'onde primitive, dont le plan renferme l'axe des z, les deux premières se composent de lumière polarisée parallèlement à deux axes rectangulaires compris dans ce plan, et dont l'un est l'axe des z, tandis que la troisième se compose de lumière polarisée perpendiculairement au plan de l'onde. Enfin, lorsque l'axe des z se trouve incliné d'une manière quelconque sur le plan de l'onde primitive, les quantités s''^2, s'''^2 déterminées par l'équation (122) coïncident avec les deux valeurs de s^2 données par la formule

$$\left\{ \begin{aligned} s^2 = \mathfrak{V} &+ \frac{\mathcal{V}_1 + \mathcal{V}_{1,1}(k^2 - w^2) + \mathcal{V}_2 + \mathcal{V}_{2,2}w^2}{2} \\ &\pm \sqrt{\left[\frac{\mathcal{V}_1 + \mathcal{V}_{1,1}(k^2 - w^2) - \mathcal{V}_2 - \mathcal{V}_{2,2}w^2}{2}\right]^2 + \mathcal{V}_{1,2}^2(k^2 - w^2)w^2}. \end{aligned} \right. \tag{128}$$

Observons encore que l'équation (127) peut être présentée sous la forme

$$\left\{ \begin{aligned} &(\mathfrak{V} + \mathcal{V}_1)(x^2 + y^2 + z^2) + \mathcal{V}_{1,1}(ux + vy + wz)^2 \\ &\quad + 2(\mathcal{V}_{1,2} - \mathcal{V}_{1,1})(ux + vy)wz + [\mathcal{V}_2 - \mathcal{V}_1 + (\mathcal{V}_{2,2} - \mathcal{V}_{1,1})w^2]z^2 = 1, \end{aligned} \right. \tag{129}$$

et que cette équation, devenant semblable à l'équation (58), lorsque les différences

$$\mathcal{V}_2 - \mathcal{V}_1, \quad \mathcal{V}_{1,2} - \mathcal{V}_{1,1}, \quad \mathcal{V}_{2,2} - \mathcal{V}_{1,1} \tag{130}$$

s'évanouissent, représente alors, comme l'équation (58), un ellipsoïde de révolution, qui a pour équateur le plan de l'onde primitive. Donc, si les différences (130), sans être nulles, sont très petites, l'ellipsoïde représenté par l'équation (129) différera peu d'un ellipsoïde de révolution qui aurait pour axe de révolution la droite OP menée par le point O perpendiculairement au plan de l'onde; et, des trois ondes de lumière polarisée produites par la subdivision d'une onde primitive, les deux premières offriront des vitesses de propagation peu différentes entre elles, et des molécules éthérées dont les vitesses propres seront dirigées suivant des droites sensiblement parallèles au plan de chaque onde. C'est effectivement ce qui arrive quand la lumière traverse un cristal doué de la double réfraction.

§ IV. — *Propagation des ondes lumineuses dans un milieu où l'élasticité de l'éther reste la même en tous sens.*

Considérons un milieu dans lequel l'élasticité de l'éther reste la même en tous sens. Alors, comme on l'a dit (page 223), des trois ondes planes dans lesquelles se divise généralement une onde plane de lumière non polarisée, les deux premières, se propageant avec la même vitesse, se superposeront de manière à n'en plus former qu'une seule, dans laquelle la lumière sera polarisée parallèlement au plan de l'onde primitive, tandis que dans la troisième la lumière sera polarisée perpendiculairement à ce plan. De plus, la troisième onde disparaîtra, si c'est dans le plan même de l'onde primitive que sont dirigés les déplacements et les vibrations initiales de molécules, et alors il n'y aura plus de polarisation. On arrive à la même conclusion, en substituant dans les équations (25) du § II les valeurs de $\mathcal{L}$, $\mathcal{M}$, $\mathcal{N}$, $\mathcal{P}$, $\mathcal{Q}$, $\mathcal{R}$ que fournissent les équations (56), (57) du § III pour le cas où l'élasticité de l'éther reste la même dans tous les sens. Effectivement, après la substitution dont il s'agit, les formules (25) du § II se réduisent à

$$(1)\qquad \left\{\begin{aligned} \frac{\partial^2\xi}{\partial t^2} &= -(\mathfrak{V}+\mathfrak{V}')\xi - u\,\mathfrak{V}''(u\xi+v\eta+w\zeta),\\ \frac{\partial^2\eta}{\partial t^2} &= -(\mathfrak{V}+\mathfrak{V}')\eta - v\,\mathfrak{V}''(u\xi+v\eta+w\zeta),\\ \frac{\partial^2\zeta}{\partial t^2} &= -(\mathfrak{V}+\mathfrak{V}')\zeta - w\,\mathfrak{V}''(u\xi+v\eta+w\zeta).\end{aligned}\right.$$

Si maintenant on ajoute les formules (1) après avoir multiplié les deux membres de la première par u, de la seconde par v, de la troisième par w, et si l'on a égard à l'équation

$$(2)\qquad u^2+v^2+w^2=k^2,$$

on trouvera

$$(3)\qquad \frac{\partial^2(u\xi+v\eta+w\zeta)}{\partial t^2} = -(\mathfrak{V}+\mathfrak{V}'+\mathfrak{V}''k^2)(u\xi+v\eta+w\zeta).$$

Cela posé, en tenant compte des formules (26), (27) du § II, on déduira sans peine de l'équation (3) la valeur générale de

$$u\xi+v\eta+w\zeta;$$

puis, après avoir substitué cette valeur dans chacune des formules (1), on tirera de ces dernières formules les valeurs des trois inconnues ξ, η, ζ.

Lorsque les déplacements et les vitesses des molécules de l'éther sont primitivement parallèles au plan de l'onde lumineuse, les valeurs initiales des deux quantités

$$u\xi+v\eta+w\zeta,\quad u\frac{\partial\xi}{\partial t}+v\frac{\partial\eta}{\partial t}+w\frac{\partial\zeta}{\partial t}$$

s'évanouissent, et l'équation (3) donne généralement

$$(4)\qquad u\xi+v\eta+w\zeta=0.$$

Par suite, en posant, pour abréger,

$$(5)\qquad s^2=\mathfrak{V}+\mathfrak{V}',$$

on réduit les formules (1) à

$$(6)\qquad \frac{\partial^2\xi}{\partial t^2}=-s^2\xi,\qquad \frac{\partial^2\eta}{\partial t^2}=-s^2\eta,\qquad \frac{\partial^2\zeta}{\partial t^2}=-s^2\zeta.$$

Or on tire des formules (6)

$$(7)\qquad \left\{\begin{aligned} \xi &= \xi_0\cos st+\xi_1\frac{\sin st}{s},\\ \eta &= \eta_0\cos st+\eta_1\frac{\sin st}{s},\\ \zeta &= \zeta_0\cos st+\zeta_1\frac{\sin st}{s},\end{aligned}\right.$$

ξ_0, η_0, ζ_0, ξ_1, η_1, ζ_1 désignant les valeurs initiales de

$$\xi,\quad \eta,\quad \zeta,\quad \frac{\partial\xi}{\partial t},\quad \frac{\partial\eta}{\partial t},\quad \frac{\partial\zeta}{\partial t}.$$

D'ailleurs ces valeurs initiales que déterminent les équations (26), et (27) du § II, jointes à l'équation

$$(8) \qquad \iota = ax + by + cz$$

ou, ce qui revient au même, à la formule

$$(9) \qquad k\iota = ux + vy + wz,$$

devront vérifier des conditions semblables, soit à la condition (78), soit à la condition (63) du § II, si l'on veut obtenir seulement des ondes lumineuses dont la vitesse de propagation soit dirigée dans le même sens que la droite OP, ou des ondes lumineuses dont la vitesse de propagation soit dirigée dans le sens opposé, la droite OP étant celle qui forme, avec les demi-axes des coordonnées positives, les angles dont les cosinus sont respectivement

$$(10) \qquad a = \frac{u}{k}, \qquad b = \frac{v}{k}, \qquad c = \frac{w}{k}.$$

Dans le premier cas, on aura

$$(11) \qquad \xi_1 = -\Omega \frac{\partial \xi_0}{\partial t}, \qquad \eta_1 = -\Omega \frac{\partial \eta_0}{\partial t}, \qquad \zeta_1 = -\Omega \frac{\partial \zeta_0}{\partial t},$$

la vitesse de propagation d'une onde étant

$$(12) \qquad \Omega = \frac{s}{k};$$

et, des formules (7), (10), (11) jointes aux équations

$$(13) \qquad \left\{ \begin{aligned} \xi_0 &= \mathfrak{d}_0 \cos k\iota + \mathfrak{g}_0 \sin k\iota = \varphi(\iota), \\ \eta_0 &= \mathfrak{e}_0 \cos k\iota + \mathfrak{h}_0 \sin k\iota = \chi(\iota), \\ \zeta_0 &= \mathfrak{f}_0 \cos k\iota + \mathfrak{i}_0 \sin k\iota = \psi(\iota), \end{aligned} \right.$$

on tirera

$$(14) \qquad \left\{ \begin{aligned} \xi &= \mathfrak{d}_0 \cos(k\iota - st) + \mathfrak{g}_0 \sin(k\iota - st) = \varphi(\iota - \Omega t), \\ \eta &= \mathfrak{e}_0 \cos(k\iota - st) + \mathfrak{h}_0 \sin(k\iota - st) = \chi(\iota - \Omega t), \\ \zeta &= \mathfrak{f}_0 \cos(k\iota - st) + \mathfrak{i}_0 \sin(k\iota - st) = \psi(\iota - \Omega t). \end{aligned} \right.$$

Dans le second cas, les formules (14) devraient être remplacées par

celles qu'on en déduit en substituant aux binômes

$$k\iota - st, \quad \iota - \Omega t$$

les binômes

$$k\iota + st, \quad \iota + \Omega t.$$

Ajoutons que, l'équation (4) devant être vérifiée indépendamment des valeurs attribuées à ι et à t, par conséquent pour des valeurs de

$$k\iota - st$$

égales à zéro et à $\frac{\pi}{2}$, on trouvera, entre les constantes arbitraires

$$\mathfrak{d}_0, \quad \mathfrak{e}_0, \quad \mathfrak{f}_0, \quad \mathfrak{g}_0, \quad \mathfrak{h}_0, \quad \mathfrak{i}_0,$$

des relations exprimées par les formules

$$(15) \qquad u\mathfrak{d}_0 + v\mathfrak{e}_0 + w\mathfrak{f}_0 = 0, \qquad u\mathfrak{g}_0 + v\mathfrak{h}_0 + w\mathfrak{i}_0 = 0$$

ou, ce qui revient au même, par les formules

$$(16) \qquad a\mathfrak{d}_0 + b\mathfrak{e}_0 + c\mathfrak{f}_0 = 0, \qquad a\mathfrak{g}_0 + b\mathfrak{h}_0 + c\mathfrak{i}_0 = 0,$$

desquelles on tirera

$$(17) \qquad a\,\varphi(\iota) + b\,\chi(\iota) + c\,\psi(\iota) = 0.$$

Soient maintenant

$$a', \quad b', \quad c' \quad \text{et} \quad a'', \quad b'', \quad c''$$

les cosinus des angles formés avec les demi-axes des coordonnées positives par deux nouvelles droites OQ, OR perpendiculaires entre elles et à la droite OP. Posons d'ailleurs

$$(18) \qquad a'\,\varphi(\iota) + b'\,\chi(\iota) + c'\,\psi(\iota) = \varpi(\iota)$$

et

$$(19) \qquad a''\,\varphi(\iota) + b''\,\chi(\iota) + c''\,\psi(\iota) = \Pi(\iota).$$

Les trois axes OP, OQ, OR étant rectangulaires entre eux, aussi bien que les axes des x, y, z, on aura, non seulement

$$(20) \qquad \left\{ \begin{aligned} &a^2 + b^2 + c^2 = 1, &&a'^2 + b'^2 + c'^2 = 1, &&a''^2 + b''^2 + c''^2 = 1, \\ &a'a'' + b'b'' + c'c'' = 0, &&a''a + b''b + c''c = 0, &&aa' + bb' + cc' = 0, \end{aligned} \right.$$

mais encore

$$(21)\quad \begin{cases} a^2+a'^2+a''^2=1, & b^2+b'^2+b''^2=1, \qquad c^2+c'^2+c''^2=1, \\ bc+b'c'+b''c''=0, & ca+c'a'+c''a''=0, \qquad ab+a'b'+a''b''=0; \end{cases}$$

et, par suite, des formules (17), (18), (19), respectivement multipliées par a, a', a'' ou par b, b', b'', ou enfin par c, c', c'', on tirera

$$(22)\qquad \begin{cases} \varphi(\iota)=a'\varpi(\iota)+a''\Pi(\iota), \\ \chi(\iota)=b'\varpi(\iota)+b''\Pi(\iota), \\ \psi(\iota)=c'\varpi(\iota)+c''\Pi(\iota). \end{cases}$$

En conséquence, les formules (14) donneront

$$(23)\qquad \begin{cases} \xi=a'\varpi(\iota-\Omega t)+a''\Pi(\iota-\Omega t), \\ \eta=b'\varpi(\iota-\Omega t)+b''\Pi(\iota-\Omega t), \\ \zeta=c'\varpi(\iota-\Omega t)+c''\Pi(\iota-\Omega t). \end{cases}$$

Observons d'ailleurs que, si l'on fait, pour abréger,

$$(24)\qquad a'\mathfrak{d}_0+b'\mathfrak{e}_0+c'\mathfrak{f}_0=\mathfrak{A}, \qquad a'\mathfrak{g}_0+b'\mathfrak{h}_0+c'\mathfrak{i}_0=\mathfrak{B},$$

$$(25)\qquad a''\mathfrak{d}_0+b''\mathfrak{e}_0+c''\mathfrak{f}_0=\mathfrak{C}, \qquad a''\mathfrak{g}_0+b''\mathfrak{h}_0+c''\mathfrak{i}_0=\mathfrak{D},$$

on conclura des formules (18), (19) jointes aux équations (13)

$$(26)\qquad \begin{cases} \varpi(\iota)=\mathfrak{A}\cos k\iota+\mathfrak{B}\sin k\iota, \\ \Pi(\iota)=\mathfrak{C}\cos k\iota+\mathfrak{D}\sin k\iota. \end{cases}$$

Dans le cas particulier où le plan de l'onde primitive devient parallèle à l'axe des z, et où la droite OP, renfermée dans l'angle que comprennent entre eux les demi-axes des x et des y positives, forme avec le premier de ces demi-axes un angle aigu représenté par τ, on a

$$(27)\qquad a=\cos\tau, \qquad b=\sin\tau, \qquad c=0.$$

Dans le même cas, en faisant coïncider la droite OQ avec un demi-axe mené dans le plan des x, y perpendiculairement à la droite OP, et la droite OR avec le demi-axe des z positives, on trouvera

$$(28)\qquad a'=\sin\tau, \qquad b'=-\cos\tau, \qquad c'=0$$

et

$$(29)\qquad a''=0, \qquad b''=0, \qquad c''=1.$$

Par suite, les formules (23) donneront

$$(30)\qquad \xi=\sin\tau\,\varpi(\iota-\Omega t), \qquad \eta=-\cos\tau\,\varpi(\iota-\Omega t), \qquad \zeta=\Pi(\iota-\Omega t);$$

et, comme on tirera de l'équation (8)

$$(31)\qquad \iota=x\cos\tau+y\sin\tau,$$

on aura définitivement

$$(32)\qquad \begin{cases} \xi=\ \ \sin\tau\,\varpi(x\cos\tau+y\sin\tau-\Omega t), \\ \eta=-\cos\tau\,\varpi(x\cos\tau+y\sin\tau-\Omega t), \\ \zeta=\Pi(x\cos\tau+y\sin\tau-\Omega t), \end{cases}$$

les fonctions $\varpi(\iota)$, $\Pi(\iota)$ étant toujours déterminées par les formules (26), ou, ce qui revient au même, eu égard à l'équation (12),

$$(33)\quad \begin{cases} \xi=\ \ \sin\tau\{\mathfrak{A}\cos[k(x\cos\tau+y\sin\tau)-st]+\mathfrak{B}\sin[k(x\cos\tau+y\sin\tau)-st]\}, \\ \eta=-\cos\tau\{\mathfrak{A}\cos[k(x\cos\tau+y\sin\tau)-st]+\mathfrak{B}\sin[k(x\cos\tau+y\sin\tau)-st]\}, \\ \zeta=\mathfrak{C}\cos[k(x\cos\tau+y\sin\tau)-st]+\mathfrak{D}\sin[k(x\cos\tau+y\sin\tau)-st]. \end{cases}$$

Remarquons encore que l'équation (5) ou, en d'autres termes, l'équation (78) du § III peut être remplacée par la formule (80) du même paragraphe; et que, si l'on fait, pour abréger,

$$(34)\qquad (-1)^{n+1}\mathrm{a}_n=\mathrm{S}\frac{mr^{2n-1}\cos^{2n}\alpha}{1.2.3\ldots2n}\left[\mathrm{f}(r)+\frac{1}{2n+1}f(r)\cos^2\alpha\right],$$

cette formule donnera simplement

$$(35)\qquad s^2=\mathrm{a}_1k^2+\mathrm{a}_2k^4+\mathrm{a}_3k^6+\ldots.$$

De cette dernière jointe à la formule (12) on conclura

$$(36)\qquad \Omega^2=\mathrm{a}_1+\mathrm{a}_2k^2+\mathrm{a}_3k^4+\ldots.$$

D'ailleurs, en désignant par l l'épaisseur d'une onde plane et par T la durée des oscillations moléculaires du fluide éthéré, on aura, comme dans les paragraphes précédents,

$$k = \frac{2\pi}{l}, \tag{37}$$

$$s = \frac{2\pi}{T}. \tag{38}$$

Il est important d'observer que, en vertu de la formule (38), la quantité s dépend uniquement de la durée des oscillations moléculaires, c'est-à-dire de la nature de la couleur, tandis que, en vertu de l'équation (35) jointe aux formules (12) et (37), les quantités k, Ω et l dépendent simultanément de la couleur et de la nature du milieu dans lequel se propagent les ondes lumineuses. Quant à l'angle τ, il dépend uniquement de la direction des plans parallèles qui renferment ces mêmes ondes.

§ V. — *Sur la réfraction de la lumière.*

Considérons deux milieux séparés par le plan des yz, dont chacun soit tel que l'éther y offre la même élasticité en tous sens, et dans l'un desquels se propagent des ondes lumineuses dont les plans soient parallèles à l'axe des z. L'existence de ces ondes, que nous nommerons *incidentes*, entraînera la coexistence : 1° d'un second système d'ondes propagées dans le premier milieu, et que l'on nomme *réfléchies*; 2° d'un troisième système d'ondes propagées dans le second milieu, et que l'on nomme *réfractées*. Car, en faisant abstraction de ces ondes réfléchies et réfractées, on ne pourrait satisfaire aux conditions relatives à la surface de séparation des deux milieux.

Nous avons montré, dans le *Bulletin des Sciences*, comment de la remarque précédente on peut déduire, non seulement les lois de la réflexion et de la réfraction de la lumière, mais encore la détermination de la quantité de lumière polarisée par réflexion et par réfraction sous une incidence donnée, la loi de Brewster sur l'angle de polarisation complète et les formules insérées par Fresnel dans le n° 17 des

Annales de Chimie et de Physique. Nous nous bornerons pour l'instant à déduire de la même remarque la loi de la réfraction, en admettant, comme l'expérience le prouve, que la réflexion ne change pas la nature de la couleur, et que l'angle d'incidence est égal à l'angle de réflexion.

Pour un seul des trois systèmes d'ondes incidentes, réfléchies ou réfractées, les déplacements ξ, η, ζ de la molécule lumineuse correspondante au point (x, y, z) se trouveraient déterminés par des équations semblables aux formules (33) du § IV. Ajoutons que, dans le passage des ondes incidentes aux ondes réfléchies, les quantités s et T ne varieront point, ni même les quantités k, Ω, l, puisque les premières dépendent uniquement de la couleur, les autres de la couleur et de la nature du milieu. Quant à l'angle d'incidence τ, on devra le remplacer, lorsqu'on passera des ondes incidentes aux ondes réfléchies, par son supplément $\pi - \tau$, afin d'exprimer que les deux angles d'incidence et de réflexion sont égaux entre eux; et par suite on devra dans ce cas changer seulement le signe de la première des deux lignes trigonométriques $\cos\tau$, $\sin\tau$.

Cela posé, soient

$$\mathfrak{A}_1, \quad \mathfrak{B}_1, \quad \mathfrak{C}_1, \quad \mathfrak{D}_1$$

ce que deviennent les coefficients

$$\mathfrak{A}, \quad \mathfrak{B}, \quad \mathfrak{C}, \quad \mathfrak{D}$$

quand on passe du système des ondes incidentes au système des ondes réfléchies, et

$$s', \quad T', \quad k', \quad \Omega', \quad l', \quad \mathfrak{A}', \quad \mathfrak{B}', \quad \mathfrak{C}', \quad \mathfrak{D}'$$

ce que deviennent les quantités

$$s, \quad T, \quad k, \quad \Omega, \quad l, \quad \mathfrak{A}, \quad \mathfrak{B}, \quad \mathfrak{C}, \quad \mathfrak{D}$$

quand on passe du système des ondes incidentes aux ondes réfractées. Si l'on considère à la fois les deux systèmes d'ondes propagées dans le premier milieu, on devra, pour ce milieu, remplacer les équations (33) du § IV par les formules

$$(1)\quad\begin{cases}\xi = \sin\tau\{\mathfrak{A}\cos[k(x\cos\tau+y\sin\tau)-st]+\mathfrak{B}\sin[k(x\cos\tau+y\sin\tau)-st]\}\\ \quad+\sin\tau\{\mathfrak{A}_1\cos[k(-x\cos\tau+y\sin\tau)-st]+\mathfrak{B}_1\sin[k(-x\cos\tau+y\sin\tau)-st]\},\\ \eta=-\cos\tau\{\mathfrak{A}\cos[k(x\cos\tau+y\sin\tau)-st]+\mathfrak{B}\sin[k(x\cos\tau+y\sin\tau)-st]\}\\ \quad+\cos\tau\{\mathfrak{A}_1\cos[k(-x\cos\tau+y\sin\tau)-st]+\mathfrak{B}_1\sin[k(-x\cos\tau+y\sin\tau)-st]\},\\ \zeta=\mathfrak{C}\cos[k(x\cos\tau+y\sin\tau)-st]+\mathfrak{D}\sin[k(x\cos\tau+y\sin\tau)-st]\}\\ \quad+\mathfrak{C}_1\cos[k(-x\cos\tau+y\sin\tau)-st]+\mathfrak{D}_1\sin[k(-x\cos\tau+y\sin\tau)-st]\}.\end{cases}$$

On trouvera au contraire, pour le second milieu,

$$(2)\quad\begin{cases}\xi = \sin\tau'\{\mathfrak{A}'\cos[k'(x\cos\tau'+y\sin\tau')-s't]+\mathfrak{B}'\sin[k'(x\cos\tau'+y\sin\tau')-s't]\},\\ \eta=-\cos\tau'\{\mathfrak{A}'\cos[k'(x\cos\tau'+y\sin\tau')-s't]+\mathfrak{B}'\sin[k'(x\cos\tau'+y\sin\tau')-s't]\},\\ \zeta=\mathfrak{C}'\cos[k'(x\cos\tau'+y\sin\tau')-s't]+\mathfrak{D}'\sin[k'(x\cos\tau'+y\sin\tau')-s't].\end{cases}$$

D'ailleurs la surface de séparation des deux milieux et des deux masses de fluide éthéré qui s'y trouvent comprises coïncide, lorsque ces deux masses sont dans l'état naturel, avec le plan des y, z représenté par l'équation

$$(3)\qquad x=0;$$

et, pour que ces deux masses restent contiguës l'une à l'autre pendant la durée du mouvement, il est nécessaire que la valeur de ξ, relative à un instant donné et à un point donné de la surface de séparation, ne soit point altérée, quand on passe de la première masse à la seconde. Enfin, comme, en posant $x=0$, on tire de la première des équations (1)

$$(4)\quad \xi=\sin\tau[(\mathfrak{A}+\mathfrak{A}_1)\cos(ky\sin\tau-st)+(\mathfrak{B}+\mathfrak{B}_1)\sin(ky\sin\tau-st)]$$

et, de la première des équations (2),

$$(5)\quad \xi=\sin\tau'[\mathfrak{A}'\cos(k'y\sin\tau'-s't)+\mathfrak{B}'\sin(k'y\sin\tau'-s't)],$$

la condition que nous venons d'énoncer donnera

$$(6)\quad\begin{cases}\sin\tau[(\mathfrak{A}+\mathfrak{A}_1)\cos(ky\sin\tau-st)+(\mathfrak{B}+\mathfrak{B}_1)\sin(ky\sin\tau-st)]\\ \quad=\sin\tau'[\mathfrak{A}'\cos(k'y\sin\tau'-s't)+\mathfrak{B}'\sin(k'y\sin\tau'-s't)],\end{cases}$$

si toutefois on admet que l'on puisse, sans erreur sensible, ne pas tenir compte des légères modifications que peut apporter le voisinage du second milieu à la valeur de ξ, déterminée par la première des équations (1), et le voisinage du premier milieu à la valeur de ξ, déterminée par la première des équations (2).

Observons maintenant que, l'équation (6) devant subsister indépendamment des valeurs attribuées aux variables y et t, les coefficients des puissances semblables de y et de t devront être égaux dans les deux membres de cette équation développés en séries convergentes, ordonnées suivant les puissances dont il s'agit. De cette seule considération on déduira immédiatement les formules

$$(7)\qquad (\mathfrak{A}+\mathfrak{A}_1)\sin\tau=\mathfrak{A}'\sin\tau',\qquad (\mathfrak{B}+\mathfrak{B}_1)\sin\tau=\mathfrak{B}'\sin\tau',$$

$$(8)\qquad k\sin\tau=k'\sin\tau',$$

$$(9)\qquad s=s',$$

auxquelles on parvient encore très simplement de la manière suivante :

Si l'on pose $y=0$ et $t=0$: 1° dans l'équation (6); 2° dans cette même équation, différentiée une, deux ou trois fois de suite par rapport à t, on en tirera successivement

$$(10)\quad\begin{cases}(\mathfrak{A}+\mathfrak{A}_1)\sin\tau=\mathfrak{A}'\sin\tau',\\ s(\mathfrak{B}+\mathfrak{B}_1)\sin\tau=s'\,\mathfrak{B}'\sin\tau',\\ s^2(\mathfrak{A}+\mathfrak{A}_1)\sin\tau=s'^2\mathfrak{A}'\sin\tau',\\ s^3(\mathfrak{B}+\mathfrak{B}_1)\sin\tau=s'^3\mathfrak{B}'\sin\tau'.\end{cases}$$

Or la première des équations (10) jointe à la quatrième, et la seconde jointe à la troisième, entraîneront les formules (7) et l'équation

$$s^2=s'^2,$$

de laquelle on conclura, en extrayant les racines carrées positives des deux membres

$$s=s'.$$

Si l'on posait $t=0$ dans l'équation (6), différentiée une, deux ou trois fois, non plus par rapport à t, mais par rapport à y, on obtiendrait trois nouvelles formules, qui, jointes aux formules (10), entraîneraient, non seulement les équations (7) et (9), mais encore l'équation (8). La seconde de ces nouvelles formules serait

$$k \sin\tau (\mathfrak{D} + \mathfrak{D}_1) \sin\tau = k' \sin\tau' \mathfrak{D}' \sin\tau', \tag{11}$$

et, en la combinant avec la seconde des formules (7), on obtiendrait immédiatement l'équation (8).

En vertu de l'équation (9), la quantité s, réciproquement proportionnelle à la durée T des oscillations moléculaires du fluide éthéré, ne varie pas dans le passage d'un milieu à un autre, et par conséquent la réfraction ne change pas la nature de la couleur. Donc, si un rayon de lumière rouge, après s'être propagé dans l'air, traverse un liquide tel que l'eau, il paraîtra rouge encore à un observateur dont l'œil serait plongé dans ce liquide. Quant à l'équation (8), elle donnera

$$\frac{\sin\tau'}{\sin\tau} = \frac{k}{k'}. \tag{12}$$

D'ailleurs, en nommant Ω, Ω' les vitesses de propagation de la lumière dans le premier et le second milieu, on aura, en vertu de la formule (12) du § IV,

$$\Omega = \frac{s}{k}, \qquad \Omega' = \frac{s'}{k'} = \frac{s}{k'}, \tag{13}$$

et, par suite,

$$\frac{\Omega'}{\Omega} = \frac{k}{k'}. \tag{14}$$

Donc l'équation (12) pourra être réduite à

$$\frac{\sin\tau'}{\sin\tau} = \frac{\Omega'}{\Omega}. \tag{15}$$

Or la formule (15) montre que le rapport du sinus d'incidence au sinus de réfraction est constamment égal au rapport entre les vitesses de propagation de la lumière dans le premier et le second milieu. Cette

conclusion se trouve, comme l'on sait, confirmée par l'expérience; car, en faisant varier l'angle d'incidence pour un rayon d'une couleur donnée qui tombe sur la surface d'un corps réfringent, on obtient toujours le même rapport entre les sinus des deux angles d'incidence et de réfraction.

Le rapport entre les sinus de l'angle d'incidence τ et de l'angle de réfraction τ' est ce qu'on nomme l'*indice* de réfraction. Si l'on désigne cet indice par θ, on aura, en vertu de la formule (12),

$$\theta = \frac{\sin\tau}{\sin\tau'} = \frac{k'}{k}$$

et, par suite,

$$k' = \theta k. \tag{16}$$

§ VI. — *Applications numériques.*

Lorsque, dans un milieu transparent, l'élasticité de l'éther reste la même en tous sens, la durée T des oscillations moléculaires du fluide éthéré se trouve liée à l'épaisseur l d'une onde plane par l'équation

$$s^2 = a_1 k^2 + a_2 k^4 + a_3 k^6 + \ldots \tag{1}$$

[*voir* la formule (35) du § IV], dans laquelle on a

$$s = \frac{2\pi}{T}, \tag{2}$$

$$k = \frac{2\pi}{l}. \tag{3}$$

D'ailleurs, la vitesse de propagation Ω d'un rayon de lumière étant donnée par la formule

$$\Omega = \frac{s}{k}, \tag{4}$$

on aura encore

$$\Omega^2 = a_1 + a_2 k^2 + a_3 k^4 + \ldots. \tag{5}$$

Dans les seconds membres des équations (1) et (5), comme dans les séries que renferment les formules (64), (65), (66) du § III, les coefficients

$$\mathrm{a}_1,\quad \mathrm{a}_2,\quad \mathrm{a}_3,\quad \ldots$$

des puissances ascendantes de k décroissent très rapidement, et la valeur générale de a_n, déterminée par la formule

$$(6)\qquad (-1)^{n+1}\mathrm{a}_n = \mathrm{S}\,\frac{mr^{2n-1}\cos^{2n}\alpha}{1.2.3\ldots 2n}\left[\mathrm{f}(r) + \frac{1}{2n+1}\,f(r)\cos^2\alpha\right],$$

est une quantité très petite de l'ordre $2n-1$, dans le cas où la distance r de deux molécules d'éther, assez rapprochées pour exercer l'une sur l'autre une action sensible, est considérée comme très petite du premier ordre. Ajoutons que, si un rayon d'une couleur déterminée se réfracte en passant d'un premier milieu dans un second, la nature de la couleur, et par suite chacune des quantités T, s, restera invariable, tandis que les quantités

$$k,\quad \Omega,\quad l$$

se changeront dans les suivantes

$$(7)\qquad k' = \theta k,$$

$$(8)\qquad \Omega' = \frac{\Omega}{\theta},$$

$$(9)\qquad l' = \frac{l}{\theta},$$

θ désignant l'indice de réfraction. Alors aussi les coefficients

$$\mathrm{a}_1,\quad \mathrm{a}_2,\quad \mathrm{a}_3,\quad \ldots$$

obtiendront des valeurs différentes dans le premier et dans le second milieu.

Un très habile observateur, Frauenhofer, a déduit d'expériences faites avec beaucoup de soin les indices de réfraction pour sept rayons colorés, correspondants à certaines raies que présente le spectre solaire, et déterminé les diverses valeurs que prennent ces mêmes indices lorsqu'on fait passer les sept rayons de l'air dans des prismes de verre ou de cristal, remplis ou entièrement formés de diverses substances liquides ou solides. Les substances employées par Frauenhofer sont : l'eau, une solution de potasse, l'huile de térébenthine, trois espèces de crownglass, et quatre espèces de flintglass. Ajoutons que deux séries d'expériences sont relatives à l'eau, et deux autres à la troisième espèce de flintglass. Le Tableau suivant contient le résultat des expériences de Frauenhofer, relatives aux sept rayons qu'il a désignés par les lettres B, C, D, E, F, G, H. Pour plus de commodité, nous représenterons les valeurs de θ, correspondantes à ces mêmes rayons, par

$$\theta_1,\quad \theta_2,\quad \theta_3,\quad \theta_4,\quad \theta_5,\quad \theta_6,\quad \theta_7.$$

TABLEAU I.

Indices de réfraction pour les rayons B, C, D, E, F, G, H *de Frauenhofer*.

SUBSTANCES RÉFRINGENTES.	θ_1.	θ_2.	θ_3.	θ_4.	θ_5.	θ_6.	θ_7.
Eau. 1re série	1,330935	1,331712	1,333577	1,335851	1,337818	1,341293	1,344177
Eau. 2e série	1,330977	1,331709	1,333577	1,335849	1,337788	1,341261	1,344162
Solution de potasse	1,399629	1,400515	1,402805	1,405632	1,408082	1,412579	1,416368
Huile de térébenthine	1,470496	1,471530	1,474434	1,478353	1,481736	1,488198	1,493874
Crown-glass. 1re espèce	1,524312	1,525299	1,527982	1,531372	1,534337	1,539908	1,554684
Crown-glass. 2e espèce	1,525832	1,526849	1,529587	1,533005	1,536052	1,541657	1,546566
Crown-glass. 3e espèce	1,554774	1,555933	1,559075	1,563150	1,566741	1,573535	1,579470
Flint-glass. 1re espèce	1,602042	1,603800	1,608494	1,614532	1,620042	1,630772	1,640373
Flint-glass. 2e espèce	1,623570	1,625477	1,630585	1,637356	1,643466	1,655406	1,666072
Flint-glass. 3e espèce. 1re série	1,626564	1,628451	1,633666	1,640544	1,646780	1,658849	1,669680
Flint-glass. 3e espèce. 2e série	1,626596	1,628469	1,633667	1,640495	1,646756	1,658848	1,669686
Flint-glass. 4e espèce	1,627749	1,629681	1,635036	1,642024	1,648260	1,660285	1,671062

D'autres expériences de Frauenhofer déterminent les valeurs de l ou les épaisseurs des ondes dans l'air pour les sept rayons

B, C, D, E, F, G, H.

Nous désignerons par

$$l_1,\quad l_2,\quad l_3,\quad l_4,\quad l_5,\quad l_6,\quad l_7$$

ces épaisseurs, qui, dans les expériences de Frauenhofer, se trouvent exprimées en cent-millionièmes de pouce. Si l'on multiplie les nombres que ce physicien a trouvés par 2,7070, afin de réduire les mêmes longueurs en dix-millionièmes de millimètre, et si l'on effectue le calcul par logarithmes, on obtiendra le Tableau suivant, dans lequel i désigne un nombre entier.

Tableau II.

Épaisseur des ondes dans l'air pour les rayons B, C, D, E, F, G, H *de Frauenhofer.*

	$i=1.$	$i=2.$	$i=3.$	$i=4.$	$i=5.$	$i=6.$	$i=7.$
Valeurs de l_i en cent-millionièmes de pouce....	2541	2425	2175	1943	1789	1585	1451
Logarithmes décimaux de ces nombres.........	4050047	3847117	3374593	2884728	2526103	2000293	1616674
Log(2707)............	4324883	4324883	4324883	4324883	4324883	4324883	4324883
Sommes...	8374930	8172000	7699476	7209611	6850986	6325176	5941557
l_i en dix-millionièmes de millimètre..........	6878	6564	5888	5260	4843	4291	3928

Il suit de la formule (9) que, étant donnée l'épaisseur l ou l_i des ondes dans l'air pour l'un des rayons B, C, D, E, F, G, H, on obtiendra l'épaisseur des ondes l' ou l'_i, pour le même rayon réfracté par l'eau ou par une autre substance, en divisant la première épaisseur par l'indice de réfraction. Cela posé, on déduira sans peine des Tableaux I et II les épaisseurs des ondes correspondantes aux sept rayons et aux diverses substances considérées par Frauenhofer. En effectuant le calcul par logarithmes et à l'aide des Tables de Callet, on obtient les résultats compris dans les Tableaux suivants :

Tableau III.

Détermination des logarithmes des indices de réfraction et de leurs compléments.

Valeurs de i.		$i=1.$	$i=2.$	$i=3.$	$i=4.$	$i=5.$	$i=6.$	$i=7.$
Eau, 1re série.	θ_i.............	1,330935	1,331712	1,333577	1,335851	1,337818	1,341293	1,344177
		1241454 98 16	1244064 33 7	1249930 229 23	1257414 163 3	1263912 33 26	1274935 293 10	1284316 227 23
	$L(\theta_i)$..........	1241568	1244104	1250182	1257580	1263971	1275238	1284566
	Compl. ou $L\left(\frac{1}{\theta_i}\right)$.	8758432	8755896	8749818	8742420	8736029	8724762	8715434
Eau, 2e série.	θ_i.............	1,330977	1,331709	1,333577	1,335849	1,337788	1,341261	1,344162
		1241454 229 23	1244064 29	1249930 229 23	1257414 130 29	1263587 260 26	1274935 195 3	1284316 194 7
	$L(\theta_i)$..........	1241706	1244093	1250182	1257573	1263873	1275133	1284517
	Compl. ou $L\left(\frac{1}{\theta_i}\right)$.	8758294	8755907	8749818	8742427	8736127	8724867	8715483
Solution de potasse.	θ_i.............	1,399629	1,400515	1,402805	1,405632	1,408082	1,412579	1,416368
		1460039 62 28	1462831 31 16	1469958 16	1478617 93 6	1486027 247 6	1499885 216 28	1511553 184 25
	$L(\theta_i)$..........	1460129	1462878	1469974	1478716	1486280	1500129	1511762
	Compl. ou $L\left(\frac{1}{\theta_i}\right)$.	8539871	8537122	8530026	8521284	8513720	8499871	8488238
Huile de térébenthine.	θ_i.............	1,470496	1,471530	1,474434	1,478353	1,481736	1,488198	1,493874
		1674355 267 18	1677603 89	1686153 89 12	1697626 147 9	1707603 88 18	1726321 264 23	1742925 204 12
	$L(\theta_i)$..........	1674640	1677692	1686254	1697782	1707709	1726608	1743141
	Compl. ou $L\left(\frac{1}{\theta_i}\right)$.	8325360	8322308	8313746	8302218	8292291	8273392	8256859

Tableau III (suite).

	Valeurs de i.	$i=1.$	$i=2.$	$i=3.$	$i=4.$	$i=5.$	$i=6.$	$i=7.$
Crownglass, 1re espèce.	θ_i	1,524312	1,525299	1,527982	1,531372	1,534337	1,539908	1,544684
		1830704	1833268	1840949	1850603	1859103	1874925	1888160
		29	257	228	199	85	23	226
		6	26	6	6	20		11
	$L(\theta_i)$	1830739	1833551	1841183	1850808	1859208	1874948	1888397
	Compl. ou $L\left(\frac{1}{\theta_i}\right)$	8169261	8166449	8158817	8149192	8140792	8125052	8111603
Crownglass, 2e espèce.	θ_i	1,525832	1,526849	1,529587	1,533005	1,536052	1,541657	1,516566
		1834976	1837822	1845495	1855422	1863912	1879717	1893499
		86	114	228	14	142	141	169
		6	26	20		6	20	17
	$L(\theta_i)$	1835068	1837962	1845743	1855436	1864060	1879878	1893685
	Compl. ou $L\left(\frac{1}{\theta_i}\right)$	8164932	8162038	8154257	8144564	8135940	8120122	8106315
Crownglass, 3e espèce.	θ_i	1,554774	1,555933	1,559075	1,563150	1,566741	1,573535	1,579470
		1916466	1919817	1928461	1939868	1949858	1968667	1984921
		196	84	196	139	111	83	193
		11	8	14		3	14	
	$L(\theta_i)$	1916673	1919909	1928671	1940007	1949972	1968764	1985114
	Compl. ou $L\left(\frac{1}{\theta_i}\right)$	8083326	8080091	8071329	8059993	8050028	8031236	8014886
Flintglass, 1re espèce.	θ_i	1,602042	1,603800	1,608494	1,614532	1,620042	1,630772	1,640373
		2046625	2051502	2063941	2080380	2095150	2123741	2149233
		109		244	81	107	187	186
		5		11	5	5	5	8
	$L(\theta_i)$	2046739	2051502	2064196	2080466	2095262	2123933	2149427
	Compl. ou $L\left(\frac{1}{\theta_i}\right)$	7953261	7948498	7935804	7919534	7904738	7876067	7850573

Tableau III (suite).

	Valeurs de i.	$i=1.$	$i=2.$	$i=3.$	$i=4.$	$i=5.$	$i=6.$	$i=7.$
Flintglass, 2e espèce.	θ_i	1,623570	1,625477	1,630585	1,637356	1,643466	1,655406	1,666072
		2104523	2109603	2123208	2141283	2157433	2189030	2216750
		188	188	214	133	159	16	183
			19	13	16	16		5
	$L(\theta_i)$	2104711	2109810	2123435	2141432	2157608	2189046	2216938
	Compl. ou $L\left(\frac{1}{\theta_i}\right)$	7895289	7890190	7876565	7858568	7842392	7810954	7783062
Flintglass, 3e espèce, 1re série.	θ_i	1,626564	1,628451	1,633666	1,640544	1,646780	1,658849	1,669680
		2112541	2117611	2131457	2149762	2166145	2197940	2226124
		161	134	160	106	212	105	209
		11	3	16	11		24	
	$L(\theta_i)$	2112713	2117748	2131633	2149879	2166357	2198069	2226333
	Compl. ou $L\left(\frac{1}{\theta_i}\right)$	7887287	7882252	7868367	7850121	7833643	7801931	7773667
Flintglass, 3e espèce, 2e série.	θ_i	1,626596	1,628469	1,633667	1,640495	1,646756	1,658848	1,669686
		2112541	2117611	2131457	2149498	2166145	2197940	2226124
		241	160	160	239	132	105	209
		16	24	19	13	16	21	16
	$L(\theta_i)$	2112798	2117795	2131636	2149750	2166293	2198066	2226349
	Compl. ou $L\left(\frac{1}{\theta_i}\right)$	7887202	7882205	7868364	7850250	7833707	7801934	7773651
Flintglass, 4e espèce.	θ_i	1,627749	1,629681	1,635036	1,642024	1,648260	1,660285	1,671062
		2115744	2120810	2135178	2153732	2170099	2201604	2229764
		107	214	80	53	158	210	157
		24	3	16	11		13	5
	$L(\theta_i)$	2115875	2121027	2135274	2153796	2170257	2201827	2229926
	Compl. ou $L\left(\frac{1}{\theta_i}\right)$	7884125	7878973	7864726	7846204	7829743	7798173	7770074

Tableau IV.

Détermination des épaisseurs des ondes dans les diverses substances, ces épaisseurs étant exprimées en dix-millionièmes de millimètre.

Valeurs de i.		$i=1.$	$i=2.$	$i=3.$	$i=4.$	$i=5.$	$i=6.$	$i=7.$
Eau, 1re série.	$L\left(\frac{1}{\theta_i}\right)$	8758432	8755896	8749818	8742420	8736029	8724762	8715434
	$L(l_i)$	8374930	8172000	7699476	7209611	6850986	6325176	5941557
	Somme	7133362	6927896	6449294	5952031	5587015	5049938	4656991
	Épaisseur $l'_i=\frac{l_i}{\theta_i}$	5168	4929	4415	3937	3620	3199	2922
Eau, 2e série.	$L\left(\frac{1}{\theta_i}\right)$	8758294	8755907	8749818	8742427	8736127	8724867	8715483
	$L(l_i)$	8374930	8172000	7699476	7209611	6850986	6325176	5941557
	Somme	7133224	6927907	6449294	5952038	5587113	5050043	4657040
	Épaisseur $l'_i=\frac{l_i}{\theta_i}$	5168	4929	4415	3937	3620	3199	2922
Solution de potasse.	$L\left(\frac{1}{\theta_i}\right)$	8539871	8537122	8530026	8521284	8513720	8499871	8488238
	$L(l_i)$	8374930	8172000	7699476	7209611	6850986	6325176	5941557
	Somme	6914801	6709122	6229502	5730895	5364706	4825047	4429795
	Épaisseur $l'_i=\frac{l_i}{\theta_i}$	4915	4687	4197	3742	3439	3037	2773
Huile de térébenthine.	$L\left(\frac{1}{\theta_i}\right)$	8325360	8322308	8313746	8302218	8292291	8273392	8256859
	$L(l_i)$	8374930	8172000	7699476	7209611	6850986	6325176	5941557
	Somme	6700290	6494308	6013222	5511829	5143277	4598568	4198416
	Épaisseur $l'_i=\frac{l_i}{\theta_i}$	4678	4461	3993	3558	3268	2883	2629
Crownglass, 1re espèce.	$L\left(\frac{1}{\theta_i}\right)$	8169261	8166449	8158817	8149192	8140792	8125052	8111603
	$L(l_i)$	8374930	8172000	7699476	7209611	6850986	6325176	5941557
	Somme	6544191	6338449	5858293	5358803	4991778	4450228	4053160
	Épaisseur $l'_i=\frac{l_i}{\theta_i}$	4513	4304	3853	3435	3156	2786	2543

Tableau IV (suite).

Valeurs de i.		$i=1.$	$i=2.$	$i=3.$	$i=4.$	$i=5.$	$i=6.$	$i=7.$
Crownglass, 2e espèce.	$L\left(\frac{1}{\theta_i}\right)$	8164932	8162038	8154257	8144564	8135940	8120122	8106315
	$L(l_i)$	8374930	8172000	7699476	7209611	6850986	6325176	5941557
	Somme	6539862	6334038	5853733	5354175	4986926	4445298	4047872
	Épaisseur $l'_i=\frac{l_i}{\theta_i}$	4508	4299	3849	3431	3153	2783	2540
Crownglass, 3e espèce.	$L\left(\frac{1}{\theta_i}\right)$	8083326	8080091	8071329	8059993	8050028	8031236	8014886
	$L(l_i)$	8374930	8172000	7699476	7209611	6850986	6325176	5941557
	Somme	6458256	6252091	5770805	5269604	4901014	4356412	3956443
	Épaisseur $l'_i=\frac{l_i}{\theta_i}$	4424	4219	3776	3365	3091	2727	2487
Flintglass, 1re espèce.	$L\left(\frac{1}{\theta_i}\right)$	7953261	7948498	7935804	7919534	7904738	7876067	7850573
	$L(l_i)$	8374930	8172000	7699476	7209611	6850986	6325176	5941557
	Somme	6328191	6120498	5635280	5129145	4755724	4201243	3792130
	Épaisseur $l'_i=\frac{l_i}{\theta_i}$	4294	4093	3660	3258	2989	2631	2394
Flintglass, 2e espèce.	$L\left(\frac{1}{\theta_i}\right)$	7895289	7890190	7876565	7858568	7842392	7810954	7783062
	$L(l_i)$	8374930	8172000	7699476	7209611	6850986	6325176	5941557
	Somme	6270219	6062190	5576041	5068179	4693378	4136130	3724619
	Épaisseur $l'_i=\frac{l_i}{\theta_i}$	4237	4038	3611	3212	2947	2592	2358
Flintglass, 3e espèce, 1re série.	$L\left(\frac{1}{\theta_i}\right)$	7887287	7882252	7868367	7850121	7833643	7801931	7773667
	$L(l_i)$	8374930	8172000	7699476	7209611	6850986	6325176	5941557
	Somme	6262217	6054252	5567843	5059732	4684629	4127107	3715224
	Épaisseur $l'_i=\frac{l_i}{\theta_i}$	4229	4031	3604	3206	2941	2586	2352

Tableau IV (suite).

Valeurs de i.		$i=1.$	$i=2.$	$i=3.$	$i=4.$	$i=5.$	$i=6.$	$i=7.$
Flintglass, 3ᵉ espèce, 2ᵉ série.	$L\left(\frac{1}{\theta_i}\right)$	7887202	7882205	7868364	7850250	7833707	7801934	7773651
	$L(l_i)$	8374930	8172000	7699476	7209611	6850986	6325176	5941557
	Somme....	6262132	6054205	5567840	5059861	4684693	4127110	3715208
	Épaisseur $l'_i = \frac{l_i}{\theta_i}$ ...	4229	4031	3604	3206	2941	2586	2352
Flintglass, 4ᵉ espèce.	$L\left(\frac{1}{\theta_i}\right)$	7884125	7878973	7864726	7846204	7829743	7798173	7770074
	$L(l_i)$	8374930	8172000	7699476	7209611	6850986	6325176	5941557
	Somme....	6259055	6050973	5564202	5055815	4680729	4123349	3711631
	Épaisseur $l'_i = \frac{l_i}{\theta_i}$ ...	4226	4028	3601	3203	2938	2584	2351

En résumé, les épaisseurs des ondes dans l'air et les autres substances étant exprimées en dix-millionièmes de millimètre, ces épaisseurs seront, d'après les expériences de Frauenhofer, représentées par les nombres que renferme le Tableau ci-joint.

Tableau V.

Épaisseurs des ondes en dix-millionièmes de millimètre.

Valeurs de i.		$i=1.$	$i=2.$	$i=3.$	$i=4.$	$i=5.$	$i=6.$	$i=7.$
l_i. Air		6878	6564	5888	5260	4843	4291	3928
l'_i. Eau		5168	4929	4415	3937	3620	3199	2922
Solution de potasse		4915	4687	4197	3742	3439	3037	2773
Huile de térébenthine		4678	4461	3993	3558	3268	2883	2629
Crownglass.	1ʳᵉ espèce...	4513	4304	3853	3435	3156	2786	2543
	2ᵉ espèce...	4508	4299	3849	3431	3153	2783	2540
	3ᵉ espèce...	4424	4219	3776	3365	3091	2727	2487
Flintglass ..	1ʳᵉ espèce...	4294	4093	3660	3258	2989	2631	2394
	2ᵉ espèce...	4237	4038	3611	3212	2947	2592	2358
	3ᵉ espèce...	4229	4031	3604	3206	2941	2586	2352
	4ᵉ espèce...	4226	4028	3601	3203	2938	2584	2351

Il est important d'observer que, en appliquant à l'équation (1) le théorème de Lagrange sur le retour des suites, on en tire la valeur de k^2 développée en une série de la forme

$$k^2 = b_1 s^2 + b_2 s^4 + b_3 s^6 + \ldots. \tag{9}$$

D'ailleurs, pour déterminer les coefficients $b_1, b_2, b_3, \ldots$, il suffira de substituer dans l'équation (9) les valeurs de $s^2, s^4, s^6, \ldots$ déduites de l'équation (1), savoir

$$\begin{aligned} s^2 &= a_1 k^2 + a_2 k^4 + a_3 k^6 + \ldots, \\ s^4 &= a_1^2 k^4 + 2 a_1 a_2 k^6 + \ldots, \\ s^6 &= a_1^3 k^6 + \ldots, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

Alors l'équation (9) deviendra

$$k^2 = a_1 b_1 k^2 + (a_2 b_1 + a_1^2 b_2) k^4 + (a_3 b_1 + 2 a_1 a_2 b_2 + a_1^3 b_3) k^6 + \ldots,$$

et l'on en conclura

$$\begin{aligned} &a_1 b_1 = 1, \\ &a_2 b_1 + a_1^2 b_2 = 0, \\ &a_3 b_1 + 2 a_1 a_2 b_2 + a_1^3 b_3 = 0, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots; \end{aligned}$$

par conséquent

$$\left\{ \begin{aligned} b_1 &= \frac{1}{a_1}, \\ b_2 &= -\frac{a_2 b_1}{a_1^2} = -\frac{a_2}{a_1^3}, \\ b_3 &= -\frac{a_3 b_1 + 2 a_1 a_2 b_2}{a_1^3} = -\frac{a_1 a_3 - 2 a_2^2}{a_1^5}, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned} \right. \tag{10}$$

Cela posé, la formule (9) donnera

$$a_1 k^2 = s^2 - \frac{a_2}{a_1^2} s^4 - \frac{a_1 a_3 - 2 a_2^2}{a_1^4} s^6 - \ldots. \tag{11}$$

Or, puisque dans le cas où la distance r de deux molécules assez rapprochées pour exercer une action sensible l'une sur l'autre est considérée comme très petite du premier ordre, les quantités

$$\mathrm{a}_1,\quad \mathrm{a}_2,\quad \mathrm{a}_3,\quad \ldots$$

sont des quantités très petites du premier, du troisième, du cinquième, ... ordre, il est clair que, dans le même cas, les quantités

$$\frac{\mathrm{a}_2}{\mathrm{a}_1^3},\quad \frac{\mathrm{a}_3}{\mathrm{a}_1^5},\quad \ldots,$$

et, par suite, les coefficients de s^4, s^6, ... dans le second membre de la formule (11), seront des quantités très petites du premier, du second ordre, etc. Donc ces coefficients décroîtront très rapidement aussi bien que les coefficients de s^2, s^4, s^6, ... dans le second membre de la formule (9).

Si, dans le second membre de l'équation (1), on conserve seulement le premier, les deux premiers, les trois premiers termes, etc., on obtiendra diverses valeurs approchées de s^2, savoir

$$s^2 = \mathrm{a}_1 k^2, \tag{12}$$

$$s^2 = \mathrm{a}_1 k^2 + \mathrm{a}_2 k^4, \tag{13}$$

$$s^2 = \mathrm{a}_1 k^2 + \mathrm{a}_2 k^4 + \mathrm{a}_3 k^6, \tag{14}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

et, si l'on substitue la première de ces valeurs approchées dans les différents termes qui composent le second membre de la formule (11), ces différents termes deviendront

$$\mathrm{a}_1 k^2,\quad -\mathrm{a}_2 k^4,\quad -\left(\mathrm{a}_3 - \frac{2\mathrm{a}_2^2}{\mathrm{a}_1}\right)k^6,\quad \ldots. \tag{15}$$

Or les coefficients des puissances successives de k^2 étant du même ordre dans la série (15) et dans celle que renferme l'équation (1), il est naturel d'en conclure qu'on obtient le même degré d'approximation lorsque, dans les seconds membres des équations (1) et (11), on conserve le même nombre de termes. En conséquence, aux for-

mules (12), (13), (14), etc. doivent correspondre les suivantes

$$k^2 = \frac{1}{\mathrm{a}_1} s^2, \tag{16}$$

$$k^2 = \frac{1}{\mathrm{a}_1} s^2 - \frac{\mathrm{a}_2}{\mathrm{a}_1^3} s^4, \tag{17}$$

$$k^2 = \frac{1}{\mathrm{a}_1} s^2 - \frac{\mathrm{a}_2}{\mathrm{a}_1^3} s^4 - \frac{\mathrm{a}_1\mathrm{a}_3 - 2\mathrm{a}_2^2}{\mathrm{a}_1^5} s^6, \tag{18}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

qu'on peut encore écrire comme il suit

$$k^2 = \mathrm{b}_1 s^2, \tag{19}$$

$$k^2 = \mathrm{b}_1 s^2 + \mathrm{b}_2 s^4, \tag{20}$$

$$k^2 = \mathrm{b}_1 s^2 + \mathrm{b}_2 s^4 + \mathrm{b}_3 s^6, \tag{21}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

C'est, au reste, ce qu'il est facile de vérifier *a posteriori*. En effet, la formule (11) entraîne immédiatement la formule (16). Pareillement, la formule (13) s'accorde avec la formule (17), de laquelle on tire

$$s^2 = \frac{1}{2}\frac{\mathrm{a}_1^2}{\mathrm{a}_2} - \sqrt{\left(\frac{1}{2}\frac{\mathrm{a}_1^2}{\mathrm{a}_2}\right)^2 - \frac{\mathrm{a}_1^3}{\mathrm{a}_2} k^2} \tag{22}$$

ou, ce qui revient au même,

$$s^2 = \mathrm{a}_1^2 \frac{1 - \sqrt{1 - 4\frac{\mathrm{a}_2}{\mathrm{a}_1} k^2}}{2\mathrm{a}_2} = \mathrm{a}_1 k^2 + \mathrm{a}_2 k^4 + 2\frac{\mathrm{a}_2^2}{\mathrm{a}_1} k^6 + 5\frac{\mathrm{a}_2^3}{\mathrm{a}_1^2} k^8 + \ldots \tag{23}$$

et, par conséquent,

$$s^2 = \mathrm{a}_1 k^2 + \mathrm{a}_2 k^4,$$

en négligeant les termes

$$2\frac{\mathrm{a}_2^2}{\mathrm{a}_1} k^6,\quad 5\frac{\mathrm{a}_2^3}{\mathrm{a}_1^2} k^8,\quad \ldots.$$

Or ces derniers sont respectivement comparables pour leur petitesse aux termes

$$\mathrm{a}_3 k^6,\quad \mathrm{a}_4 k^8,\quad \ldots,$$

que l'on a négligés dans le second membre de l'équation (1) pour réduire cette dernière à la formule (13), puisque les quantités

$$2\frac{a_2^2}{a_1},\quad 5\frac{a_2^3}{a_1^2},\quad \ldots$$

sont respectivement du cinquième, du septième ordre, etc., aussi bien que les quantités

$$a_3,\quad a_4,\quad \ldots.$$

On prouverait, par des raisonnements semblables, que la formule (14) s'accorde avec la formule (18), etc. Cherchons maintenant jusqu'où les expériences de Frauenhofer permettent de pousser le degré d'approximation, c'est-à-dire combien de termes ces expériences permettent de conserver dans l'équation (1), ou, ce qui revient au même, dans la formule (11).

Lorsque dans la formule (11) on écrit s_n et k_n au lieu de s et k, on en tire

$$k_n^2 = b_1 s_n^2 + b_2 s_n^4 + b_3 s_n^6 + \ldots, \tag{24}$$

puis, en posant successivement $n=1$, $n=2$, $n=3$, ...,

$$\left\{\begin{array}{l} k_1^2 = b_1 s_1^2 + b_2 s_1^4 + b_3 s_1^6 + \ldots, \\ k_2^2 = b_1 s_2^2 + b_2 s_2^4 + b_3 s_2^6 + \ldots, \\ k_3^2 = b_1 s_3^2 + b_2 s_3^4 + b_3 s_3^6 + \ldots, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right. \tag{25}$$

Or si, dans le second membre de la formule (11) ou (24), on conserve seulement un, deux, trois, ... termes, on pourra en éliminer le coefficient b_1, ou les deux coefficients b_1, b_2, ou les trois coefficients b_1, b_2, b_3, ..., à l'aide de la première, ou des deux premières, ou des trois premières, etc. des formules (25), et l'on trouvera, dans le premier cas,

$$k_n^2 = \frac{s_n^2}{s_1^2} k_1^2, \tag{26}$$

dans le second cas,

$$k_n^2 = \frac{s_n^2 - s_2^2}{s_1^2 - s_2^2}\frac{s_n^2}{s_1^2} k_1^2 + \frac{s_n^2 - s_1^2}{s_2^2 - s_1^2}\frac{s_n^2}{s_2^2} k_2^2, \tag{27}$$

dans le troisième cas,

$$k_n^2 = \frac{(s_n^2 - s_2^2)(s_n^2 - s_3^2)}{(s_1^2 - s_2^2)(s_1^2 - s_3^2)}\frac{s_n^2}{s_1^2} k_1^2 + \frac{(s_n^2 - s_3^2)(s_n^2 - s_1^2)}{(s_2^2 - s_3^2)(s_2^2 - s_1^2)}\frac{s_n^2}{s_2^2} k_2^2 + \frac{(s_n^2 - s_1^2)(s_n^2 - s_2^2)}{(s_3^2 - s_1^2)(s_3^2 - s_2^2)}\frac{s_n^2}{s_3^2} k_3^2, \tag{28}$$

....

Il est bon d'observer qu'on peut déduire directement les équations (26), (27), (28) de la formule de Lagrange pour l'interpolation, en considérant

$$\frac{k^2}{s^2}$$

comme une fonction entière de s^2, dont le degré soit l'un des nombres 0, 1, 2, ... Ajoutons que la formule (26), si l'on y pose $n=2$, la formule (27), si l'on y pose $n=3$, la formule (28), si l'on y pose $n=4$, ..., pourront s'écrire comme il suit :

$$\frac{k_1^2}{s_1^2(s_1^2 - s_2^2)} + \frac{k_2^2}{s_2^2(s_2^2 - s_1^2)} = 0, \tag{29}$$

$$\frac{k_1^2}{s_1^2(s_1^2 - s_2^2)(s_1^2 - s_3^2)} + \frac{k_2^2}{s_2^2(s_2^2 - s_1^2)(s_2^2 - s_3^2)} + \frac{k_3^2}{s_3^2(s_3^2 - s_1^2)(s_3^2 - s_2^2)} = 0, \tag{30}$$

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{k_1^2}{s_1^2(s_1^2 - s_2^2)(s_1^2 - s_3^2)(s_1^2 - s_4^2)} + \dfrac{k_2^2}{s_2^2(s_2^2 - s_1^2)(s_2^2 - s_3^2)(s_2^2 - s_4^2)} \\ + \dfrac{k_3^2}{s_3^2(s_3^2 - s_1^2)(s_3^2 - s_2^2)(s_3^2 - s_4^2)} + \dfrac{k_4^2}{s_4^2(s_4^2 - s_1^2)(s_4^2 - s_2^2)(s_4^2 - s_3^2)} = 0, \end{array}\right. \tag{31}$$

....

Généralement, si l'on conservait $n-1$ termes dans le second membre de l'équation (24), on tirerait de cette équation, ou, ce qui revient au même, des équations (25),

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{k_1^2}{s_1^2(s_1^2 - s_2^2)(s_1^2 - s_3^2)\ldots(s_1^2 - s_n^2)} \\ + \dfrac{k_2^2}{s_2^2(s_2^2 - s_1^2)(s_2^2 - s_3^2)\ldots(s_2^2 - s_n^2)} \\ + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ + \dfrac{k_n^2}{s_n^2(s_n^2 - s_1^2)(s_n^2 - s_2^2)\ldots(s_n^2 - s_{n-1}^2)} = 0, \end{array}\right. \tag{32}$$

ce que l'on peut démontrer directement comme il suit.

En désignant par i un nombre entier inférieur à n, on tire de la formule d'interpolation, ou bien encore de la formule relative à la décomposition des fractions rationnelles,

$$
(33)\quad \left\{
\begin{aligned}
s^{2i} = {} & \frac{(s^2 - s_2^2)(s^2 - s_3^2)\ldots(s^2 - s_n^2)}{(s_1^2 - s_2^2)(s_1^2 - s_3^2)\ldots(s_1^2 - s_n^2)} s_1^{2i} \\
& + \frac{(s^2 - s_1^2)(s^2 - s_3^2)\ldots(s^2 - s_n^2)}{(s_2^2 - s_1^2)(s_2^2 - s_3^2)\ldots(s_2^2 - s_n^2)} s_2^{2i} \\
& + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
& + \frac{(s^2 - s_1^2)(s^2 - s_2^2)\ldots(s^2 - s_{n-1}^2)}{(s_n^2 - s_1^2)(s_n^2 - s_2^2)\ldots(s_n^2 - s_{n-1}^2)} s_n^{2i};
\end{aligned}
\right.
$$

puis, en égalant entre eux les coefficients de $s^{2(n-1)}$ dans les deux membres de l'équation (33), on en conclut :

1° Pour $i < n - 1$,

$$
(34)\quad \left\{
\begin{aligned}
0 = {} & \frac{s_1^{2i}}{(s_1^2 - s_2^2)(s_1^2 - s_3^2)\ldots(s_1^2 - s_n^2)} \\
& + \frac{s_2^{2i}}{(s_2^2 - s_1^2)(s_2^2 - s_3^2)\ldots(s_2^2 - s_n^2)} \\
& + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
& + \frac{s_n^{2i}}{(s_n^2 - s_1^2)(s_n^2 - s_2^2)\ldots(s_n^2 - s_{n-1}^2)};
\end{aligned}
\right.
$$

2° Pour $i = n - 1$,

$$
(35)\quad \left\{
\begin{aligned}
1 = {} & \frac{s_1^{2(n-1)}}{(s_1^2 - s_2^2)(s_1^2 - s_3^2)\ldots(s_1^2 - s_n^2)} \\
& + \frac{s_2^{2(n-1)}}{(s_2^2 - s_1^2)(s_2^2 - s_3^2)\ldots(s_2^2 - s_n^2)} \\
& + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
& + \frac{s_n^{2(n-1)}}{(s_n^2 - s_1^2)(s_n^2 - s_2^2)\ldots(s_n^2 - s_{n-1}^2)}.
\end{aligned}
\right.
$$

Or, si l'on a égard aux formules (34), (35), les n premières des for-

mules (25), respectivement multipliées par les coefficients

$$
\begin{gathered}
\frac{1}{s_1^2(s_1^2 - s_2^2)(s_1^2 - s_3^2)\ldots(s_1^2 - s_n^2)}, \\
\frac{1}{s_2^2(s_2^2 - s_1^2)(s_2^2 - s_3^2)\ldots(s_2^2 - s_n^2)}, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\
\frac{1}{s_n^2(s_n^2 - s_1^2)(s_n^2 - s_2^2)\ldots(s_n^2 - s_{n-1}^2)},
\end{gathered}
$$

puis combinées entre elles par voie d'addition, donneront

$$
(36)\quad \left\{
\begin{aligned}
& \frac{k_1^2}{s_1^2(s_1^2 - s_2^2)(s_1^2 - s_3^2)\ldots(s_1^2 - s_n^2)} \\
& + \frac{k_2^2}{s_2^2(s_2^2 - s_1^2)(s_2^2 - s_3^2)\ldots(s_2^2 - s_n^2)} \\
& + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
& + \frac{k_n^2}{s_n^2(s_n^2 - s_1^2)(s_n^2 - s_2^2)\ldots(s_n^2 - s_{n-1}^2)} = b_n + \ldots,
\end{aligned}
\right.
$$

et il est clair que cette dernière équation se réduira simplement à la formule (32), si, dans le second membre de la formule (24), par conséquent de chacune des formules (25), on conserve seulement les $n - 1$ premiers termes, ce qui revient à poser

$$
b_n = 0, \qquad b_{n+1} = 0, \qquad \ldots.
$$

Lorsqu'on passe de l'air à un autre milieu, la quantité k doit être remplacée par

$$
k' = \theta k
$$

dans l'équation (32), qui se change alors en cette autre formule

$$
(37)\quad \left\{
\begin{aligned}
& \frac{\theta_1^2 k_1^2}{s_1^2(s_1^2 - s_3^2)\ldots(s_1^2 - s_n^2)} \\
& + \frac{\theta_2^2 k_2^2}{s_2^2(s_2^2 - s_1^2)(s_2^2 - s_3^2)\ldots(s_2^2 - s_n^2)} \\
& + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
& + \frac{\theta_n^2 k_n^2}{s_n^2(s_n^2 - s_1^2)(s_n^2 - s_2^2)\ldots(s_n^2 - s_{n-1}^2)} = 0.
\end{aligned}
\right.
$$

Si d'ailleurs on pose, pour abréger,

$$(38)\quad \left\{ \begin{aligned} K_1 &= \frac{k_1^2}{s_1^2(s_1^2-s_2^2)(s_1^2-s_3^2)\ldots(s_1^2-s_n^2)}, \\ K_2 &= \frac{k_2^2}{s_2^2(s_2^2-s_1^2)(s_2^2-s_3^2)\ldots(s_2^2-s_n^2)}, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ K_n &= \frac{k_n^2}{s_n^2(s_n^2-s_1^2)(s_n^2-s_2^2)\ldots(s_n^2-s_{n-1}^2)}, \end{aligned} \right.$$

et si l'on représente les carrés des indices de réfraction par

$$(39)\quad \Theta_1,\ \Theta_2,\ \Theta_3,\ \ldots,$$

de sorte qu'on ait

$$(40)\quad \Theta_i = \theta_i^2,$$

i désignant un nombre entier quelconque, les formules (32) et (37) deviendront respectivement

$$(41)\quad K_1 + K_2 + K_3 + \ldots + K_n = 0,$$

$$(42)\quad K_1\Theta_1 + K_2\Theta_2 + K_3\Theta_3 + \ldots + K_n\Theta_n = 0.$$

Enfin, si l'on passe successivement de l'air à d'autres milieux réfringents de diverses natures, et si, dans ce passage, k devient successivement

$$(43)\quad \theta k,\quad \theta' k,\quad \theta'' k,\quad \ldots,$$

alors, au lieu de la formule (41), on obtiendra un système d'équations de la forme

$$(44)\quad \left\{ \begin{aligned} &K_1\Theta_1 + K_2\Theta_2 + K_3\Theta_3 + \ldots + K_n\Theta_n = 0, \\ &K_1\Theta_1' + K_2\Theta_2' + K_3\Theta_3' + \ldots + K_n\Theta_n' = 0, \\ &K_1\Theta_1'' + K_2\Theta_2'' + K_3\Theta_3'' + \ldots + K_n\Theta_n'' = 0, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{aligned} \right.$$

pourvu que l'on pose

$$(45)\quad \Theta_i = \theta_i^2,\qquad \Theta_i' = \theta_i'^2,\qquad \Theta_i'' = \theta_i''^2,\qquad \ldots,$$

c'est-à-dire pourvu que l'on désigne par

$$(46)\quad \Theta_i,\ \Theta_i',\ \Theta_i'',\ \ldots$$

les carrés des indices de réfraction relatifs aux divers milieux dont il s'agit. On ne saurait, dans les formules (41), (42), (44), supposer $n = 2$, car alors les formules (41), (42), réduites à

$$K_1 + K_2 = 0,\qquad K_1\Theta_1 + K_2\Theta_2 = 0,$$

donneraient simplement $\Theta_1 = \Theta_2$, et par suite la dispersion cesserait d'avoir lieu. On aura donc au moins $n = 3$. Ajoutons qu'il suffira d'éliminer les quantités

$$K_1,\ K_2,\ K_3,\ \ldots,\ K_n,$$

ou plutôt les rapports

$$\frac{K_1}{K_n},\ \frac{K_2}{K_n},\ \ldots,\ \frac{K_{n-1}}{K_n},$$

entre l'équation (42) et $n-1$ des équations (44), pour obtenir, entre les valeurs de

$$\Theta_1,\ \Theta_2,\ \ldots,\ \Theta_n,$$

relatives à $n-1$ substances diverses, une équation de condition qui devra être sensiblement vérifiée, lorsqu'on pourra, sans erreur sensible, réduire à ses $n-1$ premiers termes la série comprise dans le second membre de la formule (9) ou (24).

Cela posé, en attribuant successivement à n les valeurs entières et croissantes 3, 4, ..., on pourrait chercher la première de ces valeurs pour laquelle se vérifient, sans erreur sensible, les équations de condition du genre de celles que nous venons de mentionner, et décider ainsi jusqu'où les expériences de Frauenhofer permettent de pousser le degré d'approximation. Mais on arrivera plus promptement au même but à l'aide des considérations suivantes.

La formule (42) détermine Θ_n en fonction linéaire des seules quantités

$$\Theta_1,\ \Theta_2,\ \ldots,\ \Theta_{n-1}.$$

Des formules semblables détermineraient Θ_{n+1}, Θ_{n+2}, ... en fonctions linéaires des mêmes quantités, et généralement le caractère propre d'une valeur de n assez considérable pour qu'on puisse, sans erreur sensible, réduire la série (9) ou (24) à ses $n-1$ premiers termes, c'est que n des quantités

$$\Theta_1,\quad \Theta_2,\quad \Theta_3,\quad \Theta_4,\quad \ldots$$

seront toujours liées entre elles par une équation linéaire sans terme constant, et dans laquelle les coefficients resteront indépendants de la nature du milieu réfringent.

Concevons maintenant que, par les notations

$$\mathrm{S}\Theta_i,\quad \mathrm{S}'\Theta_i,\quad \mathrm{S}''\Theta_i,\quad \ldots,\tag{47}$$

on désigne plusieurs des polynômes contenus dans la formule générale

$$\pm\Theta_1\pm\Theta_2\pm\Theta_3\pm\ldots,\tag{48}$$

c'est-à-dire autant de sommes des quantités

$$\Theta_1,\quad \Theta_2,\quad \Theta_3,\quad \ldots$$

prises tantôt avec le signe $+$, tantôt avec le signe $-$; de sorte que, en appliquant le calcul aux expériences de Frauenhofer faites sur sept rayons, l'on ait par exemple

$$\left\{\begin{aligned}
\mathrm{S}\,\Theta_i &= \Theta_1+\Theta_2+\Theta_3+\Theta_4+\Theta_5+\Theta_6+\Theta_7,\\
\mathrm{S}'\Theta_i &= \Theta_1+\Theta_2+\Theta_3+\Theta_4-\Theta_5-\Theta_6-\Theta_7,\\
\mathrm{S}''\Theta_i &= -\Theta_1-\Theta_2+\Theta_3+\Theta_4+\Theta_5+\Theta_6-\Theta_7,\\
\mathrm{S}'''\Theta_i &= -\Theta_1+\Theta_2+\Theta_3-\Theta_4-\Theta_5+\Theta_6+\Theta_7,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}\right.\tag{49}$$

Représentons, au contraire, par les notations

$$\Sigma\Theta_i,\quad \Sigma\Theta'_i,\quad \Sigma''\Theta_i,\quad \ldots\tag{50}$$

plusieurs des polynômes compris dans la formule générale

$$\pm\Theta_i\pm\Theta'_i\pm\Theta''_i\pm\ldots,\tag{51}$$

c'est-à-dire autant de sommes formées avec les diverses valeurs de

$$\Theta_i$$

correspondantes à une même valeur de i, mais relatives aux diverses substances, et concevons, par exemple, que

$$\Sigma\Theta_1,\quad \Sigma\Theta_2,\quad \ldots,\quad \Sigma\Theta_i$$

représentent les sommes des valeurs de

$$\Theta_1,\quad \Theta_2,\quad \ldots,\quad \Theta_i$$

relatives à toutes les substances, que

$$\Sigma'\Theta_1,\quad \Sigma'\Theta_2,\quad \ldots,\quad \Sigma'\Theta_i$$

représentent ce que deviennent les précédentes sommes quand on y change les signes des termes relatifs aux diverses espèces de flint-glass, etc. Enfin, décomposons Θ_i en diverses parties représentées par

$$\vartheta_i,\quad \vartheta'_i,\quad \vartheta''_i,\quad \ldots,$$

en sorte qu'on ait

$$\Theta_i=\vartheta_i+\vartheta'_i+\vartheta''_i+\ldots.\tag{52}$$

En admettant que les lettres caractéristiques S, S', ..., Σ, Σ', ... appliquées séparément ou simultanément à ces diverses parties gardent les mêmes significations que lorsqu'on les applique à Θ_i, et indiquent toujours des sommes formées de la même manière, on aura encore

$$\left\{\begin{aligned}
\mathrm{S}\,\Theta_i &= \mathrm{S}\,\vartheta_i+\mathrm{S}\,\vartheta'_i+\mathrm{S}\,\vartheta''_i+\ldots,\\
\mathrm{S}'\Theta_i &= \mathrm{S}'\vartheta_i+\mathrm{S}'\vartheta'_i+\mathrm{S}'\vartheta''_i+\ldots,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,
\end{aligned}\right.\tag{53}$$

$$\left\{\begin{aligned}
\Sigma\,\Theta_i &= \Sigma\,\vartheta_i+\Sigma\,\vartheta'_i+\Sigma\,\vartheta''_i+\ldots,\\
\Sigma'\Theta_i &= \Sigma'\vartheta_i+\Sigma'\vartheta'_i+\Sigma'\vartheta''_i+\ldots,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,
\end{aligned}\right.\tag{54}$$

$$\left\{\begin{aligned}
\Sigma\mathrm{S}\Theta_i &= \Sigma\mathrm{S}\vartheta_i+\Sigma\mathrm{S}\vartheta'_i+\Sigma\mathrm{S}\vartheta''_i+\ldots,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}\right.\tag{55}$$

Cela posé, revenons à la formule (42), et voyons d'abord quelles conséquences on aurait pu déduire de cette formule et des autres semblables s'il eût été permis d'y supposer $n = 2$. Dans cette hypothèse, de l'équation (42), réduite à

$$K_1\Theta_1 + K_2\Theta_2 = 0, \tag{56}$$

on aurait tiré

$$\frac{\Theta_1}{\Theta_2} = -\frac{K_2}{K_1},$$

puis, en remplaçant le premier des milieux réfringents par le second,

$$\frac{\Theta'_1}{\Theta'_2} = -\frac{K_2}{K_1}$$

et, par conséquent,

$$\frac{\Theta_1}{\Theta_2} = \frac{\Theta'_1}{\Theta'_2} \tag{57}$$

ou, ce qui revient au même,

$$\frac{\Theta_1}{\Theta'_1} = \frac{\Theta_2}{\Theta'_2}.$$

On aurait trouvé de la même manière

$$\frac{\Theta_1}{\Theta'_1} = \frac{\Theta_3}{\Theta'_3},$$

$$\frac{\Theta_1}{\Theta'_1} = \frac{\Theta_4}{\Theta'_4},$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

et finalement

$$\frac{\Theta_1}{\Theta'_1} = \frac{\Theta_2}{\Theta'_2} = \frac{\Theta_3}{\Theta'_3} = \frac{\Theta_4}{\Theta'_4} = \frac{\Theta_5}{\Theta'_5} = \frac{\Theta_6}{\Theta'_6} = \frac{\Theta_7}{\Theta'_7}. \tag{58}$$

Or plusieurs fractions égales entre elles sont encore égales à celle qu'on obtient en divisant la somme de leurs numérateurs ajoutés les uns aux autres ou pris les uns avec le signe $+$, les autres avec le signe $-$, par la somme de leurs dénominateurs ajoutés pareillement les uns aux autres ou pris avec les mêmes signes que les numérateurs.

Donc la formule (58) entraînerait la suivante

$$\frac{\Theta_1}{\Theta'_1} = \frac{S\Theta_l}{S\Theta'_l}, \tag{59}$$

qu'on peut écrire comme il suit

$$\frac{\Theta_1}{S\Theta_l} = \frac{\Theta'_1}{S\Theta'_l}, \tag{60}$$

et dans laquelle il est permis de remplacer la caractéristique S par l'une des caractéristiques S′, S″, ... Observons d'ailleurs que, si l'on pouvait considérer comme égaux les rapports compris dans la formule (58), et attribuer les différences de leurs valeurs réduites en nombres aux erreurs d'observation, le moyen d'atténuer l'influence probable de ces erreurs sur la détermination de la valeur commune des rapports dont il s'agit serait de faire concourir également à cette détermination les carrés des sept indices de réfraction, et par conséquent de substituer le nouveau rapport

$$\frac{S\Theta_l}{S\Theta'_l} = \frac{\Theta_1 + \Theta_2 + \Theta_3 + \Theta_4 + \Theta_5 + \Theta_6 + \Theta_7}{\Theta'_1 + \Theta'_2 + \Theta'_3 + \Theta'_4 + \Theta'_5 + \Theta'_6 + \Theta'_7} \tag{61}$$

à tous les autres, attendu que les deux termes de ce nouveau rapport seraient sept fois plus grands que les moyennes arithmétiques entre les termes correspondants des premiers, et que, selon toute apparence, les erreurs d'expérience dans

$$\Theta_1,\ \Theta_2,\ \Theta_3,\ \Theta_4,\ \Theta_5,\ \Theta_6,\ \Theta_7$$

étant, les unes positives, les autres négatives, produiraient dans le polynôme

$$\Theta_1 + \Theta_2 + \Theta_3 + \Theta_4 + \Theta_5 + \Theta_6 + \Theta_7$$

une erreur de beaucoup inférieure à la somme de leurs valeurs numériques ou, ce qui revient au même, à sept fois la moyenne arithmétique entre ces valeurs.

Si le second des milieux réfringents était remplacé successivement par le troisième, par le quatrième, etc., alors, au lieu de la formule (60), on obtiendrait les suivantes :

$$\frac{\Theta_1}{S\Theta_i} = \frac{\Theta''_1}{S\Theta''_i},$$

$$\frac{\Theta_1}{S\Theta_i} = \frac{\Theta'''_1}{S\Theta'''_i},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

On aurait donc généralement dans l'hypothèse admise

$$\frac{\Theta_1}{S\Theta_i} = \frac{\Theta'_1}{S\Theta'_i} = \frac{\Theta''_1}{S\Theta''_i} = \frac{\Theta'''_1}{S\Theta'''_i} = \ldots \tag{62}$$

Or le moyen d'atténuer l'influence probable des erreurs d'observation sur la détermination numérique de la valeur commune des rapports compris dans la formule (62) serait de substituer le nouveau rapport

$$\frac{\Sigma\Theta_1}{\Sigma S\Theta_i} = \frac{\Theta_1 + \Theta'_1 + \Theta''_1 + \Theta'''_1 + \ldots}{S\Theta_i + S\Theta'_i + S\Theta''_i + S\Theta'''_i + \ldots} \tag{63}$$

à tous les autres, ce que l'on prouve par les raisons ci-dessus alléguées pour la substitution du rapport (61) aux rapports (58). On tire effectivement de la formule (62)

$$\frac{\Theta_1}{S\Theta_i} = \frac{\Sigma\Theta_1}{\Sigma S\Theta_i} \tag{64}$$

ou

$$\Theta_1 = = \frac{\Sigma\Theta_1}{\Sigma S\Theta_i} S\Theta_i. \tag{65}$$

On obtiendrait de la même manière les diverses équations

$$\left\{\begin{aligned} \Theta_1 &= \frac{\Sigma\Theta_1}{\Sigma S\Theta_i} S\Theta_i, \\ \Theta_2 &= \frac{\Sigma\Theta_2}{\Sigma S\Theta_i} S\Theta_i, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \Theta_7 &= \frac{\Sigma\Theta_7}{\Sigma S\Theta_i} S\Theta_i. \end{aligned}\right. \tag{66}$$

qui peuvent être remplacées par la seule formule

$$\frac{\Theta_1}{\Sigma\Theta_1} = \frac{\Theta_2}{\Sigma\Theta_2} = \frac{\Theta_3}{\Sigma\Theta_3} = \frac{\Theta_4}{\Sigma\Theta_4} = \frac{\Theta_5}{\Sigma\Theta_5} = \frac{\Theta_6}{\Sigma\Theta_6} = \frac{\Theta_7}{\Sigma\Theta_7} = \frac{S\Theta_i}{\Sigma S\Theta_i}. \tag{67}$$

Si l'on pouvait, en réalité, considérer comme égaux les rapports compris dans la formule (58) et attribuer les différences de leurs valeurs réduites en nombres aux erreurs d'observation, alors les valeurs de

$$\Theta_1,\quad \Theta_2,\quad \Theta_3,\quad \Theta_4,\quad \Theta_5,\quad \Theta_6,\quad \Theta_7,$$

déterminées par les formules (66), mériteraient plus de confiance que les valeurs observées. Mais il n'en est pas ainsi, car nous avons vu qu'il n'était pas possible de supposer $n = 2$ dans l'équation (42) et de la réduire ainsi à l'équation (56). En conséquence, les seconds membres des formules (66) doivent être considérés comme représentant, non les valeurs exactes, mais seulement des valeurs approchées de

$$\Theta_1,\quad \Theta_2,\quad \Theta_3,\quad \Theta_4,\quad \Theta_5,\quad \Theta_6,\quad \Theta_7.$$

Désignons ces valeurs approchées par

$$\mathfrak{Z}_1,\quad \mathfrak{Z}_2,\quad \mathfrak{Z}_3,\quad \mathfrak{Z}_4,\quad \mathfrak{Z}_5,\quad \mathfrak{Z}_6,\quad \mathfrak{Z}_7,$$

en sorte qu'on ait

$$\mathfrak{Z}_1 = \frac{\Sigma\Theta_1}{\Sigma S\Theta_i} S\Theta_i,\qquad \mathfrak{Z}_2 = \frac{\Sigma\Theta_2}{\Sigma S\Theta_i} S\Theta_i,\qquad \ldots,\qquad \mathfrak{Z}_7 = \frac{\Sigma\Theta_7}{\Sigma S\Theta_i} S\Theta_i, \tag{68}$$

et par $\Delta\Theta_i$ la valeur de la différence

$$\Theta_i - \mathfrak{Z}_i,$$

de sorte qu'on ait encore

$$\Theta_1 = \mathfrak{Z}_1 + \Delta\Theta_1,\qquad \Theta_2 = \mathfrak{Z}_2 + \Delta\Theta_2,\qquad \ldots,\qquad \Theta_7 = \mathfrak{Z}_7 + \Delta\Theta_7. \tag{69}$$

On tirera des équations (68)

$$\mathfrak{Z}_1 + \mathfrak{Z}_2 + \ldots + \mathfrak{Z}_7 = S\Theta_i = \Theta_1 + \Theta_2 + \ldots + \Theta_7, \tag{70}$$

et les formules (69), combinées entre elles par voie d'addition, donneront

$$\Delta\Theta_1 + \Delta\Theta_2 + \Delta\Theta_3 + \Delta\Theta_4 + \Delta\Theta_5 + \Delta\Theta_6 + \Delta\Theta_7 = 0 \quad \text{ou} \quad S\,\Delta\Theta_i = 0. \tag{71}$$

Cela posé, cherchons ce qui arriverait si, dans la formule (42) et dans les autres semblables, on pouvait, sans erreur sensible, supposer $n = 3$. Alors cette formule, se réduisant à

$$K_1\Theta_1 + K_2\Theta_2 + K_3\Theta_3 = 0, \tag{72}$$

et devant subsister indépendamment de la nature du milieu réfringent, entrainerait la suivante

$$K_1\Sigma\Theta_1 + K_2\Sigma\Theta_2 + K_3\Sigma\Theta_3 = 0, \tag{73}$$

de laquelle on tirerait, en la joignant aux trois premières des équations (68),

$$K_1\vartheta_1 + K_2\vartheta_2 + K_3\vartheta_3 = 0. \tag{74}$$

Or, en substituant dans la formule (72) les valeurs de Θ'_1, Θ_2, Θ_3 tirées des équations (69), et ayant égard à la formule (74), on obtiendrait la suivante

$$K_1\Delta\Theta_1 + K_2\Delta\Theta_2 + K_3\Delta\Theta_3 = 0, \tag{75}$$

qui déterminerait $\Delta\Theta_3$ en fonction linéaire des deux quantités $\Delta\Theta_1$, $\Delta\Theta_2$. Des formules semblables détermineraient $\Delta\Theta_4$, $\Delta\Theta_5$, $\Delta\Theta_6$, $\Delta\Theta_7$ en fonction des mêmes quantités, et la substitution des valeurs de

$$\Delta\Theta_3,\quad \Delta\Theta_4,\quad \Delta\Theta_5,\quad \Delta\Theta_6,\quad \Delta\Theta_7$$

ainsi déterminées dans l'équation (71) fournirait entre les seules quantités $\Delta\Theta_1$, $\Delta\Theta_2$ une équation nouvelle dont les coefficients seraient encore indépendants de la nature du milieu réfringent. On aurait donc, en vertu de cette équation nouvelle, et en désignant par $\Delta\Theta'_i$ ce que devient $\Delta\Theta_i$ quand on passe du premier milieu au second,

$$\frac{\Delta\Theta_1}{\Delta\Theta_2} = \frac{\Delta\Theta'_1}{\Delta\Theta'_2} \tag{76}$$

ou, ce qui revient au même,

$$\frac{\Delta\Theta_1}{\Delta\Theta'_1} = \frac{\Delta\Theta_2}{\Delta\Theta'_2}.$$

On trouverait de la même manière

$$\frac{\Delta\Theta_1}{\Delta\Theta'_1} = \frac{\Delta\Theta_3}{\Delta\Theta'_3},$$

$$\frac{\Delta\Theta_1}{\Delta\Theta'_1} = \frac{\Delta\Theta_4}{\Delta\Theta'_4},$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

et finalement

$$\frac{\Delta\Theta_1}{\Delta\Theta'_1} = \frac{\Delta\Theta_2}{\Delta\Theta'_2} = \frac{\Delta\Theta_3}{\Delta\Theta'_3} = \frac{\Delta\Theta_4}{\Delta\Theta'_4} = \frac{\Delta\Theta_5}{\Delta\Theta'_5} = \frac{\Delta\Theta_6}{\Delta\Theta'_6} = \frac{\Delta\Theta_7}{\Delta\Theta'_7}. \tag{77}$$

Supposons maintenant que l'on désigne par $S'\Theta_i$ l'un des polynômes compris dans la formule (48), et par $\Sigma'\Theta_i$ l'un des polynômes compris dans la formule (61), en choisissant les signes de manière que

$$S'\Delta\Theta_i$$

représente, au moins pour l'une des substances, la somme des valeurs numériques de

$$\Delta\Theta_1,\quad \Delta\Theta_2,\quad \Delta\Theta_3,\quad \Delta\Theta_4,\quad \Delta\Theta_5,\quad \Delta\Theta_6,\quad \Delta\Theta_7,$$

et que

$$\Sigma' S'\Delta\Theta_i$$

représente la somme des valeurs numériques de

$$S'\Delta\Theta_i,\quad S'\Delta\Theta'_i,\quad S'\Delta\Theta''_i,\quad \ldots.$$

En opérant comme on l'a fait, lorsque de l'équation (58) on a successivement déduit les formules (59), (62), (64), (67), on déduirait de la formule (77) celles qui suivent :

$$\frac{\Delta\Theta_1}{\Delta\Theta'_1} = \frac{S'\Delta\Theta_i}{S'\Delta\Theta'_i}, \tag{78}$$

$$\frac{\Delta\Theta_1}{S'\Delta\Theta_i} = \frac{\Delta\Theta'_1}{S'\Delta\Theta'_i} = \frac{\Delta\Theta''_1}{S'\Delta\Theta''_i} = \frac{\Delta\Theta'''_1}{S'\Delta\Theta'''_i} = \ldots, \tag{79}$$

$$\frac{\Delta\Theta_1}{S'\Delta\Theta_i} = \frac{\Sigma'\Delta\Theta_i}{\Sigma' S'\Delta\Theta_i}, \tag{80}$$

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{\Delta\Theta_1}{\Sigma'\Delta\Theta_1} = \frac{\Delta\Theta_2}{\Sigma'\Delta\Theta_2} = \frac{\Delta\Theta_3}{\Sigma'\Delta\Theta_3} = \frac{\Delta\Theta_4}{\Sigma'\Delta\Theta_4} \\ &\qquad = \frac{\Delta\Theta_5}{\Sigma'\Delta\Theta_5} = \frac{\Delta\Theta_6}{\Sigma'\Delta\Theta_6} = \frac{\Delta\Theta_7}{\Sigma'\Delta\Theta_7} = \frac{S'\Delta\Theta_i}{\Sigma' S'\Delta\Theta_i}. \end{aligned}\right. \tag{81}$$

Par suite, on aurait

$$(82)\qquad \begin{cases} \Delta\Theta_1 = \dfrac{\Sigma'\Delta\Theta_1}{\Sigma'S'\Delta\Theta_i}S'\Delta\Theta_i, \\ \Delta\Theta_2 = \dfrac{\Sigma'\Delta\Theta_2}{\Sigma'S'\Delta\Theta_i}S'\Delta\Theta_i, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ \Delta\Theta_7 = \dfrac{\Sigma'\Delta\Theta_7}{\Sigma'S'\Delta\Theta_i}S'\Delta\Theta_i. \end{cases}$$

Si l'on pouvait, en réalité, considérer comme égaux les rapports compris dans la formule (77), et attribuer les différences de leurs valeurs réduites en nombres aux erreurs d'observation, alors les valeurs de

$$\Delta\Theta_1,\quad \Delta\Theta_2,\quad \Delta\Theta_3,\quad \Delta\Theta_4,\quad \Delta\Theta_5,\quad \Delta\Theta_6,\quad \Delta\Theta_7,$$

déterminées par les formules (82), mériteraient plus de confiance que les valeurs immédiatement déduites des expériences. Dans le cas contraire, les seconds membres des formules (82) pourraient être considérés comme représentant, non les valeurs exactes, mais seulement des valeurs approchées de

$$\Delta\Theta_1,\quad \Delta\Theta_2,\quad \Delta\Theta_3,\quad \Delta\Theta_4,\quad \Delta\Theta_5,\quad \Delta\Theta_6,\quad \Delta\Theta_7.$$

Désignons ces valeurs approchées par

$$\mathfrak{I}'_1,\quad \mathfrak{I}'_2,\quad \mathfrak{I}'_3,\quad \mathfrak{I}'_4,\quad \mathfrak{I}'_5,\quad \mathfrak{I}'_6,\quad \mathfrak{I}'_7,$$

en sorte qu'on ait

$$(83)\qquad \begin{cases} \mathfrak{I}'_1 = \dfrac{\Sigma'\Delta\Theta_1}{\Sigma'S'\Delta\Theta_i}S'\Delta\Theta_i, \\ \mathfrak{I}'_2 = \dfrac{\Sigma'\Delta\Theta_2}{\Sigma'S'\Delta\Theta_i}S'\Delta\Theta_i, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ \mathfrak{I}'_7 = \dfrac{\Sigma'\Delta\Theta_7}{\Sigma'S'\Delta\Theta_i}S'\Delta\Theta_i, \end{cases}$$

et par

$$\Delta^2\Theta_i$$

la valeur de la différence

$$\Delta\Theta_i - \mathfrak{I}'_i,$$

de sorte qu'on ait encore

$$(84)\qquad \Delta\Theta_1 = \mathfrak{I}'_1 + \Delta^2\Theta_1,\qquad \Delta\Theta_2 = \mathfrak{I}'_2 + \Delta^2\Theta_2,\qquad \dots,\qquad \Delta\Theta_7 = \mathfrak{I}'_7 + \Delta^2\Theta_7.$$

On tirera des équations (83), en ayant égard à l'équation (71),

$$(85)\qquad \mathfrak{I}'_1 + \mathfrak{I}'_2 + \mathfrak{I}'_3 + \mathfrak{I}'_4 + \mathfrak{I}'_5 + \mathfrak{I}'_6 + \mathfrak{I}'_7 = 0$$

ou, ce qui revient au même,

$$(86)\qquad S\mathfrak{I}'_i = 0,$$

et de plus

$$(87)\qquad S'\mathfrak{I}'_i = S'\Delta\Theta_i.$$

D'ailleurs les équations (84) sont toutes comprises dans la formule générale

$$(88)\qquad \Delta\Theta_i = \mathfrak{I}'_i + \Delta^2\Theta_i,$$

et de cette dernière jointe aux formules (71), (86), (87) on conclura

$$(89)\qquad S\Delta^2\Theta_i = 0,\qquad S'\Delta^2\Theta_i = 0.$$

Cela posé, cherchons ce qui arriverait si, dans la formule (42) et autres semblables, on pouvait, sans erreur sensible, supposer $n = 4$. Alors cette formule, se réduisant à

$$(90)\qquad K_1\Theta_1 + K_2\Theta_2 + K_3\Theta_3 + K_4\Theta_4 = 0,$$

et devant subsister quel que fût le milieu réfringent, entraînerait la suivante

$$(91)\qquad K_1\Sigma\Theta_1 + K_2\Sigma\Theta_2 + K_3\Sigma\Theta_3 + K_4\Sigma\Theta_4 = 0,$$

de laquelle on tirerait, en la combinant avec les quatre premières des formules (68),

$$(92)\qquad K_1\mathfrak{I}_1 + K_2\mathfrak{I}_2 + K_3\mathfrak{I}_3 + K_4\mathfrak{I}_4 = 0.$$

D'ailleurs, en substituant dans la formule (90) les valeurs de

$$\Theta_1,\quad \Theta_2,\quad \Theta_3,\quad \Theta_4,$$

tirées des équations (69), et ayant égard à la formule (92), on obtiendrait la suivante·

$$K_1\,\Delta\Theta_1 + K_2\,\Delta\Theta_2 + K_3\,\Delta\Theta_3 + K_4\,\Delta\Theta_4 = 0; \tag{93}$$

et, celle-ci devant encore subsister indépendamment de la nature du milieu que l'on considère, on en conclurait

$$K_1\Sigma'\Delta\Theta_1 + K_2\Sigma'\Delta\Theta_2 + K_3\Sigma'\Delta\Theta_3 + K_4\Sigma'\Delta\Theta_4 = 0, \tag{94}$$

puis, en ayant égard aux quatre premières des formules (83),

$$K_1\mathfrak{S}'_1 + K_2\mathfrak{S}'_2 + K_3\mathfrak{S}'_3 + K_4\mathfrak{S}'_4 = 0. \tag{95}$$

Enfin, en substituant dans la formule (93) les valeurs de

$$\Delta\Theta_1,\quad \Delta\Theta_2,\quad \Delta\Theta_3,\quad \Delta\Theta_4,$$

tirées des équations (84), et ayant égard à l'équation (95), on trouverait

$$K_1\Delta^2\Theta_1 + K_2\Delta^2\Theta_2 + K_3\Delta^2\Theta_3 + K_4\Delta^2\Theta_4 = 0. \tag{96}$$

En vertu de la formule (96), $\Delta^2\Theta_4$ deviendrait une fonction linéaire des trois quantités

$$\Delta^2\Theta_1,\quad \Delta^2\Theta_2,\quad \Delta^2\Theta_3.$$

Des formules semblables détermineraient $\Delta^2\Theta_5$, $\Delta^2\Theta_6$, $\Delta^2\Theta_7$ en fonctions linéaires des mêmes quantités, et la substitution des valeurs de

$$\Delta^2\Theta_4,\quad \Delta^2\Theta_5,\quad \Delta^2\Theta_6,\quad \Delta^2\Theta_7$$

ainsi déterminées, dans les équations (89), fournirait entre les seules quantités

$$\Delta^2\Theta_1,\quad \Delta^2\Theta_2,\quad \Delta^2\Theta_3$$

deux équations nouvelles qui donneraient pour les rapports

$$\frac{\Delta^2\Theta_1}{\Delta^2\Theta_2},\quad \frac{\Delta^2\Theta_1}{\Delta^2\Theta_3}$$

deux valeurs indépendantes de la nature du milieu réfringent. On aurait donc, en vertu de ces équations nouvelles et en désignant par

$\Delta^2\Theta'_i$ ce que devient $\Delta^2\Theta_i$ quand on passe du premier milieu au second,

$$\frac{\Delta^2\Theta_1}{\Delta^2\Theta_2} = \frac{\Delta^2\Theta'_1}{\Delta^2\Theta'_2},\qquad \frac{\Delta^2\Theta_1}{\Delta^2\Theta_3} = \frac{\Delta^2\Theta'_1}{\Delta^2\Theta'_3}$$

ou, ce qui revient au même,

$$\frac{\Delta^2\Theta_1}{\Delta^2\Theta'_1} = \frac{\Delta^2\Theta_2}{\Delta^2\Theta'_2} = \frac{\Delta^2\Theta_3}{\Delta^2\Theta'_3}.$$

On trouverait plus généralement

$$\frac{\Delta^2\Theta_1}{\Delta^2\Theta'_1} = \frac{\Delta^2\Theta_2}{\Delta^2\Theta'_2} = \frac{\Delta^2\Theta_3}{\Delta^2\Theta'_3} = \frac{\Delta^2\Theta_4}{\Delta^2\Theta'_4} = \frac{\Delta^2\Theta_5}{\Delta^2\Theta'_5} = \frac{\Delta^2\Theta_6}{\Delta^2\Theta'_6} = \frac{\Delta^2\Theta_7}{\Delta^2\Theta'_7}; \tag{97}$$

puis, en désignant par

$$S''\Delta_2\Theta_i$$

la somme des valeurs numériques de

$$\Delta^2\Theta_1,\quad \Delta^2\Theta_2,\quad \Delta^2\Theta_3,\quad \Delta^2\Theta_4,\quad \Delta^2\Theta_5,\quad \Delta^2\Theta_6,\quad \Delta^2\Theta_7,$$

au moins pour l'une des substances, par

$$\Sigma''S''\Delta^2\Theta_i$$

la somme des valeurs numériques de

$$S''\Delta^2\Theta_i,\quad S''\Delta^2\Theta'_i,\quad S''\Delta^2\Theta''_i,\quad \ldots,$$

et raisonnant sur la formule (97) comme sur la formule (77), on obtiendrait, non plus l'équation (81), mais la suivante

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{\Delta^2\Theta_1}{\Sigma''\Delta^2\Theta_1} = \frac{\Delta^2\Theta_2}{\Sigma''\Delta^2\Theta_2} = \frac{\Delta^2\Theta_3}{\Sigma''\Delta^2\Theta_3} = \frac{\Delta^2\Theta_4}{\Sigma''\Delta^2\Theta_4} \\ &\qquad = \frac{\Delta^2\Theta_5}{\Sigma''\Delta^2\Theta_5} = \frac{\Delta^2\Theta_6}{\Sigma''\Delta^2\Theta_6} = \frac{\Delta^2\Theta_7}{\Sigma''\Delta^2\Theta_7} = \frac{S''\Delta^2\Theta_i}{\Sigma''S''\Delta^2\Theta_i}, \end{aligned}\right. \tag{98}$$

de laquelle on tirerait

$$\left\{\begin{aligned} \Delta^2\Theta_1 &= \frac{\Sigma''\Delta^2\Theta_1}{\Sigma''S''\Delta^2\Theta_i}\,S''\Delta^2\Theta_i, \\ \Delta^2\Theta_2 &= \frac{\Sigma''\Delta^2\Theta_2}{\Sigma''S''\Delta^2\Theta_i}\,S''\Delta^2\Theta_i, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \Delta^2\Theta_7 &= \frac{\Sigma''\Delta^2\Theta_7}{\Sigma''S''\Delta^2\Theta_i}\,S''\Delta^2\Theta_i. \end{aligned}\right. \tag{99}$$

Si l'on peut, en réalité, considérer comme égaux les rapports compris dans la formule (77), et attribuer les différences de leurs valeurs réduites en nombres aux erreurs d'observation, alors les valeurs de

$$\Delta^2\Theta_1,\quad \Delta^2\Theta_2,\quad \Delta^2\Theta_3,\quad \Delta^2\Theta_4,\quad \Delta^2\Theta_5,\quad \Delta^2\Theta_6,\quad \Delta^2\Theta_7$$

déterminées par les formules (99) mériteront plus de confiance que les valeurs immédiatement déduites des expériences.

On pourrait pousser plus loin ces calculs, et, s'il arrivait que, pour rendre sensiblement exactes la formule (42) et les autres semblables, on dût y supposer $n = 5$, alors en faisant, pour abréger,

$$(100)\qquad \begin{cases} \mathfrak{I}''_1 = \dfrac{\Sigma''\Delta^2\Theta_1}{\Sigma''S''\Delta^2\Theta_i}\,S''\Delta^2\Theta_i, \\[2ex] \mathfrak{I}''_2 = \dfrac{\Sigma''\Delta^2\Theta_2}{\Sigma''S''\Delta^2\Theta_i}\,S''\Delta^2\Theta_i, \\[1ex] \dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\[1ex] \mathfrak{I}''_7 = \dfrac{\Sigma''\Delta^2\Theta_7}{\Sigma''S''\Delta^2\Theta_i}\,S''\Delta^2\Theta_i; \end{cases}$$

et posant d'ailleurs

$$(101)\qquad \Delta^2\Theta_1 = \mathfrak{I}''_1 + \Delta^3\Theta_1,\qquad \Delta^2\Theta_2 = \mathfrak{I}''_2 + \Delta^3\Theta_2,\qquad \dots,\qquad \Delta^2\Theta_7 = \mathfrak{I}''_7 + \Delta^3\Theta_7,$$

on tirerait des formules (100), (101), jointes aux équations (89),

$$(102)\qquad S\mathfrak{I}''_i = 0,\qquad S'\mathfrak{I}''_i = 0,$$

$$(103)\qquad S''\mathfrak{I}''_i = S''\Delta^2\Theta_i$$

et, par suite,

$$(104)\qquad S\Delta^3\Theta_i = 0,\qquad S'\Delta^3\Theta_i = 0,\qquad S''\Delta^3\Theta_i = 0,$$

puis, de la formule (42), réduite à

$$(105)\qquad K_1\Theta_1 + K_2\Theta_2 + K_3\Theta_3 + K_4\Theta_4 + K_5\Theta_5 = 0$$

et, jointe aux équations (68), (69), (83), (84), (100), (101),

$$(106)\qquad K_1\Delta^3\Theta_1 + K_2\Delta^3\Theta_2 + K_3\Delta^3\Theta_3 + K_4\Delta^3\Theta_4 + K_5\Delta^3\Theta_5 = 0.$$

Enfin, de cette dernière équation et des autres semblables réunies

aux formules (104), on conclurait que les quantités

$$\Delta^3\Theta_1,\quad \Delta^3\Theta_2,\quad \Delta^3\Theta_3,\quad \Delta^3\Theta_4,\quad \Delta^3\Theta_5,\quad \Delta^3\Theta_6,\quad \Delta^3\Theta_7$$

conservent entre elles des rapports indépendants de la nature du milieu réfringent et vérifient, par conséquent, la formule

$$(107)\qquad \frac{\Delta^3\Theta_1}{\Delta^3\Theta'_1} = \frac{\Delta^3\Theta_2}{\Delta^3\Theta'_2} = \frac{\Delta^3\Theta_3}{\Delta^3\Theta'_3} = \frac{\Delta^3\Theta_4}{\Delta^3\Theta'_4} = \frac{\Delta^3\Theta_5}{\Delta^3\Theta'_5} = \frac{\Delta^3\Theta_6}{\Delta^3\Theta'_6} = \frac{\Delta^3\Theta_7}{\Delta^3\Theta'_7};$$

puis, en désignant par

$$S''\Delta^3\Theta_i$$

la somme des valeurs numériques de

$$\Delta^3\Theta_1,\quad \Delta^3\Theta_2,\quad \Delta^3\Theta_3,\quad \Delta^3\Theta_4,\quad \Delta^3\Theta_5,\quad \Delta^3\Theta_6,\quad \Delta^3\Theta_7,$$

au moins pour l'une des substances, par

$$\Sigma''S''\Delta^3\Theta_i$$

la somme des valeurs numériques de

$$S''\Delta^3\Theta_i,\quad S''\Delta^3\Theta'_i,\quad S''\Delta^3\Theta''_i,\quad \dots,$$

et raisonnant sur la formule (107) comme sur les formules (77) et (97), on obtiendrait, non plus les équations (81) et (98), mais la suivante

$$(108)\qquad \begin{cases} \dfrac{\Delta^3\Theta_1}{\Sigma''\Delta^3\Theta_1} = \dfrac{\Delta^3\Theta_2}{\Sigma''\Delta^3\Theta_2} = \dfrac{\Delta^3\Theta_3}{\Sigma''\Delta^3\Theta_3} = \dfrac{\Delta^3\Theta_4}{\Sigma''\Delta^3\Theta_4} \\[2ex] \qquad = \dfrac{\Delta^3\Theta_5}{\Sigma''\Delta^3\Theta_5} = \dfrac{\Delta^3\Theta_6}{\Sigma''\Delta^3\Theta_6} = \dfrac{\Delta^3\Theta_7}{\Sigma''\Delta^3\Theta_7} = \dfrac{S''\Delta^3\Theta_i}{\Sigma''S''\Delta^3\Theta_i}, \end{cases}$$

de laquelle on tirerait

$$(109)\qquad \begin{cases} \Delta^3\Theta_1 = \dfrac{\Sigma''\Delta^3\Theta_1}{\Sigma''S''\Delta^3\Theta_i}\,S''\Delta^3\Theta_i, \\[2ex] \Delta^3\Theta_2 = \dfrac{\Sigma''\Delta^3\Theta_2}{\Sigma''S''\Delta^3\Theta_i}\,S''\Delta^3\Theta_i, \\[1ex] \dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\[1ex] \Delta^3\Theta_7 = \dfrac{\Sigma''\Delta^3\Theta_7}{\Sigma''S''\Delta^3\Theta_i}\,S''\Delta^3\Theta_i. \end{cases}$$

Si l'on peut en réalité réduire la formule (42) à la formule (105), considérer par suite comme égaux les rapports compris dans la formule (97) et attribuer les différences de leurs valeurs réduites en nombres aux erreurs d'observation, alors les valeurs de

$$\Delta^3\Theta_1,\quad \Delta^3\Theta_2,\quad \Delta^3\Theta_3,\quad \Delta^3\Theta_4,\quad \Delta^3\Theta_5,\quad \Delta^3\Theta_6,\quad \Delta^3\Theta_7$$

déterminées par les formules (109) mériteront plus de confiance que les valeurs immédiatement déduites des expériences; et, en posant

$$(110)\qquad \begin{cases} \vartheta_1''' = \dfrac{\Sigma'''\Delta^3\Theta_1}{\Sigma'''S'''\Delta^3\Theta_i}\,S'''\Delta^3\Theta_i, \\ \vartheta_2''' = \dfrac{\Sigma'''\Delta^3\Theta_2}{\Sigma'''S'''\Delta^3\Theta_i}\,S'''\Delta^3\Theta_i, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ \vartheta_7''' = \dfrac{\Sigma'''\Delta^3\Theta_7}{\Sigma'''S'''\Delta^3\Theta_i}\,S'''\Delta^3\Theta_i, \end{cases}$$

puis désignant généralement par

$$\Delta^4\Theta_i$$

la différence

$$\Delta^3\Theta_i - \vartheta_i''',$$

en sorte qu'on eût

$$(111)\qquad \Delta^3\Theta_1 = \vartheta_1''' + \Delta^4\Theta_1,\qquad \Delta^3\Theta_2 = \vartheta_2''' + \Delta^4\Theta_2,\qquad \dots,\qquad \Delta^3\Theta_7 = \vartheta_7''' + \Delta^4\Theta_7,$$

on trouverait pour valeurs des différences

$$\Delta^4\Theta_1,\quad \Delta^4\Theta_2,\quad \dots,\quad \Delta^4\Theta_7$$

des quantités du même ordre que les erreurs d'observation.

En résumé, si l'on veut savoir jusqu'où les expériences permettent de pousser l'approximation, ou, ce qui revient au même, combien de termes doivent renfermer les équations linéaires qui, comme l'équation (42), subsistent entre les quantités

$$\Theta_1,\quad \Theta_2,\quad \Theta_3,\quad \Theta_4,\quad \dots,$$

indépendamment de la nature du milieu réfringent, on calculera, pour

les divers rayons et pour les diverses substances, les valeurs successives de

$$(112)\qquad \Delta\Theta_i,\quad \Delta^2\Theta_i,\quad \Delta^3\Theta_i,\quad \Delta^4\Theta_i,\quad \dots$$

à l'aide des équations

$$(113)\qquad \begin{cases} \Theta_1 = \vartheta_1 + \Delta\,\Theta_1, & \Theta_2 = \vartheta_2 + \Delta\,\Theta_2, & \dots, & \Theta_7 = \vartheta_7 + \Delta\,\Theta_7, \\ \Delta\,\Theta_1 = \vartheta_1' + \Delta^2\Theta_1, & \Delta\,\Theta_2 = \vartheta_2' + \Delta^2\Theta_2, & \dots, & \Delta\,\Theta_7 = \vartheta_7' + \Delta^2\Theta_7, \\ \Delta^2\Theta_1 = \vartheta_1'' + \Delta^3\Theta_1, & \Delta^2\Theta_2 = \vartheta_2'' + \Delta^3\Theta_2, & \dots, & \Delta^2\Theta_7 = \vartheta_7'' + \Delta^3\Theta_7, \\ \Delta^3\Theta_1 = \vartheta_1''' + \Delta^4\Theta_1, & \Delta^3\Theta_2 = \vartheta_2''' + \Delta^4\Theta_2, & \dots, & \Delta^3\Theta_7 = \vartheta_7''' + \Delta^4\Theta_7, \\ \dots\dots\dots\dots, & \dots\dots\dots\dots, & \dots, & \dots\dots\dots\dots, \end{cases}$$

jointes aux formules

$$(114)\qquad \begin{cases} \vartheta_1 = \dfrac{\Sigma\Theta_1}{\Sigma S\Theta_i}\,S\Theta_i, & \vartheta_2 = \dfrac{\Sigma\Theta_2}{\Sigma S\Theta_i}\,S\Theta_i, & \dots, & \vartheta_7 = \dfrac{\Sigma\Theta_7}{\Sigma S\Theta_i}\,S\Theta_i, \\ \vartheta_1' = \dfrac{\Sigma'\Delta\Theta_1}{\Sigma'S'\Delta\Theta_i}\,S'\Delta\Theta_i, & \vartheta_2' = \dfrac{\Sigma'\Delta\Theta_2}{\Sigma'S'\Delta\Theta_i}\,S'\Delta\Theta_i, & \dots, & \vartheta_7' = \dfrac{\Sigma'\Delta\Theta_7}{\Sigma'S'\Delta\Theta_i}\,S'\Delta\Theta_i, \\ \vartheta_1'' = \dfrac{\Sigma''\Delta^2\Theta_1}{\Sigma''S''\Delta^2\Theta_i}\,S''\Delta^2\Theta_i, & \vartheta_2'' = \dfrac{\Sigma''\Delta^2\Theta_2}{\Sigma''S''\Delta^2\Theta_i}\,S''\Delta^2\Theta_i, & \dots, & \vartheta_7'' = \dfrac{\Sigma''\Delta^2\Theta_7}{\Sigma''S''\Delta^2\Theta_i}\,S''\Delta^2\Theta_i, \\ \vartheta_1''' = \dfrac{\Sigma'''\Delta^3\Theta_1}{\Sigma'''S'''\Delta^3\Theta_i}\,S'''\Delta^3\Theta_i, & \vartheta_2''' = \dfrac{\Sigma'''\Delta^3\Theta_2}{\Sigma'''S'''\Delta^3\Theta_i}\,S'''\Delta^3\Theta_i, & \dots, & \vartheta_7''' = \dfrac{\Sigma'''\Delta^3\Theta_7}{\Sigma'''S'''\Delta^3\Theta_i}\,S'''\Delta^3\Theta_i, \\ \dots\dots\dots\dots, & \dots\dots\dots\dots, & \dots, & \dots\dots\dots\dots, \end{cases}$$

dans lesquelles on désigne par

$$S\Theta_i,\quad S'\Delta\Theta_i,\quad S''\Delta^2\Theta_i,\quad S'''\Delta^3\Theta_i,\quad \dots$$

les sommes des valeurs de

$$\Theta_i,\quad \Delta\Theta_i,\quad \Delta^2\Theta_i,\quad \Delta^3\Theta_i,\quad \dots$$

relatives aux divers rayons, mais prises tantôt avec le signe $+$, tantôt avec le signe $-$, de manière à se réduire, du moins pour certaines substances, aux sommes des valeurs numériques, et par

$$\Sigma S\Theta_i,\quad \Sigma'S'\Delta\Theta_i,\quad \Sigma''S''\Delta^2\Theta_i,\quad \Sigma'''S'''\Delta^3\Theta_i,\quad \dots$$

les sommes des valeurs numériques de

$$S\Theta_i,\quad S'\Delta\Theta_i,\quad S''\Delta^2\Theta_i,\quad S'''\Delta^3\Theta_i,\quad \dots$$

relatives aux diverses substances. Il suffira de continuer le calcul des différences représentées par

$$\Delta\Theta_i,\quad \Delta^2\Theta_i,\quad \Delta^3\Theta_i,\quad \Delta^4\Theta_i,\quad \ldots,$$

jusqu'à ce que l'on parvienne à des différences comparables aux erreurs d'observation. On peut d'ailleurs aisément reconnaître la nature de ces erreurs et se former une idée de leur étendue, en comparant entre elles deux à deux les valeurs de Θ_i que fournissent deux séries d'expériences faites sur la même substance, par exemple les deux séries d'expériences faites par Frauenhofer sur l'eau ou sur la troisième espèce de flintglass. Il y a plus : comme on aurait généralement

$$\Theta_i = \vartheta_i,$$

par conséquent

$$\Delta\Theta_i = 0,$$

si l'on pouvait sans erreur sensible réduire le second membre de la formule (9) à son premier terme;

$$\Delta\Theta_i = \vartheta'_i,$$

par conséquent

$$\Delta^2\Theta_i = 0,$$

si l'on pouvait sans erreur sensible réduire le second membre de la formule (9) à ses deux premiers termes, etc., il est clair que les différents termes de la suite

$$\Delta\Theta_i,\quad \Delta^2\Theta_i,\quad \Delta^3\Theta_i,\quad \Delta^4\Theta_i,\quad \ldots$$

seront respectivement comparables aux coefficients

$$b_2,\quad b_3,\quad b_4,\quad b_5,\quad \ldots$$

des quatrième, sixième, huitième, dixième, ... puissances de s dans le second membre de l'équation (9), et qu'en conséquence $\Delta\Theta_i$ sera du même ordre que b_2, $\Delta^2\Theta_i$ du même ordre que b_3, $\Delta^3\Theta_i$ du même ordre que b_4, $\Delta^4\Theta_i$ du même ordre que b_5, etc. Or, si la distance de deux molécules d'éther, assez rapprochées pour exercer l'une sur

l'autre une action sensible, est considérée comme une quantité très petite du premier ordre,

$$a_1 b_2,\quad a_1 b_3,\quad a_1 b_4,\quad a_1 b_5,\quad \ldots$$

seront, en vertu des remarques faites sur la formule (11), des quantités très petites du premier, du second, du troisième, du quatrième, ... ordre. En conséquence, non seulement les coefficients

$$b_2,\quad b_3,\quad b_4,\quad b_5,\quad \ldots,$$

mais aussi les différences des divers ordres, savoir

$$\Delta\Theta_i,\quad \Delta^2\Theta_i,\quad \Delta^3\Theta_i,\quad \Delta^4\Theta_i,\quad \ldots \tag{112}$$

et leurs valeurs approchées, ou les quantités

$$\vartheta'_i,\quad \vartheta''_i,\quad \vartheta'''_i,\quad \vartheta^{\text{iv}}_i,\quad \ldots, \tag{115}$$

déterminées par les équations (114), formeront généralement des suites décroissantes jusqu'au moment où les différences deviendront de même ordre que les erreurs d'observation. Remarquons encore que chacune des quantités (115) obtiendra pour les divers rayons des valeurs diverses qui, en vertu des équations (114), devront toutes garder les mêmes signes, ou toutes à la fois changer de signes, lorsqu'on passera d'une substance à une autre. Or il est clair que les différences

$$\Delta\Theta_i,\quad \Delta^2\Theta_i\quad \Delta^3\Theta_i,\quad \Delta^4\Theta_i,\quad \ldots,$$

dont les quantités dont il s'agit représentent des valeurs approchées, devront généralement satisfaire à la même condition, tant qu'elles ne seront pas devenues assez petites pour être du même ordre que les erreurs d'observation. Enfin les formules (113) et (114) entraineront, comme on l'a déjà remarqué, les équations de condition

$$\left\{\begin{array}{llll} S\vartheta_i = S\Theta_i, & & & \\ S\vartheta'_i = 0, & S'\vartheta'_i = S'\Delta\Theta_i, & & \\ S\vartheta''_i = 0, & S'\vartheta''_i = 0, & S''\vartheta''_i = S''\Delta^2\Theta_i, & \\ S\vartheta'''_i = 0, & S'\vartheta'''_i = 0, & S''\vartheta'''_i = 0, & S'''\vartheta'''_i = S'''\Delta^3\Theta_i, \\ \ldots\ldots, & \ldots\ldots, & \ldots\ldots, & \ldots\ldots\ldots \end{array}\right. \tag{116}$$

et

$$
(117)\quad \left\{
\begin{array}{llll}
\mathrm{S}\Delta\,\Theta_i = 0, & & & \\
\mathrm{S}\Delta^2\Theta_i = 0, & \mathrm{S}'\Delta^2\Theta_i = 0, & & \\
\mathrm{S}\Delta^3\Theta_i = 0, & \mathrm{S}'\Delta^3\Theta_i = 0, & \mathrm{S}''\Delta^3\Theta_i = 0, & \\
\mathrm{S}\Delta^4\Theta_i = 0, & \mathrm{S}'\Delta^4\Theta_i = 0, & \mathrm{S}''\Delta^4\Theta_i = 0, & \mathrm{S}'''\Delta^4\Theta_i = 0, \\
\ldots\ldots\ldots, & \ldots\ldots\ldots, & \ldots\ldots\ldots, & \ldots\ldots\ldots,
\end{array}
\right.
$$

auxquelles on pourra joindre les suivantes que l'on forme de la même manière :

$$
(118)\quad \left\{
\begin{array}{llll}
\Sigma\mathfrak{I}_i = \Sigma\Theta_i, & & & \\
\Sigma\mathfrak{I}'_i = 0, & \Sigma'\mathfrak{I}'_i = \Sigma'\Delta\Theta_i, & & \\
\Sigma\mathfrak{I}''_i = 0, & \Sigma'\mathfrak{I}''_i = 0, & \Sigma''\mathfrak{I}''_i = \Sigma''\Delta^2\Theta_i, & \\
\Sigma\mathfrak{I}'''_i = 0, & \Sigma'\mathfrak{I}'''_i = 0, & \Sigma''\mathfrak{I}'''_i = 0, & \Sigma'''\mathfrak{I}'''_i = \Sigma'''\Delta^3\Theta_i, \\
\ldots\ldots, & \ldots\ldots, & \ldots\ldots, & \ldots\ldots\ldots\ldots
\end{array}
\right.
$$

et

$$
(119)\quad \left\{
\begin{array}{llll}
\Sigma\Delta\,\Theta_i = 0, & & & \\
\Sigma\Delta^2\Theta_i = 0, & \Sigma'\Delta^2\Theta_i = 0, & & \\
\Sigma\Delta^3\Theta_i = 0, & \Sigma'\Delta^3\Theta_i = 0, & \Sigma''\Delta^3\Theta_i = 0, & \\
\Sigma\Delta^4\Theta_i = 0, & \Sigma'\Delta^4\Theta_i = 0, & \Sigma''\Delta^4\Theta_i = 0, & \Sigma'''\Delta^4\Theta_i = 0, \\
\ldots\ldots\ldots, & \ldots\ldots\ldots, & \ldots\ldots\ldots, & \ldots\ldots\ldots
\end{array}
\right.
$$

Si l'on posait, pour abréger,

$$
(120)\quad \left\{
\begin{array}{llll}
\alpha_1 = \dfrac{\Sigma\Theta_1}{\Sigma\mathrm{S}\Theta_i}, & \alpha_2 = \dfrac{\Sigma\Theta_2}{\Sigma\mathrm{S}\Theta_i}, & \ldots, & \alpha_7 = \dfrac{\Sigma\Theta_7}{\Sigma\mathrm{S}\Theta_i}, \\
\beta_1 = \dfrac{\Sigma'\Delta\Theta_1}{\Sigma'\mathrm{S}'\Delta\Theta_i}, & \beta_2 = \dfrac{\Sigma'\Delta\Theta_2}{\Sigma'\mathrm{S}'\Delta\Theta_i}, & \ldots, & \beta_7 = \dfrac{\Sigma'\Delta\Theta_7}{\Sigma'\mathrm{S}'\Delta\Theta_i}, \\
\gamma_1 = \dfrac{\Sigma''\Delta^2\Theta_1}{\Sigma''\mathrm{S}''\Delta^2\Theta_i}, & \gamma_2 = \dfrac{\Sigma''\Delta^2\Theta_2}{\Sigma''\mathrm{S}''\Delta^2\Theta_i}, & \ldots, & \gamma_7 = \dfrac{\Sigma''\Delta^2\Theta_7}{\Sigma''\mathrm{S}''\Delta^2\Theta_i}, \\
\delta_1 = \dfrac{\Sigma'''\Delta^3\Theta_1}{\Sigma'''\mathrm{S}'''\Delta^3\Theta_i}, & \delta_2 = \dfrac{\Sigma'''\Delta^3\Theta_2}{\Sigma'''\mathrm{S}'''\Delta^3\Theta_i}, & \ldots, & \delta_7 = \dfrac{\Sigma'''\Delta^3\Theta_7}{\Sigma'''\mathrm{S}'''\Delta^3\Theta_i}, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots, & \ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots, & \ldots\ldots\ldots\ldots,
\end{array}
\right.
$$

les formules (114) se réduiraient à

$$
(121)\quad \left\{
\begin{array}{llll}
\mathfrak{I}_1 = \alpha_1\mathrm{S}\Theta_i, & \mathfrak{I}_2 = \alpha_2\mathrm{S}\Theta_i, & \ldots, & \mathfrak{I}_7 = \alpha_7\mathrm{S}\Theta_i, \\
\mathfrak{I}'_1 = \beta_1\mathrm{S}'\Delta\Theta_i, & \mathfrak{I}'_2 = \beta_2\mathrm{S}'\Delta\Theta_i, & \ldots, & \mathfrak{I}'_7 = \beta_7\mathrm{S}'\Delta\Theta_i, \\
\mathfrak{I}''_1 = \gamma_1\mathrm{S}''\Delta^2\Theta_i, & \mathfrak{I}''_2 = \gamma_2\mathrm{S}''\Delta^2\Theta_i, & \ldots, & \mathfrak{I}''_7 = \gamma_7\mathrm{S}''\Delta^2\Theta_i, \\
\mathfrak{I}'''_1 = \delta_1\mathrm{S}'''\Delta^3\Theta_i, & \mathfrak{I}'''_2 = \delta_2\mathrm{S}'''\Delta^3\Theta_i, & \ldots, & \mathfrak{I}'''_7 = \delta_7\mathrm{S}'''\Delta^3\Theta_i, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots, & \ldots\ldots\ldots\ldots, & \ldots, & \ldots\ldots\ldots\ldots,
\end{array}
\right.
$$

et l'on tirerait des équations (120), jointes aux équations (117),

$$
(122)\quad \left\{
\begin{array}{llll}
\mathrm{S}\alpha_i = 1, & & & \\
\mathrm{S}\beta_i = 0, & \mathrm{S}'\beta_i = 1, & & \\
\mathrm{S}\gamma_i = 0, & \mathrm{S}'\gamma_i = 0, & \mathrm{S}''\gamma_i = 1, & \\
\mathrm{S}\delta_i = 0, & \mathrm{S}'\delta_i = 0, & \mathrm{S}''\delta_i = 0, & \mathrm{S}'''\delta_i = 1, \\
\ldots\ldots, & \ldots\ldots, & \ldots\ldots, & \ldots\ldots
\end{array}
\right.
$$

Les formules (116), (117), (122) fournissent divers moyens de vérifier l'exactitude des valeurs de

$$\Delta\Theta_i,\ \Delta^2\Theta_i,\ \Delta^3\Theta_i,\ \ldots;\ \mathfrak{I}_i,\ \mathfrak{I}'_i,\ \mathfrak{I}''_i,\ \ldots;\ \alpha_i,\ \beta_i,\ \gamma_i,\ \delta_i,\ \ldots$$

déduites de l'expérience à l'aide des équations (113), (114), (120), (121).

Venons maintenant aux applications numériques des diverses formules ci-dessus établies, et d'abord calculons par logarithmes les carrés des indices de réfraction ou les valeurs de Θ_i pour les rayons

B, C, D, E, F, G, H

de Frauenhofer et pour les diverses substances employées par cet habile observateur. Ces valeurs seront fournies par le Tableau suivant.

TABLEAU VI.

Détermination des valeurs de Θ_i.

	EAU.		SOLUTION de potasse.	HUILE de térébenthine.	CROWNGLASS.			FLINTGLASS.				
	1re série.	2e série.			1re espèce.	2e espèce.	3e espèce.	1re espèce.	2e espèce.	3e espèce, 1re série.	3e espèce, 2e série.	4e espèce.
$L(\theta_1)$	1241568	1241706	1460129	1674640	1830739	1835068	1916673	2046739	2104711	2112713	2112798	2115875
$L(\Theta_1)$	2483136	2483412	2920258	3349280	3661478	3670136	3833346	4093478	4209422	4225426	4225596	4231750
	2921		0123	9159	1427	0016	3306	3413	9289	5406	5570	1639
	215		135	121	51	120	40	65	133	20	26	111
	197		133		37	112	36	51	132	16	16	98
	18		2		14	8	4	14	1	4	10	13
Θ_1	1,771387	1,771500	1,958961	2,162360	2,323527	2,328164	2,417322	2,566538	2,635981	2,645712	2,645816	2,649568
$L(\theta_2)$	1244104	1244093	1462878	1677692	1833551	1837962	1919909	2051502	2109810	2117748	2117795	2121027
$L(\Theta_2)$	2488208	2488186	2925756	3355384	3667102	3675924	3839818	4103004	4219620	4235496	4235590	4242054
	8067	8067	5662	5381	7031	5795	9769	2878	9493	5408	5571	1954
	141	119	94	3	71	129	49	126	127	88	19	100
	123	98	89		56	112	36	118	115	82	16	98
	18	21	5		15	17	13	8	12	6	3	2
Θ_2	1,773457	1,773449	1,961442	2,165402	2,326538	2,331269	2,420927	2,572175	2,642177	2,651854	2,651912	2,655861
$L(\theta_3)$	1250182	1250182	1469974	1686254	1841183	1845743	1928671	2064196	2123435	2131633	2131636	2135274
$L(\Theta_3)$	2500364	2500364	2939948	3372508	3682366	3691486	3857342	4128392	4246870	4263266	4263272	4270548
	0294	0294	9810	2396	2311	1416	7314	8300	6857	3160	3160	0477
	70	70	138	112	55	70	28	92	13	106	112	71
	49	49	133	100		56	18	84		98	98	65
	21	21	5	12		14	10	8		8	14	6
Θ_3	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
$L(\theta_4)$	1257580	1257573	1478716	1697782	1850808	1855436	1940007	2080466	2141432	2149879	2149750	2153796
$L(\Theta_4)$	2515160	2515146	2957432	3395564	3701616	3710872	3880014	4160932	4282864	4299758	4299500	4307592
	4922	4922	7430	5508	1614	0863	79946	0911	2806	9621	9460	7521
	238	224	2	56	2	9	68	21	58	137	40	71
	220	220		40			53	17	49	130	32	65
	18	4		16			15	4	9	7	8	6
Θ_4	1,784497	1,784492	1,975801	2,185528	2,345101	2,350105	2,443438	2,606712	2,680936	2,691384	2,691225	2,696244
$L(\theta_5)$	1263971	1263873	1486280	1707709	1859208	1864060	1949972	2095262	2157608	2166357	2166293	2170257
$L(\Theta_5)$	2527942	2527746	2972560	3415418	3718416	3728120	3899944	4190524	4315216	4332714	4332586	4340514
	7802	7560	2351	5334	8249	8016	9807	0466	5085	2577	2577	0417
	140	186	209	84	167	104	137	58	131	137	9	97
	122	170	197	79		92	124	50	129	128		96
	18	16	12	5		12	13	8	2	9		1
Θ_5	1,789757	1,789677	1,982695	2,195543	2,354190	2,359457	2,454677	2,624535	2,700981	2,711886	2,711806	2,716761
$L(\theta_6)$	1275238	1275133	1500129	1726608	1874948	1879878	1968764	2123933	2189046	2198069	2198066	2201827
$L(\Theta_6)$	2550476	2550266	3000258	3453216	3749896	3759756	3937528	4247866	4378092	4396138	4396132	4403654
	0312	0070	0082	3149	9865	9744	7506	7837	7981	6011	6011	3580
	164	196	176	67	31	12	22	29	111	127	121	74
	145	194	174	59	18		18	16		126	111	63
	19	2	2	8	13		4	13		1	10	11
Θ_6	1,799068	1,798981	1,995381	2,214734	2,371317	2,376707	2,476012	2,659418	2,740370	2,751781	2,751776	2,756547
$L(\theta_7)$	1284566	1284517	1511762	1743141	1888397	1893685	1985114	2149427	2216938	2226333	2226349	2229926
$L(\Theta_7)$	2569132	2569034	3023524	3586282	3776794	3787370	3970228	4298854	4433876	4452666	4452698	4459852
	9101	8860	3309	6164	6704	7249	0183	8814	3725	2616	2616	9776
	31	174	215	118	90	121	45	40	151	50	82	76
	24	169	195	117	73	109	35	32	141	47	78	62
	7	5	20	1	17	12	10	8	10	3	4	14
Θ_7	1,806813	1,806772	2,006099	2,231661	2,386049	2,391867	2,494726	2,690825	2,775796	2,787832	2,787853	2,792449

En comparant entre elles deux à deux les valeurs de Θ_i qui, dans le Tableau précédent, répondent aux deux séries d'expériences faites sur l'eau et sur la troisième espèce de flintglass, on obtient les variations suivantes :

TABLEAU VII.

Variations de Θ_i dans le passage d'une série d'expériences à une autre.

	$i=1.$	$i=2.$	$i=3.$	$i=4.$	$i=5.$	$i=6.$	$i=7.$
Θ_i. Eau { 1re série......	1,771387	1,773457	1,778429	1,784497	1,789757	1,799068	1,806813
{ 2e série......	1,771500	1,773449	1,778429	1,784492	1,789677	1,798981	1,806772
Variations de Θ_i...	0,000113	−0,000008	0,000000	−0,000005	−0,000080	−0,000087	−0,000041
Θ_i. { Flintglass. { 1re série.	2,645712	2,651854	2,668865	2,691384	2,711886	2,751781	2,787832
{ 3e espèce. { 2e série.	2,645816	2,651912	2,668869	2,691225	2,711806	2,751776	2,787853
Variations de Θ_i...	0,000104	0,000058	0,000004	−0,000159	−0,000080	−0,000005	0,000021

Ainsi les valeurs de Θ_i, déduites des expériences de Frauenhofer, admettent des erreurs comparables aux nombres 0,000113, 0,000159 renfermés dans les quatrième et septième lignes horizontales du Tableau VII; et, dans l'application des formules (113), (114), on doit continuer le calcul jusqu'à ce que l'on obtienne des différences comparables à ces mêmes nombres. D'ailleurs, on déduira sans peine du Tableau VI les sommes représentées dans les formules (114) par $S\Theta_i$, $\Sigma\Theta_i$ et $\Sigma S\Theta_i$, les diverses valeurs du rapport

$$\frac{S\Theta_i}{\Sigma S\Theta_i}$$

relatives aux diverses substances et les logarithmes de ces valeurs. La détermination de ces quantités est l'objet du Tableau suivant qui donne, en outre, pour chaque substance, la moyenne arithmétique entre les diverses valeurs de Θ_i, c'est-à-dire la valeur de la quantité Θ déterminée par l'équation

$$\Theta = \tfrac{1}{7} S\Theta_i = \frac{\Theta_1 + \Theta_2 + \Theta_3 + \Theta_4 + \Theta_5 + \Theta_6 + \Theta_7}{7}. \quad (123)$$

TABLEAU VIII.

Valeurs de $S\Theta_i$, $\Sigma\Theta_i$, $\Sigma S\Theta_i$, $\frac{S\Theta_i}{\Sigma S\Theta_i}$ et Θ.

	EAU.		SOLUTION de potasse.	HUILE de térében-thine.	CHOWNGLASS.			FLINTGLASS.					SOMMES.	
	1re série.	2e série.			1re espèce.	2e espèce.	3e espèce.	1re espèce.	2e espèce.	3e espèce, 1re série.	3e espèce, 2e série.	4e espèce.		
Θ_1....	1,771387	1,771500	1,958961	2,162360	2,323527	2,328164	2,417322	2,566538	2,635981	2,645712	2,645816	2,649568	$\Sigma\Theta_1$...	27,876836
Θ_2....	1,773457	1,773449	1,961442	2,165402	2,326538	2,331269	2,420927	2,572175	2,642177	2,651854	2,651912	2,655861	$\Sigma\Theta_2$...	27,926463
Θ_3....	1,778429	1,778429	1,967862	2,173955	2,334730	2,339637	2,430716	2,587255	2,658808	2,668865	2,668869	2,673344	$\Sigma\Theta_3$...	28,060899
Θ_4....	1,784497	1,784492	1,975801	2,185528	2,345101	2,350105	2,443438	2,606712	2,680936	2,691384	2,691225	2,696244	$\Sigma\Theta_4$...	28,235463
Θ_5....	1,789757	1,789677	1,982695	2,195543	2,354190	2,359457	2,454677	2,624535	2,700981	2,711886	2,711806	2,716761	$\Sigma\Theta_5$...	28,391965
Θ_6....	1,799068	1,798981	1,995381	2,214734	2,371317	2,376707	2,476012	2,659418	2,740370	2,751781	2,751776	2,756547	$\Sigma\Theta_6$...	28,692092
Θ_7....	1,806813	1,806772	2,006099	2,231661	2,386049	2,391867	2,494726	2,690825	2,775796	2,787832	2,787853	2,792449	$\Sigma\Theta_7$...	28,958742
$S\Theta_i$.....	12,503408	12,503300	13,848241	15,329183	16,441452	16,477206	17,137818	18,307458	18,835049	18,909314	18,909257	18,940774	$\Sigma S\Theta_i$..	198,142460
	0970142	0970142	1413871	1855138	2159282	2168781	2339348	2626172	2749656	2766686	2766686	2773800		2969722
	139	104	63	28	106	53	203	95	9	69	46	161		44
	3		13	23	13	2	3	12	2	2	11	16		9
				1	1		2	2		1	2	1		1
$L(S\Theta_i)$..	0970284	0970246	1413947	1855190	2159402	2168836	2339556	2626281	2749667	2766758	2766745	2773978	$L(\Sigma S\Theta_i)$.	2969776
$L(\Sigma S\Theta_i)$.	2969776	2969776	2969776	2969776	2969776	2969776	2969776	2969776	2969776	2969776	2969776	2969776		
Diff...	8000508	8000470	8444171	8885414	9189626	9199060	9369780	9656505	9779891	9796982	9796969	9804202	Sommes.	
$\frac{S\Theta_i}{\Sigma S\Theta_i}$...	0,063103	0,063102	0,069890	0,077364	0,082978	0,083158	0,086492	0,092395	0,095058	0,095433	0,095433	0,095592		0,999998
Θ.......	1,786201	1,786186	1,978320	2,189883	2,348779	2,353887	2,448260	2,615351	2,690721	2,701331	2,701322	2,705825	$\Sigma\Theta$....	28,306066
														4518785
														9
														1
													$L(\Sigma\Theta)$.	4518795

Diverses conditions, que remplissent, comme on devait s'y attendre, les nombres obtenus dans ce Tableau, servent à prouver l'exactitude de nos calculs. Ces conditions se trouvent comprises dans les trois formules

$$\Sigma S\Theta_i = S\Sigma\Theta_i = 198,142460, \qquad \Sigma\frac{S\Theta_i}{\Sigma S\Theta_i} = 1,$$

$$\Sigma\Theta = \tfrac{1}{7}\Sigma S\Theta_i = \frac{198,142460}{7} = 28,30606.$$

On ne doit pas s'inquiéter de la différence 0,000002 entre le second membre 1 de la deuxième formule et le nombre 0,999998 placé à la fin de la ligne horizontale qui renferme les valeurs de $\frac{S\Theta_i}{\Sigma S\Theta_i}$, l'omission de la septième décimale dans chacune de ces valeurs suffisant pour produire dans leur somme une erreur égale à la différence dont il s'agit. En partant du Tableau VIII, on pourra déterminer par logarithmes les valeurs approchées de Θ_1, Θ_2, ..., que nous avons représentées par ϑ_1, ϑ_2, ... dans les formules (113), (114), desquelles on tire généralement, en ayant égard à la formule (123),

$$\vartheta_i = \frac{\Theta}{\Sigma\Theta}\Sigma\Theta_i \tag{124}$$

ou, ce qui revient au même,

$$\vartheta_i = \Theta + \frac{\Theta}{\Sigma\Theta}(\Sigma\Theta_i - \Sigma\Theta). \tag{125}$$

Or, la différence $\Sigma\Theta_i - \Sigma\Theta$ étant généralement beaucoup plus petite que $\Sigma\Theta_i$, il y aura quelque avantage à remplacer la formule (124) par la formule (125) et à calculer, au lieu du produit

$$\frac{\Theta}{\Sigma\Theta}\Sigma\Theta_i, \tag{126}$$

le produit plus petit

$$\frac{\Theta}{\Sigma\Theta}(\Sigma\Theta_i - \Sigma\Theta), \tag{127}$$

attendu que de ces deux produits le premier contiendra aussi bien que Θ_i sept chiffres significatifs, et le second cinq seulement, l'approximation étant poussée jusqu'au chiffre décimal qui exprime des millionièmes. D'ailleurs, dans le produit (126), le facteur

$$\frac{\Theta}{\Sigma\Theta} = \frac{S\Theta_i}{\Sigma S\Theta_i} \tag{128}$$

et son logarithme sont immédiatement donnés pour chaque substance par le Tableau VIII, et, quant au facteur $\Sigma\Theta_i - \Sigma\Theta$, on en déterminera sans peine les diverses valeurs avec leurs logarithmes, à l'aide de ce même Tableau, en opérant comme il suit.

Tableau IX.

Détermination des valeurs de $\Sigma\Theta_i - \Sigma\Theta$.

Valeurs de i.	$i=1$.	$i=2$.	$i=3$.	$i=4$.	$i=5$.	$i=6$.	$i=7$.	Sommes.
$\Sigma\Theta_i$	27,876836	27,926463	28,060899	28,235463	28,391965	28,692092	28,958742	198,142460
$\Sigma\Theta$	28,306066	28,306066	28,306066	28,306066	28,306066	28,306066	28,306066	198,142462
$\Sigma\Theta_i - \Sigma\Theta$	-0,429230	-0,379603	-0,245167	-0,070603	0,085899	0,386026	0,652676	- 0,000002
	6326901	5793262 34	9894496 125	8488232	9339881	5866098 68	8146937 40	
$L[\mp(\Sigma\Theta_i - \Sigma\Theta)]$	6326901	5793962	3894621	8488232	9339881	5866166	8146977	
$L(\Sigma\Theta)$	4518795	4518795	4518795	4518795	4518795	4518795	4518795	
Différence...	1808106	1274501	9375826	3969437	4821086	1347371	3628182	
$\frac{\Sigma\Theta_i}{\Sigma\Theta} - 1$	-0,015164	-0,013411	-0,008661	-0,002494	0,003035	0,013638	0,023058	0,000001
$\frac{\Sigma\Theta_i}{\Sigma\Theta}$	0,984836	0,986589	0,991339	0,997506	1,003035	1,013638	1,023058	7,000001
$\alpha_i = \frac{1}{7}\frac{\Sigma\Theta_i}{\Sigma\Theta} = \frac{\Sigma\Theta_i}{\Sigma S\Theta_i}$.	0,140691	0,140941	0,141620	0,142501	0,143291	0,144805	0,146151	1,000000

Aux diverses valeurs de $\Sigma\Theta_i - \Sigma\Theta$ nous avons joint ici celles des rapports $\frac{\Sigma\Theta_i}{\Sigma\Theta}$ et $\frac{\Sigma\Theta_i}{\Sigma S\Theta_i} = \alpha_i$, qui servent à prouver la justesse de nos calculs, attendu qu'elles doivent vérifier et vérifient, en effet, avec une exactitude suffisante, les deux conditions

$$S\frac{\Sigma\Theta_i}{\Sigma\Theta} = 7 \quad \text{et} \quad \Sigma\frac{\Sigma\Theta_i}{\Sigma S\Theta_i} = 1 \quad \text{ou} \quad S\alpha_i = 1.$$

Observons d'ailleurs qu'il suffirait de multiplier les diverses valeurs du rapport $\frac{\Sigma\Theta_i}{\Sigma S\Theta_i}$ prises dans le Tableau IX par les diverses valeurs de $S\Theta_i$ prises dans le Tableau VIII pour obtenir les quantités ϑ_1, ϑ_2, ... En déterminant ces mêmes quantités à l'aide de la formule (125), on obtiendra les résultats que renferme le Tableau suivant.

TABLEAU X.

Valeurs de $\mathfrak{I}_i$.

	EAU. 1re série.	EAU. 2e série.	SOLUTION de potasse.	HUILE de térébenthine.	CROWNGLASS. 1re espèce.	CROWNGLASS. 2e espèce.	CROWNGLASS. 3e espèce.	FLINTGLASS. 1re espèce.	FLINTGLASS. 2e espèce.	FLINTGLASS. 3e espèce, 1re série.	FLINTGLASS. 3e espèce, 2e série.	FLINTGLASS. 4e espèce.	SOMMES.
$L\left(\frac{\theta}{\Sigma\theta}\right)$	8000508	8000470	8444171	8885414	9189626	9199060	9369780	9656505	9779891	9796982	9796969	9804202	
$L(\Sigma\theta - \Sigma\theta_1)$...	6326901	6326901	6326901	6326901	6326901	6326901	6326901	6326901	6326901	6326901	6326901	6326901	
Somme...	4327409	4327371	4771072	5212315	5516527	5525961	5696681	5983406	6106792	6123883	6123870	6131103	
$\frac{\theta}{\Sigma\theta}(\Sigma\theta_1 - \Sigma\theta)$.	-0,027086	-0,027086	-0,029999	-0,033207	-0,035617	-0,035694	-0,037125	-0,039659	-0,040802	-0,040963	-0,040963	-0,041031	-0,429232
θ	1,786201	1,786186	1,978320	2,189883	2,348779	2,353887	2,448260	2,615351	2,690721	2,701331	2,701322	2,705825	28,306066
$\mathfrak{I}_1$.......	1,759115	1,759100	1,948321	2,156676	2,313162	2,318193	2,411135	2,575692	2,649919	2,660368	2,660359	2,664794	27,876834
$L\left(\frac{\theta}{\Sigma\theta}\right)$	8000508	8000470	8444171	8885414	9189626	9199060	9369780	9656505	9779891	9796982	9796969	9804202	
$L(\Sigma\theta - \Sigma\theta_2)$...	5793296	5793296	5793296	5793296	5793296	5793296	5793296	5793296	5793296	5793296	5793296	5793296	
Somme...	3793804	3793766	4237467	4678710	4982922	4992356	5163076	5449801	5573187	5590278	5590265	5597498	
$\frac{\theta}{\Sigma\theta}(\Sigma\theta_2 - \Sigma\theta)$.	-0,023954	-0,023954	-0,026531	-0,029368	-0,031499	-0,031567	-0,032833	-0,035074	-0,036084	-0,036227	-0,036227	-0,036287	-0,379605
θ	1,786201	1,786186	1,978320	2,189883	2,348779	2,353887	2,448260	2,615351	2,690721	2,701331	2,701322	2,705825	28,306066
$\mathfrak{I}_2$.......	1,762247	1,762232	1,951789	2,160515	2,317280	2,322320	2,415427	2,580277	2,654637	2,665104	2,665095	2,669538	27,926461
$L\left(\frac{\theta}{\Sigma\theta}\right)$	8000508	8000470	8444171	8885414	9189626	9199060	9369780	9656505	9779891	9796982	9796969	9804202	
$L(\Sigma\theta - \Sigma\theta_3)$...	3894621	3894621	3894621	3894621	3894621	3894621	3894621	3894621	3894621	3894621	3894621	3894621	
Somme...	1895129	1895091	2338792	2780035	3084047	3093681	3264401	3551126	3674512	3691603	3691590	3698823	
$\frac{\theta}{\Sigma\theta}(\Sigma\theta_3 - \Sigma\theta)$.	-0,015471	-0,015471	-0,017135	-0,018967	-0,020343	-0,020388	-0,021205	-0,022652	-0,023305	-0,023397	-0,023397	-0,023436	-0,245167
θ	1,786201	1,786186	1,978320	2,189883	2,348779	2,353887	2,448260	2,615351	2,690721	2,701331	2,701322	2,705825	28,306066
$\mathfrak{I}_3$.......	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
$L\left(\frac{\theta}{\Sigma\theta}\right)$	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	
$L(\Sigma\theta - \Sigma\theta_4)$...	8488232	8488232	8488232	8488232	8488232	8488232	8488232	8488232	8488232	8488232	8488232	8488232	
Somme...	6488740	6488702	6932403	7373646	7677858	7687292	7858012	8144737	8268123	8285214	8285201	8292434	
$\frac{\theta}{\Sigma\theta}(\Sigma\theta_4 - \Sigma\theta)$.	-0,004455	-0,004455	-0,004934	-0,005462	-0,005858	-0,005871	-0,006107	-0,006523	-0,006711	-0,006738	-0,006738	-0,006749	-0,070601
θ	1,786201	1,786186	1,978320	2,189883	2,348779	2,353887	2,448260	2,615351	2,690721	2,701331	2,701322	2,705825	28,306066
$\mathfrak{I}_4$.......	1,781746	1,781731	1,973386	2,184421	2,342921	2,348016	2,442153	2,608828	2,684010	2,694593	2,694584	2,699079	28,235465
$L\left(\frac{\theta}{\Sigma\theta}\right)$	8000508	8000470	8444171	8885414	9189626	9199060	9369780	9656505	9779891	9796982	9796969	9804202	
$L(\Sigma\theta - \Sigma\theta_5)$...	9339881	9339881	9339881	9339881	9339881	9339881	9339881	9339881	9339881	9339881	9339881	9339881	
Somme...	7340389	7340351	7784052	8225295	8529507	8538941	8709661	8996386	9119772	9136863	9136850	9144083	
$\frac{\theta}{\Sigma\theta}(\Sigma\theta_5 - \Sigma\theta)$.	0,005420	0,005420	0,006004	0,006646	0,007128	0,007143	0,007430	0,007937	0,008165	0,008198	0,008198	0,008211	0,085900
θ	1,786201	1,786186	1,978320	2,489883	2,348779	2,353887	2,448260	2,615351	2,690721	2,701331	2,701322	2,705825	28,306066
$\mathfrak{I}_5$.......	1,791621	1,791606	1,984324	2,196529	2,355907	2,361030	2,455690	2,623288	2,698886	2,709529	2,709520	2,714036	28,391966
$L\left(\frac{\theta}{\Sigma\theta}\right)$	8000508	8000470	8444171	8885414	9189626	9199060	9369780	9656505	9779891	9796982	9796969	9804202	
$L(\Sigma\theta - \Sigma\theta_6)$..	5866166	5866166	5866166	5866166	5866166	5866166	5866166	5866166	5866166	5866166	5866166	5866166	
Somme...	3866674	3866636	4310337	4751580	5055792	5065226	5235946	5522671	5646057	5663148	5663135	5670368	
$\frac{\theta}{\Sigma\theta}(\Sigma\theta_6 - \Sigma\theta)$.	0,024359	0,024359	0,026979	0,029865	0,032032	0,032101	0,033388	0,035667	0,036695	0,036840	0,036840	0,036901	0,386026
θ	1,786201	1,786186	1,978320	2,189883	2,348779	2,353887	2,448260	2,615351	2,690721	2,701331	2,701322	2,705825	28,306066
$\mathfrak{I}_6$.......	1,810560	1,810545	2,005299	2,219748	2,380811	2,385988	2,481648	2,651018	2,727416	2,738171	2,738162	2,742726	28,692092
$L\left(\frac{\theta}{\Sigma\theta}\right)$	8000508	8000470	8444171	8885414	9189626	9199060	9369780	9656505	9779891	9796982	9796969	9804202	
$L(\Sigma\theta - \Sigma\theta_7)$...	8146977	8146977	8146977	8146977	8146977	8146977	8146977	8146977	8146977	8146977	8146977	8146977	
Somme...	6147485	6147447	6591148	7032391	7336603	7346037	7516757	7803472	7926868	7943959	7943946	7951179	
$\frac{\theta}{\Sigma\theta}(\Sigma\theta_7 - \Sigma\theta)$.	0,041186	0,041186	0,045616	0,050494	0,054158	0,054275	0,056452	0,060304	0,062042	0,062287	0,062287	0,062390	0,652677
θ	1,786201	1,786186	1,978320	2,189883	2,348779	2,353887	2,448260	2,615351	2,690721	2,701331	2,701322	2,705825	28,306066
$\mathfrak{I}_7$.......	1,827387	1,827372	2,023936	2,240377	2,402937	2,408162	2,504712	2,675655	2,752763	2,763618	2,763609	2,768215	28,958743

Si l'on retranche les valeurs précédentes de ϑ_1, ϑ_2, ... des valeurs de Θ_1, Θ_2, ... fournies par le Tableau VI, on obtiendra pour restes les diverses valeurs de $\Delta\Theta_i$ que nous allons présenter.

Tableau XI.

Détermination des valeurs de $\Delta\Theta_i$.

	EAU.		SOLUTION de potasse.	HUILE de térébenthine.	CROWNGLASS.			FLINTGLASS.					SOMMES.
	1re série.	2e série.			1re espèce.	2e espèce.	3e espèce.	1re espèce.	2e espèce.	3e espèce, 1re série.	3e espèce, 2e série.	4e espèce.	
ϑ_1..	1,759115	1,759100	1,948321	2,156676	2,313162	2,318193	2,411135	2,575692	2,649919	2,660368	2,660359	2,664794	27,876834
Θ_1..	1,771386	1,771500	1,958961	2,162360	2,323527	2,328164	2.417322	2,566538	2,635981	2,645712	2,645816	2,649568	27,876836
$\Delta\Theta_1$.	0,012272	0,012400	0,010640	0,005684	0,010365	0,009971	0,006187	-0,009154	-0,013938	-0,014656	-0,014543	-0,015226	0,000002
ϑ_2..	1,762247	1,762232	1,951789	2,160515	2,317280	2,422320	2,415427	2,580277	2,654637	2,665104	2,665095	2,669538	27,926461
Θ_2..	1,773457	1,773449	1,961442	2,165402	2,326538	2,331269	2,420927	2,572175	2.642177	2,651854	2,651912	2,655861	27,926463
$\Delta\Theta_2$.	0,011210	0,011217	0,009653	0,004887	0,009258	0,008949	0,005500	-0,008102	-0,012460	-0,013250	-0,013183	-0,013677	0,000002
ϑ_3..	1,770730	1,770715	1,961185	2,170916	2,328436	2,333499	2,427055	2,592699	2,667416	2,677934	2,677925	2,682389	28,060899
Θ^3..	1,778429	1,778429	1,967862	2,173955	2,334730	2,339637	2,430716	2,587255	2,658808	2,668865	2,668869	2,673344	28,060899
$\Delta\Theta_3$.	0,007699	0,007714	0,006677	0,003039	0,006294	0,006138	0,003661	-0,005444	0,008608	-0,009069	-0,009056	-0,009045	0,000000
ϑ_4..	1,781746	1,781731	1,973386	2,184421	2,342921	2,348016	2,442153	2,608828	2,684010	2,694593	2,694584	2,699076	28,235465
Θ_4..	1,784497	1,784492	1.675801	2,185528	2,345101	2.350105	2,443438	2,606712	2,680936	2,691384	2,691225	2,696244	28,235463
$\Delta\Theta_4$.	0,002751	0,002761	0,002415	0,001107	0,002180	0,002089	0,001285	-0,002116	-0,003074	-0,003209	-0,003359	-0,002832	-0,000002
ϑ_5..	1,701621	1,791606	1,984324	2,196529	2,355907	2,361030	2,455690	2,623288	2,698886	2,709529	2,709520	2,714036	28,391966
Θ_5..	1,789757	1,789677	1,982695	2,195543	2,354190	2,359457	2,454677	2,624535	2,700981	2,711886	2,711806	2,716761	28,391965
$\Delta\Theta_5$.	-0,001864	-0,001929	-0,001629	-0,000986	-0,001717	-0,001573	-0,001013	0,001247	0,002095	0,002357	0,002286	0,002725	-0,000001
ϑ_6..	1,810560	1,810545	2,005299	2,219748	2,380811	2,385988	2,481648	2,651018	2,727416	2,738171	2,738162	2,742726	28,692092
Θ_4..	1,799068	1,798981	1,995381	2,214734	2,371317	2,376707	2,476012	2,659418	2,740370	2,751781	2,751776	2,756547	28,692092
$\Delta\Theta_6$.	-0,011492	-0,011564	-0,009918	-0,005014	-0,009494	-0,009281	-0,005636	0,008400	0,012954	0,013610	0,013614	0,013821	0,000000
ϑ_7..	1,827387	1,827372	2,023936	2,240377	2,402937	2,408162	2,504712	2,675655	2,752763	2,763618	2,763609	2,768215	28,958743
Θ_7..	1,806813	1,806772	2,006099	2,231661	2,386049	2,391867	2,494726	2,690825	2,775796	2,787832	2,787853	2,792449	28,958742
$\Delta\Theta_7$.	-0,020574	-0,020600	-0,017837	-0,008716	-0,016888	-0,016295	-0,009986	0,015170	0,023033	0,024214	0,024244	0,024234	0,000001

Les nombres compris dans la dernière colonne verticale du Tableau XI servent à prouver la justesse de nos calculs; car ces nombres, qui représentent les diverses valeurs de

$$\Sigma\vartheta_i,\quad \Sigma\Theta_i,\quad \Sigma\Delta\Theta_i,$$

vérifient avec une exactitude suffisante les équations

$$\begin{array}{llll} \Sigma\vartheta_1 = \Sigma\Theta_1, & \Sigma\vartheta_2 = \Sigma\Theta_2, & \ldots, & \Sigma\vartheta_7 = \Sigma\Theta_7, \\ \Sigma\Delta\Theta_1 = 0, & \Sigma\Delta\Theta_2 = 0, & \ldots, & \Sigma\Delta\Theta_7 = 0, \end{array}$$

que l'on déduit immédiatement des formules (114) et (113).

Les valeurs de $\Delta\Theta_i$, que fournit le Tableau XI, étant, abstraction faite des signes, bien supérieures aux variations de Θ_i renfermées dans les quatrième et septième lignes horizontales du Tableau VII, il en résulte qu'on ne peut, sans erreur sensible, réduire les seconds membres des formules (1) et (9) à leurs premiers termes et la formule (42) à la formule (56). Au reste, nous avions déjà pressenti ce résultat, en nous fondant sur cette seule considération que, s'il en était autrement, la dispersion se trouverait anéantie.

En partant du Tableau XI, on déterminera sans peine, à l'aide des formules (120), (121) et (113), les diverses valeurs de $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_7$, $\vartheta'_1, \vartheta'_2, \ldots, \vartheta'_7$; $\Delta'\Theta_1, \Delta'\Theta_2, \ldots, \Delta'\Theta_7$. Alors $S'\Delta\Theta_i$ désignera la somme des valeurs numériques de $\Delta\Theta_i$ relatives aux divers rayons, mais seulement à l'une des substances, à l'eau par exemple, de sorte qu'on aura

$$(129)\qquad S'\Delta\Theta_i = \Delta\Theta_1 + \Delta\Theta_2 + \Delta\Theta_3 + \Delta\Theta_4 - \Delta\Theta_5 - \Delta\Theta_6 - \Delta\Theta_7,$$

et $\Sigma' S'\Delta\Theta_i$ représentera la somme des valeurs numériques de $S'\Delta\Theta_i$, c'est-à-dire évidemment la somme des valeurs de $\Delta\Theta_i$ prises avec le signe $-$ lorsqu'elles se rapportent à l'une des espèces de flintglass, et avec le signe $+$ dans le cas contraire. Cela posé, on déduira des formules (120), (121) et (113) les résultats compris dans les Tableaux suivants.

TABLEAU XII.

Valeurs de $S'\Delta\theta_i$, $\Sigma'\Delta\theta_i$, $\Sigma'S'\Delta\theta_i$ *et* β_i.

	$\Delta\theta_1$.	$\Delta\theta_2$.	$\Delta\theta_3$.	$\Delta\theta_4$.	$\Delta\theta_5$.	$\Delta\theta_6$.	$\Delta\theta_7$.	$\Delta\theta_1+\Delta\theta_2+\Delta\theta_3+\Delta\theta_4$.	$\Delta\theta_5+\Delta\theta_6+\Delta\theta_7$.	$S\,\Delta\theta_i$.	$S'\Delta\theta_i$.	$L(S'\Delta\theta_i)$.
Eau. 1re série	0,012272	0,011210	0,007699	0,002751	−0,001864	−0,011492	−0,020574	0,033932	−0,033930	0,000002	0,067862	8316267
Eau. 2e série	0,012400	0,011217	0,007714	0,002761	−0,001929	−0,011564	−0,020600	0,034092	−0,034093	−0,000001	0,068185	8336888
Solution de potasse	0,010640	0,009653	0,006677	0,002415	−0,001629	−0,009918	−0,017837	0,029385	−0,029384	0,000001	0,058769	7691483
Huile de térébenthine	0,005684	0,004887	0,003039	0,001107	−0,000986	−0,005014	−0,008716	0,014717	−0,014716	0,000001	0,029433	4638345
Crownglass. 1re espèce	0,010365	0,009258	0,006294	0,002180	−0,001717	−0,009494	−0,016888	0,028097	−0,028099	−0,000002	0,056196	7497054
Crownglass. 2e espèce	0,009971	0,008949	0,006138	0,002089	−0,001573	−0,009281	−0,016295	0,027147	−0,027149	−0,000002	0,054296	7347678
Crownglass. 3e espèce	0,006187	0,005500	0,003661	0,001285	−0,001013	−0,005636	−0,009986	0,016633	−0,016635	−0,000002	0,033268	5220267
Flintglass. 1re espèce	−0,009154	−0,008102	−0,005444	−0,002116	0,001247	0,008400	0,015170	−0,024816	0,024817	0,000001	−0,049633	6957705
Flintglass. 2e espèce	−0,013938	−0,012460	−0,008608	−0,003074	0,002095	0,012954	0,023033	−0,038080	0,038082	0,000002	−0,076162	8817383
Flintglass. 3e espèce, 1re série	−0,014656	−0,013250	−0,009069	−0,003209	0,002357	0,013610	0,024214	−0,040184	0,040181	−0,000003	−0,080365	9050669
Flintglass. 3e espèce, 2e série	−0,014543	−0,013183	−0,009056	−0,003359	0,002286	0,013614	0,024244	−0,040141	0,040144	0,000003	−0,080285	9046344
Flintglass. 4e espèce	−0,015226	−0,013677	−0,009045	−0,002832	0,002725	0,013821	0,024234	−0,040780	0,040780	0,000000	−0,081560	9114772
Sommes. Eau, crowngl.	0,067519	0,060674	0,041222	σ,014588	−0,010711	−0,062399	−0,110896				0,368009	
Sommes. Flintglass	−0,067517	−0,060672	−0,041222	−0,014590	0,010710	0,062399	0,110895				−0,368005	
$\Sigma\,\Delta\theta_i$	0,000002	0,000002	0,000000	−0,000002	−0,000001	0,000000	−0,000001			$\Sigma S'\Delta\theta_i$	0,000004	
$\Sigma'\Delta\theta_i$	0,135036	0,121346	−0,082444	0,029178	−0,021421	−0,124798	−0,221791			$\Sigma'S'\Delta\theta_i$	0,736014	
	1304303 194	0840040 215	9161591	4650555	3308397	0961798 279	3459420 20				8668837 24	
$L(\pm\Sigma'\Delta\theta_i)$	1304497	0840255	9161591	4650555	3308397	0962077	3459440				8668861	
$L(\Sigma'S'\Delta\theta_i)$	8668861	8668861	8668861	8668861	8668861	8668861	8668861					
$L(\beta_i)$	2635636 5414 222	2171394 1153 241	0492730 2568 162	5981694 1665 29	4639536 9527 9	2293216 2978 238	4790579 0568 11	$\beta_1+\beta_2+\beta_3+\beta_4$	$\beta_5+\beta_6+\beta_7$	$S\beta_i$	$S'\beta_i$	
β_i	0,183469	0,164869	0,112014	0,039643	−0,029104	−0,169559	−0,301341	0,499995	−0,500004	−0,000009	0,999999	

Comme on devait s'y attendre, les nombres obtenus dans le Tableau XII vérifient rigoureusement les deux conditions

$$S\Sigma\Delta\theta_i = \Sigma S\Delta\theta_i, \qquad S'\Sigma'\Delta\theta_i = \Sigma'S'\Delta\theta_i,$$

et, avec une exactitude suffisante, celles que comprennent les formules

$$S\Delta\theta_i = 0, \quad \Sigma\Delta\theta_i = 0, \quad S'\Sigma\Delta\theta_i = \Sigma S'\Delta\theta_i = 0, \quad S\beta_i = 0, \quad S'\beta_i = 1,$$

ce qui prouve la justesse de nos calculs.

TABLEAU XIII.

Valeurs de $\mathfrak{S}'_i$ et de $\Delta^2\theta_i$ exprimées en millionièmes.

	EAU. 1re série.	EAU. 2e série.	SOLUTION de potasse.	HUILE de térébenthine.	CROWNGLASS. 1re espèce.	CROWNGLASS. 2e espèce.	CROWNGLASS. 3e espèce.	FLINTGLASS. 1re espèce.	FLINTGLASS. 2e espèce.	FLINTGLASS. 3e espèce, 1re série.	FLINTGLASS. 3e espèce, 2e série.	FLINTGLASS. 4e espèce.	SOMMES.
$L(S'\Delta\theta_i)$	8316267	8336888	7691483	4688345	7497054	7347678	5220267	6957705	8817383	9050669	9046344	9114772	
$L(\beta_1)$	2635636	2635636	2635636	2635636	2635636	2635636	2635636	2635636	2635636	2635636	2635636	2635636	
$L(\pm\mathfrak{S}'_1)$	0951903	0972524	0327119	7323981	0132690	9983314	7855903	9593341	1453019	1686305	1681980	1750408	
$\mathfrak{S}'_1$	12451	12510	10782	5400	10310	9962	6104	—9106	—13973	—14745	—14730	—14964	0,000001
$\Delta\theta_1$	12272	12400	10640	5684	10365	9971	6187	—9154	—13938	—14656	—14543	—15226	0,000002
$\Delta^2\theta_1$	—179	—110	—142	284	55	9	83	—48	35	89	187	—262	0,000001
$L(S'\Delta\theta_i)$	8316267	8336888	7691483	4688345	7497054	7347678	5220267	6957705	8817383	9050669	9046344	9114772	
$L(\beta_2)$	2171394	2171394	2171394	2171394	2171394	2171394	2171394	2171394	2171394	2171394	2171394	2171394	
$L(\pm\mathfrak{S}'_2)$	0487661	0508282	9862877	6859739	9668448	9519092	7391661	9129099	0988777	1222063	7217738	1286166	
$\mathfrak{S}'_2$	11188	11242	9689	4852	9265	8952	5485	—8183	—12557	—13250	—13237	—13447	—0,000001
$\Delta\theta_2$	11210	11217	9653	4887	9258	8949	5500	—8102	—12460	—13250	—13183	—13677	0,000002
$\Delta^2\theta_2$	22	—25	—36	35	—7	—3	15	81	97	0	54	—230	0,000003
$L(S'\Delta\theta_i)$	8316267	8336888	7691483	4688345	7497054	7347678	5220267	6957705	8817383	9050669	9046344	9114772	
$L(\beta_3)$	0492730	0492730	0492730	0492730	0492730	0492730	0492730	0492730	0492730	0492730	0492730	0492730	
$L(\pm\mathfrak{S}'_3)$	8808997	8829618	8184213	5181075	7989784	7840408	5712997	7450435	9310113	9543399	9539074	9607502	
$\mathfrak{S}'_3$	7602	7638	6583	3297	6295	6082	3726	—5560	—8531	—9002	—8993	—9136	0,000001
$\Delta\theta_3$	7699	7714	6677	3039	6294	6138	3661	—5444	—8608	—9069	—9056	—9045	0,000000
$\Delta^2\theta_3$	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
$L(S'\Delta\theta_i)$	8316267	8336888	7691483	4688345	7497054	7347678	5220267	6957705	8817383	9050669	9046344	9114772	
$L(\beta_4)$	5981694	5981694	5981694	5981694	5981694	5981694	5981694	5981694	5981694	5981694	5981694	5981694	
$L(\pm\mathfrak{S}'_4)$	4297961	4318582	3673177	0670039	3478748	3329372	1201961	2939399	4799077	5032363	5028038	5096466	
$\mathfrak{S}'_4$	2690	2703	2330	1167	2228	2152	1319	—1967	—3019	—3186	—3183	—3233	0,000001
$\Delta\theta_4$	2751	2761	2415	1107	2180	2089	1285	—2116	—3074	—3209	—3359	—2832	—0,000002
$\Delta^2\theta_4$	61	58	85	—60	—48	—63	—34	—149	—55	—23	—176	401	—0,000003
$L(S'\Delta\theta_i)$	8316267	8336888	7691483	4688345	7497054	7347678	5220267	6957705	8817383	9050669	9046344	9114772	
$L(\beta_5)$	4639536	4639536	4639536	4639536	4639536	4639536	4639536	4639536	4639536	4639536	4639536	4639536	
$L(\pm\mathfrak{S}'_5)$	2955803	2976424	2331019	9327881	2136590	1987214	9859803	1597241	3456919	3690205	3685880	3754308	
$\mathfrak{S}'_5$	—1975	—1985	—1710	—857	—1636	—1580	—968	1445	2217	2339	2337	2374	0,000001
$\Delta\theta_5$	—1864	—1929	—1629	—986	—1717	—1573	—1013	1247	2095	2357	2286	2725	—0,000001
$\Delta^2\theta_5$	111	56	81	—129	—81	7	—45	—198	—122	18	—51	351	—0,000002
$L(S'\Delta\theta_i)$	8316267	8336888	7691483	4688345	7497054	7347678	5220267	6957705	8817383	9050669	9046344	9114772	
$L(\beta_6)$	2293216	2293216	2293216	2293216	2293216	2293216	2293216	2293216	2293216	2293216	2293216	2293216	
$L(\pm\mathfrak{S}'_6)$	0609483	0630104	9984699	6981561	9790270	9640894	7513483	9250921	1110599	1343885	1339560	1407988	
$\mathfrak{S}'_6$	—11507	—11561	—9965	—4991	—9529	—9206	—5641	8416	12914	13627	13613	13829	—0,000001
$\Delta\theta_6$	—11492	—11564	—9918	—5014	—9494	—9281	—5636	8400	12954	13610	13614	13821	0,000000
$\Delta^2\theta_6$	15	—3	47	—23	35	—75	5	—16	40	—17	1	—8	0,000001
$L(S'\Delta\theta_i)$	8316267	8336888	7691483	4688345	7497054	7347678	5220267	6957705	8817383	9050669	9046344	9114772	
$L(\beta_7)$	4790579	4790579	4790579	4790579	4790579	4790579	4790579	4790579	4790579	4790579	4790579	4790579	
$L(\pm\mathfrak{S}'_7)$	3106846	3127467	2482062	9478924	2287633	2138257	0010846	1748284	3607962	3841248	3836923	3905351	
$\mathfrak{S}'_7$	—20450	—20547	—17709	—8869	—16934	—16362	—10025	14956	22951	24217	24193	24577	—0,000002
$\Delta\theta_7$	—20574	—20600	—17837	—8716	—16888	—16295	—9986	15170	23033	24214	24244	24234	—0,000001
$\Delta^2\theta_7$	—124	—53	—128	153	46	67	39	214	82	—3	51	—343	0,000001

Dans le Tableau XIII, les valeurs de

$$\mathfrak{I}'_i,\quad \Delta\Theta_i,\quad \Delta^2\Theta_i$$

sont exprimées en millionièmes. Ainsi, par exemple, de ce que dans la première colonne verticale les valeurs de

$$\mathfrak{I}'_1,\quad \Delta\Theta_1,\quad \Delta^2\Theta_1$$

se trouvent représentées par les quantités

$$12451,\quad 12272,\quad -179,$$

on doit en conclure que l'on a pour l'eau (1re série)

$$\mathfrak{I}'_1 = 0{,}012451,\qquad \Delta\Theta_1 = 0{,}012272,\qquad \Delta^2\Theta_1 = -0{,}000179$$

ou, ce qui revient au même,

$$1\,000\,000\,\mathfrak{I}'_1 = 12\,451,\qquad 1\,000\,000\,\Delta\Theta_1 = 12\,272,\qquad 1\,000\,000\,\Delta^2\Theta_1 = -179.$$

D'ailleurs comme, dans le Tableau, plusieurs des valeurs de $\Delta^2\Theta_i$, particulièrement celles qui sont relatives à l'huile de térébenthine ainsi qu'à la première et à la quatrième espèce de flintglass, sont, abstraction faite des signes, notablement supérieures aux variations de Θ_i renfermées dans les quatrième et septième lignes horizontales du Tableau VII, on doit en conclure qu'on ne peut, sans erreur sensible, réduire le second membre de la formule (1) ou (9) à ses deux premiers termes, et la formule (42) à la formule (72).

Concevons maintenant que l'on désigne par

$$S''\Delta^2\Theta_i$$

la somme des valeurs de $\Delta^2\Theta_i$ relatives aux divers rayons, mais seulement à l'une des substances, par exemple à la solution de potasse, que nous choisirons ici de préférence, attendu que cette substance est celle pour laquelle la plus petite des valeurs numériques de $\Delta^2\Theta_i$ est la plus grande possible, et que généralement on doit moins craindre de voir un changement de signe produit par les erreurs d'observation dans la valeur de $\Delta\Theta_i$, lorsque cette valeur s'éloigne davantage de zéro.

TABLEAU XIV.

Valeurs de $S''\Delta^2\Theta_i$, $\Sigma''\Delta^2\Theta_i$ *et* $\Sigma''S''\Delta^2\Theta_i$.

	$\Delta^2\Theta_1$.	$\Delta^2\Theta_2$.	$\Delta^2\Theta_3$.	$\Delta^2\Theta_4$.	$\Delta^2\Theta_5$.	$\Delta^2\Theta_6$.	$\Delta^2\Theta_7$.	$\Delta^2\Theta_3+\Delta^2\Theta_4+\Delta^2\Theta_5+\Delta^2\Theta_6$.	$\Delta^2\Theta_1+\Delta^2\Theta_2+\Delta^2\Theta_7$.	$S\Delta^2\Theta_i$.	$S''\Delta^2\Theta_i$.	$L(\pm S''\Delta^2\Theta_i)$.
Eau. 1re série	-0,000179	0,000022	0,000097	0,000061	0,000111	0,000015	-0,000124	0,000284	-0,000281	0,000003	0,000565	7520484
Eau. 2e série	-0,000110	-0,000025	0,000076	0,000058	0,000056	-0,000003	-0,000053	0,000187	-0,000188	-0,000001	0,000375	5740313
Solution de potasse	-0,000142	-0,000036	0,000094	0,000085	0,000081	0,000047	-0,000128	0,000307	-0,000306	0,000001	0,000613	7874605
Huile de tébébenthine	0,000284	0,000035	-0,000258	-0,000060	-0,000129	-0,000023	0,000153	-0,000470	0,000472	0,000002	-0,000942	9740509
Crownglass. 1re espèce	0,000055	-0,000007	-0,000001	-0,000048	-0,000081	0,000035	0,000046	-0,000095	0,000094	-0,000001	-0,000189	2764618
Crownglass. 2e espèce	0,000009	-0,000003	0,000056	-0,000063	0,000007	-0,000075	0,000067	-0,000075	0,000073	-0,000002	-0,000148	1702617
Crownglass. 3e espèce	0,000083	0,000015	-0,000065	-0,000034	-0,000045	0,000005	0,000039	-0,000139	0,000137	-0,000002	-0,000276	4409091
Flintglass. 1re espèce	-0,000048	0,000081	0,000116	-0,000149	-0,000198	-0,000016	0,000214	-0,000247	0,000247	0,000000	-0,000494	6937269
Flintglass. 2e espèce	0,000035	0,000097	-0,000077	-0,000055	-0,000122	0,000040	0,000082	-0,000214	0,000214	0,000000	-0,000428	6314438
Flintglass. 3e espèce, 1re sér.	0,000089	0,000000	-0,000067	-0,000023	0,000018	-0,000017	-0,000003	-0,000089	0,000086	-0,000003	-0,000175	2430380
Flintglass. 3e espèce, 2e sér.	0,000187	0,000054	-0,000063	-0,000176	-0,000051	0,000001	0,000051	-0,000289	0,000292	0,000003	-0,000581	7641761
Flintglass. 4e espèce	-0,000262	-0,000230	0,000091	0,000401	0,000351	-0,000008	-0,000343	0,000835	-0,000835	0,000000	0,001670	2227165
Sommes. Eau, potasse, flintgl., 4e esp.	-0,000693	-0,000269	0,000358	0,000605	0,000599	0,000051	-0,000648				0,003223	
Sommes. Les autres substances	0,000694	0,000272	-0,000359	-0,000608	-0,000601	-0,000050	0,000649				-0,003233	
$\Sigma\Delta^2\Theta_i$	0,000001	0,000003	-0,000001	-0,000003	-0,000002	0,000001	0,000001			$\Sigma S''\Delta^2\Theta_i$	0,000010	
$\Sigma''\Delta^2\Theta_i$	-0,001387	-0,000541	0,000717	0,001213	0,001200	0,000101	-0,001297			$\Sigma''S''\Delta^2\Theta_i$	0,006456	
$L(\pm\Sigma''\Delta^2\Theta_i)$	1420765	7331973	8555192	0838608	0791812	0043214	1129400				8099635	
$L\Sigma''S''\Sigma\Theta_i)$	8099635	8099635	8099635	8099635	8099635	8099635	8099635					
Différence	3321130	9232338	0455557	2738973	2692177	1943579	3029765	$\gamma_3+\gamma_4+\gamma_5+\gamma_6$	$\gamma_1+\gamma_2+\gamma_7$	$S\gamma_i$	$S''\gamma_i$	
γ_i	-0,21484	-0,08380	0,11106	0,18789	0,18587	0,01564	-0,20090	0,50046	-0,49954	0,00092	1,00000	

Tableau XV.

Valeurs de $\mathfrak{J}_i''$ et de $\Delta^3\Theta_i$ exprimées en millionièmes.

	EAU. 1re série.	EAU. 2e série.	SOLUTION de potasse.	HUILE de térébenthine.	CROWNGLASS. 1re espèce.	CROWNGLASS. 2e espèce.	CROWNGLASS. 3e espèce.	FLINTGLASS. 1re espèce.	FLINTGLASS. 2e espèce.	FLINTGLASS. 3e espèce. 1re série.	FLINTGLASS. 3e espèce. 2e série.	FLINTGLASS. 4e espèce.	SOMMES.
$L(\pm S''\Delta^2\Theta_i)$	7520484	5740313	7874605	9740509	2764618	1702617	4409091	6937269	6314438	2430380	7641761	2227165	
$L(-\gamma_1)$	3321130	3321130	3321130	3321130	3321130	3321130	3321130	3321130	3321130	3321130	3321130	3321130	
$L(\mp \mathfrak{J}_1'')$	0841614	9061443	1195735	3061639	6085748	5023747	7730221	0258399	9635568	5751510	0962891	5548295	
$\mathfrak{J}_1''$	—121	—81	—132	202	41	32	59	106	92	38	125	—359	0,000002
$\Delta^2\Theta_1$	—170	—110	—142	284	55	9	83	—48	35	89	187	—262	0,000001
$\Delta^3\Theta_1$	—58	—29	—10	82	14	—23	24	—154	—57	51	62	97	—0,000001
$L(\pm S''\Delta^2\Theta_i)$	7520484	5740313	7874605	9740509	2764618	1702617	4409091	6937269	6314438	2430380	7641761	2227165	
$L(-\gamma_2)$	9232338	9232338	9232338	9232338	9232338	9232338	9232338	9232338	9232338	9232338	9232338	9232338	
$L(\mp \mathfrak{J}_2'')$	6752822	4972651	7106943	8972847	1996956	0934955	3641429	6169607	5546776	1662718	6874099	1459503	
$\mathfrak{J}_2''$	—47	—31	—51	79	16	12	23	41	36	15	49	—140	0,000002
$\Delta^2\Theta_2$	22	—25	—36	35	—7	—3	15	81	97	0	54	—230	0,000003
$\Delta^3\Theta_2$	69	6	15	—44	—23	—15	—8	40	61	—15	5	—90	0,000001
$L(\pm S''\Delta^2\Theta_i)$	7520484	5740313	7874605	9440509	2764618	1702617	4409091	6937269	6314438	2430380	7641761	2227165	
$L(\gamma_3)$	0455557	0455557	0455557	0455557	0455557	0455557	0455557	0455557	0455557	0455557	0455557	0455557	
$L(\pm \mathfrak{J}_3'')$	7976041	6195870	8330162	0196066	3220175	2158174	4864648	7392826	6769995	2885937	8097318	2682722	
$\mathfrak{J}_3''$	63	42	68	—105	—21	—16	—31	—55	—48	—19	—65	185	—0,000002
$\Delta^2\Theta_3$	97	76	94	—258	—1	56	—65	116	—77	—67	—63	91	—0,000001
$\Delta^3\Theta_3$	34	34	26	—153	[illegible]	72	—34	171	—29	—48	[illegible]	—94	[illegible]
$L(\pm S''\Delta^2\Theta_i)$	7520484	5740313	7874605	9740509	2764618	1702617	4409091	6937269	6314438	2430380	7641761	2227165	
$L(\gamma_4)$	2738973	2738973	2738973	2738973	2738973	2738973	2738973	2738973	2738973	2738973	2738973	2738973	
$L(\pm \mathfrak{J}_4'')$	0259457	8479286	0613578	2479482	5503591	4441590	7148064	9676242	9053411	5169353	0380734	4966138	
$\mathfrak{J}_4''$	106	70	115	—177	—36	—28	—52	—93	—80	—33	—109	314	—0,000003
$\Delta^2\Theta_4$	61	58	85	—60	—48	—63	—34	—149	—55	—23	—176	401	—0,000003
$\Delta^3\Theta_4$	—45	—12	—30	—117	—12	—35	18	—56	25	10	—67	87	0,000000
$L(\pm S''\Delta^2\Theta_i)$	7520484	5740313	7874605	9740509	2764618	1702617	4409091	6937269	6314438	2430380	7641761	2227165	
$L(\gamma_5)$	2692177	2692177	2692177	2692177	2692177	2692177	2692177	2692177	2692177	2692177	2692177	2692177	
$L(\pm \mathfrak{J}_5'')$	0212661	8432490	0566782	2432686	5456795	4294794	7101268	9629446	9006515	5122557	0333938	4919342	
$\mathfrak{J}_5''$	105	70	114	—175	—35	—28	—51	—92	—80	—33	—108	310	—0,000003
$\Delta^2\Theta_5$	111	56	81	—129	—81	7	—45	—198	—122	18	—51	351	—0,000002
$\Delta^3\Theta_5$	6	—14	—33	46	—46	35	6	106	—42	51	57	41	0,000001
$L(\pm S''\Delta^2\Theta_i)$	7520484	5740313	7874605	9740509	2764618	1702617	4409091	6937269	6314438	2430380	7641761	2227165	
$L(\gamma_6)$	1943579	1943579	1943579	1943579	1943579	1943579	1943579	1943579	1943579	1943579	1943579	1943579	
$L(\pm \mathfrak{J}_6'')$	9464063	7683892	9818184	1684088	4708197	3646196	6352670	8880848	8258017	4373959	9585340	4170744	
$\mathfrak{J}_6''$	9	6	10	—15	—3	—2	—4	—8	—7	—3	—9	26	0,000000
$\Delta^2\Theta_6$	15	—3	47	—23	35	—75	5	—16	—40	—17	1	—8	—0,000001
$\Delta^3\Theta_6$	6	—9	37	—8	38	—73	9	—8	47	—14	10	—34	0,000001
$L(\pm S''\Delta^2\Theta_i)$	7520484	5740313	7874605	9740509	2764618	1702617	4409091	6937269	6314438	2430380	7641761	2227165	
$L(-\gamma_7)$	3029765	3029765	3029765	3029765	3029765	3029765	3029765	3029765	3029765	3029765	3029765	3029765	
$L(\mp \mathfrak{J}_7'')$	0550249	8770078	0904370	2770274	5794383	4732382	7438856	9967034	9344203	5460145	0671526	5256930	
$\mathfrak{J}_7''$	—114	—75	—123	189	38	30	55	99	86	35	117	—336	0,000001
$\Delta^2\Theta_7$	—124	—53	—128	153	46	67	39	214	82	—3	51	—343	0,000001
$\Delta^3\Theta_7$	—10	22	—5	—36	8	37	—16	115	—4	—38	—66	—7	0,000000

On aura

$$(130)\quad S''\Delta^2\Theta_i = -\Delta^2\Theta_1 - \Delta^2\Theta_2 + \Delta^2\Theta_3 + \Delta^2\Theta_4 + \Delta^2\Theta_5 + \Delta^2\Theta_6 - \Delta^2\Theta_7,$$

et, en désignant par

$$\Sigma''S''\Delta^2\Theta_i$$

la somme des valeurs numériques de $S''\Delta^2\Theta_i$ relatives aux diverses substances, on déterminera sans peine, à l'aide des formules (114) et (113), les valeurs de

$$\gamma_1,\ \gamma_2,\ \ldots,\ \gamma_7,\quad \vartheta''_1,\ \vartheta''_2,\ \ldots,\ \vartheta''_7,\quad \Delta^3\Theta_1,\ \Delta^3\Theta_2,\ \ldots,\ \Delta^3\Theta_7,$$

telles que les présentent les deux Tableaux XIV et XV.

Comme on devait s'y attendre, les nombres compris dans le Tableau XIV vérifient rigoureusement les deux conditions

$$S''\Sigma\Delta^2\Theta_i = \Sigma S''\Delta^2\Theta_i,\qquad S''\Sigma''\Delta^2\Theta_i = \Sigma''S''\Delta^2\Theta_i,$$

et, avec une exactitude suffisante, celles que comprennent les formules

$$S\Delta^2\Theta_i = 0,\quad \Sigma\Delta^2\Theta_i = 0,\quad S''\Sigma\Delta^2\Theta_i = \Sigma S''\Delta^2\Theta_i,\quad S\theta_i = 0,\quad S'\theta_i = 0,\quad S''\theta_i = 1,$$

ce qui prouve la justesse de nos calculs.

Dans le Tableau XV, les valeurs de

$$\vartheta''_i,\quad \Delta^2\Theta_i,\quad \Delta^3\Theta_i$$

sont exprimées en millionièmes. Ainsi, par exemple, de ce que, dans la dernière colonne verticale, les valeurs de

$$\vartheta''_1 \text{ et } \vartheta''_3$$

sont représentées par les quantités

$$-121,\quad 63,$$

on doit en conclure que l'on a pour l'eau (1re série)

$$\vartheta''_1 = -0{,}000121,\qquad \vartheta''_3 = 0{,}000063$$

ou, ce qui revient au même,

$$1\,000\,000\,\vartheta''_1 = -121,\qquad 1\,000\,000\,\vartheta''_3 = 63.$$

Parmi les valeurs de $\Delta^2\Theta_i$, que fournit le Tableau XV, une seule,

0,000171, relative au troisième rayon et à la première espèce de flintglass, surpasse le nombre 0,000159 qui représente la plus grande des valeurs numériques de Θ_i comprises dans la septième ligne horizontale du Tableau VII, et ne la surpasse pas assez notablement pour qu'on ne puisse à la rigueur l'attribuer elle-même aux erreurs d'observation. Nous pourrions donc nous regarder comme suffisamment autorisé à ne pas pousser plus loin les calculs, et admettre qu'on peut, sans erreur sensible, réduire le second membre de la formule (1) ou (9) à ses trois premiers termes, et la formule (42) à la formule (94). Cependant un examen attentif des valeurs de $\Delta\Theta_i$, données par le Tableau XV, nous conduit à supposer que dans chacune de ces valeurs il existe une partie indépendante des erreurs d'observation, ordinairement plus grande que ces erreurs, et qu'il est bon de ne pas négliger. Effectivement, si cette supposition est conforme à la vérité, la plupart des différences

$$\Delta^3\Theta_1,\quad \Delta^3\Theta_2,\quad \ldots,\quad \Delta^3\Theta_7$$

devront conserver les mêmes signes que leurs valeurs approchées, représentées par

$$\vartheta'''_1,\quad \vartheta'''_2,\quad \ldots,\quad \vartheta'''_7;$$

et, comme ces dernières quantités, en vertu des formules (114), conservent toutes les mêmes signes, ou toutes à la fois changent de signes, lorsqu'on passe d'une substance à une autre, les différences

$$\Delta^3\Theta_1,\quad \Delta^3\Theta_2,\quad \ldots,\quad \Delta^3\Theta_7$$

devront, sauf quelques exceptions peu nombreuses, remplir la même condition. Or, à l'inspection du Tableau XV, on reconnait sans peine : 1° que cette condition est rigoureusement remplie lorsqu'on passe de la 4e espèce de flintglass à la 3e espèce (1re série) ou à l'huile de térébenthine; 2° que, si pour chacune de ces trois substances on nomme $S'''\Delta^3\Theta_i$ la somme des valeurs numériques de $\Delta^3\Theta_i$ relatives aux divers rayons, et prises en signes contraires, c'est-à-dire, en d'autres termes, si l'on pose

$$(131)\quad S'''\Delta^3\Theta_i = -\Delta^3\Theta_1 + \Delta^3\Theta_2 + \Delta^3\Theta_3 - \Delta^3\Theta_4 - \Delta^3\Theta_5 + \Delta^3\Theta_6 + \Delta^3\Theta_7,$$

Tableau XVI.

Valeurs de $S'' \Delta^3\Theta_i$, $\Sigma'' \Delta^3\Theta_i$ *et* $\Sigma'' S'' \Delta^3\Theta_i$.

	$\Delta^3\Theta_1$.	$\Delta^3\Theta_2$.	$\Delta^3\Theta_3$.	$\Delta^3\Theta_4$.	$\Delta^3\Theta_5$.	$\Delta^3\Theta_6$.	$\Delta^3\Theta_7$.	$\Delta^3\Theta_2 + \Delta^3\Theta_3 + \Delta^3\Theta_6 + \Delta^3\Theta_7$.	$\Delta^3\Theta_1 + \Delta^3\Theta_4 + \Delta^3\Theta_5$.	$S \Delta^3\Theta_i$.	$S'' \Delta^3\Theta_i$.	$L(\pm S''\Delta^3\Theta_i)$.
Eau. 1re série	-0,000058	0,000069	0,000034	-0,000045	0,000006	0,000006	-0,000010	0,000099	-0,000097	0,000002	0,000196	2922561
Eau. 2e série	-0,000029	0,000006	0,000034	-0,000012	-0,000014	-0,000009	0,000022	0,000053	-0,000055	-0,000002	0,000108	0334238
Solution de potasse	-0,000010	0,000015	0,000026	-0,000030	-0,000033	0,000037	-0,000005	0,000073	-0,000073	0,000000	0,000146	1643529
Huile de térébenthine	0,000082	-0,000044	-0,000153	0,000117	0,000046	-0,000008	-0,000036	-0,000241	0,000245	0,000004	-0,000486	6866363
Crownglass. 1re espèce	0,000014	-0,000023	0,000020	-0,000012	-0,000046	-0,000038	0,000008	0,000043	-0,000044	-0,000001	0,000087	9395193
Crownglass. 2e espèce	-0,000023	-0,000015	0,000072	-0,000035	0,000035	-0,000073	0,000037	0,000021	-0,000023	-0,000002	0,000044	6434527
Crownglass. 3e espèce	0,000024	-0,000008	-0,000034	0,000018	0,000006	0,000009	-0,000016	-0,000049	0,000048	-0,000001	-0,000097	9867717
Flintglass. 1re espèce	-0,000154	0,000040	0,000171	-0,000056	-0,000106	-0,000008	0,000115	0,000318	-0,000316	0,000002	0,000634	8020893
Flintglass. 2e espèce	-0,000057	0,000061	-0,000029	0,000025	-0,000042	0,000047	-0,000004	0,000075	-0,000074	0,000001	0,000149	1731863
Flintglass. 3e esp., 1re série	0,000051	-0,000015	-0,000048	0,000010	0,000051	-0,000014	-0,000038	-0,000115	0,000112	-0,000003	-0,000227	3560259
Flintglass. 3e esp., 2e série	0,000062	0,000005	0,000002	-0,000067	0,000057	0,000010	-0,000066	-0,000049	0,000052	0,000003	-0,000101	0043214
Flintglass. 4e espèce	0,000097	-0,000090	-0,000094	0,000087	0,000041	-0,000034	-0,000007	-0,000225	0,000225	0	-0,000450	6532125
Sommes. Eau, potasse, 1re et 2e espèce de crownglass et de flintglass	-0,000317	0,000153	0,000328	-0,000165	-0,000200	0,000038	0,000163				0,001364	
Sommes. Les autres substances	0,000316	-0,000152	-0,000327	0,000165	0,000201	-0,000037	-0,000163				-0,001361	
$\Sigma \Delta^3\Theta_i$	-0,000001	0,000001	0,000001	0,000000	0,000001	0,000001	0,000000			$\Sigma S'' \Delta^3\Theta_i$	0,000003	
$\Sigma'' \Delta^3\Theta_i$	-0,000633	-0,000305	-0,000655	0,000330	0,000401	-0,000075	-0,000326			$\Sigma'' S'' \Delta^3\Theta_i$	0,002725	
$L(\mp \Sigma'' \Delta^3\Theta_i)$	8014037	4842998	8162413	5185139	6031444	8750613	5132176			$L(\Sigma'' S'' \Delta^3\Theta_i)$	4353665	
$L(\Sigma'' S'' \Delta^3\Theta_i)$	4353665	4353665	4353665	4353665	4353665	4353665	4353665					
$L(\mp \partial_i)$	3660372	0489333	3808748	0831474	1677779	4396948	0778511	$\partial_2 + \partial_3 + \partial_6 + \partial_7$	$\partial_1 + \partial_4 + \partial_5$	$S\partial_i$	$S''\partial_i$	
∂_i	-0,23229	0,11193	0,24037	-0,12110	-0,14716	0,02752	0,11963	0,49945	-0,50055	-0,00110	1,00000	

la condition ci-dessus énoncée sera généralement satisfaite dans le passage d'une substance à une autre, sauf de légères exceptions relatives à un très petit nombre de rayons et à des valeurs de $\Delta^3\Theta_i$ ordinairement très rapprochées de zéro. Si d'ailleurs on désigne par

$$\Sigma'' S'' \Delta^3\Theta_i$$

la somme des valeurs numériques de $\Delta^3\Theta_i$ relatives aux diverses substances, on déterminera aisément, à l'aide des formules (120), (121) et (113), les valeurs de

$$\partial_1,\ \partial_2,\ \ldots,\ \partial_7;\quad \mathfrak{S}''_1,\ \mathfrak{S}''_2,\ \ldots,\ \mathfrak{S}''_7;\quad \Delta^4\Theta_1,\ \Delta^4\Theta_2,\ \ldots,\ \Delta^4\Theta_7,$$

telles que les présentent les Tableaux XVI et XVII.

Comme on devait s'y attendre, les nombres compris dans le Tableau XVI vérifient rigoureusement les deux conditions

$$S'' \Sigma \Delta^3\Theta_i = \Sigma S'' \Delta^3\Theta_i,\qquad S'' \Sigma'' \Delta^3\Theta_i = \Sigma'' S'' \Delta^3\Theta_i,$$

et, avec une exactitude suffisante, celles qu'expriment les formules

$$S \Delta^3\Theta_i = 0,\qquad \Sigma \Delta^3\Theta_i = 0,\qquad S'' \Sigma \Delta^3\Theta_i = \Sigma S'' \Delta^3\Theta_i,$$
$$S\partial_i = 0,\qquad S'\partial_i = 0,\qquad S''\partial_i = 0,\qquad S'''\partial_i = 1,$$

ce qui prouve la justesse de nos calculs.

TABLEAU XVII.

Valeurs de $\mathfrak{I}''_i$ et de $\Delta^4\Theta_i$ exprimées en millionièmes.

	EAU. 1re série.	EAU. 2e série.	SOLUTION de potasse.	HUILE de térébenthine.	CROWNGLASS. 1re espèce.	CROWNGLASS. 2e espèce.	CROWNGLASS. 3e espèce.	FLINTGLASS. 1re espèce.	FLINTGLASS. 2e espèce.	FLINTGLASS. 3e espèce, 1re série.	FLINTGLASS. 3e espèce, 2e série.	FLINTGLASS. 4e espèce.	SOMMES.
$L(\pm S''\Delta^3\theta_i)$....	2922561	0334238	1643529	6866363	9395193	6434527	9867717	8020893	1731863	3560259	0043214	6532125	
$L(-\delta_1)$........	3660372	3660372	3660372	3660372	3660372	3660372	3660372	3660372	3660372	3660372	3660372	3660372	
$L(\mp\mathfrak{I}''_1)$........	6582933	3994610	5203901	0526735	3055565	0094899	3528089	1681265	5392235	7220631	3703586	0192497	
$\mathfrak{I}''_1$............	−46	−25	−34	113	−20	−10	23	−147	−35	53	23	105	0,000000
$\Delta^3\theta_1$............	−58	−29	−10	82	14	−23	24	−154	−57	51	62	97	−0,000001
$\Delta^4\theta_1$............	−12	−4	24	−31	34	−13	1	−7	−22	−2	39	−8	−0,000001
$L(\pm S''\Delta^3\theta_i)$....	2922561	0334238	1643529	6866363	9395193	6434527	9867717	8020893	1731863	3560259	0043214	6532125	
$L(\delta_2)$........	0489333	0489333	0489333	0489333	0489333	0489333	0489333	0489333	0489333	0489333	0489333	0489333	
$L(\pm\mathfrak{I}''_2)$........	3411894	0823571	2132862	7355696	9884526	6923860	0357050	8510226	2221196	4049592	0532547	7021458	
$\mathfrak{I}''_2$............	22	12	16	−54	10	5	−11	−71	17	−25	−11	−50	0,000002
$\Delta^3\theta_2$............	69	6	15	−44	−23	−15	−8	40	61	−15	5	−90	0,000001
$\Delta^4\theta_2$............	47	−6	−1	10	−33	−20	3	−31	44	10	16	−40	−0,000001
$L(\pm S''\Delta^3\theta_i)$....	2922561	0334238	1643529	6866363	9395193	6434527	9867717	8020893	1731863	3560259	0043214	6532125	
$L(\delta_3)$........	3808748	3808748	3808748	3808748	3808748	3808748	3808748	3808748	3808748	3808748	3808748	3808748	
$L(\pm\mathfrak{I}''_3)$........	6731309	4142986	5452277	0675111	3203941	0243275	3676465	1829641	5540611	7369007	3851962	0340873	
$\mathfrak{I}''_3$............	47	26	25	−117	21	11	−23	152	36	−55	−24	−108	0,000001
$\Delta^3\theta_3$............	34	34	26	−153	20	72	−34	171	−29	−48	2	−94	0,000001
$\Delta^4\theta_3$............	−13	8	[illegible]	[illegible]	−1	61	−11	19	−65	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
$L(\pm S''\Delta^3\theta_i)$....	2922561	0334238	1643529	6866363	9395193	6434527	9867717	8020893	1731863	3560259	0043214	6532125	
$L(-\delta_4)$........	0831474	0831474	0831474	0831474	0831474	0831474	0831474	0831474	0831474	0831474	0831474	0831474	
$L(\mp\mathfrak{I}''_4)$........	3754035	1165712	2475003	7697837	0226667	7266001	0699191	8852367	2563337	4391733	0874688	7363599	
$\mathfrak{I}''_4$............	−24	−13	−18	59	−11	−5	12	−77	−18	27	12	54	−0,000002
$\Delta^3\theta_4$............	−45	−12	−30	117	−12	−35	18	−56	25	10	−67	87	0,000000
$\Delta^4\theta_4$............	−21	1	12	58	−1	−30	6	21	43	−17	−79	33	0,000002
$L(\pm S''\Delta^3\theta_i)$....	2922561	0334238	1643529	6866363	9395193	6434527	9867717	8020893	1731863	3560259	0043214	6532125	
$L(-\delta_5)$........	1677779	1677779	1677779	1677779	1677779	1677779	1677779	1677779	1677779	1677779	1677779	1677779	
$L(\mp\mathfrak{I}''_5)$........	4600340	2012017	3321308	8544142	1072972	8112306	1545496	9698672	3409642	5238038	1720993	8209904	
$\mathfrak{I}''_5$............	−29	−16	−21	72	−13	−6	14	−93	−22	33	15	66	0,000000
$\Delta^3\theta_5$............	6	−14	−33	46	−46	35	6	−106	−42	51	57	41	0,000001
$\Delta^4\theta_5$............	35	2	−12	−26	−33	41	−8	−13	−20	18	42	−25	0,000001
$L(\pm S''\Delta^3\theta_i)$....	2922561	0334238	1643529	6866363	9395193	6434527	9867717	8020893	1731863	3560259	0043214	6532125	
$L(\delta_6)$........	4396948	4396948	4396948	4396948	4396948	4396948	4396948	4396948	4396948	4396948	4396948	4396948	
$L(\pm\mathfrak{I}''_6)$........	7319509	4731186	6040477	1263311	3792141	0831475	4264665	2417841	6128811	8957207	4440162	0929073	
$\mathfrak{I}''_6$............	5	3	4	−13	2	1	−3	17	4	−8	−3	−12	−0,000003
$\Delta^3\theta_6$............	6	−9	37	−8	38	−73	9	−8	47	−14	10	−34	0,000001
$\Delta^4\theta_6$............	1	−12	33	5	36	−74	12	−25	43	−6	13	−22	0,000004
$L(\pm S''\Delta^3\theta_i)$....	2922561	0334238	1643529	6866363	9395193	6434527	9867717	8020893	1731863	3560259	0043214	6532125	
$L(\delta_7)$........	0778511	0778511	0778511	0778511	0778511	0778511	0778511	0778511	0778511	0778511	0778511	0778511	
$L(\pm\mathfrak{I}''_7)$........	3701072	1112749	2422040	7644874	0173704	7213038	0646228	8799404	2510374	4338770	0821725	7310636	
$\mathfrak{I}''_7$............	23	13	17	−58	10	5	−12	76	18	−27	−12	−54	−0,000001
$\Delta^3\theta_7$............	−10	22	−5	−36	8	37	−16	115	−4	−38	−66	−7	0,000000
$\Delta^4\theta_7$............	−33	9	−22	22	−2	32	−4	39	−22	−11	−54	47	0,000001

Dans le Tableau XVII, les valeurs de

$$\mathfrak{I}_i''', \quad \Delta^3\Theta_i, \quad \Delta^4\Theta_i$$

sont exprimées en millionièmes. Ainsi, par exemple, de ce que, dans la onzième colonne verticale, la valeur de $\Delta^4\Theta_4$ se trouve représentée par -79; on doit conclure que l'on a pour la troisième espèce de flintglass (2e série)

$$\Delta^4\Theta_4 = -0{,}000079.$$

D'après le Tableau XVII, la plus grande des valeurs numériques de $\Delta^4\Theta_i$, représentée par le nombre

$$0{,}000079,$$

n'atteint même pas la moitié du nombre

$$0{,}000159,$$

qui représente la plus grande des valeurs numériques des variations de Θ_i comprises dans la 7e ligne horizontale du Tableau VII. Donc les diverses valeurs de

$$\Delta^4\Theta_i$$

sont comparables aux erreurs d'observation, d'où il résulte que, dans l'application de nos formules aux expériences de Frauenhofer, on peut, sans erreur sensible, réduire le second membre de l'équation (1) ou (9) à ses quatre premiers termes, et la formule (42) à la formule (106). Il y a plus, d'après ce qui a été dit ci-dessus (page 294) : les valeurs de $\Delta^3\Theta_i$ immédiatement déduites de l'expérience mériteront une confiance moindre que les valeurs de $\Delta^3\Theta_i$ tirées des équations (109) et représentées par

$$\mathfrak{I}_i''' = \Delta^3\Theta_i - \Delta^4\Theta_i,$$

ou, en d'autres termes, celles que l'on tire des formules (111) en y remplaçant généralement $\Delta^4\Theta_i$ par zéro. Donc aussi les valeurs de Θ_i déduites de l'expérience et fournies dans le Tableau VI mériteront moins de confiance que les valeurs corrigées de Θ_i qu'on tirerait des

équations (113) en y remplaçant généralement $\Delta^4\Theta_i$ par zéro. D'ailleurs, comme, en vertu des formules (113), on aura

$$\Theta_i = \mathfrak{I}_i + \mathfrak{I}_i' + \mathfrak{I}_i'' + \mathfrak{I}_i''' + \Delta^4\Theta_i, \tag{132}$$

les valeurs corrigées de Θ_i, ou celles qu'on obtiendra en remplaçant, dans le second membre de l'équation (132), $\Delta^4\Theta_i$ par zéro, seront évidemment les diverses valeurs du polynôme

$$\mathfrak{I}_i + \mathfrak{I}_i' + \mathfrak{I}_i'' + \mathfrak{I}_i''' = \Theta_i - \Delta^4\Theta_i. \tag{133}$$

Cela posé, on tirera sans peine des Tableaux XI, XIII, XV et XVII le Tableau suivant, qui offre, non seulement les valeurs de Θ_i immédiatement déduites de l'expérience, mais aussi les valeurs corrigées de Θ_i ou, en d'autres termes, les valeurs de

$$\Theta_i - \Delta^4\Theta_i,$$

et montre comment ces dernières valeurs se trouvent formées par l'addition des quantités

$$\mathfrak{I}_i, \quad \mathfrak{I}_i', \quad \mathfrak{I}_i'', \quad \mathfrak{I}_i'''.$$

TABLEAU XVIII.

Valeurs de Θ_i et de $\Theta_i - \Delta^4\Theta_i$.

	EAU. 1re série.	EAU. 2e série.	SOLUTION de potasse.	HUILE de térébenthine.	CROWNGLASS. 1re espèce.	CROWNGLASS. 2e espèce.	CROWNGLASS. 3e espèce.	FLINTGLASS. 1re espèce.	FLINTGLASS. 2e espèce.	FLINTGLASS. 3e espèce, 1re série.	FLINTGLASS. 3e espèce, 2e série.	FLINTGLASS. 4e espèce.	SOMMES.
$\mathfrak{S}_1$........	1,759115	1,759100	1,948321	2,156676	2,313162	2,318193	2,411135	2,575692	2,649919	2,660368	2,660359	2,664794	27,876834
$\mathfrak{S}'_1$........	12451	12510	10782	5400	10310	9962	6104	—9106	—13973	—14745	—14730	—14964	1
$\mathfrak{S}''_1$........	—121	—81	—132	202	41	32	59	106	92	38	125	—359	2
$\mathfrak{S}'''_1$........	— 46	—25	—34	113	—20	—10	23	—147	— 35	53	23	105	0
$\Theta_1 - \Delta^4\Theta_1$..	1,771399	1,771504	1,958937	2,162391	2,323493	2,328177	2,417321	2,566545	2,636003	2,645714	2,645777	2,649576	27,876837
$\Delta^4\Theta_1$......	—12	—4	24	—31	34	—13	1	—7	—22	—2	39	—8	—1
Θ_1...	1,771387	1,771500	1,958961	2,162360	2,323527	2,328164	2,417322	2,566538	2,635981	2,645712	2,645816	2,649568	27,876836
$\mathfrak{S}_2$........	1,762247	1,762232	1,951789	2,160515	2,317280	2,322320	2,415427	2,580277	2,654637	2,665104	2,665095	2,669538	27,926461
$\mathfrak{S}'_2$........	11188	11242	9689	4852	9265	8952	5485	—8183	—12557	—13250	—13237	—13447	—1
$\mathfrak{S}''_2$........	—47	—31	—51	79	16	12	23	41	36	15	49	—140	2
$\mathfrak{S}'''_2$........	22	12	16	—54	10	5	—11	71	17	—25	—11	—50	2
$\Theta_2 - \Delta^4\Theta_2$..	1,773410	1,773455	1,961443	2,165392	2,326571	2,331289	2,420924	2,572206	2,642133	2,651844	2,651896	2,655901	27,926464
$\Delta^4\Theta_2$......	47	—6	—1	10	—33	—20	3	—31	44	10	16	—40	—1
Θ_2...	1,773457	1,773449	1,961442	2,165402	2,326538	2,331269	2,420927	2,572177	2,642177	2,651854	2,651912	2,655861	27,926463
$\mathfrak{S}_3$........	1,770730	1,770715	1,961185	2,170916	2,328436	2,333499	2,427055	2,592699	2,667416	2,677934	2,677925	2,682389	28,060899
$\mathfrak{S}'_3$........	7602	7638	6583	3297	6295	6082	3726	—5560	—8531	—9002	—8993	—9136	1
$\mathfrak{S}''_3$........	63	42	68	—105	—21	—16	—31	—55	—48	—19	—65	185	—2
$\mathfrak{S}'''_3$........	47	26	35	—117	21	11	—23	152	36	—55	—24	—108	1
$\Theta_3 - \Delta^4\Theta_3$..	1,778442	1,778421	1,967871	2,173991	2,334731	2,339576	2,430727	2,587236	2,658873	2,668858	2,668843	2,673330	28,060899
$\Delta^4\Theta_3$......	—13	8	—9	—36	—1	61	—11	19	—65	7	26	14	0
Θ_3...	1,778429	1,778429	1,967862	2,173955	2,334730	2,339637	2,430716	2,587255	2,658808	2,668865	2,668869	2,673344	28,060899
$\mathfrak{S}_4$........	1,787146	1,787131	1,973386	2,184421	2,342921	2,348016	2,442133	2,608828	2,684010	2,694593	2,694584	2,699076	28,235465
$\mathfrak{S}'_4$........	2690	2703	2330	1167	2228	2152	1319	—1967	—3019	—3186	—3183	—3233	1
$\mathfrak{S}''_4$........	106	70	115	—177	—36	—28	—52	—93	—80	—33	—109	314	—3
$\mathfrak{S}'''_4$........	—24	—13	—18	59	—11	— 5	12	—77	—18	27	12	54	—2
$\Theta_4 - \Delta^4\Theta_4$..	1,784518	1,784491	1,975813	2,185470	2,345102	2,350135	2,443432	2,606691	2,680893	2,691401	2,691304	2,696211	28,235461
$\Delta^4\Theta_4$......	—21	1	—12	58	—1	—30	6	21	43	—17	—79	33	2
Θ_4...	1,784497	1,784492	1,975801	2,185528	2,345101	2,350105	2,443438	2,606712	2,680936	2,691384	2,691225	2,696244	28,235463
$\mathfrak{S}_5$........	1,791621	1,791606	1,984324	2,196529	2,355907	2,361030	2,455690	2,623288	2,698886	2,709529	2,709520	2,714036	28,391966
$\mathfrak{S}'_5$........	—1975	—1985	—1710	—857	—1636	—1580	—968	1445	2217	2339	2337	2374	1
$\mathfrak{S}''_5$........	105	70	114	—175	—35	—28	—51	—92	—80	—33	—108	310	—3
$\mathfrak{S}'''_5$........	—29	—16	—21	72	—13	—6	14	—93	—22	33	15	66	0
$\Theta_5 - \Delta^4\Theta_5$..	1,789722	1,789675	1,982707	2,195569	2,354223	2,359416	2,454685	2,624548	2,701001	2,711868	2,711764	2,716786	28,391964
$\Delta^4\Theta_5$......	35	2	—12	—26	—33	41	—8	—13	—20	18	42	—25	1
Θ_5...	1,789757	1,789677	1,982695	2,195543	2,354190	3,359457	2,454677	2,624535	2,700981	2,711886	2,711806	2,716761	28,391965
$\mathfrak{S}_6$........	1,810560	1,810545	2,005299	2,219748	2,380811	2,385988	2,481648	2,651018	2,727416	2,738171	2,738162	2,742726	28,692092
$\mathfrak{S}'_6$........	—11507	—11561	—9965	—4991	—9529	—9206	—5641	8416	12914	13627	13613	13829	—1
$\mathfrak{S}''_6$........	9	6	10	—15	—3	—2	—4	—8	—7	—3	—9	26	0
$\mathfrak{S}'''_6$........	5	3	4	—13	2	1	—3	17	4	—8	—3	—12	—3
$\Theta_6 - \Delta^4\Theta_6$..	1,799067	1,798993	1,995348	2,214729	2,371281	2,376781	2,476000	2,659443	2,740327	2,751787	2,751763	2,756569	28,692088
$\Delta^4\Theta_6$......	1	—12	33	5	36	—74	12	—25	43	—6	13	—22	4
Θ_6...	1,799068	1,798981	1,995381	2,214734	2,371317	2,376707	2,476012	2,659418	2,740370	2,751781	2,751776	2,756547	28,692092
$\mathfrak{S}_7$........	1,827387	1,827372	2,023936	2,240377	2,402937	2,408162	2,504712	2,675655	2,752763	2,763618	2,763609	2,768215	28,958743
$\mathfrak{S}'_7$........	—20450	—20547	—17709	—8869	—16934	—16362	—10025	14956	22951	24217	24193	24577	—2
$\mathfrak{S}''_7$........	—114	—75	—123	189	38	30	55	99	86	35	117	—336	1
$\mathfrak{S}'''_7$........	23	13	17	—58	10	5	—12	76	18	—27	—12	—54	—1
$\Theta_7 - \Delta^4\Theta_7$..	1,806846	1,806763	2,006121	2,231639	2,386051	2,391835	2,494730	2,690786	2,775818	2,787843	2,787907	2,792402	28,958741
$\Delta^4\Theta_7$......	—33	9	—22	22	—2	32	—4	39	—22	—11	—54	47	1
Θ_7...	1,806813	1,806772	2,006099	2,231661	2,386049	2,391867	2,494726	2,690825	2,775796	2,787832	2,787853	2,792449	28,958742

Dans le Tableau XVIII, ainsi qu'on devait s'y attendre, les valeurs numériques des quatre quantités

$$\mathfrak{I}_i,\quad \mathfrak{I}'_i,\quad \mathfrak{I}''_i,\quad \mathfrak{I}'''_i \tag{134}$$

forment généralement une suite décroissante. Les seules substances pour lesquelles cette condition ne soit pas toujours remplie sont l'huile de térébenthine, la première espèce de flintglass et la troisième espèce de flintglass (1re série). Encore, pour les substances dont il s'agit, les exceptions sont-elles seulement relatives à la valeur numérique de $\mathfrak{I}''_i$ qui devient supérieure, pour certains rayons, à la valeur numérique $\mathfrak{I}'_i$.

Des calculs ci-dessus développés nous avons déduit cette conclusion importante que les différences du quatrième ordre, représentées par $\Delta^4\Theta_i$ et déterminées par le moyen des formules (113) jointes aux formules (121), étaient, pour les diverses substances, des quantités comparables aux erreurs d'observation. Cette conclusion se trouve confirmée par la détermination des valeurs qu'on obtient pour $\Delta^4\Theta_i$ lorsque l'air est substitué au milieu réfringent. Alors, en effet, chaque rayon cessant d'être réfracté, on a généralement

$$\Theta_i = 1,$$

et par suite les valeurs de $\Delta^4\Theta_i$, déduites des formules (113), (121), sont celles que présente le Tableau suivant.

Tableau XIX.

Valeurs de Θ_i, $\Delta\Theta_i$, $\Delta^2\Theta_i$, $\Delta^3\Theta_i$, $\Delta^4\Theta_i$, $\mathfrak{I}_i$ $\mathfrak{I}'_i$, $\mathfrak{I}''_i$, $\mathfrak{I}'''_i$ relatives à l'air.

	$i=1.$	2.	3.	4.	5.	6.	7.	SOMME.	SOMMES PARTIELLES.			
Θ_i .... $\mathfrak{I}_i = 7\alpha_i$	1 0,984836	1 0,986589	1 0,991339	1 0,997506	1 0,003035	1 1,013638	1 1,023058	7 7,000001	$\Delta\Theta_1+\Delta\Theta_2$ $+\Delta\Theta_3+\Delta\Theta_4$	$\Delta\Theta_5+\Delta\Theta_6$ $+\Delta\Theta_7$	$S'\Delta\Theta_i$	$L(S'\Delta\Theta_i)$
$\Delta\Theta_i$	0,015164	0,013411	0,008661	0,002494	−0,003035	−0,013638	−0,023058	−0,000001	0,039730	−0,039731	0,079461	9001540
$L(\pm\beta_i)$ .... $L(S'\Delta\Theta_i)$	2635636 9001540	2171394 9001540	0492730 9001540	5981694 9001540	4639536 9001540	2293216 9001540	4790579 9001540					
$L(\pm\mathfrak{I}'_i)$ ..	1637176	1172934	9494270	4983234	3641076	1294756	3792119					
$\mathfrak{I}'_i$ ...... $\Delta\Theta_i$	0,014579 0,015164	0,013101 0,013411	0,008901 0,008661	0,003150 0,002494	−0,002313 −0,003035	−0,013473 −0,013638	−0,023945 −0,023058	0 −0,000001	$\Delta^2\Theta_3+\Delta^2\Theta_4$ $+\Delta^2\Theta_5+\Delta^2\Theta_6$	$\Delta^2\Theta_1+\Delta^2\Theta_2$ $+\Delta^2\Theta_7$	$S''\Delta^2\Theta_i$	$L(S''\Delta^2\Theta_i)$
$\Delta^2\Theta_i$	0,000585	0,000310	−0,000240	−0,000656	−0,000722	−0,000165	0,000887	−0,000001	−0,001783	0,001782	−0,003565	5520595
$L(\mp\gamma_i)$ .... $L(-S''\Delta^2\Theta_i)$.	3321130 5520595	9232338 5520595	0455557 5520595	2738973 5520595	2692177 5520595	1943579 5520595	3029765 5520595					
$L(\pm\mathfrak{I}''_i)$	8841725	4752933	5976152	8259568	8212772	7464174	8550360					
$\mathfrak{I}''_i$ .... $\Delta^2\Theta_i$	0,000766 0,000585	0,000299 0,000310	−0,000396 −0,000240	−0,000670 −0,000656	−0,000663 −0,000722	−0,000056 −0,000165	0,000716 0,000887	−0,000004 −0,000001	$\Delta^3\Theta_2+\Delta^3\Theta_3$ $+\Delta^3\Theta_6+\Delta^3\Theta_7$	$\Delta^3\Theta_1$ $+\Delta^3\Theta_4+\Delta^3\Theta_5$	$S'''\Delta^3\Theta_i$	$L(S'''\Delta^3\Theta_i)$
$\Delta^3\Theta_i$	−0,000181	0,000011	0,000156	0,000014	−0,000059	−0,000109	0,000171	0,000003	0,000229	−0,000226	0,000455	6580114
$L(\mp\delta_i)$ .... $L(S'''\Delta^3\Theta_i)$...	3660372 6580114	0489333 6580114	3808748 6580114	0831474 6580114	1677779 6580114	4396948 6580114	0778511 6580114					
$L(\mp\mathfrak{I}'''_i)$	0240486	7069447	0388862	7411588	8257893	0977062	7358625					
$\mathfrak{I}'''_i$ .... $\Delta^3\Theta_i$	−0,000106 −0,000181	0,000051 0,000011	0,000109 0,000156	−0,000055 0,000014	−0,000067 −0,000059	0,000013 −0,000109	0,000054 0,000171	−0,000001 0,000003				
$\Delta^4\Theta_i$	−0,000075	−0,000040	0,000047	0,000060	0,000008	−0,000122	0,000117	0,000004				

Comme on devait s'y attendre, les nombres compris dans le Tableau XIX vérifient, avec une exactitude suffisante, les conditions exprimées par les formules

$$\mathrm{S}\,\Delta\Theta_i = 0,\qquad \mathrm{S}\,\Delta^2\Theta_i = 0,\qquad \mathrm{S}\,\Delta^3\Theta_i = 0,\qquad \mathrm{S}\,\Delta^4\Theta_i = 0.$$

D'ailleurs, dans ce Tableau comme dans les précédents, les valeurs de

$$\mathrm{S}'\Delta\Theta_i,\qquad \mathrm{S}''\Delta\Theta_i,\qquad \mathrm{S}'''\Delta\Theta_i$$

sont respectivement

$$\begin{aligned}
\mathrm{S}'\Delta\Theta_i &= \Delta\Theta_1 + \Delta\Theta_2 + \Delta\Theta_3 + \Delta\Theta_4 - \Delta\Theta_5 - \Delta\Theta_6 - \Delta\Theta_7,\\
\mathrm{S}''\Delta^2\Theta_i &= -\Delta^2\Theta_1 - \Delta^2\Theta_2 + \Delta^2\Theta_3 + \Delta^2\Theta_4 + \Delta^2\Theta_5 + \Delta^2\Theta_6 - \Delta^2\Theta_7,\\
\mathrm{S}'''\Delta^3\Theta_i &= -\Delta^3\Theta_1 + \Delta^3\Theta_2 + \Delta^3\Theta_3 - \Delta^3\Theta_4 - \Delta^3\Theta_5 + \Delta^3\Theta_6 + \Delta^3\Theta_7.
\end{aligned}$$

Dans le même Tableau, la plus grande des valeurs numériques de $\Delta^4\Theta_i$, représentée par le nombre 0,000122, est inférieure au nombre 0,000159 qui représente la plus grande des valeurs numériques des variations de Θ_i comprises dans la 7e ligne horizontale du Tableau VII, et par conséquent elle reste comparable aux erreurs d'observation.

Il est bon d'observer que les valeurs de

$$\Theta_i - \Delta^4\Theta_i$$

fournies par le Tableau XVIII, c'est-à-dire, en d'autres termes, les valeurs de Θ_i calculées pour les substances auxquelles se rapportent les expériences de Frauenhofer, et corrigées d'après les principes ci-dessus exposés, représentent les diverses valeurs d'une même fonction linéaire des seules quantités

$$\mathrm{S}\Theta_i,\quad \mathrm{S}'\Theta_i,\quad \mathrm{S}''\Theta_i,\quad \mathrm{S}'''\Theta_i,$$

que désormais nous désignerons, pour abréger, par

$$\mathrm{U},\quad \mathrm{U}',\quad \mathrm{U}'',\quad \mathrm{U}'''.$$

Effectivement, si l'on pose

$$(135)\qquad \left\{\begin{aligned}
\mathrm{U} &= \mathrm{S}\,\Theta_i = \Theta_1 + \Theta_2 + \Theta_3 + \Theta_4 + \Theta_5 + \Theta_6 + \Theta_7,\\
\mathrm{U}' &= \mathrm{S}'\Theta_i = \Theta_1 + \Theta_2 + \Theta_3 + \Theta_4 - \Theta_5 - \Theta_6 - \Theta_7,\\
\mathrm{U}'' &= \mathrm{S}''\Theta_i = -\Theta_1 - \Theta_2 + \Theta_3 + \Theta_4 + \Theta_5 + \Theta_6 - \Theta_7,\\
\mathrm{U}''' &= \mathrm{S}'''\Theta_i = -\Theta_1 + \Theta_2 + \Theta_3 - \Theta_4 - \Theta_5 + \Theta_6 + \Theta_7,
\end{aligned}\right.$$

on tirera successivement des formules (113) et (121)

$$\begin{aligned}
\vartheta_i &= \mathrm{U}\alpha_i,\\
\Delta\Theta_i &= \Theta_i - \vartheta_i = \Theta_i - \mathrm{U}\alpha_i,\\
\mathrm{S}'\Delta\Theta_i &= \mathrm{S}'(\Theta_i - \mathrm{U}\alpha_i) = \mathrm{S}'\Theta_i - \mathrm{US}'\alpha_i = \mathrm{U}' - \mathrm{US}'\alpha_i;
\end{aligned}$$

puis

$$\begin{aligned}
\vartheta'_i &= (\mathrm{U}' - \mathrm{US}'\alpha_i)\beta_i,\\
\Delta^2\Theta_i &= \Delta\Theta_i - \vartheta'_i = \Theta_i - \mathrm{U}\alpha_i - (\mathrm{U}' - \mathrm{US}'\alpha_i)\beta_i,\\
\mathrm{S}''\Delta^2\Theta_i &= \mathrm{S}''[\Theta_i - \mathrm{U}\alpha_i - (\mathrm{U}' - \mathrm{US}'\alpha_i)\beta_i] = \mathrm{S}''\Theta_i - \mathrm{US}''\alpha_i - (\mathrm{U}' - \mathrm{US}'\alpha_i)\mathrm{S}''\beta_i\\
&= \mathrm{U}'' - \mathrm{US}''\alpha_i - (\mathrm{U}' - \mathrm{US}'\alpha_i)\mathrm{S}''\beta_i;
\end{aligned}$$

puis encore

$$\begin{aligned}
\vartheta''_i &= [\mathrm{U}'' - \mathrm{US}''\alpha_i - (\mathrm{U}' - \mathrm{US}'\alpha_i)\mathrm{S}''\beta_i]\gamma_i,\\
\Delta^3\Theta_i &= \Delta^2\Theta_i - \vartheta''_i\\
&= \Theta_i - \mathrm{U}\alpha_i - (\mathrm{U}' - \mathrm{US}'\alpha_i)\beta_i - [\mathrm{U}'' - \mathrm{US}''\alpha_i - (\mathrm{U}' - \mathrm{US}'\alpha_i)\mathrm{S}''\beta_i]\gamma_i,\\
\mathrm{S}'''\Delta^3\Theta_i &= \mathrm{S}'''\Theta_i - \mathrm{US}'''\alpha_i - (\mathrm{U}' - \mathrm{US}'\alpha_i)\mathrm{S}'''\beta_i\\
&\qquad - [\mathrm{U}'' - \mathrm{US}''\alpha_i - (\mathrm{U}' - \mathrm{US}'\alpha_i)\mathrm{S}''\beta_i]\mathrm{S}'''\gamma_i\\
&= \mathrm{U}''' - \mathrm{US}'''\alpha_i - (\mathrm{U}' - \mathrm{US}'\alpha_i)\mathrm{S}'''\beta_i\\
&\qquad - [\mathrm{U}'' - \mathrm{US}''\alpha_i - (\mathrm{U}' - \mathrm{US}'\alpha_i)\mathrm{S}''\beta_i]\,\mathrm{S}'''\gamma_i;
\end{aligned}$$

et enfin

$$\begin{aligned}
\vartheta'''_i = \{&\mathrm{U}''' - \mathrm{US}'''\alpha_i - (\mathrm{U}' - \mathrm{US}'\alpha_i)\mathrm{S}'''\beta_i\\
&- [\mathrm{U}'' - \mathrm{US}''\alpha_i - (\mathrm{U}' - \mathrm{US}'\alpha_i)\mathrm{S}''\beta_i]\mathrm{S}'''\gamma_i\}\,\delta_i.
\end{aligned}$$

Or, en substituant les valeurs précédentes de

$$\vartheta_i,\quad \vartheta'_i,\quad \vartheta'',\quad \vartheta'''_i$$

dans le premier membre de l'équation (133), on tirera de cette équation

$$(136)\quad \left\{\begin{aligned}\Theta_i - \Delta^4\Theta_i = {} & U\alpha_i + (U' - US'\alpha_i)\beta_i + [U'' - US''\alpha_i - (U' - US'\alpha_i)S''\beta_i]\gamma_i \\ & + \{U''' - US'''\alpha_i - (U' - US'\alpha_i)S'''\beta_i \\ & \quad - [U'' - US''\alpha_i - (U' - US'\alpha_i)S''\beta_i]S'''\gamma_i\}\,\delta_i.\end{aligned}\right.$$

Telle est la formule qui sert à déterminer la valeur corrigée de Θ_i, ou, ce qui revient au même, la valeur de $\Theta_i - \Delta^4\Theta_i$, en fonction linéaire de

$$U,\quad U',\quad U'',\quad U'''.$$

D'ailleurs on reconnaîtra sans peine que, si le second membre de la formule (136) est substitué à la place de $\Theta_i - \Delta^4\Theta_i$ dans les quatre quantités

$$S(\Theta_i - \Delta^4\Theta_i),\quad S'(\Theta_i - \Delta^4\Theta_i),\quad S''(\Theta_i - \Delta^4\Theta_i),\quad S'''(\Theta_i - \Delta^4\Theta_i),$$

ces quatre quantités, réduites à leur expression la plus simple à l'aide des équations (122), deviendront, comme on devait s'y attendre,

$$U = S\Theta_i,\quad U' = S'\Theta_i,\quad U'' = S''\Theta_i,\quad U''' = S'''\Theta_i.$$

Dans la formule (136), les valeurs de

$$U,\quad U',\quad U'',\quad U'''$$

varient tandis que l'on passe d'une substance à une autre; mais les valeurs de

$$S'\alpha_i,\quad S''\alpha_i,\quad S'''\alpha_i,\quad S''\beta_i,\quad S'''\beta_i,\quad S'''\gamma_i,$$

aussi bien que celles de $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i, \delta_i$, sont indépendantes de la substance que l'on considère et déterminées par les équations

$$(137)\quad \left\{\begin{aligned} S'\alpha_i &= \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 - \alpha_5 - \alpha_6 - \alpha_7, \\ S''\alpha_i &= -\alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_5 + \alpha_6 - \alpha_7, \\ S'''\alpha_i &= -\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 - \alpha_4 - \alpha_5 + \alpha_6 + \alpha_7, \\ S''\beta_i &= -\beta_1 - \beta_2 + \beta_3 + \beta_4 + \beta_5 + \beta_6 - \beta_7, \\ S'''\beta_i &= -\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 - \beta_4 - \beta_5 + \beta_6 + \beta_7, \\ S'''\gamma_i &= -\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 - \gamma_4 - \gamma_5 + \gamma_6 + \gamma_7. \end{aligned}\right.$$

D'autre part, les valeurs de

$$\alpha_i,\quad \beta_i,\quad \gamma_i,\quad \delta_i$$

tirées des Tableaux IX, XII, XIV et XVI sont les suivantes.

TABLEAU XX.

Valeurs de α_i, β_i, γ_i, δ_i.

i.	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	SOMME des valeurs numériques.
α_i ...	0,140691	0,140941	0,141620	0,142501	0,143291	0,144805	0,146151	1,000000
β_i ...	0,183469	0,164869	0,112014	0,039643	-0,029104	-0,169559	-0,301341	0,999999
γ_i ...	-0,21484	-0,08380	-0,11106	0,18789	0,18587	0,01564	-0,20090	1,000000
δ_i ...	-0,23229	-0,11193	0,24037	-0,12110	-0,14716	0,02752	0,11963	1,000000

Cela posé, on trouvera

$$(138)\quad \left\{\begin{aligned} S'\alpha_i &= 0,565753 - 0,434247 = 0,131506, \\ S''\alpha_i &= 0,572217 - 0,427783 = 0,144434, \\ S'''\alpha_i &= 0,573517 - 0,426483 = 0,147034, \\ S''\beta_i &= -0,547001 + 0,452998 = -0,094003, \\ S'''\beta_i &= -0,694012 + 0,305987 = -0,388025, \\ S'''\gamma_i &= -0,65846 + 0,34154 = -0,31692. \end{aligned}\right.$$

Aux valeurs corrigées de Θ_i, fournies par le Tableau XIX, ou, ce qui revient au même, par la formule (136) et représentées par

$$\Theta_i - \Delta^4\Theta_i,$$

correspondront des valeurs corrigées de θ_i, que nous représenterons par

$$\theta_i - \Delta^4\theta_i,$$

et qui seront déterminées, non plus par la formule (40), mais par l'équation

$$\Theta_i - \Delta^4\Theta_i = (\theta_i - \Delta^4\theta_i)^2, \tag{139}$$

de laquelle on tire

$$\theta_i - \Delta^4\theta_i = \sqrt{\Theta_i - \Delta^4\Theta_i} = \sqrt{\theta_i^2 - \Delta^4\Theta_i} = \theta_i - \frac{\Delta^4\Theta_i}{2\theta_i} - \frac{(\Delta^4\Theta_i)^2}{8\theta_i^3} - \ldots, \tag{140}$$

par conséquent

$$\Delta^4\theta_i = \frac{\Delta^4\Theta_i}{2\theta_i} + \frac{(\Delta^4\Theta_i)^2}{8\theta_i^3} + \ldots. \tag{141}$$

Lorsque, à l'aide de la formule (140), on veut calculer la valeur de $\Delta^4\theta_i$ avec six décimales, on peut sans inconvénient réduire cette formule à

$$\Delta^4\theta_i = \frac{\Delta^4\Theta_i}{2\theta_i} \quad \text{ou} \quad \Delta^4\theta_i = \tfrac{1}{2}\theta_i^{-1}\Delta^4\Theta_i. \tag{142}$$

En effet, comme, des valeurs numériques de $\Delta^4\Theta_i$ fournies par le Tableau XVII, la plus grande, savoir 0,000079, reste inférieure au nombre 0,0001 et donne en conséquence pour valeur de

$$(\Delta^4\Theta_i)^2,$$

à plus forte raison pour valeurs de

$$\frac{(\Delta^4\Theta_i)^2}{8} \quad \text{et} \quad \frac{(\Delta^4\Theta_i)^2}{8\theta_i^3}$$

(θ_i étant plus grand que l'unité), des nombres inférieurs à

$$0{,}00000001,$$

l'erreur produite dans le second membre de la formule (141) par l'omission du terme

$$\frac{(\Delta^4\Theta_i)^2}{8\theta_i^3}$$

ne s'élèvera pas à un cent-millionième. Il y a plus : on peut en dire autant de l'erreur produite par l'omission du terme dont il s'agit et de

tous ceux qui le suivent, car on tire de l'équation (140)

$$\Delta^4\theta_i = \theta_i - \sqrt{\theta_i^2 - \Delta^4\Theta_i} = \theta_i\left(1 - \sqrt{1 - \frac{\Delta^4\Theta_i}{\theta_i^2}}\right) = \frac{\Delta^4\Theta_i}{\theta_i\left(1 + \sqrt{1 - \frac{\Delta^4\Theta_i}{\theta_i^2}}\right)},$$

ou, ce qui revient au même,

$$\Delta^4\theta_i = \frac{\Delta^4\Theta_i}{2\theta_i} + \frac{\Delta^4\Theta_i}{2\theta_i}\left(\frac{2}{1 + \sqrt{1 - \frac{\Delta^4\Theta_i}{\theta_i^2}}} - 1\right). \tag{143}$$

Or, pour tirer la formule (142) de la formule (143), il suffira d'omettre dans cette dernière le terme

$$\frac{\Delta^4\Theta_i}{2\theta_i}\left(\frac{2}{1 + \sqrt{1 - \frac{\Delta^4\Theta_i}{\theta_i^2}}} - 1\right),$$

évidemment inférieur au produit

$$\frac{\Delta^4\Theta_i}{2}\left(\frac{2}{1 + \sqrt{1 - \Delta^4\Theta_i}} - 1\right)$$

et, à plus forte raison, au produit

$$\frac{0{,}0001}{2}\left(\frac{2}{1 + \sqrt{1 - 0{,}0001}} - 1\right)$$
$$= \frac{0{,}0001}{2}\left(\frac{2}{1{,}99995} - 1\right) = \frac{0{,}0001}{2}\,\frac{0{,}00005}{1{,}99995} = \frac{0{,}000000005}{3{,}9999} < 0{,}00000001.$$

Si maintenant on substitue dans la formule (142) les valeurs de θ_i et de $\Delta^4\Theta_i$ que fournissent les Tableaux III et XVII, alors, en effectuant le calcul par logarithmes, on obtiendra les valeurs de

$$\theta_i^{-1}\Delta^4\Theta_i$$

et de

$$\Delta^4\theta_i$$

que renferme le Tableau suivant.

TABLEAU XXI.

Valeurs de $\theta_i^{-1}\Delta^4\Theta_i$ et de $\Delta^4\theta_i$, exprimées en millionièmes.

	EAU.		SOLUTION de potasse.	HUILE de térébenthine.	CROWNGLASS.			FLINTGLASS.				
	1re série.	2e série.			1re espèce.	2e espèce.	3e espèce.	1re espèce.	2e espèce.	3e espèce, 1re série.	3e espèce, 2e série.	4e espèce.
$L(\mp\Delta^4\Theta_1)$	0792	6021	3802	4914	5315	1139	0	8451	3424	3010	5911	9031
$L(\theta_1)$	1242	1242	1460	1675	1831	1835	1917	2047	2105	2113	2113	2116
Différence	9550	4779	2342	3239	3484	9304	8083	6404	1319	0897	3798	6915
$\theta_1^{-1}\Delta^4\Theta_1$	−9	−3	17	−21	22	−79	1	−4	−14	−1	24	−5
$\Delta^4\theta_1$	−4	−2	9	−11	11	−4	0	−2	−7	−1	12	−2
$L(\pm\Delta^4\Theta_2)$	6721	7782	0	0	5185	3010	4771	4914	6435	0	2042	6021
$L(\theta_2)$	1244	1244	1463	1678	1834	1838	1920	2052	2110	2118	2118	2121
Différence	5477	6538	8537	8322	3351	1172	2851	2862	4325	7882	9924	3900
$\theta_2^{-1}\Delta^4\Theta_2$	35	−5	−1	7	−22	−13	2	−19	27	6	10	−25
$\Delta^4\theta_2$	18	−2	0	3	−11	−7	1	−10	14	3	5	−12
$L(\mp\Delta^4\Theta_3)$	1139	9031	9542	5563	0	7853	0414	2788	8129	8451	4150	1461
$L(\theta_3)$	1250	1250	1470	1686	1841	1846	1929	2064	2123	2132	2132	2135
Différence	9889	7781	8072	3877	8159	6007	8485	0724	6006	6319	2018	9326
$\theta_3^{-1}\Delta^4\Theta_3$	−10	6	−6	−24	−1	40	−7	12	−40	4	16	9
$\Delta^4\theta_3$	−5	3	−3	−12	0	20	−4	6	−20	2	8	4
$L(\mp\Delta^4\Theta_4)$	3222	0	0792	7634	0	4771	7782	3222	6335	2304	8976	5185
$L(\theta_4)$	1258	1258	1479	1698	1851	1855	1940	2080	2141	2150	2150	2154
Différence	1964	8742	9313	5936	8149	2916	5842	1142	4194	0154	6826	3031
$\theta_4^{-1}\Delta^4\Theta_4$	−16	1	−9	39	−1	−20	4	13	26	−10	−48	20
$\Delta^4\theta_4$	−8	0	−4	20	0	−10	2	7	13	−5	−24	10
$L(\pm\Delta^4\Theta_5)$	5441	3010	0792	4150	5185	6128	9031	1139	3010	2553	6232	3979
$L(\theta_5)$	1264	1264	1486	1708	1859	1864	1950	2095	2158	2166	2166	2170
Différence	4177	1746	9306	2442	3326	4264	7081	9044	0852	0387	4066	1809
$\theta_5^{-1}\Delta^4\Theta_5$	26	1	−9	−17	−22	27	−5	−8	−12	10	26	−15
$\Delta^4\theta_5$	13	1	−4	−9	−11	13	−3	−4	−6	5	13	−8
$L(\pm\Delta^4\Theta_6)$	0	0792	5185	6990	5563	8692	0792	3979	6335	7782	1139	3424
$L(\theta_6)$	1275	1275	1500	1727	1875	1880	1969	2124	2189	2198	2198	2202
Différence	8725	9517	3685	5263	3688	6812	8823	1855	4146	5584	8941	1222
$\theta_6^{-1}\Delta^4\Theta_6$	1	−9	23	3	23	−48	8	−15	26	−4	8	−13
$\Delta^4\theta_6$	0	−4	12	2	12	−24	4	−8	13	−2	4	−7
$L(\mp\Delta^4\Theta_7)$	5185	9542	3424	3424	3010	5051	6021	5911	3424	0414	7324	6721
$L(\theta_7)$	1285	1285	1512	1743	1888	1894	1985	2149	2217	2226	2226	2230
Différence	3900	8257	1912	1681	1122	3157	4036	3762	1207	8188	5098	4491
$\theta_7^{-1}\Delta^4\Theta_7$	−25	7	−16	15	−1	21	−3	24	−13	−7	−32	28
$\Delta^4\theta_7$	−12	3	−8	7	−1	10	−1	12	−7	−3	−16	14

L'exactitude des valeurs de $\Delta^4\Theta_i$ comprises dans le Tableau XXI se trouve confirmée par les observations suivantes.

Les formules (117) donnent

$$(144)\quad \left\{\begin{aligned} S\,\Delta^4\Theta_i &= \quad\Delta^4\Theta_1+\Delta^4\Theta_2+\Delta^4\Theta_3+\Delta^4\Theta_4+\Delta^4\Theta_5+\Delta^4\Theta_6+\Delta^4\Theta_7=0,\\ S'\,\Delta^4\Theta_i &= \quad\Delta^4\Theta_1+\Delta^4\Theta_2+\Delta^4\Theta_3+\Delta^4\Theta_4-\Delta^4\Theta_5-\Delta^4\Theta_6-\Delta^4\Theta_7=0,\\ S''\,\Delta^4\Theta_i &= -\Delta^4\Theta_1-\Delta^4\Theta_2+\Delta^4\Theta_3+\Delta^4\Theta_4+\Delta^4\Theta_5+\Delta^4\Theta_6-\Delta^4\Theta_7=0,\\ S'''\,\Delta^4\Theta_i &= -\Delta^4\Theta_1+\Delta^4\Theta_2+\Delta^4\Theta_3-\Delta^4\Theta_4-\Delta^4\Theta_5+\Delta^4\Theta_6+\Delta^4\Theta_7=0.\end{aligned}\right.$$

D'autre part, si l'on nomme ς la moyenne arithmétique entre les valeurs extrêmes de $\frac{1}{\theta_i}$, c'est-à-dire entre $\frac{1}{\theta_1}$ et $\frac{1}{\theta_7}$, de sorte qu'on ait

$$(145)\qquad \varsigma=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\theta_1}+\frac{1}{\theta_7}\right),$$

la différence entre $\frac{1}{\theta_i}$ et ς ne surpassera jamais

$$\frac{1}{\theta_1}-\text{ɪ}=\text{ɪ}-\frac{1}{\theta_7}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\theta_1}-\frac{1}{\theta_7}\right);$$

par suite, la différence entre $\Delta^4\Theta_i=\frac{1}{2\theta_i}\Delta^4\Theta_i$ et le produit $\frac{1}{2}\varsigma\Delta^4\Theta_i$ ne surpassera jamais la quantité

$$(146)\qquad \frac{1}{4}\left(\frac{1}{\theta_1}-\frac{1}{\theta_7}\right)\Delta^4\Theta_i.$$

Or la différence entre les valeurs de $\frac{1}{\theta_1}$ et $\frac{1}{\theta_7}$, calculées à l'aide du Tableau III, dans lequel on trouve leurs logarithmes, sera

Pour l'eau	$0{,}7513-0{,}7440=0{,}0073$
Pour la solution de potasse	$0{,}7145-0{,}7060=0{,}0085$
Pour l'huile de térébenthine	$0{,}6800-0{,}6694=0{,}0106$
Pour le crownglass, 1re espèce	$0{,}6560-0{,}6474=0{,}0086$
» 2e espèce	$0{,}6554-0{,}6466=0{,}0088$
» 3e espèce	$0{,}6432-0{,}6331=0{,}0101$
Pour le flintglass, 1re espèce	$0{,}6242-0{,}6096=0{,}0146$
» 2e espèce	$0{,}6159-0{,}6002=0{,}0157$
» 3e espèce	$0{,}6148-0{,}5989=0{,}0159$
» 4e espèce	$0{,}6143-0{,}5984=0{,}0159.$

Donc le quart de cette différence sera, pour toutes les substances employées par Frauenhofer, inférieure à

$$\frac{0{,}0160}{4} = 0{,}004,$$

à plus forte raison à 0,01; et, comme, dans le Tableau XVII, la plus grande des valeurs numériques de $\Delta^4\Theta_i$ est représentée par le nombre 0,000079, il est clair que le produit (146), c'est-à-dire la différence entre $\Delta^4\Theta_i$ et le produit

$$\tfrac{1}{2}\varsigma\Delta^4\Theta_i$$

restera inférieure à un millionième. Donc les valeurs de $\Delta^4\theta_i$ et celles du produit $\frac{1}{2}\varsigma\Delta^4\Theta_i$, exprimées en millionièmes, seront représentées par les mêmes nombres, de sorte que, en s'arrêtant à la 6^e décimale, on aura

$$(147)\qquad \Delta^3\theta_i = \tfrac{1}{2}\varsigma\Delta^4\Theta_i.$$

Cela posé, des formules (144) multipliées par $\frac{1}{2}\varsigma$ on tirera

$$(148)\quad \left\{\begin{aligned} \mathrm{S}\ \Delta^4\theta_i &= \Delta^4\theta_1+\Delta^4\theta_2+\Delta^4\theta_3+\Delta^4\theta_4+\Delta^4\theta_5+\Delta^4\theta_6+\Delta^4\theta_7=0,\\ \mathrm{S}'\,\Delta^4\theta_i &= \Delta^4\theta_1+\Delta^4\theta_2+\Delta^4\theta_3+\Delta^4\theta_4-\Delta^4\theta_5-\Delta^4\theta_6-\Delta^4\theta_7=0,\\ \mathrm{S}''\,\Delta^4\theta_i &= -\Delta^4\theta_1-\Delta^4\theta_2+\Delta^4\theta_3+\Delta^4\theta_4+\Delta^4\theta_5+\Delta^4\theta_6-\Delta^4\theta_7=0,\\ \mathrm{S}'''\,\Delta^4\theta_i &= -\Delta^4\theta_1+\Delta^4\theta_2+\Delta^4\theta_3-\Delta^4\theta_4-\Delta^4\theta_5+\Delta^4\theta_6+\Delta^4\theta_7=0. \end{aligned}\right.$$

Or, si l'on combine successivement la première des équations (148) avec la seconde, puis avec la troisième, on en conclura

$$\Delta^4\theta_1+\Delta^4\theta_2+\Delta^4\theta_3+\Delta^4\theta_4=0,\qquad \Delta^4\theta_5+\Delta^4\theta_6+\Delta^4\theta_7=0,$$

puis

$$\Delta^4\theta_3+\Delta^4\theta_4+\Delta^4\theta_5+\Delta^4\theta_6=0,\qquad \Delta^4\theta_1+\Delta^4\theta_2+\Delta^4\theta_7=0,$$

et, par conséquent,

$$(149)\qquad \Delta^4\theta_1+\Delta^4\theta_2=-(\Delta^4\theta_3+\Delta^4\theta_4)=\Delta^4\theta_5+\Delta^4\theta_6=-\Delta^4\theta_7.$$

Donc les quatre quantités

$$(150)\qquad \Delta^4\theta_1+\Delta^4\theta_2,\quad \Delta^4\theta_3+\Delta^4\theta_4,\quad \Delta^4\theta_5+\Delta^4\theta_6,\quad \Delta^4\theta_7$$

doivent être égales, au signe près, et alternativement affectées de signes contraires. Pareillement, de la première des équations (148) combinée avec les deux dernières, on conclura que les quatre quantités

$$(151)\qquad \Delta^4\theta_1,\quad \Delta^4\theta_2+\Delta^4\theta_7,\quad \Delta^4\theta_3+\Delta^4\theta_6,\quad \Delta^4\theta_4+\Delta^4\theta_5$$

doivent être égales, au signe près, et alternativement affectées de signes contraires. Ces conditions se trouvent effectivement remplies avec une exactitude suffisante pour les valeurs de $\Delta^4\Theta_i$ que fournit le Tableau XXI, comme le prouve celui que nous allons tracer.

Tableau XXII.

Valeurs de $\Delta^4\theta_i$, $\Delta^4\theta_1+\Delta^4\theta_2$, ... exprimées en millionièmes.

	EAU.		SOLUTION de potasse.	HUILE de térében-thine.	CROWNGLASS.			FLINTGLASS.				
	1re série.	2e série.			1re espèce.	2e espèce.	3e espèce.	1re espèce.	2e espèce.	3e espèce, 1re série.	3e espèce, 2e série.	4e espèce.
$\Delta^4\theta_1$	−4	−2	9	−11	11	−4	0	−2	−7	−1	12	−2
$\Delta^4\theta_2$	18	−2	0	3	−11	−7	1	−10	14	3	5	−12
$\Delta^4\theta_3$	−5	3	−3	−12	0	20	−4	6	−20	2	8	14
$\Delta^4\theta_4$	−8	0	−4	20	0	−10	2	7	13	−5	−24	10
$\Delta^4\theta_5$	13	1	−4	−9	−11	13	−3	−4	−6	5	13	−8
$\Delta^4\theta_6$	0	−4	12	2	12	−24	4	−8	13	−2	4	−7
$\Delta^4\theta_7$	−12	3	−8	7	−1	10	−1	12	−7	−3	−16	14
$\Delta^4\theta_1+\Delta^4\theta_2$	14	−4	9	−8	0	−11	1	−12	7	2	17	−14
$\Delta^4\theta_3+\Delta^4\theta_4$	−13	3	−7	8	0	10	−2	13	−7	−3	−16	14
$\Delta^4\theta_5+\Delta^4\theta_6$	13	−3	8	−7	1	−11	1	−12	7	3	17	−15
$\Delta^4\theta_7$	−12	3	−8	7	−1	10	−1	12	−7	−3	−16	14
$\Delta^4\theta_1$	−4	−2	9	−11	11	−4	0	−2	−7	−1	12	−2
$\Delta^4\theta_2+\Delta^4\theta_7$	6	1	−8	10	−12	3	0	2	7	0	−12	2
$\Delta^4\theta_3+\Delta^4\theta_6$	−5	−1	9	−10	12	−4	0	−2	−7	0	12	−3
$\Delta^4\theta_4+\Delta^4\theta_5$	5	1	−8	11	−11	3	−1	3	7	0	−11	2

Les résultats fournis par le Tableau XXI peuvent encore être invoqués à l'appui des conclusions précédemment énoncées, suivant lesquelles les valeurs de $\Delta^4\Theta_i$, et par suite celles de $\Delta^4\theta_i$, doivent être comparables aux erreurs d'observation. Effectivement, lorsqu'on passe de l'une à l'autre des deux séries d'expériences faites sur l'eau et la troisième espèce de flintglass, les valeurs de θ_i présentent les variations ci-dessous :

TABLEAU XXIII.

Variations de θ_i dans le passage d'une série d'expériences à une autre.

		$i=1.$	$i=2.$	$i=3.$	$i=4.$	$i=5.$	$i=6.$	$i=7.$
θ_i. Eau.	1re série	1,330965	1,331712	1,333577	1,335851	1,337818	1,341293	1,344177
	2e série	1,330977	1,331709	1,333577	1,335849	1,337788	1,341261	1,344162
	Variation de θ_i...	0,000042	−0,000003	0,000000	−0,000002	−0,000030	−0,000032	−0,000015
θ_i. Flintglass.	3e espèce, 1re série.	1,626564	1,628451	1,633666	1,640544	1,646780	1,658849	1,669680
	2e série.	1,626596	1,628469	1,633667	1,640495	1,646756	1,658848	1,669686
	Variation de θ_i...	0,000032	0,000018	0,000001	−0,000049	−0,000024	−0,000001	0,000000

Ainsi les valeurs de θ_i fournies par les expériences de Frauenhofer admettent des erreurs comparables aux nombres

$$0{,}000042,\quad 0{,}000049,$$

renfermés dans les 4e et 7e lignes horizontales du Tableau XXIII. Or ces nombres surpassent évidemment les nombres

$$0{,}000020 \quad \text{et} \quad 0{,}000024,$$

qui, dans les Tableaux XXI et XXII, représentent les plus grandes valeurs numériques de $\Delta^4\theta_i$.

Comme on l'a déjà remarqué, les valeurs de Θ_i déduites de l'observation méritent moins de confiance que les valeurs corrigées de Θ_i, représentées par $\Theta_i - \Delta^4\Theta_i$. Pareillement les valeurs de θ_i fournies par l'observation doivent mériter moins de confiance que les valeurs corrigées de θ_i, représentées par $\theta_i - \Delta^4\theta_i$ et inscrites dans le Tableau suivant.

TABLEAU XXIV.

Valeurs de $\theta_i - \Delta^4\theta_i$.

	EAU.		SOLUTION de potasse.	HUILE de térébenthine.	CROWNGLASS.			FLINTGLASS.				
	1re série.	2e série.			1re espèce.	2e espèce.	3e espèce.	1re espèce.	2e espèce.	3e espèce, 1re série.	3e espèce, 2e série.	4e espèce.
θ_1 ...	1,330935	1,330977	1,399629	1,470496	1,524312	1,525832	1,554774	1,602042	1,623570	1,626564	1,626596	1,627749
$\Delta^4\theta_1$ ...	−4	−2	9	−11	11	−4	0	−2	−7	−1	12	−2
$\theta_1 - \Delta^4\theta_1$ ...	1,330939	1,330979	1,399620	1,470507	1,524301	1,525836	1,554774	1,602044	1,623577	1,626565	1,626584	1,627751
θ_2 ...	1,331712	1,331709	1,400515	1,471530	1,525299	1,526849	1,555933	1,603800	1,625477	1,628451	1,628469	1,629681
$\Delta^4\theta_2$ ...	18	−2	0	3	−11	−7	1	−10	14	3	5	−12
$\theta_2 - \Delta^4\theta_2$ ...	1,331694	1,331711	1,400515	1,471527	1,525310	1,526856	1,555932	1,603810	1,625463	1,628448	1,628464	1,629693
θ_3 ...	1,333577	1,333577	1,402805	1,474434	1,527982	1,529587	1,559075	1,608494	1,630585	1,633666	1,633667	1,635036
$\Delta^4\theta_3$ ...	−5	3	−3	−12	0	20	−4	6	−20	2	8	4
$\theta_3 - \Delta^4\theta_3$ ...	1,333582	1,333574	1,402808	1,474446	1,527982	1,529567	1,559079	1,608488	1,630605	1,633664	1,633659	1,635032
θ_4 ...	1,335851	1,335849	1,405632	1,478353	1,531372	1,533005	1,563150	1,614532	1,637356	1,640544	1,640495	1,642024
$\Delta^4\theta_4$ ...	−8	0	−4	20	0	−10	2	7	13	−5	−24	10
$\theta_4 - \Delta^4\theta_4$ ...	1,335859	1,335849	1,405636	1,478333	1,531372	1,533015	1,563148	1,614525	1,637343	1,640549	1,640519	1,642014
θ_5 ...	1,337818	1,337788	1,408082	1,481736	1,534337	1,536052	1,566741	1,620042	1,643466	1,646780	1,646756	1,648260
$\Delta^4\theta_5$ ...	13	1	−4	−9	−11	13	−3	−4	−6	5	13	−8
$\theta_5 - \Delta^4\theta_5$ ...	1,337805	1,337787	1,408086	1,481745	1,534348	1,536039	1,566744	1,620046	1,643472	1,646775	1,646743	1,648268
θ_6 ...	1,341293	1,341261	1,412579	1,488198	1,539908	1,541657	1,573535	1,630772	1,655406	1,658849	1,658848	1,660285
$\Delta^4\theta_6$ ...	0	−4	12	2	12	−24	4	−8	13	−2	4	−7
$\theta_6 - \Delta^4\theta_6$ ...	1,341293	1,341265	1,412567	1,488196	1,539896	1,541681	1,573531	1,630780	1,655393	1,658851	1,658844	1,660292
θ_7 ...	1,344177	1,344162	1,416368	1,493874	1,544684	1,546566	1,579470	1,640373	1,666072	1,669680	1,669686	1,671062
$\Delta^4\theta_7$ ...	−12	3	−8	7	−1	10	−1	12	−7	−3	−16	14
$\theta_7 - \Delta^4\theta_7$ ...	1,344189	1,344159	1,416376	1,493867	1,544685	1,546556	1,579471	1,640361	1,666079	1,669683	1,669702	1,671048

Les valeurs de $\Delta^4\theta_i$ et de $\theta_i - \Delta^4\theta_i$ que renferme le Tableau XXIV peuvent être directement déduites de l'équation (142) ou (147) jointe à la formule (136). D'ailleurs, si l'on substitue aux valeurs de

$$\Theta_1,\ \Theta_2,\ \Theta_3,\ \Theta_4,\ \Theta_5,\ \Theta_6,\ \Theta_7,$$

que fournissent l'une des séries d'expériences faites sur l'eau ou la troisième espèce de flintglass, les moyennes arithmétiques entre les valeurs déduites de la première et de la seconde série, les formules (135), (136) et même la formule (147) fourniront pour chacune des quantités

$$\mathrm{U},\ \mathrm{U}',\ \mathrm{U}'',\ \mathrm{U}''',\ \Delta^4\Theta_i\ \text{et}\ \Delta^4\theta_i,$$

non l'une des deux valeurs correspondantes aux deux séries d'expériences, mais une troisième valeur qui sera la moyenne arithmétique entre les deux premières. Il y a plus : le calcul n'étant point poussé au delà des millionièmes, l'équation (40), présentée sous la forme

$$\theta_i = \sqrt{\Theta_i}, \tag{152}$$

donnera, dans la même hypothèse, pour chacune des quantités

$$\theta_1,\ \theta_2,\ \theta_3,\ \theta_4,\ \theta_5,\ \theta_6,\ \theta_7,$$

une valeur égale à la moyenne arithmétique entre les valeurs fournies par les deux séries d'expériences faites sur l'eau ou la troisième espèce de flintglass. C'est du moins ce que l'on prouvera sans peine, en ayant égard à l'extrême petitesse des variations que subit Θ_i dans le passage de la première série d'expériences à la seconde.

De ce qu'on vient de dire il résulte que, pour chacune des quantités

$$\theta_i,\ \Delta^4\theta_i\ \text{et}\ \theta_i - \Delta^4\theta_i,$$

les deux valeurs relatives à l'eau ou à la troisième espèce de flintglass, et inscrites dans deux colonnes verticales du Tableau XXIV, peuvent être remplacées par une troisième valeur, qui sera la moyenne arithmétique entre les deux premières, et méritera évidemment plus de confiance. En opérant de cette manière, on réduira le Tableau XXIV à celui que nous allons tracer.

Tableau XXV.

Valeurs de $\theta_i - \Delta^4\theta_i$.

	EAU.	SOLUTION de potasse.	HUILE de térébenthine.	CROWNGLASS. 1re espèce.	CROWNGLASS. 2e espèce.	CROWNGLASS. 3e espèce.	FLINTGLASS. 1re espèce.	FLINTGLASS. 2e espèce.	FLINTGLASS. 3e espèce.	FLINTGLASS. 4e espèce.
θ_1	1,330956	1,399629	1,470496	1,524312	1,525832	1,554774	1,602042	1,623570	1,626580	1,627749
$\Delta^4\theta_1$	−3	9	−11	11	−4	0	−2	−7	5	−2
$\theta_1-\Delta^4\theta_1$...	1,330959	1,399620	1,470507	1,524301	1,525836	1,554774	1,602044	1,623577	1,626575	1,627751
θ_2	1,331711	1,400515	1,471530	1,525299	1,526849	1,555933	1,603800	1,625477	1,628460	1,629681
$\Delta^4\theta_2$	8	0	3	−11	−7	−1	−10	14	4	−12
$\theta_2-\Delta^4\theta_2$...	1,331703	1,400515	1,471527	1,525310	1,526856	1,555932	1,603810	1,625463	1,628456	1,629693
θ_3	1,333577	1,402805	1,474434	1,527982	1,529587	1,559075	1,608494	1,630585	1,636667	1,635036
$\Delta^4\theta_3$	−1	−3	−12	0	20	−4	6	−20	5	4
$\theta_3-\Delta^4\theta_3$...	1,333578	1,402808	1,474446	1,527982	1,529567	1,559079	1,608488	1,630605	1,636662	1,635032
θ_4	1,335850	1,405632	1,478353	1,531372	1,533005	1,563150	1,614532	1,637356	1,640520	1,642024
$\Delta^4\theta_4$	−4	−4	20	0	−10	2	7	13	−14	10
$\theta_4-\Delta^4\theta_4$...	1,335854	1,405636	1,478333	1,531372	1,533015	1,563148	1,614525	1,637343	1,640534	1,642014
θ_5	1,337803	1,408032	1,481736	1,534337	1,536052	1,566741	1,620042	1,643466	1,646768	1,648260
$\Delta^4\theta_5$	7	−4	−9	−11	13	−3	−4	−6	9	−8
$\theta_5-\Delta^4\theta_5$...	1,337796	1,408086	1,481745	1,534348	1,536039	1,566744	1,620046	1,643472	1,646759	1,648268
θ_6	1,341277	1,412579	1,488198	1,539908	1,541657	1,573535	1,630772	1,655406	1,658849	1,660285
$\Delta^4\theta_6$	−2	12	2	12	−24	4	−8	13	1	−7
$\theta_6-\Delta^4\theta_6$...	1,341279	1,412567	1,488196	1,539896	1,541681	1,573531	1,630780	1,655393	1,658848	1,660292
θ_7	1,344170	1,416368	1,493874	1,544684	1,546566	1,579470	1,640373	1,666072	1,669683	1,671062
$\Delta^4\theta_7$	−4	−8	7	−1	10	−1	12	−7	−9	14
$\theta_7-\Delta^4\theta_7$...	1,344174	1,416376	1,493867	1,544685	1,546556	1,579471	1,640361	1,666079	1,669692	1,671048