SUR LES

ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES D'ÉQUILIBRE

OU

DE MOUVEMENT POUR UN SYSTÈME DE POINTS MATÉRIELS

SOLLICITÉS

PAR DES FORCES D'ATTRACTION OU DE RÉPULSION MUTUELLE.

J'ai fait voir, dans le troisième Volume des *Exercices de Mathématiques* [p. 188 et suiv. (1)], comment on pouvait établir les équations d'équilibre ou de mouvement d'un système de molécules qui s'attirent ou se repoussent, en supposant ces molécules très peu écartées des positions qu'elles occupaient dans l'état naturel du système. Pour obtenir les équations dont il s'agit, il suffit de substituer, dans les formules (32) ou (34) des pages 197 et 198 (2), les valeurs de $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$ déduites des formules (25), (26), (30) et (31). Ces valeurs se simplifient et se réduisent aux quantités $\mathfrak{X}_2$, $\mathfrak{Y}_2$, $\mathfrak{Z}_2$ déterminées par les formules (31), toutes les fois que les seconds membres des équations (26) et (30) s'évanouissent. C'est ce qui arrivera, par exemple, si les masses m, m', m'', ... des diverses molécules sont deux à deux égales entre elles, et distribuées symétriquement de part et d'autre d'une molécule quelconque $\mathfrak{m}$, sur des droites menées par le point avec lequel cette molécule coïncide. Cela posé, soient, dans l'état naturel du système,

a, b, c les coordonnées d'une molécule quelconque $\mathfrak{m}$, rapportées à trois axes rectangulaires des x, y, z;

(1) *Œuvres de Cauchy*, S. II, T. VIII, p. 227 et suiv.
(2) *Ibid.*, p. 236 et 237.

r le rayon vecteur mené de cette molécule à une autre molécule m très voisine;

α, β, γ les angles formés par le rayon vecteur r avec les demi-axes des coordonnées positives;

$f(r)$ la force accélératrice qui mesure l'action de m sur $\mathfrak{m}$;

$\pm \mathfrak{m} m f(r)$ la force motrice correspondante, prise avec le signe $+$ ou le signe $-$, suivant que cette force est attractive ou répulsive;

$f(r)$ une fonction de r, distincte de $f(r)$, et déterminée par l'équation

$$f(r) = \pm [r f'(r) - f(r)]. \tag{1}$$

Soient de plus

$$x = a + \xi, \qquad y = b + \eta, \qquad z = c + \zeta \tag{2}$$

les coordonnées de la molécule $\mathfrak{m}$, relatives à un état d'équilibre ou de mouvement dans lequel on suppose appliquée à cette molécule une force accélératrice φ dont les projections algébriques sur les axes coordonnés sont désignées par X, Y, Z. Les quantités ξ, η, ζ représenteront les déplacements très petits de la molécule $\mathfrak{m}$ mesurés parallèlement aux axes des x, y, z, et, si, en réduisant les valeurs de $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$ à celles de $\mathfrak{X}_2$, $\mathfrak{Y}_2$, $\mathfrak{Z}_2$, on fait, pour abréger,

$$\begin{cases} \mathfrak{A} = \mathrm{S}\left[\pm \frac{mr}{2} \cos^2\alpha\, f(r)\right], \\ \mathfrak{B} = \mathrm{S}\left[\pm \frac{mr}{2} \cos^2\beta\, f(r)\right], \\ \mathfrak{C} = \mathrm{S}\left[\pm \frac{mr}{2} \cos^2\gamma\, f(r)\right]; \end{cases} \tag{3}$$

$$\begin{cases} \mathfrak{D} = \mathrm{S}\left[\pm \frac{mr}{2} \cos\beta \cos\gamma\, f(r)\right], \\ \mathfrak{E} = \mathrm{S}\left[\pm \frac{mr}{2} \cos\gamma \cos\alpha\, f(r)\right], \\ \mathfrak{F} = \mathrm{S}\left[\pm \frac{mr}{2} \cos\alpha \cos\beta\, f(r)\right]; \end{cases} \tag{4}$$

$$(5)\quad \begin{cases} \mathrm{L} = \mathrm{S}\left[\frac{mr}{2}\cos^2\alpha\, f(r)\right], \\ \mathrm{M} = \mathrm{S}\left[\frac{mr}{2}\cos^2\beta\, f(r)\right], \\ \mathrm{N} = \mathrm{S}\left[\frac{mr}{2}\cos^2\gamma\, f(r)\right]; \end{cases}$$

$$(6)\quad \begin{cases} \mathrm{P} = \mathrm{S}\left[\frac{mr}{2}\cos^2\beta\cos^2\gamma\, f(r)\right], \\ \mathrm{Q} = \mathrm{S}\left[\frac{mr}{2}\cos^2\gamma\cos^2\alpha\, f(r)\right], \\ \mathrm{R} = \mathrm{S}\left[\frac{mr}{2}\cos^2\alpha\cos^2\beta f(r)\right]; \end{cases}$$

$$(7)\quad \begin{cases} \mathrm{U} = \mathrm{S}\left[\frac{mr}{2}\cos^2\alpha\cos\beta\cos\gamma f(r)\right], \\ \mathrm{U}' = \mathrm{S}\left[\frac{mr}{2}\cos^2\beta\cos\gamma f(r)\right], \\ \mathrm{U}'' = \mathrm{S}\left[\frac{mr}{2}\cos\beta\cos^2\gamma f(r)\right], \\ \mathrm{V} = \mathrm{S}\left[\frac{mr}{2}\cos^2\alpha\cos\gamma f(r)\right], \\ \mathrm{V}' = \mathrm{S}\left[\frac{mr}{2}\cos\alpha\cos^2\beta\cos\gamma f(r)\right], \\ \mathrm{V}'' = \mathrm{S}\left[\frac{mr}{2}\cos\alpha\cos^2\gamma f(r)\right], \\ \mathrm{W} = \mathrm{S}\left[\frac{mr}{2}\cos^2\alpha\cos\beta f(r)\right], \\ \mathrm{W}' = \mathrm{S}\left[\frac{mr}{2}\cos\alpha\cos^2\beta\, f(r)\right], \\ \mathrm{W}'' = \mathrm{S}\left[\frac{mr}{2}\cos\alpha\cos\beta\cos^2\gamma f(r)\right]. \end{cases}$$

on aura, en vertu de la formule (31) de la page 196 du troisième Volume (1),

$$(8)\quad \begin{cases} \mathfrak{X} = \mathfrak{A}\frac{\partial^2\xi}{\partial a^2} + \mathfrak{B}\frac{\partial^2\xi}{\partial b^2} + \mathfrak{C}\frac{\partial^2\xi}{\partial c^2} + 2\mathfrak{D}\frac{\partial^2\xi}{\partial b\,\partial c} + 2\mathfrak{E}\frac{\partial^2\xi}{\partial c\,\partial a} + 2\mathfrak{F}\frac{\partial^2\xi}{\partial a\,\partial b} \\ \quad + \mathrm{L}\frac{\partial^2\xi}{\partial a^2} + \mathrm{R}\frac{\partial^2\xi}{\partial b^2} + \mathrm{Q}\frac{\partial^2\xi}{\partial c^2} + \mathrm{W}\frac{\partial^2\eta}{\partial a^2} + \mathrm{W}'\frac{\partial^2\eta}{\partial b^2} + \mathrm{W}''\frac{\partial^2\eta}{\partial c^2} + \mathrm{V}\frac{\partial^2\zeta}{\partial a^2} + \mathrm{V}'\frac{\partial^2\zeta}{\partial b^2} + \mathrm{V}''\frac{\partial^2\zeta}{\partial c^2} \\ \quad + 2\left(\mathrm{U}\frac{\partial^2\xi}{\partial b\,\partial c} + \mathrm{V}\frac{\partial^2\xi}{\partial c\,\partial a} + \mathrm{W}\frac{\partial^2\xi}{\partial a\,\partial b} + \mathrm{V}'\frac{\partial^2\eta}{\partial b\,\partial c} + \mathrm{U}\frac{\partial^2\eta}{\partial c\,\partial a} + \mathrm{R}\frac{\partial^2\eta}{\partial a\,\partial b} + \mathrm{W}''\frac{\partial^2\zeta}{\partial b\,\partial c} + \mathrm{Q}\frac{\partial^2\zeta}{\partial c\,\partial a} + \mathrm{U}\frac{\partial^2\zeta}{\partial a\,\partial b}\right), \\ \mathfrak{Y} = \ldots\ldots\ldots\

mouvement du système des molécules m, m', m'', ..., et l'on trouvera

$$
(11)\quad
\begin{cases}
\dfrac{\partial^2\xi}{\partial t^2} = \mathrm{X} + \mathfrak{A}\dfrac{\partial^2\xi}{\partial x^2} + \mathfrak{B}\dfrac{\partial^2\xi}{\partial y^2} + \mathfrak{C}\dfrac{\partial^2\xi}{\partial z^2} + 2\mathfrak{D}\dfrac{\partial^2\xi}{\partial y\,\partial z} + 2\mathfrak{E}\dfrac{\partial^2\xi}{\partial z\,\partial x} + 2\mathfrak{F}\dfrac{\partial^2\xi}{\partial x\,\partial y} \\
\quad + \mathrm{L}\dfrac{\partial^2\xi}{\partial x^2} + \mathrm{R}\dfrac{\partial^2\xi}{\partial y^2} + \mathrm{Q}\dfrac{\partial^2\xi}{\partial z^2} + \mathrm{W}\dfrac{\partial^2\eta}{\partial x^2} + \mathrm{W}'\dfrac{\partial^2\eta}{\partial y^2} + \mathrm{W}''\dfrac{\partial^2\eta}{\partial z^2} + \mathrm{V}\dfrac{\partial^2\zeta}{\partial x^2} + \mathrm{V}'\dfrac{\partial^2\zeta}{\partial y^2} + \mathrm{V}''\dfrac{\partial^2\zeta}{\partial z^2} \\
\quad + 2\Big(\mathrm{U}\dfrac{\partial^2\xi}{\partial y\,\partial z} + \mathrm{V}\dfrac{\partial^2\xi}{\partial z\,\partial x} + \mathrm{W}\dfrac{\partial^2\xi}{\partial x\,\partial y} + \mathrm{V}'\dfrac{\partial^2\eta}{\partial y\,\partial z} + \mathrm{U}\dfrac{\partial^2\eta}{\partial z\,\partial x} + \mathrm{R}\dfrac{\partial^2\eta}{\partial x\,\partial y} + \mathrm{W}''\dfrac{\partial^2\zeta}{\partial y\,\partial z} + \mathrm{Q}\dfrac{\partial^2\zeta}{\partial z\,\partial x} + \mathrm{U}\dfrac{\partial^2\zeta}{\partial x\,\partial y}\Big), \\
\dfrac{\partial^2\eta}{\partial t^2} = \mathrm{Y} + \mathfrak{A}\dfrac{\partial^2\eta}{\partial x^2} + \mathfrak{B}\dfrac{\partial^2\eta}{\partial y^2} + \mathfrak{C}\dfrac{\partial^2\eta}{\partial z^2} + 2\mathfrak{D}\dfrac{\partial^2\eta}{\partial y\,\partial z} + 2\mathfrak{E}\dfrac{\partial^2\eta}{\partial z\,\partial x} + 2\mathfrak{F}\dfrac{\partial^2\eta}{\partial x\,\partial y} \\
\quad + \mathrm{W}\dfrac{\partial^2\xi}{\partial x^2} + \mathrm{W}'\dfrac{\partial^2\xi}{\partial y^2} + \mathrm{W}''\dfrac{\partial^2\xi}{\partial z^2} + \mathrm{R}\dfrac{\partial^2\eta}{\partial x^2} + \mathrm{M}\dfrac{\partial^2\eta}{\partial y^2} + \mathrm{P}\dfrac{\partial^2\eta}{\partial z^2} + \mathrm{U}\dfrac{\partial^2\zeta}{\partial x^2} + \mathrm{U}'\dfrac{\partial^2\zeta}{\partial y^2} + \mathrm{U}''\dfrac{\partial^2\zeta}{\partial z^2} \\
\quad + 2\Big(\mathrm{V}'\dfrac{\partial^2\xi}{\partial y\,\partial z} + \mathrm{U}\dfrac{\partial^2\xi}{\partial z\,\partial x} + \mathrm{R}\dfrac{\partial^2\xi}{\partial x\,\partial y} + \mathrm{U}'\dfrac{\partial^2\eta}{\partial y\,\partial z} + \mathrm{V}'\dfrac{\partial^2\eta}{\partial z\,\partial x} + \mathrm{W}'\dfrac{d^2\eta}{\partial x\,\partial y} + \mathrm{P}\dfrac{\partial^2\zeta}{\partial y\,\partial z} + \mathrm{W}''\dfrac{\partial^2\zeta}{\partial z\,\partial x} + \mathrm{V}'\dfrac{\partial^2\zeta}{\partial x\,\partial y}\Big), \\
\dfrac{\partial^2\zeta}{\partial t^2} = \mathrm{Z} + \mathfrak{A}\dfrac{\partial^2\zeta}{\partial x^2} + \mathfrak{B}\dfrac{\partial^2\zeta}{\partial y^2} + \mathfrak{C}\dfrac{\partial^2\zeta}{\partial z^2} + 2\mathfrak{D}\dfrac{\partial^2\zeta}{\partial y\,\partial z} + 2\mathfrak{E}\dfrac{\partial^2\zeta}{\partial z\,\partial x} + 2\mathfrak{F}\dfrac{\partial^2\zeta}{\partial x\,\partial y} \\
\quad + \mathrm{V}\dfrac{\partial^2\xi}{\partial x^2} + \mathrm{V}'\dfrac{\partial^2\xi}{\partial y^2} + \mathrm{V}''\dfrac{\partial^2\xi}{\partial z^2} + \mathrm{U}\dfrac{\partial^2\eta}{\partial x^2} + \mathrm{U}'\dfrac{\partial^2\eta}{\partial y^2} + \mathrm{U}''\dfrac{\partial^2\eta}{\partial z^2} + \mathrm{Q}\dfrac{\partial^2\zeta}{\partial x^2} + \mathrm{P}\dfrac{\partial^2\zeta}{\partial y^2} + \mathrm{N}\dfrac{\partial^2\zeta}{\partial z^2} \\
\quad + 2\Big(\mathrm{W}''\dfrac{\partial^2\xi}{\partial y\,\partial z} + \mathrm{Q}\dfrac{\partial^2\xi}{\partial z\,\partial x} + \mathrm{U}\dfrac{\partial^2\xi}{\partial x\,\partial y} + \mathrm{P}\dfrac{\partial^2\eta}{\partial y\,\partial z} + \mathrm{W}''\dfrac{\partial^2\eta}{\partial z\,\partial x} + \mathrm{V}'\dfrac{\partial^2\eta}{\partial x\,\partial y} + \mathrm{U}''\dfrac{\partial^2\zeta}{\partial y\,\partial z} + \mathrm{V}''\dfrac{\partial^2\zeta}{\partial z\,\partial x} + \mathrm{W}'\dfrac{\partial^2\zeta}{\partial x\,\partial y}\Big)
\end{cases}
$$

Si le système n'était pas en mouvement, mais en équilibre, il faudrait réduire à zéro les premiers membres des formules (11).

Soient maintenant

Δ la densité du système au point (a, b, c), dans l'état naturel;

ρ la densité au point (x, y, z), dans l'état de mouvement;

υ la quantité positive ou négative qui mesure la dilatation ou la condensation du volume autour de la molécule m, dans le passage du premier état au second;

p', p'', p''' les pressions ou tensions supportées au point (x, y, z) dans l'état de mouvement, et du côté des coordonnées positives, par trois plans perpendiculaires aux axes des x, des y et des z;

A, F, E; F, B, D; E, D, C les projections algébriques des pressions ou tensions p, p', p''. On aura, en vertu des formules (17) et (59) des

pages 219 et 233 du troisième Volume des *Exercices* (1),

$$\rho = (1-\upsilon)\Delta, \tag{12}$$

$$\upsilon = \frac{\partial\xi}{\partial x} + \frac{\partial\eta}{\partial y} + \frac{\partial\zeta}{\partial z}. \tag{13}$$

De plus, en prenant x, y, z pour variables indépendantes, et joignant les équations (25), (26), (27), (28), (29), (30), des pages 222 et suivantes (2), aux formules (3), (4), (5), (6), (7) du présent article, on trouvera

$$
(14)\quad
\begin{cases}
\mathrm{A} = \rho\Big[\mathfrak{A}\Big(1 + 2\dfrac{\partial\xi}{\partial x}\Big) + 2\mathfrak{F}\dfrac{\partial\xi}{\partial y} + 2\mathfrak{E}\dfrac{\partial\xi}{\partial z}\Big] \\
\qquad + \rho\Big[\mathrm{L}\dfrac{\partial\xi}{\partial x} + \mathrm{R}\dfrac{\partial\eta}{\partial y} + \mathrm{Q}\dfrac{\partial\zeta}{\partial z} + \mathrm{U}\Big(\dfrac{\partial\eta}{\partial z} + \dfrac{\partial\zeta}{\partial y}\Big) + \mathrm{V}\Big(\dfrac{\partial\zeta}{\partial x} + \dfrac{\partial\xi}{\partial z}\Big) + \mathrm{W}\Big(\dfrac{\partial\xi}{\partial y} + \dfrac{\partial\eta}{\partial x}\Big)\Big], \\
\mathrm{B} = \rho\Big[2\mathfrak{F}\dfrac{\partial\eta}{\partial x} + \mathfrak{B}\Big(1 + 2\dfrac{\partial\eta}{\partial y}\Big) + 2\mathfrak{D}\dfrac{\partial\eta}{\partial z}\Big] \\
\qquad + \rho\Big[\mathrm{R}\dfrac{\partial\xi}{\partial x} + \mathrm{M}\dfrac{\partial\eta}{\partial y} + \mathrm{P}\dfrac{\partial\zeta}{\partial z} + \mathrm{U}'\Big(\dfrac{\partial\eta}{\partial z} + \dfrac{\partial\zeta}{\partial y}\Big) + \mathrm{V}'\Big(\dfrac{\partial\zeta}{\partial x} + \dfrac{\partial\xi}{\partial z}\Big) + \mathrm{W}'\Big(\dfrac{\partial\xi}{\partial y} + \dfrac{\partial\eta}{\partial x}\Big)\Big], \\
\mathrm{C} = \rho\Big[2\mathfrak{E}\dfrac{\partial\zeta}{\partial x} + 2\mathfrak{D}\dfrac{\partial\zeta}{\partial y} + \mathfrak{C}\Big(1 + 2\dfrac{\partial\zeta}{\partial z}\Big)\Big] \\
\qquad + \rho\Big[\mathrm{Q}\dfrac{\partial\xi}{\partial x} + \mathrm{P}\dfrac{\partial\eta}{\partial y} + \mathrm{N}\dfrac{\partial\zeta}{\partial z} + \mathrm{U}''\Big(\dfrac{\partial\eta}{\partial z} + \dfrac{\partial\zeta}{\partial y}\Big) + \mathrm{V}''\Big(\dfrac{\partial\zeta}{\partial x} + \dfrac{\partial\xi}{\partial z}\Big) + \mathrm{W}''\Big(\dfrac{\partial\xi}{\partial y} + \dfrac{\partial\eta}{\partial x}\Big)\Big].
\end{cases}
$$

$$
(15)\quad
\begin{cases}
\mathrm{D} = \rho\Big(\mathfrak{D} + \mathfrak{E}\dfrac{\partial\eta}{\partial x} + \mathfrak{D}\dfrac{\partial\eta}{\partial y} + \mathfrak{C}\dfrac{\partial\eta}{\partial z} + \mathfrak{F}\dfrac{\partial\zeta}{\partial x} + \mathfrak{B}\dfrac{\partial\zeta}{\partial y} + \mathfrak{D}\dfrac{\partial\zeta}{\partial z}\Big) \\
\qquad + \rho\Big[\mathrm{U}\dfrac{\partial\xi}{\partial x} + \mathrm{U}'\dfrac{\partial\eta}{\partial y} + \mathrm{U}''\dfrac{\partial\zeta}{\partial z} + \mathrm{P}\Big(\dfrac{\partial\eta}{\partial z} + \dfrac{\partial\zeta}{\partial y}\Big) + \mathrm{W}''\Big(\dfrac{\partial\zeta}{\partial x} + \dfrac{\partial\xi}{\partial z}\Big) + \mathrm{V}'\Big(\dfrac{\partial\xi}{\partial y} + \dfrac{\partial\eta}{\partial x}\Big)\Big], \\
\mathrm{E} = \rho\Big(\mathfrak{C} + \mathfrak{A}\dfrac{\partial\zeta}{\partial x} + \mathfrak{F}\dfrac{\partial\zeta}{\partial y} + \mathfrak{E}\dfrac{\partial\zeta}{\partial z} + \mathfrak{E}\dfrac{\partial\xi}{\partial x} + \mathfrak{D}\dfrac{\partial\xi}{\partial y} + \mathfrak{C}\dfrac{\partial\xi}{\partial z}\Big) \\
\qquad + \rho\Big[\mathrm{V}\dfrac{\partial\xi}{\partial x} + \mathrm{V}'\dfrac{\partial\eta}{\partial y} + \mathrm{V}''\dfrac{\partial\zeta}{\partial z} + \mathrm{W}''\Big(\dfrac{\partial\eta}{\partial z} + \dfrac{\partial\zeta}{\partial y}\Big) + \mathrm{Q}\Big(\dfrac{\partial\zeta}{\partial x} + \dfrac{\partial\xi}{\partial z}\Big) + \mathrm{U}\Big(\dfrac{\partial\xi}{\partial y} + \dfrac{\partial\eta}{\partial x}\Big)\Big], \\
\mathrm{F} = \rho\Big(\mathfrak{F} + \mathfrak{F}\dfrac{\partial\xi}{\partial x} + \mathfrak{B}\dfrac{\partial\xi}{\partial y} + \mathfrak{D}\dfrac{\partial\xi}{\partial z} + \mathfrak{A}\dfrac{\partial\eta}{\partial x} + \mathfrak{F}\dfrac{\partial\eta}{\partial y} + \mathfrak{E}\dfrac{\partial\eta}{\partial z}\Big) \\
\qquad + \rho\Big[\mathrm{W}\dfrac{\partial\xi}{\partial x} + \mathrm{W}'\dfrac{\partial\eta}{\partial y} + \mathrm{W}''\dfrac{\partial\zeta}{\partial z} + \mathrm{V}'\Big(\dfrac{\partial\eta}{\partial z} + \dfrac{\partial\zeta}{\partial y}\Big) + \mathrm{U}\Big(\dfrac{\partial\zeta}{\partial x} + \dfrac{\partial\xi}{\partial z}\Big) + \mathrm{R}\Big(\dfrac{\partial\xi}{\partial y} + \dfrac{\partial\eta}{\partial x}\Big)\Big].
\end{cases}
$$

(1) *Œuvres de Cauchy*, S. II, T. VIII, p. 260 et 273.

(2) *Ibid.*, p. 263 et suiv.

Enfin, si l'on substitue, dans les équations (14), la valeur de ρ tirée des formules (12) et (13), savoir

$$\rho = \left(1 - \frac{\partial\xi}{\partial x} - \frac{\partial\eta}{\partial y} - \frac{\partial\zeta}{\partial z}\right)\Delta, \tag{16}$$

on en tirera, en regardant les déplacements ξ, η, ζ comme infiniment petits, et négligeant les infiniment petits du second ordre,

$$\left\{\begin{aligned}
A &= \left[\mathfrak{A}\left(1 + \frac{\partial\xi}{\partial x} - \frac{\partial\eta}{\partial y} - \frac{\partial\zeta}{\partial z}\right) + 2\mathfrak{f}\frac{\partial\xi}{\partial y} + 2\mathfrak{E}\frac{\partial\xi}{\partial z}\right]\Delta \\
&\quad + \left[L\frac{\partial\xi}{\partial x} + R\frac{\partial\eta}{\partial y} + Q\frac{\partial\zeta}{\partial z} + U\left(\frac{\partial\eta}{\partial z} + \frac{\partial\zeta}{\partial y}\right) + V\left(\frac{\partial\zeta}{\partial x} + \frac{\partial\xi}{\partial z}\right) + W\left(\frac{\partial\xi}{\partial y} + \frac{\partial\eta}{\partial x}\right)\right]\Delta, \\
B &= \left[2\mathfrak{f}\frac{\partial\eta}{\partial x} + \mathfrak{B}\left(1 - \frac{\partial\xi}{\partial x} + \frac{\partial\eta}{\partial y} - \frac{\partial\zeta}{\partial z}\right) + 2\mathfrak{D}\frac{\partial\eta}{\partial y}\right]\Delta \\
&\quad + \left[R\frac{\partial\xi}{\partial x} + M\frac{\partial\eta}{\partial y} + P\frac{\partial\zeta}{\partial z} + U'\left(\frac{\partial\eta}{\partial z} + \frac{\partial\zeta}{\partial y}\right) + V'\left(\frac{\partial\zeta}{\partial x} + \frac{\partial\xi}{\partial z}\right) + W'\left(\frac{\partial\xi}{\partial y} + \frac{\partial\eta}{\partial x}\right)\right]\Delta, \\
C &= \left[2\mathfrak{E}\frac{\partial\zeta}{\partial x} + 2\mathfrak{D}\frac{\partial\zeta}{\partial y} + \mathfrak{C}\left(1 - \frac{\partial\xi}{\partial x} - \frac{\partial\eta}{\partial y} + \frac{\partial\zeta}{\partial z}\right)\right]\Delta \\
&\quad + \left[Q\frac{\partial\xi}{\partial x} + P\frac{\partial\eta}{\partial y} + N\frac{\partial\zeta}{\partial z} + U''\left(\frac{\partial\eta}{\partial z} + \frac{\partial\zeta}{\partial y}\right) + V''\left(\frac{\partial\zeta}{\partial x} + \frac{\partial\xi}{\partial z}\right) + W''\left(\frac{\partial\xi}{\partial y} + \frac{\partial\eta}{\partial x}\right)\right]\Delta;
\end{aligned}\right. \tag{17}$$

$$\left\{\begin{aligned}
D &= \left[\mathfrak{D}\left(1 - \frac{\partial\xi}{\partial x}\right) + \mathfrak{E}\frac{\partial\eta}{\partial x} + \mathfrak{f}\frac{\partial\zeta}{\partial x} + \mathfrak{G}\frac{\partial\zeta}{\partial y} + \mathfrak{C}\frac{\partial\eta}{\partial z}\right]\Delta \\
&\quad + \left[U\frac{\partial\xi}{\partial x} + U'\frac{\partial\eta}{\partial y} + U''\frac{\partial\zeta}{\partial z} + P\left(\frac{\partial\eta}{\partial z} + \frac{\partial\zeta}{\partial y}\right) + W''\left(\frac{\partial\zeta}{\partial x} + \frac{\partial\xi}{\partial z}\right) + V'\left(\frac{\partial\xi}{\partial y} + \frac{\partial\eta}{\partial x}\right)\right]\Delta, \\
E &= \left[\mathfrak{D}\frac{\partial\xi}{\partial y} + \mathfrak{E}\left(1 - \frac{\partial\eta}{\partial y}\right) + \mathfrak{f}\frac{\partial\zeta}{\partial y} + \mathfrak{C}\frac{\partial\xi}{\partial z} + \mathfrak{A}\frac{\partial\zeta}{\partial x}\right]\Delta \\
&\quad + \left[V\frac{\partial\xi}{\partial x} + V'\frac{\partial\eta}{\partial y} + V''\frac{\partial\zeta}{\partial z} + W''\left(\frac{\partial\eta}{\partial z} + \frac{\partial\zeta}{\partial y}\right) + Q\left(\frac{\partial\zeta}{\partial x} + \frac{\partial\xi}{\partial z}\right) + U\left(\frac{\partial\xi}{\partial y} + \frac{\partial\eta}{\partial x}\right)\right]\Delta, \\
F &= \left[\mathfrak{D}\frac{\partial\xi}{\partial z} + \mathfrak{E}\frac{\partial\eta}{\partial z} + \mathfrak{f}\left(1 - \frac{\partial\zeta}{\partial z}\right) + \mathfrak{A}\frac{\partial\eta}{\partial x} + \mathfrak{B}\frac{\partial\xi}{\partial y}\right]\Delta \\
&\quad + \left[W\frac{\partial\xi}{\partial x} + W'\frac{\partial\eta}{\partial y} + W''\frac{\partial\zeta}{\partial z} + V'\left(\frac{\partial\eta}{\partial z} + \frac{\partial\zeta}{\partial y}\right) + U\left(\frac{\partial\zeta}{\partial x} + \frac{\partial\xi}{\partial z}\right) + R\left(\frac{\partial\xi}{\partial y} + \frac{\partial\eta}{\partial x}\right)\right]\Delta.
\end{aligned}\right. \tag{18}$$

On peut, en supposant constantes la densité Δ relative à l'état naturel du système et les quantités

(19) $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$, $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{f}$, L, M, N, P, Q, R, U, V, W, U′, V′, W′, U″, V″, W″,

revenir facilement des équations (17) et (18) aux formules (11). En effet, on tire des équations (25) et (28) de la page 166 du III[e] Volume (1)

$$\left\{\begin{aligned}
\rho\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2} &= \rho X + \frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial E}{\partial z}, \\
\rho\frac{\partial^2\eta}{\partial t^2} &= \rho Y + \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial y} + \frac{\partial D}{\partial z}, \\
\rho\frac{\partial^2\zeta}{\partial t^2} &= \rho Z + \frac{\partial E}{\partial x} + \frac{\partial D}{\partial y} + \frac{\partial C}{\partial z};
\end{aligned}\right. \tag{19}$$

puis on en conclut, en divisant les deux membres de chaque équation par $\rho = (1 - \upsilon)\Delta$,

$$\left\{\begin{aligned}
\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2} &= X + \frac{1}{(1-\upsilon)\Delta}\left(\frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial E}{\partial z}\right), \\
\frac{\partial^2\eta}{\partial t^2} &= Y + \frac{1}{(1-\upsilon)\Delta}\left(\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial y} + \frac{\partial D}{\partial z}\right), \\
\frac{\partial^2\zeta}{\partial t^2} &= Z + \frac{1}{(1-\upsilon)\Delta}\left(\frac{\partial E}{\partial x} + \frac{\partial D}{\partial y} + \frac{\partial C}{\partial z}\right).
\end{aligned}\right. \tag{20}$$

Or, si, dans les formules (19), on remplace les pressions A, B, C, D, E, F par leurs valeurs tirées des équations (17), (18), alors, en négligeant les infiniment petits du second ordre et réduisant en conséquence le binôme $1 - \upsilon$ à l'unité, on retrouvera précisément les formules (11).

Lorsque, parmi les sommes comprises dans les équations (3), (4), (5), (6), (7), celles qui renferment des puissances impaires de $\cos\alpha$, de $\cos\beta$ ou de $\cos\gamma$ se réduisent à zéro, c'est-à-dire, en d'autres termes, lorsque les quantités

(21) $\mathfrak{D}$, $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{f}$, U, V, W, U′, V′, W′, U″, V″, W″

s'évanouissent, le système des molécules m, m', m'', ... peut être considéré comme offrant trois axes d'élasticité rectangulaires et parallèles aux axes des x, y, z. Si, dans le même cas, on désigne par G, H, I les

(1) *Œuvres de Cauchy*, S. II, T. VIII, p. 202 et 203.

valeurs des coefficients $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{C}$, en sorte qu'on ait identiquement

$$\mathfrak{A}=G,\qquad \mathfrak{G}=H,\qquad \mathfrak{C}=I, \tag{22}$$

les formules (11) coïncideront avec les équations (68) de la page 208 du III^e Volume (1), et deviendront respectivement

$$\begin{cases} (L+G)\dfrac{\partial^2\xi}{\partial x^2}+(R+H)\dfrac{\partial^2\xi}{\partial y^2}+(Q+I)\dfrac{\partial^2\xi}{\partial z^2}+2R\dfrac{\partial^2\eta}{\partial x\,\partial y}+2Q\dfrac{\partial^2\zeta}{\partial z\,\partial x}+X=\dfrac{\partial^2\xi}{\partial t^2}, \\ (R+G)\dfrac{\partial^2\eta}{\partial x^2}+(M+H)\dfrac{\partial^2\eta}{\partial y^2}+(P+I)\dfrac{\partial^2\eta}{\partial z^2}+2P\dfrac{\partial^2\zeta}{\partial y\,\partial z}+2R\dfrac{\partial^2\xi}{\partial x\,\partial y}+Y=\dfrac{\partial^2\eta}{\partial t^2}, \\ (Q+G)\dfrac{\partial^2\zeta}{\partial x^2}+(P+H)\dfrac{\partial^2\zeta}{\partial y^2}+(N+I)\dfrac{\partial^2\zeta}{\partial z^2}+2Q\dfrac{\partial^2\xi}{\partial z\,\partial x}+2P\dfrac{\partial^2\eta}{\partial y\,\partial z}+Z=\dfrac{\partial^2\zeta}{\partial t^2}; \end{cases} \tag{23}$$

Alors aussi les formules (17), (18) s'accorderont avec les équations (49), (50) de la page 230 du III^e Volume (2), et se réduiront à

$$\begin{cases} A=\left[(L+G)\dfrac{\partial\xi}{\partial x}+(R-G)\dfrac{\partial\eta}{\partial y}+(Q-G)\dfrac{\partial\zeta}{\partial z}+G\right]\Delta, \\ B=\left[(R-H)\dfrac{\partial\xi}{\partial x}+(M+H)\dfrac{\partial\eta}{\partial y}+(P-H)\dfrac{\partial\zeta}{\partial z}+H\right]\Delta, \\ C=\left[(Q-I)\dfrac{\partial\xi}{\partial x}+(P-I)\dfrac{\partial\eta}{\partial y}+(N+I)\dfrac{\partial\zeta}{\partial z}+I\right]\Delta; \end{cases} \tag{24}$$

$$\begin{cases} D=\left[(P+I)\dfrac{\partial\eta}{\partial z}+(P+H)\dfrac{\partial\zeta}{\partial y}\right]\Delta, \\ E=\left[(Q+G)\dfrac{\partial\zeta}{\partial x}+(Q+I)\dfrac{\partial\xi}{\partial z}\right]\Delta, \\ F=\left[(R+H)\dfrac{\partial\xi}{\partial y}+(R+G)\dfrac{\partial\eta}{\partial x}\right]\Delta. \end{cases} \tag{25}$$

Dans le cas particulier où l'élasticité du système que l'on considère reste la même en tous sens autour de chaque point, les conditions (41) et (45) des pages 199 et 201 du III^e Volume (3) se trouvent remplies, en sorte qu'on a

$$G=H=I,\qquad L=M=N=3R,\qquad P=Q=R; \tag{26}$$

(1) *Œuvres de Cauchy*, S. II, t. VIII, p. 247.
(2) *Ibid.*, p. 271.
(3) *Ibid.*, p. 239 et 241.

et les formules (23), (24), (25) donnent

$$\begin{cases} (R+G)\left(\dfrac{\partial^2\xi}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2\xi}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2\xi}{\partial z^2}\right)+2R\dfrac{\partial\nu}{\partial x}+X=\dfrac{\partial^2\xi}{\partial t^2}, \\ (R+G)\left(\dfrac{\partial^2\eta}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2\eta}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2\eta}{\partial z^2}\right)+2R\dfrac{\partial\nu}{\partial y}+Y=\dfrac{\partial^2\eta}{\partial t^2}, \\ (R+G)\left(\dfrac{\partial^2\zeta}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2\zeta}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2\zeta}{\partial z^2}\right)+2R\dfrac{\partial\nu}{\partial z}+Z=\dfrac{\partial^2\zeta}{\partial t^2}; \end{cases} \tag{27}$$

$$\begin{cases} A=\left[2(R+G)\dfrac{\partial\xi}{\partial x}+(R-G)\nu+G\right]\Delta, \\ B=\left[2(R+G)\dfrac{\partial\eta}{\partial y}+(R-G)\nu+G\right]\Delta, \\ C=\left[2(R+G)\dfrac{\partial\zeta}{\partial z}+(R-G)\nu+G\right]\Delta; \end{cases} \tag{28}$$

$$\begin{cases} D=(R+G)\left(\dfrac{\partial\eta}{\partial z}+\dfrac{\partial\zeta}{\partial y}\right)\Delta, \\ E=(R+G)\left(\dfrac{\partial\zeta}{\partial x}+\dfrac{\partial\xi}{\partial z}\right)\Delta, \\ F=(R+G)\left(\dfrac{\partial\xi}{\partial y}+\dfrac{\partial\eta}{\partial x}\right)\Delta. \end{cases} \tag{29}$$

Enfin, si le système est constitué de manière que l'élasticité reste la même en tous sens autour d'une droite parallèle à l'axe des z, on aura simplement

$$G=H,\qquad L=M=3R,\qquad P=Q, \tag{30}$$

et les formules (23), (24), (25) donneront

$$\begin{cases} (3R+G)\dfrac{\partial^2\xi}{\partial x^2}+(R+G)\dfrac{\partial^2\xi}{\partial y^2}+(Q+I)\dfrac{\partial^2\xi}{\partial z^2}+2R\dfrac{\partial^2\eta}{\partial x\,\partial y}+2Q\dfrac{\partial^2\zeta}{\partial z\,\partial x}+X=\dfrac{\partial^2\xi}{\partial t^2}, \\ (R+G)\dfrac{\partial^2\eta}{\partial x^2}+(3R+G)\dfrac{\partial^2\eta}{\partial y^2}+(Q+I)\dfrac{\partial^2\eta}{\partial z^2}+2Q\dfrac{\partial^2\zeta}{\partial y\,\partial z}+2R\dfrac{\partial^2\xi}{\partial x\,\partial y}+Y=\dfrac{\partial^2\eta}{\partial t^2}, \\ (Q+G)\left(\dfrac{\partial^2\zeta}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2\zeta}{\partial y^2}\right)+(N+I)\dfrac{\partial^2\zeta}{\partial z^2}+2Q\left(\dfrac{\partial^2\xi}{\partial z\,\partial x}+\dfrac{\partial^2\eta}{\partial y\,\partial z}\right)+Z=\dfrac{\partial^2\zeta}{\partial t^2}; \end{cases} \tag{31}$$

$$(32)\quad \begin{cases} A=\left[(3R+G)\dfrac{\partial\xi}{\partial x}+(R-G)\dfrac{\partial\eta}{\partial y}+(Q-G)\dfrac{\partial\zeta}{\partial z}+G\right]\Delta, \\ B=\left[(R-G)\dfrac{\partial\xi}{\partial x}+(3R+G)\dfrac{\partial\eta}{\partial y}+(Q-G)\dfrac{\partial\zeta}{\partial z}+G\right]\Delta, \\ C=\left[(Q-I)\left(\dfrac{\partial\xi}{\partial x}+\dfrac{\partial\eta}{\partial y}\right)+(N+I)\dfrac{\partial\zeta}{\partial z}+I\right]\Delta; \end{cases}$$

$$(33)\quad \begin{cases} D=\left[(Q+I)\dfrac{\partial\eta}{\partial z}+(Q+G)\dfrac{\partial\zeta}{\partial y}\right]\Delta, \\ E=\left[(Q+G)\dfrac{\partial\zeta}{\partial x}+(Q+I)\dfrac{\partial\xi}{\partial z}\right]\Delta, \\ F=(R+G)\left(\dfrac{\partial\xi}{\partial y}+\dfrac{\partial\eta}{\partial x}\right)\Delta. \end{cases}$$

Lorsque, dans les équations (17), (18), on pose, pour abréger,

$$(34)\quad \mathfrak{A}\Delta=a,\qquad \mathfrak{B}\Delta=b,\qquad \mathfrak{C}\Delta=c,\qquad \mathfrak{D}\Delta=d,\qquad \mathfrak{E}\Delta=e,\qquad \mathfrak{F}\Delta=f;$$

$$(35)\quad \begin{cases} L\Delta=a, & M\Delta=b, & N\Delta=c, \\ P\Delta=d, & Q\Delta=e, & R\Delta=f, \\ U\Delta=u, & V\Delta=v, & W\Delta=w, \\ U'\Delta=u', & V'\Delta=v', & W'\Delta=w', \\ U''\Delta=u'', & V''\Delta=v'', & W''\Delta=w'', \end{cases}$$

elles deviennent respectivement

$$(36)\quad \begin{cases} A=a\left(1+\dfrac{\partial\xi}{\partial x}-\dfrac{\partial\eta}{\partial y}-\dfrac{\partial\zeta}{\partial z}\right)+2f\dfrac{\partial\xi}{\partial y}+2e\dfrac{\partial\xi}{\partial z} \\ \quad +a\dfrac{\partial\xi}{\partial x}+f\dfrac{\partial\eta}{\partial y}+e\dfrac{\partial\zeta}{\partial z}+u\left(\dfrac{\partial\eta}{\partial z}+\dfrac{\partial\zeta}{\partial y}\right)+v\left(\dfrac{\partial\zeta}{\partial x}+\dfrac{\partial\xi}{\partial z}\right)+w\left(\dfrac{\partial\xi}{\partial y}+\dfrac{\partial\eta}{\partial x}\right), \\ B=2f\dfrac{\partial\eta}{\partial x}+b\left(1-\dfrac{\partial\xi}{\partial x}+\dfrac{\partial\eta}{\partial y}-\dfrac{\partial\zeta}{\partial z}\right)+2b\dfrac{\partial\eta}{\partial z} \\ \quad +f\dfrac{\partial\xi}{\partial x}+b\dfrac{\partial\eta}{\partial y}+d\dfrac{\partial\zeta}{\partial z}+u'\left(\dfrac{\partial\eta}{\partial z}+\dfrac{\partial\zeta}{\partial y}\right)+v'\left(\dfrac{\partial\zeta}{\partial x}+\dfrac{\partial\xi}{\partial z}\right)+w'\left(\dfrac{\partial\xi}{\partial y}+\dfrac{\partial\eta}{\partial x}\right), \\ C=2e\dfrac{\partial\zeta}{\partial x}+2b\dfrac{\partial\zeta}{\partial y}+c\left(1-\dfrac{\partial\xi}{\partial x}-\dfrac{\partial\eta}{\partial y}+\dfrac{\partial\zeta}{\partial z}\right) \\ \quad +e\dfrac{\partial\xi}{\partial x}+d\dfrac{\partial\eta}{\partial y}+c\dfrac{\partial\zeta}{\partial z}+u''\left(\dfrac{\partial\eta}{\partial z}+\dfrac{\partial\zeta}{\partial y}\right)+v''\left(\dfrac{\partial\zeta}{\partial x}+\dfrac{\partial\xi}{\partial z}\right)+w''\left(\dfrac{\partial\xi}{\partial y}+\dfrac{\partial\eta}{\partial x}\right); \end{cases}$$

$$(37)\quad \begin{cases} D=b\left(1-\dfrac{\partial\xi}{\partial x}\right)+c\dfrac{\partial\eta}{\partial x}+f\dfrac{\partial\zeta}{\partial x}+b\dfrac{\partial\zeta}{\partial y}+c\dfrac{\partial\eta}{\partial z} \\ \quad +u\dfrac{\partial\xi}{\partial x}+u'\dfrac{\partial\eta}{\partial y}+u''\dfrac{\partial\zeta}{\partial z}+d\left(\dfrac{\partial\eta}{\partial z}+\dfrac{\partial\zeta}{\partial y}\right)+w''\left(\dfrac{\partial\zeta}{\partial x}+\dfrac{\partial\xi}{\partial z}\right)+v'\left(\dfrac{\partial\xi}{\partial y}+\dfrac{\partial\eta}{\partial x}\right), \\ E=b\dfrac{\partial\xi}{\partial y}+c\left(1-\dfrac{\partial\eta}{\partial y}\right)+f\dfrac{\partial\zeta}{\partial y}+c\dfrac{\partial\xi}{\partial z}+a\dfrac{\partial\zeta}{\partial x} \\ \quad +v\dfrac{\partial\xi}{\partial x}+v'\dfrac{\partial\eta}{\partial y}+v''\dfrac{\partial\zeta}{\partial z}+w''\left(\dfrac{\partial\eta}{\partial z}+\dfrac{\partial\zeta}{\partial y}\right)+e\left(\dfrac{\partial\zeta}{\partial x}+\dfrac{\partial\xi}{\partial z}\right)+u\left(\dfrac{\partial\xi}{\partial y}+\dfrac{\partial\eta}{\partial x}\right), \\ F=b\dfrac{\partial\xi}{\partial z}+c\dfrac{\partial\eta}{\partial z}+f\left(1-\dfrac{\partial\zeta}{\partial z}\right)+a\dfrac{\partial\eta}{\partial x}+b\dfrac{\partial\zeta}{\partial y} \\ \quad +w\dfrac{\partial\xi}{\partial x}+w'\dfrac{\partial\eta}{\partial y}+w''\dfrac{\partial\zeta}{\partial z}+v'\left(\dfrac{\partial\eta}{\partial z}+\dfrac{\partial\zeta}{\partial y}\right)+u\left(\dfrac{\partial\zeta}{\partial x}+\dfrac{\partial\xi}{\partial z}\right)+f\left(\dfrac{\partial\xi}{\partial y}+\dfrac{\partial\eta}{\partial x}\right). \end{cases}$$

Si l'on admet que, dans l'état naturel du système des molécules m, m', m'', ..., les pressions p', p'', p^{w} et, par suite, leurs composantes ou les six fonctions A, B, C, D, E, F s'évanouissent, les coefficients désignés par les lettres

$$\mathfrak{A},\quad \mathfrak{B},\quad \mathfrak{C},\quad \mathfrak{D},\quad \mathfrak{E},\quad \mathfrak{F}$$

dans les formules (11), (17), (18), ou par les lettres G, H, I dans les équations (23), (24), (25), se réduiront à zéro, ainsi que les constantes représentées par

$$a,\quad b,\quad c,\quad d,\quad e,\quad f$$

dans les formules (36), (37). Alors les équations (24), (25) et (23) coïncideront avec les équations (63), (64) et (68) des pages 233, 234 et 235 du III^e^ Volume des *Exercices* (1); tandis que les formules (36), (37) reproduiront les valeurs de A, B, C, D, E, F que nous avons précédemment obtenues à la page 2.

(1) *Œuvres de Cauchy*, S. II, T. VIII, p. 274 et 275.

SUR L'ÉQUATION

A L'AIDE DE LAQUELLE ON DÉTERMINE LES INÉGALITÉS SÉCULAIRES

DES MOUVEMENTS DES PLANÈTES.

Soit

$$s = f(x, y, z, \ldots) \tag{1}$$

une fonction réelle homogène et du second degré. Soient de plus

$$\varphi(x, y, z, \ldots), \quad \chi(x, y, z, \ldots), \quad \psi(x, y, z, \ldots), \quad \ldots \tag{2}$$

les dérivées partielles de $f(x, y, z, \ldots)$ prises par rapport aux variables x, y, z, ... Si l'on assujettit ces variables à l'équation de condition

$$x^2 + y^2 + z^2 + \ldots = 1, \tag{3}$$

les maxima et minima de la fonction s seront déterminés (*voir* les *Leçons sur le Calcul infinitésimal*, p. 252) par la formule

$$\frac{\varphi(x, y, z, \ldots)}{x} = \frac{\chi(x, y, z, \ldots)}{y} = \frac{\psi(x, y, z, \ldots)}{z} = \ldots. \tag{4}$$

D'ailleurs, les diverses fractions que renferme la formule (4), étant égales entre elles, seront égales au rapport

$$\frac{x\varphi(x, y, z, \ldots) + y\chi(x, y, z, \ldots) + z\psi(x, y, z, \ldots)}{x^2 + y^2 + z^2 + \ldots},$$

qui, en vertu de la condition (3) et du théorème des fonctions homogènes, se réduira simplement à

$$2f(x, y, z, \ldots) = 2s.$$

On aura donc encore

$$\frac{\varphi(x, y, z, \ldots)}{x} = \frac{\chi(x, y, z, \ldots)}{y} = \frac{\psi(x, y, z, \ldots)}{z} = \ldots = 2s, \tag{5}$$

ou, ce qui revient au même,

$$\frac{1}{2}\varphi(x, y, z, \ldots) = sx, \quad \frac{1}{2}\chi(x, y, z, \ldots) = sy, \quad \frac{1}{2}\psi(x, y, z, \ldots) = sz, \quad \ldots \tag{6}$$

Soit maintenant

$$S = 0 \tag{7}$$

l'équation que fournira l'élimination des variables x, y, z, ... entre les formules (6). Les *maxima* et les *minima* de la fonction

$$s = f(x, y, z, \ldots)$$

ne pourront être que des racines de l'équation (7). D'ailleurs cette équation sera semblable à celle que l'on rencontre dans la théorie des inégalités séculaires des mouvements des planètes, et dont les racines, toutes réelles, jouissent de propriétés dignes de remarque. Quelques-unes de ces propriétés étaient déjà connues : nous allons les rappeler ici, et en indiquer de nouvelles.

Soit n le nombre des variables x, y, z, ... Désignons d'ailleurs, pour plus de commodité, par

$$A_{xx}, \quad A_{yy}, \quad A_{zz}, \quad \ldots$$

les coefficients des carrés

$$x^2, \quad y^2, \quad z^2, \quad \ldots$$

dans la fonction homogène $s = f(x, y, z, \ldots)$, et par

$$A_{xy} = A_{yx}, \quad A_{xz} = A_{zx}, \quad \ldots, \quad A_{yz} = A_{zy}, \quad \ldots$$

les coefficients des doubles produits

$$2xy, \quad 2xz, \quad \ldots, \quad 2yz, \quad \ldots,$$

en sorte qu'on ait

$$s = A_{xx}x^2 + A_{yy}y^2 + A_{zz}z^2 + \ldots + 2A_{xy}xy + 2A_{xz}xz + \ldots + 2A_{yz}yz + \ldots \tag{8}$$

Les équations (6) deviendront

$$(9)\qquad \begin{cases} A_{xx}x + A_{xy}y + A_{xz}z + \ldots = sx, \\ A_{xy}x + A_{yy}y + A_{yz}z + \ldots = sy, \\ A_{xz}x + A_{yz}y + A_{zz}z + \ldots = sz, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{cases}$$

et pourront s'écrire comme il suit :

$$(10)\qquad \begin{cases} (A_{xx}-s)x + A_{xy}y + A_{xz}z + \ldots = 0, \\ A_{xy}x + (A_{yy}-s)y + A_{yz}z + \ldots = 0, \\ A_{xz}x + A_{yz}y + (A_{zz}-s)z + \ldots = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots. \end{cases}$$

Cela posé, il résulte des principes établis dans le Chapitre III de l'*Analyse algébrique* (§ 2) (¹) que le premier membre de l'équation (8), ou S, sera une fonction alternée des quantités comprises dans le Tableau :

$$(11)\qquad \begin{cases} A_{xx}-s, & A_{xy}, & A_{xz}, & \ldots, \\ A_{xy}, & A_{yy}-s, & A_{yz}, & \ldots, \\ A_{xz}, & A_{yz}, & A_{zz}-s, & \ldots, \\ \ldots, & \ldots, & \ldots\ldots, & \ldots, \end{cases}$$

savoir celle dont les différents termes sont représentés, aux signes près, par les produits qu'on obtient, lorsqu'on multiplie ces quantités, n à n, de toutes les manières possibles, en ayant soin de faire entrer dans chaque produit un facteur pris dans chacune des lignes horizontales du Tableau et un facteur pris dans chacune des lignes verticales. En opérant ainsi, on trouvera, par exemple, pour $n = 2$,

$$(12)\qquad S = (A_{xx}-s)(A_{yy}-s) - A_{xy}^2;$$

pour $n = 3$,

$$(13)\qquad \begin{cases} S = (A_{xx}-s)(A_{yy}-s)(A_{zz}-s) \\ \quad - A_{yz}^2(A_{xx}-s) - A_{xz}^2(A_{yy}-s) - A_{xy}^2(A_{zz}-s) + 2A_{xy}A_{xz}A_{yz}; \end{cases}$$

(¹) *Œuvres de Cauchy*, S. II, T. III.

pour $n = 4$,

$$(14)\qquad \begin{cases} S = (A_{xx}-s)(A_{yy}-s)(A_{zz}-s)(A_{uu}-s) \\ \quad -\Big[A_{zu}^2(A_{xx}-s)(A_{yy}-s) + A_{yu}^2(A_{xx}-s)(A_{zz}-s) + A_{yz}^2(A_{xx}-s)(A_{uu}-s) \\ \quad + A_{xu}^2(A_{yy}-s)(A_{zz}-s) + A_{xz}^2(A_{yy}-s)(A_{uu}-s) + A_{xy}^2(A_{zz}-s)(A_{uu}-s)\Big] \\ \quad + 2\Big[A_{yz}A_{yu}A_{zu}(A_{xx}-s) + A_{xz}A_{xu}A_{zu}(A_{yy}-s) \\ \quad + A_{xy}A_{xu}A_{yu}(A_{zz}-s) + A_{xy}A_{xz}A_{yz}(A_{uu}-s)\Big] \\ \quad + A_{xy}^2A_{zu}^2 + A_{xz}^2A_{yu}^2 + A_{xu}^2A_{yz}^2 - 2[A_{xy}A_{xz}A_{yu}A_{zu} + A_{xy}A_{xu}A_{yz}A_{zu} + A_{xz}A_{xu}A_{yz}A_{yu}]; \end{cases}$$

et, généralement, on obtiendra pour S une fonction de s, qui sera entière et du degré n.

Concevons à présent que l'on désigne par

$$(15)\qquad s_1,\quad s_2,\quad \ldots,\quad s_n$$

les n racines réelles ou imaginaires de l'équation (7). Soient, de plus,

$$(16)\qquad x_1,\ y_1,\ z_1;\quad x_2,\ y_2,\ z_2;\quad \ldots;\quad x_n,\ y_n,\ z_n$$

des systèmes de valeurs de $x, y, z, \ldots$ correspondants à ces mêmes valeurs de s, et choisis de manière à vérifier les formules (3) et (10). La première des formules (10) donnera

$$(A_{xx}-s_1)x_1 + A_{xy}y_1 + A_{xz}z_1 + \ldots = 0$$

et

$$(A_{xx}-s_2)x_2 + A_{xy}y_2 + A_{xz}z_2 + \ldots = 0;$$

puis l'on en conclura, en éliminant le coefficient A_{xx},

$$(17)\qquad (s_2-s_1)x_1x_2 + A_{xy}(x_2y_1 - x_1y_2) + A_{xz}(x_2z_1 - x_1z_2) + \ldots = 0.$$

En raisonnant de la même manière, on tirera de la deuxième des formules (10)

$$(18)\qquad A_{xy}(y_2x_1 - y_1x_2) + (s_2-s_1)y_1y_2 + A_{yz}(y_2z_1 - y_1z_2) + \ldots = 0,$$

de la troisième

$$(19)\qquad A_{xz}(z_2x_1 - z_1x_2) + A_{zy}(z_2y_1 - z_1y_2) + (s_2-s_1)z_1z_2 + \ldots = 0,$$

etc. Enfin, si l'on ajoute membre à membre les équations (17), (18),

(19), etc., on trouvera

$$(x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2+\ldots)(s_2-s_1)=0. \tag{20}$$

Donc, toutes les fois que les racines s_1, s_2 seront inégales entre elles, on aura

$$x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2+\ldots=0; \tag{21}$$

et, si l'équation (7) n'offre pas de racines égales, les valeurs de x, y, z, ... correspondantes à ces racines vérifieront toutes les formules comprises dans le Tableau suivant :

$$\left\{\begin{array}{llll} x_1^2+y_1^2+z_1^2+\ldots=1, & x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2+\ldots=0, & \ldots, & x_1x_n+y_1y_n+z_1z_n+\ldots=0, \\ x_2x_1+y_2y_1+z_2z_1+\ldots=0, & x_2^2+y_2^2+z_2^2+\ldots=1, & \ldots, & x_2x_n+y_2y_n+z_2z_n+\ldots=0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, & \ldots, & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ x_nx_1+y_ny_1+z_nz_1+\ldots=0, & x_nx_2+y_ny_2+z_nz_2+\ldots=0, & \ldots, & x_n^2+y_n^2+z_n^2+\ldots=1. \end{array}\right. \tag{22}$$

Soit maintenant R ce que devient la fonction S, lorsque, dans le Tableau (11), on supprime tous les termes appartenant à la première colonne horizontale, ainsi qu'à la première colonne verticale; et Q ce que devient la même fonction, quand on supprime, en outre, les termes renfermés dans les deuxièmes colonnes horizontale et verticale. Enfin, désignons par P_{uv} ce que devient S, lorsqu'on supprime dans le Tableau (11) les termes qui appartiennent à la même colonne horizontale que le binôme $A_{uu}-s$, avec ceux qui appartiennent à la même colonne verticale que $A_{vv}-s$, ou bien encore les termes compris dans la même colonne verticale que $A_{uu}-s$, et ceux qui sont renfermés dans la même colonne horizontale que $A_{vv}-s$. Les polynômes R, Q; P_{xx}, P_{xy}, P_{xz}, ...; P_{yy}, P_{yz}, ..., P_{zz} seront, ainsi que S, des fonctions entières de s. De plus, on aura évidemment

$$R=P_{xx}, \tag{23}$$

et l'on conclura des équations (10), en faisant abstraction de la première,

$$\frac{x}{P_{xx}}=-\frac{y}{P_{xy}}=-\frac{z}{P_{xz}}=-\ldots \tag{24}$$

Posons d'ailleurs, pour abréger,

$$X=P_{xx}=R, \quad Y=-P_{xy}, \quad Z=-P_{xz}, \quad \ldots. \tag{25}$$

La formule (24), combinée avec la formule (3), donnera

$$\frac{x}{X}=\frac{y}{Y}=\frac{z}{Z}=\ldots=\pm\frac{1}{\sqrt{X^2+Y^2+Z^2+\ldots}}; \tag{26}$$

et, si l'on désigne par

$$X_1,\ Y_1,\ Z_1,\ \ldots;\ X_2,\ Y_2,\ Z_2,\ \ldots;\ X_n,\ Y_n,\ Z_n,\ \ldots \tag{27}$$

les systèmes de valeurs de X, Y, Z, ... correspondants aux racines s_1, s_2, ..., s_n de l'équation (7), on tirera de la formule (26)

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{x_1}{X_1}=\dfrac{y_1}{Y_1}=\dfrac{z_1}{Z_1}=\ldots=\pm\dfrac{1}{\sqrt{X_1^2+Y_1^2+Z_1^2+\ldots}}, \\ \dfrac{x_2}{X_2}=\dfrac{y_2}{Y_2}=\dfrac{z_2}{Z_2}=\ldots=\pm\dfrac{1}{\sqrt{X_2^2+Y_2^2+Z_2^2+\ldots}}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \dfrac{x_n}{X_n}=\dfrac{y_n}{Y_n}=\dfrac{z_n}{Z_n}=\ldots=\pm\dfrac{1}{\sqrt{X_n^2+Y_n^2+Z_n^2+\ldots}}. \end{array}\right. \tag{28}$$

Les valeurs de x_1, y_1, z_1, ... seront complètement déterminées, aux signes près, par la première des formules (28), à moins que la supposition $s=s_1$ ne fasse évanouir simultanément les fonctions $X=R$, Y, Z, ...; et, comme on peut faire un semblable raisonnement à l'égard de x_2, y_2, z_2, ...; ...; x_n, y_n, z_n, ..., il est clair que les expressions (16) seront, aux signes près, complètement déterminées par les formules (28), à moins que des racines de l'équation (7) ne vérifient en même temps la formule

$$R=0. \tag{29}$$

Ajoutons que, si les racines s_1, s_2 sont inégales, on tirera de la formule (21), combinée avec les deux premières des formules (28),

$$X_1X_2+Y_1Y_2+Z_1Z_2+\ldots=0. \tag{30}$$

En partant de la formule (30), on prouve facilement que l'équa-

tion (7) ne saurait admettre de racines imaginaires, tant que les coefficients A_{xx}, A_{xy}, A_{xz}, ...; A_{yy}, A_{yz}, ...; A_{zz}, ... restent réels. En effet, si l'équation (7) offrait alors une racine imaginaire de la forme $\lambda + \mu\sqrt{-1}$, elle en admettrait une seconde conjuguée à la première ou de la forme $\lambda - \mu\sqrt{-1}$; et, en prenant ces racines pour s_1 et s_2, on obtiendrait pour X_1 et X_2 des valeurs de la forme

$$X_1 = \mathfrak{M} + \mathfrak{N}\sqrt{-1}, \qquad X_2 = \mathfrak{M} - \mathfrak{N}\sqrt{-1}, \tag{31}$$

$\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$ étant des quantités réelles. Par suite, le produit

$$X_1 X_2 = \mathfrak{M}^2 + \mathfrak{N}^2 \tag{32}$$

serait nécessairement positif ou nul; et, comme on pourrait en dire autant des produits $Y_1 Y_2$, $Z_1 Z_2$, ..., il est clair que la condition (30) ne saurait être remplie, excepté dans le cas où l'on aurait

$$X_1 = X_2 = 0, \qquad Y_1 = Y_2 = 0, \qquad Z_1 = Z_2 = 0, \qquad \ldots, \tag{33}$$

c'est-à-dire dans le cas où chacune des racines s_1, s_2 vérifierait les équations

$$P_{xx} = 0, \qquad P_{xy} = 0, \qquad P_{xz} = 0, \qquad \ldots. \tag{34}$$

Donc, si l'équation (7), du degré n, admettait des racines imaginaires, ces racines seraient propres à vérifier en même temps l'équation $P_{xx} = 0$, ou

$$R = 0, \tag{29}$$

qui est de même forme, mais du degré $n - 1$. En raisonnant de la même manière, on fera voir que, si l'équation (29) admet des racines imaginaires, ces racines seront propres à vérifier en même temps l'équation

$$Q = 0, \tag{35}$$

qui est de même forme, mais du degré $n - 2$; et ainsi de suite. Donc, si l'équation (7) offrait des racines imaginaires, ces racines devraient

satisfaire à chacune des équations de la forme

$$S = 0, \qquad R = 0, \qquad Q = 0, \qquad \ldots. \tag{36}$$

D'ailleurs, en prolongeant la série des équations (36), on parvient facilement à une équation du premier degré, qui coïncide avec la dernière des suivantes

$$A_{xx} - s = 0, \qquad A_{yy} - s = 0, \qquad A_{zz} - s = 0, \qquad \ldots; \tag{37}$$

et cette équation du premier degré n'admet pas de racines imaginaires, mais une seule racine réelle. Donc l'équation (7) n'a pas de racines imaginaires.

Concevons à présent que l'on combine la première des équations (10) avec la formule (24). On obtiendra la suivante

$$(A_{xx} - s)P_{xx} - A_{xy}P_{xy} - A_{xz}P_{xz} - \ldots = 0, \tag{38}$$

qui devra coïncider avec l'équation (7); et, en effet, il suffit d'observer de quelle manière les polynômes S, P_{xx}, P_{xy}, P_{xz}, ... se forment à l'aide des quantités renfermées dans le Tableau (11), pour reconnaître que l'on a identiquement, c'est-à-dire quel que soit s,

$$(A_{xx} - s)P_{xx} - A_{xy}P_{xy} - A_{xz}P_{xz} - \ldots = S. \tag{39}$$

Ajoutons que, en combinant la seconde, la troisième, etc. des équations (10) avec la formule (24), on obtiendra encore des équations identiques, savoir :

$$\begin{cases} A_{xy}P_{xx} - (A_{yy} - s)P_{xy} - A_{yz}P_{xz} - \ldots = 0, \\ A_{xz}P_{xx} - A_{yz}P_{xy} - (A_{zz} - s)P_{xz} - \ldots = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases} \tag{40}$$

Cela posé, imaginons que l'on prenne pour s une quelconque des racines de l'équation $P_{xx} = 0$, ou

$$R = 0. \tag{29}$$

Les formules (39) et (40) donneront alors

$$(41)\qquad \begin{cases} A_{xy}P_{xy}+A_{xz}P_{xz}+\ldots=-S, \\ (A_{yy}-s)P_{xy}+A_{yz}P_{xz}+\ldots=0, \\ A_{yz}P_{xy}+(A_{zz}-s)P_{xz}+\ldots=0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

Le nombre des formules (41) étant égal à n, si l'on efface l'une de celles qui offrent zéro pour second membre, les autres suffiront pour déterminer, dans l'hypothèse admise, les valeurs des $n-1$ quantités

$$P_{xy},\quad P_{xz},\quad \ldots$$

en fonction de S et des coefficients A_{xy}, A_{xz}, ..., $A_{yy}-s$, A_{yz}, ..., $A_{zz}-s$, ... Si, pour fixer les idées, on supprime la seconde des formules (41), la valeur de P_{xy}, tirée des autres, deviendra, eu égard aux notations adoptées,

$$P_{xy}=-\frac{QS}{P_{xy}}.$$

Donc, pour chacune des valeurs de s propres à vérifier l'équation (29), on aura

$$(42)\qquad QS=-P_{xy}^2=-Y^2,$$

et, par conséquent, les quantités Q, S seront affectées de signes contraires, si l'une et l'autre diffèrent de zéro. Cette remarque fournit une nouvelle démonstration de la réalité des racines de l'équation (7), et permet, en outre, de fixer des limites entre lesquelles ces racines se trouvent comprises, ainsi qu'on va le faire voir.

Supposons d'abord, pour plus de simplicité, que le nombre des variables $x, y, z, \ldots$ soit égal à 3. Les équations (10) deviendront

$$(43)\qquad \begin{cases} (A_{xx}-s)x+A_{xy}y+A_{xz}z=0, \\ A_{xy}x+(A_{yy}-s)y+A_{yz}z=0, \\ A_{xz}x+A_{yz}y+(A_{zz}-s)z=0; \end{cases}$$

et l'on tirera des deux dernières

$$(44)\qquad x=\frac{P_{xx}}{S},\qquad y=-\frac{P_{xy}}{S},\qquad z=-\frac{P_{xz}}{S},$$

les valeurs de P_{xx} ou R, P_{xy}, P_{xz} et S étant respectivement

$$(45)\qquad R=P_{xx}=(A_{yy}-s)(A_{zz}-s)-A_{yz}^2,$$

$$(46)\qquad \begin{cases} P_{xy}=A_{xy}(A_{zz}-s)-A_{xz}A_{yz}, \\ P_{xz}=A_{xz}(A_{yy}-s)-A_{xy}A_{yz}, \end{cases}$$

$$(47)\qquad \begin{cases} S=(A_{xx}-s)(A_{yy}-s)(A_{zz}-s) \\ \quad -A_{yz}^2(A_{xx}-s)-A_{xz}^2(A_{yy}-s)-A_{xy}^2(A_{zz}-s)+2A_{xy}A_{xz}A_{yz}. \end{cases}$$

Cela posé, on aura identiquement

$$(48)\qquad \begin{cases} (A_{xx}-s)R-A_{xy}P_{xy}-A_{xz}P_{xz}=S, \\ A_{xy}R-(A_{yy}-s)P_{xy}-A_{yz}P_{xz}=0, \\ A_{xz}R-A_{yz}P_{xy}-(A_{zz}-s)P_{xz}=0; \end{cases}$$

et, si l'on prend pour s une quelconque des racines de l'équation (29), les formules (48) donneront

$$(49)\qquad \begin{cases} A_{xy}P_{xy}+A_{xz}P_{xz}=-S, \\ (A_{yy}-s)P_{xy}+A_{yz}P_{xz}=0, \\ A_{yz}P_{xy}+(A_{zz}-s)P_{xz}=0. \end{cases}$$

Enfin, si l'on combine la première des formules (49) avec la troisième, on en tirera

$$(50)\qquad P_{xy}=-\frac{(A_{zz}-s)S}{A_{xy}(A_{zz}-s)-A_{xz}A_{yz}}=-\frac{(A_{zz}-s)S}{P_{xy}},$$

ou, ce qui revient au même,

$$QS=-P_{xy}^2,$$

la valeur de Q étant

$$(51)\qquad Q=A_{zz}-s.$$

Donc, à chacune des racines de l'équation (7) correspondront des

valeurs de Q et de S propres à vérifier la formule (42) et, par conséquent, affectées de signes contraires. En résumé, les valeurs des polynômes

$$A_{zz} - s \tag{52}$$

et

$$\begin{cases} (A_{xx}-s)(A_{yy}-s)(A_{zz}-s) \\ \quad -A_{yz}^2(A_{xx}-s) - A_{xz}^2(A_{yy}-s) - A_{xy}^2(A_{zz}-s) + 2A_{xy}A_{xz}A_{yz}, \end{cases} \tag{53}$$

correspondantes à l'une quelconque des racines de l'équation

$$(A_{yy}-s)(A_{zz}-s) - A_{yz}^2 = 0, \tag{54}$$

seront affectées, si elles ne s'évanouissent ni l'une ni l'autre, de signes différents.

Soient maintenant s', s'' les deux racines réelles de l'équation (54), rangées dans leur ordre de grandeur, en sorte qu'on ait

$$s' < s''. \tag{55}$$

Ces racines, qui sont toutes deux réelles, puisqu'elles se réduisent aux deux valeurs de s données par la formule

$$s = \frac{A_{yy}+A_{zz}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{A_{yy}-A_{zz}}{2}\right)^2 + A_{yz}^2}, \tag{56}$$

vérifieront la condition

$$s' + s'' = A_{yy} + A_{zz}, \tag{57}$$

de laquelle on tirera, en ayant égard à l'équation (54),

$$A_{zz} - s' = -(A_{yy} - s'') = -\frac{A_{yz}^2}{A_{zz}-s''}$$

ou, ce qui revient au même,

$$(A_{zz}-s')(A_{zz}-s'') = -A_{yz}^2. \tag{58}$$

Donc les deux valeurs du binôme $A_{zz} - s$, correspondantes aux deux racines de l'équation (54), seront affectées de signes différents, si

aucune d'elles ne s'évanouit; et, par suite, la racine unique A_{zz} de l'équation

$$A_{zz} - s = 0 \tag{59}$$

ou

$$Q = 0 \tag{60}$$

sera renfermée entre les deux racines de l'équation (54) ou

$$R = 0, \tag{29}$$

à moins qu'elle ne se réduise à l'une d'entre elles. Donc, attendu que la condition (55) entraine la suivante

$$A_{zz} - s' > A_{zz} - s'', \tag{61}$$

on aura

$$A_{zz} - s' \gtrless 0 \quad \text{et} \quad A_{zz} - s'' \gtrless 0. \tag{62}$$

Cela posé, soient S', S'' les deux valeurs du polynôme (53) ou de S correspondantes aux valeurs s', s'' de la variable s. Si aucune des deux racines s', s'' ne vérifie l'équation (60) ou l'équation (7), S' sera une quantité affectée d'un signe contraire à celui de $A_{zz} - s'$, et S'' une quantité affectée d'un signe contraire à celui de $A_{zz} - s''$. On aura donc

$$S' \lessgtr 0, \quad S'' \gtrless 0. \tag{63}$$

D'autre part, le polynôme (53) ou S se réduit pour $s = -\infty$ à l'infini positif, et pour $s = \infty$ à l'infini négatif. Donc, si dans ce polynôme on substitue successivement, au lieu de s, les quatre valeurs

$$s = -\infty, \quad s = s', \quad s = s'', \quad s = \infty, \tag{64}$$

les résultats des substitutions seront généralement affectés des signes

$$+, \quad -, \quad +, \quad -; \tag{65}$$

et, par conséquent, l'équation (7) ou

$$\begin{cases} (A_{xx}-s)(A_{yy}-s)(A_{zz}-s) \\ \quad -A_{yz}^2(A_{xx}-s) - A_{xz}^2(A_{yy}-s) - A_{xy}^2(A_{zz}-s) + 2A_{xy}A_{xz}A_{yz} = 0 \end{cases} \tag{66}$$

admettra trois racines réelles, savoir une racine inférieure à s', une autre comprise entre les limites s', s'', et une troisième supérieure à s''.

Supposons maintenant que la fonction (1) renferme quatre variables x, y, z, u. Dans ce cas, la fonction S sera déterminée par la formule (14), et les fonctions R, Q par les deux suivantes :

$$(67)\quad \begin{cases} R = (A_{yy}-s)(A_{zz}-s)(A_{uu}-s) \\ \quad -A_{zu}^2(A_{yy}-s) - A_{yu}^2(A_{zz}-s) - A_{yz}^2(A_{uu}-s) + 2A_{yz}A_{yu}A_{zu}, \end{cases}$$

$$(68)\quad Q = (A_{zz}-s)(A_{uu}-s) - A_{zu}^2.$$

D'ailleurs, les fonctions (67) et (68) étant semblables, la première à la fonction (53), la seconde à la fonction (45), on prouvera, en raisonnant comme dans le cas précédent, que l'équation $R = 0$ a généralement trois racines réelles, dont l'une est comprise entre les valeurs réelles de s propres à vérifier l'équation du second degré

$$(69)\quad (A_{zz}-s)(A_{uu}-s) - A_{zu}^2 = 0,$$

tandis que les deux autres racines sont l'une inférieure et l'autre supérieure aux valeurs dont il s'agit. Cela posé, soient s', s'', s''' les trois racines de l'équation

$$(70)\quad \begin{cases} (A_{yy}-s)(A_{zz}-s)(A_{uu}-s) \\ \quad -A_{zu}^2(A_{yy}-s) - A_{yu}^2(A_{zz}-s) - A_{yz}^2(A_{uu}-s) + 2A_{yz}A_{yu}A_{zu} = 0, \end{cases}$$

rangées par ordre de grandeur, et désignons par

$$Q', \quad Q'', \quad Q''' ; \qquad S', \quad S'', \quad S'''$$

les valeurs de Q et de S correspondantes à ces mêmes racines. Q sera une quantité affectée du même signe que la valeur de Q correspondante à $s = -\infty$, c'est-à-dire une quantité positive, et l'on aura, par suite,

$$(71)\quad Q' > 0, \qquad Q'' < 0, \qquad Q''' > 0.$$

Donc, en ayant égard à la formule (42), on trouvera généralement

$$(72)\quad S' < 0, \qquad S'' > 0, \qquad S''' < 0.$$

D'autre part, le polynôme (14) se réduit, pour $s = -\infty$, ainsi que pour $s = \infty$, à l'infini positif. Donc, si dans ce polynôme on substitue successivement, au lieu de s, les cinq valeurs

$$(73)\quad s = -\infty, \qquad s = s', \qquad s = s'', \qquad s = s''', \qquad s = \infty,$$

les résultats des substitutions seront généralement affectés des signes

$$(74)\quad +, \quad -, \quad +, \quad -, \quad +.$$

Donc l'équation (7), dans le cas dont il s'agit, admettra quatre racines réelles respectivement comprises entre les limites

$$(75)\quad -\infty, \quad s', \quad s'', \quad s''', \quad +\infty.$$

Les mêmes raisonnements, successivement étendus au cas où la fonction s renfermerait cinq, six, ... variables, fourniront évidemment la proposition suivante :

THÉORÈME I. — *Quel que soit le nombre n des variables x, y, z, ..., l'équation*

$$(7)\quad S = 0$$

et les équations de même forme

$$(76)\quad R = 0, \qquad Q = 0, \qquad \ldots$$

auront toutes leurs racines réelles. De plus, si l'on nomme

$$(77)\quad s', \quad s'', \quad s''', \quad \ldots, \quad s^{(n-1)}$$

les racines de l'équation

$$(29)\quad R = 0$$

rangées par ordre de grandeur, les racines réelles de l'équation (7) seront respectivement comprises entre les limites

$$(78)\quad -\infty, \quad s', \quad s'', \quad s''', \quad \ldots, \quad s^{(n-1)}, \quad \infty.$$

D'après ce qui a été dit ci-dessus, il ne peut rester de doutes sur l'exactitude du théorème I, si ce n'est dans le cas où quelques valeurs de s vérifieraient à la fois deux des équations

$$(36)\quad S = 0, \qquad R = 0, \qquad Q = 0, \qquad \ldots,$$

prises consécutivement. Observons d'ailleurs que, si l'on nomme

$$S',\ S'',\ S''',\ \ldots,\ S^{(n-1)} \tag{79}$$

les valeurs du polynôme S correspondantes aux racines s', s'', s''', ..., $s^{(n-1)}$ de l'équation (29), et

$$K = S'S''\ldots S^{(n-1)} \tag{80}$$

le produit de toutes ces valeurs, K sera une fonction symétrique des racines s', s'', s''', ..., $s^{(n-1)}$, qui pourra être transformée en une fonction entière des coefficients A_{xx}, A_{xy}, A_{xz}, ..., A_{yy}, A_{yz}, ..., A_{zz}, ..., et s'évanouira toutes les fois que les équations (7) et (29) auront des racines communes.

Il est facile de vérifier le théorème I dans le cas où les quantités A_{xx}, A_{xy}, A_{xz}, ..., A_{yy}, A_{yz}, ..., A_{zz}, ... s'évanouissent toutes à l'exception de celles qui, dans le second membre de la formule (8), sont multipliées par la variable x ou par le carré de l'une des variables x, y, z, ... Alors, en effet, l'équation (29), réduite à

$$(A_{yy}-s)(A_{zz}-s)(A_{nn}-s)\ldots = 0, \tag{81}$$

aura pour racines A_{yy}, A_{zz}, A_{nn}, ... Donc, si, pour fixer les idées, on suppose

$$A_{yy} < A_{zz} < A_{nn}, \quad \ldots, \tag{82}$$

on pourra prendre

$$s' = A_{yy}, \quad s'' = A_{zz}, \quad s''' = A_{nn}, \quad \ldots \tag{83}$$

D'un autre côté, comme, dans l'hypothèse admise, le Tableau (11) se réduira au suivant

$$\begin{cases} A_{xx}-s, & A_{xy}, & A_{xz}, & A_{xu}, & \ldots, \\ A_{xy}, & A_{yy}-s, & 0, & 0, & \ldots, \\ A_{xz}, & 0, & A_{zz}-s, & 0, & \ldots, \\ A_{xu}, & 0, & 0, & A_{nn}-s, & \ldots, \\ \ldots\ldots, & \ldots\ldots, & \ldots\ldots, & \ldots\ldots, & \ldots, \end{cases} \tag{84}$$

on aura évidemment

$$\begin{cases} S = (A_{yy}-s)(A_{zz}-s)(A_{nn}-s)\ldots\left(A_{xx}-s-\dfrac{A_{xy}^2}{A_{yy}-s}-\dfrac{A_{xz}^2}{A_{zz}-s}-\dfrac{A_{xn}^2}{A_{nn}-s}-\ldots\right) \\ \quad = (A_{xx}-s)(A_{yy}-s)(A_{zz}-s)(A_{nn}-s)\ldots \\ \quad -A_{xy}^2(A_{zz}-s)(A_{nn}-s)\ldots-A_{xz}^2(A_{yy}-s)(A_{nn}-s)\ldots-A_{xn}^2(A_{yy}-s)(A_{zz}-s)\ldots; \end{cases} \tag{85}$$

puis on en conclura, en désignant par S', S'', S''', ... les valeurs de S correspondantes aux valeurs $s' = A_{yy}$, $s'' = A_{zz}$, $s''' = A_{nn}$ de la variable s,

$$\begin{cases} S' = -A_{xy}^2(A_{zz}-A_{yy})(A_{nn}-A_{yy})\ldots < 0, \\ S'' = +A_{xz}^2(A_{zz}-A_{yy})(A_{nn}-A_{zz})\ldots > 0, \\ S''' = -A_{xn}^2(A_{nn}-A_{yy})(A_{nn}-A_{zz})\ldots < 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases} \tag{86}$$

Enfin, il est clair que S se réduira, pour $s = -\infty$, à l'infini positif, et pour $s = \infty$, à $(-1)^n$. Donc, si dans le polynôme S on substitue successivement, au lieu de s, les $n+1$ valeurs

$$-\infty, \quad s' = A_{yy}, \quad s'' = A_{zz}, \quad s''' = A_{nn}, \quad \ldots, \quad +\infty, \tag{87}$$

les résultats des substitutions seront alternativement positifs et négatifs. Donc l'équation (7) offrira, dans l'hypothèse admise, n racines réelles qui, prises consécutivement et deux à deux, renfermeront entre elles les racines de l'équation (29).

Dans le cas que nous venons de considérer, les quantités S', S'', S''', ... ne s'évanouiront jamais et, par conséquent, une même valeur de s ne pourra vérifier simultanément les équations (7) et (81), à moins que l'un des coefficients A_{xy}, A_{xz}, A_{xu}, ... ne se réduise à zéro. Donc la fonction entière de ces coefficients, désignée par K et déterminée par l'équation (80), offrira ordinairement, dans le cas dont il s'agit, une valeur distincte de zéro. Il en serait de même, à plus forte raison, si aucun des coefficients A_{xx}, A_{xy}, A_{xz}, ..., A_{yy}, A_{yz}, ..., A_{zz}, ... ne s'évanouissait. En résumé, la quantité K ne peut être identiquement nulle, et vérifier l'équation

$$K = 0, \tag{88}$$

quelles que soient les valeurs attribuées aux coefficients A_{xx}, A_{xy}, A_{xz}, ..., A_{yy}, A_{yz}, ..., A_{zz}, ...

Il est maintenant facile d'étendre le théorème I au cas où quelques valeurs de la variable s vérifieraient à la fois deux des équations (36) prises consécutivement. Admettons, pour fixer les idées, que, parmi ces équations, les deux premières, savoir $S = 0$, $R = 0$, soient les seules qui offrent des racines communes. La condition (88) sera remplie; mais elle cessera de l'être généralement si l'on attribue à l'un des coefficients renfermés dans la fonction K un accroissement infiniment petit ε. Soient ΔS, ΔR les accroissements correspondants des fonctions S et R. Les équations

$$S + \Delta S = 0, \tag{89}$$

$$R + \Delta R = 0 \tag{90}$$

n'offriront pas de racines communes, et les racines de la dernière, rangées par ordre de grandeur, seront de la forme

$$s' + \Delta s', \quad s'' + \Delta s'', \quad s''' + \Delta s''', \quad \ldots, \quad s^{(n-1)} + \Delta s^{(n-1)}, \tag{91}$$

$\Delta s'$, $\Delta s''$, $\Delta s'''$, ..., $\Delta s^{(n-1)}$ désignant des quantités infiniment petites qui s'évanouiront avec ε. D'ailleurs, on conclura du théorème I que l'équation (89) admet n racines réelles, respectivement comprises entre les limites

$$-\infty, \quad s' + \Delta s', \quad s'' + \Delta s'', \quad s''' + \Delta s''', \quad \ldots, \quad s^{(n-1)} + \Delta s^{(n-1)}, \quad \infty; \tag{92}$$

et cette conclusion subsistera pour des valeurs de ε aussi rapprochées de zéro qu'on le jugera convenable. Donc elle subsistera encore pour $\varepsilon = 0$, c'est-à-dire que les n racines de l'équation (7) seront réelles, et renfermées entre les limites (78). Seulement, dans le cas particulier dont il s'agit, quelques-unes des racines de l'équation (7) pourront se réduire à quelques-unes des quantités s', s'', s''', ..., $s^{(n-1)}$, qui généralement leur servent de limites.

On pourrait raisonner de la même manière, quelles que fussent, parmi les équations (36), celles qui, prises consécutivement, offriraient des racines communes; car cela ne peut arriver que dans le cas où les coefficients A_{xx}, A_{xy}, A_{xz}, ...; A_{yy}, A_{yz}, ...; A_{zz}, ... vérifient une ou plusieurs des conditions

$$K = 0, \quad L = 0, \quad M = 0, \quad \ldots, \tag{93}$$

L, M, ... désignant les polynômes dans lesquels se transforme K, lorsque, du système des variables $x, y, z, \ldots$, on retranche la variable x, ou les deux variables x, y, ou les trois variables x, y, z, etc. Or, pour que les conditions (93) cessent d'être vérifiées, il suffira d'attribuer à un ou à plusieurs des coefficients qu'elles renferment des accroissements infiniment petits ε, ε', ε'', ... Soient ΔR, ΔS, ΔQ, ... les accroissements correspondants et infiniment petits des fonctions S, R, Q, ... Le théorème I subsistera pour les équations

$$S + \Delta S = 0 \tag{94}$$

et

$$R + \Delta R = 0, \quad Q + \Delta Q = 0, \quad \ldots, \tag{95}$$

tandis que ε, ε', ε'', ... s'approcheront indéfiniment de zéro; et, par conséquent, il continuera de subsister pour les équations (7) et (76), au moment où ε, ε', ε'', ... s'évanouiront. Seulement alors deux des équations (36), prises consécutivement, pourront avoir des racines communes.

Si, comme on l'a déjà fait, on nomme

$$s_1, \quad s_2, \quad s_3, \quad \ldots, \quad s_{n-1}, \quad s_n \tag{15}$$

les racines de l'équation (7), et si on les suppose rangées par ordre de grandeur, deux de ces racines, prises consécutivement, par exemple s_m et s_{m+1}, ne pourront devenir égales entre elles sans coïncider avec la racine $s^{(m)}$ de l'équation $R = 0$ ou $P_{xx} = 0$. Donc, si l'équation (7) admet des racines égales, chacune d'elles vérifiera encore la formule $P_{xx} = 0$ que l'on obtient à la place de l'équation (7), lorsque du système des variables $x, y, z, \ldots$ on retranche la variable x. Pareillement,

chacune des racines égales vérifiera les formules

$$P_{yy}=0, \qquad P_{zz}=0, \qquad \ldots,$$

que l'on obtient en retranchant du système $x, y, z, \ldots$ la variable y, ou la variable z, etc. En général, si deux, trois, quatre, etc. racines de l'équation (7) deviennent égales entre elles, chacune de ces racines fournira évidemment une valeur de s propre à vérifier, non seulement l'équation (7), mais encore toutes celles qu'on en déduit, lorsque du système $x, y, z, \ldots$ on retranche une, deux, trois, etc. variables arbitrairement choisies. Alors aussi les coefficients $A_{xx}, A_{xy}, A_{xz}, \ldots; A_{yy}, A_{yz}, \ldots; A_{zz}, \ldots$ satisferont à une ou à plusieurs des conditions (93). Mais ces conditions cesseront d'être vérifiées et, par conséquent, les racines de l'équation (7) deviendront toutes inégales, si l'on attribue aux coefficients renfermés dans les premiers membres des formules (93) des accroissements infiniment petits.

Soient encore

$$(16)\quad x_1,\ y_1,\ z_1,\ \ldots;\quad x_2,\ y_2,\ z_2,\ \ldots;\quad \ldots;\quad x_n,\ y_n,\ z_n,\ \ldots$$

des systèmes de valeurs de $x, y, z, \ldots$ correspondants aux valeurs $s_1, s_2, \ldots, s_n$ de la variable s, et choisis de manière à vérifier les formules (3) et (10), en sorte qu'on ait

$$(96)\quad \begin{cases} (A_{xx}-s_1)x_1+A_{xy}y_1+A_{xz}z_1+\ldots=0,\\ A_{xy}x_1+(A_{yy}-s_1)y_1+A_{yz}z_1+\ldots=0,\\ A_{xz}x_1+A_{yz}y_1+(A_{zz}-s_1)z_1+\ldots=0,\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots; \end{cases}$$

$$(96)\quad \begin{cases} (A_{xx}-s_2)x_2+A_{xy}y_2+A_{xz}z_2+\ldots=0,\\ A_{xy}x_2+(A_{yy}-s_2)y_2+A_{yz}z_2+\ldots=0,\\ A_{xz}x_2+A_{yz}y_2+(A_{zz}-s_2)z_2+\ldots=0,\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots; \end{cases}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots;$$

$$(96)\quad \begin{cases} (A_{xx}-s_n)x_n+A_{xy}y_n+A_{xz}z_n+\ldots=0,\\ A_{xy}x_n+(A_{yy}-s_n)y_n+A_{xz}z_n+\ldots=0,\\ A_{xz}x_n+A_{yz}y_n+(A_{zz}-s_n)z_n+\ldots=0,\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots; \end{cases}$$

et, de plus,

$$(97)\quad \begin{cases} x_1^2+y_1^2+z_1^2+\ldots=1,\\ x_2^2+y_2^2+z_2^2+\ldots=1,\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\ x_n^2+y_n^2+z_n^2+\ldots=1. \end{cases}$$

Si la fonction de $A_{xx}, A_{xy}, A_{xz}, \ldots; A_{yy}, A_{yz}, \ldots; A_{zz}, \ldots$, ci-dessus désignée par K, ne se réduit pas à zéro, des racines de l'équation (7) ne pourront être, ni égales entre elles, ni propres à vérifier l'équation (29); et les quantités (16), ainsi que nous l'avons fait voir, se trouveront, aux signes près, complètement déterminées par les formules (28). Ajoutons que ces quantités satisferont à toutes les équations comprises dans le Tableau (22). Cela posé, si, en désignant par

$$\xi,\quad \eta,\quad \zeta,\quad \ldots$$

de nouvelles variables dont le nombre soit n, on attribue à $x, y, z, \ldots$ les valeurs que déterminent les formules

$$(98)\quad \begin{cases} x=x_1\xi+x_2\eta+x_3\zeta+\ldots,\\ y=y_1\xi+y_2\eta+y_3\zeta+\ldots,\\ z=z_1\xi+z_2\eta+z_3\zeta+\ldots,\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{cases}$$

on aura, en vertu des équations (22),

$$(99)\qquad x^2+y^2+z^2+\ldots=\xi^2+\eta^2+\zeta^2+\ldots;$$

puis, en vertu des équations (96), respectivement multipliées par ξ, les autres par η, les autres par ζ, ..., et ajoutées entre elles,

$$(100)\quad \begin{cases} A_{xx}x+A_{xy}y+A_{xz}z+\ldots=s_1x_1\xi+s_2x_2\eta+s_3x_3\zeta+\ldots,\\ A_{xy}x+A_{yy}y+A_{yz}z+\ldots=s_1y_1\xi+s_2y_2\eta+s_3y_3\zeta+\ldots,\\ A_{xz}x+A_{yz}y+A_{zz}z+\ldots=s_1z_1\xi+s_2z_2\eta+s_3z_3\zeta+\ldots,\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

Enfin, en ayant égard aux formules (22), on tirera : 1° des formules (98) respectivement multipliées par $x_1, y_1, z_1, \ldots$, ou par x_2,

$y_2, z_2, \ldots$, ou par $x_3, y_3, z_3, \ldots$, et ajoutées entre elles,

$$(101)\qquad \begin{cases} \xi = x_1 x + y_1 y + z_1 z + \ldots, \\ \eta = x_2 x + y_2 y + z_2 z + \ldots, \\ \zeta = x_3 x + y_3 y + z_3 z + \ldots, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots; \end{cases}$$

2° des équations (100) respectivement multipliées pour $x, y, z, \ldots$, et ajoutées entre elles,

$$(102)\qquad \begin{cases} A_{xx}x^2 + A_{yy}y^2 + A_{zz}z^2 + \ldots + 2A_{xy}xy + 2A_{xz}xz + \ldots + 2A_{yz}yz + \ldots \\ \quad = s_1\xi^2 + s_2\eta^2 + s_3\zeta^2 + \ldots. \end{cases}$$

Il suffira donc généralement de lier les variables $x, y, z, \ldots$ aux variables $\xi, \eta, \zeta, \ldots$ par les formules (98), pour que les équations (99) et (102) soient simultanément vérifiées. Cette remarque entraîne évidemment la proposition suivante, que j'ai donnée dans le dernier Volume des *Mémoires de l'Académie des Sciences* (1).

Théorème II. — *Étant donnée une fonction homogène et du second degré de plusieurs variables $x, y, z, \ldots$, on peut toujours leur substituer d'autres variables $\xi, \eta, \zeta, \ldots$ liées à $x, y, z, \ldots$ par des équations linéaires tellement choisies que la somme des carrés de $x, y, z, \ldots$ soit équivalente à la somme des carrés de $\xi, \eta, \zeta, \ldots$, et que la fonction donnée de $x, y, z, \ldots$ se transforme en une fonction de $\xi, \eta, \zeta, \ldots$ homogène et du second degré, mais qui renferme seulement les carrés de $\xi, \eta, \zeta, \ldots$.*

La démonstration du théorème II, ci-dessus indiquée, suppose à la vérité que, dans la fonction donnée, les coefficients

$$A_{xx},\quad A_{xy},\quad A_{xz},\quad \ldots;\quad A_{yy},\quad A_{yz},\quad \ldots;\quad A_{zz},\quad \ldots$$

ne satisfont pas à la condition (88). Mais, si cette condition était vérifiée, il suffirait, pour qu'elle cessât de l'être, d'attribuer à l'un des coefficients dont il s'agit un accroissement infiniment petit ε; et, comme on pourrait faire converger ε vers la limite zéro, sans que le

(1) *Œuvres de Cauchy*, S. I, T. II.

théorème II cessât de subsister, il est clair qu'il subsisterait encore au moment où ε s'évanouirait.

Dans le cas particulier où les variables x, y, z sont au nombre de trois seulement, l'équation (7) se réduit à celle qui se représente dans diverses questions de Géométrie et de Mécanique, par exemple, dans la théorie des moments d'inertie; et le théorème I fournit les règles que j'ai données dans le III^e^ Volume des *Exercices* (1) comme propres à déterminer les limites des racines de cette équation. Alors aussi les équations (22) sont semblables à celles qui existent entre les cosinus des angles que forment trois axes rectangulaires quelconques avec les axes coordonnés, supposés eux-mêmes rectangulaires, et le théorème II correspond à une proposition de Géométrie, savoir que, par le centre d'une surface du second degré, on peut mener trois plans perpendiculaires l'un à l'autre, et dont chacun la divise en deux parties symétriques.

J'observerai, en terminant cet article, que, au moment où je n'en avais encore écrit qu'une partie, M. Sturm m'a dit être parvenu à démontrer fort simplement les théorèmes I et II. Il se propose de publier incessamment le Mémoire qu'il a composé à ce sujet, et qui a été offert à l'Académie des Sciences le même jour que le présent article.

(1) *Œuvres de Cauchy*, S. II, T. VIII, p. 103 et suiv.

SUR LA

DÉTERMINATION DU RÉSIDU INTÉGRAL

DE

QUELQUES FONCTIONS.

Soit $f(z)$ une fonction qui s'évanouisse, lorsqu'on attribue à la variable z des valeurs infinies réelles ou imaginaires. On pourra, dans un grand nombre de cas, déterminer le résidu intégral

$$\int (f(z)), \tag{1}$$

ou plutôt la valeur principale de ce résidu, à l'aide des théorèmes I, II, III, IV des pages 255, 258, 274 et 276 du II^e^ Volume (1). Toutefois, les démonstrations que nous avons données de ces théorèmes supposent implicitement que, parmi les racines de l'équation

$$\frac{1}{f(z)} = 0, \tag{2}$$

celles dont les modules ne surpassent pas un nombre donné R sont en nombre fini [*voir* les pages 247 et 248 du II^e^ Volume (2)]. Or cette condition n'est pas toujours satisfaite, et il peut arriver, par exemple, que l'équation (2) offre une infinité de racines très peu différentes de zéro. Nous allons maintenant nous occuper d'étendre les théorèmes ci-dessus mentionnés au cas dont il s'agit.

Concevons que l'équation (2) offre, non seulement une infinité de

(1) *OEuvres de Cauchy*, S. II, T. VII, p. 302, 305, 320, 322.
(2) *Ibid.*, p. 294, 295.

racines dont les modules soient très considérables, mais encore une infinité de racines dont les modules soient très petits. Supposons d'ailleurs que, en attribuant au module r de la variable

$$z = r(\cos p + \sqrt{-1}\sin p) \tag{3}$$

des valeurs infiniment petites

$$\rho,\quad \rho_1,\quad \rho_2,\quad \dots, \tag{4}$$

on puisse les choisir de manière que le produit

$$zf(z) \tag{5}$$

devienne sensiblement égal à zéro, quel que soit d'ailleurs l'angle p, ou du moins de manière que ce produit reste toujours fini ou infiniment petit, et ne cesse d'être infiniment petit, en demeurant fini, que dans le voisinage de certaines valeurs particulières de p. La somme des résidus de $f(z)$ correspondants à celles des racines de l'équation (2) qui offriront des modules renfermés entre deux nombres finis r_0, R se trouvera représentée par la notation

$$\int_{(r_0)}^{(\mathrm{R})} \int_{(-\pi)}^{(\pi)} (f(z)), \tag{6}$$

et pourra converger vers une limite déterminée, tandis que ces deux nombres s'approcheront sans cesse, le premier de zéro, le second de l'infini positif. Or cette limite sera, dans l'hypothèse admise, ce que nous appellerons la *valeur principale* du résidu intégral $\int (f(z))$. D'autre part, la formule (64) de la page 212 du I^er^ Volume (1) donnera

$$\int_{(r_0)}^{(\mathrm{R})} \int_{(-\pi)}^{(\pi)} (f(z)) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{R}e^{p\sqrt{-1}} f(\mathrm{R}e^{p\sqrt{-1}})\,dp - \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} r_0 e^{p\sqrt{-1}} f(r_0 e^{p\sqrt{-1}})\,dp. \tag{7}$$

Si, dans cette dernière équation, on prend successivement pour r_0 les différents termes de la série (4), l'intégrale

$$\int_{-\pi}^{\pi} r_0 e^{p\sqrt{-1}} f(r_0 e^{p\sqrt{-1}})\,dp \tag{8}$$

(1) *OEuvres de Cauchy*, S. II, T. VI, p. 265.

convergera évidemment vers une limite nulle, et l'expression (6) vers une limite correspondante, déterminée par la formule

$$(9)\qquad \sum_{(0)}^{(R)}\int_{(-\pi)}^{(\pi)}((f(z)))=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\mathrm{R}e^{p\sqrt{-1}}f\left(\mathrm{R}e^{p\sqrt{-1}}\right)dp,$$

qui est semblable à l'équation (16) de la page 249 du II^e^ Volume (1). Cela posé, il ne restera plus qu'à faire converger R vers la limite ∞ pour obtenir, dans l'hypothèse admise, le théorème I de la page 255 du II^e^ Volume (2).

Supposons maintenant

$$(10)\qquad f(z)=\frac{A_0}{z^m}+\frac{A_1}{z^{m-1}}+\ldots+\frac{A_{m-1}}{z}+\varpi(z),$$

et admettons que, en attribuant au module r de la variable z les valeurs infiniment petites

$$(4)\qquad \rho,\quad \rho_1,\quad \rho_2,\quad \ldots,$$

on puisse les choisir de manière que le produit

$$(11)\qquad z\,\varpi(z)$$

devienne sensiblement égal à zéro, quel que soit d'ailleurs le rapport $\frac{z}{r}$, ou du moins de manière que le produit reste toujours fini ou infiniment petit, et ne cesse d'être infiniment petit, en demeurant fini, que dans le voisinage de certaines valeurs particulières du rapport $\frac{z}{r}$. Alors, au lieu de la formule (9), on obtiendra la suivante

$$(12)\qquad \sum_{(0)}^{(R)}\int_{(-\pi)}^{(\pi)}((\varpi(z)))=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\mathrm{R}e^{p\sqrt{-1}}\varpi\left(\mathrm{R}e^{p\sqrt{-1}}\right)dp;$$

puis, en substituant à la fonction $\varpi(z)$ sa valeur tirée de l'équation (10), et raisonnant comme on l'a fait à la page 250 du II^e^ Volume (3), on retrouvera encore la formule (9) et le théorème ci-dessus

(1) *Œuvres de Cauchy*, S. II, T. VII, p. 296.
(2) *Ibid.*, p. 302.
(3) *Ibid.*, p. 297.

mentionné. Seulement le résidu de $f(z)$, relatif à $z=0$, devra être considéré comme faisant partie de la somme désignée par la notation $\sum((f(z)))$, et comme équivalent à la constante A_{m-1}, dans le cas même où la fonction $\varpi(z)$ deviendrait infinie pour une valeur nulle de z. Par conséquent, dans l'hypothèse admise, il faudra, pour obtenir la *valeur principale* du résidu intégral $\sum((f(z)))$, ajouter la constante A_{m-1} à la limite vers laquelle convergera l'expression (6), tandis que les nombres r_0, R s'approcheront indéfiniment, le premier de zéro, le second de l'infini positif.

On étendrait avec la même facilité les théorèmes II, III, IV des pages 258, 274 et 276 du II^e^ Volume (1) au cas où, la fonction $f(z)$ étant déterminée par la formule (10), le produit $z\,\varpi(z)$ remplit, pour des valeurs infiniment petites de la variable z, les conditions précédemment énoncées.

Pour vérifier sur une valeur particulière de la fonction $f(z)$ les remarques que l'on vient de faire, supposons

$$(13)\qquad f(z)=\frac{1}{z}\,\frac{e^{az}-e^{-az}}{e^{az}+e^{-az}}\,\frac{\sin\frac{b}{z}}{\cos\frac{b}{z}},$$

a et b désignant deux constantes. L'équation (2) aura pour racines les valeurs de z comprises dans les deux séries

$$(14)\qquad \pm\frac{\pi}{2a}\sqrt{-1},\quad \pm\frac{3\pi}{2a}\sqrt{-1},\quad \pm\frac{5\pi}{2a}\sqrt{-1},\quad \ldots,$$

$$(15)\qquad \pm\frac{2b}{\pi},\qquad \pm\frac{2b}{3\pi},\qquad \pm\frac{2b}{5\pi},\qquad \ldots.$$

De plus, le produit (5), ou

$$(16)\qquad z\,f(z)=\frac{e^{az}-e^{-az}}{e^{az}+e^{-az}}\,\frac{\sin\frac{b}{z}}{\cos\frac{b}{z}},$$

deviendra infiniment petit : 1° pour les valeurs infiniment grandes

(1) *Œuvres de Cauchy*, S. II, T. VII, p. 305, 320, 322.

de z, dont les modules différeront sensiblement de ceux des expressions (14); 2° pour des valeurs infiniment petites de z, choisies de manière que les modules correspondants de $\frac{1}{z}$ diffèrent sensiblement de ceux des expressions (15). Cela posé, il suit de ce qu'on a dit plus haut que le théorème I de la page 255 ou plutôt le théorème II de la page 258 du II^e Volume (1) subsistera pour la fonction (13). On aura donc

$$\mathcal{E}\left(\left(\frac{1}{z}\frac{e^{az}-e^{-az}}{e^{az}+e^{-az}}\frac{\sin\frac{b}{z}}{\cos\frac{b}{z}}\right)\right)=0, \tag{17}$$

pourvu que l'on considère le résidu intégral

$$\mathcal{E}\left(\left(\frac{1}{z}\frac{e^{az}-e^{-az}}{e^{az}+e^{-az}}\frac{\sin\frac{b}{z}}{\cos\frac{b}{z}}\right)\right)$$

comme représentant la limite vers laquelle converge l'expression

$$\overset{(\mathrm{R})}{(r_0)}\mathcal{E}_{(-\pi)}^{(\pi)}\left(\left(\frac{1}{z}\frac{e^{az}-e^{-az}}{e^{az}+e^{-az}}\frac{\sin\frac{b}{z}}{\cos\frac{b}{z}}\right)\right),$$

tandis que les nombres r_0, R s'approchent, le premier de zéro, le second de l'infini positif. Il est d'ailleurs facile de constater l'exactitude de la formule (17); car on a

$$\mathcal{E}\frac{\sin\frac{b}{z}}{\cos\frac{b}{z}}\frac{e^{az}-e^{-az}}{((z(e^{az}+e^{-az})))}=-\frac{4}{\pi}\left(\frac{e^{\frac{2ab}{\pi}}-e^{-\frac{2ab}{\pi}}}{e^{\frac{2ab}{\pi}}+e^{-\frac{2ab}{\pi}}}+\frac{1}{3}\frac{e^{\frac{2ab}{3\pi}}-e^{-\frac{2ab}{3\pi}}}{e^{\frac{2ab}{3\pi}}+e^{-\frac{2ab}{3\pi}}}+\ldots\right), \tag{18}$$

$$\mathcal{E}\frac{e^{az}-e^{-az}}{z(e^{az}+e^{-az})}\frac{\sin\frac{b}{z}}{\left(\left(\cos\frac{b}{z}\right)\right)}=\frac{4}{\pi}\left(\frac{e^{\frac{2ab}{\pi}}-e^{-\frac{2ab}{\pi}}}{e^{\frac{2ab}{\pi}}+e^{-\frac{2ab}{\pi}}}+\frac{1}{3}\frac{e^{\frac{2ab}{3\pi}}-e^{-\frac{2ab}{3\pi}}}{e^{\frac{2ab}{3\pi}}+e^{-\frac{2ab}{3\pi}}}+\ldots\right), \tag{19}$$

et, en combinant entre elles par voie d'addition les deux équations qui précèdent, on reproduit évidemment la formule (17).

(1) *Œuvres de Cauchy*, S. II, T. VII, p. 302 et 305.

Supposons maintenant

$$f(z)=\frac{e^{az}-e^{-az}}{e^{az}+e^{-az}}\frac{\sin\frac{b}{z}}{\cos\frac{b}{z}}, \tag{20}$$

Le produit

$$zf(z)=\frac{e^{az}-e^{-az}}{e^{az}+e^{-az}}\frac{z\sin\frac{b}{z}}{\cos\frac{b}{z}} \tag{21}$$

sera encore infiniment petit pour des valeurs infiniment petites de z, choisies de manière que les modules correspondants de $\frac{1}{z}$ diffèrent sensiblement de ceux des expressions (15). Mais ce même produit cessera de s'évanouir et deviendra généralement égal à $\pm b$ pour des valeurs infiniment grandes de z, savoir à $+b$, si la partie réelle de l'exposant az est positive, et à $-b$, si la partie réelle de l'exposant az est négative. Ajoutons que le produit

$$z\frac{f(z)-f(-z)}{2} \tag{22}$$

se réduira évidemment à zéro. Cela posé, le théorème III de la page 274 du II^e Volume (1) donnera

$$\mathcal{E}\left(\left(\frac{e^{az}-e^{-az}}{e^{az}+e^{-az}}\frac{\sin\frac{b}{z}}{\cos\frac{b}{z}}\right)\right)=0. \tag{23}$$

Pour constater l'exactitude de cette dernière formule, il suffit d'observer que les résidus partiels compris dans le résidu intégral

$$\mathcal{E}\left(\left(\frac{e^{az}-e^{-az}}{e^{az}+e^{-az}}\frac{\sin\frac{b}{z}}{\cos\frac{b}{z}}\right)\right) \tag{24}$$

sont, deux à deux, égaux, mais affectés de signes contraires.

(1) *Œuvres de Cauchy*, S. II, T. VII, p. 320.

Supposons enfin

$$f(z)=\frac{1}{z}\frac{e^{az}-e^{-az}}{e^{az}+e^{-az}}\left(\frac{\cos\dfrac{b}{z}}{\sin\dfrac{b}{z}}-\frac{z}{b}\right). \tag{25}$$

L'équation (2) aura pour racines les valeurs de z comprises dans la série (14) et dans la suivante :

$$\pm\frac{b}{\pi},\quad \pm\frac{b}{2\pi},\quad \pm\frac{b}{3\pi},\quad \ldots. \tag{26}$$

De plus, le produit

$$z\,f(z)=\frac{e^{az}-e^{-az}}{e^{az}+e^{-az}}\left(\frac{\cos\dfrac{b}{z}}{\sin\dfrac{b}{z}}-\frac{z}{b}\right) \tag{27}$$

deviendra infiniment petit : 1° pour les valeurs infiniment grandes de z dont les modules différeront sensiblement de ceux des expressions (14); 2° pour des valeurs infiniment petites de z, choisies de manière que les modules de $\frac{1}{z}$ diffèrent sensiblement de ceux des expressions (26). Cela posé, le théorème II de la page 258 du II^e Volume (1) subsistera pour la fonction (25), en sorte qu'on aura

$$\mathcal{E}\left(\left(\frac{1}{z}\frac{e^{az}-e^{-az}}{e^{az}+e^{-az}}\left(\frac{\cos\dfrac{b}{z}}{\sin\dfrac{b}{z}}-\frac{z}{b}\right)\right)\right)=0, \tag{28}$$

et, par suite,

$$\left\{\begin{aligned}&\frac{1}{2}\frac{e^{\frac{ab}{\pi}}-e^{-\frac{ab}{\pi}}}{e^{\frac{ab}{\pi}}+e^{-\frac{ab}{\pi}}}+\frac{1}{4}\frac{e^{\frac{ab}{2\pi}}-e^{-\frac{ab}{2\pi}}}{e^{\frac{ab}{2\pi}}+e^{-\frac{ab}{2\pi}}}+\frac{1}{6}\frac{e^{\frac{ab}{3\pi}}-e^{-\frac{ab}{3\pi}}}{e^{\frac{ab}{3\pi}}+e^{-\frac{ab}{3\pi}}}+\ldots\\&=\left(\frac{e^{\frac{2ab}{\pi}}+e^{-\frac{2ab}{\pi}}}{e^{\frac{2ab}{\pi}}-e^{-\frac{2ab}{\pi}}}-\frac{\pi}{2ab}\right)+\frac{1}{3}\left(\frac{e^{\frac{2ab}{3\pi}}+e^{-\frac{2ab}{3\pi}}}{e^{\frac{2ab}{3\pi}}-e^{-\frac{2ab}{3\pi}}}-\frac{3\pi}{2ab}\right)\\&\qquad+\frac{1}{5}\left(\frac{e^{\frac{2ab}{5\pi}}+e^{-\frac{2ab}{5\pi}}}{e^{\frac{2ab}{5\pi}}-e^{-\frac{2ab}{5\pi}}}-\frac{5\pi}{2ab}\right)+\ldots.\end{aligned}\right. \tag{29}$$

(1) *Œuvres de Cauchy*, S. II, T. VII, p. 305.

Si, pour abréger, on fait $2ab=\pi x$, la formule (29) deviendra simplement

$$\left\{\begin{aligned}&\frac{1}{2}\frac{e^{\frac{1}{2}x}-e^{-\frac{1}{2}x}}{e^{\frac{1}{2}x}+e^{-\frac{1}{2}x}}+\frac{1}{4}\frac{e^{\frac{1}{4}x}-e^{-\frac{1}{4}x}}{e^{\frac{1}{4}x}+e^{-\frac{1}{4}x}}+\frac{1}{6}\frac{e^{\frac{1}{6}x}-e^{-\frac{1}{6}x}}{e^{\frac{1}{6}x}+e^{-\frac{1}{6}x}}+\ldots\\&=\left(\frac{e^{x}+e^{-x}}{e^{x}-e^{-x}}-\frac{1}{x}\right)+\frac{1}{3}\left(\frac{e^{\frac{1}{3}x}+e^{-\frac{1}{3}x}}{e^{\frac{1}{3}x}-e^{-\frac{1}{3}x}}-\frac{3}{x}\right)+\frac{1}{5}\left(\frac{e^{\frac{1}{5}x}+e^{-\frac{1}{5}x}}{e^{\frac{1}{5}x}-e^{-\frac{1}{5}x}}-\frac{5}{x}\right)+\ldots.\end{aligned}\right. \tag{30}$$

En remplaçant dans cette dernière x par $x\sqrt{-1}$, on en tirera

$$\left\{\begin{aligned}&\frac{1}{2}\operatorname{tang}\frac{x}{2}+\frac{1}{4}\operatorname{tang}\frac{x}{4}+\frac{1}{6}\operatorname{tang}\frac{x}{6}+\ldots\\&=\left(\frac{1}{x}-\cot x\right)+\frac{1}{3}\left(\frac{3}{x}-\cot\frac{x}{3}\right)+\frac{1}{5}\left(\frac{5}{x}-\cot\frac{x}{5}\right)+\ldots.\end{aligned}\right. \tag{31}$$

Il est bon d'observer que, pour établir directement la formule (31), il suffirait de prendre

$$f(z)=\frac{1}{z}\frac{\sin z}{\cos z}\left(\frac{\cos\dfrac{\pi x}{2z}}{\sin\dfrac{\pi x}{2z}}-\frac{2z}{\pi x}\right), \tag{32}$$

ou bien encore

$$f(z)=\frac{1}{z}\frac{\sin(z)^{\frac{1}{2}}}{\cos(z)^{\frac{1}{2}}}\left(\frac{\cos\dfrac{\frac{1}{2}\pi x}{(z)^{\frac{1}{2}}}}{\sin\dfrac{\frac{1}{2}\pi x}{(z)^{\frac{1}{2}}}}-\frac{2}{\pi x}(z)^{\frac{1}{2}}\right), \tag{33}$$

$(z)^{\frac{1}{2}}$ désignant l'une quelconque des deux valeurs de t propres à vérifier l'équation

$$t^2-z=0. \tag{34}$$

En effet, dans l'un et l'autre cas, le théorème II de la page 258 du II^e Volume (1) entraînera la formule

$$\mathcal{E}((f(z)))=0, \tag{35}$$

(1) *Œuvres de Cauchy*, S. II, T. VII, p. 305.

qui se réduira simplement à l'équation (31). Remarquons d'ailleurs que, dans le cas où la fonction $f(z)$ est déterminée par la formule (33), cette fonction devient généralement infinie pour une valeur nulle de z. Mais comme, dans le même cas, le produit $zf(z)$ s'évanouit avec z, la constante précédemment désignée par A_{m-1}, et, par suite, le résidu de $f(z)$, relatif à $z=0$, doivent être censés nuls.

On pourrait faire beaucoup d'autres applications des principes ci-dessus exposés. Si, pour fixer les idées, on prenait successivement

$$f(z)=\frac{f(z)}{F(z)}\frac{\sin az}{\cos az}\frac{\sin\frac{b}{z}}{\cos\frac{b}{z}}, \tag{36}$$

$$f(z)=\frac{f(z)}{F(z)}\frac{\cos az}{\sin az}\frac{\cos\frac{b}{z}}{\sin\frac{b}{z}}, \tag{37}$$

$f(z)$, $F(z)$ désignant deux fonctions entières de z, et la fraction $\frac{f(z)}{F(z)}$ étant irréductible, on trouverait : 1° en supposant le degré de $f(z)$ inférieur au degré de $F(z)$, et la fonction $F(z)$ non divisible, ou divisible une fois seulement par z,

$$\mathcal{E}\left(\left(\frac{f(z)}{F(z)}\frac{\sin az}{\cos az}\frac{\sin\frac{b}{z}}{\cos\frac{b}{z}}\right)\right)=0; \tag{38}$$

2° en supposant le degré du produit $z^2 f(z)$ inférieur au degré de $F(z)$, et la fonction $f(z)$ divisible par z,

$$\mathcal{E}\left(\left(\frac{f(z)}{F(z)}\frac{\cos az}{\sin az}\frac{\cos\frac{b}{z}}{\sin\frac{b}{z}}\right)\right)=0. \tag{39}$$

On trouverait de même : 1° en supposant le degré du produit $zf(z)$

inférieur au degré de $F(z)$, et la fonction $F(z)$ non divisible par z,

$$\mathcal{E}\left(\left(\frac{f(z)}{F(z)}\frac{1}{\cos az\cos\frac{b}{z}}\right)\right)=0; \tag{40}$$

2° en supposant le degré du produit $z^2 f(z)$ inférieur à celui de $F(z)$, et la fonction $f(z)$ divisible par z,

$$\mathcal{E}\left(\left(\frac{f(z)}{F(z)}\frac{1}{\sin az\sin\frac{b}{z}}\right)\right)=0. \tag{41}$$

On obtient des résultats dignes de remarque en développant les formules (38), (39), (40), (41). Si, pour plus de simplicité, on prend

$$\frac{f(z)}{F(z)}=\frac{f(z^2)}{z}, \tag{42}$$

$f(z^2)$ désignant une fonction rationnelle de z, les formules dont il s'agit deviendront

$$\mathcal{E}\left(\left(\frac{\sin az}{\cos az}\frac{\sin\frac{b}{z}}{\cos\frac{b}{z}}\frac{f(z^2)}{z}\right)\right)=0, \tag{43}$$

$$\mathcal{E}\left(\left(\frac{\cos az}{\sin az}\frac{\cos\frac{b}{z}}{\sin\frac{b}{z}}\frac{f(z^2)}{z}\right)\right)=0, \tag{44}$$

$$\mathcal{E}\left(\left(\frac{1}{\cos az\cos\frac{b}{z}}\frac{f(z^2)}{z}\right)\right)=0, \tag{45}$$

$$\mathcal{E}\left(\left(\frac{1}{\sin az\sin\frac{b}{z}}\frac{f(z^2)}{z}\right)\right)=0, \tag{46}$$

et, en les développant, on trouvera

$$\left\{\begin{aligned}&\frac{f\left(\frac{\pi^2}{4a^2}\right)-f\left(\frac{4b^2}{\pi^2}\right)}{1}\operatorname{tang}\frac{2ab}{\pi}+\frac{f\left(\frac{9\pi^2}{4a^2}\right)-f\left(\frac{4b^2}{9\pi^2}\right)}{3}\operatorname{tang}\frac{2ab}{3\pi}+\frac{f\left(\frac{25\pi^2}{4a^2}\right)-f\left(\frac{4b^2}{25\pi^2}\right)}{5}\operatorname{tang}\frac{2ab}{5\pi}+\ldots\\&=\frac{\pi}{4}\mathcal{E}\operatorname{tang}az\operatorname{tang}\frac{b}{z}\frac{((f(z^2)))}{z},\end{aligned}\right. \tag{47}$$

$$(48)\quad \left\{\begin{array}{l} \dfrac{f\left(\frac{\pi^2}{a^2}\right)-f\left(\frac{b^2}{\pi^2}\right)}{1}\cot\dfrac{ab}{\pi}+\dfrac{f\left(\frac{4\pi^2}{a^2}\right)-f\left(\frac{b^2}{4\pi^2}\right)}{2}\cot\dfrac{ab}{2\pi}+\dfrac{f\left(\frac{9\pi^2}{a^2}\right)-f\left(\frac{b^2}{9\pi^2}\right)}{3}\cot\dfrac{ab}{3\pi}+\ldots \\ \quad=-\dfrac{\pi}{2}\sum\cot az\cot\dfrac{b}{z}\dfrac{((f(z^2)))}{z}, \end{array}\right.$$

$$(49)\quad \left\{\begin{array}{l} \dfrac{f\left(\frac{\pi^2}{4a^2}\right)-f\left(\frac{4b^2}{\pi^2}\right)}{1}\sec\dfrac{2ab}{\pi}-\dfrac{f\left(\frac{9\pi^2}{4a^2}\right)-f\left(\frac{4b^2}{9\pi^2}\right)}{3}\sec\dfrac{2ab}{3\pi}+\dfrac{f\left(\frac{25\pi^2}{4a^2}\right)-f\left(\frac{4b^2}{25\pi^2}\right)}{5}\sec\dfrac{2ab}{5\pi}-\ldots \\ \quad=\dfrac{\pi}{4}\sum\sec az\sec\dfrac{b}{z}\dfrac{((f(z^2)))}{z}, \end{array}\right.$$

$$(50)\quad \left\{\begin{array}{l} \dfrac{f\left(\frac{\pi^2}{a^2}\right)-f\left(\frac{b^2}{\pi^2}\right)}{1}\operatorname{cosec}\dfrac{ab}{\pi}-\dfrac{f\left(\frac{4\pi^2}{a^2}\right)-f\left(\frac{b^2}{4\pi^2}\right)}{2}\operatorname{cosec}\dfrac{ab}{2\pi}+\dfrac{f\left(\frac{9\pi^2}{a^2}\right)-f\left(\frac{b^2}{9\pi^2}\right)}{3}\operatorname{cosec}\dfrac{ab}{3\pi}+\ldots \\ \quad=\dfrac{\pi}{2}\sum\operatorname{cosec}az\operatorname{cosec}\dfrac{b}{z}\dfrac{((f(z^2)))}{z}. \end{array}\right.$$

Si l'on pose dans les formules (47), (49) $a=b=\frac{\pi x}{2}$, et dans les formules (48), (50) $a=b=\pi x$, ces quatre formules donneront

$$(51)\quad \left\{\begin{array}{l} \dfrac{f(x^2)-f\left(\frac{1}{x^2}\right)}{1}\operatorname{tang}\dfrac{\pi x^2}{2}+\dfrac{f\left(\frac{x^2}{9}\right)-f\left(\frac{9}{x^2}\right)}{3}\operatorname{tang}\dfrac{\pi x^2}{6}+\dfrac{f\left(\frac{x^2}{25}\right)-f\left(\frac{25}{x^2}\right)}{5}\operatorname{tang}\dfrac{\pi x^2}{10}+\ldots \\ \quad=-\dfrac{\pi}{4}\sum\operatorname{tang}\dfrac{\pi xz}{2}\operatorname{tang}\dfrac{\pi x}{2z}\dfrac{((f(z^2)))}{z}, \end{array}\right.$$

$$(52)\quad \left\{\begin{array}{l} \dfrac{f(x^2)-f\left(\frac{1}{x^2}\right)}{1}\cot\pi x^2+\dfrac{f\left(\frac{x^2}{4}\right)-f\left(\frac{4}{x^2}\right)}{2}\cot\dfrac{\pi x^2}{2}+\dfrac{f\left(\frac{x^2}{9}\right)-f\left(\frac{9}{x^2}\right)}{3}\cot\dfrac{\pi x^2}{3}+\ldots \\ \quad=\dfrac{\pi}{2}\sum\cot\pi xz\cot\dfrac{\pi x}{z}\dfrac{((f(z^2)))}{z}, \end{array}\right.$$

$$(53)\quad \left\{\begin{array}{l} \dfrac{f(x^2)-f\left(\frac{1}{x^2}\right)}{1}\sec\dfrac{\pi x^2}{2}-\dfrac{f\left(\frac{x^2}{9}\right)-f\left(\frac{9}{x^2}\right)}{3}\sec\dfrac{\pi x^2}{6}+\dfrac{f\left(\frac{x^2}{25}\right)-f\left(\frac{25}{x^2}\right)}{5}\sec\dfrac{\pi x^2}{10}-\ldots \\ \quad=-\dfrac{\pi}{4}\sum\sec\dfrac{\pi xz}{2}\sec\dfrac{\pi x}{2z}\dfrac{((f(z^2)))}{z}, \end{array}\right.$$

$$(54)\quad \left\{\begin{array}{l} \dfrac{f(x^2)-f\left(\frac{1}{x^2}\right)}{1}\operatorname{cosec}\pi x^2-\dfrac{f\left(\frac{x^2}{4}\right)-f\left(\frac{4}{x^2}\right)}{2}\operatorname{cosec}\dfrac{\pi x^2}{2}+\dfrac{f\left(\frac{x^2}{9}\right)-f\left(\frac{9}{x^2}\right)}{3}\operatorname{cosec}\dfrac{\pi x^2}{3}-\ldots \\ \quad=-\dfrac{\pi}{2}\sum\operatorname{cosec}\pi xz\operatorname{cosec}\dfrac{\pi x}{z}\dfrac{((f(z^2)))}{z}. \end{array}\right.$$

Il importe d'observer que, dans les formules (44), (45), (46), et par conséquent dans les formules (48), (49), (50), (52), (53), (54), la fonction rationnelle et paire $f(z^2)$ doit être divisible par z^2. Ajoutons que les seconds membres des équations (47), (48), (49), (50), (51), (52), (53), (54) s'exprimeront en termes finis. Donc les séries que renferment les premiers membres de ces diverses équations pourront toujours être sommées à l'aide du calcul des résidus.

Pour appliquer la formule (51) à des valeurs particulières de la fonction $f(z^2)$, faisons successivement

$$f(z^2)=\frac{1}{1-z^2}, \qquad f(z^2)=\frac{1}{1+z^2}.$$

On trouvera, dans le premier cas,

$$(55)\quad \frac{1+x^2}{1-x^2}\operatorname{tang}\frac{\pi x^2}{2}+\frac{1}{3}\frac{9+x^2}{9-x^2}\operatorname{tang}\frac{\pi x^2}{6}+\frac{1}{5}\frac{25+x^2}{25-x^2}\operatorname{tang}\frac{\pi x^2}{10}+\ldots=\frac{\pi}{4}\operatorname{tang}^2\frac{\pi x}{2}$$

et, dans le second cas,

$$(56)\quad \frac{1-x^2}{1+x^2}\operatorname{tang}\frac{\pi x^2}{2}+\frac{1}{3}\frac{9-x^2}{9+x^2}\operatorname{tang}\frac{\pi x^2}{6}+\frac{1}{5}\frac{25-x^2}{25+x^2}\operatorname{tang}\frac{\pi x^2}{10}+\ldots=\frac{\pi}{4}\left(\frac{e^{\frac{\pi x}{2}}-e^{-\frac{\pi x}{2}}}{e^{\frac{\pi x}{2}}+e^{-\frac{\pi x}{2}}}\right)^2.$$

Au reste, on déduirait immédiatement la formule (56) de la formule (55) en substituant à la variable x le produit $x\sqrt{-1}$. Ajoutons que, si, dans ces formules, on pose $x=1$ ou $x=\frac{1}{2}$, on en tirera

$$(57)\quad \frac{1}{\pi}+\frac{1}{3}\frac{4}{5}\operatorname{tang}\frac{\pi}{6}+\frac{1}{5}\frac{12}{13}\operatorname{tang}\frac{\pi}{10}+\frac{1}{7}\frac{24}{25}\operatorname{tang}\frac{\pi}{14}+\ldots=\frac{\pi}{4}\left(\frac{e^{\frac{\pi}{2}}-e^{-\frac{\pi}{2}}}{e^{\frac{\pi}{2}}+e^{-\frac{\pi}{2}}}\right)^2,$$

$$(58)\quad \frac{5}{3}\operatorname{tang}\frac{\pi}{8}+\frac{1}{3}\frac{37}{35}\operatorname{tang}\frac{\pi}{24}+\frac{1}{5}\frac{101}{99}\operatorname{tang}\frac{\pi}{40}+\frac{1}{7}\frac{197}{195}\operatorname{tang}\frac{\pi}{56}+\ldots=\frac{\pi}{4},$$

$$(59)\quad \frac{3}{5}\operatorname{tang}\frac{\pi}{8}+\frac{1}{3}\frac{35}{37}\operatorname{tang}\frac{\pi}{24}+\frac{1}{5}\frac{99}{101}\operatorname{tang}\frac{\pi}{40}+\frac{1}{7}\frac{195}{197}\operatorname{tang}\frac{\pi}{56}+\ldots=\frac{\pi}{4}\left(\frac{e^{\frac{\pi}{4}}-e^{-\frac{\pi}{4}}}{e^{\frac{\pi}{4}}+e^{-\frac{\pi}{4}}}\right)^2.$$

Supposons encore

$$f(z^2)=\frac{z^2}{z^4-1}=\frac{1}{z^2-\frac{1}{z^2}}.$$

On conclura des formules (51), (52), (53), (54)

$$(60)\quad \frac{1}{x^2-\frac{1}{x^2}}\operatorname{tang}\frac{\pi x^2}{2}+\frac{\frac{1}{3}}{\frac{x^2}{9}-\frac{9}{x^2}}\operatorname{tang}\frac{\pi x^2}{6}+\frac{\frac{1}{5}}{\frac{x^2}{25}-\frac{25}{x^2}}\operatorname{tang}\frac{\pi x^2}{10}+\ldots=\frac{\pi}{16}\left[\left(\frac{e^{\frac{\pi x}{2}}-e^{-\frac{\pi x}{2}}}{e^{\frac{\pi x}{2}}+e^{-\frac{\pi x}{2}}}\right)^2-\operatorname{tang}^2\frac{\pi x}{2}\right],$$

$$(61)\quad \frac{1}{x^2-\frac{1}{x^2}}\cot\pi x^2+\frac{\frac{1}{2}}{\frac{x^2}{4}-\frac{4}{x^2}}\cot\frac{\pi x^2}{2}+\frac{\frac{1}{3}}{\frac{x^2}{9}-\frac{9}{x^2}}\cot\frac{\pi x^2}{3}+\ldots=\frac{\pi}{8}\left[\cot^2\pi x-\left(\frac{e^{\pi x}+e^{-\pi x}}{e^{\pi x}-e^{-\pi x}}\right)^2\right],$$

$$(62)\quad \frac{1}{x^2-\frac{1}{x^2}}\operatorname{séc}\frac{\pi x^2}{2}-\frac{\frac{1}{3}}{\frac{x^2}{9}-\frac{9}{x^2}}\operatorname{séc}\frac{\pi x^2}{6}+\frac{\frac{1}{5}}{\frac{x^2}{25}-\frac{25}{x^2}}\operatorname{séc}\frac{\pi x^2}{10}-\ldots=\frac{\pi}{16}\left[\left(\frac{2}{e^{\frac{\pi x}{2}}+e^{-\frac{\pi x}{2}}}\right)^2-\operatorname{séc}^2\frac{\pi x}{2}\right],$$

$$(63)\quad \frac{1}{x^2-\frac{1}{x^2}}\operatorname{cosec}\pi x^2-\frac{\frac{1}{2}}{\frac{x^2}{4}-\frac{4}{x^2}}\operatorname{cosec}\frac{\pi x^2}{2}+\frac{\frac{1}{3}}{\frac{x^2}{9}-\frac{9}{x^2}}\operatorname{cosec}\frac{\pi x^2}{3}-\ldots=\frac{\pi}{8}\left[\left(\frac{2}{e^{\pi x}-e^{-\pi x}}\right)^2-\operatorname{cosec}^2\pi x\right].$$

Si, dans ces dernières équations, on remplace x^2 par $x^2\sqrt{-1}$, on obtiendra les suivantes :

$$(64)\quad \begin{cases} \dfrac{1}{x^2+\frac{1}{x^2}}\dfrac{e^{\frac{\pi x^2}{2}}-e^{-\frac{\pi x^2}{2}}}{e^{\frac{\pi x^2}{2}}+e^{-\frac{\pi x^2}{2}}}+\dfrac{\frac{1}{3}}{\frac{x^2}{9}+\frac{9}{x^2}}\dfrac{e^{\frac{\pi x^2}{6}}-e^{-\frac{\pi x^2}{6}}}{e^{\frac{\pi x^2}{6}}+e^{-\frac{\pi x^2}{6}}}+\dfrac{\frac{1}{5}}{\frac{x^2}{25}+\frac{25}{x^2}}\dfrac{e^{\frac{\pi x^2}{10}}-e^{-\frac{\pi x^2}{10}}}{e^{\frac{\pi x^2}{10}}+e^{-\frac{\pi x^2}{10}}}+\ldots \\ =\dfrac{\frac{\pi}{8}\left(e^{\frac{\pi x}{\sqrt{2}}}-e^{-\frac{\pi x}{\sqrt{2}}}\right)^2-4\sin^2\frac{\pi x}{\sqrt{2}}}{\left(e^{\frac{\pi x}{\sqrt{2}}}+e^{-\frac{\pi x}{\sqrt{2}}}+2\cos\frac{\pi x}{\sqrt{2}}\right)^2}, \end{cases}$$

$$(65)\quad \begin{cases} \dfrac{1}{x^2+\frac{1}{x^2}}\dfrac{e^{\pi x^2}+e^{-\pi x^2}}{e^{\pi x^2}-e^{-\pi x^2}}+\dfrac{\frac{1}{2}}{\frac{x^2}{4}+\frac{4}{x^2}}\dfrac{e^{\frac{\pi x^2}{2}}+e^{-\frac{\pi x^2}{2}}}{e^{\frac{\pi x^2}{2}}-e^{-\frac{\pi x^2}{2}}}+\dfrac{\frac{1}{3}}{\frac{x^2}{9}+\frac{9}{x^2}}\dfrac{e^{\frac{\pi x^2}{3}}+e^{-\frac{\pi x^2}{3}}}{e^{\frac{\pi x^2}{3}}-e^{-\frac{\pi x^2}{3}}}+\ldots \\ =\dfrac{\frac{\pi}{4}\left(e^{\pi x\sqrt{2}}-e^{-\pi x\sqrt{2}}\right)^2-4\sin^2\left(\pi x\sqrt{2}\right)}{\left[e^{\pi x\sqrt{2}}+e^{-\pi x\sqrt{2}}-2\cos\left(\pi x\sqrt{2}\right)\right]^2}, \end{cases}$$

$$(66)\quad \begin{cases} \dfrac{1}{x^2+\frac{1}{x^2}}\dfrac{1}{e^{\frac{\pi x^2}{2}}+e^{-\frac{\pi x^2}{2}}}-\dfrac{\frac{1}{3}}{\frac{x^2}{9}+\frac{9}{x^2}}\dfrac{1}{e^{\frac{\pi x^2}{6}}+e^{-\frac{\pi x^2}{6}}}+\dfrac{\frac{1}{5}}{\frac{x^2}{25}+\frac{25}{x^2}}\dfrac{1}{e^{\frac{\pi x^2}{10}}+e^{-\frac{\pi x^2}{10}}}-\ldots \\ =\dfrac{\left(e^{\frac{\pi x}{\sqrt{2}}}-e^{-\frac{\pi x}{\sqrt{2}}}\right)\sin\frac{\pi x}{\sqrt{2}}}{\left(e^{\frac{\pi x}{\sqrt{2}}}+e^{-\frac{\pi x}{\sqrt{2}}}+2\cos\frac{\pi x}{\sqrt{2}}\right)^2}, \end{cases}$$

$$(67)\quad \begin{cases} \dfrac{1}{x^2+\frac{1}{x^2}}\dfrac{1}{e^{\pi x^2}-e^{-\pi x^2}}-\dfrac{\frac{1}{2}}{\frac{x^2}{4}+\frac{4}{x^2}}\dfrac{1}{e^{\frac{\pi x^2}{2}}-e^{-\frac{\pi x^2}{2}}}+\dfrac{\frac{1}{3}}{\frac{x^2}{9}+\frac{9}{x^2}}\dfrac{1}{e^{\frac{\pi x^2}{3}}-e^{-\frac{\pi x^2}{3}}}-\ldots \\ =\dfrac{\frac{\pi}{2}-\left(e^{\pi x\sqrt{2}}+e^{-\pi x\sqrt{2}}\right)\cos\left(\pi x\sqrt{2}\right)}{\left[e^{\pi x\sqrt{2}}+e^{-\pi x\sqrt{2}}-2\cos\left(\pi x\sqrt{2}\right)\right]^2}. \end{cases}$$

Lorsque dans l'équation (67) on écrit $\sqrt{s}$ au lieu de x, on retrouve la formule (17) de la page 273 du second Volume (¹). Par conséquent, cette formule, que nous avions établie par un calcul contre lequel on aurait pu élever quelques objections, est parfaitement exacte; et il ne doit rester là-dessus aucun doute.

(¹) *OEuvres de Cauchy*, S. II, T. VII, p. 319.

USAGE DU CALCUL DES RÉSIDUS

POUR

L'ÉVALUATION OU LA TRANSFORMATION DES PRODUITS

COMPOSÉS

D'UN NOMBRE FINI OU INFINI DE FACTEURS.

Désignons par $f(z)$ une fonction entière de la variable z, et par

(1) $$\alpha, \quad \beta, \quad \gamma, \quad \dots$$

les racines réelles ou imaginaires de l'équation

(2) $$f(z) = 0.$$

La fonction $f(z)$ pourra être présentée sous la forme

(3) $$f(z) = k(z-\alpha)(z-\beta)(z-\gamma)\dots.$$

Soit d'ailleurs x une seconde variable distincte de z. Si, dans l'équation (3), on pose successivement $z = 0$, $z = x$, on en tirera

(4) $$f(0) = k(-\alpha)(-\beta)(-\gamma)\dots,$$

(5) $$f(x) = k(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)\dots;$$

puis, en divisant la formule (5) par la formule (4), et admettant qu'aucune des racines α, β, γ, ... ne soit égale à zéro, on trouvera

(6) $$\frac{f(x)}{f(0)} = \left(1-\frac{x}{\alpha}\right)\left(1-\frac{x}{\beta}\right)\left(1-\frac{x}{\gamma}\right)\dots.$$

Soient maintenant $F(z)$ une nouvelle fonction entière de z, et

(7) $$\lambda, \quad \mu, \quad \nu, \quad \dots$$

les racines de l'équation

(8) $$F(z) = 0.$$

En supposant qu'aucune de ces racines ne s'évanouisse, on trouvera encore

(9) $$\frac{F(x)}{F(0)} = \left(1-\frac{x}{\lambda}\right)\left(1-\frac{x}{\mu}\right)\left(1-\frac{x}{\nu}\right)\dots.$$

Il y a plus : si, dans la formule (6), on remplace successivement la variable x par les rapports $\frac{x}{\lambda}, \frac{x}{\mu}, \frac{x}{\nu}, \dots$, on en tirera

(10) $$\begin{cases} \dfrac{f\left(\frac{x}{\lambda}\right)}{f(0)} = \left(1-\dfrac{x}{\alpha\lambda}\right)\left(1-\dfrac{x}{\beta\lambda}\right)\left(1-\dfrac{x}{\gamma\lambda}\right)\dots, \\ \dfrac{f\left(\frac{x}{\mu}\right)}{f(0)} = \left(1-\dfrac{x}{\alpha\mu}\right)\left(1-\dfrac{x}{\beta\mu}\right)\left(1-\dfrac{x}{\gamma\mu}\right)\dots, \\ \dfrac{f\left(\frac{x}{\nu}\right)}{f(0)} = \left(1-\dfrac{x}{\alpha\nu}\right)\left(1-\dfrac{x}{\beta\nu}\right)\left(1-\dfrac{x}{\gamma\nu}\right)\dots, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{cases}$$

et, par suite,

(11) $$\begin{cases} \dfrac{f\left(\frac{x}{\lambda}\right)}{f(0)}\dfrac{f\left(\frac{x}{\mu}\right)}{f(0)}\dfrac{f\left(\frac{x}{\nu}\right)}{f(0)}\dots \\ \quad = \left(1-\dfrac{x}{\alpha\lambda}\right)\left(1-\dfrac{x}{\beta\lambda}\right)\left(1-\dfrac{x}{\gamma\lambda}\right)\dots\left(1-\dfrac{x}{\alpha\mu}\right)\left(1-\dfrac{x}{\beta\mu}\right)\left(1-\dfrac{x}{\gamma\mu}\right)\dots \\ \qquad\qquad \times\left(1-\dfrac{x}{\alpha\nu}\right)\left(1-\dfrac{x}{\beta\nu}\right)\left(1-\dfrac{x}{\gamma\nu}\right)\dots. \end{cases}$$

De même, si, dans la formule (9), on remplace successivement la va-

riable x par les rapports $\frac{x}{\alpha}, \frac{x}{\beta}, \frac{x}{\gamma}, \dots$, on en tirera

$$(12)\quad \begin{cases} \dfrac{F\left(\frac{x}{\alpha}\right)}{F(0)} = \left(1-\dfrac{x}{\alpha\lambda}\right)\left(1-\dfrac{x}{\alpha\mu}\right)\left(1-\dfrac{x}{\alpha\nu}\right)\cdots, \\ \dfrac{F\left(\frac{x}{\beta}\right)}{F(0)} = \left(1-\dfrac{x}{\beta\lambda}\right)\left(1-\dfrac{x}{\beta\mu}\right)\left(1-\dfrac{x}{\beta\nu}\right)\cdots, \\ \dfrac{F\left(\frac{x}{\gamma}\right)}{F(0)} = \left(1-\dfrac{x}{\gamma\lambda}\right)\left(1-\dfrac{x}{\gamma\mu}\right)\left(1-\dfrac{x}{\gamma\nu}\right)\cdots, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{cases}$$

et, par suite,

$$(13)\quad \begin{cases} \dfrac{F\left(\frac{x}{\alpha}\right)}{F(0)}\dfrac{F\left(\frac{x}{\beta}\right)}{F(0)}\dfrac{F\left(\frac{x}{\gamma}\right)}{F(0)}\cdots \\ \quad = \left(1-\dfrac{x}{\alpha\lambda}\right)\left(1-\dfrac{x}{\alpha\mu}\right)\left(1-\dfrac{x}{\alpha\nu}\right)\cdots\left(1-\dfrac{x}{\beta\lambda}\right)\left(1-\dfrac{x}{\beta\mu}\right)\left(1-\dfrac{x}{\beta\nu}\right)\cdots \\ \qquad\qquad \times\left(1-\dfrac{x}{\gamma\lambda}\right)\left(1-\dfrac{x}{\gamma\mu}\right)\left(1-\dfrac{x}{\gamma\nu}\right)\cdots \end{cases}$$

Donc, attendu que les seconds membres des formules (11) et (13) sont composés des mêmes facteurs, on aura définitivement

$$(14)\quad \frac{f\left(\frac{x}{\lambda}\right)}{f(0)}\frac{f\left(\frac{x}{\mu}\right)}{f(0)}\frac{f\left(\frac{x}{\nu}\right)}{f(0)}\cdots = \frac{F\left(\frac{x}{\alpha}\right)}{F(0)}\frac{F\left(\frac{x}{\beta}\right)}{F(0)}\frac{F\left(\frac{x}{\gamma}\right)}{F(0)}\cdots$$

Cette dernière formule, de laquelle il résulte que les deux produits

$$\frac{f\left(\frac{x}{\lambda}\right)}{f(0)}\frac{f\left(\frac{x}{\mu}\right)}{f(0)}\frac{f\left(\frac{x}{\nu}\right)}{f(0)}\cdots, \qquad \frac{F\left(\frac{x}{\alpha}\right)}{F(0)}\frac{F\left(\frac{x}{\beta}\right)}{F(0)}\frac{F\left(\frac{x}{\gamma}\right)}{F(0)}\cdots$$

peuvent être transformés l'un dans l'autre, se déduit aisément du calcul des résidus, ainsi que nous allons le faire voir.

Supposons d'abord, pour plus de commodité, qu'aucune des équations (2) et (8) n'offre de racines égales. Faisons d'ailleurs

$$(15)\quad P = \frac{f\left(\frac{x}{\lambda}\right)}{f(0)}\frac{f\left(\frac{x}{\mu}\right)}{f(0)}\frac{f\left(\frac{x}{\nu}\right)}{f(0)}\cdots$$

et

$$(16)\quad Q = \frac{F\left(\frac{x}{\alpha}\right)}{F(0)}\frac{F\left(\frac{x}{\beta}\right)}{F(0)}\frac{F\left(\frac{x}{\gamma}\right)}{F(0)}\cdots.$$

Si la valeur de x est assez rapprochée de zéro pour que la partie réelle de chacun des rapports

$$\frac{f\left(\frac{x}{\lambda}\right)}{f(0)}, \quad \frac{f\left(\frac{x}{\mu}\right)}{f(0)}, \quad \frac{f\left(\frac{x}{\nu}\right)}{f(0)}, \quad \dots$$

reste positive, et que les coefficients de $\sqrt{-1}$, dans les logarithmes de ces rapports, fournissent une somme renfermée entre les limites $-\frac{\pi}{2}$, $+\frac{\pi}{2}$, on tirera de la formule (15)

$$(17)\quad l(P) = l\frac{f\left(\frac{x}{\lambda}\right)}{f(0)} + l\frac{f\left(\frac{x}{\mu}\right)}{f(0)} + l\frac{f\left(\frac{x}{\nu}\right)}{f(0)} + \cdots.$$

Ajoutons que, dans tous les cas possibles, on trouvera

$$(18)\quad l(\pm P) = l\left[\pm\frac{f\left(\frac{x}{\lambda}\right)}{f(0)}\right] + l\left[\pm\frac{f\left(\frac{x}{\mu}\right)}{f(0)}\right] + l\left[\pm\frac{f\left(\frac{x}{\nu}\right)}{f(0)}\right] + \dots \pm i\pi\sqrt{-1}\ (1),$$

le double signe $\pm$ devant être réduit, dans chaque logarithme, au signe $+$ ou au signe $-$ suivant que la fonction, placée à la suite de ce double signe, offrira pour partie réelle une quantité positive ou négative, et $\pm i$ désignant une quantité entière convenablement choisie. Si maintenant on différentie, par rapport à x, les deux membres de la

(1) On établit sans peine la formule (18) à l'aide des principes exposés dans l'*Analyse algébrique*, Chap. IX (2).

(2) *Œuvres de Cauchy*, S. II, T. III.

formule (17) ou (18), on en conclura

$$(19)\qquad \frac{1}{P}\frac{dP}{dx}=\frac{1}{\lambda}\frac{f'\left(\frac{x}{\lambda}\right)}{f\left(\frac{x}{\lambda}\right)}+\frac{1}{\mu}\frac{f'\left(\frac{x}{\mu}\right)}{f\left(\frac{x}{\mu}\right)}+\frac{1}{\nu}\frac{f'\left(\frac{x}{\nu}\right)}{f\left(\frac{x}{\nu}\right)}+\ldots.$$

On trouvera de même

$$(20)\qquad \frac{1}{Q}\frac{dQ}{dx}=\frac{1}{\alpha}\frac{F'\left(\frac{x}{\alpha}\right)}{F\left(\frac{x}{\alpha}\right)}+\frac{1}{\beta}\frac{F'\left(\frac{x}{\beta}\right)}{F\left(\frac{x}{\beta}\right)}+\frac{1}{\gamma}\frac{F'\left(\frac{x}{\gamma}\right)}{F\left(\frac{x}{\gamma}\right)}+\ldots.$$

D'ailleurs le second membre de la formule (19) peut être représenté par l'une quelconque des deux expressions équivalentes

$$(21)\qquad \mathcal{L}\frac{1}{z}\frac{f'\left(\frac{x}{z}\right)}{f\left(\frac{x}{z}\right)}\frac{F'(z)}{((F(z)))},\qquad -\mathcal{L}\frac{1}{z}\frac{f'(z)}{f(z)}\frac{F'\left(\frac{x}{z}\right)}{\left(\left(F\left(\frac{x}{z}\right)\right)\right)},$$

dont on obtient la dernière en remplaçant dans la première z par $\frac{x}{z}$, et multipliant la fonction sous le signe $\mathcal{L}$ par $\frac{d\left(\frac{x}{z}\right)}{dz}=-\frac{x}{z^2}$, conformément aux règles tracées dans le premier Volume (p. 167 et suiv.) (1) pour le changement de variable indépendante dans le calcul des résidus. De même, le second membre de la formule (20) peut être représenté par l'une quelconque des deux expressions équivalentes

$$(22)\qquad \mathcal{L}\frac{1}{z}\frac{F'\left(\frac{x}{z}\right)}{F\left(\frac{x}{z}\right)}\frac{f'(z)}{((f(z)))},\qquad -\mathcal{L}\frac{1}{z}\frac{F'(z)}{F(z)}\frac{f'\left(\frac{x}{z}\right)}{\left(\left(f\left(\frac{x}{z}\right)\right)\right)}.$$

Cela posé, on tirera des formules (19) et (20)

$$(23)\qquad \frac{1}{P}\frac{dP}{dx}-\frac{1}{Q}\frac{dQ}{dx}=\mathcal{L}\frac{1}{z}\frac{f'\left(\frac{x}{z}\right)}{f\left(\frac{x}{z}\right)}\frac{F'(z)}{((F(z)))}+\mathcal{L}\frac{1}{z}\frac{F'(z)}{F(z)}\frac{f'\left(\frac{x}{z}\right)}{\left(\left(f\left(\frac{x}{z}\right)\right)\right)}$$

(1) *Œuvres de Cauchy*, S. II, T. VI, p. 210 et suiv.

ou, plus simplement,

$$(24)\qquad \frac{1}{P}\frac{dP}{dx}-\frac{1}{Q}\frac{dQ}{dx}=\mathcal{L}\left(\left(\frac{f'\left(\frac{x}{z}\right)F'(z)}{zf\left(\frac{x}{z}\right)F(z)}\right)\right),$$

attendu que la fraction

$$(25)\qquad \frac{f'\left(\frac{x}{z}\right)F'(z)}{zf\left(\frac{x}{z}\right)F(z)}$$

ne deviendra pas infinie pour une valeur nulle de z. Effectivement, si l'on nomme m le degré de la fonction entière $f(z)$, la fraction (25) pourra être considérée comme le produit des deux rapports

$$(26)\qquad \frac{\frac{1}{z}f'\left(\frac{x}{z}\right)}{f\left(\frac{x}{z}\right)},\qquad \frac{F'(z)}{F(z)},$$

qui, pour des valeurs nulles de z, ou des valeurs infinies de $\frac{1}{z}$, se réduiront, le premier à $\frac{mk}{k}=m$, le second à la constante finie $\frac{F'(0)}{F(0)}$. D'un autre côté, comme des valeurs infinies de z réduiront le rapport

$$(27)\qquad \frac{f'\left(\frac{x}{z}\right)}{f\left(\frac{x}{z}\right)}$$

à la constante finie $\frac{f'(0)}{f(0)}$, et les expressions (26) ainsi que le produit

$$(28)\qquad \frac{f'\left(\frac{x}{z}\right)}{f\left(\frac{x}{z}\right)}\frac{F'(z)}{F(z)}$$

de la fonction (25) et de la variable z à zéro, on aura, en vertu de la

formule (64) de la page 23 du I^er Volume (1),

$$\mathcal{L}\left(\left(\frac{f'\left(\frac{x}{z}\right)F'(z)}{z\,f\left(\frac{x}{z}\right)F(z)}\right)\right)=0, \tag{29}$$

et, par suite, l'équation (24) donnera

$$\frac{1}{P}\frac{dP}{dx}-\frac{1}{Q}\frac{dQ}{dx}=0. \tag{30}$$

Or cette dernière, multipliée par $\frac{P}{Q}dx$, devient

$$d\left(\frac{P}{Q}\right)=0; \tag{31}$$

puis, en l'intégrant à partir de $x=0$, et observant que chacune des fonctions P, Q se réduit à l'unité pour une valeur nulle de x, on trouve

$$\frac{P}{Q}-1=0, \qquad P=Q \tag{32}$$

ou, ce qui revient au même,

$$\frac{f\left(\frac{x}{\lambda}\right)}{f(0)}\frac{f\left(\frac{x}{\mu}\right)}{f(0)}\frac{f\left(\frac{x}{\nu}\right)}{f(0)}\cdots=\frac{F\left(\frac{x}{\alpha}\right)}{F(0)}\frac{F\left(\frac{x}{\beta}\right)}{F(0)}\frac{F\left(\frac{x}{\gamma}\right)}{F(0)}\cdots. \tag{14}$$

La formule (14) ainsi établie, dans le cas où les racines

$$\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \ldots;\ \lambda,\ \mu,\ \nu,\ \ldots$$

sont toutes distinctes les unes des autres, subsistera évidemment quelque petites que soient les différences de ces mêmes racines, et par conséquent elle continuera de subsister dans le cas même ou plusieurs de ces racines deviendraient égales entre elles.

Si l'on désignait par ξ une valeur particulière de la variable x, on

(1) *Œuvres de Cauchy*, S. II, T. VI, p. 36.

tirerait de la formule (14), en posant $x=\xi$,

$$\frac{f\left(\frac{\xi}{\lambda}\right)}{f(0)}\frac{f\left(\frac{\xi}{\mu}\right)}{f(0)}\frac{f\left(\frac{\xi}{\nu}\right)}{f(0)}\cdots=\frac{F\left(\frac{\xi}{\alpha}\right)}{F(0)}\frac{F\left(\frac{\xi}{\beta}\right)}{F(0)}\frac{F\left(\frac{\xi}{\gamma}\right)}{F(0)}\cdots; \tag{33}$$

puis, en divisant la formule (14) par la formule (33), on trouverait

$$\frac{f\left(\frac{x}{\lambda}\right)}{f\left(\frac{\xi}{\lambda}\right)}\frac{f\left(\frac{x}{\mu}\right)}{f\left(\frac{\xi}{\mu}\right)}\frac{f\left(\frac{x}{\nu}\right)}{f\left(\frac{\xi}{\nu}\right)}\cdots=\frac{F\left(\frac{x}{\alpha}\right)}{F\left(\frac{\xi}{\alpha}\right)}\frac{F\left(\frac{x}{\beta}\right)}{F\left(\frac{\xi}{\beta}\right)}\frac{F\left(\frac{x}{\gamma}\right)}{F\left(\frac{\xi}{\gamma}\right)}\cdots. \tag{34}$$

Concevons à présent que les fonctions $f(z)$, $F(z)$ cessent d'être entières. Mais admettons qu'elles restent finies et continues, ainsi que leurs dérivées des divers ordres pour toutes les valeurs finies de z. Supposons d'ailleurs : 1° que, pour chacune des deux équations

$$f(z)=0, \tag{35}$$

$$F(z)=0, \tag{36}$$

les racines différentes de zéro soient inégales entre elles; 2° que, parmi les mêmes racines, celles qui offrent des modules inférieurs à une limite finie R soient en nombre fini, et représentées, pour l'équation (35), par

$$\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \ldots, \tag{37}$$

pour l'équation (36), par

$$\lambda,\ \mu,\ \nu,\ \ldots. \tag{38}$$

Si l'on prend

$$\varphi(x)=\frac{f'\left(\frac{x}{\lambda}\right)}{\lambda f\left(\frac{x}{\lambda}\right)}+\frac{f'\left(\frac{x}{\mu}\right)}{\mu f\left(\frac{x}{\mu}\right)}+\frac{f'\left(\frac{x}{\nu}\right)}{\nu f\left(\frac{x}{\nu}\right)}+\ldots-\frac{F'\left(\frac{x}{\alpha}\right)}{\alpha F\left(\frac{x}{\alpha}\right)}-\frac{F'\left(\frac{x}{\beta}\right)}{\beta F\left(\frac{x}{\beta}\right)}-\frac{F'\left(\frac{x}{\gamma}\right)}{\gamma F\left(\frac{x}{\gamma}\right)}-\ldots, \tag{39}$$

la fonction $\varphi(x)$ restera évidemment finie et continue pour toutes les valeurs réelles ou imaginaires de x qui offriront des modules infé-

rieurs à R. En effet, parmi ces valeurs de x, celles que renferme la suite

$$(40)\qquad \begin{cases} x=\alpha\lambda, & x=\alpha\mu, & x=\alpha\nu, & \dots, \\ x=\beta\lambda, & x=\beta\mu, & x=\beta\nu, & \dots, \\ x=\gamma\lambda, & x=\gamma\mu, & x=\gamma\nu, & \dots, \\ \dots\dots, & \dots\dots, & \dots\dots, & \dots \end{cases}$$

seront les seules qui puissent rendre infinies quelques-unes des fractions comprises dans le second membre de la formule (39), en faisant évanouir leurs dénominateurs. D'ailleurs, pour chacune de ces valeurs, deux fractions deviendront infinies simultanément, mais leur différence restera finie. Ainsi, par exemple, pour $x=\alpha\lambda$, les deux fractions

$$(41)\qquad \frac{f'\left(\frac{x}{\lambda}\right)}{\lambda f\left(\frac{x}{\lambda}\right)},\quad \frac{F'\left(\frac{x}{\alpha}\right)}{\alpha F\left(\frac{x}{\alpha}\right)}$$

deviendront infinies en même temps. Mais leur différence ou le rapport

$$(42)\qquad \frac{\frac{1}{\lambda}f'\left(\frac{x}{\lambda}\right)F\left(\frac{x}{\alpha}\right)-\frac{1}{\alpha}F'\left(\frac{x}{\alpha}\right)f\left(\frac{x}{\lambda}\right)}{f\left(\frac{x}{\lambda}\right)F\left(\frac{x}{\alpha}\right)}$$

conservera une valeur finie, qui, en vertu d'un théorème connu de Calcul infinitésimal, sera la même que celle du rapport

$$(43)\qquad \frac{\frac{1}{\lambda}f'\left(\frac{x}{\lambda}\right)F'\left(\frac{x}{\alpha}\right)-\frac{1}{\alpha}F'\left(\frac{x}{\alpha}\right)f'\left(\frac{x}{\lambda}\right)}{2f'\left(\frac{x}{\lambda}\right)F'\left(\frac{x}{\alpha}\right)},$$

et, par conséquent, égale à

$$(44)\qquad \frac{1}{2}\left[\frac{1}{\lambda}\frac{f''(\alpha)}{f'(\alpha)}-\frac{1}{\alpha}\frac{F''(\lambda)}{F'(\lambda)}\right].$$

Cela posé, faisons

$$(45)\qquad y=\psi(x)=e^{\int_\xi^x \varphi(x)\,dx},$$

ξ désignant une valeur particulière de la variable x. La fonction $\psi(x)$, ainsi que $\varphi(x)$, restera finie et continue pour toutes les valeurs de x dont le module sera inférieur à l'unité; et l'on aura, pour $x=\xi$,

$$(46)\qquad y=\psi(\xi).$$

De plus, la formule (45) donnera généralement

$$(47)\qquad \frac{dy}{dx}=\psi'(x)=\varphi(x)\,e^{\int_\xi^x \varphi(x)\,dx}=y\,\varphi(x)$$

ou, ce qui revient au même,

$$(48)\qquad \frac{dy}{dx}=\left[\frac{f'\left(\frac{x}{\lambda}\right)}{\lambda f\left(\frac{x}{\lambda}\right)}+\frac{f'\left(\frac{x}{\mu}\right)}{\mu f\left(\frac{x}{\mu}\right)}+\frac{f'\left(\frac{x}{\nu}\right)}{\nu f\left(\frac{x}{\nu}\right)}+\dots-\frac{F'\left(\frac{x}{\alpha}\right)}{\alpha F\left(\frac{x}{\alpha}\right)}-\frac{F'\left(\frac{x}{\beta}\right)}{\beta F\left(\frac{x}{\beta}\right)}-\frac{F'\left(\frac{x}{\gamma}\right)}{\gamma F\left(\frac{x}{\gamma}\right)}\right]y.$$

Ainsi, la fonction de x, représentée par y ou $\psi(x)$, devra remplir la double condition de se réduire à l'unité pour $x=\xi$, et de vérifier, quel que soit x, l'équation différentielle linéaire (47) ou (48). Or, cette équation n'admettant pas d'intégrale singulière, la double condition dont il s'agit sera remplie tant que les modules de ξ et de x resteront inférieurs à R. Donc, puisqu'on vérifie encore cette double condition en prenant

$$(49)\qquad y=\frac{f\left(\frac{x}{\lambda}\right)}{f\left(\frac{\xi}{\lambda}\right)}\frac{f\left(\frac{x}{\mu}\right)}{f\left(\frac{\xi}{\mu}\right)}\frac{f\left(\frac{x}{\nu}\right)}{f\left(\frac{\xi}{\nu}\right)}\dots\frac{F\left(\frac{\xi}{\alpha}\right)}{F\left(\frac{x}{\alpha}\right)}\frac{F\left(\frac{\xi}{\beta}\right)}{F\left(\frac{x}{\beta}\right)}\frac{F\left(\frac{\xi}{\gamma}\right)}{F\left(\frac{x}{\gamma}\right)}\dots,$$

les valeurs de y, fournies par les équations (45) et (49), seront nécessairement identiques, en sorte qu'on aura, pour toutes les valeurs de x et de ξ dont le module ne surpassera pas R,

$$(50)\qquad \frac{f\left(\frac{x}{\lambda}\right)}{f\left(\frac{\xi}{\lambda}\right)}\frac{f\left(\frac{x}{\mu}\right)}{f\left(\frac{\xi}{\mu}\right)}\frac{f\left(\frac{x}{\nu}\right)}{f\left(\frac{\xi}{\nu}\right)}\dots\frac{F\left(\frac{\xi}{\alpha}\right)}{F\left(\frac{x}{\alpha}\right)}\frac{F\left(\frac{\xi}{\beta}\right)}{F\left(\frac{x}{\beta}\right)}\frac{F\left(\frac{\xi}{\gamma}\right)}{F\left(\frac{x}{\gamma}\right)}\dots=e^{\int_\xi^x \varphi(x)\,dx}$$

ou, ce qui revient au même,

$$(51)\qquad \frac{f\left(\frac{x}{\lambda}\right)}{f\left(\frac{\xi}{\lambda}\right)}\frac{f\left(\frac{x}{\mu}\right)}{f\left(\frac{\xi}{\mu}\right)}\frac{f\left(\frac{x}{\nu}\right)}{f\left(\frac{\xi}{\nu}\right)}\cdots=\frac{F\left(\frac{x}{\alpha}\right)}{F\left(\frac{\xi}{\alpha}\right)}\frac{F\left(\frac{x}{\beta}\right)}{F\left(\frac{\xi}{\beta}\right)}\frac{F\left(\frac{x}{\gamma}\right)}{F\left(\frac{\xi}{\gamma}\right)}\cdots e^{\int_{\xi}^{x}\varphi(x)\,dx}.$$

Si, dans la dernière formule, on pose $\xi=0$, elle donnera

$$(52)\qquad \frac{f\left(\frac{x}{\lambda}\right)}{f(0)}\frac{f\left(\frac{x}{\mu}\right)}{f(0)}\frac{f\left(\frac{x}{\nu}\right)}{f(0)}\cdots=\frac{F\left(\frac{x}{\alpha}\right)}{F(0)}\frac{F\left(\frac{x}{\beta}\right)}{F(0)}\frac{F\left(\frac{x}{\gamma}\right)}{F(0)}\cdots e^{\int_{0}^{x}\varphi(x)\,dx}.$$

Désignons maintenant par $f(z)$ une fonction semblable à celle qui est renfermée sous le signe $\mathcal{E}$ dans la formule (29), en sorte que l'on ait

$$(53)\qquad f(z)=\frac{f'\left(\frac{x}{z}\right)F'(z)}{z\,f\left(\frac{x}{z}\right)F(z)}.$$

Supposons, de plus, que la fonction (53) ou $f(z)$ puisse être décomposée en deux parties, dont la première soit la somme de plusieurs termes réciproquement proportionnels à des puissances entières de z, et dont la seconde, multipliée par z, fournisse un produit qui s'évanouisse pour certaines valeurs infiniment petites de z. Si, en attribuant au module r de la variable z des valeurs infiniment grandes, on peut les choisir de manière que l'une des fonctions

$$(54)\qquad z f(z)=\frac{f'\left(\frac{x}{z}\right)F'(z)}{f\left(\frac{x}{z}\right)F(z)},$$

$$(55)\qquad z\,\frac{f(z)-f(-z)}{2}=\frac{1}{2}\left[\frac{f'\left(\frac{x}{z}\right)F'(z)}{f\left(\frac{x}{z}\right)F(z)}+\frac{f'\left(-\frac{x}{z}\right)F'(-z)}{f\left(-\frac{x}{z}\right)F(-z)}\right]$$

devienne sensiblement égale à une expression déterminée ϑ, quel que soit d'ailleurs le rapport $\frac{z}{r}$, ou du moins de manière que l'une des différences

$$(56)\qquad \frac{f'\left(\frac{x}{z}\right)F'(z)}{f\left(\frac{x}{z}\right)F(z)}-\vartheta,$$

$$(57)\qquad \frac{1}{2}\left[\frac{f'\left(\frac{x}{z}\right)F'(z)}{f\left(\frac{x}{z}\right)F(z)}+\frac{f'\left(-\frac{x}{z}\right)F'(-z)}{f\left(-\frac{x}{z}\right)F(-z)}\right]-\vartheta$$

reste toujours finie ou infiniment petite, et ne cesse d'être infiniment petite, en demeurant finie, que dans le voisinage de certaines valeurs particulières du rapport $\frac{z}{r}$; alors, en vertu du théorème énoncé à la page 274 du IIe Volume (1), et des principes établis dans l'article précédent, on aura

$$(58)\qquad \mathcal{E}((f(z)))=\vartheta$$

ou, ce qui revient au même,

$$(59)\qquad \mathcal{E}\left(\left(\frac{f'\left(\frac{x}{z}\right)F(z)}{z\,f\left(\frac{x}{z}\right)F(z)}\right)\right)=\vartheta,$$

pourvu que l'on réduise le résidu intégral compris dans l'équation (58) ou (59) à sa valeur principale. Si d'ailleurs on attribue au nombre ci-dessus désigné par R une valeur infinie, les séries (37) et (38) renfermeront toutes les racines des équations (35), (36), ou du moins toutes celles qui ne se réduiront pas à zéro. Alors, en supposant ces mêmes racines rangées d'après l'ordre de grandeur de leurs modules, et désignant par

$$(60)\qquad X=\mathcal{E}\frac{f'\left(\frac{x}{z}\right)F'(z)}{f\left(\frac{x}{z}\right)F(z)}\,\frac{1}{((z))}$$

le résidu partiel de $f(z)$ relatif à $z=0$, en sorte que $\frac{X}{z}$ représente le

(1) *Œuvres de Cauchy*, S. II, T. VII. p. 320.

terme réciproquement proportionnel à z dans la fonction $f(z)$, on trouvera

$$(61)\quad \left\{\begin{array}{l} \mathcal{L}\left(\left(\dfrac{f\left(\frac{x}{z}\right)F'(z)}{z\,f\left(\frac{x}{z}\right)F(z)}\right)\right) = X + \dfrac{f'\left(\frac{x}{\lambda}\right)}{\lambda f\left(\frac{x}{\lambda}\right)} + \dfrac{f'\left(\frac{x}{\mu}\right)}{\mu f\left(\frac{x}{\mu}\right)} + \dfrac{f'\left(\frac{x}{\nu}\right)}{\nu f\left(\frac{x}{\nu}\right)} + \dots \\ \qquad\qquad - \dfrac{F'\left(\frac{x}{\alpha}\right)}{\alpha F\left(\frac{x}{\alpha}\right)} - \dfrac{F'\left(\frac{x}{\beta}\right)}{\beta F\left(\frac{x}{\beta}\right)} - \dfrac{F'\left(\frac{x}{\gamma}\right)}{\gamma F\left(\frac{x}{\gamma}\right)} - \dots \end{array}\right.$$

ou, ce qui revient au même,

$$(62)\quad \mathcal{L}\left(\left(\frac{f\left(\frac{x}{z}\right)F'(z)}{z\,f\left(\frac{x}{z}\right)F(z)}\right)\right) = X + \varphi(x);$$

puis, en combinant l'équation (62) avec les formules (59) et (50), on en conclura

$$(63)\quad \varphi(x) = \tilde{\sigma} - X,$$

$$(64)\quad \frac{f\left(\frac{x}{\lambda}\right)}{f\left(\frac{\xi}{\lambda}\right)}\frac{f\left(\frac{x}{\mu}\right)}{f\left(\frac{\xi}{\mu}\right)}\frac{f\left(\frac{x}{\nu}\right)}{f\left(\frac{\xi}{\nu}\right)}\dots\frac{F\left(\frac{\xi}{\alpha}\right)}{F\left(\frac{x}{\alpha}\right)}\frac{F\left(\frac{\xi}{\beta}\right)}{F\left(\frac{x}{\beta}\right)}\frac{F\left(\frac{\xi}{\gamma}\right)}{F\left(\frac{x}{\gamma}\right)}\dots = e^{\int_\xi^x(\tilde{\sigma}-X)\,dx}.$$

Donc, si, dans le produit

$$(65)\quad \frac{f\left(\frac{x}{\lambda}\right)}{f\left(\frac{\xi}{\lambda}\right)}\frac{f\left(\frac{x}{\mu}\right)}{f\left(\frac{\xi}{\mu}\right)}\frac{f\left(\frac{x}{\nu}\right)}{f\left(\frac{\xi}{\nu}\right)}\dots\frac{F\left(\frac{\xi}{\alpha}\right)}{F\left(\frac{x}{\alpha}\right)}\frac{F\left(\frac{\xi}{\beta}\right)}{F\left(\frac{x}{\beta}\right)}\frac{F\left(\frac{\xi}{\gamma}\right)}{F\left(\frac{x}{\gamma}\right)}\dots,$$

on fait entrer toutes les fractions de la forme

$$\frac{f\left(\frac{x}{\lambda}\right)}{f\left(\frac{\xi}{\lambda}\right)} \quad \text{ou} \quad \frac{F\left(\frac{\xi}{\alpha}\right)}{F\left(\frac{x}{\alpha}\right)},$$

et correspondantes à celles des racines $\alpha, \beta, \gamma, \dots, \lambda, \mu, \nu, \dots$ qui

offrent des modules inférieurs au nombre R, il suffira d'attribuer à R des valeurs de plus en plus grandes, pour que le produit (65) converge vers une limite finie équivalente à l'expression

$$(66)\quad e^{\int_\xi^x(\tilde{\sigma}-X)\,dx};$$

et l'on obtiendra la formule (64), en considérant le premier membre de cette formule comme composé d'une infinité de facteurs. On aura par suite

$$(67)\quad \frac{f\left(\frac{x}{\lambda}\right)}{f\left(\frac{\xi}{\lambda}\right)}\frac{f\left(\frac{x}{\mu}\right)}{f\left(\frac{\xi}{\mu}\right)}\frac{f\left(\frac{x}{\nu}\right)}{f\left(\frac{\xi}{\nu}\right)}\dots = \frac{F\left(\frac{x}{\alpha}\right)}{F\left(\frac{\xi}{\alpha}\right)}\frac{F\left(\frac{x}{\beta}\right)}{F\left(\frac{\xi}{\beta}\right)}\frac{F\left(\frac{x}{\gamma}\right)}{F\left(\frac{\xi}{\gamma}\right)}\dots e^{\int_\xi^x(\tilde{\sigma}-X)\,dx}.$$

Jusqu'ici nous avons supposé que, pour chacune des équations (35), (36), les racines différentes de zéro étaient inégales entre elles. Mais la démonstration que nous avons donnée de la formule (64) ou (67) peut être facilement étendue au cas même où les équations dont il s'agit offriraient des racines égales qui ne seraient pas nulles. Supposons, par exemple, que n racines de l'équation (36) deviennent égales à λ, en sorte qu'on ait, non seulement

$$(68)\quad F(\lambda) = 0,$$

mais encore

$$(69)\quad F'(\lambda) = 0, \quad F''(\lambda) = 0, \quad \dots, \quad F^{(n-1)}(\lambda) = 0.$$

La somme des fractions correspondantes à ces racines dans le second membre de la formule (39) sera

$$(70)\quad n\frac{f'\left(\frac{x}{\lambda}\right)}{\lambda f\left(\frac{x}{\lambda}\right)},$$

et la somme des termes qui, dans ce second membre, deviendront

infinis pour $x = \alpha\lambda$ se réduira simplement à

$$n\frac{f'\left(\frac{x}{\lambda}\right)}{\lambda f\left(\frac{x}{\lambda}\right)} - \frac{F'\left(\frac{x}{\alpha}\right)}{\alpha F\left(\frac{x}{\alpha}\right)}. \tag{71}$$

D'ailleurs, si l'on pose

$$x = \alpha\lambda + \varepsilon, \tag{72}$$

ε désignant une variable infiniment petite, et si l'on développe les deux expressions

$$n\frac{f'\left(\frac{x}{\lambda}\right)}{\lambda f\left(\frac{x}{\lambda}\right)} = n\frac{f'\left(\alpha + \frac{\varepsilon}{\lambda}\right)}{\lambda f\left(\alpha + \frac{\varepsilon}{\lambda}\right)}, \qquad \frac{F'\left(\frac{x}{\alpha}\right)}{\alpha F\left(\frac{x}{\alpha}\right)} = \frac{F'\left(\lambda + \frac{\varepsilon}{\alpha}\right)}{\alpha F\left(\lambda + \frac{\varepsilon}{\alpha}\right)}, \tag{73}$$

suivant les puissances ascendantes de ε, en ayant égard aux équations (68), (69), il suffira de négliger dans les développements obtenus les termes infiniment petits pour réduire ces développements aux deux binômes

$$\frac{n}{\varepsilon} + \frac{n}{1.2}\frac{f''(\alpha)}{\lambda f'(\alpha)}, \qquad \frac{n}{\varepsilon} + \frac{n}{n(n+1)}\frac{F^{(n+1)}(\lambda)}{\alpha F^{(n)}(\lambda)}. \tag{74}$$

Donc, pour $\varepsilon = 0$, ou, ce qui revient au même, pour $x = \alpha\lambda$, l'expression (71) sera équivalente à la différence des binômes (74), c'est-à-dire à

$$n\left[\frac{1}{1.2}\frac{f''(\alpha)}{\lambda f'(\alpha)} - \frac{1}{n(n+1)}\frac{F^{(n+1)}(\lambda)}{\alpha F^{(n)}(\lambda)}\right]. \tag{75}$$

Il est aisé d'en conclure que la fonction $\varphi(x)$, déterminée par la formule (39), restera encore finie et continue pour toutes les valeurs réelles ou imaginaires de x qui offriront des modules inférieurs à R. D'un autre côté, il suit des principes établis à la page 340 du I^{er} Volume (1)

(1) *Œuvres de Cauchy*, S. II, T. VI, p. 402.

que, dans le cas où n racines de l'équation (36) deviennent égales à λ, le résidu partiel de la fonction

$$\frac{f'\left(\frac{x}{z}\right)F'(z)}{z f\left(\frac{x}{z}\right)F(z)}, \tag{76}$$

correspondant à la valeur λ de z, est précisément l'expression (70). Donc l'équation (61), ou plutôt celle qui la remplacera, se réduira encore à l'équation (62), et, en la combinant avec les formules (50), (59), (62), on retrouvera les équations (63), (64), (67). Seulement, dans le premier membre de l'équation (64) ou (67), n fractions égales correspondront aux racines dont λ désignera la valeur commune, et le produit de ces n fractions sera

$$\left[\frac{f\left(\frac{x}{\lambda}\right)}{f\left(\frac{\varepsilon}{\lambda}\right)}\right]^n. \tag{77}$$

En résumé, l'on peut énoncer la proposition suivante :

THÉORÈME I. — *Soient* $f(z)$, $F(z)$ *deux fonctions de* z *qui restent finies et continues, ainsi que leurs dérivées des divers ordres, pour toutes les valeurs finies de* z. *Supposons d'ailleurs que l'on ait*

$$f(z) = 0, \tag{35}$$

$$F(z) = 0, \tag{36}$$

et que celles de ces racines qui diffèrent de zéro, étant rangées d'après l'ordre de grandeur de leurs modules, soient représentées par

$$\alpha, \quad \beta, \quad \gamma, \quad \ldots \tag{37}$$

pour l'équation (35), *par*

$$\lambda, \quad \mu, \quad \nu, \quad \ldots \tag{38}$$

pour l'équation (36). *Admettons encore que, parmi les mêmes racines, celles dont le module reste inférieur à une limite finie* R *soient en nombre*

fini. Enfin, désignons par x une nouvelle variable distincte de z. Si, en attribuant au module r de la variable z des valeurs infiniment grandes, on peut les choisir de manière que l'une des expressions

$$\frac{f'\left(\frac{x}{z}\right)F'(z)}{f\left(\frac{x}{z}\right)F(z)}, \tag{54}$$

$$\frac{1}{2}\left[\frac{f'\left(\frac{x}{z}\right)F'(z)}{f\left(\frac{x}{z}\right)F(z)}+\frac{f'\left(-\frac{x}{z}\right)F'(-z)}{f\left(-\frac{x}{z}\right)F(-z)}\right] \tag{55}$$

devienne sensiblement égale à une expression déterminée $\mathfrak{s}$, quel que soit le rapport $\frac{z}{r}$, ou du moins de manière que l'une des différences

$$\frac{f'\left(\frac{x}{z}\right)F'(z)}{f\left(\frac{x}{z}\right)F(z)}-\mathfrak{s}, \tag{56}$$

$$\frac{1}{2}\left[\frac{f'\left(\frac{x}{z}\right)F'(z)}{f\left(\frac{x}{z}\right)F(z)}+\frac{f'\left(-\frac{x}{z}\right)F'(-z)}{f\left(-\frac{x}{z}\right)F(-z)}\right]-\mathfrak{s} \tag{57}$$

reste toujours finie ou infiniment petite, et ne cesse d'être infiniment petite en demeurant finie que dans le voisinage de certaines valeurs particulières du rapport $\frac{z}{r}$; si, de plus, la fonction

$$f(z)=\frac{f'\left(\frac{x}{z}\right)F'(z)}{z\,f\left(\frac{x}{z}\right)F(z)} \tag{53}$$

peut se décomposer en deux parties dont l'une soit la somme de plusieurs termes réciproquement proportionnels à des puissances entières de z, et dont l'autre s'évanouisse pour certaines valeurs infiniment petites de z; alors, en désignant par X le résidu de $f(z)$ relatif à $z=0$, en sorte

qu'on ait

$$X=\mathcal{L}\frac{f'\left(\frac{x}{z}\right)F'(z)}{f\left(\frac{x}{z}\right)F(z)}\frac{1}{((z))}, \tag{60}$$

et par ξ une valeur particulière de x, on trouvera

$$\frac{f\left(\frac{x}{\lambda}\right)}{f\left(\frac{\xi}{\lambda}\right)}\frac{f\left(\frac{x}{\mu}\right)}{f\left(\frac{\xi}{\mu}\right)}\frac{f\left(\frac{x}{\nu}\right)}{f\left(\frac{\xi}{\nu}\right)}\cdots=\frac{F\left(\frac{x}{\alpha}\right)}{F\left(\frac{\xi}{\alpha}\right)}\frac{F\left(\frac{x}{\beta}\right)}{F\left(\frac{\xi}{\beta}\right)}\frac{F\left(\frac{x}{\gamma}\right)}{F\left(\frac{\xi}{\gamma}\right)}\cdots e^{\int_{\xi}^{x}(\mathfrak{s}-X)\,dx}, \tag{67}$$

pourvu que l'on considère chacun des produits que renferme l'équation (67) comme composé d'une infinité de facteurs.

Corollaire I. — Si, dans la formule (67), on prend $\xi=0$, elle donnera simplement

$$\frac{f\left(\frac{x}{\lambda}\right)}{f(0)}\frac{f\left(\frac{x}{\mu}\right)}{f(0)}\frac{f\left(\frac{x}{\nu}\right)}{f(0)}\cdots=\frac{F\left(\frac{x}{\alpha}\right)}{F(0)}\frac{F\left(\frac{x}{\beta}\right)}{F(0)}\frac{F\left(\frac{x}{\gamma}\right)}{F(0)}\cdots e^{\int_{0}^{x}(\mathfrak{s}-X)\,dx}. \tag{78}$$

Corollaire II. — Si $\mathfrak{s}$ et X s'évanouissent, les formules (67) et (78) deviendront respectivement

$$\frac{f\left(\frac{x}{\lambda}\right)}{f\left(\frac{\xi}{\lambda}\right)}\frac{f\left(\frac{x}{\mu}\right)}{f\left(\frac{\xi}{\mu}\right)}\frac{f\left(\frac{x}{\nu}\right)}{f\left(\frac{\xi}{\nu}\right)}\cdots=\frac{F\left(\frac{x}{\alpha}\right)}{F\left(\frac{\xi}{\alpha}\right)}\frac{F\left(\frac{x}{\beta}\right)}{F\left(\frac{\xi}{\beta}\right)}\frac{F\left(\frac{x}{\gamma}\right)}{F\left(\frac{\xi}{\gamma}\right)}\cdots \tag{79}$$

et

$$\frac{f\left(\frac{x}{\lambda}\right)}{f(0)}\frac{f\left(\frac{x}{\mu}\right)}{f(0)}\frac{f\left(\frac{x}{\nu}\right)}{f(0)}\cdots=\frac{F\left(\frac{x}{\alpha}\right)}{F(0)}\frac{F\left(\frac{x}{\beta}\right)}{F(0)}\frac{F\left(\frac{x}{\gamma}\right)}{F(0)}\cdots. \tag{80}$$

Si, de plus, $f(0)$ et $F(0)$ se réduisent à l'unité, on aura simplement

$$f\left(\frac{x}{\lambda}\right)f\left(\frac{x}{\mu}\right)f\left(\frac{x}{\nu}\right)\cdots=F\left(\frac{x}{\alpha}\right)F\left(\frac{x}{\beta}\right)F\left(\frac{x}{\gamma}\right)\cdots. \tag{81}$$

Observons, d'ailleurs, que X devra être censé réduit à zéro, toutes les

fois que l'expression (54) s'évanouira pour certaines valeurs infiniment petites de la variable z.

L'un des produits compris dans les deux membres de la formule (67) cesse de renfermer une infinité de facteurs, dès que l'une des fonctions $f(z)$, $F(z)$ devient entière. Supposons, pour fixer les idées, que la fonction $f(z)$ soit, non seulement entière, mais du premier degré et de la forme

$$f(z) = 1 - z. \tag{82}$$

Alors les racines $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ se réduiront à une seule, savoir $\alpha = 1$. De plus, les fonctions (54), (55) deviendront respectivement

$$-\frac{1}{1-\frac{x}{z}}\frac{F'(z)}{F(z)}, \tag{83}$$

$$-\frac{1}{2\left(1-\frac{x^2}{z^2}\right)}\left[\left(1+\frac{x}{z}\right)\frac{F'(z)}{F(z)}+\left(1-\frac{x}{z}\right)\frac{F'(-z)}{F(-z)}\right]; \tag{84}$$

et si elles conservent des valeurs finies, z étant infinie, ces valeurs seront les mêmes que celles des fonctions suivantes :

$$-\frac{F'(z)}{F(z)}, \tag{85}$$

$$-\frac{1}{2}\left[\left(1+\frac{x}{z}\right)\frac{F'(z)}{F(z)}+\left(1-\frac{x}{z}\right)\frac{F'(-z)}{F(-z)}\right]. \tag{86}$$

Donc l'expression, représentée par $\mathfrak{F}$ dans le théorème I, sera de la forme

$$\mathfrak{F} = -\mathfrak{F}_0 \tag{87}$$

ou

$$\mathfrak{F} = -\mathfrak{F}_0 - x\mathfrak{F}_1, \tag{88}$$

$\mathfrak{F}_0$ désignant la limite vers laquelle convergera la fonction

$$\frac{F'(z)}{F(z)} \tag{89}$$

ou

$$\frac{1}{2}\left[\frac{F'(z)}{F(z)}+\frac{F'(-z)}{F(-z)}\right], \tag{90}$$

tandis que z deviendra infinie, et $\mathfrak{F}_1$ désignant la limite de la fonction

$$\frac{1}{2z}\left[\frac{F'(z)}{F(z)}-\frac{F'(-z)}{F(-z)}\right]. \tag{91}$$

Enfin, dans la formule (60), la fonction sous le signe $\int$ sera

$$\frac{F'(z)}{(x-z)F(z)}, \tag{92}$$

et ne deviendra infinie, pour des valeurs infiniment petites de z, que dans le cas où la fonction $F(z)$ s'évanouira pour $z = 0$. Mais, dans ce dernier cas, si l'on désigne par n le nombre des racines de l'équation (36) qui se réduiront à zéro, on aura, pour des valeurs infiniment petites de z [*voir* les Leçons sur le *Calcul infinitésimal*, p. 55 (1)],

$$\frac{zF'(z)}{F(z)} = n. \tag{93}$$

Donc la formule (60) donnera

$$X = \int \frac{zF'(z)}{(x-z)F(z)}\frac{1}{((z))} = \frac{n}{x}, \tag{94}$$

et l'on aura

$$X - \mathfrak{F} = \frac{n}{x} + \mathfrak{F}_0 \tag{95}$$

ou

$$X - \mathfrak{F} = \frac{n}{x} + \mathfrak{F}_0 + x\mathfrak{F}_1; \tag{96}$$

puis on en conclura

$$e^{\int_\xi^x (X-\mathfrak{F})dx} = \left(\frac{x}{\xi}\right)^n e^{x-\xi}\mathfrak{F}_0 \tag{97}$$

(1) *OEuvres de Cauchy*, S. II, T. IV.

ou

$$e^{\int_{\xi}^{x}(\chi-\vartheta_0)\,d\chi} = \left(\frac{x}{\xi}\right)^n e^{(x-\xi)\left(\vartheta_0+\frac{x+\xi}{2}\vartheta_1\right)}. \tag{98}$$

Cela posé, on obtiendra évidemment, à la place du théorème I, l'une des propositions que je vais énoncer.

THÉORÈME II. — *Soit* $F(z)$ *une fonction de* z *qui reste finie et continue, ainsi que ses dérivées des divers ordres, pour toutes les valeurs finies de* z. *Supposons d'ailleurs que l'on ait résolu l'équation*

$$F(z) = 0, \tag{36}$$

et que ses racines, rangées d'après l'ordre de grandeur de leurs modules, soient représentées par

$$\lambda, \quad \mu, \quad \nu, \quad \ldots. \tag{38}$$

Soit enfin x *une nouvelle variable distincte de* z. *Si, en attribuant au module* r *de la variable* z *des valeurs infiniment grandes, on peut les choisir de manière que l'expression*

$$\frac{F'(z)}{F(z)} \tag{89}$$

devienne sensiblement égale à une constante déterminée ϑ_0, *quel que soit le rapport* $\frac{z}{r}$, *ou du moins de manière que la différence*

$$\frac{F'(z)}{F(z)} - \vartheta_0 \tag{99}$$

reste toujours finie ou infiniment petite, et ne cesse d'être infiniment petite, en demeurant finie, que dans le voisinage de certaines valeurs particulières du rapport $\frac{z}{r}$; *alors, en désignant par* n *le nombre des racines de l'équation* (36) *qui se réduiront à zéro, on trouvera*

$$\frac{F(x)}{F(\xi)} = \frac{1-\frac{x}{\lambda}}{1-\frac{\xi}{\lambda}}\,\frac{1-\frac{x}{\mu}}{1-\frac{\xi}{\mu}}\,\frac{1-\frac{x}{\nu}}{1-\frac{\xi}{\nu}}\cdots\left(\frac{x}{\xi}\right)^n e^{(x-\xi)\vartheta_0}. \tag{100}$$

Corollaire I. — Si, après avoir multiplié par $F(\xi)$ les deux membres de la formule (100), on suppose ξ infiniment petit, on aura sensiblement, dans le second membre,

$$\frac{F(\xi)}{\xi^n} = \frac{F^{(n)}(0)}{1.2.3\ldots n}. \tag{101}$$

Par suite, en prenant $\xi = 0$, on tirera de la formule (100)

$$F(x) = x^n\left(1-\frac{x}{\lambda}\right)\left(1-\frac{x}{\mu}\right)\left(1-\frac{x}{\nu}\right)\cdots e^{x\vartheta_0}\frac{F^{(n)}(0)}{1.2.3\ldots n}. \tag{102}$$

Si n se réduit à zéro ou à l'unité, l'équation (102) donnera simplement

$$F(x) = \left(1-\frac{x}{\lambda}\right)\left(1-\frac{x}{\mu}\right)\left(1-\frac{x}{\nu}\right)\cdots e^{x\vartheta_0}F(0) \tag{103}$$

ou

$$F(x) = x\left(1-\frac{x}{\lambda}\right)\left(1-\frac{x}{\mu}\right)\left(1-\frac{x}{\nu}\right)\cdots e^{x\vartheta_0}F'(0). \tag{104}$$

Corollaire II. — Si ϑ_0 s'évanouit, les formules (100), (102), (103) et (104) donneront respectivement

$$\frac{F(x)}{F(\xi)} = \left(\frac{x}{\xi}\right)^n \frac{\lambda-x}{\lambda-\xi}\,\frac{\mu-x}{\mu-\xi}\,\frac{\nu-x}{\nu-\xi}\cdots, \tag{105}$$

$$F(x) = x^n\left(1-\frac{x}{\lambda}\right)\left(1-\frac{x}{\mu}\right)\left(1-\frac{x}{\nu}\right)\cdots\frac{F^{(n)}(0)}{1.2.3\ldots n}, \tag{106}$$

$$F(x) = \left(1-\frac{x}{\lambda}\right)\left(1-\frac{x}{\mu}\right)\left(1-\frac{x}{\nu}\right)\cdots F(0), \tag{107}$$

$$F(x) = x\left(1-\frac{x}{\lambda}\right)\left(1-\frac{x}{\mu}\right)\left(1-\frac{x}{\nu}\right)\cdots F'(0). \tag{108}$$

THÉORÈME III. — *Les mêmes choses étant posées que dans le théorème II, si l'on peut attribuer au module* r *de la variable* z *des valeurs infiniment grandes, choisies de manière que les expressions*

$$\frac{1}{2}\left[\frac{F'(z)}{F(z)} + \frac{F'(-z)}{F(-z)}\right], \tag{90}$$

$$\frac{1}{2z}\left[\frac{F'(z)}{F(z)} - \frac{F'(-z)}{F(-z)}\right] \tag{91}$$

deviennent sensiblement égales à des constantes déterminées ϑ_0, ϑ_1, *quel que soit le rapport* $\frac{z}{r}$, *ou du moins de manière que les différences*

$$\frac{1}{2}\left[\frac{F'(z)}{F(z)}+\frac{F'(-z)}{F(-z)}\right]-\vartheta_0, \tag{109}$$

$$\frac{1}{2z}\left[\frac{F'(z)}{F(z)}-\frac{F'(-z)}{F(-z)}\right]-\vartheta_1 \tag{110}$$

restent toujours finies ou infiniment petites, et ne cessent d'être infiniment petites, en demeurant finies, que dans le voisinage de certaines valeurs particulières du rapport $\frac{z}{r}$; *alors, en désignant par n le nombre des racines de l'équation* (36) *qui se réduiront à zéro, on trouvera*

$$\frac{F(x)}{F(\xi)}=\frac{1-\frac{x}{\lambda}}{1-\frac{\xi}{\lambda}}\frac{1-\frac{x}{\mu}}{1-\frac{\xi}{\mu}}\frac{1-\frac{x}{\nu}}{1-\frac{\xi}{\nu}}\cdots\left(\frac{x}{\xi}\right)^n e^{(x-\xi)\left(\vartheta_0+\frac{x+\xi}{2}\vartheta_1\right)}. \tag{111}$$

Corollaire I. — Si, après avoir multiplié par $F(\xi)$ les deux membres de la formule (111), on attribue à ξ une valeur infiniment petite, on trouvera

$$F(x)=\frac{F^{(n)}(0)}{1.2.3\ldots n}x^n\left(1-\frac{x}{\lambda}\right)\left(1-\frac{x}{\mu}\right)\left(1-\frac{x}{\nu}\right)\cdots e^{x\vartheta_0+\frac{1}{2}x^2\vartheta_1}. \tag{112}$$

Lorsque n se réduit à zéro ou à l'unité, c'est-à-dire lorsque l'équation (36) n'admet pas de racines nulles, ou en admet une seulement, on tire de l'équation (112)

$$F(x)=\left(1-\frac{x}{\lambda}\right)\left(1-\frac{x}{\mu}\right)\left(1-\frac{x}{\nu}\right)\cdots e^{x\vartheta_0+\frac{1}{2}x^2\vartheta_1}F(0) \tag{113}$$

ou

$$F(x)=x\left(1-\frac{x}{\lambda}\right)\left(1-\frac{x}{\mu}\right)\left(1-\frac{x}{\nu}\right)\cdots e^{x\vartheta_0+\frac{1}{2}x^2\vartheta_1}F'(0). \tag{114}$$

Corollaire II. — Si ϑ_0 et ϑ_1 s'évanouissent, les équations (111), (112), (113), (114) se réduiront aux formules (105), (106), (107), (108).

Appliquons maintenant les diverses formules ci-dessus établies à quelques exemples.

Exemple I. — Supposons d'abord

$$F(z)=\sin z. \tag{115}$$

Alors l'équation (36), ou

$$\sin z=0, \tag{116}$$

offrira une seule racine nulle et une infinité de racines réelles, les unes positives, les autres négatives, savoir

$$\begin{cases} z=\pi, & z=2\pi, & z=3\pi, & \ldots, \\ z=-\pi, & z=-2\pi, & z=-3\pi, & \ldots; \end{cases} \tag{117}$$

mais elle n'admettra point de racines imaginaires [*voir* le I^er^ Volume, p. 297 (1)]. De plus, l'expression (90) s'évanouira, et l'expression (91), réduite à

$$\frac{\cos z}{z\sin z}, \tag{118}$$

deviendra infiniment petite, si l'on attribue au module r de la variable z des valeurs de la forme

$$r=\frac{(2n+1)\pi}{2}, \tag{119}$$

n désignant un nombre entier infiniment grand. Cela posé, le théorème III sera évidemment applicable à la fonction $F(z)=\sin z$; et la formule (114), réduite à l'équation (108), attendu que les constantes ϑ_0, ϑ_1 s'évanouiront, donnera

$$\sin x=x\left(1-\frac{x}{\pi}\right)\left(1+\frac{x}{\pi}\right)\left(1-\frac{x}{2\pi}\right)\left(1+\frac{x}{2\pi}\right)\left(1-\frac{x}{3\pi}\right)\left(1+\frac{x}{3\pi}\right)\cdots \tag{120}$$

ou, ce qui revient au même,

$$\sin x=x\left(1-\frac{x^2}{\pi^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{4\pi^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{9\pi^2}\right)\cdots \tag{121}$$

(1) *Œuvres de Cauchy*, S. II, T. VI, p. 354.

Il est bon d'observer que l'on pourrait encore déduire la formule (120) ou (121) du théorème II et de l'équation (107), en prenant $F(z) = \frac{\sin z}{z}$.

Exemple II. — Supposons en second lieu

$$F(z) = \cos z. \tag{122}$$

Alors l'équation (36), ou

$$\cos z = 0, \tag{123}$$

admettra une infinité de racines toutes réelles et différentes de zéro, les unes positives, les autres négatives, savoir

$$\begin{cases} z = \frac{\pi}{2}, & z = \frac{3\pi}{2}, & z = \frac{5\pi}{2}, & \dots, \\ z = -\frac{\pi}{2}, & z = -\frac{3\pi}{2}, & z = -\frac{5\pi}{2}, & \dots \end{cases} \tag{124}$$

De plus, l'expression (90) s'évanouira, et l'expression (91), réduite à

$$-\frac{\sin z}{z\cos z}, \tag{125}$$

deviendra infiniment petite, si l'on attribue au module r de la variable z des valeurs de la forme

$$r = n\pi, \tag{126}$$

n désignant un nombre entier infiniment grand. Cela posé, le théorème III sera évidemment applicable à la fonction $F(z) = \cos z$: et la formule (113), réduite à l'équation (107), attendu que les constantes $\mathfrak{F}_0$, $\mathfrak{F}_1$ s'évanouiront, donnera

$$\cos x = \left(1-\frac{2x}{\pi}\right)\left(1+\frac{2x}{\pi}\right)\left(1-\frac{2x}{3\pi}\right)\left(1+\frac{2x}{3\pi}\right)\left(1-\frac{2x}{5\pi}\right)\left(1+\frac{2x}{5\pi}\right)\cdots \tag{127}$$

ou, ce qui revient au même,

$$\cos x = \left(1-\frac{4x^2}{\pi^2}\right)\left(1-\frac{4x^2}{9\pi^2}\right)\left(1-\frac{4x^2}{25\pi^2}\right)\cdots \tag{128}$$

On peut, au reste, déduire la formule (127) ou (128) de la formule (120) ou (121), en remplaçant x par $\frac{\pi}{2} - x$.

Exemple III. — Soit

$$F(z) = \sin z - \sin a, \tag{129}$$

a désignant une constante arbitrairement choisie. L'équation (36), ou

$$\sin z = \sin a, \tag{130}$$

admettra une infinité de racines réelles, savoir

$$\begin{cases} z = a, & z = -a+\pi, & z = a+2\pi, & z = -a+3\pi, & \dots \\ & z = -a-\pi, & z = a-2\pi, & z = -a-3\pi, & \dots \end{cases} \tag{131}$$

De plus, si l'on attribue au module r de la variable z des valeurs infiniment grandes, mais sensiblement distinctes de celles qui correspondent aux racines dont il s'agit, les expressions (90), (91), ou

$$\frac{\sin a\cos z}{(\sin z - \sin a)(\sin z + \sin a)}, \tag{132}$$

$$\frac{\sin z\cos z}{z(\sin z - \sin a)(\sin z + \sin a)}, \tag{133}$$

resteront toujours finies ou infiniment petites, et la première ne cessera d'être infiniment petite, en demeurant finie, que dans le cas où le coefficient de $\sqrt{-1}$ dans z sera sensiblement nul, et le rapport $\frac{z}{r}$ sensiblement égal à ± 1. Cela posé, le théorème III sera évidemment applicable à la fonction $F(z) = \sin z - \sin a$; et la formule (113), réduite à l'équation (107), attendu que les constantes $\mathfrak{F}_0$, $\mathfrak{F}_1$ s'évanouiront, donnera

$$1-\frac{\sin x}{\sin a} = \left(1-\frac{x}{a}\right)\left(1+\frac{x}{\pi+a}\right)\left(1-\frac{x}{\pi-a}\right)\left(1-\frac{x}{2\pi+a}\right)\left(1+\frac{x}{2\pi-a}\right)\left(1+\frac{x}{3\pi+a}\right)\left(1-\frac{x}{3\pi-a}\right)\cdots \tag{134}$$

ou, ce qui revient au même,

$$\frac{\sin a - \sin x}{\sin a} = \frac{a-x}{a}\,\frac{\pi^2-(x+a)^2}{\pi^2-a^2}\,\frac{4\pi^2-(x-a)^2}{4\pi^2-a^2}\,\frac{9\pi^2-(x+a)^2}{9\pi^2-a^2}\cdots \tag{135}$$

Comme on aura d'ailleurs, en vertu de la formule (121),

$$\sin a = a\,\frac{\pi^2-a^2}{\pi^2}\,\frac{4\pi^2-a^2}{4\pi^2}\,\frac{9\pi^2-a^2}{9\pi^2}\cdots, \tag{136}$$

on tirera des équations (135) et (136), multipliées l'une par l'autre,

$$\frac{\sin x-\sin a}{x-a} = \frac{\pi^2-(x+a)^2}{\pi^2}\,\frac{4\pi^2-(x-a)^2}{4\pi^2}\,\frac{9\pi^2-(x+a)^2}{9\pi^2}\,\frac{25\pi^2-(x-a)^2}{25\pi^2}\cdots. \tag{137}$$

On pourrait, au reste, déduire la formule (137) des équations (121) et (127) réunies à la suivante :

$$\sin x-\sin a = 2\sin\frac{x-a}{2}\cos\frac{x+a}{2}. \tag{138}$$

Exemple IV. — Soit encore

$$F(z)=\cos z-\cos a. \tag{139}$$

L'équation (36), ou

$$\cos z=\cos a, \tag{140}$$

admettra une infinité de racines, savoir

$$\begin{cases} z=a, & z=a+2\pi, & z=a+4\pi, & z=a+6\pi, & \ldots,\\ & z=a-2\pi, & z=a-4\pi, & z=a-6\pi, & \ldots,\\ z=-a, & z=-a+2\pi, & z=-a+4\pi, & z=-a+6\pi, & \ldots,\\ & z=-a-2\pi, & z=-a-4\pi, & z=-a-6\pi, & \ldots. \end{cases} \tag{141}$$

De plus, l'expression (90) s'évanouira, et l'expression (91), réduite à

$$-\frac{\sin z}{z(\cos z-\cos a)}, \tag{142}$$

deviendra infiniment petite, si l'on attribue au module r de la variable z des valeurs infiniment grandes, mais sensiblement distinctes de celles qui correspondent aux racines de l'équation (140). Cela posé, le théorème III sera évidemment applicable à la fonction $F(z)=\cos z-\cos a$; et la formule (113), réduite à l'équation (107),

attendu que les constantes ϑ_0, ϑ_1 s'évanouiront, donnera

$$\frac{\cos a-\cos x}{\cos a-1} = \left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)\left[1-\frac{x^2}{(2\pi-a)^2}\right]\left[1-\frac{x^2}{(2\pi+a)^2}\right]\left[1-\frac{x^2}{(4\pi-a)^2}\right]\left[1-\frac{x^2}{(4\pi+a)^2}\right]\cdots \tag{143}$$

ou, ce qui revient au même,

$$\frac{\cos x-\cos a}{2\sin^2\frac{a}{2}} = \frac{a^2-x^2}{a^2}\,\frac{(2\pi-a)^2-x^2}{(2\pi-a)^2}\,\frac{(2\pi+a)^2-x^2}{(2\pi+a)^2}\,\frac{(4\pi-a)^2-x^2}{(4\pi-a)^2}\,\frac{(4\pi+a)^2-x^2}{(4\pi+a)^2}\cdots. \tag{144}$$

Comme on aura d'ailleurs, en vertu de la formule (120),

$$\sin\frac{a}{2} = \frac{a}{2}\,\frac{2\pi-a}{2\pi}\,\frac{2\pi+a}{2\pi}\,\frac{4\pi-a}{4\pi}\,\frac{4\pi+a}{4\pi}\cdots, \tag{145}$$

on tirera des équations (144) et (145)

$$\cos x-\cos a = \frac{a^2-x^2}{2}\,\frac{(2\pi-a)^2-x^2}{(2\pi)^2}\,\frac{(2\pi+a)^2-x^2}{(2\pi)^2}\,\frac{(4\pi-a)^2-x^2}{(4\pi)^2}\,\frac{(4\pi+a)^2-x^2}{(4\pi)^2}\cdots. \tag{146}$$

On pourrait, au reste, déduire la formule (146) de l'équation (121) réunie à la suivante :

$$\cos a-\cos x = 2\sin\frac{x-a}{2}\sin\frac{x+a}{2}. \tag{147}$$

Les formules (120), (127), (137), (146) subsistent pour des valeurs quelconques réelles ou imaginaires de la variable x et de la constante a.

Si, dans l'équation (121), on pose successivement $x=\frac{\pi}{2}$, $x=\frac{\pi}{4}$, on obtiendra les deux formules

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2.2}{1.3}\,\frac{4.4}{3.5}\,\frac{6.6}{5.7}\,\frac{8.8}{7.9}\,\frac{10.10}{9.11}\,\frac{12.12}{11.13}\cdots, \tag{148}$$

$$\frac{\pi}{2\sqrt{2}} = \frac{4.4}{3.5}\,\frac{8.8}{7.9}\,\frac{12.12}{11.13}\cdots, \tag{149}$$

dont la première a été donnée par Wallis, et l'on en conclura

$$\sqrt{2} = \frac{1.3}{2.2}\,\frac{5.7}{6.6}\,\frac{9.11}{10.10}\cdots. \tag{150}$$

Si, dans les formules (121), (128), (146), on remplace x par $x\sqrt{-1}$, on en tirera

$$(151)\qquad e^x - e^{-x} = 2x\left(1+\frac{x^2}{\pi^2}\right)\left(1+\frac{x^2}{4\pi^2}\right)\left(1+\frac{x^2}{9\pi^2}\right)\cdots,$$

$$(152)\qquad e^x + e^{-x} = 2\left(1+\frac{4x^2}{\pi^2}\right)\left(1+\frac{4x^2}{9\pi^2}\right)\left(1+\frac{4x^2}{25\pi^2}\right)\cdots,$$

$$(153)\qquad e^x - 2\cos a + e^{-x} = (a^2+x^2)\frac{(2\pi-a)^2+x^2}{(2\pi)^2}\frac{(2\pi+a)^2+x^2}{(2\pi)^2}\frac{(4\pi-a)^2+x^2}{(4\pi)^2}\frac{(4\pi+a)^2+x^2}{(4\pi)^2}\cdots.$$

Si, dans l'équation (120), on remplace la lettre x : 1° par $x+y\sqrt{-1}$; 2° par $x-y\sqrt{-1}$, y désignant une nouvelle variable indépendante de x, les deux formules qu'on obtiendra, étant multipliées l'une par l'autre, donneront

$$(154)\qquad \frac{e^{2y}-2\cos 2x+e^{-2y}}{4} = (x^2+y^2)\frac{(\pi-x)^2+y^2}{\pi^2}\frac{(\pi+x)^2+y^2}{\pi^2}\frac{(2\pi-x)^2+y^2}{(2\pi)^2}\frac{(2\pi+x)^2+y^2}{(2\pi)^2}\cdots.$$

En opérant de la même manière, on tirera de l'équation (127)

$$(155)\qquad \frac{e^{2y}+2\cos 2x+e^{-2y}}{4} = \frac{(\pi-2x)^2+(2y)^2}{\pi^2}\frac{(\pi+2x)^2+(2y)^2}{\pi^2}\frac{(3\pi-2x)^2+(2y)^2}{(3\pi)^2}\frac{(3\pi+2x)^2+(2y)^2}{(3\pi)^2}\cdots.$$

Au reste, les formules (154) et (155) peuvent être aisément déduites de l'équation (153).

Si, dans l'équation (137), on remplace : 1° x par $x+y\sqrt{-1}$ et a par $a+b\sqrt{-1}$; 2° x par $x-y\sqrt{-1}$ et a par $a-b\sqrt{-1}$, les deux formules qu'on obtiendra, étant multipliées l'une par l'autre, donneront

$$(156)\qquad \begin{cases} \dfrac{[(e^y+e^{-y})\sin x-(e^b+e^{-b})\sin a]^2+[(e^y-e^{-y})\cos x-(e^b-e^{-b})\cos a]^2}{4[(x-a)^2+(y-b)^2]} \\ = \dfrac{(\pi-x-a)^2+(y+b)^2}{\pi^2}\dfrac{(\pi+x+a)^2+(y+b)^2}{\pi^2}\dfrac{(2\pi-x+a)^2+(y-b)^2}{(2\pi)^2}\dfrac{(2\pi+x-a)^2+(y-b)^2}{(2\pi)^2}\cdots \end{cases}$$

En opérant de la même manière, on tirera de l'équation (146)

$$(157)\qquad \begin{cases} \dfrac{[(e^y+e^{-y})\cos x-(e^b+e^{-b})\cos a]^2+[(e^y-e^{-y})\sin x-(e^b-e^{-b})\sin a]^2}{[(x-a)^2+(y-b)^2][(x+a)^2+(y+b)^2]} \\ = \dfrac{(2\pi+x-a)^2+(y-b)^2}{(2\pi)^2}\dfrac{(2\pi-x+a)^2+(y+b)^2}{(2\pi)^2}\dfrac{(2\pi-x+a)^2+(y-b)^2}{(2\pi)^2}\dfrac{(2\pi+x+a)^2+(y+b)^2}{(2\pi)^2}\cdots \end{cases}$$

Dans les applications que nous venons de faire des théorèmes II et III, les constantes, précédemment désignées par $\mathfrak{F}_0$, $\mathfrak{F}_1$, s'évanouissent, et les racines de l'équation (36) sont inégales entre elles. Ces mêmes racines deviendraient égales deux à deux, de manière à coïncider avec l'une des valeurs de z comprises dans les séries

$$(158)\qquad \begin{cases} z=0, & z=2\pi, & z=4\pi, & z=6\pi, & \cdots \\ & z=-2\pi, & z=-4\pi, & z=-6\pi, & \cdots, \end{cases}$$

si l'on supposait

$$(159)\qquad F(z) = 1-\cos z;$$

et alors on tirerait de la formule (106)

$$(160)\qquad 1-\cos x = \frac{x^2}{2}\left(1-\frac{x}{2\pi}\right)^2\left(1+\frac{x}{2\pi}\right)^2\left(1-\frac{x}{4\pi}\right)^2\left(1+\frac{x}{4\pi}\right)^2\cdots$$

ou, ce qui revient au même,

$$(161)\qquad 1-\cos x = \frac{x^2}{2}\left(1-\frac{x^2}{4\pi^2}\right)^2\left(1-\frac{x^2}{16\pi^2}\right)^2\cdots.$$

Au reste, on déduit immédiatement l'équation (161) de la formule (146) en faisant évanouir la constante a.

Si l'on prenait

$$(162)\qquad F(z) = e^z - 1,$$

l'équation (36), réduite à

$$(163)\qquad e^z = 1 \quad \text{ou} \quad z = 1(1),$$

offrirait pour racines les divers logarithmes népériens de l'unité, savoir

$$(164)\qquad \begin{cases} z=0, & z=2\pi\sqrt{-1}, & z=4\pi\sqrt{-1}, & z=6\pi\sqrt{-1}, & \cdots, \\ & z=-2\pi\sqrt{-1}, & z=-4\pi\sqrt{-1}, & z=-6\pi\sqrt{-1}, & \cdots. \end{cases}$$

Alors aussi l'expression (90) deviendrait

$$(165)\qquad \frac{1}{2}\left(\frac{e^z}{e^z-1}+\frac{e^{-z}}{e^{-z}-1}\right) = \frac{1}{2};$$

et, pour faire évanouir l'expression (91), ou

$$\frac{1}{2z}\left(\frac{e^z}{e^z-1}-\frac{e^{-z}}{e^{-z}-1}\right)=\frac{1}{2z}\,\frac{1+e^{-z}}{1-e^{-z}}, \tag{166}$$

il suffirait d'attribuer au module r de la variable z des valeurs de la forme

$$r=\frac{(2n+1)\pi}{2}, \tag{167}$$

n étant un nombre entier infiniment grand. On trouverait donc, par suite,

$$\mathfrak{F}_0=\tfrac{1}{2}, \qquad \mathfrak{F}_1=0; \tag{168}$$

et l'on tirerait de la formule (114)

$$e^x-1=x\left(1+\frac{x^2}{4\pi^2}\right)\left(1+\frac{x^2}{16\pi^2}\right)\left(1+\frac{x^2}{36\pi^2}\right)\cdots e^{\frac{1}{2}x}. \tag{169}$$

Au reste, on déduit immédiatement l'équation (169) de la formule (151), en remplaçant x par $\frac{1}{2}x$.

Si l'on prenait

$$\mathrm{F}(z)=e^{(z+a)^2}-e^{(z-a)^2}, \tag{170}$$

a désignant une constante réelle, l'équation (36), réduite à

$$e^{(z+a)^2}-e^{(z-a)^2}=0, \tag{171}$$

serait vérifiée toutes les fois que l'on poserait

$$(z+a)^2=(z-a)^2\pm 2n\pi\sqrt{-1}$$

ou, ce qui revient au même,

$$z=\pm\frac{n\pi}{2a}\sqrt{-1},$$

n étant un nombre entier quelconque. Par conséquent, cette équation offrirait une racine nulle et une infinité de racines imaginaires com-

prises dans les séries

$$\begin{cases} z=\dfrac{\pi}{2a}\sqrt{-1}, & z=\dfrac{2\pi}{2a}\sqrt{-1}, & z=\dfrac{3\pi}{2a}\sqrt{-1}, & \ldots, \\ z=-\dfrac{\pi}{2a}\sqrt{-1}, & z=-\dfrac{2\pi}{2a}\sqrt{-1}, & z=-\dfrac{3\pi}{2a}\sqrt{-1}, & \ldots. \end{cases} \tag{172}$$

De plus, l'expression (90) s'évanouirait, et l'expression (91), ou

$$\frac{2}{z}\,\frac{(z+a)e^{(z+a)^2}-(z-a)e^{(z-a)^2}}{e^{(z+a)^2}-e^{-(z-a)^2}}=2+\frac{2}{z}\,\frac{1+e^{-4az}}{1-e^{-4az}}, \tag{173}$$

se réduirait sensiblement à 2 pour les valeurs de z dont les modules seraient de la forme

$$r=\frac{(2n+1)\pi}{4a}, \tag{174}$$

n désignant un nombre entier infiniment grand. On trouverait, par suite,

$$\mathfrak{F}_0=0, \qquad \mathfrak{F}_1=2, \tag{175}$$

et l'on tirerait de la formule (114)

$$e^{(x+a)^2}-e^{(x-a)^2}=4ax\left(1-\frac{2ax}{\pi\sqrt{-1}}\right)\left(1+\frac{2ax}{\pi\sqrt{-1}}\right)\left(1-\frac{2ax}{2\pi\sqrt{-1}}\right)\left(1+\frac{2ax}{2\pi\sqrt{-1}}\right)\cdots e^{x^2+a^2} \tag{176}$$

ou, ce qui revient au même,

$$e^{(x+a)^2}-e^{(x-a)^2}=4ax\left(1+\frac{4a^2x^2}{\pi^2}\right)\left(1+\frac{4a^2x^2}{4\pi^2}\right)\left(1+\frac{4a^2x^2}{9\pi^2}\right)\cdots e^{x^2+a^2}. \tag{177}$$

Il suffit, au reste, pour obtenir l'équation (177), de remplacer, dans la formule (151), x par $2ax$, et de multiplier ensuite les deux membres de cette formule par $e^{x^2+a^2}$.

Les diverses formules que nous avons tirées des équations (100) et suivantes coïncident avec des formules déjà connues, ou s'en déduisent facilement. Pour obtenir des formules nouvelles, supposons maintenant

$$\mathrm{F}(z)=\sin z-az\cos z, \tag{178}$$

a désignant une constante réelle. L'équation (36), réduite à

$$\text{tang} z = az, \tag{179}$$

offrira une racine nulle et une infinité de racines réelles, deux à deux égales, mais affectées de signes contraires (*voir* le I^er^ Volume, p. 300) (1). De plus, l'expression (90) s'évanouira, et, pour faire évanouir l'expression (91), ou

$$\frac{1}{z}\frac{(1-a)\cos z + az\sin z}{\sin z - az\cos z}, \tag{180}$$

il suffira d'attribuer au module r de la variable z des valeurs infiniment grandes, mais sensiblement distinctes de celles qui correspondent aux racines de l'équation (179). Cela posé, si l'on désigne par $\pm\lambda$, $\pm\mu$, $\pm\nu$, ... les racines de cette équation, on aura, en vertu du théorème III et de la formule (108),

$$\sin x - ax\cos x = (1-a)\left(1-\frac{x^2}{\lambda^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{\mu^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{\nu^2}\right)\cdots \tag{181}$$

Supposons encore

$$F(z) = (z^2+b)\sin z - az\cos z, \tag{182}$$

a, b désignant deux constantes positives, et ces constantes étant choisies de manière que l'on ait

$$b < a. \tag{183}$$

L'équation (36), réduite à

$$\text{tang} z = \frac{az}{z^2+b}, \tag{184}$$

offrira une racine nulle et une infinité de racines réelles, deux à deux égales, mais affectées de signes contraires (*voir* le I^er^ Volume, p. 306) (2). De plus, l'expression (90) s'évanouira, et, pour faire évanouir l'expression (91), ou

$$\frac{1}{z}\frac{(a+2)z\sin z + (z^2+b-a)\cos z}{(z^2+b)\sin z - az\cos z}, \tag{185}$$

(1) *OEuvres de Cauchy*, S. II, T. VI, p. 358.
(2) *Ibid.*, p. 364.

il suffira d'attribuer au module r de la variable z des valeurs infiniment grandes, mais sensiblement distinctes de celles qui correspondent aux racines de l'équation (184). Cela posé, si l'on désigne par $\pm\lambda$, $\pm\mu$, $\pm\nu$, ... les racines de cette équation, l'on aura, en vertu du théorème III et de la formule (108),

$$(x^2+b)\sin x - ax\cos x = (b-a)x\left(1-\frac{x^2}{\lambda^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{\mu^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{\nu^2}\right)\cdots \tag{186}$$

Supposons enfin

$$F(z) = (e^z + e^{-z})\cos z - 2. \tag{187}$$

L'équation (36), réduite à

$$(e^z + e^{-z})\cos z = 2, \tag{188}$$

offrira quatre racines nulles. De plus, comme on tirera de cette équation

$$\text{tang}\frac{z}{2} = \pm\left(\frac{1-\cos z}{1+\cos z}\right)^{\frac{1}{2}} = \pm\frac{e^{\frac{z}{2}} - e^{-\frac{z}{2}}}{e^{\frac{z}{2}} + e^{-\frac{z}{2}}}, \tag{189}$$

elle admettra encore, en vertu des principes établis dans le I^er^ Volume (p. 309 et 310) (1), une infinité de racines réelles qui, prises quatre à quatre, seront de la forme

$$z = \zeta, \quad z = -\zeta, \quad z = \zeta\sqrt{-1}, \quad z = -\zeta\sqrt{-1}, \tag{190}$$

ζ désignant une quantité réelle. D'autre part, l'expression (90) s'évanouira, et, pour faire évanouir l'expression (91), ou

$$\frac{1}{z}\frac{(e^z - e^{-z})\cos z - (e^z + e^{-z})\sin z}{(e^z - e^{-z})\cos z - 2}, \tag{191}$$

il suffira d'attribuer au module r de la variable z des valeurs infiniment grandes, mais sensiblement distinctes de celles qui correspondent aux racines de l'équation (188). Cela posé, si l'on désigne par $\pm\lambda$, $\pm\mu$, ... les racines réelles de cette équation, on conclura de la formule (106),

(1) *OEuvres de Cauchy*, S. II, T. VI, p. 367, 368.

en posant $n = 4$,

$$(192)\qquad 2-(e^x+e^{-x})\cos x = \frac{x^4}{3}\left(1+\frac{x^4}{\lambda^4}\right)\left(1+\frac{x^4}{\mu^4}\right)\left(1+\frac{x^4}{\nu^4}\right)\cdots$$

Revenons maintenant à la formule (67), et prenons pour $f(z)$ une fonction entière du degré m, qui ne s'évanouisse pas avec la variable z; en sorte qu'on ait

$$(193)\qquad f(z) = a_0 z^m + a_1 z^{m-1} + a_2 z^{m-2} + \ldots + a_{m-1} z + a_m,$$

a_0, a_1, …, a_{m-1}, a_m désignant des coefficients dont le premier et le dernier différent de zéro. On trouvera

$$(194)\qquad \begin{cases} \dfrac{f'\left(\frac{x}{z}\right)}{f\left(\frac{x}{z}\right)} = \dfrac{ma_0x^{m-1}z + (m-1)a_1x^{m-2}z^2 + \ldots + 2a_{m-2}xz^{m-1} + a_{m-1}z^m}{a_0x^m + a_1x^{m-1}z + \ldots + a_{m-1}xz^{m-1} + a_mz^m} \\ \qquad = \dfrac{a_{m-1}}{a_m}\left(1 + 2\dfrac{a_{m-2}}{a_{m-1}}\dfrac{x}{z} + \ldots\right)\left(1 + \dfrac{a_{m-1}}{a_m}\dfrac{x}{z} + \ldots\right)^{-1}; \end{cases}$$

puis on en conclura, en attribuant à z des valeurs très considérables,

$$(195)\qquad \frac{f'\left(\frac{x}{z}\right)}{f\left(\frac{x}{z}\right)} = \frac{a_{m-1}}{a_m} + \frac{2a_{m-2}a_m - a_{m-1}^2}{a_m^2}\frac{x}{z} + \ldots.$$

Cela posé, les fonctions (54), (55) deviendront respectivement

$$(196)\qquad \left(\frac{a_{m-1}}{a_m} + \frac{2a_{m-2}a_m - a_{m-1}^2}{a_m^2}\frac{x}{z} + \ldots\right)\frac{F'(z)}{F(z)},$$

$$(197)\qquad \begin{cases} \frac{1}{2}\left(\dfrac{a_{m-1}}{a_m} + \ldots\right)\left[\dfrac{F'(z)}{F(z)} + \dfrac{F'(-z)}{F(-z)}\right] \\ \quad + \frac{1}{2}\left(\dfrac{2a_{m-2}a_m - a_{m-1}^2}{a_m^2} + \ldots\right)\dfrac{x}{z}\left[\dfrac{F'(z)}{F(z)} - \dfrac{F'(-z)}{F(-z)}\right]; \end{cases}$$

et, si elles conservent des valeurs finies, z étant infini, ces valeurs seront les mêmes que celles des fonctions suivantes :

$$(198)\qquad \frac{a_{m-1}}{a_m}\frac{F'(z)}{F(z)},$$

$$(199)\qquad \frac{a_{m-1}}{2a_m}\left[\frac{F'(z)}{F(z)} + \frac{F'(-z)}{F(-z)}\right] + \frac{2a_{m-2}a_m - a_{m-1}^2}{2a_m^2 z}\left[\frac{F'(z)}{F(z)} - \frac{F'(-z)}{F(-z)}\right]x.$$

Donc l'expression, représentée par $\mathfrak{F}$ dans le théorème I, sera de la forme

$$(87)\qquad \mathfrak{F} = -\mathfrak{F}_0$$

ou

$$(88)\qquad \mathfrak{F} = -\mathfrak{F}_0 - x\mathfrak{F}_1,$$

$\mathfrak{F}_0$ désignant la limite vers laquelle convergera généralement la fonction

$$(200)\qquad -\frac{a_{m-1}}{a_m}\frac{F'(z)}{F(z)}$$

ou

$$(201)\qquad -\frac{a_{m-1}}{2a_m}\left[\frac{F'(z)}{F(z)} + \frac{F'(-z)}{F(-z)}\right],$$

tandis que z deviendra infini, et $\mathfrak{F}_1$ désignant la limite de la fonction

$$(202)\qquad \frac{a_{m-1}^2 - 2a_{m-2}a_m}{2a_m^2 z}\left[\frac{F'(z)}{F(z)} - \frac{F'(-z)}{F(-z)}\right].$$

Enfin, dans la formule (62), la fonction sous le signe $\mathfrak{L}$ deviendra

$$(203)\qquad \frac{1 + \left(1 - \frac{1}{m}\right)\frac{a_1}{a_0}\frac{z}{x} + \ldots}{1 + \frac{a_1}{a_0}\frac{z}{x} + \ldots}\frac{m}{x}\frac{F'(z)}{F(z)},$$

et ne pourra s'évanouir, pour $z = 0$, qu'autant que la fonction $F(z)$ s'évanouira elle-même. Mais, dans ce dernier cas, si l'on désigne par n le nombre des racines de l'équation (36) qui se réduiront à zéro, on aura, pour des valeurs infiniment petites de z,

$$(93)\qquad \frac{zF'(z)}{F(z)} = n.$$

Donc, la formule (61) donnera

$$(204)\qquad X = \frac{m}{x}\mathfrak{L}(1+\ldots)\frac{zF'(z)}{F(z)}\frac{1}{((z))} = \frac{mn}{x};$$

et l'on aura

$$X - \vec{\sigma} = \frac{mn}{x} + \vec{\sigma}_0 \tag{205}$$

ou

$$X - \vec{\sigma} = \frac{mn}{x} + \vec{\sigma}_0 + x\vec{\sigma}_1, \tag{206}$$

puis on en conclura

$$e^{\int_\xi^x (X-\vec{\sigma})\,dx} = \left(\frac{x}{\xi}\right)^{mn} e^{(x-\xi)\vec{\sigma}_0} \tag{207}$$

ou

$$e^{\int_\xi^x (X-\vec{\sigma})\,dx} = \left(\frac{x}{\xi}\right)^{mn} e^{(x-\xi)\left(\vec{\sigma}_0 + \frac{x+\xi}{2}\vec{\sigma}_1\right)}. \tag{208}$$

Si, pour des valeurs infiniment grandes, mais convenablement choisies, du module r de la variable z, les expressions

$$\frac{1}{2}\left[\frac{F'(z)}{F(z)} + \frac{F'(-z)}{F(-z)}\right], \tag{90}$$

$$\frac{1}{2z}\left[\frac{F'(z)}{F(z)} - \frac{F'(-z)}{F(-z)}\right] \tag{91}$$

s'évanouissent, on pourra en dire autant des expressions (201), (202). Alors, les coefficients $\vec{\sigma}_0$, $\vec{\sigma}_1$ étant réduits à zéro, on tirera de la formule (208)

$$e^{\int_\xi^x (X-\vec{\sigma})\,dx} = \left(\frac{x}{\xi}\right)^{mn}, \tag{209}$$

et l'équation (67) donnera

$$\frac{f\left(\frac{x}{\lambda}\right)}{f\left(\frac{\xi}{\lambda}\right)}\frac{f\left(\frac{x}{\mu}\right)}{f\left(\frac{\xi}{\mu}\right)}\frac{f\left(\frac{x}{\nu}\right)}{f\left(\frac{\xi}{\nu}\right)}\cdots = \left(\frac{\xi}{x}\right)^{mn}\frac{F\left(\frac{x}{\alpha}\right)}{F\left(\frac{\xi}{\alpha}\right)}\frac{F\left(\frac{x}{\beta}\right)}{F\left(\frac{\xi}{\beta}\right)}\frac{F\left(\frac{x}{\gamma}\right)}{F\left(\frac{\xi}{\gamma}\right)}\cdots \tag{210}$$

Si maintenant on attribue à ξ une valeur infiniment petite, on aura

sensiblement

$$\frac{F\left(\frac{\xi}{\alpha}\right)}{\xi^n} = \frac{1}{\alpha^n}\frac{F^{(n)}(0)}{1.2.3\ldots n}, \tag{211}$$

$$\frac{F\left(\frac{\xi}{\alpha}\right)F\left(\frac{\xi}{\beta}\right)F\left(\frac{\xi}{\gamma}\right)\cdots}{\xi^{mn}} = \frac{1}{(\alpha\beta\gamma\ldots)^n}\left[\frac{F^{(n)}(0)}{1.2.3\ldots n}\right]^m; \tag{212}$$

et, par suite, l'équation (210) deviendra

$$\frac{f\left(\frac{x}{\lambda}\right)}{f(0)}\frac{f\left(\frac{x}{\mu}\right)}{f(0)}\frac{f\left(\frac{x}{\nu}\right)}{f(0)}\cdots = \frac{(\alpha\beta\gamma\ldots)^n}{x^{mn}}\left[\frac{1.2.3\ldots n}{F^{(n)}(0)}\right]^m F\left(\frac{x}{\alpha}\right)F\left(\frac{x}{\beta}\right)F\left(\frac{x}{\gamma}\right)\cdots \tag{213}$$

Lorsque la fonction $F(z)$ ne s'évanouit pas avec z, la formule (61) donne simplement $X = 0$, et l'équation (213) doit être remplacée par la suivante :

$$\frac{f\left(\frac{x}{\lambda}\right)}{f(0)}\frac{f\left(\frac{x}{\mu}\right)}{f(0)}\frac{f\left(\frac{x}{\nu}\right)}{f(0)}\cdots = \frac{F\left(\frac{x}{\alpha}\right)}{F(0)}\frac{F\left(\frac{x}{\beta}\right)}{F(0)}\frac{F\left(\frac{x}{\gamma}\right)}{F(0)}\cdots \tag{214}$$

Si, au contraire, la fonction $F(z)$ s'évanouit avec z, mais de manière que l'équation (36) offre une seule racine égale à zéro, la formule (213) donnera

$$\frac{f\left(\frac{x}{\lambda}\right)}{f(0)}\frac{f\left(\frac{x}{\mu}\right)}{f(0)}\frac{f\left(\frac{x}{\nu}\right)}{f(0)}\cdots = \frac{\alpha\beta\gamma\ldots}{x^m}\frac{F\left(\frac{x}{\alpha}\right)}{F'(0)}\frac{F\left(\frac{x}{\beta}\right)}{F'(0)}\frac{F\left(\frac{x}{\gamma}\right)}{F'(0)}\cdots \tag{215}$$

Les diverses formules que nous venons d'obtenir supposent que la fonction entière $f(z)$ ne devient pas nulle pour $z = 0$, c'est-à-dire, en d'autres termes, que la constante

$$f(0) = a_m \tag{216}$$

diffère de zéro. Si cette constante s'évanouissait, les expressions (200) (201), (202) deviendraient infinies, ainsi que les coefficients $\vec{\sigma}_0$, $\vec{\sigma}_1$, et les fractions comprises dans les premiers membres des formules (213), (214), (215). Observons d'ailleurs que, α, β, γ, ... étant les racines

de l'équation (35), on tirera de la formule (193)

$$f(z) = a_m\left(1-\frac{z}{\alpha}\right)\left(1-\frac{z}{\beta}\right)\left(1-\frac{z}{\gamma}\right)\cdots \tag{217}$$

et, par conséquent,

$$\frac{f(z)}{f(0)} = \left(1-\frac{z}{\alpha}\right)\left(1-\frac{z}{\beta}\right)\left(1-\frac{z}{\gamma}\right)\cdots \tag{218}$$

Pour montrer une application des formules qui précèdent, prenons

$$F(z) = \sin z. \tag{115}$$

Alors, ainsi qu'on l'a déjà remarqué, l'expression (90) s'évanouira, et l'expression (91) deviendra infiniment petite, si l'on attribue au module r de la variable z des valeurs de la forme $r = n\pi$, n désignant un nombre entier infiniment grand. Cela posé, on tirera de la formule (215)

$$\frac{f\left(\frac{x}{\pi}\right)}{f(0)}\,\frac{f\left(-\frac{x}{\pi}\right)}{f(0)}\,\frac{f\left(\frac{x}{2\pi}\right)}{f(0)}\,\frac{f\left(-\frac{x}{2\pi}\right)}{f(0)}\cdots = \frac{\alpha\beta\gamma\cdots}{x^m}\sin\frac{x}{\alpha}\sin\frac{x}{\beta}\sin\frac{x}{\gamma}\cdots \tag{219}$$

ou, ce qui revient au même,

$$\sin\frac{x}{\alpha}\sin\frac{x}{\beta}\sin\frac{x}{\gamma}\cdots = \frac{x^m}{\alpha\beta\gamma\cdots}\,\frac{f\left(\frac{x}{\pi}\right)f\left(-\frac{x}{\pi}\right)}{[f(0)]^2}\,\frac{f\left(\frac{x}{2\pi}\right)f\left(-\frac{x}{2\pi}\right)}{[f(0)]^2}\,\frac{f\left(\frac{x}{3\pi}\right)f\left(-\frac{x}{3\pi}\right)}{[f(0)]^2}\cdots \tag{220}$$

Au reste, on peut encore déduire la formule (220) : 1° de l'équation (214), en prenant $F(z) = \frac{\sin z}{z}$; 2° de l'équation (120) combinée avec la formule (217).

Dans le cas particulier où la fonction entière $f(z)$ a pour dernier terme l'unité, on trouve

$$f(0) = 1, \tag{221}$$

$$f(z) = \left(1-\frac{z}{\alpha}\right)\left(1-\frac{z}{\beta}\right)\left(1-\frac{z}{\gamma}\right)\cdots; \tag{222}$$

et la formule (220) donne simplement

$$\sin\frac{x}{\alpha}\sin\frac{x}{\beta}\sin\frac{x}{\gamma}\cdots = \frac{x^m}{\alpha\beta\gamma\cdots}\,f\left(\frac{x}{\pi}\right)f\left(-\frac{x}{\pi}\right)f\left(\frac{x}{2\pi}\right)f\left(-\frac{x}{2\pi}\right)f\left(\frac{x}{3\pi}\right)f\left(-\frac{x}{3\pi}\right)\cdots \tag{223}$$

Si, dans les formules (220) et (223), on remplace x par πx, on en tirera

$$\frac{f(x)\,f(-x)}{[f(0)]^2}\,\frac{f\left(\frac{x}{2}\right)f\left(-\frac{x}{2}\right)}{[f(0)]^2}\,\frac{f\left(\frac{x}{3}\right)f\left(-\frac{x}{3}\right)}{[f(0)]^2}\cdots = \frac{\alpha\beta\gamma\cdots}{\pi^m x^m}\sin\frac{\pi x}{\alpha}\sin\frac{\pi x}{\beta}\sin\frac{\pi x}{\gamma}\cdots \tag{224}$$

et

$$f(x)\,f(-x)\,f\left(\frac{x}{2}\right)f\left(-\frac{x}{2}\right)f\left(\frac{x}{3}\right)f\left(-\frac{x}{3}\right)\cdots = \frac{\alpha\beta\gamma\cdots}{\pi^m x^m}\sin\frac{\pi x}{\alpha}\sin\frac{\pi x}{\beta}\sin\frac{\pi x}{\gamma}\cdots \tag{225}$$

Si, pour fixer les idées, on suppose

$$f(x) = x^2 - 2x\cos\theta + 1, \tag{226}$$

on pourra prendre

$$\alpha = \cos\theta + \sqrt{-1}\sin\theta, \qquad \beta = \cos\theta - \sqrt{-1}\sin\theta, \tag{227}$$

et l'équation (225) donnera

$$\begin{cases}(1-2x^2\cos 2\theta + x^4)\left[1-2\left(\frac{x}{2}\right)^2\cos 2\theta + \left(\frac{x}{2}\right)^4\right]\left[1-2\left(\frac{x}{3}\right)^2\cos 2\theta + \left(\frac{x}{3}\right)^4\right]\cdots \\ = \dfrac{e^{2\pi x\sin\theta} - 2\cos(2\pi x\cos\theta) + e^{-2\pi x\sin\theta}}{4\pi^2 x^2}.\end{cases} \tag{228}$$

Supposons encore

$$F(z) = \cos z. \tag{229}$$

Alors on tirera de la formule (214)

$$\frac{f\left(\frac{2x}{\pi}\right)}{f(0)}\,\frac{f\left(-\frac{2x}{\pi}\right)}{f(0)}\,\frac{f\left(\frac{2x}{3\pi}\right)}{f(0)}\,\frac{f\left(-\frac{2x}{3\pi}\right)}{f(0)}\cdots = \cos\frac{x}{\alpha}\cos\frac{x}{\beta}\cos\frac{x}{\gamma}\cdots \tag{230}$$

Si l'on a, en particulier, $f(0) = 1$, on conclura de l'équation (230), en y remplaçant x par $\frac{\pi x}{2}$,

$$f(x)\,f(-x)\,f\left(\frac{x}{3}\right)f\left(-\frac{x}{3}\right)f\left(\frac{x}{5}\right)f\left(-\frac{x}{5}\right)\cdots = \cos\frac{\pi x}{2\alpha}\cos\frac{\pi x}{2\beta}\cos\frac{\pi x}{2\gamma}\cdots \tag{231}$$

Ainsi, par exemple, si la fonction $f(x)$ est déterminée par la for-

mule (226), on aura

$$(232)\quad \begin{cases} (1-2x^2\cos 2\vartheta+x^4)\left[1-2\left(\frac{x}{3}\right)^2\cos 2\vartheta+\left(\frac{x}{3}\right)^4\right]\left[1-2\left(\frac{x}{5}\right)^2\cos 2\vartheta+\left(\frac{x}{5}\right)^4\right]\cdots \\ \quad =\dfrac{e^{\pi x\sin\vartheta}+2\cos(\pi x\cos\vartheta)+e^{-\pi x\sin\vartheta}}{4}. \end{cases}$$

Supposons encore

$$(233)\qquad F(z)=\frac{\sin(z)^{\frac12}}{(z)^{\frac12}}=1-\frac{z}{1.2.3}+\frac{z^2}{1.2.3.4.5}-\cdots,$$

$(z)^{\frac12}$ désignant une quelconque des deux valeurs de t propres à vérifier la formule

$$(234)\qquad t^2-z=0.$$

Les racines λ, μ, ν, ... de l'équation (36) seront évidemment

$$(235)\qquad z=\pi^2,\quad z=4\pi^2,\quad z=9\pi^2,\quad z=25\pi^2,\quad \ldots,$$

et, par suite, la formule (214) donnera

$$(236)\qquad \frac{f\left(\frac{x}{\pi^2}\right)}{f(0)}\frac{f\left(\frac{x}{4\pi^2}\right)}{f(0)}\frac{f\left(\frac{x}{9\pi^2}\right)}{f(0)}\cdots=\frac{\sin\left(\frac{x}{\alpha}\right)^{\frac12}}{\left(\frac{x}{\alpha}\right)^{\frac12}}\frac{\sin\left(\frac{x}{\beta}\right)^{\frac12}}{\left(\frac{x}{\beta}\right)^{\frac12}}\frac{\sin\left(\frac{x}{\gamma}\right)^{\frac12}}{\left(\frac{x}{\gamma}\right)^{\frac12}}\cdots.$$

Si, dans cette dernière, on remplace x par π^2x, on en tirera

$$(237)\qquad \frac{f(x)}{f(0)}\frac{f\left(\frac{x}{4}\right)}{f(0)}\frac{f\left(\frac{x}{9}\right)}{f(0)}\cdots=\frac{\sin\pi\left(\frac{x}{\alpha}\right)^{\frac12}}{\pi\left(\frac{x}{\alpha}\right)^{\frac12}}\frac{\sin\pi\left(\frac{x}{\beta}\right)^{\frac12}}{\pi\left(\frac{x}{\beta}\right)^{\frac12}}\frac{\sin\pi\left(\frac{x}{\gamma}\right)^{\frac12}}{\pi\left(\frac{x}{\gamma}\right)^{\frac12}}\cdots.$$

Si d'ailleurs $f(0)$ se réduit à l'unité, on aura simplement

$$(238)\qquad f(x)\,f\left(\frac{x}{4}\right)f\left(\frac{x}{9}\right)\cdots=\frac{\sin\pi\left(\frac{x}{\alpha}\right)^{\frac12}}{\pi\left(\frac{x}{\alpha}\right)^{\frac12}}\frac{\sin\pi\left(\frac{x}{\beta}\right)^{\frac12}}{\pi\left(\frac{x}{\beta}\right)^{\frac12}}\frac{\sin\pi\left(\frac{x}{\gamma}\right)^{\frac12}}{\pi\left(\frac{x}{\gamma}\right)^{\frac12}}\cdots.$$

Ainsi, par exemple, en prenant successivement

$$f(x)=1+x,\qquad f(x)=1+x^2,\qquad \ldots,$$

on trouvera

$$(239)\qquad (1+x)\left(1+\frac{x}{4}\right)\left(1+\frac{x}{9}\right)\cdots=\frac{\sin\pi(x)^{\frac12}\sqrt{-1}}{\pi(x)^{\frac12}\sqrt{-1}},$$

$$(240)\qquad (1+x^2)\left(1+\frac{x^2}{4^2}\right)\left(1+\frac{x^2}{9^2}\right)\cdots=\frac{\sin\left[\pi\frac{1+\sqrt{-1}}{\sqrt2}(x)^{\frac12}\right]\sin\left[\pi\frac{1-\sqrt{-1}}{\sqrt2}(x)^{\frac12}\right]}{\pi^2x},$$

.....

puis on en conclura, en remplaçant x par x^2,

$$(241)\qquad (1+x^2)\left(1+\frac{x^2}{2^2}\right)\left(1+\frac{x^2}{3^2}\right)\cdots=\frac{e^{\pi x}-e^{-\pi x}}{2\pi x},$$

$$(242)\qquad (1+x^4)\left(1+\frac{x^4}{2^4}\right)\left(1+\frac{x^4}{3^4}\right)\cdots=\frac{e^{\pi x\sqrt2}-2\cos(\pi x\sqrt2)+e^{-\pi x\sqrt2}}{4\pi^2x^2},$$

.....

La formule (241) s'accorde évidemment avec la première des équations (151).

Supposons enfin

$$(243)\qquad F(z)=\cos(z)^{\frac12}=1-\frac{z}{1.2}+\frac{z^2}{1.2.3.4}-\cdots.$$

Les racines λ, μ, ν, ... de l'équation (36) seront évidemment

$$(244)\qquad z=\frac{\pi^2}{4},\qquad z=\frac{9\pi^2}{4},\qquad z=\frac{25\pi^2}{4},\qquad \ldots$$

et, par suite, la formule (214) donnera

$$(245)\qquad \frac{f\left(\frac{4x}{\pi^2}\right)}{f(0)}\frac{f\left(\frac{4x}{9\pi^2}\right)}{f(0)}\frac{f\left(\frac{4x}{25\pi^2}\right)}{f(0)}\cdots=\cos\left(\frac{x}{\alpha}\right)^{\frac12}\cos\left(\frac{x}{\beta}\right)^{\frac12}\cos\left(\frac{x}{\gamma}\right)^{\frac12}\cdots.$$

Si, dans cette dernière, on remplace x par $\frac{\pi^2x}{4}$, on en tirera

$$(246)\qquad \frac{f(x)}{f(0)}\frac{f\left(\frac{x}{9}\right)}{f(0)}\frac{f\left(\frac{x}{25}\right)}{f(0)}\cdots=\cos\frac{\pi}{2}\left(\frac{x}{\alpha}\right)^{\frac12}\cos\frac{\pi}{2}\left(\frac{x}{\beta}\right)^{\frac12}\cos\frac{\pi}{2}\left(\frac{x}{\gamma}\right)^{\frac12}\cdots.$$

Si d'ailleurs f(0) se réduit à l'unité, on aura simplement

$$(247)\quad f(x)f\left(\frac{x}{9}\right)f\left(\frac{x}{25}\right)\cdots=\cos\frac{\pi}{2}\left(\frac{x}{\alpha}\right)^{\frac{1}{2}}\cos\frac{\pi}{2}\left(\frac{x}{\beta}\right)^{\frac{1}{2}}\cos\frac{\pi}{2}\left(\frac{x}{\gamma}\right)^{\frac{1}{2}}\cdots.$$

Ainsi, par exemple, en prenant successivement

$$f(x)=1+x,\qquad f(x)=1+x^2,\qquad \ldots,$$

on trouvera

$$(248)\quad (1+x)\left(1+\frac{x}{9}\right)\left(1+\frac{x}{25}\right)\cdots=\cos\left[\frac{\pi}{2}(x)^{\frac{1}{2}}\sqrt{-1}\right],$$

$$(249)\quad (1+x^2)\left(1+\frac{x^2}{9^2}\right)\left(1+\frac{x^2}{25^2}\right)\cdots=\cos\left[\frac{\pi}{2}\frac{1+\sqrt{-1}}{\sqrt{2}}(x)^{\frac{1}{2}}\right]\cos\left[\frac{\pi}{2}\frac{1-\sqrt{-1}}{\sqrt{2}}(x)^{\frac{1}{2}}\right],$$

puis on en conclura, en remplaçant x par x^2,

$$(250)\quad (1+x^2)\left(1+\frac{x^2}{3^2}\right)\left(1+\frac{x^2}{5^2}\right)\cdots=\frac{e^{\frac{1}{2}\pi x}+e^{-\frac{1}{2}\pi x}}{2},$$

$$(251)\quad (1+x^4)\left(1+\frac{x^4}{3^4}\right)\left(1+\frac{x^4}{5^4}\right)\cdots=\frac{e^{\frac{1}{2}\pi x\sqrt{2}}+2\cos\left(\frac{1}{2}\pi x\sqrt{2}\right)+e^{-\frac{1}{2}\pi x\sqrt{2}}}{4},$$

.....

Concevons maintenant que les fonctions $f(z)$, $F(z)$, cessant l'une et l'autre d'être entières, soient déterminées par les formules

$$(252)\quad f(z)=\cos(z)^{\frac{1}{2}},$$

$$(253)\quad F(z)=\frac{\sin(z)^{\frac{1}{2}}}{(z)^{\frac{1}{2}}}.$$

Alors les racines $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$; $\lambda, \mu, \nu, \ldots$ des équations (35) et (36) coïncideront avec les valeurs de z comprises dans les séries (244), (235). De plus, l'expression

$$(254)\quad \frac{f'\left(\frac{x}{z}\right)F'(z)}{f\left(\frac{x}{z}\right)F(z)}=-\frac{\sin\left(\frac{x}{z}\right)^{\frac{1}{2}}}{4\left(\frac{x}{z}\right)^{\frac{1}{2}}\cos\left(\frac{x}{z}\right)^{\frac{1}{2}}}\left[\frac{\cos(z)^{\frac{1}{2}}}{(z)^{\frac{1}{2}}\sin(z)^{\frac{1}{2}}}-\frac{1}{z}\right]$$

s'évanouira généralement, si l'on attribue au module r de la variable z

des valeurs infiniment grandes, mais sensiblement distinctes des racines de l'équation $\sin(z)^{\frac{1}{2}}=0$. On pourra donc prendre, dans le théorème I, $\vartheta=0$. Enfin, comme l'expression (254) s'évanouira encore, pour des valeurs infiniment petites de z tellement choisies que les valeurs correspondantes du rapport $\frac{x}{z}$ diffèrent sensiblement de celles qui vérifient l'équation $\cos\left(\frac{x}{z}\right)^{\frac{1}{2}}=0$, on aura, d'après ce qui a été dit ci-dessus (*voir* le corollaire II du théorème I), $X=0$; et, par suite, l'équation (78), réduite à la formule (81), donnera

$$(255)\quad \cos\frac{x}{\pi}\cos\frac{x}{2\pi}\cos\frac{x}{3\pi}\cdots=\frac{\sin\frac{2x}{\pi}}{\frac{2x}{\pi}}\frac{\sin\frac{2x}{3\pi}}{\frac{2x}{3\pi}}\frac{\sin\frac{2x}{5\pi}}{\frac{2x}{5\pi}}\cdots.$$

Si, dans la formule (255), on remplace x par $\frac{\pi x}{2}$, on en tirera

$$(256)\quad \cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{4}\cos\frac{x}{6}\cdots=\frac{\sin x}{x}\frac{3\sin\frac{x}{3}}{x}\frac{5\sin\frac{x}{5}}{x}\cdots;$$

puis, en écrivant $x\sqrt{-1}$ au lieu de x, on trouvera

$$(257)\quad \frac{e^{\frac{1}{2}x}+e^{-\frac{1}{2}x}}{2}\frac{e^{\frac{1}{3}x}+e^{-\frac{1}{3}x}}{2}\frac{e^{\frac{1}{5}x}+e^{-\frac{1}{5}x}}{2}\cdots=\frac{e^x-e^{-x}}{2x}\frac{e^{\frac{1}{3}x}-e^{-\frac{1}{3}x}}{\frac{2}{3}x}\frac{e^{\frac{1}{5}x}-e^{-\frac{1}{5}x}}{\frac{2}{5}x}\cdots.$$

Ajoutons que, si l'on pose $x=1$, on conclura des formules (256) et (257)

$$(258)\quad \cos\frac{1}{2}\cos\frac{1}{4}\cos\frac{1}{6}\cdots=\sin 1\,.\,3\sin\frac{1}{3}\cdot 5\sin\frac{1}{5}\cdots$$

et

$$(259)\quad \frac{e^{\frac{1}{2}}+e^{-\frac{1}{2}}}{2}\frac{e^{\frac{1}{3}}+e^{-\frac{1}{3}}}{2}\frac{e^{\frac{1}{5}}+e^{-\frac{1}{5}}}{2}\cdots=\frac{e^1-e^{-1}}{2}3\frac{e^{\frac{1}{3}}-e^{-\frac{1}{3}}}{2}5\frac{e^{\frac{1}{5}}-e^{-\frac{1}{5}}}{2}\cdots.$$

Si l'on différentiait, par rapport à x, les deux membres de l'équation (256), ou plutôt leurs logarithmes, on serait immédiatement ramené à la formule (31) du précédent article.

SUR LES

CORPS SOLIDES OU FLUIDES

DANS LESQUELS

LA CONDENSATION OU DILATATION LINÉAIRE EST LA MÊME EN TOUS SENS

AUTOUR DE CHAQUE POINT.

Concevons qu'un corps solide ou fluide vienne à changer de forme, et que par l'effet d'une cause quelconque il passe d'un premier état naturel ou artificiel à un second état distinct du premier. Rapportons tous les points de l'espace à trois axes rectangulaires, et supposons que le point matériel correspondant aux coordonnées x, y, z dans le second état du corps soit précisément celui qui, dans le premier état, avait pour coordonnées les trois différences

$$x-\xi, \quad y-\eta, \quad z-\zeta.$$

Si l'on prend x, y, z pour variables indépendantes, ξ, η, ζ seront des fonctions de x, y, z qui serviront à mesurer les déplacements du point que l'on considère parallèlement aux axes des coordonnées. Soient d'ailleurs r le rayon vecteur mené dans le second état du corps d'une molécule m à une autre molécule très voisine m', et α, β, γ les angles formés par le rayon vecteur r avec les demi-axes des coordonnées positives. Si l'on désigne par

$$\frac{r}{1+\varepsilon}$$

la distance primitive des deux molécules m, m', la valeur numérique de ε sera la mesure de ce que nous avons nommé la dilatation ou condensation *linéaire* du corps suivant la direction du rayon vecteur r, sa-

voir, de la dilatation linéaire si ε est une quantité positive, et de la condensation ou contraction linéaire dans le cas contraire. Cela posé, on aura, en vertu des principes exposés dans le II^e Volume [p. 60 et suiv. (1)],

$$(1)\quad \begin{cases} \left(\frac{1}{1+\varepsilon}\right)^2 = \left(\cos\alpha - \frac{\partial\xi}{\partial x}\cos\alpha - \frac{\partial\xi}{\partial y}\cos\beta - \frac{\partial\xi}{\partial z}\cos\gamma\right)^2 \\ \qquad + \left(\cos\beta - \frac{\partial\eta}{\partial x}\cos\alpha - \frac{\partial\eta}{\partial y}\cos\beta - \frac{\partial\eta}{\partial z}\cos\gamma\right)^2 \\ \qquad + \left(\cos\gamma - \frac{\partial\zeta}{\partial x}\cos\alpha - \frac{\partial\zeta}{\partial y}\cos\beta - \frac{\partial\zeta}{\partial z}\cos\gamma\right)^2, \end{cases}$$

puis on en conclura, en admettant que les déplacements ξ, η, ζ soient très petits,

$$(2)\quad \begin{cases} \varepsilon = \frac{\partial\xi}{\partial x}\cos^2\alpha + \frac{\partial\eta}{\partial y}\cos^2\beta + \frac{\partial\zeta}{\partial z}\cos^2\gamma \\ \qquad + \left(\frac{\partial\eta}{\partial z} + \frac{\partial\zeta}{\partial y}\right)\cos\beta\cos\gamma + \left(\frac{\partial\zeta}{\partial x} + \frac{\partial\xi}{\partial z}\right)\cos\gamma\cos\alpha + \left(\frac{\partial\xi}{\partial y} + \frac{\partial\eta}{\partial x}\right)\cos\alpha\cos\beta. \end{cases}$$

Or on peut demander quelles conditions doivent remplir ξ, η, ζ, considérés comme fonctions de x, y, z, pour que la condensation ou dilatation linéaire du corps reste la même en tous sens autour de chaque point. Tel est l'objet dont nous allons maintenant nous occuper.

Soient ε', ε'', ε''' les dilatations linéaires mesurées parallèlement aux axes des x, y, z. On aura, en vertu de la formule (2),

$$\varepsilon' = \frac{\partial\xi}{\partial x}, \qquad \varepsilon'' = \frac{\partial\eta}{\partial y}, \qquad \varepsilon''' = \frac{\partial\zeta}{\partial z}.$$

En supposant ces dilatations linéaires égales entre elles, on obtiendra la condition

$$(3)\quad \frac{\partial\xi}{\partial x} = \frac{\partial\eta}{\partial y} = \frac{\partial\zeta}{\partial z},$$

et par suite l'équation (2) donnera

$$(4)\quad \varepsilon = \varepsilon' + \left(\frac{\partial\eta}{\partial z} + \frac{\partial\zeta}{\partial y}\right)\cos\beta\cos\gamma + \left(\frac{\partial\zeta}{\partial x} + \frac{\partial\xi}{\partial z}\right)\cos\gamma\cos\alpha + \left(\frac{\partial\xi}{\partial y} + \frac{\partial\eta}{\partial x}\right)\cos\alpha\cos\beta.$$

(1) *Œuvres de Cauchy*, S. II, T. VII, p. 82 et suiv.

Donc, si la dilatation linéaire ε reste constamment égale à ε', on aura, pour des valeurs quelconques de α, β, γ,

$$(5)\qquad \left(\frac{\partial\eta}{\partial z}+\frac{\partial\zeta}{\partial y}\right)\cos\beta\cos\gamma+\left(\frac{\partial\zeta}{\partial x}+\frac{\partial\xi}{\partial z}\right)\cos\gamma\cos\alpha+\left(\frac{\partial\xi}{\partial y}+\frac{\partial\eta}{\partial x}\right)\cos\alpha\cos\beta=0.$$

En posant successivement, dans la formule (5), $\alpha=\frac{\pi}{2}$, $\beta=\frac{\pi}{2}$, $\gamma=\frac{\pi}{2}$, on en tire

$$(6)\qquad \frac{\partial\eta}{\partial z}+\frac{\partial\zeta}{\partial y}=0,\qquad \frac{\partial\zeta}{\partial x}+\frac{\partial\xi}{\partial z}=0,\qquad \frac{\partial\xi}{\partial y}+\frac{\partial\eta}{\partial x}=0.$$

Ainsi, pour que la valeur de ε devienne indépendante des angles α, β, γ, il est nécessaire que les déplacements ξ, η, ζ, considérés comme fonctions de x, y, z, vérifient les conditions (3) et (6). Réciproquement, si ces conditions sont vérifiées, ε sera indépendant des angles α, β, γ, et l'on tirera de la formule (2)

$$(7)\qquad \varepsilon=\frac{\partial\xi}{\partial x}=\frac{\partial\eta}{\partial y}=\frac{\partial\zeta}{\partial z}.$$

Il est facile de s'assurer que, dans le cas où les conditions (3) et (6) sont vérifiées, la distance ε se réduit à une fonction linéaire de x, y, z. En effet, concevons que l'on différentie la première des équations (6) par rapport à x, la deuxième par rapport à y, la troisième par rapport à z, on trouvera

$$(8)\qquad \frac{\partial^2\eta}{\partial z\,\partial x}+\frac{\partial^2\zeta}{\partial x\,\partial y}=0,\qquad \frac{\partial^2\zeta}{\partial x\,\partial y}+\frac{\partial^2\xi}{\partial y\,\partial z}=0,\qquad \frac{\partial^2\xi}{\partial y\,\partial z}+\frac{\partial^2\eta}{\partial z\,\partial x}=0$$

et, par conséquent,

$$(9)\qquad \frac{\partial^2\xi}{\partial y\,\partial z}=0,\qquad \frac{\partial^2\eta}{\partial z\,\partial x}=0,\qquad \frac{\partial^2\zeta}{\partial x\,\partial y}=0;$$

puis, en différentiant la première des équations (9) par rapport à x, la deuxième par rapport à y, la troisième par rapport à z, et ayant égard à la formule (7), on obtiendra les suivantes :

$$(10)\qquad \frac{\partial^2\varepsilon}{\partial y\,\partial z}=0,\qquad \frac{\partial^2\varepsilon}{\partial z\,\partial x}=0,\qquad \frac{\partial^2\varepsilon}{\partial x\,\partial y}=0.$$

Au contraire, si l'on différentie deux fois de suite la première des équations (6) par rapport aux variables y et z, la deuxième par rapport aux variables z et x, la troisième par rapport aux variables x et y, et si l'on a toujours égard à la formule (7), on trouvera

$$(11)\qquad \frac{\partial^2\varepsilon}{\partial z^2}+\frac{\partial^2\varepsilon}{\partial y^2}=0,\qquad \frac{\partial^2\varepsilon}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varepsilon}{\partial z^2}=0,\qquad \frac{\partial^2\varepsilon}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\varepsilon}{\partial x^2}=0;$$

puis on en conclura

$$(12)\qquad \frac{\partial^2\varepsilon}{\partial x^2}=0,\qquad \frac{\partial^2\varepsilon}{\partial y^2}=0,\qquad \frac{\partial^2\varepsilon}{\partial z^2}=0.$$

Or on tire des formules (10) et (12)

$$(13)\qquad d\left(\frac{\partial\varepsilon}{\partial x}\right)=0,\qquad d\left(\frac{\partial\varepsilon}{\partial y}\right)=0,\qquad d\left(\frac{\partial\varepsilon}{\partial z}\right)=0,$$

et, par conséquent,

$$(14)\qquad \frac{\partial\varepsilon}{\partial x}=a,\qquad \frac{\partial\varepsilon}{\partial y}=b,\qquad \frac{\partial\varepsilon}{\partial z}=c,$$

$$(15)\qquad d\varepsilon=a\,dx+b\,dy+c\,dz,$$

$$(16)\qquad \varepsilon=ax+by+cz+k,$$

a, b, c, k désignant des quantités constantes. On peut donc énoncer la proposition suivante :

THÉORÈME. — *Si un corps solide ou fluide vient à changer de forme, de manière que la condensation ou dilatation linéaire reste très petite et soit la même en tous sens autour de chaque point, cette dilatation ou condensation ne pourra être qu'une fonction linéaire des coordonnées x, y, z.*

La valeur de ε étant déterminée par l'équation (16), on déduira sans peine les valeurs de ξ, η et ζ de la formule (7) combinée avec les équations (6); et, comme celles-ci donneront

$$(17)\qquad \frac{\partial^2\xi}{\partial y^2}=\frac{\partial^2\xi}{\partial z^2}=-\frac{\partial\varepsilon}{\partial x}=-a,\qquad \frac{\partial^2\xi}{\partial y\,\partial z}=0,\qquad \ldots,$$

on trouvera

$$(18)\quad \begin{cases} \xi = (ax+by+cz+k)x - \frac{1}{2}a(x^2+y^2+z^2) + hy - gz + l, \\ \eta = (ax+by+cz+k)y - \frac{1}{2}b(x^2+y^2+z^2) + fz - hx + m, \\ \zeta = (ax+by+cz+k)z - \frac{1}{2}c(x^2+y^2+z^2) + gx - fy + n, \end{cases}$$

f, g, h, l, m, n désignant encore des quantités constantes.

SUR DIVERSES PROPOSITIONS

RELATIVES

A L'ALGÈBRE ET A LA THÉORIE DES NOMBRES.

Des recherches entreprises sur la résolution des équations binômes m'ont conduit à reconnaître qu'il existe des relations dignes de remarque entre les quantités désignées dans la théorie des nombres sous le nom de *racines primitives* et d'autres quantités que renferment les produits de certaines expressions algébriques. D'ailleurs, l'analyse par laquelle je suis parvenu à découvrir ces relations m'a offert le moyen de résoudre facilement certaines équations indéterminées, et m'a fourni des théorèmes qui paraissent mériter l'attention des géomètres. Je consacrerai plusieurs articles au développement des principes sur lesquels repose cette analyse; mais, comme ce développement exige la connaissance préliminaire de diverses propositions relatives à l'Algèbre et à la théorie des nombres, je commencerai par établir les propositions dont il s'agit. J'indiquerai en même temps plusieurs conséquences nouvelles que l'on peut en déduire.

Soit n un nombre entier quelconque. Je dirai que les quantités entières, positives ou négatives, h et k sont *équivalentes* suivant le *module* n, lorsque la différence $h-k$ ou $k-h$ sera divisible par n, et j'indiquerai cette *équivalence*, nommée *congruence* par M. Gauss, à l'aide de la notation

$$h \equiv k \pmod{n},$$

employée par ce géomètre. Cela posé, si l'on vérifie la formule

$$(1)\quad a_0 x^m + a_1 x^{m-1} + a_2 x^{m-2} + \ldots + a_{m-1}x + a_m \equiv 0 \pmod{n},$$

dans laquelle m désigne un nombre entier et $a_0, a_1, \ldots, a_{m-1}, a_m$ des quantités entières, en attribuant à x les valeurs entières

$$x = x_1, \qquad x = x_2, \qquad \ldots,$$

on la vérifiera encore en prenant

$$x = x_1 \pm ni, \qquad x = x_2 \pm nj, \qquad \ldots,$$

i, j désignant des nombres entiers, ou, ce qui revient au même, en prenant

$$x = x_1, \qquad x = x_2, \qquad \ldots;$$

et $x_1, x_2, \ldots$ seront des *racines* de la formule (1). Mais deux quelconques de ces racines, par exemple, x_1, x_2 ne seront considérées comme distinctes que dans le cas où elles ne seront pas équivalentes suivant le module n. Ajoutons que les notations

$$\frac{h}{k}, \quad h'k^{-m}, \quad \ldots$$

représenteront les valeurs de x propres à vérifier les formules

$$kx = h, \qquad k^m x = h', \qquad \ldots.$$

Soit maintenant p un nombre premier quelconque. Je dirai, avec M. Poinsot, que ρ est une racine primitive de l'équation

$$x^n = 1, \tag{2}$$

et r une racine primitive de l'équivalence

$$x^n \equiv 1 \pmod{p}, \tag{3}$$

lorsque ρ^n sera la plus petite puissance de ρ qui se réduise à l'unité, et r^n la plus petite puissance de r équivalente à l'unité suivant le module p. Ces définitions étant admises, on établira sans peine, sur les racines des équations et des équivalences, les propositions suivantes, dont la plupart étaient déjà connues (1) :

(1) On peut consulter, à ce sujet, divers Mémoires d'Euler et de Lagrange; l'Ouvrage de M. Gauss, intitulé : *Disquisitiones arithmeticæ*; la *Théorie des nombres* de M. Legendre; un travail de M. Poinsot, inséré dans le tome V des *Mémoires de l'Académie des Sciences*, et les *Mémoires de Mathématiques* publiés par M. Guillaume Libri.

THÉORÈME I. — *Soient m un nombre entier, p un nombre premier, et a_0, $a_1, a_2, \ldots, a_m$ des quantités entières. La formule*

$$a_0 x^m + a_1 x^{m-1} + \ldots + a_{m-1} x + a_m \equiv 0 \pmod{p} \tag{4}$$

n'admettra jamais plus de m racines distinctes.

Démonstration. — En effet, soient $x_1, x_2, \ldots, x_m$, m racines distinctes de la formule (4). On aura identiquement

$$a_0 x_1^m + a_1 x_1^{m-1} + \ldots + a_{m-1} x_1 + a_m \equiv 0 \pmod{p}.$$

En substituant la valeur de a_m, tirée de cette dernière équivalence, dans la formule (4), on trouvera

$$\left\{ \begin{array}{l} a_0 x^m + a_1 x^{m-1} + \ldots + a_{m-1} x + a_m \\ \quad \equiv a_0 (x^m - x_1^m) + a_1 (x^{m-1} - x_1^{m-1}) + \ldots + a_{m-1}(x - x_1) \equiv \mathrm{P}_1 (x - x_1), \end{array} \right. \tag{5}$$

P_1 désignant un polynôme qui aura pour premier terme le produit $a_0 x^{m-1}$, et qui sera équivalent à zéro pour $x = x_2$, pour $x = x_3$, etc. On trouvera de même

$$\mathrm{P}_1 \equiv (x - x_2)\mathrm{P}_2, \qquad \mathrm{P}_2 \equiv (x - x_3)\mathrm{P}_3, \qquad \ldots, \qquad \mathrm{P}_m \equiv (x - x_m)\mathrm{P}_m, \tag{6}$$

$\mathrm{P}_2, \mathrm{P}_3, \ldots, \mathrm{P}_{m-1}, \mathrm{P}_m$ désignant des polynômes dont les premiers termes seront $a_0 x^{m-2}, a_0 x^{m-3}, \ldots, a_0 x, a_0$, en sorte qu'on aura simplement

$$\mathrm{P}_m = a_0. \tag{7}$$

D'ailleurs, en vertu des formules (5), (6), (7), on aura, quel que soit x,

$$a_0 x^m + a_1 x^{m-1} + \ldots + a_{m-1} x + a_m \equiv a_0 (x - x_1)(x - x_2) \ldots (x - x_m). \tag{8}$$

Donc l'équivalence (5) pourra s'écrire comme il suit :

$$a_0 (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) \ldots (x - x_m) \equiv 0. \tag{9}$$

Or cette dernière ne peut être vérifiée qu'autant que l'on prend

$$x \equiv x_1 \quad \text{ou} \quad x \equiv x_2, \quad \ldots, \quad \text{ou} \quad x \equiv x_m.$$

Corollaire. — La formule (8) devant subsister, quel que soit x, entraîne évidemment les suivantes

$$(10)\quad \begin{cases} a_1 \equiv -a_0(x_1+x_2+\ldots+x_m) \pmod{p}, \\ a_2 \equiv a_0(x_1x_2+x_1x_3+\ldots+x_1x_m+x_2x_3+\ldots+x_2x_m+\ldots+x_{m-1}x_m), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ a_m \equiv \pm a_0x_1x_2\ldots x_m, \end{cases}$$

lorsque le nombre m ne surpasse pas le module p. Alors, en effet, si les conditions (10) n'étaient pas remplies, la formule (8), dans laquelle le second membre, développé suivant les puissances descendantes de la variable x, a pour premier terme a_0x^m, se réduirait à une équivalence d'un degré inférieur à p, et pourtant cette équivalence devrait admettre autant de racines que la division d'un nombre entier par p peut fournir de restes différents, c'est-à-dire p racines distinctes. Or cette conclusion ne s'accorderait pas avec le théorème I.

Scolie. — Lorsque l'équation (1) est du premier degré ou de la forme

$$(11)\qquad a_0x + a_1 \equiv 0 \pmod{n},$$

elle ne peut admettre qu'une seule racine, et elle en admet toujours une, représentée par la notation

$$(12)\qquad x \equiv -\frac{a_1}{a_0},$$

excepté dans le cas où la fraction $\frac{a_1}{a_0}$, réduite à sa plus simple expression, conserverait un dénominateur qui ne serait pas premier à n. En effet, l'on pourra toujours trouver des nombres entiers x et y propres à vérifier la formule

$$(13)\qquad a_0x + a_1 = ny,$$

à moins que a_0 et n ne soient simultanément divisibles par un nombre qui ne diviserait pas a_1.

Théorème II. — *Supposons que la formule* (4) *admette m racines distinctes. Soit d'ailleurs* P *un polynôme qui divise exactement le premier membre de cette formule. Le nombre des racines distinctes de l'équivalence*

$$(14)\qquad P \equiv 0 \pmod{p}$$

sera précisément égal au degré du polynôme P.

Démonstration. — Soit Q la quantité qu'on obtient en divisant par P le premier membre de la formule (1). Cette formule pourra s'écrire comme il suit

$$(15)\qquad PQ \equiv 0 \pmod{p},$$

et, par conséquent, chacune des racines $x = x_1, x = x_2, \ldots, x = x_m$ vérifiera l'une des équivalences

$$(16)\qquad P \equiv 0, \quad Q \equiv 0 \pmod{p}.$$

Soit d'ailleurs μ le degré du polynôme P. $m - \mu$ sera le degré du polynôme Q, et, comme le nombre de celles des quantités $x_1, x_2, \ldots, x_m$ qui satisferont à la seconde des formules (16) ne pourra surpasser $m - \mu$, le nombre de celles qui satisferont à la première ne pourra devenir inférieur à μ. Donc ce dernier nombre sera nécessairement égal au degré μ du polynôme P.

Théorème III. — *Soit p un nombre premier quelconque. La formule*

$$(17)\qquad x^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$$

admettra p — 1 racines distinctes, respectivement équivalentes aux nombres entiers

$$(18)\qquad 1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ p-1.$$

Démonstration. — En effet, si l'on prend pour x un quelconque de ces nombres entiers, on trouvera

$$x^p \equiv \left(1 + \overline{x-1}\right)^p \equiv 1 + (x-1)^p \pmod{p}$$

et, par conséquent,

$$x^p - x \equiv (x-1)^p - (x-1) \equiv (x-2)^p - (x-2) \equiv \ldots \equiv 2^p - 2 \equiv 1^p - 1 \equiv 0,$$

ou, ce qui revient au même,

$$x(x^{p-1}-1)\equiv 0;$$

et, comme x ne sera pas divisible par p, on en conclura

$$x^{p-1}-1\equiv 0 \pmod{p}. \tag{19}$$

Le théorème compris dans la formule (17) ou (19) est dû à Fermat.

Corollaire. — Comme, pour faire coïncider la formule (4) avec l'équivalence (17), il suffit de prendre

$$m=p-1,\quad a_0=1,\quad a_1=0,\quad a_2=0,\quad \ldots,\quad a_{m-1}=0,\quad a_m=-1,$$

on aura, en vertu des formules (10) et du théorème III,

$$\begin{cases} 1+2+3+\ldots+(p-1)\equiv 0 \pmod{p}, \\ 1.2+1.3+\ldots+1(p-1)+2.3+\ldots \\ \quad +2(p-1)+\ldots+(p-2)(p-1)\equiv 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ 1.2.3\ldots(p-2)(p-1)\equiv -1. \end{cases} \tag{20}$$

La dernière des formules (20) peut encore s'écrire ainsi qu'il suit

$$1.2.3\ldots(p-2)(p-1)+1\equiv 0 \pmod{p}, \tag{21}$$

et comprend le théorème de Wilson.

Théorème IV. — *Soient p un nombre premier et n un diviseur de $p-1$. La formule*

$$x^n\equiv 1 \pmod{p} \tag{3}$$

admettra n racines distinctes.

Démonstration. — Soit

$$p-1=n\varpi. \tag{22}$$

Le binôme

$$x^{p-1}-1=x^{n\varpi}-1 \tag{23}$$

sera divisible par le binôme

$$x^n-1.$$

Donc, puisque la formule (19) admet $p-1$ racines distinctes, l'équivalence

$$x^n-1\equiv 0 \pmod{p} \tag{24}$$

ou la formule (3) admettra n racines distinctes, en vertu du théorème III.

Théorème V. — *Soient m, n deux nombres entiers quelconques, ω leur plus grand commun diviseur, et q un nombre premier ou non premier. Toute racine commune des deux équations*

$$x^m=1,\quad x^n=1 \tag{25}$$

vérifiera encore l'équation

$$x^\omega=1; \tag{26}$$

et toute racine commune aux deux équivalences

$$x^m\equiv 1,\quad x^n\equiv 1 \pmod{q} \tag{27}$$

vérifiera encore la formule

$$x^\omega\equiv 1 \pmod{q}. \tag{28}$$

Démonstration. — ω étant le plus grand commun diviseur de m et de n, on pourra trouver des quantités entières u et v propres à vérifier la condition

$$mu-nv=\omega. \tag{29}$$

Cela posé, on tirera des équations (25)

$$x^{mu}=1=x^{nv}$$

ou

$$x^{mu}-x^{nv}=x^{nv}(x^\omega-1)=0,$$

par conséquent

$$x^\omega-1=0; \tag{30}$$

et des formules (27)

$$x^{mu} \equiv 1 \equiv x^{nv} \pmod{q}$$

ou

$$x^{mu} - x^{nv} \equiv x^{nv}(x^{\omega} - 1) \equiv 0 \pmod{q},$$

par conséquent

$$x^{\omega} - 1 \equiv 0 \pmod{q}. \tag{31}$$

Or l'équation (30) coïncide avec l'équation (26), et la formule (31) avec la formule (28).

Corollaire. — Comme toute racine non primitive de l'équation (2) ou de l'équivalence (3), dans laquelle p désigne un nombre premier, vérifiera une autre équation de la forme

$$x^m = 1$$

ou une équivalence de la forme

$$x^m \equiv 1 \pmod{p},$$

m étant $< n$, il suit du théorème V qu'une semblable racine devra encore vérifier l'équation

$$x^{\omega} = 1 \tag{32}$$

ou l'équivalence

$$x^{\omega} \equiv 1 \pmod{p}, \tag{33}$$

ω étant un nombre entier, diviseur de n, mais inférieur à n. Donc, si l'équation (2) ou l'équivalence (3) admet des racines non primitives, autres que l'unité, n ne pourra être un nombre premier.

THÉORÈME VI. — *Soit n un nombre entier quelconque. L'équation*

$$x^n = 1 \tag{2}$$

admettra autant de racines primitives qu'il y a de nombres entiers premiers à n, mais inférieurs à n; et, si l'on suppose

$$n = a^{\alpha} b^{\beta} c^{\gamma} \ldots, \tag{34}$$

$a, b, c \ldots$ étant les facteurs premiers de n, chacune des racines primitives de l'équation (2) sera le produit de plusieurs facteurs $u, v, w, \ldots$, qui serviront de racines primitives aux équations

$$u^{a^{\alpha}} = 1, \qquad v^{b^{\beta}} = 1, \qquad w^{c^{\gamma}} = 1, \qquad \ldots \tag{35}$$

Démonstration. — Si n est un nombre premier, toutes les racines de l'équation (2), autres que l'unité, seront primitives, en vertu du corollaire qui précède. Le nombre de ces racines primitives sera évidemment $n - 1$.

Si n est une puissance d'un nombre premier a, c'est-à-dire de la forme

$$n = a^{\alpha}, \tag{36}$$

alors toute racine non primitive de l'équation (2) ou

$$x^{a^{\alpha}} = 1 \tag{37}$$

vérifiera l'équation

$$x^{a^{\alpha-1}} = 1, \tag{38}$$

puisque tout nombre diviseur de a^{α}, mais inférieur à a^{α}, divisera nécessairement $a^{\alpha-1}$. Donc les racines non primitives de l'équation (2) seront alors en nombre égal à $a^{\alpha-1}$. Les racines restantes, dont le nombre aura pour mesure la différence

$$a^{\alpha} - a^{\alpha-1} = a^{\alpha-1}(a-1) = n\left(1 - \frac{1}{a}\right), \tag{39}$$

seront toutes primitives.

Si n n'est pas un nombre premier, ni une puissance d'un nombre premier, on pourra décomposer n en deux facteurs h, k premiers entre eux, et, pour vérifier l'équation (2) ou

$$x^{hk} = 1, \tag{40}$$

il suffira de prendre

$$x = yz, \tag{41}$$

y, z étant des racines des deux équations

$$y^h = 1, \tag{42}$$

$$z^k = 1. \tag{43}$$

J'ajoute que, si, dans la formule (41), on substitue successivement à y toutes les racines de l'équation (42), et à z toutes les racines de l'équation (43), on obtiendra toutes les racines de l'équation (40). En effet, le nombre des racines de l'équation (42) étant égal à h, et le nombre des racines de l'équation (43) égal à k, le nombre des valeurs de x, déduites de la formule (41), sera égal au produit hk, c'est-à-dire au nombre des racines de l'équation (2) ou (40); et d'ailleurs il est facile de s'assurer que ces valeurs seront toutes distinctes les unes des autres. Car, si l'on désigne par y_1, y_2 deux racines de l'équation (42), par z_1, z_2 deux racines de l'équation (43), et si l'on suppose

$$y_1 z_1 = y_2 z_2,$$

on en conclura

$$\frac{y_2}{y_1} = \frac{z_1}{z_2},$$

$$\left(\frac{y_2}{y_1}\right)^k = \left(\frac{z_1}{z_2}\right)^k = \frac{z_1^k}{z_2^k} = 1;$$

et, comme on aura d'autre part

$$\left(\frac{y_2}{y_1}\right)^h = \frac{y_2^h}{y_1^h} = 1,$$

il est clair que le rapport $\frac{y_2}{y_1}$ sera une racine commune des deux équations

$$x^h = 1, \qquad x^k = 1;$$

par conséquent, la racine unique de l'équation

$$x = 1,$$

puisque h et k n'ont d'autre commun diviseur que l'unité. On trouverait donc alors

$$y_2 = y_1$$

et de même

$$z_2 = z_1.$$

Donc les valeurs de x fournies par l'équation (41), et correspondantes à des systèmes divers de valeurs de y et de z, seront toutes distinctes les unes des autres, et respectivement égales aux diverses racines de l'équation (40).

Enfin il est clair que le produit yz sera une racine primitive de l'équation (40), lorsque y, z seront des racines primitives des équations (41), (42). En effet, soit m le degré de la plus petite puissance de yz qui soit équivalente à l'unité. Comme le nombre m devra diviser le produit hk, on aura nécessairement

$$m = st,$$

s désignant un diviseur de h et t un diviseur de k. De plus, en élevant chaque membre de la formule

$$(yz)^{st} = 1 \tag{44}$$

à la puissance entière du degré $\frac{k}{t}$, on en tirera

$$(yz)^{sk} = 1$$

et, par conséquent,

$$y^{sk} = 1. \tag{45}$$

Or les formules (42), (45) devant subsister simultanément, et s étant le plus grand commun diviseur des nombres h et sk, on en conclura

$$y^s = 1. \tag{46}$$

On trouvera de même

$$z^t = 1. \tag{47}$$

Donc la formule (44) entraîne les formules (46) et (47). D'ailleurs, si y et z sont des racines primitives des équations (42) et (43), les exposants s, t, dans les formules (46), (47), ne pourront devenir inférieurs, le premier au nombre h, le second au nombre k. Donc alors la plus

petite valeur que l'on puisse attribuer à m sera $m = hk$, et, par conséquent, x sera une racine primitive de l'équation (40). Ajoutons que, si les facteurs y, z ne sont pas tous deux des racines primitives des équations qu'ils vérifient, le produit yz ne sera pas non plus une racine primitive de l'équation (40), puisqu'en supposant remplies les deux conditions $s < h$, $t < k$, ou l'une d'entre elles, on pourra des formules (46), (47) déduire immédiatement la formule (44), dans laquelle on aura $st < hk$.

Soient maintenant a, b, c, ... les facteurs premiers de n, en sorte qu'on ait

$$n = a^{\alpha} b^{\beta} c^{\gamma} \dots .$$

D'après ce qu'on vient de dire, on obtiendra les racines primitives de l'équation (1) en multipliant celles de l'équation (37), qui sont en nombre égal à $a^{\alpha-1}(a-1)$, par celles de l'équation

$$x^{b^{\beta} c^{\gamma} \dots} = 1.$$

De même, on obtiendra ces dernières en multipliant celles de l'équation

$$x^{b^{\beta}} = 1,$$

qui sont en nombre égal à $b^{\beta-1}(b-1)$, par les racines primitives de l'équation

$$x^{c^{\gamma} \dots} = 1.$$

En continuant de la même manière, on finira par reconnaître que chaque racine primitive de l'équation (2) est le produit de plusieurs facteurs u, v, w, ..., qui servent de racines primitives aux équations (35); et, comme les produits de cette espèce seront tous distincts les uns des autres, il est clair que le nombre de ces produits ou l'expression

$$(48) \quad N = a^{\alpha-1} b^{\beta-1} c^{\gamma-1} \dots (a-1)(b-1)(c-1) \dots = n\left(1-\frac{1}{a}\right)\left(1-\frac{1}{b}\right)\left(1-\frac{1}{c}\right)\cdots$$

indiquera précisément le nombre des racines primitives de l'équation (2).

Si dans le produit $u, v, w, \dots$ on faisait entrer successivement toutes les racines primitives ou non primitives des équations (35), on obtiendrait évidemment pour résultats toutes les racines primitives ou non primitives de l'équation (2).

Scolie I. — Soit ρ une racine primitive de l'équation (2). Les diverses puissances de ρ, d'un degré inférieur à n, savoir

$$(49) \quad \rho^0 = 1, \quad \rho, \quad \rho^2, \quad \rho^3, \quad \dots, \quad \rho^{n-1},$$

seront évidemment des racines de la même équation. De plus, ces racines seront distinctes les unes des autres. Car, si l'on suppose

$$\rho^l = \rho^m,$$

m étant inférieur à n, et l égal ou inférieur à m, on en conclura

$$\rho^{m-l} = 1;$$

par conséquent, $m - l = 0$ ou $m = l$, puisque, ρ étant racine primitive, aucune puissance de ρ, d'un degré différent de zéro, et inférieur à n, n'aura pour valeur l'unité. Donc la suite (49) comprendra toutes les racines de l'équation (2). De plus, si les nombres n et $m < n$ ont un commun diviseur $\omega > 1$, alors, en prenant

$$x = \rho^m,$$

on vérifiera, non seulement l'équation (2), mais encore la suivante

$$x^{\frac{n}{\omega}} = 1,$$

et, par conséquent, $x = \rho^m$ ne sera pas une racine primitive. Donc les seules puissances de ρ qui pourront servir de racines primitives à l'équation (2) seront celles qui offriront des exposants premiers à n. Il est d'ailleurs facile de s'assurer que, si m est premier à n, $x = \rho^m$ sera une racine primitive. Alors, en effet, si l'on désigne par

$$x^t = \rho^{mt}$$

la plus petite puissance de x qui se réduise à l'unité, le plus grand

commun diviseur de ms et de n sera le même que celui de s et de n. Or, en vertu du théorème V, la puissance de ρ, dont l'exposant sera égal à ce plus grand commun diviseur, aura pour valeur l'unité; et, puisque ρ est une racine primitive, l'exposant dont il s'agit ne pourra offrir un exposant inférieur à n. Donc la plus petite valeur qu'on puisse attribuer à s doit être divisible par n, et ne saurait différer de $s = n$; d'où il résulte que $x = \rho^m$ sera, dans l'hypothèse admise, une racine primitive de l'équation (2).

Scolie II. — Puisque les diverses racines primitives de l'équation (2) sont respectivement égales aux diverses puissances de ρ dont les exposants sont premiers à p, mais inférieurs à n, l'expression (48) indique certainement combien il y a de nombres entiers premiers à n, et plus petits que n. C'est, au reste, ce qu'il serait facile de prouver directement.

THÉORÈME VII. — *Soient p un nombre premier quelconque et n un nombre entier diviseur de $p - 1$. L'équivalence*

$$x^n \equiv 1 \pmod{p} \tag{2}$$

admettra autant de racines primitives qu'il y a de nombres entiers premiers à n, mais inférieurs à n; et, si l'on suppose

$$n = a^\alpha b^\beta c^\gamma \ldots, \tag{34}$$

$a, b, c, \ldots$ étant les facteurs premiers de n, chacune des racines primitives de l'équivalence (3) sera le produit de plusieurs facteurs $u, v, w, \ldots$ qui serviront de racines primitives aux équivalences

$$u^{a^\alpha} \equiv 1, \quad v^{b^\beta} \equiv 1, \quad w^{c^\gamma} \equiv 1, \quad \ldots \pmod{p}. \tag{30}$$

Démonstration. — Pour établir le théorème VII, il suffit de remplacer, dans la démonstration que nous avons donnée du théorème VI, le signe $=$ par le signe $\equiv$, en prenant le nombre p pour module.

Scolie I. — Soit r une racine primitive de l'équivalence (3). Les diverses puissances de r d'un degré inférieur à n, savoir

$$r^0 = 1, \quad r, \quad r^2, \quad r^3, \quad \ldots, \quad r^{n-1}, \tag{51}$$

seront évidemment des racines de la même équivalence. De plus, ces racines seront distinctes les unes des autres. Car, si l'on suppose

$$r^l \equiv r^m \pmod{p},$$

m étant inférieur à n, et l égal ou inférieur à m, on en conclura

$$r^{m-l} \equiv 1 \pmod{p},$$

par conséquent $m = l$. Donc la suite (51) comprendra toutes les racines de la formule (3). De plus, si les nombres n et $m < n$ ont un commun diviseur $\omega > 1$, alors, en prenant

$$x \equiv r^m \pmod{p},$$

on vérifiera, non seulement la formule (3), mais la suivante

$$x^{\frac{n}{\omega}} \equiv 1 \pmod{p},$$

et, par conséquent, $x \equiv r^m$ ne sera pas une racine primitive. Donc les seules puissances de r qui pourront servir de racines primitives à la formule (3) seront celles qui offriront des exposants premiers à n. Enfin, comme le nombre N des racines primitives est précisément égal au nombre des puissances de r qui offrent des exposants premiers à n, mais plus petits que n, on peut affirmer que chacune de ces puissances sera une racine primitive. C'est d'ailleurs ce qu'il serait facile de prouver directement.

Scolie II. — Lorsque n devient égal à $p - 1$, les racines primitives de l'équivalence (3) réduite à la forme

$$x^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$$

sont ce qu'on appelle les racines primitives du nombre premier p. Cela posé, on trouvera toujours, pour un nombre premier p, autant de racines primitives qu'il y aura de nombres premiers à p, mais inférieurs à p.

THÉORÈME VIII. — *Soient ρ une racine primitive de l'équation (2), r une*

racine primitive de l'équivalence (3), *et* ω *un diviseur entier de n. Les deux formules*

$$x^{\frac{n}{\omega}} = 1, \tag{52}$$

$$x^{\frac{n}{\omega}} \equiv 1 \pmod{p} \tag{53}$$

auront pour racines les puissances de ρ *et de r dont les exposants seront multiples de* ω, *et pour racines primitives celles des mêmes puissances dont les exposants, divisés par* ω, *donneront pour quotients des nombres qui seront premiers à* $\frac{n}{\omega}$.

Démonstration. — En effet, dans l'hypothèse admise, les différents termes compris dans la suite

$$\rho^0 = 1, \ \rho^{\omega}, \ \rho^{2\omega}, \ \ldots, \ \rho^{\left(\frac{n}{\omega}-1\right)\omega} = \rho^{n-\omega}, \tag{54}$$

et dont le nombre est $\frac{n}{\omega}$, seront autant de racines distinctes de l'équation (52), tandis que les différents termes compris dans la suite

$$r^0 = 1, \ r^{\omega}, \ r^{2\omega}, \ \ldots, \ r^{\left(\frac{n}{\omega}-1\right)\omega} = r^{n-\omega} \tag{55}$$

seront autant de racines distinctes de l'équivalence (53). De plus, m désignant un des nombres entiers 0, 1, 2, ..., $\frac{n}{\omega} - 1$, $\rho^{m\omega}$ deviendra une racine primitive de l'équation (52), et $r^{m\omega}$ une racine primitive de l'équivalence (53), si mn est le plus petit multiple de $m\omega$ qui soit divisible par n, par conséquent si m est premier à $\frac{n}{\omega}$.

Théorème IX. — *Les mêmes choses étant posées que dans les théorèmes VI et VII, désignons par*

$$n, \quad n', \quad n'', \quad \ldots$$

les termes positifs, et par

$$-n_1, \quad -n_2, \quad \ldots$$

les termes négatifs que présente le développement du produit

$$\mathrm{N} = n\left(1 - \frac{1}{a}\right)\left(1 - \frac{1}{b}\right)\left(1 - \frac{1}{c}\right)\cdots \tag{56}$$

Faisons d'ailleurs

$$\mathrm{X} = \frac{(x^n - 1)(x^{n'} - 1)(x^{n''} - 1)\ldots}{(x^{n_1} - 1)(x^{n_2} - 1)\ldots}. \tag{57}$$

X *sera une fonction entière de* x, *et les deux formules*

$$\mathrm{X} = 0, \tag{58}$$

$$\mathrm{X} \equiv 0 \pmod{p} \tag{59}$$

auront pour racines, la première, les racines primitives de l'équation (2), *la seconde, les racines primitives de l'équivalence* (3).

Demonstration. — Comme, en développant le produit N, on trouvera

$$\mathrm{N} = n - \frac{n}{a} - \frac{n}{b} - \frac{n}{c} - \ldots + \frac{n}{ab} + \frac{n}{ac} + \ldots + \frac{n}{bc} + \ldots - \frac{n}{abc} - \ldots, \tag{60}$$

on en conclura

$$\mathrm{X} = \frac{(x^n - 1)\left(x^{\frac{n}{ab}} - 1\right)\left(x^{\frac{n}{abc}} - 1\right)\ldots\left(x^{\frac{n}{bc}} - 1\right)\ldots}{\left(x^{\frac{n}{a}} - 1\right)\left(x^{\frac{n}{b}} - 1\right)\left(x^{\frac{n}{c}} - 1\right)\ldots\left(x^{\frac{n}{abc}} - 1\right)\ldots}. \tag{61}$$

Cela posé, soit ρ une racine primitive de l'équation (2), et r une racine primitive de l'équivalence (3). Chacun des binômes

$$\left\{\begin{array}{l} x^n - 1, \quad x^{\frac{n}{a}} - 1, \quad x^{\frac{n}{b}} - 1, \quad x^{\frac{n}{c}} - 1, \quad \ldots; \\ x^{\frac{n}{ab}} - 1, \quad x^{\frac{n}{ac}} - 1, \quad \ldots; \quad x^{\frac{n}{bc}} - 1, \quad \ldots; \quad x^{\frac{n}{abc}} - 1, \quad \ldots \end{array}\right. \tag{62}$$

sera égal au produit de quelques-uns des facteurs linéaires

$$x - 1, \quad x - \rho, \quad x - \rho^2, \quad \ldots, \quad x - \rho^{n-1}, \tag{63}$$

et de plus équivalent, suivant le module p, au produit de quelques-uns des facteurs linéaires

$$x - 1, \quad x - r, \quad x - r^2, \quad \ldots, \quad x - r^{n-1}. \tag{64}$$

D'ailleurs, m étant l'un quelconque des nombres entiers

$$0, \quad 1, \quad 2, \quad \ldots, \quad n - 1,$$

le facteur linéaire $x - \rho^m$ divisera seulement le premier des bi-

nômes (62), si ρ^m est une racine primitive de l'équation (2). Le même facteur divisera les deux binômes

$$x^n - 1, \quad x^{\frac{n}{a}} - 1,$$

lorsque ρ^m sera une racine de l'équation $x^{\frac{n}{a}} = 1$. Il divisera les quatre binômes

$$x^n - 1, \quad x^{\frac{n}{a}} - 1, \quad x^{\frac{n}{b}} - 1, \quad x^{\frac{n}{ab}} - 1,$$

lorsque ρ^m sera une racine de l'équation $x^{\frac{n}{ab}} = 1$, ..., et généralement il divisera tous les binômes dans lesquels les exposants de x seront égaux aux termes que présente le développement du produit

$$(65)\quad \left\{\begin{array}{c} n\left(1-\frac{1}{a}\right), \text{ ou } n\left(1-\frac{1}{b}\right), \text{ ou } n\left(1-\frac{1}{c}\right), \\ \text{ou } n\left(1-\frac{1}{a}\right)\left(1-\frac{1}{b}\right), \text{ ou } n\left(1-\frac{1}{a}\right)\left(1-\frac{1}{c}\right), \ \ldots, \text{ ou } n\left(1-\frac{1}{b}\right)\left(1-\frac{1}{c}\right), \ \ldots, \\ \text{ou } n\left(1-\frac{1}{a}\right)\left(1-\frac{1}{b}\right)\left(1-\frac{1}{c}\right), \ \ldots, \end{array}\right.$$

lorsque ρ^m sera une racine de l'équation

$$(66)\quad \left\{\begin{array}{c} x^{\frac{n}{a}} = 1, \quad \text{ou} \quad x^{\frac{n}{b}} = 1, \quad \text{ou} \quad x^{\frac{n}{c}} = 1, \quad \ldots, \\ \text{ou} \quad x^{\frac{n}{ab}} = 1, \quad \text{ou} \quad x^{\frac{n}{ac}} = 1, \quad \ldots, \quad \text{ou} \quad x^{\frac{n}{bc}} = 1, \quad \ldots, \\ \text{ou} \quad x^{\frac{n}{abc}} = 1, \quad \ldots, \\ \ldots\ldots\ldots\

les racines primitives de l'équation (2) et de l'équivalence (3) se confondront avec les racines des deux formules

$$(71)\qquad \frac{(x^n-1)\left(x^{\frac{n}{ab}}-1\right)}{\left(x^{\frac{n}{a}}-1\right)\left(x^{\frac{n}{b}}-1\right)}=0,$$

$$(72)\qquad \frac{(x^n-1)\left(x^{\frac{n}{ab}}-1\right)}{\left(x^{\frac{n}{a}}-1\right)\left(x^{\frac{n}{b}}-1\right)}\equiv 0 \pmod{p}.$$

Corollaire III. — Si n est de la forme

$$(73)\qquad n=a^\alpha b^\beta c^\gamma,$$

les racines primitives de l'équation (2) et de l'équivalence (3) se confondront avec les racines des deux formules

$$(74)\qquad \frac{(x^n-1)\left(x^{\frac{n}{ab}}-1\right)\left(x^{\frac{n}{ac}}-1\right)\left(x^{\frac{n}{bc}}-1\right)}{\left(x^{\frac{n}{a}}-1\right)\left(x^{\frac{n}{b}}-1\right)\left(x^{\frac{n}{c}}-1\right)\left(x^{\frac{n}{abc}}-1\right)}=0,$$

$$(75)\qquad \frac{(x^n-1)\left(x^{\frac{n}{ab}}-1\right)\left(x^{\frac{n}{ac}}-1\right)\left(x^{\frac{n}{bc}}-1\right)}{\left(x^{\frac{n}{a}}-1\right)\left(x^{\frac{n}{b}}-1\right)\left(x^{\frac{n}{c}}-1\right)\left(x^{\frac{n}{abc}}-1\right)}\equiv 0 \pmod{p}.$$

Corollaire IV. — Soient p un nombre premier quelconque et a, b, c, ... les facteurs premiers de $p-1$, en sorte qu'on ait

$$(76)\qquad p-1=a^\alpha b^\beta c^\gamma\ldots.$$

Les racines primitives du nombre p se confondront avec les racines de l'équivalence

$$(77)\qquad \frac{(x^{p-1}-1)\left(x^{\frac{p-1}{ab}}-1\right)\left(x^{\frac{p-1}{ac}}-1\right)\ldots\left(x^{\frac{p-1}{bc}}-1\right)\ldots}{\left(x^{\frac{p-1}{a}}-1\right)\left(x^{\frac{p-1}{b}}-1\right)\left(x^{\frac{p-1}{c}}-1\right)\ldots\left(x^{\frac{p-1}{abc}}-1\right)\ldots}\equiv 0 \pmod{p}.$$

Dans les binômes que renferme le premier membre de cette équivalence, les exposants de x sont respectivement égaux aux valeurs numé-

riques des termes que présente le développement du produit

$$(78)\qquad \begin{cases} (p-1)\left(1-\frac{1}{a}\right)\left(1-\frac{1}{b}\right)\left(1-\frac{1}{c}\right)\cdots \\ \quad =(p-1)-\frac{p-1}{a}-\frac{p-1}{b}-\frac{p-1}{c}+\ldots \\ \qquad\qquad +\frac{p-1}{ab}+\frac{p-1}{ac}+\ldots+\frac{p-1}{bc}+\ldots-\frac{p-1}{abc}-\ldots. \end{cases}$$

Exemples. — Puisqu'on trouve, en prenant $p=3$, $p-1=2$, $a=2$,

$$(p-1)\left(1-\frac{1}{a}\right)=2\left(1-\frac{1}{2}\right)=2-1;$$

en prenant $p=5$, $p-1=4$, $a=2$,

$$(p-1)\left(1-\frac{1}{a}\right)=4\left(1-\frac{1}{2}\right)=4-2;$$

en prenant $p=7$, $p-1=6$, $a=2$, $b=3$,

$$(p-1)\left(1-\frac{1}{a}\right)\left(1-\frac{1}{b}\right)=6\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)=6-3-2+1;$$

en prenant $p=11$, $p-1=10$, $a=2$, $b=5$,

$$(p-1)\left(1-\frac{1}{a}\right)\left(1-\frac{1}{b}\right)=10\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{5}\right)=10-5-2+1;$$

en prenant $p=13$, $p-1=12$, $a=2$, $b=3$,

$$(p-1)\left(1-\frac{1}{a}\right)\left(1-\frac{1}{b}\right)=12\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)=12-6-4+2;$$

en prenant $p=17$, $p-1=16$, $a=2$,

$$(p-1)\left(1-\frac{1}{a}\right)=16\left(1-\frac{1}{2}\right)=16-8;$$

etc., et que l'on a d'ailleurs

$$\frac{x^2-1}{x-1} = x+1,$$

$$\frac{x^4-1}{x^2-1} = x^2+1,$$

$$\frac{(x^6-1)(x-1)}{(x^3-1)(x^2-1)} = \frac{x^3+1}{x+1} = x^2-x+1,$$

$$\frac{(x^{10}-1)(x-1)}{(x^5-1)(x^2-1)} = \frac{x^5+1}{x+1} = x^4-x^3+x^2-x+1,$$

$$\frac{(x^{12}-1)(x^2-1)}{(x^6-1)(x^3-1)} = \frac{x^6+1}{x^2+1} = x^4-x^2+1,$$

$$\frac{x^{16}-1}{x^8-1} = x^8+1,$$

.....,

on peut affirmer que les racines primitives de 3 se réduisent à la racine unique de l'équivalence

$$x+1 \equiv 0 \pmod 3; \tag{79}$$

que les racines primitives de 5 coïncident avec les racines de l'équivalence

$$x^2+1 \equiv 0 \pmod 5; \tag{80}$$

les racines primitives de 7 avec les racines de l'équivalence

$$x^2-x+1 \equiv 0 \pmod 7; \tag{81}$$

les racines primitives de 11 avec les racines de l'équivalence

$$x^5-x^3+x^2-x+1 \equiv 0 \pmod{11}; \tag{82}$$

les racines primitives de 13 avec les racines de l'équivalence

$$x^4-x^2+1 \equiv 0 \pmod{13}; \tag{83}$$

les racines primitives de 17 avec les racines de l'équivalence

$$x^8+1 \equiv 0 \pmod{17}, \tag{84}$$

etc.

On trouverait de même que les racines primitives des nombres 19, 23, 29, 31, 37, ... se confondent avec les racines des équivalences

$$x^6-x^3+1 \equiv 0 \pmod{19},$$
$$x^{10}-x^9+x^8-x^7+x^6-x^5+x^4-x^3+x^2-x+1 \equiv 0 \pmod{23},$$
$$x^{12}-x^{10}+x^8-x^6+x^4-x^2+1 \equiv 0 \pmod{29},$$
$$x^8+x^7-x^5-x^4-x^3+x+1 \equiv 0 \pmod{31},$$
$$x^{12}-x^6+1 \equiv 0 \pmod{37},$$
....

Il est d'ailleurs facile de s'assurer que les racines primitives des nombres 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, ... vérifient les formules qu'on vient d'obtenir. En effet, ces racines primitives, lorsqu'on représente chacune d'elles par un nombre renfermé entre les limites $0, p$, sont respectivement

pour $p=3$, ..., 2,
» $p=5$, ..., 2, 3,
» $p=7$, ..., 3, 5,
» $p=11$, ..., 2, 6, 7, 8,
» $p=13$, ..., 2, 6, 7, 11,
» $p=17$, ..., 3, 5, 6, 7, 10, 11, 12, 14,
» $p=19$, ..., 2, 3, 10, 13, 14, 15,
» $p=23$, ..., 5, 7, 10, 11, 14, 15, 17, 19, 20, 21,
» $p=29$, ..., 2, 3, 8, 10, 11, 14, 15, 18, 19, 21, 26, 27,
» $p=31$, ..., 3, 11, 12, 13, 17, 21, 22, 24,
» $p=37$, ..., 2, 5, 13, 15, 17, 18, 19, 20, 22, 24, 32, 35.

Elles deviendraient

pour $p=3$, ..., -1,
» $p=5$, ..., -2, 2,
» $p=7$, ..., -2, 3,
» $p=11$, ..., -5, -4, -3, 2,
» $p=13$, ..., -6, -2, 2, 6,
» $p=17$, ..., -7, -6, -5, -3, 3, 5, 6, 7,
» $p=19$, ..., -9, -6, -5, -4, 2, 3,
» $p=23$, ..., -9, -8, -6, -4, -3, -2, 5, 7, 10, 11,
» $p=29$, ..., -14, -11, -10, -8, -3, -2, 2, 3, 8, 10, 11, 14,
» $p=31$, ..., -14, -10, -9, -7, 3, 11, 12, 13,
» $p=37$, ..., -18, -17, -15, -13, -5, -2, 2, 5, 13, 15, 17, 18,

si on les représentait par des quantités comprises entre les limites $-\frac{p}{2}$, $+\frac{p}{2}$. On aura d'ailleurs évidemment

$$2+1\equiv 0 \pmod 3,$$
$$2^2+1\equiv 3^2+1\equiv 0 \pmod 5,$$
$$3^2-3+1\equiv 5^2-5+1\equiv 0 \pmod 7,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \ldots\ldots\ldots$$

Il est bon d'observer que le produit (78) sera un nombre pair, si l'un des facteurs a, b, c, ... est impair, ou si $p-1$ est divisible par 4. Donc ce produit sera toujours pair, excepté dans le cas où l'on supposerait $n=3$. De plus, les différents termes compris dans le second membre de la formule (78) seront pairs eux-mêmes, si $p-1$ est divisible par 4. Il suit de ces observations que l'équation (77), réduite à sa forme la plus simple, aura pour premier terme une puissance paire de x, si p n'est pas égal à 3, et ne renfermera que des puissances paires de x, si $p-1$ est divisible par 4. D'ailleurs le dernier terme de cette équation sera la valeur du rapport

$$\frac{(x^n-1)\left(\frac{n}{x^{ab}}-1\right)\left(\frac{n}{x^{ac}}-1\right)\ldots\left(\frac{n}{x^{bc}}-1\right)\ldots}{\left(\frac{n}{x^a}-1\right)\left(\frac{n}{x^b}-1\right)\left(\frac{n}{x^c}-1\right)\ldots\left(\frac{n}{x^{abc}}-1\right)\ldots},$$

correspondante à $x=0$, c'est-à-dire l'unité. Donc, si l'on excepte le cas où l'on aurait $p=3$, les racines primitives du nombre p donneront l'unité pour produit; et ces racines pourront être considérées comme deux à deux égales, mais affectées de signes contraires, toutes les fois que le nombre p, divisé par 4, donnera 1 pour reste.

THÉORÈME X. — *Soient*

$$\xi_1,\quad \xi_2,\quad \ldots,\quad \xi_{m-1},\quad \xi_m$$

les racines de l'équation

$$a_0x^m+a_1x^{m-1}+\ldots+a_{m-1}x+a_m=0, \tag{85}$$

dans laquelle a_0, a_1, ..., a_{m-1}, a_m désignent des quantités entières, p un

nombre premier supérieur ou égal à m, et supposons que l'équivalence

$$a_0x^m+a_1x^{m-1}+\ldots+a_{m-1}x+a_m\equiv 0 \pmod p \tag{4}$$

admette m racines distinctes représentées par

$$x_1,\quad x_2,\quad \ldots,\quad x_{m-1},\quad x_m.$$

Soient d'ailleurs

$$\mathrm{F}(\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_{m-1},\xi_m)$$

une fonction entière et symétrique de ξ_1, ξ_2, ..., ξ_{m-1}, ξ_m, à coefficients entiers ou rationnels, et U *la valeur entière ou fractionnaire de cette même fonction. L'équation*

$$\mathrm{F}(\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_{m-1},\xi_m)=\mathrm{U} \tag{86}$$

entraînera l'équivalence

$$\mathrm{F}(x_1,x_2,\ldots,x_{m-1},x_m)\equiv \mathrm{U} \pmod p. \tag{87}$$

Démonstration. — Les fonctions symétriques de ξ_1, ξ_2, ..., ξ_{m-1}, ξ_m et de x_1, x_2, ..., x_{m-1}, x_m, représentées par

$$\mathrm{F}(\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_{m-1},\xi_m) \quad \text{et} \quad \mathrm{F}(x_1,x_2,\ldots,x_{m-1},x_m),$$

peuvent être considérées, la première comme une fonction entière des sommes

$$\begin{cases} \xi_1+\xi_2+\ldots+\xi_m=-\dfrac{a_1}{a_0}, \\ \xi_1\xi_2+\xi_1\xi_3+\ldots+\xi_1\xi_m+\xi_2\xi_3+\ldots+\xi_2\xi_m+\ldots+\xi_{m-1}\xi_m=\dfrac{a_2}{a_0}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \xi_1\xi_2\ldots\xi_{m-1}\xi_m=\pm\dfrac{a_m}{a_0}, \end{cases} \tag{88}$$

la seconde comme une fonction semblable des quantités que l'on déduit de ces mêmes sommes en écrivant partout ξ au lieu de x, quan-

tités qui vérifient les formules (10) et, par conséquent, les suivantes

$$(89)\quad \begin{cases} x_1 + x_2 + \ldots + x_m \equiv -\dfrac{a_1}{a_0} \pmod p, \\ x_1x_2 + x_1x_3 + \ldots + x_1x_m + x_2x_3 + \ldots + x_2x_m + \ldots + x_{m-1}x_m \equiv \dfrac{a_2}{a_0}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ x_1x_2\ldots x_{m-1}x_m \equiv \pm\dfrac{a_m}{a_0}. \end{cases}$$

Or il suit évidemment de cette remarque qu'en omettant les multiples de p on trouvera pour la fonction

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_{m-1}, x_m)$$

une valeur numérique entière ou fractionnaire précisément égale à celle de la fonction

$$F(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{m-1}, \xi_m).$$

Corollaire I. — Si, après avoir posé l'équation identique

$$(90)\quad a_0x^m + a_1x^{m-1} + \ldots + a_{m-1}x + a_m = a_0(x-\xi_1)(x-\xi_2)\ldots(x-\xi_m),$$

on différentie par rapport à x les logarithmes des deux membres, on trouvera

$$(91)\quad \begin{cases} \dfrac{ma_0x^{m-1} + (m-1)a_1x^{m-2} + \ldots + 2a_{m-2}x + a_{m-1}}{a_0x^m + a_1x^{m-1} + \ldots + a_{m-2}x^2 + a_{m-1}x + a_m} \\ \quad = \dfrac{1}{x-\xi_1} + \dfrac{1}{x-\xi_2} + \ldots + \dfrac{1}{x-\xi_m}, \end{cases}$$

puis on en conclura, en supposant $x > 1$,

$$(92)\quad \begin{cases} \dfrac{ma_0x^{m-1} + (m-1)a_1x^{m-2} + \ldots + 2a_{m-2}x + a_{m-1}}{a_0x^m + a_1x^{m-1} + \ldots + a_{m-2}x^2 + a_{m-1}x + a_m} \\ \quad = \dfrac{1}{x} + (\xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_m)\dfrac{1}{x^2} + (\xi_1^2 + \xi_2^2 + \ldots + \xi_m^2)\dfrac{1}{x^3} \\ \qquad + (\xi_1^3 + \xi_2^3 + \ldots + \xi_m^3)\dfrac{1}{x^4} + \ldots. \end{cases}$$

Donc, si l'on représente par

$$(93)\quad \frac{1}{x} + \frac{s_1}{x^2} + \frac{s_2}{x^3} + \frac{s_3}{x^4} + \ldots$$

le développement du premier membre de la formule (92) suivant les puissances ascendantes de $\frac{1}{x}$, on aura

$$(94)\quad \begin{cases} \xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_m = s_1, \\ \xi_1^2 + \xi_2^2 + \ldots + \xi_m^2 = s_2, \\ \xi_1^3 + \xi_2^3 + \ldots + \xi_m^3 = s_3, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{cases}$$

et généralement, l étant un nombre entier quelconque,

$$\xi_1^l + \xi_2^l + \ldots + \xi_m^l = s_l.$$

Cela posé, il résulte du théorème X que l'on aura encore

$$(95)\quad x_1^l + x_2^l + \ldots + x_m^l \equiv s_l \pmod p.$$

Corollaire II. — Le théorème X pourrait devenir inexact, ainsi que les formules (10) et (89), si le degré m de l'équivalence

$$(4)\quad a_0x^m + a_1x^{m-1} + \ldots + a_{m-1}x + a_m \equiv 0 \pmod p$$

devenait supérieur à son module p, ou si ce module cessait d'être un nombre premier.

Corollaire III. — Si l'on réduit le polynôme

$$a_0x^m + a_1x^{m-1} + \ldots + a_{m-1}x + a_m$$

au binôme

$$x^m - 1,$$

les formules (85) et (4) deviendront respectivement

$$(96)\quad x^m = 1,$$

$$(97)\quad x^m \equiv 1 \pmod p.$$

On trouvera d'ailleurs

$$\frac{m}{x} + \frac{s_1}{x^2} + \frac{s_2}{x^3} + \frac{s_3}{x^4} + \ldots = \frac{mx^{m-1}}{x^m - 1} = \frac{m}{x} + \frac{m}{x^{m+1}} + \frac{m}{x^{2m+1}} + \ldots$$

et, par conséquent,

$$(98)\quad \begin{cases} s_1 = 0, & s_2 = 0, & \dots, & s_{m-1} = 0, & s_m = m, \\ s_{m+1} = 0, & s_{m+2} = 0, & \dots, & s_{2m-1} = 0, & s_{2m} = m, \\ s_{2m+1} = 0, & s_{2m+2} = 0, & \dots, & s_{3m-1} = 0, & s_{3m} = m, \\ \dots\dots\dots, & \dots\dots\dots, & \dots, & \dots\dots\dots, & \dots\dots\dots \end{cases}$$

On aura donc

$$(99)\qquad s_l = m$$

toutes les fois que l sera multiple de m, et

$$(100)\qquad s_l = 0$$

dans le cas contraire. Cela posé, on déduira immédiatement des formules (99) et (100) les propositions suivantes :

THÉORÈME XI. — *La somme des puissances du degré l, pour les racines de l'équation* (96), *est égale au nombre m ou à zéro, suivant que l est ou n'est pas multiple de m.*

THÉORÈME XII. — *Si l'équivalence binôme*

$$(97)\qquad x^m \equiv 1 \pmod{p}$$

admet m racines distinctes, la somme de leurs puissances du degré l sera équivalente, suivant le module p, au nombre m ou à zéro, suivant que l sera ou ne sera pas multiple de m.

Concevons maintenant que, p étant un nombre premier, n un diviseur de $p-1$, $a, b, c, \dots$ les facteurs premiers de n, et X une fonction de x déterminée par la formule (57), on réduise l'équation (85) ou l'équivalence (4) à l'équation (58) ou à l'équivalence (59). On trouvera, eu égard à la formule (61),

$$(101)\quad \begin{cases} a_0 x^m + a_1 x^{m-1} + \dots + a_{m-1} x + a_m \\ \quad = \dfrac{(x^n-1)\left(x^{\frac{n}{ab}}-1\right)\left(x^{\frac{n}{ac}}-1\right)\dots\left(x^{\frac{n}{bc}}-1\right)\dots}{\left(x^{\frac{n}{a}}-1\right)\left(x^{\frac{n}{b}}-1\right)\left(x^{\frac{n}{c}}-1\right)\dots\left(x^{\frac{n}{abc}}-1\right)\dots}; \end{cases}$$

puis on tirera : 1° de l'équation (101), en différentiant les logarithmes

des deux membres,

$$(102)\quad \begin{cases} \dfrac{m a_0 x^{m-1} + (m-1) a_1 x^{m-2} + \dots + a_{m-1}}{a_0 x^m + a_1 x^{m-1} + \dots + a_{m-1} x + a_m} \\ \quad = \dfrac{n x^{n-1}}{x^n - 1} - \dfrac{\frac{n}{a} x^{\frac{n}{a}-1}}{x^{\frac{n}{a}} - 1} - \dfrac{\frac{n}{b} x^{\frac{n}{b}-1}}{x^{\frac{n}{b}} - 1} - \dfrac{\frac{n}{c} x^{\frac{n}{c}-1}}{x^{\frac{n}{c}} - 1} - \dots \\ \quad + \dfrac{\frac{n}{ab} x^{\frac{n}{ab}-1}}{x^{\frac{n}{ab}} - 1} + \dfrac{\frac{n}{ac} x^{\frac{n}{ac}-1}}{x^{\frac{n}{ac}} - 1} + \dots + \dfrac{\frac{n}{bc} x^{\frac{n}{bc}-1}}{x^{\frac{n}{bc}} - 1} + \dots - \dfrac{\frac{n}{abc} x^{\frac{n}{abc}-1}}{x^{\frac{n}{abc}} - 1} - \dots; \end{cases}$$

2° de la formule (102), en développant les deux membres suivant les puissances ascendantes de $\frac{1}{x}$,

$$(103)\quad \begin{cases} \dfrac{m}{x} + \dfrac{s_1}{x^2} + \dfrac{s_2}{x^3} + \dfrac{s_3}{x^4} + \dots = n\left(\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x^{n+1}} + \dfrac{1}{x^{2n+1}} + \dots\right) \\ \quad - \dfrac{n}{a}\left(\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x^{\frac{n}{a}+1}} + \dfrac{1}{x^{2\frac{n}{a}+1}} + \dots\right) \\ \quad - \dfrac{n}{b}\left(\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x^{\frac{n}{b}+1}} + \dfrac{1}{x^{2\frac{n}{b}+1}} + \dots\right) \\ \quad - \dfrac{n}{c}\left(\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x^{\frac{n}{c}+1}} + \dfrac{1}{x^{2\frac{n}{c}+1}} + \dots\right) \\ \quad - \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \quad + \dfrac{n}{ab}\left(\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x^{\frac{n}{ab}+1}} + \dfrac{1}{x^{2\frac{n}{ab}+1}} + \dots\right) \\ \quad + \dfrac{n}{ac}\left(\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x^{\frac{n}{ac}+1}} + \dfrac{1}{x^{2\frac{n}{ac}+1}} + \dots\right) \\ \quad + \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \quad + \dfrac{n}{bc}\left(\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x^{\frac{n}{bc}+1}} + \dfrac{1}{x^{2\frac{n}{bc}+1}} + \dots\right) \\ \quad + \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \quad - \dfrac{n}{abc}\left(\dfrac{1}{x} + \dfrac{2}{x^{\frac{n}{abc}+1}} + \dfrac{1}{x^{2\frac{n}{abc}+1}} + \dots\right) \\ \quad - \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{cases}$$

Par suite, on aura

$$s_l = 0, \tag{100}$$

si l n'est divisible par aucun des nombres entiers

$$n,\ \frac{n}{a},\ \frac{n}{b},\ \frac{n}{c},\ \dots;\ \frac{n}{ab},\ \frac{n}{ac},\ \dots;\ \frac{n}{bc},\ \dots;\ \frac{n}{abc},\ \dots, \tag{104}$$

c'est-à-dire par aucun des termes renfermés dans le développement du produit (56). Mais, si le contraire arrive, alors, en nommant ω le plus grand des nombres (104) qui divise l, on trouvera

$$\left\{\begin{array}{lll}
\text{Pour } \omega = n, & s_l = n\left(1-\frac{1}{a}\right)\left(1-\frac{1}{b}\right)\left(1-\frac{1}{c}\right)\cdots = \mathrm{N}, \\
\text{» } \omega = \frac{n}{a}, & s_l = -\frac{n}{a}\left(1-\frac{1}{b}\right)\left(1-\frac{1}{c}\right)\cdots\cdots = \frac{\mathrm{N}}{1-a}, \\
\text{» } \omega = \frac{n}{b}, & s_l = -\frac{n}{b}\left(1-\frac{1}{a}\right)\left(1-\frac{1}{c}\right)\cdots\cdots = \frac{\mathrm{N}}{1-b}, \\
\text{» } \omega = \frac{n}{c}, & s_l = -\frac{n}{c}\left(1-\frac{1}{a}\right)\left(1-\frac{1}{b}\right)\cdots\cdots = \frac{\mathrm{N}}{1-c}, \\
\text{» } \dots\dots, & \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\
\text{» } \omega = \frac{n}{ab}, & s_l = \frac{n}{ab}\left(1-\frac{1}{c}\right)\cdots\cdots = \frac{\mathrm{N}}{(1-a)(1-b)}, \\
\text{» } \omega = \frac{n}{ac}, & s_l = \frac{n}{ac}\left(1-\frac{1}{b}\right)\cdots\cdots = \frac{\mathrm{N}}{(1-a)(1-c)}, \\
\text{» } \dots\dots, & \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\
\text{» } \omega = \frac{n}{bc}, & s_l = \frac{n}{bc}\left(1-\frac{1}{a}\right)\cdots\cdots = \frac{\mathrm{N}}{(1-b)(1-c)}, \\
\text{» } \dots\dots, & \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\
\text{» } \omega = \frac{n}{abc}, & s_l = -\frac{n}{abc}\cdots\cdots = \frac{\mathrm{N}}{(1-a)(1-b)(1-c)}, \\
\text{» } \dots\dots, & \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots
\end{array}\right. \tag{105}$$

Cela posé, on déduira immédiatement des formules (100) et (105) les propositions suivantes :

Théorème XIII. — *Soient n un nombre entier quelconque, a, b, c, ... les facteurs premiers de n, et faisons*

$$\mathrm{N} = n\left(1-\frac{1}{a}\right)\left(1-\frac{1}{b}\right)\left(1-\frac{1}{c}\right)\cdots \tag{56}$$

La somme des puissances du degré l, pour les racines primitives de l'équation

$$x^n = 1, \tag{2}$$

sera nulle, si le degré l n'est divisible par aucun des termes que renferme le développement du produit (56), c'est-à-dire par aucun des nombres (104). Mais, si, parmi ces nombres, on trouve un ou plusieurs diviseurs de l, il suffira de considérer le plus grand de ces diviseurs, puis de remplacer, dans son expression sous forme fractionnaire, les nombres n, a, b, c, ... par les nombres N, $1-a$, $1-b$, $1-c$, ... pour obtenir la somme dont il s'agit.

Théorème XIV. — *Les mêmes choses étant posées que dans le théorème XIII, et p étant un nombre premier qui, divisé par n, donne 1 pour reste, la somme des puissances du degré l, pour les racines primitives de l'équivalence*

$$x^n \equiv 1 \pmod{p}, \tag{3}$$

sera équivalente à zéro, suivant le module p, si l n'est divisible par aucun des nombres (104). Mais, si, parmi ces nombres, on trouve un ou plusieurs diviseurs de l, il suffira de considérer le plus grand de ces diviseurs, puis de remplacer, dans son expression sous forme fractionnaire, les nombres n, a, b, c, ... par N, $1-a$, $1-b$, $1-c$, ... pour obtenir une fraction équivalente à la somme dont il s'agit.

Corollaire I. — Lorsque, dans le nombre n, chacun des facteurs premiers a, b, c, ... se trouve simplement élevé à la première puissance, on a

$$n = abc\dots, \tag{106}$$

et le plus petit terme de la suite (104), ou $\frac{n}{abc\dots}$, se réduit à l'unité. Alors aussi la dernière des équations (105) donnera

$$s_l = \pm 1, \tag{107}$$

le double signe devant être réduit au signe + ou au signe − suivant

que le nombre des facteurs $a, b, c, \ldots$ sera pair ou impair; et la formule (107) subsistera toutes les fois que l sera premier à n. On pourra donc prendre $l = 1$, et par conséquent *la somme des racines primitives sera équivalente à* ± 1.

Corollaire II. — Lorsque, dans le nombre n, un ou plusieurs des facteurs $a, b, c, \ldots$ sont élevés au carré ou à des puissances supérieures, le dernier terme de la suite (104), savoir $\frac{n}{abc\ldots}$, surpasse l'unité, et, si l'on désigne par l un nombre entier inférieur à ce terme, on aura

$$s_l = 0. \tag{100}$$

Donc alors, en prenant $l = 1$, on trouvera

$$s_1 = 0. \tag{108}$$

Ajoutons que, dans le cas dont il s'agit, l'équation (100) subsistera toutes les fois que le nombre entier l sera premier à n, ou même à $\frac{n}{abc\ldots}$.

En remplaçant, dans le théorème XIV, n par $p - 1$, on en déduira immédiatement la proposition dont voici l'énoncé :

Théorème XV. — *Soient p un nombre premier quelconque, et $a, b, c, \ldots$ les facteurs premiers de $p - 1$. La somme des puissances du degré l, pour les racines primitives du nombre p, sera équivalente à zéro, si l n'est divisible par aucun des nombres*

$$\begin{cases} p-1, \quad \frac{p-1}{a}, \quad \frac{p-1}{b}, \quad \frac{p-1}{c}, \quad \ldots, \\ \frac{p-1}{ab}, \quad \frac{p-1}{ac}, \quad \ldots, \quad \frac{p-1}{bc}, \quad \ldots, \quad \frac{p-1}{abc}, \quad \ldots. \end{cases} \tag{109}$$

Mais, si, parmi ces nombres, on trouve un ou plusieurs diviseurs de l, il suffira de considérer le plus grand de ces diviseurs, puis de remplacer, dans son expression sous forme fractionnaire, $p - 1$ par le produit

$$(p-1)\left(1-\frac{1}{a}\right)\left(1-\frac{1}{b}\right)\left(1-\frac{1}{c}\right)\cdots,$$

a par $1 - a$, b par $1 - b$, c par $1 - c$, etc. pour obtenir une fraction équivalente à la somme dont il s'agit.

Corollaire I. — Lorsque, dans le nombre $p - 1$, chacun des facteurs $a, b, c, \ldots$ se trouve simplement élevé à la première puissance, la somme des racines primitives du nombre p est équivalente à ± 1, savoir à $+1$ quand les facteurs $a, b, c, \ldots$ sont en nombre pair, et à -1 quand ils sont en nombre impair. La même somme est équivalente à zéro, lorsqu'un ou plusieurs des facteurs $a, b, c, \ldots$ se trouvent, dans le nombre $p - 1$, élevés au carré ou à une puissance supérieure. C'est, au reste, ce que l'on savait déjà. Mais on peut ajouter que, si l'on désigne par l un nombre premier à $p - 1$, ou même à $\frac{p-1}{abc\ldots}$, la somme des puissances du degré l, pour les racines primitives du nombre p, sera toujours équivalente à la somme de ces racines.

Pour montrer une application du théorème XV, supposons $p = 19$. Dans ce cas, le nombre

$$p - 1 = 18 = 2.3^2$$

aura pour facteurs premiers 2 et 3. On pourra donc supposer $a = 2$, $b = 3$, et la suite (104) renfermera seulement quatre termes, savoir

$$18, \quad \frac{18}{2} = 9, \quad \frac{18}{3} = 6, \quad \frac{18}{2.3} = 3.$$

On trouvera d'ailleurs

$$(p-1)\left(1-\frac{1}{a}\right)\left(1-\frac{1}{b}\right) = 18 \times \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} = 6,$$

$$1 - a = -1, \qquad 1 - b = -2.$$

Donc, en vertu du théorème XV, la somme des puissances du degré l, pour les racines primitives de 19, sera équivalente à zéro, suivant le module 19, si l n'est pas divisible par 3. La même somme deviendra équivalente à 6, si l est divisible par 18, à $\frac{6}{-1} = -6$, si l est divisible par $\frac{18}{2} = 9$, à $\frac{6}{-2} = -3$, si l est divisible par $\frac{18}{3} = 6$, enfin à

$$\frac{6}{(-1)(-2)} = 3,$$

si l est divisible par 3. Effectivement, les racines primitives du nombre 19 sont

$$2, \quad 3, \quad 10, \quad 13, \quad 14, \quad 15,$$

et l'on trouve

$$\begin{aligned}
&2 + 3 + 10 + 13 + 14 + 15 \equiv 6 \pmod{19},\\
&2^2 + 3^2 + 10^2 + 13^2 + 14^2 + 15^2 \equiv 0,\\
&2^4 + 3^4 + 10^4 + 13^4 + 14^4 + 15^4 \equiv 0,\\
&2^5 + 3^5 + 10^5 + 13^5 + 14^5 + 15^5 \equiv 0,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
&2^9 + 3^9 + 10^9 + 13^9 + 14^9 + 15^9 \equiv 3,\\
&2^{15} + 3^{15} + 10^{15} + 13^{15} + 14^{15} + 15^{15} \equiv 3,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
&2^6 + 3^6 + 10^6 + 13^6 + 14^6 + 15^6 \equiv -3,\\
&2^{12} + 3^{12} + 10^{12} + 13^{12} + 14^{12} + 15^{12} \equiv -3,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
&2^9 + 3^9 + 10^9 + 13^9 + 14^9 + 15^9 \equiv -6,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
&2^{18} + 3^{18} + 10^{18} + 13^{18} + 14^{18} + 15^{18} = 6,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

Théorème XVI. — *Supposons, comme dans le théorème X, que l'on désigne par $a_0, a_1, \ldots, a_{m-1}, a_m$ des quantités entières, par*

$$\xi_1, \quad \xi_2, \quad \ldots, \quad \xi_{m-1}, \quad \xi_m$$

les racines de l'equation

$$(85) \qquad a_0 x^m + a_1 x^{m-1} + \ldots + a_{m-1} x + a_m = 0,$$

par p un nombre premier supérieur ou égal à m, et que l'équivalence

$$(4) \qquad a_0 x^m + a_1 x^{m-1} + \ldots + a_{m-1} x + a_m \equiv 0 \pmod{p}$$

admette m racines distinctes représentées par

$$x_1, \quad x_2, \quad \ldots, \quad x_{m-1}, \quad x_m.$$

Soient d'ailleurs

$$\Phi(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_m)$$

une fonction entière à coefficients entiers ou rationnels, mais non symétrique, des racines de l'équation (85), *ou de plusieurs d'entre elles, et* M *le nombre des valeurs distinctes que cette fonction peut acquérir en vertu d'échanges opérés entre les racines $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_m$. Désignons par*

$$v_1, \quad v_2, \quad \ldots, \quad v_M$$

ces mêmes valeurs, et par

$$u_1, \quad u_2, \quad \ldots, \quad u_M$$

les quantités dans lesquelles elles se transforment, quand aux racines $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_m$ de l'équation (85) *on substitue les racines $x_1, x_2, \ldots, x_m$ de l'équivalence* (4). *Enfin soit*

$$(110) \qquad u^M + A_1 u^{M-1} + A_2 u^{M-2} + \ldots + A_{M-1} u + A_M = 0$$

l'équation qui a pour racines $v_1, v_2, \ldots, v_M$. Les coefficients $A_1, A_2, \ldots, A_M$ seront entiers ou rationnels, et l'équivalence

$$(111) \qquad u^M + A_1 u^{M-1} + A_2 u^{M-2} + \ldots + A_{M-1} u + A_M \equiv 0 \pmod{p}$$

aura pour racines $u_1, u_2, \ldots, u_M$.

Démonstration. — Comme, dans l'hypothèse admise, on aura identiquement

$$(112) \qquad (u - v_1)(u - v_2)\ldots(u - v_M) = u^M + A_1 u^{M-1} + \ldots + A_{M-1} u + A_M$$

et, par suite,

$$(113) \quad \begin{cases} A_1 = -(v_1 + v_2 + \ldots + v_M),\\ A_2 = v_1 v_2 + v_1 v_3 + \ldots + v_1 v_M + v_2 v_3 + \ldots + v_2 v_M + \ldots + v_{M-1} v_M,\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\ A_M = \pm v_1 v_2 \ldots v_{M-1} v_M. \end{cases}$$

il est clair que A_1, A_2, A_M seront des fonctions symétriques de $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_m$ à coefficients entiers ou rationnels, et par conséquent des fonctions entières des rapports $\frac{a_1}{a_0}, \frac{a_2}{a_0}, \ldots, \frac{a_m}{a_0}$. Donc $A_1, A_2, \ldots, A_M$ se réduiront à des quantités entières ou rationnelles. De plus, si, dans les seconds membres des équations (113), on remplace $v_1, v_2, \ldots, v_M$ par

$u_1, u_2, \ldots, u_M$, ces seconds membres, qui étaient des fonctions symétriques des racines de l'équation (85), se transformeront en des fonctions semblables des racines de l'équivalence (4). Or il suit évidemment de cette remarque, qu'en omettant les multiples de p, on aura encore

$$(114)\quad \begin{cases} A_1 \equiv -(u_1+u_2+\ldots+u_M) \pmod p, \\ A_2 \equiv u_1u_2+u_1u_3+\ldots+u_1u_M+u_2u_3+\ldots+u_2u_M+\ldots+u_{M-1}u_M, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ A_M \equiv \pm u_1u_2\ldots u_{M-1}u_M. \end{cases}$$

Donc la formule

$$(115)\quad (u-u_1)(u-u_2)\ldots(u-u_M) \equiv u^M+A_1u^{M-1}+\ldots+A_{M-1}u+A_M \pmod p$$

subsistera, quel que soit u, et l'équivalence

$$(116)\quad (u-u_1)(u-u_2)\ldots(u-u_M) \equiv 0 \pmod p,$$

qui a pour racines $u_1, u_2, \ldots, u_M$, pourra être présentée sous la forme

$$(117)\quad u^M+A_1u^{M-1}+A_2u^{M-2}+\ldots+A_{M-1}u+A_M \equiv 0 \pmod p.$$

Au reste, le théorème XVI est compris, comme cas particulier, dans un théorème plus général, que l'on démontrerait de la même manière, et dont voici l'énoncé :

THÉORÈME XVII. — *Soient*

$$(118)\quad \begin{cases} a_0x^m+a_1x^{m-1}+\ldots+a_{m-1}x+a_m=0, \\ b_0y^{m'}+b_1y^{m'-1}+\ldots+b_{m'-1}y+b_{m'}=0, \\ c_0z^{m''}+c_1z^{m''-1}+\ldots+c_{m''-1}z+c_{m''}=0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

diverses équations algébriques, la première du degré m, la deuxième du degré m', la troisième du degré m'', ... et dans lesquelles

$$a_0, a_1, \ldots, a_{m-1}, a_m;\quad b_0, b_1, \ldots, b_{m'-1}, b_{m'};\quad c_0, c_1, \ldots, c_{m''-1}, c_{m''};\quad \ldots$$

désignent des quantités entières, ou même des quantités rationnelles. Soient d'ailleurs

$$\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{m-1}, \xi_m;\quad \eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_{m'-1}, \eta_{m'};\quad \zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_{m''-1}, \zeta_{m''};\quad \ldots$$

les racines de ces diverses équations, et

$$(119)\quad \Phi(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_m;\ \eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_{m'};\ \zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_{m''};\ \ldots)$$

une fonction entière de ces racines, à coefficients entiers ou rationnels. Représentons par M *le nombre des valeurs distinctes que la fonction* (119) *peut acquérir, en vertu d'échanges opérés entre les racines de chacune des équations* (118), *par*

$$(120)\quad \upsilon_1,\ \upsilon_2,\ \ldots,\ \upsilon_M$$

ces mêmes valeurs; et soit

$$(121)\quad u^M+A_1u^{M-1}+A_2u^{M-2}+\ldots+A_{M-1}u+A_M=0$$

l'équation qui a pour racines $\upsilon_1, \upsilon_2, \ldots, \upsilon_M$. *Enfin supposons que, p étant un nombre premier supérieur ou égal au plus grand des nombres m, m', m'', ..., les équivalences*

$$(122)\quad \begin{cases} a_0x^m+a_1x^{m-1}+\ldots+a_{m-1}x+a_m \equiv 0 \pmod p, \\ b_0y^{m'}+b_1y^{m'-1}+\ldots+b_{m'-1}y+b_{m'} \equiv 0, \\ c_0z^{m''}+c_1z^{m''-1}+\ldots+c_{m''-1}z+c_{m''} \equiv 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

admettent, la première m racines distinctes $x_1, x_2, \ldots, x_m$, la deuxième m' racines distinctes $y_1, y_2, \ldots, y_{m'}$, la troisième m'' racines distinctes $z_1, z_2, \ldots, z_{m''}$; et soient

$$(123)\quad u_1,\ u_2,\ \ldots,\ u_M$$

les quantités dans lesquelles se transforment $\upsilon_1, \upsilon_2, \ldots, \upsilon_M$, *quand, aux racines des formules* (118), *on substitue les racines des formules* (122). *L'équivalence*

$$(124)\quad u^M+A_1u^{M-1}+A_2u^{M-2}+\ldots+A_{M-1}u+A_M \equiv 0 \pmod p$$

aura pour racines $u_1, u_2, \ldots, u_M$.

Corollaire. — Si l'expression (119) devenait une fonction symétrique des racines de chacune des équations (118), elle aurait pour valeur une quantité entière ou rationnelle U, et les formules (121), (124) se réduiraient, la première à

$$u - \mathrm{U} = 0, \tag{125}$$

la seconde à

$$u - \mathrm{U} \equiv 0 \pmod{p}. \tag{126}$$

Alors, en écrivant F au lieu de Φ, on conclurait du théorème XVII que l'équation

$$\mathrm{F}(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_m; \eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_{m'}; \zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_{m''}; \ldots) = \mathrm{U} \tag{127}$$

entraine l'équivalence

$$\mathrm{F}(x_1, x_2, \ldots, x_m; y_1, y_2, \ldots, y_{m'}; z_1, z_2, \ldots, z_{m''}; \ldots) \equiv \mathrm{U} \pmod{p}. \tag{128}$$

Dans le cas particulier où les équations (118) se réduisent à une seule, la formule (128) se confond avec l'équivalence (87).

Nous remarquerons, en terminant cet article, que le théorème III fournit un moyen facile de résoudre l'équivalence binôme du premier degré

$$kx \equiv h \pmod{n}, \tag{129}$$

ou, ce qui revient au même, de calculer la valeur de x déterminée par la formule

$$x \equiv \frac{h}{k} \pmod{n}, \tag{130}$$

n étant un nombre entier quelconque, et h, k désignant deux quantités entières, dont la seconde ne soit pas multiple de n. En effet, nommons $a, b, c, \ldots$ les facteurs premiers de n, en sorte qu'on ait

$$n = a^\alpha b^\beta c^\gamma \ldots.$$

En vertu du théorème III, les binômes

$$1 - k^{a-1}, \quad 1 - k^{b-1}, \quad 1 - k^{c-1}, \quad \ldots$$

seront divisibles, le premier par a, le deuxième par b, le troisième par $c, \ldots$; par conséquent, le produit

$$(1 - k^{a-1})^\alpha (1 - k^{b-1})^\beta (1 - k^{c-1})^\gamma \ldots$$

sera divisible par $n = a^\alpha b^\beta c^\gamma \ldots$. Donc, si l'on fait, pour abréger,

$$(1 - k^{a-1})^\alpha (1 - k^{b-1})^\beta (1 - k^{c-1})^\gamma \ldots = 1 - k\mathrm{K}, \tag{131}$$

on aura

$$1 - k\mathrm{K} \equiv 0 \pmod{n} \tag{132}$$

ou

$$\mathrm{K} \equiv \frac{1}{k} \pmod{n} \tag{133}$$

et, par suite,

$$x \equiv k\mathrm{K} \pmod{n}. \tag{134}$$

Or, la quantité K, que détermine la formule (131), étant évidemment une quantité entière, la valeur kK de x sera entière elle-même et fournira la solution de l'équivalence (129). Cette remarque est due à M. Binet. Lorsque le nombre n se trouve réduit à un nombre premier p, l'équation (131) donne simplement

$$\mathrm{K} \equiv k^{p-2} \pmod{p}. \tag{135}$$

Donc alors on vérifie l'équivalence

$$kx \equiv h \pmod{p} \tag{136}$$

en prenant

$$x \equiv hk^{p-2} \pmod{p}. \tag{137}$$

SUR LA

RÉSOLUTION DES ÉQUIVALENCES

DONT

LES MODULES SE RÉDUISENT A DES NOMBRES PREMIERS.

§ I. — *Considérations générales.*

Soit p un nombre premier quelconque, et considérons l'équivalence

$$(1) \qquad a_0 x_m + a_1 x^{m-1} + a_2 x^{m-2} + \ldots + a_{m-1} x + a_m \equiv 0 \pmod{p},$$

dans laquelle m désigne un nombre entier, et a_0, a_1, a_2, ..., a_{m-1}, a_m des quantités entières, ou même des quantités rationnelles qui aient pour valeurs numériques des fractions dont les dénominateurs ne soient pas des multiples de p. Il est clair : 1° qu'en multipliant la formule (1) par le produit de ces dénominateurs, on réduira les coefficients des diverses puissances de x à des quantités entières; 2° qu'après cette réduction on pourra supprimer tous les termes dans lesquels les coefficients seraient divisibles par p. On obtiendra ainsi une nouvelle équivalence d'un degré égal ou inférieur à m, dans laquelle tous les coefficients seront entiers; et si, dans cette nouvelle équivalence, tous les termes étaient divisibles par x ou par une puissance entière de x, la division du premier membre par cette puissance ne changerait ni le nombre ni les valeurs des racines distinctes et non divisibles par p. On saura donc déterminer ces racines dans tous les cas possibles, si l'on parvient à résoudre l'équivalence (1), dans le cas où a_0, a_1, a_2, ..., a_{m-1}, a_m représentent des quantités entières dont la première et la dernière ne sont pas divisibles par p. D'ailleurs, si, dans le

cas dont il s'agit, on nomme A_1, A_2, ..., A_{m-1}, A_m des quantités entières déterminées par les formules

$$(2) \qquad \frac{a_1}{a_0} \equiv A_1, \quad \frac{a_2}{a_0} \equiv A_2, \quad \ldots, \quad \frac{a_{m-1}}{a_0} \equiv A_{m-1}, \quad \frac{a_m}{a_0} \equiv A_m \pmod{p},$$

on pourra réduire l'équivalence (1) à la suivante

$$(3) \qquad x^m + A_1 x^{m-1} + A_2 x^{m-2} + \ldots + A_{m-1} x + A_m \equiv 0 \pmod{p},$$

A_m n'étant pas divisible par p. Enfin, comme on a, pour toute valeur entière de x non divisible par p,

$$(4) \qquad x^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$$

et, par conséquent,

$$(5) \qquad x^{k(p-1)} \equiv 1,$$

k étant un nombre entier quelconque, on pourra évidemment, dans l'équivalence (3), substituer, à ceux des exposants m, $m-1$, ... qui seraient supérieurs à $p-2$, les restes de leur division par $p-1$. Donc on peut, dans la formule (3), supposer le degré m inférieur à $p-1$.

Concevons maintenant que, les quantités a_0, a_1, ..., a_{m-1}, a_m étant entières, et le nombre m inférieur à $p-1$, ou seulement à p, l'on fasse, pour abréger,

$$(6) \qquad a_0 x^m + a_1 x^{m-1} + a_2 x^{m-2} + \ldots + a_{m-1} x + a_m = f(x).$$

L'équivalence (1) pourra s'écrire comme il suit

$$(7) \qquad f(x) \equiv 0 \pmod{p},$$

et, si l'on désigne par r une racine quelconque de cette équivalence, on aura identiquement

$$(8) \qquad f(x) = f(r) + (x-r) f'(r) + (x-r)^2 \frac{f''(r)}{1.2} + \ldots + (x-r)^m \frac{f^{(m)}(r)}{1.2.3 \ldots m}.$$

D'ailleurs $F(x)$ désignant une nouvelle fonction entière de x à coefficients entiers, nous dirons que l'équivalence (7) peut être présentée

sous la forme

$$F(x) \equiv 0 \pmod{p}, \tag{9}$$

si l'on a, quel que soit x,

$$f(x) \equiv F(x) \pmod{p}.$$

Cela posé, s'il arrive que la quantité r soit une racine, non seulement de l'équivalence (7), mais encore de chacune des suivantes

$$f'(x) \equiv 0, \quad f''(x) \equiv 0, \quad \ldots, \quad f^{(i-1)}(x) \equiv 0 \pmod{p}, \tag{10}$$

en sorte qu'on ait tout à la fois

$$f(r) \equiv 0 \pmod{p} \tag{11}$$

et

$$f'(r) \equiv 0, \quad f''(r) \equiv 0, \quad \ldots, \quad f^{(i-1)}(r) \equiv 0 \pmod{p}, \tag{12}$$

la lettre i désignant un nombre entier, l'équation (8) donnera, pour une valeur quelconque de x,

$$f(x) \equiv (x-r)^i \left[\frac{f^{(i)}(r)}{1.2.3\ldots i} + (x-r)\frac{f^{(i+1)}(r)}{1.2.3\ldots i(i+1)} + \ldots + (x-r)^{m-i}\frac{f^{(m)}(r)}{1.2.3\ldots m} \right] \pmod{p}$$

ou, ce qui revient au même,

$$f(x) \equiv (x-r)^i \varphi(x) \pmod{p}, \tag{13}$$

$\varphi(x)$ désignant une fonction entière, à coefficients entiers (1), et du degré $m-i$, déterminée par la formule

$$\varphi(x) \equiv \frac{f^{(i)}(r)}{1.2.3\ldots i} + (x-r)\frac{f^{(i+1)}(r)}{1.2.3\ldots i(i+1)} + \ldots + (x-r)^{m-i}\frac{f^{(m)}(r)}{1.2.3\ldots m}. \tag{14}$$

(1) Il est aisé de reconnaître que les coefficients des diverses puissances de $x-r$, dans le second membre de l'équation (8), savoir

$$f(r), \quad \frac{f'(r)}{1}, \quad \frac{f''(r)}{1.2}, \quad \ldots, \quad \frac{f^{(m)}(r)}{1.2.3\ldots m} = a_m,$$

se réduisent toujours à des quantités entières, et que ces quantités sont divisibles par p, quand les fractions qui les représentent offrent des numérateurs divisibles par p.

Par conséquent, on pourra présenter l'équivalence (7) sous la forme

$$(x-r)^i \varphi(x) \equiv 0 \pmod{p} \tag{15}$$

et considérer cette équivalence comme offrant un nombre i de racines égales à r. Les autres racines devant nécessairement vérifier la formule

$$\varphi(x) \equiv 0 \pmod{p}, \tag{16}$$

dont le degré est $m-i$, il est clair que, dans l'hypothèse admise, l'équivalence (7) admettra au plus $m-i+1$ racines distinctes dont l'une sera la quantité r.

Réciproquement, si l'équivalence (7) peut être présentée sous la forme

$$(x-r)^i \varphi(x) \equiv 0 \pmod{p}, \tag{15}$$

$\varphi(x)$ désignant une fonction entière de x, à coefficients entiers et du degré $m-i$, on en conclura que les conditions (12) sont remplies. Alors, en effet, on aura identiquement

$$f(x) \equiv (x-r)^i \varphi(x) \pmod{p} \tag{13}$$

ou, ce qui revient au même,

$$f(x) = (x-r)^i \varphi(x) + \chi(x), \tag{17}$$

$\chi(x)$ étant une fonction entière et à coefficients entiers, qui devra vérifier, quel que soit x, la formule

$$\chi(x) \equiv 0 \pmod{p}. \tag{18}$$

D'ailleurs, la fonction $\chi(x)$ étant, ainsi que les fonctions $f(x)$ et $(x-r)^i \varphi(x)$, d'un degré m inférieur à p, la formule (18) ne pourra subsister, quel que soit x, à moins que les coefficients des diverses puissances de x dans le premier membre ne soient divisibles par p. Car, dans le cas contraire, cette formule offrirait l'exemple d'une équivalence qui admettrait plus de racines distinctes que son degré ne renferme d'unités. On aura donc nécessairement

$$\chi(x) = p\psi(x), \tag{19}$$

$\chi(x)$ désignant une fonction entière de x à coefficients entiers, et la formule (17) donnera

$$f(x) = (x-r)^i \varphi(x) + p\psi(x). \tag{20}$$

Or, en différentiant cette dernière équation i fois de suite par rapport à x, et posant après les différentiations $x = r$, on retrouvera précisément les formules (12). On peut donc énoncer la proposition suivante :

THÉORÈME I. — *Pour que l'équivalence* (7) *d'un degré m inférieur à p puisse être présentée sous la forme* (15), *i désignant un nombre entier et* $\varphi(x)$ *une fonction entière, à coefficients entiers, du degré* $m - i$, *il est nécessaire et il suffit que les conditions* (11) *et* (12) *soient vérifiées.*

Scolie. — Le théorème I ne subsisterait plus si le degré m du polynôme $f(x)$ devenait supérieur ou même égal à p. Supposons en effet que, le nombre m étant égal à p, la lettre r désignant une quantité entière, la lettre i un nombre supérieur à l'unité, et l'expression $\varphi(x)$ une fonction entière de x du degré $p - i$, l'on prenne

$$f(x) = (x-r)^i \varphi(x) + x^p - x. \tag{21}$$

Comme on aura, quel que soit x (en vertu du théorème de Fermat),

$$x^p - x \equiv 0 \pmod{p} \tag{22}$$

et, par suite,

$$f(x) \equiv (x-r)^i \varphi(x),$$

l'équivalence (7) pourra être présentée sous la forme (15), tandis que la valeur de $f'(r)$ tirée de la formule (21) sera

$$f'(r) = pr^{p-1} - 1 \equiv -1 \pmod{p}.$$

Nous avons remarqué ci-dessus que, dans le cas où l'équivalence (7), d'un degré m inférieur à p, admet i racines égales à r, le nombre des racines distinctes de cette équivalence ne peut surpasser $m - i + 1 < m$. Ce cas n'est pas le seul dans lequel le nombre des racines distinctes de l'équivalence (7) devienne inférieur au degré m, et il peut même

arriver que cette équivalence soit complètement insoluble. Ainsi, en particulier, puisque toute valeur entière de x, non divisible par 3, vérifie la formule

$$x^2 \equiv 1 \pmod{3},$$

il est clair que

$$x^2 \equiv 2 \pmod{3}$$

n'a point de racines.

Nous allons maintenant rechercher le nombre des racines distinctes de l'équivalence (7), nombre qui, comme on vient de le voir, peut devenir inférieur à m, ou même se réduire à zéro; et, pour y parvenir, nous commencerons par résoudre le problème suivant :

PROBLÈME. — *Étant données deux fonctions entières et à coefficients entiers*

$$f(x), \quad f_1(x),$$

dont les degrés m et $l \leq m$ *ne surpassent pas le nombre premier p, et le nombre des racines distinctes de l'équivalence*

$$f(x) \equiv 0 \pmod{p} \tag{7}$$

étant supposé précisément égal au degré m de cette équivalence, on demande une nouvelle fonction entière et à coefficients entiers $\varphi(x)$ *tellement choisie que le degré de cette fonction coïncide avec le nombre des valeurs distinctes de x propres à vérifier simultanément les deux formules*

$$f(x) \equiv 0, \quad f_1(x) \equiv 0 \pmod{p}, \tag{23}$$

et que chacune de ces valeurs vérifie encore l'équivalence

$$\varphi(x) \equiv 0 \pmod{p}. \tag{24}$$

Solution. — Si, dans chacune des fonctions $f(x)$, $f_1(x)$, le coefficient de la plus haute puissance de x ne se réduisait pas à l'unité, on pourrait, en supposant ce coefficient divisible par p, supprimer le terme qui le contient, ou, dans le cas contraire, substituer aux coefficients des différents termes, à l'aide de formules semblables aux formules (2), de nouveaux coefficients dont le premier serait l'unité,

sans altérer ni le nombre ni les valeurs des racines distinctes de chacune des équivalences (23). Par conséquent, dans le théorème ci-dessus énoncé, on pourra toujours supposer les fonctions $f(x)$, $f_1(x)$ réduites à la forme

$$f(x) = x^m + A_1 x^{m-1} + A_2 x^{m-2} + \ldots + A_{m-1} x + A_m, \tag{25}$$

$$f_1(x) = x^l + B_1 x^{l-1} + B_2 x^{l-2} + \ldots + B_{l-1} x + B_l, \tag{26}$$

$A_1, A_2, \ldots, A_{m-1}, A_m$; $B_1, B_2, \ldots, B_{l-1}, B_l$ désignant des quantités entières. Soient maintenant Q le quotient et R le reste de la division du polynôme $f(x)$ par le polynôme $f_1(x)$. Q et R seront des fonctions entières et à coefficients entiers, l'une du degré $m - l$, l'autre d'un degré inférieur ou tout au plus égal à $l - 1$, en sorte qu'on trouvera

$$R = c_0 x^{l-1} + c_1 x^{l-2} + \ldots + c_{l-2} x + c_{l-1}, \tag{27}$$

$c_0, c_1, \ldots, c_{l-2}, c_{l-1}$ désignant des quantités entières. De plus, comme on aura généralement

$$f(x) = Q f_1(x) + R, \tag{28}$$

on en conclura

$$f(x) \equiv Q f_1(x) \pmod{p} \tag{29}$$

si les quantités

$$c_0, \quad c_1, \quad \ldots, \quad c_{l-2}, \quad c_{l-1}$$

sont toutes divisibles par p, c'est-à-dire si elles vérifient les conditions

$$c_0 \equiv 0, \quad c_1 \equiv 0, \quad \ldots, \quad c_{l-2} \equiv 0, \quad c_{l-1} \equiv 0 \pmod{p}. \tag{30}$$

Dans ce cas particulier, l'équivalence (7) du degré m pourra être présentée sous la forme

$$Q f_1(x) \equiv 0 \pmod{p}, \tag{31}$$

et, comme le nombre de ses racines distinctes sera précisément égal au nombre m, on conclura du théorème II de l'article précédent que l'équivalence

$$f_1(x) \equiv 0 \pmod{p} \tag{32}$$

admet à son tour autant de racines distinctes que son degré l renferme d'unités. Alors aussi toutes les racines de la formule (32) vérifieront en même temps la formule (31) ou (7), et, par conséquent, on pourra prendre

$$\varphi(x) = f_1(x). \tag{33}$$

Si les conditions (30) ne sont pas toutes remplies, alors, en désignant par c_{l-k-1} le premier des coefficients

$$c_0, \quad c_1, \quad \ldots, \quad c_{l-2}, \quad c_{l-1}$$

qui ne sera pas multiple de p, et par $C_1, C_2, \ldots, C_{k-1}, C_k$ des quantités entières déterminées à l'aide des formules

$$\frac{c_{l-k}}{c_{l-k-1}} \equiv C_1, \quad \frac{c_{l-k+1}}{c_{l-k-1}} \equiv C_2, \quad \ldots, \quad \frac{c_{l-1}}{c_{l-k-1}} \equiv C_k \pmod{p}, \tag{34}$$

on trouvera

$$R \equiv c_{l-k-1}(x^k + C_1 x^{k-1} + C_2 x^{k-2} + \ldots + C_{k-1} x + C_k) \pmod{p}; \tag{35}$$

puis, en faisant, pour abréger,

$$f_2(x) = x^k + C_1 x^{k-1} + C_2 x^{k-2} + \ldots + C_{k-1} x + C_k, \tag{36}$$

on tirera des formules (28) et (35)

$$f(x) \equiv Q f_1(x) + c_{l-k-1} f_2(x) \pmod{p}. \tag{37}$$

Or il résulte évidemment de la formule (37) que toute valeur de x, propre à vérifier simultanément les équivalences (23), vérifiera encore la suivante :

$$f_2(x) \equiv 0 \pmod{p}. \tag{38}$$

Soient maintenant Q_1 le quotient et R_1 le reste de la division du polynôme $f_1(x)$ par le polynôme $f_2(x)$. Q_1 et R_1 seront des fonctions entières, l'une du degré $l - k$, l'autre d'un degré inférieur ou tout au plus égal à $k - 1$, en sorte qu'on trouvera

$$R_1 = d_0 x^{k-1} + d_1 x^{k-2} + \ldots + d_{k-2} x + d_{k-1}, \tag{39}$$

$d_0, d_1, d_2, \ldots, d_{k-2}, d_{k-1}$ désignant des quantités entières. De plus, comme on aura généralement

$$f_1(x) = Q_1 f_2(x) + R_1, \tag{40}$$

on en conclura

$$f_1(x) \equiv Q_1 f_2(x) \pmod{p}, \tag{41}$$

si les quantités

$$d_0, \quad d_1, \quad \ldots, \quad d_{k-2}, \quad d_{k-1}$$

sont toutes divisibles par p, c'est-à-dire si elles vérifient les conditions

$$d_0 \equiv 0, \quad d_1 \equiv 0, \quad \ldots, \quad d_{k-2} \equiv 0, \quad d_{k-1} \equiv 0 \pmod{p}. \tag{42}$$

Dans ce cas, on tire de la formule (37)

$$f(x) \equiv (QQ_1 + c_{l-k-1}) f_2(x). \tag{43}$$

Par conséquent, l'équivalence (7) pourra être présentée sous la forme

$$(QQ_1 + c_{l-k-1}) f_2(x) \equiv 0 \pmod{p}; \tag{44}$$

et, comme elle offre, par hypothèse, autant de racines distinctes que son degré m renferme d'unités, l'équivalence

$$f_2(x) \equiv 0 \pmod{p} \tag{38}$$

jouira encore de la même propriété (*voir* le théorème II de l'article précédent). D'ailleurs, en vertu des formules (41) et (43), toute valeur de x propre à vérifier l'équivalence (38) sera évidemment une racine commune aux deux équivalences (23). Donc, si les conditions (42) sont remplies, on pourra prendre

$$\varphi(x) = f_2(x). \tag{45}$$

Si les conditions (42) ne sont pas toutes remplies, alors, en désignant par d_{k-h-1} le premier des coefficients

$$d_0, \quad d_1, \quad \ldots, \quad d_{k-2}, \quad d_{k-1}$$

qui ne sera pas multiple de p, et par $D_1, D_2, \ldots, D_{h-1}, D_h$ des quantités entières déterminées à l'aide des formules

$$\frac{d_{k-h}}{d_{k-h-1}} \equiv D_1, \quad \frac{d_{k-h+1}}{d_{k-h-1}} \equiv D_2, \quad \ldots, \quad \frac{d_{k-1}}{d_{k-h-1}} \equiv D_h \pmod{p}, \tag{46}$$

on trouvera

$$R_1 \equiv d_{k-h-1}(x^h + D_1 x^{h-1} + D_2 x^{h-2} + \ldots + D_{h-1} x + D_h) \pmod{p}; \tag{47}$$

puis, en faisant, pour abréger,

$$f_3(x) = x^h + D_1 x^{h-1} + D_2 x^{h-2} + \ldots + D_{h-1} x + D_h, \tag{48}$$

on tirera des formules (40) et (47)

$$f_1(x) \equiv Q_1 f_2(x) + d_{k-h-1} f_3(x) \pmod{p}. \tag{49}$$

Or il résulte évidemment de la formule (49) que toute valeur entière de x propre à vérifier simultanément les formules (32) et (38) vérifiera encore la suivante :

$$f_3(x) \equiv 0 \pmod{p}. \tag{50}$$

En continuant de la même manière, on déduira successivement des fonctions données $f(x)$, $f_1(x)$ une suite de nouvelles fonctions

$$f_3(x), \quad f_4(x), \quad \ldots, \tag{51}$$

dont la dernière sera précisément la valeur cherchée de $\varphi(x)$. Pour obtenir ces nouvelles fonctions, il suffit d'opérer comme si l'on se proposait de trouver le plus grand commun diviseur algébrique des deux polynômes $f(x)$, $f_1(x)$, de supprimer dans le reste de chaque division tous les termes dont les coefficients sont des multiples de p, de réduire ensuite le coefficient de la plus haute puissance de x à l'unité, et les autres coefficients à des nombres entiers à l'aide de formules semblables aux équivalences (34), (46), etc., enfin de s'arrêter au moment où cette réduction ne peut plus s'effectuer, c'est-à-dire au moment où l'on obtient un reste dont tous les coefficients sont des multiples de p. Si l'on désigne par R_{l-1} ce dernier reste, ce sera le reste précédent

R_{i-2}, ou plutôt la fonction $f_i(x)$, qui fournira la valeur cherchée de $\varphi(x)$, en sorte qu'on pourra prendre

$$\varphi(x) = f_i(x). \tag{52}$$

Si tous les restes successivement obtenus offraient des coefficients non divisibles par p, en sorte que le dernier reste, représenté par une quantité constante, fût lui-même non divisible par p, on pourrait affirmer que les équations (23) n'ont pas de racines communes.

Le problème ci-dessus énoncé étant ainsi résolu, il sera facile de trouver, pour l'équivalence (7) dont le degré, par hypothèse, est inférieur à p, le nombre des racines distinctes et non divisibles par p. En effet, puisque, en vertu du théorème de Fermat, tous les termes de la suite

$$1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ p-1 \tag{53}$$

vérifieront la formule

$$x^{p-1} - 1 \equiv 0 \pmod{p}, \tag{54}$$

les racines dont il s'agit se confondront évidemment avec les racines communes aux deux équivalences (7) et (54). Cela posé, il suffira d'opérer comme dans le problème précédent, en substituant aux deux fonctions $f(x)$, $f_1(x)$ les deux fonctions $x^{p-1} - 1$, $f(x)$, pour obtenir une équivalence nouvelle

$$\varphi(x) \equiv 0 \pmod{p}, \tag{55}$$

qui sera vérifiée par ces mêmes racines et seulement par elles. Le degré de cette nouvelle équivalence représentera donc le nombre des racines de la formule (7) distinctes et non divisibles par p.

Si à l'équivalence (54) on substituait l'équivalence (22), la formule (55), obtenue par la méthode que nous venons d'indiquer, fournirait les racines distinctes de la formule (7), dans le cas même où l'on supposerait le premier membre de cette formule divisible par x

ou par une puissance de x, c'est-à-dire dans le cas même où cette formule admettrait des racines divisibles par p.

Si l'équivalence (7) n'admettait point de racines, les équivalences (7) et (22) n'auraient point de racines communes, et l'on en serait averti par le calcul même, conformément à la remarque que nous avons faite ci-dessus.

Si la formule (7) n'admet qu'une seule racine distincte de zéro, l'équivalence (55), déduite de la considération des formules (7) et (54), sera du premier degré seulement, et fera connaître la racine dont il s'agit.

Pour montrer une application des principes que nous venons d'établir, cherchons combien l'équivalence

$$x^3 - x + 1 \equiv 0 \pmod{7} \tag{56}$$

admet de racines distinctes, ou, ce qui revient au même, combien il y a de racines communes entre cette équivalence et la suivante :

$$x^6 - 1 \equiv 0 \pmod{7}. \tag{57}$$

On trouvera, en effectuant la division de $x^6 - 1$ par $x^3 - x + 1$,

$$x^6 - 1 \equiv (x^3 - x + 1)(x^3 + x - 1) + x^2 - 2x;$$

puis, en effectuant la division de $x^3 - x + 1$ par $x^2 - 2x$,

$$\begin{aligned} x^3 - x + 1 &\equiv (x^3 - 2x)(x + 2) + 3x + 1 \\ &\equiv (x^3 - 2x)(x + 2) + 3(x + \tfrac{1}{3}) \end{aligned}$$

ou, ce qui revient au même,

$$x^3 - x + 1 \equiv (x^2 - 2x)(x + 2) + 3(x - 2).$$

Enfin $x^2 - 2x$ sera exactement divisible par $x - 2$, ou, en d'autres termes, le reste de la division de $x^2 - 2x$ par $x - 2$ sera équivalent à zéro, puisqu'on aura

$$x^2 - 2x = (x - 2)x.$$

Donc la formule (56) n'admettra qu'une seule racine distincte de zéro,

et fournie par l'équivalence $x - 2 \equiv 0 \pmod 7$ ou

$$x \equiv 2 \pmod 7, \tag{58}$$

ce qui est exact.

Dans l'exemple que nous venons de choisir, on pourrait simplifier le calcul en observant que le polynôme $x^2 - 2x$ est évidemment le produit des deux facteurs x, $x - 2$, et que le second de ces deux facteurs est le seul qui divise le polynôme

$$x^3 - x + 1 \equiv (x - 2)(x^2 + 2x + 3).$$

On doit immédiatement en conclure que la formule (57) a pour racine unique le nombre 2.

Cherchons encore combien l'équivalence

$$x^3 + x + 1 \equiv 0 \pmod{11} \tag{59}$$

admet de racines distinctes, ou, ce qui revient au même, combien il y a de racines communes entre cette équivalence et la suivante :

$$x^{10} - 1 \equiv 0 \pmod{11}. \tag{60}$$

Dans ce cas, on trouvera successivement

$$\begin{aligned} x^{10} - 1 &\equiv (x^3 + x + 1)(x^7 - x^5 - x^4 + x^3 + 2x^2 - 3) - 2x^2 + 3x + 2 \\ &\equiv (x^3 + x + 1)(x^7 - x^5 - x^4 + x^3 + 2x^2 - 3) - 2(x^2 + 4x - 1), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x^3 + x + 1 &\equiv (x^2 + 4x - 1)(x - 4) + 18x - 3 \\ &\equiv (x^2 + 4x - 1)(x - 4) + 18(x - 2), \end{aligned}$$

$$x^2 + 4x - 1 \equiv (x - 2)(x + 6).$$

Donc la formule (59) aura encore pour racine unique le nombre 2.

La méthode exposée dans ce paragraphe ne diffère pas de celle que M. Libri a donnée dans le Tome I de ses *Mémoires*. Lorsqu'on applique cette méthode à la recherche de l'équivalence de condition qui doit être vérifiée pour que deux équivalences aient au moins une racine commune, on se trouve précisément ramené à la formule (16) de la page 164 du Volume I des *Exercices* (1).

(1) *Œuvres de Cauchy*, S. II, T. VI, p. 207.

§ II. — *Sur la résolution des équivalences binômes.*

Supposons que la formule (7) du paragraphe précédent se réduise à une équivalence binôme ou de la forme

$$x^m + K \equiv 0 \pmod p,$$

K désignant une quantité entière non divisible par p.

Si l'on écrit $-A$ au lieu de $+K$, cette équivalence deviendra

$$x^m - A \equiv 0 \pmod p$$

ou, ce qui revient au même,

$$x^m \equiv A \pmod p. \tag{1}$$

Soit d'ailleurs r une racine primitive de l'équivalence

$$x^{p-1} \equiv 1 \pmod p. \tag{2}$$

La quantité $A \equiv -K$, n'étant pas divisible par p, sera équivalente, suivant le module p, à l'un des termes de la suite

$$1, \quad r, \quad r^2, \quad \ldots, \quad r^{p-2} \tag{3}$$

(*voir* le théorème VII de l'article précédent, scolies I et II), en sorte qu'on pourra supposer

$$A \equiv r^i \pmod p, \tag{4}$$

l'exposant i étant l'un des nombres

$$0, \quad 1, \quad 2, \quad \ldots, \quad p - 2. \tag{5}$$

Il y a plus; si, deux de ces nombres étant représentés par i et par j, l'on suppose

$$y \equiv i, \qquad z \equiv j \pmod{p-1}$$

ou, ce qui revient au même,

$$y = i + (p-1)v, \qquad z = j + (p-1)w,$$

v, w désignant des nombres entiers quelconques, on trouvera

$$r^y = r^{(p-1)v} r^i \equiv r^i, \qquad r^z = r^{(p-1)w} r^j \equiv r^j \qquad (\mathrm{mod.}\, p-1);$$

et comme, i, j étant inférieurs à $p-1$, les deux puissances r^i, r^j ne pourront devenir équivalentes suivant le module p qu'autant que l'on aura $i = j$, il est clair que la formule

$$r^y \equiv r^z \qquad (\mathrm{mod.}\, p) \tag{6}$$

entrainera toujours la suivante :

$$y \equiv z \qquad (\mathrm{mod.}\, p-1). \tag{7}$$

Cela posé, comme l'équivalence (1) n'admettra point de racines divisibles par p, on pourra supposer encore

$$x \equiv r^u \qquad (\mathrm{mod.}\, p), \tag{8}$$

puis on tirera des formules (1), (4), (8)

$$r^{mu} \equiv r^i \qquad (\mathrm{mod.}\, p) \tag{9}$$

et, par conséquent,

$$mu \equiv i \qquad (\mathrm{mod.}\, p-1) \tag{10}$$

ou, ce qui revient au même,

$$mu = i + (p-1)v, \tag{11}$$

v désignant un nombre entier. Donc, pour que l'équivalence (1) soit résoluble, il sera nécessaire et il suffira qu'on puisse satisfaire par des valeurs entières de u et de v à l'équation (11); par conséquent, il sera nécessaire et il suffira que le plus grand commun diviseur de m et de $p-1$ divise i. Soit n ce plus grand commun diviseur. La formule

$$r^{\frac{i}{n}(p-1)} \equiv 1 \qquad (\mathrm{mod.}\, p), \tag{12}$$

qui peut être remplacée par la suivante

$$\mathrm{A}^{\frac{p-1}{n}} \equiv 1 \qquad (\mathrm{mod.}\, p), \tag{13}$$

sera ou ne sera pas vérifiée, suivant que i sera divisible ou non divisible par n. Donc la formule (13) exprimera la condition nécessaire et suffisante pour que l'équivalence (1) puisse être résolue.

Supposons maintenant que la condition (13) se trouve remplie, et désignons par υ une valeur particulière de l'inconnue u que détermine la formule (10). La valeur générale de la même inconnue sera

$$u = \upsilon \pm \frac{p-1}{n} h, \tag{14}$$

h désignant un nombre entier quelconque, et ce nombre pourra être choisi de manière que u soit positif, mais inférieur à $\frac{p-1}{n}$. Cela posé, concevons que υ représente la plus petite valeur de u. Les nombres

$$\upsilon, \quad \upsilon + \frac{p-1}{n}, \quad \upsilon + 2\frac{p-1}{n}, \quad \ldots, \quad \upsilon + (n-1)\frac{p-1}{n} \tag{15}$$

seront les valeurs de u inférieures à $p-1$, et la formule (1) admettra les racines

$$r^{\upsilon}, \quad r^{\upsilon + \frac{p-1}{n}}, \quad r^{\upsilon + 2\frac{p-1}{n}}, \quad \ldots, \quad r^{\upsilon + (n-1)\frac{p-1}{n}}, \tag{16}$$

qui seront toutes distinctes les unes des autres. Donc le nombre de ces racines distinctes sera précisément n.

Lorsqu'on suppose $m = 2$ et $p > 2$, on trouve $n = 2$, attendu que $p-1$ est nécessairement pair. Alors la condition (13) se réduit à

$$\mathrm{A}^{\frac{p-1}{2}} \equiv 1 \qquad (\mathrm{mod.}\, p). \tag{17}$$

D'ailleurs, p étant un nombre premier impair et A un nombre entier non divisible par p, on aura généralement

$$\mathrm{A}^{p-1} \equiv 1 \qquad (\mathrm{mod.}\, p) \tag{18}$$

ou, ce qui revient au même,

$$\left(\mathrm{A}^{\frac{p-1}{2}} - 1\right)\left(\mathrm{A}^{\frac{p-1}{2}} + 1\right) \equiv 0 \qquad (\mathrm{mod.}\, p)$$

et, par conséquent,

$$A^{\frac{p-1}{2}} \equiv 1 \pmod{p} \tag{17}$$

ou

$$A^{\frac{p-1}{2}} \equiv -1 \pmod{p}. \tag{19}$$

Donc l'équivalence

$$x^2 \equiv A \pmod{p} \tag{20}$$

aura deux racines distinctes ou n'en aura aucune, suivant que l'expression

$$A^{\frac{p-1}{2}} \tag{21}$$

sera équivalente, suivant le module p, à $+1$ ou à -1.

Si l'on suppose $m = 3$, le plus grand commun diviseur n des nombres m et $p-1$ sera 3 ou 1, suivant que p, divisé par 3, donnera pour reste 1 ou -1. Dans le premier cas, la condition (13) deviendra

$$A^{\frac{p-1}{3}} \equiv 1 \pmod{p}. \tag{22}$$

Dans le second cas, cette condition, réduite à la formule (18), sera toujours vérifiée. Cela posé, on conclura des principes ci-dessus établis que l'équivalence

$$x^3 \equiv A \pmod{p} \tag{23}$$

admet toujours une racine, mais une seule, lorsque $p-1$ n'est pas divisible par 3. Dans le cas contraire, l'équivalence (23) admettra trois racines distinctes ou n'en admettra aucune, suivant que la condition (22) sera ou ne sera pas satisfaite.

Soit encore $m = 4$. On trouvera $n = 4$ ou $n = 2$, suivant que $p-1$ sera divisible par 4 ou simplement par 2. Donc, si $p-1$ est divisible par 4, l'équivalence

$$x^4 \equiv A \pmod{p} \tag{24}$$

admettra deux racines ou n'en admettra aucune, suivant que la condition

$$A^{\frac{p-1}{4}} \equiv 1 \pmod{p} \tag{25}$$

sera ou ne sera pas remplie. Mais, si $p-1$ est divisible simplement par 2, l'équivalence (24) admettra deux racines distinctes ou n'en admettra aucune, suivant que la valeur de A satisfera ou non à la condition (17), c'est-à-dire suivant que cette valeur vérifiera la formule (17) ou la formule (19).

Soit enfin $m = 6$. On trouvera $n = 6$ ou $n = 2$, suivant que $p-1$ sera divisible ou non divisible par 3. Dans le premier cas, la condition (13) donnera

$$A^{\frac{p-1}{6}} \equiv 1 \pmod{p}. \tag{26}$$

Dans le second cas, cette condition se trouvera réduite à la formule (17). Donc, en vertu des principes ci-dessus établis, si $p-1$ n'est pas divisible par 3, l'équivalence

$$x^6 \equiv A \pmod{p} \tag{27}$$

admettra deux racines distinctes ou n'en admettra aucune, suivant que la valeur de A vérifiera la formule (17) ou la formule (19). Mais, si $p-1$ devient divisible par 3, l'équivalence (27) admettra six racines distinctes ou n'en admettra aucune, suivant que la condition (26) sera ou ne sera pas vérifiée.

Généralement, si l'on suppose $m = n$, n étant un diviseur de $p-1$, l'équivalence (1), réduite à la forme

$$x^n \equiv A \pmod{p}, \tag{28}$$

admettra n racines distinctes, respectivement équivalentes aux quantités (16), ou n'en admettra aucune, suivant que la condition (13) sera ou ne sera pas vérifiée.

Si l'on suppose $A = 1$ ou, ce qui revient au même, $i = 0$, on trouvera $\upsilon = 0$. Dans ce cas, la condition (13) sera toujours vérifiée, et

l'équivalence (1), réduite à la forme

$$x^m \equiv 1 \pmod{p}, \tag{29}$$

n'admettra point d'autre racine que l'unité, si m est premier à $p-1$. Mais, si le contraire arrive, en nommant toujours n le plus grand commun diviseur de m et de $p-1$, on obtiendra, pour racines de l'équivalence (29), les différents termes de la suite

$$r^0 = 1, \quad r^{\frac{p-1}{n}}, \quad r^{2\frac{p-1}{n}}, \quad \ldots, \quad r^{(n-1)\frac{p-1}{n}}, \tag{30}$$

qui seront en même temps racines de l'équivalence $x^n \equiv 1 \pmod{p}$. On arriverait directement aux mêmes conclusions en ayant égard au théorème V de l'article précédent.

Si, pour fixer les idées, on prend successivement $m=2$, $m=3$, $m=4$, ... (p étant >2), on reconnaîtra : 1° que l'équivalence

$$x^2 \equiv 1 \pmod{p} \tag{31}$$

admet toujours deux racines distinctes, savoir $+1$ et -1; 2° que l'équivalence

$$x^3 \equiv 1 \pmod{p} \tag{32}$$

admet deux racines distinctes de l'unité, lorsque $p-1$ est divisible par 3, et la seule racine 1 dans le cas contraire; 3° que l'équivalence

$$x^4 \equiv 1 \pmod{p} \tag{33}$$

admet les seules racines $+1$ et -1, lorsque $\frac{p-1}{2}$ est impair, et, de plus, deux autres racines distinctes, lorsque $\frac{p-1}{2}$ est un nombre pair; ....

Il est bon d'observer que, si A diffère de l'unité, il suffira de multiplier par r^v les quantités (30) pour reproduire les diverses racines de la formule (1).

Observons encore que, étant donnée une équivalence complète du second degré

$$a_0 x^2 + a_1 x + a_2 \equiv 0 \pmod{p}, \tag{34}$$

dans laquelle a_0, a_1, a_2 sont des nombres entiers, et p un nombre premier impair qui ne divise point a_0, il suffira de poser

$$x \equiv y - \frac{a_1}{2a_0} \pmod{p}, \tag{35}$$

et de diviser ensuite par a_0 les deux membres de la formule (34), pour la réduire à l'équivalence binôme

$$y^2 - \mathrm{A} \equiv 0 \pmod{p}, \tag{36}$$

A désignant un nombre entier choisi de manière que l'on ait

$$\mathrm{A} \equiv \frac{a_1^2 - 4a_0a_2}{4a_0^2} \pmod{p}. \tag{37}$$

D'ailleurs, l'équivalence (36) admettra deux racines distinctes ou n'en admettra aucune, suivant que la valeur de A vérifiera la condition (17) ou (19). Donc, par suite, l'équivalence (34) admettra deux racines distinctes, si l'on a

$$(a_1^2 - 4a_0a_2)^{\frac{p-1}{2}} \equiv (4a_0^2)^{\frac{p-1}{2}} \pmod{p} \tag{38}$$

ou, ce qui revient au même,

$$(a_1^2 - 4a_0a_2)^{\frac{p-1}{2}} \equiv 1 \pmod{p}, \tag{39}$$

tandis que la même équivalence n'admettra point de racines dans le cas contraire.

Concevons, pour fixer les idées, que l'équivalence (34) coïncide avec la suivante :

$$x^2 + x - 1 \equiv 0 \pmod{11}. \tag{40}$$

La condition (39), ou

$$5^5 \equiv 1 \pmod{11}, \tag{41}$$

sera remplie. Donc l'équivalence (40) admettra deux racines distinctes, qui se confondront nécessairement avec deux des racines de la formule

$$x^{10} - 1 \equiv 0 \pmod{11}.$$

On trouvera effectivement

$$x^{10}-1\equiv(x^2+x-1)(x^8-x^7+2x^6-3x^5+5x^3+3x^2+2x^2+x+1) \pmod{11}.$$

D'ailleurs, il suffira de poser

$$x\equiv y-\tfrac{1}{2}\equiv y+5 \pmod{11}, \tag{42}$$

pour réduire la formule (40) à l'équivalence binôme

$$y^2+29\equiv 0 \pmod{11}$$

ou, ce qui revient au même, à la suivante

$$y^2\equiv -29\equiv 4 \pmod{11}; \tag{43}$$

et, comme on tirera de cette dernière

$$y\equiv\pm 2, \tag{44}$$

la formule (42) donnera

$$x\equiv 5\pm 2. \tag{45}$$

Donc

$$x\equiv 5-2\equiv 3 \quad \text{et} \quad x\equiv 5+2\equiv 7 \pmod{11} \tag{46}$$

seront les deux racines de l'équivalence (40), ce qui est exact.

La méthode par laquelle nous avons déterminé ci-dessus le nombre des racines distinctes d'une équivalence binôme ou d'une équivalence du second degré était déjà connue, et peut se déduire, comme l'a remarqué M. Libri, des principes exposés dans le premier paragraphe. Ainsi, en particulier, si n est un diviseur de $p-1$, en sorte qu'on ait

$$p-1=n\varpi, \tag{47}$$

la division de $x^{p-1}-1$ ou $x^{n\varpi}-1$ par x^n-A donnera pour quotient

$$x^{n(\varpi-1)}+Ax^{n(\varpi-2)}+\ldots+A^{\varpi-2}x^n+A^{\varpi-1},$$

et pour reste $A^\varpi-1$. Donc, en vertu des principes que nous venons de rappeler, l'équivalence (28) admettra n racines réelles ou n'en

admettra aucune, suivant que la condition

$$A^\varpi-1\equiv 0 \pmod{p} \tag{48}$$

sera ou ne sera pas vérifiée. Or la condition (48) ne diffère pas de celle que présente la formule (13).

Ajoutons que, pour ramener la résolution de l'équivalence (1) à la résolution de l'équivalence (10), qui est du premier degré seulement, il suffit de connaître la valeur de i déterminée par la formule (4). On y parviendra sans peine, quel que soit A, si l'on a formé une Table dans laquelle, aux nombres

$$0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ p-2, \tag{5}$$

correspondent les diverses puissances de r dont les degrés sont indiqués par ces mêmes nombres, ou plutôt les restes qu'on obtient en divisant les puissances dont il s'agit par le nombre premier p. On peut placer dans la première colonne de la Table ces restes qui, rangés dans un ordre convenable, seront respectivement égaux aux nombres

$$1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ p-1;$$

puis, en considérant chacun de ces derniers nombres comme une valeur particulière de A, écrire à sa suite la valeur correspondante de i, qui représentera ce qu'on nomme l'*indice* de A, ou d'un nombre équivalent à A, dans le système dont la *base* est r. Cela posé, il est clair que, relativement à un nombre premier p, il existe autant de systèmes d'indices qu'il y a de racines primitives ou de nombres entiers, premiers à p et inférieurs à p. Dans chacun de ces systèmes, les indices jouissent de propriétés analogues à celles des logarithmes. En effet, soient i, j, h les indices de deux nombres entiers A, B et de leur produit AB, en sorte qu'on ait

$$A\equiv r^i, \quad B\equiv r^j, \quad AB\equiv r^h \pmod{p}, \tag{49}$$

r désignant une racine primitive de p. On tirera des équivalences (49)

$$r^h\equiv r^{i+j} \pmod{p} \tag{50}$$

et, par suite [attendu que la formule (6) entraine toujours la formule (7)],

$$h \equiv i + j \pmod{p-1}. \tag{51}$$

Donc, si l'on représente l'indice de A, à l'aide de la lettre caractéristique I, par la notation I(A), on aura

$$\mathrm{I}(\mathrm{AB}) \equiv \mathrm{I}(\mathrm{A}) + \mathrm{I}(\mathrm{B}) \pmod{p-1}. \tag{52}$$

On trouvera de même

$$\mathrm{I}(\mathrm{ABC}) \equiv \mathrm{I}(\mathrm{AB}) + \mathrm{I}(\mathrm{C}) = \mathrm{I}(\mathrm{A}) + \mathrm{I}(\mathrm{B}) + \mathrm{I}(\mathrm{C}) \pmod{p-1}$$

et généralement

$$\mathrm{I}(\mathrm{ABCD}\ldots) \equiv \mathrm{I}(\mathrm{A}) + \mathrm{I}(\mathrm{B}) + \mathrm{I}(\mathrm{C}) + \mathrm{I}(\mathrm{D}) + \ldots \pmod{p-1}, \tag{53}$$

quel que soit le nombre des facteurs A, B, C, D, ... Si, ce nombre étant désigné par m, les facteurs A, B, C, D, ... deviennent équivalents à une même quantité x, la formule (53) donnera

$$\mathrm{I}(x^m) \equiv m\,\mathrm{I}(x) \pmod{p-1}. \tag{54}$$

On peut donc énoncer la proposition suivante :

L'indice du produit de plusieurs nombres est équivalent à la somme de leurs indices, suivant le module $p-1$.

L'indice d'une puissance du degré m est équivalent, suivant le module $p-1$, à l'indice de la racine multiplié par m.

En vertu de la dernière proposition, l'équivalence (1) entrainera la formule

$$m\,\mathrm{I}(x) \equiv \mathrm{I}(\mathrm{A}) \pmod{p-1}, \tag{55}$$

de laquelle on tirera

$$\mathrm{I}(x) \equiv \frac{\mathrm{I}(\mathrm{A})}{m} \pmod{p-1}. \tag{56}$$

L'équivalence (56), dans laquelle $\mathrm{I}(x)$ est précisément la plus petite des valeurs positives de u, propres à vérifier la formule (10), montre

comment, à l'aide d'une Table d'indices, on peut résoudre l'équivalence (1). (*Voir*, pour plus de détails, l'Ouvrage de M. Gauss, intitulé : *Disquisitiones arithmeticæ*.)

Observons enfin que toute équivalence du second degré, étant réductible à une équivalence binôme, pourra encore être résolue, si le module p est un nombre premier, à l'aide d'une Table d'indices dans laquelle on aurait pris pour base l'une quelconque des racines primitives de p.

En terminant ce paragraphe, nous ferons remarquer, avec M. Gauss, qu'il est facile de résoudre l'équivalence (1), toutes les fois que, la condition (13) étant remplie, les nombres m et $\frac{p-1}{n}$ sont premiers entre eux. Alors, en effet, on pourra trouver deux quantités entières v, w propres à vérifier la formule

$$mw - \frac{p-1}{n}v = 1; \tag{57}$$

et comme on aura par suite, eu égard à la condition (13),

$$\mathrm{A} \equiv \mathrm{A}^{1+\frac{p-1}{n}v} \equiv \mathrm{A}^{mw} \pmod{p}, \tag{58}$$

il est clair qu'on résoudra l'équivalence (1), ou

$$x^m \equiv \mathrm{A}^{mw} \pmod{p}, \tag{59}$$

en prenant

$$x \equiv \mathrm{A}^w \pmod{p}. \tag{60}$$

Considérons, pour fixer les idées, l'équivalence

$$x^6 \equiv 3 \pmod{23}. \tag{61}$$

Dans ce cas, on trouvera $n = 2$, et la condition (13), réduite à

$$3^{11} \equiv 1 \pmod{23}$$

sera remplie. De plus, les exposants 11, 6 étant premiers entre eux, on pourra choisir v, w de manière à vérifier la formule

$$11v + 1 = 6w,$$

à laquelle on satisfait en prenant $v = 1$, $w = 2$. Par suite, on résoudra la formule (61) en supposant

$$x \equiv 3^2 \equiv 9 \pmod{23}, \tag{62}$$

ce qui est exact. Ajoutons que, le nombre n étant égal à 2, l'équivalence (61) admettra seulement deux racines distinctes, savoir

$$x \equiv 9, \qquad x \equiv -9 \equiv 14 \pmod{23}. \tag{63}$$

En général, lorsque le carré de n ne divise pas $p-1$, l'équivalence (1) peut toujours être résolue par la méthode que nous venons d'indiquer, et les formules (57), (60) donnent

$$x \equiv A^{\frac{1}{m}\left(1+\frac{p-1}{n}v\right)} \pmod{p}, \tag{64}$$

v étant choisi de manière que la quantité

$$\frac{1}{m}\left(1+\frac{p-1}{n}v\right)$$

soit entière. Par suite, si $p-1$ n'est divisible qu'une fois par le nombre 2, on vérifiera l'équivalence

$$x^2 \equiv A \pmod{p}, \tag{20}$$

lorsqu'elle sera résoluble, en prenant

$$x \equiv A^{\frac{1}{2}\left(1+\frac{p-1}{2}\right)} \equiv A^{\frac{p+1}{4}} \pmod{p}. \tag{65}$$

De même, si $p-1$ n'est pas divisible, ou s'il est divisible une seule fois par le nombre 3, on vérifiera l'équivalence

$$x^3 \equiv A \pmod{p}, \tag{23}$$

supposée résoluble, en prenant, dans le premier cas,

$$x \equiv A^{\frac{1}{3}[1+2(p-1)]} \equiv A^{\frac{2p-1}{3}} \pmod{p}, \tag{66}$$

et, dans le second cas,

$$x \equiv A^{\frac{1}{3}\left(1+\frac{p-1}{3}\right)} \equiv A^{\frac{p+2}{9}} \pmod{p}, \tag{67}$$

ou bien

$$x \equiv A^{\frac{1}{3}\left(1+2\frac{p-1}{3}\right)} \equiv A^{\frac{2p+1}{9}} \pmod{p}, \tag{68}$$

selon que $p-1$ divisé par 9 donnera pour reste 6 ou 3, etc. Ainsi, par exemple, on résoudra la formule

$$x^3 \equiv 12 \pmod{23}, \tag{69}$$

en prenant

$$x \equiv 12^{\frac{1}{3}(1+44)} \equiv 12^{15} \equiv 8^{10}.3^{15} \equiv 3^8 \equiv 13 \pmod{23}. \tag{70}$$

Toutes les fois que le nombre n se réduit à l'unité, la formule (64) donne

$$x \equiv A^{\frac{1+(p-1)v}{m}} \pmod{p}, \tag{71}$$

v étant choisi de manière que la quantité

$$\frac{1+(p-1)v}{m}$$

soit entière, et cette formule détermine la racine unique de l'équivalence (1). Mais, lorsque le nombre n surpasse l'unité, $p-1$ n'étant pas divisible par n^2, l'équivalence (1) admet plusieurs racines, dont une seule est déterminée par la formule (64); et, pour les obtenir toutes, il suffit de multiplier le second membre de cette formule par les diverses racines de l'équivalence (29) ou, ce qui revient au même, de la suivante :

$$x^n \equiv 1 \pmod{p}. \tag{72}$$

D'ailleurs, si l'on suppose $n = 2$, la formule (72), réduite à

$$x^2 \equiv 1 \pmod{p}, \tag{31}$$

aura pour racines -1 et $+1$. Donc, si $p-1$ est divisible une seule fois par le nombre 2, l'équivalence

$$x^2 \equiv A \pmod{p} \tag{20}$$

admettra les deux racines

$$(73) \qquad x \equiv A^{\frac{p+1}{4}}, \qquad x \equiv -A^{\frac{p+1}{4}} \pmod{p}.$$

Ainsi, par exemple, on résoudra la formule

$$(74) \qquad x^2 \equiv 3 \pmod{11},$$

en prenant

$$(75) \qquad x \equiv 3^3 \equiv 5 \quad \text{ou} \quad x \equiv -5 \equiv 6 \pmod{11},$$

et la formule

$$(76) \qquad x^2 \equiv -3 \pmod{31},$$

en prenant

$$(77) \qquad x \equiv 3^3 \equiv 20 \quad \text{ou} \quad x \equiv -20 \equiv 11 \pmod{31}.$$

D'autre part, si l'on a $n = 3$, la formule (72), réduite à

$$(32) \qquad x^3 \equiv 1 \pmod{p},$$

donnera

$$(78) \qquad x \equiv 1 \pmod{p}$$

ou

$$(79) \qquad x^2 + x + 1 \equiv 0 \pmod{p},$$

par conséquent

$$(80) \qquad (2x+1)^2 \equiv -3 \pmod{p};$$

et comme, en supposant $p-1$ divisible une seule fois par le nombre 2, on tirera de la formule (80)

$$(81) \qquad 2x + 1 \equiv \pm (-3)^{\frac{p+1}{4}} \pmod{p},$$

il est clair que, dans cette hypothèse, les trois racines de l'équivalence (32) seront respectivement

$$(82) \quad x \equiv 1, \qquad x \equiv \frac{-1-(-3)^{\frac{p+1}{4}}}{2}, \qquad x \equiv \frac{-1+(-3)^{\frac{p+1}{4}}}{2} \pmod{p}.$$

Donc, si $p-1$ est divisible une seule fois par chacun des nombres 2 et 3, l'équivalence

$$(23) \qquad x^3 \equiv A \pmod{p}$$

admettra trois racines qui seront respectivement

$$(83) \quad x \equiv A^{\frac{p+3}{9}}, \qquad x \equiv \frac{-1-(-3)^{\frac{p+1}{4}}}{2} A^{\frac{p+3}{9}}, \qquad x \equiv \frac{-1+(-3)^{\frac{p+1}{4}}}{2} A^{\frac{p+3}{9}} \pmod{p},$$

ou bien

$$(84) \quad x \equiv A^{\frac{2p+1}{9}}, \qquad x \equiv \frac{-1-(-3)^{\frac{p+1}{4}}}{2} A^{\frac{2p+1}{9}}, \qquad x \equiv \frac{-1+(-3)^{\frac{p+1}{4}}}{2} A^{\frac{2p+1}{9}} \pmod{p},$$

selon que $p-1$, divisé par 9, donnera pour reste 6 ou 3. Ainsi, par exemple, les trois racines de l'équivalence

$$(85) \qquad x^3 \equiv 4 \pmod{31}$$

seront

$$(86) \qquad \left\{ \begin{array}{l} x \equiv 4^7 \equiv 16, \\ x \equiv \dfrac{-1-3^3}{2} 16 \equiv 5.16 \equiv -13 \\ x \equiv \dfrac{-1+3^3}{2} 16 \equiv -6.16 \equiv -3 \end{array} \right\} \pmod{31}.$$

Si, la condition (13) étant remplie, les nombres m, $\frac{p-1}{n}$ cessent d'être premiers entre eux, et si l'on désigne par ω leur plus grand commun diviseur, le nombre $\frac{m}{\omega}$ sera premier à $\frac{p-1}{n}$, pourvu qu'il soit premier à ω, et l'on pourra, dans cette hypothèse, trouver deux quantités entières v, w propres à vérifier l'équation

$$(87) \qquad \frac{m}{\omega} w - \frac{p-1}{n} v = 1.$$

On aura, par suite, eu égard à la condition (13),

$$(88) \qquad A \equiv A^{1+\frac{p-1}{n}v} \equiv A^{\frac{m}{\omega}w},$$

et il est clair qu'on résoudra l'équivalence (1) en choisissant x de manière à vérifier la formule

$$x^{\omega} \equiv A^{\omega} \pmod{p}, \tag{89}$$

de laquelle on tire

$$x^{m} \equiv (x^{\omega})^{\frac{m}{\omega}} \equiv A^{\frac{m}{\omega}} \equiv A \pmod{p}.$$

D'ailleurs l'équivalence (89) sera du nombre de celles qui peuvent être résolues. En effet, ω, divisant à la fois m et $\frac{p-1}{n}$, par conséquent m et $p-1$, sera diviseur de n. Donc la formule (13) entraînera les suivantes :

$$A^{\frac{p-1}{\omega}} \equiv \left(A^{\frac{p-1}{n}}\right)^{\frac{n}{\omega}} \equiv 1^{\frac{n}{\omega}} \equiv 1 \pmod{p}, \tag{90}$$

$$(A^{w})^{\frac{p-1}{\omega}} \equiv A^{\frac{p-1}{\omega}} \equiv 1 \pmod{p}. \tag{91}$$

Or la formule (91), semblable à la formule (13), exprime précisément la condition à laquelle A^{w} doit satisfaire pour qu'on puisse résoudre l'équivalence (89).

Il est bon d'observer que, ω étant diviseur de n, ω^2 sera diviseur de $p-1$. Donc il est toujours facile, dans l'hypothèse admise, de réduire l'équivalence (1) du degré m à une autre équivalence dont le degré ω soit la racine d'un carré qui divise $p-1$. Lorsque $p-1$ n'offre pas de diviseurs carrés dont les racines divisent l'exposant m, le nombre ω coïncide avec l'unité, et la formule (89) ou (60) fournit une racine de l'équivalence (1).

§ III. — *Sur la résolution des équivalences du troisième et du quatrième degré.*

Étant donnée une équivalence du troisième ou du quatrième degré, on peut, à l'aide de la méthode exposée dans le premier paragraphe, décider si cette équivalence admet autant de racines distinctes que son degré renferme d'unités. Dans le cas contraire, on pourra toujours, à

l'aide de la même méthode, ou s'assurer que l'équivalence proposée n'a point de racines, ou la réduire à une équivalence de degré moindre. Pour cette raison, nous nous bornerons, dans ce qui va suivre, à considérer les équivalences du troisième ou du quatrième degré qui admettent trois ou quatre racines distinctes.

Considérons d'abord une équivalence complète du troisième degré ou de la forme

$$a_0 x^3 + a_1 x^2 + a_2 x + a_3 \equiv 0 \pmod{p}, \tag{1}$$

p désignant un nombre premier et a_0, a_1, a_2, a_3 des quantités entières dont la première ne soit pas divisible par p, ou même des quantités rationnelles. Si l'on fait

$$x \equiv y - \frac{a_1}{3a_0} \pmod{p}, \tag{2}$$

la formule (1) deviendra

$$y^3 + By + C \equiv 0 \pmod{p}, \tag{3}$$

B, C étant des quantités rationnelles que l'on pourra réduire à des quantités entières. D'un autre côté, si l'on désigne par

$$\eta_1, \quad \eta_2, \quad \eta_3$$

les racines de l'équation

$$y^3 + By + C = 0, \tag{4}$$

et par ρ une racine primitive de la suivante

$$x^3 = 1, \tag{5}$$

ρ_1, ρ_2 seront les deux racines de

$$x^2 + x + 1 = 0, \tag{6}$$

et l'expression

$$\left(\frac{\eta_1 + \rho\eta_2 + \rho^2\eta_3}{3}\right)^3, \tag{7}$$

considérée comme fonction des racines des équations (4), (5), n'aura,

comme l'on sait, que deux valeurs distinctes, savoir

$$(8)\qquad v_1=\left(\frac{\eta_1+\rho\eta_2+\rho^2\eta_3}{3}\right)^3,\qquad v_2=\left(\frac{\eta_1+\rho^2\eta_2+\rho\eta_3}{3}\right)^3,$$

qui serviront elles-mêmes de racines à la réduite

$$(9)\qquad u^3+\mathrm{C}u-\frac{\mathrm{B}^2}{27}=0.$$

Cela posé, concevons que l'équivalence (3) admette trois racines distinctes

$$y_1,\quad y_2,\quad y_3,$$

et que le nombre $p-1$ soit divisible par 3. L'équivalence

$$(10)\qquad x^3\equiv 1\pmod p$$

offrira elle-même trois racines distinctes, dont la première sera l'unité, les deux dernières étant propres à vérifier la formule

$$(11)\qquad x^2+x+1\equiv 0\pmod p.$$

Si l'on nomme r l'une de ces deux dernières, l'autre sera représentée par r^2, et si l'on fait

$$(12)\qquad u_1\equiv\left(\frac{y_1+ry_2+r^2y_3}{3}\right)^3,\qquad u_2\equiv\left(\frac{y_1+r^2y_2+ry_3}{3}\right)^3\pmod p,$$

u_1, u_2 seront, en vertu du théorème XVII de la page 294, les deux racines de l'équivalence du second degré

$$(13)\qquad u^2+\mathrm{C}u-\frac{\mathrm{B}^3}{27}\equiv 0\pmod p.$$

Comme on aura d'ailleurs

$$(14)\quad\begin{cases}\eta_1+\eta_2+\eta_3=0,\\ (\eta_1+\rho\eta_2+\rho^2\eta_3)(\eta_1+\rho^2\eta_2+\rho\eta_3)=\eta_1^2+\eta_2^2+\eta_3^2-\eta_1\eta_2-\eta_1\eta_3-\eta_2\eta_3\\ \qquad\qquad=-3(\eta_1\eta_2+\eta_1\eta_3+\eta_2\eta_3)=-3\mathrm{B},\end{cases}$$

le corollaire I du théorème XVII de la page 294 donnera

$$(15)\quad\begin{cases}y_1+y_2+y_3\equiv 0\pmod p,\\ (y_1+ry_2+r^2y_3)(y_1+r^2y_2+ry_3)\equiv -3\mathrm{B}\pmod p.\end{cases}$$

A l'aide de ces formules, on réduira la résolution de l'équivalence (1) ou (3) à la résolution de deux équivalences du deuxième degré, et d'une équivalence binôme du troisième degré. En effet, supposons

$$(16)\qquad \frac{y_1+ry_2+r^2y_3}{3}=v_1,\qquad \frac{y_1+r^2y_2+ry_3}{3}=v_2.$$

Il suffira, pour déterminer v_1, de résoudre : 1° les équivalences du deuxième degré (11) et (13); 2° l'équivalence binôme du troisième degré

$$(17)\qquad v_1^3\equiv u_1\pmod p,$$

après quoi l'on déterminera v_2, si B n'est pas divisible par p, à l'aide de la formule $9v_1v_2\equiv -3\mathrm{B}$, ou

$$(18)\qquad v_2\equiv-\frac{\mathrm{B}}{3v_1}\pmod p,$$

et y_1, y_2, y_3 à l'aide des formules

$$y_1+y_2+y_3\equiv 0,\quad y_1+ry_2+r^2y_3\equiv 3v_1,\quad y_1+r^2y_2+ry_3\equiv 3v_2\pmod p,$$

desquelles on tire

$$(19)\qquad y_1\equiv v_1+v_2,\qquad y_2\equiv r^2v_1+rv_2,\qquad y_3\equiv rv_1+r^2v_2\pmod p.$$

Si B devenait divisible par p, l'une des racines de l'équivalence (13) serait équivalente à zéro, et, en désignant par u_1 l'autre racine, on devrait à la formule (17) joindre la suivante

$$v_2\equiv 0\pmod p.$$

Il importe d'observer qu'en vertu des formules (12) on aura

$$(20)\qquad u_1-u_2\equiv\frac{r-r^2}{3^3}(y_1-y_2)(y_1-y_3)(y_2-y_3).$$

Donc, puisque chacune des équivalences (3), (10) admet, par hypothèse, trois racines distinctes, et qu'en conséquence aucune des différences $r-r^2$, y_1-y_2, y_1-y_3, y_2-y_3 n'est équivalente à zéro suivant le module p, la différence u_1-u_2 ne sera pas non plus équi-

valente à zéro, et la formule (13) offrira encore deux racines distinctes. Cela posé, la condition (38) du § II donnera

$$\left(\frac{C^2}{4}+\frac{B^3}{27}\right)^{\frac{p-1}{3}} \equiv 1 \pmod{p}. \tag{21}$$

De même, l'équivalence (17) devant être résoluble, et $p-1$ étant divisible par 3, on tirera de la formule (13) du § II

$$u_1^{\frac{p-1}{3}} \equiv 1 \pmod{p} \tag{22}$$

et, par suite, si B n'est pas divisible par p,

$$u_1^{\frac{p-1}{3}} + u_2^{\frac{p-1}{3}} = u_1^{\frac{p-1}{3}} + \left(-\frac{B^3}{27u_1}\right)^{\frac{p-1}{3}} \equiv u_1^{\frac{p-1}{3}} + \frac{\left(-\frac{B}{3}\right)^{p-1}}{u_1^{\frac{p-1}{3}}} \equiv 1+1 \equiv 2 \pmod{p}. \tag{23}$$

D'autre part, on aura, en vertu du théorème X de la page 282,

$$u_1^{\frac{p-1}{3}} + u_2^{\frac{p-1}{3}} \equiv v_1^{\frac{p-1}{3}} + v_2^{\frac{p-1}{3}}, \tag{24}$$

v_1, v_2 désignant les deux racines de l'équation (9), dont les valeurs seront

$$v_1 = -\frac{C}{2} - \left(\frac{C^2}{4}+\frac{B^3}{27}\right)^{\frac{1}{2}}, \qquad v_2 = -\frac{C}{2} + \left(\frac{C^2}{4}+\frac{B^3}{27}\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{25}$$

Donc la formule (23) pourra être réduite à

$$\left[-\frac{C}{2} - \left(\frac{C^2}{4}+\frac{B^3}{27}\right)^{\frac{1}{2}}\right]^{\frac{p-1}{3}} + \left[-\frac{C}{2} + \left(\frac{C^2}{4}+\frac{B^3}{27}\right)^{\frac{1}{2}}\right]^{\frac{p-1}{3}} \equiv 2 \pmod{p} \tag{26}$$

ou, ce qui revient au même, à

$$\left\{\left(\frac{C}{2}\right)^{\frac{p-1}{3}} + \frac{(p-1)(p-4)}{3.6}\left(\frac{C}{2}\right)^{\frac{p-7}{3}}\left(\frac{C^2}{4}+\frac{B^3}{27}\right) + \frac{(p-1)(p-4)(p-7)(p-10)}{3.6.9.12}\left(\frac{C}{2}\right)^{\frac{p-13}{3}}\left(\frac{C^2}{4}+\frac{B^3}{27}\right)^2 + \ldots \equiv 1 \pmod{p}. \right. \tag{27}$$

Ainsi, lorsque, $p-1$ étant divisible par 3, et B non divisible par p, l'équivalence (3) admet trois racines distinctes, les valeurs des quantités B, C vérifient les conditions (21), (27). Réciproquement, si ces conditions sont vérifiées, $p-1$ étant toujours divisible par 3, et B non divisible par p, chacune des équivalences (1) et (3) admettra trois racines distinctes. En effet, eu égard à la condition (21), l'équivalence (13) sera résoluble. Désignons par u_1, u_2 ses deux racines, et faisons

$$u_1^{\frac{p-1}{3}} \equiv z.$$

La condition (27) ou (23) donnera

$$z + \frac{1}{z} \equiv 2 \pmod{p}$$

ou, ce qui revient au même,

$$(z-1)^2 \equiv 0 \pmod{p}$$

et, par conséquent,

$$z \equiv 1 \pmod{p}.$$

Donc la condition (22) sera elle-même remplie, et l'équation (17) sera résoluble. Cela posé, les formules (18) et (19) fourniront évidemment des valeurs de y_1, y_2, y_3 propres à vérifier l'équivalence (3).

Si, les conditions (21), (27) étant remplies, le nombre $p-1$ n'est divisible ni par 4, ni par 9, la résolution des équivalences (11), (13), (17), dont les deux premières peuvent s'écrire comme il suit

$$(2x+1)^3 \equiv -3 \pmod{p}, \tag{28}$$

$$\left(u+\frac{C}{2}\right)^2 \equiv \frac{C^2}{4}+\frac{B^3}{27} \pmod{p} \tag{29}$$

et, par conséquent, la résolution des équivalences (1) ou (3) s'effectuera sans peine à l'aide des formules (67), (68), (69) du paragraphe précédent.

Pour montrer une application des principes que nous venons d'exposer, considérons l'équivalence

$$x^3 - 3x^2 + 15x - 1 \equiv 0 \pmod{31}. \tag{30}$$

Dans ce cas, le nombre $p-1=30$ sera multiple de 3, sans être divisible ni par 4, ni par 9, et l'on vérifiera la formule (11) ou (28) [*voir* les formules (77) du § II], en prenant $2x+1=\pm 11$, par conséquent $x=\frac{-1\pm 11}{2}$. On pourra donc supposer

$$r=\frac{-1-11}{2}=-6. \tag{31}$$

De plus, si l'on fait

$$x=y+\frac{3}{3}=y+1, \tag{32}$$

la formule (30) deviendra

$$y^3+12y+12\equiv 0 \pmod{31}. \tag{33}$$

En comparant cette dernière à l'équivalence (3), on trouvera

$$B=12, \qquad C=12, \tag{34}$$

$$\frac{C}{2}=6, \qquad \frac{C^2}{4}+\frac{B^3}{27}\equiv 6^2+4^3\equiv 5+2\equiv 7 \pmod{31}. \tag{35}$$

Cela posé, les conditions (21), (27) donneront

$$7^{15}\equiv 1 \pmod{31} \tag{36}$$

et

$$6^{10}+\frac{10.9}{1.2}6^8.7+\frac{10.9.8.7}{1.2.3.4}6^6.7^2+\frac{10.9.8.7}{1.2.3.4}6^4.7^3+\frac{10.9}{1.2}6^2.7^4+7^5\equiv 1 \pmod{31}$$

ou, ce qui revient au même, attendu que l'on aura $6^3\equiv -1$, $7^3\equiv 2$, $\frac{10.9}{1.2}\equiv 2.7$ et $\frac{10.9.8.7}{1.2.3.4}\equiv -7$,

$$-6+2.6^3.7^2-2+2.6.7+2^2.6^2.7^2+2.7^3\equiv 1 \pmod{31}. \tag{37}$$

Or, les formules (36), (37) étant vérifiées, on doit en conclure que l'équivalence (30) ou (33) admettra trois racines distinctes. Effectivement, la formule (13) ou (29) deviendra

$$(u+6)^2\equiv 7 \pmod{31}, \tag{38}$$

et l'on en tirera [*voir* les formules (73) du § II]

$$u+6\equiv\pm 7^8\equiv\pm 10 \pmod{31}. \tag{39}$$

On pourra donc supposer

$$u_1=10-6=4, \tag{40}$$

et l'équivalence (17), réduite à

$$v_1^3\equiv 4 \pmod{31}, \tag{41}$$

aura pour racines [*voir* les formules (86) du § II] les trois quantités 16, -3, -13. Cela posé, on pourra prendre

$$v_1\equiv 16, \quad rv_1\equiv -3, \quad r^2v_1\equiv -13 \pmod{31}; \tag{42}$$

et, comme on tirera de la formule (18)

$$v_2\equiv -\frac{12}{3v_1}\equiv -\frac{1}{4}\equiv -8 \pmod{31}, \tag{43}$$

on trouvera encore

$$v_2\equiv -8, \quad rv_2\equiv -14, \quad r^2v_2\equiv -9 \pmod{31}. \tag{44}$$

Donc enfin les formules (19) donneront

$$y_1\equiv 16-8\equiv 8, \quad y_2\equiv -13-14\equiv 4, \quad y_3\equiv -3-9\equiv -12 \pmod{31}. \tag{45}$$

Ainsi l'équivalence (33) aura pour racines

$$y\equiv 8, \quad y\equiv 4, \quad y\equiv -12 \pmod{31}, \tag{46}$$

ce qui est exact. Les racines correspondantes de l'équivalence (30), calculées à l'aide de la formule (32), seront évidemment

$$x\equiv 11, \quad x\equiv -9 \pmod{31}. \tag{47}$$

Considérons maintenant une équivalence complète du quatrième degré ou de la forme

$$a_0x^4+a_1x^3+a_2x^2+a_3x+a_4\equiv 0 \pmod{p}, \tag{48}$$

p désignant un nombre premier, et a_0, a_1, a_2, a_3, a_4 des quantités entières dont la première ne soit pas divisible par p, ou même des quantités rationnelles. Si l'on fait

$$x \equiv y - \frac{a_1}{4a_0} \pmod{p}, \tag{49}$$

l'équivalence (48) deviendra

$$y^4 + By^2 + Cy + D \equiv 0 \pmod{p}, \tag{50}$$

B, C, D étant des quantités rationnelles que l'on pourra réduire à des quantités entières. D'un autre côté, si l'on désigne par

$$\eta_1, \quad \eta_2, \quad \eta_3, \quad \eta_4$$

les racines de l'équation

$$y^4 + By^2 + Cy + D = 0, \tag{51}$$

l'expression

$$\left(\frac{\eta_1 - \eta_2 + \eta_3 - \eta_4}{2}\right)^2,$$

considérée comme fonction de ces racines, n'aura, comme l'on sait, que trois valeurs distinctes, savoir

$$\left\{\begin{aligned} \upsilon_1 &= \left(\frac{\eta_1 - \eta_2 + \eta_3 - \eta_4}{2}\right)^2, \\ \upsilon_2 &= \left(\frac{\eta_1 - \eta_2 - \eta_3 + \eta_4}{2}\right)^2, \\ \upsilon_3 &= \left(\frac{\eta_1 + \eta_2 - \eta_3 - \eta_4}{2}\right)^2, \end{aligned}\right. \tag{52}$$

qui serviront de racines à la réduite

$$u^3 + 2Bu^2 + (B^2 - 4D)u - C^2 = 0. \tag{53}$$

Cela posé, concevons que l'équation (51) admette quatre racines distinctes

$$y_1, \quad y_2, \quad y_3, \quad y_4,$$

et faisons

$$\left\{\begin{aligned} u_1 &\equiv \left(\frac{y_1 - y_2 + y_3 - y_4}{2}\right)^2 \\ u_2 &\equiv \left(\frac{y_1 - y_2 - y_3 + y_4}{2}\right)^2 \\ u_3 &\equiv \left(\frac{y_1 + y_2 - y_3 - y_4}{2}\right)^2 \end{aligned}\right. \pmod{p}, \tag{54}$$

u_1, u_2, u_3 seront, en vertu du théorème XVI de la page 292, les trois racines de l'équivalence du troisième degré

$$u^3 + 2Bu^2 + (B^2 - 4D)u - C^2 \equiv 0 \pmod{p}. \tag{55}$$

Comme on aura d'ailleurs

$$\left\{\begin{aligned} \eta_1 + \eta_2 + \eta_3 + \eta_4 &= 0, \\ (\eta_1 - \eta_2 + \eta_3 - \eta_4)(\eta_1 - \eta_2 - \eta_3 + \eta_4)(\eta_1 + \eta_2 - \eta_3 - \eta_4) &= -8C, \end{aligned}\right. \tag{56}$$

on trouvera encore

$$\left\{\begin{aligned} y_1 + y_2 + y_3 + y_4 &\equiv 0 \pmod{p}, \\ (y_1 - y_2 + y_3 - y_4)(y_1 - y_2 - y_3 + y_4)(y_1 + y_2 - y_3 - y_4) &\equiv -8C. \end{aligned}\right. \tag{57}$$

A l'aide de ces formules, on réduira la résolution de l'équivalence (48) ou (50) à la résolution de deux équivalences binômes du deuxième degré et d'une équivalence du troisième. En effet, supposons

$$\left\{\begin{aligned} \upsilon_1 &\equiv \frac{y_1 - y_2 + y_3 - y_4}{2} \\ \upsilon_2 &\equiv \frac{y_1 - y_2 - y_3 + y_4}{2} \\ \upsilon_3 &\equiv \frac{y_1 + y_2 - y_3 - y_4}{2} \end{aligned}\right. \pmod{p}. \tag{58}$$

Il suffira, pour déterminer υ_1, υ_2, de résoudre : 1° l'équivalence (55), qui est du troisième degré; 2° les deux équivalences du deuxième degré

$$\upsilon_1^2 \equiv u_1, \qquad \upsilon_2^2 \equiv u_2 \pmod{p}, \tag{59}$$

après quoi l'on déterminera v_3, si C n'est pas divisible par p, à l'aide de la formule $8v_1v_2v_3 \equiv -8C$, ou

$$v_3 \equiv -\frac{C}{v_1 v_2} \pmod{p}, \tag{60}$$

et y_1, y_2, y_3, y_4 à l'aide des formules

$$\begin{cases} y_1+y_2+y_3+y_4 \equiv 0 \pmod{p}, \\ y_1-y_2+y_3-y_4 \equiv 2v_1, \\ y_1-y_2-y_3+y_4 \equiv 2v_2, \\ y_1+y_2-y_3-y_4 \equiv 2v_3, \end{cases} \tag{61}$$

desquelles on tire

$$\begin{cases} y_1 \equiv \frac{v_1+v_2+v_3}{2}, & y_2 \equiv \frac{-v_1-v_2+v_3}{2} \\ y_3 \equiv \frac{v_1-v_2-v_3}{2}, & y_4 \equiv \frac{-v_1+v_2-v_3}{2} \end{cases} \pmod{p}. \tag{62}$$

Si C devenait divisible par p, l'une des racines de l'équivalence (55) s'évanouirait, et, en désignant les deux autres par u_1, u_2, on devrait aux formules (59) joindre, non plus la formule (60), mais la suivante :

$$v_3 \equiv 0 \pmod{p}.$$

Il est bon d'observer que l'on a, en vertu des formules (54),

$$\begin{cases} u_1-u_2 \equiv (y_1-y_2)(y_3-y_4) \\ u_1-u_3 \equiv (y_1-y_4)(y_3-y_2) \\ u_2-u_3 \equiv (y_1-y_3)(y_4-y_2) \end{cases} \pmod{p}. \tag{63}$$

On peut en conclure que, si l'équivalence (50) admet quatre racines distinctes l'une de l'autre, l'équivalence (55) admettra elle-même trois racines distinctes. Si l'on fait d'ailleurs

$$u + \frac{2B}{3} \equiv U \pmod{p}, \tag{64}$$

et de plus

$$E \equiv -\left(\frac{1}{3}B^2+4D\right), \qquad F \equiv -\left(\frac{2}{27}B^3-\frac{8}{3}BD+C^2\right) \pmod{p}, \tag{65}$$

l'équivalence (55) deviendra

$$U^3+EU+F \equiv 0 \pmod{p}. \tag{66}$$

Supposons maintenant $p-1$ divisible par 3. On pourra déterminer les trois racines de l'équivalence (66), correspondantes aux trois valeurs de u qui vérifient la formule (55), en suivant la méthode par laquelle nous avons résolu l'équivalence (4), et, comme les trois racines de l'équivalence (66) seront distinctes l'une de l'autre, si l'équivalence (50) offre elle-même trois racines distinctes, il est clair que les quantités E, F satisferont alors généralement aux conditions que l'on déduit des formules (21) et (27), en y remplaçant B par E et C par F. On aura donc, en admettant que l'équivalence (50) offre quatre racines distinctes,

$$\left(\frac{F^2}{4}+\frac{E^3}{27}\right)^{\frac{p-1}{2}} \equiv 1 \pmod{p} \tag{67}$$

et

$$\begin{cases} \left(\frac{F}{2}\right)^{\frac{p-1}{3}} + \frac{(p-1)(p-4)}{3.6}\left(\frac{F}{2}\right)^{\frac{p-7}{3}}\left(\frac{F^2}{4}+\frac{E^3}{27}\right) \\ \quad + \frac{(p-1)(p-4)(p-7)(p-10)}{3.6.9.12}\left(\frac{F}{2}\right)^{\frac{p-13}{3}}\left(\frac{F^2}{4}+\frac{E^3}{27}\right)^2 + \ldots \equiv 1 \end{cases} \pmod{p}. \tag{68}$$

On doit toutefois excepter le cas où le coefficient E deviendrait divisible par p. De plus, chacune des formules (59) devant être résoluble, on aura encore, si C n'est pas équivalent à zéro,

$$u_1^{\frac{p-1}{2}} \equiv 1, \qquad u_2^{\frac{p-1}{2}} \equiv 1 \pmod{p} \tag{69}$$

et, par conséquent,

$$u_3^{\frac{p-1}{2}} \equiv \left(\frac{C^2}{u_1u_2}\right)^{\frac{p-1}{2}} \equiv 1 \pmod{p}. \tag{70}$$

Cela posé, concevons que l'élimination de u entre les équations

$$u^3 + 3Bu^2 + (B^2 - 4D)u - C^2 \equiv 0, \qquad V = u^{\frac{p-1}{2}} \tag{71}$$

produise une autre équation de la forme

$$V^3 + GV^2 + HV + I = 0. \tag{72}$$

On aura identiquement

$$V^3 + GV^2 + HV + I = \left(V - u_1^{\frac{p-1}{2}}\right)\left(V - u_2^{\frac{p-1}{2}}\right)\left(V - u_3^{\frac{p-1}{2}}\right) \tag{73}$$

et, par suite,

$$\begin{cases} G = -\left(u_1^{\frac{p-1}{2}} + u_2^{\frac{p-1}{2}} + u_3^{\frac{p-1}{2}}\right), \\ H = u_1^{\frac{p-1}{2}} u_2^{\frac{p-1}{2}} + u_1^{\frac{p-1}{2}} u_3^{\frac{p-1}{2}} + u_2^{\frac{p-1}{2}} u_3^{\frac{p-1}{2}}, \\ I = -u_1^{\frac{p-1}{2}} u_2^{\frac{p-1}{2}} u_3^{\frac{p-1}{2}} = -C^{2\frac{p-1}{2}} = -C^{p-1}; \end{cases} \tag{74}$$

puis on conclura des formules (74), combinées avec les formules (69), (70),

$$G \equiv -3, \qquad H \equiv 3 \pmod{p} \tag{75}$$

et

$$C^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}. \tag{76}$$

Donc, en définitive, les conditions (67), (68), (75) doivent être vérifiées toutes les fois que, $p-1$ étant divisible par 3, et C, E non divisibles par p, l'équivalence (48) ou (50) offre quatre racines distinctes. Quant à la condition (76), il est inutile d'en faire mention, puisque, dans le cas dont il s'agit, elle sera toujours remplie. Donc, si les conditions (67), (68), (75) sont vérifiées, $p-1$ étant divisible par 3, et C, E non divisibles par p, l'équivalence (50) et, par suite, l'équivalence (48) offriront quatre racines distinctes. En effet, les conditions (67), (68) étant vérifiées, chacune des équivalences (55), (66) offrira trois racines distinctes l'une de l'autre. Désignons par u_1, u_2, u_3

celles de ces racines qui appartiendront à l'équivalence (55). Les quantités

$$u_1^{\frac{p-1}{2}}, \quad u_2^{\frac{p-1}{2}}, \quad u_3^{\frac{p-1}{2}} \tag{77}$$

seront les trois racines de l'équivalence

$$V^3 + GV^2 + HV + I \equiv 0, \tag{78}$$

qui, en vertu de la dernière des formules (74), deviendra

$$V^3 + GV^2 + HV - C^{p-1} \equiv 0. \tag{79}$$

De plus, les conditions (75), (76) étant remplies, la formule (78) deviendra

$$V^3 - 3V^2 + 3V - 1 \equiv 0$$

ou, ce qui revient au même,

$$(V-1)^3 \equiv 0, \tag{80}$$

et ses trois racines seront équivalentes à l'unité. Donc les quantités (77) vérifieront les conditions (69), (70), et les formules (59) seront résolubles. Cela posé, les formules (60) et (62) fourniront évidemment des valeurs de y_1, y_2, y_3, y_4 propres à vérifier l'équivalence (50).

Si, les conditions (67), (68), (75), (76) étant remplies, le nombre $p-1$ n'est divisible ni par 4, ni par 9, la résolution des équivalences (66), (69) et, par suite, la résolution des équivalences (50), (51) s'effectueront sans peine à l'aide des formules (67), (68), (69) du paragraphe précédent.

Concevons, pour fixer les idées, qu'il s'agisse de résoudre l'équivalence

$$x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 13x + 7 \equiv 0 \pmod{31}. \tag{81}$$

Alors, en posant

$$x = y - \tfrac{1}{4} = y - 1, \tag{82}$$

on obtiendra la formule

$$y^4 + 9y - 3 \equiv 0 \pmod{31}; \tag{83}$$

puis, en comparant cette formule à l'équivalence (50), on trouvera

(84) $$B = 0, \quad C = 9, \quad D = -3.$$

Cela posé, l'équivalence (55) deviendra

(85) $$u^3 + 12u + 12 \equiv 0;$$

elle se confondra donc avec l'équivalence (33), dont les racines étaient 8, 4 et -12, en sorte qu'on pourra prendre

(86) $$u_1 \equiv 8, \quad u_2 \equiv 4, \quad u_3 \equiv -12 \pmod{31}.$$

Or, les valeurs précédentes de u_1, u_2, u_3 vérifieront les conditions (69), (70), ou

(87) $$8^{15} \equiv 1, \quad 4^{15} \equiv 1, \quad (-12)^{15} \equiv 1 \pmod{31}.$$

On pourra donc résoudre les équivalences (59) ou

(88) $$v_1^2 \equiv 8, \quad v_2^2 \equiv 4 \pmod{31}.$$

On tirera effectivement de ces dernières, en ayant égard aux formules (73) du § II, et à la condition $2^5 \equiv 1$,

(89) $$v_1 \equiv \pm 8^8 \equiv \pm 2^{24} \equiv \pm 2^4 \equiv \pm 16, \quad v_2 \equiv \pm 4^8 \equiv \pm 2^{16} \equiv \pm 2.$$

Par conséquent, on pourra supposer

(90) $$v_1 = 16, \quad v_2 = 2.$$

Les valeurs de v_1, v_2 étant ainsi fixées, l'équivalence (60) donnera

(91) $$v_3 \equiv -\frac{3}{32} \equiv -9 \equiv 22 \pmod{31};$$

et l'on tirera des formules (62)

(92) $$y_1 \equiv 20 \equiv -11, \quad y_2 \equiv 2, \quad y_3 \equiv -4, \quad y_4 \equiv -18 \equiv 13 \pmod{31}.$$

Telles seront les quatre racines de l'équivalence (83). Les racines correspondantes de l'équivalence (81), calculées à l'aide de la formule (82), seront respectivement

(93) $$x \equiv -12, \quad x \equiv 1, \quad x \equiv -5, \quad x \equiv 12.$$

Les équivalences (88) étant résolubles, et le nombre $C = 9$ n'étant pas divisible par 31, on peut affirmer que, dans l'exemple précédent, les conditions (75), (76) se vérifient, ou, en d'autres termes, que l'équivalence produite par l'élimination de u entre les suivantes

(94) $$u^3 + 12u + 11 \equiv 0, \quad V \equiv u^{15} \pmod{31}$$

se réduit à la formule

(95) $$V^3 - 3V^2 + 3V - 1 \equiv 0 \pmod{31}.$$

C'est, au reste, ce dont il est facile de s'assurer directement.