


桑木文庫
洋書

物理
30
C
220

九州帝國大學理學部
8201
物理學教室

桑木文庫
洋書
0162

理学部 洋 遡及
022232002002207
九州大学蔵書

801873

# ŒUVRES

COMPLÈTES

# D'AUGUSTIN CAUCHY

PARIS. — IMPRIMERIE GAUTHIER-VILLARS ET FILS,
Quai des Augustins, 55.

# ŒUVRES

COMPLÈTES

# D'AUGUSTIN CAUCHY

PUBLIÉES SOUS LA DIRECTION SCIENTIFIQUE

DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES

ET SOUS LES AUSPICES

DE M. LE MINISTRE DE L'INSTRUCTION PUBLIQUE.

II^e^ SÉRIE. — TOME IX.

PARIS,

GAUTHIER-VILLARS ET FILS, IMPRIMEURS-LIBRAIRES

DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,

Quai des Augustins, 55.

—

M DCCC XCI

10. 4. 25

# SECONDE SÉRIE.

I. — MÉMOIRES PUBLIÉS DANS DIVERS RECUEILS AUTRES QUE CEUX DE L'ACADÉMIE.

II. — OUVRAGES CLASSIQUES.

III. — MÉMOIRES PUBLIÉS EN CORPS D'OUVRAGE.

IV. — MÉMOIRES PUBLIÉS SÉPARÉMENT.

III.

# MÉMOIRES

## PUBLIÉS EN CORPS D'OUVRAGE.

# EXERCICES

DE

# MATHÉMATIQUES

## (ANCIENS EXERCICES).

—

ANNÉES 1829 ET 1830.

---

DEUXIÈME ÉDITION

RÉIMPRIMÉE

D'APRÈS LA PREMIÈRE ÉDITION

---

# EXERCICES

DE

# MATHÉMATIQUES,

PAR M. AUGUSTIN-LOUIS CAUCHY,

INGÉNIEUR EN CHEF DES PONTS ET CHAUSSÉES, PROFESSEUR A L'ÉCOLE ROYALE POLYTECHNIQUE,
PROFESSEUR ADJOINT A LA FACULTÉ DES SCIENCES, MEMBRE DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES,
CHEVALIER DE LA LÉGION D'HONNEUR.

QUATRIÈME ANNÉE.

A PARIS,

CHEZ DE BURE FRÈRES, LIBRAIRES DU ROI ET DE LA BIBLIOTHÈQUE DU ROI,
RUE SERPENTE, N.° 7.

1829.

# EXERCICES
DE
# MATHÉMATIQUES.

## SUR L'ÉQUILIBRE
ET LE
## MOUVEMENT D'UNE PLAQUE ÉLASTIQUE
DONT L'ÉLASTICITÉ N'EST PAS LA MÊME DANS TOUS LES SENS.

Nous avons donné, dans le troisième Volume des *Exercices mathématiques* [p. 328 et suivantes (1)], les équations qui expriment l'équilibre ou le mouvement d'une plaque solide élastique ou non élastique, d'épaisseur constante, ou d'épaisseur variable, mais en nous bornant à l'égard de la plaque élastique au cas où l'élasticité restait la même dans toutes les directions. Alors les projections algébriques sur les axes coordonnés des pressions $p'$, $p''$, $p'''$ supportées en un point quelconque $(x, y, z)$ par trois plans perpendiculaires à ces mêmes axes, ou, en d'autres termes, les six quantités

(1) $$A,\ B,\ C,\ D,\ E,\ F$$

se trouvaient liées aux déplacements $\xi$, $\eta$, $\zeta$ du point dont il s'agit par les formules (58) de la page 339 (2). Considérons maintenant une plaque élastique dont l'élasticité ne soit pas la même dans tous les sens. On devra aux formules que nous venons de rappeler substituer

(1) *Œuvres de Cauchy*, S. II, T. VIII, p. 381 et suiv.
(2) *Ibid.*, p. 395.

les équations (36), (37) des pages 226, 227 (¹), dans lesquelles $m$ désigne une molécule d'un corps élastique, $a$, $b$, $c$ les coordonnées primitives de cette molécule, c'est-à-dire celles qui se rapportent à l'état naturel du corps, $r$ le rayon vecteur mené primitivement de la molécule $m$ à une molécule voisine, $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ les angles formés par le rayon $r$ avec les demi-axes des coordonnées positives, $f(r)$ une fonction qui dépend de la loi de l'attraction, et $\rho$ la densité du corps au point $(x, y, z)$. D'ailleurs, si, en supposant toujours que les déplacements $\xi$, $\eta$, $\zeta$ restent très petits, on veut prendre pour variables indépendantes, au lieu des coordonnées primitives $a$, $b$, $c$, les coordonnées $x$, $y$, $z$ relatives à l'état d'équilibre ou de mouvement du corps élastique, il suffira, comme on l'a prouvé à la page 207 du troisième Volume (²), d'écrire partout $x$ au lieu de $a$, $y$ au lieu de $b$, $z$ au lieu de $c$. Donc, si l'on fait, pour abréger,

$$(2)\qquad a=\rho\,\mathfrak{S}\left[\frac{mr}{2}\cos^2\alpha\, f(r)\right],\qquad b=\rho\,\mathfrak{S}\left[\frac{mr}{2}\cos^2\beta\, f(r)\right],\qquad c=\rho\,\mathfrak{S}\left[\frac{mr}{2}\cos^2\gamma\, f(r)\right],$$

$$(3)\qquad d=\rho\,\mathfrak{S}\left[\frac{mr}{2}\cos^2\beta\cos^2\gamma\, f(r)\right],\quad e=\rho\,\mathfrak{S}\left[\frac{mr}{2}\cos^2\gamma\cos^2\alpha\, f(r)\right],\quad f=\rho\,\mathfrak{S}\left[\frac{mr}{2}\cos^2\alpha\cos^2\beta\, f(r)\right];$$

$$(4)\quad \begin{cases} u=\rho\,\mathfrak{S}\left[\frac{mr}{2}\cos^2\alpha\cos\beta\cos\gamma\, f(r)\right], & v=\rho\,\mathfrak{S}\left[\frac{mr}{2}\cos^2\alpha\cos\gamma\, f(r)\right], & w=\rho\,\mathfrak{S}\left[\frac{mr}{2}\cos^2\alpha\cos\beta\, f(r)\right], \\ u'=\rho\,\mathfrak{S}\left[\frac{mr}{2}\cos^2\beta\cos\gamma\, f(r)\right], & v'=\rho\,\mathfrak{S}\left[\frac{mr}{2}\cos\alpha\cos^2\beta\cos\gamma\, f(r)\right], & w'=\rho\,\mathfrak{S}\left[\frac{mr}{2}\cos\alpha\cos^2\beta\, f(r)\right], \\ u''=\rho\,\mathfrak{S}\left[\frac{mr}{2}\cos\beta\cos^2\gamma\, f(r)\right], & v''=\rho\,\mathfrak{S}\left[\frac{mr}{2}\cos\alpha\cos^2\gamma\, f(r)\right], & w''=\rho\,\mathfrak{S}\left[\frac{mr}{2}\cos\alpha\cos\beta\cos^2\gamma\, f(r)\right]. \end{cases}$$

les valeurs de A, B, C, D, E, F relatives à un corps élastique dont l'élasticité n'est pas la même dans tous les sens deviendront

$$(5)\quad \begin{cases} A=a\dfrac{\partial\xi}{\partial x}+f\dfrac{\partial\eta}{\partial y}+e\dfrac{\partial\zeta}{\partial z}+u\left(\dfrac{\partial\eta}{\partial z}+\dfrac{\partial\zeta}{\partial y}\right)+v\left(\dfrac{\partial\zeta}{\partial x}+\dfrac{\partial\xi}{\partial z}\right)+w\left(\dfrac{\partial\xi}{\partial y}+\dfrac{\partial\eta}{\partial x}\right), \\ B=f\dfrac{\partial\xi}{\partial x}+b\dfrac{\partial\eta}{\partial y}+d\dfrac{\partial\zeta}{\partial z}+u'\left(\dfrac{\partial\eta}{\partial z}+\dfrac{\partial\zeta}{\partial y}\right)+v'\left(\dfrac{\partial\zeta}{\partial x}+\dfrac{\partial\xi}{\partial z}\right)+w'\left(\dfrac{\partial\xi}{\partial y}+\dfrac{\partial\eta}{\partial x}\right), \\ C=e\dfrac{\partial\xi}{\partial x}+d\dfrac{\partial\eta}{\partial y}+c\dfrac{\partial\zeta}{\partial z}+u''\left(\dfrac{\partial\eta}{\partial z}+\dfrac{\partial\zeta}{\partial y}\right)+v''\left(\dfrac{\partial\zeta}{\partial x}+\dfrac{\partial\xi}{\partial z}\right)+w''\left(\dfrac{\partial\xi}{\partial y}+\dfrac{\partial\eta}{\partial x}\right); \end{cases}$$

(¹) *Œuvres de Cauchy*, S. II, T. VIII, p. 267.
(²) *Ibid.*, p. 246.



$$(6)\quad \begin{cases} D=u\dfrac{\partial\xi}{\partial x}+u'\dfrac{\partial\eta}{\partial y}+u''\dfrac{\partial\zeta}{\partial z}+d\left(\dfrac{\partial\eta}{\partial z}+\dfrac{\partial\zeta}{\partial y}\right)+w''\left(\dfrac{\partial\zeta}{\partial x}+\dfrac{\partial\xi}{\partial z}\right)+v'\left(\dfrac{\partial\xi}{\partial y}+\dfrac{\partial\eta}{\partial x}\right), \\ E=v\dfrac{\partial\xi}{\partial x}+v'\dfrac{\partial\eta}{\partial y}+v''\dfrac{\partial\zeta}{\partial z}+w''\left(\dfrac{\partial\eta}{\partial z}+\dfrac{\partial\zeta}{\partial y}\right)+e\left(\dfrac{\partial\zeta}{\partial x}+\dfrac{\partial\xi}{\partial z}\right)+u\left(\dfrac{\partial\xi}{\partial y}+\dfrac{\partial\eta}{\partial x}\right), \\ F=w\dfrac{\partial\xi}{\partial x}+w'\dfrac{\partial\eta}{\partial y}+w''\dfrac{\partial\zeta}{\partial z}+v'\left(\dfrac{\partial\eta}{\partial z}+\dfrac{\partial\zeta}{\partial y}\right)+u\left(\dfrac{\partial\zeta}{\partial x}+\dfrac{\partial\xi}{\partial z}\right)+f\left(\dfrac{\partial\xi}{\partial y}+\dfrac{\partial\eta}{\partial x}\right). \end{cases}$$

Lorsque le corps élastique est homogène, les quinze coefficients

$$(7)\qquad a,\ b,\ c,\ d,\ e,\ f,\qquad u,\ v,\ w,\qquad u',\ v',\ w',\qquad u'',\ v'',\ w''$$

se réduisent à des quantités constantes, et l'on peut en dire autant de la densité $\rho$, qui, pour de très petits déplacements des molécules, ne diffère pas sensiblement de la densité primitive. Alors les valeurs de A, B, C, D, E, F, fournies par les équations (5), (6), dépendent des six quantités

$$(8)\qquad \frac{\partial\xi}{\partial x},\ \frac{\partial\eta}{\partial y},\ \frac{\partial\zeta}{\partial z},\qquad \frac{\partial\eta}{\partial z}+\frac{\partial\zeta}{\partial y},\ \frac{\partial\zeta}{\partial x}+\frac{\partial\xi}{\partial z},\ \frac{\partial\xi}{\partial y}+\frac{\partial\eta}{\partial x},$$

qui varient seules dans ces mêmes équations avec les ordonnées $x$, $y$, $z$. On peut remarquer que ces six quantités sont aussi les seules fonctions de $x$, $y$, $z$ qui entrent dans la valeur générale de la dilatation ou condensation linéaire mesurée suivant une droite menée par le point $(x, y, z)$ de manière à former les angles $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ avec les demi-axes des coordonnées positives. En effet, si l'on nomme $\varepsilon$ cette dilatation linéaire prise avec le signe + ou cette condensation linéaire prise avec le signe −, on aura, comme on l'a prouvé dans le deuxième Volume des *Exercices* (page 66) (¹),

$$(9)\quad \begin{cases} \varepsilon=\dfrac{\partial\xi}{\partial x}\cos^2\alpha+\dfrac{\partial\eta}{\partial y}\cos^2\beta+\dfrac{\partial\zeta}{\partial z}\cos^2\gamma \\ \qquad+\left(\dfrac{\partial\eta}{\partial z}+\dfrac{\partial\zeta}{\partial y}\right)\cos\beta\cos\gamma+\left(\dfrac{\partial\zeta}{\partial x}+\dfrac{\partial\xi}{\partial z}\right)\cos\gamma\cos\alpha+\left(\dfrac{\partial\xi}{\partial y}+\dfrac{\partial\eta}{\partial x}\right)\cos\alpha\cos\beta. \end{cases}$$

Dans le cas particulier où le corps élastique offre trois axes d'élas-

(¹) *Œuvres de Cauchy*, S. II, T. VII, p. 89.

ticité rectangulaires entre eux et parallèles aux axes des $x$, $y$, $z$, les neuf coefficients

$$(10) \qquad u, \quad v, \quad w, \quad u', \quad v', \quad w', \quad u'', \quad v'', \quad w''$$

s'évanouissent, et les formules (5), (6), réduites aux suivantes

$$(11) \quad A = a\frac{\partial\xi}{\partial x} + f\frac{\partial\eta}{\partial y} + e\frac{\partial\zeta}{\partial z}, \quad B = f\frac{\partial\xi}{\partial x} + b\frac{\partial\eta}{\partial y} + d\frac{\partial\zeta}{\partial z}, \quad C = e\frac{\partial\xi}{\partial x} + d\frac{\partial\eta}{\partial y} + c\frac{\partial\zeta}{\partial z},$$

$$(12) \quad D = d\left(\frac{\partial\eta}{\partial z} + \frac{\partial\zeta}{\partial y}\right), \qquad E = e\left(\frac{\partial\zeta}{\partial x} + \frac{\partial\xi}{\partial z}\right), \qquad F = f\left(\frac{\partial\xi}{\partial y} + \frac{\partial\eta}{\partial x}\right),$$

coïncident avec les équations (63), (64) des pages 233, 234 du troisième Volume des *Exercices* (¹).

Les formules (5) et (6) ou (11) et (12) étant une fois établies, il suffirait de les combiner avec les formules (2) ou (25) et (28) des pages 161 et 166 du troisième Volume (²), pour obtenir les équations générales de l'équilibre ou du mouvement d'un corps élastique, dont les molécules s'écartent très peu des positions qu'elles occupaient dans l'état naturel. Donc, si l'on désigne par $\varphi$ la force accélératrice appliquée au point $(x, y, z)$ de ce corps élastique, et par X, Y, Z les projections algébriques de la force $\varphi$ sur les axes coordonnés, les équations propres à déterminer le mouvement de ce même corps seront généralement

$$(13) \quad \begin{cases} \rho\dfrac{\partial^2\xi}{\partial t^2} = \rho X + a\dfrac{\partial^2\xi}{\partial x^2} + f\dfrac{\partial^2\xi}{\partial y^2} + e\dfrac{\partial^2\xi}{\partial z^2} + w\dfrac{\partial^2\eta}{\partial x^2} + w'\dfrac{\partial^2\eta}{\partial y^2} + w''\dfrac{\partial^2\eta}{\partial z^2} + v\dfrac{\partial^2\zeta}{\partial x^2} + v'\dfrac{\partial^2\zeta}{\partial y^2} + v''\dfrac{\partial^2\zeta}{\partial z^2} \\ \qquad + 2\left(u\dfrac{\partial^2\xi}{\partial y\,\partial z} + v\dfrac{\partial^2\xi}{\partial z\,\partial x} + w\dfrac{\partial^2\xi}{\partial x\,\partial y} + v'\dfrac{\partial^2\eta}{\partial y\,\partial z} + u\dfrac{\partial^2\eta}{\partial z\,\partial x} + f\dfrac{\partial^2\eta}{\partial x\,\partial y} + w''\dfrac{\partial^2\zeta}{\partial y\,\partial z} + e\dfrac{\partial^2\zeta}{\partial z\,\partial x} + u\dfrac{\partial^2\zeta}{\partial x\,\partial y}\right), \\ \rho\dfrac{\partial^2\eta}{\partial t^2} = \rho Y + w\dfrac{\partial^2\xi}{\partial x^2} + w'\dfrac{\partial^2\xi}{\partial y^2} + w''\dfrac{\partial^2\xi}{\partial z^2} + f\dfrac{\partial^2\eta}{\partial x^2} + b\dfrac{\partial^2\eta}{\partial y^2} + d\dfrac{\partial^2\eta}{\partial z^2} + u\dfrac{\partial^2\zeta}{\partial x^2} + u'\dfrac{\partial^2\zeta}{\partial y^2} + u''\dfrac{\partial^2\zeta}{\partial z^2} \\ \qquad + 2\left(v'\dfrac{\partial^2\xi}{\partial y\,\partial z} + u\dfrac{\partial^2\xi}{\partial z\,\partial x} + f\dfrac{\partial^2\xi}{\partial x\,\partial y} + u'\dfrac{\partial^2\eta}{\partial y\,\partial z} + v'\dfrac{\partial^2\eta}{\partial z\,\partial x} + w'\dfrac{\partial^2\eta}{\partial x\,\partial y} + d\dfrac{\partial^2\zeta}{\partial y\,\partial z} + w''\dfrac{\partial^2\zeta}{\partial z\,\partial x} + v''\dfrac{\partial^2\zeta}{\partial x\,\partial y}\right), \\ \rho\dfrac{\partial^2\zeta}{\partial t^2} = \rho Z + v\dfrac{\partial^2\xi}{\partial x^2} + v'\dfrac{\partial^2\xi}{\partial y^2} + v''\dfrac{\partial^2\xi}{\partial z^2} + u\dfrac{\partial^2\eta}{\partial x^2} + u'\dfrac{\partial^2\eta}{\partial y^2} + u''\dfrac{\partial^2\eta}{\partial z^2} + e\dfrac{\partial^2\zeta}{\partial x^2} + d\dfrac{\partial^2\zeta}{\partial y^2} + c\dfrac{\partial^2\zeta}{\partial z^2} \\ \qquad + 2\left(w''\dfrac{\partial^2\xi}{\partial y\,\partial z} + e\dfrac{\partial^2\xi}{\partial z\,\partial x} + u\dfrac{\partial^2\xi}{\partial x\,\partial y} + d\dfrac{\partial^2\eta}{\partial y\,\partial z} + w''\dfrac{\partial^2\eta}{\partial z\,\partial x} + v'\dfrac{\partial^2\eta}{\partial x\,\partial y} + u''\dfrac{\partial^2\zeta}{\partial y\,\partial z} + v''\dfrac{\partial^2\zeta}{\partial z\,\partial x} + w''\dfrac{\partial^2\zeta}{\partial x\,\partial y}\right). \end{cases}$$

(¹) *Œuvres de Cauchy*, S. II, T. VIII, p. 274.
(²) *Ibid.*, p. 196, 202 et 203.



Si le corps élastique offre trois axes d'élasticité rectangulaires et parallèles aux axes des $x$, $y$, $z$, les coefficients u, v, w; u', v', w'; u'', v'', w'' s'évanouiront, et les équations (13), réduites aux suivantes

$$(14) \quad \begin{cases} a\dfrac{\partial^2\xi}{\partial x^2} + f\dfrac{\partial^2\xi}{\partial y^2} + e\dfrac{\partial^2\xi}{\partial z^2} + 2f\dfrac{\partial^2\eta}{\partial x\,\partial y} + 2e\dfrac{\partial^2\zeta}{\partial z\,\partial x} + \rho X = \rho\dfrac{\partial^2\xi}{\partial t^2}, \\ f\dfrac{\partial^2\eta}{\partial x^2} + b\dfrac{\partial^2\eta}{\partial y^2} + d\dfrac{\partial^2\eta}{\partial z^2} + 2d\dfrac{\partial^2\zeta}{\partial y\,\partial z} + 2f\dfrac{\partial^2\xi}{\partial x\,\partial y} + \rho Y = \rho\dfrac{\partial^2\eta}{\partial t^2}, \\ e\dfrac{\partial^2\zeta}{\partial x^2} + d\dfrac{\partial^2\zeta}{\partial y^2} + c\dfrac{\partial^2\zeta}{\partial z^2} + 2e\dfrac{\partial^2\xi}{\partial z\,\partial x} + 2d\dfrac{\partial^2\eta}{\partial y\,\partial z} + \rho Z = \rho\dfrac{\partial^2\zeta}{\partial t^2}, \end{cases}$$

coïncideront avec les formules (68) de la page 235 du troisième Volume (¹). Enfin, si des formules (13) et (14) on veut tirer celles qui expriment l'équilibre d'un corps élastique, il suffira d'annuler les trois expressions

$$(15) \qquad \frac{\partial^2\xi}{\partial t^2}, \quad \frac{\partial^2\eta}{\partial t^2}, \quad \frac{\partial^2\zeta}{\partial t^2}.$$

Concevons à présent que le corps élastique se réduise à une plaque élastique naturellement plane et d'une épaisseur constante. Désignons par $2i$ l'épaisseur naturelle de la plaque, et prenons pour plan des $x$, $y$ celui qui divisait primitivement cette épaisseur en deux parties égales. La surface moyenne, après avoir coïncidé dans l'état naturel avec le plan des $x$, $y$, se courbera, en vertu du changement de forme de la plaque, mais son ordonnée restera très petite. Désignons par $f(x, y)$ cette ordonnée, et faisons, de plus,

$$(16) \qquad s = z - f(x, y),$$

$z$ étant l'ordonnée d'une molécule quelconque $m$ prise au hasard dans l'épaisseur de la plaque. Enfin soient

$$(17) \quad A = A_0 + A_1 s + \ldots, \qquad F = F_0 + F_1 s + \ldots, \qquad B = B_0 + B_1 s + \ldots,$$

$$(18) \quad \xi = \xi_0 + \xi_1 s + \ldots, \qquad \eta = \eta_0 + \eta_1 s + \ldots, \qquad \zeta = \zeta_0 + \zeta_1 s + \ldots,$$

$$(19) \quad X = X_0 + X_1 s + \ldots, \qquad Y = Y_0 + Y_1 s + \ldots, \qquad Z = Z_0 + Z_1 s + Z_2\frac{s^2}{2} + \ldots$$

(¹) *Œuvres de Cauchy*, S. II, T. VIII, p. 275.

les développements de A, F, B; ξ, η, ζ; X, Y, Z suivant les puissances ascendantes de $s$, dans le cas où l'on prend $x$, $y$ et $s$ pour variables indépendantes. En supposant que la plaque élastique se meuve et soit extérieurement soumise à une pression normale désignée par P, on établira, comme nous l'avons fait dans le troisième Volume (pages 337 et 338) (1), les trois équations

$$(20)\qquad \frac{\partial A_0}{\partial x}+\frac{\partial F_0}{\partial y}+\rho X_0=\rho\frac{d^2\xi_0}{dt^2},\qquad \frac{\partial F_0}{\partial x}+\frac{\partial B_0}{\partial y}+\rho Y_0=\rho\frac{\partial^2\eta_0}{\partial t^2},$$

$$(21)\qquad \frac{i^2}{3}\left(\frac{\partial^3 A_1}{\partial x^3}+2\frac{\partial^3 F_1}{\partial x\,\partial y}+\frac{\partial^3 B_1}{\partial y^3}\right)+\rho\left[Z_0+\frac{i^2}{6}\left(Z_2+2\frac{\partial X_1}{\partial x}+2\frac{\partial Y_1}{\partial y}\right)\right]=\rho\frac{\partial^2\zeta_0}{\partial t^2}.$$

Seulement, pour obtenir les valeurs des fonctions $A_0$, $F_0$, $B_0$; $A_1$, $F_1$, $B_1$ exprimées à l'aide des dérivées partielles de $\xi_0$, $\eta_0$, $\zeta_0$, il faudra combiner les équations (9) de la page 331 (2), c'est-à-dire les trois formules

$$(22)\qquad E=0,\qquad D=0,\qquad C=-P,$$

qui subsisteront encore pour $s=-i$ et pour $s=i$, non plus avec les équations (58) de la page 339 (3), mais avec les équations (5) et (6). On aura donc, pour $s=-i$ et pour $s=i$,

$$(23)\quad\begin{cases} v\dfrac{\partial\zeta}{\partial x}+v'\dfrac{\partial\eta}{\partial y}+v''\dfrac{\partial\zeta}{\partial z}+w''\left(\dfrac{\partial\eta}{\partial z}+\dfrac{\partial\zeta}{\partial y}\right)+c\left(\dfrac{\partial\zeta}{\partial x}+\dfrac{\partial\xi}{\partial z}\right)+u\left(\dfrac{\partial\xi}{\partial y}+\dfrac{\partial\eta}{\partial x}\right)=0,\\ u\dfrac{\partial\zeta}{\partial x}+u'\dfrac{\partial\eta}{\partial y}+u''\dfrac{\partial\zeta}{\partial z}+d\left(\dfrac{\partial\eta}{\partial z}+\dfrac{\partial\zeta}{\partial y}\right)+w''\left(\dfrac{\partial\zeta}{\partial x}+\dfrac{\partial\xi}{\partial z}\right)+v'\left(\dfrac{\partial\xi}{\partial y}+\dfrac{\partial\eta}{\partial x}\right)=0,\\ e\dfrac{\partial\xi}{\partial x}+d\dfrac{\partial\eta}{\partial y}+c\dfrac{\partial\zeta}{\partial z}+u''\left(\dfrac{\partial\eta}{\partial z}+\dfrac{\partial\zeta}{\partial y}\right)+v''\left(\dfrac{\partial\zeta}{\partial x}+\dfrac{\partial\xi}{\partial z}\right)+w''\left(\dfrac{\partial\xi}{\partial y}+\dfrac{\partial\eta}{\partial x}\right)=-P; \end{cases}$$

puis, en substituant les valeurs des fonctions

$$(24)\qquad \frac{\partial\zeta}{\partial x}+\frac{\partial\xi}{\partial z},\quad \frac{\partial\zeta}{\partial y}+\frac{\partial\eta}{\partial z},\quad \frac{\partial\zeta}{\partial z},$$

(1) *Œuvres de Cauchy*, S. II, T. VIII, p. 393.
(2) *Ibid.*, p. 385.
(3) *Ibid.*, p. 394.



tirées des formules (23), dans celles des équations (5), (6) qui déterminent les pressions A, F, B, on trouvera

$$(25)\quad\begin{cases} A=a\dfrac{\partial\xi}{\partial x}+f\dfrac{\partial\eta}{\partial y}+e\left(\dfrac{\partial\xi}{\partial y}+\dfrac{\partial\eta}{\partial x}\right)-Pu,\\ B=f\dfrac{\partial\xi}{\partial x}+b\dfrac{\partial\eta}{\partial y}+d\left(\dfrac{\partial\xi}{\partial y}+\dfrac{\partial\eta}{\partial x}\right)-Pv,\\ F=e\dfrac{\partial\xi}{\partial x}+d\dfrac{\partial\eta}{\partial y}+c\left(\dfrac{\partial\xi}{\partial y}+\dfrac{\partial\eta}{\partial x}\right)-Pw, \end{cases}$$

a, b, c, d, e, f, u, v, w désignant de nouveaux coefficients dont les valeurs seront

$$(26)\quad a=a-\frac{v^2(dc-u'^2)+u^2(ec-v''^2)+e^2(ed-w''^2)+2ue(v''w''-eu'')+2ev(u''w''-dv'')+2vu(u''v''-cw'')}{edc-eu''^2-dv''^2-cw''^2+2u''v''w''},$$

$$(27)\quad b=b-\frac{v'^2(dc-u''^2)+u'^2(ec-v''^2)+d^2(ed-w''^2)+2u'd(v''w''-eu'')+2dv'(u''w''-dv'')+2u'v'(u''v''-cw'')}{edc-eu''^2-dv''^2-cw''^2+2u''v''w''},$$

$$(28)\quad c=f-\frac{u^2(dc-u''^2)+v'^2(ec-w''^2)+w''^2(ed-w''^2)+2v'w''(v''w''-eu'')+2w''u(u''w''-dv'')+2uv'(u''v''-cw'')}{edc-eu''^2-dv''^2-cw''^2+2u''v''w''},$$

$$(29)\quad b=w'-\frac{v'u(dc-u''^2)+u'v'(ec-v''^2)+dw''(ed-w''^2)+(u'w''+dv')(v''w''-eu'')+(du+v'w'')(u''w''-dv'')+(v'^2+uu')(u''v''-cw'')}{edc-eu''^2-dv''^2-cw''^2+2u''v''w''},$$

$$(30)\quad e=w-\frac{uv(dc-u''^2)+v'u(ec-v''^2)+w''e(ed-w''^2)+(v'e+w''u)(v''w''-eu'')+(w''v+ue)(u''w''-dv'')+(u^2+vv')(u''v''-cw'')}{edc-eu''^2-dv''^2-cw''^2+2u''v''w''},$$

$$(31)\quad f=f-\frac{vv'(dc-u''^2)+uu'(ec-v''^2)+cd(ed-w''^2)+(ud+eu')(v''w''-eu'')+(ev'+vd)(u''w''-dv'')+(vu'+uv')(u''v''-cw'')}{edc-eu''^2-dv''^2-cw''^2+2u''v''w''},$$

$$(32)\quad\begin{cases} u=\dfrac{v(u''w''-dv'')+u(v''w''-eu'')+e(ed-w''^2)}{edc-eu''^2-dv''^2-cw''^2+2u''v''w''},\\ v=\dfrac{v'(u''w''-dv'')+u'(v''w''-eu'')+d(ed-w''^2)}{edc-eu''^2-dv''^2-cw''^2+2u''v''w''},\\ w=\dfrac{u(u''w''-dv'')+v'(v''w''-eu'')+w''(ed-w''^2)}{edc-eu''^2-dv''^2-cw''^2+2u''v''w''}. \end{cases}$$

Or, si, après avoir développé les deux membres des formules (25) suivant les puissances ascendantes de $s$, on pose successivement dans ces formules $s=-i$, $s=i$, on en conclura, en négligeant les termes pro-

portionnels au carré de $i$,

$$(33)\quad \begin{cases} A_0 = a\dfrac{\partial\xi_0}{\partial x} + f\dfrac{\partial\eta_0}{\partial y} + e\left(\dfrac{\partial\xi_0}{\partial y} + \dfrac{\partial\eta_0}{\partial x}\right) - Pu, \\ B_0 = f\dfrac{\partial\xi_0}{\partial x} + b\dfrac{\partial\eta_0}{\partial y} + d\left(\dfrac{\partial\xi_0}{\partial y} + \dfrac{\partial\eta_0}{\partial x}\right) - Pv, \\ F_0 = e\dfrac{\partial\xi_0}{\partial x} + d\dfrac{\partial\eta_0}{\partial y} + c\left(\dfrac{\partial\xi_0}{\partial y} + \dfrac{\partial\eta_0}{\partial x}\right) - Pw; \end{cases}$$

$$(34)\quad \begin{cases} A_1 = a\dfrac{\partial\xi_1}{\partial x} + f\dfrac{\partial\eta_1}{\partial y} + e\left(\dfrac{\partial\xi_1}{\partial y} + \dfrac{\partial\eta_1}{\partial x}\right), \\ B_1 = f\dfrac{\partial\xi_1}{\partial x} + b\dfrac{\partial\eta_1}{\partial y} + d\left(\dfrac{\partial\xi_1}{\partial y} + \dfrac{\partial\eta_1}{\partial x}\right), \\ F_1 = e\dfrac{\partial\xi_1}{\partial x} + d\dfrac{\partial\eta_1}{\partial y} + c\left(\dfrac{\partial\xi_1}{\partial y} + \dfrac{\partial\eta_1}{\partial x}\right). \end{cases}$$

D'autre part, si l'on nomme U, V, W des fonctions de $x$, $y$, $z$ propres à vérifier les formules

$$(35)\quad \begin{cases} eU + w''V + v''W = -v\dfrac{\partial\xi}{\partial x} - v'\dfrac{\partial\eta}{\partial y} - u\left(\dfrac{\partial\xi}{\partial y} + \dfrac{\partial\eta}{\partial x}\right), \\ w''U + dV + u''W = -u\dfrac{\partial\xi}{\partial x} - u'\dfrac{\partial\eta}{\partial y} - v'\left(\dfrac{\partial\xi}{\partial y} + \dfrac{\partial\eta}{\partial x}\right), \\ v''U + u''V + cW = -e\dfrac{\partial\xi}{\partial x} - d\dfrac{\partial\eta}{\partial y} - w''\left(\dfrac{\partial\xi}{\partial y} + \dfrac{\partial\eta}{\partial x}\right) - P, \end{cases}$$

on aura, pour $s = -i$ et pour $s = i$, en vertu des équations (23) et (35),

$$(36)\qquad \frac{\partial\xi}{\partial z} + \frac{\partial\zeta}{\partial x} = U, \qquad \frac{\partial\eta}{\partial z} + \frac{\partial\zeta}{\partial y} = V, \qquad \frac{\partial\zeta}{\partial z} = W,$$

puis on en conclura, en prenant pour variables indépendantes $x$, $y$, $s$ au lieu de $x$, $y$, $z$,

$$(37)\qquad \frac{\partial\xi}{\partial s} + \frac{\partial\zeta}{\partial x} = U, \qquad \frac{\partial\eta}{\partial s} + \frac{\partial\zeta}{\partial y} = V, \qquad \frac{\partial\zeta}{\partial s} = W.$$

Cela posé, soient

$$(38)\qquad U_0, \quad V_0, \quad W_0$$

les valeurs de U, V, W correspondantes à $s = 0$. On tirera des formules (35) et (37), en développant les deux membres de chacune d'elles suivant les puissances ascendantes de $s$,

$$(39)\quad \begin{cases} eU_0 + w''V_0 + v''W_0 = -v\dfrac{\partial\xi_0}{\partial x} - v'\dfrac{\partial\eta_0}{\partial y} - u\left(\dfrac{\partial\xi_0}{\partial y} + \dfrac{\partial\eta_0}{\partial x}\right), \\ w''U_0 + dV_0 + u''W_0 = -u\dfrac{\partial\xi_0}{\partial x} - u'\dfrac{\partial\eta_0}{\partial y} - v\left(\dfrac{\partial\xi_0}{\partial y} + \dfrac{\partial\eta_0}{\partial x}\right), \\ v''U_0 + u''V_0 + cW_0 = -e\dfrac{\partial\xi_0}{\partial x} - d\dfrac{\partial\eta_0}{\partial y} - w''\left(\dfrac{\partial\xi_0}{\partial y} + \dfrac{\partial\eta_0}{\partial x}\right) - P, \end{cases}$$

et

$$(40)\qquad \xi_1 = U_0 - \frac{\partial\zeta_0}{\partial x}, \qquad \eta_1 = V_0 - \frac{\partial\zeta_0}{\partial y}, \qquad \zeta_1 = W_0.$$

Par suite les équations (34) donneront

$$(41)\quad \begin{cases} A_1 = a\dfrac{\partial U_0}{\partial x} + f\dfrac{\partial V_0}{\partial y} + e\left(\dfrac{\partial U_0}{\partial y} + \dfrac{\partial V_0}{\partial x}\right) - a\dfrac{\partial^2\zeta_0}{\partial x^2} - f\dfrac{\partial^2\zeta_0}{\partial y^2} - 2e\dfrac{\partial^2\zeta_0}{\partial x\,\partial y}, \\ B_1 = f\dfrac{\partial U_0}{\partial x} + b\dfrac{\partial V_0}{\partial y} + d\left(\dfrac{\partial U_0}{\partial y} + \dfrac{\partial V_0}{\partial x}\right) - f\dfrac{\partial^2\zeta_0}{\partial x^2} - b\dfrac{\partial^2\zeta_0}{\partial y^2} - 2d\dfrac{\partial^2\zeta_0}{\partial x\,\partial y}, \\ F_1 = e\dfrac{\partial U_0}{\partial x} + d\dfrac{\partial V_0}{\partial y} + c\left(\dfrac{\partial U_0}{\partial y} + \dfrac{\partial V_0}{\partial x}\right) - e\dfrac{\partial^2\zeta_0}{\partial x^2} - d\dfrac{\partial^2\zeta_0}{\partial y^2} - 2c\dfrac{\partial^2\zeta_0}{\partial x\,\partial y}. \end{cases}$$

Si maintenant on substitue, dans les formules (20) et (21), les valeurs de $A_0$, $B_0$, $F_0$, $A_1$, $B_1$, $F_1$, fournies par les équations (33) et (41), on trouvera

$$(42)\quad \begin{cases} a\dfrac{\partial^2\xi_0}{\partial x^2} + 2e\dfrac{\partial^2\xi_0}{\partial x\,\partial y} + c\dfrac{\partial^2\xi_0}{\partial y^2} + c\dfrac{\partial^2\eta_0}{\partial x^2} + (f+e)\dfrac{\partial^2\eta_0}{\partial x\,\partial y} + d\dfrac{\partial^2\eta_0}{\partial y^2} + \rho X_0 = \rho\dfrac{\partial^2\xi_0}{\partial t^2}, \\ e\dfrac{\partial^2\eta_0}{\partial x^2} + 2d\dfrac{\partial^2\eta_0}{\partial x\,\partial y} + b\dfrac{\partial^2\eta_0}{\partial y^2} + e\dfrac{\partial^2\xi_0}{\partial x^2} + (f+e)\dfrac{\partial^2\xi_0}{\partial x\,\partial y} + d\dfrac{\partial^2\xi_0}{\partial y^2} + \rho Y_0 = \rho\dfrac{\partial^2\eta_0}{\partial t^2} \end{cases}$$

et

$$(43)\quad \begin{cases} \dfrac{i^2}{3}\left[a\dfrac{\partial^3\zeta_0}{\partial x^3} + 4e\dfrac{\partial^3\zeta_0}{\partial x^2\,\partial y} + (4c+2f)\dfrac{\partial^3\zeta_0}{\partial x^2\,\partial y^2} + 4d\dfrac{\partial^3\zeta_0}{\partial x\,\partial y^2} + b\dfrac{\partial^3\zeta_0}{\partial y^3}\right] + \rho\dfrac{\partial^2\zeta_0}{\partial t^2} \\ \quad = \dfrac{i^2}{3}\left[a\dfrac{\partial^3 U_0}{\partial x^3} + 3e\dfrac{\partial^3 U_0}{\partial x^2\,\partial y} + (2c+f)\dfrac{\partial^3 U_0}{\partial x\,\partial y^2} + d\dfrac{\partial^3 U_0}{\partial y^3}\right. \\ \qquad\quad + e\dfrac{\partial^3 V_0}{\partial x^3} + (2c+f)\dfrac{\partial^3 V_0}{\partial x^2\,\partial y} + 3d\dfrac{\partial^3 V_0}{\partial x\,\partial y^2} + b\dfrac{\partial^3 V_0}{\partial y^3}\Big] \\ \qquad\quad + \rho\left[Z_0 + \dfrac{i^2}{6}\left(Z_2 + 2\dfrac{\partial X_1}{\partial x} + 2\dfrac{\partial Y_1}{\partial y}\right)\right], \end{cases}$$

$U_0$, $V_0$, $W_0$ désignant des fonctions de $x$ et $y$ déterminées par les formules (39).

Les équations (42) et (43) sont les seules qui subsistent, pendant le mouvement d'une plaque élastique naturellement plane et d'une épaisseur constante, pour tous les points de la surface moyenne. Supposons d'ailleurs cette plaque terminée dans son état naturel par des plans perpendiculaires au plan des $x, y$ ou par une surface cylindrique dont les génératrices soient parallèles à l'axe des $z$. Si cette surface cylindrique est soumise à une pression normale $\Phi$ différente de P, et si l'on désigne par

$$\alpha, \quad \beta \quad \text{et} \quad \gamma = \frac{\pi}{2}$$

les angles que forme avec les demi-axes des $x$, $y$ et $z$ positives la normale à la surface cylindrique, prolongée en dehors de la plaque, les conditions (34), (35) et (52) des pages 336 et 338 du III$^e$ Volume (1), savoir

$$(44) \qquad (A_0 + \Phi)\cos\alpha + F_0\cos\beta = 0, \qquad F_0\cos\alpha + (B_0 + \Phi)\cos\beta = 0,$$

$$(45) \qquad A_1\cos\alpha + F_1\cos\beta = 0, \qquad F_1\cos\alpha + B_1\cos\beta = 0,$$

$$(46) \qquad \left\{ \begin{aligned} &\left(\frac{\partial A_1}{\partial x} + \frac{\partial F_1}{\partial y} + \rho X_1\right)\cos\alpha + \left(\frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial B_1}{\partial y} + \rho Y_1\right)\cos\beta \\ &= \rho\left(\frac{\partial^2 \xi_1}{\partial t^2}\cos\alpha + \frac{\partial^2 \eta_1}{\partial t^2}\cos\beta\right), \end{aligned} \right.$$

devront être remplies pour tous les points de la surface moyenne situés sur des portions libres du contour de la plaque. Au contraire, les formules (40) et (41) des pages 336 et 337 du même Volume (2), savoir

$$(47) \qquad \xi_0 = 0, \qquad \eta_0 = 0, \qquad \zeta_0 = 0,$$

$$(48) \qquad \xi_1 = 0, \qquad \eta_1 = 0$$

devront être vérifiées pour les points de la surface moyenne situés sur des portions fixes du contour de la plaque. Il est bon d'observer :

(1) *Œuvres de Cauchy*, S. II, T. VIII, p. 390 et 393.
(2) *Ibid.*, p. 391 et 392.



1° que, en vertu des équations (40), les formules (46) et (48) pourront être réduites aux suivantes

$$(49) \qquad \left\{ \begin{aligned} &\left(\frac{\partial A_1}{\partial x} + \frac{\partial F_1}{\partial y} + \rho X_1\right)\cos\alpha + \left(\frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial B_1}{\partial y} + \rho Y_1\right)\cos\beta + \rho\left(\frac{\partial^2 \zeta_0}{\partial x\,\partial t^2}\cos\alpha + \frac{\partial^2 \zeta_0}{\partial y\,\partial t^2}\cos\beta\right) \\ &= \rho\left(\frac{\partial^2 U_0}{\partial t^2}\cos\alpha + \frac{\partial^2 V_0}{\partial t^2}\cos\beta\right) \end{aligned} \right.$$

et

$$(50) \qquad \frac{\partial \zeta_0}{\partial x} = U_0, \qquad \frac{\partial \zeta_0}{\partial y} = V_0;$$

2° que des formules (43) et (49) combinées entre elles on conclura, en négligeant les termes proportionnels au carré de $i$,

$$(51) \qquad \left[\frac{\partial A_1}{\partial x} + \frac{\partial F_1}{\partial y} + \rho\left(X_1 + \frac{\partial Z_0}{\partial x} - \frac{\partial^2 U_0}{\partial t^2}\right)\right]\cos\alpha + \left[\frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial B_1}{\partial y} + \rho\left(Y_1 + \frac{\partial Z_0}{\partial y} - \frac{\partial^2 V_0}{\partial t^2}\right)\right]\cos\beta = 0.$$

Il ne reste plus qu'à substituer, dans les formules (44), (45) et (49) ou (51), les valeurs de $A_0$, $F_0$, $B_0$, $A_1$, $F_1$, $B_1$ fournies par les équations (33) et (41).

Si l'on voulait considérer une plaque élastique, non plus dans l'état de mouvement, mais dans l'état d'équilibre, il suffirait de supprimer, dans les équations (42), (43) et (49), tous les termes qui renferment des dérivées relatives à $t$.

Revenons au cas où la plaque élastique se meut. Alors les deux inconnues $\xi_0$, $\eta_0$, qui mesurent les déplacements parallèles aux axes des $x$ et $y$ pour un point quelconque de la surface moyenne, pourront être déterminées à l'aide des équations (42) réunies aux conditions (44) ou aux deux premières des conditions (47); en sorte que les valeurs générales de ces inconnues seront indépendantes de la valeur initiale de $\zeta_0$, et par conséquent de la forme de la surface moyenne à l'origine du mouvement. De plus, après avoir déterminé $\xi_0$ et $\eta_0$, on déduira des formules (39) les valeurs de $U_0$, $V_0$, et de l'équation (43), réunie aux conditions (45) et (51), ou à la dernière des conditions (47) et aux formules (50), la valeur générale de $\zeta_0$. Si l'on suppose en particulier que, pendant la durée du mouvement, les déplacements $\xi_0$, $\eta_0$, mesu-

rés parallèlement au plan des $x$, $y$, restent très petits relativement à l'ordonnée $\zeta_0$ de la surface moyenne, ce qui exige que les valeurs initiales de $\xi_0$, $\eta_0$ soient elles-mêmes très petites relativement à la valeur initiale de $\zeta_0$; alors, en négligeant tous les termes qui renferment $\xi_0$ ou $\eta_0$, on tirera des formules (39)

$$U_0 = 0, \qquad V_0 = 0. \tag{52}$$

Par suite, les équations (41), (43) deviendront respectivement

$$\begin{cases} A_1 = -a\dfrac{\partial^2\zeta_0}{\partial x^2} - f\dfrac{\partial^2\zeta_0}{\partial y^2} - 2e\dfrac{\partial^2\zeta_0}{\partial x\,\partial y}, \\ B_1 = -f\dfrac{\partial^2\zeta_0}{\partial x^2} - b\dfrac{\partial^2\zeta_0}{\partial y^2} - 2d\dfrac{\partial^2\zeta_0}{\partial x\,\partial y}, \\ F_1 = -e\dfrac{\partial^2\zeta_0}{\partial x^2} - d\dfrac{\partial^2\zeta_0}{\partial y^2} - 2e\dfrac{\partial^2\zeta_0}{\partial x\,\partial y}; \end{cases} \tag{53}$$

$$\begin{cases} \dfrac{i^2}{3}\left[a\dfrac{\partial^4\zeta_0}{\partial x^4} + 4e\dfrac{\partial^4\zeta_0}{\partial x^3\,\partial y} + (4e+2f)\dfrac{\partial^4\zeta_0}{\partial x^2\,\partial y^2} + 4d\dfrac{\partial^4\zeta_0}{\partial x\,\partial y^3} + b\dfrac{\partial^4\zeta_0}{\partial y^4}\right] + \rho\dfrac{\partial^2\zeta_0}{\partial t^2} \\ \quad = \rho\left[Z_0 + \dfrac{i^2}{6}\left(Z_2 + 2\dfrac{\partial X_1}{\partial x} + 2\dfrac{\partial Y_1}{\partial y}\right)\right], \end{cases} \tag{54}$$

et les équations (50), (51) se réduiront aux suivantes :

$$\frac{\partial\zeta_0}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial\zeta_0}{\partial y} = 0, \tag{55}$$

$$\left[\frac{\partial A_1}{\partial x} + \frac{\partial F_1}{\partial y} + \rho\left(X_1 + \frac{\partial Z_0}{\partial x}\right)\right]\cos\alpha + \left[\frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial B_1}{\partial y} + \rho\left(Y_1 + \frac{\partial Z_0}{\partial y}\right)\right]\cos\beta = 0. \tag{56}$$

Les diverses formules que nous venons d'établir se simplifient, lorsqu'on suppose la plaque élastique extraite d'un corps solide qui offrait trois axes d'élasticité rectangulaires et parallèles aux axes des $x$, $y$, $z$. Alors les coefficients u, v, w, u′, v′, w′, u″, v″, w″ s'évanouissent, et les formules (26), (27), (28), (29), (30), (31), (32) se réduisent à

$$a = a - \frac{e^2}{c}, \qquad b = b - \frac{d^2}{c}, \qquad e = f, \qquad d = 0, \qquad e = 0, \qquad f = f - \frac{de}{c}, \tag{57}$$

$$u = \frac{e}{c}, \qquad v = \frac{d}{c}, \qquad w = 0. \tag{58}$$



Alors aussi on tire des formules (39)

$$U_0 = 0, \qquad V_0 = 0, \qquad W_0 = -\frac{e}{c}\frac{d\xi_0}{dx} - \frac{d}{c}\frac{d\eta_0}{dy} - \frac{P}{c}. \tag{59}$$

Par suite, les valeurs de $A_0$, $B_0$, $F_0$, $A_1$, $B_1$, $F_1$, déterminées à l'aide des équations (33), (41), deviennent

$$\begin{cases} A_0 = \dfrac{1}{c}\left[(ac - e^2)\dfrac{\partial\xi_0}{\partial x} + (fc - de)\dfrac{\partial\eta_0}{\partial y} - Pe\right], \\ B_0 = \dfrac{1}{c}\left[(fc - de)\dfrac{\partial\xi_0}{\partial x} + (bc - d^2)\dfrac{\partial\eta_0}{\partial y} - Pd\right], \\ F_0 = f\left(\dfrac{\partial\xi_0}{\partial y} + \dfrac{\partial\eta_0}{\partial x}\right); \end{cases} \tag{60}$$

$$\begin{cases} A_1 = -\dfrac{1}{c}\left[(ac - e^2)\dfrac{\partial^3\zeta_0}{\partial x^3} + (fc - de)\dfrac{\partial^3\zeta_0}{\partial x\,\partial y^2}\right], \\ B_1 = -\dfrac{1}{c}\left[(fc - de)\dfrac{\partial^3\zeta_0}{\partial x^2\,\partial y} + (bc - d^2)\dfrac{\partial^3\zeta_0}{\partial y^3}\right], \\ F_1 = -2f\dfrac{\partial^2\zeta_0}{\partial x\,\partial y}; \end{cases} \tag{61}$$

et les formules (42), (43) donnent, pour un point quelconque de la plaque élastique,

$$\begin{cases} \dfrac{ac - e^2}{c}\dfrac{\partial^2\xi_0}{\partial x^2} + f\dfrac{\partial^2\xi_0}{\partial y^2} + \dfrac{2fc - de}{c}\dfrac{\partial^2\eta_0}{\partial x\,\partial y} + \rho X_0 = \rho\dfrac{\partial^2\xi_0}{\partial t^2}, \\ f\dfrac{\partial^2\eta_0}{\partial x^2} + \dfrac{bc - d^2}{c}\dfrac{\partial^2\eta_0}{\partial y^2} + \dfrac{2fc - de}{c}\dfrac{\partial^2\xi_0}{\partial x\,\partial y} + \rho Y_0 = \rho\dfrac{\partial^2\eta_0}{\partial t^2}; \end{cases} \tag{62}$$

$$\begin{cases} \dfrac{i^2}{3c}\left[(ac - e^2)\dfrac{\partial^4\zeta_0}{\partial x^4} + 2(3fc - de)\dfrac{\partial^4\zeta_0}{\partial x^2\,\partial y^2} + (bc - d^2)\dfrac{\partial^4\zeta_0}{\partial y^4}\right] + \rho\dfrac{\partial^2\zeta_0}{\partial t^2} \\ \quad = \rho\left[Z_0 + \dfrac{i^2}{6}\left(Z_2 + 2\dfrac{\partial X_1}{\partial x} + 2\dfrac{\partial Y_1}{\partial y}\right)\right]. \end{cases} \tag{63}$$

Quant aux conditions qui devront être vérifiées, dans l'hypothèse admise, pour les points situés sur le contour de la surface moyenne, on les obtiendra immédiatement, si les bords de la plaque sont libres, en substituant les valeurs de $A_0$, $B_0$, $F_0$, $A_1$, $B_1$, $F_1$ dans les formules (44), (45), (56), et elles coïncideront, si les bords de la plaque deviennent fixes, avec les formules (47) et (55).

On peut encore remarquer la forme que prennent les équations (42) et (54) dans le cas où l'on suppose la force accélératrice $\varpi$ et les pressions P, Q réduites à zéro. Alors ces équations deviennent respectivement

$$(64)\quad \begin{cases} a\dfrac{\partial^2\xi_0}{\partial x^2}+2c\dfrac{\partial^2\xi_0}{\partial x\,\partial y}+c\dfrac{\partial^2\zeta_0}{\partial y^2}+c\dfrac{\partial^2\eta_0}{\partial x^2}+(f+e)\dfrac{\partial^2\eta_0}{\partial x\,\partial y}+b\dfrac{\partial^2\eta_0}{\partial y^2}=\rho\dfrac{\partial^2\xi_0}{\partial t^2}, \\ c\dfrac{\partial^2\eta_0}{\partial x^2}+2d\dfrac{\partial^2\eta}{\partial x\,\partial y}+b\dfrac{\partial^2\eta_0}{\partial y^2}+c\dfrac{\partial^2\xi_0}{\partial x^2}+(f+e)\dfrac{\partial^2\xi_0}{\partial x\,\partial y}+d\dfrac{\partial^2\xi_0}{\partial y^2}=\rho\dfrac{\partial^2\eta_0}{\partial t^2}, \end{cases}$$

$$(65)\quad \frac{i^2}{3}\left[a\frac{\partial^3\zeta_0}{\partial x^3}+4c\frac{\partial^3\zeta_0}{\partial x^2\,\partial y}+(4e+2f)\frac{\partial^3\zeta_0}{\partial x^2\,\partial y^2}+4d\frac{\partial^3\zeta_0}{\partial x\,\partial y^2}+b\frac{\partial^3\zeta_0}{\partial y^3}\right]+\rho\frac{\partial^2\zeta_0}{\partial t^2}=0.$$

On voit par ce qui précède comment les variations de l'élasticité influent sur la forme des équations qui déterminent les mouvements d'une plaque élastique. Les formules qu'on avait obtenues en supposant que l'élasticité restait la même dans tous les sens ne renfermaient qu'un seul coefficient dépendant de la nature de la plaque. Mais cette supposition ne s'accorde pas avec les phénomènes observés par les physiciens; et, pour obtenir des résultats comparables à l'expérience, il faudra généralement recourir aux formules (42), (54), (64), etc., après avoir déterminé les six coefficients qu'elles renferment, et qui tiennent la place des quinze coefficients compris dans les équations générales du mouvement d'un corps élastique.

# SUR L'ÉQUILIBRE
ET LE
# MOUVEMENT D'UNE VERGE RECTANGULAIRE
## EXTRAITE D'UN CORPS SOLIDE
### DONT L'ÉLASTICITÉ N'EST PAS LA MÊME EN TOUS SENS.

Quand une plaque élastique naturellement plane, et semblable à celle que nous avons considérée dans l'article précédent, se trouve latéralement terminée par deux surfaces cylindriques très rapprochées l'une de l'autre, elle devient ce que nous nommons une *verge rectangulaire*. L'axe de cette verge, qui en général est une courbe plane, se réduira simplement à une droite, si les deux surfaces cylindriques se transforment en deux plans parallèles. Supposons d'ailleurs que l'on choisisse pour plan des $x$, $y$ celui qui divise l'épaisseur de la plaque, prise dans l'état naturel, en deux parties égales, et pour axe des $x$ l'axe de la verge. Enfin soient $2i$ l'épaisseur primitive de la plaque, et $2h$ la distance comprise entre les plans parallèles qui la terminent latéralement, c'est-à-dire l'épaisseur de la verge mesurée dans le plan des $x$, $y$. Les épaisseurs $2h$, $2i$ seront précisément les deux côtés du rectangle qu'on obtiendra en coupant la verge par un plan perpendiculaire à son axe. D'autre part, si l'on adopte les notations et les principes exposés dans l'article précédent, les déplacements $\xi_0$, $\eta_0$ relatifs à un point situé sur la surface moyenne de la plaque élastique, et mesurés parallèlement aux axes des $x$ et $y$, devront, pendant le mouvement de la

plaque, acquérir des valeurs telles que les formules (20) de la page 14, savoir

$$(1)\qquad \frac{\partial A_0}{\partial x}+\frac{\partial F_0}{\partial y}+\rho X_0=\rho\frac{\partial^2\xi_0}{\partial t^2},\qquad \frac{\partial F_0}{\partial x}+\frac{\partial B_0}{\partial y}+\rho Y_0=\rho\frac{\partial^2\eta_0}{\partial t^2},$$

et les formules (44) de la page 18, savoir

$$(2)\qquad (A_0+\mathfrak{P})\cos\alpha+F_0\cos\beta=0,\qquad F_0\cos\alpha+(B_0+\mathfrak{P})\cos\beta=0,$$

soient vérifiées, les deux premières pour tous les points de la surface moyenne, et les deux dernières pour tous les points situés sur le contour de cette surface, $A_0$, $F_0$, $B_0$ étant des fonctions de $x$, $y$ déterminées par les équations (33) de la page 16, c'est-à-dire par les suivantes :

$$(3)\qquad \begin{cases} A_0=a\dfrac{\partial\xi_0}{\partial x}+f\dfrac{\partial\eta_0}{\partial y}+e\left(\dfrac{\partial\xi_0}{\partial y}+\dfrac{\partial\eta_0}{\partial x}\right)-Pu, \\ B_0=f\dfrac{\partial\xi_0}{\partial x}+b\dfrac{\partial\eta_0}{\partial y}+d\left(\dfrac{\partial\xi_0}{\partial y}+\dfrac{\partial\eta_0}{\partial x}\right)-Pv, \\ F_0=e\dfrac{\partial\xi_0}{\partial x}+d\dfrac{\partial\eta_0}{\partial y}+c\left(\dfrac{\partial\xi_0}{\partial y}+\dfrac{\partial\eta_0}{\partial x}\right)-Pw. \end{cases}$$

Il est essentiel de rappeler que, dans les équations (1), (2), (3), $\rho$ désigne la densité de la plaque, regardée comme constante; P, $\mathfrak{P}$ les pressions supportées : 1° par les plans qui terminent la plaque du côté des $z$ positives et du côté des $z$ négatives, 2° par les plans ou surfaces cylindriques qui la terminent latéralement; $X_0$, $Y_0$ les projections algébriques sur les axes des $x$ et $y$ de la force accélératrice appliquée à un point quelconque de la surface moyenne; et $\alpha$, $\beta$ les angles formés avec les demi-axes des $x$ et $y$ positives par la normale élevée dans le plan des $x$, $y$ sur le contour de cette surface.

Concevons maintenant que, la plaque élastique étant réduite à une verge rectangulaire, on désigne, comme dans l'article précédent, par $\xi$, $\eta$, $\zeta$ les déplacements parallèles aux axes d'une molécule quelconque $m$ qui correspond, dans l'état de mouvement, aux coordonnées $x$, $y$, $z$; par X, Y, Z les projections algébriques de la force accélératrice appliquée à cette molécule; et par A, F, E; F, B, D; E, D, C



les projections algébriques des pressions ou tensions exercées au point $(x, y, z)$ contre trois plans parallèles aux plans coordonnés. Soient de plus $r$, $r'$ les distances comprises dans l'état de mouvement : 1° entre l'axe de la verge et la droite menée par la molécule $m$ parallèlement à l'axe des $z$; 2° entre la molécule $m$ et le point de la même droite qui se trouvait primitivement renfermé dans le plan des $x$, $y$. Enfin, supposons que l'on développe les quantités $\xi$, $\eta$, $\zeta$, X, Y, Z, A, B, C, D, E, F, considérées comme fonctions de $x$, $r$ et $r'$, suivant les puissances ascendantes de $r$, $r'$; et joignons en conséquence à la formule

$$(4)\qquad \xi=\xi_{0,0}+\xi_{1,0}r+\xi_{0,1}r'+\tfrac{1}{2}(\xi_{2,0}r^2+2\xi_{1,1}rr'+\xi_{0,2}r'^2)+\dots$$

toutes celles qu'on en déduit quand on y remplace la lettre $\xi$ par l'une des lettres $\eta$, $\zeta$, X, Y, Z, A, B, C, D, E, F. Les fonctions de $x$ et de $y$, désignées dans les formules (1), (2), (3) par $\xi_0$, $\eta_0$, $X_0$, $Y_0$, $A_0$, $F_0$, $B_0$ se confondront avec les valeurs de $\xi$, $\eta$, X, Y, A, F, B correspondantes à $r'=0$. Donc elles seront données par des équations de la forme

$$(5)\qquad \xi_0=\xi_{0,0}+\xi_{1,0}r+\xi_{2,0}\frac{r^2}{2}+\dots,\qquad \eta_0=\eta_{0,0}+\eta_{1,0}r+\eta_{2,0}\frac{r^2}{2}+\dots.$$

Remarquons d'ailleurs que les deux quantités désignées par $\xi_{0,0}$, $\eta_{0,0}$ dans les équations (4) et (5) sont précisément les valeurs de $\xi$ et de $\eta$ correspondantes à un point situé sur l'axe de la verge.

En résumé, l'on voit que, pendant le mouvement d'une verge droite et rectangulaire, les déplacements $\xi_0$, $\eta_0$ d'une molécule primitivement renfermée dans le plan des $x$, $y$, et les déplacements $\xi_{0,0}$, $\eta_{0,0}$ d'un point primitivement situé sur l'axe, se déduiront des formules (1), (2), (3), (5), dont la première et les deux dernières devront être vérifiées pour tous les points de la section faite dans la verge par le plan des $x$, $y$, tandis que la seconde devra être vérifiée pour tous les points situés sur le contour de cette même section. Or les formules (1), (2), (5) sont entièrement semblables aux formules (2), (4), (22) des

pages 246, 247, 250 du III^e Volume (1); et, pour tirer les unes des autres, il suffit de remplacer A, F, B, X, Y, $\xi$, $\eta$ par $A_0$, $F_0$, $B_0$, $X_0$, $Y_0$, $\xi_0$, $\eta_0$, P par $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{X} = \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}$ par $\frac{\partial^2 \xi_0}{\partial t^2}$, $\mathfrak{Y} = \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2}$ par $\frac{\partial^2 \eta_0}{\partial t^2}$, enfin $\xi_0$, $\xi_1$, $\xi_2$, ..., $\eta_0$, $\eta_1$, $\eta_2$, ... par $\xi_{0,0}$, $\xi_{1,0}$, $\xi_{2,0}$, ..., $\eta_{0,0}$, $\eta_{1,0}$, $\eta_{2,0}$, .... Cela posé, on pourra immédiatement transformer les équations qui expriment le mouvement d'une lame élastique droite et d'épaisseur constante, c'est-à-dire les équations (46) de la page 255 du III^e Volume (2), de manière à obtenir les équations du mouvement de la verge droite et rectangulaire qui, étant coupée par le plan des $x$, $y$, offrirait la même section que la lame élastique. En effet, pour opérer la transformation dont il s'agit, il suffira, dans les équations (46) de la page 255 du III^e Volume (3), de substituer aux quantités

$$\xi_0, \quad \xi_1, \quad X_0, \quad X_1, \quad \eta_0, \quad \eta_1, \quad Y_0, \quad Y_1, \quad A_0, \quad A_1$$

les quantités

$$\xi_{0,0}, \quad \xi_{1,0}, \quad X_{0,0}, \quad X_{1,0}, \quad \eta_{0,0}, \quad \eta_{1,0}, \quad Y_{0,0}, \quad Y_{1,0}, \quad A_{0,0}, \quad A_{1,0};$$

et alors, en réduisant le polynôme

$$\frac{3}{h^2}\frac{\partial^2 \eta_{0,0}}{\partial t^2} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 \eta_{2,0}}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 \xi_{1,0}}{\partial t^2}$$

au seul terme $\frac{3}{h^2}\frac{\partial^2 \eta_{0,0}}{\partial t^2}$, vis-à-vis duquel les deux autres peuvent être négligés, on trouvera

$$\frac{dA_{0,0}}{dx} + \rho X_{0,0} = \rho \frac{\partial^2 \xi_{0,0}}{\partial t^2}, \tag{6}$$

$$\frac{h^2}{3}\frac{d^2 A_{1,0}}{dx^2} + \rho\left[Y_{0,0} + \frac{h^2}{6}\left(Y_{2,0} + 2\frac{dX_{1,0}}{dx}\right)\right] = \rho \frac{\partial^2 \eta_{0,0}}{\partial t^2}. \tag{7}$$

Il ne reste plus qu'à exprimer les quantités $A_{0,0}$, $A_{1,0}$, produites par le développement de $A_0$ suivant les puissances ascendantes de $r$, à l'aide

(1) *Œuvres de Cauchy*, S. II, T. VIII, p. 290 et 294.
(2) *Ibid.*, p. 299.
(3) *Ibid.*, p. 299.



des dérivées partielles de $\xi_{0,0}$, $\eta_{0,0}$. Pour y parvenir, on observera d'abord que la section primitivement faite dans la verge par le plan des $x$, $y$ était comprise entre deux droites parallèles à l'axe des $x$ et représentée par les équations

$$y = -h, \qquad y = h. \tag{8}$$

Or les deux courbes, dans lesquelles ces deux droites se transforment en vertu des déplacements infiniment petits des molécules, diffèrent infiniment peu de ces mêmes droites. Donc, si l'on désigne par $\alpha$, $\beta$ les angles que forme la trace du plan normal à l'une de ces courbes sur le plan des $x$, $y$ avec les demi-axes des $x$ et $y$ positives, on aura sensiblement, c'est-à-dire en négligeant les quantités infiniment petites,

$$\cos\alpha = 0, \qquad \cos\beta = \mp 1; \tag{9}$$

et les équations (2) donneront à très peu près, pour les points situés sur les courbes dont il s'agit,

$$F_0 = 0, \qquad B_0 = -\mathfrak{P}. \tag{10}$$

De plus, comme une droite primitivement parallèle à l'axe des $y$, et propre à mesurer la demi-épaisseur $h$ de la verge dans l'état naturel, changera très peu de longueur et de direction en raison des déplacements infiniment petits des molécules, il est clair que, pendant la durée du mouvement, $-h$, $+h$ seront à très peu près les valeurs de $r$ correspondantes aux deux courbes déjà mentionnées. Donc, en vertu des formules (10) réunies aux équations (3), on aura, sans erreur sensible, pour $r = -h$ et pour $r = h$,

$$\begin{cases} f\dfrac{\partial \xi_0}{\partial x} + b\dfrac{\partial \eta_0}{\partial y} + \mathfrak{d}\left(\dfrac{\partial \xi_0}{\partial y} + \dfrac{\partial \eta_0}{\partial x}\right) = P_0 - \mathfrak{P}, \\ c\dfrac{\partial \xi_0}{\partial x} + \mathfrak{d}\dfrac{\partial \eta_0}{\partial y} + c\left(\dfrac{\partial \xi_0}{\partial y} + \dfrac{\partial \eta_0}{\partial x}\right) = P_\varpi; \end{cases} \tag{11}$$

puis en substituant, dans la première des équations (3), les valeurs

des fonctions

$$\frac{\partial \eta_0}{\partial y}, \quad \frac{\partial \xi_0}{\partial y} + \frac{\partial \eta_0}{\partial x}, \tag{12}$$

tirées des formules (11), savoir,

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \xi_0}{\partial y} + \dfrac{\partial \eta_0}{\partial x} = \dfrac{(bw - dv)P + d\Omega}{bc - d^2} + \dfrac{df - be}{bc - d^2}\dfrac{\partial \xi_0}{\partial x}, \\ \dfrac{\partial \eta_0}{\partial y} = \dfrac{(cv - dw)P - c\Omega}{bc - d^2} + \dfrac{ed - cf}{bc - d^2}\dfrac{\partial \xi_0}{\partial x}, \end{cases} \tag{13}$$

et faisant, pour abréger,

$$\frac{df - be}{bc - d^2} = k, \qquad \frac{ed - cf}{bc - d^2} = l, \tag{14}$$

$$\frac{abc - ad^2 - be^2 - cf^2 + 2def}{bc - d^2} = \rho\Omega^2, \tag{15}$$

$$l\Omega - (u + kw + lv)P = \Pi, \tag{16}$$

on trouvera

$$A_0 = \rho\Omega^2 \frac{\partial \xi_0}{\partial x} + \Pi. \tag{17}$$

Concevons à présent que, en ayant égard à la première des équations (5) et à l'équation analogue

$$A_0 = A_{0,0} + A_{1,0} r + A_{2,0} \frac{r^2}{2} + \ldots, \tag{18}$$

on développe les deux membres de la formule (17) suivant les puissances ascendantes de $r$. Si l'on y pose ensuite successivement $r = -h$, $r = h$, on en conclura, en négligeant les termes proportionnels au carré de $h$,

$$A_{0,0} = \rho\Omega^2 \frac{\partial \xi_{0,0}}{\partial x} + \Pi, \tag{19}$$

$$A_{1,0} = \rho\Omega^2 \frac{\partial \xi_{1,0}}{\partial x}. \tag{20}$$

D'autre part, en prenant $x$ et $r$ pour variables indépendantes au lieu



de $x$, $y$, et faisant

$$\frac{(bw - dv)P + d\Omega}{bc - d^2} = \Pi', \qquad \frac{(cv - dw)P - c\Omega}{bc - d^2} = \Pi'', \tag{21}$$

on tirera des équations (13) réunies aux formules (14)

$$\frac{\partial \xi_0}{\partial r} + \frac{\partial \eta_0}{\partial x} = k\frac{\partial \xi_0}{\partial x} + \Pi', \qquad \frac{\partial \eta_0}{\partial r} = l\frac{\partial \xi_0}{\partial x} + \Pi''; \tag{22}$$

puis, en développant les deux membres suivant les puissances ascendantes de $r$, posant $r = \pm h$, et négligeant les termes de l'ordre de $h$, on trouvera

$$\xi_{1,0} + \frac{\partial \eta_{0,0}}{\partial x} = k\frac{\partial \xi_{0,0}}{\partial x} + \Pi', \qquad \eta_{1,0} = l\frac{\partial \xi_{0,0}}{\partial x} + \Pi''. \tag{23}$$

Par suite, l'équation (20) donnera

$$A_{1,0} = \rho\Omega^2\left(k\frac{\partial^2 \xi_{0,0}}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \eta_{0,0}}{\partial x^2}\right). \tag{24}$$

Si maintenant on substitue dans les formules (6) et (7) les valeurs de $A_{0,0}$, $A_{1,0}$ fournies par les équations (19) et (24), on obtiendra les suivantes :

$$\Omega^2 \frac{\partial^2 \xi_{0,0}}{\partial x^2} + X_{0,0} = \frac{\partial^2 \xi_{0,0}}{\partial t^2}, \tag{25}$$

$$\Omega^2 \frac{h^2}{3}\left(\frac{\partial^3 \eta_{0,0}}{\partial x^3} - k\frac{\partial^3 \xi_{0,0}}{\partial x^3}\right) + \frac{\partial^2 \eta_{0,0}}{\partial t^2} = Y_{0,0} + \frac{h^2}{6}\left(Y_{2,0} + 2\frac{dX_{1,0}}{dx}\right). \tag{26}$$

Les équations (25) et (26) sont les seules qui, pendant le mouvement d'une verge élastique naturellement droite, subsistent, pour tous les points de l'axe, entre les variables indépendantes $x$, $t$, et les déplacements $\xi_{0,0}$, $\eta_{0,0}$ mesurés parallèlement au plan des $x$, $y$. Ajoutons que, les fonctions $\xi_{0,0}$, $\eta_{0,0}$ étant supposées connues, on déterminera sans peine les valeurs approchées des pressions $A_0$, $F_0$, $B_0$ et des déplacements $\xi_0$, $\eta_0$ relatifs à un point pris au hasard dans le plan des $x$, $y$. En effet, les équations

$$\xi_0 = \xi_{0,0} + \xi_{1,0} r, \qquad \eta_0 = \eta_{0,0} + \eta_{1,0} r, \tag{27}$$

$$A_0 = A_{0,0} + A_{1,0} r, \tag{28}$$

réunies aux formules (19), (23) et (24), fourniront les valeurs de $\xi_0$, $\eta_0$, $A_0$, aux quantités près de l'ordre de $h^2$. Quant aux valeurs approchées de $F_0$, $B_0$, elles seront déterminées par des équations semblables aux formules (47) de la page 255 du III$^e$ Volume (1), et que l'on déduira immédiatement de ces formules en écrivant

$$F_0,\quad B_0,\quad \xi_{1,0},\quad \eta_{1,0},\quad X_{1,0},\quad Y_{1,0},\quad A_{1,0}\quad \text{et}\quad \Phi$$

au lieu de

$$F,\quad B,\quad \xi_1,\quad \eta_1,\quad X_1,\quad Y_1,\quad A_1\quad \text{et}\quad P.$$

On trouvera ainsi, en négligeant les termes proportionnels au cube de $h$,

$$(29)\qquad \begin{cases} F_0 = \frac{1}{2}\left[\frac{dA_{1,0}}{dx} + \rho\left(X_{1,0} - \frac{\partial^2 \xi_{1,0}}{\partial t^2}\right)\right](h^2 - r^2), \\ B_0 = -\Phi + \frac{1}{2}\rho\left(Y_{1,0} - \frac{\partial^2 \eta_{1,0}}{\partial t^2}\right)(h^2 - r^2). \end{cases}$$

Il est maintenant facile d'établir les conditions particulières auxquelles doivent satisfaire les deux fonctions $\xi_{0,0}$, $\eta_{0,0}$ pour les points situés aux extrémités de l'axe de la verge. Effectivement, si l'on suppose la verge terminée du côté des $x$ positives et du côté des $x$ négatives par des plans perpendiculaires à l'axe, et qui supportent en chacun de leurs points une nouvelle pression désignée par $\mathfrak{P}$, on aura, pour ces mêmes points,

$$(30)\qquad A = -\mathfrak{P},\qquad F = 0;$$

puis, en posant dans les formules (30) $r' = 0$, on trouvera

$$(31)\qquad A_0 = -\mathfrak{P},\qquad F_0 = 0.$$

Enfin, après avoir substitué dans ces dernières les valeurs de $A_0$, $F_0$ tirées des équations (28) et (29), on en conclura

$$(32)\qquad A_{0,0} = -\mathfrak{P},$$

$$(33)\qquad A_{1,0} = 0,\qquad \frac{dA_{1,0}}{dx} + \rho\left(X_{1,0} - \frac{\partial^2 \xi_{1,0}}{\partial t^2}\right) = 0$$

(1) *Œuvres de Cauchy*, S. II, t. VIII, p. 299.



ou, ce qui revient au même, eu égard aux formules (19), (23), (24), (25) et (26),

$$(34)\qquad \Omega^2 \frac{\partial \xi_{0,0}}{dx} + \frac{\Pi + \mathfrak{P}}{\rho} = 0,$$

$$(35)\qquad \frac{\partial^2 \eta_{0,0}}{\partial x^2} = k\frac{\partial^2 \xi_{0,0}}{\partial x^2},\qquad \Omega^2 \frac{\partial^3 \eta_{0,0}}{\partial x^3} = X_{1,0} + \frac{dY_{0,0}}{dx} - k\frac{dX_{0,0}}{dx}.$$

Les conditions (34) et (35) devront être remplies pour chacune des deux extrémités de la verge élastique, si ces deux extrémités sont libres. Au contraire, si ces extrémités deviennent fixes, ou plutôt, si, les extrémités de l'axe étant fixes, les points renfermés dans les plans qui terminent la verge du côté des $x$ positives ou négatives sont assujettis de manière à n'en point sortir, on aura, pour les abscisses correspondantes aux plans dont il s'agit, non seulement

$$(36)\qquad \xi_{0,0} = 0,$$

$$(37)\qquad \eta_{0,0} = 0,$$

mais encore

$$\xi = \xi_{0,0} + \xi_{1,0} r + \xi_{0,1} r' = 0,$$

quelles que soient les valeurs de $r$, $r'$, et par conséquent

$$(38)\qquad \xi_{1,0} = 0$$

ou, ce qui revient au même,

$$(39)\qquad \frac{\partial \eta_{0,0}}{dx} = k\frac{\partial \xi_{0,0}}{dx} + \Pi'.$$

Si la verge élastique offrait une extrémité libre et une extrémité fixe, les conditions (34), (35) devraient être vérifiées pour la première extrémité, et les conditions (36), (37), (39) pour la seconde.

Les équations et conditions ci-dessus établies suffisent à la détermination complète des inconnues $\xi_{0,0}$, $\eta_{0,0}$ qui représentent, pour un point quelconque situé sur l'axe de la verge, les déplacements mesurés parallèlement au plan des $x$, $y$. Si l'on voulait déterminer en outre le déplacement $\zeta_{0,0}$ de ce point dans le sens de la coordonnée $z$,

on y parviendrait sans peine en échangeant entre elles, dans les calculs qui précèdent, les quantités qui correspondent à l'axe des $y$ et à l'axe des $z$. Alors on retrouverait toujours les équations (6), (19) et (25), ainsi que les conditions (34), (36). Mais les équations (7), (20), (23), (24), (26) seraient remplacées par d'autres équations de la forme

$$\frac{i^2}{3}\frac{d^2 A_{0,1}}{dx^2} + \rho\left[Z_{0,0} + \frac{i^2}{6}\left(Z_{0,2} + 2\frac{dX_{0,1}}{dx}\right)\right] = \rho\frac{\partial^2 \zeta_{0,0}}{\partial t^2}, \tag{40}$$

$$A_{0,1} = \rho\Omega^2\frac{\partial \xi_{0,1}}{\partial x}, \tag{41}$$

$$\xi_{0,1} + \frac{\partial \zeta_{0,0}}{\partial x} = \mathfrak{A}\frac{\partial \xi_{0,0}}{\partial x} + \Pi_1, \qquad \zeta_{0,1} = \mathfrak{L}\frac{\partial \xi_{0,0}}{\partial x} + \Pi_2, \tag{42}$$

$$A_{0,1} = \rho\Omega^2\left(\mathfrak{A}\frac{\partial^2 \xi_{0,0}}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \zeta_{0,0}}{\partial x^2}\right), \tag{43}$$

$$\Omega^2\frac{i^2}{3}\left(\frac{\partial^2 \zeta_{0,0}}{\partial x^2} - \mathfrak{A}\frac{\partial^2 \xi_{0,0}}{\partial x^2}\right) + \frac{\partial^2 \zeta_{0,0}}{\partial t^2} = Z_{0,0} + \frac{i^2}{6}\left(Z_{0,2} + 2\frac{dX_{0,1}}{dx}\right), \tag{44}$$

$\mathfrak{A}$, $\mathfrak{L}$, $\Pi_1$, $\Pi_2$ désignant quatre nouveaux coefficients dont les valeurs seraient données par des formules semblables aux équations (14) ou (21), et $i$ l'épaisseur de la verge mesurée parallèlement à l'axe des $z$. Pareillement, à la place des conditions (35), (37), (39) on trouverait celles-ci :

$$\frac{\partial^2 \zeta_{0,0}}{\partial x^2} = \mathfrak{A}\frac{\partial^2 \xi_{0,0}}{\partial x^2}, \qquad \Omega^2\frac{\partial^3 \zeta_{0,0}}{\partial x^3} = X_{0,1} + \frac{dZ_{0,0}}{dx} - \mathfrak{A}\frac{dX_{0,0}}{dx}; \tag{45}$$

$$\zeta_{0,0} = 0, \qquad \frac{\partial \zeta_{0,0}}{\partial x} = \mathfrak{A}\frac{\partial \xi_{0,0}}{\partial x} + \Pi_1. \tag{46}$$

En résumé, pour obtenir la valeur de l'inconnue $\xi_{0,0}$, il suffira d'intégrer l'équation (25) de manière à remplir, pour chaque extrémité libre de la verge, la condition (34), et pour chaque extrémité fixe la condition (36). De même, on obtiendra la valeur de l'inconnue $\eta_{0,0}$ à l'aide de l'équation (26) réunie aux conditions (35), ou bien aux conditions (37) et (39), et la valeur de l'inconnue $\zeta_{0,0}$ à l'aide de l'équation (44) réunie aux conditions (45), ou aux conditions (46). Ajoutons que, les inconnues $\xi_{0,0}$, $\eta_{0,0}$, $\zeta_{0,0}$ étant une fois déterminées, on



pourra fixer la valeur approchée de $\xi$ à l'aide des formules (23) et (42) réunies à la suivante

$$\xi = \xi_{0,0} + \xi_{1,0}r + \xi_{0,1}r', \tag{47}$$

ou, ce qui revient au même, à l'aide de la formule

$$\xi = \xi_{0,0} + \left(k\frac{\partial \zeta_{0,0}}{\partial x} - \frac{\partial \eta_{0,0}}{\partial x} + \Pi'\right)r + \left(\mathfrak{A}\frac{\partial \zeta_{0,0}}{\partial x} - \frac{\partial \zeta_{0,0}}{\partial x} + \Pi_1\right)r'. \tag{48}$$

Effectivement, si l'on regarde les épaisseurs $2h$ et $2i$ comme des quantités infiniment petites du premier ordre, la valeur générale de $\xi$, ou le déplacement d'un point quelconque de la verge élastique, mesuré parallèlement à l'axe des $x$, sera déterminé par l'équation (48) avec une approximation qui ne comportera qu'une erreur du second ordre seulement.

Si l'on voulait considérer une verge élastique, non plus dans l'état de mouvement, mais dans l'état d'équilibre, il suffirait de supprimer, dans les équations (25), (26), (44), les dérivées relatives à $t$, savoir :

$$\frac{\partial^2 \xi_{0,0}}{\partial t^2}, \quad \frac{\partial^2 \eta_{0,0}}{\partial t^2}, \quad \frac{\partial^2 \zeta_{0,0}}{\partial t^2},$$

et dans la seconde des formules (35) ou (45), le terme

$$\frac{dY_{0,0}}{dx} \quad \text{ou} \quad \frac{dZ_{0,0}}{dx},$$

qui, en vertu de l'équation (26) ou (44), diffère très peu de l'expression

$$\frac{\partial^3 \eta_{0,0}}{\partial x\,\partial t^2} \quad \text{ou} \quad \frac{\partial^3 \zeta_{0,0}}{\partial x\,\partial t^2}.$$

Revenons au cas où la verge élastique se meut. Si l'on suppose cette verge extraite d'un corps solide qui offrait trois axes d'élasticité rectangulaires et parallèles aux axes des $x$, $y$, $z$, les neuf coefficients désignés dans l'article précédent par

$$u,\ v,\ w,\quad u',\ v',\ w',\quad u'',\ v'',\ w''$$

s'évanouiront, et les constantes $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}$, $\mathfrak{e}$, $\mathfrak{f}$; $\mathfrak{u}$, $\mathfrak{v}$, $\mathfrak{w}$ seront déterminées par les formules (57), (58) du même article. En conséquence, les formules (14), (15), (16) et (21) donneront

$$\mathfrak{k} = 0, \qquad \mathfrak{l} = \frac{de - cf}{bc - d^2}, \tag{49}$$

$$\rho\Omega^2 = \frac{abc - ad^2 - be^2 - cf^2 + 2def}{bc - d^2}, \tag{50}$$

$$\Pi = \frac{de - cf}{bc - d^2}\mathfrak{P} + \frac{df - be}{bc - d^2}\mathrm{P}, \tag{51}$$

$$\Pi' = 0, \qquad \Pi'' = \frac{d}{bc - d^2}\mathrm{P} - \frac{c}{bc - d^2}\mathfrak{P}. \tag{52}$$

On trouvera, de même, en substituant aux quantités $\mathfrak{k}$, $\mathfrak{l}$; $\Pi'$, $\Pi''$ les quantités $\mathfrak{K}$, $\mathfrak{L}$; $\Pi_1$, $\Pi_2$, et en changeant entre elles : 1° les deux lettres b et c, 2° les deux lettres e et f, 3° les pressions P et $\mathfrak{P}$,

$$\mathfrak{K} = 0, \qquad \mathfrak{L} = \frac{df - be}{bc - d^2}, \tag{53}$$

$$\Pi_1 = 0, \qquad \Pi_2 = \frac{d}{bc - d^2}\mathfrak{P} - \frac{b}{bc - d^2}\mathrm{P}. \tag{54}$$

Cela posé, dans l'hypothèse admise, les équations (26), (44), qui fournissent les valeurs de $\eta_{0,0}$, $\zeta_{0,0}$ relatives à un point quelconque de l'axe de la verge, deviendront respectivement

$$\Omega^2\frac{h^2}{3}\frac{\partial^4\eta_{0,0}}{dx^4} + \frac{\partial^2\eta_{0,0}}{\partial t^2} = \mathrm{X}_{0,0} + \frac{h^2}{6}\left(\mathrm{Y}_{2,0} + 2\frac{d\mathrm{X}_{1,0}}{dx}\right), \tag{55}$$

$$\Omega^2\frac{l^2}{3}\frac{\partial^4\zeta_{0,0}}{dx^4} + \frac{\partial^2\zeta_{0,0}}{\partial t^2} = \mathrm{Z}_{0,0} + \frac{l^2}{6}\left(\mathrm{Z}_{0,2} + 2\frac{d\mathrm{X}_{0,1}}{dx}\right); \tag{56}$$

tandis que l'on aura, pour une extrémité libre,

$$\frac{\partial^2\eta_{0,0}}{dx^2} = 0, \qquad \Omega^2\frac{\partial^3\eta_{0,0}}{dx^3} = \mathrm{X}_{1,0} + \frac{d\mathrm{Y}_{0,0}}{dx}, \tag{57}$$

$$\frac{\partial^2\zeta_{0,0}}{dx^2} = 0, \qquad \Omega^2\frac{\partial^3\zeta_{0,0}}{dx^3} = \mathrm{X}_{0,1} + \frac{d\mathrm{Z}_{0,0}}{dx}, \tag{58}$$



et, pour une extrémité fixe,

$$\eta_{0,0} = 0, \qquad \frac{\partial\eta_{0,0}}{dx} = 0, \tag{59}$$

$$\zeta_{0,0} = 0, \qquad \frac{\partial\zeta_{0,0}}{dx} = 0. \tag{60}$$

Au reste, il n'est pas nécessaire de recourir à l'hypothèse dont il s'agit pour obtenir les équations (55), (56) avec les conditions (57), (58), (59), (60), et l'on retrouvera encore ces diverses formules, si l'on suppose les valeurs de $\xi_{0,0}$, $\mathrm{X}_{0,0}$ constamment nulles, pendant le mouvement de la verge élastique, ainsi que les deux pressions extérieures P, $\mathfrak{P}$.

Concevons à présent que la force accélératrice $\varpi$ devienne constante et constamment parallèle à elle-même. Admettons, en outre, que les trois pressions extérieures P, $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{P}$ s'évanouissent. Alors on aura

$$\mathrm{X}_{0,0} = \mathrm{X}, \quad \mathrm{X}_{1,0} = 0, \quad \mathrm{X}_{0,1} = 0; \qquad \mathrm{Y}_{0,0} = \mathrm{Y}, \quad \mathrm{Y}_{2,0} = 0; \qquad \mathrm{Z}_{0,0} = \mathrm{Z}, \quad \mathrm{Z}_{0,2} = 0.$$

Par suite, les équations (25), (55), (56) donneront

$$\Omega^2\frac{\partial^2\xi_{0,0}}{dx^2} + \mathrm{X} = \frac{\partial^2\xi_{0,0}}{\partial t^2}, \tag{61}$$

$$\Omega^2\frac{h^2}{6}\frac{\partial^4\eta_{0,0}}{dx^4} + \frac{\partial^2\eta_{0,0}}{\partial t^2} = \mathrm{Y}, \tag{62}$$

$$\Omega^2\frac{l^2}{3}\frac{\partial^4\zeta_{0,0}}{dx^4} + \frac{\partial^2\zeta_{0,0}}{\partial t^2} = \mathrm{Z}. \tag{63}$$

Dans le même cas, les conditions (36), (59), (60) devront être remplies pour une extrémité fixe de la verge élastique. Mais les conditions (34), (57), (58), relatives à une extrémité libre, devront être remplacées par les formules

$$\frac{d\xi_{0,0}}{dx} = 0, \tag{64}$$

$$\frac{\partial^2\eta_{0,0}}{dx^2} = 0, \qquad \frac{\partial^3\eta_{0,0}}{dx^3} = 0, \tag{65}$$

$$\frac{\partial^2\zeta_{0,0}}{dx^2} = 0, \qquad \frac{\partial^3\zeta_{0,0}}{dx^3} = 0. \tag{66}$$

Enfin, si l'on suppose que la force accélératrice $\varphi$ s'évanouisse, les équations (61), (62), (63) deviendront respectivement

$$\Omega^2 \frac{\partial^2 \xi_{0,0}}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \xi_{0,0}}{\partial t^2}, \tag{67}$$

$$\Omega^2 \frac{h^2}{3} \frac{\partial^2 \eta_{0,0}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \eta_{0,0}}{\partial t^2} = 0, \tag{68}$$

$$\Omega^2 \frac{i^2}{3} \frac{\partial^2 \zeta_{0,0}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \zeta_{0,0}}{\partial t^2} = 0. \tag{69}$$

La constante $\Omega$, comprise dans la plupart des formules que nous avons obtenues, représente évidemment la vitesse du son dans une verge élastique droite, d'une longueur indéfinie. C'est du moins ce que l'on prouvera sans peine, à l'aide de l'équation (67), en raisonnant comme nous l'avons fait à la page 269 du III$^e$ Volume (1). D'autre part, si l'on nomme $\varepsilon$ la dilatation linéaire de la verge élastique mesurée en un point quelconque $x$, $y$, $z$ suivant une droite parallèle à l'axe des $x$, il suffira, pour déterminer $\varepsilon$, de réduire, dans la formule (9) de l'article précédent, l'angle $\alpha$ à zéro, et chacun des angles $\beta$, $\gamma$ à $\frac{\pi}{2}$; en sorte que l'on trouvera

$$\varepsilon = \frac{\partial \xi}{\partial x}. \tag{70}$$

Donc l'équation

$$A = \rho \Omega^2 \frac{\partial \xi}{\partial x} + \Pi, \tag{71}$$

qui subsistera, en vertu de la formule (19), pour chacune des extrémités de l'axe de la verge élastique, pourra s'écrire comme il suit

$$A = \rho \Omega^2 \varepsilon + \Pi. \tag{72}$$

Ajoutons que les quantités $\Omega$ et $\Pi$, dont la première est déterminée par la formule (15), pourront être facilement exprimées en fonction des pressions P, $\mathfrak{P}$, et des quinze coefficients a, b, c, d, e, f, u, v, w,

(1) *Œuvres de Cauchy*, S. II, T. VIII, p. 316.



u′, v′, w′, u″, v″, w″ renfermés dans les équations (5), (6) de l'article précédent. En effet, l'équation (17) étant le résultat de l'élimination des expressions (12) entre les formules (3) et (10), et les formules (3) se confondant avec les formules (25) ou (33) de l'article précédent, c'est-à-dire avec celles que produit l'élimination des quantités

$$\frac{\partial \zeta}{\partial x} + \frac{\partial \xi}{\partial z}, \quad \frac{\partial \zeta}{\partial y} + \frac{\partial \eta}{\partial z}, \quad \frac{\partial \zeta}{\partial z}$$

entre les équations (5), (6) et (22) du même article, il est clair que l'équation (71) pourra être immédiatement fournie par l'élimination des cinq quantités

$$\frac{\partial \eta}{\partial y}, \quad \frac{\partial \zeta}{\partial z}, \quad \frac{\partial \eta}{\partial z} + \frac{\partial \zeta}{\partial y}, \quad \frac{\partial \zeta}{\partial x} + \frac{\partial \xi}{\partial z}, \quad \frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial \eta}{\partial x} \tag{73}$$

entre les formules (5), (6) des pages 10 et 11 et les suivantes

$$B = -\mathfrak{P}, \quad C = -P, \quad D = 0, \quad E = 0, \quad F = 0. \tag{74}$$

Dans le cas particulier où les pressions P, $\mathfrak{P}$ s'évanouissent, la formule (71), réduite à

$$A = \rho \Omega^2 \frac{\partial \xi}{\partial x}, \tag{75}$$

est celle que l'on trouve quand on élimine les expressions (73) entre les formules

$$B = 0, \quad C = 0, \quad D = 0, \quad E = 0, \quad F = 0 \tag{76}$$

et les équations (5), (6) de l'article précédent. Alors aussi on tire de la formule (72)

$$\Omega^2 = \frac{A}{\rho \varepsilon}. \tag{77}$$

Donc, pour obtenir le carré de la vitesse du son dans une verge élastique qui a pour axe l'axe des $x$, il suffit de chercher ce que deviennent la quantité A, c'est-à-dire la projection algébrique sur l'axe des $x$ de la pression ou tension $p'$ supportée par un plan perpendiculaire à cet

axe, et la condensation ou dilatation $\mp\varepsilon$ mesurée parallèlement au même axe, tandis que les deux autres composantes de la pression $p'$, et les pressions $p''$, $p'''$ supportées par des plans perpendiculaires aux axes des $y$ et $z$ s'évanouissent; puis de diviser la quantité $A = \mp p'$ par la condensation ou dilatation $\mp\varepsilon$ et par la densité $\rho$. Cette proposition subsistant d'ailleurs, quel que soit l'axe des $x$, peut être remplacée par le théorème suivant :

THÉORÈME. — *Une verge élastique étant extraite d'un corps solide homogène qui n'offre pas la même élasticité dans tous les sens, pour obtenir le carré de la vitesse du son dans cette verge indéfiniment prolongée, il suffit de chercher ce que deviennent, en un point quelconque du corps solide, la dilatation ou condensation linéaire $\pm\varepsilon$, mesurée parallèlement à l'axe de la verge, et la pression ou tension $p'$ supportée par un plan perpendiculaire à cet axe, tandis que les pressions ou tensions principales se réduisent l'une à $p'$, les deux autres à zéro, puis de diviser la dilatation ou condensation $\pm\varepsilon$ par le facteur $p'$ et par la densité $\rho$.*

Le rapport qui existe pour une verge élastique et rectangulaire, dont les faces latérales sont soumises à des pressions extérieures nulles, et dont l'épaisseur ou les épaisseurs sont très petites, entre la pression ou tension supportée par un plan perpendiculaire à l'axe et la condensation ou dilatation mesurée suivant cet axe, est ce que nous nommerons désormais l'*élasticité de la verge*. Cela posé, il résulte du théorème précédent que, dans une verge élastique, extraite d'un corps homogène, et indéfiniment prolongée, la vitesse de propagation du son est proportionnelle à la racine carrée de l'élasticité.

Nous terminerons cet article en indiquant quelques applications des formules qu'il renferme.

Observons d'abord que, si la force accélératrice $\varphi$ et les pressions extérieures P, $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{P}$ s'évanouissent, les valeurs des inconnues $\xi_{0,0}$, $\eta_{0,0}$, $\zeta_{0,0}$, déterminées à l'aide des équations (67), (68), (69) et des conditions (36), (59), (60) ou (64), (65), (66), dépendront uniquement de la vitesse $\Omega$, des trois dimensions de la verge élastique et de son



état initial. Donc ces valeurs ne différeront pas de celles qu'on obtiendrait en considérant une verge élastique extraite d'un corps solide dont l'élasticité resterait la même dans tous les sens; et elles seront semblables [*voir* la p. 365 du III^e^ Volume (1)] aux valeurs de $\xi_0$, $\eta_0$ relatives à une lame élastique droite. On doit en conclure que les relations trouvées dans le III^e^ Volume [p. 270 et suivantes (2)] entre la vitesse $\Omega$, la longueur ou l'épaisseur d'une lame élastique, et les sons produits par les vibrations longitudinales ou transversales de cette lame, continueront de subsister pour une verge élastique homogène, lors même que l'élasticité de cette verge deviendra variable avec la direction de son axe. Ainsi, par exemple, si l'on nomme $a$ la longueur de la verge élastique, et N le plus petit nombre de vibrations longitudinales que cette verge, supposée libre, puisse exécuter pendant l'unité de temps, on aura

$$\text{(78)} \qquad N = \frac{\Omega}{2a}.$$

De plus, le nombre des vibrations transversales exécutées par la même verge parallèlement à l'axe des $y$, ou parallèlement à l'axe des $z$, sera l'une des valeurs de $\frac{1}{t}$ fournies par l'équation (124) [p. 270 du III^e^ Volume (3)] ou par celle qu'on en déduit, quand on substitue l'épaisseur $i$ à l'épaisseur $h$. Donc, si les deux épaisseurs $h$ et $i$ deviennent égales, les vibrations transversales exécutées parallèlement aux axes des $y$ et $z$ produiront toujours les mêmes sons. Il était important de voir si cette conclusion, qui peut paraître singulière quand on suppose la verge extraite d'un corps solide dont l'élasticité n'est pas la même dans tous les sens, serait confirmée par l'observation. Ayant consulté, à ce sujet, M. Savart, j'ai eu la satisfaction d'apprendre que des expériences qu'il avait entreprises, sans connaître mes formules, l'avaient précisément conduit au même résultat.

(1) *OEuvres de Cauchy*, S. II, T. VIII, p. 422.
(2) *Ibid.*, p. 316 et suiv.
(3) *Ibid.*, p. 317.

En considérant, dans cet article et dans le précédent, des plaques ou des verges élastiques extraites de corps solides qui n'offraient pas la même élasticité en tous sens, j'ai supposé que ces plaques ou verges étaient naturellement planes ou naturellement droites et douées d'une épaisseur constante. Mais on pourrait, par des calculs du même genre, établir les équations d'équilibre ou de mouvement de plaques ou de verges naturellement courbes ou d'une épaisseur variable, et l'on obtiendrait alors des formules analogues à celles que j'ai données dans les derniers articles du III^e^ Volume (1).

(1) *Œuvres de Cauchy*, S. II, T. VIII, p. 288 et suiv.

# SUR LES PRESSIONS OU TENSIONS

SUPPORTÉES

# EN UN POINT DONNÉ D'UN CORPS SOLIDE

## PAR TROIS PLANS PERPENDICULAIRES ENTRE EUX.

Rapportons la position d'un corps solide à trois axes rectangulaires des $x, y, z$. Soit O le point qui correspond aux coordonnées $(x, y, z)$. Supposons que par le point O on mène : 1° trois plans parallèles aux plans coordonnés; 2° trois autres plans perpendiculaires entre eux. Soient d'ailleurs

$\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$; $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$; $\alpha_3, \beta_3, \gamma_3$ les angles formés avec les demi-axes des coordonnées positives par trois autres demi-axes OL, OM, ON, perpendiculaires aux trois derniers plans, et partant du point O;

$p_1, p_2, p_3$ les pressions ou tensions supportées au point O par les faces des mêmes plans qui regardent les trois demi-axes OL, OM, ON;

$\lambda_1, \mu_1, \nu_1$; $\lambda_2, \mu_2, \nu_2$; $\lambda_3, \mu_3, \nu_3$ les angles formés avec les demi-axes des coordonnées positives par les pressions ou tensions $p_1, p_2, p_3$;

$p', p'', p'''$ les pressions ou tensions supportées au point O par les plans perpendiculaires aux axes coordonnés;

A, F, E; F, B, D; E, D, C les projections algébriques des pressions ou tensions $p', p'', p'''$;

$\mathfrak{A}, \mathfrak{F}, \mathfrak{E}; \mathfrak{F}, \mathfrak{B}, \mathfrak{D}; \mathfrak{C}, \mathfrak{D}, \mathfrak{C}$ ce que deviennent les projections algébriques des forces $p_1, p_2, p_3$, quand on prend pour demi-axes des coordonnées positives les trois demi-axes OL, OM, ON.

On aura, en vertu des formules (3) de la page 162 du III^e Volume (1),

$$(1)\quad \begin{cases} p_1\cos\lambda_1 = A\cos\alpha_1 + F\cos\beta_1 + E\cos\gamma_1, \\ p_1\cos\mu_1 = F\cos\alpha_1 + B\cos\beta_1 + D\cos\gamma_1, \\ p_1\cos\nu_1 = E\cos\alpha_1 + D\cos\beta_1 + C\cos\gamma_1; \end{cases}$$

$$(2)\quad \begin{cases} p_2\cos\lambda_2 = A\cos\alpha_2 + F\cos\beta_2 + E\cos\gamma_2, \\ p_2\cos\mu_2 = F\cos\alpha_2 + B\cos\beta_2 + D\cos\gamma_2, \\ p_2\cos\nu_2 = E\cos\alpha_2 + D\cos\beta_2 + C\cos\gamma_2; \end{cases}$$

$$(3)\quad \begin{cases} p_3\cos\lambda_3 = A\cos\alpha_3 + F\cos\beta_3 + E\cos\gamma_3, \\ p_3\cos\mu_3 = F\cos\alpha_3 + B\cos\beta_3 + D\cos\gamma_3, \\ p_3\cos\nu_3 = E\cos\alpha_3 + D\cos\beta_3 + C\cos\gamma_3. \end{cases}$$

De plus, comme la direction de la force $p_i$ formera évidemment avec les demi-axes OL, OM, ON des angles qui auront pour cosinus les trois expressions

$$\cos\lambda_i\cos\alpha_i + \cos\mu_i\cos\beta_i + \cos\nu_i\cos\gamma_i,$$
$$\cos\lambda_i\cos\alpha_2 + \cos\mu_i\cos\beta_2 + \cos\nu_i\cos\gamma_2,$$
$$\cos\lambda_i\cos\alpha_3 + \cos\mu_i\cos\beta_3 + \cos\nu_i\cos\gamma_3,$$

on trouvera

$$(4)\quad \begin{cases} \mathfrak{a} = p_i(\cos\lambda_i\cos\alpha_i + \cos\mu_i\cos\beta_i + \cos\nu_i\cos\gamma_i), \\ \mathfrak{F} = p_i(\cos\lambda_i\cos\alpha_2 + \cos\mu_i\cos\beta_2 + \cos\nu_i\cos\gamma_2), \\ \mathfrak{E} = p_i(\cos\lambda_i\cos\alpha_3 + \cos\mu_i\cos\beta_3 + \cos\nu_i\cos\gamma_3). \end{cases}$$

On trouvera de même

$$(5)\quad \begin{cases} \mathfrak{F} = p_2(\cos\lambda_2\cos\alpha_1 + \cos\mu_2\cos\beta_1 + \cos\nu_2\cos\gamma_1), \\ \mathfrak{b} = p_2(\cos\lambda_2\cos\alpha_2 + \cos\mu_2\cos\beta_2 + \cos\nu_2\cos\gamma_2), \\ \mathfrak{D} = p_2(\cos\lambda_2\cos\alpha_3 + \cos\mu_2\cos\beta_3 + \cos\nu_2\cos\gamma_3) \end{cases}$$

et

$$(6)\quad \begin{cases} \mathfrak{E} = p_3(\cos\lambda_3\cos\alpha_1 + \cos\mu_3\cos\beta_1 + \cos\nu_3\cos\gamma_1), \\ \mathfrak{D} = p_3(\cos\lambda_3\cos\alpha_2 + \cos\mu_3\cos\beta_2 + \cos\nu_3\cos\gamma_2), \\ \mathfrak{C} = p_3(\cos\lambda_3\cos\alpha_3 + \cos\mu_3\cos\beta_3 + \cos\nu_3\cos\gamma_2). \end{cases}$$

(1) *Œuvres de Cauchy*, S. II, T. VIII, p. 197.



Si maintenant on substitue, dans les équations (4), (5), (6), les valeurs de $p_i\cos\lambda_i$, $p_i\cos\mu_i$, ..., tirées des équations (1), (2), (3), on obtiendra les six formules

$$(7)\quad \begin{cases} \mathfrak{a} = A\cos^2\alpha_i + B\cos^2\beta_i + C\cos^2\gamma_i \\ \qquad + 2D\cos\beta_i\cos\gamma_i + 2E\cos\gamma_i\cos\alpha_i + 2F\cos\alpha_i\cos\beta_i, \\ \mathfrak{b} = A\cos^2\alpha_2 + B\cos^2\beta_2 + C\cos^2\gamma_2 \\ \qquad + 2D\cos\beta_2\cos\gamma_2 + 2E\cos\gamma_2\cos\alpha_2 + 2F\cos\alpha_2\cos\beta_2, \\ \mathfrak{C} = A\cos^2\alpha_3 + B\cos^2\beta_3 + C\cos^2\gamma_3 \\ \qquad + 2D\cos\beta_3\cos\gamma_3 + 2E\cos\gamma_3\cos\alpha_3 + 2F\cos\alpha_3\cos\beta_3; \end{cases}$$

$$(8)\quad \begin{cases} \mathfrak{D} = A\cos\alpha_2\cos\alpha_3 + B\cos\beta_2\cos\beta_3 + C\cos\gamma_2\cos\gamma_3 \\ \qquad + D(\cos\beta_2\cos\gamma_3 + \cos\beta_3\cos\gamma_2) \\ \qquad + E(\cos\gamma_2\cos\alpha_3 + \cos\gamma_3\cos\alpha_2) \\ \qquad + F(\cos\alpha_2\cos\beta_3 + \cos\alpha_3\cos\beta_2), \\ \mathfrak{E} = A\cos\alpha_3\cos\alpha_1 + B\cos\beta_3\cos\beta_1 + C\cos\gamma_3\cos\gamma_1 \\ \qquad + D(\cos\beta_3\cos\gamma_1 + \cos\beta_1\cos\gamma_3) \\ \qquad + E(\cos\gamma_3\cos\alpha_1 + \cos\gamma_1\cos\alpha_3) \\ \qquad + F(\cos\alpha_3\cos\beta_1 + \cos\alpha_1\cos\beta_3), \\ \mathfrak{F} = A\cos\alpha_1\cos\alpha_2 + B\cos\beta_1\cos\beta_2 + C\cos\gamma_1\cos\gamma_2 \\ \qquad + D(\cos\beta_1\cos\gamma_2 + \cos\beta_2\cos\gamma_1) \\ \qquad + E(\cos\gamma_1\cos\alpha_2 + \cos\gamma_2\cos\alpha_1) \\ \qquad + F(\cos\alpha_1\cos\beta_2 + \cos\alpha_2\cos\beta_1). \end{cases}$$

Ces six formules fournissent le moyen de calculer les projections algébriques des pressions $p_1$, $p_2$, $p_3$, supportées par trois plans perpendiculaires entre eux, sur trois demi-axes perpendiculaires à ces mêmes plans, quand on connait les projections algébriques des pressions supportées par trois plans parallèles aux plans coordonnés sur les axes des $x$, $y$, $z$.

Observons encore que, les demi-axes OL, OM, ON étant perpendiculaires l'un à l'autre, on aura, en vertu de formules connues,

$$(9)\quad \begin{cases} \cos^2\alpha_1 + \cos^2\alpha_2 + \cos^2\alpha_3 = 1, & \cos\beta_1\cos\gamma_1 + \cos\beta_2\cos\gamma_2 + \cos\beta_3\cos\gamma_3 = 0, \\ \cos^2\beta_1 + \cos^2\beta_2 + \cos^2\beta_3 = 1, & \cos\gamma_1\cos\alpha_1 + \cos\gamma_2\cos\alpha_2 + \cos\gamma_3\cos\alpha_3 = 0, \\ \cos^2\gamma_1 + \cos^2\gamma_2 + \cos^2\gamma_3 = 1, & \cos\alpha_1\cos\beta_1 + \cos\alpha_2\cos\beta_2 + \cos\alpha_3\cos\beta_3 = 0. \end{cases}$$

Par suite, on tirera des équations (4), (5), (6)

$$(10)\quad \begin{cases} \mathfrak{A}\cos\alpha_1+\mathfrak{F}\cos\alpha_2+\mathfrak{E}\cos\alpha_3=p_1\cos\lambda_1=\mathrm{A}\cos\alpha_1+\mathrm{F}\cos\beta_1+\mathrm{E}\cos\gamma_1,\\ \mathfrak{F}\cos\alpha_1+\mathfrak{B}\cos\alpha_2+\mathfrak{D}\cos\alpha_3=p_2\cos\lambda_2=\mathrm{A}\cos\alpha_2+\mathrm{F}\cos\beta_2+\mathrm{E}\cos\gamma_2,\\ \mathfrak{E}\cos\alpha_1+\mathfrak{D}\cos\alpha_2+\mathfrak{C}\cos\alpha_3=p_3\cos\lambda_3=\mathrm{A}\cos\alpha_3+\mathrm{F}\cos\beta_3+\mathrm{E}\cos\gamma_3; \end{cases}$$

$$(11)\quad \begin{cases} \mathfrak{A}\cos\beta_1+\mathfrak{F}\cos\beta_2+\mathfrak{E}\cos\beta_3=p_1\cos\mu_1=\mathrm{F}\cos\alpha_1+\mathrm{B}\cos\beta_1+\mathrm{D}\cos\gamma_1,\\ \mathfrak{F}\cos\beta_1+\mathfrak{B}\cos\beta_2+\mathfrak{D}\cos\beta_3=p_2\cos\mu_2=\mathrm{F}\cos\alpha_2+\mathrm{B}\cos\beta_2+\mathrm{D}\cos\gamma_2,\\ \mathfrak{E}\cos\beta_1+\mathfrak{D}\cos\beta_2+\mathfrak{C}\cos\beta_3=p_3\cos\mu_3=\mathrm{F}\cos\alpha_3+\mathrm{B}\cos\beta_3+\mathrm{D}\cos\gamma_3; \end{cases}$$

$$(12)\quad \begin{cases} \mathfrak{A}\cos\gamma_1+\mathfrak{F}\cos\gamma_2+\mathfrak{E}\cos\gamma_3=p_1\cos\nu_1=\mathrm{E}\cos\alpha_1+\mathrm{D}\cos\beta_1+\mathrm{C}\cos\gamma_1,\\ \mathfrak{F}\cos\gamma_1+\mathfrak{B}\cos\gamma_2+\mathfrak{D}\cos\gamma_3=p_2\cos\nu_2=\mathrm{E}\cos\alpha_2+\mathrm{D}\cos\beta_2+\mathrm{C}\cos\gamma_2,\\ \mathfrak{E}\cos\gamma_1+\mathfrak{D}\cos\gamma_2+\mathfrak{C}\cos\gamma_3=p_3\cos\nu_3=\mathrm{E}\cos\alpha_3+\mathrm{D}\cos\beta_3+\mathrm{C}\cos\gamma_3; \end{cases}$$

puis on conclura des formules (10), (11), (12)

$$(13)\quad \begin{cases} \mathrm{A}=\mathfrak{A}\cos^2\alpha_1+\mathfrak{B}\cos^2\alpha_2+\mathfrak{C}\cos^2\alpha_3\\ \qquad+2\mathfrak{D}\cos\alpha_2\cos\alpha_3+2\mathfrak{E}\cos\alpha_3\cos\alpha_1+2\mathfrak{F}\cos\alpha_1\cos\alpha_2,\\ \mathrm{B}=\mathfrak{A}\cos^2\beta_1+\mathfrak{B}\cos^2\beta_2+\mathfrak{C}\cos^2\beta_3\\ \qquad+2\mathfrak{D}\cos\beta_2\cos\beta_3+2\mathfrak{E}\cos\beta_3\cos\beta_1+2\mathfrak{F}\cos\beta_1\cos\beta_2,\\ \mathrm{C}=\mathfrak{A}\cos^2\gamma_1+\mathfrak{B}\cos^2\gamma_2+\mathfrak{C}\cos^2\gamma_3\\ \qquad+2\mathfrak{D}\cos\gamma_2\cos\gamma_3+2\mathfrak{E}\cos\gamma_3\cos\gamma_1+2\mathfrak{F}\cos\gamma_1\cos\gamma_2; \end{cases}$$

$$(14)\quad \begin{cases} \mathrm{D}=\mathfrak{A}\cos\beta_1\cos\gamma_1+\mathfrak{B}\cos\beta_2\cos\gamma_2+\mathfrak{C}\cos\beta_3\cos\gamma_3\\ \qquad+\mathfrak{D}(\cos\beta_2\cos\gamma_3+\cos\beta_3\cos\gamma_2)\\ \qquad+\mathfrak{E}(\cos\beta_3\cos\gamma_1+\cos\beta_1\cos\gamma_3)\\ \qquad+\mathfrak{F}(\cos\beta_1\cos\gamma_2+\cos\beta_2\cos\gamma_1),\\ \mathrm{E}=\mathfrak{A}\cos\gamma_1\cos\alpha_1+\mathfrak{B}\cos\gamma_2\cos\alpha_2+\mathfrak{C}\cos\gamma_3\cos\alpha_3\\ \qquad+\mathfrak{D}(\cos\gamma_2\cos\alpha_3+\cos\gamma_3\cos\alpha_2)\\ \qquad+\mathfrak{E}(\cos\gamma_3\cos\alpha_1+\cos\gamma_1\cos\alpha_3)\\ \qquad+\mathfrak{F}(\cos\gamma_1\cos\alpha_2+\cos\gamma_2\cos\alpha_1),\\ \mathrm{F}=\mathfrak{A}\cos\alpha_1\cos\beta_1+\mathfrak{B}\cos\alpha_2\cos\beta_2+\mathfrak{C}\cos\alpha_3\cos\beta_3\\ \qquad+\mathfrak{D}(\cos\alpha_2\cos\beta_3+\cos\alpha_3\cos\beta_2)\\ \qquad+\mathfrak{E}(\cos\alpha_3\cos\beta_1+\cos\alpha_1\cos\beta_3)\\ \qquad+\mathfrak{F}(\cos\alpha_1\cos\beta_2+\cos\alpha_2\cos\beta_1). \end{cases}$$

On pourrait, au reste, déduire les équations (13) et (14) des équations (7) et (8) à l'aide d'un échange opéré entre le système des demi-axes des $x, y, z$ positives et le système des demi-axes OL, OM, ON.



Concevons, à présent, que les pressions ou tensions principales soient précisément celles qui ont été désignées par $p_1, p_2, p_3$, et que, de ces trois pressions ou tensions, les deux dernières s'évanouissent. On aura

$$(15)\quad \mathfrak{A}=\pm p_1,\qquad \mathfrak{B}=0,\qquad \mathfrak{C}=0,\qquad \mathfrak{D}=0,\qquad \mathfrak{E}=0,\qquad \mathfrak{F}=0.$$

Par suite, les formules (13) et (14) donneront

$$(16)\quad \begin{cases} \mathrm{A}=\mathfrak{A}\cos^2\alpha_1, & \mathrm{B}=\mathfrak{A}\cos^2\beta_1, & \mathrm{C}=\mathfrak{A}\cos^2\gamma_1,\\ \mathrm{D}=\mathfrak{A}\cos\beta_1\cos\gamma_1, & \mathrm{E}=\mathfrak{A}\cos\gamma_1\cos\alpha_1, & \mathrm{F}=\mathfrak{A}\cos\alpha_1\cos\beta_1. \end{cases}$$

De même, si, en attribuant des valeurs nulles à deux des pressions ou tensions principales qui correspondent au point $(x, y, z)$, on supposait la troisième pression ou tension principale dirigée suivant la droite qui forme avec les demi-axes des coordonnées positives, non plus les angles $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$, mais les angles $\alpha, \beta, \gamma$, on trouverait, en désignant par $\mathfrak{A}$ cette pression prise avec le signe $-$, ou cette tension prise avec le signe $+$,

$$(17)\quad \begin{cases} \mathrm{A}=\mathfrak{A}\cos^2\alpha, & \mathrm{B}=\mathfrak{A}\cos^2\beta, & \mathrm{C}=\mathfrak{A}\cos^2\gamma,\\ \mathrm{D}=\mathfrak{A}\cos\beta\cos\gamma, & \mathrm{E}=\mathfrak{A}\cos\gamma\cos\alpha, & \mathrm{F}=\mathfrak{A}\cos\alpha\cos\beta. \end{cases}$$

D'autre part, si l'on nomme $\rho$ la densité naturelle du corps solide supposé élastique et homogène, $\varepsilon$ la dilatation linéaire mesurée au point $(x, y, z)$ suivant la droite dont il s'agit, et $\Omega$ la vitesse de propagation du son dans une verge rectangulaire infiniment mince, qui aurait pour axe cette même droite, on trouvera, en vertu de la formule (77) de l'article précédent,

$$(18)\qquad \Omega^2=\frac{\mathfrak{A}}{\rho\varepsilon}.$$

Enfin, si l'on désigne par $\xi, \eta, \zeta$ les déplacements infiniment petits du point $(x, y, z)$ mesurés parallèlement aux axes coordonnés, on aura

[*voir* la formule (9) de la page 11]

$$(19)\quad \begin{cases} \varepsilon = \dfrac{\partial\xi}{\partial x}\cos^2\alpha + \dfrac{\partial\eta}{\partial y}\cos^2\beta + \dfrac{\partial\zeta}{\partial z}\cos^2\gamma \\ \quad + \left(\dfrac{\partial\eta}{\partial z} + \dfrac{\partial\zeta}{\partial y}\right)\cos\beta\cos\gamma + \left(\dfrac{\partial\zeta}{\partial x} + \dfrac{\partial\xi}{\partial z}\right)\cos\gamma\cos\alpha + \left(\dfrac{\partial\xi}{\partial y} + \dfrac{\partial\eta}{\partial x}\right)\cos\alpha\cos\beta; \end{cases}$$

puis on conclura des équations (17) et (18), combinées avec les formules (5) et (6) des pages 10 et 11,

$$(20)\quad \begin{cases} a\dfrac{\partial\xi}{\partial x} + f\dfrac{\partial\eta}{\partial y} + e\dfrac{\partial\zeta}{\partial z} + u\left(\dfrac{\partial\eta}{\partial z} + \dfrac{\partial\zeta}{\partial y}\right) + v\left(\dfrac{\partial\zeta}{\partial x} + \dfrac{\partial\xi}{\partial z}\right) + w\left(\dfrac{\partial\xi}{\partial y} + \dfrac{\partial\eta}{\partial x}\right) = \rho\Omega^2\varepsilon\cos^2\alpha, \\ f\dfrac{\partial\xi}{\partial x} + b\dfrac{\partial\eta}{\partial y} + d\dfrac{\partial\zeta}{\partial z} + u'\left(\dfrac{\partial\eta}{\partial z} + \dfrac{\partial\zeta}{\partial y}\right) + v'\left(\dfrac{\partial\zeta}{\partial x} + \dfrac{\partial\xi}{\partial z}\right) + w'\left(\dfrac{\partial\xi}{\partial y} + \dfrac{\partial\eta}{\partial x}\right) = \rho\Omega^2\varepsilon\cos^2\beta, \\ e\dfrac{\partial\xi}{\partial x} + d\dfrac{\partial\eta}{\partial y} + c\dfrac{\partial\zeta}{\partial z} + u''\left(\dfrac{\partial\eta}{\partial z} + \dfrac{\partial\zeta}{\partial y}\right) + v''\left(\dfrac{\partial\zeta}{\partial x} + \dfrac{\partial\xi}{\partial z}\right) + w''\left(\dfrac{\partial\xi}{\partial y} + \dfrac{\partial\eta}{\partial x}\right) = \rho\Omega^2\varepsilon\cos^2\gamma; \end{cases}$$

$$(21)\quad \begin{cases} u\dfrac{\partial\xi}{\partial x} + u'\dfrac{\partial\eta}{\partial y} + u''\dfrac{\partial\zeta}{\partial z} + d\left(\dfrac{\partial\eta}{\partial z} + \dfrac{\partial\zeta}{\partial y}\right) + w''\left(\dfrac{\partial\zeta}{\partial x} + \dfrac{\partial\xi}{\partial z}\right) + v'\left(\dfrac{\partial\xi}{\partial y} + \dfrac{\partial\eta}{\partial x}\right) = \rho\Omega^2\varepsilon\cos\beta\cos\gamma, \\ v\dfrac{\partial\xi}{\partial x} + v'\dfrac{\partial\eta}{\partial y} + v''\dfrac{\partial\zeta}{\partial z} + w''\left(\dfrac{\partial\eta}{\partial z} + \dfrac{\partial\zeta}{\partial y}\right) + e\left(\dfrac{\partial\zeta}{\partial x} + \dfrac{\partial\xi}{\partial z}\right) + u\left(\dfrac{\partial\xi}{\partial y} + \dfrac{\partial\eta}{\partial x}\right) = \rho\Omega^2\varepsilon\cos\gamma\cos\alpha, \\ w\dfrac{\partial\xi}{\partial x} + w'\dfrac{\partial\eta}{\partial y} + w''\dfrac{\partial\zeta}{\partial z} + v'\left(\dfrac{\partial\eta}{\partial z} + \dfrac{\partial\zeta}{\partial y}\right) + u\left(\dfrac{\partial\zeta}{\partial x} + \dfrac{\partial\xi}{\partial z}\right) + f\left(\dfrac{\partial\xi}{\partial y} + \dfrac{\partial\eta}{\partial x}\right) = \rho\Omega^2\varepsilon\cos\alpha\cos\beta. \end{cases}$$

Cela posé, l'élimination des six quantités

$$(22)\qquad \frac{\partial\xi}{\partial x},\ \frac{\partial\eta}{\partial y},\ \frac{\partial\zeta}{\partial z},\ \frac{\partial\eta}{\partial z} + \frac{\partial\zeta}{\partial y},\ \frac{\partial\zeta}{\partial x} + \frac{\partial\xi}{\partial z},\ \frac{\partial\xi}{\partial y} + \frac{\partial\eta}{\partial x}$$

entre les équations (19), (20) et (21) produira évidemment une autre équation de la forme

$$(23)\quad \begin{cases} \dfrac{1}{\rho\Omega^2} = \mathfrak{A}\cos^4\alpha + \mathfrak{B}\cos^4\beta + \mathfrak{C}\cos^4\gamma \\ \quad + 2\mathfrak{D}\cos^2\beta\cos^2\gamma + 2\mathfrak{E}\cos^2\gamma\cos^2\alpha + 2\mathfrak{F}\cos^2\alpha\cos^2\beta \\ \quad + 2\mathfrak{U}\cos^2\alpha\cos\beta\cos\gamma + 2\mathfrak{V}\cos^2\alpha\cos\gamma + 2\mathfrak{W}\cos^2\alpha\cos\beta \\ \quad + 2\mathfrak{U}'\cos^2\beta\cos\gamma + 2\mathfrak{V}'\cos\alpha\cos^2\beta\cos\gamma + 2\mathfrak{W}'\cos\alpha\cos^2\beta \\ \quad + 2\mathfrak{U}''\cos\beta\cos^2\gamma + 2\mathfrak{V}''\cos\alpha\cos^2\gamma + 2\mathfrak{W}''\cos\alpha\cos\beta\cos^2\gamma, \end{cases}$$

$\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$, $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{U}$, $\mathfrak{V}$, $\mathfrak{W}$, $\mathfrak{U}'$, $\mathfrak{V}'$, $\mathfrak{W}'$, $\mathfrak{U}''$, $\mathfrak{V}''$, $\mathfrak{W}''$ désignant de nouvelles



constantes qui seront exprimées à l'aide des quinze coefficients a, b, c, d, e, f, u, v, w, u′, v′, w′, u″, v″, w″. L'équation (23) fait voir comment la vitesse de propagation du son, dans une verge rectangulaire infiniment mince, extraite d'un corps élastique, varie avec les angles $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ qui déterminent la direction que prenait dans ce même corps l'axe de la verge.

Concevons maintenant que, à partir du point $(x, y, z)$, on porte sur la droite qui forme avec les demi-axes des coordonnées positives les angles $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, une longueur dont le carré représente le produit $\Omega\sqrt{\rho}$, et désignons par $x + \mathrm{x}$, $y + \mathrm{y}$, $z + \mathrm{z}$ les coordonnées de l'extrémité de cette longueur. On aura

$$(24)\qquad \frac{\mathrm{x}}{\cos\alpha} = \frac{\mathrm{y}}{\cos\beta} = \frac{\mathrm{z}}{\cos\gamma} = \pm\rho^{\frac{1}{4}}\Omega^{\frac{1}{2}},$$

et l'on tirera de la formule (23)

$$(25)\quad \begin{cases} \mathfrak{A}\mathrm{x}^4 + \mathfrak{B}\mathrm{y}^4 + \mathfrak{C}\mathrm{z}^4 + 2\mathfrak{D}\mathrm{y}^2\mathrm{z}^2 + 2\mathfrak{E}\mathrm{z}^2\mathrm{x}^2 + 2\mathfrak{F}\mathrm{x}^2\mathrm{y}^2 \\ \quad + 2\mathrm{x}^2(\mathfrak{U}\mathrm{yz} + \mathfrak{V}\mathrm{zx} + \mathfrak{W}\mathrm{xy}) \\ \quad + 2\mathrm{y}^2(\mathfrak{U}'\mathrm{yz} + \mathfrak{V}'\mathrm{zx} + \mathfrak{W}'\mathrm{xy}) \\ \quad + 2\mathrm{z}^2(\mathfrak{U}''\mathrm{yz} + \mathfrak{V}''\mathrm{zx} + \mathfrak{W}''\mathrm{xy}) = 1. \end{cases}$$

Cette dernière équation appartient à une surface du quatrième degré qui a pour centre le point $(x, y, z)$; et, comme le rayon vecteur mené de ce centre à un point de la surface est d'autant plus grand que la vitesse $\Omega$ est plus petite, on peut affirmer que la vitesse $\Omega$ acquiert une valeur minimum quand ce rayon vecteur devient un maximum, et une valeur maximum quand ce rayon vecteur devient un minimum. Dans l'un et l'autre cas, les coordonnées x, y, z de l'extrémité du rayon vecteur vérifient la formule

$$(26)\quad \begin{cases} \mathfrak{A}\mathrm{x}^2 + \mathfrak{F}\mathrm{y}^2 + \mathfrak{E}\mathrm{z}^2 + \mathfrak{U}\mathrm{yz} + \mathfrak{V}\mathrm{zx} + \mathfrak{W}\mathrm{xy} + \dfrac{\mathrm{y}}{2\mathrm{x}}(\mathfrak{W}\mathrm{x}^2 + \mathfrak{W}'\mathrm{y}^2 + \mathfrak{W}''\mathrm{z}^2) + \dfrac{\mathrm{z}}{2\mathrm{x}}(\mathfrak{V}\mathrm{x}^2 + \mathfrak{V}'\mathrm{y}^2 + \mathfrak{V}''\mathrm{z}^2) \\ = \mathfrak{F}\mathrm{x}^2 + \mathfrak{B}\mathrm{y}^2 + \mathfrak{D}\mathrm{z}^2 + \mathfrak{U}'\mathrm{yz} + \mathfrak{V}'\mathrm{zx} + \mathfrak{W}'\mathrm{xy} + \dfrac{\mathrm{z}}{2\mathrm{y}}(\mathfrak{U}\mathrm{x}^2 + \mathfrak{U}'\mathrm{y}^2 + \mathfrak{U}''\mathrm{z}^2) + \dfrac{\mathrm{x}}{2\mathrm{y}}(\mathfrak{W}\mathrm{x}^2 + \mathfrak{W}'\mathrm{y}^2 + \mathfrak{W}''\mathrm{z}^2) \\ = \mathfrak{E}\mathrm{x}^2 + \mathfrak{D}\mathrm{y}^2 + \mathfrak{C}\mathrm{z}^2 + \mathfrak{U}''\mathrm{yz} + \mathfrak{V}''\mathrm{zx} + \mathfrak{W}''\mathrm{xy} + \dfrac{\mathrm{x}}{2\mathrm{z}}(\mathfrak{V}\mathrm{x}^2 + \mathfrak{V}'\mathrm{y}^2 + \mathfrak{V}''\mathrm{z}^2) + \dfrac{\mathrm{y}}{2\mathrm{z}}(\mathfrak{U}\mathrm{x}^2 + \mathfrak{U}'\mathrm{y}^2 + \mathfrak{U}''\mathrm{z}^2). \end{cases}$$

Donc par suite, lorsque la vitesse $\Omega$ deviendra un maximum ou un minimum, on aura

$$(27)\quad \left\{\begin{aligned}
&\mathfrak{A}\cos^2\alpha+\mathfrak{F}\cos^2\beta+\mathfrak{E}\cos^2\gamma+\mathfrak{U}\cos\beta\cos\gamma+\mathfrak{V}\cos\gamma\cos\alpha+\mathfrak{W}\cos\alpha\cos\beta\\
&\quad+\frac{\cos\beta}{2\cos\alpha}(\mathfrak{W}\cos^2\alpha+\mathfrak{W}'\cos^2\beta+\mathfrak{W}''\cos^2\gamma)+\frac{\cos\gamma}{2\cos\alpha}(\mathfrak{V}\cos^2\alpha+\mathfrak{V}'\cos^2\beta+\mathfrak{V}''\cos^2\gamma)\\
&=\mathfrak{F}\cos^2\alpha+\mathfrak{B}\cos^2\beta+\mathfrak{D}\cos^2\gamma+\mathfrak{U}'\cos\beta\cos\gamma+\mathfrak{V}'\cos\gamma\cos\alpha+\mathfrak{W}'\cos\alpha\cos\beta\\
&\quad+\frac{\cos\gamma}{2\cos\beta}(\mathfrak{U}\cos^2\alpha+\mathfrak{U}'\cos^2\beta+\mathfrak{U}''\cos^2\gamma)+\frac{\cos\alpha}{2\cos\beta}(\mathfrak{W}\cos^2\alpha+\mathfrak{W}'\cos^2\beta+\mathfrak{W}''\cos^2\gamma)\\
&=\mathfrak{E}\cos^2\alpha+\mathfrak{D}\cos^2\beta+\mathfrak{C}\cos^2\gamma+\mathfrak{U}''\cos\beta\cos\gamma+\mathfrak{V}''\cos\gamma\cos\alpha+\mathfrak{W}''\cos\alpha\cos\beta\\
&\quad+\frac{\cos\alpha}{2\cos\gamma}(\mathfrak{V}\cos^2\alpha+\mathfrak{V}'\cos^2\beta+\mathfrak{V}''\cos^2\gamma)+\frac{\cos\beta}{2\cos\gamma}(\mathfrak{U}\cos^2\alpha+\mathfrak{U}'\cos^2\beta+\mathfrak{U}''\cos^2\gamma)\\
&=\frac{1}{\rho\Omega^2}.
\end{aligned}\right.$$

Si le corps solide que l'on considère offre trois axes d'élasticité rectangulaires entre eux et parallèles aux axes des $x$, $y$, $z$, les neuf coefficients

$$u,\quad v,\quad w,\quad u',\quad v',\quad w',\quad u'',\quad v'',\quad w''$$

s'évanouiront; et les formules (20), réduites aux suivantes

$$(28)\quad \left\{\begin{aligned}
a\frac{\partial\xi}{\partial x}+f\frac{\partial\eta}{\partial y}+e\frac{\partial\zeta}{\partial z}&=\rho\Omega^2\varepsilon\cos^2\alpha,\\
f\frac{\partial\xi}{\partial x}+b\frac{\partial\eta}{\partial y}+d\frac{\partial\zeta}{\partial z}&=\rho\Omega^2\varepsilon\cos^2\beta,\\
e\frac{\partial\xi}{\partial x}+d\frac{\partial\eta}{\partial y}+c\frac{\partial\zeta}{\partial z}&=\rho\Omega^2\varepsilon\cos^2\gamma,
\end{aligned}\right.$$

donneront

$$(29)\quad \left\{\begin{aligned}
\frac{\partial\xi}{\partial x}&=\rho\Omega^2\varepsilon\frac{(bc-d^2)\cos^2\alpha+(de-cf)\cos^2\beta+(fd-be)\cos^2\gamma}{abc-ad^2-be^2-cf^2+2def},\\
\frac{\partial\eta}{\partial y}&=\rho\Omega^2\varepsilon\frac{(de-cf)\cos^2\alpha+(ca-e^2)\cos^2\beta+(ef-ad)\cos^2\gamma}{abc-ad^2-be^2-cf^2+2def},\\
\frac{\partial\zeta}{\partial z}&=\rho\Omega^2\varepsilon\frac{(fd-be)\cos^2\alpha+(ef-ad)\cos^2\beta+(ab-f^2)\cos^2\gamma}{abc-ad^2-be^2-cf^2+2def};
\end{aligned}\right.$$



tandis que l'on tirera des formules (21)

$$(30)\quad \left\{\begin{aligned}
\frac{\partial\eta}{\partial z}+\frac{\partial\zeta}{\partial y}&=\rho\Omega^2\varepsilon\frac{\cos\beta\cos\gamma}{d},\\
\frac{\partial\zeta}{\partial x}+\frac{\partial\xi}{\partial z}&=\rho\Omega^2\varepsilon\frac{\cos\gamma\cos\alpha}{e},\\
\frac{\partial\xi}{\partial y}+\frac{\partial\eta}{\partial x}&=\rho\Omega^2\varepsilon\frac{\cos\alpha\cos\beta}{f}.
\end{aligned}\right.$$

Par suite, l'équation (23) deviendra

$$(31)\quad \left\{\begin{aligned}
\frac{1}{\rho\Omega^2}=&\mathfrak{A}\cos^4\alpha+\mathfrak{B}\cos^4\beta+\mathfrak{C}\cos^4\gamma\\
&+2\mathfrak{D}\cos^2\beta\cos^2\gamma+2\mathfrak{E}\cos^2\gamma\cos^2\alpha+2\mathfrak{F}\cos^2\alpha\cos^2\beta,
\end{aligned}\right.$$

les valeurs de $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$, $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{F}$ étant respectivement

$$(32)\quad \left\{\begin{aligned}
\mathfrak{A}&=\frac{bc-d^2}{abc-ad^2-be^2-cf^2+2def},\\
\mathfrak{B}&=\frac{ca-e^2}{abc-ad^2-be^2-cf^2+2def},\\
\mathfrak{C}&=\frac{ab-f^2}{abc-ad^2-be^2-cf^2+2def};
\end{aligned}\right.$$

$$(33)\quad \left\{\begin{aligned}
\mathfrak{D}&=\frac{ef-ad}{abc-ad^2-be^2-cf^2+2def}+\frac{1}{2d},\\
\mathfrak{E}&=\frac{fd-be}{abc-ad^2-be^2-cf^2+2def}+\frac{1}{2e},\\
\mathfrak{F}&=\frac{de-cf}{abc-ad^2-be^2-cf^2+2def}+\frac{1}{2f};
\end{aligned}\right.$$

et les diverses valeurs du produit $\Omega\sqrt{\rho}$ auront pour mesure les divers rayons vecteurs menés du point $(x, y, z)$ à la surface représentée par l'équation

$$(34)\quad \mathfrak{A}x^4+\mathfrak{B}y^4+\mathfrak{C}z^4+2\mathfrak{D}y^2z^2+2\mathfrak{E}z^2x^2+2\mathfrak{F}x^2y^2=1.$$

Alors aussi, en désignant par $\Omega'$, $\Omega''$, $\Omega'''$ et par $\Omega_1$, $\Omega_2$, $\Omega_3$ les valeurs de $\Omega$ correspondantes à des verges dont les axes seraient parallèles aux

axes coordonnés, ou diviseraient les angles formés par ces derniers axes en parties égales, on trouverait : 1°

$$\frac{1}{\Omega'^2}=\rho\mathfrak{A},\qquad \frac{1}{\Omega''^2}=\rho\mathfrak{B},\qquad \frac{1}{\Omega'''^2}=\rho\mathfrak{C}; \tag{35}$$

2°

$$\begin{cases}\dfrac{1}{\Omega_1^2}=\dfrac{1}{2}\rho\left(\dfrac{\mathfrak{B}+\mathfrak{C}}{2}+\mathfrak{D}\right),\\[2ex] \dfrac{1}{\Omega_2^2}=\dfrac{1}{2}\rho\left(\dfrac{\mathfrak{C}+\mathfrak{A}}{2}+\mathfrak{E}\right),\\[2ex] \dfrac{1}{\Omega_3^2}=\dfrac{1}{2}\rho\left(\dfrac{\mathfrak{A}+\mathfrak{B}}{2}+\mathfrak{F}\right).\end{cases} \tag{36}$$

A l'aide des équations (35) et (36), on peut fixer les valeurs des coefficients $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$, $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{F}$, lorsqu'on a déduit de l'expérience celles des vitesses $\Omega'$, $\Omega''$, $\Omega'''$, $\Omega_1$, $\Omega_2$, $\Omega_3$. Ajoutons que, si l'on pose

$$\cos\alpha=\cos\beta=\cos\gamma=\pm\frac{1}{\sqrt{3}},$$

la formule (31) donnera

$$\frac{1}{\Omega^2}=\frac{\rho}{9}(\mathfrak{A}+\mathfrak{B}+\mathfrak{C}+2\mathfrak{D}+2\mathfrak{E}+2\mathfrak{F}), \tag{37}$$

et, par conséquent,

$$\frac{1}{\Omega^2}=\frac{4}{9}\left(\frac{1}{\Omega_1^2}+\frac{1}{\Omega_2^2}+\frac{1}{\Omega_3^2}\right)-\frac{1}{9}\left(\frac{1}{\Omega'^2}+\frac{1}{\Omega''^2}+\frac{1}{\Omega'''^2}\right). \tag{38}$$

Telle est la relation qui existe entre les vitesses $\Omega'$, $\Omega''$, $\Omega'''$; $\Omega_1$, $\Omega_2$, $\Omega_3$ et la vitesse $\Omega$ relative à une verge dont l'axe forme trois angles égaux avec les trois axes des $x$, $y$ et $z$.

Si l'on suppose les molécules du corps élastique primitivement distribuées de la même manière par rapport aux trois plans menés par l'une d'entre elles et parallèles aux plans coordonnés, on aura

$$a=b=c,\qquad d=e=f, \tag{39}$$

$$\mathfrak{A}=\mathfrak{B}=\mathfrak{C}=\frac{a+f}{a^2+af-2f^2},\qquad \mathfrak{D}=\mathfrak{E}=\mathfrak{F}=\frac{1}{2f}-\frac{f}{a^2+af-2f^2}; \tag{40}$$



et l'équation (31), combinée avec la formule connue

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1,$$

donnera

$$\begin{aligned}\frac{1}{\rho\Omega^2}&=\mathfrak{A}(\cos^4\alpha+\cos^4\beta+\cos^4\gamma)+2\mathfrak{F}(\cos^2\beta\cos^2\gamma+\cos^2\gamma\cos^2\alpha+\cos^2\alpha\cos^2\beta)\\&=\mathfrak{F}+(\mathfrak{A}-\mathfrak{F})(\cos^4\alpha+\cos^4\beta+\cos^4\gamma).\end{aligned} \tag{41}$$

Alors aussi, en comparant la première des formules (2) et la dernière des formules (3) de la page 10 à la première des formules (38) et à la dernière des formules (39) de la page 199 du III$^e$ Volume des *Exercices* (1), on trouvera

$$a=\rho L,\qquad f=\rho R, \tag{42}$$

et, par suite, on tirera des équations (40),

$$\mathfrak{A}=\frac{1}{\rho}\frac{L+R}{L^2+LR-2R^2},\qquad \mathfrak{F}=\frac{1}{\rho}\left(\frac{1}{2R}-\frac{R}{L^2+LR-2R^2}\right). \tag{43}$$

Enfin, si l'élasticité du corps est la même dans tous les sens, la condition (45) de la page 201 du III$^e$ Volume (2), savoir

$$L=3R, \tag{44}$$

sera remplie, et les formules (43) donneront

$$\mathfrak{A}=\mathfrak{F}=\frac{2}{5}\frac{1}{\rho R}=\frac{2}{5}\frac{1}{f}. \tag{45}$$

Cela posé, l'équation (41) pourra être réduite à

$$\Omega^2=\frac{5}{2}R=\frac{5}{2}\frac{f}{\rho}, \tag{46}$$

(1) *Œuvres de Cauchy*, S. II, T. VIII, p. 238.
(2) *Ibid.*, p. 241.

ou, ce qui revient au même, à

$$\Omega = \left(\frac{5R}{2}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{5f}{2\rho}\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{47}$$

Cette dernière formule coïncide, comme on devait s'y attendre, avec l'équation (53) de la page 365 du III^e^ Volume des *Exercices* (1).

(1) *OEuvres de Cauchy*, S. II, T. VIII, p. 423.

# SUR LA RELATION

QUI EXISTE

# ENTRE LES PRESSIONS OU TENSIONS

SUPPORTÉES

PAR DEUX PLANS QUELCONQUES EN UN POINT DONNÉ D'UN CORPS SOLIDE.

Nous avons prouvé, dans le II^e^ Volume des *Exercices* (p. 48) (1) que, si par un point donné d'un corps solide on mène deux axes qui se coupent à angles droits, la projection sur le premier axe de la pression ou tension supportée par un plan perpendiculaire au second sera équivalente à la projection sur ce second axe de la pression ou tension supportée par un plan perpendiculaire au premier. Nous allons maintenant faire voir que la même proposition s'étend au cas où les deux axes forment entre eux un angle quelconque. Effectivement, soient OL, OM deux axes ou plutôt deux demi-axes menés arbitrairement par un point donné d'un corps solide. Rapportons d'ailleurs tous les points du corps à trois axes rectangulaires des $x$, $y$, $z$; et nommons

$$\alpha_1,\ \beta_1,\ \gamma_1;\ \alpha_2,\ \beta_2,\ \gamma_2$$

les angles formés par les demi-axes OL, OM avec ceux des coordonnées positives.

Soient enfin

$p_1$, $p_2$ les pressions ou tensions supportées au point O, et du côté des demi-axes OL, OM, par des plans perpendiculaires à ces demi-axes;

(1) *OEuvres de Cauchy*, S. II, T. VII, p. 67.

$\lambda_1$, $\mu_1$, $\nu_1$; $\lambda_2$, $\mu_2$, $\nu_2$ les angles formés avec les demi-axes des coordonnées positives par les pressions ou tensions $p_1$, $p_2$;

$\varpi_1$, l'angle formé par la direction de la force $p_1$ avec le demi-axe OM;

$\varpi_2$ l'angle formé par la direction de la force $p_2$ avec le demi-axe OL;

A, F, E; F, B, D; E, D, C les projections algébriques des pressions ou tensions supportées au point O, et du côté des coordonnées positives par trois plans perpendiculaires aux axes des $x$, $y$, $z$.

On trouvera

$$(1)\qquad \begin{cases} p_1\cos\lambda_1 = A\cos\alpha_1 + F\cos\beta_1 + E\cos\gamma_1, \\ p_1\cos\mu_1 = F\cos\alpha_1 + B\cos\beta_1 + D\cos\gamma_1, \\ p_2\cos\nu_1 = E\cos\alpha_1 + D\cos\beta_1 + C\cos\gamma_1, \end{cases}$$

$$(2)\qquad \cos\varpi_1 = \cos\lambda_1\cos\alpha_2 + \cos\mu_1\cos\beta_2 + \cos\nu_1\cos\gamma_2,$$

et, par suite,

$$(3)\qquad \begin{cases} p_1\cos\varpi_1 = A\cos\alpha_1\cos\alpha_2 + B\cos\beta_1\cos\beta_2 + C\cos\gamma_1\cos\gamma_2 \\ \qquad + D(\cos\beta_1\cos\gamma_2 + \cos\beta_2\cos\gamma_1) \\ \qquad + E(\cos\gamma_1\cos\alpha_2 + \cos\gamma_2\cos\alpha_1) \\ \qquad + F(\cos\alpha_1\cos\beta_2 + \cos\alpha_2\cos\beta_1). \end{cases}$$

Cela posé, concevons que l'on vienne à échanger entre eux les demi-axes OL, OM. En vertu de cet échange, le premier membre de l'équation (3) se transformera dans le produit $p_2\cos\varpi_2$, tandis que le second membre restera invariable. On aura, en conséquence,

$$(4)\qquad p_2\cos\varpi_2 = p_1\cos\varpi_1.$$

Or les produits $p_1\cos\varpi_1$, $p_2\cos\varpi_2$ représenteront, au signe près, les projections de la force $p_1$ sur la droite OM, et de la force $p_2$ sur la droite OL. On pourra donc énoncer la proposition suivante :

Théorème. — *Si, par un point donné d'un corps solide, on mène deux axes qui forment entre eux un angle quelconque, la projection sur le premier axe de la pression ou tension supportée par un plan perpendiculaire au second sera équivalente à la projection sur ce second axe de la pression ou tension supportée par un plan perpendiculaire au premier.*



Il est bon d'observer que de ce théorème, ou de l'équation (3) qui le renferme, on peut immédiatement déduire les formules (7), (8), (10), (11), (12), (13) et (14) de l'article précédent.

# SUR LES VIBRATIONS LONGITUDINALES

D'UNE

# VERGE CYLINDRIQUE OU PRISMATIQUE

A BASE QUELCONQUE.

Considérons une verge élastique qui se confonde, dans l'état naturel, avec un prisme ou un cylindre droit, dont la base, renfermée dans un contour de forme arbitraire, offre des dimensions très petites. Rapportons tous les points de l'espace à trois axes rectangulaires des $x, y, z$, en prenant pour axe des $x$ une droite comprise dans l'épaisseur de la verge et parallèle aux arêtes du prisme ou aux génératrices du cylindre dont il s'agit. Supposons d'ailleurs la verge soumise à une pression extérieure, mais constante, désignée par P; et soient, pendant le mouvement de la verge,

(1) $\qquad A,\ F,\ E;\quad F,\ B,\ D;\quad E,\ D,\ C$

les projections algébriques des pressions ou tensions que les plans, menés par le point $(x, y, z)$ parallèlement aux plans des $y, z$, des $z, x$ et des $x, y$, supportent du côté des coordonnées positives. Soient enfin Q et R deux points correspondants à la même abscisse $x$, et situés, l'un sur l'axe des $x$, l'autre sur la surface latérale de la verge élastique. Si l'on nomme $\alpha, \beta, \gamma$ les angles formés par la normale à cette surface avec les demi-axes des coordonnées positives, on aura

$$\cos\alpha = 0, \qquad \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1, \tag{2}$$

et, par suite,

$$\cos\gamma = \pm\sin\beta; \tag{3}$$



puis, en faisant coïncider le point $(x, y, z)$ avec le point R, on tirera, des formules (4) de la page 329 du III$^e$ Volume (1),

$$\begin{cases} F\cos\beta + E\cos\gamma = 0, \\ (B+P)\cos\beta + D\cos\gamma = 0, \qquad D\cos\beta + (C+P)\cos\gamma = 0. \end{cases} \tag{4}$$

Il y a plus, comme les valeurs de A, B, C, D, E, F ne varient pas sensiblement lorsqu'on déplace le point $(x, y, z)$ d'une quantité très petite, les formules (4) seront encore à très peu près exactes, si l'on substitue au point R le point Q. Ajoutons que cette conclusion restera vraie, quelle que soit la position du point R sur le contour de la section faite dans la verge par un plan perpendiculaire à l'axe des $x$ et correspondant à l'abscisse $x$. Donc, si ce contour présente une courbe continue, et dans laquelle la direction de la normale varie d'un point à un autre par degrés insensibles, on pourra considérer les formules (4) comme devant être vérifiées, pour un point Q choisi arbitrairement sur l'axe des $x$, quel que soit l'angle $\beta$, ou, ce qui revient au même, quel que soit le rapport de $\cos\beta$ à $\cos\gamma$. On aura donc alors, pour tous les points de la verge situés sur l'axe des $x$,

$$F = 0, \qquad E = 0, \qquad B + P = 0, \qquad D = 0, \qquad C + P = 0 \tag{5}$$

et, par conséquent,

$$B = C = -P, \qquad D = E = F = 0. \tag{6}$$

Il est d'ailleurs facile de s'assurer, *a posteriori*, que les valeurs de B, C, D, E, F, fournies par les équations (6), vérifient les formules (4), quels que soient les angles $\beta$ et $\gamma$.

Si le contour de la section faite dans la verge par un plan perpendiculaire à l'axe des $x$ offrait un polygone rectiligne ou curviligne, alors aux diverses positions, que pourrait prendre le point R, correspondraient au moins deux valeurs différentes du rapport $\frac{\cos\beta}{\cos\gamma}$; d'où il est

(1) *OEuvres de Cauchy*, S. II, T. VIII, p. 383.

aisé de conclure que les formules (4) entraîneraient toujours les formules (6).

Soient maintenant

$\varphi$ la force accélératrice appliquée au point $(x, y, z)$;
$\xi$ le déplacement de ce point dans le sens des $x$ positives;
X la projection algébrique de la force $\varphi$ sur l'axe des abscisses;
$\rho$ la densité naturelle de la verge élastique.

On aura [*voir* les formules (25) et (28) de la page 166 du III^e^ Volume (1)]

$$\frac{\partial A}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial y}+\frac{\partial E}{\partial z}+\rho X=\rho\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2}. \tag{7}$$

D'ailleurs, quand on réduira les deux coordonnées $y$ et $z$ à zéro, les valeurs de B, C, D, E, F seront celles que déterminent les formules (6). Donc alors l'équation (7) donnera

$$\frac{\partial A}{\partial x}+\rho X=\rho\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2}. \tag{8}$$

De plus, comme les formules (6) coïncident avec les formules (74) de la page 37, quand on suppose dans ces dernières $\Phi = P$, les équations (5), (6) des pages 10 et 11, réunies aux formules (6) de la page 57, fourniront une valeur de A semblable à celle que nous avons précédemment obtenue (p. 36), en sorte qu'on aura encore

$$A=\rho\Omega^2\frac{\partial\xi}{\partial x}+\Pi. \tag{9}$$

Seulement on devra remplacer $\Phi$ par P dans la seconde des formules (15) et (16) de la page 28, à l'aide desquelles on pourra toujours déterminer les deux coefficients $\Omega$ et $\Pi$. Cela posé, on trouvera, pour tous les points de la verge situés sur l'axe des $x$,

$$\Omega^2\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2}+X=\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2}. \tag{10}$$

Ajoutons que, si la verge est terminée par deux plans perpendiculaires

(1) *Œuvres de Cauchy*, S. II, T. VIII, p. 202 et 203.



à l'axe des $x$ et dont chacun supporte une pression extérieure $\mathfrak{p}$ différente de P, on aura, pour les deux extrémités de cette verge, supposées libres,

$$A=-\mathfrak{p}, \tag{11}$$

ou, ce qui revient au même,

$$\Omega^2\frac{\partial\xi}{\partial x}+\frac{\Pi+\mathfrak{p}}{\rho}=0. \tag{12}$$

Au contraire, si l'une des extrémités devient fixe, il faudra, pour cette extrémité, remplacer la condition (12) par la suivante

$$\xi=0. \tag{13}$$

Dans le cas particulier où la force accélératrice $\varphi$ et les pressions extérieures P, $\mathfrak{p}$ s'évanouissent, l'équation (10) se réduit simplement à

$$\Omega^2\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2}=\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2}, \tag{14}$$

et la condition (12) à

$$\frac{\partial\xi}{\partial x}=0. \tag{15}$$

L'équation (10) ou (14), réunie aux conditions (12), (13) ou (15), suffit évidemment pour déterminer le déplacement $\xi$ d'un point quelconque de la verge élastique dans le sens de l'abscisse $x$, et, par conséquent, les vibrations longitudinales de cette verge. Or ces équations et conditions sont absolument indépendantes de la forme de la section faite dans la verge élastique par un plan perpendiculaire à l'axe des $x$, et entièrement semblables aux formules qui déterminent les vibrations longitudinales d'une verge rectangulaire, c'est-à-dire aux formules (25), (67), (34), (36), (64) des pages 29, 31, 35 et 36. Donc les vibrations longitudinales d'une verge prismatique ou cylindrique à base quelconque seront les mêmes que celles d'une verge rectangulaire. Ainsi, en désignant par $a$ la longueur d'une verge prismatique

ou cylindrique, et par N le plus petit nombre de vibrations longitudinales que cette verge, supposée libre, puisse exécuter pendant l'unité de temps, on aura toujours [*voir* la formule (78) de la page 39]

$$N = \frac{\Omega}{2a}. \tag{16}$$

De plus, quelle que soit la forme de la section transversale, $\Omega$ représentera la vitesse de propagation du son dans la verge indéfiniment prolongée, et $\rho\Omega^2$ le rapport qui existe entre la pression A supportée par la section transversale et la dilatation longitudinale $\frac{\partial\xi}{\partial x}$, dans le cas où les pressions extérieures s'évanouissent. Donc, en prenant ce rapport pour mesure de l'élasticité de la verge, on pourra encore affirmer que la vitesse de propagation du son dans la verge est proportionnelle à la racine carrée de son élasticité.

Les résultats que nous venons d'exposer subsistent, de quelque manière que l'élasticité du corps, d'où l'on suppose la verge extraite, varie quand on passe d'une direction à une autre. Ils coïncident d'ailleurs avec ceux que M. Poisson a obtenus, en considérant une verge extraite d'un corps solide dont l'élasticité reste la même en tous sens. Seulement, dans ce cas particulier, le coefficient $\Omega$ devient indépendant de la direction que présentait, avant l'extraction, l'axe de la verge élastique.

# SUR LA TORSION

ET LES

# VIBRATIONS TOURNANTES D'UNE VERGE RECTANGULAIRE.

Considérons, comme ci-dessus (p. 23), une verge rectangulaire qui, dans l'état naturel, ait pour axe l'axe des $x$, pour densité la constante $\rho$, et pour section transversale un rectangle dont les côtés $2h$, $2i$ soient respectivement parallèles aux axes des $y$ et $z$. Supposons d'ailleurs que, cette verge venant à se mouvoir, on désigne, au bout du temps $t$, par $x$, $y$, $z$ les coordonnées de l'un de ses points, par X, Y, Z les projections algébriques de la force accélératrice appliquée au point $(x, y, z)$, et par A, F, E; F, B, D; E, D, C les projections algébriques des pressions que supportent au même point, du côté des coordonnées positives, trois plans perpendiculaires aux axes des $x$, $y$, $z$. Soient encore $x-\xi$, $y-\eta$, $z-\zeta$ les coordonnées initiales du point $(x, y, z)$, et concevons que les faces latérales de la verge, primitivement parallèles aux plans des $x$, $y$ et des $x$, $z$, soient soumises aux pressions extérieures et constantes P, $\mathfrak{P}$. Enfin, désignons par

$$\xi_{0,0},\quad \eta_{0,0},\quad \zeta_{0,0}$$

les valeurs des déplacements $\xi$, $\eta$, $\zeta$, relatives au point qui, étant situé sur l'axe de la verge, correspond à l'abscisse $x$; et posons généralement

$$y = \eta_{0,0} + r, \qquad z = \zeta_{0,0} + r'. \tag{1}$$

Si l'on prend $x$, $y$, $z$ pour variables indépendantes, les formules (8)

et (9) de la page 331 du III^e Volume (1), savoir

$$(2)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial A}{\partial x}+\dfrac{\partial F}{\partial y}+\dfrac{\partial E}{\partial z}+\rho X=\rho\dfrac{\partial^2\xi}{\partial t^2}, \\ \dfrac{\partial F}{\partial x}+\dfrac{\partial B}{\partial y}+\dfrac{\partial D}{\partial z}+\rho Y=\rho\dfrac{\partial^2\eta}{\partial t^2}, \\ \dfrac{\partial E}{\partial x}+\dfrac{\partial D}{\partial y}+\dfrac{\partial C}{\partial z}+\rho Z=\rho\dfrac{\partial^2\zeta}{\partial t^2}, \end{cases}$$

et

$$(3)\qquad E=0,\qquad D=0,\qquad C=-P,$$

subsisteront, les trois premières pour un point quelconque de la verge en mouvement, les trois dernières pour $r'=-i$, $r'=i$, tandis que l'on aura, pour $r=-h$ et pour $r=h$,

$$(4)\qquad F=0,\qquad B=-\Omega,\qquad D=0.$$

Quant aux pressions A, B, C, D, E, F, elles seront déterminées par les formules (11) et (12) de la page 12, si la verge élastique est extraite d'un corps solide qui offre trois axes d'élasticité parallèles aux axes coordonnés, et, dans le cas contraire, par les formules (5), (6) des pages 10 et 11. De plus, on prouvera, par des raisonnements semblables à ceux dont nous avons fait usage à la page 248 du III^e Volume (2), que, si l'on veut prendre pour variables indépendantes $r$ et $r'$ à la place des deux coordonnées $y$, $z$, il suffira d'écrire partout $r$ au lieu de $y$, et $r'$ au lieu de $z$, dans les formules dont il s'agit et dans les équations (2). On aura donc alors, pour tous les points de la verge élastique,

$$(5)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial A}{\partial x}+\dfrac{\partial F}{\partial r}+\dfrac{\partial E}{\partial r'}+\rho X=\rho\dfrac{\partial^2\xi}{\partial t^2}, \\ \dfrac{\partial F}{\partial x}+\dfrac{\partial B}{\partial r}+\dfrac{\partial D}{\partial r'}+\rho Y=\rho\dfrac{\partial^2\eta}{\partial t^2}, \\ \dfrac{\partial E}{\partial x}+\dfrac{\partial D}{\partial r}+\dfrac{\partial C}{\partial r'}+\rho Z=\rho\dfrac{\partial^2\zeta}{\partial t^2}. \end{cases}$$

(1) *OEuvres de Cauchy*, S. II, T. VIII, p. 385.
(2) *Ibid.*, p. 292.



Ajoutons que, pour tout point situé sur l'axe de la verge, on aura évidemment

$$y-\eta=y-\eta_{0,0}=0,\qquad z-\zeta=z-\zeta_{0,0}=0,$$

et, par suite,

$$r=0,\qquad r'=0.$$

Cela posé, si l'on développe les quantités

$$\xi,\ \eta,\ \zeta;\ X,\ Y,\ Z;\ A,\ B,\ C;\ D,\ E,\ F,$$

considérées comme fonctions de $x$, $r$, $r'$ et $t$, suivant les puissances ascendantes de $r$, $r'$, et si l'on joint, en conséquence, à la formule

$$(6)\qquad \xi=\xi_{0,0}+\xi_{1,0}r+\xi_{0,1}r'+\tfrac{1}{2}(\xi_{2,0}r^2+2\xi_{1,1}rr'+\xi_{0,2}r'^2)+\ldots,$$

toutes celles qu'on en tire quand on y remplace la lettre $\xi$ par l'une des lettres $\eta$, $\zeta$; X, Y, Z; A, B, C, D, E, F, on déduira sans peine des équations (5), réunies aux conditions (3) et (4), celles qui serviront à déterminer, pendant le mouvement de la verge élastique, les valeurs des fonctions

$$\xi_{0,0},\quad \eta_{0,0},\quad \zeta_{0,0},$$

c'est-à-dire les déplacements d'un point de l'axe mesurés dans le sens des coordonnées $x$, $y$, $z$. En opérant de cette manière, on se trouvera immédiatement ramené aux formules (25), (26) et (44) des pages 29 et 32. De plus, lorsqu'on connaîtra les valeurs des fonctions $\xi_{0,0}$, $\eta_{0,0}$, $\zeta_{0,0}$, on pourra fixer les valeurs correspondantes de

$$\xi_{1,0},\quad \xi_{0,1},\quad \eta_{1,0},\quad \zeta_{0,1}$$

à l'aide des formules (23) et (42) des pages 29 et 32, et la valeur approchée de $\xi$ à l'aide de l'équation

$$(7)\qquad \xi=\xi_{0,0}+\xi_{1,0}r+\xi_{0,1}r'.$$

Quant aux valeurs approchées des déplacements $\eta$, $\zeta$, que l'on peut considérer comme devant être fournies par les équations

$$(8)\qquad \eta=\eta_{0,0}+\eta_{1,0}r+\eta_{0,1}r',\qquad \zeta=\zeta_{0,0}+\zeta_{1,0}r+\zeta_{0,1}r',$$

elles dépendront non seulement des quantités $\eta_{0,0}$, $\zeta_{0,0}$, $\eta_{1,0}$, $\zeta_{0,1}$, ..., mais encore des suivantes :

$$\eta_{0,1}, \quad \zeta_{1,0}. \tag{9}$$

Il est important d'observer que, si, les pressions P, Φ étant nulles, la verge élastique se meut de manière que chaque point de son axe demeure immobile, les trois fonctions

$$\xi_{0,0}, \quad \eta_{0,0}, \quad \zeta_{0,0}$$

s'évanouiront, ainsi que les valeurs de $\xi_{1,0}$, $\eta_{1,0}$, $\xi_{0,1}$, $\zeta_{0,1}$ déterminées par les formules (23) et (42) des pages 29 et 32. Alors les vibrations de la verge seront du genre de celles que l'on nomme *tournantes;* et la valeur approchée de ξ sera nulle, tandis que les valeurs approchées de η, ζ, réduites à

$$\eta = \eta_{0,1} r', \qquad \zeta = \zeta_{1,0} r, \tag{10}$$

dépendront des quantités (9). Il y a plus, si l'on désigne généralement par $r$ le rayon vecteur mené, au bout du temps $t$, du point $(x, \eta_{0,0}, \zeta_{0,0})$ au point $(x, y, z)$, et par ϖ l'angle que forme ce rayon vecteur avec le demi-axe des $y$ positives, on aura

$$y - \eta_{0,0} = r = r\cos\varpi, \qquad z - \zeta_{0,0} = r' = r\sin\varpi; \tag{11}$$

tandis que, en nommant $r - \delta$ la perpendiculaire primitivement abaissée du point $(x - \xi, y - \eta, z - \zeta)$ sur l'axe de la verge, et $\varpi - \psi$ l'un des angles formés par cette perpendiculaire avec l'axe des $y$, on trouvera

$$y - \eta = (r - \delta)\cos(\varpi - \psi), \qquad z - \zeta = (r - \delta)\sin(\varpi - \psi). \tag{12}$$

D'ailleurs on tirera, des formules (8), (11) et (12) combinées entre elles,

$$\begin{cases} \left(1 - \dfrac{\delta}{r}\right)\cos(\varpi - \psi) = (1 - \eta_{1,0})\cos\varpi - \eta_{0,1}\sin\varpi, \\ \left(1 - \dfrac{\delta}{r}\right)\sin(\varpi - \psi) = -\zeta_{1,0}\cos\varpi + (1 - \zeta_{0,1})\sin\varpi; \end{cases} \tag{13}$$



puis, on en conclura, en considérant les quantités $\frac{\delta}{r}$, ψ comme infiniment petites du premier ordre, et négligeant les termes du second ordre,

$$\begin{cases} \dfrac{\delta}{r}\cos\varpi - \psi\sin\varpi = \eta_{1,0}\cos\varpi + \eta_{0,1}\sin\varpi, \\ \dfrac{\delta}{r}\sin\varpi + \psi\cos\varpi = \zeta_{1,0}\cos\varpi + \zeta_{0,1}\sin\varpi, \end{cases} \tag{14}$$

ou, ce qui revient au même,

$$\begin{cases} \dfrac{\delta}{r} = \dfrac{\eta_{1,0} + \zeta_{0,1}}{2} + \dfrac{\eta_{1,0} - \zeta_{0,1}}{2}\cos 2\varpi + \dfrac{\eta_{0,1} + \zeta_{1,0}}{2}\sin 2\varpi, \\ \psi = \dfrac{\zeta_{1,0} - \eta_{0,1}}{2} + \dfrac{\zeta_{1,0} + \eta_{0,1}}{2}\cos 2\varpi + \dfrac{\zeta_{0,1} - \eta_{1,0}}{2}\sin 2\varpi. \end{cases} \tag{15}$$

Donc, lorsque la fonction $\xi_{0,0}$ et, par suite, les quantités $\eta_{1,0}$, $\zeta_{0,1}$ s'évanouiront, on aura simplement

$$\frac{\delta}{r} = \frac{\eta_{0,1} + \zeta_{1,0}}{2}\sin 2\varpi, \qquad \psi = \frac{\zeta_{1,0} - \eta_{0,1}}{2} + \frac{\zeta_{1,0} + \eta_{0,1}}{2}\cos 2\varpi. \tag{16}$$

Enfin, si δ s'évanouit, les équations (16) donneront

$$\eta_{0,1} + \zeta_{1,0} = 0 \tag{17}$$

et

$$\psi = \frac{\zeta_{1,0} - \eta_{0,1}}{2} = \zeta_{1,0} = -\eta_{0,1}. \tag{18}$$

D'autre part, il est facile de reconnaître que, dans les diverses formules qui précèdent, $\frac{\delta}{r}$ et ψ représentent à très peu près la dilatation linéaire mesurée suivant le rayon $r$, et l'angle de torsion de la verge élastique autour du point situé sur l'axe des $x$ à la distance $x$ de l'origine. Donc, pour évaluer cet angle, ainsi que pour découvrir les lois des vibrations tournantes, il est nécessaire de fixer les valeurs des quantités $\eta_{0,1}$, $\zeta_{1,0}$ que renferment les formules (10) et (18). Tel est l'objet dont nous allons nous occuper.

Considérons d'abord le cas où l'on suppose la verge élastique extraite

d'un corps solide qui offre trois axes d'élasticité rectangulaires et parallèles aux axes des $x$, $y$, $z$. Dans ce cas particulier, on tirera des formules (11) et (12) de la page 12, en y remplaçant $y$, $z$ par $r$, $r'$, et en développant les quantités $\xi$, $\eta$, $\zeta$, A, B, C, D, E, F suivant les puissances ascendantes de $r$, $r'$, à l'aide d'équations semblables à l'équation (6),

$$(19)\quad \begin{cases} A_{0,0}=a\dfrac{d\xi_{0,0}}{dx}+f\eta_{1,0}+e\zeta_{0,1}, & B_{0,0}=f\dfrac{d\xi_{0,0}}{dx}+b\eta_{1,0}+d\zeta_{0,1}, & C_{0,0}=e\dfrac{d\xi_{0,0}}{dx}+d\eta_{1,0}+c\zeta_{0,1}, \\ D_{0,0}=d(\eta_{0,1}+\zeta_{1,0}), & E_{0,0}=e\left(\dfrac{d\zeta_{0,0}}{dx}+\xi_{0,1}\right), & F_{0,0}=f\left(\dfrac{d\eta_{0,0}}{dx}+\xi_{1,0}\right); \end{cases}$$

$$(20)\quad \begin{cases} A_{0,1}=a\dfrac{d\xi_{0,1}}{dx}+f\eta_{1,1}+e\zeta_{0,2}, & B_{0,1}=f\dfrac{d\xi_{0,1}}{dx}+b\eta_{1,1}+d\zeta_{0,2}, & C_{0,1}=e\dfrac{d\xi_{0,1}}{dx}+d\eta_{1,1}+c\zeta_{0,2}, \\ D_{0,1}=d(\eta_{0,2}+\zeta_{1,1}), & E_{0,1}=e\left(\dfrac{d\zeta_{0,1}}{dx}+\xi_{0,2}\right), & F_{0,1}=f\left(\dfrac{d\eta_{0,1}}{dx}+\xi_{1,1}\right); \end{cases}$$

$$(21)\quad \begin{cases} A_{1,0}=a\dfrac{d\xi_{1,0}}{dx}+f\eta_{2,0}+e\zeta_{1,1}, & B_{1,0}=f\dfrac{d\xi_{1,0}}{dx}+b\eta_{2,0}+d\zeta_{1,1}, & C_{1,0}=e\dfrac{d\xi_{1,0}}{dx}+d\eta_{2,0}+c\zeta_{1,1}, \\ D_{1,0}=d(\eta_{1,1}+\zeta_{2,0}), & E_{1,0}=e\left(\dfrac{d\zeta_{1,0}}{dx}+\xi_{1,1}\right), & F_{1,0}=f\left(\dfrac{d\eta_{1,0}}{dx}+\xi_{2,0}\right); \end{cases}$$

.....

Donc alors, parmi les fonctions

$$(22)\qquad A_{0,0},\ B_{0,0},\ C_{0,0},\ D_{0,0},\ E_{0,0},\ F_{0,0};$$

$$(23)\quad \begin{cases} A_{1,0},\ B_{1,0},\ C_{1,0},\ D_{1,0},\ E_{1,0},\ F_{1,0}; \\ A_{0,1},\ B_{0,1},\ C_{0,1},\ D_{0,1},\ E_{0,1},\ F_{0,1}, \end{cases}$$

les trois suivantes

$$(24)\qquad D_{0,0}=d(\eta_{0,1}+\zeta_{1,0}),$$

$$(25)\qquad E_{1,0}=e\left(\frac{d\zeta_{1,0}}{dx}+\xi_{1,1}\right),\qquad F_{0,1}=f\left(\frac{d\eta_{0,1}}{dx}+\xi_{1,1}\right)$$

seront celles qui dépendront des quantités

$$\eta_{0,1},\quad \zeta_{1,0}.$$



D'ailleurs, si l'on développe, suivant les puissances ascendantes de $r$, $r'$, les deux membres de chacune des formules (3) et (4), en observant que les formules (4) subsistent pour $r=\pm h$, et les formules (3) pour $r'=\pm i$, on trouvera : 1° quel que soit $r'$,

$$(26)\quad \begin{cases} F_{0,0}+F_{0,1}r'+F_{0,2}\dfrac{r'^2}{2}+\ldots+\dfrac{h^2}{2}\left(F_{2,0}+F_{2,1}r'+F_{2,2}\dfrac{r'^2}{2}+\ldots\right)+\ldots=0, \\ B_{0,0}+B_{0,1}r'+B_{0,2}\dfrac{r'^2}{2}+\ldots+\dfrac{h^2}{2}\left(B_{2,0}+B_{2,1}r'+B_{2,2}\dfrac{r'^2}{2}+\ldots\right)+\ldots=-\mathfrak{P}, \\ D_{0,0}+D_{0,1}r'+D_{0,2}\dfrac{r'^2}{2}+\ldots+\dfrac{h^2}{2}\left(D_{2,0}+D_{2,1}r'+D_{2,2}\dfrac{r'^2}{2}+\ldots\right)+\ldots=0, \end{cases}$$

et

$$(27)\quad \begin{cases} F_{1,0}+F_{1,1}r'+\ldots\ldots\ldots+\dfrac{h^2}{6}(F_{3,0}+F_{3,1}r'+\ldots\ldots\ldots)+\ldots=0, \\ B_{1,0}+B_{1,1}r'+\ldots\ldots\ldots+\dfrac{h^2}{6}(B_{3,0}+B_{3,1}r'+\ldots\ldots\ldots)+\ldots=0, \\ D_{1,0}+D_{1,1}r'+\ldots\ldots\ldots+\dfrac{h^2}{6}(D_{3,0}+D_{3,1}r'+\ldots\ldots\ldots)+\ldots=0; \end{cases}$$

2° quel que soit $r$,

$$(28)\quad \begin{cases} E_{0,0}+E_{1,0}r+E_{2,0}\dfrac{r^2}{2}+\ldots+\dfrac{i^2}{2}\left(E_{0,2}+E_{1,2}r+E_{2,2}\dfrac{r^2}{2}+\ldots\right)+\ldots=0, \\ D_{0,0}+D_{1,0}r+D_{2,0}\dfrac{r^2}{2}+\ldots+\dfrac{i^2}{2}\left(D_{0,2}+D_{1,2}r+D_{2,2}\dfrac{r^2}{2}+\ldots\right)+\ldots=0, \\ C_{0,0}+C_{1,0}r+C_{2,0}\dfrac{r^2}{2}+\ldots+\dfrac{i^2}{2}\left(C_{0,2}+C_{1,2}r+C_{2,2}\dfrac{r^2}{2}+\ldots\right)+\ldots=-P, \end{cases}$$

et

$$(29)\quad \begin{cases} E_{0,1}+E_{1,1}r+\ldots\ldots\ldots+\dfrac{i^2}{6}(E_{0,3}+E_{1,3}r+\ldots\ldots\ldots+\ldots=0, \\ D_{0,1}+D_{1,1}r+\ldots\ldots\ldots+\dfrac{i^2}{6}(D_{0,3}+D_{1,3}r+\ldots\ldots\ldots+\ldots=0, \\ C_{0,1}+C_{1,1}r+\ldots\ldots\ldots+\dfrac{i^2}{6}(C_{0,3}+C_{1,3}r+\ldots\ldots\ldots+\ldots=0. \end{cases}$$

Donc, par suite, en regardant les épaisseurs $2h$, $2i$ comme des quantités très petites du premier ordre, et négligeant, dans les formules (26), (27), (28), (29), les termes du quatrième ordre, on aura, non seulement

$$(30)\quad \begin{cases} F_{0,0}+\frac{h^2}{2}F_{2,0}=0, & B_{0,0}+\frac{h^2}{2}B_{2,0}=-\mathfrak{L}, & D_{0,0}+\frac{h^2}{2}D_{2,0}=0, \\ E_{0,0}+\frac{i^2}{2}E_{0,2}=0, & D_{0,0}+\frac{i^2}{2}D_{0,2}=0, & C_{0,0}+\frac{i^2}{2}C_{0,2}=-P, \end{cases}$$

$$(31)\quad \begin{cases} F_{0,1}+\frac{h^2}{2}F_{2,1}=0, & B_{0,1}+\frac{h^2}{2}B_{2,1}=0, & D_{0,1}+\frac{h^2}{2}D_{2,1}=0, \\ E_{0,1}+\frac{i^2}{6}E_{0,3}=0, & D_{0,1}+\frac{i^2}{6}D_{0,3}=0, & C_{0,1}+\frac{i^2}{6}C_{0,3}=0, \end{cases}$$

$$(32)\quad \begin{cases} F_{1,0}+\frac{h^2}{6}F_{3,0}=0, & B_{1,0}+\frac{h^2}{6}B_{3,0}=0, & D_{1,0}+\frac{h^2}{6}D_{3,0}=0, \\ E_{1,0}+\frac{i^2}{2}E_{1,2}=0, & D_{1,0}+\frac{i^2}{2}D_{1,2}=0, & C_{1,0}+\frac{i^2}{2}C_{1,2}=0, \end{cases}$$

mais encore

$$(33)\qquad D_{0,2}+\frac{h^2}{2}D_{2,2}=0, \qquad D_{2,0}+\frac{i^2}{2}D_{2,2}=0,$$

et

$$(34)\qquad B_{1,1}+\frac{h^2}{6}B_{3,1}=0, \qquad C_{1,1}+\frac{i^2}{6}C_{1,3}=0;$$

puis on tirera des équations (30) et (33)

$$(35)\qquad D_{0,0}=-\frac{h^2}{2}D_{2,0}=-\frac{i^2}{2}D_{0,2}=\frac{h^2i^2}{4}D_{2,2}.$$

On aura donc, aux quantités près du quatrième ordre,

$$(36)\qquad D_{0,0}=0,$$

ou, ce qui revient au même,

$$(37)\qquad \eta_{0,1}+\zeta_{1,0}=0;$$

puis, en posant comme ci-dessus

$$(38)\qquad \psi=\zeta_{1,0}=-\eta_{0,1},$$



on en conclura

$$(39)\qquad E_{1,0}=e\left(\xi_{1,1}+\frac{\partial\psi}{\partial x}\right), \qquad F_{0,1}=f\left(\xi_{1,1}-\frac{\partial\psi}{\partial x}\right).$$

Il reste à former deux équations qui soient propres à déterminer les valeurs des deux inconnues $\psi$ et $\xi_{1,1}$, ou, ce qui revient au même, les valeurs des deux fonctions $E_{1,0}$, $F_{0,1}$. Or on a déjà, en vertu des formules (31) et (32),

$$(40)\qquad F_{0,1}=-\frac{h^2}{2}F_{2,1}, \qquad E_{1,0}=-\frac{i^2}{2}E_{1,2}.$$

De plus, si l'on développe, suivant les puissances ascendantes de $r$, $r'$, les premiers et seconds membres des équations (5), on en tirera

$$(41)\qquad \frac{dA_{1,1}}{dx}+F_{2,1}+E_{1,2}+\rho X_{1,1}=\rho\frac{\partial^2\xi_{1,1}}{\partial t^2};$$

$$(42)\quad \begin{cases} \frac{dF_{0,1}}{dx}+B_{1,1}+D_{0,2}+\rho Y_{0,1}=\rho\frac{\partial^2\eta_{0,1}}{\partial t^2}, \\ \frac{dF_{2,1}}{dx}+B_{2,1}+D_{2,2}+\rho Y_{2,1}=\rho\frac{\partial^2\eta_{2,1}}{\partial t^2}; \end{cases}$$

$$(43)\quad \begin{cases} \frac{dE_{1,0}}{dx}+D_{2,0}+C_{1,1}+\rho Z_{1,0}=\rho\frac{\partial^2\zeta_{1,0}}{\partial t^2}, \\ \frac{dE_{1,2}}{dx}+D_{2,2}+C_{1,3}+\rho Z_{1,2}=\rho\frac{\partial^2\zeta_{1,2}}{\partial t^2}; \end{cases}$$

et, en éliminant $B_{1,1}$, $C_{1,1}$ entre ces dernières, après y avoir substitué les valeurs de

$$(44)\qquad B_{2,1},\quad C_{1,3},\quad D_{0,2},\quad D_{2,0},\quad D_{2,2},\quad F_{2,1},\quad E_{1,2}$$

déduites des formules (34), (35) et (40), on trouvera

$$(45)\qquad \frac{dA_{1,1}}{dx}-2\left(\frac{F_{0,1}}{h^2}+\frac{E_{1,0}}{i^2}\right)+\rho X_{1,1}=\rho\frac{\partial^2\xi_{1,1}}{\partial t^2},$$

$$(46)\qquad \frac{2}{3}\frac{dF_{0,1}}{dx}-\frac{4}{3}\frac{D_{0,0}}{i^2}+\rho\left(Y_{0,1}+\frac{h^2}{6}Y_{2,1}\right)=\rho\left(\frac{\partial^2\eta_{0,1}}{\partial t^2}+\frac{h^2}{6}\frac{\partial^2\eta_{2,1}}{\partial t^2}\right),$$

$$(47)\qquad \frac{2}{3}\frac{dE_{1,0}}{dx}-\frac{4}{3}\frac{D_{0,0}}{h^2}+\rho\left(Z_{1,0}+\frac{i^2}{6}Z_{1,2}\right)=\rho\left(\frac{\partial^2\zeta_{1,0}}{\partial t^2}+\frac{i^2}{6}\frac{\partial^2\zeta_{1,2}}{\partial t^2}\right).$$

Enfin, si l'on néglige les termes du quatrième ordre par rapport aux épaisseurs $2h$ et $2i$ : 1° dans l'équation (45) multipliée par $h^2i^2$; 2° dans celle que produit l'élimination de $D_{0,0}$ entre les formules (46) et (47), on obtiendra les deux suivantes :

$$h^2E_{1,0}+i^2F_{0,1}=0, \tag{48}$$

$$\frac{2}{3}\frac{d(h^2E_{1,0}-i^2F_{0,1})}{dx}+\rho(h^2Z_{1,0}-i^2Y_{0,1})=\rho\frac{\partial^2(h^2\zeta_{1,0}-i^2\eta_{0,1})}{\partial t^2}. \tag{49}$$

Les équations (48) et (49), étant réunies aux formules (38) et (39), fourniront évidemment le moyen de déterminer, avec la fonction de $x$ désignée par $\xi_{1,1}$, l'angle $\psi$, et, par conséquent, les inconnues $\eta_{0,1}$, $\zeta_{1,0}$. En effet, on tirera des formules (38), (39) et (48)

$$h^2\zeta_{1,0}-i^2\eta_{0,1}=(h^2+i^2)\psi, \tag{50}$$

$$\frac{E_{1,0}}{i^2}=\frac{-F_{0,1}}{h^2}=\frac{\dfrac{E_{1,0}}{e}-\dfrac{F_{0,1}}{f}}{\dfrac{i^2}{e}+\dfrac{h^2}{f}}=\frac{2\dfrac{\partial\psi}{\partial x}}{\dfrac{i^2}{e}+\dfrac{h^2}{f}}, \tag{51}$$

$$h^2E_{1,0}-i^2F_{0,1}=h^2i^2\left(\frac{E_{1,0}}{i^2}-\frac{F_{0,1}}{h^2}\right)=\frac{4h^2i^2}{\dfrac{i^2}{e}+\dfrac{h^2}{f}}\frac{\partial\psi}{\partial x}. \tag{52}$$

Donc l'équation (49) pourra être réduite à

$$\frac{8}{3}\frac{h^2i^2}{\dfrac{i^2}{e}+\dfrac{h^2}{f}}\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}+\rho(h^2Z_{1,0}-i^2Y_{0,1})=\rho(h^2+i^2)\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}, \tag{53}$$

ou, ce qui revient au même, à

$$\frac{8}{3}\frac{1}{\dfrac{i^2}{e}+\dfrac{h^2}{f}}\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}+\rho\left(\frac{Z_{1,0}}{i^2}-\frac{Y_{0,1}}{h^2}\right)=\rho\left(\frac{1}{i^2}+\frac{1}{h^2}\right)\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}. \tag{54}$$

Ajoutons que, après avoir fixé la valeur de $\psi$ à l'aide de l'équation (54), on conclura des formules (39) et (48)

$$\xi_{1,1}=\frac{\dfrac{i^2}{e}-\dfrac{h^2}{f}}{\dfrac{i^2}{e}+\dfrac{h^2}{f}}\frac{\partial\psi}{\partial x}. \tag{55}$$



Concevons à présent que la verge élastique soit extraite d'un corps solide qui cesse d'offrir trois axes d'élasticité rectangulaires et parallèles aux axes des $x$, $y$, $z$. En raisonnant comme ci-dessus, on établira encore les équations (36), (48), (49). Seulement les valeurs de $D_{0,0}$, $E_{1,0}$, $F_{0,1}$ ne seront plus fournies par les équations (24) et (25), auxquelles on devra substituer de nouvelles formules que nous allons indiquer.

Si, dans les équations (30) et dans celles des équations (31), (32) qui ne renferment pas les fonctions $E_{1,0}$, $F_{0,1}$, on néglige les termes proportionnels au carré de $h$ ou de $i$, on obtiendra non seulement la formule (36), mais encore les suivantes :

$$B_{0,0}=-\mathfrak{P}, \quad C_{0,0}=-P, \quad E_{0,0}=0, \quad F_{0,0}=0; \tag{56}$$

$$B_{0,1}=0, \quad C_{0,1}=0, \quad D_{0,1}=0, \quad E_{0,1}=0; \tag{57}$$

$$B_{1,0}=0, \quad C_{1,0}=0, \quad D_{1,0}=0, \quad F_{1,0}=0. \tag{58}$$

De plus, si, après avoir remplacé, dans les formules (5), (6) des pages 10 et 11, les variables $y$, $z$ par $r$, $r'$, on y développe les quantités $\xi$, $\eta$, $\zeta$, A, B, C, D, E, F suivant les puissances ascendantes de $r$ et $r'$, on en conclura

$$\left\{\begin{aligned}
A_{0,0}&=a\frac{\partial\xi_{0,0}}{\partial x}+f\eta_{1,0}+e\zeta_{0,1}+u(\eta_{0,1}+\zeta_{1,0})+v\left(\frac{\partial\zeta_{0,0}}{\partial x}+\xi_{0,1}\right)+w\left(\frac{\partial\eta_{0,0}}{\partial x}+\xi_{1,0}\right),\\
B_{0,0}&=f\frac{\partial\xi_{0,0}}{\partial x}+b\eta_{1,0}+d\zeta_{0,1}+u'(\eta_{0,1}+\zeta_{1,0})+v'\left(\frac{\partial\zeta_{0,0}}{\partial x}+\xi_{0,1}\right)+w'\left(\frac{\partial\eta_{0,0}}{\partial x}+\xi_{1,0}\right),\\
C_{0,0}&=e\frac{\partial\xi_{0,0}}{\partial x}+d\eta_{1,0}+c\zeta_{0,1}+u''(\eta_{0,1}+\zeta_{1,0})+v''\left(\frac{\partial\zeta_{0,0}}{\partial x}+\xi_{0,1}\right)+w''\left(\frac{\partial\eta_{0,0}}{\partial x}+\xi_{1,0}\right),\\
D_{0,0}&=u\frac{\partial\xi_{0,0}}{\partial x}+u'\eta_{1,0}+u''\zeta_{0,1}+d(\eta_{0,1}+\zeta_{1,0})+w''\left(\frac{\partial\zeta_{0,0}}{\partial x}+\xi_{0,1}\right)+v'\left(\frac{\partial\eta_{0,0}}{\partial x}+\xi_{1,0}\right),\\
E_{0,0}&=v\frac{\partial\xi_{0,0}}{\partial x}+v'\eta_{1,0}+v''\zeta_{0,1}+w''(\eta_{0,1}+\zeta_{1,0})+e\left(\frac{\partial\zeta_{0,0}}{\partial x}+\xi_{0,1}\right)+u\left(\frac{\partial\eta_{0,0}}{\partial x}+\xi_{1,0}\right),\\
F_{0,0}&=w\frac{\partial\xi_{0,0}}{\partial x}+w'\eta_{1,0}+w''\zeta_{0,1}+v'(\eta_{0,1}+\zeta_{1,0})+u\left(\frac{\partial\zeta_{0,0}}{\partial x}+\xi_{0,1}\right)+f\left(\frac{\partial\eta_{0,0}}{\partial x}+\xi_{1,0}\right);
\end{aligned}\right. \tag{59}$$

$$(60)\quad \begin{cases} A_{0,1}=a\dfrac{\partial\xi_{0,1}}{\partial x}+f\eta_{1,1}+e\zeta_{0,2}+u(\eta_{0,2}+\zeta_{1,1})+v\left(\dfrac{\partial\zeta_{0,1}}{\partial x}+\xi_{0,2}\right)+w\left(\dfrac{\partial\eta_{0,1}}{\partial x}+\xi_{1,1}\right),\\ B_{0,1}=f\dfrac{\partial\xi_{0,1}}{\partial x}+b\eta_{1,1}+d\zeta_{0,2}+u'(\eta_{0,2}+\zeta_{1,1})+v'\left(\dfrac{\partial\zeta_{0,1}}{\partial x}+\xi_{0,2}\right)+w'\left(\dfrac{\partial\eta_{0,1}}{\partial x}+\xi_{1,1}\right),\\ C_{0,1}=e\dfrac{\partial\xi_{0,1}}{\partial x}+d\eta_{1,1}+c\zeta_{0,2}+u''(\eta_{0,2}+\zeta_{1,1})+v''\left(\dfrac{\partial\zeta_{0,1}}{\partial x}+\xi_{0,2}\right)+w''\left(\dfrac{\partial\eta_{0,1}}{\partial x}+\xi_{1,1}\right),\\ D_{0,1}=u\dfrac{\partial\xi_{0,1}}{\partial x}+u'\eta_{1,1}+u''\zeta_{0,2}+d(\eta_{0,2}+\zeta_{1,1})+w''\left(\dfrac{\partial\zeta_{0,1}}{\partial x}+\xi_{0,2}\right)+v'\left(\dfrac{\partial\eta_{0,1}}{\partial x}+\xi_{1,1}\right),\\ E_{0,1}=v\dfrac{\partial\xi_{0,1}}{\partial x}+v'\eta_{1,1}+v''\zeta_{0,2}+w''(\eta_{0,2}+\zeta_{1,1})+e\left(\dfrac{\partial\zeta_{0,1}}{\partial x}+\xi_{0,2}\right)+u\left(\dfrac{\partial\eta_{0,1}}{\partial x}+\xi_{1,1}\right),\\ F_{0,1}=w\dfrac{\partial\xi_{0,1}}{\partial x}+w'\eta_{1,1}+w''\zeta_{0,2}+v'(\eta_{0,2}+\zeta_{1,1})+u\left(\dfrac{\partial\zeta_{0,1}}{\partial x}+\xi_{0,2}\right)+f\left(\dfrac{\partial\eta_{0,1}}{\partial x}+\xi_{1,1}\right); \end{cases}$$

$$(61)\quad \begin{cases} A_{1,0}=a\dfrac{\partial\xi_{1,0}}{\partial x}+f\eta_{2,0}+e\zeta_{1,1}+u(\eta_{1,1}+\zeta_{2,0})+v\left(\dfrac{\partial\zeta_{1,0}}{\partial x}+\xi_{1,1}\right)+w\left(\dfrac{\partial\eta_{1,0}}{\partial x}+\xi_{2,0}\right),\\ B_{1,0}=f\dfrac{\partial\xi_{1,0}}{\partial x}+b\eta_{2,0}+d\zeta_{1,1}+u'(\eta_{1,1}+\zeta_{2,0})+v'\left(\dfrac{\partial\zeta_{1,0}}{\partial x}+\xi_{1,1}\right)+w'\left(\dfrac{\partial\eta_{1,0}}{\partial x}+\xi_{2,0}\right),\\ C_{1,0}=e\dfrac{\partial\xi_{1,0}}{\partial x}+d\eta_{2,0}+c\zeta_{1,1}+u''(\eta_{1,1}+\zeta_{2,0})+v''\left(\dfrac{\partial\zeta_{1,0}}{\partial x}+\xi_{1,1}\right)+w''\left(\dfrac{\partial\eta_{1,0}}{\partial x}+\xi_{2,0}\right),\\ D_{1,0}=u\dfrac{\partial\xi_{1,0}}{\partial x}+u'\eta_{2,0}+u''\zeta_{1,1}+d(\eta_{1,1}+\zeta_{2,0})+w''\left(\dfrac{\partial\zeta_{1,0}}{\partial x}+\xi_{1,1}\right)+v'\left(\dfrac{\partial\eta_{1,0}}{\partial x}+\xi_{2,0}\right),\\ E_{1,0}=v\dfrac{\partial\xi_{1,0}}{\partial x}+v'\eta_{2,0}+v''\zeta_{1,1}+w''(\eta_{1,1}+\zeta_{2,0})+e\left(\dfrac{\partial\zeta_{1,0}}{\partial x}+\xi_{1,1}\right)+u\left(\dfrac{\partial\eta_{1,0}}{\partial x}+\xi_{2,0}\right),\\ F_{1,0}=w\dfrac{\partial\xi_{1,0}}{\partial x}+w'\eta_{2,0}+w''\zeta_{1,1}+v'(\eta_{1,1}+\zeta_{2,0})+u\left(\dfrac{\partial\zeta_{1,0}}{\partial x}+\xi_{1,1}\right)+f\left(\dfrac{\partial\eta_{1,0}}{\partial x}+\xi_{2,0}\right). \end{cases}$$

Cela posé, admettons que l'on substitue les valeurs des fonctions

$$(62)\qquad B_{0,0},\quad C_{0,0},\quad D_{0,0},\quad E_{0,0},\quad F_{0,0},$$

tirées des formules (59) dans les cinq équations (36) et (56). On pourra de ces cinq équations déduire les valeurs des cinq quantités

$$(63)\qquad \eta_{1,0},\quad \zeta_{0,1},\quad \eta_{0,1}+\zeta_{1,0},\quad \frac{\partial\zeta_{0,0}}{\partial x}+\xi_{0,1},\quad \frac{\partial\eta_{0,0}}{\partial x}+\xi_{1,0},$$

exprimées en fonction de

$$(64)\qquad \frac{\partial\xi_{0,0}}{\partial x},\quad P\quad et\quad \Phi.$$



En opérant de cette manière, on retrouvera nécessairement les formules (23) et (42) des pages 29 et 32, savoir,

$$(65)\qquad \xi_{1,0}+\frac{\partial\eta_{0,0}}{\partial x}=h\frac{\partial\xi_{0,0}}{\partial x}+\Pi',\qquad \eta_{1,0}=l\frac{\partial\xi_{0,0}}{\partial x}+\Pi'',$$

$$(66)\qquad \xi_{0,1}+\frac{\partial\zeta_{0,0}}{\partial x}=\mathfrak{A}\frac{\partial\xi_{0,0}}{\partial x}+\Pi_1,\qquad \zeta_{0,1}=\mathfrak{C}\frac{\partial\xi_{0,0}}{\partial x}+\Pi_2;$$

$\Pi'$, $\Pi''$, $\Pi_1$, $\Pi_2$ étant des fonctions linéaires de P et de $\Phi$ déterminées par des équations semblables aux formules (21) de la page 29; et, pour fixer ensuite la valeur de

$$\eta_{0,1}+\zeta_{1,0},$$

il suffira de combiner les équations (65), (66) avec l'équation (36) présentée sous la forme

$$(67)\quad \begin{cases} u\dfrac{\partial\xi_{0,0}}{\partial x}+u'\eta_{1,0}+u''\zeta_{0,1}+d(\eta_{0,1}+\zeta_{1,0})\\ \qquad +w''\left(\dfrac{\partial\zeta_{0,0}}{\partial x}+\xi_{0,1}\right)+v'\left(\dfrac{\partial\eta_{0,0}}{\partial x}+\xi_{1,0}\right)=0, \end{cases}$$

en sorte qu'on aura

$$(68)\quad \begin{cases} \eta_{0,1}+\zeta_{1,0}=-\dfrac{u+u'l+u''\mathfrak{C}+v'k+w''\mathfrak{A}}{d}\dfrac{\partial\xi_{0,0}}{\partial x}\\ \qquad -\dfrac{u'\Pi''+u''\Pi_2+v'\Pi'+w''\Pi_1}{d}. \end{cases}$$

L'équation (68) est celle qui, dans l'hypothèse admise, devra remplacer le système des formules (24) et (36). D'autre part, si, après avoir substitué les valeurs de

$$(69)\qquad B_{0,1},\quad C_{0,1},\quad D_{0,1},\quad E_{0,1}$$

tirées des équations (60), dans les formules (57), on déduit de ces formules les valeurs de

$$(70)\qquad \eta_{1,1},\quad \zeta_{0,2},\quad \eta_{0,2}+\zeta_{1,1},\quad \frac{\partial\zeta_{0,1}}{\partial x}+\xi_{0,2},$$

pour les substituer à leur tour dans la dernière des équations (60), on

obtiendra un résultat de la forme

$$F_{0,1} = g\frac{\partial \xi_{0,1}}{\partial x} + h\left(\frac{\partial \eta_{0,1}}{\partial x} + \xi_{1,1}\right), \tag{71}$$

g, h désignant des coefficients qui dépendront des constantes a, b, c, d, e, f, u, v, w, u', v', w', u'', v'', w''. Pareillement les formules (58) et (61) donneront

$$E_{1,0} = j\frac{\partial \xi_{1,0}}{\partial x} + i\left(\frac{\partial \zeta_{1,0}}{\partial x} + \xi_{1,1}\right), \tag{72}$$

j, i désignant de nouveaux coefficients analogues à ceux que renferme l'équation (71). Si maintenant on combine les formules (71), (72) avec les formules (48) et (49), on trouvera successivement

$$\frac{E_{1,0}}{i^2} = \frac{-F_{0,1}}{h^2} = \frac{\dfrac{E_{1,0}}{i} - \dfrac{F_{0,1}}{h}}{\dfrac{i^2}{i} + \dfrac{h^2}{h}} = \frac{\dfrac{j}{i}\dfrac{\partial \xi_{1,0}}{\partial x} - \dfrac{g}{h}\dfrac{\partial \xi_{0,1}}{\partial x} + \dfrac{\partial(\xi_{1,1} - \eta_{0,1})}{\partial x}}{\dfrac{i^2}{i} + \dfrac{h^2}{h}}, \tag{73}$$

$$h^2 E_{1,0} - i^2 F_{0,1} = \frac{2h^2 i^2}{\dfrac{i^2}{i} + \dfrac{h^2}{h}}\left[\frac{j}{i}\frac{\partial \xi_{1,0}}{\partial x} - \frac{g}{h}\frac{\partial \xi_{0,1}}{\partial x} + \frac{\partial(\zeta_{1,0} - \eta_{0,1})}{\partial x}\right], \tag{74}$$

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{4}{3}\frac{h^2 i^2}{\dfrac{i^2}{i} + \dfrac{h^2}{h}}\left[\frac{\partial^2(\zeta_{1,0} - \eta_{0,1})}{\partial x^2} + \frac{j}{i}\frac{\partial^2 \xi_{1,0}}{\partial x^2} - \frac{g}{h}\frac{\partial^2 \xi_{0,1}}{\partial x^2}\right] + \rho(h^2 Z_{1,0} - i^2 Y_{0,1}) \\ &= \rho\frac{\partial^2(h^2 \zeta_{1,0} - i^2 \eta_{0,1})}{\partial t^2}; \end{aligned}\right. \tag{75}$$

puis on en conclura, en ayant égard à la première des équations (65) et à la première des équations (66)

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{4}{3}\frac{h^2 i^2}{\dfrac{i^2}{i} + \dfrac{h^2}{h}}\left[\frac{\partial^3(\zeta_{1,0} - \eta_{0,1})}{\partial x^3} + \left(\frac{j}{i}k - \frac{g}{h}\mathfrak{A}\right)\frac{\partial^3 \xi_{0,0}}{\partial x^3} - \frac{j}{i}\frac{\partial^3 \eta_{0,0}}{\partial x^3} + \frac{g}{h}\frac{\partial^3 \zeta_{0,0}}{\partial x^3}\right] + \rho(h^2 Z_{1,0} - i^2 Y_{0,1}) \\ &= \rho\frac{\partial^2(h^2 \zeta_{1,0} - i^2 \eta_{0,1})}{\partial t^2}. \end{aligned}\right. \tag{76}$$

Les formules (68) et (76) serviront à déterminer les deux inconnues $\eta_{0,1}$, $\zeta_{1,0}$, quand on aura fixé, à l'aide des méthodes exposées dans l'un



des derniers articles, les valeurs de $\xi_{0,0}$, $\eta_{0,0}$, $\zeta_{0,0}$, c'est-à-dire les déplacements d'un point situé sur l'axe de la verge élastique. Ajoutons que l'on tirera des formules (48), (71) et (72)

$$\xi_{1,1} = -\frac{1}{\dfrac{h^2}{h} + \dfrac{i^2}{i}}\left[\frac{h^2}{h}\left(\frac{\partial \zeta_{1,0}}{\partial x} + \frac{j}{i}\frac{\partial \zeta_{1,0}}{\partial x}\right) + \frac{i^2}{i}\left(\frac{\partial \eta_{0,1}}{\partial x} + \frac{g}{h}\frac{\partial \xi_{0,1}}{\partial x}\right)\right], \tag{77}$$

ou, ce qui revient au même,

$$\xi_{1,1} = -\frac{\dfrac{h^2}{h}\left(\dfrac{\partial \zeta_{1,0}}{\partial x} - \dfrac{j}{i}\dfrac{\partial^2 \eta_{0,0}}{\partial x^2}\right) + \dfrac{i^2}{i}\left(\dfrac{\partial \eta_{0,1}}{\partial x} - \dfrac{g}{h}\dfrac{\partial^2 \zeta_{0,0}}{\partial x^2}\right) + \left(\dfrac{j}{i}\dfrac{h^2}{h}k - \dfrac{g}{h}\dfrac{i^2}{i}\mathfrak{A}\right)\dfrac{\partial^2 \xi_{0,0}}{\partial x^2}}{\dfrac{h^2}{h} + \dfrac{i^2}{i}}, \tag{78}$$

et que l'équation (78), étant jointe aux formules (68), (76), fournira le moyen de déterminer l'inconnue $\xi_{1,1}$.

Les formules (68), (76), (78) se simplifient lorsqu'on suppose chaque point de l'axe des $x$ immobile pendant la durée du mouvement, et les pressions P, $\mathfrak{P}$ réduites à zéro. Alors, en effet, les quantités

$$\xi_{0,0},\quad \eta_{0,0},\quad \zeta_{0,0},\quad \Pi',\quad \Pi'',\quad \Pi_1,\quad \Pi_2$$

étant nulles aussi bien que les pressions P, $\mathfrak{P}$, l'équation (68) se réduira simplement à la formule (37); et, en posant de nouveau

$$\psi = \zeta_{1,0} = -\eta_{0,1},$$

on tirera : 1° de la formule (76)

$$\frac{8}{3}\frac{h^2 i^2}{\dfrac{i^2}{i} + \dfrac{h^2}{h}}\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \rho(h^2 Z_{1,0} - i^2 Y_{0,1}) = \rho(h^2 + i^2)\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}, \tag{79}$$

ou, ce qui revient au même,

$$\frac{8}{3}\frac{1}{\dfrac{i^2}{i} + \dfrac{h^2}{h}}\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \rho\left(\frac{Z_{1,0}}{i^2} - \frac{Y_{0,1}}{h^2}\right) = \rho\left(\frac{1}{i^2} + \frac{1}{h^2}\right)\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}; \tag{80}$$

2° de la formule (78)

$$\xi_{1,1}=\frac{\frac{i^2}{i}-\frac{h^2}{h}}{\frac{i^2}{i}+\frac{h^2}{h}}\frac{\partial\psi}{\partial x}. \tag{81}$$

Dans la même hypothèse, on aura encore

$$\xi_{0,1}=0,\quad \xi_{1,0}=0,\quad \eta_{1,0}=0,\quad \zeta_{0,1}=0. \tag{82}$$

Par suite, les formules (71), (72) donneront

$$F_{0,1}=h\left(\xi_{1,1}-\frac{\partial\psi}{\partial x}\right),\qquad E_{1,0}=i\left(\xi_{1,1}+\frac{\partial\psi}{\partial x}\right), \tag{83}$$

et les formules (8) se réduiront aux formules (10).

Il est maintenant facile d'apprécier le motif qui nous a déterminés à conserver les termes proportionnels au carré de $h$ ou de $i$, dans les formules (40), c'est-à-dire dans celles des formules (31), (32) qui renferment les fonctions $E_{1,0}$, $F_{0,1}$. Effectivement, si l'on négligeait sans exception tous les termes dépendants de $h$ et de $i$ dans les formules (31), (32), on en déduirait, non-seulement les équations (57), (58), mais encore les deux suivantes

$$F_{0,1}=0,\qquad E_{1,0}=0;$$

et l'on conclurait de ces dernières, combinées avec les formules (83),

$$\xi_{1,1}=0,\qquad \frac{\partial\psi}{\partial x}=0.$$

Or l'équation

$$\frac{\partial\psi}{\partial x}=0$$

exprime que l'angle $\psi$ est indépendant de l'abscisse $x$, et cette circonstance ne peut s'accorder avec le mouvement d'une verge tordue, mais seulement avec le mouvement d'une verge qui tourne sur elle-même. Donc, pour découvrir, dans tous les cas, les phénomènes qui résultent de la torsion d'une verge élastique, il est nécessaire de conserver les termes proportionnels au carré de $h$ ou de $i$ dans les formules (40); ce



qui revient à supposer que les fonctions

$$F_{2,1},\quad E_{1,2}$$

acquièrent des valeurs numériques très considérables relativement à celles des quantités

$$\xi_{1,1},\quad \frac{\partial\psi}{\partial x}$$

que renferment les fonctions $F_{0,1}$, $E_{1,0}$.

Lorsque les forces accélératrices X, Z deviennent constantes, les quantités $Y_{0,1}$, $Z_{1,0}$ s'évanouissent; et alors, en faisant, pour abréger,

$$\frac{1}{\rho\Omega^2}=\frac{3}{8}\left(\frac{i^2}{i}+\frac{h^2}{h}\right)\left(\frac{1}{i^2}+\frac{1}{h^2}\right), \tag{84}$$

on tire de la formule (80)

$$\Omega^2\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}=\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}. \tag{85}$$

Dans le cas particulier où la verge est extraite d'un corps solide qui offre trois axes d'élasticité rectangulaires et parallèles aux axes des $x$, $y$, $z$, les formules (71), (72) se réduisent aux formules (25), et l'on a, par suite,

$$i=e,\qquad h=f, \tag{86}$$

$$\frac{1}{\rho\Omega^2}=\frac{3}{8}\left(\frac{i^2}{e}+\frac{h^2}{f}\right)\left(\frac{1}{i^2}+\frac{1}{h^2}\right). \tag{87}$$

Enfin, si l'élasticité du corps solide est la même dans tous les sens, on trouvera

$$e=f, \tag{88}$$

et la formule (87) donnera simplement

$$\frac{1}{\rho\Omega^2}=\frac{3}{8f}\frac{(i^2+h^2)^2}{i^2h^2}. \tag{89}$$

Les équations (68), (76), (80), etc., subsistent pour une valeur quelconque de l'abscisse $x$. Mais, lorsqu'on veut effectuer la détermi-

nation complète des inconnues $\eta_{0,1}$, $\zeta_{1,0}$, $\psi$, il faut à ces équations en joindre d'autres qui se rapportent aux deux extrémités de la verge élastique. Concevons, pour fixer les idées, cette verge terminée, dans son état naturel, par deux plans perpendiculaires à l'axe des $x$, et qui supportent en chacun de leurs points une nouvelle pression désignée par $\mathfrak{P}$. On aura, pour ces mêmes points,

$$A = -\mathfrak{p}, \qquad F = 0, \qquad E = 0, \tag{90}$$

quelles que soient les valeurs de $r$, $r'$; et, par suite,

$$F_{0,1} = 0, \qquad E_{1,0} = 0; \tag{91}$$

puis on tirera des formules (91) combinées avec l'équation (74)

$$\frac{j}{i}\frac{\partial \xi_{1,0}}{\partial x} - \frac{g}{h}\frac{\partial \zeta_{0,1}}{\partial x} + \frac{\partial(\zeta_{1,0} - \eta_{0,1})}{\partial x} = 0. \tag{92}$$

Ajoutons que, si, les pressions extérieures étant nulles, l'axe de la verge reste immobile, la condition (92) pourra être, en vertu des formules (38) et (82), réduite à la condition plus simple

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = 0. \tag{93}$$

Les formules (92) et (93) sont relatives au cas où l'on suppose libres les deux extrémités de la verge élastique. Si ces deux extrémités devenaient fixes, ou plutôt si, les extrémités de l'axe étant fixes, chacun des points renfermés dans les plans qui terminent la verge était assujetti de manière à rester toujours placé sur une même droite parallèle à l'axe, on aurait, pour les abscisses correspondantes aux plans dont il s'agit, non seulement

$$\xi_{0,0} = 0, \qquad \eta_{0,0} = 0, \qquad \zeta_{0,0} = 0, \tag{94}$$

mais encore

$$\eta = 0, \qquad \zeta = 0, \tag{95}$$

quelles que fussent les valeurs de $r$, $r'$, et par conséquent

$$\eta_{0,1} = 0, \qquad \zeta_{1,0} = 0. \tag{96}$$



Donc, en supposant l'axe immobile et les pressions extérieures nulles, on trouverait, pour les deux extrémités de la verge,

$$\psi = 0. \tag{97}$$

Si l'on voulait découvrir les phénomènes produits par la torsion d'une verge élastique, non plus dans l'état de mouvement, mais dans l'état d'équilibre, il suffirait de supprimer les dérivées relatives à $t$, savoir

$$\frac{\partial^2(h^2\zeta_{1,0} - i^2\eta_{0,1})}{\partial t^2} \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2},$$

dans les équations (76), (80), (85), dont la dernière se réduirait à

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = 0. \tag{98}$$

Nous ajouterons ici une remarque importante. Si, après avoir coupé la verge, prise dans l'état d'équilibre ou de mouvement, par un plan perpendiculaire à l'axe des $x$, et correspondant à l'abscisse $x$, on considère le système des pressions ou tensions supportées par les divers éléments de la section ainsi formée, à ce système correspondra une force principale dont les projections algébriques sur les axes des $x$, $y$, $z$ seront évidemment représentées par les intégrales

$$\int_{-h}^{h}\int_{-i}^{i} A\, dr\, dr', \qquad \int_{-h}^{h}\int_{-i}^{i} F\, dr\, dr', \qquad \int_{-h}^{h}\int_{-i}^{i} E\, dr\, dr', \tag{99}$$

et un moment linéaire principal dont la projection algébrique sur l'axe des $x$ sera exprimée par l'intégrale

$$\int_{-h}^{h}\int_{-i}^{i} (rE - r'F)\, dr\, dr', \tag{100}$$

pourvu que l'on fasse coïncider le centre des moments avec le point où le plan sécant rencontrera l'axe de la verge. En d'autres termes, l'expression (100) représentera, au signe près, ce qu'on peut nommer le moment du système des pressions ou tensions ci-dessus mentionnées par rapport à l'axe de la verge; le moment d'une force par rapport à un

axe (1) n'étant autre chose que le produit de cette force projetée sur un plan perpendiculaire à l'axe par la plus courte distance entre l'axe et la droite suivant laquelle elle agit. D'autre part, si, dans les intégrales (99) et (100), on substitue, pour A, F, E, leurs valeurs approchées fournies par les équations

$$(101)\qquad \begin{cases} A = A_{0,0} + A_{1,0}\,r + A_{0,1}\,r', \\ F = F_{0,0} + F_{1,0}\,r + F_{0,1}\,r', \\ E = E_{0,0} + E_{1,0}\,r + E_{0,1}\,r', \end{cases}$$

ces intégrales deviendront respectivement

$$(102)\qquad 4A_{0,0}hi,\quad 4F_{0,0}hi,\quad 4E_{0,0}hi$$

et

$$(103)\qquad \int_{-h}^{h}\int_{-i}^{i}(r^2E_{1,0} - r'^2F_{0,1})\,dr\,dr' = \frac{4}{3}(h^2E_{1,0} - i^2F_{0,1})\,hi.$$

Donc, en vertu de la formule (74), l'expression (100) pourra être remplacée par le produit

$$(104)\qquad \frac{\frac{8}{3}h^3i^3}{\frac{i^2}{i}+\frac{h^2}{h}}\left[\frac{j}{i}\frac{\partial\xi_{1,0}}{\partial x} - \frac{g}{h}\frac{\partial\xi_{0,1}}{\partial x} + \frac{\partial(\zeta_{1,0}-\eta_{0,1})}{\partial x}\right].$$

Dans le cas particulier où les déplacements des points situés sur l'axe de la verge sont nuls, ainsi que les pressions extérieures, le produit (104) se réduit à

$$(105)\qquad \frac{\frac{16}{3}h^3i^3}{\frac{i^2}{i}+\frac{h^2}{h}}\frac{\partial\psi}{\partial x}.$$

Dans le même cas, si l'on applique à une extrémité libre de la verge une force dont la direction soit comprise dans un plan perpendiculaire

(1) La définition de ce moment, placée au bas de la page 256 du IIIe Volume (a), convient seulement au cas où la force est comprise dans un plan perpendiculaire à l'axe.

(a) *Œuvres de Cauchy*, S. II, T. VIII, p. 301.



à l'axe, et dont le moment, par rapport à cet axe, soit désigné par $\mathfrak{K}$, si d'ailleurs on suppose le point d'application de la force lié invariablement avec les autres points du plan, ou du moins avec ceux qui se trouvent placés sur la base de la verge élastique, on aura, pour l'extrémité dont il s'agit,

$$(106)\qquad \frac{\frac{16}{3}h^3i^3}{\frac{i^2}{i}+\frac{h^2}{h}}\frac{\partial\psi}{\partial x} = \mathfrak{K}.$$

Pour montrer une application des formules précédentes, considérons d'abord l'équilibre d'une verge rectangulaire qui, dans l'état naturel, ait pour axe l'axe des $x$, et qui offre une extrémité fixe, l'autre extrémité étant sollicitée, comme on vient de le dire, par une force comprise dans un plan perpendiculaire à l'axe. Si l'on suppose les pressions extérieures nulles, ainsi que la valeur de $x$ correspondante à l'extrémité fixe, et les déplacements d'un point quelconque de l'axe, si de plus on nomme $a$ la longueur de cet axe, on devra intégrer l'équation (98) de manière à vérifier pour $x = 0$ la condition (97), et pour $x = a$ la condition (106). Or on tirera de l'équation (98) réunie à la condition (106)

$$(107)\qquad \frac{\partial\psi}{\partial x} = \frac{3}{16}\frac{\mathfrak{K}}{h^3i^3}\left(\frac{i^2}{i}+\frac{h^2}{h}\right),$$

et de l'équation (107) réunie à la condition (97)

$$(108)\qquad \psi = \frac{3}{16}\frac{\mathfrak{K}}{h^3i^3}\left(\frac{i^2}{i}+\frac{h^2}{h}\right)x.$$

Il suit de cette dernière formule : 1° que l'inconnue $\psi$, ou l'angle de torsion de la verge rectangulaire, mesuré dans un plan quelconque perpendiculaire à l'axe, est en raison directe, non seulement de la distance qui sépare ce plan de l'extrémité fixe, mais encore du moment de la force appliquée à l'extrémité libre; 2° que, si la section transversale de la verge varie en demeurant semblable à elle-même, l'angle $\psi$ variera en raison inverse du carré de l'aire de cette section, ou, ce qui

revient au même, en raison inverse de la quatrième puissance de l'épaisseur $2h$ ou $2i$. Ces résultats, semblables à ceux que M. Poisson a obtenus, en considérant la torsion d'une verge cylindrique à base circulaire, subsisteraient pareillement pour une verge cylindrique ou prismatique à base quelconque. Lorsque les épaisseurs $2h$, $2i$ deviennent égales entre elles, la formule (108) se réduit à

$$\psi = \frac{3\mathfrak{K}}{(2h)^4}\left(\frac{1}{\mathfrak{i}} + \frac{1}{\mathfrak{h}}\right)x. \tag{109}$$

Ajoutons que, si l'épaisseur $2i$ devient très petite relativement à l'épaisseur $2h$, on aura sensiblement

$$\psi = \frac{3}{16}\,\frac{\mathfrak{K}}{\mathfrak{h}}\,\frac{x}{hi^2}. \tag{110}$$

Donc alors l'angle de torsion sera en raison inverse de la plus grande épaisseur et du cube de la plus petite.

Concevons à présent qu'après avoir tordu la verge élastique, en laissant à sa place chaque point de l'axe, on abandonne cette verge à elle-même sans lui appliquer aucune force. Les variables $\xi_{0,0}$, $\eta_{0,0}$, $\zeta_{0,0}$ conserveront des valeurs nulles pendant toute la durée du mouvement, et la verge exécutera des vibrations tournantes dont les lois se trouveront exprimées par l'intégrale de l'équation (85). De plus, les vitesses initiales des différents points de la verge étant supposées nulles, les valeurs de $\frac{\partial\eta}{\partial t}$ et de $\frac{\partial\zeta}{\partial t}$, tirées des formules (10) et (38), savoir

$$r'\frac{d\eta_{0,1}}{dt} = -r'\frac{\partial\psi}{\partial t}, \qquad r\frac{\partial\zeta_{1,0}}{\partial t} = r\frac{\partial\psi}{\partial t},$$

devront s'évanouir à l'origine du mouvement, quels que soient $r$ et $r'$. Par conséquent, la valeur initiale de $\frac{\partial\psi}{\partial t}$ devra se réduire à zéro. Soit d'ailleurs $f(x)$ la valeur initiale de l'angle $\psi$. Si les deux extrémités de la verge élastique restent libres, l'équation (85), intégrée de manière que la condition (93) soit remplie pour $x = 0$ et pour $x = a$, donnera



[*voir*, dans le III^e^ Volume, la formule (118) de la page 268] (1)

$$\psi = \frac{1}{a}\sum \cos\frac{n\pi\Omega t}{a}\cos\frac{n\pi x}{a}\int_0^a \cos\frac{n\pi\mu}{a}f(\mu)\,d\mu, \tag{111}$$

le signe $\sum$ s'étendant à toutes les valeurs entières positives, nulles ou négatives de $n$. Si, au contraire, les deux extrémités de la verge deviennent fixes, il faudra substituer la condition (97) à la condition (93), et, par suite, la valeur générale de $\psi$ sera semblable à la valeur de $\xi_0$ fournie par l'équation (114) de la page 268 du III^e^ Volume (2), en sorte qu'on aura

$$\psi = \frac{1}{a}\sum \cos\frac{n\pi\Omega t}{a}\sin\frac{n\pi x}{a}\int_0^a \sin\frac{n\pi\mu}{a}f(\mu)\,d\mu. \tag{112}$$

Il est facile d'assigner la nature de la fonction $f(x)$ qui réduit la valeur de $\psi$ fournie par l'équation (111) à un seul terme de la forme

$$\psi = \frac{\mathfrak{S}}{a}\cos\frac{n\pi\Omega t}{a}\cos\frac{n\pi x}{a}, \tag{113}$$

$n$ désignant une valeur particulière de $n$, et $\mathfrak{S}$ une quantité constante. En effet, pour y parvenir, il suffit de poser $t = 0$ dans l'équation (113), qui donne alors

$$f(x) = \frac{\mathfrak{S}}{a}\cos\frac{n\pi x}{a}; \tag{114}$$

et l'on peut d'ailleurs s'assurer *a posteriori* que, si l'on substitue dans l'équation (111) la valeur de $f(\mu)$ tirée de la formule (114), savoir

$$\frac{\mathfrak{S}}{a}\cos\frac{n\pi\mu}{a},$$

on retrouvera précisément l'équation (113). Ajoutons que l'équation (113) exprime un mouvement régulier de la verge élastique, dans lequel les mêmes vibrations tournantes se reproduisent périodique-

(1) *Œuvres de Cauchy*, S. II, T. VIII, p. 315.
(2) *Ibid.*, p. 314.

ment, la durée d'une vibration étant la valeur de $t$ donnée par la formule

$$\frac{n\pi\Omega t}{a} = 2\pi. \tag{115}$$

Le son correspondant à un mouvement de cette espèce a pour mesure le nombre $\mathfrak{N}$ des vibrations exécutées pendant l'unité de temps, ou, ce qui revient au même, la valeur de $\frac{1}{t}$ déduite de la formule (115). On tirera de cette formule, en écrivant $n$ au lieu de n,

$$\mathfrak{N} = \frac{1}{t} = \frac{n\Omega}{2a}. \tag{116}$$

Si l'on veut maintenant déterminer les nombres de vibrations tournantes correspondants aux sons les plus graves que la verge élastique puisse rendre, il suffira de prendre successivement $n = 1$, $n = 2$, $n = 3$, ...; et l'on trouvera en conséquence

$$\mathfrak{N} = \frac{\Omega}{2a}, \qquad \mathfrak{N} = \frac{\Omega}{a}, \qquad \mathfrak{N} = \frac{3\Omega}{2a}, \qquad \ldots. \tag{117}$$

On arriverait encore aux mêmes résultats en partant de l'équation (112), c'est-à-dire en considérant les vibrations tournantes d'une verge dont les deux extrémités seraient fixes.

Si, dans la première des formules (117), on substitue la valeur de $\Omega$ tirée de l'équation (84), on trouvera, pour le nombre des vibrations tournantes qui correspondent au son le plus grave,

$$\mathfrak{N} = \left(\frac{2}{3\rho}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{1}{a\left(\frac{i^2}{\mathrm{i}} + \frac{h^2}{\mathrm{h}}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{i^2} + \frac{1}{h^2}\right)^{\frac{1}{2}}}. \tag{118}$$

Donc le son dont il s'agit est réciproquement proportionnel à la longueur de la verge élastique, et il ne change pas, lorsque les épaisseurs $2h$, $2i$ croissent ou diminuent dans le même rapport, c'est-à-dire lorsque la section transversale de la verge varie en demeurant semblable à elle-même. Ces conclusions se trouvent confirmées par des



expériences de M. Savart. Lorsque les épaisseurs $2h$, $2i$ deviennent égales entre elles, la formule (118) se réduit à

$$\mathfrak{N} = \left[\frac{\mathrm{hi}}{3\rho(\mathrm{h}+\mathrm{i})}\right]^{\frac{1}{2}} \frac{1}{a}. \tag{119}$$

D'autre part, si l'on suppose la verge extraite d'un corps solide dont l'élasticité soit la même en tous sens, on aura

$$\mathrm{h} = \mathrm{i} = \mathrm{e} = \mathrm{f};$$

et par conséquent les formules (118), (119) donneront respectivement

$$\mathfrak{N} = \left(\frac{2\mathrm{f}}{3\rho}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{hi}{a(h^2+i^2)}, \tag{120}$$

$$\mathfrak{N} = \left(\frac{\mathrm{f}}{6\rho}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{1}{a}. \tag{121}$$

D'ailleurs, si, dans la même hypothèse, on fait vibrer la verge élastique longitudinalement, et de manière que le son produit soit le plus grave possible, le nombre N des vibrations longitudinales sera déterminé par la formule (78) de la page 52 et la formule (47) de la page 39, c'est-à-dire que l'on aura

$$\mathrm{N} = \left(\frac{5\mathrm{f}}{2\rho}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{1}{2a}. \tag{122}$$

Donc, par suite, on trouvera, en prenant $h = i$,

$$\frac{\mathrm{N}}{\mathfrak{N}} = \frac{1}{2}\sqrt{15} = 1{,}9364\ldots. \tag{123}$$

Enfin, si l'épaisseur $2i$ devient très petite relativement à l'épaisseur $2h$, l'équation (118) donnera sensiblement

$$\mathfrak{N} = \left(\frac{2\mathrm{h}}{3\rho}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{i}{ah}, \tag{124}$$

et l'on en conclura, en supposant que l'élasticité du corps reste la

même en tous sens,

$$\mathfrak{N} = \left(\frac{2f}{3\rho}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{i}{ah}. \tag{125}$$

Donc le son le plus grave produit par les vibrations tournantes d'une verge plate et rectangulaire, ou, en d'autres termes, d'une plaque dont la largeur est peu considérable, varie en raison directe de l'épaisseur de cette plaque, et en raison inverse du produit de deux autres dimensions, ou, ce qui revient au même, en raison inverse de la superficie de la plaque. La loi que nous venons d'énoncer est précisément celle que M. Savart a découverte, et à laquelle il a été conduit par l'expérience, ainsi qu'on peut le voir dans le tome XXV des *Annales de Physique et de Chimie*.

SUR LA

# RÉSOLUTION DES ÉQUATIONS NUMÉRIQUES

ET SUR LA

# THÉORIE DE L'ÉLIMINATION.

## CONSIDÉRATIONS GÉNÉRALES.

On a beaucoup écrit sur la résolution des équations numériques et sur l'élimination. On sait en particulier que la première de ces deux questions est l'objet spécial d'un Ouvrage de Lagrange, dans lequel cet illustre géomètre a présenté, pour la détermination des racines réelles d'une équation de degré quelconque, une méthode fondée sur la considération d'une équation auxiliaire, dont le degré est généralement plus élevé, et dont l'inconnue a pour valeurs les carrés des différences entre les diverses racines de la proposée. On se sert de cette équation auxiliaire pour calculer une limite inférieure à la plus petite différence entre deux racines réelles. J'ai fait voir dans l'*Analyse algébrique* [Note III (1)] qu'on pouvait arriver au même but, en considérant seulement le produit de toutes les différences des racines. Mais, pour tirer un parti avantageux de cette remarque, il restait à indiquer un moyen facile de former le même produit. Au reste, dès que l'on connaît une limite inférieure à la plus petite différence entre deux racines réelles, on parvient sans peine, non seulement à calculer le nombre de ces racines, mais encore à en obtenir des valeurs de plus en plus approchées.

(1) *Œuvres de Cauchy*, S. II, T. III.

Une autre méthode, également applicable à l'évaluation des racines réelles et des racines imaginaires, a été donnée par M. Legendre, dans la seconde édition de la *Théorie des nombres*. En suivant cette dernière méthode, on réduit la recherche de l'une des racines de l'équation proposée à la résolution d'une équation binôme, résolution que l'on opère à l'aide des propriétés bien connues des fonctions trigonométriques. D'ailleurs, en s'appuyant sur la même méthode, on prouve directement que l'on peut satisfaire à une équation de degré quelconque par une valeur réelle ou imaginaire de la variable. A la vérité, la démonstration que M. Legendre a donnée de cette proposition, et qu'il considère comme s'étendant à toutes sortes d'équations algébriques ou transcendantes, paraît sujette à quelques difficultés; mais on peut les surmonter, lorsque l'équation est algébrique, dans tous les cas possibles, et, lorsqu'elle devient transcendante, en apportant quelques restrictions à la proposition dont il s'agit, comme je l'ai fait voir dans les *Leçons sur le Calcul différentiel* (1).

On pourrait citer encore diverses méthodes relatives à la résolution des équations numériques et développées ou seulement indiquées dans les Ouvrages de Newton, de Hallé, d'Euler, de Lagrange, de M. Budan, de M. Legendre, de M. Fourier, etc. Mais ces méthodes, dont quelques-unes supposent déjà connue la valeur approchée d'une racine de l'équation que l'on veut résoudre, ou sont appuyées sur des théories étrangères aux éléments d'Algèbre, par exemple, sur la considération des séries récurrentes, n'offrent pas de règles certaines pour la détermination *a priori* du nombre des racines réelles. On doit toutefois excepter les méthodes qui ont été annoncées par M. Fourier, dans le Tome VII des *Mémoires de l'Académie des Sciences*, et que le nom de l'auteur recommande à l'attention des géomètres, mais dont on ne pourra se former une idée précise qu'au moment où il aura publié l'Ouvrage qu'il prépare sur cette matière.

Quoi qu'il en soit, j'ai pensé qu'il serait utile, pour ceux qui se pro-

(1) *OEuvres de Cauchy*, S. II, T. IV.



posent de cultiver les sciences mathématiques, d'offrir ici des méthodes simples et générales, à l'aide desquelles on puisse déterminer le nombre des racines, soit réelles, soit imaginaires, d'une équation de degré quelconque, et les calculer approximativement, sans recourir à l'équation auxiliaire dont l'inconnue a pour valeurs les carrés des différences entre ces racines, et sans employer des notations étrangères à ceux qui ne possèdent que les premiers principes de l'Algèbre. Ces méthodes, qui seront développées dans les paragraphes suivants, fourniront en même temps les moyens de simplifier la théorie de l'élimination, et de lever les difficultés qu'elle présente.

§ I. — *Sur la résolution des équations du premier et du second degré à coefficients réels, et sur les expressions imaginaires.*

Considérons l'équation du premier degré

$$a_0 x + a_1 = 0, \tag{1}$$

dans laquelle $a_0$, $a_1$ désignent deux constantes réelles. Si l'on fait, pour abréger,

$$A = \frac{a_1}{a_0}, \tag{2}$$

l'équation (1), divisée par $a_0$, deviendra

$$x + A = 0, \tag{3}$$

et l'on en tirera

$$x = -A. \tag{4}$$

Considérons maintenant l'équation du second degré

$$a_0 x^2 + a_1 x + a_2 = 0, \tag{5}$$

$a_0$, $a_1$, $a_2$ désignant trois constantes réelles. Si l'on fait, pour abréger,

$$A = \frac{a_1}{a_0}, \qquad B = \frac{a_2}{a_0}, \tag{6}$$

l'équation (5), divisée par $a_0$, deviendra

$$x^2 + Ax + B = 0. \tag{7}$$

Avant de résoudre généralement cette dernière, examinons d'abord le cas particulier où l'on aurait

$$A = 0. \tag{8}$$

Dans ce cas, l'équation (7), ou plutôt l'équation binôme

$$x^2 + B = 0 \tag{9}$$

donnera

$$x^2 = -B, \tag{10}$$

et on la vérifiera, si B est négatif, en prenant

$$x = \pm\sqrt{-B}. \tag{11}$$

Donc alors l'équation (9) admettra deux racines réelles, savoir

$$x = -\sqrt{-B}, \tag{12}$$

$$x = \sqrt{-B}. \tag{13}$$

Ainsi, par exemple, l'équation binôme

$$x^2 - 1 = 0 \tag{14}$$

offrira les deux racines réelles

$$x = -1, \tag{15}$$

$$x = 1. \tag{16}$$

Mais, si B devient positif, si l'on suppose, par exemple, $B = 1$, l'équation (9), réduite à

$$x^2 + 1 = 0, \tag{17}$$

ne sera plus vérifiée par aucune valeur réelle de $x$, puisqu'une semblable valeur rendra toujours la somme $x^2 + 1$ égale ou supérieure à l'unité, et par conséquent positive. Dans le même cas, les valeurs de $x$,



données par les formules (12) et (13), savoir

$$x = -\sqrt{-1}, \tag{18}$$

$$x = \sqrt{-1}, \tag{19}$$

ne seront plus que des expressions algébriques qui ne signifieront rien par elles-mêmes, et qui, pour cette raison, sembleraient devoir être exclues de l'Algèbre. Néanmoins, il peut être utile de les conserver dans le calcul. C'est en effet ce qui résulte des observations suivantes.

En Analyse, on appelle *expression symbolique* ou *symbole* toute combinaison de signes algébriques qui ne signifie rien par elle-même, ou à laquelle on attribue une valeur différente de celle qu'elle doit naturellement avoir. On nomme de même *équations symboliques* toutes celles qui, prises à la lettre et interprétées d'après les conventions généralement établies, sont inexactes ou n'ont pas de sens, mais desquelles on peut déduire des résultats exacts en modifiant et altérant, selon des règles fixes, ou ces équations elles-mêmes, ou les symboles qu'elles renferment. L'emploi de ces symboles ou de ces équations est souvent un moyen de simplifier les calculs, et d'écrire sous forme abrégée des résultats assez compliqués en apparence. Or, parmi les expressions ou équations symboliques dont la considération est de quelque importance en Analyse, on doit surtout distinguer celles que l'on a nommées *imaginaires*. Nous allons montrer comment l'on peut être conduit à en faire usage.

Soient

$$\alpha,\ \alpha',\ \alpha'',\ \ldots,\ \beta,\ \beta',\ \beta'',\ \ldots$$

plusieurs quantités réelles positives ou négatives. Si l'on multiplie les unes par les autres les expressions symboliques

$$\alpha + \beta\sqrt{-1},\quad \alpha' + \beta'\sqrt{-1},\quad \alpha'' + \beta''\sqrt{-1},\quad \ldots, \tag{20}$$

en opérant d'après les règles connues de la multiplication algébrique, comme si $\sqrt{-1}$ était une quantité réelle dont le carré fût égal à $-1$, le produit obtenu se composera de deux parties, l'une toute réelle,

l'autre ayant pour coefficient $\sqrt{-1}$, et restera le même, quel que soit l'ordre dans lequel on aura effectué les diverses multiplications. Or cette simple remarque peut être employée fort utilement dans la recherche des propriétés générales des nombres ou des quantités réelles, et fournit, par exemple, le moyen d'établir la proposition suivante :

THÉORÈME I. — *Si l'on multiplie l'un par l'autre deux nombres entiers dont chacun soit la somme de deux carrés, le produit sera encore la somme de deux carrés.*

*Démonstration.* — Soient

$$\alpha^2+\beta^2, \quad \gamma^2+\delta^2 \tag{21}$$

les deux nombres entiers dont il s'agit, $\alpha^2$, $\beta^2$, $\gamma^2$, $\delta^2$ désignant des carrés parfaits. Ces deux nombres pourront être considérés comme résultants, le premier de la multiplication des facteurs symboliques

$$\alpha+\beta\sqrt{-1}, \quad \alpha-\beta\sqrt{-1}, \tag{22}$$

le second de la multiplication des facteurs symboliques

$$\gamma+\delta\sqrt{-1}, \quad \gamma-\delta\sqrt{-1}. \tag{23}$$

Donc le produit

$$(\alpha^2+\beta^2)(\gamma^2+\delta^2) \tag{24}$$

pourra être considéré comme résultant de la multiplication des quatre facteurs symboliques

$$\alpha+\beta\sqrt{-1}, \quad \alpha-\beta\sqrt{-1}, \quad \gamma+\delta\sqrt{-1}, \quad \gamma-\delta\sqrt{-1}. \tag{25}$$

D'ailleurs, si l'on multiplie : 1° le premier facteur par le troisième; 2° le deuxième par le quatrième, les produits ainsi formés seront respectivement

$$\alpha\gamma-\beta\delta+(\alpha\delta+\beta\gamma)\sqrt{-1}, \quad \alpha\gamma-\beta\delta-(\alpha\delta+\beta\gamma)\sqrt{-1}; \tag{26}$$



puis, en multipliant l'une par l'autre les expressions (26), on trouvera pour résultat définitif la quantité positive

$$(\alpha\gamma-\beta\delta)^2+(\alpha\delta+\beta\gamma)^2.$$

On aura donc

$$(\alpha\gamma-\beta\delta)^2+(\alpha\delta+\beta\gamma)^2=(\alpha^2+\beta^2)(\gamma^2+\delta^2). \tag{27}$$

Or cette dernière formule comprend évidemment le théorème I.

*Corollaire I.* — Si, dans la formule (27), on échange entre elles les lettres $\delta$ et $\gamma$, on en tirera

$$(\alpha\gamma+\beta\delta)^2+(\alpha\delta-\beta\gamma)^2=(\alpha^2+\beta^2)(\gamma^2+\delta^2). \tag{28}$$

Il y a donc en général deux manières de décomposer en deux carrés le produit de deux nombres entiers dont chacun est la somme de deux carrés. Ainsi, par exemple, on tire des équations (27) et (28)

$$(2^2+1)(3^2+2^2)=4^2+7^2=1^2+8^2.$$

*Corollaire II.* — Les formules (27), (28) subsistent évidemment dans le cas même où les lettres $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$ cessent de représenter des nombres entiers, et désignent des quantités réelles quelconques, positives ou négatives.

On voit, par ce qui précède, qu'il peut être utile, dans la recherche des propriétés générales des quantités réelles, de considérer des expressions symboliques de la forme

$$\alpha+\beta\sqrt{-1}. \tag{29}$$

Une semblable expression, dans laquelle $\alpha$, $\beta$ désignent deux quantités réelles, est ce qu'on nomme une *expression imaginaire;* et l'on dit que deux expressions imaginaires

$$\alpha+\beta\sqrt{-1}, \qquad \gamma+\delta\sqrt{-1}$$

sont *égales* entre elles, lorsqu'il y a égalité de part et d'autre : 1° entre les parties réelles $\alpha$ et $\gamma$; 2° entre les coefficients de $\sqrt{-1}$, savoir $\beta$ et $\delta$. L'égalité de deux expressions imaginaires s'indique comme celle de

deux quantités réelles par le signe $=$ ; et il en résulte ce qu'on appelle une *équation imaginaire*. Cela posé, toute équation imaginaire n'est que la représentation symbolique de deux équations entre quantités réelles. Par exemple, l'équation symbolique

$$\alpha+\beta\sqrt{-1}=\gamma+\delta\sqrt{-1}$$

équivaut seule aux deux équations réelles

$$\alpha=\gamma, \qquad \beta=\delta.$$

Lorsque, dans l'expression imaginaire

$$\alpha+\beta\sqrt{-1},$$

le coefficient $\beta$ de $\sqrt{-1}$ s'évanouit, le terme $\beta\sqrt{-1}$ est censé réduit à zéro, et l'expression elle-même à la quantité réelle $\alpha$. En vertu de cette convention, les expressions imaginaires comprennent comme cas particuliers les quantités réelles.

Les expressions imaginaires peuvent être soumises, aussi bien que les quantités réelles, aux diverses opérations de l'Algèbre. Si l'on effectue, en particulier, l'addition, la soustraction ou la multiplication de deux ou de plusieurs expressions imaginaires, on obtiendra pour résultat une nouvelle expression imaginaire qui sera ce qu'on appelle la *somme*, la *différence*, ou le *produit* des expressions données; et l'on se servira des notations ordinaires pour indiquer cette somme, cette différence ou ce produit. Par exemple, si l'on donne seulement deux expressions imaginaires

$$\alpha+\beta\sqrt{-1}, \quad \gamma+\delta\sqrt{-1},$$

on trouvera

$$(30) \qquad (\alpha+\beta\sqrt{-1})+(\gamma+\delta\sqrt{-1})=\alpha+\gamma+(\beta+\delta)\sqrt{-1},$$

$$(31) \qquad (\alpha+\beta\sqrt{-1})-(\gamma+\delta\sqrt{-1})=\alpha-\gamma+(\beta-\delta)\sqrt{-1},$$

$$(32) \qquad (\alpha+\beta\sqrt{-1})\times(\gamma+\delta\sqrt{-1})=\alpha\gamma-\beta\delta+(\alpha\delta+\beta\gamma)\sqrt{-1}.$$

Diviser une première expression imaginaire par une deuxième, c'est trouver une troisième expression imaginaire qui, multipliée par la deuxième, reproduise la première. Le résultat de cette opération est le quotient des deux expressions données. On se sert, pour l'indiquer, du signe ordinaire de la division. Ainsi

$$\frac{\alpha+\beta\sqrt{-1}}{\gamma+\delta\sqrt{-1}}$$

représente le quotient des deux expressions imaginaires

$$\alpha+\beta\sqrt{-1}, \quad \gamma+\delta\sqrt{-1}.$$

Élever une expression imaginaire à la puissance du degré $m$ ($m$ désignant un nombre entier), c'est former le produit de $m$ facteurs égaux à cette expression. On indique la *puissance* $m^{\text{ième}}$ de $\alpha+\beta\sqrt{-1}$ par la notation

$$(\alpha+\beta\sqrt{-1})^m.$$

Ainsi, en particulier, la notation

$$(\alpha+\beta\sqrt{-1})^2$$

représente le produit de l'expression $\alpha+\beta\sqrt{-1}$ par elle-même.

On dit que deux expressions imaginaires sont conjuguées l'une à l'autre, lorsque ces deux expressions ne diffèrent entre elles que par le signe du coefficient de $\sqrt{-1}$. La somme de deux semblables expressions est toujours réelle, ainsi que leur produit. En effet, les deux expressions imaginaires conjuguées

$$(22) \qquad \alpha+\beta\sqrt{-1}, \quad \alpha-\beta\sqrt{-1}$$

donnent pour somme $2\alpha$, et pour produit $\alpha^2+\beta^2$. La racine carrée de ce produit, ou

$$(33) \qquad \sqrt{\alpha^2+\beta^2},$$

est ce qu'on nomme le *module* de chacune des expressions (22). Pour que le module (33) s'évanouisse, il est nécessaire et il suffit que l'on ait en même temps $\alpha=0$, $\beta=0$, c'est-à-dire, en d'autres termes, que les expressions (22) se réduisent l'une et l'autre à zéro.

Remarquons encore que, en vertu des principes ci-dessus établis, *l'égalité de deux expressions imaginaires entraîne toujours l'égalité de leurs modules*.

Quelquefois on représente une expression imaginaire par une seule lettre. Cela posé, soit

$$x = p + q\sqrt{-1} \tag{34}$$

une semblable expression, $p$ et $q$ étant deux quantités réelles quelconques. On pourra se proposer d'assigner à ces deux quantités des valeurs telles que la valeur correspondante de $x$ vérifie une équation donnée du second degré, par exemple, l'équation (7) ou (9). Alors la valeur de $x$ deviendra ce qu'on nomme une *racine imaginaire* de l'équation (7) ou (9). Ajoutons que cette racine imaginaire se transformera en une racine réelle, dans les cas où la valeur de $q$ sera nulle. Si l'on suppose en particulier l'équation (9) réduite à l'équation (14) ou (17), on la vérifiera évidemment en attribuant à $x$ l'une des valeurs réelles (15), (16), ou l'une des valeurs imaginaires (18), (19). Donc ces valeurs représentent des racines réelles de l'équation (14) et des racines imaginaires de l'équation (17).

Revenons maintenant à l'équation (9) ou (10). Pour la résoudre généralement, c'est-à-dire pour trouver toutes les valeurs réelles ou imaginaires de $x$ qui peuvent la vérifier, posons comme ci-dessus $x = p + q\sqrt{-1}$. Elle donnera

$$p^2 - q^2 + 2pq\sqrt{-1} = -\mathrm{B}, \tag{35}$$

et se partagera en deux équations réelles, savoir

$$p^2 - q^2 = -\mathrm{B}, \qquad 2pq = 0. \tag{36}$$

Or on ne peut satisfaire aux équations (36), par des valeurs réelles de $p$ et de $q$, qu'en supposant

$$q = 0, \qquad p^2 = -\mathrm{B} \tag{37}$$

ou

$$p = 0, \qquad q^2 = \mathrm{B}. \tag{38}$$



La première supposition n'est admissible que dans le cas où l'on a

$$\mathrm{B} < 0, \tag{39}$$

et l'on tire alors des formules (37)

$$q = 0, \qquad p = \pm\sqrt{-\mathrm{B}},$$
$$x = p + q\sqrt{-1} = \pm\sqrt{-\mathrm{B}}. \tag{40}$$

Au contraire, la seconde supposition n'est admissible que dans le cas où l'on a

$$\mathrm{B} > 0, \tag{41}$$

et l'on tire alors des formules (38)

$$p = 0, \qquad q = \pm\mathrm{B}^{\frac{1}{2}},$$
$$x = p + q\sqrt{-1} = \pm\mathrm{B}^{\frac{1}{2}}\sqrt{-1}. \tag{42}$$

Donc, dans tous les cas possibles, l'équation (10) admettra seulement deux racines, savoir, deux racines réelles fournies par les formules (12) et (13), si B est négatif, et deux racines imaginaires, mais conjuguées, fournies par les formules

$$x = -\mathrm{B}^{\frac{1}{2}}\sqrt{-1}, \tag{43}$$

$$x = \mathrm{B}^{\frac{1}{2}}\sqrt{-1}, \tag{44}$$

si B devient positif. Si la quantité B s'évanouissait, les deux racines de l'équation (10) seraient égales entre elles, et chacune des formules (12), (13), (43), (44) donnerait

$$x = 0. \tag{45}$$

Passons maintenant à l'équation (7). Cette équation pouvant s'écrire comme il suit

$$\left(x + \frac{\mathrm{A}}{2}\right)^2 + \mathrm{B} - \frac{\mathrm{A}^2}{4} = 0, \tag{46}$$

on en tirera

$$\left(x + \frac{\mathrm{A}}{2}\right)^2 = \frac{\mathrm{A}^2}{4} - \mathrm{B}. \tag{47}$$

Cette dernière, étant semblable à l'équation (10), se résoudra de la même manière; et d'abord, si l'on suppose

$$\frac{A^2}{4} = \text{ou} > B, \tag{48}$$

elle donnera

$$x + \frac{A}{2} = \pm\sqrt{\frac{A^2}{4} - B}, \tag{49}$$

et par conséquent

$$x = -\frac{A}{2} \pm \sqrt{\frac{A^2}{4} - B}. \tag{50}$$

Donc alors l'équation (7) admettra deux racines réelles, savoir

$$x = -\frac{A}{2} - \sqrt{\frac{A^2}{4} - B}, \tag{51}$$

$$x = -\frac{A}{2} + \sqrt{\frac{A^2}{4} - B}. \tag{52}$$

Si l'on suppose, au contraire,

$$\frac{A^2}{4} < B, \tag{53}$$

la formule (47) donnera

$$x + \frac{A}{2} = \pm\left(B - \frac{A^2}{4}\right)^{\frac{1}{2}}\sqrt{-1}, \tag{54}$$

et par conséquent

$$x = -\frac{A}{2} \pm \left(B - \frac{A^2}{4}\right)^{\frac{1}{2}}\sqrt{-1}. \tag{55}$$

Donc alors l'équation (7) admettra deux racines imaginaires, mais conjuguées l'une à l'autre, savoir

$$x = -\frac{A}{2} - \left(B - \frac{A^2}{4}\right)^{\frac{1}{2}}\sqrt{-1}, \tag{56}$$

$$x = -\frac{A}{2} + \left(B - \frac{A^2}{4}\right)^{\frac{1}{2}}\sqrt{-1}. \tag{57}$$

Nous terminerons ce paragraphe en indiquant quelques propriétés



des expressions imaginaires. Ces propriétés sont comprises dans les théorèmes que nous allons énoncer.

THÉORÈME II. — *La somme de deux expressions imaginaires offre, ainsi que leur différence, un module compris entre la somme et la différence de leurs modules.*

*Démonstration.* — En effet, soient

$$\alpha + \beta\sqrt{-1}, \quad \gamma + \delta\sqrt{-1} \tag{58}$$

les expressions imaginaires proposées. Leur somme et leur différence

$$\alpha + \gamma + (\beta + \delta)\sqrt{-1}, \quad \alpha - \gamma + (\beta - \delta)\sqrt{-1} \tag{59}$$

offriront pour modules les deux quantités

$$[\alpha^2 + \beta^2 + 2(\alpha\gamma + \beta\delta) + \gamma^2 + \delta^2]^{\frac{1}{2}}, \quad [\alpha^2 + \beta^2 - 2(\alpha\gamma + \beta\delta) + \gamma^2 + \delta^2]^{\frac{1}{2}}. \tag{60}$$

Comme on aura d'ailleurs, en vertu de la formule (28),

$$(\alpha\gamma + \beta\delta)^2 = \text{ou} < (\alpha^2 + \beta^2)(\gamma^2 + \delta^2), \tag{61}$$

il est clair que la valeur numérique de la somme

$$\alpha\gamma + \beta\delta \tag{62}$$

sera inférieure ou tout au plus égale au produit

$$(\alpha^2 + \beta^2)^{\frac{1}{2}}(\gamma^2 + \delta^2)^{\frac{1}{2}}.$$

Donc cette somme sera renfermée entre les deux limites

$$-(\alpha^2 + \beta^2)^{\frac{1}{2}}(\gamma^2 + \delta^2)^{\frac{1}{2}}, \quad +(\alpha^2 + \beta^2)^{\frac{1}{2}}(\gamma^2 + \delta^2)^{\frac{1}{2}}. \tag{63}$$

Donc, par suite, chacune des quantités (60) sera comprise entre les deux limites

$$\begin{cases} (\alpha^2 + \beta^2 - 2\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}\sqrt{\gamma^2 + \delta^2} + \gamma^2 + \delta^2)^{\frac{1}{2}} = \pm(\sqrt{\alpha^2 + \beta^2} - \sqrt{\gamma^2 + \delta^2}), \\ (\alpha^2 + \beta^2 + 2\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}\sqrt{\gamma^2 + \delta^2} + \gamma^2 + \delta^2)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} + \sqrt{\gamma^2 + \delta^2}, \end{cases} \tag{64}$$

c'est-à-dire entre la somme et la différence des modules des expressions (58).

*Corollaire.* — La somme de plusieurs expressions imaginaires offre un module inférieur à la somme de leurs modules.

THÉORÈME III. — *Le produit de deux expressions imaginaires a pour module le produit de leurs modules.*

*Démonstration.* — En effet, le produit des expressions imaginaires

$$\alpha+\beta\sqrt{-1},\quad \gamma+\delta\sqrt{-1} \tag{58}$$

étant lui-même une expression imaginaire conjuguée à celle qui représente le produit des deux suivantes

$$\alpha-\beta\sqrt{-1},\quad \gamma-\delta\sqrt{-1}, \tag{65}$$

chacun des produits en question aura pour module la racine carrée de la quantité

$$(\alpha^2+\beta^2)(\gamma^2+\delta^2),$$

qui résulte de la multiplication des quatre facteurs (58) et (65). Donc ce module sera équivalent à

$$(\alpha^2+\beta^2)^{\frac{1}{2}}(\gamma^2+\delta^2)^{\frac{1}{2}}, \tag{66}$$

c'est-à-dire au produit des modules des expressions (58).

*Corollaire I.* — Le produit de plusieurs facteurs imaginaires

$$\alpha+\beta\sqrt{-1},\quad \alpha'+\beta'\sqrt{-1},\quad \alpha''+\beta''\sqrt{-1},\quad \ldots$$

a pour module le produit de leurs modules.

*Corollaire II.* — Si, dans le corollaire qui précède, on suppose les divers facteurs imaginaires égaux entre eux, et leur nombre égal à $m$, on reconnaîtra que la $m^{\text{ième}}$ puissance d'une expression imaginaire a pour module la $m^{\text{ième}}$ puissance de son module.

*Corollaire III.* — Comme le produit de plusieurs modules ne peut devenir nul, sans que l'un de ces modules s'évanouisse, et qu'une expression imaginaire dont le module s'évanouit se réduit nécessairement à zéro, il est clair que le corollaire I entrainera encore la proposition suivante :



THÉORÈME IV. — *Le produit de plusieurs facteurs imaginaires ne peut s'évanouir avec son module qu'autant que l'un des facteurs se réduit à zéro.*

On établit encore sans difficulté les théorèmes suivants :

THÉORÈME V. — *Pour diviser une expression imaginaire par une quantité réelle, il suffit de diviser par cette quantité, dans l'expression dont il s'agit, la partie réelle et le coefficient de* $\sqrt{-1}$.

*Démonstration.* — En effet, diviser l'expression imaginaire

$$\alpha+\beta\sqrt{-1}$$

par une quantité réelle $\gamma$, c'est chercher une seconde expression imaginaire

$$x=p+q\sqrt{-1},$$

qui, étant multipliée par $\gamma$, reproduise la première, en sorte que l'on ait

$$\gamma(p+q\sqrt{-1})=\alpha+\beta\sqrt{-1}. \tag{67}$$

Or l'équation symbolique (67) équivaut aux deux équations réelles

$$\gamma p=\alpha,\qquad \gamma q=\beta,$$

desquelles on tire

$$p=\frac{\alpha}{\gamma},\qquad q=\frac{\beta}{\gamma}$$

et, par suite,

$$x=p+q\sqrt{-1}=\frac{\alpha}{\gamma}+\frac{\beta}{\gamma}\sqrt{-1}. \tag{68}$$

Donc, pour obtenir le quotient de l'expression imaginaire $\alpha+\beta\sqrt{-1}$ par la quantité réelle $\gamma$, il suffit, dans cette expression, de diviser par $\gamma$ la partie réelle et le coefficient de $\sqrt{-1}$.

THÉORÈME VI. — *Pour diviser une expression imaginaire* $\alpha+\beta\sqrt{-1}$ *par une expression semblable* $\gamma+\delta\sqrt{-1}$, *il suffit de multiplier la première par une troisième expression imaginaire* $\gamma-\delta\sqrt{-1}$ *qui soit conjuguée à la seconde, et de diviser le produit obtenu par le carré du module de* $\gamma+\delta\sqrt{-1}$.

*Démonstration.* — En effet, diviser $\alpha+\beta\sqrt{-1}$ par $\gamma+\delta\sqrt{-1}$, c'est chercher une expression imaginaire

$$x=p+q\sqrt{-1}$$

qui soit propre à vérifier la formule

$$(\gamma+\delta\sqrt{-1})x=\alpha+\beta\sqrt{-1}. \tag{69}$$

D'ailleurs, si l'on multiplie par $\gamma-\delta\sqrt{-1}$ les deux membres de l'équation (69), elle deviendra

$$(\gamma^2+\delta^2)x=(\alpha+\beta\sqrt{-1})(\gamma-\delta\sqrt{-1}), \tag{70}$$

et l'on en tirera

$$x=\frac{(\alpha+\beta\sqrt{-1})(\gamma-\delta\sqrt{-1})}{\gamma^2+\delta^2}. \tag{71}$$

Or cette dernière formule comprend évidemment le théorème VI.

*Scolie.* — Si l'on développe le second membre de la formule (71), en ayant égard au théorème V, on trouvera

$$x=\frac{\alpha\gamma+\beta\delta}{\gamma^2+\delta^2}+\frac{\beta\gamma-\alpha\delta}{\gamma^2+\delta^2}\sqrt{-1}. \tag{72}$$

THÉORÈME VII. — *Les deux polynômes*

$$\begin{cases} a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_{n-1}x+a_n, \\ c_0x^n+c_1x^{n-1}+\ldots+c_{n-1}x+c_n, \end{cases} \tag{73}$$

*dans lesquels* $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n$; $c_0, c_1, \ldots, c_{n-1}, c_n$ *désignent des coefficients réels ou imaginaires, ne peuvent rester égaux entre eux, quelle que soit la valeur réelle ou imaginaire de* $x$, *à moins que l'on n'ait*

$$a_0=c_0, \quad a_1=c_1, \quad \ldots, \quad a_{n-1}=c_{n-1}, \quad a_n=c_n. \tag{74}$$



*Demonstration.* — En effet, si deux polynômes (73) restent égaux, quel que soit $n$, leur différence sera toujours nulle, et l'on aura constamment

$$(a_0-c_0)x^n+(a_1-c_1)x^{n-1}+\ldots+(a_{n-1}-c_{n-1})x+a_n-c_n=0. \tag{75}$$

Or on tirera de l'équation (75) : 1° en posant $x=0$,

$$a_n-c_n=0, \qquad a_n=c_n;$$

2° en divisant le premier membre par $x$, et posant de nouveau $x=0$,

$$a_{n-1}-c_{n-1}=0, \qquad a_{n-1}=c_{n-1},$$

et ainsi de suite.

Nous remarquerons encore que, étant donnée l'équation algébrique

$$a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\ldots+a_{n-1}x+a_n=0, \tag{76}$$

dans laquelle $n$ désigne un nombre entier quelconque, et $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n$ des coefficients constants réels ou imaginaires, on peut toujours réduire à l'unité le coefficient du premier terme. En effet, si l'on pose

$$\frac{a_1}{a_0}=\mathrm{A}, \quad \frac{a_2}{a_0}=\mathrm{B}, \quad \ldots, \quad \frac{a_{n-1}}{a_0}=\mathrm{I}, \quad \frac{a_n}{a_0}=\mathrm{K} \tag{77}$$

ou, ce qui revient au même,

$$a_1=a_0\mathrm{A}, \quad a_2=a_0\mathrm{B}, \quad \ldots, \quad a_{n-1}=a_0\mathrm{I}, \quad a_n=a_0\mathrm{K}, \tag{78}$$

l'équation (76) pourra s'écrire ainsi qu'il suit

$$a_0(x^n+\mathrm{A}x^{n-1}+\mathrm{B}x^{n-2}+\ldots+\mathrm{I}x+\mathrm{K})=0; \tag{79}$$

et, comme $a_0$ diffère nécessairement de zéro, lorsque $a_0x^n$ est le premier terme de l'équation (76), on tirera de la formule (79), réunie au théorème IV,

$$x^n+\mathrm{A}x^{n-1}+\mathrm{B}x^{n-2}+\ldots+\mathrm{I}x+\mathrm{K}=0. \tag{80}$$

Dans le cas particulier où l'équation (76) est *binôme* ou du second

degré, c'est-à-dire de l'une des formes

$$a_0 x^n + a_n = 0, \tag{81}$$

$$a_0 x^2 + a_1 x + a_2 = 0, \tag{82}$$

alors, après la réduction du coefficient de son premier terme à l'unité, elle devient

$$x^n + \mathrm{K} = 0 \tag{83}$$

ou

$$x^2 + \mathrm{A}x + \mathrm{B} = 0. \tag{84}$$

§ II. — *Sur la résolution des équations du premier et du second degré à coefficients quelconques, réels ou imaginaires.*

Considérons d'abord une équation du premier degré à coefficients réels ou imaginaires. Si l'on réduit à l'unité le coefficient du premier terme, cette équation se présentera sous la forme

$$x + \mathrm{A} = 0, \tag{1}$$

A désignant une constante réelle ou imaginaire, et l'on en tirera

$$x = -\mathrm{A}. \tag{2}$$

Considérons maintenant une équation quelconque du second degré. Si l'on réduit à l'unité le coefficient du premier terme, cette équation se présentera sous la forme

$$x^2 + \mathrm{A}x + \mathrm{B} = 0, \tag{3}$$

A, B désignant deux constantes réelles ou imaginaires. Si, de plus, la constante A s'évanouit, l'équation (3) deviendra

$$x^2 + \mathrm{B} = 0 \tag{4}$$

ou

$$x^2 = -\mathrm{B}. \tag{5}$$

Donc alors, en écrivant, au lieu de $-\mathrm{B}$, $\alpha + \beta\sqrt{-1}$, et attribuant aux



lettres $\alpha$, $\beta$ des valeurs réelles, on aura simplement à résoudre l'équation binôme

$$x^2 = \alpha + \beta\sqrt{-1}. \tag{6}$$

Or, on y parviendra sans peine, en opérant comme il suit.

Désignons par $p$, $q$ deux quantités réelles tellement choisies que

$$x = p + q\sqrt{-1} \tag{7}$$

soit une valeur de $x$ propre à vérifier l'équation (6). Cette équation donnera

$$p^2 - q^2 + 2pq\sqrt{-1} = \alpha + \beta\sqrt{-1} \tag{8}$$

et, par conséquent,

$$p^2 - q^2 = \alpha, \tag{9}$$

$$2pq = \beta; \tag{10}$$

puis on tirera des formules (7) et (10)

$$x = p + \frac{\beta}{2p}\sqrt{-1} \tag{11}$$

ou, ce qui revient au même,

$$x = \frac{\beta}{2q} + q\sqrt{-1}. \tag{12}$$

D'ailleurs les formules (9) et (10) entraîneront la suivante

$$p^2 + q^2 = (\alpha^2 + \beta^2)^{\frac{1}{2}}, \tag{13}$$

que l'on peut aussi déduire immédiatement de l'équation (6) jointe au corollaire II du théorème III. Enfin l'on conclura des formules (9) et (13)

$$p^2 = \frac{(\alpha^2 + \beta^2)^{\frac{1}{2}} + \alpha}{2}, \tag{14}$$

$$q^2 = \frac{(\alpha^2 + \beta^2)^{\frac{1}{2}} - \alpha}{2} \tag{15}$$

et, par suite,

$$p=\pm\left(\frac{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}+\alpha}{2}\right)^{\frac{1}{2}}, \tag{16}$$

$$q=\pm\left(\frac{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}-\alpha}{2}\right)^{\frac{1}{2}}; \tag{17}$$

puis, en substituant la valeur de $p$ dans la formule (11), ou la valeur de $q$ dans la formule (12), on trouvera

$$x=\pm\left[\frac{(\sqrt{\alpha^2+\beta^2}+\alpha)^{\frac{1}{2}}}{2^{\frac{1}{2}}}+\frac{\beta}{2^{\frac{1}{2}}(\sqrt{\alpha^2+\beta^2}+\alpha)^{\frac{1}{2}}}\sqrt{-1}\right], \tag{18}$$

ou, ce qui revient au même,

$$x=\pm\left[\frac{\beta}{2^{\frac{1}{2}}(\sqrt{\alpha^2+\beta^2}-\alpha)^{\frac{1}{2}}}+\frac{(\sqrt{\alpha^2+\beta^2}-\alpha)^{\frac{1}{2}}}{2^{\frac{1}{2}}}\sqrt{-1}\right]. \tag{19}$$

Donc l'équation (6) admettra deux racines dont les valeurs seront respectivement

$$x=-\frac{(\sqrt{\alpha^2+\beta^2}+\alpha)^{\frac{1}{2}}}{2^{\frac{1}{2}}}-\frac{\beta}{2^{\frac{1}{2}}(\sqrt{\alpha^2+\beta^2}+\alpha)^{\frac{1}{2}}}\sqrt{-1}, \tag{20}$$

$$x=\frac{(\sqrt{\alpha^2+\beta^2}+\alpha)^{\frac{1}{2}}}{2^{\frac{1}{2}}}+\frac{\beta}{2^{\frac{1}{2}}(\sqrt{\alpha^2+\beta^2}+\alpha)^{\frac{1}{2}}}\sqrt{-1}, \tag{21}$$

ou, ce qui revient au même,

$$x=-\frac{\beta}{2^{\frac{1}{2}}(\sqrt{\alpha^2+\beta^2}-\alpha)^{\frac{1}{2}}}-\frac{(\sqrt{\alpha^2+\beta^2}-\alpha)^{\frac{1}{2}}}{2^{\frac{1}{2}}}\sqrt{-1}, \tag{22}$$

$$x=\frac{\beta}{2^{\frac{1}{2}}(\sqrt{\alpha^2+\beta^2}-\alpha)^{\frac{1}{2}}}+\frac{(\sqrt{\alpha^2+\beta^2}-\alpha)^{\frac{1}{2}}}{2^{\frac{1}{2}}}\sqrt{-1}. \tag{23}$$

Dans le cas où $\beta$ s'évanouit, l'équation (6) se réduit à

$$x^2=\alpha. \tag{24}$$



Dans le même cas, on tire de la formule (18), en supposant $\alpha$ positif,

$$x=\pm\alpha^{\frac{1}{2}}, \tag{25}$$

et de la formule (19), en supposant $\alpha$ négatif,

$$x=\pm(-\alpha)^{\frac{1}{2}}\sqrt{-1}. \tag{26}$$

Ces dernières s'accordent, comme on devait s'y attendre, avec les formules (40) et (42) du § I.

Dans le cas où $\alpha$ s'évanouit, l'équation (6) se réduit à

$$x^2=\beta\sqrt{-1}, \tag{27}$$

et l'on tire de la formule (18) ou (19) : 1° en supposant $\beta$ positif,

$$x=\pm\left[\left(\frac{\beta}{2}\right)^{\frac{1}{2}}+\left(\frac{\beta}{2}\right)^{\frac{1}{2}}\sqrt{-1}\right]; \tag{28}$$

2° en supposant $\beta$ négatif,

$$x=\pm\left[\left(-\frac{\beta}{2}\right)^{\frac{1}{2}}-\left(-\frac{\beta}{2}\right)^{\frac{1}{2}}\sqrt{-1}\right]. \tag{29}$$

Ainsi, en particulier, les deux racines de l'équation

$$x^2=\sqrt{-1} \tag{30}$$

seront données par la formule

$$x=\pm\frac{1+\sqrt{-1}}{\sqrt{2}}=\pm\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{-1}\right), \tag{31}$$

et celles de l'équation

$$x^2=-\sqrt{-1} \tag{32}$$

par la formule

$$x=\pm\frac{1-\sqrt{-1}}{\sqrt{2}}=\pm\left(\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{-1}\right). \tag{33}$$

Revenons maintenant à l'équation (3), et supposons que le coeffi-

cient A cesse de s'évanouir. Cette équation pouvant s'écrire comme il suit

$$\left(x+\frac{A}{2}\right)^2+B-\frac{A^2}{4}=0, \tag{34}$$

on en tirera

$$\left(x+\frac{A}{2}\right)^2=\frac{A^2}{4}-B. \tag{35}$$

Or l'équation (35), étant de la même forme que l'équation (6), se résoudra de la même manière, et fournira pour $x+\frac{A}{2}$ des valeurs semblables aux valeurs de $x$ déterminées par la formule (18) ou (19).

*Exemple.* — Soit donnée l'équation du second degré

$$x^2-(5+4\sqrt{-1})x+6+8\sqrt{-1}=0. \tag{36}$$

On en tirera

$$\begin{cases}\left[x-\left(\frac{5}{2}+2\sqrt{-1}\right)\right]^2\\ \quad=\left(\frac{5}{2}+2\sqrt{-1}\right)^2-(6+8\sqrt{-1})=-\frac{15}{4}+2\sqrt{-1}.\end{cases} \tag{37}$$

D'ailleurs, si l'on remplace $x$ par $x-\left(\frac{5}{2}+2\sqrt{-1}\right)$ dans le premier membre de la formule (18), et si l'on pose en outre $\alpha=-\frac{15}{4}$, $\beta=2$, on tirera de cette formule

$$x-\left(\frac{5}{2}+2\sqrt{-1}\right)=\pm\left(\frac{1}{2}+2\sqrt{-1}\right) \tag{38}$$

et, par suite,

$$x=\frac{5}{2}+2\sqrt{-1}\pm\left(\frac{1}{2}+2\sqrt{-1}\right). \tag{39}$$

Donc, les deux racines de l'équation (36) seront respectivement

$$\begin{cases}x=\frac{5}{2}+2\sqrt{-1}-\left(\frac{1}{2}+2\sqrt{-1}\right)=2,\\ x=\frac{5}{2}+2\sqrt{-1}+\left(\frac{1}{2}+2\sqrt{-1}\right)=3+4\sqrt{-1}.\end{cases} \tag{40}$$



### § III. — *Sur la résolution des équations binômes.*

Considérons une équation binôme du degré $n$, la lettre $n$ désignant un nombre entier quelconque. Si l'on réduit le coefficient du premier terme à l'unité, cette équation se présentera sous la forme

$$x^n+K=0, \tag{1}$$

K étant une constante réelle ou imaginaire, et l'on en tirera

$$x^n=-K. \tag{2}$$

Donc, en écrivant, au lieu de $-K$, $\alpha+\beta\sqrt{-1}$, et attribuant aux lettres $\alpha$, $\beta$ des valeurs réelles, on ramènera l'équation (1) à la forme

$$x^n=\alpha+\beta\sqrt{-1}. \tag{3}$$

Or on prouvera facilement que cette dernière peut toujours être résolue par des valeurs réelles ou imaginaires de la variable $x$. C'est, en effet, ce qui résulte des principes que nous allons établir.

Supposons d'abord que le degré $n$ se réduise à une puissance de 2, c'est-à-dire à l'un des nombres 2, 4, 8, 16, .... Alors l'équation (3) se trouvera réduite à l'une des suivantes :

$$x^2=\alpha+\beta\sqrt{-1}, \tag{4}$$

$$x^4=\alpha+\beta\sqrt{-1}, \tag{5}$$

$$x^8=\alpha+\beta\sqrt{-1}, \tag{6}$$

$$x^{16}=\alpha+\beta\sqrt{-1}, \tag{7}$$

.....

Or l'équation (4) a déjà été résolue dans le paragraphe précédent, où l'on a fait voir qu'elle admet deux racines de la forme $p+q\sqrt{-1}$. De plus, il suffira de poser

$$x^2=y, \qquad y^2=z, \qquad z^2=u, \qquad \ldots$$

pour obtenir, à la place de la formule (5), le système des équations binômes

$$x^2 = y, \qquad y^2 = \alpha + \beta\sqrt{-1}; \tag{8}$$

à la place de la formule (6), le système des trois équations binômes

$$x^2 = y, \qquad y^2 = z, \qquad z^2 = \alpha + \beta\sqrt{-1}; \tag{9}$$

à la place de la formule (7), le système des quatre équations binômes

$$x^2 = y, \qquad y^2 = z, \qquad z^2 = u, \qquad u^2 = \alpha + \beta\sqrt{-1}; \tag{10}$$

etc.

D'ailleurs, la dernière des formules (8) étant semblable à l'équation (4), on en tirera deux valeurs réelles ou imaginaires de $y$; et, après avoir substitué successivement ces deux valeurs dans le second membre de l'équation $x^2 = y$, on déduira de celle-ci quatre valeurs réelles ou imaginaires de $x$ qui seront propres à vérifier l'équation (5). Pareillement, on tirera des formules (9) deux valeurs de $z$, quatre valeurs de $y$, et, en définitive, huit valeurs de $x$ propres à vérifier l'équation (6). De même encore, on tirera des formules (10) seize valeurs de $x$ propres à vérifier l'équation (7), etc. Donc, chacune des équations (4), (5), (6), etc. offrira autant de racines que son degré renferme d'unités. On voit, en outre, que la détermination exacte de ces racines ne présentera aucune difficulté.

Supposons maintenant que le degré $n$ soit un nombre impair. Dans cette hypothèse, l'équation (3) admettra certainement une ou plusieurs racines réelles ou imaginaires, si l'une des quantités $\alpha$, $\beta$ s'évanouit. En effet, soit $2m+1$ une valeur impaire de $n$. On vérifiera évidemment l'équation

$$x^n = \alpha \tag{11}$$

ou

$$x^{2m+1} = \alpha, \tag{12}$$



en prenant

$$x = \alpha^{\frac{1}{2m+1}} \tag{13}$$

ou bien

$$x = -(-\alpha)^{\frac{1}{2m+1}}, \tag{14}$$

suivant que $\alpha$ sera positif ou négatif; et l'équation

$$x^n = \beta\sqrt{-1} \tag{15}$$

ou

$$x^{2m+1} = \beta\sqrt{-1}, \tag{16}$$

en prenant

$$x = (-1)^m \beta^{\frac{1}{2m+1}}\sqrt{-1} \tag{17}$$

ou bien

$$x = (-1)^{m+1}(-\beta)^{\frac{1}{2m+1}}\sqrt{-1}, \tag{18}$$

suivant que $\beta$ sera positif ou négatif. J'ajoute que, si, $n$ étant impair, les quantités $\alpha$ et $\beta$ ne s'évanouissent ni l'une ni l'autre, on pourra encore trouver une valeur réelle ou imaginaire de $x$ propre à vérifier l'équation (3) ou

$$x^n - (\alpha + \beta\sqrt{-1}) = 0. \tag{19}$$

C'est ce que l'on démontrera sans peine en raisonnant comme il suit.

Représentons par $p + q\sqrt{-1}$ une valeur imaginaire quelconque attribuée à la variable $x$; par

$$P + Q\sqrt{-1} = (p + q\sqrt{-1})^n - (\alpha + \beta\sqrt{-1}) \tag{20}$$

la valeur correspondante du binôme

$$x^n - (\alpha + \beta\sqrt{-1}), \tag{21}$$

et par $r$, $\rho$, R les modules des trois expressions imaginaires

$$p+q\sqrt{-1},\quad \alpha+\beta\sqrt{-1},\quad \mathrm{P}+\mathrm{Q}\sqrt{-1},$$

en sorte qu'on ait

$$r=(p^2+q^2)^{\frac{1}{2}}, \tag{22}$$

$$\rho=(\alpha^2+\beta^2)^{\frac{1}{2}}, \tag{23}$$

$$\mathrm{R}=(\mathrm{P}^2+\mathrm{Q}^2)^{\frac{1}{2}}. \tag{24}$$

Le module R de l'expression (20) deviendra, en vertu du théorème II, supérieur à la différence

$$r^n-\rho, \tag{25}$$

si l'on suppose $r^n>\rho$, $r>\rho^{\frac{1}{n}}$; et, par conséquent, il surpassera le module $\rho$, si l'on a

$$r>(2\rho)^{\frac{1}{n}}. \tag{26}$$

Au contraire, R sera équivalent à la valeur numérique de $\beta$ ou de $\alpha$ et, par conséquent, inférieur à $\rho$, si l'on suppose

$$q=0,\qquad x^n=p^n=\alpha \tag{27}$$

ou bien

$$p=0,\qquad x^n=(q\sqrt{-1})^n=\beta\sqrt{-1}. \tag{28}$$

Donc, la plus petite valeur que puisse acquérir le module R de l'expression (20) ou (21), tandis que $x$ varie, est inférieure au module $\rho$ de $\alpha+\beta\sqrt{-1}$, et correspond à une valeur de $x$ différente de zéro, mais dont le module $r$ ne surpasse pas $(2\rho)^{\frac{1}{n}}$. D'ailleurs, si l'on attribue à la variable $x$ une valeur distincte de $p+q\sqrt{-1}$, et représentée par

$$p+q\sqrt{-1}+z,$$



le binôme (21) se transformera en une fonction entière de $z$ du degré $n$, savoir

$$\left\{\begin{aligned}&(p+q\sqrt{-1}+z)^n-(\alpha+\beta\sqrt{-1})\\&=\mathrm{P}+\mathrm{Q}\sqrt{-1}+n(p+q\sqrt{-1})^{n-1}z+\dots\\&\qquad+n(p+q\sqrt{-1})z^{n-1}+z^n.\end{aligned}\right. \tag{29}$$ (1)

Or, dans la formule (29), la somme des deux premiers termes du second membre s'évanouira si l'on prend

$$z=-\frac{\mathrm{P}+\mathrm{Q}\sqrt{-1}}{n(p+q\sqrt{-1})^{n-1}}. \tag{30}$$

Mais si l'on prend

$$z=-\varepsilon\frac{\mathrm{P}+\mathrm{Q}\sqrt{-1}}{n(p+q\sqrt{-1})^{n-1}}, \tag{31}$$

$\varepsilon$ désignant une quantité positive très peu différente de zéro, ce second membre deviendra une fonction entière de $\varepsilon$ qui offrira pour premiers termes les deux expressions imaginaires

$$\mathrm{P}+\mathrm{Q}\sqrt{-1},\quad -\varepsilon(\mathrm{P}+\mathrm{Q}\sqrt{-1}).$$

Donc, si l'on divise cette fonction de $\varepsilon$ par $\mathrm{P}+\mathrm{Q}\sqrt{-1}$, le quotient sera de la forme

$$1-\varepsilon+c_1\varepsilon^2+c_2\varepsilon^3+\dots+c_{n-1}\varepsilon_n, \tag{32}$$

(1) La formule (29) se déduit immédiatement de l'équation (20) jointe à celle qu'on obtient en remplaçant $y$ par $p+q\sqrt{-1}$ dans l'équation connue

$$(y+z)^n=y^n+ny^{n-1}z+\dots+nyz^{n-1}+z^n. \tag{a}$$

Au reste, l'emploi que nous faisons ici de la formule (21) n'exige pas que l'on détermine les coefficients de toutes les puissances de $z$ qui entrent dans le second membre de cette formule ou de la formule (a). On peut même, à la rigueur, calculer seulement le coefficient de $z$. Or, pour s'assurer que ce coefficient se réduit, dans la formule (a), à $ny^{n-1}$, il suffit d'observer que l'on a généralement

$$(y+z_1)(y+z_2)\dots(y+z_n)=y^n+(z_1+z_2+\dots+z_n)y^{n-1}+\dots+z_1z_2\dots z_n \tag{b}$$

et, par suite, en supposant $z_1=z_2=\dots=z_n=z$,

$$(y+z)^n=y^n+ny^{n-1}z+\dots+z^n.$$

$c_1, c_2, \ldots, c_{n-1}$ désignant des coefficients réels ou imaginaires, et l'on trouvera, en supposant la variable $z$ déterminée par l'équation (31),

$$(33)\qquad \begin{cases} (p+q\sqrt{-1}+z)^n-(\alpha+\beta\sqrt{-1}) \\ \quad =(P+Q\sqrt{-1})\,(1-\varepsilon+c_1\varepsilon^2+c_2\varepsilon^3+\ldots+c_{n-1}\varepsilon^n). \end{cases}$$

Observons maintenant que, si R n'est pas nul, le second membre de l'équation (33) offrira, pour de très petites valeurs de $\varepsilon$, un module inférieur à R. En effet, si l'on nomme

$$\varkappa_1,\quad \varkappa_2,\quad \ldots,\quad \varkappa_{n-1}$$

les modules des expressions imaginaires

$$c_1,\quad c_2,\quad \ldots,\quad c_{n-1},$$

la somme des expressions

$$1-\varepsilon,\quad c_1\varepsilon^2,\quad c_2\varepsilon^3,\quad \ldots,\quad c_{n-1}\varepsilon^n,$$

ou le polynôme (32), aura pour module (en vertu des théorèmes II, III et de leurs corollaires) un nombre $\theta$ inférieur à la somme des quantités

$$1-\varepsilon,\quad \varkappa_1\varepsilon^2,\quad \varkappa_2\varepsilon^3,\quad \ldots,\quad \varkappa_{n-1}\varepsilon^n,$$

en sorte qu'on trouvera

$$(34)\qquad \theta<1-\varepsilon(1-\varkappa_1\varepsilon-\varkappa_2\varepsilon^2-\ldots-\varkappa_{n-1}\varepsilon^{n-1}).$$

D'ailleurs, pour de très petites valeurs de $\varepsilon$, le polynôme

$$(35)\qquad 1-\varkappa_1\varepsilon-\varkappa_2\varepsilon^2-\ldots-\varkappa_{n-1}\varepsilon^{n-1}$$

étant très peu différent de l'unité, on conclura de la formule (34)

$$(36)\qquad \theta<1,$$

$$(37)\qquad \theta R<R.$$

Donc, lorsque R ne sera pas nul, on pourra choisir $\varepsilon$ de manière que le module $\theta R$ de l'expression (33) devienne inférieur à R. Il suit évidemment de cette remarque que le plus petit module de l'expression (21) ne saurait différer de zéro. Donc, puisque ce plus petit module correspond à une valeur de $r$ inférieure à $(2\rho)^{\frac{1}{n}}$, et que l'expression (21) s'évanouit avec son module, l'équation (19) ou (3) admet une ou plusieurs racines dont les modules sont renfermés entre les limites 0, $(2\rho)^{\frac{1}{n}}$.



Les principes que nous venons d'exposer ne servent pas seulement à prouver que, dans le cas où $n$ est impair, l'équation (3) admet une ou plusieurs racines réelles ou imaginaires; ils fournissent encore le moyen de déterminer numériquement au moins l'une de ces racines. En effet, supposons que, $n$ étant égal à $2m+1$, on désigne par $x_1$ la valeur de $x$ donnée par l'une des équations (13), (14), (17), (18). Après avoir calculé les valeurs correspondantes des nombres $\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots, \varkappa_{n-1}$, on trouvera sans peine une valeur de $\varepsilon$ propre à rendre positive la quantité (35), c'est-à-dire à vérifier la condition

$$(38)\qquad \varkappa_1\varepsilon+\varkappa_2\varepsilon^2+\ldots+\varkappa_{n-1}\varepsilon^{n-1}<1.$$

Car il suffira, pour y parvenir, d'attribuer à $\varepsilon$ des valeurs décroissantes, par exemple

$$1,\quad \frac{1}{10},\quad \frac{1}{100},\quad \frac{1}{1000},\quad \ldots,$$

jusqu'à ce que le polynôme

$$(39)\qquad \varkappa_1\varepsilon+\varkappa_2\varepsilon^2+\ldots+\varkappa_{n-1}\varepsilon^{n-1},$$

qui décroît constamment et indéfiniment avec $\varepsilon$, devienne inférieur à l'unité. Or, $\varepsilon$ étant choisi de manière à vérifier la condition (38), il suffira d'ajouter à $x_1$ le second membre de la formule (31), pour obtenir une nouvelle valeur de $x$, à laquelle réponde une valeur de R plus petite que le module de l'expression $x_1^n+\alpha+\beta\sqrt{-1}$. Soit $x_2$ cette nouvelle valeur de $x$. L'opération par laquelle on a déduit $x_2$ de $x_1$, étant plusieurs fois répétée, fournira une suite de valeurs de $x$, auxquelles correspondront des valeurs de plus en plus petites de la quantité positive R, qui représente le module de l'expression

$$x^n+\alpha+\beta\sqrt{-1}.$$

Cela posé, soit

$$x_1,\quad x_2,\quad x_3,\quad x_4,\quad \ldots \tag{40}$$

la suite des valeurs de $x$ dont il est ici question. Tandis que les modules des expressions

$$x_1^n+\alpha+\beta\sqrt{-1},\quad x_2^n+\alpha+\beta\sqrt{-1},\quad x_3^n+\alpha+\beta\sqrt{-1},\quad x_4^n+\alpha+\beta\sqrt{-1},\ \ldots \tag{41}$$

deviendront de plus en plus petits, les termes de la série (40) convergeront vers une certaine limite qui sera nécessairement une valeur de $x$ propre à vérifier l'équation (3).

Il reste à examiner le cas où le degré $n$ de l'équation (3) ne se réduit ni à un nombre impair ni à une puissance de 2. Soit, dans cette hypothèse, $2^l$ la plus haute puissance de 2 qui puisse diviser le degré $n$. Ce degré sera le produit de $2^l$ par un nombre impair $2m+1$, et l'équation (3) ou

$$x^{2^l(2m+1)}=\alpha+\beta\sqrt{-1} \tag{42}$$

pourra être remplacée par le système des deux formules

$$x^{2^l}=y,\qquad y^{2m+1}=\alpha+\beta\sqrt{-1}. \tag{43}$$

Or la seconde des équations (43), étant semblable à l'équation (3), mais d'un degré impair, pourra toujours être vérifiée, d'après ce qu'on vient de dire, par des valeurs réelles ou imaginaires de $y$; et, pour chacune de ces valeurs de $y$, l'équation

$$x^{2^l}=y,$$

dont le degré se réduit à une puissance du nombre 2, fournira autant de valeurs de $x$ que son degré renferme d'unités.

On peut donc affirmer que, dans tous les cas, une équation binôme admet des racines réelles ou imaginaires.

Au reste, on s'assurera facilement que le module de chacune des racines de l'équation (3) se réduit toujours à $\rho^{\frac{1}{n}}$. Car, si l'on nomme $r$



le module d'une de ces racines, on aura, en vertu de ce qui a été dit ci-dessus (p. 96),

$$r^n=\rho \tag{44}$$

et, par suite,

$$r=\rho^{\frac{1}{n}}. \tag{45}$$

### § IV. — *Sur la résolution des équations de degré quelconque à coefficients réels.*

Si, dans une équation du degré $n$, on réduit à l'unité le coefficient du premier terme, elle se présentera sous la forme

$$x^n+Ax^{n-1}+Bx^{n-2}+\ldots+Ix+K=0. \tag{1}$$

Si d'ailleurs les coefficients A, B, ..., I, K sont réels et donnés en nombres, on pourra, lorsque certaines conditions seront remplies, affirmer que l'équation (1) admet des racines réelles, et l'on établira sans peine les propositions suivantes :

Théorème VIII. — *Si, en substituant l'une après l'autre, dans le premier membre de l'équation* (1), *deux valeurs réelles et finies de* $x$, *par exemple* $x=a$, $x=b$, *on obtient deux résultats de signes contraires, on pourra en conclure que l'équation admet au moins une racine réelle comprise entre* $a$ *et* $b$.

*Démonstration.* — En effet, concevons que l'on fasse varier $x$ par degrés insensibles depuis la limite $x=a$ jusqu'à la limite $x=b$. Le premier membre de l'équation (1), ou le polynôme

$$x^n+Ax^{n-1}+Bx^{n-2}+\ldots+Ix+K \tag{2}$$

variera lui-même par degrés insensibles, en conservant une valeur finie, mais de manière à changer de signe; et il est clair qu'il s'évanouira au moment où il passera du positif au négatif, ou du négatif au positif.

*Corollaire I.* — Il est bon d'observer que le polynôme (2) peut être considéré comme le produit des deux facteurs

(3) $$x^n$$

et

(4) $$1+\frac{A}{x}+\frac{B}{x^2}+\ldots+\frac{I}{x^{n-1}}+\frac{K}{x^n},$$

dont le second diffère très peu de l'unité, et par suite reste positif, quand on attribue à la variable $x$ une très grande valeur numérique. Cela posé, comme l'autre facteur $x^n$ change de signe avec $x$, dans le cas où le degré $n$ est un nombre impair, il suffira évidemment, dans ce cas, d'attribuer à la variable $x$ deux valeurs de la forme

$$x=-a, \qquad x=a,$$

$a$ désignant une quantité positive très considérable, pour que les valeurs correspondantes du polynôme (2) soient affectées de signes contraires. Donc alors l'équation (1) admettra au moins une racine réelle.

*Corollaire II.* — Si, le degré $n$ étant un nombre pair, on désigne toujours par $a$ une quantité positive très considérable, le polynôme (2), ou le produit des facteurs (3) et (4), sera évidemment positif pour $x=-a$. Si d'ailleurs la quantité K est négative, le polynôme (2) deviendra positif pour $x=0$. Donc alors ce polynôme changera de signe tandis que l'on fera varier $x$, soit entre les limites $x=-a$, $x=0$, soit entre les limites $x=0$, $x=a$. Donc, par suite, l'équation (1) admettra au moins deux racines réelles, l'une positive, l'autre négative.

THÉORÈME IX. — *Supposons que, dans le polynôme* (2), *le dernier terme étant négatif, les termes positifs, s'il en existe, suivent immédiatement le premier terme. L'équation* (1) *admettra une racine réelle et positive, et n'en aura qu'une de cette espèce.*

*Démonstration.* — Soient

$$\rho_1,\ \rho_2,\ \ldots,\ \rho_{n-1},\ \rho_n$$



les valeurs numériques des coefficients

$$A,\ B,\ \ldots,\ I,\ K.$$

En vertu de l'hypothèse admise, l'équation (1) sera de la forme

(5) $$x^n+\rho_1x^{n-1}+\rho_2x^{n-2}+\ldots+\rho_mx^{n-m}-\rho_{m+1}x^{n-m-1}-\ldots-\rho_{n-1}x-\rho_n=0,$$

$m$ étant un nombre entier inférieur à $n$. D'ailleurs le polynôme

(6) $$x^n+\rho_1x^{n-1}+\rho_2x^{n-2}+\ldots+\rho_mx^{n-m}-\rho_{m+1}x^{n-m-1}-\ldots-\rho_{n-1}x-\rho_n$$

est le produit des deux facteurs

(7) $$x^{n-m},$$

(8) $$x^m+\rho_1x^{m-1}+\ldots+\rho_m-\left(\frac{\rho_{m+1}}{x}+\ldots+\frac{\rho_{n-1}}{x^{n-m-1}}+\frac{\rho_n}{x^{n-m}}\right);$$

et il est clair que, si l'on fait croître $x$ par degrés insensibles, mais indéfiniment, à partir de $x=0$, l'expression

(9) $$x^m+\rho_1x^{m-1}+\ldots+\rho_m$$

croîtra en passant de la limite $\rho_m$ à l'infini positif, tandis que l'expression

(10) $$\frac{\rho_{m+1}}{x}+\ldots+\frac{\rho_{n-1}}{x^{n-m-1}}+\frac{\rho_n}{x^{n-m}}$$

décroîtra en passant de l'infini positif à zéro. Donc alors la différence (8) croîtra sans cesse, en passant de l'infini positif à l'infini négatif. Donc cette différence s'évanouira, mais une fois seulement, pour une valeur positive de $x$, et l'on pourra en dire autant du polynôme (6) qui forme le premier membre de l'équation (5).

*Corollaire.* — Lorsqu'on suppose $m=0$, l'équation (5) se réduit à

(11) $$x^n-\rho_1x^{n-1}-\rho_2x^{n-2}-\ldots-\rho_{n-1}x-\rho_n=0.$$

Donc cette dernière admet une racine réelle positive, et n'en a qu'une de cette espèce.

Lorsque les coefficients de l'équation (5) ou (11) sont donnés en

nombres, on peut aisément déterminer la racine positive de cette équation, avec une approximation aussi grande qu'on le juge convenable, à l'aide de procédés semblables à ceux auxquels on a recours dans l'extraction des racines carrées et cubiques. Il est d'ailleurs facile de trouver une limite supérieure à la racine dont il s'agit. On y parviendra en particulier pour l'équation (11), en suivant l'une des méthodes que nous allons exposer.

Soient $\rho$ le plus grand des coefficients $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_{n-1}, \rho_n$, et $r$ la racine positive de l'équation (11). On aura

$$r^n = \rho_1 r^{n-1} + \rho_2 r^{n-2} + \ldots + \rho_{n-1} r + \rho_n, \tag{12}$$

et, par suite,

$$r^n < \rho(r^{n-1} + r^{n-2} + \ldots + r + 1), \qquad r^n < \rho\frac{r^n - 1}{r - 1},$$

ou, ce qui revient au même,

$$r - 1 < \rho\frac{r^n - 1}{r^n} < \rho,$$

$$r < \rho + 1. \tag{13}$$

Donc la racine positive de l'équation (11) sera inférieure au plus grand des nombres

$$\rho_1 + 1, \quad \rho_2 + 1, \quad \ldots, \quad \rho_{n-1} + 1, \quad \rho_n + 1. \tag{14}$$

De l'équation (12), présentée sous la forme

$$1 = \frac{\rho_1}{r} + \frac{\rho_2}{r^2} + \ldots + \frac{\rho_{n-1}}{r^{n-1}} + \frac{\rho_n}{r^n}, \tag{15}$$

on conclut encore que les rapports

$$\frac{\rho_1}{r}, \quad \frac{\rho_2}{r^2}, \quad \ldots, \quad \frac{\rho_{n-1}}{r^{n-1}}, \quad \frac{\rho_n}{r^n} \tag{16}$$

doivent être ou égaux entre eux et à $\frac{1}{n}$, ou les uns supérieurs, les autres inférieurs à $\frac{1}{n}$. Donc, par suite, les rapports

$$\frac{n\rho_1}{r}, \quad \frac{n\rho_2}{r^2}, \quad \ldots, \quad \frac{n\rho_{n-1}}{r^{n-1}}, \quad \frac{n\rho_n}{r^n} \tag{17}$$



doivent être, ou égaux, ou les uns supérieurs, les autres inférieurs à l'unité; et l'on pourra en dire autant des expressions

$$\frac{n\rho_1}{r}, \quad \left(\frac{n\rho_2}{r^2}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{(n\rho_2)^{\frac{1}{2}}}{r}, \quad \ldots,$$

$$\left(\frac{n\rho_{n-1}}{r^{n-1}}\right)^{\frac{1}{n-1}} = \frac{(n\rho_{n-1})^{\frac{1}{n-1}}}{r}, \quad \left(\frac{n\rho_n}{r^n}\right)^{\frac{1}{n}} = \frac{(n\rho_n)^{\frac{1}{n}}}{r}.$$

Or il en résulte évidemment que la racine $r$ sera comprise entre le plus petit et le plus grand des nombres

$$n\rho_1, \quad (n\rho_2)^{\frac{1}{2}}, \quad \ldots, \quad (n\rho_{n-1})^{\frac{1}{n-1}}, \quad (n\rho_n)^{\frac{1}{n}}. \tag{18}$$

Observons maintenant que, si, dans le premier membre de l'équation (11), on attribue à la variable $x$ une valeur positive quelconque désignée par $r$, la valeur correspondante de ce premier membre sera

$$r^n - \rho_1 r^{n-1} - \rho_2 r^{n-2} - \ldots - \rho_{n-1} r - \rho_n \tag{19}$$

ou, ce qui revient au même,

$$r^n\left(1 - \frac{\rho_1}{r} - \frac{\rho_2}{r^2} - \ldots - \frac{\rho_{n-1}}{r^{n-1}} - \frac{\rho_n}{r^n}\right). \tag{20}$$

Or le produit (20) est composé de deux facteurs qui, pour des valeurs croissantes de $r$, croissent l'un et l'autre, et convergent, le premier vers la limite $\infty$, le second vers la limite 1. Donc ce produit, qui s'évanouit pour $r = r$, deviendra positif dès que l'on aura $r > r$, par exemple, lorsqu'on supposera $r = \rho + 1$, ou lorsqu'on prendra pour $r$ le plus grand des nombres (18); de plus, le produit dont il s'agit ou le polynôme (19) deviendra infini pour des valeurs infinies de $r$.

### § V. — *Sur la résolution des équations de degré quelconque à coefficients imaginaires.*

Considérons, comme dans le § IV, une équation du degré $n$, mais à coefficients imaginaires. En réduisant le coefficient du premier terme

à l'unité, on ramènera encore cette équation à la forme

$$x^n + Ax^{n-1} + Bx^{n-2} + \ldots + Ix + K = 0. \tag{1}$$

Seulement les constantes A, B, ..., I, K et les valeurs de $x$ propres à vérifier l'équation (1) pourront être imaginaires. D'ailleurs, si l'on désigne par $p + q\sqrt{-1}$ une valeur imaginaire quelconque attribuée à la variable $x$, et par

$$\rho_1, \quad \rho_2, \quad \ldots, \quad \rho_{n-1}, \quad \rho_n, \quad r$$

les modules des expressions imaginaires

$$A, \quad B, \quad \ldots, \quad I, \quad K, \quad p + q\sqrt{-1},$$

le module du polynôme

$$Ax^{n-1} + Bx^{n-2} + \ldots + Ix + K \tag{2}$$

sera (en vertu des théorèmes II et III) égal ou inférieur à la somme

$$\rho_1 r^{n-1} + \rho_2 r^{n-2} + \ldots + \rho_{n-1} r + \rho_n, \tag{3}$$

et, par suite, le module du polynôme

$$x^n + Ax^{n-1} + Bx^{n-2} + \ldots + Ix + K \tag{4}$$

(*voir* encore le théorème II) sera égal ou supérieur à la différence

$$r^n - \rho_1 r^{n-1} - \rho_2 r^{n-2} - \ldots - \rho_{n-1} r - \rho_n, \tag{5}$$

lorsqu'elle sera positive, c'est-à-dire lorsque le module $r^n$ de $x^n$ surpassera celui du polynôme (2). Or l'expression (5) acquerra une valeur positive et différente de zéro (*voir* le § IV), dès que le module $r$ deviendra supérieur à la quantité positive $\iota$ qui vérifie l'équation

$$\iota^n = \rho_1 \iota^{n-1} + \rho_2 \iota^{n-2} + \ldots + \rho_{n-1} \iota + \rho_n, \tag{6}$$

par exemple, lorsqu'on prendra pour $r$ le plus grand des nombres

$$\rho_1 + 1, \quad \rho_2 + 1, \quad \ldots, \quad \rho_{n-1} + 1, \quad \rho_n + 1 \tag{7}$$

ou le plus grand terme de la suite

$$n\rho_1, \quad (n\rho_2)^{\frac{1}{2}}, \quad \ldots, \quad (n\rho_{n-1})^{\frac{1}{n-1}}, \quad (n\rho_n)^{\frac{1}{n}}. \tag{8}$$



Donc alors le module du polynôme (4), étant égal ou supérieur à l'expression (5), acquerra lui-même une valeur différente de zéro. Donc l'équation (1) ne peut être vérifiée par aucune valeur de $x$ dont le module surpasse la quantité $\iota$. Ajoutons que, si le module $r$, devenant supérieur à $\iota$, croît au delà de toute limite, on pourra en dire autant de l'expression (5), et, à plus forte raison, du module du polynôme (4).

Concevons maintenant que l'on désigne par $P + Q\sqrt{-1}$ la valeur du polynôme (4) correspondante à $x = p + q\sqrt{-1}$, et par R le module de l'expression imaginaire $P + Q\sqrt{-1}$. D'après ce qu'on vient de dire, le module R croîtra indéfiniment avec $r$. Donc les plus petites valeurs de ce module correspondront, non à des valeurs infinies, mais à des valeurs finies de $r$ et de $x$. D'ailleurs, si l'on attribue à la variable $x$ une valeur distincte de $p + q\sqrt{-1}$, et représentée par

$$p + q\sqrt{-1} + z,$$

le polynôme (4) se transformera en une fonction entière de $z$ du degré $n$, savoir

$$\begin{cases} (p + q\sqrt{-1} + z)^n + A(p + q\sqrt{-1} + z)^{n-1} \\ \qquad + B(p + q\sqrt{-1} + z)^{n-2} + \ldots + I(p + q\sqrt{-1} + z) + K, \end{cases} \tag{9}$$

qui pourra être présentée sous la forme

$$\begin{cases} P + Q\sqrt{-1} + (P_1 + Q_1\sqrt{-1})z \\ \qquad + (P_2 + Q_2\sqrt{-1})z^2 + \ldots + (P_{n-1} + Q_{n-1}\sqrt{-1})z^{n-1} + z^n, \end{cases} \tag{10}$$

$P_1, P_2, \ldots, P_{n-1}$; $Q_1, Q_2, \ldots, Q_{n-1}$ désignant encore des quantités réelles. Cela posé, admettons d'abord que l'expression imaginaire $P_1 + Q_1\sqrt{-1}$ ne soit pas nulle. Alors, dans le polynôme (10), la somme des deux premiers termes s'évanouira, si l'on prend

$$z = -\frac{P + Q\sqrt{-1}}{P_1 + Q_1\sqrt{-1}}. \tag{11}$$

Mais, si l'on prend

$$z = -\varepsilon\frac{P + Q\sqrt{-1}}{P_1 + Q_1\sqrt{-1}}, \tag{12}$$

$\varepsilon$ désignant une quantité positive très peu différente de zéro, la même expression deviendra une fonction entière de $\varepsilon$ qui offrira pour premiers termes les deux expressions imaginaires

$$P + Q\sqrt{-1}, \quad -\varepsilon(P + Q\sqrt{-1}).$$

Donc, si l'on divise cette fonction de $\varepsilon$ par $P + Q\sqrt{-1}$, le quotient sera de la forme

$$1 - \varepsilon + c_1\varepsilon^2 + c_2\varepsilon^3 + \ldots + c_{n-1}\varepsilon^n,$$

$c_1, c_2, \ldots, c_{n-1}$ désignant des coefficients réels ou imaginaires, et l'on trouvera, en supposant la variable $z$ déterminée par la formule (12),

$$(13)\quad \begin{cases} (p + q\sqrt{-1} + z)^n + A(p + q\sqrt{-1} + z)^{n-1} + B(p + q\sqrt{-1} + z)^{n-2} + \ldots \\ \qquad + I(p + q\sqrt{-1} + z) + K \\ = (P + Q\sqrt{-1})(1 - \varepsilon + c_1\varepsilon^2 + c_2\varepsilon^3 + \ldots + c_{n-1}\varepsilon^n). \end{cases}$$

D'autre part, si l'on nomme

$$\varkappa_1, \quad \varkappa_2, \quad \ldots, \quad \varkappa_{n-1}$$

les modules des expressions imaginaires

$$c_1, \quad c_2, \quad \ldots, \quad c_{n-1},$$

on prouvera, en raisonnant comme ci-dessus (p. 114), que le module $\vartheta$ du polynôme

$$(14)\qquad 1 - \varepsilon + c_1\varepsilon^2 + c_2\varepsilon^3 + \ldots + c_{n-1}\varepsilon^n$$

est inférieur à la somme

$$1 - \varepsilon + \varkappa_1\varepsilon^2 + \varkappa_2\varepsilon^3 + \ldots + \varkappa_{n-1}\varepsilon^n$$

et vérifie, en conséquence, la formule

$$(15)\qquad \vartheta < 1 - \varepsilon(1 - \varkappa_1\varepsilon - \varkappa_2\varepsilon^2 - \ldots - \varkappa_{n-1}\varepsilon^{n-1}),$$

dès que l'on suppose $\varepsilon < 1$. Enfin la formule (15) donnera évidemment, pour de très petites valeurs de $\varepsilon$,

$$(16)\qquad \vartheta < 1,$$

$$(17)\qquad \vartheta R < R.$$



Par conséquent, lorsque R ne sera pas nul, on pourra choisir $\varepsilon$ de manière que le module $\vartheta R$ de l'expression (13) demeure inférieur à R. Donc, si l'expression imaginaire $P_1 + Q_1\sqrt{-1}$ ne s'évanouit pas, la plus petite valeur de R ou le plus petit module du polynôme (4) ne pourra différer de zéro.

Admettons à présent que $P_1 + Q_1\sqrt{-1}$ s'évanouisse, et supposons que, parmi les expressions imaginaires

$$P_1 + Q_1\sqrt{-1}, \quad P_2 + Q_2\sqrt{-1}, \quad \ldots, \quad P_{n-1} + Q_{n-1}\sqrt{-1}, \quad P_n + Q_n\sqrt{-1} = 1,$$

la première de celles qui ne sont pas nulles corresponde à l'indice $m$. Alors, dans le polynôme (10) réduit à la forme

$$(18)\quad \begin{cases} P + Q\sqrt{-1} + (P_m + Q_m\sqrt{-1})z^m \\ \qquad + (P_{m+1} + Q_{m+1}\sqrt{-1})z^{m+1} + \ldots + (P_{n-1} + Q_{n-1}\sqrt{-1})z^{n-1} + z^n, \end{cases}$$

la somme des deux premiers termes s'évanouira, si l'on prend

$$(19)\qquad z = \zeta,$$

$\zeta$ désignant une valeur de $z$ propre à vérifier l'équation binôme

$$(20)\qquad z^m = -\frac{P + Q\sqrt{-1}}{P_m + Q_m\sqrt{-1}}.$$

Mais, si l'on prend

$$(21)\qquad z = \varepsilon\zeta,$$

$\varepsilon$ étant une quantité positive différente de zéro, le polynôme (18) deviendra une fonction entière de $\varepsilon$, qui offrira pour premiers termes les deux expressions imaginaires

$$P + Q\sqrt{-1}, \quad -\varepsilon^m(P + Q\sqrt{-1}).$$

Donc, si l'on divise cette fonction de $\varepsilon$ par $P + Q\sqrt{-1}$, le quotient sera de la forme

$$(22)\qquad 1 - \varepsilon^m + c_1\varepsilon^{m+1} + c_2\varepsilon^{m+2} + \ldots + c_{n-m}\varepsilon^n,$$

$c_1, c_2, \ldots, c_{n-m}$ désignant des coefficients réels ou imaginaires, et l'on

trouvera, en supposant la variable $z$ déterminée par l'équation (21),

$$(33)\quad \begin{cases} (p+q\sqrt{-1}+z)^n + A(p+q\sqrt{-1}+z)^{n-1} + B(p+q\sqrt{-1}+z)^{n-2} + \dots \\ \qquad\qquad + I(p+q\sqrt{-1}+z) + K \\ = (P+Q\sqrt{-1})(1-\varepsilon^m + c_1\varepsilon^{m+1} + c_2\varepsilon^{m+2} + \dots + c_{n-m}\varepsilon^n). \end{cases}$$

D'autre part, si l'on nomme

$$z_1,\quad z_2,\quad \dots,\quad z_{n-m}$$

les modules des expressions imaginaires

$$c_1,\quad c_2,\quad \dots,\quad c_{n-m},$$

on s'assurera, en raisonnant comme à la page 114, que le module $\vartheta$ du polynôme

$$(24)\qquad 1-\varepsilon^m + c_1\varepsilon^{m+1} + c_2\varepsilon^{m+2} + \dots + c_{n-m}\varepsilon^m$$

vérifie la formule

$$(25)\qquad \vartheta < 1-\varepsilon^m(1-z_1\varepsilon - z_2\varepsilon^2 - \dots - z_{n-m}\varepsilon^{n-m}),$$

lorsqu'on suppose $\varepsilon < 1$, et devient par suite inférieur à l'unité, lorsque $\varepsilon$ diffère très peu de zéro. Donc, si R n'est pas nul, le module $\vartheta R$ de l'expression (23) sera, pour de très petites valeurs de $\varepsilon$, inférieur à R. Par conséquent, dans l'hypothèse admise, la plus petite valeur de R ou le plus petit module du polynôme (4) se réduira encore à zéro.

Il est donc prouvé que, dans tous les cas, les valeurs finies de $r$ et de $x$, pour lesquelles le module R devient le plus petit possible, font évanouir ce module et, par suite, le polynôme (4). Donc il existe une ou plusieurs valeurs finies de $x$ propres à vérifier l'équation (1). En d'autres termes, cette équation admet nécessairement une ou plusieurs racines soit réelles, soit imaginaires.

La méthode par laquelle on vient d'établir l'existence des racines réelles ou imaginaires des équations de degré quelconque peut encore servir au calcul numérique de ces racines. En effet, nommons



$x_1$, $x_2$ les deux valeurs de $x$ ci-dessus désignées par $p+q\sqrt{-1}$ et $p+q\sqrt{-1}+z$. Pour que le module du polynôme (4) diminue tandis que la variable $x$ passera de la valeur $x=x_1$ à la valeur $x=x_2$, il suffira de choisir le nombre $\varepsilon$ de manière que le second membre de la formule (15) ou (25) devienne inférieur à l'unité, et par conséquent de manière que l'on ait

$$(26)\qquad z_1\varepsilon + z_2\varepsilon^2 + \dots + z_{n-1}\varepsilon^{n-1} < 1$$

ou

$$(27)\qquad z_1\varepsilon + z_2\varepsilon^2 + \dots + z_{n-m}\varepsilon^{n-m} < 1.$$

Or la condition (26) sera remplie, si l'on prend pour $\varepsilon$ un nombre inférieur à la racine positive unique de l'équation

$$(28)\qquad z_1\varepsilon + z_2\varepsilon^2 + \dots + z_{n-1}\varepsilon^{n-1} = 1.$$

D'ailleurs cette équation, pouvant s'écrire comme il suit

$$(29)\qquad \left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^{n-1} = z_1\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^{n-2} + z_2\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^{n-3} + \dots + z_{n-1},$$

fournira une valeur positive de $\frac{1}{\varepsilon}$ inférieure au plus grand des nombres

$$z_1+1,\quad z_2+1,\quad \dots,\quad z_{n-1}+1,$$

ainsi qu'à la plus grande des quantités

$$(n-1)z_1,\quad [(n-1)z_2]^{\frac{1}{2}},\quad \dots,\quad [(n-1)z_{n-1}]^{\frac{1}{n-1}}$$

(*voir* le § IV), et par conséquent une valeur positive de $\varepsilon$ inférieure au plus petit des rapports

$$(30)\qquad \frac{1}{z_1+1},\quad \frac{1}{z_2+1},\quad \dots,\quad \frac{1}{z_{n-1}+1},$$

ainsi qu'à la plus petite des quantités

$$(31)\qquad \frac{1}{(n-1)z_1},\quad \left[\frac{1}{(n-1)z_2}\right]^{\frac{1}{2}},\quad \dots,\quad \left[\frac{1}{(n-1)z_{n-1}}\right]^{\frac{1}{n-1}}.$$

Donc le plus petit terme de la suite (30) ou (31), étant pris pour $\varepsilon$, vérifiera la condition (26). De même, on vérifiera la condition (27) en prenant pour $\varepsilon$ un nombre inférieur à la racine positive unique de l'équation binôme

$$z_1\varepsilon + z_2\varepsilon^2 + \ldots + z_{n-m}\varepsilon^{n-m} = 1, \tag{32}$$

ou le plus petit terme de l'une quelconque des deux suites

$$\frac{1}{z_1+1}, \quad \frac{1}{z_2+1}, \quad \ldots, \quad \frac{1}{z_{n-m}+1}, \tag{33}$$

$$\frac{1}{(n-m)z_1}, \quad \left[\frac{1}{(n-m)z_2}\right]^{\frac{1}{2}}, \quad \ldots, \quad \left[\frac{1}{(n-m)z_{n-m}}\right]^{\frac{1}{n-m}}. \tag{34}$$

Ainsi, dans tous les cas, après avoir choisi arbitrairement la valeur de $x$ ci-dessus représentée par $x_1$, ou $p + q\sqrt{-1}$, on pourra, de cette première valeur, en déduire une seconde $x_2$ qui fournisse un moindre module du polynôme (4). Cela posé, si l'on répète plusieurs fois de suite l'opération par laquelle on déduit $x_2$ de $x_1$, on obtiendra évidemment une série de valeurs finies de $x$, auxquelles correspondront des modules de plus en plus petits du même polynôme, et, si l'on désigne ces valeurs par

$$x_1, \quad x_2, \quad x_3, \quad x_4, \quad \ldots, \tag{35}$$

la limite vers laquelle elles convergeront, tandis que le polynôme (4) s'approchera indéfiniment de zéro, sera certainement une racine de l'équation (1).

Soit maintenant $a$ une racine réelle ou imaginaire de l'équation (1). On aura identiquement

$$a^n + \mathrm{A}a^{n-1} + \mathrm{B}a^{n-2} + \ldots + \mathrm{I}a + \mathrm{K} = 0 \tag{36}$$

ou, ce qui revient au même,

$$\mathrm{K} = -a^n - \mathrm{A}a^{n-1} - \mathrm{B}a^{n-2} - \ldots - \mathrm{I}a$$

et, par suite,

$$\left\{\begin{aligned} &x^n + \mathrm{A}x^{n-1} + \mathrm{B}x^{n-2} + \ldots + \mathrm{I}x + \mathrm{K} \\ &= x^n - a^n + \mathrm{A}(x^{n-1} - a^{n-1}) + \mathrm{B}(x^{n-2} - a^{n-2}) + \ldots + \mathrm{I}(x-a). \end{aligned}\right. \tag{37}$$



Comme on a d'ailleurs, en désignant par $m$ un nombre entier quelconque,

$$x^m - a^m = (x-a)(x^{m-1} + ax^{m-2} + \ldots + a^{m-2}x + a^{m-1}), \tag{38}$$

la formule (37) donnera évidemment

$$\left\{\begin{aligned} &x^n + \mathrm{A}x^{n-1} + \mathrm{B}x^{n-2} + \ldots + \mathrm{I}x + \mathrm{K} \\ &= (x-a)[x^{n-1} + (a+\mathrm{A})x^{n-2} + (a^2 + \mathrm{A}a + \mathrm{B})x^{n-3} + \ldots \\ &\qquad + (a^{n-1} + \mathrm{A}a^{n-2} + \mathrm{B}a^{n-3} + \ldots + \mathrm{I})]. \end{aligned}\right. \tag{39}$$

Donc le polynôme (4), qui est du degré $n$ par rapport à $x$, peut toujours être décomposé en deux facteurs, dont l'un soit linéaire et de la forme

$$x - a, \tag{40}$$

l'autre étant un nouveau polynôme du degré $n-1$ et de la forme

$$\left\{\begin{aligned} &x^{n-1} + (a+\mathrm{A})x^{n-2} + (a^2 + \mathrm{A}a + \mathrm{B})x^{n-3} + \ldots \\ &\qquad + (a^{n-1} + \mathrm{A}a^{n-2} + \mathrm{B}a^{n-3} + \ldots + \mathrm{I}). \end{aligned}\right. \tag{41}$$

De plus, en désignant par $b$ une racine réelle ou imaginaire de l'équation

$$\left\{\begin{aligned} &x^{n-1} + (a+\mathrm{A})x^{n-2} + (a^2 + \mathrm{A}a + \mathrm{B})x^{n-3} + \ldots \\ &\qquad + (a^{n-1} + \mathrm{A}a^{n-2} + \mathrm{B}a^{n-3} + \ldots + \mathrm{I}) = 0, \end{aligned}\right. \tag{42}$$

on prouvera encore que le polynôme (41) peut être décomposé en deux facteurs dont l'un soit $x-b$, l'autre étant un polynôme du degré $n-2$ et de la forme

$$x^{n-2} + (b + a + \mathrm{A})x^{n-3} + [b^2 + ab + a^2 + \mathrm{A}(b+a) + \mathrm{B}]x^{n-4} + \ldots. \tag{43}$$

Donc le polynôme (4) sera le produit des facteurs linéaires $x-a$, $x-b$ par un polynôme du degré $n-2$. En continuant de la même manière, on prouvera définitivement que le polynôme (4) est le produit de $n$ facteurs linéaires et de la forme

$$x-a, \quad x-b, \quad \ldots, \quad x-i, \quad x-k \tag{44}$$

par un polynôme du degré zéro, c'est-à-dire par une constante; et,

comme cette constante devra se réduire au coefficient de $x^n$ dans le polynôme (4), par conséquent à l'unité, on trouvera

$$(45)\qquad x^n + Ax^{n-1} + Bx^{n-2} + \ldots + Ix + K = (x-a)(x-b)\ldots(x-i)(x-k).$$

Donc l'équation (1) pourra toujours être présentée sous la forme

$$(46)\qquad (x-a)(x-b)\ldots(x-i)(x-k) = 0,$$

$a, b, \ldots, i, k$ désignant $n$ constantes réelles ou imaginaires. Mais on a démontré (*voir* le théorème IV) que le produit de plusieurs facteurs imaginaires ne peut s'évanouir qu'autant que l'un de ces facteurs se réduit à zéro. Donc toute valeur réelle ou imaginaire de $x$, propre à vérifier l'équation (46), coïncidera nécessairement avec l'une des valeurs de $x$ déterminées par les formules

$$(47)\qquad x-a=0, \quad x-b=0, \quad \ldots, \quad x-i=0, \quad x-k=0,$$

c'est-à-dire avec l'une des constantes $a, b, \ldots, i, k$; et, comme chacune de ces constantes est évidemment racine de l'équation (46), on pourra énoncer la proposition suivante :

Théorème X. — *Quelles que soient les valeurs réelles ou les valeurs imaginaires des coefficients* A, B, ..., I, K, *l'équation* (1) *a toujours* $n$ *racines réelles ou imaginaires, et n'en saurait avoir un plus grand nombre.*

De plus, on déduira immédiatement de la formule (45) cet autre théorème :

Théorème XI. — *Si l'on désigne par* $a, b, c, \ldots, i, k$ *les* $n$ *racines de l'équation* (1), *le premier membre de cette équation ou le polynôme* (4) *sera le produit des facteurs linéaires*

$$(48)\qquad x-a, \quad x-b, \quad \ldots, \quad x-i, \quad x-k.$$

Observons encore que, si l'on développe le second membre de l'équation (45), elle deviendra

$$(49)\qquad \begin{cases} x^n + Ax^{n-1} + Bx^{n-2} + \ldots + Ix + K \\ \quad = x^n - (a+b+\ldots+i+k)x^{n-1} + \ldots \pm ab\ldots ik, \end{cases}$$



et que l'on tirera de la formule (49), en ayant égard au théorème VII,

$$(50)\qquad \begin{cases} a+b+c+\ldots+i+k = -A, \\ ab+ac+\ldots+ai+ak+bc+\ldots+bi+bk+\ldots+ik = B, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ abc\ldots i+abc\ldots k+\ldots+bc\ldots ik = \mp I, \\ abc\ldots ik = \pm K. \end{cases}$$

Or ces dernières équations comprennent évidemment un théorème que l'on peut énoncer comme il suit :

Théorème XII. — *Lorsque, dans une équation du degré* $n$, *le coefficient du premier terme est réduit à l'unité, les coefficients du deuxième, du troisième, du quatrième, ..., du dernier terme, étant pris alternativement avec le signe* — *et avec le signe* +, *sont respectivement égaux à la somme des racines, ou aux sommes des produits qu'on obtient en multipliant ces racines deux à deux, trois à trois, etc., ou enfin au produit de toutes les racines.*

Lorsque deux ou plusieurs des constantes $a, b, c, \ldots$ sont égales entre elles, les facteurs linéaires correspondants deviennent égaux, et l'on dit que l'équation (1) a des racines égales.

Lorsque, dans le polynôme (4), les coefficients A, B, ..., I, K sont réels, alors, en substituant successivement dans ce polynôme deux valeurs de $x$ imaginaires, mais conjuguées l'une à l'autre, par exemple,

$$(51)\qquad x = p + q\sqrt{-1}, \qquad x = p - q\sqrt{-1},$$

on obtient évidemment pour résultats deux nouvelles expressions imaginaires, qui sont encore conjuguées l'une à l'autre ou de la forme

$$(52)\qquad P + Q\sqrt{-1}, \quad P - Q\sqrt{-1},$$

P, Q étant des quantités réelles. D'ailleurs, pour que chacune des expressions (52) s'évanouisse, il sera nécessaire et il suffira que l'on ait

$$(53)\qquad P = 0, \qquad Q = 0.$$

Donc ces deux expressions ne pourront s'évanouir l'une sans l'autre, et si l'équation (1) offre, dans l'hypothèse admise, une racine imaginaire de la forme $p+q\sqrt{-1}$, elle en offrira une seconde conjuguée à la première ou de la forme $p-q\sqrt{-1}$. Dans le même cas, ceux des facteurs linéaires $x-a$, $x-b$, ..., qui correspondront à deux racines imaginaires conjuguées, seront eux-mêmes conjugués entre eux ou de la forme

$$x-p-q\sqrt{-1}, \qquad x-p+q\sqrt{-1}, \tag{54}$$

et donneront pour produit un facteur réel du second degré, savoir

$$(x-p)^2+q^2. \tag{55}$$

Ces remarques fournissent les propositions suivantes :

Théorème XIII. — *Si, dans l'équation* (1), *les coefficients* A, B, ..., I, K *sont tous réels, cette équation n'admettra qu'un nombre pair de racines imaginaires qui, prises deux à deux, seront conjuguées l'une à l'autre.*

Théorème XIV. — *Si, dans le polynôme* (4), *les coefficients* A, B, ..., I, K *sont tous réels, ce polynôme sera décomposable en facteurs réels du premier ou du second degré.*

Les deux théorèmes qui précèdent s'étendent évidemment à l'équation (76) du § I et au polynôme qui forme le premier membre de cette équation, c'est-à-dire à tous les polynômes dont les coefficients sont réels, et aux équations qu'on obtient en égalant ces polynômes à zéro.

### § VI. — *Sur la détermination des fonctions symétriques des racines d'une équation donnée*

$$x^n+Ax^{n-1}+Bx^{n-2}+\ldots+Ix+K=0, \tag{1}$$

dans laquelle A, B, ..., I, K désignent des constantes réelles ou imaginaires. Si l'on nomme $a, b, c, \ldots, h, i, k$ les racines de cette équation, l'on aura, comme on l'a prouvé dans le § V,

$$\begin{cases} a+b+c+\ldots+i+k=-A, \\ ab+ac+\ldots+ai+ak+bc+\ldots+bi+bk+\ldots+ik=B, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ abc\ldots i+abc\ldots k+\ldots+bc\ldots ik=\mp I, \\ abc\ldots ik=\pm K. \end{cases} \tag{2}$$

Soit maintenant U une fonction entière de chacune des racines $a$, $b$, $c$, ..., $i$, $k$, qui, comme les premiers membres des équations (2), ne change pas de valeur, quand on échange entre elles ces mêmes racines. U sera ce qu'on appelle une *fonction symétrique* des racines de l'équation (1), et l'on pourra, sans résoudre cette équation, déduire la valeur de U des valeurs supposées connues des coefficients A, B, C, ..., I, K. On y parviendra en effet très aisément à l'aide de la proposition suivante :



Théorème XV. — *Soient $a$, $b$, $c$, ... les racines supposées inégales de l'équation* (1). *Concevons de plus que* U *représente une fonction symétrique de ces racines, et que, par un moyen quelconque, on ait transformé* U *en une fonction entière de $a$, du degré $m$, savoir*

$$\mathfrak{L}a^m+\mathfrak{M}a^{m-1}+\ldots+\mathfrak{S}a+\mathfrak{T}=U, \tag{3}$$

$\mathfrak{L}, \mathfrak{M}, \ldots, \mathfrak{S}, \mathfrak{T}$ *étant de nouveaux coefficients dont les valeurs se déduisent de celles des coefficients* A, B, ..., I, K. *Si l'équation* (3) *subsiste tandis qu'on y remplace la racine $a$ par l'une quelconque des racines $b$, $c$, $d$, ..., le polynôme*

$$\mathfrak{L}a^m+\mathfrak{M}a^{m-1}+\ldots+\mathfrak{S}a+\mathfrak{T}, \tag{4}$$

*divisé par la fonction*

$$a^n+Aa^{n-1}+Ba^{n-2}+\ldots+Ia+K, \tag{5}$$

*fournira un reste indépendant de $a$, et ce reste sera précisément la valeur de* U.

*Démonstration.* — En effet, dans l'hypothèse admise, chacune des

racines $a, b, c, d, \ldots$ de l'équation (1) vérifiera encore la formule

$$\mathfrak{L}x^m + \mathfrak{M}x^{m-1} + \ldots + \mathfrak{S}x + \mathfrak{T} = \mathrm{U}. \tag{6}$$

D'ailleurs, si l'on désigne par

$$\lambda x^{n-1} + \mu x^{n-2} + \ldots + \varsigma x + \tau \tag{7}$$

le reste de la division du premier membre de la formule (6) par le premier membre de l'équation (1), la formule (6) se réduira simplement à la suivante

$$\lambda x^{n-1} + \mu x^{n-2} + \ldots + \varsigma x + \tau = \mathrm{U}. \tag{8}$$

Or cette dernière ne pourra être qu'une équation identique, en sorte qu'on aura nécessairement

$$\lambda = 0, \quad \mu = 0, \quad \ldots, \quad \varsigma = 0 \tag{9}$$

et

$$\tau = \mathrm{U}. \tag{10}$$

Car, s'il en était autrement, la formule (8) serait une équation d'un degré inférieur à $n$, et pourtant elle admettrait $n$ racines $a, b, c, d, \ldots$, ce qui serait contraire au théorème X. Donc, en divisant le premier membre de l'équation (6) par le premier membre de l'équation (1) et, par conséquent, le polynôme (4) par le polynôme (5), on obtiendra un reste $\tau$ indépendant de $x$ ou de $a$, et ce reste, en vertu de la formule (10), sera précisément la valeur de U.

Pour montrer le parti qu'on peut tirer du théorème XV, concevons d'abord que l'équation (1) soit du second degré, et se réduise à

$$x^2 + \mathrm{A}x + \mathrm{B} = 0. \tag{11}$$

Les deux racines $a$ et $b$ de cette équation vérifieront la formule

$$a + b = -\mathrm{A}; \tag{12}$$

et, si l'on désigne par U une fonction symétrique de ces racines, il



suffira de substituer à la racine $b$ sa valeur tirée de la formule (12), savoir

$$b = -a - \mathrm{A}, \tag{13}$$

pour changer U en une fonction entière de la seule racine $a$. Soit

$$\mathfrak{L}a^m + \mathfrak{M}a^{m-1} + \ldots + \mathfrak{S}a + \mathfrak{T} = \mathrm{U} \tag{3}$$

la fonction entière dont il s'agit. L'équation (3) continuera évidemment de subsister, ainsi que la formule (12), tandis que l'on échangera entre elles les racines $a$ et $b$. Donc, si ces racines sont inégales, le polynôme (4), divisé par le trinôme

$$a^2 + pa + q, \tag{14}$$

fournira (en vertu du théorème XV) un reste indépendant de $a$, et ce reste sera précisément la valeur de U.

Il est bon d'observer que, en substituant dans U la valeur de $b$ tirée de la formule (12), on obtient pour résultat le reste auquel on parviendrait en divisant U considéré comme fonction de $b$ par le trinôme

$$b + a + p. \tag{15}$$

Donc, pour calculer la valeur d'une fonction symétrique U des racines $a$, $b$ de l'équation (11), supposées inégales, il suffit de diviser : 1° U considéré comme fonction de $b$ par le trinôme (15); 2° le reste de la division considéré comme fonction de $a$ par le trinôme (14). Le nouveau reste, ainsi déterminé, sera précisément la valeur cherchée de U.

Concevons maintenant que l'équation (1), étant du troisième degré, se réduise à

$$x^3 + \mathrm{A}x^2 + \mathrm{B}x + \mathrm{C} = 0; \tag{16}$$

et soient $a, b, c$ les trois racines de cette équation supposées inégales entre elles. On aura identiquement

$$a^3 + \mathrm{A}a^2 + \mathrm{B}a + \mathrm{C} = 0 \tag{17}$$

ou, ce qui revient au même,

$$\mathrm{C} = -a^3 - \mathrm{A}a^2 - \mathrm{B}a$$

et, par suite,

$$x^3+Ax^2+Bx+C=x^3-a^3+A(x^2-a^2)+B(x-a)$$
$$=(x-a)[x^2+(a+A)x+(a^2+Aa+B)].$$

Donc, l'équation (16) pourra être présentée sous la forme

$$(x-a)[x^2+(a+A)x+(a^2+Aa+B)]=0, \tag{18}$$

et celle qu'on obtiendra en la divisant par $x-a$, savoir

$$x^2+(a+A)x+(a^2+Aa+B)=0, \tag{19}$$

aura pour racines $b$ et $c$. Cela posé, soit U une fonction symétrique des racines $a$, $b$, $c$ de l'équation (16). Puisque l'équation (19) est du second degré seulement, on déterminera sans peine la valeur de U considéré comme fonction symétrique des racines $b$ et $c$, par la méthode que nous avons appliquée à la détermination des fonctions symétriques des racines de l'équation (11). On y parviendra, en effet, en divisant U considéré comme fonction de $c$ par le polynôme

$$c+b+a+A, \tag{20}$$

puis le reste considéré comme fonction de $b$ par le polynôme

$$b^2+(a+A)b+a^2+Aa+B. \tag{21}$$

Le reste de la nouvelle division sera une fonction entière de $a$, qui, divisée elle-même par le polynôme

$$a^3+Aa^2+Ba+C, \tag{22}$$

fournira un troisième reste indépendant de $a$; et ce troisième reste sera la valeur cherchée de U.

Il est important d'observer que, pour obtenir les polynômes (22), (21), (20), il suffit : 1° de poser $x=a$ dans le premier membre de l'équation proposée, c'est-à-dire dans la fonction

$$x^3+Ax^2+Bx+C; \tag{23}$$

2° de retrancher le résultat ou le polynôme (22) de la fonction (23),



de diviser le reste par $x-a$, et de remplacer, dans le quotient ainsi formé, savoir

$$x^2+(a+A)x+a^2+Aa+B, \tag{24}$$

la variable $x$ par la lettre $b$; 3° de retrancher le nouveau résultat ou le polynôme (21) de la fonction (24), de diviser le reste par $x-b$, et de remplacer, dans le quotient ainsi formé, savoir

$$x+b+a+A, \tag{25}$$

la variable $x$ par la lettre $c$.

Concevons encore que l'équation (1), étant du quatrième degré, se réduise à

$$x^4+Ax^3+Bx^2+Cx+D=0, \tag{26}$$

et soient $a$, $b$, $c$, $d$ les quatre racines de cette équation, supposées inégales entre elles. On aura identiquement

$$a^4+Aa^3+Ba^2+Ca+D=0 \tag{27}$$

ou, ce qui revient au même,

$$D=-a^4-Aa^3-Ba^2-Ca,$$

et, par suite,

$$x^4+Ax^3+Bx^2+Cx+D$$
$$=x^4-a^4+A(x^3-a^3)+B(x^2-a^2)+C(x-a)$$
$$=(x-a)[x^3+(a+A)x^2+(a^2+Aa+B)x+(a^3+Aa^2+Ba+C)].$$

Donc l'équation (26) pourra être présentée sous la forme

$$(x-a)[x^3+(a+A)x^2+(a^2+Aa+B)x+(a^3+Aa^2+Ba+C)]=0, \tag{28}$$

et celle qu'on obtiendra, en la divisant par $x-a$, savoir

$$x^3+(a+A)x^2+(a^2+Aa+B)x+(a^3+Aa^2+Ba+C)=0, \tag{29}$$

aura pour racines $b$, $c$ et $d$. Cela posé, soit U une fonction symétrique des racines $a$, $b$, $c$, $d$ de l'équation (26). Puisque l'équation (29) est du troisième degré seulement, on déterminera sans peine les valeurs

de U considéré comme fonction symétrique des racines $b$, $c$, $d$ par la méthode que nous avons appliquée à la détermination des fonctions symétriques des racines de l'équation (16). On y parviendra, en effet, en divisant U considéré comme fonction de $d$ par le polynôme

$$d + c + b + a + \mathrm{A}, \tag{30}$$

puis le reste considéré comme fonction de $c$ par le polynôme

$$c^2 + (b + a + \mathrm{A})c + b^2 + ab + a^2 + \mathrm{A}(b + a) + \mathrm{B}, \tag{31}$$

puis le nouveau reste considéré comme fonction de $b$ par le polynôme

$$b^3 + (a + \mathrm{A})b^2 + (a^2 + \mathrm{A}a + \mathrm{B})b + (a^3 + \mathrm{A}a^2 + \mathrm{B}a + \mathrm{C}). \tag{32}$$

Le troisième reste, que l'on trouvera en opérant comme on vient de le dire, sera une fonction entière de $a$, qui, divisée elle-même par le polynôme

$$a^4 + \mathrm{A}a^3 + \mathrm{B}a^2 + \mathrm{C}a + \mathrm{D}, \tag{33}$$

fournira un quatrième reste indépendant de $a$; et ce quatrième reste sera la valeur cherchée de U.

Il est important d'observer que, pour obtenir les polynômes (33), (32), (31), (30), il suffit : 1° de poser $x = a$ dans le premier membre de l'équation proposée, c'est-à-dire dans la fonction

$$x^4 + \mathrm{A}x^3 + \mathrm{B}x^2 + \mathrm{C}x + \mathrm{D}; \tag{34}$$

2° de retrancher le résultat ou le polynôme (33) de la fonction (34), de diviser le reste par $x - a$, et de remplacer, dans le quotient ainsi formé, savoir

$$x^3 + (a + \mathrm{A})x^2 + (a^2 + \mathrm{A}a + \mathrm{B})x + (a^3 + \mathrm{A}a^2 + \mathrm{B}a + \mathrm{C}), \tag{35}$$

la variable $x$ par la lettre $b$; 3° de retrancher le nouveau résultat ou le polynôme (32) de la fonction (35), de diviser le reste par $x - b$, et de remplacer dans le quotient ainsi formé, savoir

$$x^2 + (b + a + \mathrm{A})x + b^2 + ab + a^2 + \mathrm{A}(a + b) + \mathrm{B}, \tag{36}$$



la variable $x$ par la lettre $c$; 4° de retrancher le dernier résultat ou le polynôme (31) de la fonction (36), de diviser le reste par $x - c$, et de remplacer, dans le quotient ainsi formé, savoir

$$x + c + b + a + \mathrm{A}, \tag{37}$$

la variable $x$ par la lettre $d$.

En continuant de la même manière, on parviendra généralement à déterminer les fonctions symétriques des racines d'une équation de degré quelconque, et l'on établira sans peine, à ce sujet, le théorème que nous allons énoncer :

THÉORÈME XVI. — *Soient $a$, $b$, $c$, $d$, ..., $h$, $i$, $k$ les racines de l'équation* (1),

$$\mathrm{P} = x^n + \mathrm{A}x^{n-1} + \mathrm{B}x^{n-2} + \ldots + \mathrm{I}x + \mathrm{K} \tag{38}$$

*le premier membre de cette équation, et* U *une fonction symétrique des racines $a$, $b$, $c$, ..., $h$, $i$, $k$. Soient de plus*

$$\mathfrak{A}, \quad \mathfrak{B}, \quad \mathfrak{C}, \quad \ldots, \quad \mathfrak{H}, \quad \mathfrak{I}, \quad \mathfrak{K} \tag{39}$$

*les polynômes dans lesquels se transforment : 1° la fonction* P *quand on pose $x = a$; 2° la fonction*

$$\mathrm{Q} = \frac{\mathrm{P} - \mathfrak{A}}{x - a} \tag{40}$$

*quand on pose $x = b$; 3° la fonction*

$$\mathrm{R} = \frac{\mathrm{Q} - \mathfrak{B}}{x - b} \tag{41}$$

*quand on pose $x = c$; 4° la fonction*

$$\mathrm{S} = \frac{\mathrm{R} - \mathfrak{C}}{x - c} \tag{42}$$

*quand on pose $x = d$, etc. Pour déterminer la valeur de la fonction symétrique* U, *il suffira de diviser : 1° U considéré comme fonction de $k$ par le polynôme*

$$\mathfrak{K} = k + i + h + \ldots + c + b + a + \mathrm{A}; \tag{43}$$

2° *le reste considéré comme fonction de i par le polynôme*

$$(44)\quad \begin{cases} \mathfrak{d} = i^3 + (h + \ldots + b + a)i + h^2 + \ldots + b^2 + a^2 + \ldots \\ \qquad + hb + ha + \ldots + ba + \mathrm{A}(i + h + \ldots + b + a) + \mathrm{B}; \end{cases}$$

3° *le nouveau reste considéré comme fonction de h par le polynôme*

$$\mathfrak{H} = h^3 + \ldots,$$

*etc. Les différents restes ainsi obtenus seront indépendants, le premier de la racine k, le second de la racine i, le troisième de la racine h, etc., et le dernier de tous sera précisément la valeur cherchée de* U.

D'après ce qui a été dit ci-dessus, il semble, au premier abord, qu'on devrait restreindre le théorème XVI au cas où les racines de l'équation (1) sont inégales entre elles. Mais on doit observer que, en dernière analyse, la valeur de U, déduite de ce théorème, sera une fonction des coefficients A, B, ..., I, K; et même une fonction entière, puisque, dans chacun des polynômes $\mathfrak{K}$, $\mathfrak{d}$, $\mathfrak{H}$, ..., le premier terme a pour coefficient l'unité. Désignons par $\mathfrak{v}$ cette fonction entière. La formule

$$\mathrm{U} = \mathfrak{v}$$

subsistera lorsque les racines $a$, $b$, $c$, ..., $h$, $i$, $k$ seront inégales, quelque petites que soient d'ailleurs les différences de ces racines. D'autre part, on pourra faire varier les coefficients A, B, ..., I, K par degrés insensibles, et de telle manière que deux ou plusieurs de ces différences s'approchent indéfiniment de la limite zéro; et, comme la formule $\mathrm{U} = \mathfrak{v}$ continuera de subsister dans cette hypothèse, il est clair qu'elle sera encore vraie au moment où les différences dont il s'agit s'évanouiront, c'est-à-dire au moment où des racines de l'équation (1) deviendront égales entre elles. Donc le théorème XVI s'étend au cas même où cette équation offre des racines égales.

Il est bon d'observer encore que les polynômes $\mathfrak{K}$, $\mathfrak{d}$, $\mathfrak{H}$, ..., $\mathfrak{S}$, $\mathfrak{V}$, $\mathfrak{A}$ sont précisément ce que deviennent les premiers membres des



équations (2) présentées sous les formes

$$(45)\quad \begin{cases} \mathrm{A} + a + b + c + \ldots + i + k = 0, \\ \mathrm{B} - ab - ac - \ldots - ai - ak - bc - \ldots - bi - bk - \ldots - ik = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \mathrm{I} \pm (abc\ldots i + abc\ldots k + \ldots + bc\ldots ik) = 0, \\ \mathrm{K} \mp abc\ldots ik = 0, \end{cases}$$

quand on substitue dans la seconde la valeur de $k$ tirée de la première, dans la troisième les valeurs de $k$ et de $i$ tirées des deux premières, dans la quatrième les valeurs de $k$, $i$, $h$ tirées des trois premières, etc. Ainsi, en particulier, si l'on suppose $x = 4$, les équations (45) deviendront

$$(46)\quad \begin{cases} \mathrm{A} + a + b + c + d = 0, \\ \mathrm{B} - (ab + ac + ad + bc + bd + cd) = 0, \\ \mathrm{C} + abc + abd + acd + bcd = 0, \\ \mathrm{C} - abcd = 0; \end{cases}$$

et l'on tirera de ces équations, en opérant comme on vient de le dire,

$$(47)\quad \begin{cases} \mathrm{A} + a + b + c + d = 0, \\ \mathrm{B} + \mathrm{A}(a + b + c) + a^2 + b^2 + c^2 + ab + ac + bc = 0, \\ \mathrm{C} + \mathrm{B}(a + b) + \mathrm{A}(a^2 + ab + b^2) + a^3 + a^2 b + ab^2 + b^3 = 0, \\ \mathrm{D} + \mathrm{C}a + \mathrm{B}a^2 + \mathrm{A}a^3 + a^4 = 0. \end{cases}$$

Or les premiers membres des formules (47) se réduisent évidemment aux polynômes (30), (31), (32) et (33). Ajoutons que, au lieu de diviser successivement la fonction symétrique U par les polynômes

$$\mathfrak{K},\ \mathfrak{d},\ \mathfrak{H},\ \ldots,\ \mathfrak{S},\ \mathfrak{V},\ \mathfrak{A},$$

on peut éliminer l'une après l'autre les lettres $k$, $i$, $h$, ..., $c$, $b$, $a$ de cette même fonction à l'aide des formules

$$(48)\quad \mathfrak{K} = 0,\quad \mathfrak{d} = 0,\quad \mathfrak{H} = 0,\quad \ldots,\quad \mathfrak{S} = 0,\quad \mathfrak{V} = 0,\quad \mathfrak{A} = 0,$$

ou, ce qui revient au même, à l'aide des formules (45).

Pour montrer une application des principes que nous venons d'établir, prenons

$$U = b^2c + bc^2 + c^2a + ca^2 + a^2b + ab^2, \tag{49}$$

$a$, $b$, $c$ étant les trois racines de l'équation (16) que nous réduirons à

$$x^3 + Bx + C = 0, \tag{50}$$

en supposant, pour abréger, $A = 0$. Alors, pour déterminer la valeur de la fonction symétrique U, il faudra diviser successivement le second membre de l'équation (49) par les polynômes (20), (21), (22), ou plutôt par les suivants

$$c + b + a, \quad b^2 + ab + a^2 + B, \quad a^3 + Ba + C, \tag{51}$$

considérés, le premier comme fonction de $c$, le second comme fonction de $b$, le troisième comme fonction de $a$. En d'autres termes, il faudra poser, dans l'équation (49) : 1°

$$c = -b - a; \tag{52}$$

2°

$$b^2 + ab = -a^2 - B; \tag{53}$$

3°

$$a^3 + Ba = -C. \tag{54}$$

Or, en opérant de cette manière, on trouvera

$$U = 3ab(a + b) = -3a(a^2 + B) = 3C. \tag{55}$$

On aura donc

$$b^2c + bc^2 + c^2a + ca^2 + a^2b + ab^2 = 3C, \tag{56}$$

ce qui est exact.

Prenons encore

$$U = (a + b)(a + c)(a + d)(b + c)(b + d)(c + d), \tag{57}$$



$a$, $b$, $c$, $d$ étant les quatre racines de l'équation (26) que nous réduirons à

$$x^4 + Bx^2 + Cx + D = 0, \tag{58}$$

en supposant, pour abréger, $A = 0$. Alors, pour déterminer la valeur de la fonction symétrique U, il faudra diviser successivement le second membre de l'équation (57) par les polynômes (30), (31), (32), (33), ou plutôt par les suivants

$$\begin{cases} d + c + b + a, \quad c^2 + (b + a)c + b^2 + ab + a^2 + B, \\ b^3 + ab^2 + a^2b + a^3 + B(a + b) + C, \quad a^4 + Ba^2 + Ca + D, \end{cases} \tag{59}$$

considérés, le premier comme fonction de $d$, le second comme fonction de $c$, le troisième comme fonction de $b$, le quatrième comme fonction de $a$. En d'autres termes, il faudra éliminer successivement de l'équation (57) les quatre lettres $d$, $c$, $b$, $a$, à l'aide des formules

$$\begin{cases} d + c + b + a = 0, \\ c^2 + b^2 + a^2 + bc + ca + ab + B = 0, \\ (b + a)(b^2 + a^2 + B) + C = 0, \\ a^4 + Ba^2 + Ca + D = 0. \end{cases} \tag{60}$$

Or, en opérant ainsi, on trouvera

$$U = -[(a + b)(a + c)(b + c)]^2 = -[(a + b)(a^2 + b^2 + B)]^2 = -C^2. \tag{61}$$

On aura donc

$$(a + b)(a + c)(a + d)(b + c)(b + d)(c + d) = -C^2; \tag{62}$$

ce qui est exact. Nous remarquerons que, dans cet exemple, l'opération se termine après la troisième division, en sorte qu'on est dispensé de recourir à la dernière des formules (60). Des simplifications du même genre se présentent dans un grand nombre de cas, et il peut même arriver que l'opération se termine après la première ou la seconde division. Ainsi, en particulier, si l'on suppose

$$U = a^2 + b^2 + c^2 + \ldots + h^2 + i^2 + k^2, \tag{63}$$

$a, b, c, \ldots, h, i, k$ étant les racines de l'équation (1), il suffira de diviser successivement U par les polynômes (43) et (44), ou, ce qui revient au même, d'éliminer les deux lettres $k$ et $i$ de la fonction U à l'aide des deux formules

$$\mathfrak{K} = 0, \qquad \mathfrak{I} = 0, \tag{64}$$

pour obtenir la valeur de cette fonction. On trouvera, en effet,

$$\begin{aligned} U &= a^2 + b^2 + c^2 + \ldots + h^2 + i^2 + (A + a + b + c + \ldots + h + i)^2 \\ &= A^2 + 2(\mathfrak{I} - B) = A^2 - 2B, \end{aligned}$$

et, par conséquent,

$$a^2 + b^2 + c^2 + \ldots + h^2 + i^2 + k^2 = A^2 - 2B; \tag{65}$$

ce qui est exact.

Le produit des carrés des différences entre les racines de l'équation (1), combinées deux à deux de toutes les manières possibles, est évidemment une fonction symétrique de ces racines. Or il est facile de déterminer la valeur de cette fonction par les méthodes ci-dessus développées. En effet, supposons d'abord $n = 2$, et

$$U = (a - b)^2, \tag{66}$$

$a, b$ étant les deux racines de l'équation (11). Alors, pour déterminer U, il suffira d'éliminer successivement de la formule (66) les deux lettres $a$ et $b$ à l'aide des deux équations

$$b + a + A = 0, \qquad a^2 + Aa + B = 0. \tag{67}$$

Or on trouvera ainsi

$$U = (2a + A)^2 = A^2 + 4(a^2 + Aa) = A^2 - 4B. \tag{68}$$

On aura donc

$$(a - b)^2 = A^2 - 4B; \tag{69}$$

ce qui est exact.



Supposons, en second lieu, $n = 3$ et

$$U = (a - b)^2 (a - c)^2 (b - c)^2. \tag{70}$$

Comme $b$ et $c$ seront les deux racines de l'équation (19), on aura identiquement

$$(x - b)(x - c) = x^2 + (a + A)x + a^2 + Aa + B \tag{71}$$

et, par suite,

$$(a - b)(a - c) = 3a^2 + 2Aa + B; \tag{72}$$

puis on conclura de la formule (69), en y remplaçant : 1° $a$ et $b$ par $b$ et $c$; 2° A et B par $a + A$ et $a^2 + Aa + B$,

$$(b - c)^2 = (a + A)^2 - 4(a^2 + Aa + B) = A^2 - 4B - 2Aa - 3a^2. \tag{73}$$

Cela posé, la formule (70) donnera

$$U = (3a^2 + 2Aa + B)^2 (A^2 - 4B - 2Aa - 3a^2). \tag{74}$$

Si, maintenant, on divise le second membre de l'équation (74) par le polynôme

$$a^3 + Aa^2 + Ba + C,$$

le reste sera indépendant de $a$ et offrira la valeur cherchée de U. On peut aussi obtenir cette valeur, en éliminant la lettre $a$ de la formule (74), à l'aide de l'équation

$$a^3 + Aa^2 + Ba + C = 0. \tag{17}$$

Or, en ayant égard à l'équation (17), on trouvera

$$(3a^2 + 2Aa + B)^2 = (A^2 - 3B)a^2 + (AB - 9C)a + B^2 - 3AC$$

et, par suite,

$$U = [B^2 - 3AC + (AB - 9C)a + (A^2 - 3B)a^2](A^2 - 4B - 2Aa - 3a^2); \tag{75}$$

puis, en développant le second membre de la formule (75), et remplaçant $a^3$ par $-Aa^2 - Ba - C$, $a^4$ par

$$-Aa^3 - Ba^2 - Ca = (A^2 - B)a^2 + (AB - C)a + AC$$

ou, ce qui revient au même, $a^4$ par AC, $a^3$ par $-C$, $a^2$ et $a$ par zéro, on aura

$$(76)\quad \begin{cases} U=(B^2-3AC)(A^2-4B)+(AB-9C)3C-AC(A^2-3B) \\ \quad =A^2B^2-4A^3C-4B^3-27C^2+18ABC. \end{cases}$$

On trouvera donc définitivement

$$(77)\quad (a-b)^2(a-c)^2(b-c)^2=A^2B^2-4A^3C-4B^3-27C^2+18ABC.$$

Dans le cas particulier où l'on a $A=0$, l'équation (75) se réduit à

$$U=(3Ba^2+9Ca-B^2)(3a^2+4B);$$

puis on en tire, en développant le second membre, et remplaçant $a^3$ par $-C$, $a$, $a^2$ et $a^4$ par zéro,

$$(78)\qquad U=-4B^3-27C^2$$

ou, ce qui revient au même,

$$(79)\qquad (a-b)^2(a-c)^2(b-c)^2=-4B^3-27C^2.$$

Cette dernière équation détermine le produit du carré des différences entre les racines de l'équation (50). On peut d'ailleurs très aisément revenir de la formule (79) à la formule (77). En effet, si, dans l'équation (16), on pose

$$(80)\qquad x=z-\frac{A}{3},$$

elle deviendra

$$(81)\qquad z^3+\left(B-\frac{A^2}{3}\right)z+C-\frac{BA}{3}+\frac{2A^3}{27}=0.$$

Or, les racines de cette dernière étant évidemment $a+\frac{A}{3}$, $b+\frac{A}{3}$, $c+\frac{A}{3}$, le produit des carrés des différences entre ces racines sera toujours

$$(a-b)^2(a-c)^2(b-c)^2;$$

et, comme l'équation (81) est semblable à l'équation (50), on tirera



de la formule (79), en remplaçant dans le second membre B par $B-\frac{A^2}{3}$, et C par $C-\frac{BA}{3}+\frac{2A^3}{27}$,

$$(82)\quad (a-b)^2(a-c)^2(b-c)^2=-4\left(B-\frac{A^2}{3}\right)^3-27\left(C-\frac{BA}{3}+\frac{2A^3}{27}\right)^2.$$

Il est d'ailleurs facile de s'assurer que les formules (77) et (82) sont identiques.

Des calculs semblables à ceux qu'on vient de faire fourniraient généralement la valeur de la fonction symétrique

$$(83)\quad U=(a-b)^2(a-c)^2\ldots(a-i)^2(a-k)^2(b-c)^2\ldots(b-i)^2(b-k)^2\ldots(i-k)^2,$$

c'est-à-dire le produit des carrés des différences entre les racines $a$, $b$, $c$, ..., $h$, $i$, $k$ de l'équation (1). On doit même remarquer que ce produit pourra être immédiatement exprimé en fonction de $a$, si l'on sait déjà former le produit des carrés des différences entre les racines d'une équation du degré $n-1$. En effet, comme, en divisant par $x-a$ l'équation (1) présentée sous la forme

$$(84)\quad x^n-a^n+A(x^{n-1}-a^{n-1})+B(x^{n-2}+a^{n-2})+\ldots+I(x-a)=0,$$

on obtient la suivante

$$(85)\quad \begin{cases} x^{n-1}+(a+A)x^{n-2}+(a^2+Aa+B)x^{n-3}+\ldots \\ \qquad\qquad +a^{n-1}+Aa^{n-2}+Ba^{n-3}+\ldots+I=0, \end{cases}$$

dont les racines sont $b$, $c$, ..., $i$, $k$, on aura identiquement

$$(86)\quad \begin{cases} (x-b)(x-c)\ldots(x-i)(x-k) \\ \quad =x^{n-1}+(a+A)x^{n-2}+(a^2+Aa+B)x^{n-3}+\ldots+a^{n-1}+Aa^{n-2}+Ba^{n-3}+\ldots+I \end{cases}$$

et, par suite,

$$(87)\quad \begin{cases} (a-b)(a-c)\ldots(a-i)(a-k) \\ \quad =na^{n-1}+(n-1)Aa^{n-2}+(n-2)Ba^{n-3}+\ldots+I. \end{cases}$$

D'autre part, si, étant donnée une équation du degré $n-1$, on sait calculer la fonction entière des coefficients qui représente le produit

du carré des différences entre les racines, on aura encore

$$(88) \qquad (b-c)^2\ldots(b-i)^2(b-k)^2\ldots(i-k)^2=V,$$

V désignant une fonction entière des coefficients que renferme l'équation (85), et par conséquent une fonction entière de $a$. Cela posé, l'équation (83) donnera

$$(89) \quad U=V[na^{n-1}+(n-1)Aa^{n-2}+(n-2)Ba^{n-3}+\ldots+2Ha+I]^2.$$

Si maintenant on divise le second membre de la formule (89) par le polynôme

$$(5) \qquad a^n+Aa^{n-1}+Ba^{n-2}+\ldots+Ha^2+Ia+K,$$

le reste sera indépendant de $a$ et offrira la valeur cherchée de U. On peut aussi obtenir cette valeur en éliminant la lettre $a$ de la formule (89) à l'aide de l'équation

$$(90) \qquad a^n+Aa^{n-1}+Ba^{n-2}+\ldots+Ha^2+Ia+K=0.$$

Il est bon d'observer que le produit des carrés des différences entre les racines de l'équation (1) ne peut s'évanouir à moins que cette équation n'admette des racines égales. Dans le cas contraire, ce produit se réduira toujours à une fonction entière des coefficients A, B, C, ..., I, K; par conséquent, si ces coefficients offrent des valeurs numériques entières, celle du produit en question sera elle-même un nombre entier, et, si on la désigne par $\mathfrak{N}^2$, $\mathfrak{N}$ étant une quantité positive, on aura

$$(91) \qquad \mathfrak{N}\geq 1.$$

On peut encore, à l'aide des principes que nous venons d'exposer, calculer aisément le premier membre d'une équation qui aurait pour racines les diverses valeurs d'une fonction entière des racines $a, b, c, \ldots, i, k$ de l'équation (1), puisque ce premier membre sera toujours une fonction symétrique de $a, b, c, \ldots, i, k$. Cela posé, si l'équation (1) est du troisième ou du quatrième degré, on ramènera facilement sa résolution, dans le premier cas, à celle d'une équation



du troisième degré, dans le second cas, à la résolution d'une équation binôme du même degré. Supposons, par exemple, que l'équation (1), étant du quatrième degré, se réduise à la formule (58). Pour la résoudre, il suffira, comme l'on sait, de déterminer les trois valeurs que peut acquérir la fonction $(a+b-c-d)^2$ lorsqu'on échange entre elles les quatre lettres $a, b, c, d$. Or ces trois valeurs, savoir

$$(92) \qquad (a+b-c-d)^2, \quad (a-b+c-d)^2, \quad (a-b-c+d)^2,$$

seront les trois racines de l'équation auxiliaire

$$(93) \quad [z-(a+b-c-d)^2][z-(a-b+c-d)^2][z-(a-b-c+d)^2]=0,$$

qui offrira pour premier membre une fonction symétrique de $a$, $b$, $c$, $d$. Désignons par

$$(94) \qquad z^3+Uz^2+Vz+W$$

le polynôme que l'on obtient en développant ce premier membre. Le polynôme (94) et, par suite, ses trois coefficients U, V, W seront des fonctions symétriques de $a, b, c, d$. On trouvera d'ailleurs, en ayant égard aux formules (60),

$$(95) \quad \begin{cases} z^3+Uz^2+Vz+W \\ \quad =[z-(a+b-c-d)^2][z-(a-b+c-d)^2][z-(a-b-c+d)^2] \\ \quad =[z-4(a+b)^2][z-4(a+c)^2][z-4(b+c)^2], \end{cases}$$

puis on en conclura

$$(96) \quad \begin{cases} U=-4[(a+b)^2+(a+c)^2+(b+c)^2] \\ \quad =-8(c^2+b^2+a^2+bc+ca+ab)=8B, \end{cases}$$

$$(97) \quad \begin{cases} V=16\{(a+b)^2[(a+c)^2+(b+c)^2]+[(a+c)(b+c)]^2\} \\ \quad =16\{-(a+b)^2[(a+b)^2+2B]+(a^2+b^2+B)^2\} \\ \quad =16[B^2-4ab(b^2+ab+a^2+B)] \\ \quad =16[B^2+4(a^4+Ba^2+Ca)]=16(B^2-4D), \end{cases}$$

$$(98) \quad \begin{cases} W=-64[(a+b)(a+c)(b+c)]^2 \\ \quad =-64[(a+b)(a^2+b^2+B)]^2=-64C^2. \end{cases}$$

Donc l'équation auxiliaire deviendra

$$(99) \qquad z^3+8Bz^2+16(B^2-4D)z-64C^2=0.$$

Supposons cette dernière équation résolue, et désignons par $z_1$, $z_2$, $z_3$ ses trois racines. Soient de plus $u$, $v$, $w$ trois expressions propres à vérifier, non seulement les formules

$$u^3 = z_1, \tag{100}$$

$$v^3 = z_2, \tag{101}$$

$$w^3 = z_3, \tag{102}$$

desquelles on tire $u^3v^3w^3 = z_1z_2z_3 = 64C^2$, $uvw = \pm 8C$, mais encore la condition

$$uvw = 8C. \tag{103}$$

Alors, si l'on prend

$$a + b - c - d = u, \tag{104}$$

$$a - b + c - d = v, \tag{105}$$

on devra prendre aussi

$$a - b - c + d = w, \tag{106}$$

attendu que l'on aura

$$\left\{\begin{array}{l}(a+b-c-d)(a-b+c-d)(a-b-c+d)\\ \quad = 8(a+b)(a+c)(b+c) = -8(a+b)(a^2+b^2+B) = 8C,\end{array}\right. \tag{107}$$

et, par conséquent,

$$(a+b-c-d)(a-b+c-d)(a-b-c+d) = uvw. \tag{108}$$

Si maintenant on combine les formules (104), (105), (106) avec la première des formules (60), on en déduira

$$a = \frac{u+v+w}{4}, \quad b = \frac{u-v-w}{4}, \quad c = \frac{v-w-u}{4}, \quad d = \frac{w-u-v}{4}. \tag{109}$$

Observons, au reste : 1° que des valeurs de $u$, $v$, $w$, tirées des équations (100), (101) et (103), satisferont toujours à l'équation (102); 2° que ces quatre équations continueraient d'être vérifiées, si deux des valeurs dont il s'agit venaient à changer de signe. Mais alors les valeurs



des racines $a$, $b$, $c$, $d$, déterminées par les formules (109), seraient simplement échangées entre elles.

### § VII. — *Sur la détermination des racines réelles d'une équation de degré quelconque.*

On a vu, dans le cinquième paragraphe, comment on pouvait constater l'existence, et même déterminer les valeurs des racines réelles ou imaginaires d'une équation de degré quelconque. Toutefois, lorsqu'on calculera l'une après l'autre ces diverses racines, à l'aide de la méthode indiquée dans le paragraphe dont il s'agit, il arrivera souvent que les racines imaginaires se présenteront les premières; et comme, dans beaucoup de questions, il importe surtout de connaître les racines réelles d'équations à coefficients réels, il ne sera pas inutile d'exposer ici une méthode simple à l'aide de laquelle on puisse évaluer directement ces mêmes racines. Tel est l'objet dont nous allons maintenant nous occuper.

Soit toujours

$$x^n + Ax^{n-1} + Bx^{n-2} + \ldots + Ix + K = 0 \tag{1}$$

l'équation proposée du degré $n$, A, B, ..., I, K désignant des coefficients réels.

Soient encore $a$, $b$, $c$, ..., $h$, $i$, $k$ les racines de cette équation, et

$$\rho_1, \quad \rho_2, \quad \ldots, \quad \rho_{n-1}, \quad \rho_n$$

les valeurs numériques des coefficients

$$A, \quad B, \quad \ldots, \quad I, \quad K.$$

D'après ce qui a été dit dans le § V, le module de chacune des racines $a$, $b$, $c$, ..., $h$, $i$, $k$ ne pourra surpasser la racine positive $r$ de l'équation

$$r^n = \rho_1 r^{n-1} + \rho_2 r^{n-2} + \ldots + \rho_{n-1} r + \rho_n, \tag{2}$$

ni le plus grand des nombres

$$\rho_1 + 1, \quad \rho_2 + 1, \quad \ldots, \quad \rho_{n-1} + 1, \quad \rho_n + 1, \tag{3}$$

ni le plus grand terme de la suite

$$(4) \qquad n\rho_1,\ (n\rho_2)^{\frac{1}{2}},\ \ldots,\ (n\rho_{n-1})^{\frac{1}{n-1}},\ (n\rho_n)^{\frac{1}{n}}.$$

Il sera donc très facile de trouver un nombre supérieur aux modules de toutes les racines réelles de l'équation (1). Désignons par $r$ ce même nombre. Le module de chacune des différences

$$(5) \qquad a-b,\ a-c,\ \ldots,\ a-i,\ a-k,\ b-c,\ \ldots,\ b-i,\ b-k,\ \ldots,\ i-k$$

sera, en vertu du théorème II, inférieur à $2r$; et comme leur nombre est précisément égal au nombre de combinaisons que l'on peut former avec $n$ lettres prises deux à deux, c'est-à-dire à

$$\frac{n(n-1)}{2},$$

si l'on met de côté l'une de ces différences, par exemple $a-b$, le produit de toutes les autres offrira, en vertu du théorème III (corollaire I), un module inférieur à l'expression

$$(6) \qquad (2r)^{\frac{n(n-1)}{2}-1}.$$

D'ailleurs, on pourra aisément déterminer, par les méthodes exposées dans le § VI, le produit des carrés de toutes les différences dont il s'agit. Soit $\mathfrak{D}^2$ la valeur numérique de ce produit, $\mathfrak{D}$ désignant une quantité positive. Cette quantité sera évidemment égale au produit des modules de toutes les différences; et par suite le module ou la valeur numérique d'une seule différence $a-b$ surpassera le quotient qu'on obtient en divisant le nombre $\mathfrak{D}$ par l'expression (6). Donc, si l'on pose

$$(7) \qquad \Delta = \frac{\mathfrak{D}}{(2r)^{\frac{n(n-1)}{2}-1}},$$

$\Delta$ sera un nombre inférieur à la plus petite différence entre les racines réelles de l'équation (1).

Il est bon d'observer que le nombre $\Delta$, déterminé par la formule (7),



ne pourrait s'évanouir que dans le cas où l'équation proposée admettrait des racines égales. Nous exclurons dorénavant ce dernier cas; ce qui sera sans inconvénient, attendu qu'on peut toujours débarrasser une équation des racines égales qui la vérifient.

Lorsque les coefficients A, B, ..., I, K de l'équation (1) se réduisent à des nombres entiers, on a, comme nous l'avons déjà remarqué,

$$(8) \qquad \mathfrak{D} \geq 1,$$

et par conséquent la plus petite différence entre deux racines réelles est supérieure au nombre $\Delta$ déterminé par la formule

$$(9) \qquad \Delta = \frac{1}{(2r)^{\frac{n(n-1)}{2}-1}}.$$

Lorsque, à l'aide de la formule (7) ou (9), on a calculé un nombre $\Delta$ inférieur à la plus petite différence entre deux quelconques des racines de l'équation (1), il devient facile de constater l'existence de toutes les racines de cette espèce, et d'évaluer chacune d'elles avec une approximation aussi grande qu'on le juge convenable. En effet, soit $m$ le nombre entier immédiatement supérieur au rapport $\frac{r}{\Delta}$. Il est clair que toutes les racines réelles de l'équation (1) seront renfermées entre les limites $-m\Delta$, $+m\Delta$, et que deux termes consécutifs de la progression arithmétique

$$(10) \qquad \left\{\begin{array}{l} -m\Delta,\ -(m-1)\Delta,\ \ldots,\ -3\Delta,\ -2\Delta,\ -\Delta, \\ 0,\ \Delta,\ 2\Delta,\ 3\Delta,\ \ldots,\ (m-1)\Delta,\ m\Delta \end{array}\right.$$

ne comprendront jamais entre eux plus d'une racine réelle. D'ailleurs, lorsque, dans le polynôme

$$(11) \qquad x^n + Ax^{n-1} + Bx^{n-2} + \ldots + Ix + K,$$

on substitue successivement, à la place de $x$, deux quantités entre lesquelles une seule racine réelle au plus se trouve renfermée, les résultats obtenus sont de même signe ou de signes contraires; pour parler autrement, la comparaison de ces deux résultats offre une permanence de signe ou une variation de signe, suivant qu'il n'existe pas de racine

réelle ou qu'il en existe une entre les deux quantités dont il s'agit. Par conséquent, si l'on prend les termes de la progression (10) pour des valeurs successives de la variable $x$, et que l'on forme la suite des valeurs correspondantes du polynôme (11), cette nouvelle suite offrira précisément autant de variations de signe que l'équation (1) a de racines réelles, et chacune de ces racines sera comprise entre deux valeurs consécutives de $x$ qui, substituées dans le polynôme (11), donneront des résultats de signes contraires. Soient $x_1$ et $x_2 = x_1 + \Delta$ deux semblables valeurs, et supposons

$$\xi = \frac{x_1 + x_2}{2} = x_1 + \frac{1}{2}\Delta. \tag{12}$$

La racine réelle comprise entre $x_1$ et $x_2$ sera évidemment renfermée entre $x_1$ et $\xi$, si la substitution de $\xi$ au lieu de $x$, dans le polynôme (11), fournit un résultat de même signe que la substitution de $x_2$; mais elle sera renfermée entre $\xi$ et $x_2$ dans le cas contraire. On pourra donc remplacer les limites $x_1$, $x_2$, qui diffèrent entre elles de la quantité $\Delta$, par les limites $x_1$ et $\xi$ ou $\xi$ et $x_2$, qui différeront entre elles de la quantité $\frac{1}{2}\Delta$. En continuant de la même manière, on finira par resserrer une quelconque des racines réelles entre deux limites dont la différence, représentée par un terme de la progression géométrique

$$\Delta, \quad \frac{1}{2}\Delta, \quad \frac{1}{4}\Delta, \quad \frac{1}{8}\Delta, \quad \ldots, \tag{13}$$

sera aussi petite qu'on le voudra; et par conséquent on pourra calculer cette racine avec une approximation aussi grande qu'on le jugera convenable.

Il est bon d'observer que, dans la progression (10), on pourrait sans inconvénient remplacer la valeur de $\Delta$, tirée de la formule (7) ou (9), par une valeur plus petite.

Pour montrer une application de la méthode que nous venons d'exposer, considérons l'équation

$$x^3 - 2x - 5 = 0, \tag{14}$$



traitée par Lagrange et plus anciennement par Newton. On aura, dans ce cas,

$$n = 3, \qquad \frac{n(n-1)}{2} = 3,$$

et l'équation (2), réduite à

$$\iota^3 - 2\iota - 5 = 0, \tag{15}$$

offrira une racine positive $\iota$ inférieure à $\sqrt{5}$, puisque, en supposant $\iota < \sqrt{5}$, on trouverait

$$\iota^2 > 5 > 2 + \frac{5}{\sqrt{5}} > 2 + \frac{5}{\iota}.$$

Donc chacune des racines de l'équation (14) aura pour module ou pour valeur numérique un nombre inférieur à

$$r = \sqrt{5} = 2{,}236\ldots. \tag{16}$$

D'autre part, si l'on désigne par U le produit des carrés des différences entre les racines de l'équation (14), et par $\mathfrak{D}^2$ la valeur numérique de ce produit, on aura, en vertu de la formule (78) du sixième paragraphe,

$$\mathrm{U} = 4.8 - 27.25 = -643, \tag{17}$$

$$\mathfrak{D}^2 = 643. \tag{18}$$

Par suite, on tirera de l'équation (7), en prenant $n = 3$ et $r = \sqrt{5}$,

$$\Delta = \frac{\sqrt{643}}{4.5} > \frac{25}{20} > 1. \tag{19}$$

Donc, si l'équation (14) a plusieurs racines réelles, la différence entre deux de ces racines ne pourra être inférieure à l'unité. D'ailleurs, si l'on remplace $\Delta$ par l'unité, les différents termes de la progression (10) deviendront respectivement

$$-3, \quad -2, \quad -1, \quad 0, \quad 1, \quad 2, \quad 3; \tag{20}$$

et, comme les valeurs correspondantes du premier membre de l'équation (14) seront

$$-26, \quad -9, \quad -4, \quad -5, \quad -6, \quad -1, \quad +16, \tag{21}$$

il est clair que l'équation (14) offrira une seule racine réelle comprise entre les limites 2 et 3. Ajoutons que, d'après ce qui a été dit plus haut, on peut, à la limite 3, substituer le nombre 2,236.... Si maintenant on resserre de plus en plus les limites entre lesquelles la racine réelle de l'équation (14) est comprise, on trouvera

$$x = 2{,}094551 4\ldots \tag{22}$$

Il ne sera pas inutile de remarquer que, dans beaucoup de cas, on peut, à l'aide de diverses considérations, faciliter la recherche des racines réelles d'une équation donnée. Ainsi, en particulier, on conclut immédiatement des principes établis dans le paragraphe IV que l'équation (14) admet une racine positive, mais une seule, inférieure à $\sqrt{5}$. D'ailleurs, en remplaçant $x$ par $-x$, on tire de l'équation (14)

$$x^3 - 2x + 5 = 0, \tag{23}$$

et, comme les deux binômes

$$x^3 - 2x, \quad 5 - 2x$$

sont toujours positifs pour des valeurs positives de $x$, savoir, le premier tant que l'on a $x > \sqrt{2} > 1{,}414$, et le second tant que l'on a $x < 2{,}5$, il est clair que le premier membre de l'équation (23) ne pourra jamais devenir nul pour des valeurs positives de $x$. Donc, par suite, l'équation (14) n'admettra point de racines négatives et n'offrira qu'une seule racine réelle.

### § VIII. — *Sur la théorie de l'élimination.*

Soient

$$x^n + \mathrm{A}x^{n-1} + \mathrm{B}x^{n-2} + \ldots + \mathrm{I}x + \mathrm{K} = 0 \tag{1}$$

et

$$x^m + \mathrm{P}x^{m-1} + \mathrm{Q}x^{m-2} + \ldots + \mathrm{S}x + \mathrm{T} = 0 \tag{2}$$

deux équations algébriques, la première du degré $n$, la seconde du



degré $m$. Si l'on élimine entre elles la variable $x$, l'équation résultante de l'élimination exprimera la condition à laquelle les coefficients

$$\mathrm{A},\ \mathrm{B},\ \ldots,\ \mathrm{I},\ \mathrm{K}, \quad \text{et} \quad \mathrm{P},\ \mathrm{Q},\ \ldots,\ \mathrm{S},\ \mathrm{T} \tag{3}$$

doivent satisfaire, pour qu'une seule et même valeur de $x$ vérifie tout à la fois les équations (1) et (2). Soient d'ailleurs

$$a,\ b,\ \ldots,\ i,\ k \tag{4}$$

les valeurs distinctes de $x$ qui sont propres à vérifier l'équation (1). Soient, de même,

$$p,\ q,\ \ldots,\ s,\ t \tag{5}$$

les valeurs distinctes de $x$ qui sont propres à vérifier l'équation (2), et faisons

$$\left\{\begin{array}{l}\mathrm{U} = (a-p)(a-q)\ldots(a-s)(a-t)\times(b-p)(b-q)\ldots(b-s)(b-t)\times\ldots \\ \qquad\qquad \times(k-p)(k-q)\ldots(k-s)(k-t).\end{array}\right. \tag{6}$$

Pour que les équations (1) et (2) subsistent simultanément, il sera nécessaire et il suffira que l'un des facteurs du produit U s'évanouisse, ou, en d'autres termes, que ce produit lui-même se réduise à zéro. Donc l'équation de condition

$$\mathrm{U} = 0 \tag{7}$$

pourra être substituée à celle que produirait l'élimination de $x$ entre les équations (1) et (2). J'ajoute que, si chacune de ces dernières offre seulement des racines inégales, il sera facile de transformer le produit U en une fonction entière des coefficients A, B, ..., I, K; P, Q, ..., S, T. C'est ce que l'on démontrera sans peine à l'aide des considérations suivantes.

Les racines de l'équation (2) étant inégales entre elles et représentées par $p, q, \ldots, s, t$, on aura identiquement

$$(x-p)(x-q)\ldots(x-s)(x-t) = x^m + \mathrm{P}x^{m-1} + \mathrm{Q}x^{m-2} + \ldots + \mathrm{S}x + \mathrm{T}, \tag{8}$$

et, par suite,

$$(9)\quad \begin{cases} (a-p)(a-q)\dots(a-s)(a-t) = a^m + \mathrm{P}a^{m-1} + \mathrm{Q}a^{m-2} + \dots + \mathrm{S}a + \mathrm{T}, \\ (b-p)(b-q)\dots(b-s)(b-t) = b^m + \mathrm{P}b^{m-1} + \mathrm{Q}b^{m-2} + \dots + \mathrm{S}b + \mathrm{T}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ (k-p)(k-q)\dots(k-s)(k-t) = k^m + \mathrm{P}k^{m-1} + \mathrm{Q}k^{m-2} + \dots + \mathrm{S}k + \mathrm{T}. \end{cases}$$

Cela posé, la formule (6) donnera

$$(10)\quad \begin{cases} \mathrm{U} = (a^m + \mathrm{P}a^{m-1} + \mathrm{Q}a^{m-2} + \dots + \mathrm{S}a + \mathrm{T}) \\ \qquad \times (b^m + \mathrm{P}b^{m-1} + \mathrm{Q}b^{m-2} + \dots + \mathrm{S}b + \mathrm{T}) \\ \qquad \times \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \qquad \times (k^m + \mathrm{P}k^{m-1} + \mathrm{Q}k^{m-2} + \dots + \mathrm{S}k + \mathrm{T}). \end{cases}$$

D'ailleurs, les racines de l'équation (1) étant supposées inégales, le second membre de la formule (10) sera évidemment une fonction symétrique de ces racines, qui pourra être transformée par la méthode exposée dans le paragraphe précédent en une fonction entière des coefficients A, B, ..., I, K et P, Q, ..., S, T.

On arriverait encore aux mêmes conclusions en observant que la valeur de U, donnée par l'équation (6), peut s'écrire comme il suit :

$$(11)\quad \begin{cases} \mathrm{U} = (-1)^{mn}(p-a)(p-b)\dots(p-i)(p-k) \\ \qquad \times (q-a)(q-b)\dots(q-i)(q-k) \\ \qquad \times \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \qquad \times (t-a)(t-b)\dots(t-i)(t-k). \end{cases}$$

Or, si chacune des équations (1) et (2) n'offre que des racines inégales, on aura identiquement

$$(12)\quad (x-a)(x-b)\dots(x-i)(x-k) = x^n + \mathrm{A}x^{n-1} + \mathrm{B}x^{n-2} + \dots + \mathrm{I}x + \mathrm{K},$$

puis on en conclura

$$(13)\quad \begin{cases} (p-a)(p-b)\dots(p-i)(p-k) = p^n + \mathrm{A}p^{n-1} + \mathrm{B}p^{n-2} + \dots + \mathrm{I}p + \mathrm{K}, \\ (q-a)(q-b)\dots(q-i)(q-k) = q^n + \mathrm{A}q^{n-1} + \mathrm{B}q^{n-2} + \dots + \mathrm{I}q + \mathrm{K}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ (t-a)(t-b)\dots(t-i)(t-k) = t^n + \mathrm{A}t^{n-1} + \mathrm{B}t^{n-2} + \dots + \mathrm{I}t + \mathrm{K}; \end{cases}$$



et la valeur de U, réduite à

$$(14)\quad \begin{cases} \mathrm{U} = (-1)^{mn}(p^n + \mathrm{A}p^{n-1} + \mathrm{B}p^{n-2} + \dots + \mathrm{I}p + \mathrm{K}) \\ \qquad \times (q^n + \mathrm{A}q^{n-1} + \mathrm{B}q^{n-2} + \dots + \mathrm{I}q + \mathrm{K}) \\ \qquad \times \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \qquad \times (t^n + \mathrm{A}t^{n-1} + \mathrm{B}t^{n-2} + \dots + \mathrm{I}t + \mathrm{K}), \end{cases}$$

pourra être facilement transformée par la méthode ci-dessus mentionnée en une fonction entière des coefficients A, B, ..., I, K; P, Q, ..., S, T.

Si les équations (1) et (2) offraient des racines égales, il serait facile de les en débarrasser et de les remplacer par deux équations nouvelles, dont chacune aurait pour racines les valeurs distinctes de $x$ propres à vérifier l'équation (1) ou l'équation (2). Alors le premier membre de l'équation (7) pourrait être transformé en une fonction entière des coefficients renfermés dans les deux nouvelles équations. Ajoutons que, si, dans la même hypothèse, on désigne par $a, b, \dots, i, k$ et par $p, q, \dots, s, t$, non plus les valeurs distinctes propres à vérifier l'équation (1) ou l'équation (2), mais les racines égales ou inégales des équations (1) et (2), on pourra encore substituer l'équation (7) à celle que produirait l'élimination de $x$ entre les deux premières, et transformer le produit U en une fonction entière des coefficients A, B, ..., I, K; P, Q, ..., S, T.

Considérons maintenant deux équations algébriques dont les premiers membres soient des fonctions entières des deux variables $x$ et $y$, et supposons que la somme des exposants de ces variables soit égale ou inférieure au nombre $n$ dans chaque terme de la première fonction, au nombre $m$ dans chaque terme de la seconde. $n$ et $m$ seront les *degrés* des deux fonctions, et si chacune d'elles renferme tous les termes qu'elle peut contenir, les équations proposées seront ce qu'on nomme des *équations complètes* du *degré n* et du *degré m*. Cela posé, si l'on divise la première équation par le coefficient constant de $x^n$, et la seconde par le coefficient constant de $x^m$, elles se présenteront sous

les formes

$$x^n + Ax^{n-1} + Bx^{n-2} + \ldots + Ix + K = 0, \tag{1}$$

$$x^m + Px^{m-1} + Qx^{m-2} + \ldots + Sx + T = 0, \tag{2}$$

A, B, ..., I, K désignant des fonctions entières de $y$ dont les degrés seront respectivement égaux aux nombres 1, 2, ..., $n-1$, $n$, et P, Q, ..., S, T d'autres fonctions entières de $y$ dont les degrés seront respectivement égaux aux nombres 1, 2, ..., $m-1$, $m$. Concevons à présent que l'on cherche les divers systèmes de valeurs de $x$ et de $y$ propres à vérifier simultanément les équations (1) et (2). Il est clair que, dans chacun de ces systèmes, la valeur de $y$ sera nécessairement une racine de l'équation (7), U désignant une fonction entière des coefficients A, B, ..., I, K; P, Q, ..., S, T, et par conséquent une fonction entière de $y$, savoir celle dans laquelle peut se transformer le second membre de la formule (10), quand on représente par $a$, $b$, ..., $i$, $k$ les racines égales ou inégales de l'équation (1). D'ailleurs, pour opérer la transformation dont il s'agit, il suffira, conformément au théorème XVI, de diviser successivement le second membre de la formule (10), considéré comme fonction de $k$, par le polynôme

$$k + i + \ldots + b + a + A;$$

puis le reste, considéré comme fonction de $i$, par le polynôme

$$\begin{aligned} &i^2 + (h + \ldots + b + a)i + h^2 + \ldots + b^2 + a^2 \\ &\quad + hb + ha + \ldots + ba + A(i + h + \ldots + b + a) + B, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

La fonction U étant ainsi déterminée, toutes les valeurs de $y$ qui permettront de vérifier simultanément les équations (1) et (2) devront satisfaire à l'équation (7).

Il est facile de s'assurer que la fonction entière de $y$, désignée par U, est d'un degré inférieur ou tout au plus égal à $mn$. En effet, comme les degrés des fonctions

$$A,\ B,\ \ldots,\ I,\ K;\ P,\ Q,\ \ldots,\ S,\ T$$



sont représentés par les nombres

$$1,\ 2,\ \ldots,\ n-1,\ n;\ 1,\ 2,\ \ldots,\ m-1,\ m,$$

les valeurs des rapports

$$\frac{A}{y},\ \frac{B}{y^2},\ \ldots,\ \frac{I}{y^{n-1}},\ \frac{K}{y^n};\quad \frac{P}{y},\ \frac{Q}{y^2},\ \ldots,\ \frac{S}{y^{m-1}},\ \frac{T}{y^m}$$

resteront finies pour des valeurs infinies de $y$, et l'on pourra en dire autant des valeurs de $z$ propres à vérifier les deux équations

$$z^n + \frac{A}{y}z^{n-1} + \frac{B}{y^2}z^{n-2} + \ldots + \frac{I}{y^{n-1}}z + \frac{K}{y^n} = 0, \tag{15}$$

$$z^m + \frac{P}{y}z^{m-1} + \frac{Q}{y^2}z^{m-2} + \ldots + \frac{S}{y^{m-1}}z + \frac{T}{y^m} = 0, \tag{16}$$

c'est-à-dire des rapports

$$\frac{a}{y},\ \frac{b}{y},\ \ldots,\ \frac{i}{y},\ \frac{k}{y};\quad \frac{p}{y},\ \frac{q}{y},\ \ldots,\ \frac{s}{y},\ \frac{t}{y}. \tag{17}$$

Donc le produit

$$\begin{aligned} &\left(\frac{a}{y} - \frac{p}{y}\right)\left(\frac{a}{y} - \frac{q}{y}\right)\cdots\left(\frac{a}{y} - \frac{t}{y}\right) \times \left(\frac{b}{y} - \frac{p}{y}\right)\left(\frac{b}{y} - \frac{q}{y}\right)\cdots\left(\frac{b}{y} - \frac{t}{y}\right) \times \cdots \\ &\qquad \times \left(\frac{k}{y} - \frac{p}{y}\right)\left(\frac{k}{y} - \frac{q}{y}\right)\cdots\left(\frac{k}{y} - \frac{t}{y}\right), \end{aligned} \tag{18}$$

qui, en vertu de la formule (6), sera équivalent au rapport

$$\frac{U}{y^{mn}},$$

conservera lui-même une valeur finie pour des valeurs infinies de $y$; ce qui exige que le degré de la fonction de $y$, désignée par U, ne surpasse pas $mn$. On se trouve ainsi ramené à un théorème connu, et que l'on peut énoncer comme il suit :

THÉORÈME XVII. — *Étant données deux équations algébriques en $x$ et $y$, l'une du degré $n$, l'autre du degré $m$, on peut en déduire, par l'élimination de $x$, une équation en $y$ dont le degré soit tout au plus égal au produit $mn$.*