SEIZIÈME LEÇON.

DIFFÉRENTIELLES DES FONCTIONS DE PLUSIEURS VARIABLES. DÉRIVÉES PARTIELLES ET DIFFÉRENTIELLES PARTIELLES.

Soit

$$u = f(x, y, z, \ldots)$$

une fonction de plusieurs variables indépendantes $x, y, z, \ldots$. Désignons par i un accroissement infiniment petit, attribué à l'une quelconque de ces variables, et par

$$\varphi(x, y, z, \ldots), \quad \chi(x, y, z, \ldots), \quad \psi(x, y, z, \ldots), \quad \ldots$$

les limites vers lesquelles convergent les rapports

$$\frac{f(x+i, y, z, \ldots) - f(x, y, z, \ldots)}{i},$$

$$\frac{f(x, y+i, z, \ldots) - f(x, y, z, \ldots)}{i},$$

$$\frac{f(x, y, z+i, \ldots) - f(x, y, z, \ldots)}{i},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

tandis que i s'approche indéfiniment de zéro; $\varphi(x, y, z, \ldots)$ sera la dérivée que l'on déduit de la fonction $u = f(x, y, z, \ldots)$, en y considérant x comme seule variable, ou, ce qu'on nomme la *dérivée partielle* de u par rapport à x. De même $\chi(x, y, z, \ldots)$, $\psi(x, y, z, \ldots)$, ... seront les dérivées partielles de u par rapport aux variables $y, z, \ldots$.

Concevons maintenant que l'on attribue aux variables $x, y, z, \ldots$ des accroissements simultanés $\Delta x, \Delta y, \Delta z, \ldots$ et soit Δu l'accroissement correspondant de la fonction u, en sorte qu'on ait

$$(1) \qquad \Delta u = f(x+\Delta x, y+\Delta y, z+\Delta z, \ldots) - f(x, y, z, \ldots).$$

Si l'on assigne à $\Delta x, \Delta y, \Delta z, \ldots$ des valeurs finies, la valeur de Δu, donnée par l'équation (1), deviendra ce qu'on appelle la *différence finie* de la fonction u, et sera ordinairement une quantité finie. Si, au contraire, on assigne à $\Delta x, \Delta y, \Delta z, \ldots$ des valeurs infiniment petites, la valeur de Δu sera, pour l'ordinaire, infiniment petite. Mais, tandis que les accroissements

$$\Delta x, \quad \Delta y, \quad \Delta z, \quad \ldots, \quad \Delta u$$

s'approcheront indéfiniment et simultanément de la limite zéro, leurs rapports pourront converger vers des limites finies qui seront les *dernières raisons* de ces mêmes accroissements. Cela posé, pour obtenir des quantités ou des expressions algébriques qui puissent être considérées comme différentielles des variables $x, y, z, \ldots$, ou de la fonction u, et désignées en conséquence par les notations $dx, dy, dz, \ldots, du$, il suffira, d'après ce qui a été dit dans la première Leçon, page 289, de choisir ces quantités ou ces expressions, de manière que leurs rapports soient rigoureusement égaux aux dernières raisons ci-dessus mentionnées. D'ailleurs, les variables $x, y, z, \ldots$, étant supposées indépendantes, leurs accroissements $\Delta x, \Delta y, \Delta z, \ldots$ sont entièrement arbitraires. Il en sera donc de même des différentielles $dx, dy, dz, \ldots$. Quant à la différentielle du, on la déterminera sans peine à l'aide des raisonnements que nous allons indiquer.

Comme, en s'approchant de zéro, les accroissements

$$\Delta x, \quad \Delta y, \quad \Delta z, \quad \ldots, \quad \Delta u$$

deviendront sensiblement proportionnels à

$$dx, \quad dy, \quad dz, \quad \ldots, \quad du,$$

si l'on désigne par α la valeur infiniment petite de l'un des rapports

$$\frac{\Delta x}{dx}, \quad \frac{\Delta y}{dy}, \quad \frac{\Delta z}{dz}, \quad \ldots, \quad \frac{\Delta u}{du},$$

si l'on pose, par exemple,

$$(2) \qquad \frac{\Delta x}{dx} = \alpha,$$

chacun des autres rapports différera très peu de α. Donc l'équation

$$\frac{\Delta u}{du} = \alpha \quad \text{ou} \quad \frac{\Delta u}{\alpha} = du$$

sera sensiblement exacte, et l'on aura en toute rigueur

$$\frac{\Delta u}{\alpha} = du + \beta, \tag{3}$$

β devant s'évanouir avec α. Effectivement, lorsque la proportion

$$\Delta x : dx :: \Delta u : du$$

se trouve à très peu près vérifiée, il suffit, pour la rendre rigoureuse, d'ajouter à son dernier terme du une quantité β peu différente de zéro; et alors cette proportion, ou plutôt la suivante

$$\Delta x : dx :: \Delta u : du + \beta,$$

donne évidemment

$$du + \beta = \frac{\Delta u}{\Delta x} dx = \frac{\Delta u}{\alpha}.$$

Si maintenant on fait converger α vers la limite zéro, on tirera de l'équation (2)

$$du = \lim \frac{\Delta u}{\alpha}. \tag{4}$$

On trouvera de la même manière

$$dy = \lim \frac{\Delta y}{\alpha}, \qquad dz = \lim \frac{\Delta z}{\alpha}, \qquad \ldots; \tag{5}$$

et, comme on aura d'ailleurs, en vertu de l'équation (2),

$$dx = \frac{\Delta x}{\alpha},$$

on trouvera encore

$$dx = \lim \frac{\Delta x}{\alpha}. \tag{6}$$

Ajoutons que, si, dans la formule (4), on substitue la valeur de Δu

donnée par la formule (1), on en conclura

$$du = \lim \frac{f(x+\Delta x, y+\Delta y, z+\Delta z, \ldots) - f(x, y, z, \ldots)}{\alpha}. \tag{7}$$

Il ne reste plus qu'à chercher la limite vers laquelle converge le second membre de l'équation (7), quand, après avoir posé

$$\Delta x = \alpha\, dx,$$

on fait converger α vers la limite zéro. On y parviendra de la manière suivante.

Si, dans la fonction

$$u = f(x, y, z, \ldots),$$

on fait croître l'une après l'autre les variables $x, y, z, \ldots$ des quantités $\Delta x, \Delta y, \Delta z, \ldots$, on déduira de l'équation (16) de la page 313 une suite d'équations de la forme

$$\begin{aligned}
&f(x+\Delta x, y, z, \ldots\ldots) - f(x, y, z, \ldots\ldots) = \Delta x\, \varphi(x+\theta_1 \Delta x, y, z, \ldots\ldots),\\
&f(x+\Delta x, y+\Delta y, z, \ldots\ldots) - f(x+\Delta x, y, z, \ldots\ldots) = \Delta y\, \chi(x+\Delta x, y+\theta_2 \Delta y, z, \ldots\ldots),\\
&f(x+\Delta x, y+\Delta y, z+\Delta z, \ldots) - f(x+\Delta x, y+\Delta y, z, \ldots) = \Delta z\, \psi(x+\Delta x, y+\Delta y, z+\theta_3 \Delta z, \ldots),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,
\end{aligned}$$

$\theta_1, \theta_2, \theta_3$ désignant des nombres inconnus, mais tous compris entre zéro et l'unité. Or, en ajoutant ces équations membre à membre, on en tirera

$$\left\{\begin{aligned}
&f(x+\Delta x, y+\Delta y, z+\Delta z, \ldots) - f(x, y, z, \ldots)\\
&\quad = \Delta x\, \varphi(x+\theta_1 \Delta x, y, z, \ldots)\\
&\qquad + \Delta y\, \chi(x+\Delta x, y+\theta_2 \Delta y, z, \ldots)\\
&\qquad + \Delta z\, \psi(x+\Delta x, y+\Delta y, z+\theta_3 \Delta z, \ldots)\\
&\qquad + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots;
\end{aligned}\right. \tag{8}$$

puis, en divisant par α les deux membres de la formule (8), faisant converger α vers la limite zéro, et ayant égard aux équations (5), (6), (7), on trouvera

$$du = \varphi(x, y, z, \ldots)\, dx + \chi(x, y, z, \ldots)\, dy + \psi(x, y, z, \ldots)\, dz + \ldots. \tag{9}$$

En vertu de l'équation (9), la différentielle de la fonction u se trouve complètement déterminée dès que l'on fixe les valeurs des quantités dx, dy, dz, ... Mais ces dernières quantités, qui représentent les différentielles des variables indépendantes, restent entièrement arbitraires, et on peut les supposer égales à des constantes finies quelconques h, k, l, ...

La démonstration précédente de la formule (9) suppose implicitement que les variables x, y, z, ... et la fonction u sont réelles, ainsi que leurs accroissements et leurs différentielles. Mais il est facile de modifier cette démonstration de manière à la rendre applicable au cas même où la fonction u, les variables x, y, z, ..., les accroissements Δx, Δy, Δz, ... et les différentielles dx, dy, dz, ... deviennent imaginaires. En effet, lorsque Δx, Δy, Δz, ... sont infiniment petits, on tire de la formule (51) de la treizième Leçon

$$\begin{aligned}
&f(x+\Delta x, y, z, \ldots\ldots\ldots\ldots) - f(x, y, z, \ldots\ldots\ldots\ldots) = \Delta x[\varphi(x, y, z, \ldots\ldots\ldots\ldots)+\mathrm{I}],\\
&f(x+\Delta x, y+\Delta y, z, \ldots\ldots\ldots) - f(x+\Delta x, y, z, \ldots\ldots\ldots) = \Delta y[\chi(x+\Delta x, y, z, \ldots\ldots\ldots)+\mathrm{J}],\\
&f(x+\Delta x, y+\Delta y, z+\Delta z, \ldots) - f(x+\Delta x, y+\Delta y, z, \ldots) = \Delta z[\psi(x+\Delta x, y+\Delta y, z, \ldots)+\mathrm{K}],\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,
\end{aligned}$$

I, J, K, ... devant s'évanouir avec Δx, Δy, Δz, ... On a donc, par suite,

$$(10)\qquad \left\{\begin{aligned}
&f(x+\Delta x, y+\Delta y, z+\Delta z, \ldots) - f(x, y, z, \ldots)\\
&\quad = [\varphi(x, y, z, \ldots)+\mathrm{I}]\,\Delta x\\
&\qquad + [\chi(x+\Delta x, y, z, \ldots)+\mathrm{J}]\,\Delta y\\
&\qquad + [\psi(x+\Delta x, y+\Delta y, z, \ldots)+\mathrm{K}]\,\Delta z\\
&\qquad + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}\right.$$

Or il suffit de diviser par α les deux membres de l'équation (10) et de faire ensuite converger α vers la limite zéro pour retrouver la formule (9).

En appliquant la formule (9) à des cas particuliers, on en tirera

$$d(x+y+z+\ldots) = dx+dy+dz+\ldots,\qquad d(x-y) = dx-dy,$$
$$d(ax+by+cz+\ldots) = a\,dx+b\,dy+c\,dz+\ldots,$$

$$d(x^a y^b z^c \ldots) = x^a y^b z^c \ldots \left(a\frac{dx}{x}+b\frac{dy}{y}+c\frac{dz}{z}+\ldots\right),$$
$$d\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{y\,dx - x\,dy}{y^2},$$
$$d.x^y = yx^{y-1}\,dx + x^y\,\mathrm{l}x\,dy,\qquad \ldots,$$
$$d(x+y\sqrt{-1}) = dx+\sqrt{-1}\,dy,$$
$$d.e^{x+y\sqrt{-1}} = e^{x+y\sqrt{-1}}(dx+dy\sqrt{-1}),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Il est important d'observer que, dans la valeur de du donnée par l'équation (9), le terme

$$\varphi(x, y, z, \ldots)\,dx$$

est précisément la différentielle qu'on obtiendrait pour la fonction

$$u = f(x, y, z, \ldots),$$

en considérant dans cette fonction x seule comme variable et y, z, ... comme constantes. C'est pour cette raison que le terme dont il s'agit se nomme la *différentielle partielle* de la fonction u par rapport à x. De même

$$\chi(x, y, z, \ldots)\,dy,\quad \psi(x, y, z, \ldots)\,dz,\quad \ldots$$

sont les différentielles partielles de u par rapport à y par rapport à z, ... Si l'on indique ces différentielles partielles en plaçant, au bas de la lettre d, les variables auxquelles elles se rapportent, comme on le voit ici,

$$d_x u,\quad d_y u,\quad d_z u,\quad \ldots,$$

on aura

$$(11)\qquad \left\{\begin{aligned}
&\varphi(x, y, z, \ldots) = \frac{d_x u}{dx},\\
&\chi(x, y, z, \ldots) = \frac{d_y u}{dy},\\
&\psi(x, y, z, \ldots) = \frac{d_z u}{dz},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,
\end{aligned}\right.$$

et l'équation (9) pourra être présentée sous l'une ou l'autre des deux formes

$$(12)\qquad du = d_x u + d_y u + d_z u + \ldots,$$

$$(13)\qquad du = \frac{d_x u}{dx}dx + \frac{d_y u}{dy}dy + \frac{d_z u}{dz}dz + \ldots.$$

Il résulte de la formule (12) que les différentielles partielles $d_x u$, $d_y u$, $d_z u$, ... sont les diverses parties de la *différentielle totale* du, que l'on peut aussi nommer simplement la *différentielle* de la fonction u.

Pour abréger, on supprime ordinairement, dans les formules (11), les lettres que nous avons placées au bas de la caractéristique d, et l'on représente simplement les dérivées partielles de u prises relativement à $x, y, z, \ldots$ par les notations

$$(14)\qquad \frac{du}{dx}, \quad \frac{du}{dy}, \quad \frac{du}{dz}, \quad \ldots.$$

Alors $\frac{du}{dx}$ n'est pas le quotient de du par dx; et pour exprimer la différentielle partielle de u, prise relativement à x, il faut employer la notation

$$\frac{du}{dx}dx,$$

qui n'est point susceptible de réduction, à moins qu'on ne rétablisse la lettre x au bas de la caractéristique d. Lorsqu'on admet ces conventions, la formule (13) se réduit à

$$(15)\qquad du = \frac{du}{dx}dx + \frac{du}{dy}dy + \frac{du}{dz}dz + \ldots.$$

Mais, comme il n'est plus permis d'effacer dans cette dernière les différentielles dx, dy, dz, ..., rien ne remplace la formule (12).

En terminant cette Leçon, nous indiquerons un moyen fort simple de ramener le calcul des différentielles totales à celui des fonctions dérivées. Si l'on prend

$$\Delta x = \alpha\, dx,$$

α désignant une quantité infiniment petite, la différentielle totale du

sera déterminée par la formule (7), pourvu que, en s'approchant de zéro, les accroissements Δx, Δy, Δz, ... deviennent sensiblement ou même rigoureusement proportionnels aux différentielles dx, dy, dz, ... Donc, la formule (7) subsistera si l'on pose

$$(16)\qquad \Delta x = \alpha\, dx, \quad \Delta y = \alpha\, dy, \quad \Delta z = \alpha\, dz, \quad \ldots,$$

en sorte qu'on aura

$$(17)\qquad du = \lim \frac{f(x+\alpha\, dx, y+\alpha\, dy, z+\alpha\, dz, \ldots) - f(x, y, z, \ldots)}{\alpha}.$$

D'autre part, si, dans l'expression

$$f(x+\alpha\, dx, y+\alpha\, dy, z+\alpha\, dz, \ldots),$$

on considère α comme seule variable, et si l'on fait, en conséquence,

$$(18)\qquad f(x+\alpha\, dx, y+\alpha\, dy, z+\alpha\, dz, \ldots) = F(\alpha),$$

on aura, non seulement

$$(19)\qquad u = F(0),$$

mais encore

$$\Delta u = F(\alpha) - F(0)$$

et, par suite,

$$(20)\qquad du = \lim \frac{F(\alpha) - F(0)}{\alpha} = F'(0).$$

Ainsi, pour former la différentielle totale du, il suffira de calculer la valeur particulière que reçoit la fonction dérivée $F'(\alpha)$ dans le cas où l'on prend $\alpha = 0$.

DIX-SEPTIÈME LEÇON.

USAGE DES DÉRIVÉES PARTIELLES DANS LA DIFFÉRENTIATION DES FONCTIONS COMPOSÉES. DIFFÉRENTIELLES DES FONCTIONS IMPLICITES. THÉORÈME DES FONCTIONS HOMOGÈNES.

Soit

$$s = \mathrm{F}(u, v, w, \ldots)$$

une fonction quelconque des variables u, v, w, ... que nous supposerons être elles-mêmes des fonctions des variables indépendantes x, y, z, ...; s sera une *fonction composée* de ces dernières variables; et, si l'on désigne par Δx, Δy, Δz, ... des accroissements arbitraires simultanément attribués à x, y, z, ..., les accroissements correspondants Δu, Δv, Δw, ..., Δs des fonctions u, v, w, ..., s seront liés entre eux par la formule

$$\Delta s = \mathrm{F}(u + \Delta u, v + \Delta v, w + \Delta w, \ldots) - \mathrm{F}(u, v, w, \ldots). \tag{1}$$

Soient d'ailleurs

$$\Phi(u, v, w, \ldots), \quad \mathrm{X}(u, v, w, \ldots), \quad \Psi(u, v, w, \ldots), \quad \ldots$$

les dérivées partielles de la fonction $\mathrm{F}(u, v, w, \ldots)$ prises successivement par rapport à u, v, w, ... Comme l'équation (8) de la Leçon précédente a lieu pour des valeurs quelconques des variables x, y, z, ... et de leurs accroissements Δx, Δy, Δz, ..., on en conclura, en remplaçant x, y, z, ... par u, v, w, ..., et la fonction f par la fonction F,

$$\left\{\begin{aligned} &\mathrm{F}(u + \Delta u, v + \Delta v, w + \Delta w, \ldots) - \mathrm{F}(u, v, w, \ldots) \\ &\quad = \Delta u\, \Phi(u + \theta_1 \Delta u, v, w, \ldots) \\ &\quad\quad + \Delta v\, \mathrm{X}(u + \Delta u, v + \theta_2 \Delta v, w, \ldots) \\ &\quad\quad + \Delta w\, \Psi(u + \Delta u, v + \Delta v, w + \theta_3 \Delta w, \ldots) \\ &\quad\quad + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right. \tag{2}$$

Dans cette dernière équation, θ_1, θ_2, θ_3, ... désignent toujours des

nombres inconnus, mais inférieurs à l'unité. Si maintenant on pose

$$\Delta x = \alpha\, dx, \quad \Delta y = \alpha\, dy, \quad \Delta z = \alpha\, dz, \quad \ldots, \tag{3}$$

α désignant une quantité infiniment petite, on aura, en vertu de la formule (17) de la Leçon précédente,

$$du = \lim \frac{\Delta u}{\alpha}, \quad dv = \lim \frac{\Delta v}{\alpha}, \quad dw = \lim \frac{\Delta w}{\alpha}, \quad \ldots, \quad ds = \lim \frac{\Delta s}{\alpha}; \tag{4}$$

puis, en divisant par α les deux membres de l'équation (2) et passant aux limites, on trouvera

$$ds = \Phi(u, v, w, \ldots)\, du + \mathrm{X}(u, v, w, \ldots)\, dv + \Psi(u, v, w, \ldots)\, dw + \ldots. \tag{5}$$

La valeur de ds fournie par l'équation (5) est semblable à la valeur de du fournie par l'équation (9) de la Leçon précédente. La principale différence consiste en ce que les différentielles dx, dy, dz, ..., comprises dans la valeur de du, sont des constantes arbitraires, tandis que les différentielles du, dv, dw, ... sont de nouvelles fonctions des variables indépendantes x, y, z, ... combinées d'une certaine manière avec les constantes arbitraires dx, dy, dz, ...

La démonstration qu'on vient de donner de la formule (5) suppose implicitement que les fonctions u, v, w, ..., s sont réelles, ainsi que leurs accroissements et leurs différentielles. Si ces fonctions, ces accroissements et ces différentielles devenaient imaginaires, il suffirait, pour établir la formule (5), de recourir à l'équation (10) de la Leçon précédente. En effet, comme cette dernière équation subsiste, quelles que soient les valeurs finies, réelles ou imaginaires, attribuées aux variables x, y, z, ..., et les valeurs infiniment petites attribuées à leurs accroissements Δx, Δy, Δz, ..., on en conclura, en remplaçant x, y, z, ... par u, v, w, ..., et la fonction f par la fonction F,

$$\left\{\begin{aligned} &\mathrm{F}(u + \Delta u, u + \Delta v, w + \Delta w, \ldots) - \mathrm{F}(u, v, w, \ldots) \\ &\quad = [\Phi(u, v, w, \ldots) + \mathrm{I}]\, \Delta u \\ &\quad\quad + [\mathrm{X}(u + \Delta u, v, w, \ldots) + \mathrm{J}]\, \Delta v \\ &\quad\quad + [\Psi(u + \Delta u, v + \Delta v, w, \ldots) + \mathrm{K}]\, \Delta w \\ &\quad\quad + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right. \tag{6}$$

Dans la formule (6), I, J, K, ... désignent toujours des quantités qui s'approchent indéfiniment de zéro, en même temps que Δx, Δy, Δz, ... Si d'ailleurs on assigne à Δx, Δy, Δz, ... les valeurs que déterminent les équations (3), il suffira évidemment de diviser par α les deux membres de la formule (6), et de passer aux limites pour retrouver la formule (5).

En appliquant la formule (5) à des cas particuliers, on en tirera

$$d(u+v)=du+dv,\qquad d(u-v)=du-dv,\qquad d(au+bv)=a\,du+b\,dv,$$

$$d(au+bv+cw+\ldots)=a\,du+b\,dv+c\,dw+\ldots,$$

$$d(uv)=u\,dv+v\,du,\qquad d(uvw\ldots)=vw\ldots du+uw\ldots dv+uv\ldots dw+\ldots,$$

$$d\left(\frac{u}{v}\right)=\frac{du}{v}-\frac{u\,dv}{v^2}=\frac{v\,du-u\,dv}{v^2},\qquad d.u^v=vu^{v-1}\,du+u^v\,\mathrm{l}u\,du,\qquad \ldots.$$

Nous avions déjà obtenu ces équations (*voir* la seconde Leçon), en supposant u, v, w, ... fonctions d'une seule variable indépendante x; mais on voit qu'elles subsistent, quel que soit le nombre des variables indépendantes.

Dans le cas particulier où l'on suppose u fonction de la seule variable x, v fonction de la seule variable y, w fonction de la seule variable z, ..., on peut arriver directement à l'équation (5), en partant de la formule (9) de la Leçon précédente. En effet, en vertu de cette formule, on aura généralement

$$(7)\qquad ds=d_xs+d_ys+d_zs+\ldots.$$

De plus, comme, parmi les quantités u, v, w, ..., la première est, par hypothèse, la seule qui renferme la variable x, en considérant s comme une fonction de fonction de cette variable, et ayant égard à la formule (10) de la première Leçon, on trouvera

$$d_xs=d_x\mathrm{F}(u,v,w,\ldots)=\Phi(u,v,w,\ldots)\,d_xu=\Phi(u,v,w,\ldots)\,du.$$

On trouvera de même

$$d_ys=\mathrm{X}(u,v,w,\ldots)\,dv,\qquad d_zs=\Psi(u,v,w,\ldots)\,dw,\qquad \ldots.$$

Si l'on substitue ces valeurs de d_xs, d_ys, d_zs, ... dans la formule (7), elle coïncidera évidemment avec l'équation (15).

Soit maintenant r une seconde fonction des variables indépendantes x, y, z, ... Si l'on a identiquement, c'est-à-dire pour des valeurs quelconques de ces variables,

$$(8)\qquad s=r,$$

on en conclura

$$(9)\qquad ds=dr.$$

Dans le cas particulier où la fonction r se réduit, soit à zéro, soit à une constante c, on trouve

$$dr=0;$$

et par suite l'équation

$$(10)\qquad s=0\quad \text{ou}\quad s=c$$

entraîne la suivante :

$$(11)\qquad ds=0.$$

Les équations (9) et (11) sont du nombre de celles que l'on nomme *équations différentielles*. La seconde peut être présentée sous la forme

$$(12)\quad \Phi(u,v,w,\ldots)\,du+\mathrm{X}(u,v,w,\ldots)\,dv+\Psi(u,v,w,\ldots)\,dw+\ldots=0,$$

et subsiste dans le cas même où quelques-unes des quantités u, v, w, ... se réduiraient à quelques-unes des variables indépendantes x, y, z, ... Ainsi, par exemple, on trouvera : en supposant $\mathrm{F}(x,v)=0$,

$$\Phi(x,v)\,dx+\mathrm{X}(x,v)\,dv=0;$$

en supposant $\mathrm{F}(x,y,w)=0$,

$$\Phi(x,y,w)\,dx+\mathrm{X}(x,y,w)\,dy+\Psi(x,y,w)\,dw=0;$$

etc.

Dans ces dernières équations, v est évidemment une fonction implicite de la variable x, w une fonction implicite des variables x, y; ....

De même, si l'on admet que les variables x, y, z, ..., cessant d'être indépendantes, soient liées entre elles par une équation de la forme

$$f(x, y, z, \ldots) = 0, \tag{13}$$

alors, en faisant usage des notations adoptées dans la Leçon précédente, on obtiendra l'équation différentielle

$$\varphi(x, y, z, \ldots)\,dx + \chi(x, y, z, \ldots)\,dy + \psi(x, y, z, \ldots)\,dz + \ldots = 0, \tag{14}$$

au moyen de laquelle on pourra déterminer la différentielle de l'une des variables considérée comme fonction implicite de toutes les autres. Ainsi, par exemple, on trouvera : en supposant $x^2 + y^2 = a^2$,

$$x\,dx + y\,dy = 0, \qquad dy = -\frac{x}{y}\,dx;$$

en supposant $y^2 - x^2 = a^2$,

$$y\,dy - x\,dx = 0, \qquad dy = \frac{x}{y}\,dx;$$

en supposant $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$,

$$x\,dx + y\,dy + z\,dz = 0, \qquad dz = -\frac{x}{z}\,dx - \frac{y}{z}\,dy.$$

Comme on aura d'ailleurs, dans le premier cas,

$$y = \pm\sqrt{a^2 - x^2},$$

et, dans le second,

$$y = \pm\sqrt{a^2 + x^2},$$

on conclura des formules précédentes

$$d\left(\sqrt{a^2 - x^2}\right) = -\frac{x\,dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}, \qquad d\left(\sqrt{a^2 + x^2}\right) = \frac{x\,dx}{\sqrt{a^2 + x^2}}; \tag{15}$$

ce qu'il est aisé de vérifier directement.

Lorsqu'on désigne par u la fonction $f(x, y, z, \ldots)$, les équations (13) et (14) peuvent s'écrire comme il suit :

$$u = 0, \tag{16}$$

$$du = 0. \tag{17}$$

Si les variables $x, y, z, \ldots$, au lieu d'être assujetties à une seule équation de la forme $u = 0$, étaient liées entre elles par deux équations de cette espèce, telles que

$$u = 0, \qquad v = 0, \tag{18}$$

alors on aurait en même temps les deux équations différentielles

$$du = 0, \qquad dv = 0, \tag{19}$$

à l'aide desquelles on pourrait déterminer les différentielles de deux variables considérées comme fonctions implicites de toutes les autres.

En général, si n variables $x, y, z, \ldots$ sont liées entre elles par m équations, telles que

$$u = 0, \qquad v = 0, \qquad w = 0, \qquad \ldots, \tag{20}$$

alors on aura en même temps les m équations différentielles

$$du = 0, \qquad dv = 0, \qquad dw = 0, \qquad \ldots, \tag{21}$$

à l'aide desquelles on pourra déterminer les différentielles de m variables considérées comme fonctions implicites de toutes les autres.

Les principes ci-dessus établis relativement à la différentiation des fonctions composées fournissent encore le moyen de démontrer une proposition digne de remarque, et que l'on nomme *théorème des fonctions homogènes*.

On dit qu'une fonction de plusieurs variables est *homogène* lorsque, en faisant croître ou décroître toutes les variables dans un rapport donné, on obtient pour résultat la valeur primitive de la fonction multipliée par une puissance de ce rapport. L'exposant de cette puissance est le *degré* de la fonction homogène. En conséquence, $f(x, y, z, \ldots)$ sera une fonction de $x, y, z, \ldots$ homogène et du degré a, si, t désignant une nouvelle variable, on a, quel que soit t,

$$f(tx, ty, tz, \ldots) = t^a f(x, y, z, \ldots). \tag{22}$$

Cela posé, le théorème des fonctions homogènes peut s'énoncer comme il suit.

THÉORÈME. — *Si l'on multiplie les dérivées partielles d'une fonction homogène du degré a par les variables auxquelles elles se rapportent, la somme des produits ainsi formés sera équivalente au produit qu'on obtiendrait en multipliant par a la fonction elle-même.*

Démonstration. — Soient

$$u = f(x, y, z, \ldots)$$

la fonction donnée et

$$\varphi(x, y, z, \ldots), \quad \chi(x, y, z, \ldots), \quad \psi(x, y, z, \ldots), \quad \ldots$$

ses dérivées partielles par rapport à x, à y, à z, etc. Si l'on différentie les deux membres de l'équation (22), en y considérant t comme seule variable, on aura, en vertu de la formule (5),

$$\begin{aligned}\varphi(tx, ty, tz, \ldots)x\,dt &+ \chi(tx, ty, tz, \ldots)y\,dt \\ &+ \psi(tx, ty, tz, \ldots)z\,dt + \ldots = at^{a-1}f(x, y, z, \ldots)\,dt;\end{aligned}$$

puis, en divisant par dt et posant $t = 1$, on trouvera

$$(23)\qquad \left\{\begin{aligned}&x\varphi(x, y, z, \ldots) + y\chi(x, y, z, \ldots) + z\psi(x, y, z, \ldots) + \ldots \\ &\quad = a f(x, y, z, \ldots)\end{aligned}\right.$$

ou, ce qui revient au même,

$$(24)\qquad x\frac{du}{dx} + y\frac{du}{dy} + z\frac{du}{dz} + \ldots = au.$$

Corollaire. — Pour une fonction homogène d'un degré nul, on aura

$$(25)\qquad x\frac{du}{dx} + y\frac{du}{dy} + z\frac{du}{dz} + \ldots = 0.$$

Exemples. — Si l'on pose

$$u = \frac{1}{2}(Ax^2 + By^2 + Cz^2 + 2Dyz + 2Ezx + 2Fxy),$$

l'équation (24) donnera

$$\begin{aligned}&(Ax + Fy + Ez)x + (Fx + By + Dz)y + (Ex + Dy + Cz)z \\ &\quad = Ax^2 + By^2 + Cz^2 + 2Dyz + 2Ezx + 2Fxy.\end{aligned}$$

Si l'on pose au contraire

$$u = \mathrm{L}\frac{x}{y},$$

l'équation (25) sera réduite à

$$\frac{1}{y}x - \frac{x}{y^2}y = 0.$$

DIX-HUITIÈME LEÇON.

DIFFÉRENTIELLES DES DIVERS ORDRES POUR LES FONCTIONS DE PLUSIEURS VARIABLES.

Soit

$$u = f(x, y, z, \ldots)$$

une fonction de plusieurs variables indépendantes x, y, z, ... Si l'on différentie cette fonction plusieurs fois de suite, soit par rapport à toutes les variables, soit par rapport à l'une d'elles seulement, on obtiendra plusieurs fonctions nouvelles dont chacune sera la dérivée totale ou partielle de la précédente. On pourrait même concevoir que les différentiations successives se rapportent tantôt à une variable, tantôt à une autre. Dans tous les cas, le résultat d'une, de deux, de trois, ... différentiations, successivement effectuées, est ce que l'on appelle une *différentielle totale* ou *partielle* du premier, du deuxième, du troisième, ... *ordre*. Ainsi, par exemple, en différentiant plusieurs fois de suite par rapport à toutes les variables, on formera les différentielles totales du, ddu, $dddu$, ... que l'on désigne, pour abréger, par les notations du, d^2u, d^3u, ... Au contraire, en différentiant plusieurs fois de suite par rapport à la variable x, on formera les différentielles partielles $d_x u$, $d_x d_x u$, $d_x d_x d_x u$, ... que l'on désigne par les notations $d_x u$, $d_x^2 u$, $d_x^3 u$, ... En général, si n est un nombre entier quelconque, la différentielle totale de l'ordre n sera représentée par $d^n u$, et la différentielle du même ordre relative à une seule des variables x, y, z, ... par $d_x^n u$, $d_y^n u$, $d_z^n u$, ... Si l'on différentiait deux ou plusieurs fois de suite par rapport à deux ou à plusieurs variables, on obtiendrait les différentielles partielles du second ordre, ou des ordres supérieurs, désignées par les notations $d_x d_y u$, $d_y d_x u$, $d_x d_z u$, ..., $d_x d_y d_z u$, ... Or il est facile de voir que les différentielles de cette espèce conservent les mêmes valeurs quand on intervertit l'ordre suivant lequel les différentiations relatives aux diverses variables doivent être effectuées. On aura, par exemple,

$$d_x d_y u = d_y d_x u. \tag{1}$$

C'est effectivement ce que l'on peut démontrer comme il suit.

Concevons que l'on indique par la lettre x, placée au bas de la caractéristique Δ, l'accroissement que reçoit une fonction de x, y, z, ... lorsqu'on fait croître x seule d'une quantité infiniment petite $\alpha\, dx$. On trouvera

$$\Delta_x u = f(x + \alpha\, dx, y, z, \ldots) - f(x, y, z, \ldots), \qquad d_x u = \lim \frac{\Delta_x u}{\alpha}, \tag{2}$$

$$\Delta_x d_y u = d_y(u + \Delta_x u) - d_y u = d_y \Delta_x u \tag{3}$$

et, par suite,

$$\frac{\Delta_x d_y u}{\alpha} = \frac{d_y \Delta_x u}{\alpha} = d_y \frac{\Delta_x u}{\alpha};$$

puis, en faisant converger α vers zéro, et ayant égard à la seconde des formules (2), on obtiendra l'équation (1). On établirait de la même manière les équations identiques $d_x d_z u = d_z d_x u$, $d_y d_z u = d_z d_y u$, ...

Exemple. — Si l'on pose $u = \operatorname{arc\,tang} \frac{x}{y}$, on trouvera

$$d_x u = \frac{y}{x^2 + y^2} dx, \quad d_y u = \frac{-x}{x^2 + y^2} dy, \quad d_y d_x u = d_x d_y u = \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} dx\, dy.$$

L'équation (1) étant une fois démontrée, il en résulte que, dans une expression de la forme $d_x d_y d_z \ldots u$, il est toujours permis d'échanger entre elles les variables auxquelles se rapportent deux différentiations consécutives. Or il est clair que, à l'aide d'un ou de plusieurs échanges de cette espèce, on pourra intervertir de toutes les manières possibles l'ordre des différentiations. Ainsi, par exemple, pour déduire la différentielle $d_z d_y d_x u$ de la différentielle $d_x d_y d_z u$, il suffira d'amener d'abord par deux échanges consécutifs la lettre x à la place de la lettre z, puis d'échanger les lettres y et z, afin de ramener la lettre y

à la seconde place. On peut donc affirmer qu'une différentielle de la forme $d_x d_y d_z \ldots u$ a une valeur indépendante de l'ordre suivant lequel sont effectuées les différentiations relatives aux diverses variables. Cette proposition subsiste dans le cas même où plusieurs différentiations se rapportent à l'une des variables, comme il arrive pour les différentielles $d_x d_y d_x u$, $d_x d_y d_x d_z u$, ... Lorsque cette circonstance se présente, et que deux ou plusieurs différentiations consécutives sont relatives à la variable x, on écrit, pour abréger, d_x^2 au lieu de $d_x d_x$, d_x^3 au lieu de $d_x d_x d_x$, ... Cela posé, on aura

$$d_x^2 d_y u = d_x d_y d_x u, \qquad d_x^3 d_y d_z u = d_x d_y d_x d_z d_x u = d_y d_x^3 d_z u = \ldots,$$
$$d_x^2 d_y^2 u = d_y^2 d_x^2 u, \qquad d_x d_y^2 d_z^2 u = d_x d_z^2 d_y^2 u \quad = d_y^2 d_x d_z^2 u = \ldots$$

et généralement, l, m, n, ... étant des nombres entiers quelconques,

$$(4) \qquad d_x^l d_y^m d_z^n \ldots u = d_x^l d_z^n d_y^m \ldots u = d_y^m d_x^l d_z^n \ldots u = \ldots.$$

Comme, en différentiant une fonction des variables indépendantes x, y, z, ... par rapport à l'une d'elles, on obtient pour résultat une nouvelle fonction de ces variables multipliée par la constante finie dx, ou dy, ou dz, ..., et que, dans la différentiation d'un produit, les facteurs constants passent toujours en dehors de la caractéristique d; il est clair que, si l'on effectue l'une après l'autre, sur la fonction $u = f(x, y, z, \ldots)$, l différentiations relatives à x, m différentiations relatives à y, n différentiations relatives à z, etc., la différentielle qui résultera de ces diverses opérations, savoir $d_x^l d_y^m d_z^n \ldots u$, sera le produit d'une nouvelle fonction de x, y, z, ... par les facteurs dx, dy, dz, ... élevés, le premier à la puissance $l^{\text{ième}}$, le second à la puissance $m^{\text{ième}}$, le troisième à la puissance $n^{\text{ième}}$, etc. La nouvelle fonction dont il s'agit ici est ce qu'on nomme une *dérivée partielle* de u, de l'*ordre* $l + m + n + \ldots$. Si on la désigne par $\varpi(x, y, z, \ldots)$, on aura

$$(5) \qquad d_x^l d_y^m d_z^n \ldots u = \varpi(x, y, z, \ldots)\, d_x^l\, d_y^m\, dz^n \ldots$$

et, par suite,

$$(6) \qquad \varpi(x, y, z, \ldots) = \frac{d_x^l d_y^m d_z^n \ldots u}{dx^l\, dy^m\, dz^n \ldots}.$$

Il est facile d'exprimer les différentielles totales d^2u, d^3u, ... à l'aide des différences partielles de la fonction u ou de ses dérivées partielles. En effet, on tire de la formule (12) (seizième Leçon)

$$\begin{aligned} d^2u = ddu = d_x du + d_y du + d_z du + \ldots \\ = \quad d_x(d_x u + d_y u + d_z u + \ldots) \\ + d_y(d_x u + d_y u + d_z u + \ldots) \\ + d_z(d_x u + d_y u + d_z u + \ldots) \end{aligned}$$

et, par suite,

$$(7) \quad d^2u = d_x^2 u + d_y^2 u + d_z^2 u + \ldots + 2\, d_x d_y u + 2\, d_x d_z u + \ldots + 2\, d_y d_z u + \ldots$$

ou, ce qui revient au même,

$$(8) \quad \left\{ \begin{aligned} & d^2u = \frac{d_x^2 u}{dx^2} dx^2 + \frac{d_y^2 u}{dy^2} dy^2 + \frac{d_z^2 u}{dz^2} dz^2 + \ldots \\ & \qquad + 2\frac{d_x d_y u}{dx\, dy} dx\, dy + 2\frac{d_x d_z u}{dx\, dz} dx\, dz + \ldots + 2\frac{d_y d_z u}{dy\, dz} dy\, dz + \ldots. \end{aligned} \right.$$

On obtiendrait avec la même facilité les valeurs de d^3u, d^4u, ...

Exemples :

$$d^2(xyz) = 2(x\, dy\, dz + y\, dz\, dx + z\, dx\, dy), \qquad d^3(xyz) = 6\, dx\, dy\, dz,$$
$$d^2(x^2 + y^2 + z^2 + \ldots) = 2(dx^2 + dy^2 + dz^2 + \ldots),$$
$$d^3(x^3 + y^3 + z^3 + \ldots) = 6(dx^3 + dy^3 + dz^3 + \ldots),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Pour abréger, on supprime ordinairement, dans les équations (6), (8), etc., les lettres que nous avons écrites au bas de la caractéristique d, et l'on remplace le second membre de la formule (6) par la notation

$$(9) \qquad \frac{d^{l+m+n\ldots}u}{dx^l\, dy^m\, dz^n \ldots}.$$

Alors les dérivées partielles du second ordre se trouvent représentées par

$$\frac{d^2u}{dx^2}, \quad \frac{d^2u}{dy^2}, \quad \frac{d^2u}{dz^2}, \quad \ldots, \quad \frac{d^2u}{dx\, dy}, \quad \frac{d^2u}{dx\, dz}, \quad \ldots, \quad \frac{d^2u}{dy\, dz}, \quad \ldots,$$

les dérivées partielles du troisième ordre par

$$\frac{d^3 u}{dx^3}, \quad \frac{d^3 u}{dx^2\, dy}, \quad \frac{d^3 u}{dx\, dy^2}, \quad \ldots,$$

et la valeur de $d^2 u$ se réduit à

$$(10) \quad \left\{ \begin{aligned} d^2 u = {} & \frac{d^2 u}{dx^2} dx^2 + \frac{d^2 u}{dy^2} dy^2 + \frac{d^2 u}{dz^2} dz^2 + \ldots \\ & + 2\frac{d^2 u}{dx\, dy} dx\, dy + 2\frac{d^2 u}{dx\, dz} dx\, dz + \ldots + 2\frac{d^2 u}{dy\, dz} dy\, dz + \ldots. \end{aligned} \right.$$

Mais il n'est plus permis d'effacer, dans cette valeur, les différentielles dx, dy, dz, $\ldots$, attendu que $\frac{d^2 u}{dx^2}$, $\frac{d^2 u}{dx\, dy}$, $\cdots$ ne désignent pas les quotients qu'on obtiendrait en divisant $d^2 u$ par dx^2 ou par $dx\, dy$, $\ldots$.

Si, au lieu de la fonction $u = f(x, y, z, \ldots)$, on considérait la suivante

$$(11) \qquad s = F(u, v, w, \ldots),$$

les quantités u, v, w, $\ldots$ étant elles-mêmes des fonctions quelconques des variables indépendantes x, y, z, $\ldots$, les valeurs de $d^2 s$, $d^3 s$, $\ldots$ se déduiraient sans peine des principes établis dans la dix-septième Leçon. Effectivement, en différentiant plusieurs fois la formule (11), on trouverait

$$(12) \quad \left\{ \begin{aligned} ds &= \frac{dF(u, v, w, \ldots)}{du} du + \frac{dF(u, v, w, \ldots)}{dv} dv \\ & \qquad + \frac{dF(u, v, w, \ldots)}{dw} dw + \ldots, \\ d^2 s &= \frac{d^2 F(u, v, w, \ldots)}{du^2} du^2 + \ldots \\ & \quad + 2\frac{d^2 F(u, v, w, \ldots)}{du\, dv} du\, dv + \ldots + \frac{dF(u, v, w, \ldots)}{du} d^2 u + \ldots \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned} \right.$$

Exemples :

$$d^n(u + v) = d^n u + d^n v, \qquad d^n(u - v) = d^n u - d^n v,$$
$$d^n\left(u + v\sqrt{-1}\right) = d^n u + \sqrt{-1}\, d^n v,$$
$$d^n(au + bv + cw + \ldots) = a\, d^n u + b\, d^n v + c\, d^n w + \ldots.$$

Parmi les équations que l'on peut déduire des formules (12), on doit distinguer celles qui déterminent les différentielles d'une fonction s de plusieurs variables u, v, w, $\ldots$ dont chacune est à son tour une fonction linéaire d'autres variables supposées indépendantes. Soient, en effet, a, b, c, $\ldots$, k des quantités constantes, et

$$(13) \qquad u = ax + by + cz + \ldots + k$$

une fonction linéaire des variables indépendantes x, y, z, $\ldots$. La différentielle

$$(14) \qquad du = a\, dx + b\, dy + c\, dz + \ldots$$

sera elle-même une quantité constante, et par suite les différentielles $d^2 u$, $d^3 u$, $\ldots$ se réduiront toutes à zéro. On conclut immédiatement de cette remarque que les différentielles successives des fonctions

$$F(u), \quad F(u, v), \quad F(u, v, w, \ldots)$$

conservent la même forme dans le cas où u, v, w, $\ldots$ sont considérées comme variables indépendantes, et dans le cas où u, v, w, $\ldots$ sont des fonctions linéaires des variables indépendantes x, y, z, $\ldots$. Ainsi on trouvera dans les deux cas, pour $s = F(u)$,

$$(15) \quad \left\{ \begin{aligned} & ds = F'(u)\, du, \qquad d^2 s = F''(u)\, du^2, \qquad d^3 s = F'''(u)\, du^3, \qquad \ldots, \\ & \qquad\qquad d^n s = F^{(n)}(u)\, du^n; \end{aligned} \right.$$

pour $s = F(u, v)$,

$$(16) \quad \left\{ \begin{aligned} d^n s = {} & \frac{d^n F(u, v)}{du^n} du^n + \frac{n}{1} \frac{d^n F(u, v)}{du^{n-1}\, dv} du^{n-1}\, dv + \ldots \\ & + \frac{n}{1} \frac{d^n F(u, v)}{du\, dv^{n-1}} du\, dv^{n-1} + \frac{d^n F(u, v)}{dv^n} dv^n; \end{aligned} \right.$$

pour $s = F(u)F(v)$,

$$(17)\quad \left\{ \begin{aligned} d^n s = {} & F^{(n)}(u)\,F(v)\,du^n + \frac{n}{1}F^{(n-1)}(u)\,F'(v)\,du^{n-1}\,dv + \ldots \\ & + \frac{n}{1}F'(u)\,F^{(n-1)}(v)\,du\,dv^{n-1} + F(u)\,F^{(n)}(v)\,dv^n; \end{aligned} \right.$$

etc.

Ces diverses équations subsistent, lors même que, $u, v, w, \ldots$ étant fonctions linéaires de $x, y, z, \ldots$, les constantes $a, b, c, \ldots, k$, comprises dans $u, v, w, \ldots$ deviennent imaginaires. On a, par exemple, pour $s = F(x + y\sqrt{-1})$,

$$(18)\quad \left\{ \begin{aligned} ds &= F'(x + y\sqrt{-1})(dx + \sqrt{-1}\,dy), \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ d^n s &= F^{(n)}(x + y\sqrt{-1})(dx + \sqrt{-1}\,dy)^n; \end{aligned} \right.$$

pour $s = F(x - y\sqrt{-1})$,

$$(19)\quad \left\{ \begin{aligned} ds &= F'(x - y\sqrt{-1})(dx - \sqrt{-1}\,dy), \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ d^n s &= F^{(n)}(x - y\sqrt{-1})(dx - \sqrt{-1}\,dy)^n; \end{aligned} \right.$$

pour $s = F(x + y\sqrt{-1})\,F(x - y\sqrt{-1})$,

$$(20)\quad \left\{ \begin{aligned} d^n s = {} & F^{(n)}(x + y\sqrt{-1})\,F(x - y\sqrt{-1})(dx + \sqrt{-1}\,dy)^n \\ & + \frac{n}{1}F^{(n-1)}(x + y\sqrt{-1})\,F'(x - y\sqrt{-1})(dx + \sqrt{-1}\,dy)^{n-1}(dx - \sqrt{-1}\,dy) \\ & + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & + \frac{n}{1}F'(x + y\sqrt{-1})\,F^{(n-1)}(x - y\sqrt{-1})(dx + \sqrt{-1}\,dy)(dx - \sqrt{-1}\,dy)^{n-1} \\ & + F(x + y\sqrt{-1})\,F^{(n)}(x - y\sqrt{-1})(dx - \sqrt{-1}\,dy)^n. \end{aligned} \right.$$

On obtiendrait encore avec la plus grande facilité les différen-

tielles des fonctions implicites de plusieurs variables indépendantes. Il suffirait de différentier une ou plusieurs fois les équations qui détermineraient ces mêmes fonctions, en considérant comme constantes les différentielles des variables indépendantes, et les autres différentielles comme de nouvelles fonctions de ces variables.

DIX-NEUVIÈME LEÇON.

MÉTHODES PROPRES A SIMPLIFIER LA RECHERCHE DES DIFFÉRENTIELLES TOTALES POUR LES FONCTIONS DE PLUSIEURS VARIABLES INDÉPENDANTES. VALEURS SYMBOLIQUES DE CES DIFFÉRENTIELLES.

Soit toujours

$$u = f(x, y, z, \ldots)$$

une fonction de plusieurs variables indépendantes x, y, z, ...; et désignons par

$$\varphi(x, y, z, \ldots), \quad \chi(x, y, z, \ldots), \quad \psi(x, y, z, \ldots), \quad \ldots$$

ses dérivées partielles du premier ordre relatives à x, à y, à z, ... Si l'on fait, comme dans la seizième Leçon,

$$\text{(1)} \qquad F(\alpha) = f(x + \alpha\, dx, y + \alpha\, dy, z + \alpha\, dz, \ldots),$$

puis, que l'on différentie les deux membres de l'équation (1) par rapport à la variable α, on trouvera

$$\text{(2)} \qquad \left\{\begin{aligned} F'(\alpha) = \;& \varphi(x + \alpha\, dx, y + \alpha\, dy, z + \alpha\, dz, \ldots)\, dx \\ & + \chi(x + \alpha\, dx, y + \alpha\, dy, z + \alpha\, dz, \ldots)\, dy \\ & + \psi(x + \alpha\, dx, y + \alpha\, dy, z + \alpha\, dz, \ldots)\, dz \\ & + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right.$$

Si, dans cette formule, on pose $\alpha = 0$, on obtiendra la suivante

$$\text{(3)} \qquad \left\{\begin{aligned} F'(0) = \varphi(x, y, z, \ldots)\, dx + \chi(x, y, z, \ldots)\, dy \\ + \psi(x, y, z, \ldots)\, dz + \ldots = du, \end{aligned}\right.$$

laquelle s'accorde avec l'équation (20) de la seizième Leçon. De plus, il résulte évidemment de la comparaison des équations (1) et (2) que,

en différentiant, par rapport à α, une fonction des quantités variables

$$\text{(4)} \qquad x + \alpha\, dx, \quad y + \alpha\, dy, \quad z + \alpha\, dz, \quad \ldots,$$

on obtient pour dérivée une autre fonction de ces quantités combinées d'une certaine manière avec les constantes dx, dy, dz, ... De nouvelles différentiations, relatives à la variable α, devant produire de nouvelles fonctions du même genre, nous sommes en droit de conclure que les expressions (4) seront les seules quantités variables renfermées, non seulement dans $F(\alpha)$ et $F'(\alpha)$, mais aussi dans $F''(\alpha)$, $F'''(\alpha)$, ..., et généralement dans $F^{(n)}(\alpha)$, n désignant un nombre entier quelconque. Par suite, les différences

$$F(\alpha) - F(0), \quad F'(\alpha) - F'(0), \quad F''(\alpha) - F''(0), \quad \ldots, \quad F^{(n)}(\alpha) - F^{(n)}(0)$$

seront précisément égales aux accroissements que reçoivent les fonctions de x, y, z, ... représentées par

$$F(0), \quad F'(0), \quad F''(0), \quad \ldots, \quad F^{(n)}(0),$$

lorsqu'on attribue aux variables indépendantes les accroissements infiniment petits $\alpha\, dx$, $\alpha\, dy$, $\alpha\, dz$, ... Cela posé, comme on a

$$F(0) = u,$$

on trouvera successivement, en faisant converger α vers la limite zéro,

$$\begin{aligned} F'(0) &= \lim \frac{F(\alpha) - F(0)}{\alpha} = \lim \frac{\Delta u}{\alpha} = du, \\ F''(0) &= \lim \frac{F'(\alpha) - F'(0)}{\alpha} = \lim \frac{\Delta du}{\alpha} = ddu = d^2 u, \\ F'''(0) &= \lim \frac{F''(\alpha) - F''(0)}{\alpha} = \lim \frac{\Delta d^2 u}{\alpha} = dd^2 u = d^3 u, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ F^{(n)}(0) &= \lim \frac{F^{(n-1)}(\alpha) - F^{(n-1)}(0)}{\alpha} = \lim \frac{\Delta d^{n-1} u}{\alpha} = dd^{n-1} u = d^n u. \end{aligned}$$

En résumé, on aura

$$\text{(5)} \qquad \left\{\begin{array}{lll} u = F(0), & du = F'(0), & d^2 u = F''(0), \\ d^3 u = F'''(0), & \ldots\ldots\ldots, & d^n u = F^{(n)}(0). \end{array}\right.$$

Ainsi, pour former les différentielles totales du, d^2u, ..., d^nu, il suffira de calculer les valeurs particulières que reçoivent les fonctions dérivées $F'(\alpha)$, $F''(\alpha)$, ..., $F^{(n)}(\alpha)$, dans le cas où la variable α s'évanouit.

Parmi les méthodes propres à simplifier la recherche des différentielles totales, on doit encore distinguer celles qui s'appuient sur la considération des valeurs symboliques de ces différentielles.

En Analyse, on appelle *expression symbolique* ou *symbole* toute combinaison de signes algébriques qui ne signifie rien par elle-même, ou à laquelle on attribue une valeur différente de celle qu'elle doit naturellement avoir. On nomme de même *équations symboliques* toutes celles qui, prises à la lettre, et interprétées d'après les conventions généralement établies, sont inexactes ou n'ont pas de sens, mais desquelles on peut déduire des résultats exacts, en modifiant ou altérant, selon des règles fixes, ou ces équations elles-mêmes, ou les symboles qu'elles renferment. Dans le nombre des équations symboliques qu'il est utile de connaître, on doit comprendre les équations imaginaires (*voir* l'*Analyse algébrique*, Chapitre VII) et celles que nous allons établir.

Si l'on désigne par a, b, c, ... des quantités constantes, et par l, m, n, ..., p, q, r, ... des nombres entiers, la différentielle totale de l'expression

$$a\,d_x^l d_y^m d_z^n \ldots u + b\,d_x^p d_y^q d_z^r \ldots u + \ldots \tag{6}$$

sera donnée par la formule

$$\left\{\begin{aligned} &d(a\,d_x^l d_y^m d_z^n \ldots u + b\,d_x^p d_y^q d_z^r \ldots u + \ldots) \\ &\quad = d_x(a\,d_x^l d_y^m d_z^n \ldots u + b\,d_x^p d_y^r d_z^r \ldots u + \ldots) \\ &\quad\quad + d_y(a\,d_x^l d_y^m d_z^n \ldots u + b\,d_x^p d_y^q d_z^r \ldots u + \ldots) \\ &\quad\quad + d_z(a\,d_x^l d_y^m d_z^n \ldots u + b\,d_x^p d_y^q d_z^r \ldots u + \ldots) + \ldots \\ &\quad = a\,d_x^{l+1} d_y^m d_z^n \ldots u + a\,d_x^l d_y^{m+1} d_z^n \ldots u + a\,d_x^l d_y^m d_z^{n+1} \ldots u + \ldots \\ &\quad\quad + b\,d_x^{p+1} d_y^q d_z^r \ldots u + \ldots. \end{aligned}\right. \tag{7}$$

De cette formule, réunie à l'équation (4) de la dix-huitième Leçon, on déduit immédiatement la proposition suivante :

THÉORÈME. — *Pour obtenir la différentielle totale de l'expression* (6), *il suffit de multiplier par d le produit des deux facteurs*

$$a\,d_x^l d_y^m d_z^n \ldots + b\,d_x^p d_y^q d_z^r \ldots + \ldots \quad \text{et} \quad u,$$

en supposant

$$d = d_x + d_y + d_z + \ldots,$$

et opérant comme si les notations d, d_x, d_y, d_z, ... représentaient de véritables quantités distinctes les unes des autres, de développer le nouveau produit, en écrivant, dans les différents termes, les facteurs a, b, c, ... à la première place, et la lettre u à la dernière; puis de concevoir que, dans chaque terme, les notations d_x, d_y, d_z, ... cessent de représenter des quantités, et reprennent leur signification primitive.

Exemples. — En déterminant, à l'aide de ce théorème, la différentielle totale de l'expression

$$d_x u + d_y u + d_z u + \ldots, \tag{8}$$

on obtiendra précisément la valeur de ddu ou de d^2u que fournit l'équation (7) de la Leçon précédente. En appliquant de nouveau le théorème à cette valeur de d^2u, on obtiendra celle de d^3u, et ainsi de suite.

Nota. — Lorsqu'on ne fait qu'indiquer les multiplications à l'aide desquelles on peut, d'après le théorème, calculer la différentielle totale de l'expression (6), on obtient, au lieu de l'équation (7), la formule symbolique

$$\left\{\begin{aligned} &d(a\,d_x^l d_y^m d_z^n \ldots u + b\,d_x^p d_y^q d_z^r \ldots u + \ldots) \\ &\quad = (a\,d_x^l d_y^m d_z^n \ldots + b\,d_x^p d_y^q d_z^r \ldots + \ldots)(d_x + d_y + d_z + \ldots)u. \end{aligned}\right. \tag{9}$$

Comme, dans la formule (9), les notations d_x, d_y, d_z, ... sont employées pour représenter des différentielles, cette formule, prise à la lettre, n'a aucun sens; mais elle redevient exacte dès qu'on a développé son second membre à l'aide des règles ordinaires de la multiplication algébrique, et en opérant comme si d_x, d_y, d_z, ... étaient de véritables quantités.

Lorsqu'à l'expression (6) on substitue l'expression (8), et que l'on différentie cette dernière plusieurs fois de suite, on obtient par les mêmes procédés les valeurs symboliques des différentielles totales d^2u, d^3u, ..., savoir

$$(d_x+d_y+d_z+\ldots)(d_x+d_y+d_z+\ldots)u,$$
$$(d_x+d_y+d_z+\ldots)(d_x+d_y+d_z+\ldots)(d_x+d_y+d_z+\ldots)u,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

En joignant à ces valeurs symboliques celle de du, puis écrivant, pour abréger,

$$(d_x+d_y+d_z+\ldots)^2 \quad \text{au lieu de} \quad (d_x+d_y+d_z+\ldots)(d_x+d_y+d_z+\ldots),$$
$$(d_x+d_y+d_z+\ldots)^3 \quad \text{au lieu de} \quad (d_x+d_y+d_z+\ldots)(d_x+d_y+d_z+\ldots)(d_x+d_y+d_z+\ldots),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

on formera les équations symboliques

$$(10)\qquad \left\{\begin{aligned} du &= (d_x+d_y+d_z+\ldots)u,\\ d^2u &= (d_x+d_y+d_z+\ldots)^2u,\\ d^3u &= (d_x+d_y+d_z+\ldots)^3u,\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{aligned}\right.$$

et l'on aura généralement, n désignant un nombre entier quelconque,

$$(11)\qquad d^nu = (d_x+d_y+d_z+\ldots)^nu.$$

Soit maintenant

$$(12)\qquad s = F(u, v, w, \ldots),$$

u, v, w, ... étant des fonctions des variables indépendantes x, y, z, ... On trouvera encore

$$(13)\qquad d^ns = (d_x+d_y+d_z+\ldots)^ns.$$

Il est très facile de développer le second membre de cette dernière équation, dans le cas particulier où l'on suppose u fonction de x seule, v fonction de y seule, w fonction de z seule, etc. D'ailleurs, pour passer de ce cas particulier au cas général, il suffira évidemment de remplacer

$$\begin{array}{lllllllll} d_xu, & d_x^2u, & d_x^3u, & \ldots & \text{par} & du, & d^2u, & d^3u, & \ldots,\\ d_yv, & d_y^2v, & \ldots, & \ldots & \text{par} & dv, & d^2v, & \ldots, & \ldots,\\ \multicolumn{9}{l}{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,} \end{array}$$

c'est-à-dire d'effacer les lettres x, y, z, ... placées au bas de la caractéristique d. Donc il sera facile, dans tous les cas, de tirer de la formule (13) la valeur de d^ns. Prenons, pour fixer les idées, $s = uv$. En opérant comme on vient de le dire, on trouvera successivement

$$(14)\qquad d^n(uv) = u\,d_y^nv + \frac{n}{1}d_xu\,d_y^{n-1}v + \frac{n(n-1)}{1.2}d_x^2u\,d_y^{n-2}v + \ldots + \frac{n}{1}d_yv\,d_x^{n-1}u + v\,d_x^nu,$$

$$(15)\qquad d^n(uv) = u\,d^nv + \frac{n}{1}du\,d^{n-1}v + \frac{n(n-1)}{1.2}d^2u\,d^{n-2}v + \ldots + \frac{1}{n}dv\,d^{n-1}u + v\,d^nu.$$

La dernière formule subsiste, quelles que soient les valeurs de u, v et x, y, et dans le cas même où u, v se réduisent à deux fonctions de x.

Exemple :

$$d^n\left(\frac{e^{ax}}{x}\right) = \frac{a^ne^{ax}}{x}\left[1 - \frac{n}{ax} + \frac{n(n-1)}{a^2x^2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{a^3x^3} + \ldots \pm \frac{n(n-1)\ldots3.2.1}{a^nx^n}\right]dx^n.$$

VINGTIÈME LEÇON.

MAXIMA ET MINIMA DES FONCTIONS DE PLUSIEURS VARIABLES.

Lorsqu'une fonction de plusieurs variables indépendantes x, y, z, ... atteint une valeur particulière, mais réelle, qui surpasse toutes les valeurs réelles voisines, c'est-à-dire toutes celles qu'on obtiendrait en faisant varier x, y, z, ... en plus ou en moins de quantités très petites, cette valeur particulière de la fonction est ce qu'on appelle un *maximum*.

Lorsqu'une valeur particulière d'une fonction de x, y, z, ... est réelle et inférieure à toutes les valeurs réelles voisines, elle prend le nom de *minimum*.

La recherche des maxima et minima des fonctions de plusieurs variables se ramène facilement à la recherche des maxima et minima des fonctions d'une seule variable. En effet, supposons que

$$u = f(x, y, z, \ldots)$$

devienne un maximum pour certaines valeurs particulières des variables x, y, z, ... En attribuant à ces valeurs particulières des accroissements infiniment petits Δx, Δy, Δz, ... choisis de manière que l'expression

$$f(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z, \ldots)$$

reste réelle, on devra trouver constamment

$$(1) \qquad f(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z, \ldots) < f(x, y, z, \ldots).$$

D'ailleurs, pour que les accroissements Δx, Δy, Δz, ... deviennent

infiniment petits, il suffit de prendre

$$\Delta x = \alpha\, dx, \quad \Delta y = \alpha\, dy, \quad \Delta z = \alpha\, dz, \quad \ldots,$$

dx, dy, dz pouvant être des quantités finies quelconques, et α désignant une quantité positive ou négative, mais infiniment petite. Par conséquent, dans l'hypothèse admise, on aura

$$(2) \qquad f(x + \alpha\, dx, y + \alpha\, dy, z + \alpha\, dz, \ldots) < f(x, y, z, \ldots),$$

quelles que soient les valeurs attribuées à dx, dy, dz, ..., pourvu qu'on les choisisse de manière à rendre réel le premier membre de la formule (2). Or, si l'on fait, pour abréger,

$$(3) \qquad f(x + \alpha\, dx, y + \alpha\, dy, z + \alpha\, dz, \ldots) = F(\alpha),$$

la formule (2) se trouvera réduite à la suivante :

$$(4) \qquad F(\alpha) < F(0).$$

Celle-ci devant subsister, quel que soit le signe de α, il en résulte que, si α seule varie, $F(\alpha)$, considérée comme fonction de cette unique variable, deviendra toujours un maximum pour $\alpha = 0$.

On reconnaîtra de même que, si $f(x, y, z, \ldots)$ devient un minimum pour certaines valeurs particulières attribuées à x, y, z, ..., la valeur de $F(\alpha)$ sera toujours un minimum pour $\alpha = 0$.

Réciproquement, si l'on attribue à x, y, z, ... des valeurs telles que $F(\alpha)$ devienne un maximum ou un minimum pour $\alpha = 0$, quelles que soient dx, dy, dz, ..., ces valeurs produiront évidemment un maximum ou un minimum de la fonction $f(x, y, z, \ldots)$.

Observons maintenant que, si les deux fonctions $F(\alpha)$, $F'(\alpha)$ sont l'une et l'autre continues par rapport à α, dans le voisinage de la valeur particulière $\alpha = 0$, cette valeur ne pourra fournir un maximum ou un minimum de la première fonction qu'autant qu'elle fera évanouir la seconde (*voir* la septième Leçon), c'est-à-dire qu'autant que l'on aura

$$(5) \qquad F'(0) = 0.$$

Comme on aura d'ailleurs [*voir* la formule (20) de la seizième Leçon]

$$F'(0) = du, \tag{6}$$

l'équation (5) pourra être présentée sous la forme

$$du = 0. \tag{7}$$

Enfin, comme les fonctions $F(\alpha)$ et $F'(\alpha)$ sont ce que deviennent u et du, quand on y remplace x par $x + \alpha\,dx$, y par $y + \alpha\,dy$, z par $z + \alpha\,dz$, ..., il est clair que, si ces deux fonctions sont discontinues par rapport à α, dans le voisinage de la valeur particulière $\alpha = 0$, les deux expressions u et du, considérées comme fonctions des variables $x, y, z, \ldots$, seront discontinues par rapport à ces variables dans le voisinage des valeurs particulières qui leur sont attribuées. En rapprochant ces remarques de ce qui a été dit plus haut, nous devons conclure que les seules valeurs de x, y, z, ... propres à fournir des maxima ou des minima de la fonction u, sont celles qui rendent les fonctions u et du discontinues, ou bien encore celles qui vérifient l'équation (7), quelles que soient les constantes finies dx, dy, dz, ... Ces principes étant admis, il sera facile de résoudre la question suivante :

Problème. — *Trouver les maxima et les minima d'une fonction de plusieurs variables.*

Solution. — Soit $u = f(x, y, z, \ldots)$ la fonction proposée. On cherchera d'abord les valeurs de x, y, z, ... qui rendent la fonction u ou du discontinue, et parmi lesquelles on doit compter celles que l'on déduit de la formule

$$du = \pm\infty. \tag{8}$$

On cherchera, en second lieu, les valeurs de $x, y, z, \ldots$ qui vérifient l'équation (7), quelles que soient les constantes finies $dx, dy, dz, \ldots$. Cette équation, pouvant être mise sous la forme

$$\frac{du}{dx}dx + \frac{du}{dy}dy + \frac{du}{dz}dz + \ldots = 0, \tag{9}$$

entraîne évidemment les suivantes

$$\frac{du}{dx} = 0, \quad \frac{du}{dy} = 0, \quad \frac{du}{dz} = 0, \quad \ldots, \tag{10}$$

dont on obtient la première en posant $dx = 1$, $dy = 0$, $dz = 0$, ...; la seconde en posant $dx = 0$, $dy = 1$, $dz = 0$, ... Remarquons, en passant, que, le nombre des équations (10) étant égal à celui des inconnues $x, y, z, \ldots$, on n'en déduira ordinairement pour ces inconnues qu'un nombre limité de valeurs.

Concevons à présent que l'on considère en particulier un des systèmes de valeurs que les précédentes recherches fournissent pour les variables $x, y, z, \ldots$. La valeur correspondante de la fonction

$$f(x, y, z, \ldots)$$

sera un maximum, si, pour de très petites valeurs numériques de α et pour des valeurs quelconques de $dx, dy, dz, \ldots$, la différence

$$f(x + \alpha\,dx, y + \alpha\,dy, z + \alpha\,dz, \ldots) - f(x, y, z, \ldots) \tag{11}$$

est constamment négative. Au contraire,

$$f(x, y, z, \ldots)$$

deviendra un minimum, si cette différence est constamment positive. Enfin, si cette différence passe du positif au négatif, tandis que l'on change ou le signe de α, ou les valeurs de $dx, dy, dz, \ldots$, la valeur trouvée de

$$f(x, y, z, \ldots)$$

ne sera plus ni un maximum ni un minimum.

Nota. — La nature de la fonction u peut être telle que, à une infinité de systèmes différents de valeurs attribuées à x, y, z, ... correspondent des valeurs de u égales entre elles, mais supérieures ou inférieures à toutes les valeurs voisines, et dont chacune soit en conséquence une sorte de maximum ou de minimum. Lorsque cette circonstance a lieu pour des systèmes dans le voisinage desquels les fonctions u et du restent continues, ces systèmes vérifient certainement les équations (10). Ces équations peuvent donc quelquefois admettre une infinité de solutions. C'est ce qui arrive toujours quand elles se déduisent en partie les unes des autres.

Il est facile de reconnaître les avantages que peut offrir la considération des différentielles totales des divers ordres, dans la recherche des maxima et minima des fonctions de plusieurs variables. En effet, d'après ce qui a été dit ci-dessus, pour que certaines valeurs attribuées aux variables indépendantes $x, y, z, \ldots$ produisent un maximum ou minimum de la fonction

$$u = f(x, y, z, \ldots),$$

il est nécessaire et il suffit que la valeur correspondante de

$$F(\alpha) = f(x + \alpha\, dx, y + \alpha\, dy, z + \alpha\, dz, \ldots)$$

devienne toujours un maximum ou un minimum, en vertu de la supposition $\alpha = 0$. Or $F(\alpha)$ deviendra effectivement un maximum ou un minimum pour $\alpha = 0$, quelles que soient d'ailleurs les différentielles $dx, dy, dz, \ldots$, si, pour toutes les valeurs possibles de ces différentielles, la première des quantités $F'(0)$, $F''(0)$, $F'''(0)$, ... qui ne sera pas nulle correspond à un indice pair, et conserve toujours le même signe (*voir* la septième Leçon). Ajoutons que $F(0)$ sera un maximum, si la quantité dont il s'agit est toujours négative, et un minimum, si elle est toujours positive. Lorsque celle des quantités $F'(0)$, $F''(0)$, $F'''(0)$ qui cesse la première de s'évanouir correspond à un indice impair, pour toutes les valeurs possibles de $dx, dy, dz, \ldots$, ou seulement pour des valeurs particulières de ces mêmes différentielles; ou bien encore, lorsque cette quantité est tantôt positive, tantôt négative; alors $F(0)$ ne peut plus être ni un maximum, ni un minimum. Si maintenant on a égard aux équations (5) de la dix-neuvième Leçon, savoir

$$F(0) = u, \qquad F'(0) = du, \qquad F''(0) = d^2u, \qquad \ldots,$$

on déduira des remarques que nous venons de faire la proposition suivante :

Théorème I. — *Soit $u = f(x, y, z, \ldots)$ une fonction donnée des variables indépendantes $x, y, z, \ldots$. Pour décider si un système de valeurs de x, $y, z, \ldots$, propre à vérifier les formules* (10), *produit un maximum ou un minimum de la fonction u, on calculera les valeurs de d^2u, d^3u, d^4u, ... qui correspondent à ce système, et qui seront évidemment des polynômes dans lesquels il n'y aura plus d'arbitraire que les différentielles $dx, dy, dz, \ldots$. Soit*

$$(12) \qquad d^n u = \frac{d^n u}{dx^n}\, dx^n + \frac{d^n u}{dy^n}\, dy^n + \ldots + \frac{n}{1}\, \frac{d^n u}{dx^{n-1}\, dy}\, dx^{n-1}\, dy + \ldots,$$

le premier de ces polynômes qui ne s'évanouira pas, n désignant un nombre entier qui pourra dépendre des valeurs attribuées aux différentielles $dx, dy, dz, \ldots$. Si, pour toutes les valeurs possibles de ces différentielles, n est un nombre pair et $d^n u$ une quantité positive, la valeur proposée de u sera un minimum. Elle sera un maximum, si, n étant toujours pair, $d^n u$ reste toujours négative. Enfin, si le nombre n est quelquefois impair, ou si la différentielle $d^n u$ est tantôt positive, tantôt négative, la valeur calculée de u ne sera ni un maximum, ni un minimum.

Nota. — Le théorème précédent subsiste, en vertu des principes ci-dessus établis, toutes les fois que les fonctions $F(\alpha)$, $F'(\alpha)$, ..., $F^{(n)}(\alpha)$ sont continues par rapport à α, dans le voisinage de la valeur particulière $\alpha = 0$, ou, ce qui revient au même, toutes les fois que u, du, d^2u, ..., $d^n u$ sont continues, par rapport aux variables $x, y, z, \ldots$, dans le voisinage des valeurs particulières attribuées à ces mêmes variables.

Corollaire I. — Concevons que, pour appliquer le théorème, on forme d'abord la valeur de l'expression

$$(13) \qquad d^2u = \frac{d^2u}{dx^2}\, dx^2 + \frac{d^2u}{dy^2}\, dy^2 + \ldots + 2\, \frac{d^2u}{dx\, dy}\, dx\, dy + \ldots,$$

en substituant les valeurs de x, y, z, ... tirées des formules (10) dans les fonctions dérivées $\frac{d^2u}{dx^2}$, $\frac{d^2u}{dy^2}$, ..., $\frac{d^2u}{dx\,dy}$, ... On trouvera zéro pour résultat, si toutes ces dérivées s'évanouissent. Dans l'hypothèse contraire, d^2u sera une fonction homogène des quantités arbitraires dx, dy, dz, ...; et, si l'on fait alors varier ces quantités, il arrivera de trois choses l'une : ou la différentielle d^2u conservera constamment le même signe, sans jamais s'évanouir, ou elle s'évanouira pour certaines valeurs de dx, dy, dz, ..., et reprendra le même signe toutes les fois qu'elle cessera d'être nulle, ou elle sera tantôt positive et tantôt négative. La valeur proposée de u sera toujours un maximum ou un minimum dans le premier cas, quelquefois dans le second, jamais dans le troisième. Ajoutons que l'on obtiendra, dans le second cas, un maximum ou un minimum, si, pour chacun des systèmes de valeurs de dx, dy, dz, ... propres à vérifier l'équation

$$d^2u = 0,$$

la première des différentielles d^3u, d^4u, ... qui ne s'évanouit pas est toujours d'ordre pair et affectée du même signe que celles des valeurs de d^2u qui diffèrent de zéro.

Corollaire II. — Si la substitution des valeurs attribuées à x, y, z, ... réduisait à zéro toutes les dérivées du second ordre, alors, d^2u étant identiquement nulle, il ne pourrait y avoir ni maximum, ni minimum, à moins que la même substitution ne fît encore évanouir d^3u, en réduisant à zéro toutes les dérivées du troisième ordre.

Corollaire III. — Si la substitution des valeurs attribuées à x, y, z, ... faisait évanouir toutes les dérivées du second ordre et du troisième, on aurait identiquement

$$d^2u = 0, \qquad d^3u = 0,$$

et il faudrait recourir à la première des différentielles d^4u, d^5u, ... qui ne serait pas identiquement nulle. Si cette différentielle était

d'ordre impair, il n'y aurait ni maximum, ni minimum. Si elle était d'ordre pair ou de la forme

$$(14)\quad d^{2m}u = \frac{d^{2m}u}{dx^{2m}}dx^{2m} + \frac{d^{2m}u}{dy^{2m}}dy^{2m} + \ldots + \frac{2m}{1}\frac{d^{2m}u}{dx^{2m-1}dy}dx^{2m-1}dy + \ldots,$$

il pourrait arriver de trois choses l'une : ou la différentielle dont il s'agit conserverait constamment le même signe, pendant que l'on ferait varier dx, dy, dz, ... sans jamais s'évanouir; ou bien elle s'évanouirait pour certaines valeurs de dx, dy, dz, ..., et reprendrait le même signe toutes les fois qu'elle cesserait d'être nulle; ou elle serait tantôt positive, tantôt négative. La valeur proposée de u serait toujours un maximum ou un minimum dans le premier cas, quelquefois dans le second, jamais dans le troisième. De plus, afin de décider, dans le second cas, s'il y a maximum ou minimum, il faudrait, pour chaque système de valeurs de dx, dy, dz, ... propres à vérifier l'équation

$$d^{2m}u = 0,$$

chercher parmi les différentielles d'un ordre supérieur à $2m$, celle qui la première cesse de s'évanouir, et voir si cette différentielle est toujours d'ordre pair et affectée du même signe que les valeurs de $d^{2m}u$ qui diffèrent de zéro.

Il est essentiel d'observer que la valeur de $d^{2m}u$, donnée par la formule (14), étant une fonction entière, et par conséquent continue, des quantités dx, dy, dz, ..., ne saurait passer du positif au négatif, tandis que ces quantités varient, sans devenir nulles dans l'intervalle. Remarquons en outre que, si la quantité u était une fonction implicite des variables x, y, z, ..., ou si quelques-unes de ces variables devenaient fonctions implicites de toutes les autres, chacune des quantités du, d^2u, d^3u, ... se trouverait déterminée par le moyen d'une ou de plusieurs équations différentielles, en fonction des différentielles des variables indépendantes.

Exemples. — Pour montrer une application des principes ci-dessus établis, supposons

$$u = Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F. \tag{15}$$

La fonction u et ses différentielles du premier et du second ordre, savoir

$$du = 2(Ax + By + D)\,dx + 2(Bx + Cy + E)\,dy \tag{16}$$

et

$$d^2u = 2(A\,dx^2 + 2B\,dx\,dy + C\,dy^2), \tag{17}$$

resteront continues pour des valeurs finies quelconques des variables x, y. De plus, comme d^2u sera une quantité constante, d^3u, d^4u, ... s'évanouiront. Par suite, les seules valeurs de x et y qui pourront produire un maximum ou un minimum de la fonction u seront celles que déterminent les équations

$$Ax + By + D = 0, \qquad Bx + Cy + E = 0, \tag{18}$$

savoir

$$x = \frac{BE - CD}{AC - B^2}, \qquad y = \frac{BD - AE}{AC - B^2}. \tag{19}$$

D'autre part, la valeur de d^2u, fournie par l'équation (17), pourra être présentée sous la forme

$$d^2u = 2A\left[\left(dx + \frac{B}{A}dy\right)^2 + (AC - B^2)\left(\frac{1}{A}dy\right)^2\right], \tag{20}$$

à moins que la constante A ne s'évanouisse. Cela posé, il est clair que la fonction (15) admettra un maximum ou un minimum, si la condition

$$AC - B^2 > 0 \tag{21}$$

est remplie, savoir un minimum, dans le cas où l'on aura

$$A > 0, \qquad AC - B^2 > 0, \tag{22}$$

et un maximum dans le cas où l'on aura

$$A < 0, \qquad AC - B^2 > 0. \tag{23}$$

En effet, les équations (19) fourniront, dans l'un et l'autre cas, des valeurs finies et déterminées de x, y; et, de plus, l'expression (20) restera positive dans le premier cas, négative dans le second, quelles que soient les valeurs attribuées aux différentielles dx, dy. Ajoutons que la condition (21) ne peut subsister qu'autant que la constante A diffère de zéro.

Concevons maintenant que les constantes A, B, C vérifient la condition

$$AC - B^2 < 0, \tag{24}$$

qui se réduit, quand A s'évanouit, à

$$B^2 > 0. \tag{25}$$

Les équations (19) fourniront encore des valeurs finies et déterminées de x, y. Mais l'expression (17) ou (20) changera de signe, tandis qu'on changera les valeurs des différentielles dx, dy. En effet, si l'on a

$$A = 0, \qquad B^2 > 0, \tag{26}$$

l'expression (17), réduite au produit

$$2(2B\,dx + C\,dy)\,dy, \tag{27}$$

changera de signe avec dx, lorsque dy différera très peu de zéro; et, si l'on a

$$A^2 > 0, \qquad AC - B^2 < 0, \tag{28}$$

l'expression (20) acquerra deux valeurs de signes contraires quand on prendra successivement

$$dx + \frac{B}{A}dy = 0, \qquad dy^2 > 0 \tag{29}$$

et

$$\left(dx + \frac{B}{A}dy\right)^2 > 0, \qquad dy = 0. \tag{30}$$

Il suit de ces remarques que, si la condition (24) est satisfaite, la fonction (15) n'admettra plus ni maximum, ni minimum.

Concevons enfin que les constantes A, B, C vérifient la condition

$$AC - B^2 = 0. \tag{31}$$

Si l'on n'a pas en même temps

$$BE - CD = 0 \quad \text{et} \quad AE - BD = 0, \tag{32}$$

l'une des équations (19) fournira une valeur infinie de x ou de y, et la fonction (15) n'admettra point encore de maximum ou de minimum. Si, au contraire, les conditions (31) et (32) sont satisfaites, on devra distinguer le cas où l'on aura

$$B^2 > 0 \tag{33}$$

et celui où l'on aura

$$B^2 = 0. \tag{34}$$

Dans le premier cas, les formules (31) et (33) donneront

$$AC > 0, \quad A^2C^2 > 0, \tag{35}$$

par conséquent

$$A^2 > 0 \quad \text{et} \quad C^2 > 0; \tag{36}$$

et l'on tirera des formules (31), (32)

$$C = \frac{B^2}{A}, \quad E = \frac{B}{A}D, \tag{37}$$

puis de l'équation (15)

$$u = A\left(x + \frac{B}{A}y\right)^2 + 2D\left(x + \frac{B}{A}y\right) + F \tag{38}$$

ou, ce qui revient au même,

$$u = A\left(x + \frac{B}{A}y + \frac{D}{A}\right)^2 + \frac{AF - D^2}{A}. \tag{39}$$

Cela posé, toutes les valeurs de x et y propres à vérifier la formule

$$x + \frac{B}{A}y + \frac{D}{A} = 0 \tag{40}$$

produiront évidemment des valeurs de la fonction u égales entre elles, ainsi qu'au rapport

$$\frac{AF - D^2}{A},$$

et dont chacune pourra être considérée comme un minimum si l'on a $A > 0$, ou comme un maximum si l'on a $A < 0$.

Lorsque la condition (34) sera vérifiée en même temps que les conditions (31) et (32), les trois produits

$$AC, \quad AE, \quad CD$$

s'évanouiront, et par suite on aura nécessairement ou

$$A = 0, \quad B = 0, \quad C = 0, \tag{41}$$

$$u = 2Dx + 2Ey + F, \tag{42}$$

ou

$$A = 0, \quad B = 0, \quad D = 0, \tag{43}$$

$$u = Cy^2 + 2Ey + F, \tag{44}$$

ou bien

$$B = 0, \quad C = 0, \quad E = 0, \tag{45}$$

$$u = Ax^2 + 2Dx + F. \tag{46}$$

Or il est clair que la fonction u, déterminée par l'équation (42), n'admet ni maximum ni minimum, tandis que les fonctions (44) et (46) admettent, la première une infinité de maxima ou de minima égaux à $\frac{CF - E^2}{C}$ et correspondants à une valeur finie de y, mais à des valeurs quelconques de x, la seconde une infinité de maxima ou de minima égaux à $\frac{AF - D^2}{A}$ et correspondants à une valeur finie de x, mais à des valeurs quelconques de y.

Pour montrer une seconde application des formules précédemment obtenues, prenons

$$(47)\qquad u=(cy-bz+l)^2+(az-cx+m)^2+(bx-ay+n)^2,$$

a, b, c, l, m, n désignant des constantes dont les trois premières diffèrent de zéro. Les équations (10) donneront seulement

$$(48)\qquad \frac{cy-bz+l}{a}=\frac{az-cx+m}{b}=\frac{bx-ay+n}{c}.$$

D'ailleurs à chacun des systèmes de valeurs de x, y, z qui vérifieront les équations (48), correspondront des valeurs positives de d^2u, égales à celles que détermine la formule

$$(49)\qquad d^2u=(c\,dy-b\,dz)^2+(a\,dz-c\,dx)^2+(b\,dx-a\,dy)^2.$$

Donc les valeurs correspondantes de u, qui seront toutes égales entre elles et au rapport

$$(50)\qquad \frac{(al+bm+cn)^2}{a^2+b^2+c^2},$$

pourront être considérées comme représentant chacune un minimum de la fonction proposée.

Nous terminerons cette Leçon en établissant une proposition digne de remarque et dont voici l'énoncé :

THÉORÈME II. — *Soit $f(z)$ une fonction de z qui se présente sous forme réelle, de telle sorte que, x, y, R, T désignant des quantités réelles, l'équation*

$$(51)\qquad f(x+y\sqrt{-1})=\mathrm{R}(\cos\mathrm{T}+\sqrt{-1}\sin\mathrm{T})$$

entraîne toujours la suivante :

$$(52)\qquad f(x-y\sqrt{-1})=\mathrm{R}(\cos\mathrm{T}-\sqrt{-1}\sin\mathrm{T}).$$

Si la fonction $f(z)$ et ses dérivées des divers ordres restent finies et continues, pour des valeurs finies quelconques réelles ou imaginaires de z, si d'ailleurs ces dérivées, savoir

$$(53)\qquad f'(z),\quad f''(z),\quad f'''(z),\quad \ldots,$$

ne peuvent s'évanouir toutes à la fois, le module R n'admettra pas de valeur minimum qui ne se réduise à zéro.

Démonstration. — Les valeurs minima du module R, s'il en existe, seront évidemment les racines carrées du produit

$$(54)\qquad s=f(x+y\sqrt{-1})\,f(x-y\sqrt{-1})=\mathrm{R}^2.$$

Cela posé, concevons que le module R admette un minimum correspondant à une certaine valeur réelle ou imaginaire de

$$(55)\qquad z=x+y\sqrt{-1},$$

et soit, pour cette même valeur, $f^{(n)}(z)$ la première des dérivées de $f(z)$ qui ne s'évanouira pas. Comme on aura nécessairement

$$(56)\qquad \begin{cases} f'(x+y\sqrt{-1})=0,\quad f''(x+y\sqrt{-1})=0,\quad \ldots,\\ \qquad f^{(n-1)}(x+y\sqrt{-1})=0,\end{cases}$$

et, par suite,

$$(57)\qquad \begin{cases} f'(x-y\sqrt{-1})=0,\quad f''(x-y\sqrt{-1})=0,\quad \ldots,\\ \qquad f^{(n-1)}(x-y\sqrt{-1})=0,\end{cases}$$

si, dans la formule (20) de la dix-huitième Leçon, on remplace F par f, cette formule donnera, pour la valeur de z en question,

$$(58)\qquad ds=0,\quad d^2s=0,\quad d^3s=0,\quad \ldots,\quad d^{n-1}s=0,$$

$$(59)\qquad \begin{cases} d^ns=f^{(n)}(x+y\sqrt{-1})\,f(x-y\sqrt{-1})(dx+dy\sqrt{-1})^n\\ \qquad +f(x+y\sqrt{-1})\,f^{(n)}(x-y\sqrt{-1})(dx-dy\sqrt{-1})^n;\end{cases}$$

puis, en représentant par r, ρ, R_n les modules des expressions imaginaires

$$x+y\sqrt{-1},\quad dx+dy\sqrt{-1},\quad f^{(n)}(x+y\sqrt{-1}),$$

et posant en conséquence

$$(60)\qquad \begin{cases} x + y\sqrt{-1} = r(\cos t + \sqrt{-1}\sin t), \\ dx + dy\sqrt{-1} = \rho(\cos\tau + \sqrt{-1}\sin\tau), \end{cases}$$

$$(61)\qquad f^{(n)}(x + y\sqrt{-1}) = \mathrm{R}_n(\cos \mathrm{T}_n + \sqrt{-1}\sin \mathrm{T}_n),$$

on tirera de l'équation (59)

$$(62)\qquad d^n s = 2\mathrm{R}\mathrm{R}_n \cos(\mathrm{T}_n - \mathrm{T} + n\tau).$$

Or, si la valeur minimum de R n'était pas nulle, l'expression (62) serait évidemment la première des différentielles ds, d^2s, d^3s, ... qui ne s'évanouirait pas, et cette expression devrait rester toujours négative, quelles que fussent les valeurs attribuées aux différentielles dx, dy, et par conséquent à l'angle τ. Mais il arrive, au contraire, que, dans le cas où R diffère de zéro, ainsi que R_n, le second membre de la formule (62) change de signe, tandis que l'on remplace τ par $\tau + \frac{(2m+1)\pi}{n}$, m étant un nombre entier quelconque. Donc chaque valeur minimum de s ou de R ne saurait différer de zéro.

Nota. — Lorsque le module R de la fonction

$$(63)\qquad f(z) = \mathrm{R}(\cos \mathrm{T} + \sqrt{-1}\sin \mathrm{T})$$

devient infini pour des valeurs infiniment grandes du module R de la variable z, on peut affirmer que R admet une valeur minimum ou des valeurs minima correspondantes à des valeurs finies de r, et il résulte du théorème II que l'équation

$$(64)\qquad f(z) = 0$$

admet une ou plusieurs racines réelles ou imaginaires. On se trouve ainsi ramené au théorème I de la quatorzième Leçon.

VINGT ET UNIÈME LEÇON.

DES CONDITIONS QUI DOIVENT ÊTRE REMPLIES POUR QU'UNE DIFFÉRENTIELLE TOTALE NE CHANGE PAS DE SIGNE, TANDIS QUE L'ON CHANGE LES VALEURS ATTRIBUÉES AUX DIFFÉRENTIELLES DES VARIABLES INDÉPENDANTES.

D'après ce qu'on a vu dans la Leçon précédente, si l'on désigne par u une fonction des variables indépendantes x, y, z, ..., et si l'on fait abstraction des valeurs de ces variables qui rendent discontinue l'une des fonctions u, du, d^2u, ..., la fonction u ne pourra devenir un maximum ou un minimum que dans le cas où l'une des différentielles totales d^2u, d^4u, d^6u, ..., savoir : la première de celles qui ne seront pas constamment nulles conservera le même signe pour toutes les valeurs possibles des quantités arbitraires dx, dy, dz, ..., ou du moins pour les valeurs de ces quantités qui ne la réduiront pas à zéro. Ajoutons que, si quelques systèmes de valeurs de dx, dy, dz, ... sont propres à faire évanouir la différentielle totale dont il s'agit, chacun de ces systèmes devra changer une autre différentielle totale d'ordre pair en une quantité affectée du signe que conserve la première différentielle, tant qu'elle ne s'évanouit pas. D'ailleurs les différentielles d^2u, d^4u, d^6u, ... se réduisent, pour des valeurs données de x, y, z, ..., à des fonctions entières et homogènes des quantités arbitraires dx, dy, dz, ... De plus, si l'on appelle r, s, t, ... les rapports de la première, de la seconde, de la troisième, ... de ces quantités, à la dernière d'entre elles, la différentielle

$$(1)\qquad \begin{cases} d^{2m}u = \dfrac{d^{2m}u}{dx^{2m}}dx^{2m} + \dfrac{d^{2m}u}{dy^{2m}}dy^{2m} + \dfrac{d^{2m}u}{dz^{2m}}dz^{2m} + \dots \\ \qquad\qquad + \dfrac{2m}{1}\dfrac{d^{2m}u}{dx^{2m-1}dy}dx^{2m-1}dy + \dots \end{cases}$$

sera évidemment affectée du même signe que la fonction entière de r, s, t, ... à laquelle on parvient en divisant $d^{2m}u$ par la puissance $2m$ de la dernière des quantités dx, dy, dz, ..., c'est-à-dire du même signe que le polynôme

$$(2)\qquad \frac{d^{2m}u}{dx^{2m}}r^{2m}+\frac{d^{2m}u}{dy^{2m}}s^{2m}+\frac{d^{2m}u}{dz^{2m}}t^{2m}+\ldots+\frac{2m}{1}\,\frac{d^{2m}u}{d^{2m-1}\,dy}r^{2m-1}s+\ldots.$$

En substituant un polynôme de cette espèce à chaque différentielle d'ordre pair, on reconnaîtra que la recherche des maxima et minima exige la solution des questions suivantes.

Problème I. — *Trouver les conditions qui doivent être remplies, pour qu'une fonction entière des quantités r, s, t, ... ne change pas de signe, tandis que ces quantités varient.*

Solution. — Soit $F(r, s, t, \ldots)$ la fonction donnée, et supposons d'abord les quantités r, s, t, ... réduites à une seule r. Pour que la fonction $F(r)$ ne change jamais de signe, il sera nécessaire et il suffira que l'équation

$$(3)\qquad F(r) = 0$$

n'ait pas de racines réelles simples, ni de racines réelles égales en nombre impair. En effet, si, r_0 désignant une racine réelle de l'équation (3), m un nombre entier, et R un polynôme non divisible par $r - r_0$, on avait

$$F(r) = (r - r_0)R \qquad \text{ou} \qquad F(r) = (r - r_0)^{2m+1}R,$$

il est clair que, pour deux valeurs de r très peu différentes de r_0, mais l'une plus grande et l'autre plus petite, la fonction $F(r)$ obtiendrait deux valeurs de signes contraires. De plus, comme une fonction continue de r ne saurait changer de signe, tandis que r varie entre deux limites données, sans devenir nulle dans l'intervalle, il est permis d'affirmer que, si l'équation (3) n'a pas de racines réelles, son premier membre conservera toujours le même signe, sans jamais s'évanouir, et qu'il s'évanouira quelquefois sans jamais changer de signe, s'il est le produit de plusieurs facteurs de la forme $(r - r_0)^{2m}$

par un polynôme qui ne puisse se réduire à zéro, pour aucune valeur réelle de r.

Revenons maintenant au cas où les quantités r, s, t, ... sont en nombre quelconque. Alors, pour que la fonction $F(r, s, t, \ldots)$ ne puisse changer de signe, il sera nécessaire et il suffira que l'équation

$$(4)\qquad F(r, s, t, \ldots) = 0,$$

résolue par rapport à r, ne fournisse jamais de racines réelles simples, ni de racines réelles égales en nombre impair, quelles que soient d'ailleurs s, t, ...

Corollaire I. — La fonction $F(r)$ ou $F(r, s, t, \ldots)$ conserve constamment le même signe, lorsque l'équation (3) ou (4) n'a pas de racines réelles. D'ailleurs, les conditions qui expriment qu'une équation algébrique n'a point de racines réelles peuvent être aisément déduites de la méthode que j'ai développée dans le dix-septième Cahier du *Journal de l'École Polytechnique*, p. 457 [1].

Corollaire II. — Soit $u = f(x, y)$. La différentielle totale

$$(5)\qquad d^2u = \frac{d^2u}{dx^2}dx^2 + \frac{d^2u}{dy^2}dy^2 + 2\frac{d^2u}{dx\,dy}dx\,dy$$

conservera constamment le même signe, si l'équation

$$(6)\qquad \frac{d^2u}{dx^2}r^2 + 2\frac{d^2u}{dx\,dy}r + \frac{d^2u}{dy^2} = 0$$

n'a pas de racines réelles, c'est-à-dire si l'on a

$$(7)\qquad \frac{d^2u}{dx^2}\,\frac{d^2u}{dy^2} - \left(\frac{d^2u}{dx\,dy}\right)^2 > 0.$$

La même différentielle pourrait s'évanouir sans jamais changer de signe, si le premier membre de la formule (7) se réduisait à zéro,

[1] *Œuvres de Cauchy*, S. II, T. I.

et admettrait des valeurs de signes opposés si ce premier membre devenait négatif.

Corollaire III. — Soit $u = f(x, y, z)$. La différentielle totale

$$(8)\quad \left\{\begin{aligned} d^2u = {} & \frac{d^2u}{dx^2}dx^2 + \frac{d^2u}{dy^2}dy^2 + \frac{d^2u}{dz^2}dz^2 \\ & + 2\frac{d^2u}{dx\,dy}dx\,dy + 2\frac{d^2u}{dx\,dz}dx\,dz + 2\frac{d^2u}{dy\,dz}dy\,dz \end{aligned}\right.$$

conservera constamment le même signe, si l'équation

$$(9)\quad \frac{d^2u}{dx^2}r^2 + 2\left(\frac{d^2u}{dx\,dy}s + \frac{d^2u}{dx\,dz}\right)r + \frac{d^2u}{dy^2}s^2 + 2\frac{d^2u}{dy\,dz}s + \frac{d^2u}{dz^2} = 0,$$

résolue, par rapport à r, n'a jamais de racines réelles, c'est-à-dire si l'on a, quelle que soit s,

$$(10)\quad \left\{\begin{aligned} & \left[\frac{d^2u}{dx^2}\frac{d^2u}{dy^2} - \left(\frac{d^2u}{dx\,dy}\right)^2\right]s^2 \\ & + 2\left(\frac{d^2u}{dx^2}\frac{d^2u}{dy\,dz} - \frac{d^2u}{dx\,dy}\frac{d^2u}{dx\,dz}\right)s + \frac{d^2u}{dx^2}\frac{d^2u}{dz^2} - \left(\frac{d^2u}{dx\,dz}\right)^2 > 0. \end{aligned}\right.$$

Cette dernière condition sera elle-même satisfaite quand on aura

$$(11)\quad \left\{\begin{aligned} & \frac{d^2u}{dx^2}\frac{d^2u}{dy^2} - \left(\frac{d^2u}{dx\,dy}\right)^2 > 0 \\ & \text{et} \\ & \left[\frac{d^2u}{dx^2}\frac{d^2u}{dy^2} - \left(\frac{d^2u}{dx\,dy}\right)^2\right]\left[\frac{d^2u}{dx^2}\frac{d^2u}{dz^2} - \left(\frac{d^2u}{dx\,dz}\right)^2\right] \\ & \qquad - \left(\frac{d^2u}{dx^2}\frac{d^2u}{dy\,dz} - \frac{d^2u}{dx\,dy}\frac{d^2u}{dx\,dz}\right)^2 > 0. \end{aligned}\right.$$

Scolie. — Soit $u = f(x, y, z, \ldots)$ une fonction de n variables indépendantes $x, y, z, \ldots$ et posons

$$(12)\quad \left\{\begin{aligned} \mathrm{F}(r, s, t, \ldots) = {} & \frac{d^2u}{dx^2}r^2 + \frac{d^2u}{dy^2}s^2 + \frac{d^2u}{dz^2}t^2 + \ldots \\ & + 2\frac{d^2u}{dx\,dy}rs + 2\frac{d^2u}{dx\,dz}rt + 2\frac{d^2u}{dy\,dz}st + \ldots, \end{aligned}\right.$$

en sorte qu'on ait

$$(13)\quad \left\{\begin{aligned} \mathrm{F}(r) &= \frac{d^2u}{dx^2}r^2 + 2\frac{d^2u}{dx\,dy}r + \frac{d^2u}{dy^2}, \\ \mathrm{F}(r, s) &= \frac{d^2u}{dx^2}r^2 + 2\frac{d^2u}{dx\,dy}rs + \frac{d^2u}{dy^2}s^2 + 2\left(\frac{d^2u}{dx\,dz}r + \frac{d^2u}{dy\,dz}s\right) + \frac{d^2u}{dz^2}, \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right.$$

Soit de plus D_n le polynôme qui a pour premier terme le produit

$$(14)\quad \frac{d^2u}{dx^2}\frac{d^2u}{dy^2}\frac{d^2u}{dz^2}\cdots,$$

et qui représente le dénominateur commun des valeurs de dx, dy, dz, … tirées des n équations

$$(15)\quad \left\{\begin{aligned} & \frac{d^2u}{dx^2}dx + \frac{d^2u}{dx\,dy}dy + \frac{d^2u}{dx\,dz}dz + \ldots = d\left(\frac{du}{dx}\right), \\ & \frac{d^2u}{dx\,dy}dx + \frac{d^2u}{dy^2}dy + \frac{d^2u}{dy\,dz}dz + \ldots = d\left(\frac{du}{dy}\right), \\ & \frac{d^2u}{dx\,dz}dx + \frac{d^2u}{dy\,dz}dy + \frac{d^2u}{dz^2}dz + \ldots = d\left(\frac{du}{dz}\right), \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{aligned}\right.$$

en sorte qu'on ait

$$(16)\quad \left\{\begin{aligned} \mathrm{D}_1 &= \frac{d^2u}{dx^2}, \\ \mathrm{D}_2 &= \frac{d^2u}{dx^2}\frac{d^2u}{dy^2} - \left(\frac{d^2u}{dx\,dy}\right)^2, \\ \mathrm{D}_3 &= \frac{d^2u}{dx^2}\frac{d^2u}{dy^2}\frac{d^2u}{dz^2} - \frac{d^2u}{dx^2}\left(\frac{d^2u}{dy\,dz}\right)^2 - \frac{d^2u}{dy^2}\left(\frac{d^2u}{dz\,dx}\right)^2 \\ & \qquad - \frac{d^2u}{dz^2}\left(\frac{d^2u}{dx\,dy}\right)^2 + 2\frac{d^2u}{dy\,dz}\frac{d^2u}{dz\,dx}\frac{d^2u}{dx\,dy}, \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right.$$

Pour que le signe de la différentielle totale d^2u ou de la fonction $\mathrm{F}(r, s, t, \ldots)$ reste indépendant des valeurs attribuées à dx, dy, dz, …, il suffira que les rapports

$$(17)\quad \frac{\mathrm{D}_2}{\mathrm{D}_1^2},\quad \frac{\mathrm{D}_3}{\mathrm{D}_1^3},\quad \frac{\mathrm{D}_4}{\mathrm{D}_1^4},\quad \ldots,\quad \frac{\mathrm{D}_n}{\mathrm{D}_1^n}$$

soient tous positifs, c'est-à-dire que, parmi les expressions

$$\mathrm{D}_1,\quad \mathrm{D}_2,\quad \mathrm{D}_3,\quad \ldots,\quad \mathrm{D}_n, \tag{18}$$

celles qui correspondent à des indices pairs, soient positives, les autres étant affectées du même signe que D_1. C'est ce que l'on démontrera sans peine à l'aide des considérations suivantes.

Supposons d'abord que les variables $x, y, z, \ldots$ se réduisent à deux, x et y. Alors, si la quantité

$$\mathrm{D}_1 = \frac{d^2u}{dx^2} \tag{19}$$

ne s'évanouit pas, il suffira d'attribuer à la variable r de très grandes valeurs numériques, pour que cette quantité D_1 et la fonction

$$\mathrm{F}(r) = \frac{d^2u}{dx^2}r^2 + 2\frac{d^2u}{dx\,dy}r + \frac{d^2u}{dy^2} = r^2\left(\frac{d^2u}{dx^2} + \frac{2}{r}\frac{d^2u}{dx\,dy} + \frac{1}{r^2}\frac{d^2u}{dy^2}\right) \tag{20}$$

soient affectées du même signe ou, en d'autres termes, pour que le rapport

$$\frac{\mathrm{F}(r)}{\mathrm{D}_1} \tag{21}$$

soit positif. Ajoutons que ce rapport, qui varie avec r par degrés insensibles, croîtra indéfiniment avec r^2. Donc il admettra une valeur minimum correspondante à une valeur finie de r et sera toujours positif si cette valeur minimum est positive. Or la valeur minimum dont il est ici question sera nécessairement déterminée par la formule

$$\frac{d\,\mathrm{F}(r)}{dr} = 0, \tag{22}$$

de laquelle on tirera, en la combinant avec l'équation (20),

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{d^2u}{dx^2}r + \frac{d^2u}{dx\,dy} = 0,\\ &\frac{d^2u}{dx\,dy}r + \frac{d^2u}{dy^2} = \mathrm{F}(r) \end{aligned}\right. \tag{23}$$

et, par conséquent,

$$\mathrm{F}(r) = \frac{\mathrm{D}_2}{\mathrm{D}_1}, \tag{24}$$

$$\frac{\mathrm{F}(r)}{\mathrm{D}_1} = \frac{\mathrm{D}_2}{\mathrm{D}_1^2}. \tag{25}$$

Donc le rapport (21) restera positif, quel que soit r, et la fonction $\mathrm{F}(r)$ sera constamment affectée du même signe que D_1, si la première des fractions (17) est positive ou, ce qui revient au même, si l'on a

$$\mathrm{D}_2 > 0. \tag{26}$$

Cette dernière condition coïncide avec la formule (7).

Considérons en second lieu le cas où la fonction u renferme trois variables indépendantes x, y, z. Alors, si l'on suppose D_1 différent de zéro et D_2 positif, la fonction $\mathrm{F}(r)$, d'après ce qu'on vient de dire, restera toujours affectée du même signe que D_1, et l'on pourra en dire autant de la fonction

$$s^2\,\mathrm{F}\left(\frac{r}{s}\right) = \frac{d^2u}{dx^2}r^2 + 2\frac{d^2u}{dx\,dy}rs + \frac{d^2u}{dy^2}s^2. \tag{27}$$

Cela posé, il suffira évidemment d'attribuer aux deux quantités r, s, ou seulement à l'une des deux, des valeurs numériques très considérables, pour que la quantité D_1 et la fonction

$$\left\{\begin{aligned} \mathrm{F}(r,s) &= \frac{d^2u}{dx^2}r^2 + 2\frac{d^2u}{dx\,dy}rs + \frac{d^2u}{dy^2}s^2 + 2\left(\frac{d^2u}{dx\,dz}r + \frac{d^2u}{dy\,dz}s\right) + \frac{d^2u}{dz^2}\\ &= r^2\left[\frac{d^2u}{dx^2} + \frac{2}{r}\left(s\frac{d^2u}{dx\,dy} + \frac{d^2u}{dx\,dz}\right) + \frac{1}{r^2}\left(s^2\frac{d^2u}{dy^2} + 2s\frac{d^2u}{dy\,dz} + \frac{d^2u}{dz^2}\right)\right]\\ &= s^2\left[\frac{d^2u}{dy^2} + \frac{2}{s}\left(r\frac{d^2u}{dx\,dy} + \frac{d^2u}{dy\,dz}\right) + \frac{1}{s^2}\left(r^2\frac{d^2u}{dx^2} + 2r\frac{d^2u}{dx\,dz} + \frac{d^2u}{dz^2}\right)\right] \end{aligned}\right. \tag{28}$$

soient affectées du même signe ou, en d'autres termes, pour que le rapport

$$\frac{\mathrm{F}(r,s)}{\mathrm{D}_1} \tag{29}$$

soit positif. Ajoutons que ce rapport, qui varie avec r et s par degrés insensibles, croîtra indéfiniment avec r^2 et avec s^2. Donc il admettra une valeur minimum correspondante à des valeurs finies de r et de s, et sera toujours positif si cette valeur minimum est positive. Or la valeur minimum dont il est ici question sera nécessairement déterminée par les formules

$$\frac{d\mathrm{F}(r,s)}{dr} = 0, \qquad \frac{d\mathrm{F}(r,s)}{ds} = 0, \tag{30}$$

desquelles on tirera, en les combinant avec l'équation (28),

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{d^2u}{dx^2}r + \frac{d^2u}{dx\,dy}s + \frac{d^2u}{dx\,dz} = 0,\\ &\frac{d^2u}{dx\,dy}r + \frac{d^2u}{dy^2}s + \frac{d^2u}{dy\,dz} = 0,\\ &\frac{d^2u}{dx\,dz}r + \frac{d^2u}{dy\,dz}s + \frac{d^2u}{dz^2} = \mathrm{F}(r) \end{aligned}\right. \tag{31}$$

et, par conséquent,

$$\mathrm{F}(r) = \frac{\mathrm{D}_3}{\mathrm{D}_2}, \tag{32}$$

$$\frac{\mathrm{F}(r)}{\mathrm{D}_1} = \frac{\mathrm{D}_3}{\mathrm{D}_1\mathrm{D}_2} = \frac{\dfrac{\mathrm{D}_3}{\mathrm{D}_1^3}}{\dfrac{\mathrm{D}_2}{\mathrm{D}_1^2}}. \tag{33}$$

Donc le rapport (29) restera positif, quelles que soient les valeurs de r, s, et la fonction $\mathrm{F}(r,s)$ sera constamment affectée du même signe que D_1 si les deux premières des fractions (17), savoir

$$\frac{\mathrm{D}_2}{\mathrm{D}_1^2}, \quad \frac{\mathrm{D}_3}{\mathrm{D}_1^3},$$

sont positives ou, ce qui revient au même, si l'on a

$$\mathrm{D}_2 > 0, \qquad \mathrm{D}_1\mathrm{D}_3 > 0. \tag{34}$$

Il est d'ailleurs facile de s'assurer que les conditions (34) coïncident avec les formules (11).

En étendant les mêmes raisonnements et les mêmes calculs au cas où la fonction u renfermerait quatre, cinq, six, ... variables indépendantes, on prouvera généralement : 1° que les maxima ou minima des fonctions

$$\mathrm{F}(r), \quad \mathrm{F}(r,s), \quad \mathrm{F}(r,s,t), \quad \ldots, \quad \mathrm{F}(r,s,t,\ldots) \tag{35}$$

sont égaux aux différents termes de la suite

$$\frac{\mathrm{D}_2}{\mathrm{D}_1}, \quad \frac{\mathrm{D}_3}{\mathrm{D}_2}, \quad \frac{\mathrm{D}_4}{\mathrm{D}_3}, \quad \ldots, \quad \frac{\mathrm{D}_n}{\mathrm{D}_{n-1}}; \tag{36}$$

2° que, si ces différents termes sont des quantités affectées du même signe que D_1, on pourra en dire autant de chacune des expressions (35). D'ailleurs, pour que D_1 et les expressions (36) soient des quantités de même signe, il suffit évidemment que les rapports (17) soient tous positifs.

Problème II. — *Étant données deux fonctions entières des variables r, s, t, ..., trouver les conditions qui doivent être remplies, pour que la seconde fonction conserve un signe déterminé, toutes les fois que la première s'évanouit.*

Solution. — Soient $\mathrm{F}(r,s,t,\ldots)$ la première fonction, et $\mathrm{R} = \mathfrak{F}(r,s,t,\ldots)$ la seconde. On éliminera r entre les deux équations $\mathrm{F}(r,s,t,\ldots) = 0$, et $\mathrm{R} = \mathfrak{F}(r,s,t,\ldots)$. L'équation résultante, étant résolue par rapport à R, devra fournir pour cette quantité une valeur affectée du signe convenu, toutes les fois que l'on attribuera aux variables s, t, ... des valeurs réelles auxquelles correspondra une valeur réelle de la variable r.

VINGT-DEUXIÈME LEÇON.

USAGE DES FACTEURS INDÉTERMINÉS DANS LA RECHERCHE DES MAXIMA ET MINIMA.

Soit

$$u = f(x, y, z, \ldots) \tag{1}$$

une fonction de n variables $x, y, z, \ldots$. Mais concevons que ces variables, au lieu d'être indépendantes les unes des autres, comme on l'a supposé dans la vingtième Leçon, soient liées entre elles par m équations de la forme

$$v = 0, \quad w = 0, \quad \ldots. \tag{2}$$

Pour déduire de la méthode que nous avons indiquée les maxima et les minima de la fonction u, il faudrait commencer par éliminer de cette fonction m variables différentes à l'aide des formules (2). Après cette élimination, les variables qui resteraient, au nombre de $n - m$, devraient être considérées comme indépendantes, et il faudrait chercher les systèmes de valeurs de ces variables qui rendraient la fonction u ou la fonction du discontinue, ou bien encore ceux qui vérifieraient, quelles que fussent les différentielles de ces mêmes variables, l'équation

$$du = 0. \tag{3}$$

Or la recherche des maxima et minima qui correspondent à l'équation (3) peut être simplifiée par les considérations suivantes.

Si l'on différentie la fonction u, en y conservant toutes les variables données $x, y, z, \ldots$, l'équation (3) se présentera sous la forme

$$\frac{du}{dx}dx + \frac{du}{dy}dy + \frac{du}{dz}dz + \ldots = 0, \tag{4}$$

et renfermera les n différentielles $dx, dy, dz, \ldots$. Mais il importe d'observer que, parmi ces différentielles, les seules dont on pourra disposer arbitrairement seront celles des $n - m$ variables regardées comme indépendantes. Les autres différentielles se trouveront déterminées en fonction des premières et des variables elles-mêmes par les formules $dv = 0$, $dw = 0$, ... qui, lorsqu'on les développe, deviennent respectivement

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{dv}{dx}dx + \frac{dv}{dy}dy + \frac{dv}{dz}dz + \ldots = 0, \\ &\frac{dw}{dx}dx + \frac{dw}{dy}dy + \frac{dw}{dz}dz + \ldots = 0, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right. \tag{5}$$

Cela posé, puisque l'équation (4) doit être vérifiée, quelles que soient les différentielles des variables indépendantes, il est clair que, si l'on élimine de cette équation un nombre m de différentielles à l'aide des formules (5), les coefficients des $n - m$ différentielles restantes devront être séparément égalés à zéro. Or, pour effectuer l'élimination, il suffit d'ajouter à l'équation (4) les formules (5) multipliées par des *facteurs indéterminés*, $-\lambda$, $-\mu$, ..., et de choisir ces facteurs de manière à faire disparaître dans l'équation résultante les coefficients de m différentielles successives. Comme d'ailleurs l'équation résultante sera de la forme

$$\left(\frac{du}{dx} - \lambda\frac{dv}{dx} - \mu\frac{dw}{dx} - \ldots\right)dx + \left(\frac{du}{dy} - \lambda\frac{dv}{dy} - \mu\frac{dw}{dy} - \ldots\right)dy + \ldots = 0, \tag{6}$$

et que, après y avoir fait disparaître les coefficients de m différentielles, il faudra encore égaler à zéro ceux des différentielles restantes, il est permis de conclure que les valeurs de $\lambda, \mu, \nu, \ldots$ tirées de quelques-unes des formules

$$\frac{du}{dx} - \lambda\frac{dv}{dx} - \mu\frac{dw}{dx} - \ldots = 0, \quad \frac{du}{dy} - \lambda\frac{dv}{dy} - \mu\frac{dw}{dy} - \ldots = 0, \quad \ldots, \tag{7}$$

devront satisfaire à toutes les autres. Par conséquent, les valeurs de

$x, y, z, \ldots$, propres à vérifier les formules (4) et (5), devront satisfaire aux équations de condition que fournit l'élimination des indéterminées $\lambda, \mu, \nu, \ldots$ entre les formules (7). Le nombre de ces équations de condition sera $n-m$. En les réunissant aux formules (2), on obtiendra en tout n équations, desquelles on déduira pour les variables données $x, y, z, \ldots$ plusieurs systèmes de valeurs, parmi lesquels se trouveront nécessairement ceux qui, sans rendre discontinue l'une des fonctions u et du, fourniront pour la première des maxima ou des minima.

Il est bon de remarquer que les équations de condition produites par l'élimination de $\lambda, \mu, \nu, \ldots$ entre les formules (7) ne seraient altérées en aucune manière si l'on échangeait dans ces formules la fonction u contre une des fonctions $v, w, \ldots$. Par suite, on arriverait toujours aux mêmes équations de condition si, au lieu de chercher les maxima et minima de la fonction u, en supposant $v=0$, $w=0, \ldots$, on cherchait les maxima et minima de la fonction v, en supposant $u=0$, $w=0, \ldots$, ou bien ceux de la fonction w, en supposant $u=0$, $v=0, \ldots$; etc. On pourrait même, sans altérer les équations de condition, remplacer les fonctions $u, v, w, \ldots$ par les suivantes, $u-a$, $v-b$, $w-c, \ldots$; $a, b, c, \ldots$ désignant des constantes arbitraires.

Dans le cas particulier où l'on veut obtenir les maxima ou les minima de la fonction u, en supposant $x, y, z, \ldots$ assujetties à une seule équation

$$v=0, \tag{8}$$

les formules (7) deviennent

$$\frac{du}{dx}-\lambda\frac{dv}{dx}=0, \quad \frac{du}{dy}-\lambda\frac{dv}{dy}=0, \quad \frac{du}{dz}-\lambda\frac{dv}{dz}=0, \quad \ldots, \tag{9}$$

et l'on en conclut, par l'élimination de λ,

$$\frac{\frac{du}{dx}}{\frac{dv}{dx}}=\frac{\frac{du}{dy}}{\frac{dv}{dy}}=\frac{\frac{du}{dz}}{\frac{dv}{dz}}=\ldots. \tag{10}$$

Cette dernière formule équivaut à $n-1$ équations distinctes, lesquelles, réunies à l'équation (8), détermineront les valeurs cherchées de $x, y, z, \ldots$.

Exemple I. — Supposons que, $a, b, c, \ldots, r$ désignant des quantités constantes, et $x, y, z, \ldots$ des variables assujetties à l'équation

$$x^2+y^2+z^2+\ldots=r^2 \quad \text{ou} \quad x^2+y^2+z^2+\ldots-r^2=0,$$

on demande le maximum et le minimum de la fonction

$$u=ax+by+cz+\ldots.$$

Dans cette hypothèse, la formule (10) se trouvant réduite à

$$\frac{a}{x}=\frac{b}{y}=\frac{c}{z}=\ldots, \tag{11}$$

on en conclura (*voir* l'*Analyse algébrique*, Note II) [1]

$$\frac{ax+by+cz+\ldots}{x^2+y^2+z^2+\ldots}=\pm\frac{\sqrt{a^2+b^2+c^2+\ldots}}{\sqrt{x^2+y^2+z^2+\ldots}} \quad \text{ou} \quad \frac{u}{r^2}=\pm\frac{\sqrt{a^2+b^2+c^2+\ldots}}{r}$$

et, par conséquent,

$$u=\pm r\sqrt{a^2+b^2+c^2+\ldots}. \tag{12}$$

Pour s'assurer que les deux valeurs de u données par l'équation (12) sont un maximum et un minimum, il suffit d'observer qu'on aura toujours

$$\left\{\begin{aligned}&(ax+by+cz+\ldots)^2+(bx-ay)^2+(cx-az)^2+\ldots+(cy-bz)^2+\ldots\\&\quad=(a^2+b^2+c^2+\ldots)(x^2+y^2+z^2+\ldots),\end{aligned}\right. \tag{13}$$

et, par suite,

$$u^2<(a^2+b^2+c^2+\ldots)r^2,$$

à moins que les valeurs de $x, y, z, \ldots$ ne vérifient la formule (11).

Exemple II. — Supposons que, $a, b, c, \ldots, k$ désignant des quan-

[1] *Œuvres de Cauchy*, S. II, T. III, p. 360.

tités constantes, et $x, y, z, \ldots$ des variables assujetties à l'équation

$$ax + by + cz + \ldots = k,$$

on cherche le minimum de la fonction $u = x^2 + y^2 + z^2 + \ldots$. Dans cette hypothèse, on obtiendra encore la formule (11), de laquelle on conclura

$$\frac{k}{u} = \pm \frac{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + \ldots}}{\sqrt{u}}$$

et, par suite,

$$u = \frac{k^2}{a^2 + b^2 + c^2 + \ldots}. \tag{14}$$

Si les variables $x, y, z, \ldots$ se réduisent à trois et désignent des coordonnées rectangulaires, la valeur de $\sqrt{u}$, donnée par l'équation (14), représentera évidemment la plus courte distance de l'origine à un plan fixe.

Exemple III. — Supposons que, $a, b, c, \ldots, k, p, q, r, \ldots$ désignant des constantes positives, et $x, y, z, \ldots$ des variables assujetties à l'équation

$$ax + by + cz + \ldots = k,$$

on cherche le maximum de la fonction

$$u = x^p y^q z^r \ldots.$$

On trouvera

$$\frac{du}{u} = p\frac{dx}{x} + q\frac{dy}{y} + r\frac{dz}{z} + \ldots,$$

$$\frac{d^2u}{u} - \left(\frac{du}{u}\right)^2 = -p\left(\frac{dx}{x}\right)^2 - q\left(\frac{dy}{y}\right)^2 - r\left(\frac{dz}{z}\right)^2 - \ldots,$$

et par suite on tirera de la formule (10)

$$\frac{p}{ax} = \frac{q}{by} = \frac{r}{cz} = \ldots = \frac{p+q+r+\ldots}{k},$$

$$x = \frac{p}{a}\,\frac{k}{p+q+r+\ldots}, \quad y = \frac{q}{b}\,\frac{k}{p+q+r+\ldots}, \quad z = \frac{r}{c}\,\frac{k}{p+q+r+\ldots}.$$

Comme les valeurs précédentes de $x, y, z, \ldots$ rendront du constamment nulle, et d^2u constamment négative, elles fourniront un maximum de la fonction u.

Exemple IV. — Concevons que l'on cherche les demi-axes d'une ellipse ou d'une hyperbole rapportée à son centre et représentée par l'équation

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 = K.$$

Chacun de ces demi-axes sera un maximum ou un minimum du rayon vecteur r, mené de l'origine à la courbe, et déterminé par la formule $r^2 = x^2 + y^2$. Cela posé, comme on aura

$$dr = \frac{1}{r}(x\,dx + y\,dy),$$

on ne pourra faire évanouir dr qu'en supposant

$$r = \infty \quad \text{ou} \quad x\,dx + y\,dy = 0.$$

La première hypothèse ne peut être admise que pour une hyperbole. En admettant la seconde, on tirera de la formule (10)

$$\frac{x}{Ax + By} = \frac{y}{Cy + Bx} = \frac{x^2 + y^2}{x(Ax + By) + y(Cy + Bx)} = \frac{r^2}{K},$$

$$\frac{K}{r^2} - A = B\frac{y}{x}, \qquad \frac{K}{r^2} - C = B\frac{x}{y},$$

$$\left(\frac{K}{r^2} - A\right)\left(\frac{K}{r^2} - C\right) = B^2. \tag{15}$$

Observons maintenant qu'à des valeurs réelles de r correspondront toujours des valeurs positives de r^2, et que l'équation (15) fournira, pour r^2, deux valeurs positives, si l'on a $AK > 0$, $AC - B^2 > 0$; une seule, si l'on a $AC - B^2 < 0$. Effectivement, la courbe, étant une ellipse dans le premier cas, aura deux axes réels; tandis que, dans le second cas, elle se changera en hyperbole, et n'aura plus qu'un seul axe réel.

VINGT-TROISIÈME LEÇON.

DÉVELOPPEMENT DES FONCTIONS DE PLUSIEURS VARIABLES. EXTENSION DU THÉORÈME DE TAYLOR A CES MÊMES FONCTIONS.

Soit

$$u = f(x, y, z, \dots) \tag{1}$$

une fonction de plusieurs variables indépendantes $x, y, z, \dots$, et posons, comme dans la dix-neuvième Leçon,

$$F(\alpha) = f(x + \alpha\,dx, y + \alpha\,dy, z + \alpha\,dz, \dots). \tag{2}$$

La formule (8) de la page 353 donnera

$$\left\{\begin{aligned} F(\alpha) = F(0) &+ \frac{\alpha}{1}F'(0) + \frac{\alpha^2}{1.2}F''(0) + \dots \\ &+ \frac{\alpha^{n-1}}{1.2.3\dots(n-1)}F^{(n-1)}(0) + \frac{\alpha^n}{1.2.3\dots n}F^{(n)}(\theta\alpha), \end{aligned}\right. \tag{3}$$

θ désignant un nombre inférieur à l'unité. D'ailleurs, comme on l'a remarqué dans la dix-neuvième Leçon,

$$F(\alpha), \quad F'(\alpha), \quad F''(\alpha), \quad \dots, \quad F^{(n)}(\alpha) \tag{4}$$

seront des fonctions de $x, y, z, \dots$ et α, qui renfermeront les seules quantités variables

$$x + \alpha\,dx, \quad y + \alpha\,dy, \quad z + \alpha\,dz, \quad \dots, \tag{5}$$

et qui, pour $\alpha = 0$, se réduiront à

$$F(0) = u, \quad F'(0) = du, \quad F''(0) = d^2u, \quad \dots, \quad F^{(n)}(0) = d^nu. \tag{6}$$

Donc, pour déduire de la différentielle totale d^nu les valeurs de

$F^{(n)}(\alpha)$ et de $F^{(n)}(\theta\alpha)$, il suffira de remplacer dans cette différentielle les variables $x, y, z, \dots$ par les expressions (5) ou par les suivantes :

$$x + \theta\alpha\,dx, \quad y + \theta\alpha\,dy, \quad z + \theta\alpha\,dz, \quad \dots. \tag{7}$$

Si, pour abréger, on désigne par ω_n la valeur de $F^{(n)}(\theta\alpha)$ ainsi obtenue, l'équation (3), combinée avec les formules (2) et (6), donnera

$$\left\{\begin{aligned} &f(x + \alpha\,dx, y + \alpha\,dy, z + \alpha\,dz, \dots) \\ &\quad = u + \frac{\alpha}{1}du + \frac{\alpha^2}{1.2}d^2u + \dots + \frac{\alpha^{n-1}}{1.2.3\dots(n-1)}d^{n-1}u + \frac{\alpha^n}{1.2.3\dots n}\omega_n. \end{aligned}\right. \tag{8}$$

Donc, si l'on attribue aux variables $x, y, z, \dots$ les accroissements

$$\Delta x = \alpha\,dx, \quad \Delta y = \alpha\,dy, \quad \Delta z = \alpha\,dz, \quad \dots, \tag{9}$$

l'accroissement correspondant de la fonction $u = f(x, y, z, \dots)$, savoir

$$\left\{\begin{aligned} \Delta u &= f(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z, \dots) - f(x, y, z, \dots) \\ &= f(x + \alpha\,dx, y + \alpha\,dy, z + \alpha\,dz, \dots) - u, \end{aligned}\right. \tag{10}$$

pourra être développé suivant les puissances ascendantes de α à l'aide de la formule

$$\Delta u = \frac{\alpha}{1}du + \frac{\alpha^2}{1.2}d^2u + \dots + \frac{\alpha^{n-1}}{1.2.3\dots(n-1)}d^{n-1}u + \frac{\alpha^n}{1.2.3\dots n}\omega_n. \tag{11}$$

Si l'on suppose en particulier $n = 1$, alors, en faisant

$$\frac{du}{dx} = \varphi(x, y, z, \dots), \quad \frac{du}{dy} = \chi(x, y, z, \dots), \quad \frac{du}{dz} = \psi(x, y, z, \dots), \quad \dots, \tag{12}$$

on trouvera

$$du = \varphi(x, y, z, \dots)\,dx + \chi(x, y, z, \dots)\,dy + \psi(x, y, z, \dots)\,dz + \dots; \tag{13}$$

et les deux formules (8), (11) donneront respectivement

$$f(x + \alpha\,dx, y + \alpha\,dy, z + \alpha\,dz, \dots) = u + \alpha\omega_1, \tag{14}$$

$$\Delta u = \alpha\omega_1, \tag{15}$$

$\mathcal{Q}_n$ représentant le polynôme dans lequel se transforme le second membre de l'équation (13), quand on y remplace x par $x+\theta\alpha\,dx$, y par $y+\theta\alpha\,dy$, z par $z+\theta\alpha\,dz$, etc.

Lorsque, dans la formule (8), le produit

$$\frac{\alpha^n}{1.2.3\ldots n}\mathcal{Q}_n \tag{16}$$

décroit indéfiniment pour des valeurs croissantes de n, alors, en posant $n=\infty$, on tire de cette formule

$$f(x+\alpha\,dx,\ y+\alpha\,dy,\ z+\alpha\,dz,\ \ldots)=u+\frac{\alpha}{1}du+\frac{\alpha^2}{1.2}d^2u+\ldots. \tag{17}$$

Concevons maintenant que l'on prenne $\alpha=1$. Les accroissements $\Delta x, \Delta y, \Delta z, \ldots$ des variables indépendantes se réduiront à leurs différentielles dx, dy, dz, $\ldots$, que l'on pourra d'ailleurs considérer comme représentant des quantités finies quelconques h, k, l, $\ldots$. Alors aussi on tirera des formules (8) et (11)

$$\left\{\begin{aligned}&f(x+dx,\ y+dy,\ z+dz,\ \ldots)\\&\quad=u+\frac{du}{1}+\frac{d^2u}{1.2}+\ldots+\frac{d^{n-1}u}{1.2.3\ldots(n-1)}+\frac{\mathcal{Q}_n}{1.2.3\ldots n},\end{aligned}\right. \tag{18}$$

$$\Delta u=\frac{du}{1}+\frac{d^2u}{1.2}+\ldots+\frac{d^{n-1}u}{1.2.3\ldots(n-1)}+\frac{\mathcal{Q}_n}{1.2.3\ldots n}, \tag{19}$$

$\mathcal{Q}_n$ étant ce que devient la différentielle totale d^nu quand on y remplace x par $x+\theta\,dx$, y par $y+\theta\,dy$, z par $z+\theta\,dz$, $\ldots$. Si l'on suppose en particulier $n=1$, on trouvera

$$\left\{\begin{aligned}&f(x+dx,\ y+dy,\ z+dz,\ \ldots)\\&\quad=f(x,y,z,\ldots)+\varphi(x+\theta\,dx,\ y+\theta\,dy,\ z+\theta\,dz,\ \ldots)\,dx\\&\qquad\qquad+\chi(x+\theta\,dx,\ y+\theta\,dy,\ z+\theta\,dz,\ \ldots)\,dy\\&\qquad\qquad+\psi(x+\theta\,dx,\ y+\theta\,dy,\ z+\theta\,dz,\ \ldots)\,dz\\&\qquad\qquad+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\end{aligned}\right. \tag{20}$$

Ajoutons que, si $\mathcal{Q}_n$ s'approche indéfiniment de zéro pour des valeurs

croissantes de n, les formules (18) et (19) entraîneront les suivantes :

$$f(x+dx,\ y+dy,\ z+dz,\ \ldots)=u+\frac{du}{1}+\frac{d^2u}{1.2}+\frac{d^3u}{1.2.3}+\ldots, \tag{21}$$

$$\Delta u=\frac{du}{1}+\frac{d^2u}{1.2}+\frac{d^3u}{1.2.3}+\ldots. \tag{22}$$

L'équation (21) et celle qu'on en déduit lorsqu'on y remplace x, y, z, $\ldots$ par zéro, puis dx, dy, dz, $\ldots$ par x, y, z, $\ldots$, fournissent le moyen d'étendre les théorèmes de Taylor et de Maclaurin, ou plutôt de Stirling [1], aux fonctions de plusieurs variables.

Concevons à présent que, dans la formule (3) ou (8), la quantité α devienne infiniment petite; il en sera de même de la différence

$$F^{(n)}(\theta\alpha)-F^{(n)}(0)=\mathcal{Q}_n-d^nu; \tag{23}$$

et, en désignant par β cette différence, c'est-à-dire en posant

$$\mathcal{Q}_n=d^nu+\beta, \tag{24}$$

on conclura des formules (8), (11)

$$\left\{\begin{aligned}&f(x+\alpha\,dx,\ y+\alpha\,dy,\ z+\alpha\,dz,\ \ldots)\\&\quad=u+\frac{\alpha}{1}du+\frac{\alpha^2}{1.2}d^2u+\ldots+\frac{\alpha^{n-1}}{1.2.3\ldots(n-1)}d^{n-1}u+\frac{\alpha^n}{1.2.3\ldots n}(d^nu+\beta),\end{aligned}\right. \tag{25}$$

$$\Delta u=\frac{\alpha}{1}du+\frac{\alpha^2}{1.2}d^2u+\ldots+\frac{\alpha^{n-1}}{1.2.3\ldots(n-1)}d^{n-1}u+\frac{\alpha^n}{1.2.3\ldots n}(d^nu+\beta). \tag{26}$$

S'il arrive que, pour certaines valeurs de x, y, z, $\ldots$, les différentielles

$$du,\quad d^2u,\quad \ldots,\quad d^{n-1}u \tag{27}$$

s'évanouissent toutes, la formule (26) donnera simplement

$$\Delta u=\frac{\alpha^n}{1.2.3\ldots n}(d^nu+\beta). \tag{28}$$

[1] M. Peacock a remarqué que le théorème, généralement attribué au géomètre anglais Maclaurin, avait été donné, dès 1717, par son compatriote Stirling, dans l'Ouvrage intitulé : *Lineæ tertii ordinis Newtonianæ*.

Si l'on suppose en particulier $n = 1$, les équations (26) et (28) coïncideront avec la suivante

$$\Delta u = \alpha(du + \beta), \tag{29}$$

et, par conséquent, avec la formule (3) de la seizième Leçon. Ajoutons que les formules (28), (29) comprennent la théorie des maxima et minima des fonctions de plusieurs variables, et que le théorème I de la vingtième Leçon pourrait être immédiatement déduit de la formule (28).

FIN DU CALCUL DIFFÉRENTIEL.

NOTE

SUR LA DÉTERMINATION APPROXIMATIVE DES RACINES D'UNE ÉQUATION ALGÉBRIQUE OU TRANSCENDANTE.

Soit

$$f(x) = 0 \tag{1}$$

une équation dans laquelle $f(x)$ représente une fonction quelconque algébrique ou transcendante de la variable x. Désignons d'ailleurs par a la valeur approchée réelle ou imaginaire d'une racine de cette équation, et par i une expression réelle ou imaginaire, mais dont le module soit très petit. La formule (49) de la page 450 donnera

$$(2)\quad \left\{\begin{aligned} f(a+i) = {} & f(a) + \frac{i}{1} f'(a) + \ldots \\ & + \frac{i^{n-1}}{1.2.3\ldots(n-1)} f^{(n-1)}(a) + \frac{i^n}{1.2.3\ldots n}[f^{(n)}(a) + \mathrm{I}], \end{aligned}\right.$$

le module de I devant lui-même très peu différer de zéro. Donc, pour que le binôme $a + i$ se réduise à la racine en question, il suffira que l'on ait

$$(3)\quad \left\{\begin{aligned} & f(a) + \frac{i}{1} f'(a) + \frac{i^2}{1.2} f''(a) + \ldots \\ & + \frac{i^{n-1}}{1.2.3\ldots(n-1)} f^{(n-1)}(a) + \frac{i^n}{1.2.3\ldots n}[f^{(n)}(a) + \mathrm{I}] = 0. \end{aligned}\right.$$

Si, dans la dernière formule, on néglige I vis-à-vis de $f^{(n)}(a)$, on obtiendra la suivante

$$(4)\quad \left\{\begin{aligned} & f(a) + \frac{i}{1} f'(a) + \frac{i^2}{1.2} f''(a) + \ldots \\ & + \frac{i^{n-1}}{1.2.3\ldots(n-1)} f^{(n-1)}(a) + \frac{i^n}{1.2.3\ldots n} f^{(n)}(a) = 0, \end{aligned}\right.$$

qui se réduira, pour $n = 1$, à

$$f(a) + i f'(a) = 0, \tag{5}$$

pour $n = 2$, à

$$f(a) + i f'(a) + \frac{i^2}{2} f''(a) = 0, \tag{6}$$

pour $n = 3$, à

$$f(a) + i f'(a) + \frac{i^2}{2} f''(a) + \frac{i^3}{6} f'''(a) = 0, \tag{7}$$

etc.

Si maintenant on substitue, dans le binôme $a + i$, la valeur unique de i propre à vérifier l'équation (5), savoir

$$i = -\frac{f(a)}{f'(a)}, \tag{8}$$

ou si, parmi les valeurs de i propres à vérifier l'une des équations (6), (7), ..., on choisit celle qui a le plus petit module, le binôme $a + i$ représentera en général non la valeur exacte, mais une seconde valeur approchée de la racine que l'on considère; et l'on pourra même, dans un grand nombre de cas, apprécier le degré d'approximation de cette seconde valeur à l'aide des principes que je vais établir.

Supposons d'abord que la fonction $f(x)$ et la quantité a soient réelles. On démontrera sans peine les propositions suivantes :

Théorème I. — *Si la fonction $f(x)$, étant continue entre les limites*

$$x = a, \quad x = a + 2i, \tag{9}$$

acquiert à ces deux limites des valeurs de signes contraires, si d'ailleurs la fonction dérivée $f'(x)$ ne change pas de signe entre les limites dont il s'agit, l'équation (1) admettra une racine réelle, mais une seule, comprise entre ces mêmes limites.

Démonstration. — En effet, la fonction $f'(x)$ ne changeant pas de signe entre les limites $x = a$, $x = a + 2i$, la fonction $f(x)$, supposée continue, croîtra ou décroîtra constamment depuis la première limite jusqu'à la seconde, en variant avec x par degrés insensibles, et acquerra ainsi toutes les valeurs intermédiaires entre les valeurs extrêmes. Donc, puisque ces valeurs sont de signes contraires, la fonction $f(x)$ s'évanouira, mais une fois seulement, entre les limites $x = a$, $x = a + 2i$.

Théorème II. — *Concevons que, la quantité i étant déterminée par l'équation (5) ou (8), on nomme B un nombre égal ou supérieur à la plus grande valeur numérique que peut acquérir la fonction $f''(x)$ entre les limites $x = a$, $x = a + 2i$. Si la valeur numérique de la quantité $f'(a)$ est supérieure à celle du produit*

$$2Bi, \tag{10}$$

l'équation (1) admettra une seule racine réelle, renfermée entre les limites a, $a + 2i$.

Démonstration. — En effet, si l'on pose

$$x = a + i + z, \tag{11}$$

on aura, en vertu de l'équation (5) et des formules (47), (48) de la huitième Leçon,

$$\left\{ \begin{aligned} f(x) &= f(a) + (i+z) f'(a) + \frac{(i+z)^2}{2} f''[a + \theta(i+z)] \\ &= z f'(a) + \frac{(i+z)^2}{2} f''[a + \theta(i+z)], \end{aligned} \right. \tag{12}$$

$$f'(x) = f'(a) + (i+z) f''[a + \Theta(i+z)], \tag{13}$$

θ, Θ désignant des nombres inférieurs à l'unité. Or, si la condition énoncée dans le théorème II est remplie, la fonction $f'(x)$ conservera évidemment le même signe que $f'(a)$ pour toutes les valeurs de z comprises entre les limites $z = -i$, $z = +i$, par conséquent, pour toutes les valeurs de x comprises entre les limites a, $a + 2i$, tandis que les valeurs extrêmes de la fonction $f(x)$, savoir

$$-i f'(a) \quad \text{et} \quad i[f'(a) + 2i f''(a + 2\theta i)], \tag{14}$$

seront affectées de signes contraires. Donc, en vertu du théorème I, l'équation (1) aura une seule racine réelle comprise entre les limites a, $a+2i$.

THÉORÈME III. — *Concevons que, la quantité i étant déterminée par la formule* (8), *on pose*

$$b = a + i \tag{15}$$

et

$$j = -\frac{f(b)}{f'(b)}. \tag{16}$$

Soient d'ailleurs A *la plus petite valeur numérique que puisse acquérir la fonction $f'(x)$ entre les limites $x = a$, $x = a + 2i$, et* B *la plus grande valeur numérique que puisse acquérir entre les mêmes limites la fonction $f''(x)$. Si la valeur numérique du rapport*

$$\frac{2\mathrm{B}i}{\mathrm{A}} \tag{17}$$

est inférieure à l'unité, celle de j ne surpassera pas le produit

$$\frac{\mathrm{B}}{2\mathrm{A}} i^2, \tag{18}$$

et l'équation (1) *admettra une racine réelle comprise non seulement entre les limites a, $a+2i$, mais encore entre les limites b, $b+2j$.*

Demonstration. — Si, comme on le suppose, la valeur numérique du rapport (17) reste inférieure à l'unité, la valeur numérique de $2\mathrm{B}i$ ne surpassera pas celle de $f'(a)$. Donc, en vertu du théorème II, l'équation (1) offrira une racine réelle, mais une seule, renfermée entre les limites a, $a+2i$. De plus, en désignant par θ un nombre compris entre les limites 0, 1, et ayant égard à la formule (5), on trouvera

$$f(b) = f(a+i) = f(a) + i f'(a) + \frac{i^2}{1.2} f''(a+\theta i) = \frac{i^2}{2} f''(a+\theta i); \tag{19}$$

puis on tirera de l'équation (19), combinée avec les formules (15) et (16),

$$j = -\frac{f(a+i)}{f'(a+i)} = -\frac{\frac{i^2}{2} f''(a+\theta i)}{f'(a+i)}; \tag{20}$$

et comme, par hypothèse, les valeurs numériques des quantités

$$f''(a+\theta i), \quad f'(a+i)$$

seront, la première inférieure à B, la seconde supérieure à A, il est clair que la valeur numérique de j ne surpassera pas celle du produit

$$\frac{\mathrm{B}}{2\mathrm{A}} i^2.$$

Donc la quantité j sera renfermée entre les limites

$$-\frac{\mathrm{B}}{2\mathrm{A}} i^2, \quad +\frac{\mathrm{B}}{2\mathrm{A}} i^2,$$

et la quantité $2j$ entre les suivantes

$$-\frac{\mathrm{B}i}{\mathrm{A}} i, \quad +\frac{\mathrm{B}i}{\mathrm{A}} i,$$

par conséquent entre les limites $-\frac{i}{2}$, $+\frac{i}{2}$. Donc

$$b + 2j = a + i + 2j$$

sera renfermé, ainsi que b, entre les limites a, $a+2i$; et, si l'on fait varier x depuis $x = b$ jusqu'à $x = b + 2j$, les valeurs numériques des fonctions $f'(x)$, $f''(x)$ demeureront, la première supérieure à A, la seconde inférieure à B. Enfin, comme, j étant inférieur à i, et A supérieur à $f'(b)$ (abstraction faite des signes), la valeur numérique du produit $2\mathrm{B}j$ ne surpassera pas celle du produit $2\mathrm{B}i$ qui est inférieure à A, ni, à plus forte raison, celle de $f'(b)$, on prouvera par des raisonnements semblables à ceux à l'aide desquels on a établi le théorème II, que la racine réelle déjà mentionnée est renfermée entre les limites b, $b+2j$.

Corollaire I. — On voit par ce qui précède comment, étant donnée la valeur approchée a d'une racine réelle de l'équation (1), on peut, à l'aide de la formule (5) ou (8), obtenir de nouvelles valeurs approchées et resserrer de plus en plus les limites entre lesquelles la racine se trouve comprise. C'est dans l'emploi de cette même formule que consiste la méthode de Newton pour la résolution approximative des équations numériques. Il est bon d'observer que les différences entre la racine cherchée et ses deux premières valeurs approchées a, b seront respectivement inférieures, l'une à la valeur numérique de $2i$, l'autre à la valeur numérique de $2j$, et, à plus forte raison, au produit

$$\frac{B}{A}i^2 = \frac{Bi}{2A}(2i).$$

Donc, si l'on désigne par ρ la valeur numérique de i, et celle de la quantité $\frac{Bi}{2A}$ par

$$\varepsilon = \frac{B\rho}{2A}, \tag{21}$$

les différences dont il s'agit ne surpasseront pas les nombres

$$2\rho, \quad \frac{B}{A}\rho^2 = 2\rho\varepsilon.$$

De même, si l'on nomme c, d, ... les troisième, quatrième, ... valeurs approchées de la racine en question, elles n'en différeront que de quantités qui ne surpasseront pas les nombres

$$\frac{B}{A}(\rho\varepsilon)^2 = 2\rho\varepsilon^3, \quad \frac{B}{A}(\rho\varepsilon^3)^2 = 2\rho\varepsilon^7, \quad \dots.$$

Donc les erreurs que l'on pourra commettre en substituant à la racine cherchée ses valeurs approchées successives

$$a, \ b, \ c, \ d, \ \dots \tag{22}$$

seront respectivement inférieures aux divers termes de la suite

$$2\rho, \ 2\rho\varepsilon, \ 2\rho\varepsilon^3, \ 2\rho\varepsilon^7, \ \dots. \tag{23}$$

Ajoutons que ces termes se réduisent à

$$k\varepsilon, \ k\varepsilon^2, \ k\varepsilon^4, \ k\varepsilon^8, \ \dots, \tag{24}$$

lorsqu'on y transporte la valeur de ρ tirée de l'équation (21), en faisant pour abréger

$$k = \frac{4A}{B}. \tag{25}$$

Supposons maintenant que le nombre ε ne surpasse pas une unité décimale de l'ordre n, en sorte qu'on ait

$$\varepsilon < \left(\frac{1}{10}\right)^{\frac{1}{n}}. \tag{26}$$

Si l'on suppose en même temps

$$k < \left(\frac{1}{10}\right)^{\pm m}, \tag{27}$$

m désignant un nombre entier quelconque, les termes de la série (24) seront respectivement inférieurs aux nombres

$$\left(\frac{1}{10}\right)^{n\pm m}, \ \left(\frac{1}{10}\right)^{2n\pm m}, \ \left(\frac{1}{10}\right)^{4n\pm m}, \ \left(\frac{1}{10}\right)^{8n\pm m}, \ \dots. \tag{28}$$

Donc, parmi les chiffres qui suivront les unités de l'ordre m, si l'on a

$$k < \left(\frac{1}{10}\right)^{m}, \tag{29}$$

ou les unités décimales de l'ordre m, si l'on a

$$k < (10)^m, \tag{30}$$

le nombre de ceux sur lesquels on pourra compter sera égal à n dans la première valeur approchée de la racine réelle de l'équation (1), à $2n$ dans la seconde valeur approchée, à $4n$ dans la troisième, ... Donc ce nombre sera doublé à chaque opération nouvelle. La proposition que nous venons d'énoncer s'accorde avec celles auxquelles M. Fourier est parvenu dans le *Bulletin de la Société philomathique* de mai 1818, en cherchant le nombre de décimales exactes que fournit à chaque opération nouvelle la méthode de Newton.

Si l'on a

$$k < 1, \tag{31}$$

les termes de la série (28) deviendront respectivement

$$\left(\frac{1}{10}\right)^n, \quad \left(\frac{1}{10}\right)^{2n}, \quad \left(\frac{1}{10}\right)^{4n}, \quad \left(\frac{1}{10}\right)^{8n}, \quad \ldots, \tag{32}$$

et par conséquent le nombre des décimales sur l'exactitude desquelles on pourra compter sera doublé pour le moins à chaque opération nouvelle.

Corollaire II. — Comme, en vertu de la formule (21), la valeur numérique de l'expression (17), savoir

$$\frac{2B\rho}{A},$$

se réduit à 4ε, il est clair que cette valeur numérique sera inférieure à l'unité, si l'on a

$$\varepsilon < \frac{1}{4}. \tag{33}$$

Corollaire III. — Il est bon d'observer encore que, si la condition énoncée dans le théorème III se trouve remplie, si d'ailleurs la fonction $f''(x)$ ne change pas de signe entre les limites $x = a$, $x = a + 2i$, la valeur de

$$j = c - b,$$

déterminée par l'équation (20), sera une quantité affectée du même signe que le rapport

$$\frac{f''(a)}{f'(a)}.$$

Comme on pourra en dire autant de chacune des différences

$$c - b, \quad d - c, \quad \ldots,$$

il est clair que toutes ces différences seront des quantités de même signe et que les valeurs approchées

$$b, \quad c, \quad d, \quad \ldots$$

formeront une série croissante ou une série décroissante. Cette remarque s'accorde encore avec l'une de celles que M. Fourier a énoncées dans le Bulletin déjà cité.

Supposons à présent que l'on prenne pour i, non plus la racine unique de l'équation (5), mais celle des racines de l'équation (6) qui s'approche indéfiniment de zéro en même temps que la quantité $f(a)$, savoir

$$i = -\frac{2f(a)}{f'(a)} \frac{1}{1 + \sqrt{1 - 2\frac{f(a)}{f'(a)}\frac{f''(a)}{f'(a)}}}. \tag{34}$$

Alors les théorèmes II et III devront être remplacés par ceux que je vais énoncer.

Théorème IV. — *Concevons que, la quantité i étant déterminée par la formule* (34), *on nomme C un nombre égal ou supérieur à la plus grande valeur numérique que peut acquérir la fonction $f''(x)$ entre les limites $x = a$, $x = a + 2i$. Si les deux expressions*

$$f'(a), \quad f'(a) + 2if''(a) \tag{35}$$

sont des quantités de même signe, et offrent des valeurs numériques qui surpassent celle du produit

$$2Ci^2, \tag{36}$$

l'équation (1) *admettra une seule racine réelle renfermée entre les limites a, $a + 2i$.*

Démonstration. — En effet, si l'on pose

$$x = a + i + z,$$

on aura, en vertu de l'équation (6) et des formules (48), (49) de la huitième Leçon,

$$(37)\quad \left\{\begin{aligned} f(x) &= f(a) + (i+z)f'(a) + \frac{(i+z)^2}{2}f''(a) \\ &\quad + \frac{(i+z)^3}{6}f'''[a+\theta(i+z)] \\ &= zf'(a) + z\left(i+\frac{z}{2}\right)f''(a) + \frac{(i+z)^3}{6}f'''[a+\theta(i+z)], \end{aligned}\right.$$

$$(38)\quad f'(x) = f'(a) + (i+z)f''(a) + \frac{(i+z)^2}{2}f'''[a+\Theta(i+z)],$$

θ, Θ désignant des nombres inférieurs à l'unité. Or, si les conditions énoncées dans le théorème IV sont remplies, la fonction $f'(x)$ conservera évidemment le même signe que $f'(a)$ pour toutes les valeurs de z comprises entre les limites $z=-i$, $z=i$, par conséquent pour toutes les valeurs de x comprises entre les limites $x=a$, $x=a+2i$, tandis que les valeurs extrêmes de la fonction $f(x)$, savoir

$$(39)\quad -i\left[f'(a)+\frac{i}{2}f''(a)\right],\qquad i\left[f'(a)+\frac{3i}{2}f''(a)+\frac{4i^2}{3}f'''(a+2\theta i)\right],$$

seront affectées de signes contraires. Donc, en vertu du théorème I, l'équation (1) aura une seule racine réelle comprise entre les limites a, $a+2i$.

Théorème V. — *Concevons que, la quantité i étant déterminée par la formule* (34), *on pose*

$$(40)\qquad b = a + i$$

et

$$(41)\qquad j = -\frac{2f(b)}{f'(b)}\,\frac{1}{1+\sqrt{1-2\dfrac{f(b)}{f'(b)}\dfrac{f''(b)}{f'(b)}}}.$$

Soient d'ailleurs A *la plus petite valeur numérique que puisse acquérir la fonction $f'(x)$ entre les limites $x=a$, $x=a+2i$, et* B, C *les plus grandes valeurs numériques que puissent acquérir, entre les mêmes*

limites, les fonctions $f''(x)$, $f'''(x)$. Si les rapports

$$(42)\qquad \frac{2Bi}{A},\quad \frac{2Ci^2}{A},\quad \frac{2Ci^2}{A\pm 2Bi},$$

restent, abstraction faite des signes, inférieurs à l'unité, la valeur numérique de j ne surpassera pas celle du produit

$$(43)\qquad \frac{2}{11}\frac{C}{A}i^2,$$

et l'équation (1) *admettra une racine réelle comprise, non seulement entre les limites a, $a+2i$, mais encore entre les limites b, $b+2j$.*

Démonstration. — Si, comme on le suppose, les valeurs numériques des rapports (42) restent inférieures à l'unité, les expressions (35) seront des quantités de même signe, et leurs valeurs numériques surpasseront le produit $2Ci^2$. Donc, en vertu du théorème IV, l'équation (1) offrira une racine réelle, mais une seule, renfermée entre les limites a, $a+2i$. De plus, en désignant par θ un nombre inférieur à 1, et ayant égard à la formule (6), on trouvera

$$(44)\quad \left\{\begin{aligned} f(b) &= f(a+i) \\ &= f(a)+if'(a)+\frac{i^2}{1.2}f''(a)+\frac{i^3}{1.2.3}f'''(a+\theta i) = \frac{i^3}{6}f'''(a+\theta i), \end{aligned}\right.$$

puis on tirera de cette dernière, combinée avec les formules (40) et (41),

$$(45)\quad j = -\frac{i^3}{3}\,\frac{f'''(a+\theta i)}{f'(a+i)}\,\frac{1}{1+\sqrt{1-\dfrac{i^3}{3}\dfrac{f''(a+i)}{f'(a+i)}\dfrac{f'''(a+\theta i)}{f'(a+i)}}}.$$

D'autre part, comme les valeurs numériques des quantités $f''(a+i)$, $f'''(a+\theta i)$ ne surpasseront pas les nombres B, C, la valeur numérique de l'expression

$$\frac{i^3}{3}\,\frac{f''(a+i)}{f'(a+i)}\,\frac{f'''(a+\theta i)}{f'(a+i)}$$

ne surpassera pas celle du produit

$$\frac{1}{12}\,\frac{2Bi}{A}\,\frac{2Ci^2}{A},$$

inférieure elle-même, en vertu de l'hypothèse admise, à la fraction

$$\frac{1}{12}.$$

Par suite, la valeur numérique de j ne surpassera pas celle du produit

$$\frac{i^2}{3}\,\frac{C}{A}\,\frac{1}{1+\sqrt{1-\frac{1}{12}}}=\frac{2}{6+\sqrt{33}}\,\frac{C}{A}\,i^2,$$

ni, à plus forte raison, celle du produit

$$\frac{2}{11}\,\frac{C}{A}\,i^2.$$

Donc la quantité $2j$ sera renfermée entre les limites

$$-\frac{2}{11}\,\frac{2Ci^2}{A}\,i,\quad \frac{2}{11}\,\frac{2Ci^2}{A}\,i,$$

auxquelles on pourra substituer les deux suivantes

$$-\frac{2}{11}\,i,\quad \frac{2}{11}\,i,$$

et la somme $b+2j=a+i+2j$ entre les limites

$$a+\left(1-\frac{2}{11}\right)i,\quad a+\left(1+\frac{2}{11}\right)i,$$

par conséquent, entre les quantités a, $a+2i$. Donc, si l'on fait varier x entre les limites b, $b+2j$, les fonctions $f'(x)$, $f''(x)$, $f'''(x)$ resteront (abstraction faite des signes) la première supérieure à A, la seconde inférieure à B, la troisième inférieure à C, et les deux expressions

$$f'(b),\quad f'(b)+2jf''(b) \tag{46}$$

seront des quantités de même signe, dont les valeurs numériques, supérieures au plus petit des deux nombres

$$A,\quad A\pm 2Bj>\left(1-\frac{2}{11}\right)A,$$

surpasseront, à plus forte raison, le produit

$$2Cj^2<\frac{8}{121}Ci^2<\frac{4}{121}A. \tag{47}$$

Cela posé, on prouvera, par des raisonnements semblables à ceux à l'aide desquels on a établi le théorème IV, que la racine réelle déjà mentionnée est comprise entre les limites b, $b+2j$.

Corollaire I. — On voit, par ce qui précède, comment, étant donnée la valeur approchée a d'une racine de l'équation (1), on peut, à l'aide de la formule (6) ou (34), obtenir de nouvelles valeurs approchées, et resserrer de plus en plus les limites entre lesquelles la racine se trouve comprise. C'est dans l'emploi de cette formule que consiste la méthode de Halley pour la résolution approximative des équations numériques. Il est bon d'observer que les différences entre la racine cherchée et ses deux premières valeurs approchées a, b seront respectivement inférieures l'une à la valeur numérique de $2i$, l'autre à la valeur numérique de $2j$, et à plus forte raison à celle du produit

$$\frac{4}{11}\,\frac{C}{A}\,i^2=\frac{2Ci^2}{11A}(2i).$$

Donc, si l'on désigne par ρ la valeur numérique de i, et celle de la quantité $\frac{2Ci^2}{11A}$ par

$$\varsigma^2=\frac{2C\rho^2}{11A}, \tag{48}$$

les différences dont il s'agit ne surpasseront pas les nombres

$$2\rho,\quad \frac{4C}{11A}\rho^3=2\rho\varsigma^2.$$

De même, si l'on nomme c, d, ... les troisième, quatrième, ... valeurs approchées de la racine en question, elles n'en différeront que de quantités qui ne surpasseront pas les nombres

$$\frac{4C}{11A}(\rho\varepsilon^2)^3 = 2\rho\varepsilon^8, \qquad \frac{4C}{11A}(\rho\varepsilon^8)^3 = 2\rho\varepsilon^{26}, \qquad \ldots.$$

Donc les erreurs que l'on pourra commettre en substituant à la racine cherchée ses valeurs approchées successives

$$a, \quad b, \quad c, \quad d, \quad \ldots$$

seront respectivement inférieures aux divers termes de la suite

$$(49) \qquad 2\rho, \quad 2\rho\varepsilon^2, \quad 2\rho\varepsilon^8, \quad 2\rho\varepsilon^{26}, \quad \ldots.$$

Ajoutons que ces termes se réduisent à

$$(50) \qquad k\varepsilon, \quad k\varepsilon^3, \quad k\varepsilon^9, \quad k\varepsilon^{27}, \quad \ldots,$$

lorsqu'on y transporte la valeur de ρ tirée de l'équation (48), en supposant ε positif, et faisant pour abréger

$$(51) \qquad k = 2\sqrt{\frac{11A}{2C}}.$$

Concevons maintenant que le nombre ε ne surpasse pas une unité décimale de l'ordre n, en sorte qu'on ait

$$(52) \qquad \varepsilon < \left(\frac{1}{10}\right)^n.$$

Si l'on suppose d'ailleurs

$$(53) \qquad k < \left(\frac{1}{10}\right)^{\pm m},$$

m désignant un nombre entier quelconque, les termes de la série (50) seront respectivement inférieurs aux nombres

$$(54) \qquad \left(\frac{1}{10}\right)^{n\pm m}, \quad \left(\frac{1}{10}\right)^{3n\pm m}, \quad \left(\frac{1}{10}\right)^{9n\pm m}, \quad \left(\frac{1}{10}\right)^{27n\pm m}, \quad \ldots.$$

Donc, parmi les chiffres qui suivront les unités de l'ordre m, si l'on a

$$(55) \qquad k < \left(\frac{1}{10}\right)^m,$$

ou les unités décimales de l'ordre m, si l'on a .

$$(56) \qquad k < (10)^m,$$

le nombre de ceux sur lesquels on pourra compter sera égal à n dans la première valeur approchée de la racine réelle de l'équation (1), à $3n$ dans la seconde valeur approchée, à $9n$ dans la troisième, etc. Donc ce nombre sera triplé à chaque opération nouvelle.

Si l'on a

$$(57) \qquad k < 1,$$

les termes de la série (54) deviendront respectivement

$$(58) \qquad \left(\frac{1}{10}\right)^n, \quad \left(\frac{1}{10}\right)^{3n}, \quad \left(\frac{1}{10}\right)^{9n}, \quad \left(\frac{1}{10}\right)^{27n}, \quad \ldots,$$

et par conséquent le nombre des décimales sur lesquelles on pourra compter sera triplé pour le moins à chaque opération nouvelle.

Corollaire II. — Il est bon d'observer encore que, si les conditions énoncées dans le théorème V sont remplies, si d'ailleurs la fonction $f''(x)$ ne change pas de signe entre les limites $x = a$, $x = a + 2i$, la valeur de

$$j = c - b,$$

déterminée par l'équation (45), sera une quantité affectée du même signe que le produit

$$\frac{f''(a)}{f'(a)} i.$$

Donc, si le rapport

$$(59) \qquad \frac{f''(a)}{f'(a)}$$

est positif, les différences

$$i = b - a, \qquad j = c - b, \qquad \ldots$$

seront des quantités de même signe, et les valeurs approchées a, b, c, d, ... formeront une série croissante ou décroissante. Le contraire arriverait si le rapport (59) devenait négatif.

Des raisonnements semblables à ceux que nous avons développés ci-dessus suffiraient pour faire voir que les formules (7) et suivantes, appliquées à la détermination approximative des racines de l'équation (1), fournissent pour ces racines, et sous certaines conditions, des valeurs approchées successives dans lesquelles le nombre des chiffres exacts est quadruplé, quintuplé, etc., à chaque opération nouvelle.

Il nous reste à montrer de quelle manière on doit modifier les principes que nous venons d'exposer, pour les rendre applicables à la recherche des racines imaginaires des fonctions algébriques ou transcendantes. Nous établirons, à ce sujet, les propositions suivantes :

Lemme I. — *Si l'on désigne par α, β, γ, δ quatre quantités réelles, la somme*

$$\alpha\gamma + \beta\delta \tag{60}$$

sera toujours comprise entre les limites

$$-(\alpha^2+\beta^2)^{\frac{1}{2}}(\gamma^2+\delta^2)^{\frac{1}{2}}, \quad (\alpha^2+\beta^2)^{\frac{1}{2}}(\gamma^2+\delta^2)^{\frac{1}{2}}. \tag{61}$$

Démonstration. — On aura identiquement

$$(\alpha\gamma+\beta\delta)^2+(\alpha\delta-\beta\gamma)^2=(\alpha^2+\beta^2)(\gamma^2+\delta^2) \tag{62}$$

et, par suite,

$$(\alpha\gamma+\beta\delta)^2 \overline{\gtrless} (\alpha^2+\beta^2)(\gamma^2+\delta^2). \tag{63}$$

Donc la valeur numérique de la somme

$$\alpha\gamma+\beta\delta$$

sera inférieure ou tout au plus égale au produit

$$(\alpha^2+\beta^2)^{\frac{1}{2}}(\gamma^2+\delta^2)^{\frac{1}{2}},$$

et par conséquent cette somme sera renfermée entre les limites (61).

Scolie. — On prouverait de même que la somme

$$\alpha\alpha_1+\beta\beta_1+\gamma\gamma_1+\dots \tag{64}$$

offre une valeur numérique inférieure ou tout au plus égale à celle du produit

$$(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\dots)^{\frac{1}{2}}(\alpha_1^2+\beta_1^2+\gamma_1^2+\dots)^{\frac{1}{2}}, \tag{65}$$

quelles que soient les valeurs réelles de α, β, γ, ..., α_1, β_1, γ_1, ...

Lemme II. — *La somme de deux expressions imaginaires offre, ainsi que leur différence, un module compris entre la somme et la différence de leurs modules.*

Démonstration. — En effet, soient

$$\alpha+\beta\sqrt{-1}, \quad \gamma+\delta\sqrt{-1} \tag{66}$$

les expressions imaginaires proposées. Leur somme et leur différence

$$\alpha+\gamma+(\beta+\delta)\sqrt{-1}, \quad \alpha-\gamma+(\beta-\delta)\sqrt{-1} \tag{67}$$

offriront pour modules les deux quantités

$$\left\{\begin{array}{l}[\alpha^2+\beta^2+2(\alpha\gamma+\beta\delta)+\gamma^2+\delta^2]^{\frac{1}{2}},\\ [\alpha^2+\beta^2-2(\alpha\gamma+\beta\delta)+\gamma^2+\delta^2]^{\frac{1}{2}},\end{array}\right. \tag{68}$$

qui, d'après le lemme I, seront l'une et l'autre renfermées entre les deux limites

$$\left\{\begin{array}{l}(\alpha^2+\beta^2-2\sqrt{\alpha^2+\beta^2}\sqrt{\gamma^2+\delta^2}+\gamma^2+\delta^2)^{\frac{1}{2}}=\pm(\sqrt{\alpha^2+\beta^2}-\sqrt{\gamma^2+\delta^2}),\\ (\alpha^2+\beta^2+2\sqrt{\alpha^2+\beta^2}\sqrt{\gamma^2+\delta^2}+\gamma^2+\delta^2)^{\frac{1}{2}}=\quad\sqrt{\alpha^2+\beta^2}+\sqrt{\gamma^2+\delta^2},\end{array}\right. \tag{69}$$

c'est-à-dire entre la somme et la différence des modules des expressions (66).

Lemme III. — *Si l'on désigne par α, β, u, v des quantités réelles, et par θ un nombre inférieur à l'unité, le module de l'expression imaginaire*

$$\alpha+\theta u+(\beta+\theta v)\sqrt{-1} \tag{70}$$

sera compris entre les modules des deux suivantes :

$$\alpha+\beta\sqrt{-1},\quad \alpha+u+(\beta+v)\sqrt{-1}. \tag{71}$$

Démonstration. — Comme le module de l'expression (70), savoir

$$\alpha^2+\beta^2+2\theta(\alpha u+\beta v)+\theta^2(u^2+v^2), \tag{72}$$

peut être présenté sous la forme

$$\frac{[(u^2+v^2)\theta+\alpha u+\beta v]^2+(\alpha v-\beta u)^2}{u^2+v^2}, \tag{73}$$

il est clair qu'il croît ou décroît constamment, tandis que l'on fait croître θ entre les limites $\theta=0$, $\theta=1$. Donc la plus grande et la plus petite des valeurs qu'il reçoit alors sont celles qui correspondent à ces limites, c'est-à-dire les modules des expressions (71).

Théorème VI. — *Soient*

$$x=p+q\sqrt{-1}$$

une variable imaginaire,

$$a=\lambda+\mu\sqrt{-1}$$

une valeur particulière de cette variable, et

$$i=\alpha+\beta\sqrt{-1}$$

un accroissement attribué à la valeur a. Concevons d'ailleurs que, p, q, λ, μ, α, β étant des quantités réelles, on désigne par

$$\rho=(\alpha^2+\beta^2)^{\frac{1}{2}} \tag{74}$$

le module de $\alpha+\beta\sqrt{-1}$, par $f(x)$ une fonction dont les dérivées ne puissent s'évanouir toutes à la fois, et par $\varphi(p,q)$, $\chi(p,q)$ deux fonctions réelles de p et de q propres à vérifier la formule

$$f(p+q\sqrt{-1})=\varphi(p,q)+\sqrt{-1}\,\chi(p,q). \tag{75}$$

Enfin, posons

$$x=a+i+z \tag{76}$$

et

$$\frac{d\varphi(p,q)}{dp}=\varphi'(p,q),\qquad \frac{d\chi(p,q)}{dp}=\chi'(p,q). \tag{77}$$

Si la fonction $f(x)$ reste continue, ainsi que sa dérivée $f'(x)$, et conserve un module supérieur à celui de l'expression

$$f(a+i), \tag{78}$$

pour toutes les valeurs réelles ou imaginaires de z qui offrent un module égal à ρ, si de plus les valeurs correspondantes du rapport

$$\frac{\varphi'(p,q)}{\chi'(p,q)} \tag{79}$$

sont telles qu'on ne puisse trouver parmi ces dernières deux quantités dont le produit se réduise à -1, l'équation (1) admettra une seule racine imaginaire de la forme $a+i+z$, le module de z étant inférieur à ρ.

Démonstration. — En effet, si, dans la fonction

$$f(x)=f(a+i+z),$$

on fait varier z par degrés insensibles, mais de manière que le module de z ne dépasse pas la limite ρ, on obtiendra pour cette fonction une infinité de valeurs dont l'une offrira un module plus petit que toutes les autres. Soient z_0, p_0, q_0 les valeurs de z, p, q correspondantes à ce plus petit module, en sorte qu'on ait

$$a+i+z_0=p_0+q_0\sqrt{-1}. \tag{80}$$

Le module de z_0 sera plus petit que ρ, et l'expression

$$f(a+i+z_0)=f\left(p_0+q_0\sqrt{-1}\right) \tag{81}$$

s'évanouira nécessairement; car, si le contraire arrivait, alors, en attribuant à la variable z une valeur infiniment peu différente de z_0, et par conséquent au module de z une valeur comprise entre les limites 0, ρ, on pourrait choisir ces valeurs de manière que le module de $f(a+i+z)$ devînt inférieur au module de $f(a+i+z_0)$ (*voir* le théorème V de la treizième Leçon). Donc, si les conditions énoncées dans le théorème VI sont remplies, l'expression $f(a+i+z_0)$ sera nulle, et l'équation (1) admettra une racine $x=a+i+z$, dans laquelle le module de z restera inférieur à ρ. J'ajoute qu'une seule racine $a+i+z_0=p_0+q_0\sqrt{-1}$ jouira de cette propriété; car, si l'on avait en même temps

$$f(p_0+q_0\sqrt{-1})=0, \qquad f[p_0+u+(q_0+v)\sqrt{-1}]=0, \tag{82}$$

p_0+u, q_0+v désignant des valeurs réelles de p et de q, distinctes de p_0, q_0 et correspondantes à un module de z plus petit que ρ, on en conclurait

$$\varphi(p_0,q_0)=0, \qquad \varphi(p_0+u,q_0+v)=0, \tag{83}$$

$$\chi(p_0,q_0)=0, \qquad \chi(p_0+u,q_0+v)=0. \tag{84}$$

D'ailleurs, en ayant égard non seulement à la formule (75) de laquelle on tire

$$\left\{\begin{aligned}\frac{d\varphi(p,q)}{dq}+\sqrt{-1}\,\frac{d\chi(p,q)}{dq}&=\sqrt{-1}\,f'(p+q\sqrt{-1})\\&=\sqrt{-1}\left[\frac{d\varphi(p,q)}{dp}+\sqrt{-1}\,\frac{d\chi(p,q)}{dp}\right],\end{aligned}\right. \tag{85}$$

$$\left\{\begin{aligned}\frac{d\varphi(p,q)}{dq}&=-\frac{d\chi(p,q)}{dp}=-\chi'(p,q),\\ \frac{d\chi(p,q)}{dq}&=\frac{d\varphi(p,q)}{dp}=\varphi'(p,q),\end{aligned}\right. \tag{86}$$

mais encore à la formule (20) de la vingt-troisième Leçon, et représentant par θ, Θ deux nombres inférieurs à l'unité, on trouverait

$$\left\{\begin{aligned}\varphi(p_0+u,q_0+v)&=\varphi(p_0,q_0)+u\,\varphi'(p_0+\theta u,q_0+\theta v)-v\,\chi'(p_0+\theta u,q_0+\theta v),\\ \chi(p_0+u,q_0+v)&=\chi(p_0,q_0)+u\,\chi'(p_0+\Theta u,q_0+\Theta v)+v\,\varphi'(p_0+\Theta u,q_0+\Theta v);\end{aligned}\right. \tag{87}$$

puis on déduirait de ces dernières équations combinées avec les formules (83) et (84)

$$\frac{\varphi'(p_0+\theta u,q_0+\theta v)}{\chi'(p_0+\theta u,q_0+\theta v)}\,\frac{\varphi'(p_0+\Theta u,q_0+\Theta v)}{\chi'(p_0+\Theta u,q_0+\Theta v)}=-1. \tag{88}$$

Or l'équation (88) ne pourrait subsister qu'autant que les deux valeurs du rapport (79) qui correspondent : 1° à $p=p_0+\theta u$, $q=q_0+\theta v$; 2° à $p=p_0+\Theta u$, $q=q_0+\Theta v$ fourniraient un produit égal -1, ce qui n'aura pas lieu dans l'hypothèse admise, attendu que les modules des différences

$$p_0+\theta u+(q_0+\theta v)\sqrt{-1}-(a+i), \quad p_0+\Theta u+(q_0+\Theta v)\sqrt{-1}-(a+i)$$

seront, en vertu du lemme III, compris entre les modules des suivantes

$$p_0+q_0\sqrt{-1}-(a+i), \quad p_0+u+(q_0+v)\sqrt{-1}-(a+i),$$

et par conséquent inférieurs à ρ. Donc alors l'équation (1) n'offrira qu'une racine imaginaire correspondante à un module de z plus petit que la quantité ρ.

Corollaire. — Lorsque le rapport (79) conserve constamment le même signe pour toutes les valeurs de z qui offrent un module inférieur à ρ, alors parmi ces valeurs de z on n'en peut trouver qu'une seule à laquelle corresponde une racine de l'équation (1).

Théorème VII. — *Soient*

$$x=p+q\sqrt{-1}$$

une variable imaginaire,

$$a=\lambda+\mu\sqrt{-1}$$

une valeur particulière de cette variable,

$$i=\alpha+\beta\sqrt{-1}$$

une expression imaginaire propre à vérifier la formule (5); *et posons*

$$x=a+i+z.$$

Concevons de plus que, p, q, λ, μ, α, β étant des quantités reelles, on désigne par $f(x)$ une fonction réelle ou imaginaire de x dont les dérivées ne puissent s'évanouir toutes à la fois. Enfin, soient ρ le module de i, et B *un nombre égal ou supérieur au plus grand des modules* *qu'acquiert la fonction $f''(x)$, tandis que le module de z reste compris entre les limites 0, ρ. Si le module de l'expression*

$$f'(a) = f'(\lambda + \mu\sqrt{-1}) \tag{89}$$

surpasse le produit

$$4B\rho, \tag{90}$$

l'équation (1) *admettra une seule racine imaginaire de la forme*

$$a + i + z,$$

le module de z étant inférieur à ρ.

Démonstration. — Adoptons les notations employées dans les formules (75), (77), et faisons en outre

$$z = u + v\sqrt{-1}, \tag{91}$$

u, v désignant deux quantités réelles

$$R_1 = \{[\varphi'(\lambda, \mu)]^2 + [\chi'(\lambda, \mu)]^2\}^{\frac{1}{2}}, \tag{92}$$

$$\left\{\begin{aligned} \frac{d^2\varphi(p,q)}{dp^2} &= \frac{d\varphi'(p,q)}{dp} = \varphi''(p,q), \\ \frac{d^2\chi(p,q)}{dp^2} &= \frac{d\chi'(p,q)}{dp} = \chi''(p,q). \end{aligned}\right. \tag{93}$$

L'équation (75) entrainera évidemment les suivantes :

$$\left\{\begin{aligned} f'(p + q\sqrt{-1}) &= \varphi'(p,q) + \sqrt{-1}\,\chi'(p,q), \\ f''(p + q\sqrt{-1}) &= \varphi''(p,q) + \sqrt{-1}\,\chi''(p,q). \end{aligned}\right. \tag{94}$$

De plus, on tirera des formules (86) : 1° en les différentiant par rapport à p,

$$\left\{\begin{aligned} \frac{d\varphi'(p,q)}{dq} &= -\frac{d\chi'(p,q)}{dp} = -\chi''(p,q), \\ \frac{d\chi'(p,q)}{dq} &= \frac{d\varphi'(p,q)}{dp} = \varphi''(p,q) \end{aligned}\right. \tag{95}$$

ou, ce qui revient au même,

$$\left\{\begin{aligned} \frac{d^2\varphi(p,q)}{dp\,dq} &= -\frac{d^2\chi(p,q)}{dp^2} = -\chi''(p,q), \\ \frac{d^2\chi(p,q)}{dp\,dq} &= -\frac{d^2\varphi(p,q)}{dp^2} = \varphi''(p,q); \end{aligned}\right. \tag{96}$$

2° en les différentiant par rapport à q,

$$\left\{\begin{aligned} \frac{d^2\varphi(p,q)}{dq^2} &= -\frac{d^2\chi(p,q)}{dp\,dq} = -\varphi''(p,q), \\ \frac{d^2\chi(p,q)}{dq^2} &= \frac{d^2\varphi(p,q)}{dp\,dq} = -\chi''(p,q). \end{aligned}\right. \tag{97}$$

On trouvera par suite, en considérant p et q comme variables indépendantes,

$$\left\{\begin{aligned} d\varphi(p,q) &= \varphi'(p,q)\,dp - \chi'(p,q)\,dq, \\ d\chi(p,q) &= \chi'(p,q)\,dp + \varphi'(p,q)\,dq, \end{aligned}\right. \tag{98}$$

$$\left\{\begin{aligned} d^2\varphi(p,q) &= \varphi''(p,q)(dp^2 - dq^2) - 2\chi''(p,q)\,dp\,dq, \\ d^2\chi(p,q) &= \chi''(p,q)(dp^2 - dq^2) + 2\varphi''(p,q)\,dp\,dq, \end{aligned}\right. \tag{99}$$

$$\left\{\begin{aligned} d\varphi'(p,q) &= \varphi''(p,q)\,dp - \chi''(p,q)\,dq, \\ d\chi'(p,q) &= \chi''(p,q)\,dp + \varphi''(p,q)\,dq. \end{aligned}\right. \tag{100}$$

D'autre part, comme on aura

$$x = a + i + z = \lambda + \alpha + u + (\mu + \beta + v)\sqrt{-1}, \tag{101}$$

on conclura des équations (75) et (94)

$$\left\{\begin{aligned} f(x) &= \varphi(\lambda + \alpha + u, \mu + \beta + v) + \sqrt{-1}\,\chi(\lambda + \alpha + u, \mu + \beta + v), \\ f'(x) &= \varphi'(\lambda + \alpha + u, \mu + \beta + v) + \sqrt{-1}\,\chi'(\lambda + \alpha + u, \mu + \beta + v), \\ f''(x) &= \varphi''(\lambda + \alpha + u, \mu + \beta + v) + \sqrt{-1}\,\chi''(\lambda + \alpha + u, \mu + \beta + v). \end{aligned}\right. \tag{102}$$

Enfin, comme l'équation (5) pourra être présentée sous la forme

$$f(\lambda + \mu\sqrt{-1}) + (\alpha + \beta\sqrt{-1})\,f'[\lambda + \alpha + (\mu + \beta)\sqrt{-1}] = 0, \tag{103}$$

on tirera de cette équation, réunie aux formules (75) et (94),

$$(104)\quad \begin{cases} \varphi(\lambda,\mu)+\alpha\,\varphi'(\lambda,\mu)-\beta\,\chi'(\lambda,\mu)=0,\\ \chi(\lambda,\mu)+\alpha\,\chi'(\lambda,\mu)+\beta\,\varphi'(\lambda,\mu)=0.\end{cases}$$

Soient maintenant θ_1, Θ_1, θ_2, Θ_2 des nombres inférieurs à l'unité. Les équations (18) et (20) de la vingt-troisième Leçon, combinées avec les formules (98), (99), donneront

$$(105)\quad \begin{cases} \varphi(\lambda+\alpha+u,\mu+\beta+v)=\varphi(\lambda,\mu)+(\alpha+u)\,\varphi'(\lambda,\mu)-(\beta+v)\,\chi'(\lambda,\mu)\\ \qquad+\dfrac{(\alpha+u)^2-(\beta+v)^2}{2}\,\varphi''[\lambda+\theta_1(\alpha+u),\mu+\theta_1(\beta+v)]\\ \qquad-(\alpha+u)(\beta+v)\,\chi''[\lambda+\theta_1(\alpha+u)\mu+\theta_1(\beta+v)],\\ \chi(\lambda+\alpha+u,\mu+\beta+v)=\chi(\lambda,\mu)+(\alpha+u)\,\chi'(\lambda,\mu)+(\beta+v)\,\varphi'(\lambda,\mu)\\ \qquad+\dfrac{(\alpha+u)^2-(\beta+v)^2}{2}\,\chi''[\lambda+\Theta_1(\alpha+u),\mu+\Theta_1(\beta+v)]\\ \qquad+(\alpha+u)(\beta+v)\,\varphi''[\lambda+\Theta_1(\alpha+u),\mu+\Theta_1(\beta+v)]\end{cases}$$

ou, ce qui revient au même,

$$(106)\quad \begin{cases} \varphi(\lambda+\alpha+u,\mu+\beta+v)=u\,\varphi'(\lambda,\mu)-v\,\chi'(\lambda,\mu)\\ \qquad+\dfrac{(\alpha+u)^2-(\beta+v)^2}{2}\,\varphi''[\lambda+\theta_1(\alpha+u),\mu+\theta_1(\beta+v)]\\ \qquad-(\alpha+u)(\beta+v)\,\chi''[\lambda+\theta_1(\alpha+u),\mu+\theta_1(\beta+v)],\\ \chi(\lambda+\alpha+u,\mu+\beta+v)=u\,\chi'(\lambda,\mu)+v\,\varphi'(\lambda,\mu)\\ \qquad+\dfrac{(\alpha+u)^2-(\beta+v)^2}{2}\,\chi''[\lambda+\Theta_1(\alpha+u),\mu+\Theta_1(\beta+v)]\\ \qquad+(\alpha+u)(\beta+v)\,\varphi''[\lambda+\Theta_1(\alpha+u),\mu+\Theta_1(\beta+v)]\end{cases}$$

et

$$(107)\quad \begin{cases} \varphi'(\lambda+\alpha+u,\mu+\beta+v)=\varphi'(\lambda,\mu)+(\alpha+u)\,\varphi''[\lambda+\theta_2(\alpha+u),\mu+\theta_2(\beta+v)]\\ \qquad-(\beta+v)\,\chi''[\lambda+\theta_2(\alpha+u),\mu+\theta_2(\beta+v)],\\ \chi'(\lambda+\alpha+u,\mu+\beta+v)=\chi'(\lambda,\mu)+(\alpha+u)\,\chi''[\lambda+\Theta_2(\alpha+u),\mu+\Theta_2(\beta+v)]\\ \qquad+(\beta+v)\,\varphi''[\lambda+\Theta_2(\alpha+u),\mu+\Theta_2(\beta+v)].\end{cases}$$

D'ailleurs, en vertu du lemme I et des suppositions admises, les

valeurs numériques des expressions

$$\frac{(\alpha+u)^2-(\beta+v)^2}{2}\,\varphi''(p,q)-(\alpha+u)(\beta+v)\,\chi''(p,q),$$

$$\frac{(\alpha+u)^2-(\beta+v)^2}{2}\,\chi''(p,q)+(\alpha+u)(\beta+v)\,\varphi''(p,q)$$

resteront inférieures au produit

$$\left\{\left[\frac{(\alpha+u)^2-(\beta+v)^2}{2}\right]^2+[(\alpha+u)(\beta+v)]^2\right\}^{\frac12}\left\{[\varphi''(p,q)]^2+[\chi''(p,q)]^2\right\}^{\frac12}<B\,\frac{(\alpha+u)^2+(\beta+v)^2}{2},$$

et les valeurs numériques des expressions

$$(\alpha+u)\,\varphi''(p,q)-(\beta+v)\,\chi''(p,q),\quad (\alpha+u)\,\chi''(p,q)+(\beta+v)\,\varphi''(p,q)$$

au produit

$$[(\alpha+u)^2+(\beta+v)^2]^{\frac12}\left\{[\varphi''(p,q)]^2+[\chi''(p,q)]^2\right\}^{\frac12}<B[(\alpha+u)^2+(\beta+v)^2]^{\frac12},$$

toutes les fois que le module de z, savoir $(u^2+v^2)^{\frac12}$, vérifiera la condition

$$(108)\qquad (u^2+v^2)^{\frac12}<\rho.$$

Donc alors, en désignant par θ', Θ', θ'', Θ'' des nombres inférieurs à l'unité, on tirera des formules (106), (107)

$$(109)\quad \begin{cases} \varphi(\lambda+\alpha+u,\mu+\beta+v)=u\,\varphi'(\lambda,\mu)+v\,\chi'(\lambda,\mu)\pm\theta' B\,\dfrac{(\alpha+u)^2+(\beta+v)^2}{2},\\ \chi(\lambda+\alpha+u,\mu+\beta+v)=u\,\chi'(\lambda,\mu)+v\,\varphi'(\lambda,\mu)\pm\Theta' B\,\dfrac{(\alpha+u)^2+(\beta+v)^2}{2},\end{cases}$$

$$(110)\quad \begin{cases} \varphi'(\lambda+\alpha+u,\mu+\beta+v)=\varphi'(\lambda,\mu)\pm\theta'' B[(\alpha+u)^2+(\beta+v)^2]^{\frac12},\\ \chi'(\lambda+\alpha+u,\mu+\beta+v)=\chi'(\lambda,\mu)\pm\Theta'' B[(\alpha+u)^2+(\beta+v)^2]^{\frac12}.\end{cases}$$

Cela posé, la première des formules (102) donnera

$$(111)\quad f(x)=(u+v\sqrt{-1})\,f'(\lambda+\mu\sqrt{-1})\pm(\theta'\pm\Theta'\sqrt{-1})\,B\,\frac{(\alpha+u)^2+(\beta+v)^2}{2};$$

puis on en conclura, en prenant $u = 0$, $v = 0$,

$$(112)\qquad f[\lambda + \alpha + (\mu + \beta)\sqrt{-1}] = \pm(\theta' \pm \Theta'\sqrt{-1})\,B\,\frac{\alpha^2 + \beta^2}{2}.$$

Donc l'expression imaginaire

$$(78)\qquad f(a + i) = f[\lambda + \alpha + (\mu + \beta)\sqrt{-1}]$$

aura pour module la quantité

$$(113)\qquad (\theta'^2 + \Theta'^2)^{\frac{1}{2}}\,B\,\frac{\alpha^2 + \beta^2}{2} < \frac{1}{2}B\rho^2\sqrt{2}.$$

D'autre part, comme, en vertu du lemme II, le module de l'expression imaginaire

$$i + z = \alpha + u + (\beta + v)\sqrt{-1},$$

savoir

$$[(\alpha + u)^2 + (\beta + v)^2]^{\frac{1}{2}},$$

sera inférieur au double du module de i, et vérifiera, par conséquent, la condition

$$(114)\qquad [(\alpha + u)^2 + (\beta + v)^2]^{\frac{1}{2}} < 2\rho,$$

tant que le module de z ne surpassera pas le module ρ; il suffira de prendre

$$(115)\qquad (u^2 + v^2)^{\frac{1}{2}} = \rho = (\alpha^2 + \beta^2)^{\frac{1}{2}},$$

et de supposer

$$(116)\qquad R_1 > 2B\rho\sqrt{2},$$

pour que la fonction $f(x)$, déterminée par la formule (111), offre un module supérieur à la différence

$$(117)\qquad \rho R_1 - (\theta'^2 + \Theta'^2)^{\frac{1}{2}}\,2B\rho^2 > \rho(R_1 - 2B\rho\sqrt{2}).$$

Donc ce dernier module surpassera celui de l'expression (78), si l'on a

$$(118)\qquad R_1 > \frac{5}{2}B\rho\sqrt{2},$$

et, à plus forte raison, si l'on a

$$(119)\qquad R_1 > 4B\rho.$$

Alors aussi les diverses valeurs du rapport (79), correspondantes à des modules de z plus petits que ρ, seront telles que, parmi ces valeurs, on ne pourra en trouver deux qui fournissent un produit égal à -1. En effet, si l'on choisit u et v de manière à vérifier la condition

$$(120)\qquad (u^2 + v^2)^{\frac{1}{2}} \leqq \rho,$$

on aura, en vertu des formules (110) et (114),

$$(121)\qquad \varphi'(p, q) = \varphi'(\lambda, \mu) \pm 2\theta B\rho, \qquad \chi'(p, q) = \chi'(\lambda, \mu) \pm 2\Theta B\rho,$$

θ, Θ désignant deux nouveaux nombres inférieurs à l'unité. En d'autres termes, la fonction $\varphi'(p, q)$ restera comprise entre les limites

$$\varphi'(\lambda, \mu) - 2B\rho, \quad \varphi'(\lambda, \mu) + 2B\rho,$$

et la fonction $\chi'(p, q)$ entre les limites

$$\chi'(\lambda, \mu) - 2B\rho, \quad \chi'(\lambda, \mu) + 2B\rho.$$

Il est aisé d'en conclure que, si l'on désigne par p_0, q_0, p_1, q_1 deux systèmes de valeurs de p et q correspondants à des modules de z plus petits que ρ, la somme

$$(122)\qquad \varphi'(p_0, q_0)\,\varphi'(p_1, q_1) + \chi'(p_0, q_0)\,\chi'(p_1, q_1)$$

restera comprise entre la plus petite et la plus grande des seize valeurs que peut acquérir l'expression

$$(123)\qquad [\varphi'(\lambda, \mu) \pm 2B\rho][\varphi'(\lambda, \mu) \pm 2B\rho] + [\chi'(\lambda, \mu) \pm 2B\rho][\chi'(\lambda, \mu) \pm 2B\rho],$$

eu égard aux doubles signes qu'elle renferme. Donc, si l'on nomme φ_1, χ_1 les valeurs numériques de $\varphi'(\lambda, \mu)$ et de $\chi'(\lambda, \mu)$, liées entre elles par la formule

$$(124)\qquad \varphi_1^2 + \chi_1^2 = R_1^2,$$

la somme (122) ne pourra devenir inférieure à la plus petite des seize valeurs dè l'expression

$$(125)\qquad (\varphi_1 \pm 2B\rho)(\varphi_1 \pm 2B\rho) + (\chi_1 \pm 2B\rho)(\chi_1 \pm 2B\rho).$$

Or cette plus petite valeur sera évidemment positive, si la condition (119) est remplie, et se réduira, dans ce cas, à l'une des trois quantités

$$(126)\qquad (\varphi_1 - 2B\rho)^2 + (\chi_1 - 2B\rho)^2,$$

$$(127)\qquad (\varphi_1 - 2B\rho)^2 - (2B\rho - \chi_1)(2B\rho + \chi_1) = R_1^2 - 4B\rho\varphi_1 > R_1(R_1 - 4B\rho),$$

$$(128)\qquad (\chi_1 - 2B\rho)^2 - (2B\rho - \varphi_1)(2B\rho + \varphi_1) = R_1^2 - 4B\rho\chi_1 > R_1(R_1 - 4B\rho),$$

savoir à la quantité (126), si l'on a en même temps

$$(129)\qquad \varphi_1 > 2B\rho, \qquad \chi_1 > 2B\rho,$$

à la quantité (127), si l'on a

$$(130)\qquad \chi_1 < 2B\rho \quad \text{et, par suite,} \quad \varphi_1 > \sqrt{R_1^2 - 4B^2\rho^2} > 2B\rho\sqrt{3},$$

enfin à la quantité (128), si l'on a

$$(131)\qquad \varphi_1 < 2B\rho \quad \text{et, par suite,} \quad \chi_1 > \sqrt{R_1^2 - 4B^2\rho^2} > 2B\rho\sqrt{3}.$$

Donc alors l'expression (122) restera toujours positive, et la formule

$$(132)\qquad \frac{\varphi'(p_0, q_0)}{\chi'(p_0, q_0)} \frac{\varphi'(p_1, q_1)}{\chi'(p_1, q_1)} = -1$$

ne sera jamais vérifiée. D'autre part, nous avons déjà prouvé que, dans le même cas, le module de l'expression (78) est inférieur à tous ceux que peut acquérir la fonction $f(x)$, tandis que le module de z reste égal à ρ. Donc alors, en vertu du théorème VI, l'équation (1) admettra une seule racine correspondante à un module de z plus petit que ρ.

Théorème VIII. — *Les mêmes choses étant posées que dans le théorème VII, désignons par* A *le plus petit module que puisse acquérir la fonction* $f(x) = f(a + i + z)$, *tandis que le module de* z *varie entre les limites* 0 *et* ρ. *Soient d'ailleurs*

$$(133)\qquad b = a + i$$

et

$$(134)\qquad j = -\frac{f(b)}{f'(b)}.$$

Si le produit

$$(90)\qquad 4B\rho$$

est inférieur au nombre A, *l'équation* (1) *admettra une racine imaginaire qui sera non seulement de la forme* $a + i + z = b + z$, *le module de* z *étant inférieur à* ρ, *mais encore de la forme* $b + j + s$, *le module de* s *étant plus petit que celui de* j.

Démonstration. — Lorsque le produit (90) est plus petit que A, il est, à plus forte raison, inférieur au module de $f'(a)$. Donc alors, en vertu du théorème VII, l'équation (1) offre une racine, mais une seule, de la forme $a + i + z$, le module de z étant inférieur à ρ. D'ailleurs, si les conditions énoncées dans les théorèmes VII et VIII sont remplies, le module de $f(b) = f(a + i)$ ne surpassera pas le second membre de la formule (113), et par suite la valeur de j, déterminée par l'équation (134) ou

$$(135)\qquad j = -\frac{f(a+i)}{f'(a+i)},$$

offrira un module ρ_1 qui vérifiera la condition

$$(136)\qquad \rho_1 < \frac{1}{2}\frac{B}{A}\rho^2\sqrt{2} < \frac{\sqrt{2}}{8}\rho < \frac{1}{4}\rho.$$

Donc, tant que le module de s restera inférieur à celui de j, le module de $j + s$ restera inférieur à ρ, ou même à $\frac{1}{2}\rho$, et les modules des deux expressions

$$(137)\qquad f'(b + j + s), \quad f''(b + j + s)$$

demeureront le premier supérieur à A, le second inférieur à B. Cela posé, comme, ρ_1 étant plus petit que ρ, le produit $4B\rho_1$ restera inférieur à A, et, à plus forte raison, au module de $f'(b)$, on prouvera, par des raisonnements semblables à ceux à l'aide desquels on a établi le théorème VII, que la racine ci-dessus mentionnée est de la forme $b+j+s$, le module de s étant inférieur à ρ_1.

Corollaire I. — On voit, par ce qui précède, comment, étant donnée la valeur approchée d'une racine imaginaire de l'équation (1), on peut, à l'aide de la formule (5) ou (8), obtenir de nouvelles valeurs approchées, et resserrer de plus en plus les limites entre lesquelles le module de la racine se trouve compris. Il est bon d'observer que les différences $i+z$, $j+s$ entre la racine cherchée et ses deux premières valeurs approchées a, b, offriront, en vertu du lemme II et de la formule (136), des modules inférieurs aux nombres

$$(138)\qquad 2\rho, \qquad 2\rho_1 < \frac{B}{A}\rho^2\sqrt{2}.$$

Donc, à plus forte raison, dans les différences dont il s'agit, les parties réelles et les coefficients de $\sqrt{-1}$ ne surpasseront pas les quantités (138), que l'on peut remplacer par les suivantes

$$2\rho, \quad 2\rho\varepsilon,$$

en faisant, pour abréger,

$$(139)\qquad \varepsilon = \frac{B\rho\sqrt{2}}{2A}.$$

On prouvera de même que, si l'on nomme $c, d, \ldots$ les troisième, quatrième, ... valeurs approchées de la racine en question, les différences entre $c, d, \ldots$ et cette racine offriront des modules qui ne surpasseront pas les nombres

$$\frac{B}{A}(\rho\varepsilon)^2\sqrt{2} = 2\rho\varepsilon^3, \qquad \frac{B}{A}(\rho\varepsilon^3)^2\sqrt{2} = 2\rho\varepsilon^7, \qquad \ldots.$$

Donc, en substituant à la racine cherchée les expressions imaginaires

$$a, \quad b, \quad c, \quad d, \quad \ldots,$$

on ne pourra commettre sur la partie réelle et sur le coefficient de $\sqrt{-1}$ que des erreurs qui ne surpasseront pas les différents termes de la série

$$(140)\qquad 2\rho, \quad 2\rho\varepsilon, \quad 2\rho\varepsilon^3, \quad 2\rho\varepsilon^7, \quad \ldots.$$

Remarquons d'ailleurs que, si l'on pose

$$(141)\qquad k = \frac{4A}{B\sqrt{2}} = \frac{2A\sqrt{2}}{B},$$

ces différents termes deviendront respectivement

$$(142)\qquad k\varepsilon, \quad k\varepsilon^2, \quad k\varepsilon^4, \quad k\varepsilon^8, \quad \ldots.$$

Concevons maintenant que le nombre ε ne surpasse pas une unité décimale de l'ordre n, en sorte qu'on ait

$$(143)\qquad \varepsilon < \left(\frac{1}{10}\right)^n.$$

Si l'on suppose, d'ailleurs,

$$(144)\qquad k < \left(\frac{1}{10}\right)^{\pm m},$$

m désignant un nombre entier quelconque, les termes de la série (142) ne surpasseront pas ceux de la série (28). Donc, parmi les chiffres qui, dans la partie réelle d'une valeur approchée ou dans le coefficient de $\sqrt{-1}$, suivront les unités de l'ordre m, si l'on a

$$(145)\qquad k < \left(\frac{1}{10}\right)^m,$$

ou les unités décimales de l'ordre m, si l'on a

$$(146)\qquad k < (10)^m,$$

le nombre de ceux sur lesquels on pourra compter sera égal à n pour la première valeur approchée, à $2n$ pour la seconde, à $4n$ pour la troisième, etc. Donc ce nombre sera doublé à chaque opération nouvelle.

Corollaire II. — Comme on tire de la formule (139)

$$4B\rho = \frac{8A\varepsilon}{\sqrt{2}},$$

il est clair que le produit $4B\rho$ sera inférieur à A, si l'on a

$$(147) \qquad \varepsilon < \frac{1}{8}\sqrt{2}.$$

Pour montrer une application des méthodes que nous venons d'exposer, prenons d'abord

$$(148) \qquad f(x) = x^5 + 10x - 1,$$

en sorte que l'équation (1) se réduise à

$$(149) \qquad x^5 + 10x - 1 = 0.$$

D'après ce qui a été démontré dans l'*Analyse algébrique* (page 519) (¹), l'équation (149) n'aura point de racines négatives, mais une seule racine positive et quatre racines imaginaires, attendu que le premier membre pourra être à volonté considéré comme offrant ou cinq variations de signe, ou une seule variation et quatre permanences de signe. De plus, si l'on désigne par r le module de l'inconnue x, celui de

$$x^5 = 1 - 10x \qquad \text{ou} \qquad r^5$$

devra être, d'après le lemme II, inférieur à la somme $1 + 10r$; et par conséquent on aura, pour chacune des racines,

$$(150) \qquad r^5 < 1 + 10r, \qquad r^4 < \frac{1}{r} + 10.$$

Donc le module de chaque racine sera inférieur au nombre 2, puisqu'on ne peut supposer $r > 2$, sans avoir en même temps

$$r^4 > 16 > 10 + \frac{1}{2} > 10 + \frac{1}{r}.$$

D'ailleurs, si, dans l'équation (149), on remplace le dernier terme

(¹) *Œuvres de Cauchy*, S. II, T. III, p. 424.

par zéro, et la lettre x par la lettre a, la nouvelle équation que l'on obtiendra, savoir

$$(151) \qquad a^5 + 10a = 0,$$

se décomposera en deux autres

$$(152) \qquad a = 0,$$

$$(153) \qquad a^4 + 10 = 0 \qquad \text{ou} \qquad a^4 = -10,$$

dont la seconde sera vérifiée par les quatre valeurs de a comprises dans la formule

$$(154) \qquad a = \pm\left(\frac{5}{2}\right)^{\frac{1}{4}} \pm \left(\frac{5}{2}\right)^{\frac{1}{4}}\sqrt{-1}.$$

Cela posé, faisons

$$(11) \qquad x = a + i + z,$$

la valeur de i étant déterminée par l'équation

$$(8) \qquad i = -\frac{f(a)}{f'(a)} = -\frac{a^5 + 10a - 1}{5a^4 + 10} = \frac{1}{5a^4 + 10}.$$

Comme, en prenant : 1° $a = 0$; 2° $a^4 = -10$, on tirera successivement de cette même équation

$$(155) \qquad i = \frac{1}{10} = 0,1,$$

$$(156) \qquad i = -\frac{1}{40} = -0,025,$$

on conclura du lemme II que, pour un module de z inférieur à celui de i, le module de x restera compris entre les limites

$$(157) \qquad 0 \quad \text{et} \quad 0,2,$$

si l'on a $a = 0$, et entre les limites

$$(158) \qquad (10)^{\frac{1}{4}} - 0,05 = 1,72827\ldots, \qquad (10)^{\frac{1}{4}} + 0,05 = 1,82827\ldots,$$

si l'on a $a^4 = -10$. Donc alors, pour que le module de

$$f'(x) = 5x^4 + 10$$

reste supérieur au nombre A, et le module de

$$f''(x) = 20x^3$$

inférieur au nombre B, il suffira de prendre, dans le premier cas,

$$(159) \qquad A = 10 - 5(0,2)^4 = 9,992,$$

$$(160) \qquad B = 20(0,2)^3 \quad = 0,16,$$

et, dans le second cas,

$$(161) \qquad A = 5(1,72827\ldots)^4 - 10 = 34,609\ldots,$$

$$(162) \qquad B = 20(1,82827\ldots)^3 \quad = 122,22\ldots.$$

Or, si l'on adopte les valeurs précédentes de A et B, on tirera : 1° de la formule (21), en supposant $a = 0$, $\rho = i = 0,1$,

$$(163) \qquad \varepsilon = \frac{(0,16)(0,1)}{2(9,992)} = 0,0008 < 0,001;$$

2° de la formule (139), en supposant $a^4 = -10$, $\rho = -i = 0,025$,

$$(164) \qquad \varepsilon = \frac{(0,025)(122,22\ldots)\sqrt{2}}{2(34,609\ldots)} = 0,0624\ldots < 0,1.$$

D'ailleurs les valeurs de ε fournies par les équations (163), (164) vérifient évidemment les conditions (33) et (147). Donc, en vertu des théorèmes III et VIII, l'équation (149) admettra une racine réelle, positive, mais inférieure à 0,2, et quatre racines imaginaires comprises dans la formule

$$(165) \qquad x = -0,025 \pm \left(\frac{5}{2}\right)^{\frac{1}{4}} \pm \left(\frac{5}{2}\right)^{\frac{1}{4}} \sqrt{-1} + z,$$

le module de z devant être, pour chacune de ces racines, inférieur à 0,025. De plus, si l'on désigne par $a, b, c, d, \ldots$ les valeurs approchées successives d'une racine de l'équation (149), déduites : 1° de la formule (152) ou (154); 2° de la formule (8), les erreurs que l'on pourra commettre en remplaçant cette racine par $a, b, c, d, \ldots$ ne

surpasseront pas les différents termes de la série (23) ou (140), inférieurs eux-mêmes aux nombres

$$(166) \qquad 0,2, \quad 0,0002, \quad 0,0000000002, \quad 0,00000000000000000000002, \quad \ldots,$$

s'il s'agit de la racine réelle, et aux nombres

$$(167) \qquad 0,05, \quad 0,005, \quad 0,00005; \quad 0,000000005, \quad \ldots,$$

s'il s'agit des racines imaginaires. Par conséquent une opération nouvelle, ou deux au plus, fourniront pour chaque racine une valeur approchée qui renfermera huit ou neuf décimales exactes. Ainsi, par exemple, les deux premières valeurs approchées de la racine réelle, savoir $x = 0$, $x = 0,1$, seront suivies d'une troisième

$$(168) \qquad x = 0,1 - \frac{(0,1)^5}{5(0,1)^4 + 10} = 0,0999900005\ldots$$

qui renfermera neuf et même dix décimales exactes. De plus, aux valeurs approchées des racines imaginaires, données par l'équation

$$(169) \qquad \begin{cases} x = -0,025 \pm \left(\frac{5}{2}\right)^{\frac{1}{4}} \pm \left(\frac{5}{2}\right)^{\frac{1}{4}} \sqrt{-1} \\ \quad = -0,025 \pm 1,257433\ldots(1 \pm \sqrt{-1}), \end{cases}$$

ou, ce qui revient au même, par les deux formules

$$(170) \qquad \begin{cases} x = 1,232433\ldots \pm (1,257433\ldots)\sqrt{-1}, \\ x = -1,282433\ldots \pm (1,257433\ldots)\sqrt{-1}, \end{cases}$$

succéderont, après une ou deux opérations nouvelles, des valeurs plus approchées, savoir

$$(171) \qquad \begin{cases} x = 1,231813\ldots \pm (1,258105\ldots)\sqrt{-1}, \\ x = -1,281813\ldots \pm (1,258007\ldots)\sqrt{-1} \end{cases}$$

ou

$$(172) \qquad \begin{cases} x = 1,23181475\ldots \pm (1,25810649\ldots)\sqrt{-1}, \\ x = -1,28181425\ldots \pm (1,25800767\ldots)\sqrt{-1}, \end{cases}$$

et les deux dernières offriront huit décimales exactes.

Soit maintenant

$$f(x) = e^x - x, \tag{173}$$

en sorte que l'équation (1) se réduise à

$$e^x - x = 0. \tag{174}$$

Alors, en prenant pour a la valeur de x fournie par l'équation (125) de la page 485, c'est-à-dire en posant

$$a = 0,3181 + (1,3372)\sqrt{-1}, \tag{175}$$

on tirera de la formule (8)

$$i = 0,0000317\ldots + (0,0000357\ldots)\sqrt{-1}. \tag{176}$$

On aura donc, en désignant par ρ le module de i,

$$\rho = [(0,0000317\ldots)^2 + (0,0000357\ldots)^2]^{\frac{1}{2}} = 0,0000477\ldots. \tag{177}$$

D'ailleurs, si l'on fait

$$x = a + i + z = 0,3181317\ldots + (1,3372357\ldots)\sqrt{-1} + z, \tag{11}$$

il est clair que, pour un module de z, inférieur à celui de i, la partie réelle de la variable x restera comprise entre les limites

$$0,3181317\ldots - 0,0000477 = 0,3180840\ldots,$$
$$0,3181317\ldots + 0,0000477 = 0,3181794\ldots.$$

Donc alors, pour que le module de $f'(x) = e^x - 1$ reste supérieur au nombre A, et le module de $f''(x) = e^x$ inférieur au nombre B, il suffira de prendre

$$A = e^{0,3180840\ldots} - 1 = 0,37449\ldots, \qquad B = e^{0,3181794\ldots} = 1,37462\ldots. \tag{178}$$

D'autre part, si l'on adopte les valeurs précédentes de ρ, A et B, on tirera de la formule (139)

$$\varepsilon = \frac{(1,37462\ldots)(0,0000477\ldots)\sqrt{2}}{2(0,37449\ldots)} = 0,00001239\ldots, \tag{179}$$

Or la valeur précédente de ε vérifie évidemment la condition (147). Donc, en vertu du théorème VIII, l'équation (174) admettra une racine imaginaire de la forme

$$x = 0,3181317\ldots + 1,3372357\ldots\sqrt{-1} + z, \tag{180}$$

le module de z étant inférieur à $0,0000477\ldots$. Ajoutons que, si l'on nomme $a, b, c, d, \ldots$ les diverses valeurs approchées de cette racine déduites les unes des autres à l'aide de la formule (8), les différences entre la racine cherchée et ses valeurs approchées ne surpasseront pas les différents termes de la série (140) ou

$$0,00095\ldots, \quad 0,000000011\ldots, \quad 0,0000000000000018, \quad \ldots. \tag{181}$$

FIN DU TOME IV DE LA SECONDE SÉRIE.

TABLE DES MATIÈRES

DU TOME QUATRIÈME.

SECONDE SÉRIE.

MÉMOIRES DIVERS ET OUVRAGES.

II. — OUVRAGES CLASSIQUES.

RÉSUMÉ DES LEÇONS DONNÉES A L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE SUR LE CALCUL INFINITÉSIMAL.

CALCUL INTÉGRAL.

LEÇONS SUR LE CALCUL DIFFÉRENTIEL.

FIN DE LA TABLE DES MATIÈRES DU TOME IV DE LA SECONDE SÉRIE.

25374 Paris. — Imprimerie Gauthier-Villars, quai des Grands-Augustins, 55.