ONZIÈME LEÇON.

DES VALEURS QUE PRENNENT LES FONCTIONS D'UNE SEULE VARIABLE x, QUAND CETTE VARIABLE DEVIENT IMAGINAIRE.

Lorsque les constantes ou variables comprises dans une fonction donnée, après avoir été considérées comme réelles, sont ensuite supposées imaginaires, la notation à l'aide de laquelle on exprimait la fonction dont il s'agit ne peut être conservée dans le calcul qu'en vertu d'une convention nouvelle propre à fixer le sens de cette notation dans la nouvelle hypothèse. Si l'on considère en particulier les notations propres à représenter les fonctions simples, savoir

$$a+x,\quad a-x,\quad ax,\quad \frac{a}{x},\quad x^a,\quad A^x,\quad Lx,$$
$$\sin x,\quad \cos x,\quad \arc\sin x,\quad \arc\cos x,$$

il suffira, pour en fixer le sens, dans le cas où la variable x devient imaginaire, de recourir aux principes que j'ai développés dans l'*Analyse algébrique* (*voir* les Chapitres VII, VIII et IX), et que je vais rappeler en peu de mots.

On appelle expression *imaginaire* toute expression de la forme

$$p+q\sqrt{-1},$$

p et q désignant deux quantités réelles. Une semblable expression ne signifie rien par elle-même, non plus que le signe $\sqrt{-1}$. Mais, lorsque l'on combine des expressions imaginaires entre elles, par voie d'addition, de soustraction, de multiplication, etc., en opérant comme si $\sqrt{-1}$ était une quantité réelle dont le carré fût égal à -1, on obtient

pour résultats de nouvelles expressions imaginaires; et il peut être utile de signaler les relations qui existent entre les quantités réelles, comprises dans les expressions imaginaires données et dans celles qui résultent de leur combinaison. Pour retrouver plus facilement les relations dont il s'agit, on est convenu de regarder comme égales deux expressions imaginaires

$$p+q\sqrt{-1},\quad P+Q\sqrt{-1},$$

lorsqu'il y a égalité de part et d'autre : 1° entre les parties réelles p et P; 2° entre les coefficients de $\sqrt{-1}$, savoir q et Q. Cela posé, toute équation imaginaire n'est que la représentation symbolique de deux équations entre quantités réelles. Par exemple, l'équation symbolique

$$(1)\quad \begin{cases} \cos(\alpha+\beta)+\sqrt{-1}\sin(\alpha+\beta) \\ \quad =\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta+(\sin\alpha\cos\beta+\sin\beta\cos\alpha)\sqrt{-1}, \end{cases}$$

dans laquelle α, β désignent deux arcs réels, équivaut seule aux deux équations réelles

$$(2)\quad \begin{cases} \cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta, \\ \sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\sin\beta\cos\alpha. \end{cases}$$

Lorsque, dans l'expression imaginaire

$$p+q\sqrt{-1},$$

le coefficient q de $\sqrt{-1}$ s'évanouit, le terme $q\sqrt{-1}$ est censé réduit à zéro, et l'expression elle-même à la quantité réelle p. En vertu de cette convention, les expressions imaginaires comprennent, comme cas particuliers, les quantités réelles.

Les expressions imaginaires peuvent être soumises, aussi bien que les quantités réelles, aux diverses opérations de l'Algèbre. Si l'on effectue en particulier l'addition, la soustraction ou la multiplication de deux ou de plusieurs expressions imaginaires, en opérant d'après les règles établies pour les quantités réelles, on obtiendra pour résultat une nouvelle expression imaginaire, qui sera ce qu'on appelle la *somme*, la *différence* ou le *produit* des expressions données, et l'on se servira des notations ordinaires pour indiquer cette somme, cette différence ou ce produit. On aura, par exemple,

$$(\cos\alpha + \sqrt{-1}\sin\alpha)(\cos\beta + \sqrt{-1}\sin\beta)$$
$$= \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta + (\sin\alpha\cos\beta + \sin\beta\cos\alpha)\sqrt{-1},$$

d'où il résulte que l'équation (1) pourra s'écrire comme il suit :

$$(3)\quad \begin{cases} \cos(\alpha+\beta) + \sqrt{-1}\sin(\alpha+\beta) \\ \quad = (\cos\alpha + \sqrt{-1}\sin\alpha)(\cos\beta + \sqrt{-1}\sin\beta). \end{cases}$$

En multipliant les deux membres de cette dernière équation par de nouveaux facteurs de la forme

$$\cos\gamma + \sqrt{-1}\sin\gamma,$$

on trouverait généralement

$$(4)\quad \begin{cases} \cos(\alpha+\beta+\gamma+\ldots) + \sqrt{-1}\sin(\alpha+\beta+\gamma+\ldots) \\ \quad = (\cos\alpha + \sqrt{-1}\sin\alpha)(\cos\beta + \sqrt{-1}\sin\beta)(\cos\gamma + \sqrt{-1}\sin\gamma)\ldots, \end{cases}$$

quel que fût le nombre des arcs réels $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$.

En vertu de ce qu'on vient de dire, si l'on désigne par a une constante réelle, et par x une variable imaginaire ou de la forme

$$p + q\sqrt{-1},$$

les notations

$$(5)\qquad a+x,\quad a-x,\quad ax$$

devront être employées pour représenter les expressions imaginaires

$$(6)\qquad a+p+q\sqrt{-1},\quad a-p-q\sqrt{-1},\quad ap+aq\sqrt{-1}.$$

Si la constante a devenait imaginaire ou de la forme

$$\alpha + \beta\sqrt{-1},$$

les expressions imaginaires, représentées par les notations (5), seraient respectivement

$$(7)\quad \begin{cases} \alpha + p + (\beta + q)\sqrt{-1}, \\ \alpha - p + (\beta - q)\sqrt{-1}, \\ \alpha p - \beta q + (\alpha q + \beta p)\sqrt{-1}. \end{cases}$$

Le produit de deux expressions imaginaires *conjuguées* ou qui ne diffèrent entre elles que par le signe du coefficient de $\sqrt{-1}$, se réduit, comme on l'a déjà remarqué dans la Leçon précédente, au carré du module de chacune d'elles puisque l'on a

$$(8)\qquad (p + q\sqrt{-1})(p - q\sqrt{-1}) = p^2 + q^2.$$

Si l'on supposait en particulier

$$p = \cos\alpha,\qquad q = \sin\alpha,$$

on trouverait

$$(9)\qquad (\cos\alpha + \sqrt{-1}\sin\alpha)(\cos\alpha - \sqrt{-1}\sin\alpha) = \cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1.$$

Diviser une première expression imaginaire par une seconde, c'est trouver une troisième expression imaginaire qui, multipliée par la seconde, reproduise la première. Le résultat de cette opération est le *quotient* des deux expressions données. On se sert, pour l'indiquer, du signe ordinaire de la division. Cela posé, si l'on désigne par a et par x une constante et une variable imaginaire, c'est-à-dire de la forme

$$\alpha + \beta\sqrt{-1}\quad \text{et}\quad p + q\sqrt{-1},$$

on conclura sans peine de l'équation (8) que les notations

$$(10)\qquad \frac{1}{x}\quad \text{et}\quad \frac{a}{x}$$

doivent être employées pour représenter les deux expressions imaginaires

$$(11)\qquad \frac{p}{p^2+q^2} - \frac{q}{p^2+q^2}\sqrt{-1}\quad \text{et}\quad \frac{\alpha p + \beta q}{p^2+q^2} + \frac{\beta p - \alpha q}{p^2+q^2}\sqrt{-1}.$$

Dans le cas particulier où la valeur de x est de la forme

$$x = \cos\alpha + \sqrt{-1}\sin\alpha,$$

on tire de l'équation (9)

$$(12)\qquad \frac{1}{\cos\alpha + \sqrt{-1}\sin\alpha} = \cos\alpha - \sqrt{-1}\sin\alpha.$$

Une propriété remarquable de toute expression imaginaire

$$p + q\sqrt{-1},$$

c'est de pouvoir se mettre sous la forme

$$r(\cos t + \sqrt{-1}\sin t),$$

r désignant une quantité positive et t un arc réel. En effet, si l'on pose l'équation symbolique

$$(13)\qquad r(\cos t + \sqrt{-1}\sin t) = p + q\sqrt{-1}$$

ou, ce qui revient au même, les deux équations réelles

$$(14)\qquad r\cos t = p, \qquad r\sin t = q,$$

on en tirera

$$p^2 + q^2 = r^2(\cos^2 t + \sin^2 t) = r^2,$$

$$(15)\qquad r = \sqrt{p^2 + q^2},$$

et, après avoir ainsi reconnu que le nombre r doit coïncider avec le module de l'expression imaginaire

$$p + q\sqrt{-1},$$

il ne restera, pour vérifier complètement les équations (14), qu'à trouver un arc t dont le cosinus et le sinus soient respectivement

$$(16)\qquad \cos t = \frac{p}{\sqrt{p^2+q^2}}, \qquad \sin t = \frac{q}{\sqrt{p^2+q^2}}.$$

Or les formules (16) entraînent l'équation

$$(17)\qquad \operatorname{tang} t = \frac{\sin t}{\cos t} = \frac{q}{p},$$

dont la racine la plus petite (abstraction faite du signe) est l'arc désigné par la notation $\operatorname{arc\,tang}\frac{q}{p}$. Soit

$$(18)\qquad \tau = \operatorname{arc\,tang}\frac{q}{p}$$

ce même arc, qui est nécessairement compris entre les limites $-\frac{\pi}{2}$, $+\frac{\pi}{2}$. On trouvera

$$\frac{q}{p} = \operatorname{tang}\tau = \frac{\sin\tau}{\cos\tau},$$

$$(19)\qquad \frac{\cos\tau}{p} = \frac{\sin\tau}{q} = \pm\frac{\sqrt{\cos^2\tau + \sin^2\tau}}{\sqrt{p^2+q^2}} = \pm\frac{1}{\sqrt{p^2+q^2}};$$

et, comme le cosinus de l'arc τ ne pourra être qu'une quantité positive, il est clair que la formule (19) devra se réduire, lorsque p sera positif, à

$$(20)\qquad \frac{\cos\tau}{p} = \frac{\sin\tau}{q} = \frac{1}{\sqrt{p^2+q^2}},$$

et, lorsque p sera négatif, à

$$(21)\qquad \frac{\cos\tau}{p} = \frac{\sin\tau}{q} = -\frac{1}{\sqrt{p^2+q^2}}.$$

Donc, si l'on suppose $p > 0$, on aura

$$(22)\qquad \cos\tau = \frac{p}{\sqrt{p^2+q^2}}, \qquad \sin\tau = \frac{q}{\sqrt{p^2+q^2}};$$

et, comme alors les formules (16) deviendront respectivement

$$(23)\qquad \cos t = \cos\tau, \qquad \sin t = \sin\tau,$$

la valeur générale de t sera évidemment

$$(24)\qquad t = \tau \pm 2k\pi,$$

k désignant un nombre entier quelconque. Au contraire, si l'on suppose p négatif, on trouvera

$$\cos\tau = -\frac{p}{\sqrt{p^2+q^2}}, \quad \sin\tau = -\frac{q}{\sqrt{p^2+q^2}}; \tag{25}$$

et, comme dans ce cas les formules (16) deviendront

$$\cos t = -\cos\tau, \quad \sin t = -\sin\tau, \tag{26}$$

la valeur générale de t sera

$$t = \tau \pm (2k+1)\pi. \tag{27}$$

On peut observer encore que, en vertu de la formule (15), réunie aux formules (22) ou (25), on aura, en supposant $p > 0$,

$$p + q\sqrt{-1} = r(\cos\tau + \sqrt{-1}\sin\tau), \tag{28}$$

et, en supposant $p < 0$,

$$p + q\sqrt{-1} = -r(\cos\tau + \sqrt{-1}\sin\tau). \tag{29}$$

Élever une expression imaginaire à la puissance du degré m (m désignant un nombre entier), c'est former le produit de m facteurs égaux à cette expression. On indique la $m^{\text{ième}}$ *puissance* de $x = p + q\sqrt{-1}$ par la notation x^m. Si, pour plus de commodité, la valeur de x est présentée sous la forme

$$x = r(\cos t + \sqrt{-1}\sin t), \tag{30}$$

la valeur de x^m se déduira aisément des principes ci-dessus établis, et sera donnée par l'équation

$$x^m = r^m(\cos mt + \sqrt{-1}\sin mt). \tag{31}$$

Dans le cas particulier où la constante p est positive, on peut supposer $t = \tau$, et l'on a par suite

$$x^m = r^m(\cos m\tau + \sqrt{-1}\sin m\tau), \tag{32}$$

les valeurs des constantes r et τ étant fournies par les équations (15) et (18).

Extraire la racine $n^{\text{ième}}$ de l'expression imaginaire $x = p + q\sqrt{-1}$ ou, en d'autres termes, élever cette expression à la puissance du degré $\frac{1}{n}$, c'est former une nouvelle expression imaginaire dont la puissance $n^{\text{ième}}$ reproduise $p + q\sqrt{-1}$. Ce problème admettant plusieurs solutions, comme on le verra tout à l'heure, il en résulte que l'expression imaginaire x a plusieurs racines du degré n. Dans le cas où la constante p est positive, l'une des racines dont il s'agit est évidemment l'expression imaginaire à laquelle on parvient, quand on remplace, dans le second membre de l'équation (32), m par $\frac{1}{n}$, puisqu'on a dans ce cas

$$\left[r^{\frac{1}{n}}\left(\cos\frac{\tau}{n} + \sqrt{-1}\sin\frac{\tau}{n}\right)\right]^n = r(\cos\tau + \sqrt{-1}\sin\tau) = x.$$

Cette racine est celle que nous indiquerons par la notation $x^{\frac{1}{n}}$, en sorte qu'on aura, en supposant $p > 0$,

$$x^{\frac{1}{n}} = r^{\frac{1}{n}}\left(\cos\frac{\tau}{n} + \sqrt{-1}\sin\frac{\tau}{n}\right). \tag{33}$$

Ajoutons que, si l'on emploie la notation $((x))^{\frac{1}{n}}$ pour désigner indistinctement l'une quelconque des racines de x du degré n, on trouvera, en supposant $p > 0$,

$$x = r(\cos\tau + \sqrt{-1}\sin\tau), \tag{34}$$

d'où l'on conclura

$$((x))^{\frac{1}{n}} = r^{\frac{1}{n}}\left(\cos\frac{\tau}{n} + \sqrt{-1}\sin\frac{\tau}{n}\right)((1))^{\frac{1}{n}}, \tag{35}$$

et, en supposant $p < 0$,

$$x = -r(\cos\tau + \sqrt{-1}\sin\tau), \tag{36}$$

d'où l'on conclura

$$(37)\qquad ((x))^{\frac{1}{n}} = r^{\frac{1}{n}}\left(\cos\frac{\tau}{n} + \sqrt{-1}\sin\frac{\tau}{n}\right)((-1))^{\frac{1}{n}}.$$

En effet, il est facile de reconnaitre qu'en élevant à la $n^{\text{ième}}$ puissance le second membre de la formule (35) ou (37), on reproduit le second membre de la formule (34) ou (36); et d'ailleurs, pour s'assurer que toutes les valeurs de $((x))^{\frac{1}{n}}$ sont fournies par l'équation (35) ou (37), il suffit d'observer que, si l'on fait

$$(38)\qquad \frac{((x))^{\frac{1}{n}}}{r^{\frac{1}{n}}\left(\cos\frac{\tau}{n} + \sqrt{-1}\sin\frac{\tau}{n}\right)} = u,$$

on en tirera, en supposant $p > 0$,

$$(39)\qquad u^n = \frac{x}{x} = 1, \qquad u = ((1))^{\frac{1}{n}},$$

et, en supposant $p < 0$,

$$(40)\qquad u^n = \frac{x}{-x} = -1, \qquad u = ((-1))^{\frac{1}{n}}.$$

Quant aux valeurs générales de $((1))^{\frac{1}{n}}$ et de $((-1))^{\frac{1}{n}}$, on les obtiendra en cherchant les valeurs de $x = r(\cos t + \sqrt{-1}\sin t)$, propres à vérifier 1° l'équation

$$(41)\qquad x^n = r^n(\cos nt + \sqrt{-1}\sin nt) = 1,$$

2° l'équation

$$(42)\qquad x^n = r^n(\cos nt + \sqrt{-1}\sin nt) = -1.$$

Or on satisfera évidemment à l'équation (41), en prenant

$$r^n = 1, \qquad r = 1,$$
$$\cos nt + \sqrt{-1}\sin nt = 1, \qquad \cos nt = 1, \qquad \sin nt = 0,$$
$$nt = \pm 2k\pi, \qquad t = \pm\frac{2k\pi}{n},$$

et désignant par k un nombre entier quelconque; tandis qu'on vérifiera l'équation (42), en prenant toujours $r^n = 1$, $r = 1$, et de plus

$$\cos nt + \sqrt{-1}\sin nt = -1, \qquad \cos nt = -1, \qquad \sin nt = 0,$$
$$nt = \pm(2k+1)\pi, \qquad t = \pm\frac{(2k+1)\pi}{n}.$$

On aura donc généralement

$$(43)\qquad ((1))^{\frac{1}{n}} = \cos\frac{2k\pi}{n} \pm \sqrt{-1}\sin\frac{2k\pi}{n}$$

et

$$(44)\qquad ((-1))^{\frac{1}{n}} = \cos\frac{(2k+1)\pi}{n} \pm \sqrt{-1}\sin\frac{(2k+1)\pi}{n}.$$

Une remarque importante à faire, c'est que les équations (43) et (44) fournissent, pour chacune des expressions $((1))^{\frac{1}{n}}$, $((-1))^{\frac{1}{n}}$, n valeurs distinctes que l'on obtient, en prenant successivement pour k les divers nombres entiers compris entre les limites -0, $\frac{n}{2}$ (*voir*, pour de plus amples développements, l'*Analyse algébrique*, Chap. VII) (¹).

Outre les puissances entières et les racines correspondantes des expressions imaginaires, on a souvent à considérer leurs puissances fractionnaires ou négatives. Ces dernières résultent d'opérations semblables à celles qui fournissent les puissances fractionnaires ou négatives des quantités réelles. Ainsi, par exemple, pour élever l'expression imaginaire $x = p + q\sqrt{-1}$ à la puissance fractionnaire du degré $\frac{m}{n}$, il faut, en supposant la fraction $\frac{m}{n}$ réduite à sa plus simple expression : 1° extraire la racine $n^{\text{ième}}$ de l'expression donnée; 2° élever cette racine à la puissance entière du degré m. Le problème pouvant être résolu de plusieurs manières, nous désignerons indistinctement l'une quelconque des puissances x, du degré $\frac{m}{n}$, par la notation $((x))^{\frac{m}{n}}$. Cela posé, si l'on élève à la puissance $m^{\text{ième}}$ les

(¹) *Œuvres de Cauchy*, S. II, T. III.

deux membres de la formule (35) ou (37), on trouvera : 1° en supposant $p > 0$,

$$((x))^{\frac{m}{n}} = r^{\frac{m}{n}}\left(\cos\frac{m}{n}\tau + \sqrt{-1}\sin\frac{m}{n}\pi\right)((1))^{\frac{m}{n}}; \tag{45}$$

2° en supposant $p < 0$,

$$((x))^{\frac{m}{n}} = r^{\frac{m}{n}}\left(\cos\frac{m}{n}\pi + \sqrt{-1}\sin\frac{m}{n}\tau\right)((-1))^{\frac{m}{n}}. \tag{46}$$

Quant aux diverses valeurs de $((1))^{\frac{m}{n}}$ ou de $((-1))^{\frac{m}{n}}$, on les obtiendra sans peine en élevant à la puissance m les deux membres de la formule (43) ou (44), et l'on reconnaîtra qu'elles coïncident avec les diverses valeurs de $((1))^{\frac{1}{n}}$ ou de $((-1))^{\frac{1}{n}}$ (*voir* l'*Analyse algébrique*, Chap. VII). Ajoutons que, si la quantité p est positive, on obtiendra une valeur particulière de $((x))^{\frac{m}{n}}$, en élevant à la puissance m les deux membres de la formule (33). Cette valeur particulière, que l'on déduit de la formule (46) en réduisant $((1))^{\frac{m}{n}}$ à l'unité, sera désignée par la notation $x^{\frac{m}{n}}$, en sorte qu'on aura

$$x^{\frac{m}{n}} = r^{\frac{m}{n}}\left(\cos\frac{m}{n}\tau + \sqrt{-1}\sin\frac{m}{n}\tau\right). \tag{47}$$

Élever l'expression imaginaire x à la puissance négative du degré $-m$, ou $-\frac{1}{n}$, ou $-\frac{m}{n}$, c'est diviser l'unité par la puissance du degré m, ou $\frac{1}{n}$, ou $\frac{m}{n}$. Le problème admettant une solution seulement dans le premier cas, et plusieurs solutions dans chacun des deux autres, on indiquera la puissance du degré $-m$ par la notation simple x^{-m}, tandis que la notation $((x))^{-\frac{1}{n}}$, ou $((x))^{-\frac{m}{n}}$ représentera une quelconque des puissances du degré $-\frac{1}{n}$, ou $-\frac{m}{n}$. Enfin on désignera par $x^{-\frac{1}{n}}$ ou par $x^{-\frac{m}{n}}$ le quotient que fournit la division

de l'unité par la puissance $x^{\frac{1}{n}}$, ou $x^{\frac{m}{n}}$. Cela posé, on tirera des équations (31), (45), (46) et (47) : 1° quel que soit le signe de p,

$$x^{-m} = r^{-m}(\cos mt - \sqrt{-1}\sin mt); \tag{48}$$

2° dans le cas où p sera positif,

$$((x))^{-\frac{m}{n}} = r^{-\frac{m}{n}}\left(\cos\frac{m}{n}\tau - \sqrt{-1}\sin\frac{m}{n}\tau\right)((1))^{-\frac{m}{n}}, \tag{49}$$

$$x^{-\frac{m}{n}} = r^{-\frac{m}{n}}\left(\cos\frac{m}{n}\tau - \sqrt{-1}\sin\frac{m}{n}\tau\right); \tag{50}$$

3° dans le cas où p sera négatif,

$$((x))^{-\frac{m}{n}} = r^{-\frac{m}{n}}\left(\cos\frac{m}{n}\tau - \sqrt{-1}\sin\frac{m}{n}\tau\right)((-1))^{-\frac{m}{n}}. \tag{51}$$

Quant aux diverses valeurs de l'expression $((1))^{-\frac{m}{n}}$, ou $((-1))^{-\frac{m}{n}}$, on reconnaîtra sans peine qu'elles coïncident avec les diverses valeurs de l'expression $((1))^{\frac{1}{n}}$, ou $((-1))^{\frac{1}{n}}$.

Il suit évidemment des formules (32), (33), (47) et (50) que, si l'on désigne par a une quantité positive ou négative, entière ou fractionnaire, on aura, en supposant $x = p + q\sqrt{-1}$, et $p > 0$,

$$x^a = r^a(\cos a\tau + \sqrt{-1}\sin a\tau). \tag{52}$$

Cette dernière équation ayant lieu toutes les fois que la valeur numérique de la constante a est entière ou fractionnaire, l'analogie nous conduit à l'étendre au cas même où la valeur numérique de a devient irrationnelle. Alors l'équation dont il s'agit sert à fixer le sens de la notation x^a; mais il n'est plus possible de conserver dans le calcul les notations $((1))^a$, $((x))^a$, à moins de considérer chacune d'elles comme propre à représenter une infinité d'expressions imaginaires.

Lorsque la quantité p devient négative, on ne voit plus, même en supposant fractionnaire la valeur numérique de a, quelle est celle des valeurs de l'expression $((x))^a$ que l'on pourrait distinguer des autres et désigner par la notation x^a (*voir*, à ce sujet, le premier article des *Exercices de Mathématiques* pour l'année 1826) (¹). Mais alors, $-p$ étant une quantité positive, on trouvera, pour une valeur réelle quelconque de la constante a,

$$(53)\qquad (-x)^a = r^a(\cos a\tau + \sqrt{-1}\sin a\tau).$$

Ajoutez que, si l'on désigne par a une quantité positive ou négative, entière ou fractionnaire, on aura, en supposant $p > 0$,

$$(54)\qquad ((x))^a = x^a((1))^a,$$

$$(55)\qquad ((1))^a = \cos 2ka\pi + \sqrt{-1}\sin 2ka\pi,$$

et, en supposant $v < 0$,

$$(56)\qquad ((x))^a = (-x)^a((-1))^a,$$

$$(57)\qquad ((-1))^a = \cos[(2k+1)a\pi] + \sqrt{-1}\sin[(2k+1)a\pi].$$

Considérons maintenant les six notations

$$(58)\qquad \begin{cases} A^x, & \sin x, & \cos x, \\ Lx, & \arcsin x, & \arccos x. \end{cases}$$

Si l'on attribue à la variable x une valeur réelle, ces six notations représenteront autant de fonctions réelles de x, qui, prises deux à deux, seront *inverses* l'une de l'autre, c'est-à-dire données par des opérations inverses, pourvu toutefois que, A désignant un nombre, L exprime la caractéristique des logarithmes dans le système dont la base est A. Il reste à fixer le sens de ces mêmes notations dans le cas où la variable x devient imaginaire. C'est ce que je vais faire ici en commençant par les trois premières.

On a prouvé que, dans le cas où la variable x est supposée réelle, les trois fonctions représentées par

$$A^x,\quad \sin x,\quad \cos x$$

(¹) *Œuvres de Cauchy*, S. II, T. VI, p. 11.

sont toujours développables en séries convergentes ordonnées suivant les puissances ascendantes et entières de cette variable. On a en effet, dans cette hypothèse (*voir* la neuvième Leçon),

$$(59)\qquad A^x = 1 + \frac{x}{1}\,\mathrm{l}A + \frac{x^2}{1.2}(\mathrm{l}A)^2 + \frac{x^2}{1.2.3}(\mathrm{l}A)^3 + \ldots,$$

$$(60)\qquad \cos x = 1 - \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^4}{1.2.3.4} - \ldots,$$

$$(61)\qquad \sin x = \frac{x}{1} - \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^5}{1.2.3.4.5} + \ldots,$$

la caractéristique l indiquant un logarithme népérien. De plus, comme, en vertu des remarques faites dans la dixième Leçon (page 386), les séries qu'on vient de rappeler restent convergentes pour toutes les valeurs réelles ou imaginaires de la variable x, on est convenu d'étendre les équations (59), (60), (61) à tous les cas possibles, et de les considérer comme pouvant servir à fixer, lors même que la variable devient imaginaire, le sens des trois notations

$$A^x,\quad \sin x,\quad \cos x.$$

Observons à présent que, si, dans l'équation (59), on fait $A = e$ (e désignant la base des logarithmes népériens), on en tirera

$$(62)\qquad e^x = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} + \ldots;$$

puis, en écrivant successivement, au lieu de x,

$$x\,\mathrm{l}A,\quad x\sqrt{-1},\quad -x\sqrt{-1},$$

$$(63)\qquad e^{x\,\mathrm{l}A} = 1 + \frac{x}{1}\,\mathrm{l}A + \frac{x^2}{1.2}(\mathrm{l}A)^2 + \frac{x^3}{1.2.3}(\mathrm{l}A)^3 + \ldots,$$

$$(64)\qquad \begin{cases} e^{x\sqrt{-1}} = 1 + \dfrac{x}{1}\sqrt{-1} - \dfrac{x^2}{1.2} - \dfrac{x^3}{1.2.3}\sqrt{-1} + \ldots, \\ e^{-x\sqrt{-1}} = 1 - \dfrac{x}{1}\sqrt{-1} - \dfrac{x^2}{1.2} + \dfrac{x^3}{1.2.3}\sqrt{-1} + \ldots. \end{cases}$$

On aura, par suite,

$$e^{x\,\mathrm{l}\mathrm{A}} = \mathrm{A}^x, \tag{65}$$

$$\left\{\begin{aligned} e^{x\sqrt{-1}} &= \cos x + \sqrt{-1}\sin x, \\ e^{-x\sqrt{-1}} &= \cos x - \sqrt{-1}\sin x, \end{aligned}\right. \tag{66}$$

et l'on conclura des équations (66)

$$\cos x = \frac{e^{x\sqrt{-1}} + e^{-x\sqrt{-1}}}{2}, \qquad \sin x = \frac{e^{x\sqrt{-1}} - e^{-x\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}}, \tag{67}$$

la variable x pouvant toujours être réelle ou imaginaire. Cela posé, il sera facile d'obtenir sous forme finie les valeurs de e^x, A^x, $\sin x$ et $\cos x$ correspondantes à une valeur imaginaire $p + q\sqrt{-1}$ de la variable x; et d'abord, en ayant égard à la formule (67) de la neuvième Leçon, on trouvera

$$\begin{aligned} e^x = e^{p+q\sqrt{-1}} &= 1 + p + q\sqrt{-1} + \frac{(p+q\sqrt{-1})^2}{1.2} + \frac{(p+q\sqrt{-1})^3}{1.2.3} + \ldots \\ &= e^p(\cos q + \sqrt{-1}\sin q). \end{aligned}$$

On aura donc

$$e^x = e^p(\cos q + \sqrt{-1}\sin q). \tag{68}$$

De plus, la valeur de e^x étant déterminée par l'équation (68), les valeurs des notations

$$\mathrm{A}^x, \quad \sin x, \quad \cos x \tag{69}$$

se déduiront immédiatement des formules (65) et (67), et l'on reconnaitra que ces notations doivent être employées pour représenter les expressions imaginaires

$$\left\{\begin{aligned} &\mathrm{A}^p(\cos q\,\mathrm{lA} + \sqrt{-1}\sin q\,\mathrm{lA}), \\ &\frac{e^q + e^{-q}}{2}\sin p + \frac{e^q - e^{-q}}{2}\cos p\sqrt{-1}, \\ &\frac{e^q + e^{-q}}{2}\cos p - \frac{e^q - e^{-q}}{2}\sin p\sqrt{-1}. \end{aligned}\right. \tag{70}$$

Ajoutons que l'équation (68) peut être présentée sous la forme

$$e^x = e^p e^{q\sqrt{-1}}. \tag{71}$$

Or, à l'aide de cette dernière et des équations (65), (66), on étendra sans peine à des valeurs imaginaires quelconques des variables x, y les formules communes qui expriment les propriétés des fonctions e^x, A^x, $\cos x$, $\sin x$. On trouvera, par exemple,

$$e^{x+y} = e^x e^y, \tag{72}$$

$$\mathrm{A}^{x+y} = \mathrm{A}^x \mathrm{A}^y, \tag{73}$$

$$\left\{\begin{aligned} \cos(x+y) &= \cos x\cos y - \sin x\sin y, \\ \sin(x+y) &= \sin x\cos y + \sin y\cos x, \end{aligned}\right. \tag{74}$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x, \qquad \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x, \qquad \ldots.$$

Concevons maintenant que l'on cherche les diverses valeurs réelles ou imaginaires de y et de z propres à résoudre les deux équations

$$e^y = x, \tag{76}$$

$$\mathrm{A}^z = x. \tag{77}$$

Ces diverses valeurs seront les divers logarithmes de x calculés : 1° dans le système népérien; 2° dans le système dont la base est A, et représentés par l'une des notations

$$\mathrm{l}((x)), \quad \mathrm{L}((x)).$$

De plus, comme on aura, en vertu de la formule (65),

$$\mathrm{A}^z = e^{z\,\mathrm{lA}},$$

il est clair que les inconnues y et z seront assujetties à l'équation de condition

$$y = z\,\mathrm{lA} \qquad \text{ou} \qquad z = \frac{y}{\mathrm{lA}};$$

en sorte qu'on trouvera

$$\mathrm{L}((x)) = \frac{\mathrm{l}((x))}{\mathrm{lA}}. \tag{78}$$

Donc, pour obtenir les logarithmes de x dans le système dont la base est A, il suffira de diviser par lA les logarithmes népériens de la même variable, et par conséquent on pourra se contenter de résoudre l'équation (76). Or, si l'on pose

$$x = p + q\sqrt{-1} \qquad \text{et} \qquad y = \mathrm{P} + \mathrm{Q}\sqrt{-1},$$

P, Q désignant, ainsi que p et q, des quantités réelles, l'équation (76) donnera

$$e^{\mathrm{P}+\mathrm{Q}\sqrt{-1}} = e^{\mathrm{P}}(\cos\mathrm{Q} + \sqrt{-1}\sin\mathrm{Q}) = p + q\sqrt{-1},$$

puis l'on en tirera : 1° en supposant $p > 0$, désignant par k un nombre entier quelconque, et ayant égard à la formule (28),

$$e^{\mathrm{P}}(\cos\mathrm{Q} + \sqrt{-1}\sin\mathrm{Q}) = r(\cos\tau + \sqrt{-1}\sin\tau),$$
$$e^{\mathrm{P}} = r, \qquad \mathrm{P} = \mathrm{l}r,$$
$$\cos\mathrm{Q} + \sqrt{-1}\sin\mathrm{Q} = \cos\tau + \sqrt{-1}\sin\tau,$$
$$\cos\mathrm{Q} = \cos\tau, \qquad \sin\mathrm{Q} = \sin\tau, \qquad \mathrm{Q} = \tau \pm 2k\pi;$$

2° en supposant $p < 0$, et ayant égard à la formule (29),

$$e^{\mathrm{P}}(\cos\mathrm{Q} + \sqrt{-1}\sin\mathrm{Q}) = -r(\cos\tau + \sqrt{-1}\sin\tau),$$
$$e^{\mathrm{P}} = r, \qquad \mathrm{P} = \mathrm{l}r,$$
$$\cos\mathrm{Q} + \sqrt{-1}\sin\mathrm{Q} = -(\cos\tau + \sqrt{-1}\sin\tau),$$
$$\cos\mathrm{Q} = -\cos\tau, \qquad \sin\mathrm{Q} = -\sin\tau, \qquad \mathrm{Q} = \tau \pm (2k+1)\pi.$$

On aura par suite, pour une valeur positive de p,

$$\mathrm{l}((x)) = \mathrm{l}r + \tau\sqrt{-1} \pm 2k\pi\sqrt{-1}, \tag{79}$$

et, pour une valeur négative de p,

$$\mathrm{l}((x)) = \mathrm{l}r + \tau\sqrt{-1} \pm (2k+1)\pi\sqrt{-1}. \tag{80}$$

Si l'on fait en particulier $x = 1$ ou $x = -1$, on tirera de la formule (79) ou (80)

$$\mathrm{l}((1)) = \pm 2k\pi\sqrt{-1} \tag{81}$$

ou

$$\mathrm{l}((-1)) = \pm (2k+1)\pi\sqrt{-1}, \tag{82}$$

puis l'on conclura des quatre dernières équations : 1° en supposant $p > 0$,

$$\mathrm{l}((x)) = \mathrm{l}r + \tau\sqrt{-1} + \mathrm{l}((1)); \tag{83}$$

2° en supposant $p < 0$,

$$\mathrm{l}((x)) = \mathrm{l}r + \tau\sqrt{-1} + \mathrm{l}((-1)). \tag{84}$$

Dans le cas où la quantité p reste positive, le plus simple de tous les logarithmes de x est celui qu'on obtient en faisant $k = 0$ dans l'équation (79), et $\mathrm{l}((1)) = 0$ dans l'équation (83). Ce même logarithme qui, pour une valeur nulle de q, se réduit au logarithme réel de p, sera celui que nous désignerons par la notation $\mathrm{l}x$, en sorte qu'on aura, en supposant $p > 0$,

$$\mathrm{l}x = \mathrm{l}r + \tau\sqrt{-1}. \tag{85}$$

Cela posé, on trouvera évidemment, pour des valeurs positives de la quantité p,

$$\mathrm{l}((x)) = \mathrm{l}x + \mathrm{l}((1)), \tag{86}$$

et, pour des valeurs négatives de p,

$$\mathrm{l}((x)) = \mathrm{l}(-x) + \mathrm{l}((-1)). \tag{87}$$

De plus, si, p étant positif, on supprime les parenthèses doubles renfermées dans le second membre de l'équation (78), on obtiendra une valeur de $\mathrm{L}((x))$, que nous désignerons par la notation $\mathrm{L}x$, en sorte qu'on aura

$$\mathrm{L}x = \frac{\mathrm{l}x}{\mathrm{lA}} = \mathrm{L}r + \frac{\tau}{\mathrm{lA}}\sqrt{-1}. \tag{88}$$

Ajoutons que l'on ne fera jamais usage des notations $\mathrm{l}x$ ou $\mathrm{L}x$ dans le cas où la quantité p sera négative.

Après avoir calculé les divers logarithmes de l'expression imaginaire

$$x = p + q\sqrt{-1},$$

proposons-nous de trouver les arcs imaginaires dont le sinus est égal à x. Si l'on désigne par

$$\text{(89)} \qquad \arcsin((x)) = \mathrm{P} + \mathrm{Q}\sqrt{-1}$$

l'un quelconque de ces arcs, on aura, pour déterminer $\mathrm{P} + \mathrm{Q}\sqrt{-1}$, l'équation

$$\text{(90)} \qquad \sin(\mathrm{P} + \mathrm{Q}\sqrt{-1}) = x = p + q\sqrt{-1}$$

ou, ce qui revient au même, la suivante

$$\frac{e^{\mathrm{Q}} + e^{-\mathrm{Q}}}{2}\sin\mathrm{P} + \sqrt{-1}\,\frac{e^{\mathrm{Q}} - e^{-\mathrm{Q}}}{2}\cos\mathrm{P} = p + q\sqrt{-1},$$

laquelle se divise en deux autres, savoir

$$\text{(91)} \qquad \frac{e^{\mathrm{Q}} + e^{-\mathrm{Q}}}{2}\sin\mathrm{P} = p, \qquad \frac{e^{\mathrm{Q}} - e^{-\mathrm{Q}}}{2}\cos\mathrm{P} = +q.$$

A ces dernières on peut substituer le système équivalent des deux formules

$$\text{(92)} \qquad e^{\mathrm{Q}} = \frac{p}{\sin\mathrm{P}} + \frac{q}{\cos\mathrm{P}}, \qquad e^{-\mathrm{Q}} = \frac{p}{\sin\mathrm{P}} - \frac{q}{\cos\mathrm{P}}.$$

De plus, si l'on élimine Q entre les formules (92), on en tirera successivement

$$\text{(93)} \qquad \frac{p^2}{\sin^2\mathrm{P}} - \frac{q^2}{\cos^2\mathrm{P}} = 1,$$

$$\text{(94)} \qquad \cos^4\mathrm{P} - (1 - p^2 - q^2)\cos^2\mathrm{P} - q^2 = 0;$$

puis, en observant que $\cos^2\mathrm{P}$ est nécessairement une quantité positive,

$$\text{(95)} \qquad \left\{\begin{aligned} \cos^2\mathrm{P} &= \frac{1 - p^2 - q^2}{2} + \sqrt{\left(\frac{1 - p^2 - q^2}{2}\right)^2 + q^2} \\ &= \frac{q^2}{-\frac{1 - p^2 - q^2}{2} + \sqrt{\left(\frac{1 - p^2 - q^2}{2}\right)^2 + q^2}}. \end{aligned}\right.$$

On aura par suite

$$\text{(96)} \qquad \sin^2\mathrm{P} = 1 - \cos^2\mathrm{P} = \frac{1 + p^2 + q^2}{2} - \sqrt{\left(\frac{1 + p^2 + q^2}{2}\right)^2 - p^2}$$

ou, ce qui revient au même,

$$\text{(97)} \qquad \sin^2\mathrm{P} = \frac{p^2}{\frac{1 + p^2 + q^2}{2} + \sqrt{\left(\frac{1 + p^2 + q^2}{2}\right)^2 - p^2}};$$

et, comme, en vertu de la première des équations (91), $\sin\mathrm{P}$ et p devront être des quantités du même signe, on trouvera, en extrayant les racines carrées des deux membres de la formule (97),

$$\text{(98)} \qquad \sin\mathrm{P} = \frac{p}{\left[\frac{1 + p^2 + q^2}{2} + \sqrt{\left(\frac{1 + p^2 + q^2}{2}\right)^2 - p^2}\right]^{\frac{1}{2}}}.$$

Cela posé, si l'on fait, pour plus de commodité,

$$\text{(99)} \qquad \mathcal{P} = \arcsin\frac{p}{\left[\frac{1 + p^2 + q^2}{2} + \sqrt{\left(\frac{1 + p^2 + q^2}{2}\right)^2 - p^2}\right]^{\frac{1}{2}}},$$

on tirera de l'équation (98)

$$\text{(100)} \qquad \mathrm{P} = \frac{\pi}{2} \pm \left(\mathcal{P} - \frac{\pi}{2}\right) \pm 2k,$$

k désignant un nombre entier quelconque; et de la première des formules (92)

$$\text{(101)} \qquad \mathrm{Q} = \mathrm{l}\left(\frac{p}{\sin\mathrm{P}} + \frac{q}{\cos\mathrm{P}}\right) = \mathrm{l}\left(\frac{p}{\sin\mathcal{P}} \pm \frac{q}{\cos\mathcal{P}}\right).$$

D'ailleurs, l'équation (93) devant être vérifiée quand on y pose

$$\mathrm{P} = \frac{\pi}{2} \pm \left(\mathcal{P} - \frac{\pi}{2}\right) \pm 2k\pi,$$

on en conclura

$$\text{(102)} \qquad \frac{p^2}{\sin^2\mathcal{P}} - \frac{q^2}{\cos^2\mathcal{P}} = \left(\frac{p}{\sin\mathcal{P}} + \frac{q}{\cos\mathcal{P}}\right)\left(\frac{p}{\sin\mathcal{P}} - \frac{q}{\cos\mathcal{P}}\right) = 1$$

et, par suite,

$$\mathrm{l}\left(\frac{p}{\sin\mathfrak{P}}-\frac{q}{\cos\mathfrak{P}}\right)=-\mathrm{l}\left(\frac{p}{\sin\mathfrak{P}}+\frac{q}{\cos\mathfrak{P}}\right). \tag{103}$$

Il en résulte que la valeur de Q pourra être présentée sous la forme

$$\mathrm{Q}=\pm\,\mathrm{l}\left(\frac{p}{\sin\mathfrak{P}}+\frac{q}{\cos\mathfrak{P}}\right). \tag{104}$$

Il importe d'observer : 1° que, dans la formule (104), on devra toujours réduire le double signe $\pm$ à celui qui affectera le binôme $\mathfrak{P}-\frac{\pi}{2}$ dans l'équation (100); 2° que la valeur trouvée de Q pouvait se tirer de la seconde des équations (92) aussi bien que de la première. En substituant cette valeur de Q avec la valeur générale de P dans la formule (89), et faisant, pour abréger,

$$\mathfrak{Q}=\mathrm{l}\left(\frac{p}{\sin\mathfrak{P}}+\frac{q}{\cos\mathfrak{P}}\right), \tag{105}$$

on aura définitivement

$$\arcsin((x))=\frac{\pi}{2}\pm\left(\mathfrak{P}+\mathfrak{Q}\sqrt{-1}-\frac{\pi}{2}\right)\pm 2k\pi. \tag{106}$$

Parmi les diverses valeurs de $\arcsin((x))$ que fournit l'équation précédente, la plus simple est celle qu'on obtient en posant $k=0$ et en réduisant au signe $+$ le double signe qui affecte le trinôme $\mathfrak{P}+\mathfrak{Q}\sqrt{-1}-\frac{\pi}{2}$. Nous la désignerons à l'aide de parenthèses simples, et nous écrirons en conséquence

$$\arcsin(x)=\mathfrak{P}+\mathfrak{Q}\sqrt{-1}, \tag{107}$$

ou même, en supprimant tout à fait les parenthèses,

$$\arcsin x=\mathfrak{P}+\mathfrak{Q}\sqrt{-1}. \tag{108}$$

D'autre part, si l'on observe que $\pm 2k\pi+\frac{\pi}{2}$ représente un quelconque des arcs qui ont l'unité pour sinus, on reconnaîtra que

l'équation (106) peut être mise sous la forme

$$\arcsin((x))=\pm\left(\arcsin x-\frac{\pi}{2}\right)+\arcsin((1)). \tag{109}$$

Il serait facile d'exprimer la quantité $\mathfrak{Q}$ en fonction de p et de q. En effet, si l'on remplace P par $\mathfrak{P}$ dans les formules (98) et (95), on en tirera, en observant que $\cos\mathfrak{P}$ est essentiellement positif,

$$\left\{\begin{aligned}\sin\mathfrak{P}&=\frac{p}{\left[\frac{p^2+q^2+1}{2}+\sqrt{\left(\frac{p^2+q^2+1}{2}\right)^2-p^2}\right]^{\frac{1}{2}}},\\ \cos\mathfrak{P}&=\frac{\sqrt{q^2}}{\left[\frac{p^2+q^2+1}{2}+\sqrt{\left(\frac{p^2+q^2+1}{2}\right)^2-p^2}\right]^{\frac{1}{2}}}.\end{aligned}\right. \tag{110}$$

Donc l'équation (105) donnera

$$\mathfrak{Q}=\mathrm{l}\left\{\left[\frac{p^2+q^2+1}{2}+\sqrt{\left(\frac{p^2+q^2+1}{2}\right)^2-p^2}\right]^{\frac{1}{2}}+\frac{q}{\sqrt{q^2}}\left[\frac{p^2+q^2-1}{2}+\sqrt{\left(\frac{p^2+q^2+1}{2}\right)^2-p^2}\right]^{\frac{1}{2}}\right\} \tag{111}$$

ou, ce qui revient au même,

$$\mathfrak{Q}=\pm\,\mathrm{l}\left\{\left[\frac{p^2+q^2+1}{2}+\sqrt{\left(\frac{p^2+q^2+1}{2}\right)^2-p^2}\right]^{\frac{1}{2}}+\left[\frac{p^2+q^2-1}{2}+\sqrt{\left(\frac{p^2+q^2+1}{2}\right)^2-p^2}\right]^{\frac{1}{2}}\right\}, \tag{112}$$

le double signe devant être réduit au signe $+$ ou au signe $-$, suivant que l'on aura $q=\sqrt{q^2}$ ou $q=-\sqrt{q^2}$, c'est-à-dire suivant que la quantité q sera positive ou négative.

Dans le cas particulier où l'on a $q=0$, les formules (99) et (112) donnent

$$\left\{\begin{aligned}\mathfrak{P}&=\arcsin\frac{p}{\left[\frac{1+p^2}{2}+\sqrt{\left(\frac{1-p^2}{2}\right)^2}\right]^{\frac{1}{2}}},\\ \mathfrak{Q}&=\pm\,\mathrm{l}\left\{\left[\frac{p^2+1}{2}+\sqrt{\left(\frac{1-p^2}{2}\right)^2}\right]^{\frac{1}{2}}+\left[\frac{p^2-1}{1}+\sqrt{\left(\frac{1-p^2}{2}\right)^2}\right]^{\frac{1}{2}}\right\}.\end{aligned}\right. \tag{113}$$

On trouve par suite, en supposant $p^2 < 1$,

$$(114) \qquad \mathfrak{P} = \text{arc}\sin p, \qquad \mathfrak{Q} = \pm \,\mathrm{l}(1) = 0,$$

et, en supposant $p^2 > 1$,

$$(115) \qquad \mathfrak{P} = \text{arc}\sin \frac{p}{\sqrt{p^2}} = \text{arc}\sin(\pm 1), \qquad \mathfrak{Q} = \pm \,\mathrm{l}\left(\sqrt{p^2} + \sqrt{p^2 - 1}\right).$$

Dans la première hypothèse, la formule (108) se réduit, comme on devait s'y attendre, à l'équation identique

$$\text{arc}\sin p = \text{arc}\sin p,$$

et la formule (106) devient

$$(116) \qquad \text{arc}\sin((p)) = \frac{\pi}{2} \pm \left(\text{arc}\sin p - \frac{\pi}{2}\right) \pm 2k\pi.$$

Dans le second cas, la quantité $\mathfrak{Q}$ admettant, non plus une seule valeur, mais deux valeurs égales et de signes contraires, le second membre de l'équation (108) cesse d'être complètement déterminé. On doit donc alors s'abstenir d'employer la notation $\text{arc}\sin p$; mais on tire des équations (106) et (115) : 1° en supposant $p > 0$,

$$(117) \qquad \text{arc}\sin((p)) = \frac{\pi}{2} \pm 2k\pi \pm \sqrt{-1}\,\mathrm{l}\left(p + \sqrt{p^2 - 1}\right);$$

2° en supposant $p < 0$,

$$(118) \qquad \text{arc}\sin((p)) = \frac{\pi}{2} \pm (2k \pm 1)\pi \pm \sqrt{-1}\,\mathrm{l}\left(-p + \sqrt{p^2 - 1}\right).$$

Dans le cas particulier où l'on a $p = 0$, les formules (99) et (112) donnent

$$(119) \qquad \mathfrak{P} = \text{arc}\sin(0) = 0, \qquad \mathfrak{Q} = \mathrm{l}\left(q + \sqrt{q^2 + 1}\right).$$

Par suite, les formules (106), (108) se réduisent à

$$(120) \qquad \text{arc}\sin\left(\left(q\sqrt{-1}\right)\right) = \frac{\pi}{2} \pm 2k\pi \pm \left[\frac{\pi}{2} - \sqrt{-1}\,\mathrm{l}\left(q + \sqrt{q^2 + 1}\right)\right],$$

$$(121) \qquad \text{arc}\sin\left(q\sqrt{-1}\right) = \sqrt{-1}\,\mathrm{l}\left(q + \sqrt{q^2 + 1}\right).$$

Considérons maintenant les arcs imaginaires dont le cosinus est $x = p + q\sqrt{-1}$. Si l'on désigne par

$$(122) \qquad z = \text{arc}\cos((x))$$

l'un quelconque de ces arcs, on aura, pour déterminer z, l'équation

$$(123) \qquad \cos z = x.$$

D'ailleurs la première des équations (75) donnera

$$(124) \qquad \cos z = \sin\left(\frac{\pi}{2} - z\right).$$

Donc l'équation (123) pourra s'écrire comme il suit :

$$(125) \qquad \sin\left(\frac{\pi}{2} - z\right) = x.$$

Or on tirera de cette dernière

$$(126) \qquad \frac{\pi}{2} - z = \text{arc}\sin((x)).$$

Donc les diverses valeurs de $z = \text{arc}\cos((x))$ seront déterminées par la formule

$$(127) \qquad \text{arc}\cos((x)) = \frac{\pi}{2} - \text{arc}\sin((x)).$$

Parmi ces valeurs, il en existe une qui mérite d'être remarquée, savoir, celle qu'on obtient, en remplaçant, dans le second membre de la formule (127), les doubles parenthèses par des parenthèses simples. Nous désignerons encore, à l'aide de parenthèses simples, la valeur dont il s'agit, et nous écrirons, en conséquence,

$$(128) \qquad \text{arc}\cos(x) = \frac{\pi}{2} - \text{arc}\sin(x)$$

ou même, en supprimant tout à fait les parenthèses,

$$(129) \qquad \text{arc}\cos x = \frac{\pi}{2} - \text{arc}\sin x.$$

Cela posé, on tirera évidemment de l'équation (108)

$$\text{(130)} \qquad \operatorname{arc}\cos x = \frac{\pi}{2} - \mathcal{P} - \mathcal{Q}\sqrt{-1},$$

les valeurs des quantités $\mathcal{P}$, $\mathcal{Q}$ étant toujours déterminées par les formules (99) et (111). De plus on conclura de la formule (109), combinée avec les équations (127) et (129),

$$\text{(131)} \qquad \operatorname{arc}\cos((x)) = \pm \operatorname{arc}\cos x \pm \operatorname{arc}\cos((1)).$$

Considérons, en particulier, le cas où l'on a $q = 0$. Alors, si l'on suppose $p^2 < 1$, l'équation (130) se réduira, comme on devait s'y attendre, à l'équation identique

$$\operatorname{arc}\cos p = \operatorname{arc}\cos p,$$

et la formule (131) deviendra

$$\text{(132)} \qquad \operatorname{arc}\cos((p)) = \pm 2k\pi \pm \operatorname{arc}\cos p.$$

Si l'on suppose, au contraire, $p^2 > 1$, la quantité Q acquerra deux valeurs égales, mais de signes différents, et l'on devra, par suite, s'abstenir d'employer la notation $\operatorname{arc}\cos p$; tandis que l'on tirera des formules (117), (118) et (127) : 1° en supposant $p > 0$,

$$\text{(133)} \qquad \operatorname{arc}\cos((p)) = \pm 2k\pi \mp \sqrt{-1}\,\mathrm{l}(p + \sqrt{p^2 - 1}),$$

2° en supposant $p < 0$,

$$\text{(134)} \qquad \operatorname{arc}\cos((p)) = \mp (2k \pm 1)\pi \mp \sqrt{-1}\,\mathrm{l}(-p + \sqrt{p^2 - 1}).$$

Dans le cas où l'on suppose $p = 0$, on tire des formules (120), (121) et (127)

$$\text{(135)} \qquad \operatorname{arc}\cos((q\sqrt{-1})) = \mp 2k\pi \pm \left[\frac{\pi}{2} - \sqrt{-1}\,\mathrm{l}(q + \sqrt{q^2 + 1})\right],$$

$$\text{(136)} \qquad \operatorname{arc}\cos(q\sqrt{-1}) = \frac{\pi}{2} - \sqrt{-1}\,\mathrm{l}(q + \sqrt{q^2 + 1}).$$

Nous avons précédemment observé que les formules (72), (73), (74), (75), etc., qui expriment les propriétés connues des fonctions A^x, $\cos x$, $\sin x$, ..., peuvent être étendues à des valeurs imaginaires quelconques des variables x, y. Si l'on considère, au contraire, des formules dans lesquelles entrent les fonctions inverses

$$\mathrm{l}x, \quad \mathrm{L}x, \quad \operatorname{arc}\sin x, \quad \operatorname{arc}\cos x,$$

on trouvera le plus souvent que ces formules, étendues au cas où les variables deviennent imaginaires, ne subsistent qu'avec des restrictions considérables. Par exemple, si l'on fait

$$\text{(137)} \qquad x = p + q\sqrt{-1}, \quad y = p_1 + q_1\sqrt{-1}, \quad z = p_2 + q_2\sqrt{-1}, \quad \ldots;$$

et, si l'on désigne par a une quantité réelle quelconque, la formule connue

$$\text{(138)} \qquad \mathrm{L}x + \mathrm{L}y + \mathrm{L}z + \ldots = \mathrm{L}(xyz\ldots)$$

subsistera seulement dans le cas où, p, p_1, p_2, ... étant positifs, la somme

$$\text{(139)} \qquad \operatorname{arc}\operatorname{tang}\frac{q}{p} + \operatorname{arc}\operatorname{tang}\frac{q_1}{p_1} + \operatorname{arc}\operatorname{tang}\frac{q_2}{p_2} + \ldots$$

restera comprise entre les limites $-\frac{\pi}{2}$, $+\frac{\pi}{2}$, et la formule

$$\text{(140)} \qquad \mathrm{L}x^a = a\,\mathrm{L}x,$$

dans le cas où le produit

$$\text{(141)} \qquad a \operatorname{arc}\operatorname{tang}\frac{q}{p}$$

sera compris entre les mêmes limites. Ajoutons que, si, dans l'équation (138), on remplace les parenthèses simples par des parenthèses doubles, la formule ainsi obtenue, savoir

$$\text{(142)} \qquad \mathrm{L}((xyz\ldots)) = \mathrm{L}((x)) + \mathrm{L}((y)) + \mathrm{L}((z)) + \ldots,$$

devra être considérée comme exacte, parce qu'à chacune des valeurs du second membre on pourra faire correspondre une valeur égale du premier. Quant à la valeur générale de $\mathrm{L}((x^a))$, elle se déduira immédiatement des deux équations

$$(143)\qquad \begin{cases} \mathrm{L}((x^a)) = \dfrac{\mathrm{l}((x^a))}{\mathrm{l}\mathrm{A}}, \\ \mathrm{l}((x^a)) = \mathrm{l}((e^{a\,\mathrm{l}x})) = a\,\mathrm{l}x \pm 2k\pi\sqrt{-1}, \end{cases}$$

k désignant un nombre entier quelconque, et le produit (141) étant toujours renfermé entre les limites $-\frac{\pi}{2}$, $+\frac{\pi}{2}$.

Pour terminer ce que nous avions à dire sur les valeurs que prennent les fonctions simples de la variable x, quand cette variable est imaginaire, il nous reste à chercher ce que deviennent les expressions

$$x^a,\quad \mathrm{A}^x,\quad \mathrm{L}x$$

lorsque les constantes a, A cessent d'être réelles. Or, si l'on étend la formule (52) au cas où, la partie réelle de x étant positive, l'exposant a devient imaginaire, cette formule suffira évidemment pour fixer, dans le cas dont il s'agit, la valeur de la notation x^a. Nous admettrons désormais cette extension de la formule (52); mais nous cesserons d'employer la notation x^a toutes les fois que la partie réelle de la variable x sera négative. Quant à la notation $((x))^a$, on ne peut en faire usage, lorsque l'exposant a n'est pas réel, à moins de la considérer comme propre à représenter une infinité d'expressions imaginaires.

Supposons maintenant que la constante A se présente sous la forme

$$(144)\qquad \mathrm{A} = \alpha + \beta\sqrt{-1},$$

α, β désignant des quantités quelconques. Dans ce cas, si la quantité α est positive, il suffira, pour fixer le sens de la notation A^x, de concevoir que la formule (65) continue de subsister. Alors, en faisant, pour abréger,

$$(145)\qquad \rho = \sqrt{\alpha^2+\beta^2},\qquad \upsilon = \operatorname{arc\,tang}\frac{\beta}{\alpha},$$

on trouvera

$$\mathrm{A} = \rho(\cos\upsilon + \sqrt{-1}\sin\upsilon),\qquad \mathrm{l}\mathrm{A} = \mathrm{l}\rho + \upsilon\sqrt{-1},$$

$$\mathrm{A}^x = e^{x\,\mathrm{l}\rho + \upsilon x\sqrt{-1}} = e^{x\,\mathrm{l}\rho}\,e^{\upsilon x\sqrt{-1}}$$

et, par suite,

$$(146)\qquad \mathrm{A}^x = \rho^x(\cos\upsilon x + \sqrt{-1}\sin\upsilon x).$$

On arriverait au même résultat en remplaçant, dans la formule (52),

$$x = r(\cos\tau + \sqrt{-1}\sin\tau)\quad \text{par}\quad \mathrm{A} = \rho(\cos\upsilon + \sqrt{-1}\sin\upsilon)$$

et

$$a \quad \text{par} \quad x.$$

Si, dans le premier membre de la formule (65), on remplaçait $\mathrm{l}\mathrm{A}$ par $\mathrm{l}((\mathrm{A}))$, l'expression qui en résulterait, savoir

$$e^{x\,\mathrm{l}((\mathrm{A}))},$$

offrirait une infinité de valeurs que l'on pourrait toujours calculer, quel que fût d'ailleurs le signe de la partie réelle de la constante A. Donc, si l'on admet dans le calcul la notation $((\mathrm{A}))^x$, il faudra la considérer comme propre à représenter chacune des valeurs dont il s'agit, et par conséquent une infinité d'expressions imaginaires.

Quant aux notations

$$\mathrm{L}x,\quad \mathrm{L}((x)),$$

L indiquant un logarithme pris dans un système dont la base A est imaginaire, elles désigneront nécessairement des valeurs de z propres à vérifier l'équation (77), et par conséquent elles ne devront être employées que dans le cas où l'on pourra faire usage de la notation A^z, c'est-à-dire lorsque la partie réelle de A sera positive. Il est d'ailleurs aisé de s'assurer que, dans ce même cas, les valeurs des notations $\mathrm{L}((x))$, $\mathrm{L}x$ se déduiront à l'ordinaire des formules (78) et (88).

Il est aisé de voir comment les formules connues, qui expriment les propriétés des fonctions x^a, A^x, $\mathrm{L}x$, doivent être modifiées lorsque les constantes a, A deviennent imaginaires. Par exemple, si l'on fait

$$x = p + q\sqrt{-1}, \qquad y = p_1 + q_1\sqrt{-1}, \qquad z = p_2 + q_2\sqrt{-1}, \qquad \ldots,$$

la formule (138) et la suivante

$$(147) \qquad x^a y^a z^a \ldots = (xyz\ldots)^a$$

subsisteront seulement dans le cas où, p, p_1, p_2, ... étant positifs, la somme (139) restera comprise entre les limites $-\frac{\pi}{2}$, $+\frac{\pi}{2}$. Au contraire, si la partie réelle de A est positive, la formule

$$(148) \qquad A^x A^y A^z \ldots = A^{x+y+z\ldots}$$

subsistera sans aucune modification pour toutes les valeurs possibles réelles ou imaginaires des variables x, y, z, ... Il est encore facile de s'assurer : 1° que, si l'on fait

$$a = \alpha + \beta\sqrt{-1}, \qquad x = r(\cos\tau + \sqrt{-1}\sin\tau),$$

α, β, ρ désignant des quantités réelles et τ un angle renfermé entre les limites $-\frac{\pi}{2}$, $+\frac{\pi}{2}$, la formule (140) subsistera seulement dans le cas où le binôme

$$(149) \qquad \alpha\tau + \beta\,\mathrm{l}r$$

restera compris entre les mêmes limites; 2° que la formule (142) subsistera pour des valeurs quelconques des variables x, y, z, ..., et les formules (143) pour toutes les valeurs de x qui offriront une partie réelle positive.

Les valeurs que prennent les fonctions simples d'une variable x, quand cette variable devient imaginaire, étant fixées, comme on vient de le voir, on déterminera facilement les valeurs que peuvent prendre des fonctions composées d'une ou de plusieurs variables réelles ou imaginaires. Parmi les fonctions de cette dernière espèce, il en est quelques-unes que l'on rencontre souvent dans l'Analyse. Telles sont,

par exemple, les quatre fonctions

$$(150) \qquad \operatorname{tang} x, \quad \cot x, \quad \operatorname{séc} x, \quad \operatorname{coséc} x,$$

que l'on peut considérer comme composées et définies par les formules

$$(151) \qquad \begin{cases} \operatorname{tang} x = \dfrac{\sin x}{\cos x}, & \cot x = \dfrac{\cos x}{\sin x}, \\ \operatorname{séc} x = \dfrac{1}{\cos x}, & \operatorname{coséc} x = \dfrac{1}{\sin x}. \end{cases}$$

Tels sont encore les arcs de cercle dont la tangente, la cotangente, la sécante ou la cosécante seraient représentées par x. Pour faire voir comment on peut fixer les valeurs des arcs dont il s'agit, désignons par

$$(152) \qquad z = \operatorname{arc\,tang}((x))$$

l'un quelconque de ceux dont la tangente est égale à x. On aura

$$(153) \qquad x = \operatorname{tang} z = \frac{\sin z}{\cos z} = \frac{e^{z\sqrt{-1}} - e^{-z\sqrt{-1}}}{\left(e^{z\sqrt{-1}} + e^{-z\sqrt{-1}}\right)\sqrt{-1}} = \frac{1}{\sqrt{-1}}\,\frac{e^{2z\sqrt{-1}} - 1}{e^{2z\sqrt{-1}} + 1};$$

puis on en conclura

$$(154) \qquad e^{2z\sqrt{-1}} = \frac{1 + x\sqrt{-1}}{1 - x\sqrt{-1}}$$

et, par conséquent,

$$\begin{aligned} 2z\sqrt{-1} &= 2\sqrt{-1}\operatorname{arc\,tang} x \\ &= \mathrm{l}\left(\left(\frac{1 + x\sqrt{-1}}{1 - x\sqrt{-1}}\right)\right) = \mathrm{l}((1 + x\sqrt{-1})) - \mathrm{l}((1 - x\sqrt{-1})) \end{aligned}$$

ou, ce qui revient au même,

$$(155) \qquad \operatorname{arc\,tang}((x)) = \frac{\mathrm{l}((1 + x\sqrt{-1})) - \mathrm{l}((1 - x\sqrt{-1}))}{2\sqrt{-1}}.$$

Observons d'ailleurs que, dans le cas où la variable x reste réelle, l'équation (155) subsiste lors même qu'on y supprime les doubles parenthèses. Alors, en effet, on tire de l'équation (85)

$$\mathrm{l}(1+x\sqrt{-1}) = \frac{1}{2}\,\mathrm{l}(1+x^2) + \sqrt{-1}\,\operatorname{arc\,tang} x,$$

$$\mathrm{l}(1-x\sqrt{-1}) = \frac{1}{2}\,\mathrm{l}(1+x^2) - \sqrt{-1}\,\operatorname{arc\,tang} x$$

et, par suite,

$$(156)\qquad \operatorname{arc\,tang} x = \frac{\mathrm{l}(1+x\sqrt{-1}) - \mathrm{l}(1-x\sqrt{-1})}{2\sqrt{-1}}.$$

Or il suffit évidemment d'étendre cette dernière formule au cas où la variable x devient imaginaire, pour fixer, dans ce dernier cas, le sens de la notation

$$(157)\qquad \operatorname{arc\,tang} x.$$

C'est ce que nous ferons désormais. On trouvera donc, en prenant $x = p + q\sqrt{-1}$,

$$(158)\qquad \operatorname{arc\,tang} x = \frac{\mathrm{l}(1-q+p\sqrt{-1}) - \mathrm{l}(1+q-p\sqrt{-1})}{2\sqrt{-1}};$$

puis on en conclura, en supposant $q^2 < 1$,

$$(159)\qquad \left\{\begin{aligned} \operatorname{arc\,tang} x &= \frac{1}{2}\left(\operatorname{arc\,tang}\frac{p}{1-q} + \operatorname{arc\,tang}\frac{p}{1+q}\right) \\ &\quad + \frac{\sqrt{-1}}{4}\,\mathrm{l}\left[\frac{p^2+(1+q)^2}{p^2+(1-q)^2}\right]. \end{aligned}\right.$$

Si l'on supposait, au contraire, $q^2 > 1$, il faudrait renoncer à se servir de l'une des notations

$$\mathrm{l}(1-q+p\sqrt{-1}),\quad \mathrm{l}(1+q-p\sqrt{-1}),$$

et par conséquent de la notation

$$\operatorname{arc\,tang} x.$$

Lorsque la condition $q^2 < 1$ se trouve remplie, chacune des différences

$$\mathrm{l}((1+x\sqrt{-1})) - \mathrm{l}(1+x\sqrt{-1}),\quad \mathrm{l}((1-x\sqrt{-1})) - \mathrm{l}(1-x\sqrt{-1})$$

est de la forme

$$\pm 2k\pi\sqrt{-1},$$

k désignant un nombre entier, et par suite la différence

$$\begin{aligned} &\operatorname{arc\,tang}((x)) - \operatorname{arc\,tang} x \\ &= \frac{\mathrm{l}((1+x\sqrt{-1})) - \mathrm{l}(1+x\sqrt{-1}) + \mathrm{l}((1-x\sqrt{-1})) - \mathrm{l}(1-x\sqrt{-1})}{2\sqrt{-1}} \end{aligned}$$

est de la forme

$$\pm k\pi.$$

On a donc alors

$$(160)\qquad \operatorname{arc\,tang}((x)) = \operatorname{arc\,tang} x \pm k\pi$$

ou, ce qui revient au même,

$$(161)\qquad \operatorname{arc\,tang}((x)) = \operatorname{arc\,tang} x + \operatorname{arc\,tang}((0)).$$

Lorsqu'on suppose en même temps $p = 0$ et $q^2 < 1$, on tire de la formule (158)

$$(162)\qquad \operatorname{arc\,tang}(q\sqrt{-1}) = \frac{\mathrm{l}(1-q) - \mathrm{l}(1+q)}{2\sqrt{-1}} = \frac{\sqrt{-1}}{2}\,\mathrm{l}\left(\frac{1+q}{1-q}\right).$$

Après avoir déterminé, par la formule (155), la valeur de l'un quelconque des arcs qui ont x pour tangente, on en déduira sans peine la valeur de l'un quelconque de ceux qui ont x pour cotangente. En effet, si l'on désigne par

$$(163)\qquad z = \operatorname{arc\,cot}((x))$$

l'un de ces derniers arcs, on aura

$$x = \cot z = \frac{\cos z}{\sin z} = \frac{1}{\operatorname{tang} z}$$

et, par suite,

$$\operatorname{tang} z = \frac{1}{x},\qquad z = \operatorname{arc\,tang}\left(\left(\frac{1}{x}\right)\right)$$

ou, ce qui revient au même,

$$(164)\qquad \operatorname{arc\,cot}((x)) = \operatorname{arc\,tang}\left(\left(\frac{1}{x}\right)\right).$$

Lorsque, dans le rapport $\frac{1}{x}$, le coefficient de $\sqrt{-1}$ a une valeur numérique plus petite que l'unité, alors, en supprimant les doubles parenthèses dans le second membre de la formule (164), on obtient une valeur particulière de $\operatorname{arc\,cot}((x))$ que nous désignerons par

$$\operatorname{arc\,cot} x,$$

en sorte qu'on aura

$$\operatorname{arc\,cot} x = \operatorname{arc\,tang} \frac{1}{x}. \tag{165}$$

Par des raisonnements semblables à ceux qui précèdent, on pourrait encore ramener la détermination des arcs qui ont x pour sécante ou pour cosécante à la détermination des arcs dont on connaît le sinus ou le cosinus, et l'on établirait les formules

$$\operatorname{arc\,séc}((x)) = \operatorname{arc\,cos}\left(\left(\frac{1}{x}\right)\right), \tag{166}$$

$$\operatorname{arc\,coséc}((x)) = \operatorname{arc\,sin}\left(\left(\frac{1}{x}\right)\right), \tag{167}$$

$$\operatorname{arc\,séc} x = \operatorname{arc\,cos} \frac{1}{x}, \tag{168}$$

$$\operatorname{arc\,coséc} x = \operatorname{arc\,sin} \frac{1}{x}. \tag{169}$$

DOUZIÈME LEÇON.

DIFFÉRENTIELLES ET DÉRIVÉES DES DIVERS ORDRES POUR LES FONCTIONS D'UNE VARIABLE IMAGINAIRE.

Concevons que l'on étende les définitions que nous avons données pour les différentielles et les dérivées des variables et des fonctions réelles, au cas même où ces variables et fonctions deviennent imaginaires. Alors, en partant des principes exposés dans la Leçon précédente, on déterminera sans peine ces différentielles et ces dérivées, ainsi qu'on va le faire voir.

J'observerai d'abord que, si l'on représente par

$$i = \alpha + \beta\sqrt{-1} = \rho(\cos\upsilon + \sqrt{-1}\sin\upsilon) \tag{1}$$

une expression imaginaire infiniment petite, α, β, ρ, υ désignant quatre quantités réelles dont les trois premières soient infiniment petites et la quatrième positive, on aura, en vertu des formules (62) et (61) de la onzième Leçon,

$$\begin{aligned}
\frac{e^i - 1}{i} &= 1 + \frac{i}{1.2} + \frac{i^2}{1.2.3} + \ldots \\
&= 1 + \frac{\rho}{1.2}(\cos\upsilon + \sqrt{-1}\sin\upsilon) + \frac{\rho^2}{1.2.3}(\cos 2\upsilon + \sqrt{-1}\sin 2\upsilon) + \ldots, \\
\frac{\sin i}{i} &= 1 - \frac{i^2}{1.2.3} + \ldots = 1 - \frac{\rho^2}{1.2.3}(\cos 2\upsilon + \sqrt{-1}\sin 2\upsilon) + \ldots.
\end{aligned}$$

Or on tirera de ces dernières, en faisant converger la quantité ρ, et par conséquent l'expression (1), vers la limite zéro,

$$\lim \frac{e^i - 1}{i} = 1, \tag{2}$$

$$\lim \frac{\sin i}{i} = 1, \tag{3}$$

puis, en remplaçant i par $i\,\mathrm{l}A$, on trouvera

$$\lim \frac{e^{i\,\mathrm{l}A} - 1}{i\,\mathrm{l}A} = \lim \frac{A^i - 1}{i\,\mathrm{l}A} = 1$$

et, par suite,

$$\lim \frac{A^i - 1}{i} = \mathrm{l}A, \tag{4}$$

A désignant une constante réelle ou une constante imaginaire dont la partie réelle soit positive. De plus, si l'on fait

$$\mathrm{l}(1 + i) = \mathrm{I},$$

on aura

$$\frac{\mathrm{l}(1+i)}{i} = \frac{\mathrm{I}}{e^{\mathrm{I}} - 1} = \left(\frac{e^{\mathrm{I}} - 1}{\mathrm{I}}\right)^{-1}$$

et, par suite,

$$\lim \frac{\mathrm{l}(1+i)}{i} = 1 \quad \text{ou} \quad \lim \mathrm{l}(1+i)^{\frac{1}{i}} = 1; \tag{5}$$

puis on en conclura

$$\lim (1+i)^{\frac{1}{i}} = e. \tag{6}$$

Enfin, comme, dans le cas où la partie réelle de la constante A est positive, on tire de l'équation (88) de la onzième Leçon

$$\mathrm{L}(1+i) = \frac{\mathrm{l}(1+i)}{\mathrm{l}A},$$

la lettre L indiquant un logarithme pris dans le système dont la base est A, on aura, dans ce même cas,

$$\lim \frac{\mathrm{L}(1+i)}{i} = \frac{1}{\mathrm{l}A} \lim \frac{\mathrm{l}(1+i)}{i} = \frac{1}{\mathrm{l}A}. \tag{7}$$

Les diverses formules qui précèdent s'accordent avec celles que nous avons données dans les Préliminaires, lorsque l'expression infiniment petite désignée par i se réduit à une quantité réelle. Mais il était important de s'assurer qu'elles subsistent, lors même que i devient imaginaire. Ajoutons que, si l'on représente par $\Delta x = i$ l'accroissement infiniment petit d'une variable imaginaire x, la dérivée de la fonction

$$y = f(x),$$

c'est-à-dire la limite vers laquelle converge le rapport

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+i) - f(x)}{i},$$

tandis que i s'approche de zéro, pourra toujours être désignée par la notation

$$y' \quad \text{ou} \quad f'(x).$$

Quant aux différentielles dx, dy, elles ne seront autre chose que des expressions imaginaires dont le rapport sera équivalent à la dernière raison des accroissements infiniment petits Δx, Δy, et par conséquent des expressions imaginaires liées entre elles par l'équation

$$\frac{dy}{dx} = y' \quad \text{ou} \quad dy = y'\,dx.$$

Or, en vertu de cette équation, la différentielle dy sera complètement déterminée, quand on aura fixé la forme de la fonction $y = f(x)$ et la différentielle dx de la variable indépendante. Mais cette dernière différentielle restera entièrement arbitraire et pourra être une expression imaginaire quelconque.

Cela posé, en faisant usage de raisonnements semblables à ceux que nous avons employés dans la première Leçon, et ayant égard à la formule

$$\mathrm{L}e = \frac{\mathrm{l}e}{\mathrm{l}A} = \frac{1}{\mathrm{l}A}, \tag{8}$$

on trouvera : 1° pour des valeurs imaginaires quelconques de la variable x et de la constante a,

$$(9)\quad \left\{\begin{array}{ll} d(a+x)=dx, & d(a-x)=-dx, \\ d(ax)\ \ =a\,dx, & d\dfrac{a}{x}\qquad =-\dfrac{a\,dx}{x^2}, \\ \multicolumn{2}{c}{de^x=e^x\,dx,} \\ d\sin x=\cos x\,dx & =\sin\left(x+\dfrac{\pi}{2}\right)dx, \\ d\cos x=-\sin x\,dx & =\cos\left(x+\dfrac{\pi}{2}\right)dx; \end{array}\right.$$

2° pour des valeurs de la constante A dont la partie réelle sera positive,

$$(10)\qquad d\mathrm{A}^x=\mathrm{A}^x\,\mathrm{lA}\,dx;$$

3° pour des valeurs de x dont la partie réelle sera positive,

$$(11)\qquad dx^a\ =a\,x^{a-1}\,dx,$$

$$(12)\qquad d\mathrm{L}x=\mathrm{Le}\frac{dx}{x},$$

$$(13)\qquad d\,\mathrm{l}x=\frac{dx}{x},$$

et, pour des valeurs de x dont la partie réelle sera négative,

$$(14)\qquad d(-x)^a\ =-a(-x)^{a-1}\,dx,$$

$$(15)\qquad d\,\mathrm{L}(-x)=\mathrm{Le}\frac{dx}{x},$$

$$(16)\qquad d\,\mathrm{l}(-x)\ =\frac{dx}{x}.$$

De plus on tirera de l'équation (86) ou (87) (page 413) combinée avec la formule (13) ou (16),

$$(17)\qquad d\,\mathrm{l}((x))=\frac{dx}{x},$$

et de la formule (78) (page 411),

$$(18)\qquad d\,\mathrm{L}((x))=\frac{1}{\mathrm{lA}}\frac{dx}{x}=\mathrm{Le}\frac{dx}{x}.$$

On établira encore sans difficulté les deux premières des équations (13) de la page 295, savoir

$$(19)\qquad d\tan\!\mathrm{g}\,x=\frac{dx}{\cos^2 x},\qquad d\cot x=-\frac{dx}{\sin^2 x},$$

et l'équation (10) de la page 293, savoir

$$(20)\qquad d\mathrm{F}(y)=\mathrm{F}'(y)\,dy,$$

y étant une fonction quelconque de x; puis on déduira immédiatement de cette équation la plupart des formules contenues dans les pages 293, 294 et 295 avec quelques-unes de ces mêmes formules légèrement modifiées. On trouvera, en particulier,

$$(21)\quad \left\{\begin{array}{l} d(a+y)=dy,\qquad d(-y)=-y,\qquad d(ay)=a\,dy, \\ \qquad d\dfrac{1}{y}=-\dfrac{dy}{y^2},\qquad d\,\mathrm{l}((y))=\dfrac{dy}{y},\qquad \dots, \end{array}\right.$$

$$(22)\qquad d\,\mathrm{séc}\,x=\frac{\sin x\,dx}{\cos^2 x},\qquad d\,\mathrm{coséc}\,x=-\frac{\cos x\,dx}{\sin^2 x}.$$

De plus, si l'on pose

$$y=x^a,$$

on aura

$$\mathrm{l}((y))=\mathrm{l}((x^a))=a\,\mathrm{l}((x));$$

puis, en différentiant et ayant égard à l'équation (17), on retrouvera, comme à l'ordinaire (*voir* la page 294), les formules

$$\frac{dy}{y}=a\frac{dx}{x},\qquad \frac{dy}{dx}=a\frac{y}{x}=a\,x^{a-1},$$

et par conséquent la formule (11).

De même, si l'on prend

$$y=\mathrm{arc\,tang}((x))\qquad \text{ou}\qquad y=\mathrm{arc\,cot}((x)),$$

on en conclura

$$\mathrm{tang}\,y=x\qquad \text{ou}\qquad \cot y=x,$$

puis, en différentiant, et ayant égard aux équations (19), on obtiendra la formule

$$dy = \cos^2 y\, dx \quad \text{ou} \quad dy = -\sin^2 y\, dx,$$

de laquelle on tirera

$$(23) \qquad d \operatorname{arc\,tang}((x)) = \frac{dx}{1+x^2} \quad \text{ou} \quad d \operatorname{arc\,cot}((x)) = -\frac{dx}{1+x^2}.$$

Si l'on posait, au contraire,

$$y = \operatorname{arc\,sin}((x)),$$

on en conclurait

$$\sin y = x, \qquad dy = \frac{dx}{\cos y}.$$

D'ailleurs, si, dans la première des équations (74) de la page 411, on remplace x par $-y$, cette équation donnera, pour une valeur quelconque réelle ou imaginaire de la variable y,

$$\cos^2 y + \sin^2 y = 1.$$

On aura donc, dans le cas présent,

$$\cos^2 y = 1 - \sin^2 y = 1 - x^2, \qquad \cos y = ((1-x^2))^{\frac{1}{2}}$$

et, par suite,

$$(24) \qquad d \operatorname{arc\,sin}((x)) = \frac{dx}{((1-x^2))^{\frac{1}{2}}},$$

On trouvera de même

$$(25) \qquad d \operatorname{arc\,cos}((x)) = -\frac{dx}{((1-x^2))^{\frac{1}{2}}}.$$

En d'autres termes, on aura, si la partie réelle de $1 - x^2$ est positive,

$$(26) \qquad d \operatorname{arc\,sin}((x)) = -d \operatorname{arc\,cos}((x)) = \pm \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}},$$

et, si la partie réelle de $1 - x^2$ est négative,

$$(27) \qquad d \operatorname{arc\,sin}((x)) = -d \operatorname{arc\,cos}((x)) = \pm \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}}\sqrt{-1}.$$

Il est bon d'observer que les formules (23) comprennent, comme cas

particulier, les deux suivantes :

$$(28) \qquad d \operatorname{arc\,tang} x = \frac{dx}{1+x^2}, \qquad d \operatorname{arc\,cot} x = -\frac{dx}{1+x^2}.$$

Ajoutons que, si, dans la première des formules (28), on remplace x par $x\sqrt{-1}$, on en tirera, en supposant la variable x réelle, et ayant égard à l'équation (162) de la onzième Leçon,

$$(29) \qquad d \frac{1}{2} \mathrm{l} \frac{1+x}{1-x} = \frac{dx}{1-x^2}.$$

Il serait facile de vérifier directement ce dernier résultat.

Si l'on prenait simplement

$$y = \operatorname{arc\,sin} x,$$

on trouverait toujours

$$dy = \frac{dx}{\cos y}.$$

D'ailleurs, si l'on suppose

$$x = p + q\sqrt{-1},$$

p, q désignant des quantités réelles, la valeur de $\operatorname{arc\,sin} x$ sera donnée par la formule (108) de la Leçon précédente, ou

$$y = \operatorname{arc\,sin} x = \mathfrak{P} + \mathfrak{Q}\sqrt{-1},$$

$\mathfrak{P}$, $\mathfrak{Q}$ désignant des quantités réelles dont la première vérifiera les équations (110) de la même Leçon. En conséquence, la partie réelle de

$$\cos y = \cos(\mathfrak{P} + \mathfrak{Q}\sqrt{-1}) = \frac{1}{2}\left(e^{\mathfrak{Q}} + e^{-\mathfrak{Q}}\right)\cos\mathfrak{P} - \frac{\sqrt{-1}}{2}\left(e^{\mathfrak{Q}} - e^{-\mathfrak{Q}}\right)\sin\mathfrak{P},$$

savoir

$$\frac{1}{2}\left(e^{\mathfrak{Q}} + e^{-\mathfrak{Q}}\right)\cos\mathfrak{P},$$

sera une quantité de même signe que

$$\cos\mathfrak{P} = \frac{\sqrt{q^2}}{\left[\frac{p^2+q^2-1}{2} + \sqrt{\left(\frac{p^2+q^2+1}{2}\right)^2 - p^2}\right]^{\frac{1}{2}}},$$

c'est-à-dire une quantité positive. Donc, si, dans le premier membre de la formule (24), on remplace les parenthèses doubles par des parenthèses simples, on devra en même temps réduire l'expression $((1-x^2))^{\frac{1}{2}}$ à celle de ses deux valeurs qui offre une partie réelle positive. Si, pour fixer les idées, on prend $x = q\sqrt{-1}$, on trouvera

$$d \arcsin q\sqrt{-1} = \frac{\sqrt{-1}\,dq}{\sqrt{1+q^2}},$$

ou, ce qui revient au même [*voir* la formule (121) de la Leçon précédente],

$$d\,l(q+\sqrt{1+q^2}) = \frac{dq}{\sqrt{1+q^2}},$$

puis on en conclura, en substituant la lettre x à la lettre q,

$$d\,l(x+\sqrt{1+x^2}) = \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}. \tag{30}$$

Il serait facile de vérifier directement cette dernière équation.

Dans le cas particulier où, la variable x étant réelle, la valeur numérique de cette variable surpasse l'unité, aucune des deux valeurs de l'expression

$$((1-x^2))^{\frac{1}{2}}$$

n'offre une partie réelle positive, puisqu'elles se réduisent respectivement à

$$(x^2-1)^{\frac{1}{2}}\sqrt{-1}, \quad -(x^2-1)^{\frac{1}{2}}\sqrt{-1}.$$

Mais alors aussi l'expression $\arcsin x$ doit être bannie du calcul (*voir* la Leçon précédente, p. 418), et par conséquent il n'y a plus lieu de chercher la différentielle de $\arcsin x$. Ajoutons que, dans le même cas, on tirera de l'équation (22) combinée avec la formule (117) de la précédente Leçon,

$$d \arcsin((x)) = \pm\sqrt{-1}\,d\,l(x+\sqrt{x^2-1}) = \pm\frac{dx}{\sqrt{x^2-1}}\sqrt{-1}. \tag{31}$$

On peut d'ailleurs vérifier l'exactitude de l'équation (31) en établissant directement la formule

$$d\,l(x+\sqrt{x^2-1}) = \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}}. \tag{32}$$

Quant à la différentielle de l'expression $\arccos x$, elle se déduira immédiatement de l'équation (129) de la Leçon précédente. On aura donc, dans tous les cas,

$$d \arccos x = -d \arcsin x. \tag{33}$$

Soient maintenant $s, u, v, w, \ldots$ diverses fonctions de la variable imaginaire x, et $\Delta s, \Delta u, \Delta v, \Delta w, \ldots$ les accroissements simultanés que reçoivent ces mêmes fonctions, quand on attribue à la variable x un accroissement infiniment petit, réel ou imaginaire, savoir $\Delta x = i$. Si la fonction s est la somme de toutes les autres, en sorte qu'on ait

$$s = u + v + w + \ldots, \tag{34}$$

on trouvera successivement

$$\Delta s = \Delta u + \Delta v + \Delta w + \ldots$$

et

$$\frac{\Delta s}{\Delta x} = \frac{\Delta u}{\Delta x} + \frac{\Delta v}{\Delta x} + \frac{\Delta w}{\Delta x} + \ldots;$$

puis on en conclura, en faisant converger Δx vers la limite zéro,

$$\frac{ds}{dx} = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx} + \frac{dw}{dx} + \ldots \tag{35}$$

et, par conséquent,

$$ds = du + dv + dw + \ldots. \tag{36}$$

Remarquons d'ailleurs que l'équation (35) peut être présentée sous la forme

$$s' = u' + v' + w' + \ldots. \tag{37}$$

Des équations (36) et (37), comparées à l'équation (34), il résulte que la différentielle ou la dérivée de la somme de plusieurs fonctions est la somme de leurs différentielles ou de leurs dérivées, dans le cas même où la variable x devient imaginaire. En partant de ce principe, on pourra évidemment étendre au cas dont il s'agit la plupart des formules établies dans la seconde Leçon. Ainsi, par exemple, on trouvera, en désignant par m un nombre entier, et par $a, b, c, \ldots, q, r$ des constantes imaginaires,

$$(38) \qquad d(au + bv + cw + \ldots) = a\,du + b\,dv + c\,dw + \ldots,$$

$$(39) \qquad d(ax^m + bx^{m-1} + \ldots + qx + r) = [max^{m-1} + (m-1)ax^{m-2} + \ldots + q]\,dx.$$

De plus, comme on aura généralement

$$\mathrm{l}((uvw\ldots)) = \mathrm{l}((u)) + \mathrm{l}((v)) + \mathrm{l}((w)) + \ldots,$$

on en conclura, en différentiant,

$$\frac{d(uvw\ldots)}{uvw\ldots} = \frac{du}{u} + \frac{dv}{v} + \frac{dw}{w} + \ldots$$

et, par suite,

$$(40) \qquad d(uvw\ldots) = uvw\ldots\left(\frac{du}{u} + \frac{dv}{v} + \frac{dw}{w} + \ldots\right).$$

On trouvera, en particulier,

$$(41) \qquad d(uv) = u\,dv + v\,du, \qquad d(uvw) = vw\,du + wu\,dv + uv\,dw$$

et

$$d\left(\frac{u}{v}\right) = d\left(u\frac{1}{v}\right) = \frac{1}{v}du + u\,d\frac{1}{v} = \frac{du}{v} - u\frac{dv}{v^2},$$

ou plus simplement

$$(42) \qquad d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v\,du - u\,dv}{v^2}.$$

De même, comme, en supposant la partie réelle de u positive, et désignant par k un nombre entier quelconque, on aura

$$\mathrm{l}((u^v)) = v\,\mathrm{l}u \pm 2k\pi\sqrt{-1},$$

on en conclura

$$\frac{d(u^v)}{u^v} = v\frac{du}{u} + \mathrm{l}u\,dv$$

et, par suite,

$$(43) \qquad du^v = u^v\left(\frac{v}{u}du + \mathrm{l}u\,dv\right).$$

Si, dans la formule (43), on remplace v par $\frac{1}{v}$, on trouvera, en supposant toujours la partie réelle de u positive,

$$(44) \qquad du^{\frac{1}{v}} = u^{\frac{1}{v}}\left(\frac{du}{uv} - \mathrm{l}u\frac{dv}{v^2}\right).$$

Enfin, si, dans les formules (43) et (44), on prend $u = v = x$, et si l'on suppose la partie réelle de x positive, elles donneront

$$(45) \qquad dx^x = x^x(1 + \mathrm{l}x)\,dx, \qquad dx^{\frac{1}{x}} = \frac{1 - \mathrm{l}x}{x^2}x^{\frac{1}{x}}\,dx.$$

Nous ne pousserons pas plus loin ces calculs; et, pour terminer la douzième Leçon, nous dirons ici quelques mots sur les différentielles et les dérivées du second ordre ou des ordres supérieurs, relatives aux fonctions d'une variable imaginaire.

Comme une fonction y ou $f(x)$ de la variable imaginaire x a pour dérivée et pour différentielle d'autres fonctions $f'(x)$ et $f'(x)\,dx$ de cette même variable, il est clair qu'on peut déduire de $f(x)$ une multitude de fonctions nouvelles dont chacune soit la différentielle ou la dérivée de la précédente. Ces fonctions nouvelles sont ce qu'on nomme les *dérivées* ou les *différentielles* des divers ordres de y ou $f(x)$. On indique les dérivées des divers ordres à l'aide des notations

$$y', \quad y'', \quad y''', \quad \ldots, \quad y^{(n)}$$

ou

$$f'(x), \quad f''(x), \quad f'''(x), \quad \ldots, \quad f^{(n)}(x),$$

et les différentielles des divers ordres de la fonction y à l'aide des notations

$$dy, \quad d^2y, \quad d^3y, \quad \ldots, \quad d^ny.$$

Cela posé, en raisonnant comme dans la troisième Leçon, on obtiendra immédiatement les formules

$$dy = y'\,dx, \qquad d^2y = y^2\,dx^2, \qquad d^3y = y'''\,dx^3, \qquad \ldots, \qquad d^ny = y^{(n)}\,dx^n,$$

qui subsistent dans le cas même où la variable indépendante x et la différentielle dx deviennent imaginaires. De plus, on étendra sans peine au cas dont il s'agit les diverses formules établies dans la troisième Leçon, par exemple les suivantes

$$d^n e^x = e^x\,dx^n,\quad d^n \sin x = \sin(x + \tfrac{1}{2}n\pi)\,dx^n,\quad d^n \cos x = \cos(x + \tfrac{1}{2}n\pi)\,dx^n,$$

$$d^n x^a = a(a-1)\ldots(a-n+1)\,x^{a-n}\,dx^n,$$

$$d^n \operatorname{l} x = (-1)^{n-1}\frac{1.2.3\ldots(n-1)}{x^n}\,dx^n,\qquad \ldots,$$

et l'on trouvera encore, pour $y = f(x+a)$,

$$y^{(n)} = f^{(n)}(x+a),\qquad d^n y = f^{(n)}(x+a)\,dx^n;$$

pour $y = f(ax)$,

$$y^{(n)} = a^n f^{(n)}(ax),\qquad d^n y = a^n f^{(n)}(ax)\,dx^n,$$

etc.

TREIZIÈME LEÇON.

RELATIONS QUI EXISTENT ENTRE LES FONCTIONS D'UNE VARIABLE IMAGINAIRE x ET LEURS DÉRIVÉES OU DIFFÉRENTIELLES DES DIVERS ORDRES. DÉVELOPPEMENTS DE CES FONCTIONS SUIVANT LES PUISSANCES ASCENDANTES DE x, OU DE LA DIFFÉRENCE $x - a$, DANS LAQUELLE a DÉSIGNE UNE VALEUR PARTICULIÈRE DE x.

Soient

(1) $$x = p + q\sqrt{-1}$$

une variable imaginaire et $f(x)$ une fonction de cette variable. Soit, en outre,

(2) $$r = \sqrt{p^2 + q^2}$$

le module de la variable x. La valeur de x pourra s'écrire comme il suit

(3) $$x = r(\cos t + \sqrt{-1}\sin t),$$

t désignant un arc réel; et, si, dans la fonction

(4) $$f(x) = f[r(\cos t + \sqrt{-1}\sin t)],$$

on considère le module r comme seul variable, cette fonction pourra être présentée sous la forme

(5) $$\varphi(r) + \sqrt{-1}\,\chi(r),$$

$\varphi(r)$, $\chi(r)$ désignant deux fonctions réelles de r. Cela posé, si l'on différentie plusieurs fois de suite par rapport à r l'équation

(6) $$f[r(\cos t + \sqrt{-1}\sin t)] = \varphi(r) + \sqrt{-1}\,\chi(r),$$

en ayant égard aux principes établis dans la Leçon précédente, on trouvera

$$(7)\quad \begin{cases} (\cos t+\sqrt{-1}\sin t)\ f'[r(\cos t+\sqrt{-1}\sin t)]=\varphi'(r)+\sqrt{-1}\,\chi'(r), \\ (\cos t+\sqrt{-1}\sin t)^2\, f''[r(\cos t+\sqrt{-1}\sin t)]=\varphi''(r)+\sqrt{-1}\,\chi''(r), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \end{cases}$$

et généralement

$$(8)\quad (\cos t+\sqrt{-1}\sin t)^n\, f^{(n)}[r(\cos t+\sqrt{-1}\sin t)]=\varphi^{(n)}(r)+\sqrt{-1}\,\chi^{(n)}(r),$$

n étant un nombre entier quelconque. Concevons maintenant que les fonctions

$$f(x),\quad f'(x),\quad \dots,\quad f^{(n-1)}(x)$$

s'évanouissent toutes pour une valeur nulle de x, en sorte qu'on ait

$$(9)\qquad f(0)=0,\qquad f'(0)=0,\qquad \dots,\qquad f^{(n-1)}(0)=0.$$

On tirera des formules (7), en y posant $r=0$,

$$(10)\qquad \begin{cases} \varphi(0)\quad +\sqrt{-1}\,\chi(0)\quad =0, \\ \varphi'(0)\quad +\sqrt{-1}\,\chi'(0)\quad =0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ \varphi^{(n-1)}(0)+\sqrt{-1}\,\chi^{(n-1)}(0)=0; \end{cases}$$

puis on en conclura

$$(11)\qquad \varphi(0)=0,\qquad \varphi'(0)=0,\qquad \dots,\qquad \varphi^{(n-1)}(0)=0$$

et

$$(12)\qquad \chi(0)=0,\qquad \chi'(0)=0,\qquad \dots,\qquad \chi^{(n-1)}(0)=0.$$

D'ailleurs, si les fonctions

$$(13)\qquad f(x),\quad f'(x),\quad \dots,\quad f^{(n-1)}(x),\quad f^{(n)}(x)$$

sont continues, par rapport à x, dans le voisinage de la valeur $x=0$, les fonctions

$$(14)\qquad \begin{cases} \varphi(r),\quad \varphi'(r),\quad \dots,\quad \varphi^{(n-1)}(r),\quad \varphi^{(n)}(r), \\ \chi(r),\quad \chi'(r),\quad \dots,\quad \chi^{(n-1)}(r),\quad \chi^{(n)}(r) \end{cases}$$

seront elles-mêmes continues, par rapport à r, dans le voisinage de $r=0$; et la formule (9) de la page 311 donnera, au moins pour des valeurs de r positives, mais inférieures à une certaine limite k,

$$(15)\qquad \varphi(r)=\frac{r^n}{1.2.3\ldots n}\,\varphi^{(n)}(\theta_1 r),\qquad \chi(r)=\frac{r^n}{1.2.3\ldots n}\,\chi^{(n)}(\theta_2 r),$$

θ_1, θ_2 étant deux nombres plus petits que l'unité. Par suite, l'équation (6) donnera

$$(16)\qquad f[r(\cos t+\sqrt{-1}\sin t)]=\frac{r^n}{1.2.3\ldots n}\left[\varphi^{(n)}(\theta_1 r)+\sqrt{-1}\,\chi^{(n)}(\theta_2 r)\right].$$

Pour que cette dernière formule subsiste entre les limites $r=0$, $r=k$, il suffit évidemment que, les fonctions (13) étant continues, par rapport à x, dans le cas où le module r reste compris entre ces limites, le rapport

$$(17)\qquad \frac{f(x)}{x^{n-1}}=\frac{\varphi(r)+\sqrt{-1}\,\chi(r)}{r^{n-1}(\cos t+\sqrt{-1}\sin t)^{n-1}}$$

s'évanouisse avec r. En effet, comme ce rapport est équivalent au produit

$$(18)\qquad [\cos(n-1)t+\sqrt{-1}\sin(n-1)t]\left[\frac{\varphi(r)}{r^{n-1}}+\sqrt{-1}\,\frac{\chi(r)}{r^{n-1}}\right],$$

il ne pourra s'évanouir pour une valeur nulle de r, à moins que cette valeur ne vérifie la formule

$$\frac{\varphi(r)}{r^{n-1}}+\sqrt{-1}\,\frac{\chi(r)}{r^{n-1}}=0$$

et, par conséquent, les deux conditions

$$\frac{\varphi(r)}{r^{n-1}}=0,\qquad \frac{\chi(r)}{r^{n-1}}=0.$$

Or, si ces conditions se trouvent vérifiées pour $r=0$, elles entraîneront les équations (11) et (12) (*voir* la cinquième et la sixième Leçon). Donc alors les formules (15) et, par suite, la formule (16) subsisteront entre les limites $r=0$, $r=k$.

Pour que la variable x devienne infiniment petite, il est nécessaire et il suffit que le module r soit lui-même infiniment petit. Or on trouvera, dans cette hypothèse, en admettant que $\varphi^{(n)}(0)$, $\chi^{(n)}(0)$ conservent des valeurs finies, et désignant par α, β des quantités infiniment petites,

$$\varphi^{(n)}(r) = \varphi^{(n)}(0) + \alpha, \qquad \chi^{(n)}(r) = \chi^{(n)}(0) + \beta. \tag{19}$$

Par conséquent la formule (16) donnera

$$\left\{\begin{aligned} &\mathrm{f}[r(\cos t + \sqrt{-1}\sin t)] \\ &\quad = \frac{r^n}{1.2.3\ldots n}\left[\varphi^{(n)}(0) + \sqrt{-1}\,\chi^{(n)}(0) + \alpha + \beta\sqrt{-1}\right]. \end{aligned}\right. \tag{20}$$

D'ailleurs, on tirera de la formule (8), en y posant $r = 0$,

$$\varphi^{(n)}(0) + \sqrt{-1}\,\chi^{(n)}(0) = (\cos t + \sqrt{-1}\sin t)^n\,\mathrm{f}^{(n)}(0). \tag{21}$$

Donc, si l'on fait, pour plus de commodité,

$$\mathrm{I} = \frac{\alpha + \beta\sqrt{-1}}{(\cos t + \sqrt{-1}\sin t)^n} = (\alpha + \beta\sqrt{-1})(\cos nt - \sqrt{-1}\sin nt), \tag{22}$$

on aura encore

$$\mathrm{f}[r(\cos t + \sqrt{-1}\sin t)] = \frac{r^n(\cos t + \sqrt{-1}\sin t)^n}{1.2.3\ldots n}[\mathrm{f}^{(n)}(0) + \mathrm{I}] \tag{23}$$

ou, ce qui revient au même,

$$\mathrm{f}(x) = \frac{x^n}{1.2.3\ldots n}[\mathrm{f}^{(n)}(0) + \mathrm{I}].$$

Dans cette dernière équation, I désigne une nouvelle variable qui s'évanouit avec x. On peut donc énoncer la proposition suivante :

Théorème I. — *Supposons que, les fonctions* (13) *étant continues, par rapport à x, dans le voisinage de la valeur particulière $x = 0$, s'évanouissent toutes avec x, excepté la dernière $\mathrm{f}^{(n)}(x)$, et que $\mathrm{f}^{(n)}(0)$ conserve une valeur finie. Alors, si l'on attribue à x une valeur infiniment petite, on aura*

$$\mathrm{f}(x) = \frac{x^n}{1.2.3\ldots n}[\mathrm{f}^{(n)}(0) + \mathrm{I}], \tag{24}$$

I désignant une expression imaginaire qui deviendra nulle en même temps que la variable x.

Dans le cas où la variable x reste réelle, l'équation (24) peut être immédiatement déduite de la formule (18) (page 330).

Soit maintenant $f(x)$ une fonction de x, qui conserve une valeur finie, aussi bien que ses dérivées d'un ordre inférieur ou égal à n, pour une valeur nulle de x; et supposons d'ailleurs que, pour des valeurs de x imaginaires ou de la forme

$$r(\cos t + \sqrt{-1}\sin t),$$

les fonctions

$$f(x),\quad f'(x),\quad f''(x),\quad \ldots,\quad f^{(n)}(x) \tag{25}$$

restent continues entre les limites 0 et k du module r. Si, en considérant ce module comme seul variable, on désigne par $\varphi(r)$, $\chi(r)$ deux fonctions réelles de r, propres à vérifier l'équation

$$f[r(\cos t + \sqrt{-1}\sin t)] = \varphi(r) + \sqrt{-1}\,\chi(r), \tag{26}$$

on aura, pour une valeur entière de m,

$$\left\{\begin{aligned} &(\cos t + \sqrt{-1}\sin t)^m f^{(m)}[r(\cos t + \sqrt{-1}\sin t)] \\ &\qquad\qquad = \varphi^{(m)}(r) + \sqrt{-1}\,\chi^{(m)}(r), \\ &(\cos t + \sqrt{-1}\sin t)^m f^{(m)}(0) = \varphi^{(m)}(0) + \sqrt{-1}\,\chi^{(m)}(0). \end{aligned}\right. \tag{27}$$

D'autre part, la formule (8) de la huitième Leçon donnera, entre les limites $r = 0$, $r = k$,

$$\left\{\begin{aligned} \varphi(r) &= \varphi(0) + \frac{r}{1}\varphi'(0) + \frac{r^2}{1.2}\varphi''(0) + \ldots \\ &\quad + \frac{r^{n-1}}{1.2.3\ldots(n-1)}\varphi^{(n-1)}(0) + \frac{r^n}{1.2.3\ldots n}\varphi^{(n)}(\theta_1 r), \\ \chi(r) &= \chi(0) + \frac{r}{1}\chi'(0) + \frac{r^2}{1.2}\chi''(0) + \ldots \\ &\quad + \frac{r^{n-1}}{1.2.3\ldots(n-1)}\chi^{(n-1)}(0) + \frac{r^n}{1.2.3\ldots n}\chi^{(n)}(\theta_2 r), \end{aligned}\right. \tag{28}$$

θ_1, θ_2 désignant deux nombres inférieurs à l'unité. Par suite, on tirera de l'équation (26) combinée avec la seconde des formules (27),

$$(29)\quad \left\{\begin{aligned} & f[r(\cos t+\sqrt{-1}\sin t)] \\ & \quad = f(0) + \frac{r(\cos t+\sqrt{-1}\sin t)}{1} f'(0) + \ldots \\ & \qquad + \frac{r^{n-1}(\cos t+\sqrt{-1}\sin t)^{n-1}}{1.2.3\ldots(n-1)} f^{(n-1)}(0) \\ & \qquad + \frac{r^n}{1.2.3\ldots n}\left[\varphi^{(n)}(\theta_1 r)+\sqrt{-1}\,\chi^{(n)}(\theta_2 r)\right] \end{aligned}\right.$$

ou, ce qui revient au même,

$$(30)\quad \left\{\begin{aligned} & f(x) = f(0) + \frac{x}{1} f'(0) + \frac{x^2}{1.2} f''(0) + \ldots \\ & \qquad + \frac{x^{n-1}}{1.2.3\ldots(n-1)} f^{(n-1)}(0) \\ & \qquad + \frac{x^n}{1.2.3\ldots n}\,\frac{\varphi^{(n)}(\theta_1 r)+\sqrt{-1}\,\chi^{(n)}(\theta_2 r)}{(\cos t+\sqrt{-1}\sin t)^n}. \end{aligned}\right.$$

Il suit de la formule (30) que la fonction $f(x)$ peut être considérée comme composée d'une fonction entière de x, savoir

$$(31)\quad f(0) + \frac{x}{1} f'(0) + \frac{x^2}{1.2} f''(0) + \ldots + \frac{x^{n-1}}{1.2.3\ldots(n-1)} f^{(n-1)}(0)$$

et d'un reste, savoir

$$(32)\quad \frac{x^n}{1.2.3\ldots n}\,\frac{\varphi^{(n)}(\theta_1 r)+\sqrt{-1}\,\chi^{(n)}(\theta_2 r)}{(\cos t+\sqrt{-1}\sin t)^n}.$$

Lorsque ce reste décroît indéfiniment pour des valeurs croissantes du nombre entier n, la série

$$(33)\quad f(0),\quad \frac{x}{1} f'(0),\quad \frac{x^2}{1.2} f''(0),\quad \ldots$$

est convergente, et la somme de cette série est précisément la fonc-

tion $f(x)$, en sorte qu'on a

$$(34)\quad f(x) = f(0) + \frac{x}{1} f'(0) + \frac{x^2}{1.2} f''(0) + \ldots.$$

L'équation (34) n'est que la formule de Maclaurin étendue au cas où la variable x devient imaginaire.

Concevons encore que, la lettre a désignant une valeur particulière de la variable x, les fonctions (25) conservent, pour $x = a$, une valeur finie et restent continues tant que le module ρ de la différence $x - a$ demeure compris entre les limites 0 et k. Alors, si l'on fait

$$(35)\quad x - a = z = \rho(\cos\upsilon + \sqrt{-1}\sin\upsilon),$$

υ désignant un arc réel, et

$$(36)\quad f(a+z) = f[a + \rho(\cos\upsilon+\sqrt{-1}\sin\upsilon)] = \Phi(\rho) + \sqrt{-1}\,X(\rho),$$

on trouvera

$$(37)\quad \left\{\begin{aligned} & (\cos\upsilon+\sqrt{-1}\sin\upsilon)^m f^{(m)}[a+\rho(\cos\upsilon+\sqrt{-1}\sin\upsilon)] \\ & \qquad\qquad = \Phi^{(m)}(\rho) + \sqrt{-1}\,X^{(m)}(\rho), \\ & (\cos\upsilon+\sqrt{-1}\sin\upsilon)^m f^{(m)}(a) = \Phi^{(m)}(0) + \sqrt{-1}\,X^{(m)}(0). \end{aligned}\right.$$

De plus, comme la formule (8) de la page 353 donnera

$$(38)\quad \left\{\begin{aligned} & \Phi(\rho) = \Phi(0) + \frac{\rho}{1}\Phi'(0) + \frac{\rho^2}{1.2}\Phi''(0) + \ldots \\ & \qquad + \frac{\rho^{n-1}}{1.2.3\ldots(n-1)}\Phi^{(n-1)}(0) + \frac{\rho^n}{1.2.3\ldots n}\Phi^{(n)}(\theta_1\rho), \\ & X(\rho) = X(0) + \frac{\rho}{1}X'(0) + \frac{\rho^2}{1.2}X''(0) + \ldots \\ & \qquad + \frac{\rho^{n-1}}{1.2.3\ldots(n-1)}X^{(n-1)}(0) + \frac{\rho^n}{1.2.3\ldots n}X^{(n)}(\theta_2\rho), \end{aligned}\right.$$

θ_1, θ_2 étant deux nombres inférieurs à l'unité, on tirera de l'équation (36), combinée avec la seconde des formules (37),

$$(39)\quad \left\{\begin{aligned} & f[a+\rho(\cos\upsilon+\sqrt{-1}\sin\upsilon)] \\ & \quad = f(a)+\frac{\rho(\cos\upsilon+\sqrt{-1}\sin\upsilon)}{1}f'(a)+\ldots \\ & \qquad +\frac{\rho^{n-1}(\cos\upsilon+\sqrt{-1}\sin\upsilon)^{n-1}}{1.2.3\ldots(n-1)}f^{(n-1)}(a) \\ & \qquad +\frac{\rho^n}{1.2.3\ldots n}[\Phi^{(n)}(\theta_1\rho)+\sqrt{-1}\,\mathrm{X}^{(n)}(\theta_2\rho)] \end{aligned}\right.$$

ou, ce qui revient au même,

$$(40)\quad \left\{\begin{aligned} & f(x)=f(a)+\frac{x-a}{1}f'(a)+\frac{(x-a)^2}{1.2}f''(a)+\ldots \\ & \qquad +\frac{(x-a)^{n-1}}{1.2.3\ldots(n-1)}f^{(n-1)}(a) \\ & \qquad +\frac{(x-a)^n}{1.2.3\ldots n}\,\frac{\Phi^{(n)}(\theta_1\rho)+\sqrt{-1}\,\mathrm{X}^{(n)}(\theta_2\rho)}{(\cos\upsilon+\sqrt{-1}\sin\upsilon)^n}. \end{aligned}\right.$$

En vertu de la formule (40), la fonction $f(x)$ peut être considérée comme composée de la fonction entière

$$(41)\quad \left\{\begin{aligned} & f(a)+\frac{x-a}{1}f'(a)+\frac{(x-a)^2}{1.2}f''(a)+\ldots \\ & \qquad +\frac{(x-a)^{n-1}}{1.2.3\ldots(n-1)}f^{(n-1)}(a), \end{aligned}\right.$$

qui se trouve ordonnée suivant les puissances ascendantes de $x-a$, et d'un reste représenté par le produit

$$(42)\quad \frac{(x-a)^n}{1.2.3\ldots n}\,\frac{\Phi^{(n)}(\theta_1\rho)+\sqrt{-1}\,\mathrm{X}^{(n)}(\theta_2\rho)}{(\cos\upsilon+\sqrt{-1}\sin\upsilon)^n}.$$

Lorsque ce reste décroît indéfiniment pour des valeurs croissantes du nombre entier n, la série

$$(43)\quad f(a),\quad \frac{x-a}{1}f'(a),\quad \frac{(x-a)^2}{1.2}f''(a),\quad \ldots$$

est nécessairement convergente, et l'on tire de l'équation (40)

$$(44)\quad f(x)=f(a)+\frac{x-a}{1}f'(a)+\frac{(x-a)^2}{1.2}f''(a)+\ldots$$

ou, ce qui revient au même,

$$(45)\quad f(a+z)=f(a)+\frac{z}{1}f'(a)+\frac{z^2}{1.2}f''(a)+\ldots.$$

Si, dans cette dernière, on remplace a par x et z par h, on obtiendra la suivante

$$(46)\quad f(x+h)=f(x)+\frac{h}{1}f'(x)+\frac{h^2}{1.2}f''(x)+\ldots,$$

c'est-à-dire la formule de Taylor étendue au cas où la variable x et son accroissement h deviennent imaginaires.

Lorsque, dans l'équation (40), le module ρ devient infiniment petit, le rapport

$$\frac{\Phi^{(n)}(\theta_1\rho)+\sqrt{-1}\,\mathrm{X}^{(n)}(\theta_2\rho)}{(\cos\upsilon+\sqrt{-1}\sin\upsilon)^n}$$

diffère très peu du rapport

$$\frac{\Phi^{(n)}(0)+\sqrt{-1}\,\mathrm{X}^{(n)}(0)}{(\cos\upsilon+\sqrt{-1}\sin\upsilon)^n}=f^{(n)}(a).$$

Donc, si l'on pose alors

$$(47)\quad \frac{\Phi^{(n)}(\theta_1\rho)+\mathrm{X}^{(n)}(\theta_2\rho)}{(\cos\upsilon+\sqrt{-1}\sin\upsilon)^n}=f^{(n)}(a)+\mathrm{I},$$

I sera, ainsi que $x-a$, une expression imaginaire infiniment petite, et la formule (40) donnera

$$(48)\quad \left\{\begin{aligned} & f(x)=f(a)+\frac{x-a}{1}f'(a)+\ldots \\ & \qquad +\frac{(x-a)^{n-1}}{1.2.3\ldots(n-1)}f^{(n-1)}(a) \\ & \qquad +\frac{(x-a)^n}{1.2.3\ldots n}[f^{(n)}(a)+\mathrm{I}], \end{aligned}\right.$$

puis on en conclura, en faisant $x - a = i$,

$$(49)\qquad \begin{cases} f(a+i) = f(a) + \frac{i}{1} f'(a) + \ldots \\ \qquad + \frac{i^{n-1}}{1.2.3\ldots(n-1)} f^{(n-1)}(a) \\ \qquad + \frac{i^n}{1.2.3\ldots n}[f^{(n)}(a) + \mathrm{I}]. \end{cases}$$

Si, dans l'équation (49), on remplace a par x, on se trouvera immédiatement conduit à la proposition suivante :

Théorème II. — *Supposons que l'on attribue à la variable x une valeur dans le voisinage de laquelle les fonctions (25) restent continues, et à la variable imaginaire i une valeur infiniment petite. On aura*

$$(50)\qquad \begin{cases} f(x+i) = f(x) + \frac{i}{1} f'(x) + \ldots \\ \qquad + \frac{i^{n-1}}{1.2.3\ldots(n-1)} f^{(n-1)}(x) + \frac{i^n}{1.2.3\ldots n}[f^{(n)}(x) + \mathrm{I}], \end{cases}$$

I désignant une expression qui deviendra nulle en même temps que i.

Cette proposition comprend évidemment, comme cas particuliers, le premier théorème et celui que nous allons énoncer.

Théorème III. — *Supposons que l'on attribue à la variable imaginaire x une valeur dans le voisinage de laquelle la fonction $f(x)$ reste continue, ainsi que sa dérivée $f'(x)$, et à la variable imaginaire i une valeur infiniment petite. On aura*

$$(51)\qquad f(x+i) = f(x) + i[f'(x) + \mathrm{I}],$$

I devant s'évanouir avec i.

Exemples. — Si l'on prend successivement pour $f(x)$ les fonctions

$$e^x,\quad \sin x,\quad \cos x,\quad x^{\frac{1}{2}},\quad x^\mu,\quad \mathrm{l}x,\quad \operatorname{arc\,tang} x,\quad \ldots,$$

on tirera de la formule (51)

$$(52)\qquad e^{x+i} = e^x + i(e^x + \mathrm{I}),$$

$$(53)\qquad \sin(x+i) = \sin x + i(\cos x + \mathrm{I}),$$

$$(54)\qquad \cos(x+i) = \cos x - i(\sin x - \mathrm{I}),$$

$$(55)\qquad (x+i)^{\frac{1}{2}} = x^{\frac{1}{2}} + i\left(\frac{1}{2x^{\frac{1}{2}}} + \mathrm{I}\right),$$

$$(56)\qquad (x+i)^\mu = x^\mu + i(\mu x^{\mu-1} + \mathrm{I}),$$

$$(57)\qquad \mathrm{l}(x+i) = \mathrm{l}x + i\left(\frac{1}{x} + \mathrm{I}\right),$$

$$(58)\qquad \operatorname{arc\,tang}(x+i) = \operatorname{arc\,tang} x + i\left(\frac{1}{1+x^2} + \mathrm{I}\right),$$

....

Lorsque plusieurs termes de la suite

$$(59)\qquad f'(a),\quad f''(a),\quad f'''(a),\quad \ldots$$

s'évanouissent, alors, en admettant que $f^{(n)}(a)$ soit le premier de ceux qui diffèrent de zéro, on tire de l'équation (49)

$$(60)\qquad f(a+i) = f(a) + \frac{i^n}{1.2.3\ldots n}[f^{(n)}(a) + \mathrm{I}].$$

On peut donc encore énoncer la proposition suivante.

Théorème IV. — *Supposons que les fonctions (25), étant continues par rapport à x dans le voisinage de la valeur particulière $x = a$, s'évanouissent toutes avec $x - a$, excepté la première $f(x)$ et la dernière $f^{(n)}(x)$. Admettons en outre que $f(x)$ et $f^{(n)}(x)$ conservent, pour $x = 0$, des valeurs finies : alors, si l'on attribue à la variable i une valeur infiniment petite, on aura, pour $x = a$,*

$$(61)\qquad f(x+i) = f(x) + \frac{i^n}{1.2.3\ldots n}[f^{(n)}(x) + \mathrm{I}],$$

I désignant une expression imaginaire qui deviendra nulle en même temps que la variable i.

Concevons à présent que, la variable x étant imaginaire, on nomme R le module de la fonction $f(x)$, en sorte qu'on ait

$$f(x) = \mathrm{R}(\cos\mathrm{T} + \sqrt{-1}\sin\mathrm{T}), \tag{62}$$

T désignant un arc réel. Soient d'ailleurs $\Delta\mathrm{R}$, $\Delta\mathrm{T}$ les accroissements que reçoivent les quantités R, T, quand on attribue à la variable x l'accroissement infiniment petit

$$\Delta x = i = \rho(\cos\upsilon + \sqrt{-1}\sin\upsilon). \tag{63}$$

On fixera aisément, à l'aide des formules (51) ou (61), la valeur approchée de $\Delta\mathrm{R}$. En effet, on tirera de l'équation (62)

$$(\mathrm{R} + \Delta\mathrm{R})[\cos(\mathrm{T} + \Delta\mathrm{T}) + \sqrt{-1}\sin(\mathrm{T} + \Delta\mathrm{T})] = f(x + i); \tag{64}$$

puis, en combinant cette dernière avec la formule (51), nommant R_1 le module de $f'(x)$, et représentant par T_1, α, β des quantités réelles propres à vérifier les équations

$$f'(x) = \mathrm{R}_1(\cos\mathrm{T}_1 + \sqrt{-1}\sin\mathrm{T}_1), \tag{65}$$

$$\mathrm{I}(\cos\upsilon + \sqrt{-1}\sin\upsilon) = \alpha + \beta\sqrt{-1}, \tag{66}$$

on trouvera

$$\left\{\begin{aligned} &(\mathrm{R} + \Delta\mathrm{R})[\cos(\mathrm{T} + \Delta\mathrm{T}) + \sqrt{-1}\sin(\mathrm{T} + \Delta\mathrm{T})] \\ &\quad = \mathrm{R}(\cos\mathrm{T} + \sqrt{-1}\sin\mathrm{T}) + \rho\{\mathrm{R}_1[\cos(\upsilon + \mathrm{T}_1) + \sqrt{-1}\sin(\upsilon + \mathrm{T}_1)] + \alpha + \beta\sqrt{-1}\} \end{aligned}\right. \tag{67}$$

ou, ce qui revient au même,

$$\left\{\begin{aligned} (\mathrm{R} + \Delta\mathrm{R})\cos(\mathrm{T} + \Delta\mathrm{T}) &= \mathrm{R}\cos\mathrm{T} + \rho[\mathrm{R}_1\cos(\upsilon + \mathrm{T}_1) + \alpha], \\ (\mathrm{R} + \Delta\mathrm{R})\sin(\mathrm{T} + \Delta\mathrm{T}) &= \mathrm{R}\sin\mathrm{T} + \rho[\mathrm{R}_1\sin(\upsilon + \mathrm{T}_1) + \beta]. \end{aligned}\right. \tag{68}$$

De plus, si l'on combine entre elles, par voie d'addition, les formules (68), après avoir élevé chaque membre au carré, et en faisant, pour abréger,

$$\gamma = 2\mathrm{R}(\alpha\cos\mathrm{T} + \beta\sin\mathrm{T}) + \rho\{[\mathrm{R}_1\cos(\upsilon + \mathrm{T}_1) + \alpha]^2 + [\mathrm{R}_1\sin(\upsilon + \mathrm{T}_1) + \rho]^2\}, \tag{69}$$

on en conclura

$$(\mathrm{R} + \Delta\mathrm{R})^2 = \mathrm{R}^2 + \rho[2\mathrm{R}\mathrm{R}_1\cos(\upsilon + \mathrm{T}_1 - \mathrm{T}) + \gamma]. \tag{70}$$

Cela posé, comme les valeurs de α, β, γ, déterminées par les formules (66) et (69), seront infiniment petites, on tirera de l'équation (70), en extrayant les racines carrées positives des deux membres, ayant égard à la formule (55), et désignant par δ une quantité qui s'évanouisse avec le module ρ,

$$\mathrm{R} + \Delta\mathrm{R} = \mathrm{R} + \rho[2\mathrm{R}\mathrm{R}_1\cos(\upsilon + \mathrm{T}_1 - \mathrm{T}) + \gamma]\left(\frac{1}{2\mathrm{R}} + \delta\right). \tag{71}$$

Dans cette dernière équation, qui suppose $\mathrm{R}^2 > 0$, le produit

$$[2\mathrm{R}\mathrm{R}_1\cos(\upsilon + \mathrm{T}_1 - \mathrm{T}) + \gamma]\left(\frac{1}{2\mathrm{R}} + \delta\right)$$

diffère très peu du suivant

$$\mathrm{R}_1\cos(\upsilon + \mathrm{T}_1 - \mathrm{T}).$$

Donc cette même équation pourra être présentée sous la forme

$$\Delta\mathrm{R} = \rho[\mathrm{R}_1\cos(\upsilon + \mathrm{T}_1 - \mathrm{T}) + \omega], \tag{72}$$

ω désignant encore une quantité infiniment petite ; et par conséquent, le produit

$$\rho\mathrm{R}_1\cos(\upsilon + \mathrm{T}_1 - \mathrm{T}) \tag{73}$$

sera la valeur approchée de l'accroissement $\Delta\mathrm{R}$, c'est-à-dire que le rapport de cet accroissement au produit (73) différera très peu de l'unité. On doit seulement excepter le cas où l'on attribuerait à la variable x une valeur qui rendrait nulle ou infinie l'un des deux modules R, R_1, ou, ce qui revient au même, l'une des deux fonctions $f(x)$, $f'(x)$.

Supposons maintenant que, pour une valeur donnée de x, les fonctions

$$f'(x), \quad f''(x), \quad \ldots, \quad f^{(n-1)}(x) \tag{74}$$

s'évanouissent, mais que $f(x)$ et $f^{(n)}(x)$ obtiennent des valeurs finies différentes de zéro. Alors le produit (73) sera nul, ainsi que le module R_1 de $f'(x)$. Mais, si l'on désigne par R_n le module de $f^{(n)}(x)$, et par T_n, α, β des quantités réelles propres à vérifier les équations

$$f^{(n)}(x) = R_n(\cos T_n + \sqrt{-1}\sin T_n), \tag{75}$$

$$\mathrm{I}(\cos\upsilon + \sqrt{-1}\sin\upsilon)^n = \alpha + \beta\sqrt{-1}, \tag{76}$$

on tirera des formules (64) et (61), combinées entre elles,

$$\left\{\begin{aligned} &(R + \Delta R)[\cos(T + \Delta T) + \sqrt{-1}\sin(T + \Delta T)] \\ &= R(\cos T + \sqrt{-1}\sin T) + \frac{\rho^n}{1.2.3\ldots n}\{R_n[\cos(n\upsilon + T_n) + \sqrt{-1}\sin(n\upsilon + T_n)] + \alpha + \beta\sqrt{-1}\} \end{aligned}\right. \tag{77}$$

ou, ce qui revient au même,

$$\left\{\begin{aligned} (R + \Delta R)\cos(T + \Delta T) &= R\cos T + \frac{\rho^n}{1.2.3\ldots n}[R_n\cos(n\upsilon + T_n) + \alpha], \\ (R + \Delta R)\sin(T + \Delta T) &= R\sin T + \frac{\rho^n}{1.2.3\ldots n}[R_n\sin(n\upsilon + T_n) + \beta]; \end{aligned}\right. \tag{78}$$

puis, en substituant les équations (78) aux équations (68), on obtiendra, au lieu des formules (69), (70), (72), de nouvelles formules, que l'on peut déduire des premières en remplaçant le module ρ par la fraction $\frac{\rho^n}{1.2.3\ldots n}$, R par R_n, et le binôme $\upsilon + T_1$ par le binôme $n\upsilon + T_n$. Donc, en supposant $R^2 > 0$, et désignant toujours par ω une quantité infiniment petite, on aura

$$\Delta R = \frac{\rho^n}{1.2.3\ldots n}[R_n\cos(n\upsilon + T_n - T) + \omega]. \tag{79}$$

Par conséquent, dans l'hypothèse admise, le produit

$$\frac{\rho^n R_n}{1.2.3\ldots n}\cos(n\upsilon + T_n - T) \tag{80}$$

sera la valeur approchée de l'accroissement ΔR, c'est-à-dire que le rapport de cet accroissement au produit (80) différera très peu de l'unité.

Lorsque, pour une valeur donnée de x, la fonction $f(x)$ s'évanouit avec son module R, et qu'en même temps la première des fonctions (25) qui diffère de zéro conserve une valeur finie, on tire des formules (68) ou (78) : 1° en supposant $R_1^2 > 0$,

$$\left\{\begin{aligned} \Delta R\cos(T + \Delta T) &= \rho[R_1\cos(\upsilon + T_1) + \alpha], \\ \Delta R\sin(T + \Delta T) &= \rho[R_1\sin(\upsilon + T_1) + \beta]; \end{aligned}\right. \tag{81}$$

2° en supposant

$$R_1 = R_2 = \ldots = R_{n-1} = 0 \quad \text{et} \quad R_n^2 > 0,$$

$$\left\{\begin{aligned} \Delta R\cos(T + \Delta T) &= \frac{\rho^n}{1.2.3\ldots n}[R_n\cos(n\upsilon + T_n) + \alpha], \\ \Delta R\sin(T + \Delta T) &= \frac{\rho^n}{1.2.3\ldots n}[R_n\sin(n\upsilon + T_n) + \beta]. \end{aligned}\right. \tag{82}$$

On en conclura, par des raisonnements semblables à ceux dont nous nous sommes servis plus haut, que l'accroissement ΔR du module R peut être, dans le premier cas, présenté sous la forme

$$\Delta R = \rho(R_1 + \omega), \tag{83}$$

et, dans le second cas, sous la forme

$$\Delta R = \frac{\rho^n}{1.2.3\ldots n}(R_n + \omega), \tag{84}$$

ω désignant, dans l'une et l'autre hypothèse, une quantité infiniment petite.

Pour que l'accroissement de la variable x, savoir

$$\Delta x = i = \rho(\cos\upsilon + \sqrt{-1}\sin\upsilon)$$

soit infiniment petit, il est nécessaire et il suffit que le module ρ de cet accroissement soit lui-même infiniment petit, l'arc υ pouvant d'ailleurs être une question finie quelconque. Or, si l'on détermine cet arc de manière à vérifier l'équation

$$\cos(\upsilon + T_1 - T) = -1, \tag{85}$$

ou bien la suivante

$$\cos(n\upsilon + T_n - T) = -1, \tag{86}$$

ce qui aura lieu, par exemple, si l'on prend

$$\upsilon = \pi + T - T_1, \tag{87}$$

ou bien

$$\upsilon = \frac{(2m+1)\pi + T - T_n}{n}, \tag{88}$$

m désignant un nombre entier inférieur à n, on verra la formule (72) se réduire à

$$\Delta R = -\rho(R_1 - \omega), \tag{89}$$

ou la formule (79) se réduire à

$$\Delta R = -\frac{\rho^n}{1.2.3\ldots n}(R_n - \omega). \tag{90}$$

De plus, la valeur de Δx donnée par l'équation (63) prendra l'une des formes

$$\Delta x = -\rho\left[\cos(T - T_1) + \sqrt{-1}\sin(T - T_1)\right], \tag{91}$$

$$\Delta x = \rho\left[\cos\frac{(2m+1)\pi + T - T_n}{n} + \sqrt{-1}\sin\frac{(2m+1)\pi + T - T_n}{n}\right]. \tag{92}$$

D'ailleurs, en vertu de la formule (89) ou (90), l'accroissement ΔR du module R aura pour valeur approchée la quantité négative

$$-\rho R_1 \tag{93}$$

ou

$$-\frac{\rho^n R_n}{1.2.3\ldots n}. \tag{94}$$

Donc cet accroissement sera négatif, et l'on pourra énoncer la proposition suivante :

Théorème V. — *Supposons que les fonctions* (25) *restent finies et continues dans le voisinage d'une valeur de x qui ne réduise pas la fonction $f(x)$ à zéro. Faisons d'ailleurs*

$$f(x) = R(\cos T + \sqrt{-1}\sin T),$$

et soit

$$f^{(n)}(x) = R_n(\cos T_n + \sqrt{-1}\sin T_n)$$

le premier terme de la suite

$$f'(x),\quad f''(x),\quad f'''(x),\quad \ldots$$

qui ne s'évanouisse pas pour la valeur donnée de x. Enfin, concevons que, ρ désignant une quantité positive très petite, on attribue à x un accroissement Δx déterminé par la formule (91) *ou par la formule* (92), *suivant que l'on aura $n = 1$ ou $n > 1$. La valeur correspondante de ΔR sera négative, c'est-à-dire que le module de*

$$f(x + \Delta x)$$

deviendra, pour de très petites valeurs de la quantité ρ, inférieur au module de $f(x)$.

Au reste, pour que le module de $f(x + \Delta x)$ devienne inférieur au module de $f(x)$, il n'est pas nécessaire de supposer la valeur de Δx déterminée par la formule (91) ou (92), et il suffit d'assigner à l'angle υ, dans la formule (63), une valeur propre à rendre négatif le dernier facteur de l'expression (73) ou (80), savoir

$$\cos(\upsilon + T_1 - T) \quad \text{ou} \quad \cos(n\upsilon + T_n - T).$$

Or c'est une condition qu'il est toujours facile de remplir, attendu que ce facteur change de signe, tandis que l'angle υ reçoit un accroissement égal à π ou à $\frac{\pi}{n}$.

En terminant cette Leçon, nous ferons observer que, dans beaucoup de cas, les relations établies par les formules (6), (26), (36) entre les fonctions désignées par les lettres f, f et les fonctions réelles $\varphi(r)$, $\chi(r)$, $\Phi(\rho)$, $X(\rho)$ continuent de subsister quand on remplace $\sqrt{-1}$ par $-\sqrt{-1}$. C'est, en effet, ce qui aura généralement lieu si la fonction $\mathrm{f}(x)$ ou $f(x)$ se présente sous forme réelle, c'est-à-dire si elle ne renferme pas dans son expression le signe $\sqrt{-1}$. Ainsi, par exemple, si l'on prend pour $f(x)$ l'une des fonctions simples représentées par les notations

$$a+x,\quad a-x,\quad ax,\quad \frac{a}{x},\quad x^a,\quad \mathrm{A}^x,\quad \mathrm{L}x,$$
$$\sin x,\quad \cos x,\quad \arc\sin x,\quad \arc\cos x$$

ou l'une des fonctions composées que l'on peut exprimer en combinant ces mêmes notations, l'équation (26), dans laquelle r désigne le module de x, s un arc réel et $\varphi(r)$, $\chi(r)$ deux fonctions réelles de r, entrainera généralement la suivante :

$$(95)\qquad f[r(\cos t-\sqrt{-1}\sin t)]=\varphi(r)-\sqrt{-1}\,\chi(r).$$

On aura donc alors

$$(96)\quad \left\{\begin{aligned} \varphi(r)&=\frac{f[r(\cos t+\sqrt{-1}\sin t)]+f[r(\cos t-\sqrt{-1}\sin t)]}{2} \\ &\text{et} \\ \chi(r)&=\frac{f[r(\cos t+\sqrt{-1}\sin t)]-f[r(\cos t-\sqrt{-1}\sin t)]}{2\sqrt{-1}}.\end{aligned}\right.$$

QUATORZIÈME LEÇON.

SUR LA RÉSOLUTION DES ÉQUATIONS ALGÉBRIQUES ET TRANSCENDANTES. DÉCOMPOSITION DES FONCTIONS ENTIÈRES EN FACTEURS RÉELS DU PREMIER OU DU SECOND DEGRÉ.

A l'aide des principes établis dans la treizième Leçon, on peut aisément démontrer la proposition suivante :

Théorème I. — *Soit $f(x)$ une fonction de x qui reste finie et continue, ainsi que ses dérivées des divers ordres, pour toutes les valeurs finies réelles ou imaginaires de x, et qui devienne toujours infiniment grande lorsque le module de la variable x devient infini. Supposons d'ailleurs que les dérivées de $f(x)$ ne puissent s'évanouir toutes à la fois. Il existera une ou plusieurs valeurs de x, réelles ou imaginaires, et propres à vérifier l'équation*

$$(1)\qquad f(x)=0.$$

Démonstration. — Soient r et R les modules de la variable x et de la fonction $f(x)$, en sorte qu'on ait généralement

$$(2)\qquad x=r(\cos t+\sqrt{-1}\sin t)$$

et

$$(3)\qquad f(x)=f[r(\cos t+\sqrt{-1}\sin t)]=\mathrm{R}(\cos\mathrm{T}+\sqrt{-1}\sin\mathrm{T}),$$

t, T désignant deux arcs réels. Comme, en vertu de l'hypothèse admise, la fonction $f(x)$ devra rester finie pour toutes les valeurs finies du module r et devenir toujours infiniment grande pour $r=\infty$, il est clair que le module R remplira les mêmes conditions. Il est aisé d'en conclure que, parmi les valeurs de R, il en existera une plus petite que toutes les autres, et correspondante à une ou plusieurs valeurs finies de x. J'ajoute que cette plus petite valeur de R sera précisément égale à zéro; et, en effet, toutes les fois qu'une valeur finie de x produira pour la fonction $f(x)$ un module différent de zéro, on pourra, en vertu du théorème V de la Leçon précédente, attribuer à x un accroissement infiniment petit Δx, tel que le module de $f(x+\Delta x)$ devienne inférieur à celui de $f(x)$. Donc alors le module de $f(x)$ n'aura pas la plus petite valeur possible. Par conséquent, lorsque les conditions énoncées dans le théorème I seront remplies, la plus petite valeur de R sera nulle et les valeurs finies de x qui correspondront à une valeur nulle de R vérifieront l'équation (1).

Le théorème I s'applique immédiatement aux fonctions entières de la variable x. En effet, soit $f(x)$ une fonction entière du degré n, c'est-à-dire de la forme

$$f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \ldots + a_{n-1} x + a_n, \tag{4}$$

n désignant un nombre entier, et $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n$ des constantes réelles ou imaginaires dont la première ne pourra être nulle. Cette fonction $f(x)$ restera finie et continue, ainsi que ses dérivées des divers ordres, pour toutes les valeurs finies réelles ou imaginaires de x, et sa dérivée de l'ordre n, savoir

$$f^{(n)}(x) = 1.2.3\ldots n.a_0, \tag{5}$$

sera constante, mais différente de zéro. De plus, si l'on représente par $\rho_0, \rho_1, \ldots, \rho_n$ les modules des coefficients $a_0, a_1, \ldots, a_n$, et si l'on pose en conséquence

$$\left\{\begin{array}{l} a_0 = \rho_0(\cos\tau_0 + \sqrt{-1}\sin\tau_0), \\ a_1 = \rho_1(\cos\tau_1 + \sqrt{-1}\sin\tau_1), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ a_n = \rho_n(\cos\tau_n + \sqrt{-1}\sin\tau_n), \end{array}\right. \tag{6}$$

on conclura de l'équation (4), combinée avec les formules (2), (3), (6),

$$\left\{\begin{array}{l} R(\cos T + \sqrt{-1}\sin T) \\ \quad = \rho_0 r^n[\cos(nt+\tau_0) + \sqrt{-1}\sin(nt+\tau_0)] \\ \qquad + \rho_1 r^{n-1}\{\cos[(n-1)t+\tau_1] + \sqrt{-1}\sin[(n-1)t+\tau_1]\} + \ldots \\ \qquad\qquad + \rho_n(\cos\tau_n + \sqrt{-1}\sin\tau_n) \end{array}\right. \tag{7}$$

ou, ce qui revient au même,

$$\left\{\begin{array}{l} R\cos T = \rho_0 r^n \cos(nt+\tau_0) + \rho_1 r^{n-1}\cos[(n-1)t+\tau_1] + \ldots + \rho_n\cos\tau_n, \\ R\sin T = \rho_0 r^n \sin(nt+\tau_0) + \rho_1 r^{n-1}\sin[(n-1)t+\tau_1] + \ldots + \rho_n\sin\tau_n. \end{array}\right. \tag{8}$$

On trouvera par suite

$$\left\{\begin{array}{l} R^2 = \quad \{\rho_0 r^n \cos(nt+\tau_0) + \rho_1 r^{n-1}\cos[(n-1)t+\tau_1] + \ldots + \rho_n\cos\tau_n\}^2 \\ \qquad + \{\rho_0 r^n \sin(nt+\tau_0) + \rho_1 r^{n-1}\sin[(n-1)t+\tau_1] + \ldots + \rho_n\sin\tau_n\}^2 \end{array}\right. \tag{9}$$

ou plus simplement

$$R^2 = r^{2n}\left[\rho_0^2 + \frac{2\rho_0\rho_1\cos(t+\tau_0-\tau_1)}{r} + \frac{\rho_1^2 + 2\rho_0\rho_2\cos(2t+\tau_0-\tau_2)}{r^2} + \ldots\right]. \tag{10}$$

Or, si l'on attribue au module r de la variable x des valeurs infiniment grandes, le premier des deux facteurs, que renferme la valeur précédente de R^2, croîtra indéfiniment, tandis que le second s'approchera d'une limite finie et différente de zéro, savoir de la quantité ρ_0^2. Donc la valeur de R^2 et sa racine carrée ou le module R de la fonction $f(x)$ deviendront infinis ainsi que la fonction elle-même. Donc, en vertu du théorème I, il existera une ou plusieurs valeurs réelles ou imaginaires de x propres à vérifier l'équation

$$a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \ldots + a_{n-1} x + a_n = 0. \tag{11}$$

On doit seulement excepter le cas où l'on aurait

$$n = 0, \qquad f(x) = a_0,$$

et dans lequel toutes les dérivées de $f(x)$ deviendraient nulles.

Soit maintenant x_0 l'une des valeurs réelles ou imaginaires de x propres à vérifier l'équation (11). La fonction entière $f(x)$ sera divisible par le facteur linéaire $x - x_0$, et, si l'on effectue la division, on obtiendra pour quotient une autre fonction entière qui sera elle-même divisible par un nouveau facteur. En continuant de la sorte, on finira par décomposer la fonction $f(x)$ du degré n en autant de facteurs du premier degré qu'il y a d'unités dans le nombre n. D'ailleurs, le produit de ces facteurs ne deviendra jamais nul sans que l'un d'eux s'évanouisse, et comme, en égalant chaque facteur à zéro, on déterminera une racine réelle ou imaginaire de l'équation (11), on pourra évidemment énoncer la proposition suivante :

Théorème II. — *Quelles que soient les valeurs réelles ou les valeurs imaginaires des constantes $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n$, l'équation*

$$a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_{n-1} x + a_n = 0 \tag{11}$$

a toujours n racines réelles ou imaginaires et n'en saurait avoir un plus grand nombre.

Lorsque la fonction $f(x)$ cesse d'être entière, on peut encore, dans un grand nombre de cas, constater la possibilité de résoudre l'équation (1) en s'appuyant sur l'un des théorèmes que nous allons faire connaître.

Théorème III. — *Soit $f(x)$ une fonction de x qui reste finie et continue, ainsi que ses dérivées des divers ordres, pour toutes les valeurs finies réelles ou imaginaires de x, et supposons que les dérivées de $f(x)$ ne puissent s'évanouir toutes à la fois. Soit de plus $\psi(t)$ une fonction déterminée de l'angle t, qui demeure non seulement continue, mais encore réelle et positive entre les limites $t = -\pi$, $t = \pi$, et qui reprenne la même valeur à ces deux limites. Si, tandis que l'angle t varie entre les limites $-\pi$, $+\pi$, le module de l'expression*

$$f[(\cos t + \sqrt{-1}\sin t)\psi(t)] \tag{12}$$

reste constamment supérieur au module de $f(0)$, on pourra en conclure que l'équation (1) admet une ou plusieurs racines réelles ou imaginaires et de la forme

$$x = \theta(\cos t + \sqrt{-1}\sin t)\psi(t), \tag{13}$$

θ désignant un nombre inférieur à l'unité.

Démonstration. — En effet, si, dans la fonction

$$f(x) = f[r(\cos t + \sqrt{-1}\sin t)],$$

on fait varier r et t par degrés insensibles entre les limites $r = 0$, $r = \psi(t)$, $t = -\pi$, $t = \pi$, on obtiendra pour cette fonction $f(x)$ une infinité de valeurs dont l'une offrira un module plus petit que toutes les autres. Soient r_0, t_0 les valeurs de r et de t correspondantes à ce plus petit module, et x_0 la valeur correspondante de x; r_0 devra être inférieur et non pas égal à $\psi(t_0)$. Car, si l'on avait

$$r_0 = \psi(t_0),$$

le module de l'expression

$$f(x_0) = f[(\cos t_0 + \sqrt{-1}\sin t_0)\psi(t_0)] \tag{14}$$

resterait, en vertu de l'hypothèse admise, supérieur au module de $f(0)$, c'est-à-dire au module qu'on obtient pour $f(x)$ en posant $r = 0$, quel que soit t. J'ajoute que l'expression (14) sera précisément nulle; et en effet, si le contraire arrivait, on pourrait, en vertu du théorème V de la Leçon précédente, attribuer à la valeur

$$x_0 = r_0(\cos t_0 + \sqrt{-1}\sin t_0) \tag{15}$$

de la variable x un accroissement infiniment petit i tel que le module de $f(x_0 + i)$ devînt inférieur à celui de $f(x_0)$. D'ailleurs, r_0 étant inférieur à $\psi(t_0)$, et l'accroissement i étant très peu différent de zéro, la valeur $f(x_0 + i)$ de $f(x)$ serait encore l'une de celles qu'on obtient lorsqu'on fait varier r et t entre les limites $r = 0$, $r = \psi(t)$, $t = -\pi$, $t = \pi$. Donc, parmi ces dernières valeurs, $f(x_0)$ ne serait pas celle qui offrirait le plus petit module. Donc, toutes les fois que les conditions énoncées dans le théorème III pourront être remplies, l'expression (14) s'évanouira ainsi que son module, et la valeur de x ci-dessus désignée par x_0 vérifiera l'équation (1). Or cette valeur de x sera du nombre de celles que représente la formule (13), puisque le module r_0 sera compris entre les limites o et $\psi(t_0)$.

Scolie. — Pour que le théorème III subsiste, il n'est pas nécessaire que la fonction désignée par $\psi(t)$ conserve la même forme pour toutes les valeurs de t. Cette remarque fournit le moyen de surmonter les difficultés que pourrait offrir l'application du théorème à des cas particuliers. Supposons, pour fixer les idées,

$$f(x) = e^x - x. \tag{16}$$

On trouvera, dans cette hypothèse,

$$f(0) = 1, \tag{17}$$

$$R(\cos T + \sqrt{-1}\sin T) = e^{r\cos t + r\sin t\sqrt{-1}} - (r\cos t + r\sin t\sqrt{-1}), \tag{18}$$

$$\left\{\begin{aligned} R\cos T &= e^{r\cos t}\cos(r\sin t) - r\cos t,\\ R\sin T &= e^{r\cos t}\sin(r\sin t) - r\sin t,\end{aligned}\right. \tag{19}$$

$$R^2 = e^{2r\cos t} - 2re^{r\cos t}\cos(r\sin t - t) + r^2 \tag{20}$$

et, par conséquent,

$$R^2 > e^{2r\cos t} - 2re^{r\cos t} + r^2; \tag{21}$$

puis on en conclura : 1° en supposant $r > 2$ et $\cos t$ négatif,

$$R > r - e^{r\cos t} > r - 1 > 1; \tag{22}$$

2° en supposant $\cos t$ positif et supérieur à $\frac{l(r+1)}{r}$,

$$R > e^{r\cos t} - r > 1. \tag{23}$$

Soient maintenant N un nombre quelconque supérieur à 2 et

$$\upsilon = \arccos\frac{l(N+1)}{N}. \tag{24}$$

Si l'on veut que la valeur de R, déterminée par la formule (20) dans le cas où l'on pose $r = \psi(t)$, devienne supérieure au module de $f(0)$, c'est-à-dire à l'unité, pour toutes les valeurs de t renfermées : 1° entre les limites $t = -\pi$, $t = -\frac{\pi}{2}$ ou bien entre les limites $t = \frac{\pi}{2}$, $t = \pi$; 2° entre les limites $t = -\upsilon$, $t = \upsilon$, il suffira de concevoir que, entre ces mêmes limites, la fonction $\psi(t)$ se réduise à une quantité constante égale ou supérieure au nombre N. D'autre part, si, en désignant par n un nombre entier quelconque, on fixe la valeur de r, lorsque l'angle t reste positif, à l'aide de l'équation

$$r\sin t - t = n\pi + \frac{\pi}{2} \quad \text{ou} \quad r = \frac{n\pi + \frac{\pi}{2} + t}{\sin t}, \tag{25}$$

et lorsque l'angle t devient négatif, à l'aide de l'équation

$$r\sin t - t = -\left(n\pi + \frac{\pi}{2}\right) \quad \text{ou} \quad r = \frac{n\pi + \frac{\pi}{2} - t}{\sin(-t)}, \tag{26}$$

le module R, déterminé par la formule (20), surpassera évidemment le module r, et à plus forte raison le nombre $\frac{\pi}{2} = 1,5707\ldots$. Donc le module R surpassera l'unité pour toutes les valeurs de t comprises entre les limites $-\pi$, $+\pi$, si l'on détermine la fonction $\psi(t)$ de manière que l'on ait : 1° entre les limites $t = -\upsilon$, $t = \upsilon$,

$$\psi(t) = \frac{n\pi + \frac{\pi}{2} + \upsilon}{\sin\upsilon}; \tag{27}$$

2° entre les limites $t = \upsilon$, $t = \pi - \upsilon$,

$$\psi(t) = \frac{n\pi + \frac{\pi}{2} + t}{\sin t}; \tag{28}$$

3° entre les limites $t = -(\pi - \upsilon)$, $t = -\upsilon$,

$$\psi(t) = \frac{n\pi + \frac{\pi}{2} - t}{\sin(-t)}; \tag{29}$$

4° entre les limites $t=-\pi$, $t=-(\pi-\upsilon)$ ou bien entre les limites $t=\pi-\upsilon$, $t=\pi$,

$$\psi(t)=\frac{n\pi+\frac{\pi}{2}+\pi-\upsilon}{\sin(\pi-\upsilon)}=\frac{n\pi+\frac{3\pi}{2}-\upsilon}{\sin\upsilon}, \tag{30}$$

et si de plus on choisit le nombre n de telle sorte que la plus petite des valeurs de $\psi(t)$ fournies par les équations (27), (30), savoir

$$\frac{n\pi+\frac{\pi}{2}+\upsilon}{\sin\upsilon},$$

vérifie la condition

$$\frac{n\pi+\frac{\pi}{2}+\upsilon}{\sin\upsilon}>\mathrm{N}. \tag{31}$$

D'ailleurs, quoique la fonction $\psi(t)$ déterminée par le système des équations (27), (28), (29), (30), change de forme avec la valeur de t, elle reste non seulement finie et positive, mais encore continue entre ces limites, c'est-à-dire qu'elle varie par degrés insensibles, tandis que l'on fait croître ou décroître l'angle t. Ajoutons qu'elle reprend la même valeur pour $t=-\pi$ et pour $t=\pi$, et que les dérivées de e^x-x, savoir e^x-1, e^x, ne sauraient s'évanouir en même temps. Donc, en vertu du théorème III, l'équation

$$e^x-x=0 \tag{32}$$

admet des racines réelles ou imaginaires, parmi lesquelles il en existe au moins une dont le module ne surpasse pas la plus grande des valeurs de $\psi(t)$ fournies par les équations (27), (28), (29), (30).

Si l'on prend $\mathrm{N}=2$, l'équation (24) donnera

$$\upsilon=\arccos\frac{13}{2}=\arccos(0{,}549306\ldots)=0{,}98926\ldots,$$

et la condition (31) sera vérifiée, même lorsqu'on supposera $n=0$. Alors la plus grande des valeurs de $\psi(t)$ déterminées par les formules (27), (28), (29), (30) sera

$$\frac{\frac{3\pi}{2}-\upsilon}{\sin\upsilon}=4{,}455\ldots.$$

Donc, parmi les racines de l'équation (1), il en existe au moins une qui offre un module inférieur au nombre $4{,}455\ldots$.

Ce qu'on vient de dire indique suffisamment le parti qu'on peut tirer du théorème III pour s'assurer qu'une équation transcendante admet des racines réelles ou imaginaires, et pour découvrir une limite supérieure au plus petit de leurs modules. Parmi les équations, pour lesquelles l'existence d'une ou de plusieurs racines peut être ainsi constatée, nous citerons encore les suivantes :

$$e^x=x\sqrt{-1},\qquad e^{-x}+x^2=0,\qquad \sin x=2,\qquad \ldots \tag{33}$$

et

$$e^{-x}=x,\qquad e^{-x}=x^2,\qquad e^x-e^{-x}=\sin x,\qquad \ldots. \tag{34}$$

Il serait d'ailleurs facile de reconnaître que les équations (32) et (33) admettent seulement des racines imaginaires.

Au reste, par des raisonnements semblables à ceux que nous avons employés pour établir le théorème III, on peut encore démontrer la proposition suivante.

Théorème IV. — *Soient*

$$x=r(\cos t+\sqrt{-1}\sin t) \tag{2}$$

une variable imaginaire, r le module de cette variable, et $\varphi(t)$, $\psi(t)$ deux fonctions de t qui restent, non seulement continues, mais encore réelles et positives, pour toutes les valeurs de t comprises entre $t=t_1$, $t=t_2$. Soit de plus

$$f(x)=f[r(\cos t+\sqrt{-1}\sin t)] \tag{3}$$

une fonction de x qui reste finie et continue, ainsi que ses dérivées des *divers ordres, entre les limites*

$$t = t_1, \quad t = t_2, \quad r = \varphi(t), \quad r = \psi(t); \tag{35}$$

et supposons que jamais les dérivées de $f(x)$ ne s'évanouissent toutes à la fois. Si l'on peut choisir l'angle τ entre les limites t_1, t_2 et le module ι entre les limites $\varphi(t)$, $\psi(t)$, de telle sorte que l'expression (3) *conserve toujours un module supérieur à celui de*

$$f[\iota(\cos\tau + \sqrt{-1}\sin\tau)], \tag{36}$$

tandis que l'on fait varier r entre les limites $\varphi(t)$, $\psi(t)$, en attribuant à t l'une des valeurs t_1, t_2, ou t entre les limites t_1, t_2, en attribuant à r l'une des valeurs $\varphi(t)$, $\psi(t)$, l'équation (1) *admettra une ou plusieurs racines réelles ou imaginaires, correspondantes à des valeurs de r et de t comprises entre les limites* (35).

Scolie I. — Si, dans le théorème qui précède, on réduit les angles t_1, t_2 aux deux quantités $-\pi$, $+\pi$, il deviendra nécessaire de supposer que chacune des fonctions $\varphi(t)$, $\psi(t)$ reprend la même valeur pour $t = -\pi$ et pour $t = \pi$. Si, dans cette hypothèse, on avait $\varphi(t) = 0$, on se trouverait évidemment ramené au théorème III.

Scolie II. — Si, dans le théorème IV, on réduit les fonctions $\varphi(t)$, $\psi(t)$ à deux quantités constantes r_1, r_2, on obtiendra la nouvelle proposition que je vais énoncer.

Théorème V. — *Soit*

$$x = r(\cos t + \sqrt{-1}\sin t) \tag{2}$$

une variable imaginaire dont r désigne le module. Soit de plus $f(x)$ une fonction de x qui reste finie et continue, ainsi que ses dérivées des divers ordres, entre les limites

$$r = r_1, \quad r = r_2; \quad t = t_1, \quad t = t_2, \tag{37}$$

et supposons que jamais les dérivées de $f(x)$ ne s'évanouissent toutes à la fois. Si l'on peut choisir le module ι entre les limites r_1, r_2 et l'angle τ

entre les limites t_1, t_2, de telle sorte que la fonction

$$f(x) = f[r(\cos t + \sqrt{-1}\sin t)] \tag{3}$$

conserve toujours un module supérieur à celui de l'expression (36), *tandis que l'on fait varier r entre les limites r_1, r_2, en attribuant à t l'une des valeurs t_1, t_2, ou t entre les limites t_1, t_2, en attribuant à r l'une des valeurs r_1, r_2, l'équation* (1) *admettra une ou plusieurs racines réelles ou imaginaires, correspondantes à des valeurs de t comprises entre les limites* (37).

On pourrait encore au théorème V joindre la proposition suivante, qui se démontre aussi facilement et de la même manière que les théorèmes III et IV.

Théorème VI. — *Soient x une variable imaginaire, et p, q deux variables réelles liées à la première par l'équation*

$$x = p + q\sqrt{-1}. \tag{38}$$

Soit de plus

$$f(x) = f(p + q\sqrt{-1}) \tag{39}$$

une fonction de x qui reste finie et continue, ainsi que ses dérivées des divers ordres, entre les limites

$$p = p_1, \quad p = p_2; \quad q = q_1, \quad q = q_2, \tag{40}$$

et supposons que jamais les dérivées de $f(x)$ ne s'évanouissent toutes à la fois. Si l'on peut choisir la quantité λ entre les limites p_1, p_2 et la quantité μ entre les limites q_1, q_2, de telle sorte que la fonction (39) *conserve toujours un module supérieur à celui de l'expression*

$$f(\lambda + \mu\sqrt{-1}), \tag{41}$$

tandis que l'on fait varier p entre les limites p_1, p_2 en attribuant à q l'une des valeurs q_1, q_2, ou q entre les limites q_1, q_2, en attribuant à p l'une des valeurs p_1, p_2, l'équation (1) *admettra une ou plusieurs* *racines imaginaires correspondantes à des valeurs de p et de q comprises entre les limites* (40).

Lorsque l'équation (1) admet des racines réelles ou imaginaires dont les modules sont très considérables, les théorèmes IV et V peuvent servir à constater l'existence de ces racines et à fournir des valeurs approchées. Pour donner la preuve de cette assertion, posons de nouveau

$$f(x) = e^x - x.$$

Alors à chaque racine de l'équation (1) correspondront des valeurs de r et de t propres à faire évanouir le module R déterminé par la formule (20), ou, ce qui revient au même, par la suivante

$$(42)\qquad \mathrm{R}^2 = [e^{r\cos t} - r\cos(r\sin t - t)]^2 + [r\sin(r\sin t - t)]^2.$$

De plus, la somme de deux carrés ne pouvant être nulle qu'autant que chacun d'eux se réduit séparément à zéro, l'équation $\mathrm{R} = 0$ entraînera les deux formules

$$(43)\qquad r\sin(r\sin t - t) = 0, \qquad e^{r\cos t} = r\cos(r\sin t - t),$$

que l'on pourra réduire à

$$(44)\qquad r\sin t - t = \pm 2n\pi, \qquad e^{r\cos t} = r,$$

en désignant par n un nombre entier, et en observant que, pour satisfaire à la seconde des formules (43), il est nécessaire de supposer le module r différent de zéro, et la quantité $\cos(r\sin t - t)$ positive.

Concevons maintenant que l'on attribue au nombre entier n et par suite au module r une très grande valeur. Comme l'expression réelle

$$\frac{\mathrm{l}r}{r},$$

qui admet un seul maximum correspondant à $r = e$, décroît indéfiniment à partir de ce maximum, pour des valeurs croissantes de r, cette expression, ou la valeur de $\cos t$ tirée de la seconde des formules (44), deviendra sensiblement nulle. Donc l'angle t, compris

entre les limites $-\pi$, $+\pi$, différera peu de $\pm\frac{\pi}{2}$, et les formules (44) donneront à très peu près

$$(45)\qquad r = 2n\pi + \frac{\pi}{2}, \qquad \cos t = \frac{\mathrm{l}\left(2n\pi + \frac{n}{2}\right)}{2n\pi + \frac{\pi}{2}}.$$

Nous sommes donc conduits à penser que, si l'équation (1) admet des racines dont lès modules soient très considérables, ces racines correspondront à des valeurs de r et de t peu différentes de celles que fournissent les équations (45). Or on constatera sans peine l'existence des racines dont il s'agit à l'aide du théorème V, en opérant comme il suit.

Supposons, pour fixer les idées, l'angle t positif. Alors, si l'on désigne par ι et par τ les valeurs de r et de t que fournissent les équations (45), on aura

$$(46)\qquad \iota = 2n\pi + \frac{\pi}{2}, \qquad \tau = \arccos\frac{\mathrm{l}\left(2n\pi + \frac{\pi}{2}\right)}{2n\pi + \frac{\pi}{2}}.$$

On trouvera par suite

$$(47)\qquad e^{\iota\cos\tau} = \iota,$$

et l'on tirera de l'équation (20), en prenant $r = \iota$, $t = \tau$,

$$(48)\qquad \mathrm{R}^2 = \iota^2[2 - 2\cos(\iota\sin\tau - \tau)] = 4\iota^2\sin^2\frac{\iota\sin\tau - \tau}{2}$$

ou, ce qui revient au même,

$$(49)\qquad \left(\frac{\mathrm{R}}{\iota}\right)^2 = \left[2\sin\left(\frac{\iota\sin\tau - \tau}{2}\right)\right]^2.$$

D'ailleurs, pour de très grandes valeurs du nombre entier n, $\cos\tau$ acquerra une valeur numérique très petite, ainsi que la différence $\frac{\pi}{2} - \tau$, et l'on pourra en dire autant, non seulement du produit

$$(50)\qquad \iota\cos^2\tau = \frac{\left[\mathrm{l}\left(2n\pi + \frac{\pi}{2}\right)\right]^2}{2n\pi + \frac{\pi}{2}} = 4\left(\frac{\mathrm{l}\sqrt{2n\pi + \frac{\pi}{2}}}{\sqrt{2n\pi + \frac{\pi}{2}}}\right)^2,$$

mais encore des deux expressions

$$(51)\qquad \iota\sin\tau - 2n\pi = \frac{\pi}{2} - \tau - \frac{\iota\cos^2\tau}{1+\sin\tau},$$

$$(52)\qquad \sin\frac{\iota\sin\tau - \tau}{2} = \pm\sin\left[\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2} - \tau - \frac{\iota\cos^2\tau}{1+\sin\tau}\right)\right].$$

Donc la valeur de $\frac{R}{\iota}$, tirée de l'équation (49), sera sensiblement nulle. Faisons maintenant

$$(53)\qquad r = \iota + u, \qquad \cos t = (1 - v)\cos\tau.$$

Soient de plus r_1, r_2, t_1, t_2 les valeurs que prennent les variables r et t quand on pose successivement

$$u = -\pi, \qquad u = \pi, \qquad v = -1, \qquad v = 1;$$

en sorte qu'on ait

$$(54)\qquad r_1 = \iota - \pi, \qquad r_2 = \iota + \pi$$

et

$$(55)\qquad \cos t_1 = 2\cos\tau, \qquad \cos t_2 = 0,$$

ou, ce qui revient au même,

$$(56)\qquad t_1 = \arccos\frac{2\,l\left(2n\pi + \frac{\pi}{2}\right)}{2n\pi + \frac{\pi}{2}}, \qquad t_2 = \frac{\pi}{2}.$$

Le module ι sera évidemment compris entre les modules r_1, r_2, et l'angle τ entre les limites t_1, t_2. Or, si l'on renferme la valeur de u entre les limites $-\pi$, $+\pi$, on tirera de la formule (21) : 1° en supposant $t = t_1$,

$$(57)\qquad \left(\frac{R}{\iota}\right)^2 > \left[\left(2n\pi + \frac{\pi}{2}\right)^{1+\frac{2u}{\iota}} - \left(1 + \frac{u}{\iota}\right)\right]^2,$$

2° en supposant $t = t_2 = \frac{\pi}{2}$,

$$(58)\qquad \left(\frac{R}{\iota}\right)^2 > \left(1 + \frac{u-1}{\iota}\right)^2.$$

D'autre part, si l'on renferme la valeur de v entre les limites -1, $+1$, en attribuant à u l'une des valeurs $-\pi$, $+\pi$, la quantité

$$(59)\qquad \left\{\begin{aligned} r\sin t - t &= r - t - \frac{r\cos^2 t}{1+\sin t} \\ &= (2n\mp 1)\pi + \frac{\pi}{2} - t \mp \left(1 \mp \frac{\pi}{\iota}\right)(1-v)^2\frac{\iota\cos^2\tau}{1+\sin t} \end{aligned}\right.$$

différera très peu de $(2n \mp 1)\pi$; par suite, $\cos(r\sin t - t)$ différera très peu de -1, et l'on tirera de la formule (20)

$$(60)\qquad R^2 > r^2,$$

$$(61)\qquad \left(\frac{R}{\iota}\right)^2 > \left(1 \mp \frac{\pi}{\iota}\right)^2.$$

Enfin il est clair que, les nombres n et ι étant très considérables, toute valeur de $\frac{R}{\iota}$, propre à vérifier l'une des conditions (57), (58), (61), sera ou très grande ou peu différente de l'unité, et par conséquent supérieure à la valeur de $\frac{R}{\iota}$ tirée de l'équation (49). Donc l'équation (48) fournira une valeur de R inférieure à toutes celles qui vérifient les formules (57), (58), (61), et l'on pourra conclure du théorème V que l'équation (32) admet des racines qui correspondent à des valeurs de r comprises entre les limites (54) et à des valeurs de t comprises entre les limites (56).

Au reste, pour arriver à la conclusion qui précède, il n'est pas nécessaire d'attribuer au nombre n des valeurs très considérables, et il suffit même de prendre pour n un nombre entier quelconque différent de zéro. Effectivement, si l'on suppose $n = 1$, on tirera des équations (46) et (49)

$$(62)\qquad \iota = \frac{5\pi}{2} = 7,85398\ldots, \qquad \tau = (0,83095\ldots)\frac{\pi}{2} = 1,30526\ldots,$$

$$(63)\qquad \frac{R}{\iota} = 2\sin\frac{\iota\sin\tau - \tau}{2} = 2\sin\frac{6,27346\ldots}{2} = 0,00972\ldots;$$

tandis que les formules (57), (58) donneront, pour des valeurs de u

renfermées entre les limites $-\pi$, $+\pi$,

$$\frac{R}{2} > \left(\frac{5\pi}{2}\right)^{1+\frac{4u}{5\pi}} - \left(1+\frac{2u}{5\pi}\right) > \left(\frac{5\pi}{2}\right)^{\frac{1}{5}} - \left(1+\frac{2}{5}\right) > 0,110\ldots, \tag{64}$$

$$\frac{R}{2} > 1 + \frac{2(u-1)}{5\pi} > 1 - \frac{2}{5}\,\frac{\pi+1}{\pi} > 0,47\ldots. \tag{65}$$

D'ailleurs, si, en attribuant à r la valeur $\frac{5\pi}{2} - \pi = \frac{3\pi}{2}$, on fait varier l'angle t entre les limites

$$t_1 = \arccos(2\cos\tau) = (0,6482\ldots)\frac{\pi}{2}, \qquad t_2 = \frac{\pi}{2}, \tag{66}$$

la différence

$$r\sin t - t,$$

dont les maxima et minima correspondent à des valeurs nulles de $r\cos t - 1$, croîtra depuis $t = t_1$ jusqu'à $t = \arccos\frac{1}{r} = \arccos\frac{2}{3\pi}$, et décroîtra ensuite depuis cette dernière valeur de t jusqu'à $t = t_2$. Donc elle restera comprise entre la plus petite des quantités

$$r\sin t_1 - t_1 = (0,9526\ldots)\pi, \qquad r\sin t_2 - t_2 = \pi, \tag{67}$$

qui surpassent l'une et l'autre $\frac{\pi}{2}$, et la quantité

$$\sqrt{r^2-1} - \arccos\frac{1}{r} = (1,0339\ldots)\pi, \tag{68}$$

qui est inférieure à $\frac{3\pi}{2}$. Donc $\cos(r\sin t - t)$ sera négatif, et la formule (20) entraînera encore la condition (61), de laquelle on tirera

$$\frac{R}{2} > 1 - \frac{\pi}{2} = 1 - \frac{2}{5},$$

c'est-à-dire

$$\frac{R}{2} > 0,6. \tag{69}$$

De même, si, en attribuant à r la valeur $\frac{5\pi}{2} + \pi = \frac{7\pi}{2}$, on fait varier l'angle t entre les limites (66), la différence $r\sin t - t$ restera com-

prise entre la plus petite des quantités

$$r\sin t_1 - t_1 = (2,6549\ldots)\pi, \qquad r\sin t_2 - t_2 = 3\pi, \tag{70}$$

qui surpassent l'une et l'autre $\frac{5\pi}{2}$, et la quantité

$$\sqrt{r^2-1} - \arccos\frac{1}{r} = (3,0146\ldots)\pi, \tag{71}$$

qui est inférieure à $\frac{7\pi}{2}$. Donc $\cos(r\sin t - t)$ sera toujours négatif, et la formule (20) entraînera la condition (61), de laquelle on tirera

$$\frac{R}{2} > 1 + \frac{\pi}{2} = 1 + \frac{2}{5}$$

ou

$$R > 1,4. \tag{72}$$

Cela posé, puisque la valeur de R, donnée par la formule (63), reste inférieure à toutes celles qui vérifient les conditions (64), (65), (69), (72), il est clair que l'équation (32) admettra au moins une racine dont le module sera compris entre les limites

$$\frac{5\pi}{2} - \pi = \frac{3\pi}{2} = 4,71238\ldots \quad \text{et} \quad \frac{5\pi}{2} + \pi = \frac{7\pi}{2} = 10,99557\ldots. \tag{73}$$

D'autre part, si l'on suppose $n = 2$ ou $n > 2$, on tirera des formules (46) et (50)

$$\cos\tau \leqq 0,18736\ldots, \qquad 2\cos^2\tau \leqq 0,4962\ldots, \qquad 1+\sin\tau \geqq 1,9822\ldots \tag{74}$$

et, par suite,

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2} - \tau\right) \leqq 0,094\ldots, \qquad \frac{1}{2}\,\frac{2\cos^2\tau}{1+\sin\tau} \leqq 0,125\ldots; \tag{75}$$

puis on conclura des formules (49) et (52)

$$\frac{R}{2} < 2\sin(0,125\ldots) < 2(0,125\ldots) < 0,250\ldots. \tag{76}$$

Or, dans la même hypothèse, les formules (57), (58) donneront, pour des valeurs de u renfermées entre les limites $-\pi$, $+\pi$,

$$\frac{R}{\mathrm{r}} > \left(\frac{9\pi}{2}\right)^{1-\frac{4}{9}} - \left(1+\frac{2}{9}\right) > 3,133\ldots, \tag{77}$$

$$\frac{R}{\mathrm{r}} > 1 - \frac{2}{9}\,\frac{\pi+1}{\pi} > 0,707\ldots. \tag{78}$$

De plus, tandis que, dans la formule (59), on fera varier v entre les limites -1, $+1$, la somme des quantités

$$t, \quad \left(1 \mp \frac{\pi}{2}\right)(1-v)^2 \frac{\mathrm{r}\cos^2\tau}{1+\sin t}$$

demeurera inférieure à celle des quantités

$$\frac{\pi}{2}, \quad \left(1+\frac{2}{9}\right) 4\, \frac{\mathrm{r}\cos^2\tau}{1+\sqrt{1-4\cos^2\tau}} < (0,8015\ldots)\frac{\pi}{2}, \tag{79}$$

et par conséquent au nombre π. Donc, la différence entre l'expression $r\sin t - t$ et le produit $(2\pi \mp 1)\pi$ sera comprise entre les limites $\frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{2} - \pi = -\frac{\pi}{2}$; et, comme on aura par suite

$$\cos(r\sin t - t) < 0,$$

la formule (20) entrainera encore la condition (61), de laquelle on tirera

$$\frac{R}{\mathrm{r}} > 1 - \frac{2}{9} > 0,777\ldots. \tag{80}$$

Enfin, puisque la valeur de r, tirée de la formule (76), reste inférieure à toutes celles qui vérifient les conditions (77), (78), (80), nous pourrons affirmer que l'équation (32) admet au moins une racine de la forme

$$x = r(\cos t + \sqrt{-1}\sin t),$$

le module r étant compris entre les limites

$$(2n-1)\pi + \frac{\pi}{2}, \quad (2n+1)\pi + \frac{\pi}{2}, \tag{81}$$

et l'angle t entre les limites

$$\arccos \frac{2\,\mathrm{l}\left(2n\pi + \frac{\pi}{2}\right)}{2n\pi + \frac{\pi}{2}}, \quad \frac{\pi}{2}. \tag{82}$$

Lorsque la fonction $f(x)$ se présente sous forme réelle, l'équation (26) de la Leçon précédente entraine généralement la formule (94) de la même Leçon. Donc alors, si l'on pose

$$f[r(\cos t + \sqrt{-1}\sin t)] = R(\cos T + \sqrt{-1}\sin T), \tag{83}$$

R désignant une quantité positive et T un arc réel, on en conclura

$$f[r(\cos t - \sqrt{-1}\sin t)] = R(\cos T - \sqrt{-1}\sin T). \tag{84}$$

Cela posé, comme les deux expressions (83), (84) s'évanouissent toujours simultanément quand le module R devient nul, et ne peuvent s'évanouir dans le cas contraire, il est clair que, dans l'hypothèse dont il s'agit, l'équation (1) ne pourra offrir une racine imaginaire de la forme

$$x = r(\cos t + \sqrt{-1}\sin t),$$

sans offrir en même temps une racine imaginaire, conjuguée à la première, et de la forme

$$x = r(\cos t - \sqrt{-1}\sin t).$$

Il est bon toutefois d'observer que ces deux racines imaginaires de l'équation (1) se réduiraient à une seule racine réelle, positive ou négative, si l'on avait $t = 0$ ou $t = \pm\pi$.

De ce qu'on vient de dire, il résulte que, si la fonction $f(x)$ se présente sous forme réelle, les racines imaginaires de l'équation (1), combinées deux à deux, seront conjuguées entre elles, c'est-à-dire de la forme

$$x = r(\cos t + \sqrt{-1}\sin t), \quad x = r(\cos t - \sqrt{-1}\sin t), \tag{85}$$

et offriront le même module r. C'est ce qui arrive en particulier lorsqu'on prend pour $f(x)$ une fonction entière ou l'une des fonctions transcendantes

$$(86)\qquad e^x - x,\quad x - e^{-x},\quad e^{-x} + x^2,\quad x^2 - e^{-x},\quad \ldots.$$

Si, pour fixer les idées, on pose

$$f(x) = e^x - x,$$

l'équation (1), réduite à la formule (32), n'admettra évidemment que des racines imaginaires. En effet, x étant réel, la différence

$$e^x - x$$

ne pourrait s'évanouir que pour des valeurs positives de x, et pour de semblables valeurs on a évidemment

$$x < e^x < 1 + x + \frac{x^2}{1.2} + \ldots.$$

D'ailleurs on a prouvé ci-dessus que, la lettre n désignant un nombre entier quelconque, l'équation (32) admet toujours une racine imaginaire de la forme

$$x = r(\cos t + \sqrt{-1}\sin t),$$

le module r étant compris entre les limites (81), et l'angle t entre les limites (82). Donc cette équation admettra encore une autre racine de la même forme, et dans laquelle le module r restera compris entre les limites (81), l'angle t étant renfermé entre les suivantes :

$$(87)\qquad -\arccos\frac{2\,\mathrm{l}\left(2n\pi + \frac{\pi}{2}\right)}{2n\pi + \frac{\pi}{2}},\quad -\frac{\pi}{2}.$$

Lorsque les conditions énoncées dans l'un des théorèmes I, III ou IV et V se trouvent remplies, il devient facile de résoudre par approximation l'équation (1). Pour y parvenir, on considérera zéro ou l'expression imaginaire

$$\rho(\cos\tau + \sqrt{-1}\sin\tau)$$

comme une première valeur approchée de l'une des racines de l'équation (1); puis on supposera, dans la formule (91) ou (92) de la treizième Leçon, x égal à zéro ou au produit

$$\rho(\cos\tau + \sqrt{-1}\sin\tau),$$

et le nombre ρ assez petit pour que le module de $f(x + \Delta x)$ devienne inférieur au module R de $f(x)$. Cela posé, l'expression imaginaire

$$x + \Delta x$$

pourra être regardée comme une seconde valeur approchée de la racine que l'on cherche. Or l'opération par laquelle on aura déduit cette seconde valeur de la première, étant plusieurs fois répétée, fournira une troisième, une quatrième, ... valeur approchée. Soient maintenant

$$(88)\qquad x_1,\quad x_2,\quad x_3,\quad \ldots$$

les première, seconde, troisième, ... valeurs approchées de la racine dont il s'agit. Tandis que les modules des expressions

$$(89)\qquad f(x_1),\quad f(x_2),\quad f(x_3),\quad \ldots$$

deviendront de plus en plus petits, les termes de la série (88) convergeront vers une certaine limite qui sera nécessairement une valeur finie de x propre à vérifier l'équation (1).

Il est bon de rappeler que, dans les formules (91) et (92) de la Leçon précédente, T, T_1, ..., T_n désignent des angles réels qui sont déterminés, avec les modules R, R_1, ..., R_n, par les équations

$$(90)\qquad \left\{\begin{array}{l} f(x) \;\;= R\;(\cos T + \sqrt{-1}\sin T\;), \\ f'(x) \;= R_1(\cos T_1 + \sqrt{-1}\sin T_1), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ f^{(n)}(x) = R_n(\cos T_n + \sqrt{-1}\sin T_n). \end{array}\right.$$

Si la première valeur approchée de x est telle, que la quantité R soit très petite et la quantité R_1 sensiblement différente de zéro, alors, pour rendre le module de $f(x+\Delta x)$ inférieur au module de $f(x)$, il suffira ordinairement de poser $\rho = \frac{R_1}{R}$ dans la formule (91) de la treizième Leçon ou, en d'autres termes, il suffira de prendre

$$\Delta x = -\frac{R(\cos T + \sqrt{-1}\sin T)}{R_1(\cos T + \sqrt{-1}\sin T_1)} = -\frac{f(x)}{f'(x)}. \tag{91}$$

Effectivement, soient

$$x = r(\cos t + \sqrt{-1}\sin t) \tag{2}$$

la première valeur approchée de x;

$$\Delta x = \rho(\cos\upsilon + \sqrt{-1}\sin\upsilon) \tag{92}$$

un accroissement arbitraire attribué à cette première valeur, et $\Phi(\rho)$, $X(\rho)$ les fonctions réelles du module ρ qui vérifient l'équation

$$f[r(\cos t + \sqrt{-1}\sin t) + \rho(\cos\upsilon + \sqrt{-1}\sin\upsilon)] = \Phi(\rho) + \sqrt{-1}\,X(\rho), \tag{93}$$

dans le cas où l'on considère ce module comme seul variable. On tirera de la formule (39) de la treizième Leçon, en faisant $n=1$, et désignant par θ_1, θ_2 des nombres inférieurs à l'unité,

$$\left\{\begin{aligned} &f[r(\cos t + \sqrt{-1}\sin t) + \rho(\cos\upsilon + \sqrt{-1}\sin\upsilon)] \\ &\quad = f[r(\cos t + \sqrt{-1}\sin t)] \\ &\qquad + \rho(\cos\upsilon + \sqrt{-1}\sin\upsilon)\,f'[r(\cos t + \sqrt{-1}\sin t)] \\ &\qquad + \tfrac{1}{2}\rho^2[\Phi''(\theta_1\rho) + \sqrt{-1}\,X''(\theta_2\rho)], \end{aligned}\right. \tag{94}$$

ou, ce qui revient au même,

$$\left\{\begin{aligned} &f(x+\Delta x) \\ &\quad = R(\cos T + \sqrt{-1}\sin T) + \rho R_1[\cos(\upsilon + T_1) + \sqrt{-1}\sin(\upsilon + T_1)] \\ &\qquad\qquad + \tfrac{1}{2}\rho^2[\Phi''(\theta_1\rho) + \sqrt{-1}\,X''(\theta_2\rho)]; \end{aligned}\right. \tag{95}$$

puis, en supposant

$$\rho = \frac{R}{R_1}, \qquad \upsilon = \pi + T - T_1 \tag{96}$$

et, par conséquent,

$$\Delta x = \rho(\cos\upsilon + \sqrt{-1}\sin\upsilon) = -\frac{R(\cos T + \sqrt{-1}\sin T)}{R_1(\cos T_1 + \sqrt{-1}\sin T_1)} = -\frac{f(x)}{f'(x)},$$

on trouvera

$$\left\{\begin{aligned} f(x+\Delta x) &= \tfrac{1}{2}\rho^2[\Phi''(\theta_1\rho) + \sqrt{-1}\,X''(\theta_2\rho)] \\ &= \frac{1}{2}\frac{R^2}{R_1^2}\left[\Phi''\left(\theta_1\frac{R}{R_1}\right) + \sqrt{-1}\,X''\left(\theta_2\frac{R}{R_1}\right)\right]. \end{aligned}\right. \tag{97}$$

De plus, en différentiant deux fois par rapport à ρ la formule (93), et posant ensuite $\rho = 0$, on en conclura

$$\left\{\begin{aligned} &\Phi''(\rho) + \sqrt{-1}\,X''(\rho) \\ &\quad = (\cos\upsilon + \sqrt{-1}\sin\upsilon)^2 f''[r(\cos t + \sqrt{-1}\sin t) + \rho(\cos\upsilon + \sqrt{-1}\sin\upsilon)] \end{aligned}\right. \tag{98}$$

et

$$\left\{\begin{aligned} \Phi''(0) + \sqrt{-1}\,X''(0) &= (\cos\upsilon + \sqrt{-1}\sin\upsilon)^2 f''[r(\cos t + \sqrt{-1}\sin t)] \\ &= R_2[\cos(2\upsilon + T_2) + \sqrt{-1}\sin(2\upsilon + T_2)]. \end{aligned}\right. \tag{99}$$

D'ailleurs, le rapport $\frac{R}{R_1}$ étant très petit en vertu de l'hypothèse admise, le dernier membre de la formule (97) différera généralement très peu du produit

$$\frac{1}{2}\frac{R^2}{R_1^2}[\Phi''(0) + \sqrt{-1}\,X''(0)] = \frac{1}{2}\frac{R^2 R_2}{R_1^2}[\cos(2\upsilon + T_2) + \sqrt{-1}\sin(2\upsilon + T_2)].$$

Donc le module de $f(x+\Delta x)$ différera généralement très peu de la quantité

$$\frac{1}{2}\frac{R^2 R_2}{R_1^2} = \frac{R_2 R}{2R_1^2}R, \tag{100}$$

qui sera elle-même très petite par rapport à R, du moins lorsque le module R_2 conservera une valeur finie.

Pour montrer une application des principes ci-dessus établis, concevons que, l'équation (1) étant réduite à la formule (32), on veuille déterminer, parmi les racines de cette équation l'une de celles qui offrent un module inférieur au nombre $4,455\ldots$ (*voir* les pages 467 et 478). Alors on aura

$$f(x)=e^x-x,\qquad f'(x)=e^x-1,\qquad f''(x)=f'''(x)=\ldots=e^x, \tag{101}$$

et, en prenant zéro pour la première valeur approchée de la racine cherchée, on trouvera

$$f(0)=1,\qquad f'(0)=0,\qquad f''(0)=1. \tag{102}$$

Par suite les formules (90) donneront, pour une valeur nulle de x,

$$R=1,\qquad R_1=0,\qquad R_2=1,\qquad T=T_2=1; \tag{103}$$

puis, en réduisant, dans la formule (92) de la Leçon précédente, n à 2, et $2m+1$ à 1 ou à 3, on en tirera successivement

$$\Delta x=\rho\sqrt{-1},\qquad \Delta x=-\rho\sqrt{-1}. \tag{104}$$

En conséquence, la seconde valeur approchée de la racine cherchée sera

$$x+\Delta x=\rho\sqrt{-1}\quad\text{ou}\quad x+\Delta x=-\rho\sqrt{-1}, \tag{105}$$

ρ étant assez petit pour que le module de l'expression

$$\left\{\begin{array}{l} f(x+\Delta x)=\cos\rho-(\rho-\sin\rho)\sqrt{-1} \\ \text{ou} \\ f(x+\Delta x)=\cos\rho+(\rho-\sin\rho)\sqrt{-1}, \end{array}\right. \tag{106}$$

savoir

$$(1-2\rho\sin\rho+\rho^2)^{\frac{1}{2}}, \tag{107}$$

devienne inférieur au module de $f(x)$, c'est-à-dire à l'unité. Or cette condition sera évidemment remplie, si l'on prend $\rho\overline{\overline{<}}\frac{\pi}{2}$, attendu que, dans ce cas, on aura toujours $\sin\rho>\frac{\rho}{2}$. Supposons, pour fixer les idées, $\rho=\frac{\pi}{2}$. Alors le module (107) se trouvera réduit à

$$\left(1-\pi+\frac{\pi^2}{4}\right)^{\frac{1}{2}}=\frac{\pi}{2}-1=0,5707\ldots, \tag{108}$$

et la première des formules (105) à

$$x+\Delta x=\frac{\pi}{2}\sqrt{-1}=(1,5707\ldots)\sqrt{-1}. \tag{109}$$

Si maintenant on prend

$$x=r(\cos t+\sqrt{-1}\sin t)=\frac{\pi}{2}\sqrt{-1}, \tag{110}$$

on trouvera

$$\left\{\begin{array}{l} f(x)=e^{\frac{\pi}{2}\sqrt{-1}}-\frac{\pi}{2}\sqrt{-1}=\left(1-\frac{\pi}{2}\right)\sqrt{-1}, \\ f'(x)=e^{\frac{\pi}{2}\sqrt{-1}}-1\qquad=-1+\sqrt{-1}, \end{array}\right. \tag{111}$$

$$r=\frac{\pi}{2},\qquad t=\frac{\pi}{2}, \tag{112}$$

$$R=\frac{\pi}{2}-1,\qquad R_1=\sqrt{2},\qquad T=-\frac{\pi}{2},\qquad T_1=\frac{3\pi}{4}, \tag{113}$$

et les formules (91), (96) donneront

$$\Delta x=\rho(\cos\upsilon+\sqrt{-1}\sin\upsilon)=\frac{\pi-2}{4}(1-\sqrt{-1}), \tag{114}$$

$$\rho=\frac{\pi-2}{2\sqrt{2}}=0,4036\ldots,\qquad \upsilon=-\frac{\pi}{4}=-0,7583\ldots, \tag{115}$$

de sorte qu'on aura

$$x+\Delta x=\frac{\pi-2}{4}+\frac{\pi+2}{4}\sqrt{-1}=0,28539\ldots+(1,28539\ldots)\sqrt{-1}. \tag{116}$$

D'ailleurs, en posant $f''(x)=e^x$, on tirera de l'équation (98)

$$\left\{\begin{array}{l} \Phi''(\rho)+\sqrt{-1}\,X''(\rho) \\ \quad=e^{r\cos t+\rho\cos\upsilon}[\cos(r\sin t+\rho\sin\upsilon+2\upsilon)+\sqrt{-1}\sin(r\sin t+\rho\sin\upsilon+2\upsilon)]. \end{array}\right. \tag{117}$$

Par suite, la formule (97) donnera

$$\left\{\begin{array}{l} f(x+\Delta x) \\ \quad=\frac{1}{2}\rho^2e^{r\cos t}[e^{\theta_1\rho\cos\upsilon}\cos(r\sin t+\theta_1\rho\sin\upsilon+2\upsilon)+e^{\theta_2\rho\cos\upsilon}\sin(r\sin t+\theta_2\rho\sin\upsilon+2\upsilon)\sqrt{-1}]; \end{array}\right. \tag{118}$$

et, comme, en vertu de cette dernière, le module de $f(x+\Delta x)$ sera évidemment, pour des valeurs positives de $\cos \upsilon$, inférieur au produit

$$\rho^2 e^{r\cos t + \rho\cos\upsilon}, \tag{119}$$

on peut affirmer qu'à la valeur de $x+\Delta x$ fournie par l'équation (116) correspondra un module de $f(x+\Delta x)$ inférieur à la quantité

$$\rho^2 e^{\frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi}{2} + \rho\cos\frac{\pi}{4}} = \rho^2 e^{\frac{\rho}{\sqrt{2}}} = 0{,}2167\ldots \tag{120}$$

et, par conséquent, au module

$$R = \frac{\pi}{2} - 1 = 0{,}5707\ldots.$$

C'est, au reste, ce dont il est facile de s'assurer directement. Car, en posant

$$x + \Delta x = 0{,}28539\ldots + (1{,}28539\ldots)\sqrt{-1},$$

on trouvera

$$f(x+\Delta x) = e^{x+\Delta x} - (x+\Delta x) = 0{,}0890\ldots - (0{,}0089\ldots)\sqrt{-1} \tag{121}$$

et, par suite,

$$R + \Delta R = [(0{,}0890\ldots)^2 + (0{,}0089\ldots)^2]^{\frac{1}{2}} = 0{,}0891\ldots. \tag{122}$$

Donc on pourra prendre l'expression imaginaire

$$0{,}28539\ldots + 1{,}28539\ldots\sqrt{-1}$$

pour la troisième valeur approchée de la racine qu'il s'agissait d'obtenir. Enfin, si l'on se sert de l'équation (91) pour déduire une quatrième valeur approchée de la troisième, puis une cinquième de la quatrième, etc., et si l'on désigne par $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, \ldots$ ces diverses valeurs approchées, en y comprenant celles que nous avons

déjà calculées, on aura

$$\left\{\begin{array}{l} x_1 = 0, \\ x_2 = (1{,}5707\ldots)\sqrt{-1}, \\ x_3 = x_2 - \dfrac{f(x_2)}{f'(x_2)} = 0{,}2853\ldots + (1{,}2853\ldots)\sqrt{-1}, \\ x_4 = x_3 - \dfrac{f(x_3)}{f'(x_3)} = 0{,}3185\ldots + (1{,}3388\ldots)\sqrt{-1}, \\ x_5 = x_4 - \dfrac{f(x_4)}{f'(x_4)} = 0{,}3181\ldots + (1{,}3372\ldots)\sqrt{-1}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{array}\right. \tag{123}$$

tandis que les modules des expressions imaginaires

$$f(x_1),\quad f(x_2),\quad f(x_3),\quad f(x_4),\quad f(x_5),\quad \ldots$$

formeront la série décroissante

$$1,\quad 0{,}5707\ldots,\quad 0{,}0891\ldots,\quad 0{,}0023\ldots,\quad 0{,}0000\ldots,\quad \ldots; \tag{124}$$

et, comme les valeurs de x_5, x_6 ne différeront pas l'une de l'autre quand on se contentera de pousser l'approximation jusqu'aux décimales du quatrième ordre, nous sommes conduits à penser que la formule

$$x = 0{,}3181 + (1{,}3372)\sqrt{-1} \tag{125}$$

offrira la racine cherchée de l'équation (32) avec une exactitude qui s'étendra dans chaque terme jusqu'à la quatrième décimale. Au reste, pour lever toute incertitude à cet égard, il suffira de recourir au théorème VI et de suivre la méthode que nous allons indiquer.

Si, dans la fonction $f(x) = e^x - x$, on pose

$$x = p + q\sqrt{-1} \tag{38}$$

et

$$p = 0{,}3181 + \alpha,\qquad q = 1{,}3372 + \beta. \tag{126}$$

on trouvera

$$(127)\quad \left\{ \begin{aligned} f(x) &= f(p+q\sqrt{-1}) \\ &= (0{,}3181695\ldots + 1{,}3371818\ldots\sqrt{-1})\,e^{\alpha}(\cos\beta + \sqrt{-1}\sin\beta) \\ &\quad - [0{,}3181 + \alpha + (1{,}3372+\beta)\sqrt{-1}]. \end{aligned} \right.$$

Faisons d'ailleurs

$$(128)\qquad \alpha + \beta\sqrt{-1} = \rho(\cos\upsilon + \sqrt{-1}\sin\upsilon),$$

ρ désignant le module de $f(x)$, et soient θ_1, θ_2 deux nombres inférieurs à l'unité. En remplaçant, dans l'équation (12) de la huitième Leçon, x par ρ, $f(x)$ par $e^{\rho\cos\upsilon}\cos(\rho\sin\upsilon)$ ou par $e^{\rho\cos\upsilon}\sin(\rho\sin\upsilon)$, et θ par θ_1 ou par θ_2, on en tirera

$$(129)\quad \left\{ \begin{aligned} e^{\alpha}\cos\beta &= e^{\rho\cos\upsilon}\cos(\rho\sin\upsilon) \\ &= \tfrac{1}{2}\left[e^{\rho(\cos\upsilon+\sqrt{-1}\sin\upsilon)} + e^{\rho(\cos\upsilon-\sqrt{-1}\sin\upsilon)}\right] \\ &= 1 + \rho\cos\upsilon + \frac{\rho^2}{2}e^{\theta_1\rho\cos\upsilon}\cos(2\upsilon + \theta_1\rho\sin\upsilon), \\ e^{\alpha}\sin\beta &= e^{\rho\cos\upsilon}\sin(\rho\sin\upsilon) \\ &= \frac{1}{2\sqrt{-1}}\left[e^{\rho(\cos\upsilon+\sqrt{-1}\sin\upsilon)} - e^{\rho(\cos\upsilon-\sqrt{-1}\sin\upsilon)}\right] \\ &= \rho\sin\upsilon + \frac{\rho^2}{2}e^{\theta_2\rho\cos\upsilon}\sin(2\upsilon + \theta_2\rho\sin\upsilon) \end{aligned} \right.$$

ou, ce qui revient au même,

$$(130)\quad \left\{ \begin{aligned} e^{\alpha}\cos\beta &= 1 + \alpha + \tfrac{1}{2}(\alpha^2+\beta^2)e^{\theta_1\alpha}\cos(2\upsilon + \theta_1\beta), \\ e^{\alpha}\sin\beta &= \beta + \tfrac{1}{2}(\alpha^2+\beta^2)e^{\theta_2\alpha}\sin(2\upsilon + \theta_2\beta). \end{aligned} \right.$$

Donc, en posant, pour abréger,

$$(131)\quad \left\{ \begin{aligned} 0{,}0000695\ldots - 0{,}6818304\ldots\alpha - 1{,}3371818\ldots\beta &= \mathcal{A}, \\ -0{,}0000181\ldots + 1{,}3371818\ldots\alpha - 0{,}6818304\ldots\beta &= \mathcal{B}, \end{aligned} \right.$$

$$(132)\quad \left\{ \begin{aligned} \frac{\alpha^2+\beta^2}{2}[0{,}3181695\ldots e^{\theta_1\alpha}\cos(2\upsilon+\theta_1\beta) - 1{,}3371818\ldots e^{\theta_2\alpha}\sin(2\upsilon+\theta_2\beta)] &= \gamma, \\ \frac{\alpha^2+\beta^2}{2}[1{,}3371818\ldots e^{\theta_1\alpha}\cos(2\upsilon+\theta_1\beta) + 0{,}3181695\ldots e^{\theta_2\alpha}\sin(2\upsilon+\theta_2\beta)] &= \delta, \end{aligned} \right.$$

on pourra réduire la formule (127) à

$$(133)\qquad f(p+q\sqrt{-1}) = \mathcal{A} + \gamma + (\mathcal{B} + \delta)\sqrt{-1}.$$

Soient maintenant

$$\mathrm{R},\quad \mathcal{R},\quad \varsigma$$

les modules des expressions imaginaires

$$f(p+q\sqrt{-1}),\quad \mathcal{A} + \mathcal{B}\sqrt{-1},\quad \gamma + \delta\sqrt{-1};$$

en sorte qu'on ait, non seulement

$$(134)\qquad f(x) = f(p+q\sqrt{-1}) = \mathrm{R}(\cos\mathrm{T} + \sqrt{-1}\sin\mathrm{T}),$$

mais encore

$$(135)\quad \left\{ \begin{aligned} \mathcal{A} + \mathcal{B}\sqrt{-1} &= \mathcal{R}(\cos\varpi + \sqrt{-1}\sin\varpi), \\ \gamma + \delta\sqrt{-1} &= \varsigma(\cos\omega + \sqrt{-1}\sin\omega), \end{aligned} \right.$$

ϖ et ω désignant des arcs réels. L'équation (133) donnera

$$(136)\qquad \mathrm{R}\cos\mathrm{T} = \mathcal{R}\cos\varpi + \varsigma\cos\omega,\qquad \mathrm{R}\sin\mathrm{T} = \mathcal{R}\sin\varpi + \varsigma\sin\omega;$$

et le carré du module R, déterminé par la formule

$$(137)\qquad \mathrm{R}^2 = \mathcal{R}^2 + 2\mathcal{R}\varsigma\cos(\varpi - \omega) + \varsigma^2,$$

restera évidemment compris entre les limites

$$(138)\qquad (\mathcal{R}-\varsigma)^2,\quad (\mathcal{R}+\varsigma)^2.$$

Donc le module R sera lui-même compris entre les limites

$$(139)\qquad \mathcal{R}-\varsigma,\quad \mathcal{R}+\varsigma,$$

si l'on a $\varsigma < \mathcal{R}$, et entre les limites

$$(140)\qquad \varsigma-\mathcal{R},\quad \varsigma+\mathcal{R},$$

si l'on a $\varsigma > \mathcal{R}$; d'où il est aisé de conclure que la différence

$$(141)\qquad \mathrm{R} - \mathcal{R}$$

offrira, dans tous les cas, une valeur numérique inférieure à ς. D'autre part, si l'on attribue aux quantités α, β des valeurs positives qui ne surpassent pas 0,0001, les valeurs correspondantes de γ, δ, tirées des formules (132), resteront comprises entre les limites

$$-0{,}00000002, \quad +0{,}00000002,$$

et par conséquent le module

$$\varsigma = (\gamma^2 + \delta^2)^{\frac{1}{2}} \tag{142}$$

restera inférieur à

$$(0{,}00000002)\sqrt{2} < 0{,}00000003.$$

Donc alors le module R ne pourra différer du module $\mathcal{R}$ que par le huitième chiffre décimal. Or le module

$$\mathcal{R} = (\mathcal{A}^2 + \mathcal{B}^2)^{\frac{1}{2}} \tag{143}$$

s'évanouira si l'on prend

$$\left\{ \begin{array}{l} 0{,}0000695\ldots - 0{,}6818304\ldots\alpha - 1{,}3371818\ldots\beta = \mathcal{A} = 0, \\ -0{,}0000181\ldots + 1{,}3371818\ldots\alpha - 0{,}6818304\ldots\beta = \mathcal{B} = 0 \end{array} \right. \tag{144}$$

ou, ce qui revient au même,

$$\alpha = 0{,}0000317\ldots, \quad \beta = 0{,}0000357\ldots. \tag{145}$$

Mais, si l'on attribue à la variable α l'une des valeurs

$$\alpha = 0, \tag{146}$$

$$\alpha = 0{,}0001, \tag{147}$$

en supposant β compris entre les limites

$$\beta = 0, \tag{148}$$

$$\beta = 0{,}0001, \tag{149}$$

ou à la variable β une des valeurs (148), (149), en supposant α com-

pris entre les limites (146), (147), le module $\mathcal{R}$, réduit à l'une des formes

$$\mathcal{R} = [(0{,}0000695\ldots - 1{,}3371818\ldots\beta)^2 + (0{,}0000181\ldots + 0{,}6818304\ldots\beta)^2]^{\frac{1}{2}}, \tag{150}$$

$$\mathcal{R} = [(0{,}0000014\ldots - 1{,}3371818\ldots\beta)^2 + (0{,}0001156\ldots - 0{,}6818304\ldots\beta)^2]^{\frac{1}{2}}, \tag{151}$$

$$\mathcal{R} = [(0{,}0000695\ldots - 0{,}6818304\ldots\alpha)^2 + (0{,}0000181\ldots - 1{,}3371818\ldots\alpha)^2]^{\frac{1}{2}}, \tag{152}$$

$$\mathcal{R} = [(0{,}0000642\ldots + 0{,}6818304\ldots\alpha)^2 + (0{,}0000862\ldots - 1{,}3371818\ldots\alpha)^2]^{\frac{1}{2}}, \tag{153}$$

surpassera évidemment l'une des quantités

$$0{,}0000181, \tag{154}$$

$$0{,}0001156 - (0{,}6818304)(0{,}0001) = 0{,}0000475\ldots, \tag{155}$$

$$0{,}0000695 - (0{,}6818304)(0{,}0001) = 0{,}0000014\ldots, \tag{156}$$

$$0{,}0000641\ldots. \tag{157}$$

Donc, par suite, le module R restera inférieur au nombre 0,00000003, si l'on prend

$$\left\{ \begin{array}{l} p = 0{,}3181 + 0{,}0000321 = 0{,}3181321\ldots, \\ q = 1{,}3372 + 0{,}0000356 = 1{,}3372356\ldots; \end{array} \right. \tag{158}$$

mais il deviendra supérieur au nombre 0,0000014..., si l'on fait varier la quantité p entre les limites

$$p_1 = 0{,}3181, \quad p_2 = 0{,}3181 + 0{,}0001 = 0{,}3182, \tag{159}$$

en attribuant à q l'une des valeurs

$$q_1 = 1{,}3372, \quad q_2 = 1{,}3372 + 0{,}0001 = 1{,}3373, \tag{160}$$

ou la quantité q entre les limites q_1, q_2, en attribuant à p l'une des valeurs p_1, p_2. Donc, en vertu du théorème VI, et attendu que le nombre 0,0000014... surpasse le nombre 0,00000003..., l'équation (32) admettra une racine imaginaire

$$x = p + q\sqrt{-1},$$

dans laquelle la valeur de p sera renfermée entre les limites 0,3181, 0,3182, et la valeur de q entre les limites 1,3372, 1,3373. Cette racine sera donc fournie par l'équation (125) avec une exactitude qui s'étendra, dans chaque terme du second membre, jusqu'à la cinquième décimale. Il y a plus : les valeurs de α, β, correspondantes à la racine dont il s'agit, seront inférieures au nombre 0,0001 et propres à vérifier l'équation $R = 0$ ou, ce qui revient au même, les deux formules

$$\mathcal{A} + \gamma = 0, \qquad \mathcal{B} + \delta = 0. \tag{161}$$

Or, si l'on substitue, dans ces dernières, les valeurs de $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ tirées des équations (131), on en conclura

$$\left\{ \begin{aligned} \alpha &= 0,0000317\ldots + (0,302\ldots)\gamma - (0,593\ldots)\delta, \\ \beta &= 0,0000357\ldots + (0,593\ldots)\delta + (0,302\ldots)\gamma. \end{aligned} \right. \tag{162}$$

Donc, puisque γ et δ resteront compris entre les limites

$$-0,00000002, \quad +0,00000002,$$

les valeurs de α, β, fournies par les équations (145), seront exactes jusqu'à la septième décimale, et l'on pourra en dire autant de la racine x déterminée par l'équation

$$x = 0,3181317\ldots + (1,3372357\ldots)\sqrt{-1}. \tag{163}$$

Si, dans les calculs ci-dessus développés, on substituait la seconde des équations (105) à la première, alors à la place de la formule (163) on obtiendrait la suivante

$$x = 0,3181317\ldots - (1,3372357\ldots)\sqrt{-1}, \tag{164}$$

qui offre une seconde racine imaginaire de l'équation (32). Cette seconde racine et celle que détermine la formule (163), étant conjuguées l'une à l'autre, correspondent à un seul module renfermé entre les limites 0 et 4,455....

Ce qui précède suffit pour montrer comment, à l'aide d'approximations successives, on peut déterminer aussi exactement qu'on le voudra les racines réelles ou imaginaires d'une équation algébrique

ou transcendante, et même comment on peut calculer les limites des erreurs commises. La méthode de résolution que nous avons présentée est celle qui a été donnée par M. Legendre dans la seconde édition de la *Théorie des nombres*, et qui lui a paru devoir s'appliquer à toutes sortes d'équations algébriques ou transcendantes; mais il est clair qu'elle cesserait d'être applicable si la fonction $f(x)$ ne remplissait pas les conditions énoncées dans l'un des théorèmes I, III, IV, V, VI. On n'en sera pas surpris si l'on observe qu'on peut attribuer à $f(x)$ une forme telle, que l'équation (1) n'admette point de racines finies soit réelles, soit imaginaires. C'est ce qui arrivera en particulier si l'on suppose

$$f(x) = e^x, \qquad f(x) = e^{x\sqrt{-1}}, \qquad f(x) = e^{x^2}, \qquad \ldots.$$

Dans des cas semblables, on peut bien encore assigner à la variable x une suite de valeurs

$$x_1, \quad x_2, \quad x_3, \quad \ldots \tag{88}$$

tellement choisies que les valeurs correspondantes du module de $f(x)$ soient de plus en plus petites; mais les modules des différents termes de la série (88), au lieu de converger vers une limite finie, croissent au delà de toute limite. (*Voir*, au reste, sur la résolution des équations numériques, l'Ouvrage cité de M. Legendre et un Mémoire de M. Fourier, imprimé dans le Tome VII des *Mémoires de l'Académie des Sciences*.)

Nous avons déjà remarqué que, dans le cas où $f(x)$ désigne une fonction entière du degré n, semblable à celle que détermine la formule (4), cette fonction est décomposable en autant de facteurs du premier degré qu'il y a d'unités dans le nombre n. Si, de plus, la fonction $f(x)$ se présente sous forme réelle ou, en d'autres termes, si les constantes $a_0, a_1, \ldots, a_n$ comprises dans le second membre de la formule (4) sont toutes réelles, l'équation (1) n'admettra que des racines réelles ou des racines imaginaires conjuguées deux à deux. Alors à chaque racine réelle correspondra un facteur réel du premier degré, tandis que, à deux racines imaginaires conjuguées et de la forme

$$r(\cos t + \sqrt{-1}\sin t), \quad r(\cos t - \sqrt{-1}\sin t),$$

correspondront deux facteurs imaginaires

$$x - r\cos t - r\sin t\sqrt{-1}, \quad x - r\cos t + r\sin t\sqrt{-1},$$

qui seront encore conjugués l'un à l'autre et donneront pour produit un facteur réel du second degré, savoir

$$(x - r\cos t)^2 + r^2\sin^2 t = x^2 - 2r\cos t + r^2.$$

On peut donc énoncer la proposition suivante :

Toute fonction réelle et entière de la variable x est décomposable en facteurs réels du premier ou du second degré. [*Voir*, pour de plus amples développements, le Chapitre X de l'*Analyse algébrique* [1].]

[1] *OEuvres de Cauchy*, S. II, T. III.

QUINZIÈME LEÇON.

DÉVELOPPEMENT D'UNE FONCTION DE x, QUI DEVIENT INFINIE POUR $x = a$, SUIVANT LES PUISSANCES ASCENDANTES DE $x - a$. DÉCOMPOSITION DES FRACTIONS RATIONNELLES.

Soient

$$x = r(\cos t + \sqrt{-1}\sin t) \tag{1}$$

une variable réelle ou imaginaire dont r désigne le module ou la valeur numérique, a une valeur particulière de cette variable et $f(x)$ une fonction qui devienne infinie pour $x = a$. La valeur a de x sera une racine de l'équation

$$\frac{1}{f(x)} = 0; \tag{2}$$

et l'on dira que cette équation admet h racines égales à a, h étant un nombre entier quelconque, si le produit

$$(x - a)^h f(x) \tag{3}$$

acquiert, pour $x = a$, une valeur finie différente de zéro. Alors, pour développer immédiatement la fonction $f(x)$ suivant les puissances ascendantes de $x - a$, on ne pourra plus se servir de l'équation (40) (page 448), dont le second membre, comprenant des termes infinis, se présentera généralement sous une forme indéterminée; mais cette équation pourra encore être appliquée au développement de l'expression (3) considérée comme fonction de la variable x. D'ailleurs, si, en nommant ρ le module de $x - a$, et $\varphi(\rho)$, $\chi(\rho)$ deux fonctions réelles de ce module, on pose

$$x - a = \rho(\cos\upsilon + \sqrt{-1}\sin\upsilon), \tag{4}$$

$$(x - a)^h f(x) = \mathfrak{F}(x), \tag{5}$$

$$\mathfrak{F}[a + \rho(\cos\upsilon + \sqrt{-1}\sin\upsilon)] = \varphi(\rho) + \sqrt{-1}\,\chi(\rho), \tag{6}$$

on tirera de l'équation citée

$$(7)\quad \left\{\begin{aligned} \mathfrak{F}(x) = \mathfrak{F}(a) &+ \frac{x-a}{1}\mathfrak{F}'(a) + \frac{(x-a)^2}{1.2}\mathfrak{F}''(a) + \ldots \\ &+ \frac{(x-a)^{n-1}}{1.2.3\ldots(n-1)}\mathfrak{F}^{(n-1)}(a) \\ &+ \frac{(x-a)^n}{1.2.3\ldots n}\,\frac{\varphi^{(n)}(\theta_1\rho)+\sqrt{-1}\,\chi^{(n)}(\theta_2\rho)}{(\cos\upsilon+\sqrt{-1}\sin\upsilon)^n}, \end{aligned}\right.$$

θ_1, θ_2 désignant deux nombres inférieurs à l'unité. Si maintenant on divise par $(x-a)^h$ les deux membres de la formule (7), on en conclura

$$(8)\quad \left\{\begin{aligned} f(x) = \frac{\mathfrak{F}(a)}{(x-a)^h} &+ \frac{1}{2}\,\frac{\mathfrak{F}'(a)}{(x-a)^{h-1}} + \frac{1}{1.2}\,\frac{\mathfrak{F}''(a)}{(x-a)^{h-2}} + \ldots \\ &+ \frac{1}{1.2.3\ldots(h-1)}\,\frac{\mathfrak{F}^{(h-1)}(a)}{x-a} \\ &+ \frac{\mathfrak{F}^{(h)}(a)}{1.2.3\ldots h} + \frac{\mathfrak{F}^{(h+1)}(a)}{1.2.3\ldots h(h+1)}(x-a) + \ldots \\ &+ \frac{\mathfrak{F}^{(n-1)}(a)}{1.2.3\ldots(n-1)}(x-a)^{n-h-1} \\ &+ \frac{\varphi^{(n)}(\theta_1\rho)+\sqrt{-1}\,\chi^{(n)}(\theta_2\rho)}{(\cos\upsilon+\sqrt{-1}\sin\upsilon)^n}\,\frac{(x-a)^{n-h}}{1.2.3\ldots n}. \end{aligned}\right.$$

A l'aide de cette dernière formule, on pourra développer encore $f(x)$ suivant les puissances entières et ascendantes de $x-a$. Seulement, les h premiers termes du développement, dont la somme, que j'appellerai $\psi(x)$, sera

$$(9)\quad \left\{\begin{aligned} \psi(x) &= \frac{\mathfrak{F}(a)}{(x-a)^h} + \frac{1}{2}\,\frac{\mathfrak{F}'(a)}{(x-a)^{h-1}} + \frac{1}{1.2}\,\frac{\mathfrak{F}''(a)}{(x-a)^{h-2}} + \ldots \\ &\qquad + \frac{1}{1.2.3\ldots(h-1)}\,\frac{\mathfrak{F}^{(h-1)}(a)}{x-a} \\ &= (x-a)^{-h}\mathfrak{F}(a) + \frac{(x-a)^{-h+1}}{1}\mathfrak{F}'(a) + \frac{(x-a)^{-h+2}}{1.2}\mathfrak{F}''(a) + \ldots \\ &\qquad + \frac{(x-a)^{-1}}{1.2.3\ldots(h-1)}\mathfrak{F}^{(h-1)}(a), \end{aligned}\right.$$

renfermeront des puissances négatives de $x-a$. D'autre part, si,

dans l'équation (8), on prend $n=h$, elle donnera simplement

$$(10)\quad \left\{\begin{aligned} f(x) = \frac{\mathfrak{F}(x)}{(x-a)^h} &+ \frac{1}{2}\,\frac{\mathfrak{F}'(a)}{(x-a)^{h-1}} + \frac{1}{1.2}\,\frac{\mathfrak{F}''(a)}{(x-a)^{h-2}} + \ldots \\ &+ \frac{1}{1.2.3\ldots(h-1)}\,\frac{\mathfrak{F}^{(h-1)}(a)}{x-a} \\ &+ \frac{1}{1.2.3\ldots h}\,\frac{\varphi^{(h)}(\theta_1\rho)+\sqrt{-1}\,\chi^{(h)}(\theta_2\rho)}{(\cos\upsilon+\sqrt{-1}\sin\upsilon)^h} \end{aligned}\right.$$

ou

$$(11)\quad f(x) = \psi(x) + \frac{\varphi^{(h)}(\theta_1\rho)+\sqrt{-1}\,\chi^{(h)}(\theta_2\rho)}{1.2.3\ldots h}(\cos h\upsilon - \sqrt{-1}\sin h\upsilon);$$

et par conséquent, si l'on pose

$$(12)\quad f(x) - \psi(x) = \varpi(x)$$

ou, ce qui revient au même,

$$(13)\quad f(x) = \psi(x) + \varpi(x),$$

on aura

$$(14)\quad \varpi(x) = \frac{\varphi^{(h)}(\theta_1\rho)+\sqrt{-1}\,\chi^{(h)}(\theta_2\rho)}{1.2.3\ldots h}(\cos h\upsilon - \sqrt{-1}\sin\upsilon).$$

Il est important d'observer que la fonction $\varpi(x)$, déterminée par l'équation (14), acquerra, pour $x=a$, la valeur suivante

$$(15)\quad \varpi(x) = \frac{\varphi^{(h)}(0)+\sqrt{-1}\,\chi^{(h)}(0)}{1.2.3\ldots h} = \frac{\mathfrak{F}^{(h)}(a)}{1.2.3\ldots h},$$

qui sera, en général, une valeur finie. C'est ce qui arrivera, en particulier, si l'on suppose

$$(16)\quad f(x) = \frac{\mathrm{f}(x)}{\mathrm{F}(x)},$$

$\mathrm{f}(x)$ et $\mathrm{F}(x)$ désignant deux fonctions entières de la variable x, c'est-à-dire si la fonction $f(x)$ devient une fraction rationnelle. Alors, en représentant par $a, b, c, \ldots$ les racines distinctes de l'équation

$$(17)\quad \mathrm{F}(x) = 0,$$

par h le nombre des racines égales à a, par k le nombre des racines égales à b, par l le nombre des racines égales à c, ..., et par $\mathfrak{K}$ un coefficient constant, on trouvera

$$\text{(18)} \qquad \mathrm{F}(x) = \mathfrak{K}(x-a)^h (x-b)^k (x-c)^l \ldots$$

et, par suite,

$$\text{(19)} \qquad \left\{ \begin{aligned} \mathcal{F}(x) = (x-a)^h f(x) &= \frac{\mathrm{f}(x)}{\mathfrak{K}(x-b)^k (x-c)^l \ldots} \\ &= \frac{1}{\mathfrak{K}}(x-b)^{-k}(x-c)^{-l} \ldots \mathrm{f}(x). \end{aligned} \right.$$

Or, en différentiant h fois par rapport à x le dernier membre de la formule (19), on en déduira évidemment une valeur de $\mathcal{F}^{(h)}(x)$ qui ne deviendra pas infinie pour $x = a$. D'autre part, si l'on fait, pour abréger,

$$\text{(20)} \qquad \left\{ \begin{aligned} &\mathcal{F}(a) = \mathrm{A}, \qquad \frac{\mathcal{F}'(a)}{1} = \mathrm{A}_1, \qquad \frac{\mathcal{F}''(a)}{1.2} = \mathrm{A}_2, \qquad \ldots, \\ &\frac{\mathcal{F}^{(h-1)}(a)}{1.2.3\ldots(h-1)} = \mathrm{A}_{h-1}, \qquad \psi(x) = \mathrm{U}, \end{aligned} \right.$$

les formules (9) et (13) donneront

$$\text{(21)} \qquad \mathrm{U} = \frac{\mathrm{A}}{(x-a)^h} + \frac{\mathrm{A}_1}{(x-a)^{h-1}} + \frac{\mathrm{A}_2}{(x-a)^{h-2}} + \ldots + \frac{\mathrm{A}_{h-1}}{x-a},$$

$$\text{(22)} \qquad \frac{\mathrm{f}(x)}{\mathrm{F}(x)} = \mathrm{U} + \varpi(x).$$

Donc, a désignant une des racines de l'équation (17), et h le nombre des racines égales à a, la fraction rationnelle $\frac{\mathrm{f}(x)}{\mathrm{F}(x)}$ pourra être décomposée en deux parties, dont l'une U, déterminée par la formule (21), sera la somme de plusieurs fractions qui offriront des numérateurs constants, et qui auront pour dénominateurs les puissances de $x - a$ d'un degré inférieur à h, tandis que l'autre partie

$$\text{(23)} \qquad \varpi(x) = \frac{\mathrm{f}(x)}{\mathrm{F}(x)} - \mathrm{U}$$

conservera une valeur finie pour toutes les valeurs finies de la variable x.

Soient maintenant, dans la fraction (16), m le degré du numérateur $\mathrm{f}(x)$, et n le degré du dénominateur $\mathrm{F}(x)$. Soient de plus V, W, ... des fonctions rationnelles de x, semblables à U, savoir celles dans lesquelles se transforme la fonction $\psi(x)$ déterminée par les équations (5) et (9), quand on substitue à la racine a l'une des racines b, c, ..., et au nombre entier h l'un des nombres l, k, ... Les fonctions U, V, W, ..., déterminées par des équations de la forme

$$\text{(24)} \qquad \left\{ \begin{aligned} \mathrm{U} &= \frac{\mathrm{A}}{(x-a)^h} + \frac{\mathrm{A}_1}{(x-a)^{h-1}} + \ldots + \frac{\mathrm{A}_{h-1}}{x-a}, \\ \mathrm{V} &= \frac{\mathrm{B}}{(x-b)^k} + \frac{\mathrm{B}_1}{(x-b)^{k-1}} + \ldots + \frac{\mathrm{B}_{k-1}}{x-b}, \\ \mathrm{W} &= \frac{\mathrm{C}}{(x-c)^l} + \frac{\mathrm{C}_1}{(x-c)^{l-1}} + \ldots + \frac{\mathrm{C}_{l-1}}{x-c}, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{aligned} \right.$$

ne pourront devenir infinies pour des valeurs finies de x qu'autant que l'on supposera, dans la fonction U, $x = a$; dans la fonction V, $x = b$; dans la fonction W, $x = c$, ...; et, comme les différences

$$\text{(25)} \qquad \frac{\mathrm{f}(x)}{\mathrm{F}(x)} - \mathrm{U}, \quad \frac{\mathrm{f}(x)}{\mathrm{F}(x)} - \mathrm{V}, \quad \frac{\mathrm{f}(x)}{\mathrm{F}(x)} - \mathrm{W}, \quad \ldots$$

acquerront, au contraire, des valeurs finies, la première pour $x = a$, la seconde pour $x = b$, la troisième pour $x = c$, ..., il est clair que, si l'on fait

$$\text{(26)} \qquad \frac{\mathrm{f}(x)}{\mathrm{F}(x)} - \mathrm{U} - \mathrm{V} - \mathrm{W} - \ldots = \mathrm{Q},$$

la fonction Q ne deviendra jamais infinie pour aucune valeur finie de x. D'ailleurs, en réduisant au même dénominateur les fractions comprises dans les seconds membres des équations (24), on parviendra sans peine à transformer la somme $\mathrm{U} + \mathrm{V} + \mathrm{W} + \ldots$ en une nouvelle fraction qui aura pour dénominateur le produit

$$\text{(27)} \qquad (x-a)^h (x-b)^k (x-c)^l \ldots;$$

et, en multipliant par la constante ϖ les deux termes de cette nouvelle fraction, on trouvera

$$U + V + W + \ldots = \frac{R}{F(x)}, \tag{28}$$

R désignant une fonction entière de x d'un degré inférieur à n. Cela posé, la fonction Q, déterminée par la formule (26), se présentera sous la forme rationnelle

$$Q = \frac{f(x) - R}{F(x)}; \tag{29}$$

et, puisqu'elle devra rester finie pour toutes les valeurs finies de la variable x, il faudra nécessairement qu'elle se réduise à une fonction entière de cette variable. Enfin, comme on tire de l'équation (29)

$$f(x) = Q\,F(x) + R, \tag{30}$$

les deux fonctions entières Q et R, dont la seconde est d'un degré inférieur à celui de $F(x)$, représenteront évidemment le quotient et le reste de la division de $f(x)$ par $F(x)$. Donc la fraction rationnelle qui aura ce reste pour numérateur et pour dénominateur $F(x)$ sera, en vertu de la formule (28), équivalente à la somme des fractions comprises dans les seconds membres des équations (24).

Dans le cas où le degré m de $f(x)$ est inférieur au degré n de $F(x)$, le quotient Q s'évanouit, et l'on a par suite

$$f(x) = R.$$

Alors on conclut des équations (24) et (28)

$$\left\{\begin{aligned} \frac{f(x)}{F(x)} = {} & \frac{A}{(x-a)^h} + \frac{A_1}{(x-a)^{h-1}} + \ldots + \frac{A_{h-1}}{x-a} \\ & + \frac{B}{(x-b)^k} + \frac{B_1}{(x-b)^{k-1}} + \ldots + \frac{B_{k-1}}{x-b} \\ & + \frac{C}{(x-c)^l} + \frac{C_1}{(x-c)^{l-1}} + \ldots + \frac{C_{l-1}}{x-c} \\ & + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right. \tag{31}$$

La formule (31) offre évidemment le moyen de décomposer la fraction rationnelle $\dfrac{f(x)}{F(x)}$ en *fractions simples*, c'est-à-dire en fractions qui ont pour numérateurs des constantes et pour dénominateurs des puissances entières des facteurs simples $x - a$, $x - b$, $x - c$, ... La même formule fournit, à ce sujet, le théorème que nous allons énoncer.

THÉORÈME I. — *Soient*

$$\frac{f(x)}{F(x)} \tag{16}$$

une fraction rationnelle dans laquelle le degré du dénominateur surpasse le degré du numérateur, et $a, b, c, \ldots$ *les racines réelles ou imaginaires de l'équation*

$$F(x) = 0. \tag{17}$$

Pour décomposer la fraction (16) *en fractions simples, il suffira de la développer : 1° suivant les puissances ascendantes de* $x - a$; *2° suivant les puissances ascendantes de* $x - b$; *3° suivant les puissances ascendantes de* $x - c$, ..., *puis de faire la somme des termes qui, dans les divers développements, deviendront infinis quand on supposera* $x = a$, $x = b$, $x = c$, ...

Si le quotient Q cesse de s'évanouir, alors des équations (24) et (26) on déduira la formule

$$\left\{\begin{aligned} \frac{f(x)}{F(x)} = Q & + \frac{A}{(x-a)^h} + \frac{A_1}{(x-a)^{h-1}} + \ldots + \frac{A_{h-1}}{x-a} \\ & + \frac{B}{(x-b)^k} + \frac{B_1}{(x-b)^{k-1}} + \ldots + \frac{B_{k-1}}{x-b} \\ & + \frac{C}{(x-c)^l} + \frac{C_1}{(x-c)^{l-1}} + \ldots + \frac{C_{l-1}}{x-a} \\ & + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{aligned}\right. \tag{32}$$

qui servira encore à décomposer la fraction (16) en fractions simples, et l'on devra substituer au théorème I la proposition suivante.

THÉORÈME II. — *Soient*

$$\frac{f(x)}{F(x)} \tag{16}$$

une fraction rationnelle, dans laquelle le degré du numérateur devienne égal ou supérieur au degré du dénominateur, et $a, b, c, \ldots$ *les racines de l'équation* (17). *Pour décomposer la fraction* (16) *en fractions simples, il suffira de la développer :* 1° *suivant les puissances ascendantes de* $x-a$; 2° *suivant les puissances ascendantes de* $x-b$; 3° *suivant les puissances ascendantes de* $x-c, \ldots$, *puis d'ajouter au quotient de la division de* $f(x)$ *par* $F(x)$ *la somme des termes qui, dans les divers développements, deviendront infinis pour* $x=a$, *ou pour* $x=b$, *ou pour* $x=c, \ldots$.

Dans le cas particulier où l'équation (17) a toutes ses racines inégales entre elles, on trouve

$$h=k=l=\ldots=1, \tag{33}$$

$$F(x)=\mathfrak{K}(x-a)(x-b)(x-c)\ldots; \tag{34}$$

et les formules (31), (32) se réduisent aux deux suivantes :

$$\frac{f(x)}{F(x)}=\frac{A}{x-a}+\frac{B}{x-b}+\frac{C}{x-c}+\ldots, \tag{35}$$

$$\frac{f(x)}{F(x)}=Q+\frac{A}{x-a}+\frac{B}{x-b}+\frac{C}{x-c}+\ldots. \tag{36}$$

Dans le même cas, on tirera de l'équation (5)

$$\mathcal{F}(x)=(x-a)f(x)=\frac{(x-a)f(x)}{F(x)}, \tag{37}$$

et par conséquent, pour déterminer le coefficient A ou $\mathcal{F}(a)$, il suffira de faire évanouir $x-a$ dans la fraction

$$\frac{(x-a)f(x)}{F(x)}.$$

Mais alors cette fraction, se présentant sous la forme $\frac{0}{0}$, devra être

[en vertu de la formule (6) de la page 317] remplacée par le rapport

$$\frac{(x-a)f'(x)+f(x)}{F'(x)},$$

que l'on pourra même réduire à

$$\frac{f(x)}{F'(x)}. \tag{38}$$

On aura donc

$$A=\frac{f(a)}{F'(a)}. \tag{39}$$

On trouvera pareillement

$$B=\frac{f(b)}{F'(b)}, \qquad C=\frac{f(c)}{F'(c)}, \qquad \ldots \tag{40}$$

Enfin, si l'on a égard à l'équation (34), les formules (39) et (40) donneront

$$\begin{cases} A=\dfrac{1}{\mathfrak{K}}\dfrac{f(a)}{(a-b)(a-c)\ldots}, \\ B=\dfrac{1}{\mathfrak{K}}\dfrac{f(b)}{(b-a)(b-c)\ldots}, \\ C=\dfrac{1}{\mathfrak{K}}\dfrac{f(c)}{(c-a)(c-b)\ldots}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases} \tag{41}$$

Ajoutons que la première des équations (41) peut être déduite directement des formules (34) et (37) combinées entre elles, ou, ce qui revient au même, de la formule

$$\mathcal{F}(x)=\frac{f(x)}{\mathfrak{K}(x-a)(x-c)\ldots}.$$

Lorsque le degré m de $f(x)$ est inférieur au nombre n des quantités $a, b, c, \ldots$, on tire des formules (35) et (41)

$$\begin{cases} \dfrac{f(x)}{F(x)}=\dfrac{1}{\mathfrak{K}}\Bigg[\dfrac{f(a)}{(a-b)(a-c)\ldots}\,\dfrac{1}{x-a}+\dfrac{f(b)}{(b-a)(b-c)\ldots}\,\dfrac{1}{x-b} \\ \qquad\qquad +\dfrac{f(c)}{(c-a)(c-b)\ldots}\,\dfrac{1}{x-c}+\ldots\Bigg], \end{cases} \tag{42}$$

puis on en conclut, en ayant égard à l'équation (34),

$$(43)\quad \left\{\begin{aligned} f(x) = {} & \frac{(x-b)(x-c)\ldots}{(a-b)(a-c)\ldots} f(a) + \frac{(x-a)(x-c)\ldots}{(b-a)(b-c)\ldots} f(b) \\ & + \frac{(x-a)(x-b)\ldots}{(c-a)(c-b)\ldots} f(c) + \ldots . \end{aligned}\right.$$

L'équation (43) n'est autre chose que la formule d'interpolation de Lagrange, à l'aide de laquelle on détermine une fonction entière de x, lorsqu'on connaît autant de valeurs particulières de cette fonction qu'il y a d'unités dans le nombre entier n immédiatement supérieur à son degré.

Lorsque les fonctions $f(x)$, $F(x)$ se présentent sous forme réelle, et que les deux racines a, b sont imaginaires et conjuguées ou de la forme $\alpha + \beta\sqrt{-1}$, $\alpha - \beta\sqrt{-1}$, alors, en désignant par $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ deux quantités réelles propres à vérifier l'équation

$$(44)\qquad \mathcal{A} - \mathcal{B}\sqrt{-1} = \frac{f(\alpha + \beta\sqrt{-1})}{F'(\alpha + \beta\sqrt{-1})},$$

on trouve que les fractions simples correspondantes à ces racines dans le second membre de la formule (35) ou (36) sont respectivement

$$(45)\qquad \frac{\mathcal{A} - \mathcal{B}\sqrt{-1}}{x - \alpha - \beta\sqrt{-1}}, \quad \frac{\mathcal{A} + \mathcal{B}\sqrt{-1}}{x - \alpha + \beta\sqrt{-1}}.$$

En ajoutant ces deux fractions, on obtient la suivante

$$(46)\qquad \frac{2\mathcal{A}(x-\alpha) + 2\mathcal{B}\beta}{(x-\alpha)^2 + \beta^2},$$

qui a pour numérateur une fonction réelle et linéaire de x, et pour dénominateur un facteur réel et du second degré du polynôme $F(x)$.

Au reste, on pourrait imaginer diverses méthodes propres à décomposer la fraction rationnelle $\frac{f(x)}{F(x)}$ en fractions simples, c'est-à-dire en fractions semblables à celles que renferme le second membre de l'équation (32). Mais ces diverses méthodes fourniraient nécessai-

rement les mêmes valeurs des coefficients $A, A_1, \ldots, A_{h-1}$; $B, B_1, \ldots, B_{k-1}$; $C, C_1, \ldots, C_{l-1}, \ldots$. Pour le démontrer, multiplions par $F(x)$ les deux membres de l'équation (32). Alors, si l'on fait pour abréger

$$(47)\quad \left\{\begin{aligned} & Q\,F(x) + B\frac{F(x)}{(x-b)^k} + \ldots + B_{k-1}\frac{F(x)}{x-b} \\ & \quad + C\frac{F(x)}{(x-c)^l} + \ldots + C_{l-1}\frac{F(x)}{x-c} + \ldots = (x-a)^h\,\Pi(x), \end{aligned}\right.$$

on aura

$$(48)\quad \left\{\begin{aligned} f(x) = {} & A\frac{F(x)}{(x-a)^h} + A_1\frac{F(x)}{(x-a)^{h-1}} + \ldots \\ & + A_{h-1}\frac{F(x)}{x-a} + (x-a)^h\,\Pi(x). \end{aligned}\right.$$

D'ailleurs, comme le premier membre de l'équation (47) sera une fonction entière de x divisible, ainsi que $F(x)$, par $(x-a)^h$, $\Pi(x)$ représentera encore une fonction entière. Par suite, si l'on pose dans la formule (48)

$$x = a + z,$$

et si l'on compare ensuite les termes constants et les coefficients des puissances semblables de la variable z dans les deux membres développés suivant les puissances ascendantes de cette variable, on trouvera successivement

$$(49)\qquad f(a+z) = \left(\frac{A}{z^h} + \frac{A_1}{z^{h-1}} + \ldots + \frac{A_{h-1}}{z}\right)F(a+z) + z^h\,\Pi(a+z)$$

ou, ce qui revient au même,

$$(50)\quad \left\{\begin{aligned} & f(a) + \frac{f'(a)}{1}z + \frac{f''(a)}{1.2}z^2 + \ldots + \frac{f^{(m)}(a)}{1.2.3\ldots m}z^m \\ & = z^h\,\Pi(a+z) + (A + A_1 z + A_2 z^2 + \ldots + A_{h-1}z^{h-1}) \\ & \quad \times \left[\frac{F^{(h)}(a)}{1.2.3\ldots h} + \frac{F^{(h+1)}(a)}{1.2.3\ldots h(h+1)}z + \ldots + \frac{F^{(n)}(a)}{1.2.3\ldots n}z^{n-h}\right] \end{aligned}\right.$$

et

$$(51)\quad f(a) = A\frac{F^{(h)}(a)}{1.2.3\ldots h}, \quad f'(a) = A_1\frac{F^{(h)}(a)}{2.3\ldots h} + A\frac{F^{(h+1)}(a)}{2.3\ldots h(h+1)}, \quad f''(a) = \ldots .$$

Or des équations (51) on déduira évidemment, pour les constantes A, $A_1, \ldots, A_{k-1}$, un système unique de valeurs, savoir

$$(52)\qquad A = \frac{1.2.3\ldots h\,f(a)}{F^{(h)}(a)}, \quad A_1 = \frac{2.3\ldots(h+1)\,f'(a) - A\,F^{(h+1)}(a)}{(h+1)\,F^{(h)}(a)}, \quad \ldots.$$

On obtiendrait de la même manière les valeurs de $B, B_1, \ldots, B_{k-1}$; $C, C_1, \ldots, C_{l-1}$. Il est bon d'observer que la première des formules (52) donne, pour la constante A, une valeur égale à celle que reçoit la fraction $\frac{(x-a)^h f(x)}{F(x)}$, quand on prend $x = 0$. Cette même valeur, dans le cas où l'on suppose $h = 1$, se réduit à celle que détermine la formule (39).

Pour montrer une application des principes ci-dessus établis, concevons que l'on veuille décomposer en fractions simples la fraction rationnelle

$$(53)\qquad f(x) = \frac{1}{(x-1)^2(x+1)}.$$

Il suffira, d'après le théorème I, de développer cette fraction : 1° suivant les puissances ascendantes de $x-1$; 2° suivant les puissances ascendantes de $x+1$, puis de faire la somme des termes qui, dans les deux développements, deviendront infinis pour $x = 1$ ou pour $x = -1$. Or on trouvera : 1° en désignant par $\varpi(x)$ une fonction qui conservera une valeur finie pour $x = 1$,

$$(x-1)^2 f(x) = \frac{1}{x+1} = \frac{1}{2+(x-1)} = \frac{1}{2} - \frac{1}{4}(x-1) + (x-1)^2\varpi(x)$$

et, par suite,

$$(54)\qquad f(x) = \frac{1}{2}\frac{1}{(x-1)^2} - \frac{1}{4}\frac{1}{x-1} + \varpi(x);$$

2° en désignant par $\varpi_1(x)$ une fonction qui conservera une valeur finie pour $x = -1$,

$$(x+1)f(x) = \frac{1}{(x-1)^2} = \frac{1}{[2-(x+1)]^2} = \frac{1}{4} + (x+1)\varpi_1(x),$$

et, par suite,

$$(55)\qquad f(x) = \frac{1}{4}\frac{1}{x+1} + \varpi_1(x).$$

Les trois fractions simples

$$\frac{1}{2}\frac{1}{(x-1)^2}, \quad -\frac{1}{4}\frac{1}{x-1}, \quad \frac{1}{4}\frac{1}{x+1}$$

seront donc les seuls termes qui, dans les deux développements de l'expression (53), deviendront infinis pour $x = 1$ ou pour $x = -1$, et l'on aura, en vertu du théorème I,

$$(56)\qquad \frac{1}{(x-1)^2(x+1)} = \frac{1}{2}\frac{1}{(x-1)^2} - \frac{1}{4}\frac{1}{x-1} + \frac{1}{4}\frac{1}{x+1}.$$

On trouverait de la même manière

$$(57)\qquad \frac{1}{x^2-1} = \frac{1}{2}\frac{1}{x-1} - \frac{1}{2}\frac{1}{x+1} \quad \text{et} \quad \frac{x}{x^2-1} = \frac{1}{2}\frac{1}{x-1} + \frac{1}{2}\frac{1}{x+1}.$$

Concevons encore qu'il s'agisse de décomposer en fractions simples la fraction rationnelle

$$(58)\qquad \frac{x^m}{x^n-1},$$

m, n désignant deux nombres entiers, et m étant $< n$. En d'autres termes, supposons

$$f(x) = x^m, \qquad F(x) = x^n - 1.$$

L'équation (17) se réduira simplement à l'équation binôme

$$(59)\qquad x^n = 1,$$

dont les racines inégales entre elles seront de la forme

$$(60)\qquad x = \cos\frac{2k\pi}{n} \pm \sqrt{-1}\sin\frac{2k\pi}{n},$$

k représentant un nombre entier égal ou inférieur à $\frac{1}{2}n$. D'ailleurs, en prenant pour x une quelconque de ces racines, on trouvera

$$(61)\qquad \frac{f(x)}{F'(x)} = \frac{x^m}{n\,x^{n-1}} = \frac{1}{n}x^{m+1} = \frac{1}{n}\left[\cos\frac{2k(m+1)\pi}{n} \pm \sqrt{-1}\sin\frac{2k(m+1)\pi}{n}\right].$$

Donc les formules (35) et (41) donneront, pour des valeurs impaires de n,

$$(62)\quad \frac{x^m}{x^n-1}=\frac{1}{n}\left\{\begin{aligned}&\frac{1}{x-1}+\frac{\cos\frac{2(m+1)\pi}{n}+\sqrt{-1}\sin\frac{2(m+1)\pi}{n}}{x-\cos\frac{2\pi}{n}-\sqrt{-1}\sin\frac{2\pi}{n}}\\&+\frac{\cos\frac{2(m+1)\pi}{n}-\sqrt{-1}\sin\frac{2(m+1)\pi}{n}}{x-\cos\frac{2\pi}{n}+\sqrt{-1}\sin\frac{2\pi}{n}}\\&+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\&+\frac{\cos\frac{(n-1)(m+1)\pi}{n}+\sqrt{-1}\sin\frac{(n-1)(m+1)\pi}{n}}{x-\cos\frac{(n-1)\pi}{n}-\sqrt{-1}\sin\frac{(n-1)\pi}{n}}\\&+\frac{\cos\frac{(n-1)(m+1)\pi}{n}-\sqrt{-1}\sin\frac{(n-1)(m+1)\pi}{n}}{x-\cos\frac{(n-1)\pi}{n}+\sqrt{-1}\sin\frac{(n-1)\pi}{n}},\end{aligned}\right.$$

puis on en conclura, en réduisant les fractions imaginaires conjuguées au même dénominateur,

$$(63)\quad \frac{x^m}{x^n-1}=\frac{1}{n}\left[\frac{1}{x-1}+2\,\frac{x\cos\frac{2(m+1)\pi}{n}-\cos\frac{2m\pi}{n}}{x^2-2x\cos\frac{2\pi}{n}+1}+\ldots+2\,\frac{x\cos\frac{(n-1)(m+1)\pi}{n}-\cos\frac{(n-1)m\pi}{n}}{x^2-2x\cos\frac{(n-1)\pi}{n}+1}\right].$$

On trouvera, au contraire, pour des valeurs paires de n,

$$(64)\quad \frac{x^m}{x^n-1}=\frac{1}{n}\left[\frac{1}{x-1}+2\,\frac{x\cos\frac{2(m+1)\pi}{n}-\cos\frac{2m\pi}{n}}{x^2-2x\cos\frac{2\pi}{n}+1}+\ldots+2\,\frac{x\cos\frac{(n-2)(m+1)\pi}{n}-\cos\frac{(n-2)m\pi}{n}}{x^2-2x\cos\frac{(n-2)\pi}{n}+1}+\frac{(-1)^{m+1}}{x+1}\right].$$

On trouverait de la même manière, pour des valeurs impaires de n,

$$(65)\quad \frac{x^m}{x^n+1}=-\frac{1}{n}\left[2\,\frac{x\cos\frac{(m+1)\pi}{n}-\cos\frac{m\pi}{n}}{x^2-2x\cos\frac{\pi}{n}+1}+\ldots+2\,\frac{x\cos\frac{(n-2)(m+1)\pi}{n}-\cos\frac{(n-2)m\pi}{n}}{x^2-2x\cos\frac{(n-2)\pi}{n}+1}+\frac{(-1)^{m+1}}{x+1}\right],$$

et, pour des valeurs paires de n,

$$(66)\quad \frac{x^m}{x^n+1}=-\frac{1}{n}\left[2\,\frac{x\cos\frac{(m+1)\pi}{n}-\cos\frac{m\pi}{n}}{x^2-2x\cos\frac{\pi}{n}+1}+\ldots+2\,\frac{x\cos\frac{(n-1)(m+1)\pi}{n}-\cos\frac{(n-1)\pi}{n}}{x^2-2x\cos\frac{(n-1)\pi}{n}+1}\right].$$

Enfin si, dans les formules (63), (64), (65), (66), on pose $m=n-1$, elles donneront, pour des valeurs impaires de n,

$$(67)\quad \frac{x^{n-1}}{x^n-1}=\frac{1}{n}\left[\frac{1}{x-1}+2\,\frac{x-\cos\frac{2\pi}{n}}{x^2-2x\cos\frac{2\pi}{n}+1}+\ldots+2\,\frac{x-\cos\frac{(n-1)\pi}{n}}{x^2-2x\cos\frac{(n-1)\pi}{n}+1}\right],$$

$$(68)\quad \frac{x^{n-1}}{x^n+1}=\frac{1}{n}\left[2\,\frac{x-\cos\frac{\pi}{n}}{x^2-2x\cos\frac{\pi}{n}+1}+\ldots+2\,\frac{x-\cos\frac{(n-2)\pi}{n}}{x^2-2x\cos\frac{(n-2)\pi}{n}+1}+\frac{1}{x+1}\right],$$

et, pour des valeurs paires de n,

$$(69)\quad \frac{x^{n-1}}{x^n-1}=\frac{1}{n}\left[\frac{1}{x-1}+2\,\frac{x-\cos\frac{2\pi}{n}}{x^2-2x\cos\frac{2\pi}{n}+1}+\ldots+2\,\frac{x-\cos\frac{(n-2)\pi}{n}}{x^2-2x\cos\frac{(n-2)\pi}{n}+1}+\frac{1}{x+1}\right],$$

$$(70)\quad \frac{x^{n-1}}{x^n+1}=\frac{1}{n}\left[2\,\frac{x-\cos\frac{\pi}{n}}{x^2-2x\cos\frac{\pi}{n}+1}+\ldots+2\,\frac{x-\cos\frac{(n-1)\pi}{n}}{x^2-2x\cos\frac{(n-1)\pi}{n}+1}\right].$$