# LEÇONS

SUR LE

# CALCUL DIFFÉRENTIEL.

# LEÇONS

SUR LE

# CALCUL DIFFÉRENTIEL,

PAR M. AUGUSTIN-LOUIS CAUCHY,

INGÉNIEUR EN CHEF DES PONTS ET CHAUSSÉES, PROFESSEUR A L'ÉCOLE ROYALE POLYTECHNIQUE, PROFESSEUR ADJOINT A LA FACULTÉ DES SCIENCES, MEMBRE DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES, CHEVALIER DE LA LÉGION D'HONNEUR.

A PARIS,

CHEZ DE BURE FRÈRES, LIBRAIRES DU ROI ET DE LA BIBLIOTHÈQUE DU ROI, RUE SERPENTE, N.° 7.

1829.

# AVERTISSEMENT.

L'Édition, qui a paru en 1823, du *Résumé des Leçons sur le Calcul infinitésimal*, se trouvant épuisée, je me suis décidé à la remplacer par deux ouvrages séparés, l'un sur le calcul différentiel, l'autre sur le calcul intégral. Je publie aujourd'hui le premier, qui a pour objet le calcul différentiel. Les méthodes que j'ai suivies diffèrent à plusieurs égards de celles qui sont exposées dans les ouvrages du même genre. Mon but principal a été de concilier la rigueur, dont je m'étais fait une loi dans mon *Cours d'analyse*, avec la simplicité que produit la considération directe des quantités infiniment petites. Pour cette raison, j'ai cru devoir rejeter les développements des fonctions en séries infinies, toutes les fois que les séries obtenues ne sont pas convergentes. Il en résulte, par exemple, que la formule de Taylor ne peut plus être admise comme générale, qu'autant qu'elle est réduite à un nombre fini de termes, et complétée par un reste. Je n'ignore pas qu'en faisant d'abord abstraction de ce reste, l'illustre auteur de la *Mécanique analytique* a pris la formule dont il s'agit pour base de sa théorie *des fonctions dérivées*. Mais, malgré tout le respect que commande une si grande autorité, la plupart des géomètres s'accordent maintenant à reconnaître l'incertitude des résultats auxquels on peut être conduit par l'emploi de séries divergentes. Il y a plus : le théorème de Taylor semble, dans certains cas, fournir le développement d'une fonction en série convergente, quoique la somme de la série diffère essentiellement de la fonction proposée (voyez la fin de la dixième Leçon). D'ailleurs ceux qui liront mon ouvrage se convaincront, je l'espère, que les principes du calcul différentiel et ses applications les plus importantes peuvent être facilement exposés sans l'intervention des séries.

AVERTISSEMENT.

On trouvera, dans la quatorzième Leçon et dans la Note qui termine ce volume, des considérations nouvelles sur la possibilité de résoudre des équations algébriques ou transcendantes, et sur la détermination approximative de leurs racines soit réelles, soit imaginaires.

Au reste, en composant cet ouvrage, j'ai mis à profit les travaux entrepris sur le même sujet par les géomètres, et publiés dans divers écrits ou mémoires, particulièrement dans la *Théorie des Fonctions* de Lagrange, dans le *Calcul différentiel* d'Euler, dans celui de M. Lacroix, dans un article de M. Poinsot, qui fait partie de la *Correspondance sur l'École Polytechnique* (par M. Hachette), enfin dans les Leçons et dans un Mémoire de M. Ampère (voy. le 13.e cahier du journal de cette école).

# LEÇONS

SUR LE

# CALCUL DIFFÉRENTIEL.

---

## PRÉLIMINAIRES.

DES VARIABLES, DE LEURS LIMITES ET DES QUANTITÉS INFINIMENT PETITES. DES FONCTIONS CONTINUES ET DISCONTINUES, EXPLICITES OU IMPLICITES, SIMPLES OU COMPOSÉES, ETC. DES SÉRIES CONVERGENTES OU DIVERGENTES.

---

Avant d'exposer les principes du Calcul différentiel, il est nécessaire d'établir quelques notions préliminaires. Tel est l'objet dont nous allons d'abord nous occuper.

On nomme quantité *variable* celle que l'on considère comme devant recevoir successivement plusieurs valeurs différentes les unes des autres. On appelle au contraire quantité *constante* toute quantité qui reçoit une valeur fixe et déterminée. Lorsque les valeurs successivement attribuées à une même variable s'approchent indéfiniment d'une valeur fixe, de manière à finir par en différer aussi peu que l'on voudra, cette dernière est appelée la *limite* de toutes les autres. Ainsi, par exemple, la surface du cercle est la limite vers laquelle convergent les surfaces des polygones réguliers inscrits, tandis que le nombre de leurs côtés croît de plus en plus; et le rayon vecteur, mené du centre d'une hyperbole à un point de la courbe qui s'éloigne de plus en plus de ce centre, forme avec l'axe des $x$ un angle qui a pour limite l'angle formé par l'asymptote avec le même axe, etc. Nous indiquerons la limite vers laquelle converge une variable donnée par l'abréviation lim placée devant cette variable.

Souvent les limites vers lesquelles convergent des expressions variables se présentent sous une forme indéterminée, et néanmoins on peut encore fixer, à l'aide de méthodes particulières, les véritables valeurs de ces mêmes limites. Ainsi, par exemple, les limites dont s'approchent indéfiniment les deux expressions variables

$$\frac{\sin\alpha}{\alpha},\quad (1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}},$$

tandis que $\alpha$ converge vers zéro, se présentent sous les formes indéterminées $\frac{0}{0}$, $1^{\pm\infty}$; et pourtant ces deux limites ont des valeurs fixes que l'on peut calculer comme il suit.

On a évidemment, pour de très petites valeurs numériques de $\alpha$,

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\alpha} > \frac{\sin\alpha}{\alpha} > \frac{\sin\alpha}{\tang\alpha}.$$

Par conséquent le rapport $\frac{\sin\alpha}{\alpha}$, toujours compris entre les quantités

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\alpha} = 1 \quad \text{et} \quad \frac{\sin\alpha}{\tang\alpha} = \cos\alpha,$$

dont la première sert de limite à la seconde, aura lui-même l'unité pour limite.

Cherchons maintenant la limite vers laquelle converge l'expression $(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}$, tandis que $\alpha$ s'approche indéfiniment de zéro. Si l'on suppose d'abord la quantité $\alpha$ positive et de la forme $\frac{1}{m}$, $m$ désignant un nombre entier variable et susceptible d'un accroissement indéfini, on aura

$$\begin{aligned}(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}} &= \left(1+\frac{1}{m}\right)^m \\ &= 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1.2}\left(1-\frac{1}{m}\right) + \frac{1}{1.2.3}\left(1-\frac{1}{m}\right)\left(1-\frac{2}{m}\right) + \ldots \\ &\quad + \frac{1}{1.2.3\ldots m}\left(1-\frac{1}{m}\right)\left(1-\frac{2}{m}\right)\cdots\left(1-\frac{m-1}{m}\right).\end{aligned}$$

Comme, dans le second membre de cette dernière formule, les termes



qui renferment la quantité $m$ sont tous positifs et croissent en valeurs et en nombre en même temps que cette quantité, il est clair que l'expression $\left(1+\frac{1}{m}\right)^m$ croîtra elle-même avec le nombre entier $m$, en demeurant toujours comprise entre les deux sommes

$$1 + \frac{1}{1} = 2$$

et

$$1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2.2} + \frac{1}{2.2.2} + \ldots = 1 + 1 + 1 = 3;$$

donc elle s'approchera indéfiniment, pour des valeurs croissantes de $m$, d'une certaine limite comprise entre 2 et 3. Cette limite est un nombre qui joue un grand rôle dans le Calcul infinitésimal, et qu'on est convenu de désigner par la lettre $e$. Si l'on prend

$$m = 10000,$$

on trouvera pour valeur approchée de $e$, en faisant usage des Tables de logarithmes décimaux,

$$\left(\frac{10001}{10000}\right)^{10000} = 2,7183.$$

Cette valeur approchée est exacte à $\frac{1}{10000}$ près, ainsi que nous le verrons plus tard.

Supposons maintenant que $\alpha$, toujours positif, ne soit plus de la forme $\frac{1}{m}$. Désignons, dans cette hypothèse, par $m$ et $n = m+1$ les deux nombres entiers immédiatement inférieur et supérieur à $\frac{1}{\alpha}$, en sorte qu'on ait

$$\frac{1}{\alpha} = m + \mu = n - \nu,$$

$\mu$ et $\nu$ étant des nombres compris entre zéro et l'unité. L'expression $(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}$ sera évidemment renfermée entre les deux suivantes

$$\left(1+\frac{1}{m}\right)^{\frac{1}{\alpha}} = \left[\left(1+\frac{1}{m}\right)^m\right]^{1+\frac{\mu}{m}}, \quad \left(1+\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{\alpha}} = \left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right]^{1-\frac{\nu}{n}};$$

et, comme, pour des valeurs de $\alpha$ décroissantes à l'infini ou, ce qui revient au même, pour des valeurs croissantes de $m$ et de $n$, les deux quantités $\left(1+\frac{1}{m}\right)^m$, $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ convergent l'une et l'autre vers la limite $e$, tandis que $1+\frac{\mu}{m}$, $1-\frac{\nu}{n}$ s'approchent indéfiniment de la limite $1$, il en résulte que chacune des expressions

$$\left(1+\frac{1}{m}\right)^{\frac{1}{\alpha}},\quad \left(1+\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{\alpha}},$$

et par suite l'expression intermédiaire $(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}$, convergeront encore vers la limite $e$.

Supposons enfin que $\alpha$ devienne une quantité négative. Si l'on fait, dans cette hypothèse,

$$1+\alpha=\frac{1}{1+\beta},$$

$\beta$ sera une quantité positive, qui convergera elle-même vers zéro, et l'on trouvera

$$(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}=(1+\beta)^{\frac{1+\beta}{\beta}}=\left[(1+\beta)^{\frac{1}{\beta}}\right]^{1+\beta},$$

puis, en passant aux limites,

$$\lim(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}=e^{\lim(1+\beta)}=e. \tag{1}$$

Les logarithmes, pris dans le système dont la base est $e$, s'appellent logarithmes *népériens* ou *hyperboliques*. Nous les désignerons par la lettre l, tandis que nous emploierons la lettre L pour indiquer les logarithmes pris dans un autre système dont la base serait un nombre quelconque représenté par A. Cela posé, on aura évidemment

$$\mathrm{l}e=1,$$

$$\mathrm{L}e=\frac{\mathrm{L}e}{\mathrm{LA}}=\frac{\mathrm{l}e}{\mathrm{lA}}=\frac{1}{\mathrm{lA}}, \tag{2}$$

et, de plus, on tirera de la formule (1)

$$\lim\frac{\mathrm{l}(1+\alpha)}{\alpha}=1, \tag{3}$$

$$\lim\frac{\mathrm{L}(1+\alpha)}{\alpha}=\mathrm{L}e. \tag{4}$$



Lorsque les valeurs numériques successives d'une même variable, étant supposées très petites, décroissent indéfiniment de manière à s'abaisser au-dessous de tout nombre donné, cette variable devient ce qu'on nomme un *infiniment petit* ou une quantité infiniment petite. Une variable de cette espèce a zéro pour limite. Telle est la variable $\alpha$ dans les calculs qui précèdent.

Lorsque les valeurs numériques successives d'une même variable croissent de plus en plus de manière à s'élever au-dessus de tout nombre donné, on dit que cette variable a pour limite l'infini positif indiqué par le signe $\infty$, s'il s'agit d'une variable positive; et l'infini négatif indiqué par la notation $-\infty$, s'il s'agit d'une variable négative. Tel est le nombre variable $m$ que nous avons employé ci-dessus.

Si le rapport de deux quantités infiniment petites converge vers une limite donnée, tandis que chacune d'elles s'approche de zéro, la limite en question sera ce qu'on appelle la *dernière raison* de ces quantités infiniment petites. Ainsi, par exemple, $\alpha$ étant infiniment petit, l'unité sera la dernière raison de $\sin\alpha$ et de $\alpha$; $\mathrm{L}e$ la dernière raison de $\mathrm{L}(1+\alpha)$ et de $\alpha$, etc.

Lorsque des quantités variables sont tellement liées entre elles, que, la valeur de l'une d'elles étant donnée, on puisse en conclure les valeurs de toutes les autres, on conçoit d'ordinaire ces diverses quantités exprimées au moyen de l'une d'entre elles, qui prend alors le nom de *variable indépendante;* et les autres quantités, exprimées au moyen de la variable indépendante, sont ce qu'on appelle des *fonctions* de cette variable.

Lorsque des quantités variables sont tellement liées entre elles, que, les valeurs de quelques-unes étant données, on puisse en conclure celles de toutes les autres, on conçoit ces diverses quantités exprimées au moyen de plusieurs d'entre elles, qui prennent alors le nom de *variables indépendantes;* et les quantités restantes, exprimées au moyen des variables indépendantes, sont ce qu'on appelle des *fonctions* de ces mêmes variables. Les diverses expressions que fournissent l'Algèbre et la Trigonométrie, lorsqu'elles renferment des variables considérées comme indépendantes, sont autant de fonctions de ces variables. Ainsi, par exemple,

$$\mathrm{L}x, \quad \sin x, \quad \ldots$$

sont des fonctions de la variable $x$;

$$x+y, \quad x^y, \quad xyz, \quad \ldots$$

des fonctions des variables $x$ et $y$ ou $x$, $y$ et $z$, ....

Lorsque des fonctions d'une ou de plusieurs variables se trouvent, comme dans les exemples précédents, immédiatement exprimées au moyen de ces variables, elles sont nommées *fonctions explicites*. Mais lorsqu'on donne seulement les relations entre les fonctions et les variables, c'est-à-dire les équations auxquelles ces quantités doivent satisfaire, tant que ces équations ne sont pas résolues algébriquement, les fonctions n'étant pas exprimées immédiatement au moyen des variables sont appelées *fonctions implicites*. Pour les rendre explicites, il suffit de résoudre, lorsque cela se peut, les équations qui les déterminent. Par exemple, $y$ étant une fonction implicite de $x$ déterminée par l'équation

$$\mathrm{L}y = x,$$

si l'on nomme A la base du système de logarithmes que l'on considère, la même fonction, devenue explicite par la résolution de l'équation donnée, sera

$$y = \mathrm{A}^x.$$

Lorsqu'on veut désigner une fonction explicite d'une variable $x$ ou de plusieurs variables $x$, $y$, $z$, ..., sans déterminer la nature de cette fonction, on emploie l'une des notations

$$f(x), \quad \mathrm{F}(x), \quad \varphi(x), \quad \chi(x), \quad \psi(x), \quad \varpi(x), \quad \ldots;$$
$$f(x,y,z,\ldots), \quad \mathrm{F}(x,y,z,\ldots), \quad \varphi(x,y,z,\ldots), \quad \ldots.$$

Parmi les fonctions d'une seule variable $x$, il est utile de distinguer les fonctions que l'on nomme *simples*, et que l'on considère comme résultant d'une seule opération effectuée sur cette variable, d'avec les



fonctions que l'on regarde comme les résultats de plusieurs opérations et que l'on nomme *composées*. Les fonctions simples que produisent les opérations de l'Algèbre et de la Trigonométrie [*voir* l'*Analyse algébrique*, Chapitre I (¹)] peuvent être réduites aux suivantes

$$a+x, \quad a-x, \quad ax, \quad \frac{a}{x}, \quad x^a, \quad \mathrm{A}^x, \quad \mathrm{L}x,$$
$$\sin x, \quad \cos x, \quad \arcsin x, \quad \arccos x,$$

A désignant un nombre constant, $a = \pm \mathrm{A}$ une quantité constante, et la lettre L indiquant un logarithme pris dans le système dont la base est A.

Il est encore essentiel d'observer que, conformément aux conventions établies dans l'*Analyse algébrique*, nous faisons usage de l'une des notations

$$\arcsin x, \quad \arccos x, \quad \mathrm{arc\,tang}\, x, \quad \mathrm{arc\,cot}\, x, \quad \mathrm{arc\,séc}\, x, \quad \mathrm{arc\,coséc}\, x,$$

pour représenter, non pas un quelconque des arcs dont une certaine ligne trigonométrique est égale à $x$, mais celui d'entre eux qui a la plus petite valeur numérique ou, si ces arcs sont deux à deux égaux et de signes contraires, celui qui a la plus petite valeur positive; en conséquence, $\arcsin x$, $\mathrm{arc\,cot}\, x$, $\mathrm{arc\,coséc}\, x$ seront des arcs compris entre les limites $-\frac{\pi}{2}$, $+\frac{\pi}{2}$, et $\arccos x$, $\mathrm{arc\,séc}\, x$ des arcs compris entre les limites o et $\pi$.

Les *fonctions de fonctions* sont des fonctions composées qui résultent de plusieurs opérations successives, la première opération étant effectuée sur la variable, et chacune des autres sur le résultat de l'opération précédente. Ainsi, par exemple,

$$\mathrm{l} \sin x, \quad \mathrm{l} \cos x$$

sont des fonctions de fonctions dont chacune résulte de deux opérations successives.

Les fonctions composées se distinguent les unes des autres par la

(¹) *Œuvres de Cauchy*, S. II, T. III.

nature des opérations qui les produisent. Il semble que l'on devrait nommer *fonctions algébriques* toutes celles que fournissent les opérations de l'Algèbre; mais on a réservé particulièrement ce nom à celles que l'on forme en n'employant que les premières opérations algébriques, savoir l'addition et la soustraction, la multiplication et la division, enfin l'élévation à des puissances fixes; et, dès qu'une fonction renferme des exposants variables ou des logarithmes, elle prend le nom de *fonction exponentielle* ou *logarithmique*.

Les fonctions que l'on nomme algébriques se divisent en *fonctions rationnelles* et *fonctions irrationnelles*. Les fonctions rationnelles sont celles dans lesquelles la variable ne se trouve élevée qu'à des puissances entières. On appelle en particulier *fonction entière* tout polynôme qui ne renferme que des puissances entières de la variable, par exemple

$$a+bx+cx^2+\ldots,$$

et *fonction fractionnaire* ou *fraction rationnelle* le quotient de deux semblables polynômes. Le *degré* d'une fonction entière de $x$ est l'exposant de la plus haute puissance de $x$ dans cette même fonction. La fonction entière du premier degré, savoir

$$a+bx,$$

s'appelle aussi *fonction linéaire*, parce que, dans l'application à la Géométrie, on s'en sert pour représenter l'ordonnée d'une ligne droite. Toute fonction entière ou fractionnaire est par cela même rationnelle, et toute autre espèce de fonction algébrique est irrationnelle.

Les fonctions que produisent les opérations de la Trigonométrie sont désignées sous le nom de *fonctions trigonométriques* ou *circulaires*.

Les divers noms que l'on vient d'attribuer aux fonctions composées d'une seule variable s'appliquent également aux fonctions de plusieurs variables, lorsque ces dernières fonctions jouissent, par rapport à chacune des variables qu'elles renferment, des propriétés que supposent les noms dont il s'agit. Ainsi, par exemple, tout polynôme qui ne contiendra que des puissances entières des variables $x$, $y$, $z$, ... sera une fonction entière de ces variables. On appelle *degré* de cette fonction entière la somme des exposants des variables dans le terme où cette somme est la plus grande. Une fonction entière du premier degré, telle que



$$a+bx+cy+\ldots,$$

prend le nom de *fonction linéaire*.

Souvent, dans le calcul, on se sert de la caractéristique $\Delta$ pour indiquer les accroissements simultanés de deux variables qui dépendent l'une de l'autre. Cela posé, si la variable $y$ est exprimée en fonction de la variable $x$ par l'équation

$$y=f(x), \tag{5}$$

$\Delta y$, ou l'accroissement de $y$ correspondant à l'accroissement $\Delta x$ de la variable $x$, sera déterminé par la formule

$$y+\Delta y=f(x+\Delta x). \tag{6}$$

Plus généralement, si l'on suppose

$$F(x,y)=0, \tag{7}$$

on aura

$$F(x+\Delta x, y+\Delta y)=0. \tag{8}$$

Il est bon d'observer que des équations (5) et (6) réunies on conclut

$$\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x). \tag{9}$$

Soient maintenant $h$ et $i$ deux quantités distinctes, la première finie, la seconde infiniment petite, et $\alpha=\frac{i}{h}$ le rapport infiniment petit de ces deux quantités. Si l'on attribue à $\Delta x$ la valeur finie $h$, la valeur de $\Delta y$, donnée par l'équation (9), deviendra ce qu'on appelle la *différence finie* de la fonction $f(x)$, et sera ordinairement une quantité finie. Si, au contraire, l'on attribue à $\Delta x$ une valeur infiniment petite, si l'on fait, par exemple,

$$\Delta x=i=\alpha h,$$

la valeur de $\Delta y$, savoir

$$f(x+i)-f(x) \quad \text{ou} \quad f(x+\alpha h)-f(x),$$

sera ordinairement une quantité infiniment petite. C'est ce que l'on vérifiera aisément à l'égard des fonctions

$$A^x, \quad \sin x, \quad \cos x,$$

auxquelles correspondent les différences

$$A^{x+i}-A^x=(A^i-1)A^x,$$

$$\sin(x+i)-\sin x = \quad 2\sin\frac{i}{2}\cos\left(x+\frac{i}{2}\right),$$

$$\cos(x+i)-\cos x = -2\sin\frac{i}{2}\sin\left(x+\frac{i}{2}\right),$$

dont chacune renferme un facteur $A^i-1$, ou $\sin\frac{i}{2}$, qui converge indéfiniment avec $i$ vers la limite zéro.

Lorsque, la fonction $f(x)$ admettant une valeur unique et finie pour toutes les valeurs de $x$ comprises entre deux limites données, la différence

$$f(x+i)-f(x)$$

est toujours entre ces limites une quantité infiniment petite, on dit que $f(x)$ est *fonction continue* de la variable $x$ entre les limites dont il s'agit.

On dit encore que la fonction $f(x)$ est, dans le voisinage d'une valeur particulière attribuée à la variable $x$, fonction continue de cette variable, toutes les fois qu'elle est continue entre deux limites, même très rapprochées, qui renferment la valeur en question.

Enfin, lorsqu'une fonction cesse d'être continue dans le voisinage d'une valeur particulière de la variable $x$, on dit qu'elle devient alors *discontinue*, et qu'il y a pour cette valeur particulière *solution de continuité*. Ainsi, par exemple, il y a solution de continuité dans la fonction $\frac{1}{x}$, pour $x=0$; dans la fonction tang$x$, pour $x=\pm\frac{(2k+1)\pi}{2}$, $k$ étant un nombre entier quelconque, etc.



D'après ces explications, il sera facile de reconnaître entre quelles limites une fonction donnée de la variable $x$ est continue par rapport à cette variable. (*Voir*, pour de plus amples développements, le Chapitre II de l'*Analyse algébrique*.)

Concevons à présent que l'on construise la courbe qui a pour équation en coordonnées rectangulaires $y=f(x)$. Si la fonction $f(x)$ est continue entre les limites $x=x_0$, $x=X$, à chaque abscisse $x$ comprise entre ces limites correspondra une seule ordonnée; et, de plus, $x$ venant à croître d'une quantité infiniment petite $\Delta x$, $y$ croîtra d'une quantité infiniment petite $\Delta y$. Par suite, à deux abscisses très rapprochées $x$, $x+\Delta x$, correspondront deux points très rapprochés l'un de l'autre, puisque leur distance $\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}$ sera elle-même une quantité infiniment petite. Ces conditions ne peuvent être satisfaites qu'autant que les différents points forment une ligne continue entre les limites $x=x_0$, $x=X$.

La remarque que nous venons de faire peut être aisément vérifiée sur les courbes représentées par les équations

$$y=x^m, \quad y=\frac{1}{x^m}, \quad y=A^x, \quad y=Lx, \quad y=\sin x,$$

dans lesquelles A désigne une constante positive, et $m$ un nombre entier.

On appelle *série* une suite indéfinie de quantités

$$(10) \qquad u_0, \quad u_1, \quad u_2, \quad u_3, \quad \ldots,$$

qui dérivent les unes des autres suivant une loi déterminée. Ces quantités elles-mêmes sont les différents *termes* de la série que l'on considère. Soit

$$s_n=u_0+u_1+u_2+\ldots+u_{n-1}$$

la somme des $n$ premiers termes, $n$ désignant un nombre entier quelconque. Si, pour des valeurs de $n$ toujours croissantes, la somme $s_n$ s'approche indéfiniment d'une certaine limite $s$, la série sera dite *convergente*, et la limite en question s'appellera la *somme* de la série. Au contraire, si, tandis que $n$ croît indéfiniment, la somme $s_n$ ne s'approche d'aucune limite fixe, la série sera *divergente*, et n'aura plus de somme. Dans l'un et l'autre cas, le terme qui correspond à l'indice $n$, savoir $u_n$, sera ce qu'on nomme le *terme général*. Il suffit que l'on donne ce terme général en fonction de l'indice $n$, pour que la série soit complètement déterminée.

Il existe des règles générales à l'aide desquelles on peut reconnaître si une série donnée est convergente ou divergente. Ainsi, par exemple, on parvient sans peine à faire voir que la série (10) est convergente, lorsque, pour des valeurs croissantes du nombre entier $n$, le rapport

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}$$

converge vers une limite inférieure à l'unité. (*Voir* l'*Analyse algébrique*, Chap. VI.)

Une série digne de remarque est celle qu'on obtient, lorsque, dans le développement de l'expression

$$\left(1+\frac{m}{x}\right)^m = 1+\frac{x}{1}+\frac{x^2}{1.2}\left(1-\frac{1}{m}\right)+\frac{x^3}{1.2.3}\left(1-\frac{1}{m}\right)\left(1-\frac{2}{m}\right)+\ldots,$$

on fait converger le nombre entier $m$ vers la limite $\infty$. Cette série, dont les différents termes sont respectivement

$$(11)\qquad 1,\quad \frac{x}{1},\quad \frac{x^2}{1.2},\quad \frac{x^3}{1.2.3},\quad \ldots,\quad \frac{x^n}{1.2.3\ldots n},\quad \ldots,$$

reste convergente, quelle que soit la valeur de $x$, attendu que le rapport entre les deux termes

$$\frac{x^{n+1}}{1.2.3\ldots n(n+1)},\quad \frac{x^n}{1.2.3\ldots n},$$

savoir $\frac{x}{n+1}$, décroît sans cesse pour des valeurs croissantes de $n$. Quant à la somme de la même série, on l'obtiendra facilement en



posant $\frac{x}{m}=\alpha$. En effet, on trouvera, dans cette hypothèse,

$$\left(1+\frac{x}{m}\right)^m = (1+\alpha)^{\frac{x}{\alpha}};$$

puis on conclura, en faisant converger le nombre $m$ vers la limite $\infty$ et ayant égard à la formule (1),

$$\lim\left(1+\frac{x}{m}\right)^m = e^x.$$

On aura donc

$$(12)\qquad e^x = 1+\frac{x}{1}+\frac{x^2}{1.2}+\frac{x^3}{1.2.3}+\ldots.$$

Si, dans cette dernière équation, l'on prend $x=1$, on en tirera

$$(13)\qquad e = 1+1+\frac{1}{1.2}+\frac{1}{1.2.3}+\frac{1}{1.2.3.4}+\frac{1}{1.2.3.4.5}+\ldots$$

ou, ce qui revient au même,

$$e = 2+0,5+0,166666\ldots+0,041666\ldots+0,00833\ldots$$
$$+0,00138\ldots+0,00019\ldots+0,00002\ldots+\ldots=2,7182\ldots.$$

En poussant plus loin l'approximation, on trouverait

$$(14)\qquad e = 2,7182818284\ldots.$$

Telle est la valeur du nombre $e$, calculée avec dix décimales.

Nous terminerons ces Préliminaires en expliquant ce qu'on doit entendre par des quantités infiniment petites de divers ordres.

Désignons par $a$ un nombre constant, rationnel ou irrationnel; par $i$ une quantité infiniment petite, et par $r$ un nombre variable. Dans le système de quantités infiniment petites dont $i$ sera la *base*, une fonction de $i$ représentée par $f(i)$ sera un infiniment petit de l'*ordre* $a$, si la limite du rapport

$$(15)\qquad \frac{f(i)}{i^r}$$

est nulle pour toutes les valeurs de $r$ plus petites que $a$, et infinie pour toutes les valeurs de $r$ plus grandes que $a$.

Cette définition admise, si l'on désigne par $n$ le nombre entier ou immédiatement supérieur à l'ordre $a$ de la quantité infiniment petite $f(i)$, le rapport

$$\frac{f(i)}{i^n} \tag{16}$$

sera le premier terme de la progression géométrique

$$f(i),\quad \frac{f(i)}{i},\quad \frac{f(i)}{i^2},\quad \frac{f(i)}{i^3},\quad \ldots, \tag{17}$$

qui cessera d'être une quantité infiniment petite.

Quant au rapport

$$\frac{f(i)}{i^a} \tag{18}$$

que l'on déduit de l'expression (15) en posant $r = a$, il peut avoir une limite finie, ou nulle, ou infinie. Ainsi, par exemple,

$$i^a e^i,\quad \frac{i^a e^i}{\mathrm{l}i},\quad i^a e^i\,\mathrm{l}i$$

sont trois quantités infiniment petites de l'ordre $a$, et les quotients qu'on obtient en les divisant par $i^a$, savoir

$$e^i,\quad \frac{e^i}{\mathrm{l}i},\quad e^i\,\mathrm{l}i$$

ont pour limites respectives

$$1,\quad 0\quad \text{et}\quad \frac{1}{0}.$$

Cela posé, on établira sans peine les propriétés des quantités infiniment petites, et en particulier les différents théorèmes que nous allons énoncer.

Théorème I. — *Si, dans un système quelconque, l'on considère deux quantités infiniment petites d'ordres différents, pendant que ces deux quantités s'approcheront indéfiniment de zéro, celle qui sera d'un ordre plus élevé finira par obtenir constamment la plus petite valeur numérique.*



*Démonstration.* — Concevons que, dans le système dont la base est $i$, l'on désigne par $\mathrm{I} = f(i)$ et par $\mathrm{J} = \mathrm{F}(i)$ deux quantités infiniment petites, la première de l'ordre $a$, la seconde de l'ordre $b$; et supposons $a < b$. Si l'on attribue au nombre variable $r$ une valeur comprise entre $a$ et $b$, les deux rapports

$$\frac{\mathrm{I}}{i^r},\quad \frac{\mathrm{J}}{i^r}$$

auront pour limites respectives, le premier $\frac{1}{0}$, le second, zéro; et par suite, le quotient de ces rapports, ou la fraction

$$\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{I}},$$

aura une limite nulle. Donc la valeur numérique du numérateur J décroîtra beaucoup plus rapidement que celle du dénominateur I, et cette dernière finira par devenir constamment supérieure à l'autre.

Théorème II. — *Soient $a, b, c, \ldots$ les nombres qui indiquent, dans un système déterminé, les ordres de plusieurs quantités infiniment petites, et $a$ le plus petit de ces nombres. La somme des quantités dont il s'agit sera un infiniment petit de l'ordre $a$.*

*Démonstration.* — Soit toujours $i$ la base du système adopté. Soient de plus I, J, ... les quantités données, la première de l'ordre $a$, la seconde de l'ordre $b$, .... Le rapport de la somme $\mathrm{I} + \mathrm{J} + \ldots$ à la quantité I, savoir

$$1 + \frac{\mathrm{J}}{\mathrm{I}} + \ldots,$$

aura pour limite l'unité, attendu que les termes $\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{I}}, \ldots$ auront des limites nulles. Par suite, le produit

$$\left(1 + \frac{\mathrm{J}}{\mathrm{I}} + \ldots\right)\frac{\mathrm{I}}{i^r} = \frac{\mathrm{I} + \mathrm{J} + \ldots}{i^r}.$$

aura la même limite que le rapport

$$\frac{\mathrm{I}}{i^r},$$

et, puisque ce dernier rapport a une limite nulle ou infinie, suivant qu'on suppose $r < a$ ou $r > a$, on pourra en dire autant du rapport

$$\frac{\mathrm{I} + \mathrm{J} + \ldots}{i^r}.$$

Donc $\mathrm{I} + \mathrm{J} + \ldots$ sera une quantité infiniment petite de l'ordre $a$.

*Corollaire.* — Les raisonnements par lesquels nous venons d'établir le théorème I montrent évidemment que, pour de très petites valeurs numériques de la base $i$, la somme de plusieurs quantités infiniment petites, rangées de manière que leurs ordres forment une suite croissante, est positive ou négative, suivant que son premier terme est lui-même positif ou négatif.

Théorème III. — *Dans un système quelconque, le produit de deux quantités infiniment petites dont les ordres sont désignés par $a$ et par $b$ est une autre quantité infiniment petite de l'ordre $a + b$.*

*Démonstration.* — Soient toujours $i$ la base du système que l'on considère, et I, J les quantités données, la première de l'ordre $a$, la seconde de l'ordre $b$. Les rapports

$$\frac{\mathrm{I}}{i^r}, \quad \frac{\mathrm{J}}{i^s}$$

auront des limites nulles, toutes les fois que l'on supposera $r < a$, $s < b$; des limites infinies, toutes les fois que l'on supposera $r > a$, $s > b$, et l'on pourra en dire autant du produit

$$\frac{\mathrm{I}}{i^r}\,\frac{\mathrm{J}}{i^s} = \frac{\mathrm{IJ}}{i^{r+s}}.$$

Il en résulte évidemment que le rapport

$$\frac{\mathrm{IJ}}{i^{r+s}}$$



aura une limite nulle pour $r + s < a + b$, et une limite infinie pour $r + s > a + b$. Donc le produit IJ sera une quantité infiniment petite de l'ordre $a + b$.

*Nota.* — Si l'un des facteurs se réduisait à une quantité finie, le produit serait évidemment du même ordre que l'autre facteur.

*Corollaire.* — Dans un système quelconque, le produit de plusieurs quantités infiniment petites dont les ordres sont désignés par $a$, $b$, $c$, … est une autre quantité infiniment petite de l'ordre $a + b + c + \ldots$.

Théorème IV. — *Si trois quantités infiniment petites sont telles que, la première étant prise pour base, la seconde soit de l'ordre $a$, et que, la seconde étant prise pour base, la troisième soit de l'ordre $b$, celle-ci, dans le système qui a pour base la première, sera d'un ordre équivalent au produit $ab$.*

*Démonstration.* — Soient $i$, I et J les trois quantités données, en sorte que les deux rapports

$$\frac{\mathrm{I}}{i^r}, \quad \frac{\mathrm{J}}{\mathrm{I}^s}$$

aient des limites nulles quand on suppose à la fois $r < a$, $s < b$, et des limites infinies quand on suppose à la fois $r > a$, $s > b$, il est clair que le produit

$$\left(\frac{\mathrm{I}}{i^r}\right)^s \frac{\mathrm{J}}{\mathrm{I}^s} = \frac{\mathrm{J}}{i^{rs}}$$

aura une limite nulle pour $rs < ab$, une limite infinie pour $rs > ab$; et par suite que, si l'on prend $i$ pour base, J sera une quantité infiniment petite de l'ordre $ab$.

*Corollaire I.* — Le rapport entre les ordres de deux quantités infiniment petites J et I reste le même, quelle que soit la base du système que l'on adopte, et ce rapport est équivalent au nombre $b$, qui indique l'ordre de la première quantité, quand on prend pour base la seconde. Donc, si, après avoir déterminé pour une certaine base les ordres de plusieurs quantités infiniment petites, on vient à changer de base, les nombres qui indiquent ces divers ordres croîtront ou décroîtront tous à la fois dans un rapport donné.

*Corollaire II.* — Si l'on suppose, dans le théorème IV, que la quantité J se réduise à la quantité $i$, on aura évidemment

$$ab = 1, \qquad b = \frac{1}{a}.$$

Donc, si, dans le système dont la base est $i$, la quantité I est un infiniment petit de l'ordre $a$, $i$ sera de l'ordre $\frac{1}{a}$ dans le système qui aura pour base la quantité I. Ainsi, par exemple, lorsque I, considéré comme fonction de $i$, est un infiniment petit du premier ordre, on peut en dire autant de $i$ considéré comme fonction de I.

Le second corollaire, réuni au premier, entraîne évidemment le suivant :

*Corollaire III.* — Si deux quantités infiniment petites sont telles que, l'une étant prise pour base, l'autre soit du premier ordre, le nombre qui exprimera l'ordre d'une quantité quelconque restera le même dans les deux systèmes qui auront pour bases les deux quantités données.



# PREMIÈRE LEÇON.

## OBJET DU CALCUL DIFFÉRENTIEL. DÉRIVÉES ET DIFFÉRENTIELLES DES FONCTIONS D'UNE SEULE VARIABLE.

$x, y, z, \ldots$ étant des variables assujetties à vérifier une ou plusieurs équations données, on nomme *différentielles* de $x$, de $y$, de $z$, ... et l'on désigne, au moyen de la lettre caractéristique $d$, par les notations

$$dx, \quad dy, \quad dz, \quad \ldots$$

des quantités dont les rapports sont équivalents aux dernières raisons des accroissements infiniment petits que peuvent prendre simultanément ces mêmes variables. L'objet du Calcul différentiel est de déterminer les rapports des différentielles $dx, dy, dz, \ldots$ quand on connaît les relations qui existent entre les variables $x, y, z, \ldots$, ou, ce qui revient au même, d'évaluer les dernières raisons des différences infiniment petites $\Delta x, \Delta y, \Delta z, \ldots$, c'est-à-dire des accroissements infiniment petits et simultanés de $x, y, z, \ldots$.

Concevons, pour fixer les idées, que l'on considère seulement deux variables, savoir une variable indépendante et une fonction de $x$ représentée par

$$y = f(x).$$

Si la fonction $f(x)$ reste continue entre deux limites données de la variable $x$, et si l'on assigne à cette variable une valeur comprise entre les deux limites dont il s'agit, un accroissement infiniment petit, attribué à la variable, produira un accroissement infiniment petit de la fonction elle-même. Donc, si l'on pose alors $\Delta x = i$, les deux termes du rapport aux différences

$$(1) \qquad \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+i)-f(x)}{i}$$

seront des quantités infiniment petites. Mais, tandis que ces deux termes s'approcheront indéfiniment et simultanément de la limite zéro, le rapport lui-même pourra converger vers une autre limite, soit positive, soit négative, qui sera la dernière raison des différences infiniment petites $\Delta y$ et $\Delta x$. Cette limite, ou cette dernière raison, lorsqu'elle existe, a une valeur déterminée pour chaque valeur particulière de $x$; mais elle varie avec $x$. Ainsi, par exemple, si l'on prend $f(x) = x^m$, $m$ désignant un nombre entier, le rapport entre les différences infiniment petites sera

$$\frac{(x+i)^m - x^m}{i} = m x^{m-1} + \frac{m(m-1)}{1.2} x^{m-2} i + \ldots + i^{m-1},$$

et il aura pour limite la quantité $m x^{m-1}$, c'est-à-dire une nouvelle fonction de la variable $x$. Il en sera de même en général; seulement, la forme de la fonction nouvelle qui servira de limite au rapport

$$\frac{f(x+i)-f(x)}{i}$$

dépendra de la forme de la fonction proposée $y = f(x)$. Pour indiquer cette dépendance, on donne à la nouvelle fonction le nom de *fonction dérivée*, et on la désigne, à l'aide d'un accent, par la notation

$$y' \quad \text{ou} \quad f'(x).$$

Cela posé, les différentielles $dx$, $dy$ de la variable indépendante $x$ et de la fonction $y = f(x)$ seront des quantités tellement choisies, que leur rapport $\frac{dy}{dx}$ coïncide avec la dernière raison des quantités infiniment petites $\Delta y$, $\Delta x$, c'est-à-dire avec la limite $y' = f'(x)$ du rap-



port $\frac{\Delta y}{\Delta x}$. Ces différentielles seront donc liées entre elles par l'équation

$$(2) \qquad \frac{dy}{dx} = y'$$

ou

$$(3) \qquad dy = y'\,dx,$$

que l'on peut aussi présenter sous l'une des formes

$$(4) \qquad \frac{d f(x)}{dx} = f'(x),$$

$$(5) \qquad d f(x) = f'(x)\,dx.$$

En vertu de l'équation (2) ou (3), la différentielle $dy$ se trouve complètement déterminée, dès qu'on a fixé la forme de la fonction

$$y' = f'(x)$$

et la valeur de la quantité $dx$. Quant à cette dernière quantité, qui représente la différentielle de la variable indépendante, elle reste entièrement arbitraire, et l'on peut la supposer égale à une constante finie $h$, ou même la considérer comme une quantité infiniment petite.

Il résulte des formules (3) et (5) que la dérivée $y' = f'(x)$ d'une fonction quelconque $y = f(x)$ est précisément égale à $\frac{dy}{dx}$, c'est-à-dire au rapport entre la différentielle de la fonction et celle de la variable ou, si l'on veut, au coefficient par lequel il faut multiplier la seconde différentielle pour obtenir la première. C'est pour cette raison qu'on donne quelquefois à la fonction dérivée le nom de *coefficient différentiel*.

*Différentier* une fonction, c'est trouver sa différentielle. L'opération par laquelle on différentie s'appelle *différentiation*.

Il est facile d'obtenir la fonction dérivée $y' = \frac{dy}{dx}$, lorsqu'on prend pour $y$ une des fonctions simples

$$a + x, \quad a - x, \quad ax, \quad \frac{a}{x}, \quad x^a, \quad A^x, \quad Lx,$$

$$\sin x, \quad \cos x, \quad \arcsin x, \quad \arccos x,$$

A désignant un nombre constant, $a = \pm A$ une quantité constante, et la lettre L indiquant un logarithme calculé dans le système dont la base est A. On trouvera, par exemple, pour $y = a + x$,

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(a+x+i)-(a+x)}{i} = 1, \qquad y' = \frac{dy}{dx} = 1;$$

pour $y = a - x$,

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(a-x-i)-(a-x)}{i} = -1, \qquad y' = \frac{dy}{dx} = -1;$$

pour $y = ax$,

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{a(x+i)-ax}{i} = a, \qquad y' = \frac{dy}{dx} = a;$$

pour $y = \frac{a}{x}$,

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\frac{a}{x+i} - \frac{a}{x}}{i} = -\frac{a}{x(x+i)}, \qquad y' = \frac{dy}{dx} = -\frac{a}{x^2};$$

pour $y = \sin x$,

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\sin\frac{1}{2}i}{\frac{1}{2}i}\cos\left(x + \frac{1}{2}i\right), \qquad y' = \frac{dy}{dx} = \cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right);$$

pour $y = \cos x$,

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = -\frac{\sin\frac{1}{2}i}{\frac{1}{2}i}\sin\left(x + \frac{1}{2}i\right), \qquad y' = \frac{dy}{dx} = -\sin x = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right).$$

De plus, en posant $A^i = 1 + I$ et ayant égard à la formule (4) des Préliminaires, on trouvera, pour $y = A^x$,

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{A^{x+i} - A^x}{i} = \frac{A^i - 1}{i}A^x = \frac{I}{L(1+I)}A^x, \qquad y' = \frac{dy}{dx} = \frac{A^x}{Le}.$$

Enfin, si l'on pose, pour abréger,

$$\frac{i}{x} = \alpha \qquad \text{et} \qquad (1+\alpha)^a - 1 = \beta,$$

on aura pour $y = Lx$,

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{L(x+i) - Lx}{i} = \frac{L\left(1 + \frac{i}{x}\right)}{i} = \frac{L(1+\alpha)}{\alpha}\frac{1}{x}, \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{Le}{x};$$



pour $y = x^a$,

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(x+i)^a - x^a}{i} = x^a\frac{\left(1 + \frac{i}{x}\right)^a - 1}{i} = \frac{(1+\alpha)^a - 1}{\alpha}x^{a-1} = \frac{\beta}{\alpha}x^{a-1}.$$

Il reste à trouver la limite du rapport entre les deux quantités infiniment petites $\alpha$ et $\beta$ liées entre elles par l'équation

$$(1+\alpha)^a = 1 + \beta.$$

Or on tirera de cette dernière

$$(6) \qquad a\,l(1+\alpha) = l(1+\beta).$$

D'ailleurs, en vertu de la formule (3) des Préliminaires, on aura

$$\frac{l(1+\alpha)}{\alpha} = 1 + \gamma, \qquad \frac{l(1+\beta)}{\beta} = 1 + \delta,$$

$\gamma$, $\delta$ désignant des quantités infiniment petites. Par suite, l'équation (6) donnera

$$a\alpha(1+\gamma) = \beta(1+\delta),$$

et l'on en conclura

$$\frac{\beta}{\alpha} = a\frac{1+\gamma}{1+\delta}, \qquad \lim\frac{\beta}{\alpha} = a.$$

En conséquence, on aura définitivement, pour $y = x^a$,

$$y' = \frac{dy}{dx} = ax^{a-1}.$$

Si, dans les fonctions $A^x$ et $Lx$, on réduisait le nombre A au nombre

$$e = 2,7182818\ldots,$$

et la lettre caractéristique L à la lettre l qui désigne les logarithmes népériens, on trouverait pour $y = e^x$,

$$y' = \frac{dy}{dx} = e^x;$$

pour $y = lx$,

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}.$$

Les diverses formules qui précèdent peuvent être renfermées dans le Tableau suivant :

$$(7)\quad \left\{\begin{array}{ll} d(a+x)=dx, & d(a-x)=-dx, \\ d(ax)\;=a\,dx, & d\left(\frac{a}{x}\right)\;=-a\frac{dx}{x^2}; \\ \multicolumn{2}{c}{d(x^a)=ax^{a-1}\,dx;} \\ dA^x\;=A^x\,\mathrm{l}A, & de^x\;=e^x\,dx; \\ d\,\mathrm{L}x=\mathrm{L}e\frac{dx}{x}, & d\,\mathrm{l}x=\frac{dx}{x}; \\ \multicolumn{2}{l}{d\sin x=\;\;\cos x\,dx=\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)dx,} \\ \multicolumn{2}{l}{d\cos x=-\sin x\,dx=\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)dx.} \end{array}\right.$$

Comme elles sont établies seulement pour les valeurs réelles de $x$ auxquelles correspondent des valeurs réelles des fonctions placées à la suite de la lettre $d$, on doit supposer $x$ positive, dans celles de ces formules qui se rapportent aux fonctions $\mathrm{L}x$, $\mathrm{l}x$, et même à la fonction $x^a$, lorsque $a$ désigne une fraction de dénominateur pair ou un nombre irrationnel.

Soit maintenant $z$ une seconde fonction de $x$, liée à la première $y=f(x)$ par la formule

$$z=\mathrm{F}(y).$$

$z$ ou $\mathrm{F}[f(x)]$ sera ce qu'on appelle une *fonction de fonction* de la variable $x$; et, si l'on désigne par $\Delta x$, $\Delta y$, $\Delta z$ les accroissements infiniment petits et simultanés des trois variables $x, y, z$, on trouvera

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x},\qquad \frac{\Delta z}{\Delta y}=\frac{\mathrm{F}(y+\Delta y)-\mathrm{F}(y)}{\Delta y},$$

puis, en passant aux limites, et substituant aux dernières raisons des accroissements infiniment petits $\Delta x$, $\Delta y$, $\Delta z$ les rapports des différentielles $dx$, $dy$, $dz$, on obtiendra d'une part l'équation (4) ou (5), et d'autre part la formule

$$(8)\qquad \frac{dz}{dy}=\mathrm{F}'(y)$$



ou

$$(9)\qquad dz=\mathrm{F}'(y)\,dy,$$

ou, ce qui revient au même,

$$(10)\qquad d\,\mathrm{F}(y)=\mathrm{F}'(y)\,dy.$$

L'équation (10) est semblable, pour la forme, à l'équation (5), et fournit le moyen de différentier une fonction de $y$, lors même que $y$ n'est pas la variable indépendante. Seulement la différentielle $dx$ ou $dy$, qui, dans le second membre, sert de coefficient à la fonction dérivée $f'(x)$ ou $\mathrm{F}'(y)$ est, dans l'équation (5), une quantité constante et, dans l'équation (8), une quantité variable égale au produit de la constante $dx$ par la fonction $f'(x)$.

En attribuant successivement aux fonctions $y=f(x)$ et $\mathrm{F}(y)$ différentes formes, on tirera de l'équation (10)

$$d(a+y)=dy,\quad d(-y)=-dy,\quad d(ay)=a\,dy,\quad d\frac{1}{y}=-\frac{dy}{y^2},$$

$$dA^y=A^y\,\mathrm{l}A\,dy,\quad de^y=e^y\,dy,\quad d\,\mathrm{L}y=\mathrm{L}e\frac{dy}{y},\quad d\,\mathrm{l}y=\frac{dy}{y},$$

$$d\,\mathrm{l}y^2=\frac{dy^2}{y^2}=\frac{2\,dy}{y},\quad d\frac{1}{2}\mathrm{l}y^2=\frac{dy}{y},\quad \ldots,$$

$$d(ax^m)=a\,dx^m=max^{m-1}\,dx,\quad dA^{B^x}=A^{B^x}\,\mathrm{l}A\,dB^x=A^{B^x}B^x\,\mathrm{l}A\,\mathrm{l}B\,dx,$$

$$de^{e^x}=e^{e^x}\,de^x=e^{e^x}e^x\,dx,\quad de^{x^2}=e^{x^2}\,dx^2=2xe^{x^2}\,dx,$$

$$\begin{aligned} d\,\mathrm{séc}\,x &= d\frac{1}{\cos x}=-\frac{d\cos x}{\cos^2 x}=\frac{\sin x\,dx}{\cos^2 x}, \\ d\,\mathrm{coséc}\,x &= d\frac{1}{\sin x}=-\frac{d\sin x}{\sin^2 x}=-\frac{\cos x\,dx}{\sin^2 x}, \\ d\,\mathrm{l}\sin x &= \frac{d\sin x}{\sin x}=\frac{\cos x\,dx}{\sin x}=\frac{dx}{\mathrm{tang}\,x}, \\ d\,\mathrm{l}\cos x &= \frac{d\cos x}{\cos x}=-\frac{\sin x\,dx}{\cos x}=-\frac{dx}{\cot x}, \end{aligned}$$

.........................................

La première de ces formules prouve que *l'addition d'une constante à une fonction n'en altère pas la différentielle, ni par conséquent la dérivée.*

On peut encore, à l'aide de la formule (10), déterminer facilement les différentielles des fonctions simples $x^a$, $\arc \sin x$, $\arc \cos x$, en supposant connues celles des fonctions $lx$, $\sin x$, $\cos x$. On trouvera, en effet, pour $y = x^a$,

$$ly = a\,lx, \qquad \frac{dy}{y} = a\frac{dx}{x}, \qquad \frac{dy}{dx} = a\frac{y}{x} = ax^{a-1};$$

pour $y = \operatorname{arc\,sin} x$,

$$\sin y = x, \qquad \cos y\,dy = dx, \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}};$$

pour $y = \operatorname{arc\,cos} x$,

$$\cos y = x, \qquad -\sin y\,dy = dx, \qquad \frac{dy}{dx} = -\frac{1}{\sin y} = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

On aura donc

$$d\operatorname{arc\,sin} x = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}, \qquad d\operatorname{arc\,cos} x = -\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}. \tag{11}$$

On doit, dans les formules (11), supposer la variable $x$ renfermée entre les limites $-1$, $+1$, afin que les fonctions $\operatorname{arc\,sin} x$, $\operatorname{arc\,cos} x$ conservent des valeurs réelles.

Si l'on divise par $dx$ les deux membres de l'équation (9), on en tirera

$$z' = y'\,F'(y) = f'(x)\,F'[f(x)]. \tag{12}$$

Cette dernière formule sert à déterminer la dérivée d'une fonction de fonction.

Nous remarquerons, en finissant, que les différentielles des fonctions composées se déterminent quelquefois aussi facilement que celles des fonctions simples. Ainsi, par exemple, on trouve pour $y = \operatorname{tang} x = \frac{\sin x}{\cos x}$,

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{i}\left[\frac{\sin(x+i)}{\cos(x+i)} - \frac{\sin x}{\cos x}\right] = \frac{\sin i}{i}\,\frac{1}{\cos x\cos(x+i)}, \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\cos^2 x};$$



pour $y = \cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$,

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{i}\left[\frac{\cos(x+i)}{\sin(x+i)} - \frac{\cos x}{\sin x}\right] = -\frac{\sin i}{i}\,\frac{1}{\sin x\sin(x+i)}, \qquad \frac{dy}{dx} = -\frac{1}{\sin^2 x};$$

et l'on en conclut, pour $y = \operatorname{arc\,tang} x$,

$$\operatorname{tang} y = x, \qquad \frac{dy}{\cos^2 y} = dx, \qquad \frac{dy}{dx} = \cos^2 y = \frac{1}{1+x^2};$$

pour $y = \operatorname{arc\,cot} x$,

$$\cot y = x, \qquad -\frac{dy}{\sin^2 y} = dx, \qquad \frac{dy}{dx} = -\sin^2 y = -\frac{1}{1+x^2}.$$

On aura en conséquence

$$\left\{\begin{aligned} d\operatorname{tang} x &= \frac{dx}{\cos^2 x}, & d\cot x &= -\frac{dx}{\sin^2 x}, \\ d\operatorname{arc\,tang} x &= \frac{dx}{1+x^2}, & d\operatorname{arc\,cot} x &= -\frac{dx}{1+x^2}. \end{aligned}\right. \tag{13}$$

## DEUXIÈME LEÇON.

LA DIFFÉRENTIELLE DE LA SOMME DE PLUSIEURS FONCTIONS EST LA SOMME DE LEURS DIFFÉRENTIELLES. CONSÉQUENCES DE CE PRINCIPE. DIFFÉRENTIELLES DES FONCTIONS IMAGINAIRES.

Dans la Leçon précédente, nous avons montré comment l'on forme les dérivées et les différentielles des fonctions d'une seule variable. Nous allons ajouter aux recherches que nous avons faites à ce sujet de nouveaux développements.

Soient toujours $x$ la variable indépendante, et $\Delta x$ un accroissement infiniment petit attribué à cette variable. Si l'on désigne par $s$, $u$, $v$, $w$, ... plusieurs fonctions de $x$, et par $\Delta s$, $\Delta u$, $\Delta v$, $\Delta w$, ... les accroissements simultanés qu'elles reçoivent, tandis que l'on fait croître $x$ de $\Delta x$, les différentielles $ds$, $du$, $dv$, $dw$, ... seront, d'après leur définition même, respectivement égales aux limites des rapports

$$\frac{\Delta s}{\Delta x}dx,\quad \frac{\Delta u}{\Delta x}dx,\quad \frac{\Delta v}{\Delta x}dx,\quad \frac{\Delta w}{\Delta x}dx,\quad \ldots.$$

Donc, si l'on fait, pour abréger, $\frac{\Delta x}{dx} = \alpha$, ces différentielles seront encore équivalentes aux limites des rapports

$$\frac{\Delta s}{\alpha},\quad \frac{\Delta u}{\alpha},\quad \frac{\Delta v}{\alpha},\quad \frac{\Delta w}{\alpha},\quad \ldots.$$

Cela posé, concevons d'abord que la fonction $s$ soit la somme de toutes les autres, en sorte qu'on ait

$$s = u + v + w + \ldots. \tag{1}$$



On trouvera successivement

$$\Delta s = \Delta u + \Delta v + \Delta w + \ldots,$$

$$\frac{\Delta s}{\alpha} = \frac{\Delta u}{\alpha} + \frac{\Delta v}{\alpha} + \frac{\Delta w}{\alpha} + \ldots,$$

puis, en passant aux limites,

$$ds = du + dv + dw + \ldots. \tag{2}$$

Lorsqu'on divise par $dx$ les deux membres de cette dernière équation, elle devient

$$s' = u' + v' + w' + \ldots. \tag{3}$$

De la formule (2) ou (3), comparée à l'équation (1), il résulte que *la différentielle ou la dérivée de la somme de plusieurs fonctions est la somme de leurs différentielles ou de leurs dérivées.* De ce principe découlent, comme on va le voir, de nombreuses conséquences.

Premièrement, si l'on désigne par $m$ un nombre entier, et par $a$, $b$, $c$, ..., $p$, $q$, $r$ des quantités constantes, on trouvera

$$d(u+v) = du + dv,\quad d(u-v) = du - dv,\quad d(au+bv) = a\,du + b\,dv, \tag{4}$$

$$d(au + bv + cw + \ldots) = a\,du + b\,dv + c\,dw + \ldots, \tag{5}$$

$$\left\{\begin{aligned} & d(ax^m + bx^{m-1} + cx^{m-2} + \ldots + px^2 + qx + r) \\ & \quad = [max^{m-1} + (m-1)bx^{m-2} + (m-2)cx^{m-3} + \ldots + 2px + q]\,dx. \end{aligned}\right. \tag{6}$$

Le polynôme $ax^m + bx^{m-1} + cx^{m-2} + \ldots + px^2 + qx + r$, dont tous les termes sont proportionnels à des puissances entières de la variable $x$, est ce qu'on nomme une *fonction entière* de cette variable. Si on le désigne par $s$, on aura, en vertu de l'équation (6),

$$s' = max^{m-1} + (m-1)bx^{m-2} + (m-2)cx^{m-3} + \ldots + 2px + q.$$

Donc, *pour obtenir la dérivée d'une fonction entière de $x$, il suffit de multiplier chaque terme par l'exposant de la variable, et de diminuer chaque exposant d'une unité.* Il est aisé de voir que cette proposition subsiste dans le cas où la variable devient imaginaire.

Soit maintenant

$$s = uvw\ldots. \tag{7}$$

Comme on aura, en supposant les fonctions $u$, $v$, $w$, ... toutes positives,

$$\mathrm{l}s = \mathrm{l}u + \mathrm{l}v + \mathrm{l}w + \ldots, \tag{8}$$

et, dans tous les cas possibles, $s^2 = u^2 v^2 w^2 \ldots$,

$$\frac{1}{2}\mathrm{l}s^2 = \frac{1}{2}\mathrm{l}u^2 + \frac{1}{2}\mathrm{l}v^2 + \frac{1}{2}\mathrm{l}w^2 + \ldots, \tag{9}$$

l'application du principe énoncé à la formule (8) ou à la formule (9) fournira l'équation

$$\frac{ds}{s} = \frac{du}{u} + \frac{dv}{v} + \frac{dw}{w} + \ldots, \tag{10}$$

de laquelle on conclura

$$\begin{cases} d(uvw\ldots) = uvw\ldots\left(\dfrac{du}{u} + \dfrac{dv}{v} + \dfrac{dw}{w} + \ldots\right) \\ \qquad = vw\ldots du + uw\ldots dv + uv\ldots dw + \ldots. \end{cases} \tag{11}$$

*Exemples :*

$$d(uv) = u\,dv + v\,du, \qquad d(uvw) = vw\,du + uw\,dv + uv\,dw,$$

$$d(x\,\mathrm{l}x) = (1 + \mathrm{l}x)\,dx, \qquad d(x^a e^{-x}) = x^a e^{-x}\left(\frac{a}{x} - 1\right), \qquad \ldots.$$

Soit encore

$$s = \frac{u}{v}. \tag{12}$$

En différentiant $\mathrm{l}s$ ou $\frac{1}{2}\mathrm{l}s^2$, on trouvera

$$\frac{ds}{s} = \frac{du}{u} - \frac{dv}{v}, \qquad ds = \frac{u}{v}\left(\frac{du}{u} - \frac{dv}{v}\right) \tag{13}$$

et, par suite,

$$d\frac{u}{v} = \frac{v\,du - u\,dv}{v^2}. \tag{14}$$



On arriverait au même résultat, en observant que la différentielle de $\frac{u}{v}$ est équivalente à

$$d\left(u\frac{1}{v}\right) = \frac{1}{v}du + u\,d\frac{1}{v} = \frac{du}{v} - \frac{u\,dv}{v^2}.$$

*Exemples :*

$$d\,\mathrm{tang}\,x = d\frac{\sin x}{\cos x} = \frac{\cos x\,d\sin x - \sin x\,d\cos x}{\cos^2 x} = \frac{dx}{\cos^2 x},$$

$$d\cot x = -\frac{dx}{\sin^2 x}, \qquad d\frac{a}{x} = -\frac{a\,dx}{x^2}, \qquad d\frac{e^{ax}}{x} = \frac{e^{ax}}{x}\left(a - \frac{1}{x}\right)dx,$$

$$d\frac{\mathrm{l}x}{x} = \frac{1 - \mathrm{l}x}{x^2}dx, \qquad d\frac{b}{a + x} = \frac{-b\,dx}{(a + x)^2}.$$

Si les fonctions $u$, $v$ se réduisent à des fonctions entières, le rapport $\frac{u}{v}$ deviendra ce qu'on nomme une *fraction rationnelle*. On déterminera facilement sa différentielle à l'aide des formules (6) et (14).

Après avoir formé les différentielles du produit $uvw\ldots$ et du quotient $\frac{u}{v}$, on obtiendra sans peine celles de plusieurs autres expressions, telles que $u^v$, $u^{\frac{1}{v}}$, $u^{v^w}$, .... En effet, on trouvera pour $s = u^v$,

$$\mathrm{l}s = v\,\mathrm{l}u, \qquad \frac{ds}{s} = v\frac{du}{u} + \mathrm{l}u\,dv, \qquad ds = vu^{v-1}du + u^v\,\mathrm{l}u\,dv;$$

pour $s = u^{\frac{1}{v}}$,

$$\mathrm{l}s = \frac{1}{v}\mathrm{l}u, \qquad \frac{ds}{s} = \frac{du}{uv} - \mathrm{l}u\frac{dv}{v^2}, \qquad ds = u^{\frac{1}{v}-1}\frac{du}{v} - u^{\frac{1}{v}}\mathrm{l}u\frac{dv}{v^2};$$

pour $s = u^{v^w}$,

$$\mathrm{l}s = v^w\,\mathrm{l}u, \qquad ds = u^{v^w} v^w\left(\frac{du}{u} + \frac{w}{v}\mathrm{l}u\,dv + \mathrm{l}u\,\mathrm{l}v\,dw\right);$$

etc.

*Exemples :*

$$dx^x = x^x(1 + \mathrm{l}x)\,dx, \qquad dx^{\frac{1}{x}} = \frac{1 - \mathrm{l}x}{x^2}x^{\frac{1}{x}}dx, \qquad dx^{x^x} = \ldots.$$

Nous terminerons cette Leçon en recherchant la différentielle d'une *fonction imaginaire.* On nomme ainsi toute expression qui peut être ramenée à la forme $u+v\sqrt{-1}$, $u$ et $v$ désignant deux fonctions réelles. Cela posé, si l'on appelle *limite* d'une expression imaginaire variable ce que devient cette expression quand on y remplace la partie réelle et le coefficient de $\sqrt{-1}$ par leurs limites respectives, et si, de plus, on étend aux fonctions imaginaires les définitions que nous avons données pour les différences, les différentielles et les dérivées des fonctions réelles, on reconnaitra que l'équation

$$s=u+v\sqrt{-1}$$

entraine les suivantes :

$$\Delta s=\Delta u+\Delta v\sqrt{-1},\qquad \frac{\Delta s}{\Delta x}=\frac{\Delta u}{\Delta x}+\frac{\Delta v}{\Delta x}\sqrt{-1},\qquad \frac{\Delta s}{\alpha}=\frac{\Delta u}{\alpha}+\frac{\Delta v}{\alpha}\sqrt{-1}.$$

On aura en conséquence

$$(15)\qquad d(u+v\sqrt{-1})=du+dv\sqrt{-1}.$$

La forme de cette dernière équation est semblable à celle des équations (4).

Si l'on suppose en particulier

$$s=\cos x+\sqrt{-1}\sin x,$$

on trouvera

$$ds=\left[\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)+\sqrt{-1}\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)\right]dx=s\sqrt{-1}\,dx.$$

Ajoutons que les formules (4), (5), (6), (11) et (14) subsisteront lors même que les constantes $a, b, c, \ldots, p, q, r$, ou les fonctions $u$, $v$, $w$, ..., comprises dans ces formules, deviendront imaginaires.



# TROISIÈME LEÇON.

## DIFFÉRENTIELLES ET DÉRIVÉES DES DIVERS ORDRES POUR LES FONCTIONS D'UNE SEULE VARIABLE. CHANGEMENT DE LA VARIABLE INDÉPENDANTE.

Comme les fonctions d'une seule variable $x$ ont ordinairement pour dérivées d'autres fonctions de cette variable, il est clair que d'une fonction donnée $y=f(x)$ on pourra déduire en général une multitude de fonctions nouvelles dont chacune sera la dérivée de la précédente. Ces fonctions nouvelles sont ce qu'on nomme les *dérivées des divers ordres* de $y$ ou $f(x)$, et on les indique à l'aide des notations

$$y',\quad y'',\quad y''',\quad y^{\text{IV}},\quad y^{\text{V}},\quad \ldots,\quad y^{(n)},$$

ou

$$f'(x),\quad f''(x),\quad f'''(x),\quad f^{\text{IV}}(x),\quad f^{\text{V}}(x),\quad \ldots,\quad f^{(n)}(x).$$

Cela posé, $y'$ ou $f'(x)$ sera la dérivée du premier ordre de la fonction proposée $y=f(x)$; $y''$ ou $f''(x)$ sera la dérivée du second ordre de $y$, et en même temps la dérivée du premier ordre de $y'$; etc.; enfin $y^{(n)}$ ou $f^{(n)}(x)$ ($n$ désignant un nombre entier quelconque) sera la dérivée de l'ordre $n$ de $y$, et en même temps la dérivée du premier ordre de $y^{(n-1)}$.

Soit maintenant $dx=h$ la différentielle de la variable $x$ supposée indépendante. On aura, d'après ce qu'on vient de dire,

$$(1)\qquad y'=\frac{dy}{dx},\qquad y''=\frac{dy'}{dx},\qquad y'''=\frac{dy''}{dx},\qquad \ldots,\qquad y^{(n)}=\frac{dy^{(n-1)}}{dx}$$

ou, ce qui revient au même,

$$(2)\qquad dy=y'h,\qquad dy'=y''h,\qquad dy''=y'''h,\qquad \ldots,\qquad dy^{(n-1)}=y^{(n)}h.$$

De plus, comme la différentielle d'une fonction de la variable $x$ est une autre fonction de cette variable, rien n'empêche de différentier $y$ plusieurs fois de suite. On obtiendra de cette manière les *différentielles des divers ordres* de la fonction $y$, savoir :

$$\begin{aligned} dy &= y'h = y'\,dx, \\ d\,dy &= h\,dy' = y''h^2 = y''\,dx^2, \\ d\,d\,dy &= h^2\,dy'' = y'''h^3 = y'''\,dx^3, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

Pour abréger, on écrit simplement $d^2y$ au lieu de $d\,dy$, $d^3y$ au lieu de $d\,d\,dy$, etc.; en sorte que la différentielle du premier ordre est représentée par $dy$, la différentielle du second ordre par $d^2y$, celle du troisième ordre par $d^3y$, etc., et généralement la différentielle de l'ordre $n$ par $d^ny$. Ces conventions étant admises, on aura évidemment

$$(3)\quad \begin{cases} dy = y'\,dx, \quad d^2y = y''\,dx^2, \quad d^3y = y'''\,dx^3, \quad d^4y = y^{\text{IV}}\,dx^4, \quad \ldots, \\ \qquad d^ny = y^{(n)}\,dx^n, \end{cases}$$

et, par suite,

$$(4)\quad y' = \frac{dy}{dx}, \quad y'' = \frac{d^2y}{dx^2}, \quad y''' = \frac{d^3y}{dx^3}, \quad y^{\text{IV}} = \frac{d^4y}{dx^4}, \quad \ldots, \quad y^{(n)} = \frac{d^ny}{dx^n}.$$

Il résulte de la dernière des formules (3) que la dérivée de l'ordre $n$, savoir $y^{(n)}$, est précisément le coefficient par lequel il faut multiplier la $n^{\text{ième}}$ puissance de la constante $h = dx$ pour obtenir la différentielle de l'ordre $n$. C'est pour cette raison que $y^{(n)}$ est quelquefois appelée le *coefficient différentiel de l'ordre n*.

Les méthodes par lesquelles on détermine les différentielles et les dérivées du premier ordre pour les fonctions d'une seule variable servent également à calculer leurs différentielles et leurs dérivées des ordres supérieurs. Les calculs de cette espèce s'effectuent très facilement, ainsi qu'on va le montrer par des exemples.

Soit d'abord $y = \sin x$. Comme, en désignant par $a$ une quantité



constante, on a généralement

$$d\sin(x+a) = \cos(x+a)\,d(x+a) = \sin(x+a+\tfrac{1}{2}\pi)\,dx,$$

on en conclura

$$\begin{aligned} d\sin x &= \sin(x+\tfrac{1}{2}\pi)\,dx, \\ d\sin(x+\tfrac{1}{2}\pi) &= \sin(x+\pi)\,dx, \\ d\sin(x+\pi) &= \sin(x+\tfrac{3}{2}\pi)\,dx, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{aligned}$$

et par suite on trouvera pour $y = \sin x$,

$$y' = \sin(x+\tfrac{1}{2}\pi), \quad y'' = \sin(x+\pi), \quad y''' = \sin(x+\tfrac{3}{2}\pi), \quad \ldots,$$
$$y^{(n)} = \sin\left(x + \frac{n}{2}\pi\right).$$

En opérant de même, on trouvera encore, pour $y = \cos x$,

$$y' = \cos(x+\tfrac{1}{2}\pi), \quad y'' = \cos(x+\pi), \quad y''' = \cos(x+\tfrac{3}{2}\pi), \quad \ldots,$$
$$y^{(n)} = \cos\left(x + \frac{n}{2}\pi\right);$$

pour $y = A^x$,

$$y' = A^x(lA), \quad y'' = A^x(lA)^2, \quad y''' = A^x(lA)^3, \quad \ldots, \quad y^{(n)} = A^x(lA)^n;$$

pour $y = x^a$,

$$y' = ax^{a-1}, \quad y'' = a(a-1)x^{a-2}, \quad \ldots,$$
$$y^{(n)} = a(a-1)(a-2)\ldots(a-n+1)x^{a-n}.$$

Il est essentiel d'observer que chacune des expressions $\sin(x+\frac{1}{2}n\pi)$, $\cos(x+\frac{1}{2}n\pi)$ admet seulement quatre valeurs distinctes qui se reproduisent périodiquement et toujours dans le même ordre. Ces quatre valeurs, dont on obtient la première, la seconde, la troisième ou la quatrième, suivant que le nombre entier $n$, divisé par 4, donne pour reste 0, 1, 2 ou 3, sont respectivement $\sin x$, $\cos x$, $-\sin x$, $-\cos x$, pour l'expression $\sin(x+\frac{1}{2}n\pi)$, et $\cos x$, $-\sin x$, $-\cos x$, $\sin x$, pour l'expression $\cos(x+\frac{1}{2}n\pi)$. De plus, si, dans les fonctions $A^x$, $x^a$, on remplace la lettre A par le nombre $e$ qui sert de base aux logarithmes népériens, et la quantité $a$ par le nombre entier $n$, on reconnaîtra que les dérivées successives de $e^x$ sont toutes égales à $e^x$, tandis que, pour la fonction $x^n$, la dérivée de l'ordre $n$ se réduit à la quantité constante $1.2.3\ldots n$, et les suivantes à zéro.

En substituant les différentielles aux dérivées, on tirera des formules que nous venons d'établir

$$d^n \sin x = \sin(x + \tfrac{1}{2} n\pi)\, dx^n, \qquad d^n \cos x = \cos(x + \tfrac{1}{2} n\pi)\, dx^n,$$
$$d^n A^x = A^x (\mathrm{l} A)^n\, dx^n, \qquad d^n e^x = e^x\, dx^n,$$
$$d^n x^a = a(a-1)\ldots(a-n+1)\, x^{a-n}\, dx^n, \qquad d^n x^n = 1.2.3\ldots n\, dx^n,$$
$$d^n \mathrm{l} x = dx\, d^{n-1}(x^{-1}) = (-1)^{n-1} \frac{1.2.3\ldots(n-1)}{x^n}\, dx^n, \qquad \ldots.$$

Considérons encore les deux fonctions $f(x+a)$ et $f(ax)$. On trouvera pour $y = f(x+a)$,

$$y' = f'(x+a), \qquad y'' = f''(x+a), \qquad \ldots, \qquad y^{(n)} = f^{(n)}(x+a),$$
$$d^n y = f^{(n)}(x+a)\, dx^n;$$

pour $y = f(ax)$,

$$y' = a\, f'(ax), \qquad y'' = a^2 f''(ax), \qquad \ldots, \qquad y^{(n)} = a^n f^{(n)}(ax),$$
$$d^n y = a^n f^{(n)}(ax)\, dx^n.$$

*Exemples :*

$$d^n (x+a)^n = 1.2.3\ldots n\, dx^n, \qquad d^n e^{ax} = a^n e^{ax}\, dx^n, \qquad d^n \sin ax = \ldots.$$

Soient maintenant $y = f(x)$ et $z$ deux fonctions de $x$ liées par l'équation

$$z = F(y). \tag{5}$$

En différentiant cette équation plusieurs fois de suite, on trouvera

$$(6) \qquad \begin{cases} dz = F'(y)\, dy, \\ d^2 z = F''(y)\, dy^2 + F'(y)\, d^2 y, \\ d^3 z = F'''(y)\, dy^3 + 3 F''(y)\, dy\, d^2 y + F'(y)\, d^3 y, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$



*Exemples :*

$$d^n (a+y) = d^n y, \qquad d^n(-y) = -d^n y,$$
$$d^n (ay) = a\, d^n y, \qquad d^n (ax^n) = 1.2.3\ldots n.a\, dx^n,$$
$$de^y = e^y\, dy, \qquad d^2 e^y = e^y (dy^2 + d^2 y),$$
$$d^3 e^y = e^y (dy^3 + 3\, dy\, d^2 y + d^3 y), \qquad \ldots.$$

Si la variable $x$ cessait d'être indépendante, l'équation

$$y = f(x), \tag{7}$$

étant différentiée plusieurs fois de suite, donnerait naissance à de nouvelles formules parfaitement semblables aux équations (6), savoir

$$(8) \qquad \begin{cases} dy = f'(x)\, dx, \\ d^2 y = f''(x)\, dx^2 + f'(x)\, d^2 x, \\ d^3 y = f'''(x)\, dx^3 + 3 f''(x)\, dx\, d^2 x + f'(x)\, d^3 x, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

On tire de celles-ci

$$(9) \qquad \begin{cases} f'(x) = \dfrac{dy}{dx}, \\ f''(x) = \dfrac{dx\, d^2 y - dy\, d^2 x}{dx^3} = \dfrac{1}{dx}\, d\dfrac{dy}{dx}, \\ f'''(x) = \dfrac{dx(dx\, d^3 y - dy\, d^3 x) - 3\, d^2 x(dx\, d^2 y - dy\, d^2 x)}{dx^5} = \dfrac{1}{dx}\, d\dfrac{dx\, d^2 y - dy\, d^2 x}{dx^3}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

Pour revenir au cas où $x$ est variable indépendante, il suffirait de supposer la différentielle $dx$ constante, et par suite

$$d^2 x = 0, \qquad d^3 x = 0, \qquad \ldots.$$

Alors les formules (9) deviendraient

$$f'(x) = \frac{dy}{dx}, \qquad f''(x) = \frac{d^2 y}{dx^2}, \qquad f'''(x) = \frac{d^3 y}{dx^3}, \qquad \ldots, \tag{10}$$

c'est-à-dire qu'elles se réduiraient aux équations (4). De ces dernières, comparées aux équations (9), il résulte que, si l'on exprime les dérivées successives de $f(x)$ à l'aide des différentielles des variables $x$ et $y=f(x)$ : 1° dans le cas où la variable $x$ est supposée indépendante; 2° dans le cas où elle cesse de l'être, la dérivée du premier ordre sera la seule dont l'expression reste la même dans les deux hypothèses. Ajoutons que, pour passer du premier cas au second, il faudra remplacer

$$\frac{d^2y}{dx^2} \quad \text{par} \quad \frac{dx\,d^2y - dy\,d^2x}{dx^3},$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} \quad \text{par} \quad \frac{dx(dx\,d^3y - dy\,d^3x) - 3\,d^2x(dx\,d^2y - dy\,d^2x)}{dx^5},$$

$$\ldots \quad \ldots \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

C'est par des substitutions de cette nature qu'on peut opérer un *changement de variable indépendante.*

Parmi les fonctions composées d'une seule variable, il en est dont les différentielles successives se présentent sous une forme très simple. Concevons, par exemple, que l'on désigne par $u, v, w, \ldots$ diverses fonctions de $x$. En différentiant $n$ fois chacune des fonctions composées

$$u+v, \quad u-v, \quad u+v\sqrt{-1}, \quad au+bv+cw+\ldots,$$

on trouvera

$$(11) \qquad \begin{cases} d^n(u+v) = d^n u + d^n v, \\ d^n(u-v) = d^n u - d^n v, \\ d^n(u+v\sqrt{-1}) = d^n u + d^n v\sqrt{-1}, \end{cases}$$

$$(12) \qquad d^n(au+bv+cw+\ldots) = a\,d^n u + b\,d^n v + c\,d^n w + \ldots.$$

Il suit de la formule (12) que la différentielle $d^n y$ de la fonction entière

$$y = ax^m + bx^{m-1} + cx^{m-2} + \ldots + px^2 + qx + r$$

se réduit, pour $n=m$, à la quantité constante $1.2.3\ldots m.a.dx^m$, et pour $n>m$, à zéro.



# QUATRIÈME LEÇON.

## RELATIONS QUI EXISTENT ENTRE LES FONCTIONS RÉELLES D'UNE SEULE VARIABLE ET LEURS DÉRIVÉES, OU DIFFÉRENTIELLES, DES DIVERS ORDRES.

Après avoir appris à former les dérivées et les différentielles des fonctions d'une seule variable, il nous reste à montrer l'usage qu'on peut en faire, et leurs principales propriétés. Dans ce dessein, nous commencerons par faire connaître diverses relations qui existent entre les dérivées des divers ordres et les fonctions elles-mêmes supposées réelles. Ces relations se trouvent exprimées dans les théorèmes que nous allons énoncer.

Théorème I. — *La fonction $y=f(x)$, étant supposée réelle et continue par rapport à la variable $x$ dans le voisinage de la valeur particulière $x=x_0$, croîtra ou décroîtra en même temps que cette variable, à partir de la valeur $x=x_0$, si la valeur correspondante de la fonction dérivée $y'=\frac{dy}{dx}$ est positive et finie. Mais, si cette dernière valeur est finie et négative, la fonction $y$ décroîtra pour des valeurs croissantes de la variable $x$, et croîtra pour des valeurs décroissantes de la même variable.*

*Démonstration.* — Soient $\Delta x$, $\Delta y$ les accroissements infiniment petits et simultanés des variables $x$, $y$. Le rapport $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ aura pour limite $\frac{dy}{dx}=y'$. On doit en conclure que, pour de très petites valeurs numériques de $\Delta x$ et pour une valeur particulière $x_0$ de la variable $x$, le rapport $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ sera positif, si la valeur correspondante de $y'$ est une quantité positive et finie; négatif, si cette valeur de $y'$ est une quantité finie, mais négative. Dans le premier cas, les différences infiniment petites $\Delta x$, $\Delta y$ étant de même signe, la fonction $y$ croîtra ou diminuera, à partir de $x = x_0$, en même temps que la variable $x$. Dans le second cas, les différences infiniment petites étant de signes contraires, la fonction $y$ croîtra, si la variable $x$ diminue, et décroîtra si la variable augmente.

*Corollaire I.* — Concevons que la fonction $y = f(x)$ demeure continue entre deux limites données $x = x_0$, $x = X$. Si l'on fait croître la variable $x$ par degrés insensibles depuis la première limite jusqu'à la seconde, la fonction $y$ ira en croissant toutes les fois que sa dérivée étant finie aura une valeur positive, et en décroissant toutes les fois que cette même dérivée obtiendra une valeur négative. Donc la fonction $y$ ne pourra cesser de croître pour diminuer, ou de diminuer pour croître, qu'autant que la dérivée $y'$ passera du positif au négatif, ou réciproquement. Il est essentiel d'observer que, dans ce passage, la fonction dérivée deviendra nulle, si elle ne cesse pas d'être continue.

*Corollaire II.* — Concevons que la fonction $y = f(x)$ s'évanouisse pour la valeur particulière $x = x_0$ et demeure continue dans le voisinage de cette valeur. Si la valeur correspondante de la dérivée $y' = f'(x)$ est finie et positive, alors, en supposant $x$ très peu différent de $x_0$, on aura

$$f(x) > 0 \quad \text{pour} \quad x > x_0 \qquad \text{et} \qquad f(x) < 0 \quad \text{pour} \quad x < x_0.$$

Au contraire, si la valeur de $y'$ est finie et négative, on aura

$$f(x) < 0 \quad \text{pour} \quad x > x_0 \qquad \text{et} \qquad f(x) > 0 \quad \text{pour} \quad x < x_0.$$

Théorème II. — *Soient* $\mathrm{f}(x)$ *et* $\mathrm{F}(x)$ *deux fonctions réelles qui s'évanouissent pour* $x = x_0$ *et qui restent continues entre les limites* $x = x_0$, $x = X$. *Supposons d'ailleurs que la fonction dérivée* $\mathrm{F}'(x)$ *ne change pas de signe entre les limites dont il s'agit. Si l'on nomme* A *la plus petite*



*et* B *la plus grande des valeurs que reçoit dans cet intervalle le rapport*

$$\frac{\mathrm{f}'(x)}{\mathrm{F}'(x)},$$

*la fraction*

$$\frac{\mathrm{f}(X)}{\mathrm{F}(X)}$$

*sera elle-même comprise entre les deux limites* A *et* B.

*Démonstration.* — Puisqu'on aura par hypothèse, pour toutes les valeurs de $x$ renfermées entre les limites $x_0$, X,

$$\frac{\mathrm{f}'(x)}{\mathrm{F}'(x)} - \mathrm{A} > 0, \qquad \frac{\mathrm{f}'(x)}{\mathrm{F}'(x)} - \mathrm{B} < 0,$$

et que la fonction dérivée $\mathrm{F}'(x)$ ne changera pas de signe entre ces limites, on peut affirmer que, dans cet intervalle, l'un des produits

$$\mathrm{F}'(x)\left[\frac{\mathrm{f}'(x)}{\mathrm{F}'(x)} - \mathrm{A}\right] = \mathrm{f}'(x) - \mathrm{A}\,\mathrm{F}'(x),$$

$$\mathrm{F}'(x)\left[\frac{\mathrm{f}'(x)}{\mathrm{F}'(x)} - \mathrm{B}\right] = \mathrm{f}'(x) - \mathrm{B}\,\mathrm{F}'(x)$$

sera constamment positif, l'autre négatif. D'ailleurs ces produits sont respectivement égaux aux dérivées des fonctions

$$\mathrm{f}(x) - \mathrm{A}\,\mathrm{F}(x), \quad \mathrm{f}(x) - \mathrm{B}\,\mathrm{F}(x).$$

Donc, en vertu de ce qui a été dit ci-dessus (théorème I, corollaire I), l'une de ces fonctions sera toujours croissante, l'autre toujours décroissante depuis $x = x_0$ jusqu'à $x = X$. Donc, puisqu'elles s'évanouissent simultanément pour $x = x_0$, les valeurs qu'elles recevront pour $x = X$, savoir

$$\mathrm{f}(X) - \mathrm{A}\,\mathrm{F}(X), \quad \mathrm{f}(X) - \mathrm{B}\,\mathrm{F}(X),$$

seront des quantités de signes contraires, et l'on pourra en dire autant des quotients que fournissent les mêmes valeurs divisées par $\mathrm{F}(X)$.

c'est-à-dire des différences

$$\frac{f(X)}{F(X)} - A, \quad \frac{f(X)}{F(X)} - B.$$

Donc la fraction $\frac{f(X)}{F(X)}$ sera comprise entre A et B.

*Corollaire I.* — Si les fonctions dérivées $f'(x)$, $F'(x)$ sont elles-mêmes continues entre les limites $x = x_0$, $x = X$, tandis qu'on passera d'une limite à l'autre, le rapport $\frac{f'(x)}{F'(x)}$ variera de manière à rester toujours compris entre les deux valeurs A, B, et à prendre successivement toutes les valeurs intermédiaires. Donc alors toute quantité moyenne entre A et B, par exemple, la fraction $\frac{f(X)}{F(X)}$ sera une valeur du rapport $\frac{f'(x)}{F'(x)}$ correspondante à une valeur $\xi$ de $x$ renfermée entre les limites $x_0$, X; en sorte qu'on aura

$$(1) \qquad \frac{f(X)}{F(X)} = \frac{f'(\xi)}{F'(\xi)}.$$

Si l'on fait, pour plus de commodité, $X = x_0 + h$, la quantité $\xi$ sera de la forme $x_0 + h_1$, $h_1$ désignant une quantité de même signe que $h$, mais d'une valeur numérique moindre; et l'équation (1) deviendra

$$(2) \qquad \frac{f(x_0+h)}{F(x_0+h)} = \frac{f'(x_0+h_1)}{F'(x_0+h_1)}.$$

En d'autres termes, si l'on représente par $\theta$ un nombre inférieur à l'unité, on pourra choisir ce nombre de manière à vérifier la formule

$$(3) \qquad \frac{f(x_0+h)}{F(x_0+h)} = \frac{f'(x_0+\theta h)}{F'(x_0+\theta h)}.$$

*Corollaire II.* — Si les fonctions

$$(4) \qquad \begin{cases} f(x), & f'(x), & f''(x), & \ldots, & f^{(n-1)}(x), \\ F(x), & F'(x), & F''(x), & \ldots, & F^{(n-1)}(x) \end{cases}$$

s'évanouissaient toutes pour $x = x_0$, et demeuraient continues, aussi



bien que $f^{(n)}(x)$ et $F^{(n)}(x)$, entre les limites $x = x_0$, $x = x_0 + h$; alors, en supposant chacune des fonctions dérivées

$$(5) \qquad F'(x), \quad F''(x), \quad F'''(x), \quad \ldots, \quad F^{(n)}(x),$$

toujours positive ou toujours négative depuis la première limite jusqu'à la seconde, et désignant par $h_1$, $h_2$, ..., $h_n$ des quantités de même signe, mais dont les valeurs numériques seraient de plus en plus petites, on obtiendrait avec l'équation (2) une suite d'équations semblables dont la réunion composerait la formule

$$(6) \qquad \frac{f(x_0+h)}{F(x_0+h)} = \frac{f'(x_0+h_1)}{F'(x_0+h_1)} = \frac{f''(x_0+h_2)}{F''(x_0+h_2)} = \ldots = \frac{f^{(n)}(x_0+h_n)}{F^{(n)}(x_0+h_n)}.$$

Si, dans la formule (6), on se contente d'égaler la première fraction à la dernière, l'équation à laquelle on parviendra pourra s'écrire comme il suit

$$(7) \qquad \frac{f(x_0+h)}{F(x_0+h)} = \frac{f^{(n)}(x_0+\theta h)}{F^{(n)}(x_0+\theta h)},$$

$\theta$ étant toujours un nombre inférieur à l'unité.

*Corollaire III.* — Lorsqu'on pose, dans la formule (3),

$$x_0 = 0, \qquad F(x) = x,$$

on en tire

$$(8) \qquad f(h) = h\, f'(\theta h).$$

De même, lorsque dans la formule (7) on pose

$$x_0 = 0, \qquad F(x) = x^n,$$

on trouve

$$F^{(n)}(x) = 1.2.3\ldots n, \qquad \frac{f(h)}{h^n} = \frac{f^{(n)}(\theta h)}{1.2.3\ldots n}$$

et, par suite,

$$(9) \qquad f(h) = \frac{h^n}{1.2.3\ldots n} f^{(n)}(\theta h).$$

En conséquence, on peut énoncer les deux propositions suivantes :

Théorème III. — *Lorsque la fonction $f(x)$ s'évanouit avec la variable $x$,* *et demeure continue, ainsi que la dérivée* $\mathrm{f}'(x)$, *depuis* $x = 0$ *jusqu'à* $x = h$, *il existe entre les limites* 0 *et* 1 *une valeur de* $\theta$ *propre à vérifier l'équation*

$$(10) \qquad \mathrm{f}(h) = h\,\mathrm{f}'(\theta h).$$

Théorème IV. — *Lorsque les fonctions*

$$\mathrm{f}(x), \quad \mathrm{f}'(x), \quad \mathrm{f}''(x), \quad \ldots, \quad \mathrm{f}^{(n-1)}(x)$$

*s'évanouissent avec la variable* $x$ *et demeurent continues, ainsi que la fonction dérivée* $\mathrm{f}^{(n)}(x)$, *depuis* $x = 0$ *jusqu'à* $x = h$, *il existe entre les limites* 0 *et* 1 *une valeur de* $\theta$ *propre à vérifier la formule*

$$(11) \qquad \mathrm{f}(h) = \frac{h^n}{1.2.3\ldots n}\,\mathrm{f}^{(n)}(\theta h).$$

Soit maintenant $f(x)$ une fonction de $x$ qui obtienne une valeur finie positive ou négative pour $x = x_0$, et qui reste continue, ainsi que la fonction dérivée $f'(x)$, depuis $x = x_0$ jusqu'à $x = \mathrm{X}$. Si l'on pose

$$(12) \qquad \mathrm{f}(x) = f(x) - f(x_0), \qquad \mathrm{F}(x) = x - x_0,$$

on trouvera

$$(13) \qquad \mathrm{f}'(x) = f'(x), \qquad \mathrm{F}'(x) = 1.$$

Par suite, les formules (1) et (3) donneront

$$(14) \qquad \frac{f(\mathrm{X}) - f(x_0)}{\mathrm{X} - x_0} = f'(\xi)$$

ou, ce qui revient au même,

$$(15) \qquad \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = f'(x_0 + \theta h).$$

On peut donc énoncer le théorème suivant :

Théorème V. — *Lorsque la fonction* $f(x)$ *conserve une valeur finie pour* $x = x_0$ *et reste continue, ainsi que sa dérivée* $f'(x)$, *depuis* $x = x_0$ *jusqu'à* $x = x_0 + h$, *il existe entre les limites* 0 *et* 1 *une valeur de* $\theta$ *propre à vérifier l'équation*



$$(16) \qquad f(x_0 + h) - f(x_0) = h\,f'(x_0 + \theta h).$$

De même, si, dans la formule (7), on suppose $\mathrm{f}(x)$, $\mathrm{F}(x)$ déterminées par les équations

$$(17) \qquad \mathrm{f}(x) = f(x) - f(x_0), \qquad \mathrm{F}(x) = (x - x_0)^n,$$

on obtiendra cet autre théorème :

Théorème VI. — *Lorsque les fonctions*

$$(18) \qquad f(x), \quad f'(x), \quad f''(x), \quad \ldots, \quad f^{(n-1)}(x)$$

*se réduisent, pour* $x = x_0$, *la première à une quantité finie, les suivantes à zéro, et restent continues, ainsi que* $f^{(n)}(x)$, *depuis* $x = x_0$ *jusqu'à* $x = x_0 + h$, *il existe entre les limites* 0 *et* 1 *une valeur de* $\theta$ *propre à vérifier l'équation*

$$(19) \qquad f(x_0 + h) - f(x_0) = \frac{h^n}{1.2.3\ldots n}\,f^{(n)}(x_0 + \theta h).$$

Au reste, les formules (16) et (19) se trouvent comprises dans celles que l'on déduit des équations (3) et (7), en substituant aux fonctions f et F deux autres fonctions $f$ et $F$ liées aux deux premières par les formules

$$(20) \qquad \mathrm{f}(x) = f(x) - f(x_0), \qquad \mathrm{F}(x) = F(x) - F(x_0).$$

Alors, en effet, on tire de l'équation (3)

$$(21) \qquad \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{F(x_0 + h) - F(x_0)} = \frac{f'(x_0 + \theta h)}{F'(x_0 + \theta h)},$$

et de l'équation (7)

$$(22) \qquad \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{F(x_0 + h) - F(x_0)} = \frac{f^{(n)}(x_0 + \theta h)}{F^{(n)}(x_0 + \theta h)}.$$

La formule (22), qui coïncide avec la formule (21), quand le nombre $n$ est précisément l'unité, suppose : 1° que, pour $x = x_0$, les fonctions

$f(x)$, $F(x)$ se réduisent à des quantités finies, et les fonctions dérivées

$$(23) \qquad \begin{cases} f'(x), & f''(x), & \ldots, & f^{(n-1)}(x), \\ F'(x), & F''(x), & \ldots, & F^{(n-1)}(x) \end{cases}$$

à zéro; 2° que chacune des fonctions dérivées

$$(24) \qquad F'(x), \quad F''(x), \quad \ldots, \quad F^{(n-1)}(x), \quad F^{(n)}(x)$$

ne change pas de signe entre les limites $x = x_0$, $x = X$; 3° que les fonctions (23) restent continues entre ces limites aussi bien que $f(x)$, $F(x)$ et $f^{(n)}(x)$, $F^{(n)}(x)$.



# CINQUIÈME LEÇON.

DÉTERMINATION DES VALEURS QUE PRENNENT LES FONCTIONS RÉELLES D'UNE SEULE VARIABLE QUAND ELLES SE PRÉSENTENT SOUS LES FORMES INDÉTERMINÉES $\frac{0}{0}$, $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$, $0 \times \pm\infty$, $0^0$, $\infty^0$, $1^{\pm\infty}$, ....

Les principes établis dans la Leçon précédente fournissent le moyen de fixer la véritable valeur d'une fraction dont les deux termes sont des fonctions réelles de la variable $x$, dans le cas où l'on attribue à cette variable une valeur particulière pour laquelle la fraction se présente sous la forme indéterminée $\frac{0}{0}$. En effet, soit

$$(1) \qquad s = \frac{\mathrm{f}(x)}{\mathrm{F}(x)}$$

la fraction dont il s'agit, et supposons que la valeur particulière $x = x_0$ réduise $s$ à la forme $\frac{0}{0}$, en faisant évanouir $\mathrm{f}(x)$ et $\mathrm{F}(x)$. La valeur de $s$ correspondante à $x = x_0$ ne sera autre chose que la limite dont $s$ s'approche indéfiniment, tandis que $x$ s'approche de $x_0$. Cela posé, concevons que l'on désigne par X une quantité très peu différente de $x_0$, et par $\xi$ une autre quantité comprise entre $x_0$ et X. Comme, en général, chacune des fonctions $\mathrm{f}(x)$, $\mathrm{F}(x)$, $\mathrm{f}'(x)$, $\mathrm{F}'(x)$ restera continue, et conservera le même signe depuis la valeur particulière de $x$ représentée par $x_0$ jusqu'à une valeur très voisine $x = X$, on pourra, en vertu de la formule (1) de la quatrième Leçon, choisir la quantité $\xi$ de manière à vérifier l'équation

$$(2) \qquad \frac{\mathrm{f}(X)}{\mathrm{F}(X)} = \frac{\mathrm{f}'(\xi)}{\mathrm{F}'(\xi)}.$$

Si maintenant la quantité X vient à se rapprocher indéfiniment de la limite $x_0$, il en sera de même, à plus forte raison, de la quantité $\xi$, et le second membre de l'équation (2) aura évidemment pour limite la valeur de la fraction

$$\frac{f'(x)}{F'(x)} \tag{3}$$

correspondante à $x = x_0$. On peut donc énoncer la proposition suivante :

Théorème I. — *Lorsqu'une valeur particulière du rapport* $\frac{f(x)}{F(x)}$ *se présente sous la forme* $\frac{0}{0}$, *cette valeur coïncide avec la valeur correspondante du rapport* $\frac{f'(x)}{F'(x)}$.

*Exemples.* — En vertu du théorème qui précède, on aura, pour $x = 0$,

$$\frac{e^x - e^{-x}}{\sin x} = \frac{e^x + e^{-x}}{\cos x} = 2,$$

$$\frac{\sin x^2}{x} = \frac{2x\cos x^2}{1} = 0,$$

$$\frac{\sin x}{x^2} = \frac{\cos x}{2x} = \frac{1}{0},$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots;$$

pour $x = 1$,

$$\frac{lx}{x-1} = \frac{1}{x} = 1, \qquad \frac{x-1}{x^2-1} = \frac{1}{2x} = \frac{1}{2}, \qquad \frac{x-1}{x^n-1} = \frac{1}{nx^{n-1}} = \frac{1}{n}, \qquad \dots$$

Il est bon d'observer que l'équation (2) et le théorème I s'étendent au cas même où la constante $x_0$ devient infinie. Seulement X et $\xi$ représentent alors deux quantités dont les signes sont les mêmes que celui de $x_0$, et dont les valeurs numériques sont très grandes, la valeur numérique de $\xi$ étant supérieure à celle de X.

Si les fonctions $f'(x)$, $F'(x)$ s'évanouissaient à leur tour pour $x = x_0$, la valeur particulière du rapport $\frac{f'(x)}{F'(x)}$ se présenterait elle-même sous la forme $\frac{0}{0}$, et coïnciderait, en vertu du théorème I, avec la valeur



correspondante du rapport

$$\frac{f''(x)}{F''(x)},$$

dont les deux termes sont les dérivées du premier ordre de $f'(x)$ et de $F'(x)$. Si les fonctions $f''(x)$, $F''(x)$ s'évanouissaient encore, il faudrait, pour obtenir la valeur cherchée de $s$, recourir à la fraction

$$\frac{f'''(x)}{F'''(x)},$$

etc. En continuant ainsi, on déduira sans peine du théorème I celui que nous allons énoncer.

Théorème II. — *Lorsque les fonctions*

$$\left\{\begin{array}{lllll} F(x), & F'(x), & F''(x), & \dots, & F^{(n-1)}(x), \\ f(x), & f'(x), & f''(x), & \dots, & f^{(n-1)}(x) \end{array}\right. \tag{4}$$

*s'évanouissent toutes pour la valeur particulière* $x = x_0$, *la valeur correspondante du rapport*

$$s = \frac{f(x)}{F(x)} \tag{1}$$

*coïncide avec celle du rapport*

$$\frac{f^{(n)}(x)}{F^{(n)}(x)}. \tag{5}$$

*Exemples.* — En vertu du théorème II, on aura, pour $x = 0$,

$$\frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{\sin x}{2x} = \frac{\cos x}{2} = \frac{1}{2}, \qquad \frac{x - \sin x}{x^3} = \frac{1}{3}\,\frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{6},$$

$$\frac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \sin x} = \frac{e^x + e^{-x} - 2}{1 - \cos x} = \frac{e^x - e^{-x}}{\sin x} = \frac{e^x + e^{-x}}{\cos x} = 2, \qquad \dots$$

Si, dans les théorèmes I et II, on fait, pour abréger,

$$f(x) = y, \qquad F(x) = z,$$

on aura, en vertu de ces mêmes théorèmes, et pour $x = x_0$,

$$\frac{y}{z} = \frac{y'}{z'} = \frac{dy}{dz}, \tag{6}$$

ou bien

$$\frac{y}{z} = \frac{y^{(n)}}{z^{(n)}} = \frac{d^n y}{d^n z}. \tag{7}$$

L'équation (6) suppose que, pour $x = x_0$, la valeur de $\frac{y}{z}$ se présente sous la forme indéterminée $\frac{0}{0}$, et l'équation (7) que les valeurs correspondantes de

$$\frac{y'}{z'}, \quad \frac{y''}{z''}, \quad \ldots, \quad \frac{y^{(n-1)}}{z^{(n-1)}}$$

se présentent encore sous la même forme.

Si la valeur particulière $x = x_0$ rendait infinies les deux fonctions $y = f(x)$ et $z = F(x)$, elle réduirait à zéro les deux suivantes

$$\frac{1}{y}, \quad \frac{1}{z}; \tag{8}$$

et, comme les dérivées de ces dernières sont respectivement

$$-\frac{y'}{y^2}, \quad -\frac{z'}{z^2}, \tag{9}$$

on aurait, pour $x = x_0$, en vertu du théorème I,

$$\frac{-\frac{y'}{y^2}}{-\frac{z'}{z^2}} = \frac{\frac{1}{y}}{\frac{1}{z}},$$

ou, ce qui revient au même,

$$\frac{z^2}{y^2} \times \frac{y'}{z'} = \frac{z}{y}.$$

En multipliant par $\frac{y^2}{z^2}$ les deux membres de la formule précédente, on en conclura

$$\frac{y'}{z'} = \frac{y}{z}.$$

Par conséquent, l'équation (6) s'étend au cas même où la fraction



$\frac{y}{z} = \frac{f(x)}{F(x)}$ se présente sous la forme indéterminée $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$; et l'on peut joindre encore au théorème I celui que nous allons énoncer.

Théorème III. — *Lorsqu'une valeur particulière du rapport* $\frac{f(x)}{F(x)}$ *se présente sous la forme indéterminée* $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$, *cette valeur coïncide avec la valeur correspondante du rapport* $\frac{f'(x)}{F'(x)}$.

*Exemple.* — On a, pour $x = 0$,

$$\frac{l\frac{1}{x}}{\cot x} = \frac{\sin^2 x}{x} = \frac{\sin x}{x}\sin x = \sin x = 0.$$

*Corollaire.* — Le théorème III s'étend, ainsi que le premier, au cas même où la valeur particulière attribuée à la variable $x$ devient infinie. Par suite, lorsque la valeur numérique de la fonction $f(x)$ croît indéfiniment avec celle de la variable $x$, on a, pour $x = \pm\infty$,

$$\frac{f(x)}{x} = f'(x). \tag{10}$$

Concevons, par exemple, que l'on égale successivement $f(x)$ aux deux fonctions

$$A^x, \quad Lx,$$

A désignant un nombre supérieur à l'unité, et $L(x)$ un logarithme pris dans le système dont la base est A. Comme les dérivées de ces deux fonctions, savoir

$$A^x lA \quad \text{et} \quad \frac{Le}{x},$$

deviendront, la première infinie, et la seconde nulle, pour des valeurs infiniment grandes de la variable $x$, on tirera de la formule (10), en faisant converger $x$ vers la limite $\infty$,

$$\lim \frac{A^x}{x} = \infty, \tag{11}$$

$$\lim \frac{1x}{x} = 0. \tag{12}$$

Il résulte des formules (11) et (12) : 1° que, *dans le cas où l'on suppose* $A > 1$, *l'exponentielle* $A^x$ *finit par croître beaucoup plus rapidement que la variable* $x$; 2° que *les logarithmes des nombres, dans un système dont la base surpasse l'unité, croissent moins rapidement que les nombres eux-mêmes.*

Si les fonctions dérivées $f'(x)$, $F'(x)$ devenaient l'une et l'autre infinies, la valeur particulière du rapport $\frac{f'(x)}{F'(x)}$ se présenterait à son tour sous la forme $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$, et coïnciderait, en vertu du théorème III, avec la valeur correspondante du rapport

$$\frac{f''(x)}{F''(x)}$$

dont les deux termes sont les dérivées du premier ordre de $f'(x)$ et de $F'(x)$. Si les fonctions $f''(x)$, $F''(x)$ devenaient elles-mêmes infinies, on serait obligé de recourir à la fraction

$$\frac{f'''(x)}{F'''(x)},$$

etc. En continuant ainsi, on déduira sans peine du théorème III la proposition suivante :

Théorème IV. — *Lorsque les fonctions* (4) *deviennent toutes infinies pour la valeur particulière* $x = x_0$, *la valeur correspondante du rapport*

$$s = \frac{f(x)}{F(x)} \tag{1}$$

*coïncide avec celle du rapport*

$$\frac{f^{(n)}(x)}{F^{(n)}(x)}.$$



*Exemple.* — Soit $a$ une constante positive, et $n$ le nombre entier immédiatement supérieur à cette constante. En vertu du théorème IV, on aura, pour $x = \infty$,

$$\frac{x^a}{e^x} = \frac{a(a-1)\ldots(a-n+1)x^{a-n}}{e^x} = \frac{a(a-1)\ldots(a-n+1)}{x^{n-a}e^x} = 0,$$

ou, ce qui revient au même,

$$x^a e^{-x} = 0. \tag{13}$$

Les théorèmes ci-dessus établis servent à fixer les valeurs des fractions qui se présentent sous l'une des formes $\frac{0}{0}$ ou $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$. Il est essentiel d'ajouter qu'on en déduira sans peine les valeurs des fonctions d'une seule variable qui se présenteraient sous l'une des formes indéterminées

$$0 \times \pm\infty, \quad 0^0, \quad \infty^0, \quad 1^{\pm\infty}, \quad \ldots.$$

Ainsi, en particulier, si l'on désigne par $y$ et $z$ deux fonctions de $x$ qui deviennent, pour $x = x_0$, la première nulle, la seconde infinie, la valeur de la fonction

$$s = yz, \tag{14}$$

correspondante à $x = x_0$, prendra la forme $0 \times \pm\infty$, et coïncidera évidemment avec celles des rapports

$$\frac{y}{\frac{1}{z}} \quad \text{et} \quad \frac{z}{\frac{1}{y}},$$

qui pourront être déterminées à l'aide des théorèmes I, II, III ou IV, attendu qu'elles se présenteront sous les formes $\frac{0}{0}$ et $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$. On aura, par exemple, pour $x = \infty$, en vertu du théorème I,

$$e^{-x}\,1x = \frac{1x}{e^x} = \frac{\frac{1}{x}}{e^x} = 0 \tag{15}$$

et, pour $x = 0$, en vertu du théorème III,

$$x\,\mathrm{l}x = \frac{\mathrm{l}x}{x^{-1}} = \frac{x^{-1}}{-x^{-2}} = -x = 0, \tag{16}$$

$$x^a\,\mathrm{l}x = \frac{\mathrm{l}x}{x^{-a}} = \frac{x^{-1}}{-ax^{-a-1}} = -\frac{x^a}{a} = 0, \tag{17}$$

$a$ étant une constante positive. De même, si les fonctions $y$ et $z$ sont telles, que l'on ait, pour $x = x_0$,

$$y = 0 \quad \text{et} \quad z = 0$$

ou bien

$$y = \infty \quad \text{et} \quad z = 0,$$

ou bien encore

$$y = 1 \quad \text{et} \quad z = \pm\infty,$$

la valeur de

$$s = y^z, \tag{18}$$

correspondante à $x = x_0$, se présentera sous l'une des formes indéterminées

$$0^0, \quad \infty^0, \quad 1^{\pm\infty}.$$

Or, pour obtenir cette valeur, il suffira d'observer qu'on a, en vertu de l'équation (18),

$$\mathrm{l}s = z\,\mathrm{l}y = \frac{\mathrm{l}y}{z^{-1}}$$

et, par suite,

$$s = e^{\frac{\mathrm{l}y}{z^{-1}}}, \tag{19}$$

puis de fixer la valeur du rapport

$$\frac{\mathrm{l}y}{z^{-1}} \tag{20}$$

à l'aide des théorèmes I, II, III ou IV. Ainsi, par exemple, on déduira immédiatement des théorèmes I et III, combinés avec la formule (19), la proposition suivante :

Théorème V. — *Lorsqu'une valeur particulière de l'expression $y^z$ se*



*présente sous l'une des formes indéterminées $0^0$, $\infty^0$, $1^{\pm\infty}$, cette valeur coïncide avec la valeur correspondante de l'exponentielle*

$$e^{-\frac{y'z^2}{yz'}}. \tag{21}$$

*Corollaire I.* — Soient $y = \mathrm{f}(x)$ et $z = x$, $\mathrm{f}(x)$ désignant une fonction qui s'évanouisse avec la variable $x$. On trouvera, pour une valeur nulle de cette variable,

$$[\mathrm{f}(x)]^x = e^{-\frac{x^2\mathrm{f}'(x)}{\mathrm{f}(x)}}. \tag{22}$$

Ainsi, par exemple, on aura, pour $x = 0$,

$$x^x = e^{-x} = 1. \tag{23}$$

*Corollaire II.* — Soient $y = \mathrm{f}(x)$ et $z = \frac{1}{x}$, $\mathrm{f}(x)$ désignant une fonction dont la valeur numérique croisse indéfiniment avec celle de la variable $x$. On trouvera, pour $x = \infty$,

$$[\mathrm{f}(x)]^{\frac{1}{x}} = e^{\frac{\mathrm{f}'(x)}{\mathrm{f}(x)}}, \tag{24}$$

puis, en posant $\mathrm{f}(x) = x$,

$$x^{\frac{1}{x}} = e^{\frac{1}{x}} = 1. \tag{25}$$

*Corollaire III.* — Soient $y = x$ et $z = \mathrm{F}(x)$, $\mathrm{F}(x)$ désignant une fonction qui acquière une valeur infinie quand la variable $x$ se réduit à l'unité. On aura, pour $x = 1$,

$$x^{\mathrm{F}(x)} = e^{-\frac{\mathrm{F}(x)}{x\mathrm{F}'(x)}\mathrm{F}(x)}, \tag{26}$$

puis, en posant $\mathrm{F}(x) = \frac{1}{1-x}$,

$$x^{\frac{1}{1-x}} = e^{-\frac{1}{x}} = \frac{1}{e}. \tag{27}$$

Nous ne nous arrêterons point à considérer diverses formes indéterminées que pourraient présenter les valeurs particulières des fonctions d'une seule variable, mais que l'on réduirait facilement à celles que nous avons considérées, par exemple les formes $1^{\frac{1}{0}}$, $\sqrt[0]{\infty}$, etc.; et nous terminerons cette Leçon en observant que l'on peut simplifier, dans plusieurs cas, l'application des théorèmes I, II, ..., à l'aide de quelques artifices d'analyse, tels que la décomposition des fonctions en facteurs. Ainsi, l'on aura, en vertu du théorème I, et pour $x = 0$,

$$\frac{1-\cos x}{\sin x^2} = \frac{\sin x}{2x \cos x^2} = \frac{1}{2\cos x^2}\,\frac{\sin x}{x} = \frac{1}{2} \times 1 = \frac{1}{2},$$

$$\frac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \sin x} = \frac{e^x + e^{-x} - 2}{1 - \cos x} = \frac{1}{2}\left(\frac{e^{\frac{1}{2}x} - e^{-\frac{1}{2}x}}{\sin\frac{1}{2}x}\right)^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{e^{\frac{1}{2}x} + e^{-\frac{1}{2}x}}{\cos\frac{1}{2}x}\right)^2 = 2,$$

etc.



# SIXIÈME LEÇON.

## SUR LES DÉRIVÉES DES FONCTIONS QUI REPRÉSENTENT DES QUANTITÉS INFINIMENT PETITES.

Soit $f(i)$ une fonction réelle qui s'évanouisse en même temps que la variable $i$, et prenons cette variable pour *base* d'un système de quantités infiniment petites. Soit de plus $a$ un nombre constant rationnel ou irrationnel. D'après ce qui a été dit dans les Préliminaires, $f(i)$ sera un infiniment petit de l'*ordre a*, si la limite du rapport

$$\frac{f(i)}{i^r} \tag{1}$$

est nulle pour toutes les valeurs de $r$ plus petites que $a$, et infinie pour toutes les valeurs de $r$ plus grandes que $a$. Cela posé, il sera généralement facile de fixer l'ordre d'une quantité infiniment petite. Seulement, pour y parvenir, on devra, dans certains cas, évaluer des expressions qui se présenteront sous une forme indéterminée, à l'aide des principes établis dans la Leçon précédente. Ainsi, par exemple, si l'on considère le produit

$$i^a\,\mathrm{l}i, \tag{2}$$

on reconnaitra sans peine : 1° que ce produit s'évanouit avec la variable $i$, aussi bien que le produit $x^a\,\mathrm{l}x$ avec la variable $x$ [*voir* la formule (17) de la page 322]; 2° que le rapport

$$\frac{i^a\,\mathrm{l}i}{i^r} = i^{a-r}\,\mathrm{l}i = \frac{\mathrm{l}i}{i^{r-a}}$$

s'évanouit pareillement pour des valeurs positives de $a - r$, et acquiert une valeur infinie pour des valeurs positives de $r-a$. Donc l'expression (1) sera une quantité infiniment petite de l'ordre $a$.

De même, puisque la fonction

$$(3)\qquad \frac{i^a}{li}$$

s'évanouit avec $i$, tandis que le rapport

$$\frac{i^a}{i^r\,li} = \frac{i^{a-r}}{li} = \frac{1}{i^{r-a}\,li}$$

se réduit à zéro pour des valeurs positives de $a-r$, et à $\frac{1}{0}$ pour des valeurs positives de $r-a$, on peut encore affirmer que l'expression (3) est un infiniment petit de l'ordre $a$. On doit en dire autant des produits

$$i^a e^i\,li,\quad \frac{i^a e^i}{li},$$

que nous avons déjà considérés à la page 282 des Préliminaires, et que l'on forme en multipliant l'expression (2) ou (3) par un nouveau facteur $e^i$, qui reçoit la valeur finie 1 pour $i=0$.

Lorsque, dans l'expression (3), on pose $a=0$, on obtient le rapport

$$(4)\qquad \frac{1}{li},$$

qui est une quantité infiniment petite de l'ordre $a=0$. Effectivement ce rapport s'évanouit avec $i$. Mais, si on le divise par $i^r$, on aura, pour $i=0$,

$$\frac{1}{i^r\,li} = \frac{1}{0},$$

l'exposant $r$ ayant une valeur positive aussi petite que l'on voudra.

On reconnaîtrait encore facilement que l'expression

$$(5)\qquad e^{-\frac{1}{i}}$$

est une quantité infiniment petite de l'ordre $\infty$. En effet, cette expres-



sion s'évanouit pour $i=0$, et si, après l'avoir divisée par $i^r$, on pose $\frac{1}{i}=x$, on trouvera, pour $i=0$, ou, ce qui revient au même, pour $x=\infty$ [*voir* la formule (13) de la page 321],

$$\frac{e^{-\frac{1}{i}}}{i^r} = x^r e^{-x} = \frac{x^r}{e^x} = \frac{1}{\infty} = 0,$$

l'exposant $r$ ayant une valeur positive aussi grande que l'on voudra.

Concevons à présent que, la fonction $f(i)$ étant un infiniment petit de l'ordre $a$, l'on désigne par $n$ le nombre entier égal ou immédiatement supérieur à la constante $a$, le rapport

$$(6)\qquad \frac{f(i)}{i^a}$$

sera en général le premier terme de la progression géométrique

$$(7)\qquad f(i),\quad \frac{f(i)}{i},\quad \frac{f(i)}{i^2},\quad \frac{f(i)}{i^3},\quad \ldots,$$

qui cessera de s'évanouir pour $i=0$, ou, ce qui revient au même, d'être une quantité infiniment petite. On doit seulement excepter certains cas particuliers dans lesquels la constante $a$ coïncide avec le nombre entier $n$. En effet, le rapport

$$(8)\qquad \frac{f(i)}{i^a},$$

que l'on déduit de l'expression (1), en posant $r=a$, peut obtenir, pour $i=0$, comme on l'a remarqué dans les Préliminaires (page 282), une valeur finie ou nulle ou infinie. Or, quand ce rapport s'évanouit avec $i$, et que l'on a d'ailleurs $a=n$, il est clair que l'expression

$$(9)\qquad \frac{f(i)}{i^{n+1}}$$

est le premier terme de la progression (7), qui cesse d'être une quantité infiniment petite. C'est ce qui aura lieu, par exemple, si l'on prend pour $f(i)$ la fraction

$$\frac{i^n}{\mathrm{l}i}, \tag{10}$$

dont la valeur devient nulle pour $i=0$. En résumé, le premier terme de la progression (7), qui cessera de s'évanouir avec $i$, sera toujours l'une des expressions (6) ou (9). Cela posé, si l'on fait converger $i$ vers la limite zéro, et si l'on a égard aux théorèmes I et II de la Leçon précédente, on trouvera successivement

$$\begin{array}{lll}
\lim f(i) = 0, & \text{ou} & f(0) = 0, \\
\lim \dfrac{f(i)}{i} = \lim f'(i) = 0, & & f'(0) = 0, \\
\lim \dfrac{f(i)}{i^2} = \lim \dfrac{f''(i)}{1.2} = 0, & & f''(0) = 0, \\
\dots\dots\dots\dots, & & \dots\dots, \\
\lim \dfrac{f(i)}{i^{n-1}} = \lim \dfrac{f^{(n-1)}(i)}{1.2.3\ldots(n-1)} = 0, & & f^{(n-1)}(0) = 0, \\
\lim \dfrac{f(i)}{i^n} = \lim \dfrac{f^{(n)}(i)}{1.2.3\ldots n} = \dfrac{f^{(n)}(0)}{1.2.3\ldots n}, & & f^{(n)}(0) = 1.2.3\ldots n \lim \dfrac{f(i)}{i^n}.
\end{array}$$

Donc, si l'expression (6) ne s'évanouit pas avec $i$, $f^{(n)}(0)$ sera la première des quantités

$$f(0),\quad f'(0),\quad f''(0),\quad f'''(0),\quad \ldots \tag{11}$$

qui obtiendra une valeur différente de zéro. Au contraire, si l'expression (6) s'évanouit avec $i$, la quantité

$$f^{(n)}(0) = 1.2.3\ldots n \lim \frac{f(i)}{i^n} \tag{12}$$

sera encore nulle, et l'on aura, par suite,

$$\lim \frac{f(i)}{i^{n+1}} = \lim \frac{f^{(n+1)}(i)}{1.2.3\ldots n(n+1)} = \frac{f^{(n+1)}(0)}{1.2.3\ldots n(n+1)},$$

$$f^{(n+1)}(0) = 1.2.3\ldots n(n+1) \lim \frac{f(i)}{i^{n+1}}.$$

Alors, l'expression (9) ne s'évanouissant pas avec $i$, $f^{(n)}(0)$ sera le



premier terme de la série (11) qui obtiendra une valeur autre que zéro. En conséquence, on peut énoncer la proposition suivante :

Théorème I. — *Désignons par $f(i)$ une quantité infiniment petite, qui soit de l'ordre $a$ dans le système dont la base est $i$, et par $n$ le nombre entier égal ou immédiatement supérieur à la constante $a$. Si l'on a $n > a$, ou si, $a$ étant égal à $n$, le rapport*

$$\frac{f(i)}{i^n}$$

*n'acquiert pas une valeur nulle pour $i = 0$,*

$$f^{(n)}(i) \tag{13}$$

*sera la première des fonctions*

$$f(i),\quad f'(i),\quad f''(i),\quad f'''(i),\quad \ldots \tag{14}$$

*qui cessera de s'évanouir avec $i$. Mais si l'on a $n = a$, et de plus*

$$\frac{f(i)}{i^n} = 0 \quad \text{pour} \quad i = 0, \tag{15}$$

*le premier terme de la série (14) qui cessera de s'évanouir avec $i$ sera la fonction*

$$f^{(n+1)}(i). \tag{16}$$

Soit maintenant $\mathrm{f}(x)$ une fonction réelle de $x$, tellement choisie, que le rapport

$$\frac{\mathrm{f}(x)}{x^{n-1}} \tag{17}$$

s'évanouisse pour $x = 0$. Si l'on considère la variable $x$ comme représentant une quantité infiniment petite du premier ordre, $\mathrm{f}(x)$ sera un infiniment petit d'un ordre égal ou supérieur à $n$; et l'on conclura du théorème I que les fonctions

$$\mathrm{f}(x),\quad \mathrm{f}'(x),\quad \mathrm{f}''(x),\quad \ldots,\quad \mathrm{f}^{(n-1)}(x)$$

s'évanouiront toutes pour $x = 0$. Par suite, le théorème IV de la quatrième Leçon entraînera celui que nous allons énoncer.

Théorème II. — *Supposons que, les fonctions*

$$f(x),\quad f'(x),\quad f''(x),\quad \ldots,\quad f^{(n)}(x)$$

*étant continues depuis $x = 0$ jusqu'à $x = h$, le rapport*

$$\frac{f(x)}{x^{n-1}} \tag{17}$$

*s'évanouisse avec la variable $x$. Alors, si l'on attribue à $x$, ou la valeur $h$, ou une valeur comprise entre les limites $0$, $h$, on pourra trouver un nombre $\theta$ inférieur à $1$, et propre à vérifier la formule*

$$f(x) = \frac{x^n}{1.2.3\ldots n} f^{(n)}(\theta x). \tag{18}$$

*Corollaire.* — Lorsqu'on prend $n = 1$, l'équation (18) se réduit à

$$f(x) = x f'(\theta x). \tag{19}$$

Cette dernière s'accorde avec l'équation (10) de la quatrième Leçon, et suppose : 1° que la fonction $f(x)$ s'évanouit avec $x$; 2° que les fonctions $f(x)$, $f'(x)$ restent continues entre les limites $x = 0$, $x = h$, la fonction dérivée pouvant d'ailleurs admettre une valeur infinie ou une solution de continuité pour $x = 0$. Ajoutons que l'on déduit aisément de l'équation (19) les propositions suivantes :

Théorème III. — *Soit $f(x)$ une fonction réelle qui s'évanouisse avec la variable $x$. Si cette fonction et sa dérivée $f'(x)$ restent continues entre les limites $x = 0$, $x = h$, $h$ désignant une quantité dont la valeur numérique peut être supposée très petite, zéro sera la valeur unique ou l'une des valeurs que prendra le rapport*

$$\frac{f(x)}{f'(x)} \tag{20}$$

*pour $x = 0$.*

*Démonstration.* — Il suffit évidemment de démontrer le théorème III dans le cas où la fonction dérivée $f'(x)$ s'évanouit, en même temps que $f(x)$, pour la valeur particulière $x = 0$; attendu que la valeur correspondante du rapport $\frac{f(x)}{f'(x)}$, nulle dans toute autre hypothèse, se présente alors seulement sous la forme indéterminée $\frac{0}{0}$. Or, si l'on divise par $f'(x)$ les deux membres de la formule (19), on en tirera

$$\frac{f(x)}{f'(x)} = x \frac{f'(\theta x)}{f'(x)}. \tag{21}$$

Cela posé, concevons que, $f'(0)$ étant nul, on fasse décroître indéfiniment la valeur numérique de $x$. Comme $\theta x$ désigne une quantité comprise entre zéro et $x$, $f'(\theta x)$ convergera plus rapidement que $f'(x)$ vers la limite zéro; d'où il résulte que la fraction $\frac{f'(\theta x)}{f'(x)}$ obtiendra une multitude de valeurs inférieures à l'unité, et le produit $x\frac{f'(\theta x)}{f'(x)}$ une multitude de valeurs sensiblement nulles. Donc la limite ou l'une des limites vers lesquelles convergeront ce même produit et le rapport (20) qu'il représente sera égale à zéro.

*Corollaire I.* — Le théorème III peut être aisément vérifié à l'égard des fonctions

$$\sin x,\quad 1 - \cos x,\quad e^{-\left(\frac{1}{x}\right)^2},\quad x^3 \sin\frac{1}{x},\quad \ldots. \tag{22}$$

Il subsiste dans le cas même où la fonction $f(x)$ ne reste réelle ou infiniment petite qu'autant que l'on attribue à la variable $x$ des valeurs infiniment petites affectées d'un certain signe, comme il arrive, par exemple, quand on prend pour $f(x)$ l'une des fonctions

$$\frac{1}{lx},\quad \sqrt{x},\quad e^{-\frac{1}{x}},\quad e^{-\left(\frac{1}{x}\right)^3},\quad \ldots, \tag{23}$$

qui cessent d'être réelles ou infiniment petites, lorsqu'on donne à $x$ des valeurs infiniment petites, mais négatives. Enfin ce théorème peut subsister, quoique la fonction dérivée $f'(x)$ devienne discontinue pour $x = 0$. Ainsi, en supposant

$$f(x) = x \sin \frac{1}{x}, \tag{24}$$

on trouvera que la fonction dérivée

$$f'(x) = \sin \frac{1}{x} - \frac{1}{x} \cos \frac{1}{x} \tag{25}$$

devient indéterminée, par conséquent discontinue, pour $x = 0$; et, si l'on fait alors converger $x$ vers la limite zéro, la valeur du rapport (19), tirée des équations (24) et (25), savoir

$$\frac{f(x)}{f'(x)} = \frac{x}{1 - \frac{1}{x} \cot \frac{1}{x}}, \tag{26}$$

admettra un nombre infini de limites, dont l'une sera égale à zéro.

*Corollaire II.* — Supposons que, la fonction $f(x)$ et ses dérivées successives, jusqu'à celle de l'ordre $n - 1$, étant continues, dans le voisinage de la valeur particulière $x = 0$, les $n$ quantités

$$f(0),\quad f'(0),\quad f''(0),\quad \ldots,\quad f^{(n-1)}(0) \tag{27}$$

s'évanouissent, et concevons que la valeur numérique de $x$ vienne à décroître indéfiniment. Zéro sera la limite ou l'une des limites vers lesquelles convergera chacun des rapports

$$\frac{f(x)}{f'(x)},\quad \frac{f'(x)}{f''(x)},\quad \frac{f''(x)}{f'''(x)},\quad \ldots,\quad \frac{f^{(n-1)}(x)}{f^{(n)}(x)}, \tag{28}$$

et, par conséquent, leur produit ou le rapport

$$\frac{f(x)}{f^{(n)}(x)}. \tag{29}$$

On peut en dire autant des expressions

$$\frac{f'(x)}{f^{(n)}(x)},\quad \frac{f''(x)}{f^{(n)}(x)},\quad \ldots,\quad \frac{f^{(n-1)}(x)}{f^{(n)}(x)}, \tag{30}$$



que l'on obtient en multipliant les uns par les autres quelques-uns des rapports dont il s'agit.

THÉORÈME IV. — *Les mêmes choses étant posées que dans le théorème III, zéro sera la valeur unique ou l'une des valeurs que prendra le produit*

$$x f'(x) \tag{31}$$

*pour* $x = 0$.

*Démonstration.* — Le produit (31) s'évanouit évidemment avec la variable $x$, lorsque la fonction dérivée $f'(x)$ conserve une valeur finie pour $x = 0$. Si cette même fonction devenait infinie pour une valeur nulle de $x$, alors, en faisant converger $x$ vers la limite zéro, on tirerait de l'équation (19), multipliée par $\theta$,

$$0 = \lim[\theta f(x)] = \lim[\theta x f'(\theta x)].$$

Donc zéro serait encore la valeur unique ou l'une des valeurs que prendrait le produit $\theta x f'(\theta x)$ pour une valeur nulle de $\theta x$, et par conséquent la valeur unique ou l'une des valeurs que prendrait le produit $x f'(x)$ pour $x = 0$.

*Corollaire.* — Le théorème IV continue de subsister dans le cas où la fonction $f(x)$ ne reste réelle ou infiniment petite qu'autant que l'on attribue à la variable $x$ des valeurs infiniment petites affectées d'un certain signe, comme il arrive quand on prend pour $f(x)$ l'une des fonctions (23). Il peut même subsister dans le cas où la fonction dérivée $f'(x)$ devient discontinue pour $x = 0$. Ainsi, par exemple, si l'on pose

$$f(x) = x \sin \frac{1}{x},$$

le produit

$$x f'(x) = x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}$$

admettra, pour une valeur nulle de $x$, une infinité de valeurs qui seront toutes renfermées entre les limites $-1$, $+1$ et dont l'une sera égale à zéro.

Théorème V. — *Soit $f(x)$ une fonction réelle qui obtienne, pour $x=0$, une valeur finie et déterminée $f(0)$. Si cette fonction et sa dérivée $f'(x)$ restent continues entre les limites $x=0$, $x=h$, $h$ désignant une quantité dont la valeur numérique peut être supposée très petite, zéro sera la valeur unique ou l'une des valeurs que prendra le rapport*

$$x f'(x) \tag{32}$$

*pour $x=0$.*

*Démonstration.* — Pour déduire le théorème V du théorème IV, il suffit évidemment de poser

$$\mathfrak{f}(x)=f(x)-f(0).$$

On établira encore sans difficulté le théorème dont voici l'énoncé :

Théorème VI. — *Les mêmes choses étant posées que dans le théorème III, considérons la variable $x$ comme un infiniment petit du premier ordre, et supposons que le rapport*

$$\frac{x\,\mathfrak{f}'(x)}{\mathfrak{f}(x)} \tag{33}$$

*se réduise, pour une valeur nulle de $x$, à une constante déterminée. La fonction réelle $\mathfrak{f}(x)$ sera une quantité infiniment petite dont l'ordre aura généralement pour mesure la constante dont il s'agit.*

*Démonstration.* — Désignons par $a$ l'ordre de la quantité infiniment petite $\mathfrak{f}(x)$, et faisons de plus

$$\frac{\mathfrak{f}(x)}{x^a}=\varphi(x) \quad \text{ou} \quad \mathfrak{f}(x)=x^a\varphi(x). \tag{34}$$

Comme on tirera de l'équation (34), en différentiant les logarithmes de ses deux membres,

$$\frac{x\,\mathfrak{f}'(x)}{\mathfrak{f}(x)}=a+\frac{x\,\varphi'(x)}{\varphi(x)}, \tag{35}$$



il suffira, pour établir le théorème IV, de prouver que la valeur du rapport

$$\frac{x\,\varphi'(x)}{\varphi(x)}, \tag{36}$$

correspondante à $x=0$, est généralement nulle, quand elle n'est pas indéterminée. On y parviendra effectivement comme il suit.

La fonction $\mathfrak{f}(x)$ étant un infiniment petit de l'ordre $a$, la limite du rapport

$$\frac{\mathfrak{f}(x)}{x^r}=x^{a-r}\varphi(x)=\frac{\varphi(x)}{x^{r-a}} \tag{37}$$

sera nulle, pour des valeurs positives de $a-r$, et infinie pour des valeurs positives de $r-a$. Donc, si l'on désigne par $\varepsilon$ un nombre aussi petit que l'on voudra, les deux fonctions

$$x^{\varepsilon}\varphi(x), \quad \frac{x^{\varepsilon}}{\varphi(x)} \tag{38}$$

s'évanouiront en même temps que la variable $x$. Cela posé, concevons que le rapport (36) se réduise, pour $x=0$, à une constante déterminée $c$. Si la constante $c$ n'est pas nulle, et si d'ailleurs la fonction $\varphi(x)$ reste affectée du même signe depuis la valeur particulière $x=0$ jusqu'à une valeur très voisine $x=X$, les dérivées des expressions (38), savoir

$$x^{\varepsilon-1}\varphi(x)\left[\varepsilon+\frac{x\,\varphi'(x)}{\varphi(x)}\right], \quad \frac{x^{\varepsilon-1}}{\varphi(x)}\left[\varepsilon-\frac{x\,\varphi'(x)}{\varphi(x)}\right], \tag{39}$$

se réduiront constamment, pour de très petites valeurs numériques de $x$ et de $\varepsilon$, à des quantités affectées des mêmes signes que les produits

$$c\,x^{\varepsilon-1}\varphi(x), \quad \frac{-c\,x^{\varepsilon-1}}{\varphi(x)}.$$

Supposons maintenant la quantité X assez rapprochée de zéro pour que les fonctions (38) et (39), dont les deux dernières deviennent infinies quand $x$ s'évanouit, restent finies et continues entre les limites $x = 0$, $x = X$. Il existera entre ces limites (*voir* le corollaire I du théorème II de la quatrième Leçon) une valeur de $x$ pour laquelle le rapport des expressions (39), c'est-à-dire le produit

$$\frac{\varepsilon + \dfrac{x\varphi'(x)}{\varphi(x)}}{\varepsilon - \dfrac{x\varphi'(x)}{\varphi(x)}}[\varphi(x)]^2,$$

sera équivalent au rapport des quantités

$$X^\varepsilon \varphi(X), \quad \frac{X^\varepsilon}{\varphi(X)},$$

c'est-à-dire à l'expression

$$[\varphi(X)]^2.$$

On pourra donc assigner à $X$ et à $x$ des valeurs numériques très petites, et propres à vérifier l'équation

$$(40) \qquad \frac{\varepsilon + \dfrac{x\varphi'(x)}{\varphi(x)}}{\varepsilon - \dfrac{x\varphi'(x)}{\varphi(x)}} = \left[\frac{\varphi(X)}{\varphi(x)}\right]^2;$$

puis on en conclura, en faisant converger $X$ vers la limite zéro,

$$\frac{\varepsilon + c}{\varepsilon - c} = \lim \left[\frac{\varphi(X)}{\varphi(x)}\right]^2 > 0.$$

Or cette dernière condition ne peut être satisfaite, quelle que soit la petitesse du nombre $\varepsilon$, tant qu'on suppose la constante $c$ différente de zéro. Donc, puisque $\varepsilon$ peut décroître indéfiniment, cette constante ou la limite du rapport (36) sera nécessairement nulle. En conséquence, on tirera généralement de l'équation (35)

$$(41) \qquad \lim \frac{x f'(x)}{f(x)} = a.$$

Cette dernière formule comprend le théorème qu'il s'agissait de démontrer.



*Corollaire I.* — Le théorème VI peut être aisément vérifié à l'égard des fonctions

$$x^a, \quad x^a e^x, \quad x^a e^{-x}, \quad \ldots,$$

qui sont toutes de l'ordre $a$. Ce théorème subsiste, dans le cas même où la fonction $f(x)$ ne reste réelle ou infiniment petite, qu'autant que l'on attribue à la variable $x$ des valeurs affectées d'un certain signe, comme il arrive, par exemple, quand on prend pour $f(x)$ l'une des fonctions

$$\frac{1}{lx}, \quad x^{\frac{1}{2}}, \quad x^a\, lx, \quad \frac{x^a}{lx}, \quad x^a\, llx, \quad e^{-\frac{1}{x}}, \quad x e^{-\frac{1}{x}}, \quad \ldots,$$

qui sont la première de l'ordre zéro, la seconde de l'ordre $\frac{1}{2}$, la troisième, la quatrième et la cinquième de l'ordre $a$, les deux suivantes d'un ordre infini, etc.

*Corollaire II.* — Si, la fonction réelle $f(x)$ étant infiniment petite et de l'ordre $a$, la valeur numérique et le signe du rapport

$$(34) \qquad \frac{f(x)}{x^a} = \varphi(x)$$

devenaient indéterminés pour $x = 0$, on ne pourrait plus choisir $X$ de manière que ce rapport ne changeât pas de signe entre les limites $x = 0$, $x = X$; et l'expression

$$(33) \qquad \frac{x f'(x)}{f(x)}$$

ne se réduirait plus nécessairement au nombre $a$ pour une valeur nulle de la variable $x$. Ainsi, par exemple, si l'on prend

$$(42) \qquad f(x) = x \sin\frac{1}{x},$$

on trouvera

$$(43) \qquad a = 1,$$

$$(44) \qquad \frac{x f'(x)}{f(x)} = 1 - \frac{1}{x}\cot\frac{1}{x}.$$

Or, si l'on fait converger $x$ vers la limite zéro, le second membre de l'équation (44) convergera vers une infinité de limites distinctes, et non pas seulement vers la limite 1.

Si la fonction $\mathrm{f}(x)$ devenait imaginaire, il pourrait arriver qu'aucune des valeurs de l'expression (33), correspondantes à $x = 0$, ne se réduisit à la constante $a$. Supposons, pour fixer les idées,

$$\mathrm{f}(x) = x^a\left(\cos\frac{1}{x} + \sqrt{-1}\sin\frac{1}{x}\right) = x^a e^{\frac{1}{x}\sqrt{-1}}, \tag{45}$$

$\mathrm{f}(x)$ sera un infiniment petit de l'ordre $a$, et l'on trouvera

$$\frac{x\,\mathrm{f}'(x)}{\mathrm{f}(x)} = a - \frac{1}{x}\sqrt{-1}. \tag{46}$$

Or il est clair que l'expression (46) acquerra nécessairement une valeur infinie pour une valeur nulle de $x$.

Les quantités infiniment petites, dont les ordres se réduisent à des nombres entiers, offrent quelques propriétés dignes de remarque, qui se déduisent immédiatement de la formule (12), et sont renfermées dans les propositions suivantes :

Théorème VII. — *Soient $f(i)$ une quantité infiniment petite, prise dans le système dont la base est $i$, et $f^{(n)}(0)$ le premier terme de la série (11) qui ne s'évanouisse pas. Supposons d'ailleurs que ce terme obtienne une valeur déterminée qui diffère de zéro. Le rapport*

$$\frac{f(i)}{i^n}$$

*sera, pour de très petites valeurs numériques de $i$, affecté du même signe que la quantité $f^{(n)}(0)$.*

Théorème VIII. — *Les mêmes choses étant posées que dans le théorème VII, si $n$ est un nombre pair, la fonction $f(i)$ sera, pour de très petites valeurs numériques de $i$, constamment affectée du même signe que la quantité $f^{(n)}(0)$.*



*Exemple.* — Si l'on prend

$$f(i) = e^i - 2\cos i + e^{-i},$$

on trouvera

$$f(0) = 0, \qquad f'(0) = 0, \qquad f''(0) = 4.$$

Ainsi l'on aura, dans le cas présent,

$$n = 2, \qquad f^{(n)}(0) = f''(0) > 0.$$

Donc, en vertu du théorème VIII, la fonction

$$e^i - 2\cos i + e^{-i}$$

sera constamment positive pour de très petites valeurs numériques de $i$.

Théorème IX. — *Les mêmes choses étant posées que dans le théorème VII, si le nombre $n$ est impair, la fonction $f(i)$ changera de signe, en passant par zéro, avec la variable $i$. Alors la variable et la fonction dont il s'agit seront, pour de très petites valeurs de $i$, affectées du même signe si la quantité $f^{(n)}(0)$ est positive, et affectées de signes contraires si la quantité $f^{(n)}(0)$ devient négative.*

*Exemple.* — Si l'on prend

$$f(i) = e^i - 2\sin i - e^{-i},$$

on trouvera

$$f(0) = 0, \qquad f'(0) = 0, \qquad f''(0) = 0, \qquad f'''(0) = 4.$$

Ainsi l'on aura, dans le cas présent,

$$n = 3, \qquad f^{(n)}(0) = f'''(0) > 0.$$

Donc, en vertu du théorème IX, la fonction

$$e^i - 2\sin i - e^{-i}$$

sera, pour de très petites valeurs numériques de la variable $i$, affectée du même signe que cette variable.

## SEPTIÈME LEÇON.

### SUR LES MAXIMA ET MINIMA DES FONCTIONS RÉELLES D'UNE SEULE VARIABLE.

Lorsqu'une valeur particulière de la fonction $f(x)$ est réelle et surpasse toutes les valeurs réelles voisines, c'est-à-dire toutes celles qu'on obtiendrait en faisant varier $x$ en plus ou en moins d'une quantité très petite, cette valeur particulière de la fonction est ce qu'on appelle un *maximum*.

Lorsqu'une valeur particulière de la fonction $f(x)$ est réelle et inférieure à toutes les valeurs réelles voisines, elle prend le nom de *minimum*.

Cela posé, il résulte évidemment de ce qui a été dit dans la quatrième Leçon (*voir* le corollaire I du théorème I) que, si les deux fonctions $f(x)$, $f'(x)$ sont continues dans le voisinage d'une valeur donnée de la variable $x$, cette valeur ne pourra produire un maximum ou un minimum de $f(x)$ qu'en faisant évanouir $f'(x)$. En partant de cette remarque, on résoudra facilement la question suivante :

PROBLÈME. — *Trouver les maxima et les minima d'une fonction réelle de la seule variable $x$.*

*Solution.* — Soit $f(x)$ la fonction proposée. On cherchera d'abord les valeurs de $x$, pour lesquelles la fonction cesse d'être continue. A chacune de ces valeurs, s'il en existe, correspondra une valeur de la fonction elle-même, qui sera ordinairement ou une quantité infinie, ou un maximum, ou un minimum.

On cherchera, en second lieu, les racines de l'équation

$$f'(x) = 0, \tag{1}$$



avec les valeurs de $x$ qui rendent la fonction $f'(x)$ discontinue, et parmi lesquelles on doit placer au premier rang celles que l'on déduit de la formule

$$f'(x) = \pm\infty \quad \text{ou} \quad \frac{1}{f'(x)} = 0. \tag{2}$$

Soit $x = x_0$ une de ces racines ou une de ces valeurs. La valeur correspondante de $f(x)$, savoir $f(x_0)$, sera un maximum si, dans le voisinage de $x = x_0$, la fonction dérivée $f'(x)$ est positive pour $x < x_0$, et négative pour $x > x_0$. Au contraire, $f(x_0)$ sera un minimum si la fonction dérivée $f'(x)$ est négative pour $x < x_0$ et positive pour $x > x_0$. Enfin, si, dans le voisinage de $x = x_0$, la fonction dérivée $f'(x)$ était constamment positive ou constamment négative, la quantité $f(x_0)$ ne serait plus ni un maximum, ni un minimum.

*Exemples.* — Les trois fonctions

$$x^{\frac{1}{2}}, \quad \frac{1}{1x}, \quad x\,1x, \tag{3}$$

qui deviennent discontinues, en passant du réel à l'imaginaire, tandis que la variable $x$ diminue et passe par zéro, obtiennent, pour $x = 0$, une valeur nulle qui représente un minimum de la première, et un maximum de chacune des deux autres.

Les deux fonctions

$$x^2, \quad x^{\frac{2}{3}}, \tag{4}$$

dont les dérivées, savoir

$$2x, \quad \frac{2}{3x^{\frac{1}{3}}}, \tag{5}$$

passent du négatif au positif, en se réduisant à zéro ou à l'infini, tandis que la variable $x$ s'évanouit en passant du positif au négatif, ont l'une et l'autre zéro pour valeur minimum. Quant aux deux fonctions

$$x^3, \quad x^{\frac{1}{3}}, \tag{6}$$

dont les dérivées

$$(7) \qquad 3x^2, \quad \frac{1}{3x^{\frac{2}{3}}}$$

deviennent encore nulles ou infinies pour $x = x_0$, mais restent positives pour toute autre valeur de $x$, elles n'admettent ni maximum, ni minimum.

La fonction

$$(8) \qquad x^2 + px + q$$

reste continue, ainsi que sa dérivée, pour toutes les valeurs possibles de $x$. Mais cette dérivée, savoir

$$(9) \qquad 2x + p$$

s'évanouit pour $x = -\frac{p}{2}$, et devient négative pour $x < -\frac{p}{2}$, positive pour $x > -\frac{p}{2}$. On doit en conclure que la fonction (8) admet une valeur minimum correspondante à $x = -\frac{p}{2}$. Cette valeur minimum est

$$(10) \qquad q - \frac{p^2}{4};$$

ce qu'on vérifie sans peine en observant que la fonction dont il s'agit peut être présentée sous la forme

$$(11) \qquad \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + q - \frac{p^2}{4},$$

et qu'en conséquence elle surpasse toujours $q - \frac{p^2}{4}$, quand $x$ diffère de $-\frac{p}{2}$.

Désignons maintenant par A un nombre supérieur à l'unité, et par $\mathrm{L}x$ le logarithme de $x$, pris dans le système dont la base est A. La fonction

$$(12) \qquad \frac{\mathrm{A}^x}{x}$$



aura pour dérivée

$$(13) \qquad \frac{\mathrm{A}^x}{x}\left(\frac{1}{\mathrm{L}e} - \frac{1}{x}\right);$$

et, comme cette dérivée est négative, nulle ou positive, pour une valeur de $x$ supérieure à zéro, suivant que l'on suppose $x < \mathrm{L}e$, $x = \mathrm{L}e$, ou $x > \mathrm{L}e$, il en résulte que la fonction (12) acquerra, pour $x = \mathrm{L}e$, la valeur minimum

$$(14) \qquad \frac{e}{\mathrm{L}e}.$$

Au contraire, la fonction

$$(15) \qquad \frac{\mathrm{L}x}{x},$$

dont la dérivée, savoir

$$(16) \qquad \frac{1}{x^2}(\mathrm{L}e - \mathrm{L}x),$$

est positive, nulle ou négative, pour une valeur de $x$ supérieure à zéro, suivant que l'on suppose $x < e$, $x = e$, ou $x > e$, acquerra, pour $x = e$, la valeur maximum

$$(17) \qquad \frac{\mathrm{L}e}{e}.$$

Considérons enfin la fonction

$$(18) \qquad x^a e^{-x}.$$

Comme sa dérivée, savoir

$$(19) \qquad x^a e^{-x}\left(\frac{a}{x} - 1\right),$$

sera positive, nulle ou négative, pour une valeur de $x$ plus grande que zéro, suivant que l'on supposera $x < a$, $x = a$, $x > a$, on peut affirmer que la fonction (18) acquerra, pour $x = a$, la valeur maximum

$$(20) \qquad a^a e^{-a}.$$

Lorsque, afin d'obtenir les valeurs de $x$, qui fournissent des maxima ou des minima de la fonction $f(x)$, sans rendre cette fonction ou sa dérivée $f'(x)$ discontinue, on a déterminé les racines réelles de l'équation (1), alors, pour décider si chacune de ces racines produit un maximum ou un minimum de $f(x)$, il suffit ordinairement de considérer la fonction dérivée du second ordre. En effet, soit $x_0$ l'une des racines dont il s'agit, et supposons que la valeur correspondante de $f''(x)$ se réduise à une quantité finie. A la racine $x_0$ répondra un minimum de $f(x)$, si la fonction $f'(x)$ passe du négatif au positif, en devenant nulle pour $x = x_0$; c'est-à-dire, en d'autres termes, si la fonction $f'(x)$ croît avec la variable $x$ dans le voisinage de la valeur particulière $x = x_0$. Or cette dernière condition sera remplie (*voir* le théorème I de la quatrième Leçon), si la dérivée de $f'(x)$, savoir $f''(x)$, est toujours positive ou nulle pour des valeurs de $x$ très peu différentes de $x_0$, par conséquent, si la quantité $f''(x_0)$ offre une valeur finie et positive, ou bien une valeur nulle, mais qui représente un minimum de $f''(x)$. Au contraire, $f(x_0)$ sera un maximum de $f(x)$, si, $f'(x_0)$ étant nulle, la fonction $f'(x)$ diminue pour des valeurs croissantes de $x$, dans le voisinage de la valeur particulière $x = x_0$, ce qui aura lieu (en vertu du théorème déjà cité), si la quantité $f''(x_0)$ offre une valeur finie et négative, ou bien une valeur nulle, mais qui représente un maximum de $f''(x)$. On peut donc énoncer les propositions suivantes :

Théorème I. — *Pour qu'une valeur de $x$ propre à vérifier l'équation*

$$f'(x) = 0 \tag{1}$$

*produise un minimum de la fonction $f(x)$, il sera nécessaire, et il suffira, si la valeur correspondante de $f''(x)$ est une quantité finie et déterminée, que cette quantité soit positive, ou qu'étant nulle elle représente un minimum de $f''(x)$.*

*Exemple.* — Si l'on prend

$$f(x) = \frac{A^x}{x},$$



on trouvera

$$f'(x) = \frac{A^x}{x}\left(\frac{1}{Le} - \frac{1}{x}\right) = \left(\frac{1}{Le} - \frac{1}{x}\right) f(x),$$

$$f''(x) = \left(\frac{1}{Le} - \frac{1}{x}\right) f'(x) + \frac{1}{x^2} f(x)$$

$$= \left(\frac{1}{Le} - \frac{1}{x}\right)^2 f(x) + \frac{1}{x^2} f(x).$$

Donc alors la valeur $x = Le$, qui fera évanouir $f'(x)$, réduira la dérivée $f''(x)$ à la quantité positive

$$\frac{1}{x^2} f(x) = \frac{A^x}{x^3} = \frac{e}{(Le)^3},$$

et produira un minimum de la fonction proposée $\frac{A^x}{x}$.

Soit encore

$$f(x) = e^x - 2\cos x + e^{-x}.$$

On trouvera

$$f'(x) = e^x + 2\sin x - e^{-x},$$

$$f''(x) = e^x + 2\cos x + e^{-x}.$$

Donc alors la valeur $x = 0$, qui fera évanouir $f(x)$ et $f'(x)$, réduira la dérivée $f''(x)$ à la quantité positive $1 + 2 + 1 = 4$, et zéro sera la valeur minimum de la fonction proposée.

Théorème II. — *Pour qu'une valeur de $x$ propre à vérifier l'équation* (1) *produise un maximum de la fonction $f(x)$, il sera nécessaire, et il suffira, si la valeur correspondante de $f''(x)$ est une quantité finie et déterminée, que cette quantité soit négative, ou qu'étant nulle elle représente un maximum de $f''(x)$.*

*Exemple.* — Si l'on prend

$$f(x) = x^a e^{-x},$$

on trouvera

$$f'(x) = x^a e^{-x}\left(\frac{a}{x} - 1\right) = \left(\frac{a}{x} - 1\right) f(x),$$

$$f''(x) = \left(\frac{a}{x} - 1\right) f'(x) - \frac{a}{x^2} f(x)$$

$$= \left(\frac{a}{x} - 1\right)^2 f(x) - \frac{a}{x^2} f(x).$$

Donc alors la valeur $x = a$, qui fera évanouir la dérivée $f'(x)$, réduira la dérivée $f''(x)$ à la quantité négative

$$-\frac{a}{x^2}f(x) = -a x^{a-2} e^{-x} = -a^{a-1} e^{-a},$$

et produira un maximum de la fonction proposée $x^a e^{-x}$.

Concevons maintenant que, pour une valeur $x_0$ de $x$, propre à vérifier l'équation (1), sans rendre la fonction $f(x)$ discontinue, plusieurs termes consécutifs pris dans la suite des fonctions dérivées

$$f'(x),\quad f''(x),\quad f'''(x),\quad \ldots \tag{21}$$

s'évanouissent. Désignons par $f^{(n)}(x)$ le premier de ceux qui ne s'évanouissent pas, et supposons que $f^{(n)}(x_0)$ soit une quantité finie et déterminée. Pour que $f(x_0)$ soit une valeur minimum ou maximum de $f(x)$, il sera nécessaire (en vertu des théorèmes I et II) que $f''(x_0) = 0$ soit une valeur minimum ou maximum de $f''(x)$. Par suite, la première des quantités

$$f'''(x_0),\quad f^{\text{IV}}(x_0) \tag{22}$$

devra se réduire à zéro, et la seconde à une quantité positive ou négative, ou bien à une quantité nulle, mais qui représente un minimum ou un maximum de $f^{\text{IV}}(x)$. Dans les deux premiers cas, on aura $n = 4$. Dans le troisième, on conclura encore des théorèmes I et II que la première des deux quantités

$$f^{\text{V}}(x_0),\quad f^{\text{VI}}(x_0) \tag{23}$$

doit se réduire à zéro, et la seconde à une quantité positive, ou bien à une quantité nulle, mais qui représente un minimum ou un maximum de $f^{\text{VI}}(x)$. Si la seconde des quantités (23) diffère de zéro, on aura évidemment $n = 6$. En continuant de la même manière, on finira par reconnaître : 1° que, si la valeur $x = x_0$ produit un minimum de la fonction $f(x)$, $n$ sera un nombre pair, et $f^{(n)}(x_0)$ une quantité positive; 2° que, si la valeur $x = x_0$ produit un maximum de la même fonction, $n$ sera toujours un nombre pair, la quantité $f^{(n)}(x_0)$



étant négative. En conséquence, on peut joindre aux théorèmes I et II celui que nous allons énoncer.

Théorème III. — *Lorsqu'une valeur particulière de $x$, dans le voisinage de laquelle la fonction $f(x)$ reste continue, fait évanouir les dérivées de $f(x)$ dont l'ordre est inférieur à $n$, et réduit la dérivée de l'ordre $n$ à une quantité finie et déterminée, la valeur correspondante de $f(x)$ ne peut être un maximum ou un minimum que dans le cas où la lettre $n$ désigne un nombre pair. Dans ce même cas, la fonction $f(x)$ deviendra un minimum, si la valeur de $f^{(n)}(x)$ est positive, et un maximum si la valeur de $f^{(n)}(x)$ est négative.*

*Exemple.* — Si l'on prend

$$f(x) = e^x + 2\cos x + e^{-x},$$

on trouvera

$$f'(x) = e^x - 2\sin x - e^{-x},$$
$$f''(x) = e^x - 2\cos x + e^{-x},$$
$$f'''(x) = e^x + 2\sin x - e^{-x},$$
$$f^{\text{IV}}(x) = e^x + 2\cos x + e^{-x} = f(x).$$

Donc alors la valeur $x = 0$, qui fera évanouir les fonctions dérivées

$$f'(x),\quad f''(x),\quad f'''(x),$$

réduira la dérivée $f^{\text{IV}}(x)$ à la quantité positive $1 + 2 + 1 = 4$, et par suite la valeur correspondante de la fonction proposée $f(x)$, ou le nombre 4, sera un minimum de cette fonction.

Le théorème III pourrait se déduire directement de la formule (19) (quatrième Leçon). En effet, pour qu'une valeur particulière de $f(x)$, telle que $f(x_0)$, soit un minimum, il est nécessaire, et il suffit, qu'elle soit surpassée par toutes les valeurs réelles voisines ou de la forme $f(x_0 + i)$, $i$ désignant une quantité infiniment petite, c'est-à-dire, en d'autres termes, que la différence

$$f(x_0 + i) - f(x_0) \tag{24}$$

reste positive, quand elle est réelle, pour de très petites valeurs numériques de la quantité $i$, et quel que soit d'ailleurs le signe de cette quantité. De même, pour que $f(x_0)$ soit un maximum de $f(x)$, il est nécessaire, et il suffit, que les valeurs réelles de la différence (24), qui correspondent à des valeurs de $i$ très rapprochées de zéro, soient constamment négatives. Cela posé, si, la fonction $f(x)$ étant continue dans le voisinage de la valeur particulière $x = x_0$, les dérivées de $f(x)$, d'un ordre inférieur ou égal à $n$, se réduisent, pour $x = x_0$, les premières à zéro, la dernière à une quantité finie et déterminée, positive ou négative; alors, en attribuant à $i$ une très petite valeur numérique, et désignant par $\theta$ un nombre inférieur à l'unité, on aura [en vertu de la formule (19) de la quatrième Leçon]

$$(25)\qquad f(x_0+i)-f(x_0)=\frac{i^n}{1.2.3\ldots n}f^{(n)}(x_0+\theta i).$$

Or il résulte évidemment de l'équation (25) que, pour de très petites valeurs numériques de $i$, la différence (24) sera une quantité affectée du même signe que le produit

$$(26)\qquad i^n f^{(n)}(x_0).$$

Par conséquent, si $n$ est un nombre pair, cette différence changera de signe avec $i$, et la quantité $f(x_0)$ ne pourra être ni un maximum ni un minimum de $f(x)$. Au contraire, si $n$ est un nombre pair, la différence (24), en s'approchant de zéro, restera, comme le produit (26), et quel que soit le signe de $i$, constamment positive ou constamment négative, suivant que le second facteur du produit en question, savoir $f^{(n)}(x_0)$, sera lui-même positif ou négatif. Donc alors $f(x_0)$ sera un maximum ou un minimum de $f(x)$, suivant que la quantité $f^{(n)}(x_0)$ sera positive ou négative. Il est bon d'observer qu'on pourrait encore établir le théorème III en remplaçant, dans les théorèmes VII, VIII, IX de la Leçon précédente, la quantité infiniment petite $f(i)$ par la quantité infiniment petite $f(x_0+i)-f(x_0)$.

Nous remarquerons, en terminant cette Leçon, que, si l'on désigne



par $y$ la fonction $f(x)$, les différents termes de la série (21) se présenteront sous la forme

$$(27)\qquad \frac{dy}{dx},\quad \frac{d^2y}{dx^2},\quad \frac{d^3y}{dx^3},\quad \ldots.$$

Alors l'équation (1) deviendra

$$(28)\qquad dy=0.$$

De plus, on peut évidemment affirmer : 1° que, si

$$\frac{d^ny}{dx^n}=f^{(n)}(x)$$

représente le premier terme de la série (25) qui obtienne, pour $x = x_0$, une valeur différente de zéro, $d^ny$ sera le premier terme qui remplira la même condition dans la série des différentielles

$$(29)\qquad dy,\quad d^2y,\quad d^3y,\quad \ldots;$$

2° que, si $n$ est un nombre pair, la différentielle

$$d^ny=f^{(n)}(x)\,dx^n$$

sera constamment affectée du même signe que la fonction dérivée $f^{(n)}(x)$. Cela posé, il est clair qu'on pourra substituer au théorème III la proposition suivante :

Théorème IV. — *Soit $y = f(x)$ une fonction donnée de la variable $x$. Pour décider si une racine de l'équation* (28) *produit un maximum ou un minimum de la fonction proposée, il suffira ordinairement de calculer les valeurs de $d^2y$, $d^3y$, $d^4y$, ... correspondantes à cette racine. Si la valeur de $d^2y$ est positive ou négative, la valeur de $y$ sera un minimum dans le premier cas, un maximum dans le second. Si la valeur de $d^2y$ se réduit à zéro, on devra chercher, parmi les différentielles $d^3y$, $d^4y$, ..., la première qui ne s'évanouira pas. Désignons celle-ci par $d^ny$. Si $n$ est un nombre impair, la valeur de $y$ ne sera ni un maximum ni un minimum. Si, au contraire, $n$ est un nombre pair, la valeur de $y$ sera un minimum toutes les fois que la différentielle $d^ny$ sera positive, et un maximum toutes les fois que la différentielle $d^ny$ sera négative.*

*Nota.* — Il faut admettre, pour le théorème IV comme pour le théorème III, que la fonction dérivée

$$\frac{d^n y}{dx^n} = f^{(n)}(x)$$

conserve une valeur non seulement finie, mais encore déterminée, pour $x = x_0$, et par conséquent que cette dérivée reste continue, ainsi que les fonctions

$$y, \quad y', \quad y'', \quad \ldots, \quad y^{(n-1)},$$

dans le voisinage de la valeur particulière $x_0$ attribuée à la variable $x$.



# HUITIÈME LEÇON.

DÉVELOPPEMENT D'UNE FONCTION RÉELLE DE $x$ SUIVANT LES PUISSANCES ASCENDANTES ET ENTIÈRES DE LA VARIABLE $x$, OU DE LA DIFFÉRENCE $x - a$, DANS LAQUELLE $a$ DÉSIGNE UNE VALEUR PARTICULIÈRE DE CETTE VARIABLE.

Lorsque, la fonction $\mathrm{f}(x)$ étant réelle et continue, avec ses dérivées d'un ordre inférieur ou égal à $n$, depuis $x = 0$ jusqu'à $x = h$, le rapport

$$\frac{\mathrm{f}(x)}{x^{n-1}} \tag{1}$$

s'évanouit en même temps que la variable $x$; alors, en supposant cette variable renfermée entre les limites $0$, $h$, on peut, comme on l'a fait voir dans la sixième Leçon (page 330), trouver un nombre $\theta$ inférieur à $1$ et propre à vérifier la formule

$$\mathrm{f}(x) = \frac{x^n}{1.2.3\ldots n}\,\mathrm{f}^{(n)}(\theta x). \tag{2}$$

Or ce principe fournit un moyen très simple de développer les fonctions réelles d'une seule variable $x$ suivant les puissances ascendantes et entières de cette variable, ainsi qu'on va le montrer en peu de mots.

Soit $f(x)$ une fonction réelle de $x$ qui conserve une valeur finie, aussi bien que ses dérivées d'un ordre inférieur ou égal à $n$, pour une valeur nulle de $x$, et supposons d'ailleurs que les fonctions

$$f(x), \quad f'(x), \quad f''(x), \quad \ldots, \quad f^{(n)}(x) \tag{3}$$

restent réelles et continues depuis $x = 0$ jusqu'à $x = h$. On tirera successivement de l'équation (2) :

1° En posant $\mathrm{f}(x) = f(x) - f(0)$ et $n = 1$,

$$f(x) - f(0) = x f'(\theta x), \tag{4}$$

puis, en posant $f'(x) = f'(0) + \mathrm{P}$,

$$\mathrm{P} = \frac{f(x) - f(0) - x f'(0)}{x};$$

2° En posant $\mathrm{f}(x) = f(x) - f(0) - x f'(0)$ et $n = 2$,

$$f(x) - f(0) - x f'(0) = \frac{x^2}{1.2} f''(\theta x), \tag{5}$$

puis, en posant $f''(\theta x) = f''(0) + \mathrm{Q}$,

$$\frac{1}{1.2}\mathrm{Q} = \frac{f(x) - f(0) - x f'(0) - \frac{x^2}{1.2} f''(0)}{x^2};$$

3° En posant $\mathrm{f}(x) = f(x) - f(0) - x f'(0) - \frac{x^2}{1.2} f''(0)$ et $n = 3$,

$$f(x) - f(0) - x f'(0) - \frac{x^2}{1.2} f''(0) = \frac{x^3}{1.2.3} f'''(\theta x), \tag{6}$$

puis, en posant $f'''(\theta x) = f'''(0) + \mathrm{R}$,

$$\frac{1}{1.2.3}\mathrm{R} = \frac{f(x) - f(0) - x f'(0) - \frac{x^2}{1.2} f''(0) - \frac{x^3}{1.2.3} f'''(0)}{x^3},$$

etc. En continuant de la même manière et observant que les fonctions

$$\mathrm{P}, \quad \frac{1}{1.2}\mathrm{Q}, \quad \frac{1}{1.2.3}\mathrm{R}, \quad \ldots$$

s'évanouissent toutes avec $x$, on établira définitivement l'équation

$$\left\{\begin{aligned} &f(x) - f(0) - x f'(0) - \frac{x^2}{1.2} f''(0) - \ldots \\ &\qquad - \frac{x^{n-1}}{1.2.3\ldots(n-1)} f^{(n-1)}(0) = \frac{x^n}{1.2.3\ldots n} f^{(n)}(\theta x) \end{aligned}\right. \tag{7}$$



ou

$$\left\{\begin{aligned} f(x) = f(0) &+ \frac{x}{1} f'(0) + \frac{x^2}{1.2} f''(0) + \ldots \\ &+ \frac{x^{n-1}}{1.2.3\ldots(n-1)} f^{(n-1)}(0) + \frac{x^n}{1.2.3\ldots n} f^{(n)}(\theta x). \end{aligned}\right. \tag{8}$$

Il suit de la formule (8) que la fonction réelle $f(x)$ peut être considérée comme composée d'une fonction entière de $x$, savoir

$$f(0) + \frac{x}{1} f'(0) + \frac{x^2}{1.2} f''(0) + \ldots + \frac{x^{n-1}}{1.2.3\ldots(n-1)} f^{(n-1)}(0), \tag{9}$$

et d'un reste, savoir

$$\frac{x^n}{1.2.3\ldots n} f^{(n)}(\theta x). \tag{10}$$

Si, dans la même formule, on pose successivement $n = 1$, $n = 2$, $n = 3$, ..., on obtiendra les équations

$$f(x) = f(0) + x f'(\theta x), \tag{11}$$

$$f(x) = f(0) + x f'(0) + \frac{x^2}{1.2} f''(\theta x), \tag{12}$$

$$f(x) = f(0) + x f'(0) + \frac{x^2}{1.2} f''(0) + \frac{x^3}{1.2.3} f'''(\theta x), \tag{13}$$

.............................................................,

qui coïncident avec les formules (4), (5), (6), ....

*Exemples.* — Concevons que l'on désigne par $\mu$ une quantité constante, et que l'on prenne successivement pour $f(x)$ les fonctions réelles

$$e^x, \quad \cos x, \quad \sin x,$$
$$(1+x)^\mu, \quad \mathrm{l}(1+x),$$

qui restent continues, avec leurs dérivées des divers ordres, les trois premières quel que soit $x$, et les deux dernières quand $1 + x$ est positif. On trouvera, pour les valeurs de $f^{(n)}(x)$ relatives à ces mêmes fonctions

$$e^x,\quad \cos\left(x+\frac{n\pi}{2}\right),\quad \sin\left(x+\frac{n\pi}{2}\right),$$

$$\mu(\mu-1)(\mu-2)\ldots(\mu-n+1)(1+x)^{\mu-n},\qquad (-1)^{n-1}\frac{1.2.3\ldots(n-1)}{(1+x)^n},$$

et pour les valeurs correspondantes de $f^{(n)}(0)$

$$1,\quad \cos\frac{n\pi}{2},\quad \sin\frac{n\pi}{2},$$

$$\mu(\mu-1)(\mu-2)\ldots(\mu-n+1),\quad (-1)^{n-1}1.2.3\ldots(n-1).$$

En conséquence, la formule (8) donnera, pour des valeurs réelles quelconques de la variable $x$,

$$(14)\qquad e^x = 1+\frac{x}{1}+\frac{x^2}{1.2}+\ldots+\frac{x^{n-1}}{1.2.3\ldots(n-1)}+\frac{x^n}{1.2.3\ldots n}e^{\theta x},$$

$$(15)\qquad \left\{\begin{aligned} \cos x &= 1-\frac{x^2}{1.2}+\frac{x^4}{1.2.3.4}-\ldots\\ &\quad+\frac{x^{n-1}}{1.2.3\ldots(n-1)}\cos\frac{(n-1)\pi}{2}+\frac{x^n}{1.2.3\ldots n}\cos\left(\theta x+\frac{n\pi}{2}\right),\end{aligned}\right.$$

$$(16)\qquad \left\{\begin{aligned} \sin x &= x-\frac{x^3}{1.2.3}+\frac{x^5}{1.2.3.4.5}-\ldots\\ &\quad+\frac{x^{n-1}}{1.2.3\ldots(n-1)}\sin\frac{(n-1)\pi}{2}+\frac{x^n}{1.2.3\ldots n}\sin\left(\theta x+\frac{n\pi}{2}\right),\end{aligned}\right.$$

et, pour des valeurs de $x$ supérieures à $-1$,

$$(17)\qquad \left\{\begin{aligned} (1+x)^\mu &= 1+\mu x+\frac{\mu(\mu-1)}{1.2}x^2+\ldots\\ &\quad+\frac{\mu(\mu-1)(\mu-2)\ldots(\mu-n+2)}{1.2.3\ldots(n-1)}x^{n-1}\\ &\quad+\frac{\mu(\mu-1)(\mu-2)\ldots(\mu-n+1)}{1.2.3\ldots n}x^n(1+\theta x)^{\mu-n},\end{aligned}\right.$$

$$(18)\qquad \mathrm{l}(1+x) = x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\ldots\pm\frac{x^{n-1}}{n-1}\mp\frac{1}{n}\left(\frac{x}{1+\theta x}\right)^n.$$



Si, dans les formules (15) et (16), on prend pour $n$ un nombre pair, elles se réduiront à

$$(19)\qquad \left\{\begin{aligned} \cos x &= 1-\frac{x^2}{1.2}+\frac{x^4}{1.2.3.4}-\ldots\\ &\quad\pm\frac{x^{n-2}}{1.2.3\ldots(n-2)}\mp\frac{x^n}{1.2.3\ldots n}\cos\theta x,\end{aligned}\right.$$

$$(20)\qquad \left\{\begin{aligned} \sin x &= x-\frac{x^3}{1.2.3}+\frac{x^5}{1.2.3.4.5}-\ldots\\ &\quad\pm\frac{x^{n-1}}{1.2.3\ldots(n-1)}\mp\frac{x^n}{1.2.3\ldots n}\sin\theta x.\end{aligned}\right.$$

On trouverait de même, en prenant pour $n$ un nombre impair,

$$(21)\qquad \left\{\begin{aligned} \cos x &= 1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{1.2.3.4}-\ldots\\ &\quad\pm\frac{x^{n-1}}{1.2.3\ldots(n-1)}\mp\frac{x^n}{1.2.3\ldots n}\sin\theta x,\end{aligned}\right.$$

$$(22)\qquad \left\{\begin{aligned} \sin x &= x-\frac{x^3}{1.2.3}+\frac{x^5}{1.2.3.4.5}-\ldots\\ &\quad\pm\frac{x^{n-1}}{1.2.3\ldots(n-2)}\mp\frac{x^n}{1.2.3\ldots n}\cos\theta x.\end{aligned}\right.$$

Si l'on fait en particulier $n=1$, on tirera des formules précédentes

$$(23)\qquad \frac{e^x-1}{x}=e^{\theta x},$$

$$(24)\qquad \frac{1-\cos x}{x}=\sin\theta x,$$

$$(25)\qquad \frac{\sin x}{x}=\cos\theta x,$$

$$(26)\qquad \frac{(1+x)^\mu-1}{\mu x}=(1+\theta x)^{\mu-1},$$

$$(27)\qquad \frac{\mathrm{l}(1+x)}{x}=\frac{1}{1+\theta x}.$$

Si l'on fait, au contraire, $n = 2$, on trouvera

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{1.2} e^{\theta x}, \tag{28}$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{1.2} \cos \theta x, \tag{29}$$

$$\sin x = x - \frac{x^2}{1.2} \sin \theta x, \tag{30}$$

$$(1+x)^\mu = 1 + \mu x + \frac{\mu(\mu-1)}{1.2} x^2 (1+\theta x)^{\mu-2}, \tag{31}$$

$$\mathrm{l}(1+x) = x - \frac{1}{2}\left(\frac{1+\theta x}{x}\right)^2, \tag{32}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Supposons encore

$$f(x) = \operatorname{arc\,tang} x.$$

On aura, dans cette hypothèse,

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-x\sqrt{-1}} + \frac{1}{1+x\sqrt{-1}}\right),$$

$$f^{(n)}(x) = (\sqrt{-1})^{n-1} \frac{1.2.3\ldots(n-1)}{2}\left[\left(\frac{1}{1-x\sqrt{-1}}\right)^n - \left(\frac{-1}{1+x\sqrt{-1}}\right)^n\right],$$

$$f^{(n)}(0) = \frac{1.2.3\ldots(n-1)}{2}[1-(-1)^n](\sqrt{-1})^{n-1},$$

et, par suite,

$$f^{(n)}(0) = 0 \quad \text{ou} \quad f^{(n)}(0) = (-1)^{\frac{n-1}{2}}\, 1.2.3\ldots(n-1),$$

suivant que l'on prendra, pour $n$, un nombre pair ou un nombre impair. Cela posé, la formule (8) donnera, pour des valeurs réelles quelconques de la variable $x$, mais pour des valeurs paires du nombre entier $n$,

$$\left\{\begin{aligned} \operatorname{arc\,tang} x &= x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \ldots \\ &\pm \frac{x^{n-1}}{n-1} \mp \frac{x^n}{n} \frac{(1-\theta x\sqrt{-1})^{-n} - (1+\theta x\sqrt{-1})^{-n}}{2\sqrt{-1}} \end{aligned}\right. \tag{33}$$



et, pour des valeurs impaires de $n$,

$$\left\{\begin{aligned} \operatorname{arc\,tang} x &= x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \ldots \\ &\pm \frac{x^{n-2}}{n-2} \mp \frac{x^n}{n} \frac{(1-\theta x\sqrt{-1})^{-n} + (1+\theta x\sqrt{-1})^{-n}}{2}. \end{aligned}\right. \tag{34}$$

Lorsque la fonction $f(x)$ est entière et du degré $n$, sa différentielle de l'ordre $n$, et, par suite, sa dérivée de l'ordre $n$ se réduisent à des quantités constantes (*voir* la troisième Leçon, page 304). On a donc alors

$$f^{(n)}(\theta x) = f^{(n)}(0), \tag{35}$$

et l'on tire de la formule (8)

$$\left\{\begin{aligned} f(x) &= f(0) + \frac{x}{1} f'(0) + \frac{x^2}{1.2} f''(0) + \ldots \\ &\pm \frac{x^{n-1}}{1.2.3\ldots(n-1)} f^{(n-1)}(0) + \frac{x^n}{1.2.3\ldots n} f^{(n)}(0). \end{aligned}\right. \tag{36}$$

Il est facile de vérifier cette conclusion, et d'établir directement l'équation (36), dans le cas même où la fonction $f(x)$ cesse d'être réelle ainsi que la variable $x$. En effet, soit

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n \tag{37}$$

une fonction entière du degré $n$. En différentiant $n$ fois de suite l'équation (37), on trouvera

$$\left\{\begin{aligned} f'(x) &= 1.a_1 + 2a_2 x + \ldots + n a_n x^{n-1}, \\ f''(x) &= 1.2.a_2 + \ldots + (n-1) n a_n x^{n-2}, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots, \\ f^{(n)}(x) &= 1.2.3\ldots(n-1) n a_n. \end{aligned}\right. \tag{38}$$

Or, si l'on pose, dans ces diverses formules, $x = 0$, on en tirera

$$a_0 = f(0), \quad a_1 = \frac{1}{1} f'(0), \quad a_2 = \frac{1}{1.2} f''(0), \quad \ldots, \quad a_n = \frac{1}{1.2.3\ldots n} f^{(n)}(0), \tag{39}$$

puis, en substituant les valeurs précédentes de $a_0, a_1, \ldots, a_n$ dans l'équation (37), on reproduira évidemment la formule (36).

*Exemple.* — Soit $f(x) = (1+x)^n$. On obtiendra la formule connue

$$(40)\quad \left\{\begin{aligned} (1+x)^n = 1 + \frac{n}{1}x + \frac{n(n-1)}{1.2}x^2 \\ + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}x^3 + \ldots + \frac{n}{1}x^{n-1} + x^n. \end{aligned}\right.$$

Concevons maintenant que, la lettre $a$ désignant une valeur particulière de la variable $x$, la fonction $f(x)$, entière ou non entière, conserve, pour $x = a$, une valeur finie, aussi bien que ses dérivées d'un ordre inférieur ou égal à $n$; et supposons d'ailleurs que les fonctions (3) restent réelles et continues depuis $x = a$ jusqu'à $x = a + h$. Alors, si l'on fait

$$(41)\qquad x = a + z$$

et

$$(42)\qquad F(z) = f(a+z),$$

on trouvera

$$\begin{array}{llll} F'(z) = f'(a+z), & F''(z) = f''(a+z), & \ldots, & F^{(n)}(z) = f^{(n)}(a+z), \\ F'(0) = f'(a), & F''(0) = f''(a), & \ldots, & F^{(n)}(0) = f^{(n)}(a), \end{array}$$

et l'on conclura de la formule (8), pour des valeurs de $z$ comprises entre les limites $0$, $h$,

$$(43)\quad \left\{\begin{aligned} F(z) = F(0) + \frac{z}{1}F'(0) + \frac{z^2}{1.2}F''(0) + \ldots \\ + \frac{z^{n-1}}{1.2.3\ldots(n-1)}F^{(n-1)}(0) + \frac{z^n}{1.2.3\ldots n}F^{(n)}(\theta z) \end{aligned}\right.$$

ou, ce qui revient au même,

$$(44)\quad \left\{\begin{aligned} f(x) = f(a) + \frac{x-a}{1}f'(a) + \ldots \\ + \frac{(x-a)^{n-1}}{1.2.3\ldots(n-1)}f^{(n-1)}(a) + \frac{(x-a)^n}{1.2.3\ldots n}f^{(n)}[a+\theta(x-a)]. \end{aligned}\right.$$



Par conséquent, dans l'hypothèse admise, on peut trouver un nombre $\theta$ inférieur à $1$, et propre à vérifier la formule (44), tant que la variable $x$ demeure comprise entre les limites $x = a$, $x = a + h$. En vertu de la même formule, la fonction $f(x)$ peut alors être considérée comme composée de la fonction entière

$$(45)\quad f(a) + \frac{x-a}{1}f'(a) + \frac{(x-a)^2}{1.2}f''(a) + \ldots + \frac{(x-a)^{n-1}}{1.2.3\ldots(n-1)}f^{(n-1)}(a),$$

qui se trouve ordonnée suivant les puissances ascendantes de $x - a$, et d'un reste représenté par le produit

$$(46)\qquad \frac{(x-a)^n}{1.2.3\ldots n}f^{(n)}[a+\theta(x-a)].$$

Si, dans la formule (44), on pose successivement $n = 1$, $n = 2$, ..., on obtiendra les équations

$$(47)\quad f(x) = f(a) + (x-a)f'[a+\theta(x-a)],$$

$$(48)\quad f(x) = f(a) + (x-a)f'(a) + \frac{(x-a)^2}{1.2}f''[a+\theta(x-a)],$$

$$(49)\quad f(x) = f(a) + (x-a)f'(a) + \frac{(x-a)^2}{1.2}f''(a) + \frac{(x-a)^3}{1.2.3}f'''[a+\theta(x-a)],$$

.....................................................................

*Exemples.* — Concevons que l'on désigne par $\mu$ une quantité constante, et que l'on prenne successivement pour $f(x)$ les deux fonctions réelles

$$x^\mu,\quad lx,$$

qui restent continues, avec leurs dérivées des divers ordres, tant que l'on attribue à la variable $x$ une valeur positive et finie. On trouvera, pour les valeurs générales de $f^{(n)}(x)$ relatives à ces deux fonctions,

$$\mu(\mu-1)(\mu-2)\ldots(\mu-n+1)x^{\mu-n},\qquad (-1)^{n-1}\frac{1.2.3\ldots(n-1)}{x^n}.$$

En conséquence, la formule (44) donnera, pour des valeurs positives de la variable $x$,

$$(50)\quad \left\{\begin{aligned} x^{\mu} = a^{\mu} + \mu a^{\mu-1}(x-a) &+ \frac{\mu(\mu-1)}{1.2}a^{\mu-2}(x-a)^2 + \ldots \\ &+ \frac{\mu(\mu-1)\ldots(\mu-n+2)}{1.2.3\ldots(n-1)}a^{\mu-n+1}(x-a)^{n-1} \\ &+ \frac{\mu(\mu-1)\ldots(\mu-n+1)}{1.2.3\ldots n}(x-a)^n[a+\theta(x-a)]^{\mu-n} \end{aligned}\right.$$

et

$$(51)\quad \left\{\begin{aligned} 1\frac{x}{a} &= \frac{x-a}{a} - \frac{1}{2}\left(\frac{x-a}{a}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{x-a}{a}\right)^3 - \ldots \\ &\quad \pm \frac{1}{n-1}\left(\frac{x-a}{a}\right)^{n-1} \mp \frac{1}{n}\left[\frac{x-a}{a+\theta(x-a)}\right]^n. \end{aligned}\right.$$

On arriverait aux mêmes résultats, en remplaçant dans les formules (17) et (18) la variable $x$ par la différence $\frac{x}{a} - 1$.

Si l'on fait en particulier $n = 1$, on tirera des formules (50) et (51)

$$(52)\qquad x^{\mu} = a^{\mu} + \mu(x-a)[a+\theta(x-a)]^{\mu-1},$$

$$(53)\qquad 1\frac{x}{a} = \frac{x-a}{a+\theta(x-a)},$$

. . . . . . . . . . . . . . . . . . .

Il est souvent utile de substituer aux expressions (10) et (46) d'autres expressions équivalentes. On peut y parvenir comme il suit.

Supposons que, dans l'équation (44), on regarde la quantité $x$ comme constante, la quantité $a$ comme variable; et désignons par $\varphi(a)$ ce que devient alors l'expression (46) considérée comme fonction de $a$, en sorte qu'on ait

$$(54)\quad f(x) = f(a) + \frac{x-a}{1}f'(a) + \ldots + \frac{(x-a)^{n-1}}{1.2.3\ldots(n-1)}f^{(n-1)}(a) + \varphi(a).$$

On conclura de la formule (47), en y remplaçant la lettre $f$ par la



lettre $\varphi$,

$$(55)\qquad \varphi(a) = \varphi(x) - (x-a)\,\varphi'[a+\theta(x-a)].$$

D'ailleurs on tirera évidemment de l'équation (54) et de cette même équation différentiée par rapport à la quantité $a$

$$(56)\qquad \varphi(x) = 0,$$

$$(57)\qquad \varphi'(a) = -\frac{(x-a)^{n-1}}{1.2.3\ldots(n-1)}f^{(n)}(a)$$

et, par suite,

$$(58)\quad \varphi'[a+\theta(x-a)] = -\frac{(1-\theta)^{n-1}(x-a)^{n-1}}{1.2.3\ldots(n-1)}f^{(n)}[a+\theta(x-a)].$$

Cela posé, la formule (55) donnera

$$(59)\qquad \varphi(a) = \frac{(1-\theta)^{n-1}(x-a)^n}{1.2.3\ldots(n-1)}f^{(n)}[a+\theta(x-a)].$$

On peut donc substituer l'expression (59) à l'expression (46). Seulement, dans le passage de l'une à l'autre, le nombre $\theta$ pourra changer de valeur, mais en demeurant compris entre les limites 0, 1.

Lorsqu'on a égard à l'équation (59), la formule (44) se réduit à

$$(60)\quad \left\{\begin{aligned} f(x) = f(a) + \frac{x-a}{1}f'(a) &+ \frac{(x-a)^2}{1.2}f''(a) + \ldots \\ &+ \frac{(x-a)^{n-1}}{1.2.3\ldots(n-1)}f^{(n-1)}(a) \\ &+ \frac{(1-\theta)^{n-1}(x-a)^n}{1.2.3\ldots(n-1)}f^{(n)}[a+\theta(x-a)]. \end{aligned}\right.$$

Si l'on pose, dans cette dernière, $a = 0$, on aura simplement

$$(61)\quad \left\{\begin{aligned} f(x) &= f(0) + \frac{x}{1}f'(0) + \frac{x^2}{1.2} + \ldots \\ &\quad + \frac{x^{n-1}}{1.2.3\ldots(n-1)}f^{(n-1)}(0) + \frac{(1-\theta)^{n-1}x^n}{1.2.3\ldots(n-1)}f^{(n)}(\theta x). \end{aligned}\right.$$

Il résulte de l'équation (61) que, dans la formule (8), l'expression (10) peut être remplacée par la suivante :

$$\frac{(1-\theta)^{n-1}x^n}{1.2.3\ldots(n-1)}f^{(n)}(\theta x). \tag{62}$$

Seulement, dans le passage de la première expression à la seconde, le nombre $\theta$ pourra changer de valeur, mais en demeurant compris entre les limites 0, 1.

Si, dans les équations (60) et (61), on prend $n=1$, on devra remplacer en même temps le produit $1.2.3\ldots(n-1)$ par l'unité. Donc alors on retrouvera les formules (11) et (47). Mais, en posant $n=2$, $n=3$, ..., on obtiendra les équations

$$f(x)=f(a)+(x-a)f'(x)+(1-\theta)(x-a)^2f''[a+\theta(x-a)], \tag{63}$$

$$\left\{\begin{aligned} f(x)=f(a)&+(x-a)f'(a)+\frac{(x-a)^2}{1.2}f''(a)\\ &+\frac{(1-\theta)^2(x-a)^3}{1.2}f'''[a+\theta(x-a)], \end{aligned}\right. \tag{64}$$

....................................................,

$$f(x)=f(0)+xf'(0)+(1-\theta)x^2f''(\theta x), \tag{65}$$

$$f(x)=f(0)+xf'(0)+\frac{x^2}{1.2}f''(0)+\frac{(1-\theta)^2x^3}{1.2}f'''(\theta x), \tag{66}$$

....................................................

*Exemples.* — Si l'on prend pour $f(x)$ les fonctions

$$(1+x)^\mu,\quad l(1+x),$$

et si l'on attribue à $x$ une valeur qui surpasse la quantité $-1$, on tirera de la formule (61)

$$\left\{\begin{aligned} (1+x)^\mu=1&+\mu x+\frac{\mu(\mu-1)}{1.2}x^2+\ldots\\ &+\frac{\mu(\mu-1)(\mu-2)\ldots(\mu-n+2)}{1.2.3\ldots(n-1)}x^{n-1}\\ &+\frac{\mu(\mu-1)(\mu-2)\ldots(\mu-n+1)}{1.2.3\ldots(n-1)}(1-\theta)^{n-1}x^{n-1}(1+\theta x)^{\mu-n} \end{aligned}\right. \tag{67}$$



et

$$l(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\ldots\pm\frac{x^{n-1}}{n-1}\mp(1-\theta)^{n-1}\left(\frac{x}{1+\theta x}\right)^n. \tag{68}$$

Si l'on suppose en particulier $n=2$, on trouvera simplement

$$(1+x)^\mu=1+\mu x+\mu(\mu-1)x^2(1-\theta)(1+\theta x)^{\mu-2}, \tag{69}$$

$$l(1+x)=x-(1-\theta)\left(\frac{x}{1+\theta x}\right)^2. \tag{70}$$

# NEUVIÈME LEÇON.

## THÉORÈMES DE MACLAURIN ET DE TAYLOR.

Lorsque, pour des valeurs de $x$ comprises entre certaines limites, et pour des valeurs du nombre $\theta$ inférieures à l'unité, l'une des expressions

$$(1)\qquad \frac{x^n}{1.2.3\ldots n} f^{(n)}(\theta x),$$

$$(2)\qquad \frac{x^n}{1.2.3\ldots(n-1)}(1-\theta)^{n-1} f^{(n)}(\theta x)$$

décroît indéfiniment tandis que $n$ augmente, alors, en posant $n=\infty$ dans l'équation (8) ou (61) de la huitième Leçon, on trouve

$$(3)\qquad f(x) = f(0) + \frac{x}{1} f'(0) + \frac{x^2}{1.2} f''(0) + \frac{x^3}{1.2.3} f'''(0) + \ldots.$$

Donc alors la série

$$(4)\qquad f(0),\quad \frac{x}{1} f'(0),\quad \frac{x^2}{1.2} f''(0),\quad \frac{x^3}{1.2.3} f'''(0),\quad \ldots,$$

qui a pour terme général le produit

$$(5)\qquad \frac{x^n}{1.2.3\ldots n} f^{(n)}(0),$$

reste convergente, tant que la variable $x$ demeure comprise entre les limites données, et cette série fournit une somme équivalente à la fonction $f(x)$. C'est en cela que consiste le *théorème de Maclaurin*.

Il est important d'observer que la fraction renfermée dans l'expres-



sion (2), savoir

$$(6)\qquad \frac{x^n}{1.2.3\ldots n},$$

s'évanouit pour une valeur infinie de $n$. En effet le produit

$$m(n-m+1) = \left(\frac{n+1}{2}\right)^2 - \left(\frac{n+1}{2} - m\right)^2$$

croît évidemment avec le nombre entier $m$, depuis $m=1$ jusqu'à $m=\frac{n}{2}$; et, comme on a en conséquence

$$1.n < 2(n-1) < 3(n-2) < \ldots,$$

$$(7)\qquad 1.2.3\ldots n > n^{\frac{n}{2}},$$

il est clair que la valeur numérique de la fraction (6) sera toujours inférieure à celle de la quantité

$$(8)\qquad \left(\frac{x}{\sqrt{n}}\right)^n,$$

et s'évanouira aussi bien que cette quantité, pour $n=\infty$. On en conclut immédiatement que, dans le cas où la quantité

$$(9)\qquad f^{(n)}(\theta x)$$

conserve une valeur finie, tandis que $n$ croît indéfiniment, l'expression (1) converge vers une limite nulle. Donc alors la série de Maclaurin, c'est-à-dire la série (4), est convergente, et elle vérifie la formule (3). C'est ce qui arrivera pour toutes les valeurs réelles et finies de $x$, si à chacune d'elles correspond une valeur finie de la fonction $f^{(n)}(x)$.

*Exemples.* — Si l'on prend successivement pour $f(x)$ les trois fonctions

$$e^x,\quad \cos x,\quad \sin x,$$

on trouvera, pour les valeurs correspondantes de $f^{(n)}(x)$,

$$e^x,\quad \cos\left(x+\frac{n\pi}{2}\right),\quad \sin\left(x+\frac{n\pi}{2}\right).$$

Comme ces dernières quantités restent finies, quel que soit $x$, tandis que $n$ augmente, on peut affirmer que le théorème de Maclaurin est toujours applicable aux fonctions $e^x$, $\cos x$, $\sin x$. On aura en conséquence, pour des valeurs réelles quelconques de la variable $x$,

$$e^x = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3}{1.2.3} + \ldots, \tag{10}$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^4}{1.2.3.4} - \frac{x^6}{1.2.3.4.5.6} + \ldots, \tag{11}$$

$$\sin x = \frac{x}{1} - \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^5}{1.2.3.4.5} + \ldots. \tag{12}$$

L'équation (10) coïncide avec la formule (12) des Préliminaires. Si l'on y remplace la variable $x$ par le produit $x\,\mathrm{l}A$, A désignant une constante positive, alors, en ayant égard à la formule

$$A^x = e^{x\,\mathrm{l}A},$$

on trouvera

$$A^x = 1 + \frac{x}{1}\,\mathrm{l}A + \frac{x^2}{1.2}(\mathrm{l}A)^2 + \frac{x^3}{1.2.3}(\mathrm{l}A)^3 + \ldots. \tag{13}$$

Au reste, il peut arriver que la fonction $f^{(n)}(\theta x)$ devienne infinie avec le nombre $n$, et que le théorème de Maclaurin subsiste. Concevons, par exemple, que l'on prenne

$$f(x) = \mathrm{l}(1+x),$$

et qu'en même temps on attribue à la variable $x$ une valeur numérique inférieure à l'unité. On trouvera, dans ce cas,

$$f^{(n)}(x) = \pm\frac{1.2.3\ldots(n-1)}{(1+x)^n};$$

et, comme le rapport

$$\frac{1.2.3\ldots(n-1)}{(1+x)^n},$$

toujours supérieur au produit

$$\frac{(n-1)^{\frac{n-1}{2}}}{(1+x)^n} = \frac{1}{1+x}\left(\frac{\sqrt{n-1}}{1+x}\right)^{n-1},$$



croîtra indéfiniment avec $n$, on pourra en dire autant des deux fonctions $f^{(n)}(x)$, $f^{(n)}(\theta x)$. D'ailleurs l'expression (2) deviendra

$$\pm\frac{x^{n-1}(1-\theta)^{n-1}}{(1+\theta x)^n} = \pm\frac{x^{n-1}}{1-\theta}\left(\frac{1-\theta}{1+\theta x}\right)^n; \tag{14}$$

et, comme la fraction

$$\frac{1-\theta}{1+\theta x} = 1 - \frac{\theta(1+x)}{1+\theta x}$$

sera évidemment un nombre inférieur à l'unité, il est clair que l'expression (14) s'évanouira pour $n = \infty$. On aura, en conséquence, pour toutes les valeurs de $x$ comprises entre les limites $-1$, $+1$,

$$\mathrm{l}(1+x) = \frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots. \tag{15}$$

Si la valeur numérique de la variable $x$ devenait supérieure à l'unité, alors le terme général de la série

$$\frac{x}{1},\quad -\frac{x^2}{2},\quad \frac{x^3}{3},\quad -\frac{x^4}{4},\quad \ldots, \tag{16}$$

savoir

$$\pm\frac{x^n}{n}, \tag{17}$$

convergerait, pour des valeurs croissantes de $n$, vers la limite $\pm\infty$ [*voir* la formule (11) de la page 320]. Par suite, la série (16), étant divergente, n'aurait plus de somme, et cesserait de vérifier la formule (15).

Si, dans la formule (15), on fait converger la variable $x$ : 1° vers la limite 1; 2° vers la limite $-1$, on trouvera, dans le premier cas,

$$\mathrm{l}2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots = \frac{1}{1.2} + \frac{1}{3.4} + \frac{1}{5.6} + \ldots = 0,6931418\ldots. \tag{18}$$

et, dans le second,

$$\mathrm{l}0 = -\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots\right) = -\infty. \tag{19}$$

Supposons encore

$$f(x) = \operatorname{arc\,tang} x.$$

Alors, si l'on prend pour $x$ un nombre impair, l'expression (1) se trouvera réduite au dernier terme de la formule (34) de la huitième Leçon, c'est-à-dire à

$$(20)\qquad \mp \frac{x^n}{n} \frac{(1-\theta x\sqrt{-1})^{-n} + (1+\theta x\sqrt{-1})^{-n}}{2}.$$

Soient d'ailleurs $p_n$ et $q_n$ deux quantités réelles déterminées par l'équation

$$(21)\qquad \frac{x^n}{n}(1+\theta x\sqrt{-1})^{-n} = p_n + q_n\sqrt{-1}.$$

On aura évidemment

$$(22)\qquad \frac{x^n}{n}(1-\theta x\sqrt{-1})^{-n} = p_n - q_n\sqrt{-1}$$

et, par suite,

$$(23)\qquad \frac{x^n}{n} \frac{(1-\theta x\sqrt{-1})^{-n} + (1+\theta x\sqrt{-1})^{-n}}{2} = p_n.$$

De plus, on tirera des formules (21) et (22) combinées entre elles par voie de multiplication

$$\left(\frac{x^n}{n}\right)^2 (1+\theta^2 x^2)^{-n} = p_n^2 + q_n^2$$

ou, ce qui revient au même,

$$(24)\qquad p_n^2 + q_n^2 = \frac{1}{n^2}\left(\frac{x^2}{1+\theta^2 x^2}\right)^n.$$

Si maintenant on attribue à la variable $x$ une valeur numérique inférieure à l'unité, la valeur du binôme $p_n^2+q_n^2$, fournie par l'équation (24), deviendra évidemment nulle pour $n=\infty$, et par suite la quantité $\mp p_n$, ou l'expression (20), convergera, pour des valeurs croissantes de $n$, vers la limite zéro. Donc alors, en posant $n=\infty$



dans la formule (34) de la huitième Leçon, on trouvera

$$(25)\qquad \operatorname{arc\,tang} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \ldots.$$

Si la valeur numérique de $x$ devenait supérieure à l'unité, alors, comme l'expression (17) convergerait, pour des valeurs croissantes de $n$, vers la limite $\pm\infty$, la série

$$(26)\qquad \frac{x}{1},\quad -\frac{x^3}{3},\quad +\frac{x^5}{5},\quad -\frac{x^7}{7},\quad \ldots$$

serait divergente, et cesserait de vérifier la formule (25).

Si, dans la formule (25), on fait converger la variable $x$ vers la limite 1, on trouvera

$$(27)\qquad \frac{\pi}{4} = \operatorname{arc\,tang}(1) = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots = 2\left(\frac{1}{1.3} + \frac{1}{5.7} + \frac{1}{9.11} + \ldots\right)$$

et, par suite,

$$(28)\qquad \pi = 8\left(\frac{1}{1.3} + \frac{1}{5.7} + \frac{1}{9.11} + \ldots\right) = 3{,}14159265\ldots.$$

Si l'on prenait, au contraire, $x = \frac{1}{\sqrt{3}}$, la formule (25) donnerait

$$(29)\qquad \frac{\pi}{6} = \operatorname{arc\,tang}\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(1 - \frac{1}{3.3} + \frac{1}{5.3^2} - \frac{1}{7.3^3} + \ldots\right).$$

Supposons maintenant

$$f(x) = (1+x)^\mu,$$

$\mu$ désignant une quantité constante. Dans cette hypothèse, la série de Maclaurin deviendra

$$(30)\qquad 1,\quad \mu x,\quad \frac{\mu(\mu-1)}{1.2}x^2,\quad \frac{\mu(\mu-1)(\mu-2)}{1.2.3}x^3,\quad \ldots,$$

tandis que les expressions (1) et (2) se trouveront réduites aux derniers termes des formules (17) et (67) de la huitième Leçon, c'est-à-dire aux produits

$$\frac{\mu(\mu-1)(\mu-2)\ldots(\mu-n+1)}{1.2.3\ldots n}x^n(1+\theta x)^{\mu-n} \tag{31}$$

et

$$\frac{\mu(\mu-1)(\mu-2)\ldots(\mu-n+1)}{1.2.3\ldots(n-1)}(1-\theta)^{n-1}x^n(1+\theta x)^{\mu-n}. \tag{32}$$

De plus, si l'on désigne par $u_n$ le terme général de la série (30), et par $m$ un nombre entier inférieur à $n$, on aura évidemment

$$u_n = \frac{\mu(\mu-1)(\mu-2)\ldots(\mu-n+1)}{1.2.3\ldots n}x^n, \tag{33}$$

$$u_n = (-1)^{n-m}\left(1-\frac{\mu+1}{m+1}\right)\left(1-\frac{\mu+1}{m+2}\right)\cdots\left(1-\frac{\mu+1}{n}\right)x^{n-m}u_m. \tag{34}$$

Cela posé, représentons par $r$ la valeur numérique de $x$, et par $\rho$ un nombre choisi arbitrairement entre les limites 1 et $r$. On pourra évidemment attribuer à $m$ une valeur assez considérable pour que, $n$ étant supérieur à $m$, la valeur numérique du produit

$$\left(1-\frac{\mu+1}{n}\right)x$$

reste comprise entre 1 et $\rho$. Alors celle du rapport

$$\frac{u_n}{u_m} = (-1)^{n-m}\left(1-\frac{\mu+1}{m+1}\right)\left(1-\frac{\mu+1}{m+2}\right)\cdots\left(1-\frac{\mu+1}{n}\right)x^{n-m}$$

se trouvera elle-même renfermée entre les limites 1 et $\rho^{n-m}$. Par suite, si l'on a

$$r > \rho > 1,$$

la fraction $\frac{u_n}{u_m}$ et le produit de cette fraction par $u_m$, ou la quantité $u_n$, deviendront infinies, en même temps que $\rho^{n-m}$, pour $n=\infty$. Au contraire, si l'on a

$$r < \rho < 1,$$

les quantités $\frac{u_n}{u_m}$ et $u_n$ s'évanouiront pour $n=\infty$, en même temps



que $\rho^{n-m}$. Ajoutons qu'on pourra en dire autant : 1° de la quantité

$$\frac{(\mu-1)(\mu-2)\ldots(\mu-n+1)}{1.2.3\ldots(n-1)}x^{n-1}, \tag{35}$$

que l'on déduit de $u_n$ en diminuant chacun des nombres $\mu$ et $n$ de l'unité; 2° de l'expression (32) qu'on obtient en multipliant la quantité (35) par le produit

$$\mu x(1+\theta x)^{\mu-1}\left(\frac{1-\theta}{1+\theta x}\right)^{n-1},$$

attendu que ce produit converge, pour des valeurs croissantes de $n$, vers une limite finie ou nulle. Donc, si la valeur numérique de $x$ surpasse l'unité, la série (30), dont le terme général deviendra infini avec le nombre $n$, sera divergente et n'aura pas de somme. Mais, si la valeur numérique de $x$ est inférieure à l'unité, alors, en posant $n=\infty$, on tirera de la formule (67) de la huitième Leçon

$$(1+x)^\mu = 1+\frac{\mu}{1}x+\frac{\mu(\mu-1)}{1.2}x^2+\frac{\mu(\mu-1)(\mu-2)}{1.2.3}x^3+\ldots. \tag{36}$$

Par des raisonnements semblables à ceux qui précèdent, on prouverait aisément que l'expression (31) s'évanouit pour une valeur infinie de $n$, quand la variable $x$ est renfermée entre les limites 0, 1. Il en résulte que l'équation (36) peut être déduite de la formule (17) de la huitième Leçon, mais dans le cas seulement où la variable $x$ reste positive et inférieure à l'unité.

Lorsque, dans la formule (36), on remplace la quantité $\mu$ par un nombre entier $n$, on retrouve l'équation (40) de la huitième Leçon. Si, dans la même formule, on écrit $-\mu$ au lieu de $\mu$, on en tirera

$$(1+x)^{-\mu} = 1-\frac{\mu}{1}x+\frac{\mu(\mu+1)}{1.2}x^2-\frac{\mu(\mu+1)(\mu+2)}{1.2.3}x^3+\ldots. \tag{37}$$

On aura, par suite,

$$(1-x)^{-\mu} = 1+\frac{\mu}{1}x+\frac{\mu(\mu+1)}{1.2}x^2+\frac{\mu(\mu+1)(\mu+2)}{1.2.3}x^3+\ldots. \tag{38}$$

Enfin, si l'on pose successivement $\mu = 1$, $\mu = 2$, $\mu = 3$, ..., $\mu = m$, $m$ désignant un nombre entier quelconque, l'équation (38) donnera

$$(39)\quad \frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots + x^n + \ldots,$$

$$(40)\quad \frac{1}{(1-x)^2} = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \ldots + (n+1)x^n + \ldots,$$

$$(41)\quad \frac{1}{(1-x)^3} = 1 + 3x + 6x^2 + 10x^3 + \ldots + \frac{(n+1)(n+2)}{1.2}x^n + \ldots$$

et

$$(42)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{1}{(1-x)^m} &= 1 + mx + \frac{m(m+1)}{1.2}x^2 + \ldots \\ &+ \frac{(n+1)(n+2)\ldots(n+m-1)}{1.2.3\ldots(m-1)}x^n + \ldots. \end{aligned}\right.$$

Si l'on prenait, au contraire, $\mu = \frac{1}{2}$, on trouverait

$$(43)\quad \left\{\begin{aligned} (1-x)^{-\frac{1}{2}} &= 1 + \frac{1}{2}x + \frac{1.3}{2.4}x^2 + \frac{1.3.5}{2.4.6}x^3 + \ldots \\ &+ \frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2.4.6\ldots 2n}x^n + \ldots. \end{aligned}\right.$$

Supposons maintenant que, pour toutes les valeurs de $x$ comprises entre les limites $x = a$, $x = a + h$, et pour des valeurs du nombre $\theta$ inférieures à l'unité, l'une des expressions

$$(44)\quad \frac{(x-a)^n}{1.2.3\ldots n} f^{(n)}[a + \theta(x-a)],$$

$$(45)\quad \frac{(x-a)^{n-1}}{1.2.3\ldots(n-1)}(1-\theta)^{n-1} f^{(n)}[a + \theta(x-a)]$$

décroisse indéfiniment, tandis que $n$ augmente; alors, en prenant $n = \infty$, dans l'équation (44) ou (60) de la huitième Leçon, on trouvera

$$(46)\quad f(x) = f(a) + \frac{x-a}{1} f'(a) + \frac{(x-a)^2}{1.2} f''(a) + \frac{(x-a)^3}{1.2.3} f'''(a) + \ldots.$$



Si, pour fixer les idées, on pose $x = a + h$, la formule (46) donnera

$$(47)\quad f(a+h) = f(a) + \frac{h}{1} f'(a) + \frac{h^2}{1.2} f''(a) + \frac{h^3}{1.2.3} f'''(a) + \ldots.$$

Enfin, si, dans l'équation précédente, on remplace la lettre $a$ qui désigne une valeur particulière de la variable $x$ par cette variable elle-même, on obtiendra la formule

$$(48)\quad f(x+h) = f(x) + \frac{h}{1} f'(x) + \frac{h^2}{1.2} f''(x) + \frac{h^3}{1.2.3} f'''(x) + \ldots.$$

Cette dernière subsiste toutes les fois que, les fonctions

$$(49)\quad f(x+z),\quad f'(x+z),\quad f''(x+z),\quad \ldots$$

étant continues entre les limites $z = 0$, $z = h$, l'une des quantités

$$(50)\quad \frac{h^n}{1.2.3\ldots n} f^{(n)}(x + \theta h),$$

$$(51)\quad \frac{h^n}{1.2.3\ldots(n-1)}(1-\theta)^{n-1} f^{(n)}(x + \theta h)$$

s'évanouit pour une valeur infinie de $n$. Alors la série

$$(52)\quad f(x),\quad \frac{h}{1} f'(x),\quad \frac{h^2}{1.2} f''(x),\quad \frac{h^3}{1.2.3} f'''(x),\quad \ldots,$$

qui a pour terme général

$$(53)\quad \frac{h^n}{1.2.3\ldots n} f^{(n)}(x),$$

est convergente et fournit une somme équivalente à $f(x+h)$. La proposition que nous venons d'énoncer est précisément le *théorème de Taylor*.

*Exemple.* — Si l'on prend successivement pour $f(x)$ les deux fonctions

$$lx,\quad x^{\mu},$$

et si l'on suppose la valeur numérique de $h$ inférieure à celle de $x$, on trouvera

$$\text{(54)} \qquad \mathrm{l}(x+h) = \mathrm{l}x + \frac{h}{x} - \frac{1}{2}\frac{h^2}{x^2} + \frac{1}{3}\frac{h^3}{x^3} - \frac{1}{4}\frac{h^4}{x^4} + \ldots,$$

$$\text{(55)} \qquad \left\{\begin{aligned} (x+h)^\mu = x^\mu &+ \frac{\mu}{1}x^{\mu-2}h + \frac{\mu(\mu-1)}{1.2}x^{\mu-2}h^2 \\ &+ \frac{\mu(\mu-1)(\mu-2)}{1.2.3}x^{\mu-3}h^3 + \ldots. \end{aligned}\right.$$

On pourrait déduire immédiatement ces dernières formules des équations (15) et (36) en y remplaçant $x$ par $\frac{h}{x}$.

Il est essentiel d'observer que les formules de Maclaurin et de Taylor subsistent, non seulement pour des valeurs réelles, mais aussi pour des valeurs imaginaires de la fonction $f(x)$. Supposons en effet

$$\text{(56)} \qquad f(x) = \varphi(x) + \chi(x)\sqrt{-1},$$

$\varphi(x)$ et $\chi(x)$ désignant deux fonctions réelles de la variable $x$. Si, le nombre $\theta$ étant inférieur à l'unité, l'une des expressions

$$\text{(57)} \qquad \frac{x^n}{1.2.3\ldots n}\varphi^{(n)}(\theta x),$$

$$\text{(58)} \qquad \frac{x^n}{1.2.3\ldots(n-1)}(1-\theta)^{n-1}\varphi^{(n)}(\theta x)$$

se réduit à zéro pour des valeurs infinies de $n$, on aura

$$\text{(59)} \qquad \varphi(x) = \varphi(0) + \frac{x}{1}\varphi'(0) + \frac{x^2}{1.2}\varphi''(0) + \frac{x^3}{1.2.3}\varphi'''(0) + \ldots.$$

De même, si l'une des expressions

$$\text{(60)} \qquad \frac{x^n}{1.2.3\ldots n}\chi^{(n)}(\theta x),$$

$$\text{(61)} \qquad \frac{x^n}{1.2.3\ldots(n-1)}(1-\theta)^{n-1}\chi^{(n)}(\theta x)$$

s'évanouit pour $n = \infty$, on trouvera

$$\text{(62)} \qquad \chi(x) = \chi(0) + \frac{x}{1}\chi'(0) + \frac{x^2}{1.2}\chi''(0) + \frac{x^3}{1.2.3}\chi'''(0) + \ldots;$$



Or on tirera des formules (59), (62), combinées entre elles,

$$\text{(63)} \qquad \left\{\begin{aligned} &\varphi(x) + \sqrt{-1}\,\chi(x) \\ &\quad = \varphi(0) + \sqrt{-1}\,\chi(0) + \frac{x}{1}\left[\varphi'(0) + \sqrt{-1}\,\chi'(0)\right] \\ &\qquad\qquad + \frac{x^2}{1.2}\left[\varphi''(0) + \sqrt{-1}\,\chi''(0)\right] + \ldots; \end{aligned}\right.$$

et il est clair que cette dernière équation ne diffère pas de la formule de Maclaurin, de laquelle on la déduit en prenant pour $f(x)$ la fonction imaginaire $\varphi(x) + \sqrt{-1}\,\chi(x)$. On peut raisonner de la même manière par rapport à la formule de Taylor.

Les formules (59) et (62), et par suite la formule (63), subsistent évidemment dans le cas où chacune des fonctions $\varphi^{(n)}(x)$, $\chi^{(n)}(x)$ conserve une valeur finie, quel que soit $x$, pour $n = \infty$, c'est-à-dire, en d'autres termes, dans le cas où la fonction imaginaire

$$\text{(64)} \qquad f^{(n)}(x) = \varphi^{(n)}(x) + \sqrt{-1}\,\chi^{(n)}(x)$$

reste finie tandis que $n$ croît indéfiniment.

*Exemples.* — Si l'on prend

$$f(x) = \cos x + \sqrt{-1}\sin x,$$

la formule (3) ou (63) donnera

$$\text{(65)} \qquad \left\{\begin{aligned} \cos x + \sqrt{-1}\sin x = 1 &+ \frac{x}{1}\sqrt{-1} - \frac{x^2}{1.2} - \frac{x^3}{1.2.3}\sqrt{-1} \\ &+ \frac{x^4}{1.2.3.4} + \frac{x^5}{1.2.3.4.5}\sqrt{-1} - \ldots. \end{aligned}\right.$$

L'équation imaginaire qui précède se décompose d'elle-même en deux équations réelles qui ne sont autres que les formules (11) et (12).

Supposons encore

$$f(x) = e^{ax}(\cos bx + \sqrt{-1}\sin bx),$$

$a$ et $b$ désignant deux constantes réelles. On trouvera, dans ce cas, en ayant égard à la dernière des formules (11) de la page 306,

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= (a+b\sqrt{-1})\,e^{ax}(\cos bx+\sqrt{-1}\sin bx) = (a+b\sqrt{-1})\,f(x),\\
f''(x) &= (a+b\sqrt{-1})\,f'(x) = (a+b\sqrt{-1})^2 f''(x),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
f^{(n)}(x) &= (a+b\sqrt{-1})^n f(x),
\end{aligned}
$$

et, par suite,

$$
\begin{aligned}
f(0) &= 1,\\
f'(0) &= a+b\sqrt{-1},\\
f''(0) &= (a+b\sqrt{-1})^2,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
f^{(n)}(0) &= (a+b\sqrt{-1})^n.
\end{aligned}
$$

Cela posé, la formule (63) donnera

$$
(66)\quad \left\{
\begin{aligned}
&e^{ax}(\cos bx+\sqrt{-1}\sin bx)\\
&\quad = 1+\frac{(a+b\sqrt{-1})x}{1}+\frac{(a+b\sqrt{-1})^2x^2}{1.2}+\frac{(a+b\sqrt{-1})^3x^3}{1.2.3}+\ldots.
\end{aligned}
\right.
$$

Si, dans cette dernière, on pose $ax=p$, $bx=q$, on obtiendra l'équation

$$
(67)\quad \left\{
\begin{aligned}
&e^{p}(\cos q+\sqrt{-1}\sin q)\\
&\quad = 1+\frac{p+q\sqrt{-1}}{1}+\frac{(p+q\sqrt{-1})^2}{1.2}+\frac{(p+q\sqrt{-1})^3}{1.2.3}+\ldots,
\end{aligned}
\right.
$$

qui subsistera pour des valeurs quelconques des variables réelles $p$ et $q$.



# DIXIÈME LEÇON.

### RÈGLES SUR LA CONVERGENCE DES SÉRIES. APPLICATION DE CES RÈGLES AUX SÉRIES DE MACLAURIN ET DE TAYLOR.

Les formules (3) et (48) de la Leçon précédente ne pouvant subsister que dans le cas où les séries de Maclaurin et de Taylor sont convergentes, il importe de fixer les conditions de la convergence des séries. Tel est l'objet dont nous allons nous occuper.

L'une des séries les plus simples est la progression géométrique

$$(1)\qquad a,\quad ax,\quad ax^2,\quad ax^3,\quad \ldots,$$

qui a pour terme général $ax^n$. Or la somme de ses $n$ premiers termes, savoir

$$(2)\qquad a(1+x+x^2+\ldots+x^{n-1}) = a\,\frac{1-x^n}{1-x} = \frac{a}{1-x}-\frac{ax^n}{1-x},$$

convergera évidemment, pour des valeurs croissantes de $n$, vers la limite fixe

$$(3)\qquad \frac{a}{1-x},$$

ou cessera de converger vers une semblable limite, suivant que la valeur numérique de la variable $x$ supposée réelle sera ou ne sera pas un nombre inférieur à l'unité. Donc, si l'on attribue à la variable $x$ une valeur réelle, la série (1) sera convergente, lorsqu'on aura $x^2<1$, et divergente dans le cas contraire.

Concevons maintenant que l'on attribue à la variable $x$ une valeur imaginaire, c'est-à-dire de la forme $p+q\sqrt{-1}$, $p$ et $q$ désignant des quantités réelles. Le *module* de cette valeur ne sera autre chose que la racine carrée de la somme $p^2+q^2$ ou, ce qui revient au même, la racine carrée du produit des deux expressions imaginaires

$$p+q\sqrt{-1}, \quad p-q\sqrt{-1} \tag{4}$$

qui ne diffèrent que par le signe de $\sqrt{-1}$, et que l'on appelle expressions imaginaires *conjuguées*. Donc, si l'on nomme $r$ le module dont il s'agit, on aura

$$r^2=(p+q\sqrt{-1})(p-q\sqrt{-1})=p^2+q^2, \tag{5}$$

$$r=\sqrt{p^2+q^2}. \tag{6}$$

Soit d'ailleurs

$$(p+q\sqrt{-1})^n=p_n+q_n\sqrt{-1}, \tag{7}$$

$p_n$, $q_n$ désignant encore des quantités réelles. Comme on trouvera par suite

$$(p-q\sqrt{-1})^n=p_n-q_n\sqrt{-1}, \tag{8}$$

on en conclura

$$p_n^2+q_n^2=(p+q\sqrt{-1})^n(p-q\sqrt{-1})^n=(p^2+q^2)^n=r^{2n}, \tag{9}$$

$$\sqrt{p_n^2+q_n^2}=r^n. \tag{10}$$

Donc, pour obtenir le module de $x^n$, il suffira d'élever à la $n^{\text{ième}}$ puissance le module $r$ de la variable $x$. Cela posé, concevons que l'on attribue au nombre entier $n$ des valeurs de plus en plus grandes. Pour que l'expression

$$x^n=p_n+q_n\sqrt{-1}$$

s'approche alors indéfiniment de la limite zéro, il sera nécessaire et il suffira que les quantités réelles $p_n$, $q_n$ convergent vers cette même limite. Or il est clair que cette condition sera ou ne sera pas satisfaite, suivant que le module $r$ de la variable $x$ sera ou ne sera pas



inférieur à l'unité. En effet, en supposant $r<1$ et $n=\infty$, on tirera de l'équation (10)

$$p_n^2+q_n^2=0, \qquad p_n=0, \qquad q_n=0.$$

Au contraire, si l'on suppose $r=1$ ou $r>1$ et $n=\infty$, l'équation (10) donnera

$$p_n^2+q_n^2=1 \qquad \text{ou} \qquad p_n^2+q_n^2=\infty,$$

et par suite l'une au moins des deux quantités $p_n$, $q_n$ cessera de converger, pour des valeurs croissantes de $n$, vers la limite zéro. Il suit évidemment de ces remarques que le produit

$$\frac{a}{1-x}x^n=\frac{ax^n}{1-x},$$

dans lequel le seul facteur $x^n$ varie avec le nombre $n$, acquerra une valeur nulle pour $n=\infty$, si l'on a $r<1$, et une valeur différente de zéro, si l'on a $r=1$ ou $r>1$. Donc, la variable $x$ étant imaginaire, la série (1) sera convergente, si le module de $x$ est inférieur à l'unité; mais elle sera divergente dans le cas contraire. Cette conclusion subsiste lors même que la constante $a$ devient imaginaire. Elle subsiste aussi dans le cas où, la quantité $q$ étant nulle, la variable $x$ redevient réelle. Alors le module de cette variable se réduit à sa valeur numérique, et l'on se trouve ramené à la règle que nous avons d'abord indiquée.

Considérons maintenant la série

$$u_0, \quad u_1, \quad u_2, \quad u_3, \quad \ldots, \tag{11}$$

composée de termes quelconques réels ou imaginaires. Pour que cette série soit convergente, il sera nécessaire et il suffira (*voir* les Préliminaires, page 279) que des valeurs croissantes de $n$ fassent converger indéfiniment la somme

$$s_n=u_0+u_1+u_2+\ldots+u_{n-1} \tag{12}$$

vers une limite fixe $s$. En d'autres termes, il sera nécessaire et il suffira que, le nombre $n$ devenant infini, les sommes

$$s_n,\quad s_{n+1},\quad s_{n+2},\quad \ldots$$

diffèrent infiniment peu de la limite $s$, et par conséquent les unes des autres. D'ailleurs, les différences successives entre la première somme $s_n$ et chacune des suivantes sont respectivement déterminées par les équations

$$(13)\qquad \begin{cases} s_{n+1}-s_n=u_n, \\ s_{n+2}-s_n=u_n+u_{n+1}, \\ s_{n+3}-s_n=u_n+u_{n+1}+u_{n+2}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

Donc, pour que la série (11) soit convergente, il est d'abord nécessaire que le terme général $u_n$ s'approche indéfiniment de zéro, tandis que $n$ augmente. Mais cette condition ne suffit pas, et il faut encore que les différentes sommes

$$u_n+u_{n+1},\quad u_n+u_{n+1}+u_{n+2},\quad \ldots,$$

c'est-à-dire les sommes des termes

$$u_n,\quad u_{n+1},\quad u_{n+2},\quad \ldots,$$

prises, à partir du premier, en tel nombre que l'on voudra, s'évanouissent elles-mêmes pour $n=\infty$. Réciproquement, lorsque ces diverses conditions sont remplies, la convergence de la série est évidemment assurée.

Il est encore évident que, pour décider si la série (11) est convergente ou divergente, on n'aura nullement besoin d'examiner ses premiers termes, et qu'on pourra même les supprimer de manière à remplacer cette série par la suivante

$$(14)\qquad u_m,\quad u_{m+1},\quad u_{m+2},\quad \ldots,$$

$m$ désignant un nombre entier aussi grand que l'on voudra.

Supposons à présent

$$(15)\qquad u_n=v_n+w_n\sqrt{-1},$$



$v_n$, $w_n$ désignant deux quantités réelles, dont la seconde s'évanouira toutes les fois que la série (11) sera réelle. Comme la somme imaginaire $s_n$, déterminée par l'équation (12), deviendra

$$(16)\qquad \begin{cases} s_n=(v_0+w_0\sqrt{-1})+(v_1+w_1\sqrt{-1})+\ldots+(v_{n-1}+w_{n-1}\sqrt{-1}) \\ \quad=(v_0+v_1+\ldots+v_{n-1})+(w_0+w_1+\ldots+w_{n-1})\sqrt{-1}, \end{cases}$$

elle convergera, pour des valeurs croissantes de $n$, vers une limite fixe, si les deux sommes réelles

$$v_0+v_1+\ldots+v_{n-1},$$
$$w_0+w_1+\ldots+w_{n-1}$$

convergent vers de semblables limites. Il en résulte que la série (11) sera toujours convergente, en même temps que les séries réelles

$$(17)\qquad v_0,\quad v_1,\quad v_2,\quad \ldots,\quad v_n,\quad \ldots,$$

$$(18)\qquad w_0,\quad w_1,\quad w_2,\quad \ldots,\quad w_n,\quad \ldots.$$

Si ces dernières ou l'une d'elles seulement deviennent divergentes, la série (11) le sera également.

Pour que les séries (11) et (18) soient convergentes, il est nécessaire et il suffit, en vertu des remarques précédemment faites, que les diverses quantités

$$(19)\qquad u_n,\quad u_n+u_{n+1},\quad u_n+u_{n+1}+u_{n+2},\quad \ldots,$$

$$(20)\qquad v_n,\quad v_n+v_{n+1},\quad v_n+v_{n+1}+v_{n+2},\quad \ldots$$

s'évanouissent pour $n=\infty$. Or cette condition sera nécessairement remplie, si les modules des différents termes de la série (11) ou (14) forment une série convergente. En effet, soit

$$(21)\qquad \rho_n=\sqrt{v_n^2+w_n^2}$$

le module de l'expression (15) qui est le terme général de la série (11). Ce module sera une quantité positive, qui surpassera évidemment la valeur numérique de $v_n$ et celle de $w_n$. Par suite, les valeurs numériques des quantités (19) et (20) seront inférieures à celles des quantités correspondantes

$$(22) \qquad \rho_n, \quad \rho_n+\rho_{n+1}, \quad \rho_n+\rho_{n+1}+\rho_{n+2}, \quad \ldots.$$

D'ailleurs, si les modules des différents termes de la série (11) ou (14), savoir

$$(23) \qquad \rho_0, \quad \rho_1, \quad \rho_2, \quad \ldots, \quad \rho_n, \quad \ldots$$

ou

$$(24) \qquad \rho_m, \quad \rho_{m+1}, \quad \rho_{m+2}, \quad \ldots,$$

forment une série convergente, les quantités (22) s'évanouiront pour $n=\infty$. Donc, à plus forte raison, les quantités (19) et (20) s'évanouiront elles-mêmes. On peut en conclure que la série (11) ou (14) sera toujours convergente, lorsque les modules de ses différents termes formeront une série convergente.

Si la valeur numérique de $\rho_n$ ne décroissait pas indéfiniment pour des valeurs croissantes de $n$, on pourrait en dire autant de l'une des quantités $v_n$, $w_n$. Alors l'une des séries (17), (18), et par suite la série (11), deviendrait nécessairement divergente.

En partant des principes que nous venons d'établir, on démontrera sans peine les deux théorèmes que nous allons énoncer.

Théorème I. — *Cherchez la limite ou les limites vers lesquelles converge, tandis que n croît indéfiniment, l'expression*

$$(25) \qquad (\rho_n)^{\frac{1}{n}};$$

*et soit* R *la plus grande de ces limites. La série* (11) *sera convergente, si l'on a* $R<1$; *divergente, si l'on a* $R>1$.

*Démonstration.* — Supposons d'abord $R<1$, et choisissons arbitrairement entre les deux nombres 1 et R un troisième nombre $\rho$, en sorte qu'on ait

$$(26) \qquad R<\rho<1;$$



$n$ venant à croître au delà de toute limite assignable, les plus grandes valeurs de $(\rho_n)^{\frac{1}{n}}$ ne pourront s'approcher indéfiniment de la limite R, sans finir par être constamment inférieures à $\rho$. Par suite, il sera possible d'attribuer au nombre entier $m$ une valeur assez considérable pour que, $n$ devenant égal ou supérieur à $m$, on ait constamment

$$(\rho_n)^{\frac{1}{n}}<\rho, \qquad \rho_n<\rho^n.$$

Alors les termes de la série (24) seront des nombres inférieurs aux termes correspondants de la progression géométrique

$$(27) \qquad \rho^m, \quad \rho^{m+1}, \quad \rho^{m+2}, \quad \ldots;$$

et, comme cette dernière sera convergente (à cause de $\rho<1$), on devra en dire autant de la série (24), par conséquent des séries (14) et (11).

Supposons en second lieu $R>1$, et plaçons encore entre les deux nombres 1 et R un troisième nombre $\rho$, en sorte qu'on ait

$$(28) \qquad R>\rho>1.$$

Si $n$ vient à croître au delà de toute limite, les plus grandes valeurs de $(\rho_n)^{\frac{1}{n}}$, en s'approchant indéfiniment de R, finiront par surpasser $\rho$. On pourra donc satisfaire à la condition

$$(\rho_n)^{\frac{1}{n}}>\rho \quad \text{ou} \quad \rho_n>\rho^n>1,$$

pour des valeurs de $n$ aussi considérables que l'on voudra, et par suite on trouvera dans la série (24) un nombre indéfini de termes supérieurs à l'unité, ce qui suffira pour constater la divergence des séries (24), (14) et (11).

Théorème II. — *Si, pour des valeurs croissantes de n, le rapport*

$$(29) \qquad \frac{\rho_{n+1}}{\rho_n}$$

*converge vers une limite fixe* R, *la série* (11) *sera convergente toutes les* *fois que l'on aura* $R < 1$, *et divergente, toutes les fois que l'on aura* $R > 1$.

*Démonstration.* — Choisissez arbitrairement un nombre $\varepsilon$ inférieur à la différence qui existe entre 1 et R. Il sera possible d'attribuer à $m$ une valeur assez considérable pour que, $n$ devenant égal ou supérieur à $m$, le rapport

$$\frac{\rho_{n+1}}{\rho_n}$$

demeure toujours compris entre les deux limites

$$R - \varepsilon, \quad R + \varepsilon.$$

Alors les différents termes de la série (24) se trouveront compris entre les termes correspondants des deux progressions géométriques

$$\begin{array}{l} \rho_m, \quad \rho_m(R-\varepsilon), \quad \rho_m(R-\varepsilon)^2, \quad \rho_m(R-\varepsilon)^3, \quad \ldots, \\ \rho_m, \quad \rho_m(R+\varepsilon), \quad \rho_m(R+\varepsilon)^2, \quad \rho_m(R+\varepsilon)^3, \quad \ldots, \end{array}$$

lesquelles seront toutes deux convergentes, si l'on a $R < 1$, et toutes deux divergentes, si l'on a $R > 1$. Donc, etc.

*Scolie.* — Il serait facile de prouver que la limite du rapport (29), dans le cas où cette limite existe, est en même temps celle de l'expression (25) (*voir* l'*Analyse algébrique*, Chap. VI) [1].

En appliquant les théorèmes I et II aux séries de Maclaurin et de Taylor, on obtient les propositions suivantes :

Théorème III. — *Soient* $f(x)$ *une fonction réelle ou imaginaire de la variable* $x$, *et* $\varphi_n$ *la valeur numérique ou le module de l'expression*

$$\frac{1}{1.2.3\ldots n} f^{(n)}(0). \tag{30}$$

*Soit de plus* $\Phi$ *la limite vers laquelle convergent, tandis que* $n$ *croît indéfiniment, les plus grandes valeurs de* $(\varphi_n)^{\frac{1}{n}}$ *ou bien encore la limite unique*

[1] *Œuvres de Cauchy*, S. II, T. III, p. 123 et 63.



*(si cette limite existe) du rapport* $\frac{\varphi_{n+1}}{\varphi_n}$. *La série de Maclaurin, savoir*

$$f(0), \quad \frac{x}{1} f'(0), \quad \frac{x^2}{1.2} f''(0), \quad \frac{x^3}{1.2.3} f'''(0), \quad \ldots, \tag{31}$$

*sera convergente toutes les fois que la valeur numérique de la variable* $x$ *supposée réelle, ou le module de la même variable supposée imaginaire sera inférieur à* $\frac{1}{\Phi}$, *et divergente toutes les fois que la valeur numérique ou le module de* $x$ *surpassera* $\frac{1}{\Phi}$.

*Démonstration.* — Soit $r$ la valeur numérique ou le module de la variable $x$. Le terme général de la série (31), savoir

$$\frac{x^n}{1.2.3\ldots n} f^{(n)}(0), \tag{32}$$

aura pour valeur numérique ou pour module le produit

$$\varphi_n r^n.$$

Cela posé, si, dans les théorèmes I et II, on remplace la série (11) par la série (31), on trouvera évidemment

$$\begin{array}{l} \rho_n = \varphi_n r^n, \\ R = \Phi r. \end{array} \tag{33}$$

Donc la série (31) sera convergente lorsqu'on aura

$$\Phi r < 1 \quad \text{ou} \quad r < \frac{1}{\Phi}, \tag{34}$$

et divergente lorsqu'on aura

$$\Phi r > 1 \quad \text{ou} \quad r > \frac{1}{\Phi}. \tag{35}$$

*Exemples.* — Si l'on prend pour $f(x)$ la fonction $e^x$, on aura

$$f^{(n)}(0) = 1, \qquad \varphi_n = \frac{1}{1.2.3\ldots n}, \qquad \frac{\varphi_{n+1}}{\varphi_n} = \frac{1}{n+1},$$

$$\Phi = \lim \frac{1}{n+1} = 0, \tag{36}$$

$$\frac{1}{\Phi} = \infty. \tag{37}$$

Dans le même cas, la série (31) se trouvera réduite à la série (11) des Préliminaires. Donc cette dernière série, savoir

$$(38) \qquad 1, \quad \frac{x}{1}, \quad \frac{x^2}{1.2}, \quad \frac{x^3}{1.2.3}, \quad \ldots, \quad \frac{x^n}{1.2.3\ldots n}, \quad \ldots,$$

est convergente tant que la valeur numérique ou le module de $x$ n'atteint pas la limite $\infty$, c'est-à-dire que la série (38) est convergente pour une valeur finie quelconque, réelle ou imaginaire, de la variable $x$. On peut en dire autant des deux séries

$$(39) \qquad 1, \quad -\frac{x^2}{1.2}, \quad \frac{x^4}{1.2.3.4}, \quad -\frac{x^6}{1.2.3.4.5.6}, \quad \ldots,$$

$$(40) \qquad \frac{x}{1}, \quad -\frac{x^3}{1.2.3}, \quad \frac{x^5}{1.2.3.4.5}, \quad \ldots,$$

qu'on obtient en posant successivement $f(x) = \cos x$, $f(x) = \sin x$, et que l'on déduit de la série (38), en annulant les termes de rang pair ou de rang impair, et plaçant le signe $-$ devant le second, le quatrième, le sixième, ... des termes conservés. En effet, on aura, pour les séries (38), (39) et (40),

$$(41) \qquad \Phi = \lim \left(\frac{1}{1.2.3\ldots n}\right)^{\frac{1}{n}};$$

et, comme cette dernière formule devra s'accorder avec l'équation (36), il faudra qu'elle se réduise à $\Phi = 0$.

Si l'on prend pour $f(x)$ la fonction $\mathrm{l}(1+x)$, on trouvera

$$f^{(n)}(0) = (-1)^{n-1}\, 1.2.3\ldots(n-1), \qquad \varphi_n = \frac{1}{n}, \qquad \frac{\varphi_{n+1}}{\varphi_n} = \frac{n}{n+1} = \frac{1}{1+\frac{1}{n}},$$

$$(42) \qquad \Phi = \lim \frac{1}{1+\frac{1}{n}} = \lim \left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{n}} = 1,$$

$$(43) \qquad \frac{1}{\Phi} = 1.$$



Dans le même cas, la série (31) deviendra

$$(44) \qquad \frac{x}{1}, \quad -\frac{x^2}{2}, \quad \frac{x^3}{3}, \quad -\frac{x^4}{4}, \quad \frac{x^5}{5}, \quad \ldots.$$

Donc cette dernière série est convergente, tant que la valeur numérique ou le module de $x$ reste inférieur à l'unité. On peut en dire autant de la série

$$(45) \qquad \frac{x}{1}, \quad -\frac{x^3}{3}, \quad \frac{x^5}{5}, \quad -\frac{x^7}{7}, \quad \ldots,$$

que l'on obtient en posant $f(x) = \operatorname{arc\,tang} x$, et que l'on déduit de la série (44) en annulant les termes de rang pair, et changeant les signes du second, du quatrième, du sixième, ... des termes conservés.

Enfin, si l'on prend pour $f(x)$ la fonction $(1+x)^\mu$, $\mu$ désignant une constante réelle, on trouvera, pour de très grandes valeurs de $n$,

$$f^{(n)}(0) = \mu(\mu-1)\ldots(\mu-n+1), \qquad \frac{\varphi_{n+1}}{\varphi_n} = \frac{n-\mu}{n+1} = \frac{1-\frac{\mu}{n}}{1+\frac{1}{n}},$$

$$(46) \qquad \Phi = \lim \frac{1-\frac{\mu}{n}}{1+\frac{n}{1}} = 1,$$

$$(47) \qquad \frac{1}{\Phi} = 1.$$

Dans le même cas, la série (31) deviendra

$$(48) \qquad 1, \quad \mu x, \quad \frac{\mu(\mu-1)}{1.2}x^2, \quad \frac{\mu(\mu-1)(\mu-2)}{1.2.3}x^3, \quad \ldots.$$

Donc cette dernière série est elle-même convergente, tant que la valeur numérique ou le module de $x$ reste inférieur à l'unité.

Théorème IV. — *Les mêmes choses étant posées que dans le théorème précédent, mais la fonction $f(x)$ étant réelle, ainsi que la variable $x$,* *désignons par* $\theta$ *un nombre inférieur à l'unité, par* $\psi_n$ *la valeur numérique de l'une des expressions*

$$\frac{f^{(n)}(\theta x)}{1.2.3\ldots n}, \tag{49}$$

$$\frac{(1-\theta)^{n-1} f^{(n)}(\theta x)}{1.2.3\ldots(n-1)}, \tag{50}$$

*et par* $\Psi$ *la limite vers laquelle convergent, tandis que n croît indéfiniment, les plus grandes valeurs de* $(\psi_n)^{\frac{1}{n}}$ *ou bien encore la limite unique (si cette limite existe) du rapport* $\frac{\psi_{n+1}}{\psi_n}$. *La formule de Maclaurin, savoir*

$$f(x) = f(0) + \frac{x}{1} f'(0) + \frac{x^2}{1.2} f''(0) + \frac{x^3}{1.2.3} f'''(0) + \ldots, \tag{51}$$

*subsistera pour toute valeur de* $x$, *à laquelle correspondra une valeur du produit* $\Psi x$ *renfermée entre les limites* $-1$, $+1$.

*Démonstration.* — Soit $r$ la valeur numérique de $x$. Si le produit $\Psi x$ est renfermé entre les limites $-1$, $+1$, on aura

$$\Psi r < 1. \tag{52}$$

Donc alors la série qui aura pour terme général le produit

$$\frac{x^n}{1.2.3\ldots n} f^{(n)}(\theta x) \tag{53}$$

ou

$$\frac{x^n}{1.2.3\ldots(n-1)} (1-\theta)^{n-1} f^{(n)}(\theta x) \tag{54}$$

sera convergente. Donc ce produit s'évanouira pour $n = \infty$, et l'équation (8) ou (61) de la huitième Leçon entraînera la formule (51).

*Corollaire I.* — La formule (51) subsistera pour toutes les valeurs réelles de $x$ comprises entre les limites

$$x = -\frac{1}{\Phi}, \qquad x = \frac{1}{\Phi}, \tag{55}$$



si, pour chacune de ces valeurs, l'un des rapports

$$\frac{f^{(n)}(\theta x)}{f^{(n)}(0)}, \tag{56}$$

$$\frac{(1-\theta)^{n-1} f^{(n)}(\theta x)}{f^{(n}(0)} \tag{57}$$

conserve une valeur finie, tandis que le nombre $n$ devient infiniment grand. En effet, soit $\chi_n$ la valeur numérique du rapport (56) ou (57), et supposons que cette valeur numérique reste constamment inférieure au nombre $k$. L'expression

$$(\chi_n)^{\frac{1}{n}},$$

constamment plus petite que $k^{\frac{1}{n}}$, convergera, pour des valeurs croissantes de $n$, vers une limite égale ou inférieure à $k^0 = 1$; et l'on pourra en dire autant de l'expression

$$(n\chi_n)^{\frac{1}{n}},$$

puisqu'on aura, en vertu de la formule (24) de la page 323, $\lim n^{\frac{1}{n}} = 1$. D'ailleurs, si les quantités $\psi_n$ et $\chi_n$ désignent les valeurs numériques des rapports (49) et (56), on aura évidemment

$$\psi_n = \varphi_n \chi_n$$

et, par suite,

$$\Psi = \Phi \lim (\chi_n)^{\frac{1}{n}} \overline{\overline{<}} \Phi.$$

De même, si les quantités $\psi_n$ et $\chi_n$ désignent les valeurs numériques des rapports (50) et (57), on aura

$$\psi_n = n\,\varphi_n \chi_n$$

et, par suite,

$$\Psi = \Phi \lim (n\chi_n)^{\frac{1}{n}} \overline{\overline{<}} \Phi.$$

En conséquence on aura nécessairement, dans l'hypothèse admise,

$$\Psi \overline{\overline{<}} \Phi, \qquad \Psi r \overline{\overline{<}} \Phi r.$$

Donc la condition (52) sera satisfaite, et la formule (51) subsistera, pour toutes les valeurs réelles de $x$ propres à vérifier la condition (34), c'est-à-dire pour les valeurs réelles de $x$, qui rendront convergente la série (31).

*Exemples.* — Si l'on prend $f(x) = e^x$, le rapport (56) se trouvera réduit à l'exponentielle

$$e^{\theta x}. \tag{58}$$

Or cette exponentielle, dans laquelle la seule quantité $\theta$ varie avec $n$, mais de manière à rester comprise entre les limites o, 1, conserve évidemment une valeur finie pour chaque valeur finie de $x$, tandis que le nombre $n$ croît indéfiniment. Donc la formule (10) de la Leçon précédente subsistera, pour toutes les valeurs réelles de $x$ qui rendront convergente la série (38); ce que l'on savait déjà.

Si l'on prend successivement pour $f(x)$ les deux fonctions

$$l(1+x), \quad (1+x)^\mu,$$

on trouvera, pour les valeurs correspondantes du rapport (57),

$$\frac{1}{1+\theta x}\left(\frac{1-\theta}{1+\theta x}\right)^{n-1}, \tag{59}$$

$$(1+\theta x)^{\mu-1}\left(\frac{1-\theta}{1+\theta x}\right)^{n-1}. \tag{60}$$

Or, dans ces dernières expressions, les deux facteurs $\frac{1}{1+\theta x}$, $(1+\theta x)^{\mu-1}$ conservent des valeurs finies, pour chaque valeur finie de $x$, et le facteur $\left(\frac{1-\theta}{1+\theta x}\right)^{n-1}$ reste inférieur à l'unité, lorsque, le nombre $n-1$ étant positif, la variable $x$ est renfermée entre les limites $x=-1$, $x=1$. Donc les formules (15) et (36) de la Leçon précédente subsistent pour toutes les valeurs de $x$ renfermées entre ces limites; ce que l'on savait déjà.

*Corollaire II.* — Le corollaire I s'étend au cas même où les valeurs de $f^{(n)}(0)$, correspondantes à certaines valeurs de $n$, s'évanouissent,



pourvu que, dans ce cas, on ne tienne aucun compte des valeurs correspondantes des rapports (56) et (57).

*Exemples.* — Si l'on prend successivement pour $f(x)$ les deux fonctions $\cos x$, $\sin x$, l'expression (56) se trouvera réduite à l'un des rapports

$$\frac{\cos\left(x+\frac{n\pi}{2}\right)}{\cos\frac{n\pi}{2}}, \tag{61}$$

$$\frac{\sin\left(x+\frac{n\pi}{2}\right)}{\sin\frac{n\pi}{2}}. \tag{62}$$

Or ces deux rapports acquerront des valeurs infinies, correspondantes à des valeurs nulles de $f^{(n)}(0)$, le premier quand le nombre $n$ sera impair, et le second quand le nombre $n$ sera pair. Mais, si, ne tenant aucun compte de ces valeurs infinies, on attribue toujours au nombre $n$, dans le rapport (61) une valeur paire, et dans le rapport (62) une valeur impaire, on verra ces rapports se réduire constamment à l'une des quantités finies

$$\sin x, \quad \cos x, \quad -\sin x, \quad -\cos x.$$

Donc les formules (11) et (12) de la Leçon précédente subsistent pour toutes les valeurs réelles possibles de la variable $x$.

Des raisonnements semblables à ceux que nous venons d'employer pour établir les théorèmes III et IV, étant appliqués, non plus à la série de Maclaurin, mais à celle de Taylor, conduiront immédiatement à deux autres théorèmes que nous allons énoncer.

Théorème V. — *Soient $f(x)$ une fonction réelle ou imaginaire de la variable réelle $x$; $h$ une constante réelle ou imaginaire, et $\varphi_n$ la valeur numérique ou le module de l'expression*

$$\frac{1}{1.2.3\ldots n}f^{(n)}(x). \tag{63}$$

*Soit de plus* $\Phi$ *la limite vers laquelle convergent, tandis que* $n$ *croît indéfiniment, les plus grandes valeurs de* $(\varphi_n)^{\frac{1}{n}}$, *ou bien encore la limite unique (si cette limite existe) du rapport* $\frac{\varphi_{n+1}}{\varphi_n}$. *La série de Taylor, savoir*

$$(64)\qquad f(x),\quad \frac{h}{1}f'(x),\quad \frac{h^2}{1.2}f''(x),\quad \frac{h^3}{1.2.3}f'''(x),\quad \ldots,$$

*sera convergente, toutes les fois que la valeur numérique ou le module de* $h$ *sera inférieur à* $\frac{1}{\Phi}$; *et divergente, toutes les fois que la valeur numérique ou le module de* $h$ *surpassera* $\frac{1}{\Phi}$.

*Exemples.* — Si l'on prend pour $f(x)$ l'une des trois fonctions

$$e^x,\quad \cos x,\quad \sin x,$$

on trouvera $\Phi = 0$, $\frac{1}{\Phi} = \infty$. Donc alors la série (64) restera convergente pour toutes les valeurs finies, réelles ou imaginaires, de la constante $h$, ainsi qu'on l'avait déjà remarqué.

Si l'on prend pour $f(x)$ l'une des fonctions

$$\mathrm{l}x,\quad x^\mu,$$

on trouvera, en désignant par $r$ la valeur numérique de la variable réelle $x$,

$$\Phi = \frac{1}{r},\qquad \frac{1}{\Phi} = r.$$

Donc alors la série (64) sera convergente tant que la valeur numérique ou le module de $h$ restera inférieur à la valeur numérique de $x$; ce que l'on savait déjà.

Théorème VI. — *Les mêmes choses étant posées que dans le théorème précédent, mais la fonction* $f(x)$ *étant réelle, ainsi que la constante* $h$, *désignons par* $\theta$ *un nombre inférieur à l'unité, par* $\psi_n$ *la valeur numérique de l'une des expressions*



$$(65)\qquad \frac{f^{(n)}(x+\theta h)}{1.2.3\ldots n},$$

$$(66)\qquad \frac{(1-\theta)^{n-1}f^{(n)}(x+\theta h)}{1.2.3\ldots(n-1)},$$

*et par* $\Psi$ *la limite vers laquelle convergent, tandis que* $n$ *croît indéfiniment, les plus grandes valeurs de* $(\psi_n)^{\frac{1}{n}}$, *ou bien encore la limite unique (si cette limite existe) du rapport* $\frac{\psi_{n+1}}{\psi_n}$. *La formule de Taylor, savoir*

$$(67)\qquad f(x+h) = f(x) + \frac{h}{1}f'(x) + \frac{h^2}{1.2}f''(x) + \frac{h^3}{1.2.3}f'''(x) + \ldots,$$

*subsistera pour toute valeur réelle de* $h$, *à laquelle correspondra une valeur du produit* $\Psi h$ *comprise entre les limites* $-1$, $+1$.

*Corollaire I.* — La formule (67) subsistera pour toutes les valeurs réelles de $h$ comprises entre les limites $-\frac{1}{\Phi}$, $+\frac{1}{\Phi}$, si, pour chacune de ces valeurs, l'un des rapports

$$(68)\qquad \frac{f^{(n)}(x+\theta h)}{f^{(n)}(x)},$$

$$(69)\qquad \frac{(1-\theta)^{n-1}f^{(n)}(x+\theta h)}{f^{(n)}(x)}$$

conserve une valeur finie, tandis que $n$ croît indéfiniment. C'est ce que l'on démontrera sans peine par des raisonnements semblables à ceux dont nous avons déjà fait usage pour établir le corollaire I du théorème IV.

*Exemples.* — Si l'on prend successivement pour $f(x)$ les deux fonctions

$$\mathrm{l}x,\quad x^\mu,$$

on conclura du corollaire précédent que les formules (54) et (55) de la page 377 subsistent dans le cas où la valeur numérique de $h$ est inférieure à celle de $x$.

On pourrait croire que la série de Maclaurin a toujours $f(x)$ pour somme, quand elle est convergente, et que, dans le cas où ses différents termes s'évanouissent l'un après l'autre, la fonction $f(x)$ s'évanouit elle-même. Mais, pour s'assurer du contraire, il suffit d'observer que la seconde condition sera remplie, si l'on suppose

$$f(x) = e^{-\left(\frac{1}{x}\right)^2}, \tag{70}$$

et la première, si l'on suppose

$$f(x) = e^{-x^2} + e^{-\left(\frac{1}{x}\right)^2}. \tag{71}$$

Cependant la fonction $e^{-\left(\frac{1}{x}\right)^2}$ n'est pas identiquement nulle, et la série déduite de la première supposition a pour somme, non pas le binôme $e^{-x^2} + e^{-\left(\frac{1}{x}\right)^2}$, mais son premier terme $e^{-x^2}$. Les mêmes remarques sont applicables à la série de Taylor.

Au reste, on reconnaîtra facilement que la fonction $f(x)$, réelle ou imaginaire, ne peut être la somme d'une série convergente ordonnée suivant les puissances ascendantes de $x$, qu'autant que cette série coïncide avec celle de Maclaurin. En effet, soit

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots. \tag{72}$$

En différentiant plusieurs fois cette équation par rapport à $x$, et observant que l'équation (12) de la troisième Leçon subsiste dans le cas même où le polynôme

$$au + bv + cw + \ldots,$$

se composant d'un nombre infini de termes, devient la somme d'une série convergente, on trouvera

$$\left\{\begin{array}{l} f'(x) = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \ldots, \\ f''(x) = 1.2a_2 + 2.3a_3 x + \ldots, \\ f'''(x) = 1.2.3a_3 + \ldots, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots; \end{array}\right. \tag{73}$$



puis, en posant $x = 0$, on tirera des équations (72) et (73)

$$f(0) = a_0, \quad f'(0) = a_1, \quad f''(0) = 1.2a_2, \quad f'''(0) = 1.2.3a_3, \quad \ldots, \tag{74}$$

et, par suite,

$$a_0 = f(0), \quad a_1 = \frac{1}{1} f'(0), \quad a_2 = \frac{1}{1.2} f''(0), \quad a_3 = \frac{1}{1.2.3} f'''(0), \quad \ldots \tag{75}$$

Or, si l'on substitue, dans la formule (72), les valeurs précédentes de $a_0, a_1, a_2, \ldots$, on sera évidemment ramené à l'équation (51).

On prouverait de la même manière que la fonction $f(x+h)$ ne peut être la somme d'une série convergente ordonnée suivant les puissances ascendantes de $h$, qu'autant que cette série coïncide avec celle de Taylor.