VINGT-QUATRIÈME LEÇON.

DES INTÉGRALES DÉFINIES DONT LES VALEURS SONT INFINIES OU INDÉTERMINÉES. VALEURS PRINCIPALES DES INTÉGRALES INDÉTERMINÉES.

Dans les Leçons précédentes, nous avons démontré plusieurs propriétés remarquables de l'intégrale définie

$$\int_{x_0}^{X} f(x)\,dx, \tag{1}$$

mais en supposant : 1° que les limites x_0, X étaient des quantités finies, 2° que la fonction $f(x)$ demeurait finie et continue entre ces mêmes limites. Lorsque ces deux espèces de conditions se trouvent remplies, alors, en désignant par $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ de nouvelles valeurs de x interposées entre les valeurs extrêmes x_0, X, on a

$$\int_{x_0}^{X} f(x)\,dx = \int_{x_0}^{x_1} f(x)\,dx + \int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx + \ldots + \int_{x_{n-1}}^{X} f(x)\,dx. \tag{2}$$

Quand les valeurs interposées se réduisent à deux, l'une très peu différente de x_0, et représentée par ξ_0, l'autre très peu différente de X, et représentée par ξ, l'équation (2) devient

$$\int_{x_0}^{X} f(x)\,dx = \int_{x_0}^{\xi_0} f(x)\,dx + \int_{\xi_0}^{\xi} f(X)\,dx + \int_{\xi}^{X} f(x)\,dx,$$

et peut s'écrire comme il suit :

$$\int_{x_0}^{X} f(x)\,dx = (\xi_0 - x_0)\,f[x_0 + \theta_0(\xi_0 - x_0)] + \int_{\xi_0}^{\xi} f(x)\,dx + (X - \xi)\,f[\xi + \theta(X - \xi)],$$

θ_0, θ désignant deux nombres inférieurs à l'unité. Si, dans la dernière

formule, on fait converger ξ_0 vers la limite x_0, et ξ vers la limite X, on en tirera, en passant aux limites,

$$\int_{x_0}^{X} f(x)\,dx = \lim \int_{\xi_0}^{\xi} f(x)\,dx. \tag{3}$$

Lorsque les valeurs extrêmes x_0, X deviennent infinies, ou lorsque la fonction $f(x)$ ne reste pas finie et continue depuis $x = x_0$ jusqu'à $x = X$, on ne peut plus affirmer que la quantité désignée par S dans les Leçons précédentes ait une limite fixe, et par suite on ne voit plus quel sens on doit attacher à la notation (1) qui servait à représenter généralement la limite de S. Pour lever toute incertitude et rendre à la notation (1), dans tous les cas, une signification claire et précise, il suffit d'étendre par analogie les équations (2) et (3) aux cas même où elles ne peuvent plus être rigoureusement démontrées. C'est ce que nous allons faire voir en quelques exemples.

Considérons, en premier lieu, l'intégrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^x\,dx. \tag{4}$$

Si l'on désigne par ξ_0 et ξ deux quantités variables, dont la première converge vers la limite $-\infty$, et la seconde vers la limite ∞, on tirera de la formule (3)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^x\,dx = \lim \int_{\xi_0}^{\xi} e^x\,dx = \lim (e^{\xi} - e^{\xi_0}) = e^{\infty} - e^{-\infty} = \infty.$$

Ainsi, l'intégrale (4) a une valeur infinie positive.

Considérons en second lieu l'intégrale

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{x} \tag{5}$$

prise entre deux limites dont l'une est infinie, tandis que l'autre rend infinie la fonction sous le signe $\int$, savoir $\frac{1}{x}$. En désignant par ξ_0 et ξ deux quantités positives, dont la première converge vers la limite zéro, et la seconde vers la limite ∞, on tirera de la formule (3)

$$\int_0^\infty \frac{dx}{x} = \lim \int_{\xi_0}^{\xi} \frac{dx}{x} = \lim \mathrm{l}\frac{\xi}{\xi_0} = \mathrm{l}\frac{\infty}{0} = \infty.$$

Ainsi l'intégrale (5) a encore une valeur infinie positive.

Il est essentiel d'observer que, si la variable x et la fonction $f(x)$ restent finies l'une et l'autre pour une des limites de l'intégrale (1), on pourra réduire la formule (3) à l'une des deux suivantes :

$$(6)\qquad \int_{x_0}^{X} f(x)\,dx = \lim \int_{x_0}^{\xi} f(x)\,dx, \qquad \int_{x_0}^{X} f(x)\,dx = \lim \int_{\xi_0}^{X} f(x)\,dx.$$

On tirera en particulier de ces dernières

$$(7)\qquad \begin{cases} \displaystyle\int_{-\infty}^{0} e^x\,dx = e^0 - e^{-\infty} = 1, & \displaystyle\int_0^\infty e^x\,dx = e^\infty - e^0 = \infty, \\ \displaystyle\int_{-1}^{0} \frac{dx}{x} = \mathrm{l}\,0 = -\infty, & \displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{x} = \mathrm{l}\tfrac{1}{0} = \infty. \end{cases}$$

Considérons maintenant l'intégrale

$$(8)\qquad \int_{-1}^{+1} \frac{dx}{x},$$

dans laquelle la fonction sous le signe $\int$, savoir $\frac{1}{x}$, devient infinie pour la valeur particulière $x = 0$ comprise entre les limites $x = -1$, $x = +1$. On tirera de la formule (2)

$$(9)\qquad \int_{-1}^{+1} \frac{dx}{x} = \int_{-1}^{0} \frac{dx}{x} + \int_0^1 \frac{dx}{x} = -\infty + \infty.$$

La valeur de l'intégrale (8) paraît donc indéterminée. Pour s'assurer qu'elle l'est effectivement, il suffit d'observer que, si l'on désigne par ε un nombre infiniment petit, et par μ, ν deux constantes positives, mais arbitraires, on aura, en vertu des formules (6),

$$(10)\qquad \int_{-1}^{0} \frac{dx}{x} = \lim \int_{-1}^{-\varepsilon\mu} \frac{dx}{x}, \qquad \int_0^1 \frac{dx}{x} = \lim \int_{\varepsilon\nu}^{1} \frac{dx}{x}.$$

Par suite, la formule (9) deviendra

$$(11)\qquad \int_{-1}^{+1} \frac{dx}{x} = \lim\left(\int_{-1}^{-\varepsilon\mu} \frac{dx}{x} + \int_{\varepsilon\nu}^{1} \frac{dx}{x}\right) = \lim\left(\mathrm{l}\,\varepsilon\mu + \mathrm{l}\frac{1}{\varepsilon\nu}\right) = \mathrm{l}\frac{\mu}{\nu},$$

et fournira pour l'intégrale (8) une valeur complètement indéterminée, puisque cette valeur sera le logarithme népérien de la constante arbitraire $\frac{\mu}{\nu}$.

Concevons à présent que la fonction $f(x)$ devienne infinie entre les limites $x = x_0$, $x = X$, pour les valeurs particulières de x représentées par $x_1, x_2, \ldots, x_m$. Si l'on désigne par ε un nombre infiniment petit, et par $\mu_1, \nu_1, \mu_2, \nu_2, \ldots, \mu_m, \nu_m$ des constantes positives, mais arbitraires, on tirera des formules (2) et (3)

$$(12)\qquad \begin{cases} \displaystyle\int_{x_0}^{X} f(x)\,dx = \int_{x_0}^{x_1} f(x)\,dx + \int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx + \ldots + \int_{x_m}^{X} f(x)\,dx \\ \displaystyle\qquad = \lim\left[\int_{x_0}^{x_1-\varepsilon\mu_1} f(x)\,dx + \int_{x_1+\varepsilon\nu_1}^{x_2-\varepsilon\mu_2} f(x)\,dx + \ldots + \int_{x_m+\varepsilon\nu_m}^{X} f(x)\,dx\right]. \end{cases}$$

Si les limites x_0, X se trouvaient elles-mêmes remplacées par $-\infty$ et $+\infty$, on aurait

$$(13)\qquad \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \lim\left[\int_{-\frac{1}{\varepsilon\mu}}^{x_1-\varepsilon\mu_1} f(x)\,dx + \int_{x_1+\varepsilon\nu_1}^{x_2-\varepsilon\mu_2} f(x)\,dx + \ldots + \int_{x_m+\varepsilon\nu_m}^{\frac{1}{\varepsilon\nu}} f(x)\,dx\right],$$

μ, ν désignant deux nouvelles constantes positives, mais arbitraires. Ajoutons que, dans le second membre de la formule (13), on devra rétablir X à la place de $\frac{1}{\varepsilon\nu}$ ou x_0 à la place de $-\frac{1}{\varepsilon\mu}$, si des deux quantités x_0, X une seule devient infinie. Dans tous les cas, les valeurs des intégrales

$$(14)\qquad \int_{x_0}^{X} f(x)\,dx, \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx,$$

déduites des équations (12) et (13), pourront être, suivant la nature de la fonction $f(x)$, ou des quantités infinies, ou des quantités finies et déterminées, ou des quantités indéterminées qui dépendront des valeurs attribuées aux constantes arbitraires μ, ν, μ_1, ν_1, ..., μ_m, ν_m.

Si, dans les formules (12) et (13), on réduit à l'unité les constantes arbitraires μ, ν, μ_1, ν_1, ..., μ_m, ν_m, on trouvera

$$(15)\quad \int_{x_0}^{X} f(x)\,dx = \lim\left[\int_{x_0}^{x_1-\varepsilon} f(x)\,dx + \int_{x_1+\varepsilon}^{x_2-\varepsilon} f(x)\,dx + \ldots + \int_{x_m+\varepsilon}^{X} f(x)\,dx\right],$$

$$(16)\quad \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \lim\left[\int_{-\frac{1}{\varepsilon}}^{x_1-\varepsilon} f(x)\,dx + \int_{x_1+\varepsilon}^{x_2-\varepsilon} f(x)\,dx + \ldots + \int_{x_m+\varepsilon}^{\frac{1}{\varepsilon}} f(x)\,dx\right].$$

Toutes les fois que les intégrales (14) deviennent indéterminées, les équations (15) et (16) ne fournissent pour chacune d'elles qu'une valeur particulière à laquelle nous donnerons le nom de *valeur principale*. Si l'on prend pour exemple l'intégrale (8) dont la valeur générale est indéterminée, on reconnaîtra que sa valeur principale se réduit à zéro.

VINGT-CINQUIÈME LEÇON.

INTÉGRALES DÉFINIES SINGULIÈRES.

Concevons qu'une intégrale relative à x, et dans laquelle la fonction sous le signe $\int$ est désignée par $f(x)$, soit prise entre deux limites infiniment rapprochées d'une certaine valeur particulière a attribuée à la valeur x. Si cette valeur a est une quantité finie, et si la fonction $f(x)$ reste finie et continue dans le voisinage de $x = a$, alors, en vertu de la formule (19) (vingt-deuxième Leçon), l'intégrale proposée sera sensiblement nulle; mais elle pourra obtenir une valeur finie différente de zéro, ou même une valeur infinie, si l'on a

$$a = \pm\infty \quad \text{ou bien} \quad f(a) = \pm\infty.$$

Dans ce dernier cas, l'intégrale en question deviendra ce que nous appellerons une *intégrale définie singulière*. Il sera ordinairement facile d'en calculer la valeur à l'aide des formules (15) et (16) de la vingt-troisième Leçon, ainsi qu'on va le voir.

Soient ε un nombre infiniment petit et μ, ν deux constantes positives, mais arbitraires. Si a est une quantité finie, mais prise parmi les racines de l'équation $f(x) = \pm\infty$, et si f désigne la limite vers laquelle converge le produit $(x-a)f(x)$, tandis que son premier facteur converge vers zéro, les valeurs des intégrales singulières

$$\int_{a-\varepsilon}^{a-\varepsilon\mu} f(x)\,dx, \quad \int_{a+\varepsilon\nu}^{a+\varepsilon} f(x)\,dx$$

seront à très peu près [en vertu de la formule (16), vingt-troisième Leçon]

$$\int_{a-\varepsilon}^{a-\varepsilon\mu} f(x)\,dx = \mathfrak{f}\,\mathrm{l}\mu, \tag{1}$$

$$\int_{a+\varepsilon\nu}^{a+\varepsilon} f(x)\,dx = \mathfrak{f}\,\mathrm{l}\frac{1}{\nu}. \tag{2}$$

Si l'on suppose au contraire $a = \pm\infty$, en appelant $\mathfrak{f}$ la limite vers laquelle converge le produit $x f(x)$, tandis que la variable x converge vers la limite $\pm\infty$, on aura sensiblement [vingt-troisième Leçon, équation (15)]

$$\int_{-\frac{1}{\varepsilon\mu}}^{-\frac{1}{\varepsilon}} f(x)\,dx = \mathfrak{f}\,\mathrm{l}\mu, \tag{3}$$

$$\int_{\frac{1}{\varepsilon}}^{\frac{1}{\varepsilon\nu}} f(x)\,dx = \mathfrak{f}\,\mathrm{l}\frac{1}{\nu}. \tag{4}$$

Il est essentiel d'observer que la limite du produit $(x-a)f(x)$ ou $x f(x)$ dépend quelquefois du signe de son premier facteur. Ainsi, par exemple, le produit $x(x^2+x^4)^{-\frac{1}{2}}$ converge vers la limite $+1$ ou -1, suivant que son premier facteur, en s'approchant de zéro, reste positif ou négatif. Il suit de cette remarque que la quantité désignée par $\mathfrak{f}$ change quelquefois de valeur dans le passage de l'équation (1) à l'équation (2), ou de l'équation (3) à l'équation (4).

La considération des intégrales définies singulières fournit le moyen de calculer la valeur générale d'une intégrale indéterminée, lorsqu'on connaît sa valeur principale. En effet, soit

$$\int_{x_0}^{X} f(x)\,dx \tag{5}$$

l'intégrale dont il s'agit, et concevons que, en admettant les notations

de la Leçon précédente, on fasse

$$\mathrm{E} = \int_{x_0}^{x_1-\varepsilon\mu_1} f(x)\,dx + \int_{x_1+\varepsilon\nu_1}^{x_2-\varepsilon\mu_2} f(x)\,dx + \ldots + \int_{x_m+\varepsilon\nu_m}^{X} f(x)\,dx, \tag{6}$$

$$\mathrm{F} = \int_{x_0}^{x_1-\varepsilon} f(x)\,dx + \int_{x_1+\varepsilon}^{x_2-\varepsilon} f(x)\,dx + \ldots + \int_{x_m+\varepsilon}^{X} f(x)\,dx. \tag{7}$$

Soient, en outre, $\mathrm{A} = \lim \mathrm{E}$ la valeur générale et $\mathrm{B} = \lim \mathrm{F}$ la valeur principale de l'intégrale (5). La différence $\mathrm{A} - \mathrm{B} = \lim(\mathrm{E} - \mathrm{F})$ sera équivalente à la somme des intégrales singulières

$$\left\{\begin{array}{l} \displaystyle\int_{x_1-\varepsilon}^{x_1-\varepsilon\mu_1} f(x)\,dx, \\ \displaystyle\int_{x_1+\varepsilon\nu_1}^{x_1+\varepsilon} f(x)\,dx, \\ \displaystyle\int_{x_2-\varepsilon}^{x_2-\varepsilon\mu_2} f(x)\,dx, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \displaystyle\int_{x_m+\varepsilon\nu_m}^{x_m+\varepsilon} f(x)\,dx, \end{array}\right. \tag{8}$$

c'est-à-dire à la limite dont s'approche la somme des intégrales (8), tandis que ε décroît indéfiniment. De plus, si l'on désigne par $\mathfrak{f}_1$, $\mathfrak{f}_2, \ldots, \mathfrak{f}_m$ les limites vers lesquelles convergent les produits

$$(x-x_1)f(x), \quad (x-x_2)f(x), \quad \ldots, \quad (x-x_m)f(x),$$

tandis que leurs premiers facteurs convergent vers zéro, et si ces limites sont indépendantes des signes de ces premiers facteurs, on trouvera que la somme des intégrales (8) se réduit sensiblement à

$$\mathfrak{f}_1\,\mathrm{l}\frac{\mu_1}{\nu_1} + \mathfrak{f}_2\,\mathrm{l}\frac{\mu_2}{\nu_2} + \ldots + \mathfrak{f}_m\,\mathrm{l}\frac{\mu_m}{\nu_m}. \tag{9}$$

Lorsqu'on a $x_1 = x_0$ ou $x_m = \mathrm{X}$, la différence $\mathrm{A} - \mathrm{B}$ comprend une intégrale singulière de moins, savoir la première ou la dernière des intégrales (8).

Lorsqu'on suppose $x_0 = -\infty$, $X = +\infty$, les équations (6) et (7) doivent être remplacées par celles qui suivent :

$$(10)\quad E = \int_{-\frac{1}{\varepsilon\mu}}^{x_1 - \varepsilon\mu_1} f(x)\,dx + \int_{x_1+\varepsilon\nu_1}^{x_2 - \varepsilon\mu_2} f(x)\,dx + \ldots + \int_{x_m+\varepsilon\nu_m}^{\frac{1}{\varepsilon\nu}} f(x)\,dx,$$

$$(11)\quad F = \int_{-\frac{1}{\varepsilon}}^{x_1 - \varepsilon} f(x)\,dx + \int_{x_1+\varepsilon}^{x_2 - \varepsilon} f(x)\,dx + \ldots + \int_{x_m+\varepsilon}^{\frac{1}{\varepsilon}} f(x)\,dx.$$

Dans la même hypothèse, il faut aux intégrales (8) ajouter les deux suivantes

$$(12)\quad \int_{-\frac{1}{\varepsilon\mu}}^{-\frac{1}{\varepsilon}} f(x)\,dx,\quad \int_{\frac{1}{\varepsilon}}^{\frac{1}{\varepsilon\mu}} f(x)\,dx,$$

dont la somme sera sensiblement équivalente à l'expression

$$(13)\quad \mathrm{f}\,\mathrm{l}\frac{\mu}{\nu},$$

si le produit $x f(x)$ converge vers la limite f, tandis que la variable x converge vers l'une des deux limites $-\infty$, $+\infty$. Si une seule des deux quantités x_0, X devenait infinie, il ne faudrait conserver dans la différence A — B qu'une seule des intégrales (12).

Lorsque pour des valeurs infiniment petites de ε, et pour des valeurs finies ou infiniment petites des coefficients arbitraires $\mu, \nu, \mu_1, \nu_1, \ldots, \mu_m, \nu_m$, les intégrales singulières (8) et (12), ou du moins quelques-unes d'entre elles, obtiennent ou des valeurs infinies, ou des valeurs finies, mais différentes de zéro, les intégrales

$$\int_{x_0}^{X} f(x)\,dx,\quad \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$$

sont évidemment infinies ou indéterminées. C'est ce qui arrive toutes les fois que les quantités $\mathrm{f}_1, \mathrm{f}_2, \ldots, \mathrm{f}_m$ ne sont pas simultanément nulles. Mais la réciproque n'est pas vraie, et il pourrait arriver que, ces quantités étant nulles toutes à la fois, les intégrales (8) et (12),

ou du moins quelques-unes d'entre elles, obtinssent des valeurs finies différentes de zéro pour des valeurs infiniment petites des coefficients $\mu, \nu, \mu_1, \nu_1, \ldots, \mu_m, \nu_m$. Ainsi, par exemple, si l'on prend $f(x) = \frac{1}{x\,\mathrm{l}x}$, le produit $x f(x)$ s'évanouira pour $x = 0$, et cependant l'intégrale singulière

$$\int_{\varepsilon}^{\varepsilon\nu} \frac{dx}{x\,\mathrm{l}x} = \mathrm{l}\left(1 + \frac{\mathrm{l}\nu}{\mathrm{l}\varepsilon}\right)$$

cessera de s'évanouir pour des valeurs infiniment petites de ν.

Lorsque les intégrales singulières comprises dans la différence A — B s'évanouissent toutes pour des valeurs infiniment petites de ε, quelles que soient d'ailleurs les valeurs finies ou infiniment petites attribuées aux coefficients $\mu, \nu, \mu_1, \nu_1, \ldots, \mu_m, \nu_m$, on est assuré que la valeur générale de l'intégrale (5) se réduit à une quantité finie et déterminée. Soit en effet, dans cette hypothèse, δ un nombre très petit, et supposons ε choisi de manière que, pour des valeurs de $\mu, \nu, \mu_1, \nu_1, \ldots, \mu_m, \nu_m$ inférieures à l'unité, chacune des intégrales (8) et (12) ait une valeur numérique inférieure à $\frac{1}{2(m+1)}\delta$. La valeur approchée de B, représentée par F, sera une quantité finie qui ne contiendra plus rien d'arbitraire; et, si l'on attribue aux coefficients $\mu, \nu, \mu_1, \nu, \ldots, \mu_m, \nu_m$ des valeurs infiniment petites, E s'approchera indéfiniment de A, en demeurant compris entre les limites $F - \delta$, $F + \delta$. A sera donc compris entre les mêmes limites, et par conséquent on pourra trouver une quantité finie F qui diffère de A d'une quantité moindre qu'un nombre donné δ. On doit en conclure que la valeur générale A de l'intégrale (5) sera, dans l'hypothèse admise, une quantité finie et déterminée.

Des principes que nous venons d'établir on déduit immédiatement la proposition suivante :

Théorème. — *Pour que la valeur générale de l'intégrale* (1) *soit finie et déterminée, il est nécessaire et il suffit que celles des intégrales singulières* (8) *et* (12) *qui se trouvent comprises dans la différence* A — B *se* *réduisent à zéro, pour des valeurs infiniment petites de* ε, *quelles que soient d'ailleurs les valeurs finies ou infiniment petites attribuées aux coefficients* $\mu, \nu, \mu_1, \nu_1, \ldots, \mu_m, \nu_m$.

Exemple. — Soit $\frac{\mathrm{f}(x)}{\mathrm{F}(x)}$ une fonction rationnelle. Pour que l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{f}(x)}{\mathrm{F}(x)} dx$ conserve une valeur finie et déterminée, il sera nécessaire et il suffira : 1° que l'équation $\mathrm{F}(x) = 0$ n'ait pas de racines réelles; 2° que le degré du dénominateur $\mathrm{F}(x)$ surpasse, au moins de deux unités, le degré du numérateur $\mathrm{f}(x)$.

VINGT-SIXIÈME LEÇON.

INTÉGRALES INDÉFINIES.

Si, dans l'intégrale définie $\int_{x_0}^{X} f(x)\,dx$, on fait varier l'une des deux limites, par exemple la quantité X, l'intégrale variera elle-même avec cette quantité; et, si l'on remplace la limite X devenue variable par x, on obtiendra pour résultat une nouvelle fonction de x, qui sera ce qu'on appelle une intégrale prise à partir de l'*origine* $x = x_0$. Soit

$$\mathcal{F}(x) = \int_{x_0}^{x} f(x)\,dx \tag{1}$$

cette fonction nouvelle. On tirera de la formule (19) (vingt-deuxième Leçon)

$$\mathcal{F}(x) = (x - x_0) f[x_0 + \theta(x - x_0)], \qquad \mathcal{F}(x_0) = 0, \tag{2}$$

θ étant un nombre inférieur à l'unité, et de la formule (7) (vingt-troisième Leçon)

$$\int_{x_0}^{x+\alpha} f(x)\,dx - \int_{x_0}^{x} f(x)\,dx = \int_{x}^{x+\alpha} f(x)\,dx = \alpha f(x + \theta\alpha)$$

ou

$$\mathcal{F}(x + \alpha) - \mathcal{F}(x) = \alpha f(x + \theta\alpha). \tag{3}$$

Il suit des équations (2) et (3) que, si la fonction $f(x)$ est finie et continue dans le voisinage d'une valeur particulière attribuée à la variable x, la nouvelle fonction $\mathcal{F}(x)$ sera non seulement finie, mais encore continue dans le voisinage de cette valeur, puisqu'à un accroissement infiniment petit de x correspondra un accroissement infiniment petit de $\mathcal{F}(x)$. Donc, si la fonction $f(x)$ reste finie et continue depuis $x = x_0$ jusqu'à $x = \mathrm{X}$, il en sera de même de la fonction $\mathcal{F}(x)$. Ajoutons que, si l'on divise par α les deux membres de la formule (3), on en conclura, en passant aux limites,

$$\mathcal{F}'(x) = f(x). \tag{4}$$

Donc l'intégrale (1), considérée comme fonction de x, a pour dérivée la fonction $f(x)$ renfermée sous le signe $\int$ dans cette intégrale. On prouverait de la même manière que l'intégrale

$$\int_x^{\mathrm{X}} f(x)\,dx = -\int_{\mathrm{X}}^{x} f(x)\,dx,$$

considérée comme fonction de x, a pour dérivée $-f(x)$. On aura donc

$$\frac{d}{dx}\int_{x_0}^{x} f(x)\,dx = f(x) \quad \text{et} \quad \frac{d}{dx}\int_{x}^{\mathrm{X}} f(x)\,dx = -f(x). \tag{5}$$

Si aux diverses formules qui précèdent on réunit l'équation (6) de la septième Leçon, il deviendra facile de résoudre les questions suivantes.

Problème I. — *On demande une fonction $\varpi(x)$ dont la dérivée $\varpi'(x)$ soit constamment nulle. En d'autres termes, on propose de résoudre l'équation*

$$\varpi'(x) = 0. \tag{6}$$

Solution. — Si l'on veut que la fonction $\varpi(x)$ reste finie et continue depuis $x = -\infty$ jusqu'à $x = +\infty$, alors, en désignant par x_0 une valeur particulière de la variable x, on tirera de la formule (6) (septième Leçon)

$$\varpi(x) - \varpi(x_0) = (x - x_0)\,\varpi'[x_0 + \theta(x - x_0)] = 0$$

et, par suite,

$$\varpi\ x = \varpi(x_0), \tag{7}$$

ou, si l'on désigne par c la quantité constante $\varpi(x_0)$,

$$\varpi(x) = c. \tag{8}$$

Donc alors la fonction $\varpi(x)$ devra se réduire à une constante et conserver la même valeur c, depuis $x = -\infty$ jusqu'à $x = \infty$. On peut ajouter que cette unique valeur sera entièrement arbitraire, puisque la formule (8) vérifiera l'équation (6), quel que soit c.

Si l'on permet à la fonction $\varpi(x)$ d'offrir des solutions de continuité correspondantes à diverses valeurs de x, et si l'on suppose que ces valeurs de x, rangées dans leur ordre de grandeur, soient représentées par $x_1, x_2, \ldots, x_m$, alors l'équation (7) devra subsister seulement depuis $x = -\infty$ jusqu'à $x = x_1$, ou depuis $x = x_1$ jusqu'à $x = x_2$, ..., ou enfin depuis $x = x_m$ jusqu'à $x = +\infty$, selon que la valeur particulière de x représentée par x_0 sera comprise entre les limites $-\infty$ et x_1, ou bien entre les limites x_1 et x_2, ..., ou enfin entre les limites x_m et ∞. Par conséquent, il ne sera plus nécessaire que la fonction $\varpi(x)$ conserve la même valeur depuis $x = -\infty$ jusqu'à $x = +\infty$, mais seulement qu'elle demeure constante entre deux termes consécutifs de la suite

$$-\infty, \quad x_1, \quad x_2, \quad \ldots, \quad x_m, \quad +\infty.$$

C'est ce qui arrivera, par exemple, si l'on prend

$$\left\{\begin{aligned} \varpi(x) = \frac{c_0 + c_m}{2} + \frac{c - c_0}{2}\,\frac{x - x_1}{\sqrt{(x - x_1)^2}} + \frac{c_2 - c_1}{2}\,\frac{x - x_2}{\sqrt{(x - x_2)^2}} + \ldots \\ + \frac{c_m - c_{m-1}}{2}\,\frac{x - x_m}{\sqrt{(x - x_m)^2}}, \end{aligned}\right. \tag{9}$$

$c_0, c_1, c_2, \ldots, c_m$ désignant des quantités constantes, mais arbitraires. En effet, dans ce cas, la fonction $\varpi(x)$ sera constamment égale à c_0 entre les limites $x = -\infty$, $x = x_1$; à c_1 entre les limites $x = x_1$, $x = x_2$, ... ; enfin à c_m entre les limites $x = x_m$, $x = \infty$.

Si l'on veut que $\varpi(x)$ se réduise à c_0 pour des valeurs négatives, et à c_1 pour des valeurs positives de x, il suffira de prendre

$$\varpi(x) = \frac{c_0 + c_1}{2} + \frac{c_1 - c_0}{2}\frac{x}{\sqrt{x^2}}. \tag{10}$$

Problème II. — *Trouver la valeur générale de y propre à vérifier l'équation*

$$dy = f(x)\,dx. \tag{11}$$

Solution. — Si l'on désigne par $F(x)$ une valeur particulière de l'inconnue y, et par $F(x) + \varpi(x)$ sa valeur générale, on tirera de la formule (11), à laquelle ces deux valeurs devront satisfaire,

$$F'(x) = f(x), \qquad F'(x) + \varpi'(x) = f(x)$$

et, par suite,

$$\varpi'(x) = 0.$$

D'ailleurs, il résulte de la première des équations (5) qu'on satisfait à la formule (11) en prenant $y = \int_{x_0}^{x} f(x)\,dx$. Donc la valeur générale de y sera

$$y = \int_{x_0}^{x} f(x)\,dx + \varpi(x), \tag{12}$$

$\varpi(x)$ désignant une fonction propre à vérifier l'équation (6). Cette valeur générale de y, qui comprend, comme cas particulier, l'intégrale (1) et qui conserve la même forme, quelle que soit l'origine x_0 de cette intégrale, est représentée dans le calcul par la simple notation $\int f(x)\,dx$, et reçoit le nom d'*intégrale indéfinie*. Cela posé, la formule (11) entraîne toujours la suivante

$$y = \int f(x)\,dx, \tag{13}$$

et réciproquement, en sorte qu'on a identiquement

$$d\int f(x)\,dx = f(x)\,dx. \tag{14}$$

Si la fonction $F(x)$ diffère de l'intégrale (1), la valeur générale de y,

ou $\int f(x)\,dx$, pourra toujours être présentée sous la forme

$$\int f(x)\,dx = F(x) + \varpi(x), \tag{15}$$

et devra se réduire à l'intégrale (1), pour une valeur particulière de $\varpi(x)$ qui vérifiera en même temps l'équation (6) et la suivante :

$$\mathcal{F}(x) = \int_{x_0}^{x} f(x)\,dx = F(x) + \varpi(x). \tag{16}$$

Si, de plus, les fonctions $f(x)$ et $F(x)$ sont l'une et l'autre continues entre les limites $x = x_0$, $x = X$, la fonction $\mathcal{F}(x)$ sera elle-même continue, et par suite $\varpi(x) = \mathcal{F}(x) - F(x)$ conservera constamment la même valeur entre ces limites, entre lesquelles on aura

$$\varpi(x) = \varpi(x_0),$$

$$\mathcal{F}(x) - F(x) = \mathcal{F}(x_0) - F(x_0) = -F(x_0), \qquad \mathcal{F}(x) = F(x) - F(x_0),$$

$$\int_{x_0}^{x} f(x)\,dx = F(x) - F(x_0). \tag{17}$$

Enfin, si dans l'équation (17) on pose $x = X$, on trouvera

$$\int_{x_0}^{X} f(x)\,dx = F(X) - F(x_0). \tag{18}$$

Il résulte des équations (15), (17) et (18) que, étant donnée une valeur particulière $F(x)$ de y, propre à vérifier la formule (11), on peut en déduire : 1° la valeur de l'intégrale indéfinie $\int f(x)\,dx$; 2° celles des deux intégrales définies $\int_{x_0}^{x} f(x)\,dx$, $\int_{x_0}^{X} f(x)\,dx$, dans le cas où les fonctions $f(x)$, $F(x)$ restent continues entre les limites de ces deux intégrales.

Exemple. — Comme on vérifie l'équation $dy = \frac{dx}{1+x^2}$ en prenant $y = \operatorname{arc\,tang} x$, et que les deux fonctions $\frac{1}{1+x^2}$, $\operatorname{arc\,tang} x$ restent finies et continues entre les limites $x = -\infty$, $x = \infty$, on tirera des formules (15), (17) et (18)

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arc\,tang} x + \varpi(x), \qquad \int_0^x \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arc\,tang} x,$$

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{4} = 0{,}785\ldots.$$

Nota. — Lorsque dans l'équation (17) on veut étendre la valeur de x au delà d'une limite qui rend la fonction $f(x)$ discontinue, il faut ordinairement ajouter au second membre une ou plusieurs intégrales singulières.

Exemple. — Comme on satisfait à l'équation $dy = \frac{dx}{x}$ en prenant $y = \frac{1}{2}\mathrm{l}x^2$, si l'on désigne par ε un nombre infiniment petit, et par μ, ν deux coefficients positifs, on trouvera, pour $x < 0$,

$$\int_{-1}^{x} \frac{dx}{x} = \tfrac{1}{2}\mathrm{l}x^2 - \tfrac{1}{2}\mathrm{l}1 = \tfrac{1}{2}\mathrm{l}x^2,$$

et, pour $x > 0$,

$$\int_{-1}^{x} \frac{dx}{x} = \int_{-1}^{-\mu\varepsilon} \frac{dx}{x} + \int_{\nu\varepsilon}^{x} \frac{dx}{x} = \tfrac{1}{2}\mathrm{l}x^2 - \tfrac{1}{2}\mathrm{l}1 + \mathrm{l}\frac{\mu}{\nu}$$

$$= \tfrac{1}{2}\mathrm{l}x^2 + \int_{-\varepsilon}^{-\mu\varepsilon} \frac{dx}{x} + \int_{\varepsilon\nu}^{\varepsilon} \frac{dx}{x}.$$

VINGT-SEPTIÈME LEÇON.

PROPRIÉTÉS DIVERSES DES INTÉGRALES INDÉFINIES. MÉTHODES POUR DÉTERMINER LES VALEURS DE CES MÊMES INTÉGRALES.

D'après ce qui a été dit dans la Leçon précédente, l'intégrale indéfinie

$$\int f(x)\,dx \tag{1}$$

n'est autre chose que la valeur générale de l'inconnue y assujettie à vérifier l'équation différentielle

$$dy = f(x)\,dx. \tag{2}$$

De plus, étant donnée une valeur particulière $F(x)$ de la même inconnue, il suffira, pour obtenir la valeur générale, d'ajouter à $F(x)$ une fonction $\varpi(x)$ propre à vérifier l'équation $\varpi'(x) = 0$, ou, ce qui revient au même, une expression algébrique qui ne puisse admettre qu'un nombre fini de valeurs constantes, dont chacune subsiste entre certaines limites assignées à la variable x. Pour abréger, nous désignerons dorénavant par la lettre $\mathcal{C}$ une expression de cette nature, et nous l'appellerons *constante arbitraire*, ce qui ne voudra pas dire qu'elle doive toujours conserver la même valeur, quel que soit x. Cela posé, on aura

$$\int f(x)\,dx = F(x) + \mathcal{C}. \tag{3}$$

Quand on remplace la fonction $F(x)$ par l'intégrale définie $\int_{x_0}^{x} f(x)\,dx$, qui est elle-même une valeur particulière de y, la formule (3) se réduit à

$$\int f(x)\,dx = \int_{x_0}^{x} f(x)\,dx + \mathcal{C}. \tag{4}$$

En étendant la définition que nous avons donnée de l'intégrale (1) au cas où la fonction $f(x)$ est supposée imaginaire, on reconnaîtra facilement que, dans cette hypothèse, les équations (3) et (4) subsistent encore. Seulement, la constante arbitraire $\mathcal{C}$ devient alors imaginaire en même temps que $f(x)$, c'est-à-dire qu'elle prend la forme $\mathcal{C}_1 + \mathcal{C}_2\sqrt{-1}$, $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ désignant deux constantes arbitraires, mais réelles.

Avant d'aller plus loin, il importe d'observer qu'en formant la somme ou la différence, ou même une fonction linéaire quelconque de deux ou de plusieurs constantes arbitraires, on obtient pour résultat une nouvelle constante arbitraire.

Plusieurs propriétés remarquables des intégrales définies se déduisent facilement de l'équation (4) combinée avec les formules (13) (vingt-deuxième Leçon) et (2), (3), (4), (5) (vingt-troisième Leçon). En effet, si, après avoir remplacé X par x dans les deux membres de chacune de ces formules, on ajoute aux intégrales qu'ils renferment des constantes arbitraires, on trouvera, en désignant par $a, b, c, \ldots$ des constantes supposées connues, et par $u, v, w, \ldots$ des fonctions de la variable x,

$$\int au\,dx = a\int u\,dx, \tag{5}$$

$$\left\{\begin{aligned}
&\int (u+v+w+\ldots)\,dx = \int u\,dx + \int v\,dx + \int w\,dx + \ldots,\\
&\int (u-v)\,dx = \int u\,dx - \int v\,dx,\\
&\int (au+bv+cw+\ldots)\,dx = a\int u\,dx + b\int v\,dx + c\int w\,dx + \ldots,\\
&\int (u+v\sqrt{-1})\,dx = \int u\,dx + \sqrt{-1}\int v\,dx.
\end{aligned}\right. \tag{6}$$

Ces équations subsistent dans le cas même où $a, b, c, \ldots, u, v, w, \ldots$ deviennent imaginaires.

Intégrer la formule différentielle $f(x)\,dx$, ou, en d'autres termes,

intégrer l'équation (2), c'est trouver la valeur de l'intégrale indéfinie $\int f(x)\,dx$. L'opération par laquelle on y parvient est une *intégration indéfinie*. L'*intégration définie* consisterait à trouver la valeur d'une intégrale définie, telle que $\int_{x_0}^{X} f(x)\,dx$. Nous allons maintenant faire connaître les quatre principales méthodes à l'aide desquelles on peut effectuer, dans certains cas, la première de ces deux opérations.

Intégration immédiate. — Lorsque dans la formule $f(x)\,dx$ on reconnaît la différentielle exacte d'une fonction déterminée $F(x)$, la valeur de l'intégrale indéfinie $\int f(x)$ se déduit immédiatement de l'équation (3). On étend le nombre des cas auxquels cette espèce d'intégration est applicable, en observant que les facteurs constants renfermés dans $f(x)$ peuvent être placés à volonté en dedans ou en dehors du signe $\int$ [*voir* l'équation (5)].

Exemples :

$$\int a\,dx = ax + \mathcal{C}, \quad \int (a+1)x^a\,dx = x^{a+1} + \mathcal{C}, \quad \int x^a\,dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} + \mathcal{C},$$

$$\int x\,dx = \frac{1}{2}x^2 + \mathcal{C}, \quad \int \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x} + \mathcal{C},$$

$$\int \frac{dx}{x^m} = -\frac{1}{(m-1)x^{m-1}} + \mathcal{C}, \quad \int \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x} + \mathcal{C},$$

$$\int \frac{dx}{x} = \frac{1}{2}\,\mathrm{l}\,x^2 + \mathcal{C}, \quad \int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arc\,tang} x + \mathcal{C},$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + \mathcal{C} = \mathcal{C} + \frac{1}{2}\pi - \arccos x,$$

$$\int e^x\,dx = e^x + \mathcal{C}, \quad \int A^x\,\mathrm{l}A\,dx = A^x + \mathcal{C}, \quad \int A^x\,dx = \frac{A^x}{\mathrm{l}A} + \mathcal{C},$$

$$\int \cos x\,dx = \sin x + \mathcal{C}, \quad \int \sin x\,dx = -\cos x + \mathcal{C},$$

$$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tang} x + \mathcal{C}, \quad \int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\cot x + \mathcal{C}.$$

Intégration par substitution. — Concevons qu'à la variable x on substitue une autre variable z liée à la première par une équation de laquelle on tire $z = \varphi(x)$ et $x = \chi(z)$. La formule (2) se trouvera remplacée par la suivante :

$$(7)\qquad dy = f[\chi(z)]\,\chi'(z)\,dz.$$

Si l'on fait, pour abréger, $f[\chi(z)]\,\chi'(z) = \mathfrak{f}(z)$, la valeur générale de y tirée de l'équation (7) sera représentée par l'intégrale indéfinie $\int \mathfrak{f}(z)\,dz$. D'ailleurs, cette valeur générale doit coïncider avec l'intégrale (1). Donc, si, en vertu de la relation établie entre x et z, on a identiquement

$$(8)\qquad f(x)\,dx = \mathfrak{f}(z)\,dz,$$

on en conclura

$$(9)\qquad \int f(x)\,dx = \int \mathfrak{f}(z)\,dz.$$

Supposons maintenant que la valeur de $\int \mathfrak{f}(z)\,dz$ soit donnée par une équation de la forme

$$(10)\qquad \int \mathfrak{f}(z)\,dz = \mathfrak{F}(z) + \mathcal{C};$$

on tirera de cette équation

$$(11)\qquad \int f(x)\,dx = \mathfrak{F}[\varphi(x)] + \mathcal{C}.$$

Exemples. — En admettant la formule (10) et posant successivement

$$x \pm a = z,\qquad ax = z,\qquad \frac{x}{a} = z,\qquad x^2 + a^2 = z,$$
$$\mathrm{l}x = z,\qquad e^x = z,\qquad \sin x = z,\qquad \cos x = z,$$

on tirera de la formule (11) combinée avec l'équation (5)

$$\int \mathfrak{f}(x \pm a)\,dx = \mathfrak{F}(x \pm a) + \mathcal{C},$$
$$\int \mathfrak{f}(ax)\,dx = \frac{1}{a}\mathfrak{F}(ax) + \mathcal{C},$$
$$\int \mathfrak{f}\left(\frac{x}{a}\right)dx = a\,\mathfrak{F}\left(\frac{x}{a}\right) + \mathcal{C},$$
$$\int x\,\mathfrak{f}(x^2 + a^2)\,dx = \frac{1}{2}\mathfrak{F}(x^2 + a^2) + \mathcal{C},$$
$$\int x^{a-1}\,\mathfrak{f}(x^a)\,dx = \frac{1}{a}\mathfrak{F}(x^a) + \mathcal{C},$$

$$\int \mathfrak{f}\,\mathrm{l}x\,\frac{dx}{x} = \mathfrak{F}\,\mathrm{l}x + \mathcal{C},$$
$$\int e^x\,\mathfrak{f}(e^x)\,dx = \mathfrak{F}(e^x) + \mathcal{C},$$
$$\int \cos x\,\mathfrak{f}(\sin x)\,dx = \mathfrak{F}(\sin x) + \mathcal{C},$$
$$\int \sin x\,\mathfrak{f}(\cos x)\,dx = -\mathfrak{F}(\cos x) + \mathcal{C}.$$

Ces dernières formules étant combinées à leur tour avec celles qui résultent de l'intégration immédiate, on trouvera

$$\int \frac{dx}{x-a} = \frac{1}{2}\mathrm{l}(x-a)^2 + \mathcal{C},$$
$$\int \frac{dx}{(x-a)^m} = -\frac{1}{(m-1)(x-a)^{m-1}} + \mathcal{C},$$
$$\int \frac{dx}{1 + a^2x^2} = \frac{1}{a}\,\mathrm{arc\,tang}(ax) + \mathcal{C},$$
$$\int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a^2}\int \frac{dx}{1 + \left(\frac{x}{a}\right)^2} = \frac{1}{a}\,\mathrm{arc\,tang}\frac{x}{a} + \mathcal{C},$$
$$\int \frac{x\,dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{2}\mathrm{l}(x^2 + a^2) + \mathcal{C},$$
$$\int \frac{x\,dx}{\sqrt{x^2 + a^2}} = \sqrt{x^2 + a^2} + \mathcal{C},$$

$$\int e^{ax}\,dx = \frac{1}{a}e^{ax} + \mathcal{C},\qquad \int e^{-ax}\,dx = -\frac{1}{a}e^{-ax} + \mathcal{C},$$
$$\int \cos ax\,dx = \frac{1}{a}\sin ax + \mathcal{C},\qquad \int \sin ax\,dx = -\frac{1}{a}\cos ax + \mathcal{C},$$
$$\int \frac{\mathrm{l}x}{x}\,dx = \frac{1}{2}(\mathrm{l}x)^2 + \mathcal{C},\qquad \int \frac{dx}{x\,\mathrm{l}x} = \mathrm{ll}x + \mathcal{C},$$
$$\int \frac{dx}{x(\mathrm{l}x)^m} = \frac{-1}{(m-1)(\mathrm{l}x)^{m-1}} + \mathcal{C},\qquad \int \frac{e^x\,dx}{e^{2x}+1} = \mathrm{arc\,tang}\,e^x + \mathcal{C},$$
$$\int \frac{\sin x\,dx}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos x} + \mathcal{C} = \mathrm{séc}\,x + \mathcal{C},\qquad \int \frac{\cos x\,dx}{\sin^2 x} = -\frac{1}{\sin x} + \mathcal{C}.$$

Intégration par décomposition. — Cette espèce d'intégration s'effectue à l'aide des formules (6), lorsque la fonction sous le signe $\int$ peut être décomposée en plusieurs parties de telle manière que chaque partie, multipliée par dx, donne pour produit une expression facilement intégrable. Elle s'applique particulièrement au cas où la fonction sous le signe $\int$ se réduit, soit à une fonction entière, soit à une fraction rationnelle.

Exemples :

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x \cos^2 x} = \int \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x \cos^2 x}\, dx$$

$$= \int \frac{dx}{\cos^2 x} + \int \frac{dx}{\sin^2 x} = \operatorname{tang} x - \cot x + \mathfrak{C},$$

$$\int (a + bx + cx^2 + \ldots)\, dx = a\int dx + b\int x\, dx + c\int x^2 dx + \ldots$$

$$= ax + b\frac{x^2}{2} + c\frac{x^3}{3} + \ldots + \mathfrak{C}.$$

Intégration par parties. — Soient u et v deux fonctions différentes de x, et u', v' leurs dérivées respectives. uv sera une valeur particulière de y, propre à vérifier l'équation différentielle

$$dy = u\, dv + v\, du = uv'\, dx + vu'\, dx,$$

de laquelle on tirera généralement

$$y = uv + \mathfrak{C} = \int uv'\, dx + \int vu'\, dx = \int u\, dv + \int v\, du,$$

et, par suite,

$$\int u\, dv = uv - \left(\int v\, du - \mathfrak{C}\right),$$

ou, plus simplement,

$$\int u\, dv = uv - \int v\, du, \tag{12}$$

la constante arbitraire $-\mathfrak{C}$ pouvant être censée comprise dans l'intégrale $\int v\, du$.

Exemples :

$$\int \mathrm{l}x\, dx = x\,\mathrm{l}x - \int x\frac{dx}{x} = x(\mathrm{l}x - 1) + \mathfrak{C}, \qquad \int x e^x\, dx = e^x(x-1) + \mathfrak{C},$$

$$\int x \cos x\, dx = \quad x \sin x + \cos x + \mathfrak{C},$$

$$\int x \sin x\, dx = -x \cos x + \sin x + \mathfrak{C},$$

. . . .

Nota. — Il est essentiel d'observer que les constantes arbitraires, qui sont censées comprises dans les intégrales indéfinies que renferment les deux membres de l'équation (12), peuvent avoir des valeurs numériques très différentes. Cette remarque suffit pour rendre raison de la formule

$$\int \frac{dx}{x\,\mathrm{l}x} = 1 + \int \frac{dx}{x\,\mathrm{l}x},$$

à laquelle on parvient, en posant dans l'équation (12)

$$u = \frac{1}{\mathrm{l}x} \quad \text{et} \quad v = \mathrm{l}x.$$

VINGT-HUITIÈME LEÇON.

SUR LES INTÉGRALES INDÉFINIES QUI RENFERMENT DES FONCTIONS ALGÉBRIQUES.

On appelle fonctions *algébriques* celles que l'on forme en n'employant que les premières opérations de l'Algèbre, savoir l'addition, la soustraction, la multiplication, la division, et l'élévation des variables à des puissances fixes. Les fonctions algébriques d'une variable sont *rationnelles* lorsqu'elles contiennent seulement des puissances entières de cette variable, c'est-à-dire lorsqu'elles se réduisent à des fonctions entières ou à des fractions rationnelles. Elles sont *irrationnelles* dans le cas contraire.

Cela posé, concevons que, $f(x)$ désignant une fonction algébrique de x, on cherche la valeur de l'intégrale indéfinie $\int f(x)\,dx$. Si la fonction $f(x)$ est rationnelle, on décomposera le produit $f(x)\,dx$ en plusieurs termes qui se présenteront sous l'une des formes

$$(1)\quad \mathrm{A}x^m\,dx,\quad \frac{\mathrm{A}\,dx}{x-a},\quad \frac{\mathrm{A}\,dx}{(x-a)^m},\quad \frac{(\mathrm{A}\mp\mathrm{B}\sqrt{-1})\,dx}{x-\alpha\mp\beta\sqrt{-1}},\quad \frac{(\mathrm{A}\mp\mathrm{B}\sqrt{-1})\,dx}{(x-\alpha\mp\beta\sqrt{-1})^m},$$

a, α, β, A, B désignant des constantes réelles et m un nombre entier; puis l'on intégrera ces différents termes à l'aide des équations

$$\int \mathrm{A}x^m\,dx = \mathrm{A}\frac{x^{m+1}}{m+1}+\mathcal{C},\qquad \int\frac{\mathrm{A}\,dx}{x-a}=\tfrac{1}{2}\mathrm{A}\,\mathrm{l}(x-a)^2+\mathcal{C},$$

$$\int\frac{\mathrm{A}\,dx}{(x-a)^m}=-\frac{\mathrm{A}}{(m-1)(x-a)^{m-1}}+\mathcal{C},$$

$$\int\frac{(\mathrm{A}\mp\mathrm{B}\sqrt{-1})\,dx}{x-\alpha\mp\beta\sqrt{-1}}=(\mathrm{A}\mp\mathrm{B}\sqrt{-1})\int\frac{(x-\alpha)\,dx}{(x-\alpha)^2+\beta^2}+(\mathrm{B}\pm\mathrm{A}\sqrt{-1})\int\frac{\beta\,dx}{(x-\alpha)^2+\beta^2}$$

$$=\tfrac{1}{2}(\mathrm{A}\mp\mathrm{B}\sqrt{-1})\,\mathrm{l}[(x-\alpha)^2+\beta^2]+(\mathrm{B}\pm\mathrm{A}\sqrt{-1})\,\mathrm{arc\,tang}\frac{x-\alpha}{\beta}+\mathcal{C},$$

$$\int\frac{(\mathrm{A}\mp\mathrm{B}\sqrt{-1})\,dx}{(x-\alpha\mp\beta\sqrt{-1})^m}=-\frac{\mathrm{A}\mp\mathrm{B}\sqrt{-1}}{(m-1)(x-\alpha\mp\beta\sqrt{-1})^{m-1}}+\mathcal{C},$$

dont les premières se déduisent des principes établis dans la Leçon précédente, et dont la dernière, tirée par induction de la troisième, peut être, *a posteriori*, facilement vérifiée.

Exemples :

$$\int\left(\frac{\mathrm{A}-\mathrm{B}\sqrt{-1}}{x-\alpha-\beta\sqrt{-1}}+\frac{\mathrm{A}+\mathrm{B}\sqrt{-1}}{x-\alpha+\beta\sqrt{-1}}\right)dx$$

$$=\mathrm{A}\,\mathrm{l}[(x-a)^2+\beta^2]+2\mathrm{B}\,\mathrm{arc\,tang}\frac{x-\alpha}{\beta}+\mathcal{C},$$

$$\int\frac{dx}{x^2-1}=\int\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1}\right)dx=\frac{1}{4}\,\mathrm{l}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^2+\mathcal{C},$$

$$\int\frac{x\,dx}{x^2+1}=\frac{1}{2}\,\mathrm{l}(x^2+1)+\mathcal{C},$$

$$\int\frac{dx}{x^3-1}=\int\frac{1}{3}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{x+2}{x^2+x+1}\right)dx$$

$$=\frac{1}{6}\,\mathrm{l}\frac{(x-1)^2}{x^2+x+1}-\frac{1}{\sqrt{3}}\,\mathrm{arc\,tang}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+\mathcal{C},$$

. . . .

Lorsque la fonction $f(x)$, sans cesser d'être algébrique, devient irrationnelle, il n'y a plus de règles générales au moyen desquelles on puisse calculer en termes finis la valeur de $\int f(x)\,dx$. A la vérité, il suffirait, pour y parvenir, de substituer à la variable x une seconde variable z tellement choisie que l'expression $f(x)\,dx$ se trouvât transformée en une autre $\mathfrak{f}(z)\,dz$, dans laquelle la fonction $\mathfrak{f}(z)$ fût rationnelle. Mais on n'a point de méthode sûre pour opérer une semblable transformation, si ce n'est dans un petit nombre de cas particuliers que nous allons faire connaître.

Soit d'abord $\mathrm{f}(x, z)$ une fonction rationnelle de x et de z, z étant une fonction irrationnelle de x, déterminée par une équation algébrique d'un degré quelconque par rapport à z, mais du premier degré par rapport à x. Pour rendre rationnelle et intégrable la formule différentielle $\mathrm{f}(x, z)\,dx$, il suffira évidemment de substituer la variable z à la variable x. On doit surtout remarquer le cas où la valeur de z est fournie, soit par l'une des équations binômes

$$(2)\qquad z^n-(ax+b)=0,\qquad (a_0x+b_0)z^n-(a_1x+b_1)=0,$$

soit par l'équation du second degré

$$(3)\qquad (a_0x+b_0)z^2-2(a_1x+b_1)z-(a_2x+b_2)=0,$$

$a, b, a_0, b_0, a_1, b_1, a_2, b_2$ étant des constantes réelles et n un nombre entier quelconque. Comme on satisfait aux équations (2) en posant

$$z=(ax+b)^{\frac{1}{n}}\qquad \text{ou}\qquad z=\left(\frac{a_1x+b_1}{a_0x+b_0}\right)^{\frac{1}{n}},$$

et à l'équation (3) en posant

$$z=\frac{a_1x+b_1+\sqrt{(a_1x+b_1)^2+(a_0x+b_0)(a_2x+b_2)}}{a_0x+b_0},$$

il en résulte qu'on rend intégrable la formule

$$(4)\qquad f\left[x,(ax+b)^{\frac{1}{n}}\right]dx\quad \text{ou}\quad f\left[x,\left(\frac{a_1x+b_1}{a_0x+b_0}\right)^{\frac{1}{n}}\right]dx,$$

en égalant à z le radical qu'elle renferme, et les deux formules

$$(5)\qquad \begin{cases} f\left[x,\dfrac{a_1x+b_1+\sqrt{(a_1x+b_1)^2+(a_0x+b_0)(a_2x+b_2)}}{a_0x+b_0}\right]dx,\\ f\left[x,\sqrt{(a_1x+b_1)^2+(a_2x+b_0)(a_0x+b_2)}\right]dx,\end{cases}$$

en y substituant la valeur de x en z tirée de l'équation (3) ou, ce qui revient au même, de la suivante :

$$(6)\qquad \sqrt{(a_1x+b_1)^2+(a_0x+b_0)(a_2x+b_2)}=(a_0x+b_0)z-(a_1x+b_1).$$

Concevons maintenant qu'il s'agisse de rendre intégrable l'expression

$$(7)\qquad f\left(x,\sqrt{Ax^2+Bx+C}\right)dx,$$

A, B, C étant des constantes réelles. Il suffira évidemment d'employer l'équation (6), après avoir réduit le trinôme Ax^2+Bx+C à la forme

$(a_1x+b_1)^2+(a_0x+b_0)(a_2x+b_2)$. Or on peut effectuer cette réduction d'une infinité de manières, en choisissant un binôme a_1x+b_1 tel que la différence $Ax^2+Bx+C-(a_1x+b_1)^2$ soit décomposable en facteurs réels du premier degré, c'est-à-dire tel que l'on ait

$$(8)\qquad Ab_1^2+Ca_1^2-Ba_1b_1+\tfrac{1}{4}B^2-AC>0.$$

En cherchant les valeurs les plus simples de a_1 et de b_1 propres à remplir cette dernière condition, on trouvera : 1° si $\frac{1}{4}B^2-AC$ est positif,

$$a_1=0,\qquad b_1=0;$$

2° si A est positif,

$$a_1=A^{\frac{1}{2}},\qquad b_1=0;$$

3° si C est positif,

$$b_1=C^{\frac{1}{2}},\qquad a_1=0.$$

De plus, comme on aura

$$Ax^2+Bx+C-\left(A^{\frac{1}{2}}x\right)^2=1\times(Bx+C)$$

et

$$Ax^2+Bx+C-\left(C^{\frac{1}{2}}\right)^2=x(Ax+B),$$

on pourra prendre dans le second cas $a_0x+b_0=1$, et dans le troisième $a_0x+b_0=x$. En résumé, si Ax^2+Bx+C est le produit de deux facteurs réels a_0x+b_0, a_2x+b_2, on rendra la formule (7) rationnelle en posant

$$(9)\qquad \sqrt{(a_0x+b_0)(a_2x+b_2)}=(a_0x+b_0)z\qquad \text{ou}\qquad \frac{a_2x+b_2}{a_0x+b_0}=z^2.$$

Dans le cas contraire, le radical $\sqrt{Ax^2+Bx+C}$ ne pourra être une quantité réelle, à moins que les deux coefficients A et C ne soient positifs. Dans tous les cas, on rendra l'expression (17) rationnelle en supposant

$$(10)\qquad \begin{cases} \text{si A est positif,}\quad \ldots\ldots\ldots\ldots\quad \sqrt{Ax^2+Bx+C}=z-A^{\frac{1}{2}}x,\\ \text{et}\\ \text{si C est positif,}\quad \sqrt{Ax^2+Bx+C}=xz-C^{\frac{1}{2}}\quad \text{ou}\quad \sqrt{A+B\dfrac{1}{x}+C\dfrac{1}{x^2}}=z-C^{\frac{1}{2}}\dfrac{1}{x}.\end{cases}$$

Il est aisé de vérifier, *a posteriori*, ces diverses conséquences de la formule (16).

Exemples. — On tirera de la première des équations (10)

$$\int \frac{dx}{\sqrt{Ax^2+Bx+C}} = \int \frac{dz}{A^{\frac{1}{2}}z+\frac{1}{2}B} = \frac{\mathrm{l}\left(Ax+\frac{1}{2}B+A^{\frac{1}{2}}\sqrt{Ax^2+Bx+C}\right)}{A^{\frac{1}{2}}} + \mathfrak{C},$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}} = \mathrm{l}(x+\sqrt{x^2+1}) + \mathfrak{C},$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} = \mathrm{l}(x+\sqrt{x^2-1}) + \mathfrak{C},$$

. . . .

Il importe d'observer que, si l'on désigne par $f(u, v, w, \ldots)$ une fonction entière des variables $u, v, w, \ldots$, et par $p, q, r, \ldots$ des diviseurs du nombre entier n, les expressions différentielles

$$(11)\qquad \begin{cases} f\left[x, (ax+b)^{\frac{1}{p}}, (ax+b)^{\frac{1}{q}}, (ax+b)^{\frac{1}{r}}, \ldots\right] dx, \\ f\left[x, \left(\dfrac{a_1x+b_1}{a_0x+b_0}\right)^{\frac{1}{p}}, \left(\dfrac{a_1x+b_1}{a_0x+b_0}\right)^{\frac{1}{q}}, \ldots\right] dx \end{cases}$$

seront de la même forme que les expressions (4) et pourront être intégrées de la même manière. Ainsi l'on trouvera, en posant $x = z^6$,

$$\int \left(x^{\frac{1}{2}}+x^{\frac{2}{3}}\right)^{-1} dx = 6\int \frac{z^2\,dz}{1+z} = 6\left[\tfrac{1}{2}z^2 - z + \tfrac{1}{2}\mathrm{l}(1+z)^2\right] + \mathfrak{C}.$$

Ajoutons que l'on réduira immédiatement les expressions différentielles

$$(12)\qquad f\left[x^\mu, (ax^\mu+b)^{\frac{1}{n}}\right] x^{\mu-1}\,dx, \quad f\left[x^\mu, \left(\frac{a_1x^\mu+b_1}{a_0x^\mu+b_0}\right)^{\frac{1}{n}}\right] x^{\mu-1}\,dx$$

(μ désignant une constante quelconque) aux formules (4), et l'expression

$$(13)\qquad f\left[x, (a_0x+b_0)^{\frac{1}{2}}, (a_1x+b_1)^{\frac{1}{2}}\right] dx$$

à la formule (7), en posant, dans les expressions (12) $x^\mu = y$ et dans l'expression (13), $a_0x + b_0 = y^2$.

Exemples. — On intègre $\dfrac{x^{2m+1}}{\sqrt{x^2-1}}\,dx$, en posant $x^2 = y$, $y - 1 = z^2$ ou simplement $x^2 - 1 = z^2$, et $\dfrac{dx}{(x-1)^{\frac{1}{2}}+(x+1)^{\frac{1}{2}}}$, en posant $x - 1 = y^2$, puis $(y^2+2)^{\frac{1}{2}} = z - y$ ou simplement $(x-1)^{\frac{1}{2}} + (x+1)^{\frac{1}{2}} = z$.

En terminant cette Leçon, nous ferons remarquer que, dans tous les cas où l'on parvient à calculer la valeur d'une intégrale indéfinie qui renferme une fonction algébrique, cette valeur se compose de plusieurs termes dont chacun se présente sous l'une des formes

$$(14)\qquad f(x), \quad A\,\mathrm{l}f(x), \quad A \operatorname{arc tang} f(x),$$

$f(x)$ désignant une fonction algébrique de x, et A une quantité constante. Les expressions $\arcsin x = \operatorname{arc tang} \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$, $\arccos x$ et autres semblables sont évidemment comprises sous la dernière des trois formes que nous venons d'indiquer.

VINGT-NEUVIÈME LEÇON.

SUR L'INTÉGRATION ET LA RÉDUCTION DES DIFFÉRENTIELLES BINÔMES, ET DE QUELQUES AUTRES FORMULES DIFFÉRENTIELLES DU MÊME GENRE.

Soient a, b, a_1, b_1, λ, μ, ν des constantes réelles; y une quantité variable, et faisons $y^\lambda = x$. L'expression $(ay^\lambda + b)^\mu dy$, dans laquelle dx a pour coefficient une puissance du binôme $ay^\lambda + b$, sera ce qu'on appelle une *différentielle binôme*, et l'intégrale indéfinie

$$\int (ay^\lambda + b)^\mu dy = \frac{1}{\lambda}\int (ax+b)^\mu x^{\frac{1}{\lambda}-1} dx \tag{1}$$

sera le produit de $\frac{1}{\lambda}$ par une autre intégrale comprise dans la formule générale

$$\int (ax+b)^\mu (a_1x+b_1)^\nu dx, \tag{2}$$

dont nous allons maintenant nous occuper.

On détermine facilement l'intégrale (2), lorsque les valeurs numériques des exposants μ, ν et de leur somme $\mu + \nu$ se réduisent à trois nombres rationnels, dont l'un est un nombre entier. En effet, désignons par l, m, n des nombres entiers quelconques. Pour intégrer les expressions différentielles

$$(ax+b)^{\pm l}\,(a_1x+b_1)^{\pm\frac{m}{n}} dx,$$

$$(ax+b)^{\pm\frac{m}{n}}(a_1x+b_1)^{\pm l} dx,$$

$$(ax+b)^{\pm\frac{m}{n}}(a_1x+b_1)^{\pm l\pm\frac{m}{n}} dx,$$

il suffira de poser successivement (*voir* la vingt-huitième Leçon)

$$a_1x + b_1 = z^n, \qquad ax + b = z^n, \qquad \frac{ax+b}{a_1x+b_1} = z^n.$$

La formule $(ax+b)^\mu (a_1x+b_1)^\nu\, dx$ n'étant pas toujours intégrable, il est bon de faire voir comment on peut ramener la détermination de l'intégrale (2) à celle de plusieurs autres intégrales de même espèce, mais dans lesquelles les exposants des binômes $ax+b$, a_1x+b_1 ne soient plus les mêmes. Pour y parvenir de la manière la plus directe, on aura recours à l'équation (12) (vingt-septième Leçon), que l'on présentera sous la forme

$$\int uv \tfrac{1}{2}\, d\,\mathrm{l}\,v^2 = uv - \int uv \tfrac{1}{2}\, d\,\mathrm{l}\,u^2; \tag{3}$$

puis l'on supposera les fonctions u et v respectivement proportionnelles à certaines puissances de deux des trois quantités

$$ax+b, \qquad a_1x+b_1, \qquad \frac{ax+b}{a_1x+b_1}. \tag{4}$$

Comme ces trois quantités, combinées deux à deux, offrent six combinaisons différentes, on voit que la formule (3) donnera naissance à six équations distinctes. On simplifiera le calcul, en opérant comme si u et v devaient toujours rester positives, et réduisant en conséquence la formule (3) à cette autre

$$\int uv\, d\,\mathrm{l}\,v = uv - \int uv\, d\,\mathrm{l}\,u, \tag{5}$$

puis ayant égard aux équations

$$d\,\mathrm{l}(ax+b) = \frac{a\,dx}{ax+b},$$

$$d\,\mathrm{l}(a_1x+b_1) = \frac{a_1\,dx}{a_1x+b_1},$$

$$d\,\mathrm{l}\frac{ax+b}{a_1x+b_1} = \frac{(ab_1 - a_1b)\,dx}{(ax+b)(a_1x+b_1)},$$

desquelles on tirera la valeur de dx pour la substituer dans l'intégrale (2). Concevons que, pour abréger, on désigne par A cette même intégrale. On trouvera :

1° En supposant u proportionnel à une puissance de $ax+b$, et v à une puissance de a_1x+b_1,

$$\begin{aligned}
\mathrm{A} &= \int \frac{(ax+b)^\mu (a_1x+b_1)^{\nu+1}}{a_1}\, d\,\mathrm{l}(a_1x+b_1)\\
&= \int \frac{(ax+b)^\mu}{(\nu+1)a_1}(a_1x+b_1)^{\nu+1}\, d\,\mathrm{l}(a_1x+b_1)^{\nu+1}\\
&= \frac{(ax+b)^\mu (a_1x+b_1)^{\nu+1}}{(\nu+1)a_1} - \int \frac{(ax+b)^\mu (a_1x+b_1)^{\nu+1}}{(\nu+1)a_1}\, d\,\mathrm{l}(ax+b)^\mu,
\end{aligned}$$

$$(6)\quad \left\{\begin{aligned}
&\int (ax+b)^\mu (a_1x+b_1)^\nu\, dx\\
&\quad = \frac{(ax+b)^\mu (a_1x+b_1)^{\nu+1}}{(\nu+1)a_1} - \frac{\mu a}{(\nu+1)a_1}\int (ax+b)^{\mu-1}(a_1x+b_1)^{\nu+1}\, dx;
\end{aligned}\right.$$

2° En supposant u proportionnel à une puissance de a_1x+b_1, et v à une puissance de $ax+b$,

$$(7)\quad \left\{\begin{aligned}
&\int (ax+b)^\mu (a_1x+b_1)^\nu\, dx\\
&\quad = \frac{(ax+b)^{\mu+1}(a_1x+b_1)^\nu}{(\mu+1)a} - \frac{\nu a_1}{(\mu+1)a}\int (ax+b)^{\mu+1}(a_1x+b_1)^{\nu-1}\, dx;
\end{aligned}\right.$$

3° En supposant u proportionnel à une puissance de $\dfrac{ax+b}{a_1x+b_1}$, et v à une puissance de a_1x+b_1,

$$\begin{aligned}
\mathrm{A} &= \int \frac{(ax+b)^\mu (a_1x+b_1)^{\nu+1}}{a_1}\, d\,\mathrm{l}(a_1x+b_1)\\
&= \int \left(\frac{ax+b}{a_1x+b_1}\right)^\mu \frac{(a_1x+b_1)^{\mu+\nu+1}}{(\mu+\nu+1)a_1}\, d\,\mathrm{l}(a_1x+b_1)^{\mu+\nu+1}\\
&= \frac{(ax+b)^\mu (a_1x+b_1)^{\nu+1}}{(\mu+\nu+1)a_1} - \int \frac{(ax+b)^\mu (a_1x+b_1)^{\nu+1}}{(\mu+\nu+1)a_1}\, d\,\mathrm{l}\left(\frac{ax+b}{a_1x+b_1}\right)^\mu,
\end{aligned}$$

$$(8)\quad \left\{\begin{aligned}
&\int (ax+b)^\mu (a_1x+b_1)^\nu\, dx\\
&\quad = \frac{(ax+b)^\mu (a_1x+b_1)^{\nu+1}}{(\mu+\nu+1)a_1} - \frac{\mu(ab_1-a_1b)}{(\mu+\nu+1)a_1}\int (ax+b)^{\mu-1}(a_1x+b_1)^\nu\, dx;
\end{aligned}\right.$$

4° En supposant u proportionnel à une puissance de $\dfrac{a_1x+b_1}{ax+b}$, et v

à une puissance de $ax+b$,

$$(9)\quad \left\{\begin{aligned}
&\int (ax+b)^\mu (a_1x+b_1)^\nu\, dx\\
&\quad = \frac{(ax+b)^{\mu+1}(a_1x+b_1)^\nu}{(\mu+\nu+1)a} - \frac{\nu(a_1b-ab_1)}{(\mu+\nu+1)a}\int (ax+b)^\mu (a_1x+b_1)^{\nu-1}\, dx;
\end{aligned}\right.$$

5° En supposant u proportionnel à une puissance de a_1x+b_1, et v à une puissance de $\dfrac{ax+b}{a_1x+b_1}$,

$$\begin{aligned}
\mathrm{A} &= \int \frac{(ax+b)^{\mu+1}(a_1x+b_1)^{\nu+1}}{ab_1-a_1b}\, d\,\mathrm{l}\,\frac{ax+b}{a_1x+b_1}\\
&= \int \frac{(a_1x+b_1)^{\mu+\nu+2}}{(\mu+1)(ab_1-a_1b)}\left(\frac{ax+b}{a_1x+b_1}\right)^{\mu+1} d\,\mathrm{l}\left(\frac{ax+b}{a_1x+b_1}\right)^{\mu+1}\\
&= \frac{(ax+b)^{\mu+1}(a_1x+b_1)^{\nu+1}}{(\mu+1)(ab_1-a_1b)} - \int \frac{(ax+b)^{\mu+1}(a_1x+b_1)^{\nu+1}}{(\mu+1)(ab_1-a_1b)}\, d\,\mathrm{l}(a_1x+b_1)^{\mu+\nu+2},
\end{aligned}$$

$$(10)\quad \left\{\begin{aligned}
&\int (ax+b)^\mu (a_1x+b_1)^\nu\, dx\\
&\quad = \frac{(ax+b)^{\mu+1}(a_1x+b_1)^{\nu+1}}{(\mu+1)(ab_1-a_1b)} - \frac{(\mu+\nu+2)a_1}{(\mu+1)(ab_1-a_1b)}\int (ax+b)^{\mu+1}(a_1x+b_1)^\nu\, dx;
\end{aligned}\right.$$

6° En supposant u proportionnel à une puissance de $ax+b$, et v à une puissance de $\dfrac{ax+b}{a_1x+b_1}$,

$$(11)\quad \left\{\begin{aligned}
&\int (ax+b)^\mu (a_1x+b_1)^\nu\, dx\\
&\quad = \frac{(ax+b)^{\mu+1}(a_1x+b_1)^{\nu+1}}{(\nu+1)(a_1b-ab_1)} - \frac{(\mu+\nu+2)a}{(\nu+1)(a_1b-ab_1)}\int (ax+b)^\mu (a_1x+b_1)^{\nu+1}\, dx.
\end{aligned}\right.$$

A l'aide des formules (6), (7), (8), (9), (10), (11), on pourra toujours remplacer l'intégrale (2) par une autre intégrale de même espèce, mais dans laquelle chacun des binômes $ax+b$, a_1x+b_1 porte un exposant compris entre les limites 0 et -1. En effet, il suffira, pour y parvenir, d'employer une ou deux fois de suite les formules (8) et (9), ou du moins l'une d'entre elles, si les exposants μ, ν sont positifs, ou si, l'un d'eux étant positif, l'autre est déjà compris entre les limites 0 et -1. Au contraire, on devra employer les formules (10) et (11), ou du moins l'une d'entre elles, si les exposants μ, ν sont tous deux négatifs. Enfin, si, l'un des deux exposants étant positif, l'autre est inférieur à -1, on fera servir la formule (6) ou la formule (7) à la réduction simultanée des valeurs numériques de ces deux exposants, jusqu'à ce que l'un d'eux se change en une quantité comprise entre les limites 0 et -1.

Lorsque les exposants μ, ν ont des valeurs numériques entières, alors, en opérant comme on vient de le dire, on finit par les réduire l'un et l'autre à l'une des deux quantités 0 et -1. Cette réduction étant effectuée, l'intégrale (2) se trouve nécessairement remplacée par l'une des quatre suivantes :

$$(12)\quad \begin{cases} \displaystyle\int dx = x + \mathcal{C}, \quad \int \frac{dx}{ax+b} = \frac{1}{2a}\,\mathrm{l}(ax+b)^2 + \mathcal{C}, \quad \int \frac{dx}{a_1x+b_1} = \frac{1}{2a_1}\,\mathrm{l}(a_1x+b_1)^2 + \mathcal{C}, \\ \displaystyle\int \frac{dx}{(ax+b)(a_1x+b_1)} = \frac{1}{ab_1 - a_1b}\int d\,\mathrm{l}\,\frac{ax+b}{a_1x+b_1} = \frac{1}{2(ab_1-a_1b)}\,\mathrm{l}\left(\frac{ax+b}{a_1x+b_1}\right)^2 + \mathcal{C}. \end{cases}$$

En général, toutes les fois que la formule $(ax+b)^\mu(a_1x+b_1)^\nu\,dx$ sera intégrable, les méthodes de réduction ci-dessus indiquées permettront de substituer à l'intégrale (2) d'autres intégrales plus simples dont il sera facile d'obtenir les valeurs.

Si l'on veut appliquer les mêmes méthodes à la réduction de l'intégrale (1), il faudra supposer dans la formule (5) les quantités u et v proportionnelles à certaines puissances, non plus des quantités (4), mais des suivantes :

$$(13)\qquad ax+b = ay^2+b, \qquad x = y^2, \qquad \frac{ax+b}{x} = \frac{ay^2+b}{y^2}.$$

Exemple. — Concevons qu'il s'agisse de réduire l'intégrale

$$\int \frac{dy}{(1+y^2)^n} = \int (1+y^2)^{-n}\,dy,$$

n désignant un nombre entier supérieur à l'unité. On supposera u et v proportionnels à des puissances de y^2 et de $\frac{1+y^2}{y^2}$; et, comme on aura

$$d\,\mathrm{l}\,\frac{1+y^2}{y^2} = 2\left(\frac{y}{1+y^2} - \frac{1}{y}\right)dy = -\frac{2\,dy}{y(1+y^2)},$$

on tirera de la formule (5)

$$(14)\quad \begin{cases} \displaystyle\int \frac{dy}{(1+y^2)^n} = \int \frac{-y(1+y^2)^{-n+1}}{2}\,d\,\mathrm{l}\,\frac{1+y^2}{y^2} \\ \displaystyle\qquad = \int \frac{y^{-2n+3}}{2(n-1)}\left(\frac{1+y^2}{y^2}\right)^{-n+1} d\,\mathrm{l}\left(\frac{1+y^2}{y^2}\right)^{-n+1} \\ \displaystyle\qquad = \frac{y(1+y^2)^{-n+1}}{2(n-1)} - \int \frac{y(1+y^2)^{n-1}}{2(n-1)}\,d\,\mathrm{l}\,y^{-2n+3} \\ \displaystyle\qquad = \frac{y}{2(n-1)(1+y^2)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2n-2}\int \frac{dy}{(1+y^2)^{n-1}}. \end{cases}$$

TRENTIÈME LEÇON.

SUR LES INTÉGRALES INDÉFINIES QUI RENFERMENT DES FONCTIONS EXPONENTIELLES, LOGARITHMIQUES OU CIRCULAIRES.

On nomme *fonctions exponentielles*, *fonctions logarithmiques*, celles qui contiennent des exposants variables ou des logarithmes, et *fonctions trigonométriques* ou *circulaires*, celles qui contiennent des lignes trigonométriques ou des arcs de cercle. Il serait fort utile d'intégrer les formules différentielles qui renferment de semblables fonctions; mais on n'a point de méthodes sûres pour y parvenir, si ce n'est dans un petit nombre de cas particuliers que nous allons passer en revue.

D'abord, si l'on désigne par f une fonction telle, que l'intégrale indéfinie $\int f(z)\,dz$ ait une valeur connue, on en déduira les valeurs de

$$(1)\qquad \int f(\mathrm{l}x)\frac{dx}{x},\quad \int e^x f(e^x)\,dx,\quad \int \cos x\, f(\sin x)\,dx,\quad \int \sin x\, f(\cos x)\,dx,$$

en posant successivement, comme dans la vingt-septième Leçon,

$$\mathrm{l}x = z,\qquad e^x = z,\qquad \sin x = z,\qquad \cos x = z.$$

On déterminerait de même les trois intégrales

$$(2)\qquad \left\{\begin{aligned} &\int f(\operatorname{arc\,tang} x)\frac{dx}{1+x^2},\\ &\int f(\arcsin x)\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}},\\ &\int f(\arccos x)\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}, \end{aligned}\right.$$

en posant, dans la première, $\operatorname{arc\,tang} x = z$, et, dans les deux dernières, $\arcsin x = z$ ou $\arccos x = z$.

Observons encore que, si l'on désigne par $f(u)$, $f(u,v)$, $f(u,v,w,\ldots)$ des fonctions algébriques des variables $u, v, w, \ldots$, il suffira de faire $e^x = z$ pour rendre algébrique l'expression différentielle renfermée sous le signe $\int$ dans l'intégrale

$$(3)\qquad \int f(e^x)\,dx,$$

et $\cos x = z$ ou $\sin x = z$ pour produire le même effet sur les deux intégrales

$$(4)\qquad \left\{\begin{aligned} &\int f(\sin x, \cos x)\,dx,\\ &\int f(\sin x, \sin 2x, \sin 3x, \ldots, \cos x, \cos 2x, \cos 3x, \ldots)\,dx, \end{aligned}\right.$$

dont la seconde n'a pas plus de généralité que la première, attendu qu'on peut y remplacer les sinus et cosinus des arcs $2x$, $3x$, $4x$, ... par leurs valeurs en $\sin x$ et $\cos x$, tirées des équations de la forme

$$\cos nx + \sqrt{-1}\sin nx = (\cos x + \sqrt{-1}\sin x)^n,$$
$$\cos nx - \sqrt{-1}\sin nx = (\cos x - \sqrt{-1}\sin x)^n.$$

Ajoutons que, si, dans la première des intégrales (4), on égale $\sin x$, non pas à z, mais à $\pm z^{\frac{1}{2}}$, cette intégrale prendra la forme très simple

$$(5)\qquad \int f\left[\pm z^{\frac{1}{2}}, (1-z)^{\frac{1}{2}}\right]\frac{\pm dz}{2z^{\frac{1}{2}}(1-z)^{\frac{1}{2}}}.$$

On aura, par exemple, en désignant par μ, ν deux quantités constantes,

$$(6)\qquad \int \sin^\mu x \cos^\nu x\,dx = \pm\tfrac{1}{2}\int z^{\frac{\mu-1}{2}}(1-z)^{\frac{\nu-1}{2}}\,dz.$$

Remarquons enfin que, en supposant connues les valeurs des intégrales (3) et (4), on en déduira facilement celles des suivantes

$$(7)\qquad \int f(e^{ax})\,dx,$$

$$(8)\qquad \left\{\begin{aligned} &\int f(\sin bx, \cos bx)\,dx,\\ &\int f(\sin bx, \sin 2bx, \sin 3bx, \ldots, \cos bx, \cos 2bx, \cos 3bx; \ldots)\,dx, \end{aligned}\right.$$

puisqu'il suffira de diviser par a ou par b les fonctions obtenues, après y avoir remplacé x par ax ou par bx.

Soient maintenant P, z deux fonctions de x, dont la première reste algébrique, et dont la seconde ait une dérivée algébrique z'. Si, en posant

$$\int \mathrm{P}\,dx = \mathrm{Q}, \qquad \int \mathrm{Q}z'\,dx = \mathrm{R}, \qquad \int \mathrm{R}z'\,dx = \mathrm{S}, \qquad \ldots,$$

on obtient pour Q, R, S, ... des fonctions connues de la variable x, on déterminera sans peine, à l'aide de plusieurs intégrations par parties,

$$\int \mathrm{P}z^n\,dx, \tag{9}$$

n étant un nombre entier. En effet, on trouvera successivement

$$\int \mathrm{P}z^n\,dx = \mathrm{Q}z^n - n\int \mathrm{Q}z'z^{n-1}\,dx,$$

$$\int \mathrm{Q}z'z^{n-1}\,dx = \mathrm{R}z^{n-1} - (n-1)\int \mathrm{R}z'z^{n-2}\,dx,$$

....

et, par suite,

$$\int \mathrm{P}z^n\,dx = \mathrm{Q}z^n - n\mathrm{R}z^{n-1} + n(n-1)\mathrm{S}z^{n-2} - \ldots + \mathcal{C}. \tag{10}$$

Lorsque la fonction z se réduit à un seul terme, elle se présente nécessairement sous l'une des deux formes (*voir* la vingt-huitième Leçon)

$$\mathrm{A}\,\mathrm{l}[\mathrm{f}(x)], \quad \mathrm{A}\arctan \mathrm{f}(x),$$

A désignant une quantité constante et $\mathrm{f}(x)$ une fonction algébrique de x.

Exemples. — Si l'on suppose la fonction P réduite à l'unité, et la fonction z à l'une des suivantes

$$\mathrm{l}x, \quad \arcsin x, \quad \arccos x, \quad \mathrm{l}\left(x+\sqrt{x^2+1}\right), \quad \ldots,$$

on tirera de la formule (10)

$$\int (\mathrm{l}x)^n\,dx = x(\mathrm{l}x)^n\left[1 - \frac{n}{\mathrm{l}x} + \frac{n(n-1)}{(\mathrm{l}x)^2} - \ldots \pm \frac{n(n-1)\ldots 3.2.1}{(\mathrm{l}x)^n}\right] + \mathcal{C}, \tag{11}$$

$$\left\{\begin{aligned} &\int (\arcsin x)^n\,dx \\ &= (\arcsin x)^n\left[x + \frac{n\sqrt{1-x^2}}{\arcsin x} - \frac{n(n-1)x}{(\arcsin x)^2} - \frac{n(n-1)(n-2)\sqrt{1-x^2}}{(\arcsin x)^3} + \ldots\right] + \mathcal{C},\end{aligned}\right. \tag{12}$$

$$\left\{\begin{aligned} &\int (\arccos x)^n\,dx \\ &= (\arccos x)^n\left[x - \frac{n\sqrt{1-x^2}}{\arccos x} - \frac{n(n-1)x}{(\arccos x)^2} + \frac{n(n-1)(n-2)\sqrt{1-x^2}}{(\arccos x)^3} + \ldots\right] + \mathcal{C},\end{aligned}\right. \tag{13}$$

$$\left\{\begin{aligned} &\int \left[\mathrm{l}\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\right]^n dx \\ &= \left[\mathrm{l}\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\right]^n \left\{x - \frac{n\sqrt{x^2+1}}{\mathrm{l}\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)} + \frac{n(n-1)x}{\left[\mathrm{l}\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\right]^2}\right. \\ &\qquad\qquad \left. - \frac{n(n-1)(n-2)\sqrt{x^2+1}}{\left[\mathrm{l}\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\right]^3} + \ldots\right\} + \mathcal{C},\end{aligned}\right. \tag{14}$$

....

Si l'on supposait $\mathrm{P} = x^{a-1}$ et $z = \mathrm{l}x$, on trouverait

$$\int x^{a-1}(\mathrm{l}x)^n\,dx = \frac{x^a}{a}(\mathrm{l}x)^n\left[1 - \frac{n}{a\,\mathrm{l}x} + \frac{n(n-1)}{a^2(\mathrm{l}x)^2} - \ldots \pm \frac{n(n-1)\ldots 3.2.1}{a^n(\mathrm{l}x)^n}\right] + \mathcal{C}. \tag{15}$$

Lorsqu'on substitue z à x, les formules qui précèdent deviennent

$$\int z^n e^z\,dz = z^n e^z\left[1 - \frac{n}{z} + \frac{n(n-1)}{z^2} - \ldots \pm \frac{n(n-1)\ldots 3.2.1}{z^n}\right] + \mathcal{C}, \tag{16}$$

$$\left\{\begin{aligned} \int z^n \cos z\,dz = z^n \Big\{ &\sin z\left[1 - \frac{n(n-1)}{z^2} + \ldots\right] \\ &+ \cos z\left[\frac{n}{z} - \frac{n(n-1)(n-2)}{z^3} + \ldots\right]\Big\} + \mathcal{C},\end{aligned}\right. \tag{17}$$

$$\left\{\begin{aligned} -\int z^n \sin z\,dz = z^n \Big\{ &\cos z\left[1 - \frac{n(n-1)}{z^2} + \ldots\right] \\ &- \sin z\left[\frac{n}{z} - \frac{n(n-1)(n-2)}{z^3} + \ldots\right]\Big\} + \mathcal{C},\end{aligned}\right. \tag{18}$$

$$(19)\quad \left\{\begin{aligned}\int z^n\left(\frac{e^z+e^{-z}}{2}\right)dz = z^n\Bigg\{&\frac{e^z-e^{-z}}{2}\left[1+\frac{n(n-1)}{z^2}+\dots\right]\\ &-\frac{e^z+e^{-z}}{2}\left[\frac{n}{z}+\frac{n(n-1)(n-2)}{z^3}+\dots\right]\Bigg\}+\mathcal{C},\end{aligned}\right.$$

$$(20)\quad \int z^n e^{az}\,dz = \frac{z^n e^{az}}{a}\left[1-\frac{n}{az}+\frac{n(n-1)}{a^2z^2}-\dots\pm\frac{n(n-1)\dots3.2.1}{a^nz^n}\right]+\mathcal{C}.$$

On pourrait établir directement ces dernières formules à l'aide de plusieurs intégrations par parties que l'on effectuerait de manière à diminuer sans cesse l'exposant n, pour le faire enfin disparaître. Ainsi, par exemple, la formule (20) se déduit des équations

$$(21)\quad \left\{\begin{aligned}&\int z^n e^{az}\,dz = \frac{z^n e^{az}}{a} - \frac{n}{a}\int z^{n-1}e^{az}\,dz,\\ &\int z^{n-1}e^{az}\,dz = \frac{z^{n-1}e^{az}}{a} - \frac{n-1}{a}\int z^{n-2}e^{az}\,dz,\\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\end{aligned}\right.$$

Une remarque semblable s'applique à toutes les intégrales que l'on déduirait de l'intégrale (10) supposée connue, en substituant z à x.

L'intégration par parties peut encore servir à fixer les valeurs de

$$(22)\quad \int z^n e^{az}\cos bz\,dz,\quad \int z^n e^{az}\sin bz\,dz,$$

a, b désignant des quantités constantes et n un nombre entier. Ainsi, par exemple, on obtiendra les valeurs générales des deux intégrales $\int e^{az}\cos bz\,dz$, $\int e^{az}\sin bz\,dz$ en ajoutant des constantes arbitraires aux valeurs de ces mêmes intégrales tirées des équations

$$\int e^{az}\cos bz\,dz = \frac{e^{az}\cos bz}{a} + \frac{b}{a}\int e^{az}\sin bz\,dz,$$

$$\int e^{az}\sin bz\,dz = \frac{e^{az}\sin bz}{a} - \frac{b}{a}\int e^{az}\cos bz\,dz.$$

Au reste, la détermination des intégrales (22) peut être simplifiée par le moyen des considérations suivantes.

Comme on a (*voir* la fin de la cinquième Leçon)

$$d(\cos x+\sqrt{-1}\sin x) = (\cos x+\sqrt{-1}\sin x)\,dx\sqrt{-1},$$

on en conclut

$$(23)\quad \left\{\begin{aligned}&d\left[e^{az}(\cos bz+\sqrt{-1}\sin bz)\right]\\ &\quad=(a+b\sqrt{-1})\,e^{az}(\cos bz+\sqrt{-1}\sin bz)\,dz,\end{aligned}\right.$$

$$(24)\quad \int e^{az}(\cos bz+\sqrt{-1}\sin bz)\,dz = \frac{e^{az}(\cos bz+\sqrt{-1}\sin bz)}{a+b\sqrt{-1}}+\mathcal{C},$$

$\mathcal{C}$ admettant des valeurs imaginaires. Cela posé, il est clair que les formules (21), et la formule (20) qui en est une suite nécessaire, subsisteront encore si l'on y remplace l'exponentielle e^{az} par le produit

$$e^{az}(\cos bz+\sqrt{-1}\sin bz),$$

et le diviseur a par

$$a+b\sqrt{-1}.$$

On aura donc

$$(25)\quad \left\{\begin{aligned}&\int z^n e^{az}(\cos bz+\sqrt{-1}\sin bz)\,dz\\ &\quad=\frac{z^n e^{az}(\cos bz+\sqrt{-1}\sin bz)}{a+b\sqrt{-1}}\left[1-\frac{n}{(a+b\sqrt{-1})z}+\dots\pm\frac{n(n-1)\dots3.2.1}{(a+b\sqrt{-1})^n z^n}\right]+\mathcal{C}.\end{aligned}\right.$$

Si l'on ramène le second membre de cette dernière équation à la forme $u+v\sqrt{-1}$, u et v désignant des quantités réelles, ces quantités seront précisément les valeurs des intégrales (22). Les deux formules qui détermineront ces valeurs comprendront, comme cas particuliers, les équations (16), (17), (18) et (20). De plus, elles entraîneront l'équation (19) et se réduiront, si l'on suppose $n=0$, aux deux suivantes :

$$(26)\quad \left\{\begin{aligned}&\int e^{az}\cos bz\,dz = \frac{a\cos bz+b\sin bz}{a^2+b^2}e^{az}+\mathcal{C},\\ &\int e^{az}\sin bz\,dz = \frac{a\sin bz-b\cos bz}{a^2+b^2}e^{az}+\mathcal{C}.\end{aligned}\right.$$

TRENTE ET UNIÈME LEÇON.

SUR LA DÉTERMINATION ET LA RÉDUCTION DES INTÉGRALES INDÉFINIES, DANS LESQUELLES LA FONCTION SOUS LE SIGNE $\int$ EST LE PRODUIT DE DEUX FACTEURS ÉGAUX A CERTAINES PUISSANCES DU SINUS ET DU COSINUS DE LA VARIABLE.

Soient μ, ν deux quantités constantes, et considérons l'intégrale

$$\int \sin^{\mu} x \cos^{\nu} x \, dx. \tag{1}$$

Si l'on pose $\sin^2 x = z$ ou $\sin x = \pm z^{\frac{1}{2}}$, cette intégrale deviendra

$$\pm \tfrac{1}{2} \int z^{\frac{\mu-1}{2}} (1-z)^{\frac{\nu-1}{2}} \, dz. \tag{2}$$

Donc elle pourra être facilement déterminée (*voir* la vingt-neuvième Leçon), lorsque les valeurs numériques des deux exposants $\frac{\mu-1}{2}$, $\frac{\nu-1}{2}$ et de leur somme $\frac{\mu+\nu-2}{2}$ se réduiront à trois nombres rationnels dont l'un sera un nombre entier. C'est ce qui arrivera nécessairement toutes les fois que les quantités μ, ν auront des valeurs numériques entières.

Dans tous les cas, on pourra du moins ramener la détermination de l'intégrale (1) ou (2) à celle de plusieurs autres intégrales de même espèce, mais dans lesquelles les exposants de $\sin x$ et $\cos x$ ou de z et $1 - z$ ne seront plus les mêmes. Pour y parvenir, il suffira d'employer de nouveau la formule (5) de la vingt-neuvième Leçon, savoir

$$\int uv \, d\,\mathrm{l}\, v = uv - \int uv \, d\,\mathrm{l}\, u, \tag{3}$$

en supposant les fonctions u, v proportionnelles à certaines puis-

sances de deux des trois quantités z, $1 - z$, $\frac{1-z}{z}$ ou, ce qui revient au même, de deux des trois suivantes :

$$\sin x, \quad \cos x, \quad \frac{\sin x}{\cos x} = \operatorname{tang} x = \frac{1}{\cot x}. \tag{4}$$

Concevons, pour fixer les idées, que l'on veuille réduire l'intégrale (1). On commencera par substituer dans cette intégrale la valeur de dx tirée de l'une des équations

$$\left\{\begin{aligned} d\,\mathrm{l} \sin x &= \frac{\cos x \, dx}{\sin x}, \\ d\,\mathrm{l} \cos x &= -\frac{\sin x \, dx}{\cos x}, \\ d\,\mathrm{l} \operatorname{tang} x &= -d\,\mathrm{l} \cot x = \frac{dx}{\sin x \cos x}; \end{aligned}\right. \tag{5}$$

puis l'on conclura de la formule (3) : 1° en supposant u proportionnel à une puissance de $\sin x$ et v à une puissance de $\cos x$,

$$\begin{aligned} \int \sin^{\mu} x \cos^{\nu} x \, dx &= \int - \sin^{\mu-1} x \cos^{\nu+1} x \, d\,\mathrm{l} \cos x \\ &= \int \frac{-\sin^{\mu-1} x}{\nu+1} \cos^{\nu+1} x \, d\,\mathrm{l} \cos^{\nu+1} x \\ &= -\frac{\sin^{\mu-1} x \cos^{\nu+1} x}{\nu+1} + \int \frac{\sin^{\mu-1} x \cos^{\nu+1} x}{\nu+1} \, d\,\mathrm{l} \sin^{\mu-1} x, \end{aligned}$$

$$\int \sin^{\mu} x \cos^{\nu} x \, dx = -\frac{\sin^{\mu-1} x \cos^{\nu+1} x}{\nu+1} + \frac{\mu-1}{\nu+1} \int \sin^{\mu-2} x \cos^{\nu+2} x \, dx; \tag{6}$$

2° en supposant u proportionnel à une puissance de $\cos x$ et v à une puissance de $\sin x$,

$$\int \sin^{\mu} x \cos^{\nu} x \, dx = \frac{\sin^{\mu+1} x \cos^{\nu-1} x}{\mu+1} + \frac{\nu-1}{\mu+1} \int \sin^{\mu+2} x \cos^{\nu-2} x \, dx; \tag{7}$$

3° en supposant u proportionnel à une puissance de $\operatorname{tang} x$ et v à une puissance de $\cos x$,

$$\int \sin^\mu x \cos^\nu x\, dx = \int -\sin^{\mu-1} x \cos^{\nu+1} x\, d\,\mathrm{l}\cos x$$
$$= \int \frac{-\operatorname{tang}^{\mu-1} x}{\mu+\nu} \cos^{\mu+\nu} x\, d\,\mathrm{l}\cos^{\mu+\nu} x$$
$$= -\frac{\sin^{\mu-1} x \cos^{\nu+1} x}{\mu+\nu} + \int \frac{\sin^{\mu-1} x \cos^{\nu+1} x}{\mu+\nu}\, d\,\mathrm{l}\operatorname{tang}^{\mu-1} x,$$

$$(8) \quad \int \sin^\mu x \cos^\nu x\, dx = -\frac{\sin^{\mu-1} x \cos^{\nu+1} x}{\mu+\nu} + \frac{\mu-1}{\mu+\nu} \int \sin^{\mu-2} x \cos^\nu x\, dx;$$

4° en supposant u proportionnel à une puissance de $\cot x$ et v à une puissance de $\sin x$,

$$(9) \quad \int \sin^\mu x \cos^\nu x\, dx = \frac{\sin^{\mu+1} x \cos^{\nu-1} x}{\mu+\nu} + \frac{\nu-1}{\mu+\nu} \int \sin^\mu x \cos^{\nu-2} x\, dx;$$

5° en supposant u proportionnel à une puissance de $\cos x$ et v à une puissance de $\operatorname{tang} x$,

$$\int \sin^\mu x \cos^\nu x\, dx = \int \sin^{\mu+1} x \cos^{\nu+1} x\, d\,\mathrm{l}\operatorname{tang} x$$
$$= \int \frac{\cos^{\mu+\nu+2} x}{\mu+1} \operatorname{tang}^{\mu+1} x\, d\,\mathrm{l}\operatorname{tang}^{\mu+1} x$$
$$= \frac{\sin^{\mu+1} x \cos^{\nu+1} x}{\mu+1} - \int \frac{\sin^{\mu+1} x \cos^{\nu+1} x}{\mu+1}\, d\,\mathrm{l}\cos^{\mu+\nu+2} x,$$

$$(10) \quad \int \sin^\mu x \cos^\nu x\, dx = \frac{\sin^{\mu+1} x \cos^{\nu+1} x}{\mu+1} + \frac{\mu+\nu+2}{\mu+1} \int \sin^{\mu+2} x \cos^\nu x\, dx;$$

6° en supposant u proportionnel à une puissance de $\sin x$ et v à une puissance de $\cot x$,

$$(11) \quad \int \sin^\mu x \cos^\nu x\, dx = -\frac{\sin^{\mu+1} x \cos^{\nu+1} x}{\nu+1} + \frac{\mu+\nu+2}{\nu+1} \int \sin^\mu x \cos^{\nu+2} x\, dx.$$

A l'aide des formules (6), (7), (8), (9), (10), (11), on pourra toujours transformer l'intégrale (1) en une autre intégrale de même espèce, mais dans laquelle chacune des quantités $\sin x$, $\cos x$ porte un exposant compris entre les limites -1, $+1$. En effet, pour atteindre ce but, il suffira d'employer une ou plusieurs fois de suite les formules (8) et (9), ou du moins l'une d'entre elles, si les exposants μ et ν sont positifs, ou si, l'un d'eux étant positif, l'autre est compris entre les limites 0, -1. On devra, au contraire, employer les formules (10) et (11) si les exposants μ et ν sont tous deux négatifs, ou si, l'un d'eux étant négatif, l'autre est compris entre les limites 0 et 1. Enfin, si, l'un des deux exposants étant positif, mais supérieur à l'unité, l'autre est négatif, mais inférieur à -1, on fera servir la formule (6) ou la formule (7) à la réduction simultanée des valeurs numériques de ces deux exposants, jusqu'à ce que l'un d'eux se trouve remplacé par une quantité comprise entre les limites -1 et $+1$.

Dans le cas particulier où l'on suppose $\mu + \nu = 0$, les équations (6) et (7) deviennent

$$(12) \quad \begin{cases} \displaystyle\int \operatorname{tang}^\mu x\, dx = \frac{\operatorname{tang}^{\mu-1} x}{\mu-1} - \int \operatorname{tang}^{\mu-2} x\, dx, \\ \displaystyle\int \cot^\nu x\, dx = -\frac{\cot^{\nu-1} x}{\nu-1} - \int \cot^{\nu-2} x\, dx. \end{cases}$$

Lorsque les exposants μ et ν ont des valeurs numériques entières, alors, en opérant comme il a été dit ci-dessus, on finit par réduire chacun d'eux à l'une des trois quantités $+1$, 0, -1, et l'intégrale (1) se trouve nécessairement remplacée par l'une des neuf suivantes :

$$\int dx = x + \mathcal{C}, \qquad \int \sin x\, dx = -\cos x + \mathcal{C},$$
$$\int \cos x\, dx = \sin x + \mathcal{C}, \qquad \int \sin x \cos x\, dx = \tfrac{1}{2}\sin^2 x + \mathcal{C},$$
$$\int \frac{\sin x\, dx}{\cos x} = -\tfrac{1}{2}\,\mathrm{l}\cos^2 x + \mathcal{C},$$
$$\int \frac{\cos x\, dx}{\sin x} = \tfrac{1}{2}\,\mathrm{l}\sin^2 x + \mathcal{C},$$
$$\int \frac{dx}{\cos x \sin x} = \tfrac{1}{2}\,\mathrm{l}\operatorname{tang}^2 x + \mathcal{C},$$
$$\int \frac{dx}{\sin x} = \int \frac{\frac{1}{2}\,dx}{\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}} = \tfrac{1}{2}\,\mathrm{l}\operatorname{tang}^2 \frac{x}{2} + \mathcal{C},$$
$$\int \frac{dx}{\cos x} = \int \frac{d(x + \frac{1}{2}\pi)}{\sin(x + \frac{1}{2}\pi)} = \tfrac{1}{2}\,\mathrm{l}\operatorname{tang}^2\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right) + \mathcal{C}.$$

Si l'on applique ces principes à la détermination des intégrales

$$\int \sin^n x\,dx,\quad \int \cos^n x\,dx,$$
$$\int \frac{\sin^n x}{\cos^n x}dx,\quad \int \frac{\cos^n x}{\sin^n x}dx,\quad \int \frac{dx}{\cos^n x},\quad \int \frac{dx}{\sin^n x},$$

n étant un nombre entier, on trouvera : 1° en supposant n pair,

$$\int \sin^n x\,dx = -\frac{\cos x}{n}\left[\sin^{n-1}x + \frac{n-1}{n-2}\sin^{n-3}x + \ldots + \frac{3.5\ldots(n-3)(n-1)}{2.4\ldots(n-4)(n-2)}\sin x\right] + \frac{1.3\ldots(n-3)(n-1)}{2.4\ldots(n-2)n}x + \mathfrak{C},$$
$$\int \cos^n x\,dx = \frac{\sin x}{n}\left[\cos^{n-1}x + \frac{n-1}{n-2}\cos^{n-3}x + \ldots + \frac{3.5\ldots(n-3)(n-1)}{2.4\ldots(n-4)(n-2)}\cos x\right] + \frac{1.3\ldots(n-3)(n-1)}{2.4\ldots(n-2)n}x + \mathfrak{C},$$
$$\int \operatorname{tang}^n x\,dx = \frac{\operatorname{tang}^{n-1}x}{n-1} - \frac{\operatorname{tang}^{n-3}x}{n-3} + \frac{\operatorname{tang}^{n-5}x}{n-5} - \ldots \pm \operatorname{tang}x \mp x + \mathfrak{C},$$
$$\int \cot^n x\,dx = -\frac{\cot^{n-1}x}{n-1} + \frac{\cot^{n-3}x}{n-3} - \frac{\cot^{n-5}x}{n-5} + \ldots \pm \cot x \mp x + \mathfrak{C},$$
$$\int \operatorname{séc}^n x\,dx = \frac{\sin x}{n-1}\left[\operatorname{séc}^{n-1}x + \frac{n-2}{n-3}\operatorname{séc}^{n-3}x + \ldots + \frac{2.4\ldots(n-4)(n-2)}{1.3\ldots(n-5)(n-3)}\operatorname{séc}x\right] + \mathfrak{C},$$
$$\int \operatorname{coséc}^n x\,dx = -\frac{\cos x}{n-1}\left[\operatorname{coséc}^{n-1}x + \frac{n-2}{n-3}\operatorname{coséc}^{n-3}x + \ldots + \frac{2.4\ldots(n-4)(n-2)}{1.3\ldots(n-5)(n-3)}\operatorname{coséc}x\right] + \mathfrak{C};$$

2° en supposant n impair,

$$\int \sin^n x\,dx = -\frac{\cos x}{n}\left[\sin^{n-1}x + \frac{n-1}{n-2}\sin^{n-3}x + \frac{(n-1)(n-3)}{(n-2)(n-4)}\sin^{n-5}x + \ldots + \frac{2.4\ldots(n-3)(n-1)}{1.3\ldots(n-4)(n-2)}\right] + \mathfrak{C},$$
$$\int \cos^n x\,dx = \frac{\sin x}{n}\left[\cos^{n-1}x + \frac{n-1}{n-2}\cos^{n-3}x + \frac{(n-1)(n-3)}{(n-2)(n-4)}\cos^{n-5}x + \ldots + \frac{2.4\ldots(n-3)(n-1)}{1.3\ldots(n-4)(n-2)}\right] + \mathfrak{C},$$
$$\int \operatorname{tang}^n x\,dx = \frac{\operatorname{tang}^{n-1}x}{n-1} - \frac{\operatorname{tang}^{n-3}x}{n-3} + \frac{\operatorname{tang}^{n-5}x}{n-5} - \ldots \pm \frac{\operatorname{tang}^2 x}{2} \pm \tfrac{1}{2}\,\mathrm{l}\cos^2 x + \mathfrak{C},$$
$$\int \cot^n x\,dx = -\frac{\cot^{n-1}x}{n-1} + \frac{\cot^{n-3}x}{n-3} - \frac{\cot^{n-5}x}{n-5} + \ldots \mp \frac{\cot^2 x}{2} \mp \tfrac{1}{2}\,\mathrm{l}\sin^2 x + \mathfrak{C},$$
$$\int \operatorname{séc}^n x\,dx = \frac{\sin x}{n-1}\left[\operatorname{séc}^{n-1}x + \frac{n-2}{n-3}\operatorname{séc}^{n-3}x + \ldots + \frac{3.5\ldots(n-2)}{2.4\ldots(n-3)}\operatorname{séc}^2 x\right] + \frac{1.3\ldots(n-2)}{2.4\ldots(n-1)}\tfrac{1}{2}\,\mathrm{l}\operatorname{tang}^2\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right) + \mathfrak{C},$$
$$\int \operatorname{coséc}^n x\,dx = -\frac{\cos x}{n-1}\left[\operatorname{coséc}^{n-1}x + \frac{n-2}{n-3}\operatorname{coséc}^{n-3}x + \ldots + \frac{3.5\ldots(n-2)}{2.4\ldots(n-3)}\operatorname{coséc}^2 x\right] + \frac{1.3\ldots(n-2)}{2.4\ldots(n-1)}\tfrac{1}{2}\,\mathrm{l}\operatorname{tang}^2\frac{x}{2} + \mathfrak{C}.$$

Nous indiquerons, en finissant, plusieurs méthodes qui peuvent servir, comme les précédentes, à la réduction ou à la détermination de l'intégrale $\int \sin^{\pm m}x\cos^{\pm n}x\,dx$, m, n étant deux nombres entiers.

D'abord, il est clair qu'on réduira l'intégrale $\int \sin^{-m}x\cos^{-n}x\,dx$ à d'autres plus simples en multipliant une ou plusieurs fois la fonction sous le signe $\int$ par $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$. De plus, on peut rendre rationnelle l'expression différentielle $\sin^{\pm m}x\cos^{\pm n}x\,dx$: 1° dans le cas où n est un nombre impair, en posant $\sin x = z$; 2° dans le cas où m est un nombre impair, en posant $\cos x = z$. Remarquons enfin que l'on obtiendra très facilement les valeurs des intégrales

$$\int \sin^m x\,dx,\quad \int \cos^n x\,dx,\quad \int \sin^m x\cos^n x\,dx$$

dès qu'on aura développé $\sin^m x$, $\cos^n x$ et $\sin^m x\cos^n x$ en fonctions linéaires de $\sin x$, $\sin 2x$, $\sin 3x$, ..., $\cos x$, $\cos 2x$, $\cos 3x$, ... à l'aide des formules établies dans le Chapitre VII de l'*Analyse algébrique* (1).

(1) *Œuvres de Cauchy*, S. II, T. III, p. 153.

TRENTE-DEUXIÈME LEÇON.

SUR LE PASSAGE DES INTÉGRALES INDÉFINIES AUX INTÉGRALES DÉFINIES.

Intégrer l'équation

$$dy = f(x)\,dx, \tag{1}$$

ou l'expression différentielle $f(x)\,dx$, *à partir* de $x = x_0$, c'est trouver une fonction continue de x qui ait la double propriété de donner pour différentielle $f(x)\,dx$ et de s'évanouir pour $x = x_0$. Cette fonction, devant être comprise dans la formule générale

$$\int f(x)\,dx = \int_{x_0}^{x} f(x)\,dx + \mathfrak{C},$$

se réduira nécessairement à l'intégrale $\int_{x_0}^{x} f(x)\,dx$, si la fonction $f(x)$ est elle-même continue par rapport à x, entre les deux limites de cette intégrale. Concevons maintenant que, les deux fonctions $\varphi(x)$ et $\chi(x)$ étant continues entre ces limites, la valeur générale de y, tirée de l'équation (1), soit présentée sous la forme

$$\varphi(x) + \int \chi(x)\,dx.$$

La fonction cherchée sera évidemment égale à

$$\varphi(x) - \varphi(x_0) + \int_{x_0}^{x} \chi(x)\,dx.$$

En partant de cette remarque, on verra sans peine ce que deviennent les formules établies dans les Leçons précédentes, lorsqu'on assujettit les deux membres de chacune d'elles à s'évanouir pour une valeur

donnée de x. Ainsi, par exemple, on reconnaîtra facilement que les équations (9) et (12) de la vingt-septième Leçon, savoir

$$\int f(x)\,dx = \int \mathfrak{f}(z)\,dz \quad \text{et} \quad \int u\,dv = uv - \int v\,du$$

ou

$$\int uv'\,dx = uv - \int vu'\,dx$$

entraînent les suivantes

$$\int_{x_0}^{x} f(x)\,dx = \int_{z_0}^{z} \mathfrak{f}(z)\,dz \tag{2}$$

et

$$\int_{x_0}^{x} uv'\,dx = uv - u_0 v_0 - \int_{x_0}^{x} vu'\,dx, \tag{3}$$

z_0, u_0 et v_0 désignant les valeurs de z, u et v correspondantes à $x = x_0$. Si, dans les formules (2) et (3), on pose $x = \mathrm{X}$, on trouvera, en appelant Z, U, V les valeurs correspondantes de z, u, v,

$$\int_{x_0}^{\mathrm{X}} f(x)\,dx = \int_{z_0}^{\mathrm{Z}} \mathfrak{f}(z)\,dz \tag{4}$$

et

$$\int_{x_0}^{\mathrm{X}} uv'\,dx = \mathrm{UV} - u_0 v_0 - \int_{x_0}^{\mathrm{X}} vu'\,dx. \tag{5}$$

Les équations (4) et (5) sont celles que l'on doit substituer aux formules (9) et (12) de la vingt-septième Leçon, lorsqu'il s'agit d'appliquer l'intégration par substitution ou par parties à l'évaluation ou à la réduction des intégrales définies; tandis que les intégrales de cette espèce, déduites de l'intégration immédiate ou par décomposition, sont données par la formule (18) de la vingt-sixième Leçon, ou par la formule (2) de la vingt-troisième. Ces principes étant admis, les méthodes exposées dans les Leçons précédentes pourront servir à déterminer un grand nombre d'intégrales définies, parmi lesquelles je vais citer quelques-unes des plus remarquables.

Si l'on désigne par m un nombre entier, par a, β, μ, ν des quantités positives, par α, A, B, C, ... des quantités quelconques, enfin par ε un nombre infiniment petit, on tirera des formules établies dans les vingt-septième et vingt-huitième Leçons

$$\int_0^1 x^{a-1}\,dx = \frac{1}{a}, \qquad \int_0^1 x^{-a-1}\,dx = \infty,$$

$$\int_0^\infty e^{-x}\,dx = 1, \qquad \int_0^\infty e^{ax}\,dx = \infty, \qquad \int_0^\infty e^{-ax}\,dx = \frac{1}{a},$$

$$\int_0^1 (\mathrm{A} + \mathrm{B}x + \mathrm{C}x^2 + \ldots)\,dx = \mathrm{A} + \frac{\mathrm{B}}{2} + \frac{\mathrm{C}}{3} + \ldots,$$

$$\int_0^1 \frac{x^m - 1}{x - 1}\,dx = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{m}, \qquad \int_0^\infty \frac{dx}{1 + x^2} = \frac{\pi}{2},$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{\pi}{a}, \qquad \int_{-\frac{1}{\varepsilon\mu}}^{\frac{1}{\varepsilon\nu}} \frac{x\,dx}{x^2 + a^2} = \mathrm{l}\frac{\mu}{\nu},$$

$$\int_{-\frac{1}{\varepsilon}}^{\frac{1}{\varepsilon}} \frac{x\,dx}{x^2 + a^2} = 0, \qquad \int_0^a \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \frac{\pi}{2}.$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x-\alpha)^2 + \beta^2} = \frac{\pi}{\beta}, \quad \int_{-\frac{1}{\varepsilon\mu}}^{\frac{1}{\varepsilon\nu}} \frac{(x-\alpha)\,dx}{(x-\alpha)^2 + \beta^2} = \mathrm{l}\frac{\mu}{\nu}, \quad \int_{-\frac{1}{\varepsilon}}^{\frac{1}{\varepsilon}} \frac{(x-\alpha)\,dx}{(x-\alpha)^2 + \beta^2} = 0,$$

$$\int_{-\frac{1}{\varepsilon\mu}}^{\frac{1}{\varepsilon\nu}} \left(\frac{\mathrm{A} - \mathrm{B}\sqrt{-1}}{x - \alpha - \beta\sqrt{-1}} + \frac{\mathrm{A} + \mathrm{B}\sqrt{-1}}{x - \alpha + \beta\sqrt{-1}} \right) dx = 2\mathrm{A}\,\mathrm{l}\frac{\mu}{\nu} + 2\pi\mathrm{B},$$

$$\int_{-\frac{1}{\varepsilon}}^{\frac{1}{\varepsilon}} \left(\frac{\mathrm{A} - \mathrm{B}\sqrt{-1}}{x - \alpha - \beta\sqrt{-1}} + \frac{\mathrm{A} + \mathrm{B}\sqrt{-1}}{x - \alpha + \beta\sqrt{-1}} \right) dx = 2\pi\mathrm{B}.$$

De plus, si l'on représente généralement par $\frac{\mathrm{f}(x)}{\mathrm{F}(x)}$ une fraction rationnelle dont le dénominateur ne puisse s'évanouir pour aucune valeur réelle de x, par x_1, x_2, ... les racines imaginaires de l'équation $\mathrm{F}(x) = 0$, dans lesquelles le coefficient de $\sqrt{-1}$ est positif, et par $\mathrm{A}_1 - \mathrm{B}_1\sqrt{-1}$, $\mathrm{A}_2 - \mathrm{B}_2\sqrt{-1}$, ... les valeurs de la fraction $\frac{\mathrm{f}(x)}{\mathrm{F}(x)}$ cor-

respondantes à ces racines, on obtiendra la formule

$$(6) \qquad \int_{-\frac{1}{\varepsilon\mu}}^{\frac{1}{\varepsilon\nu}} \frac{\mathrm{f}(x)}{\mathrm{F}(x)}\,dx = 2(\mathrm{A}_1 + \mathrm{A}_2 + \ldots)\,\mathrm{l}\frac{\mu}{\nu} + 2\pi(\mathrm{B}_1 + \mathrm{B}_2 + \ldots).$$

Le second membre de cette formule cessera de renfermer le facteur arbitraire $\mathrm{l}\frac{\mu}{\nu}$, et l'on aura en conséquence

$$(7) \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{f}(x)}{\mathrm{F}(x)}\,dx = 2\pi(\mathrm{B}_1 + \mathrm{B}_2 + \ldots),$$

toutes les fois que la somme $\mathrm{A}_1 + \mathrm{A}_2 + \ldots$ s'évanouira. Or, cette condition sera remplie si le degré de $\mathrm{F}(x)$ surpasse au moins de deux unités le degré de $\mathrm{f}(x)$. On arrive au même résultat en partant de la remarque qui termine la vingt-cinquième Leçon.

Si le degré de la fonction $\mathrm{F}(x)$ surpassait d'une unité seulement celui de $\mathrm{f}(x)$, l'intégrale $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{f}(x)}{\mathrm{F}(x)}\,dx$ deviendrait indéterminée, et sa valeur générale, donnée par l'équation (6), renfermerait la constante arbitraire $\frac{\mu}{\nu}$. Mais, en réduisant cette constante arbitraire à l'unité, on retrouverait l'équation (7), qui, dans ce cas, fournirait seulement la valeur principale de l'intégrale en question. Ajoutons que cette valeur principale resterait la même, si, outre les racines imaginaires x_1, x_2, ..., l'équation $\mathrm{F}(x) = 0$ admettait des racines réelles. La raison en est que toutes les intégrales de la forme $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{A}\,dx}{x \pm a}$ ont des valeurs principales nulles.

Exemples. — Soient m et n deux nombres entiers, m étant $< n$. Si l'on fait $\frac{2m+1}{2n} = a$, on trouvera

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^{2m}\,dx}{1 - x^{2n}} = \frac{2\pi}{2n}[\sin a\pi + \sin 3a\pi + \ldots + \sin(2n-1)a\pi]$$

$$= \frac{\pi}{n \sin a\pi} = \frac{\pi}{n \sin \frac{(2m+1)\pi}{2n}}.$$

On en conclut, en posant $z = x^{2n}$,

$$(8)\qquad \int_0^\infty \frac{z^{a-1}\,dz}{1+z} = 2n\int_0^\infty \frac{x^{2m}\,dx}{1+x^{2n}} = n\int_{-\infty}^\infty \frac{x^{2m}\,dx}{1+x^{2n}} = \frac{\pi}{\sin a\pi}.$$

De même, en réduisant chaque intégrale indéterminée à sa valeur principale, on trouvera

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{x^{2m}\,dx}{1-x^{2n}} = \frac{2\pi}{2n}[\sin 2a\pi + \sin 4a\pi + \ldots + \sin(2n-2)a\pi] = \frac{\pi}{n\,\mathrm{tang}\,a\pi} \doteq \frac{\pi}{n\,\mathrm{tang}\,\frac{(2m+1)\pi}{2n}},$$

$$(9)\qquad \int_0^\infty \frac{z^{a-1}\,dz}{1-z} = 2n\int_0^\infty \frac{x^{2m}\,dx}{1-x^{2n}} = n\int_{-\infty}^\infty \frac{x^{2m}\,dx}{1-x^{2n}} = \frac{\pi}{\mathrm{tang}\,a\pi}.$$

On déduira encore des formules établies dans les vingt-neuvième et trentième Leçons

$$\int_0^\infty \frac{x^{m-1}\,dx}{(1+x)^n} = \frac{m-1}{n-m}\int_0^\infty \frac{x^{m-2}\,dx}{(1+x)^n}$$
$$= \frac{(m-1)\ldots 3.2.1}{(n-m)\ldots(n-3)(n-2)}\int_0^\infty \frac{dx}{(1+x)^n} = \frac{1.2.3\ldots(m-1)\times 1.2.3\ldots(n-m-1)}{1.2.3\ldots(n-1)},$$

$$\int_0^\infty \frac{dy}{(1+y^2)^n} = \frac{2n-3}{2n-2}\int_0^\infty \frac{dy}{(1+y^2)^{n-1}} = \frac{1.3.5\ldots(2n-3)}{2.4.6\ldots(2n-2)}\int_0^\infty \frac{dy}{1+y^2} = \frac{1.3.5\ldots(2n-3)}{2.4.6\ldots(2n-2)}\frac{\pi}{2},$$

$$\int_0^\infty z^n e^{-z}\,dz = 1.2.3\ldots n,$$

$$\int_0^\infty z^n e^{-az}\,dz = \frac{1.2.3\ldots n}{a^{n+1}},$$

$$\int_0^\infty z^n e^{-az}(\cos bz + \sqrt{-1}\sin bz)\,dz = \frac{1.2.3\ldots n}{(a+b\sqrt{-1})^{n+1}},$$

$$\int_0^\infty z^n e^{-az}\cos bz\,dz = \frac{1.2.3\ldots n}{(a^2+b^2)^{\frac{n+1}{2}}}\cos\left[(n+1)\,\mathrm{arc\,tang}\,\frac{b}{a}\right],$$

$$\int_0^\infty e^{-az}\cos bz\,dz = \frac{a}{a^2+b^2},$$

$$\int_0^\infty z^n e^{-az}\sin bz\,dz = \frac{1.2.3\ldots n}{(a^2+b^2)^{\frac{n+1}{2}}}\sin\left[(n+1)\,\mathrm{arc\,tang}\,\frac{b}{a}\right],$$

$$\int_0^\infty e^{-az}\sin bz\,dz = \frac{b}{a^2+b^2}.$$

Enfin, on tirera des formules établies dans la trente et unième Leçon, 1° en supposant n pair,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\,dx = \frac{1.3.5\ldots(n-1)}{2.4.6\ldots n}\frac{\pi}{2} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x\,dx,$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \mathrm{tang}^n x\,dx = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n-3} + \ldots \mp \frac{1}{3} \pm 1 \mp \frac{\pi}{4},$$

2° en supposant n impair,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\,dx = \frac{2.4.6\ldots(n-1)}{1.3.5\ldots(n-2)n} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x\,dx,$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \mathrm{tang}^n x\,dx = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n-3} + \ldots \mp \frac{1}{4} \pm \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\,\mathrm{l}\,\frac{1}{2}.$$

Les méthodes d'intégration que nous avons indiquées fournissent souvent les moyens de transformer une intégrale définie donnée en une autre plus simple. Ainsi, par exemple, quelle que soit la fonction $f(x)$, on tirera des formules établies dans la vingt-septième Leçon

$$(10)\qquad \left\{\begin{array}{l}
\int_{-\infty}^\infty f(x\pm a)\,dx = \int_{-\infty}^\infty f(z)\,dz = \int_{-\infty}^\infty f(x)\,dx,\\
\int_0^\infty f(ax)\,dx = \frac{1}{a}\int_0^\infty f(x)\,dx,\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
\int_0^\infty x^{\mu-1}e^{-ax}\,dx = \frac{1}{a^\mu}\int_0^\infty x^{\mu-1}e^{-x}\,dx,\\
\int_0^\infty \frac{\sin ax}{x}\,dx = \int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx,\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{array}\right.$$

Lorsque, dans une intégrale relative à la variable x, la fonction sous le signe $\int$ renferme une autre quantité μ dont la valeur est arbitraire, on peut considérer cette quantité μ comme une nouvelle variable, et l'intégrale elle-même comme une fonction de μ. Parmi les fonctions de cette espèce, on doit remarquer celle que M. Legendre a désignée par la lettre Γ, et qui, pour des valeurs positives de μ, se trouve définie par l'équation

$$(11) \qquad \Gamma(\mu) = \int_0^1 \left(\mathrm{l}\frac{1}{x}\right)^{\mu-1} dx = \int_0^\infty z^{\mu-1} e^{-z}\, dz.$$

Cette fonction, dont Euler et M. Legendre se sont beaucoup occupés, satisfait, en vertu de ce qui précède, aux équations

$$(12) \qquad \left\{ \begin{array}{l} \Gamma(1) = 1, \quad \Gamma(2) = 1, \quad \Gamma(3) = 1.2, \quad \ldots, \quad \Gamma(n) = 1.2.3\ldots(n-1), \\ \displaystyle\int_0^\infty z^{n-1} e^{-az}\, dz = \frac{\Gamma(n)}{a^n}, \end{array} \right.$$

$$(13) \qquad \left\{ \begin{array}{l} \displaystyle\int_0^\infty z^{n-1} e^{-az} \cos bz\, dz = \frac{\Gamma(n) \cos\left(n \operatorname{arc\,tang} \frac{b}{a}\right)}{(a^2+b^2)^{\frac{n}{2}}}, \\ \displaystyle\int_0^\infty z^{n-1} e^{-az} \sin bz\, dz = \frac{\Gamma(n) \sin\left(n \operatorname{arc\,tang} \frac{b}{a}\right)}{(a^2+b^2)^{\frac{n}{2}}}, \end{array} \right.$$

$$(14) \qquad \int_0^\infty z^{\mu-1} e^{-az}\, dz = \frac{\Gamma(\mu)}{a^\mu}, \qquad \int_0^\infty \frac{x^{m-1}\, dx}{(1+x)^n} = \frac{\Gamma(m)\Gamma(n-m)}{\Gamma(n)},$$

dans lesquelles n désigne un nombre entier, m un autre nombre entier inférieur à n, et μ un nombre quelconque.

TRENTE-TROISIÈME LEÇON.

DIFFÉRENTIATION ET INTÉGRATION SOUS LE SIGNE $\int$. INTÉGRATION DES FORMULES DIFFÉRENTIELLES QUI RENFERMENT PLUSIEURS VARIABLES INDÉPENDANTES.

Soient x, y deux variables indépendantes, $f(x,y)$ une fonction de ces deux variables, et x_0, X deux valeurs particulières de x. On trouvera, en posant $\Delta y = \alpha\, dy$ et employant les notations adoptées dans la treizième Leçon,

$$\Delta_y \int_{x_0}^{X} f(x,y)\, dx = \int_{x_0}^{X} f(x, y+\Delta y)\, dx - \int_{x_0}^{X} f(x,y)\, dx = \int_{x_0}^{X} \Delta_y f(x,y)\, dx,$$

puis, en divisant par $\alpha\, dy$ et faisant converger α vers la limite zéro,

$$(1) \qquad \frac{d}{dy} \int_{x_0}^{X} f(x,y)\, dx = \int_{x_0}^{X} \frac{d f(x,y)}{dy}\, dx.$$

On aura de même

$$(2) \qquad \frac{d}{dy} \int_{x_0}^{x} f(x,y)\, dx = \int_{x_0}^{x} \frac{d f(x,y)}{dy}\, dx.$$

Il suit de ces formules que, pour différentier par rapport à y les intégrales $\int_{x_0}^{X} f(x,y)\, dx$, $\int_{x_0}^{x} f(x,y)\, dx$, il suffit de *différentier sous le signe* $\int$ la fonction $f(x,y)$. Il en résulte encore que les équations

$$(3) \qquad \left\{ \begin{array}{l} \displaystyle\int_{x_0}^{X} f(x,y)\, dx = \mathfrak{F}(y), \\ \displaystyle\int_{x_0}^{x} f(x,y)\, dx = \mathfrak{F}(x,y), \\ \displaystyle\int f(x,y)\, dx = \mathfrak{F}(x,y) + \mathcal{C} \end{array} \right.$$

entraînent toujours les suivantes :

$$(4)\qquad \begin{cases} \displaystyle\int_{x_0}^{X} \frac{d\,f(x,y)}{dy}\,dx = \frac{d\,\mathcal{F}(y)}{dy}, \\ \displaystyle\int_{x_0}^{x} \frac{d\,f(x,y)}{dy}\,dx = \frac{d\,\mathcal{F}(x,y)}{dy}, \\ \displaystyle\int \frac{d\,f(x,y)}{dy}\,dx = \frac{d\,\mathcal{F}(x,y)}{dy} + \mathcal{C}, \end{cases}$$

$$(5)\qquad \begin{cases} \displaystyle\int_{x_0}^{X} \frac{d^n f(x,y)}{dy^n}\,dx = \frac{d^n \mathcal{F}(y)}{dy^n}, \\ \displaystyle\int_{x_0}^{x} \frac{d^n f(x,y)}{dy^n}\,dx = \frac{d^n \mathcal{F}(x,y)}{dy^n}, \\ \displaystyle\int \frac{d^n f(x,y)}{dy^n}\,dx = \frac{d^n \mathcal{F}(x,y)}{dy^n} + \mathcal{C}. \end{cases}$$

Exemples. — En différentiant n fois de suite par rapport à la quantité a chacune des intégrales

$$\int \frac{dx}{x^2+a},\quad \int_0^\infty \frac{dx}{x^2+a},\quad \int e^{\pm ax}\,dx,\quad \int_0^\infty e^{-ax}\,dx,\quad \int_0^\infty x^{\mu-1}e^{-ax}\,dx,$$

on trouvera

$$\int \frac{1.2\ldots n\,dx}{(x^2+a)^{n+1}} = \pm \frac{d^n\left(\frac{1}{\sqrt{a}}\operatorname{arc\,tang}\frac{x}{\sqrt{a}}\right)}{da^n} + \mathcal{C},$$

$$\int_0^\infty \frac{1.2\ldots n\,dx}{(x^2+a)^{n+1}} = \pm\frac{\pi}{2}\,\frac{d^n\left(\frac{1}{\sqrt{a}}\right)}{da^n} = \frac{1.3.5\ldots(2n-1)\pi}{2^n a^n\sqrt{a}},$$

$$\int_0^\infty \frac{dx}{(1+x^2)^{n+1}} = \frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2.4.6\ldots(2n)}\,\frac{\pi}{2},$$

$$\int x^n e^{\pm ax}\,dx = \pm\frac{d^n(a^{-1}e^{\pm ax})}{da^n} + \mathcal{C},$$

$$\int_0^\infty x^n e^{-ax}\,dx = \pm\frac{d^n(a^{-1})}{da^n} = \frac{1.2.3\ldots n}{a^{n+1}},$$

$$\int_0^\infty x^{\mu+n-1}e^{-ax}\,dx = \frac{\mu(\mu+1)\ldots(\mu+n-1)}{a^{\mu+n}}\,\Gamma(\mu),$$

$$\Gamma(\mu+n) = \mu(\mu+1)\ldots(\mu+n-1)\,\Gamma(\mu).$$

Concevons maintenant que la fonction $f(x,y)$ soit continue par rapport aux deux variables x et y, toutes les fois que x reste compris entre les limites x_0, X, et y entre les limites y_0, Y. Il est aisé de voir que, pour de semblables valeurs de x et de y, la seconde des équations (3) entraînera la suivante :

$$(6)\qquad \int_{x_0}^{x}\int_{y_0}^{y} f(x,y)\,dy\,dx = \int_{y_0}^{y} \mathcal{F}(x,y)\,dy = \int_{y_0}^{y}\int_{x_0}^{x} f(x,y)\,dy\,dx.$$

En effet, on tirera de la formule (2)

$$\frac{d}{dy}\int_{x_0}^{x}\int_{y_0}^{y} f(x,y)\,dx\,dy = \int_{x_0}^{x} f(x,y)\,dx,$$

puis, en multipliant les deux membres par dy et les intégrant par rapport à y, à partir de $y=0$, on retrouvera la formule (6). On aura par suite

$$(7)\qquad \begin{cases} \displaystyle\int_{x_0}^{X}\int_{y_0}^{y} f(x,y)\,dx\,dy = \int_{y_0}^{y}\int_{x_0}^{X} f(x,y)\,dy\,dx, \\ \displaystyle\int_{x_0}^{X}\int_{y_0}^{Y} f(x,y)\,dx\,dy = \int_{y_0}^{Y}\int_{x_0}^{X} f(x,y)\,dy\,dx. \end{cases}$$

Il résulte des formules (6) et (7) que, pour intégrer par rapport à y, et à partir de $y=y_0$, les expressions $\int_{x_0}^{x} f(x,y)\,dx$, $\int_{x_0}^{X} f(x,y)\,dx$, multipliées par la différentielle dy, il suffit d'*intégrer sous le signe* $\int$, et à partir de $y=y_0$, la fonction $f(x,y)$ multipliée par cette même différentielle.

Souvent l'intégration sous le signe $\int$ fait connaître les valeurs de certaines intégrales définies, quoique l'on n'ait aucun moyen d'évaluer les intégrales indéfinies correspondantes. Ainsi, quoique l'on ne sache pas déterminer en fonction de x l'intégrale indéfinie $\int \frac{x^\mu - x^\nu}{lx}\,\frac{dx}{x}$ (μ, ν étant deux quantités positives), néanmoins, comme on a généralement, pour des valeurs positives de μ,

$$(8)\qquad \int_0^1 x^{\mu-1}\,dx = \frac{1}{\mu},$$

on en conclut, en multipliant les deux membres par $d\mu$, puis intégrant par rapport à μ, à partir de $\mu = \nu$,

$$(9) \qquad \int_0^1 \frac{x^\mu - x^\nu}{\mathrm{l}x} \frac{dx}{x} = \mathrm{l}\frac{\mu}{\nu}.$$

Parmi les formules de ce genre, on doit remarquer encore celles que nous allons établir.

Si l'on désigne par a, b, c des quantités positives, une intégration sous le signe $\int$, relative à la quantité a, effectuée à partir de $a = c$ et appliquée aux intégrales définies

$$(10) \qquad \begin{cases} \displaystyle\int_0^\infty e^{-ax}\,dx = \frac{1}{a}, \\ \displaystyle\int_0^\infty e^{-ax}\cos bx\,dx = \frac{a}{a^2+b^2}, \\ \displaystyle\int_0^\infty e^{-ax}\sin bx\,dx = \frac{b}{a^2+b^2}, \end{cases}$$

produira les formules

$$(11) \qquad \begin{cases} \displaystyle\int_0^\infty \frac{e^{-cx}-e^{-ax}}{x}\,dx = \mathrm{l}\frac{a}{c}, \\ \displaystyle\int_0^\infty \frac{e^{-cx}-e^{-ax}}{x}\cos bx\,dx = \tfrac{1}{2}\,\mathrm{l}\frac{a^2+b^2}{c^2+b^2}, \\ \displaystyle\int_0^\infty \frac{e^{-cx}-e^{-ax}}{x}\sin bx\,dx = \operatorname{arc\,tang}\frac{a}{b} - \operatorname{arc\,tang}\frac{c}{b}, \end{cases}$$

desquelles on tirera, en posant $c = 0$ et $a = \infty$,

$$(12) \qquad \int_0^\infty \frac{dx}{x} = \infty, \qquad \int_0^\infty \cos bx \frac{dx}{x} = \infty, \qquad \int_0^\infty \sin bx \frac{dx}{x} = \frac{\pi}{2}.$$

De plus, comme on a, pour des valeurs positives de b (*voir* la trente-deuxième Leçon),

$$\int_0^\infty z^{b-1} e^{-z(1+x)}\,dz = \frac{\Gamma(b)}{(1+x)^b}$$

et, par suite,

$$\frac{x^{a-1}}{(1+x)^b} = \frac{1}{\Gamma(b)} \int_0^\infty x^{a-1} e^{-zx} z^{b-1} e^{-z}\,dz,$$

on en conclura, en supposant a et b positifs, ainsi que $b - a$,

$$(13) \qquad \int_0^\infty \frac{x^{a-1}\,dx}{(1+x)^b} = \frac{\Gamma(a)}{\Gamma(b)} \int_0^\infty z^{b-a-1} e^{-z}\,dz = \frac{\Gamma(a)\,\Gamma(b-a)}{\Gamma(b)};$$

puis en faisant $b = 1$, prenant pour a un nombre de la forme $\frac{2m+1}{2n}$, et ayant égard à l'équation $\Gamma(1) = 1$, on trouvera [*voir* la formule (8), trente-deuxième Leçon]

$$(14) \qquad \begin{cases} \qquad\qquad \Gamma(a)\,\Gamma(1-a) = \dfrac{\pi}{\sin a\pi}, \\ [\Gamma(\tfrac{1}{2})]^2 = \pi, \quad \Gamma(\tfrac{1}{2}) = \pi^{\frac{1}{2}} = \displaystyle\int_0^\infty z^{-\frac{1}{2}} e^{-z}\,dz = \int_{-\infty}^\infty e^{-x^2}\,dx. \end{cases}$$

Soient maintenant $\varphi(x,y)$, $\chi(x,y)$ deux fonctions propres à vérifier l'équation

$$(15) \qquad \frac{d\varphi(x,y)}{dy} = \frac{d\chi(x,y)}{dx}.$$

Si l'on substitue successivement les deux membres de cette équation à la place de $f(x,y)$ dans la formule (6), on obtiendra la suivante :

$$(16) \qquad \int_{x_0}^x [\varphi(x,y) - \varphi(x,y_0)]\,dx = \int_{y_0}^y [\chi(x,y) - \chi(x_0,y)]\,dy.$$

Celle-ci subsiste toutes les fois que les fonctions $\varphi(x,y)$, $\chi(x,y)$ restent l'une et l'autre finies et continues par rapport aux variables x et y, entre les limites des intégrations.

Concevons à présent que l'on cherche une fonction de u propre à vérifier l'équation

$$(17) \qquad du = \varphi(x,y)\,dx + \chi(x,y)\,dy$$

ou, ce qui revient au même, les deux suivantes :

$$(18) \qquad \frac{du}{dx} = \varphi(x,y),$$

$$(19) \qquad \frac{du}{dy} = \chi(x,y).$$

On ne pourra, évidemment, y parvenir que dans le cas où la formule (15), dont chaque membre sera équivalent à $\frac{d^2 u}{dx\,dy}$, se trouvera satisfaite. J'ajoute que, en supposant cette condition remplie, on résoudra facilement la question proposée. En effet, soient x_0 et y_0 des valeurs particulières de x, y, et $\mathcal{C}$ une constante arbitraire. Pour vérifier l'équation (18), il suffira de prendre

$$u = \int_{x_0}^{x} \varphi(x, y)\,dx + v, \tag{20}$$

v désignant une fonction arbitraire de la variable y; et, comme on tire de la formule (20)

$$\begin{aligned}\frac{du}{dy} = \int_{x_0}^{x} \frac{d\varphi(x, y)}{dy}\,dx + \frac{dv}{dy} &= \int_{x_0}^{x} \frac{d\chi(x, y)}{dx}\,dx + \frac{dv}{dy} \\ &= \chi(x, y) - \chi(x_0, y) + \frac{dv}{dy},\end{aligned}$$

il est clair qu'on vérifiera en outre l'équation (19) si l'on pose

$$\frac{dv}{dy} - \chi(x_0, y) = 0, \qquad v = \int \chi(x_0, y)\,dy = \int_{y_0}^{y} \chi(x_0, y)\,dy + \mathcal{C}. \tag{21}$$

Par conséquent, la valeur générale de u sera

$$\left\{\begin{aligned} u &= \int_{x_0}^{x} \varphi(x, y)\,dx + \int \chi(x_0, y)\,dy \\ &= \int_{x_0}^{x} \varphi(x, y)\,dx + \int_{y_0}^{y} \chi(x_0, y)\,dy + \mathcal{C}.\end{aligned}\right. \tag{22}$$

Lorsque, dans les équations précédentes, on échange entre elles les variables x, y, on obtient une seconde valeur de u qui s'accorde évidemment avec la première, en vertu de la formule (16).

On intégrerait avec la même facilité la différentielle d'une fonction de trois, quatre, ... variables indépendantes, et l'on prouverait, par

exemple, que, si les conditions

$$\left\{\begin{aligned} \frac{d\chi(x, y, z)}{dz} &= \frac{d\psi(x, y, z)}{dy}, \\ \frac{d\psi(x, y, z)}{dx} &= \frac{d\varphi(x, y, z)}{dz}, \\ \frac{d\varphi(x, y, z)}{dy} &= \frac{d\chi(x, y, z)}{dx}\end{aligned}\right. \tag{23}$$

se trouvent remplies, la valeur générale de u propre à vérifier l'équation

$$du = \varphi(x, y, z)\,dx + \chi(x, y, z)\,dy + \psi(x, y, z)\,dz \tag{24}$$

sera

$$u = \int_{x_0}^{x} \varphi(x, y, z)\,dx + \int_{y_0}^{y} \chi(x_0, y, z)\,dy + \int_{z_0}^{z} \psi(x_0, y_0, z)\,dz + \mathcal{C}, \tag{25}$$

x_0, y_0, z_0 désignant des valeurs particulières des variables x, y, z.

TRENTE-QUATRIÈME LEÇON.

COMPARAISON DES DEUX ESPÈCES D'INTÉGRALES SIMPLES QUI RÉSULTENT DANS CERTAINS CAS D'UNE INTÉGRATION DOUBLE.

Concevons que l'équation (15) de la Leçon précédente soit vérifiée. Si l'on intègre deux fois cette équation, savoir une fois par rapport à x entre les limites x_0, X, et une fois par rapport à y entre les limites y_0, Y, on trouvera

$$\int_{x_0}^{X} [\varphi(x, Y) - \varphi(x, y_0)]\,dx = \int_{y_0}^{Y} [\chi(X, y) - \chi(x_0, y)]\,dy. \tag{1}$$

Cette dernière formule établit une relation digne de remarque entre les intégrales qu'elle renferme. Mais elle cesse d'être exacte, lorsque les fonctions $\varphi(x, y)$, $\chi(x, y)$ deviennent infinies pour un ou plusieurs systèmes de valeurs de x et de y compris entre les limites $x = x_0$, $x = X$, $y = y_0$, $y = Y$. Imaginons d'abord que ces systèmes se réduisent à un seul, savoir $x = a$, $y = b$. Dans ce cas particulier, les expressions déduites par une intégration double des deux membres de la formule (15) (trente-troisième Leçon) pourront différer l'une de l'autre. Mais elles redeviendront toujours égales, si dans le calcul on a eu soin de remplacer chaque intégrale relative à x par sa valeur principale. Cette observation suffit pour montrer de quelle manière l'équation (1) devra être modifiée. En effet, si l'on désigne par ε un nombre infiniment petit, on trouvera, dans l'hypothèse admise,

$$\left\{\begin{aligned} &\int_{x_0}^{a-\varepsilon} [\varphi(x, Y) - \varphi(x, y_0)]\,dx + \int_{a+\varepsilon}^{X} [\varphi(x, Y) - \varphi(x, y_0)]\,dx \\ &\quad = \int_{y_0}^{Y} [\chi(X, y) - \chi(a+\varepsilon, y) + \chi(a-\varepsilon, y) - \chi(x_0, y)]\,dy; \end{aligned}\right. \tag{2}$$

puis l'on en conclura, en faisant converger ε vers la limite zéro,

$$\int_{x_0}^{X} [\varphi(x, Y) - \varphi(x, y_0)]\,dx = \int_{x_0}^{X} [\chi(X, y) - \chi(x_0, y)]\,dy - \Delta, \tag{3}$$

la valeur de Δ étant déterminée par la formule

$$\Delta = \lim \int_{y_0}^{Y} [\chi(a+\varepsilon, y) - \chi(a-\varepsilon, y)]\,dy. \tag{4}$$

Dans le cas général, Δ sera la somme de plusieurs termes semblables au second membre de l'équation (4).

Exemple. — Si l'on pose

$$\varphi(x, y) = \frac{-y}{x^2+y^2}, \qquad \chi(x, y) = \frac{x}{x^2+y^2},$$
$$x_0 = -1, \qquad X = 1,$$
$$y_0 = -1, \qquad Y = 1,$$

les équations (3) et (4) donneront

$$\int_{-1}^{1} \frac{-2\,dx}{1+x^2} = \int_{-1}^{1} \frac{2\,dy}{1+y^2} - \Delta, \qquad \Delta = \lim \int_{-1}^{1} \frac{2\varepsilon\,dy}{\varepsilon^2+y^2} = 2\pi.$$

Il est facile de voir que les fonctions $\varphi(x, y)$, $\chi(x, y)$ vérifieront l'équation (15) de la trente-troisième Leçon, si l'on a

$$\varphi(x, y)\,dx + \chi(x, y)\,dy = f(u)\,du$$

et, par suite,

$$\varphi(x, y) = f(u)\frac{du}{dx}, \qquad \chi(x, y) = f(u)\frac{du}{dy}, \tag{5}$$

u désignant une fonction quelconque des variables x, y.

Il est encore facile de s'assurer que les formules (1) et (3) subsistent sous les conditions énoncées, dans le cas même où les fonctions $\varphi(x, y)$, $\chi(x, y)$ deviennent imaginaires. Concevons, par exemple, que, la fonction $f(x)$ étant algébrique, on pose

$$u = x + y\sqrt{-1}.$$

On tirera des équations (5)

$$\varphi(x,y)=f(x+y\sqrt{-1}),\qquad \chi(x,y)=\sqrt{-1}\,f(x+y\sqrt{-1}),$$

et de la formule (3)

$$(6)\qquad \left\{\begin{aligned}&\int_{x_0}^{X}\left[f(x+Y\sqrt{-1})-f(x+y_0\sqrt{-1})\right]dx\\ &\qquad=\sqrt{-1}\int_{y_0}^{Y}\left[f(X+y\sqrt{-1})-f(x_0+y\sqrt{-1})\right]dy-\Delta.\end{aligned}\right.$$

Dans cette dernière, Δ s'évanouira si la fonction $f(x+y\sqrt{-1})$ reste finie et continue pour toutes les valeurs de x et de y comprises entre les limites $x=x_0$, $x=X$, $y=y_0$, $y=Y$. Mais, si, entre ces mêmes limites, la fonction $f(x+y\sqrt{-1})$ devient infinie pour le système de valeurs $x=a$, $y=b$, alors la valeur de Δ sera donnée par l'équation (4); et, si l'on fait, pour abréger,

$$(7)\qquad \left\{\begin{aligned}&(x-a-b\sqrt{-1})\,f(x)=\mathcal{F}(x),\\ &y=b+\varepsilon z,\qquad z_0=-\frac{b-y_0}{\varepsilon},\qquad Z=\frac{Y-b}{\varepsilon},\end{aligned}\right.$$

on trouvera

$$(8)\qquad \left\{\begin{aligned}\Delta&=\sqrt{-1}\lim\int_{y_0}^{Y}\left[f(a+\varepsilon+y\sqrt{-1})-f(a-\varepsilon+y\sqrt{-1})\right]dy\\ &=\sqrt{-1}\lim\int_{z_0}^{Z}\left\{\frac{\mathcal{F}[a+\varepsilon+(b+\varepsilon z)\sqrt{-1}]}{1+z\sqrt{-1}}\right.\\ &\qquad\qquad\left.-\frac{\mathcal{F}[a-\varepsilon+(b+\varepsilon z)\sqrt{-1}]}{-1+z\sqrt{-1}}\right\}dz.\end{aligned}\right.$$

Soient maintenant

$$(9)\qquad \frac{\mathcal{F}[a+\varepsilon+(b+\varepsilon z)\sqrt{-1}]}{1+z\sqrt{-1}}-\frac{\mathcal{F}[a-\varepsilon+(b+\varepsilon z)\sqrt{-1}]}{-1+z\sqrt{-1}}=\varpi(\varepsilon)+\sqrt{-1}\,\psi(\varepsilon),$$

$$(10)\qquad \frac{\varpi(\varepsilon)-\varpi(0)}{\varepsilon}=\alpha,\qquad \frac{\psi(\varepsilon)-\psi(0)}{\varepsilon}=\beta,$$

$\varpi(\varepsilon)$, $\psi(\varepsilon)$ et par suite α, β étant des quantités réelles. Supposons

d'ailleurs que Y surpasse y_0 et que les fonctions $\mathcal{F}(x+y\sqrt{-1})$, $\mathcal{F}'(x+y\sqrt{-1})$ restent finies et continues par rapport aux variables x et y entre les limites x_0, X, y_0, Y. Comme on aura, en vertu de la formule (9),

$$\begin{aligned}\varpi'(\varepsilon)+\sqrt{-1}\,\psi'(\varepsilon)&=\mathcal{F}'[a+\varepsilon+(b+\varepsilon z)\sqrt{-1}]-\mathcal{F}'[a-\varepsilon+(b+\varepsilon z)\sqrt{-1}]\\ &=\mathcal{F}'(a+\varepsilon+y\sqrt{-1})-\mathcal{F}'(a-\varepsilon+y\sqrt{-1}),\end{aligned}$$

il est clair que les valeurs numériques des quantités $\varpi'(\varepsilon)$, $\psi'(\varepsilon)$ resteront toujours très petites aussi bien que celles des deux quantités α, β dont chacune peut être présentée sous la forme $\varpi'(\theta\varepsilon)$ ou $\psi'(\theta\varepsilon)$, θ désignant un nombre inférieur à l'unité. Cela posé, on trouvera

$$\lim\int_{z_0}^{Z}\varepsilon(\alpha+\beta\sqrt{-1})\,dz\qquad=\lim\int_{y_0}^{Y}(\alpha+\beta\sqrt{-1})\,dy=0,$$

$$\lim\int_{z_0}^{Z}\left[\varpi(\varepsilon)+\sqrt{-1}\,\psi(\varepsilon)\right]dz=\int_{z_0}^{Z}\left[\varpi(0)+\sqrt{-1}\,\psi(0)\right]dz,$$

puis, en faisant $\mathfrak{f}=\mathcal{F}(a+b\sqrt{-1})=\lim\varepsilon f(a+b\sqrt{-1}+\varepsilon)$,

$$(11)\qquad \Delta=\sqrt{-1}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\varpi(0)+\sqrt{-1}\,\psi(0)\right]dz=2\mathfrak{f}\sqrt{-1}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dz}{1+z^2}=2\pi\mathfrak{f}\sqrt{-1}.$$

Si l'on avait $y_0=b$ ou $Y=b$, l'intégrale relative à z dans la formule (11) ne devrait plus être prise qu'entre les limites $z=0$, $z=\infty$ ou bien entre les limites $z=-\infty$, $z=0$, et par suite la valeur de Δ se réduirait à $\pi\mathfrak{f}\sqrt{-1}$. Dans la même hypothèse, le premier membre de l'équation (6) serait la valeur principale d'une intégrale indéterminée. Il est encore essentiel d'observer que $a+b\sqrt{-1}$ représente une racine de l'équation

$$(12)\qquad f(x)=\pm\infty.$$

Si cette équation admettait plusieurs racines dans lesquelles les parties fussent comprises entre les limites x_0, X, et les coefficients de $\sqrt{-1}$ entre les limites y_0, Y; alors, en désignant par x_1, x_2, $\ldots$,

x_m ces mêmes racines et par $\mathfrak{f}_1, \mathfrak{f}_2, \ldots, \mathfrak{f}_m$ les véritables valeurs que reçoivent les produits

$$(x-x_1)f(x), \quad (x-x_2)f(x), \quad \ldots, \quad (x-x_m)f(x),$$

tandis que leurs premiers facteurs s'évanouissent, on trouverait

$$\Delta = 2\pi(\mathfrak{f}_1+\mathfrak{f}_2+\ldots+\mathfrak{f}_m)\sqrt{-1}. \tag{13}$$

Ajoutons que chacun des termes $\mathfrak{f}_1, \mathfrak{f}_2, \ldots, \mathfrak{f}_m$ doit être réduit à moitié toutes les fois que, dans la racine correspondante, le coefficient de $\sqrt{-1}$ coïncide avec l'une des limites y_0, Y.

Lorsque la fonction $f(x+y\sqrt{-1})$ s'évanouit : 1° pour $x = \pm\infty$, quel que soit y; 2° pour $y=\infty$, quel que soit x, alors, en prenant $x_0 = -\infty$, $X=+\infty$, $y_0 = 0$, $Y=\infty$, on tire de la formule (6)

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \Delta. \tag{14}$$

Lorsque la fonction $f(x)$ se présente sous la forme $\frac{\mathfrak{f}(x)}{F(x)}$ et que ceux des termes $\mathfrak{f}_1, \mathfrak{f}_2, \ldots, \mathfrak{f}_m$, qui ne s'évanouissent pas correspondent tous à des racines de l'équation

$$F(x) = 0, \tag{15}$$

l'expression Δ peut évidemment s'écrire comme il suit :

$$\Delta = 2\pi\left[\frac{\mathfrak{f}(x_1)}{F'(x_1)} + \frac{\mathfrak{f}(x_2)}{F'(x_2)} + \ldots + \frac{\mathfrak{f}(x_m)}{F'(x_m)}\right]\sqrt{-1}, \tag{16}$$

et l'équation (14) devient

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathfrak{f}(x)}{F(x)}\,dx = 2\pi\left[\frac{\mathfrak{f}(x_1)}{F'(x_1)} + \frac{\mathfrak{f}(x_2)}{F'(x_2)} + \ldots + \frac{\mathfrak{f}(x_m)}{F'(x_m)}\right]\sqrt{-1}. \tag{17}$$

Dans le second membre de celle-ci, on doit seulement admettre les racines réelles de l'équation (15) avec les racines imaginaires dans lesquelles le coefficient de $\sqrt{-1}$ est positif, en ayant soin de réduire à moitié tous les termes qui correspondent à des racines réelles. Cela

posé, on trouvera, pour $F(x) = 1 + x^2$, $x_1 = \sqrt{-1}$,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathfrak{f}(x)}{1+x^2}\,dx = \pi\,\mathfrak{f}(\sqrt{-1}), \tag{18}$$

et, pour $F(x) = 1 - x^2$, $x_1 = -1$, $x_2 = +1$,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathfrak{f}(x)}{1-x^2}\,dx = \frac{\pi}{2}[\mathfrak{f}(-1) - \mathfrak{f}(1)]\sqrt{-1}. \tag{19}$$

Cette dernière formule donne simplement la valeur principale de l'intégrale qu'elle renferme.

Exemples. — Soit μ un nombre compris entre 0 et 2. Si l'on pose

$$\mathfrak{f}(x) = (-x\sqrt{-1})^{\mu-1},$$

l'expression imaginaire

$$\mathfrak{f}(x+y\sqrt{-1}) = (y - x\sqrt{-1})^{\mu-1}$$

conservera une valeur unique et déterminée tant que y restera positive (*voir* l'*Analyse algébrique*, Chap. VII) [1], et l'on tirera des formules (18) et (19)

$$\left\{\begin{aligned} &\int_{-\infty}^{\infty} \frac{(-x\sqrt{-1})^{\mu-1}}{1+x^2}\,dx = [(-\sqrt{-1})^{\mu-1} + (\sqrt{-1})^{\mu-1}], \\ &\int_0^{\infty} \frac{x^{\mu-1}\,dx}{1+x^2} = \pi, \qquad \int_0^{\infty} \frac{x^{\mu-1}\,dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{2\sin(\frac{1}{2}\mu\pi)}, \end{aligned}\right. \tag{20}$$

$$\left\{\begin{aligned} &\int_{-\infty}^{\infty} \frac{(-x\sqrt{-1})^{\mu-1}}{1-x^2}\,dx = \frac{\pi}{2}[(\sqrt{-1})^{\mu} + (-\sqrt{-1})^{\mu}], \\ &\int_0^{\infty} \frac{x^{\mu-1}\,dx}{1-x^2} = \frac{\pi\cos(\frac{1}{2}\mu\pi)}{2\sin(\frac{1}{2}\mu\pi)} = \frac{\pi}{2\,\mathrm{tang}(\frac{1}{2}\mu\pi)}. \end{aligned}\right. \tag{21}$$

Si, dans la dernière des équations (20) et la dernière des équations (21), l'on remplace x^2 par z et μ par $2a$, on reproduira les formules (8) et (9) de la trente-deuxième Leçon, qui se trouveront ainsi démontrées, avec la première des équations (14) de la trente-troisième, pour toutes les valeurs de a comprises entre les limites 0 et 1.

[1] *Œuvres de Cauchy*, S. II, T. III, p. 153.

TRENTE-CINQUIÈME LEÇON.

DIFFÉRENTIELLE D'UNE INTÉGRALE DÉFINIE PAR RAPPORT A UNE VARIABLE COMPRISE DANS LA FONCTION SOUS LE SIGNE $\int$, ET DANS LES LIMITES DE L'INTÉGRATION. INTÉGRALES DES DIVERS ORDRES POUR LES FONCTIONS D'UNE SEULE VARIABLE.

Soit

$$A = \int_{z_0}^{Z} f(x, z)\, dz \tag{1}$$

une intégrale définie relative à z. Si, dans cette intégrale, on fait varier séparément, et indépendamment l'une de l'autre, les trois quantités Z, z_0, x, on trouvera, en vertu des formules (5) (vingt-sixième Leçon), et de la formule (2) (trente-troisième Leçon),

$$\frac{dA}{dZ} = f(x, Z), \qquad \frac{dA}{dz_0} = -f(x, z_0), \qquad \frac{dA}{dx} = \int_{z_0}^{Z} \frac{df(x, z)}{dx}\, dz. \tag{2}$$

Par suite, si les deux quantités z_0, Z deviennent fonctions de la variable x, on aura, en considérant A comme une fonction de cette seule variable,

$$\frac{dA}{dx} = \int_{z_0}^{Z} \frac{df(x, z)}{dx}\, dz + f(x, Z)\frac{dZ}{dx} - f(x, z_0)\frac{dz_0}{dx}. \tag{3}$$

Dans le cas particulier où z_0 se réduit à une constante, et $f(x, Z)$ à zéro, on a simplement

$$\frac{d}{dx}\int_{z_0}^{Z} f(x, z)\, dz = \int_{z_0}^{Z} \frac{df(x, z)}{dx}\, dz. \tag{4}$$

Exemple. — Soient $z_0 = x_0$ (x_0 désignant une valeur particulière et constante de x), $Z = x$, et $f(x, z) = (x - z)^m f(z)$; on obtiendra

la formule

$$\frac{d}{dx}\int_{x_0}^{x} (x - z)^m f(z)\, dz = m\int_{x_0}^{x} (x - z)^{m-1} f(z)\, dz, \tag{5}$$

de laquelle on conclura

$$\int_{x_0}^{x}\int_{x_0}^{x} (x - z)^{m-1} f(z)\, dz\, dx = \frac{1}{m}\int_{x_0}^{x} (x - z)^m f(z)\, dz \tag{6}$$

et

$$\int\int_{x_0}^{x} (x - z)^{m-1} f(z)\, dz\, dx = \frac{1}{m}\int_{x_0}^{x} (x - z)^m f(z)\, dz + \mathfrak{C}, \tag{7}$$

$\mathfrak{C}$ étant une constante arbitraire. Si m se réduit à l'unité, la formule (6) donnera

$$\int_{x_0}^{x}\int_{x_0}^{x} f(z)\, dz\, dx = \int_{x_0}^{x} (x - z) f(z)\, dz. \tag{8}$$

Il est maintenant facile de résoudre la question suivante :

PROBLÈME. — *Trouver la valeur générale de y propre à vérifier l'équation*

$$\frac{d^n y}{dx^n} = f(x). \tag{9}$$

Solution. — Comme on peut mettre l'équation (9) sous la forme

$$d\left(\frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}}\right) = f(x)\, dx,$$

on en conclura, en intégrant les deux membres par rapport à x,

$$\frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} = \int f(x)\, dx = \int_{x_0}^{x} f(x)\, dx + \mathfrak{C}$$

ou, ce qui revient au même,

$$\frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} = \int_{x_0}^{x} f(z)\, dz + \mathfrak{C}. \tag{10}$$

En intégrant de nouveau, et plusieurs fois de suite, par rapport à la variable x, entre les limites x_0, x, ayant égard aux formules (6) et (8), puis ajoutant au résultat de chaque intégration une nouvelle constante arbitraire, on trouvera successivement

$$(11)\quad \begin{cases} \dfrac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}} = \displaystyle\int_{x_0}^{x} (x-z) f(z)\, dz + \mathcal{C}(x-x_0) + \mathcal{C}_1, \\ \dfrac{d^{n-3}y}{dx^{n-3}} = \displaystyle\int_{x_0}^{x} \frac{(x-z)^2}{1.2} f(z)\, dz + \mathcal{C}\frac{(x-x_0)^2}{1.2} + \mathcal{C}_1(x-x_0) + \mathcal{C}_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ \dfrac{dy}{dx} = \displaystyle\int_{x_0}^{x} \frac{(x-z)^{n-2}}{1.2.3\ldots(n-2)} f(z)\, dz + \mathcal{C}\frac{(x-x_0)^{n-2}}{1.2\ldots(n-2)} \\ \qquad + \mathcal{C}_1\dfrac{(x-x_0)^{n-3}}{1.2\ldots(n-3)} + \mathcal{C}_2\dfrac{(x-x_0)^{n-4}}{1.2\ldots(n-4)} + \ldots + \mathcal{C}_{n-1} \end{cases}$$

et enfin

$$(12)\quad \begin{cases} y = \displaystyle\int_{x_0}^{x} \frac{(x-z)^{n-1}}{1.2.3\ldots(n-1)} f(z)\, dz + \mathcal{C}\frac{(x-x_0)^{n-1}}{1.2\ldots(n-1)} \\ \qquad + \mathcal{C}_1\dfrac{(x-x_0)^{n-2}}{1.2\ldots(n-2)} + \mathcal{C}_2\dfrac{(x-x_0)^{n-3}}{1.2\ldots(n-3)} + \ldots + \mathcal{C}_{n-2}(x-x_0) + \mathcal{C}_{n-1}, \end{cases}$$

$\mathcal{C}$, $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$, $\ldots$, $\mathcal{C}_{n-1}$ étant les diverses constantes arbitraires. Il importe d'observer que l'intégrale définie comprise dans le second membre de l'équation (12) peut être aisément transformée à l'aide de la formule (17) (vingt-deuxième Leçon). En effet, si dans cette formule on remplace x par z, et X par x, on en tirera

$$(13)\quad \int_{x_0}^{x} f(z)\, dz = \int_{0}^{x-x_0} f(x_0+z)\, dz = \int_{0}^{x-x_0} f(x-z)\, dz$$

et, par suite,

$$(14)\quad \begin{cases} \displaystyle\int_{x_0}^{x} \frac{(x-z)^{n-1}}{1.2.3\ldots(n-1)} f(z)\, dz = \int_{0}^{x-x_0} \frac{(x-x_0-z)^{n-1}}{1.2.3\ldots(n-1)} f(x_0+z)\, dz \\ \qquad\qquad = \displaystyle\int_{0}^{x-x_0} \frac{z^{n-1}}{1.2.3\ldots(n-1)} f(x-z)\, dz. \end{cases}$$

Si l'on prenait, pour plus de simplicité, $x_0 = 0$, la valeur de y,

donnée par l'équation (12), se réduirait à

$$(15)\quad \begin{cases} y = \displaystyle\int_{0}^{x} \frac{(x-z)^{n-1}}{1.2.3\ldots(n-1)} f(z)\, dz + \mathcal{C}\frac{x^{n-1}}{1.2\ldots(n-1)} \\ \qquad + \mathcal{C}_1\dfrac{x^{n-2}}{1.2\ldots(n-2)} + \mathcal{C}_2\dfrac{x^{n-3}}{1.2\ldots(n-3)} + \ldots + \mathcal{C}_{n-2}x + \mathcal{C}_{n-1}, \end{cases}$$

et la formule (14) deviendrait

$$(16)\quad \int_{0}^{x} \frac{(x-z)^{n-1}}{1.2.3\ldots(n-1)} f(z)\, dz = \int_{0}^{x} \frac{z^{n-1}}{1.2.3\ldots(n-1)} f(x-z)\, dz.$$

Lorsqu'on se sert d'intégrales indéfinies, et que l'on se contente d'indiquer les intégrations successives, les valeurs des fonctions

$$\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}},\quad \frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}},\quad \frac{d^{n-3}y}{dx^{n-3}},\quad \ldots,\quad y,$$

tirées de l'équation (9), se présentent sous la forme

$$\int f(x)\, dx,\quad \int.\int f(x)\, dx.dx,\quad \int.\int.\int f(x)\, dx.dx.dx,\quad \ldots,$$
$$\int.\int.\int\ldots\int f(x)\, dx\ldots dx.dx.dx.$$

Ces dernières expressions sont ce que nous appellerons des *intégrales* du premier, du second, du troisième, … ordre, et enfin de l'*ordre* n, relativement à la variable x. Pour abréger, nous les désignerons dorénavant par les notations

$$(17)\quad \int f(x)\, dx,\ \iint f(x)\, dx^2,\ \iiint f(x)\, dx^3,\ \ldots,\ \iint\ldots f(x)\, dx^n,$$

auxquelles nous substituerons les suivantes

$$(18)\quad \begin{cases} \displaystyle\int_{x_0}^{x} f(x)\, dx,\quad \int_{x_0}^{x}\int_{x_0}^{x} f(x)\, dx^2,\quad \int_{x_0}^{x}\int_{x_0}^{x}\int_{x_0}^{x} f(x)\, dx^3,\quad \ldots, \\ \qquad\qquad \displaystyle\int_{x_0}^{x}\int_{x_0}^{x}\ldots f(x)\, dx^n, \end{cases}$$

quand nous supposerons chaque intégration relative à x effectuée entre les limites x_0, x. Cela posé, on aura évidemment

$$(19)\quad \left\{\begin{aligned} \int_{x_0}^{x}\int_{x_0}^{x}\ldots f(x)\,dx^n &= \int_{x_0}^{x}\frac{(x-z)^{n-1}}{1.2.3\ldots(n-1)}f(z)\,dz \\ &= \frac{1}{1.2\ldots(n-1)}\left[x^{n-1}\int_{x_0}^{x}f(z)\,dz-\frac{n-1}{1}x^{n-2}\int_{x_0}^{x}z\,f(z)\,dz\right. \\ &\qquad \left.+\frac{(n-1)(n-2)}{1.2}\int_{x_0}^{x}z^2 f(z)\,dz-\ldots\pm\int_{x_0}^{x}z^{n-1}f(z)\,dz\right] \end{aligned}\right.$$

ou, ce qui revient au même,

$$(20)\quad \left\{\begin{aligned} &\int_{x_0}^{x}\int_{x_0}^{x}\ldots f(x)\,dx^n \\ &= \frac{1}{1.2\ldots(n-1)}\left[x^{n-1}\int_{x_0}^{x}f(x)\,dx-\frac{n-1}{1}x^{n-2}\int_{x_0}^{x}x^2 f(x)\,dx-\ldots\pm\int_{x_0}^{x}x^{n-1}f(x)\,dx\right]. \end{aligned}\right.$$

On peut vérifier directement la formule (20), à l'aide de plusieurs intégrations par parties.

Soit maintenant $F(x)$ une valeur particulière y propre à vérifier l'équation (9), en sorte qu'on ait

$$(21)\qquad F^{(n)}(x)=f(x).$$

Si la fonction $F(x)$ et ses dérivées successives, jusqu'à celle de l'ordre n, restent continues entre les limites x_0, x, alors, en posant $x=x_0$ dans les formules (10), (11) et (12), on trouvera

$$(22)\quad \left\{\begin{array}{lll} \Theta=F^{(n-1)}(x_0), & \Theta_1=F^{(n-2)}(x_0), & \Theta_2=F^{(n-3)}(x_0), \\ \quad\ldots, & \Theta_{n-2}=F'(x_0), & \Theta_{n-1}=F(x_0), \end{array}\right.$$

et la formule (12) donnera

$$(23)\quad \left\{\begin{aligned} F(x) &= F(x_0)+\frac{x-x_0}{1}F'(x_0)+\ldots \\ &\quad +\frac{(x-x_0)^{n-1}}{1.2\ldots(n-1)}F^{(n-1)}(x_0)+\int_{x_0}^{x}\frac{(x-z)^n}{1.2.3\ldots n}f(z)\,dz. \end{aligned}\right.$$

De cette dernière, combinée avec l'équation (19), on déduit la sui-

vante

$$(24)\quad \left\{\begin{aligned} \int_{x_0}^{x}\int_{x_0}^{x}\ldots f(x)\,dx^n &= F(x)-F(x_0)-\frac{x-x_0}{1.2}F'(x_0) \\ &\quad -\frac{(x-x_0)^2}{1.2}F''(x_0)-\ldots-\frac{(x-x_0)^{n-1}}{1.2.3\ldots(n-1)}F^{n-1}(x_0), \end{aligned}\right.$$

qui renferme, comme cas particulier, la formule (17) de la vingt-sixième Leçon. Lorsqu'on suppose $x_0=0$, l'équation (24) se réduit à

$$(25)\quad \left\{\begin{aligned} \int_{0}^{x}\int_{0}^{x}\ldots f(x)\,dx^n &= F(x)-F(0)-\frac{x}{1}F'(0) \\ &\quad -\frac{x^2}{1.2}F''(0)-\ldots-\frac{x^{n-1}}{1.2.3\ldots(n-1)}F^{(n-1)}(0). \end{aligned}\right.$$

Exemple. — Soit $F(x)=e^x$; on aura

$$f(x)=F^{(n)}(x)=e^x$$

et, par conséquent,

$$(26)\quad \left\{\begin{aligned} \int_{0}^{x}\int_{0}^{x}\ldots e^x\,dx^n &= e^x-1-\frac{x}{1}-\frac{x^2}{1.2}-\ldots-\frac{x^{n-1}}{1.2.3\ldots(n-1)} \\ &= \int_{0}^{x}\frac{(x-z)^{n-1}}{1.2.3\ldots(n-1)}e^z\,dz. \end{aligned}\right.$$

TRENTE-SIXIÈME LEÇON.

TRANSFORMATION DE FONCTIONS QUELCONQUES DE x OU DE $x+h$ EN FONCTIONS ENTIÈRES DE x OU DE h AUXQUELLES S'AJOUTENT DES INTÉGRALES DÉFINIES. EXPRESSIONS ÉQUIVALENTES A CES MÊMES INTÉGRALES.

Si, dans l'équation (23) de la Leçon précédente, on remplace $f(z)$ par sa valeur $F^{(n)}(z)$, tirée de la formule (21), on trouvera, sous les mêmes conditions,

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned} F(x) &= F(x_0) + \frac{x-x_0}{1}F'(x_0) + \frac{(x-x_0)^2}{1.2}F''(x_0) + \ldots \\ &\quad + \frac{(x-x_0)^{n-1}}{1.2\ldots(n-1)}F^{(n-1)}(x_0) + \int_{x_0}^{x}\frac{(x-z)^{n-1}}{1.2.3\ldots(n-1)}F^{(n)}(z)\,dz, \end{aligned}\right.$$

puis, en posant $x_0 = 0$,

$$(2)\quad \left\{\begin{aligned} F(x) &= F(0) + \frac{x}{1}F'(0) + \frac{x^2}{1.2}F''(0) + \ldots \\ &\quad + \frac{x^{n-1}}{1.2.3\ldots(n-1)}F^{(n-1)}(0) + \int_{0}^{x}\frac{(x-z)^{n-1}}{1.2.3\ldots(n-1)}F^{(n)}(z)\,dz. \end{aligned}\right.$$

Si l'on fait dans celle-ci $F(x) = f(x+h)$, et qu'ensuite on échange entre elles les deux lettres x et h, on obtiendra l'équation

$$(3)\quad \left\{\begin{aligned} f(x+h) &= f(x) + \frac{h}{1}f'(x) + \frac{h^2}{1.2}f''(x) + \ldots \\ &\quad + \frac{h^{n-1}}{1.2.3\ldots(n-1)}f^{(n-1)}(x) \\ &\quad + \int_0^h \frac{(h-z)^{n-1}}{1.2.3\ldots(n-1)}f^{(n)}(x+z)\,dz, \end{aligned}\right.$$

dans laquelle le dernier terme du second membre peut être présenté sous plusieurs formes différentes, puisqu'on a, en vertu des formules (14) et (19) de la trente-cinquième Leçon,

$$(4)\quad \left\{\begin{aligned} &\int_0^h \frac{(h-z)^{n-1}}{1.2.3\ldots(n-1)}f^{(n)}(x+z)\,dz \\ &= \int_0^h \frac{z^{n-1}}{1.2\ldots(n-1)}f^{(n)}(x+h-z)\,dz \\ &= \int_x^{x+h} \frac{(x+h-z)^{n-1}}{1.2.3\ldots(n-1)}f^{(n)}(z)\,dz \\ &= \int_0^h \int_0^h \ldots f^{(n)}(x+z)\,dz^n. \end{aligned}\right.$$

L'équation (3) suppose que les fonctions $f(x+z)$, $f'(x+z)$, ..., $f^{(n)}(x+z)$ restent continues entre les limites $z=0$, $z=h$. On pourrait la déduire immédiatement de la formule (1) en prenant $x = x_0 + h$, puis remplaçant x_0 par x et F par f. Seulement le dernier terme du second membre serait alors la troisième des intégrales comprises dans la formule (4).

Au reste, on peut démontrer directement l'équation (3) à l'aide de plusieurs intégrations par parties, en opérant à peu près comme l'a fait M. de Prony dans un Mémoire publié en 1805. En effet, si, dans la formule (13) de la Leçon précédente, on remplace d'abord x par $x_0 + h$ et ensuite x_0 par x, on en tirera

$$(5)\quad \int_0^h f(x+z)\,dz = \int_0^h f(x+h-z)\,dz.$$

On aura donc, en conséquence,

$$(6)\quad f(x+h) - f(x) = \int_0^h f'(x+z)\,dz = \int_0^h f'(x+h-z)\,dz.$$

D'ailleurs, en intégrant par parties plusieurs fois de suite, on trouve

$$(7)\quad \left\{\begin{aligned}
&\int f'(x+h-z)\,dz\\
&=\frac{z}{1}f'(x+h-z)+\int\frac{z}{1}f''(x+h-z)\,dz\\
&=\frac{z}{1}f'(x+h-z)+\frac{z^2}{1.2}f''(x+h-z)+\int\frac{z^2}{1.2}f'''(x+h-z)\,dz\\
&=\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&=\frac{z}{1}f'(x+h-z)+\frac{z^2}{1.2}f''(x+h-z)+\ldots\\
&\qquad\qquad+\frac{z^{n-1}}{1.2\ldots(n-1)}f^{(n-1)}(x+h-z)\\
&\qquad\qquad+\int\frac{z^{n-1}}{1.2\ldots(n-1)}f^{(n)}(x+h-z)\,dz;
\end{aligned}\right.$$

puis, en supposant que chaque intégration soit effectuée entre les limites $z=0$, $z=h$, et que les fonctions $f(x+z)$, $f'(x+z)$, ..., $f^{(n)}(x+z)$ restent continues entre ces mêmes limites,

$$(8)\quad \left\{\begin{aligned}
\int_0^h f'(x+h-z)\,dz&=\frac{h}{1}f'(x)+\frac{h^2}{1.2}f''(x)+\ldots\\
&\quad+\frac{h^{n-1}}{1.2.3\ldots(n-1)}f^{(n-1)}(x)\\
&\quad+\int_0^h\frac{z^{n-1}}{1.2.3\ldots(n-1)}f^{(n)}(x+h-z)\,dz.
\end{aligned}\right.$$

Cela posé, on déduira évidemment de la formule (6) une équation qui s'accordera, en vertu de la formule (4), avec l'équation (3). La même méthode pourrait encore servir à établir directement l'équation (2).

Non seulement les intégrales renfermées dans les seconds membres des formules (2) et (3) peuvent être remplacées par plusieurs autres semblables à celles que comprend la formule (4), mais on doit encore conclure de l'équation (13) (vingt-troisième Leçon) qu'elles sont

équivalentes à deux produits de la forme

$$(9)\qquad F^{(n)}(\theta x)\int_0^x\frac{(x-z)^{n-1}}{1.2.3\ldots(n-1)}\,dz=\frac{x^n}{1.2.3\ldots n}F^{(n)}(\theta x),$$

$$(10)\qquad f^{(n)}(x+\theta h)\int_0^h\frac{(h-z)^{n-1}}{1.2.3\ldots(n-1)}\,dz=\frac{h^n}{1.2.3\ldots n}f^{(n)}(x+\theta h),$$

θ désignant un nombre inconnu qui peut varier d'un produit à l'autre en restant toujours inférieur à l'unité. On aura par suite

$$(11)\quad \left\{\begin{aligned}
F(x)&=F(0)+\frac{x}{1}F'(0)+\frac{x^2}{1.2}F''(0)+\ldots\\
&\quad+\frac{x^{n-1}}{1.2.3\ldots(n-1)}F^{(n-1)}(0)+\frac{x^n}{1.2.3\ldots n}F^{(n)}(\theta x),
\end{aligned}\right.$$

$$(12)\quad \left\{\begin{aligned}
f(x+h)&=f(x)+\frac{h}{1}f'(x)+\frac{h^2}{1.2}f''(x)+\ldots\\
&\quad+\frac{h^{n-1}}{1.2.3\ldots(n-1)}f^{(n-1)}(x)+\frac{h^n}{1.2.3\ldots n}f^{(n)}(x+\theta h).
\end{aligned}\right.$$

Il est essentiel d'observer que la fonction $F(x)$, avec ses dérivées successives, doit rester continue, dans la formule (11), entre les limites 0, x, et la fonction $f(x+z)$, avec ses dérivées successives, dans la formule (12), entre les limites $z=0$, $z=h$.

Soit maintenant $u=f(x,y,z,\ldots)$ une fonction de plusieurs variables indépendantes x, y, z, ..., et faisons

$$(13)\qquad F(\alpha)=f(x+\alpha\,dx,\ y+\alpha\,dy,\ z+\alpha\,dz,\ \ldots).$$

On tirera de la formule (11), en y remplaçant x par α, puis ayant égard aux principes établis dans la quatorzième Leçon,

$$(14)\quad \left\{\begin{aligned}
&f(x+\alpha\,dx,\ y+\alpha\,dy,\ z+\alpha\,dz,\ \ldots)\\
&\quad=u+\frac{\alpha}{1}du+\frac{\alpha^2}{1.2}d^2u+\ldots\\
&\qquad+\frac{\alpha^{n-1}}{1.2\ldots(n-1)}d^{n-1}u+\frac{\alpha^n}{1.2.3\ldots n}F^{(n)}(\theta\alpha).
\end{aligned}\right.$$

Si la quantité α devient infiniment petite, il en sera de même de la différence

$$F^{(n)}(\theta\alpha) - F^{(n)}(0) \quad \text{ou} \quad F^{(n)}(\theta\alpha) - d^n u,$$

et, en désignant par β cette différence, on trouvera

$$(15)\quad \left\{\begin{aligned} & f(x+\alpha\,dx, y+\alpha\,dy, z+\alpha\,dz, \ldots) \\ & \quad = u + \frac{\alpha}{1}du + \frac{\alpha^2}{1.2}d^2u + \ldots \\ & \qquad + \frac{\alpha^{n-1}}{1.2\ldots(n-1)}d^{n-1}u + \frac{\alpha^n}{1.2.3\ldots n}(d^n u + \beta). \end{aligned}\right.$$

Quand les variables indépendantes se réduisent à une seule variable x, alors, en posant $y = f(x)$, on obtient la formule

$$(16)\quad \left\{\begin{aligned} & f(x+\alpha\,dx) = y + \frac{\alpha}{1}dy + \frac{\alpha^2}{1.2}d^2y + \ldots \\ & \qquad + \frac{\alpha^{n-1}}{1.2.3\ldots(n-1)}d^{n-1}y + \frac{\alpha^n}{1.2.3\ldots n}(d^n y + \beta). \end{aligned}\right.$$

Concevons à présent que, pour une valeur particulière x_0 attribuée à la variable x, la fonction $f(x)$ et ses dérivées successives jusqu'à celle de l'ordre $n-1$ s'évanouissent. Dans ce cas, on tirera de la formule (12)

$$(17)\qquad f(x_0+h) = \frac{h^n}{1.2.3\ldots n} f^{(n)}(x_0+\theta h);$$

puis, en substituant à la quantité finie h une quantité infiniment petite désignée par i,

$$(18)\qquad f(x_0+i) = \frac{i^n}{1.2.3\ldots n} f^{(n)}(x_0+\theta i).$$

Lorsque, parmi les fonctions $f(x)$, $f'(x)$, $\ldots$, $f^{(n-1)}(x)$, la première est la seule qui ne s'évanouisse pas pour $x = x_0$, l'équation (18) doit être évidemment remplacée par la suivante :

$$(19)\qquad f(x_0+i) - f(x_0) = \frac{i^n}{1.2.3\ldots n} f^{(n)}(x_0+\theta i).$$

Si, dans la même hypothèse, on écrit x au lieu de x_0, et si l'on pose

$$f(x) = y, \qquad \Delta x = i = \alpha h,$$

l'équation (19) prendra la forme

$$(20)\qquad \Delta y = \frac{\alpha^n}{1.2.3\ldots n}(d^n y + \beta),$$

β désignant aussi bien que α une quantité infiniment petite. On pourrait encore déduire de la formule (20) de l'équation (16), en observant que la valeur attribuée à x fait évanouir les différentielles dy, d^2y, $\ldots$, $d^{n-1}y$, en même temps que les fonctions dérivées $f'(x)$, $f''(x)$, $\ldots$, $f^{(n-1)}(x)$.

L'équation (20) fournit les moyens de résoudre le quatrième problème de la sixième Leçon, dans plusieurs cas où la méthode que nous avions proposée est insuffisante. En effet, supposons que, y et z désignant deux fonctions de la variable x, la valeur particulière x_0 attribuée à cette variable réduise à la forme $\frac{0}{0}$, non seulement la fraction $s = \frac{z}{y}$, mais encore les suivantes $\frac{z'}{y'}$, $\frac{z''}{y''}$, $\ldots$, $\frac{z^{(m-1)}}{y^{(m-1)}}$. Alors, en faisant $\Delta x = \alpha\,dx$, et désignant par β, γ deux quantités infiniment petites, on aura pour $x = x_0$

$$(21)\quad \left\{\begin{aligned} \Delta y &= \frac{\alpha^m}{1.2.3\ldots m}(d^m y + \beta), \\ \Delta z &= \frac{\alpha^m}{1.2.3\ldots m}(d^m z + \gamma), \end{aligned}\right.$$

$$(22)\qquad s = \lim \frac{z+\Delta y}{y+\Delta y} = \lim \frac{\Delta z}{\Delta y} = \lim \frac{d^m z + \gamma}{d^m y + \beta} = \frac{d^m z}{d^m y} = \frac{z^{(m)}}{y^{(m)}}.$$

Exemple. — On aura pour $x = 0$

$$\frac{\sin^2 x}{1-\cos x} = \frac{d^2(\sin^2 x)}{d^2(1-\cos x)} = \frac{2(\cos^2 x - \sin^2 x)}{\cos x} = 2.$$

TRENTE-SEPTIÈME LEÇON.

THÉORÈMES DE TAYLOR ET DE MACLAURIN. EXTENSION DE CES THÉORÈMES AUX FONCTIONS DE PLUSIEURS VARIABLES.

On appelle *série* une suite indéfinie de termes

$$u_0,\quad u_1,\quad u_2,\quad \ldots,\quad u_n,\quad \ldots, \tag{1}$$

qui dérivent les uns des autres suivant une loi connue. Soit

$$s_n = u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_{n-1}$$

la somme des n premiers termes, n désignant un nombre entier quelconque. Si, pour des valeurs de n toujours croissantes, la somme s_n s'approche indéfiniment d'une certaine limite s, la série sera dite *convergente*, et la limite s représentée par la notation

$$u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + \ldots$$

s'appellera la *somme* de la série. Si, au contraire, tandis que n croît indéfiniment, la somme s_n ne s'approche d'aucune limite fixe, la série sera *divergente*, et n'aura plus de somme. Dans l'un et l'autre cas, le terme correspondant à l'indice n, savoir u_n, se nomme le *terme général*. De plus, si dans la première hypothèse on fait $s - s_n = r_n$, r_n sera ce qu'on nomme le *reste* de la série, à partir du $n^{\text{ième}}$ terme.

Ces définitions étant admises, il résulte évidemment des formules (2) et (3) de la trente-sixième Leçon que les séries

$$\mathrm{F}(0),\quad \frac{x}{1}\mathrm{F}'(0),\quad \frac{x^2}{1.2}\mathrm{F}''(0),\quad \frac{x^3}{1.2.3}\mathrm{F}'''(0),\quad \ldots, \tag{2}$$

$$f(x),\quad \frac{h}{1}f'(x),\quad \frac{h^2}{1.2}f''(x),\quad \frac{h^3}{1.2.3}f'''(x),\quad \ldots \tag{3}$$

seront convergentes, et auront pour sommes respectives les deux fonctions $\mathrm{F}(x)$, $f(x+h)$, toutes les fois que les deux intégrales

$$\int_0^x \frac{(x-z)^{n-1}}{1.2.3\ldots(n-1)}\mathrm{F}^{(n)}(z)\,dz = \frac{x^n}{1.2.3\ldots n}\mathrm{F}^{(n)}(\theta x), \tag{4}$$

$$\int_0^h \frac{(h-z)^{n-1}}{1.2.3\ldots(n-1)}f^{(n)}(x+z)\,dz = \frac{h^n}{1.2.3\ldots n}f^{(n)}(x+\theta h) \tag{5}$$

convergeront, pour des valeurs croissantes de n, vers la limite zéro. On trouvera, en conséquence,

$$\mathrm{F}(x) = \mathrm{F}(0) + \frac{1}{x}\mathrm{F}'(0) + \frac{x^2}{1.2}\mathrm{F}''(0) + \frac{x^3}{1.2.3}\mathrm{F}'''(0) + \ldots, \tag{6}$$

si l'expression (4) s'évanouit par des valeurs infinies de n, et

$$f(x+h) = f(x) + \frac{h}{1}f'(x) + \frac{h^2}{1.2}f''(x) + \frac{h^3}{1.2.3}f'''(x) + \ldots, \tag{7}$$

si l'expression (5) satisfait à la même condition. Les formules (6) et (7) renferment les théorèmes de Maclaurin et de Taylor. Elles servent, quand les intégrales (4) et (5) remplissent les conditions prescrites, à *développer* les deux fonctions $\mathrm{F}(x)$ et $f(x+h)$ en séries ordonnées suivant les puissances ascendantes et entières des quantités x et h. Les restes de ces séries sont précisément les deux intégrales dont nous venons de parler.

Supposons maintenant que l'on désigne par $u = f(x, y, z, \ldots)$ une fonction de plusieurs variables indépendantes, et qu'aux équations (2) et (3) de la Leçon précédente on substitue l'équation (14). On conclura de cette dernière

$$\left\{\begin{aligned} &f(x+\alpha\,dx,\ y+\alpha\,dy,\ z+\alpha\,dz,\ \ldots)\\ &\quad = u + \frac{\alpha}{1}du + \frac{\alpha^2}{1.2}d^2u + \frac{\alpha^3}{1.2.3}d^3u + \ldots, \end{aligned}\right. \tag{8}$$

toutes les fois que le terme $\frac{\alpha^n}{1.2.3\ldots n}\mathrm{F}^{(n)}(\theta\alpha)$, ou plutôt l'intégrale que ce terme représente, et que l'on peut écrire sous la forme

$$(9)\qquad \int_0^\alpha \frac{(\alpha - v)^{n-1}}{1.2.3\ldots(n-1)} F^{(n)}(v)\,dv,$$

s'évanouira pour des valeurs infinies de n. On trouvera par suite, en posant $\alpha = 1$,

$$(10)\qquad f(x+dx, y+dy, z+dz, \ldots) = u + \frac{du}{1} + \frac{d^2u}{1.2} + \frac{d^3u}{1.2.3} + \ldots,$$

pourvu que l'intégrale

$$(11)\qquad \int_0^1 \frac{(1-v)^{n-1}}{1.2.3\ldots(n-1)} F^{(n)}(v)\,dv$$

vérifie la condition énoncée. Quand les variables indépendantes x, y, z, ... se réduisent à la seule variable x, l'équation (10) devient

$$(12)\qquad f(x+dx) = u + \frac{du}{1} + \frac{d^2u}{1.2} + \frac{d^3u}{1.2.3} + \ldots.$$

Celle-ci coïncide avec l'équation (7), c'est-à-dire avec la formule de Taylor. En y remplaçant x par zéro et dx par x, on retrouverait le théorème de Maclaurin. Ajoutons que l'équation (10), et celle qu'on en déduit lorsqu'on y remplace x, y, z, ... par zéro, puis dx, dy, dz, ... par x, y, z, ... fournissent le moyen d'étendre les théorèmes de Taylor et de Maclaurin aux fonctions de plusieurs variables. Remarquons enfin que les équations (6), (8), (10), (12) coïncident avec les équations (4), (6), (7), (8) de la dix-neuvième Leçon, dans le cas où $F(x)$ et $f(x)$ représentent des fonctions entières du degré n.

Comme, en vertu de la formule (19) (vingt-deuxième Leçon), l'intégrale (4) est équivalente à un produit de la forme

$$(13)\qquad x\frac{(x-\theta x)^{n-1}}{1.2.3\ldots(n-1)} F^{(n)}(\theta x),$$

θ désignant un nombre inférieur à l'unité, il est clair que des valeurs infinies de n feront évanouir cette intégrale, si elles réduisent à zéro

la fonction

$$(14)\qquad \frac{(x-z)^{n-1}}{1.2.3\ldots(n-1)} F^{(n)}(z)$$

pour toutes les valeurs de z renfermées entre les limites 0 et x. Cette dernière condition sera évidemment remplie, si la valeur numérique de l'expression $F^{(n)}(\theta x)$ supposée réelle, ou le module de la même expression supposée imaginaire, ne croit pas indéfiniment, pendant que n augmente. En effet, puisque la quantité

$$m(n-m) = \left(\frac{n}{2}\right)^2 - \left(\frac{n}{2} - m\right)^2$$

croit avec le nombre m entre les limites $m = 1$, $m = \frac{n}{2}$, et que l'on a par suite

$$1(n-1) < 2(n-2) < 3(n-3) < \ldots, \qquad 1.2.3\ldots(n-1) > (n-1)^{\frac{n-1}{2}},$$

on peut affirmer que la valeur numérique ou le module de l'expression (14) restera toujours inférieur à la valeur numérique ou au module du produit

$$(15)\qquad \left(\frac{x-z}{\sqrt{n-1}}\right)^{n-1} F^{(n)}(z).$$

Or ce produit deviendra nul, dans l'hypothèse admise, pour $n = \infty$.

Exemples. — Si l'on prend pour valeurs successives de la fonction $F(x)$

$$e^x, \quad \sin x, \quad \cos x,$$

on trouvera pour les valeurs correspondantes de $F^{(n)}(\theta x)$

$$e^{\theta x}, \quad \sin\left(\frac{n\pi}{2} + \theta x\right), \quad \cos\left(\frac{n\pi}{2} + \theta x\right).$$

Comme ces dernières quantités restent finies, quel que soit x, tandis que n augmente, on doit en conclure que le théorème de Maclaurin est toujours applicable aux trois fonctions proposées. On aura, en conséquence, pour des valeurs quelconques de x et pour des valeurs positives de A,

$$(16)\quad e^x = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3}{1.2.3} + \ldots, \qquad A^x = e^{x\,lA} = 1 + \frac{x\,lA}{1} + \frac{x^2(lA)^2}{1.2} + \frac{x^3(lA)^3}{1.2.3} + \ldots,$$

$$(17)\quad \sin x = \sin(0) + \frac{x}{1}\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) + \frac{x^2}{1.2}\sin\left(\frac{2\pi}{2}\right) + \frac{x^3}{1.2.3}\sin\left(\frac{3\pi}{2}\right) + \ldots = \frac{x}{1} - \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^5}{1.2.3.4.5} - \ldots,$$

$$(18)\quad \cos x = \cos(0) + \frac{x}{1}\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + \frac{x^2}{1.2}\cos\left(\frac{2\pi}{2}\right) + \frac{x^3}{1.2.3}\cos\left(\frac{3\pi}{2}\right) + \ldots = 1 - \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^4}{1.2.3.4} - \ldots$$

Lorsque la fonction $F^{(n)}(\theta x)$ devient infinie pour des valeurs infinies de n, l'expression (14) peut encore converger vers la limite zéro. C'est ce qui arrivera, par exemple, si l'on prend $F(x) = l(1+x)$, et si en même temps on attribue à x une valeur numérique plus petite que l'unité. En effet, on trouvera dans ce cas, en supposant $z = \theta x$, $\theta < 1$, $x^2 < 1$,

$$(19)\quad \frac{(x-z)^{n-1}}{1.2.3\ldots(n-1)}F^{(n)}(z) = \pm\frac{(x-z)^{n-1}}{(1+z)^n} = \pm\frac{x^{n-1}}{1-\theta}\left(\frac{1-\theta}{1+\theta x}\right)^n;$$

et, comme la fraction $\frac{1-\theta}{1+\theta x}$ sera évidemment inférieure à l'unité, il est clair que l'expression (19) s'évanouira pour $n = \infty$. On trouvera, en conséquence, pour toutes les valeurs de x comprises entre les limites -1 et $+1$,

$$(20)\quad l(1+x) = \frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots.$$

TRENTE-HUITIÈME LEÇON.

RÈGLES SUR LA CONVERGENCE DES SÉRIES. APPLICATION DE CES RÈGLES A LA SÉRIE DE MACLAURIN.

Les équations (6) et (7) (trente-septième Leçon) ne pouvant subsister que dans le cas où les séries (2) et (3) sont convergentes, il importe de fixer les conditions de la convergence des séries. Tel est l'objet dont nous allons nous occuper.

L'une des séries les plus simples est la progression géométrique

$$(1)\qquad a,\ ax,\ ax^2,\ ax^3,\ \ldots,$$

qui a pour terme général ax^n. Or la somme de ses n premiers termes, savoir

$$a(1+x+x^2+\ldots+x^{n-1}) = a\frac{1-x^n}{1-x} = \frac{a}{1-x} - \frac{ax^n}{1-x}$$

convergera évidemment, pour des valeurs croissantes de n, vers la limite fixe $\frac{a}{1-x}$, si la valeur numérique de la variable x supposée réelle, ou le module de la même variable supposée imaginaire, est un nombre inférieur à l'unité, tandis que, dans le cas contraire, cette somme cessera de converger vers une semblable limite. La série (1) sera donc toujours convergente dans le premier cas et toujours divergente dans le second. Cette conclusion subsiste lors même que le facteur a devient imaginaire.

Considérons maintenant la série

$$(2)\qquad u_0,\ u_1,\ u_2,\ u_3,\ \ldots,\ u_n,\ \ldots$$

composée de termes quelconques réels ou imaginaires. Pour décider si elle est convergente ou divergente, on n'aura nullement besoin d'examiner ses premiers termes, que l'on pourra même supprimer de manière à remplacer cette série par la suivante

$$u_m, \quad u_{m+1}, \quad u_{m+2}, \quad \ldots, \tag{3}$$

m désignant un nombre aussi grand que l'on voudra. Soit d'ailleurs ρ_n la valeur numérique ou le module du terme général u_n; il est clair que la série (3) sera convergente si les modules de ses différents termes, savoir

$$\rho_m, \quad \rho_{m+1}, \quad \rho_{m+2}, \quad \ldots, \tag{4}$$

forment à leur tour une série convergente, et qu'elle deviendra divergente si ρ_n ne décroît pas indéfiniment pour des valeurs croissantes de n. Cela posé, on établira facilement les deux théorèmes qui suivent.

Théorème I. — *Cherchez la limite ou les limites vers lesquelles converge, tandis que n croît indéfiniment, l'expression $(\rho_n)^{\frac{1}{n}}$; et soit λ la plus grande de ces limites. La série (2) sera convergente, si l'on a $\lambda < 1$; divergente, si l'on a $\lambda > 1$.*

Démonstration. — Supposons d'abord $\lambda < 1$, et choisissons arbitrairement entre les deux nombres 1 et λ un troisième nombre μ, en sorte qu'on ait $\lambda < \mu < 1$; n venant à croître au delà de toute limite assignable, les plus grandes valeurs de $(\rho_n)^{\frac{1}{n}}$ ne pourront s'approcher indéfiniment de la limite λ sans finir par être constamment inférieures à μ. Par suite, il sera possible d'attribuer au nombre entier m une valeur assez considérable pour que, n devenant égal ou supérieur à m, on ait constamment $(\rho_n)^{\frac{1}{n}} < \mu$, $\rho_n < \mu^n$. Alors les termes de la série (4) seront des nombres inférieurs aux termes correspondants de la progression géométrique

$$\mu^m, \quad \mu^{m+1}, \quad \mu^{m+2}, \quad \ldots; \tag{5}$$

et, comme cette dernière sera convergente (à cause de $\mu < 1$), on devra en dire autant de la série (4) et, par conséquent, de la série (2).

Supposons en second lieu $\lambda > 1$, et plaçons encore entre les deux nombres 1 et λ un troisième nombre μ, en sorte qu'on ait $\lambda > \mu > 1$. Si n vient à croître au delà de toute limite, les plus grandes valeurs de $(\rho_n)^{\frac{1}{n}}$, en s'approchant indéfiniment de λ, finiront par surpasser μ. On pourra donc satisfaire à la condition $(\rho_n)^{\frac{1}{n}} > \mu$ ou $\rho_n > \mu^n > 1$, par des valeurs de n aussi considérables que l'on voudra; et par suite, on trouvera dans la série (4) un nombre indéfini de termes supérieurs à l'unité, ce qui suffira pour constater la divergence des séries (2), (3) et (4).

Théorème II. — *Si, pour des valeurs croissantes de n, le rapport $\frac{\rho_{n+1}}{\rho_n}$ converge vers une limite fixe λ, la série (2) sera convergente toutes les fois que l'on aura $\lambda < 1$, et divergente toutes les fois que l'on aura $\lambda > 1$.*

Démonstration. — Choisissez arbitrairement un nombre ε inférieur à la différence qui existe entre 1 et λ. Il sera possible d'attribuer à m une valeur assez considérable pour que, n devenant égal ou supérieur à m, le rapport $\frac{\rho_{n+1}}{\rho_n}$ demeure toujours compris entre les deux limites $\lambda - \varepsilon$, $\lambda + \varepsilon$. Alors les différents termes de la série (4) se trouveront compris entre les termes correspondants des deux progressions géométriques

$$\rho_m, \quad \rho_m(\lambda - \varepsilon), \quad \rho_m(\lambda - \varepsilon)^2, \quad \rho_m(\lambda - \varepsilon)^3, \quad \ldots,$$

$$\rho_m, \quad \rho_m(\lambda + \varepsilon), \quad \rho_m(\lambda + \varepsilon)^2, \quad \rho_m(\lambda + \varepsilon)^3, \quad \ldots,$$

lesquelles seront toutes deux convergentes, si l'on a $\lambda < 1$, et toutes deux divergentes, si l'on a $\lambda > 1$. Donc, etc.

Scolie. — Il serait facile de prouver que la limite du rapport $\frac{\rho_{n+1}}{\rho_n}$, dans le cas où cette limite existe, est en même temps celle de l'expression $(\rho_n)^{\frac{1}{n}}$. [*Voir* l'*Analyse algébrique* (1), Chap. VI.]

(1) *Œuvres de Cauchy*, S. II, T. III.

En appliquant les théorèmes (1) et (2) à la série de Maclaurin, savoir

$$(6) \qquad F(0),\quad \frac{x}{1}F'(0),\quad \frac{x^2}{1.2}F''(0),\quad \frac{x^3}{1.2.3}F'''(0),\quad \ldots,$$

on obtient la proposition suivante :

Théorème III. — *Soient ρ_n la valeur numérique ou le module de l'expression $F^{(n)}(0)$, et λ la limite vers laquelle convergent, tandis que n croît indéfiniment, les plus grandes valeurs de $(\rho_n)^{\frac{1}{n}}$ ou bien encore la limite unique (si cette limite existe) du rapport $\frac{\rho_{n+1}}{\rho_n}$. La série* (6) *sera convergente toutes les fois que la valeur numérique ou le module de la variable x sera inférieur à $\frac{1}{\lambda}$, et divergente toutes les fois que la valeur numérique ou le module surpassera $\frac{1}{\lambda}$.*

Exemples. — Si l'on prend pour valeurs successives de $F(x)$

$$e^x,\quad \sin x,\quad \cos x,\quad l(1+x),\quad (1+x)^\mu,$$

μ étant une quantité constante, les valeurs correspondantes de $\frac{1}{\lambda}$ seront

$$\infty,\quad \infty,\quad \infty,\quad 1,\quad 1.$$

Par suite, les séries comprises dans les équations (16), (17), (18) de la trente-septième Leçon resteront convergentes entre les limites $x = -\infty$, $x = +\infty$, c'est-à-dire pour des valeurs quelconques de x. Au contraire, la série

$$(7) \qquad \left\{ \begin{array}{l} 1,\quad \frac{\mu}{1}x,\quad \frac{\mu(\mu-1)}{1.2}x^2,\quad \frac{\mu(\mu-1)(\mu-2)}{1.2.3}x^3,\quad \ldots, \\ \qquad \frac{\mu(\mu-1)\ldots(\mu-n+1)}{1.2.3\ldots n}x^n,\quad \ldots \end{array} \right.$$

et celle que renferme la formule (20) (trente-septième Leçon) ne seront convergentes, si la variable x est réelle, qu'entre les limites $x = -1$, $x = +1$.

Nous avons déjà remarqué que la série (6) est réelle et qu'elle a

pour somme $F(x)$ toutes les fois que, la variable x étant réelle et la variable z étant comprise entre les limites 0, x, l'expression (14) (trente-septième Leçon) s'évanouit pour des valeurs infinies de n. Or cette dernière condition sera évidemment satisfaite si l'expression dont il s'agit est le terme général d'une série convergente, ce qui aura lieu, en vertu du théorème III, si, pour des valeurs croissantes de n, le module ou la valeur numérique du produit

$$(8) \qquad \frac{x-z}{n}\,\frac{F^{(n+1)}(z)}{F^{(n)}(z)}$$

converge vers une limite inférieure à l'unité.

Exemple. — Soit

$$F(x) = (1+x)^\mu,$$

μ désignant une quantité constante. Si dans l'expression (8) on remplace z par θx, cette expression deviendra

$$x\frac{1-\theta}{1+\theta x}\,\frac{\mu-n}{n} = -x\frac{1-\theta}{1+\theta x}\left(1-\frac{\mu}{n}\right)$$

et convergera pour des valeurs croissantes de n vers une limite de la forme $-x\frac{1-\theta}{1+\theta x}$, limite dont la valeur numérique sera inférieure à l'unité, si l'on suppose $x^2 < 1$. On aura donc, sous cette condition,

$$(9) \qquad (1+x)^\mu = 1 + \frac{\mu}{1}x + \frac{\mu(\mu-1)}{1.2}x^2 + \frac{\mu(\mu-1)(\mu-2)}{1.2.3}x^3 + \ldots.$$

On prouverait de même que l'équation

$$(10) \qquad (1+ax)^\mu = 1 + \frac{\mu}{1}ax + \frac{\mu(\mu-1)}{1.2}a^2x^2 + \frac{\mu(\mu-1)(\mu-2)}{1.2.3}a^3x^3 + \ldots$$

subsiste, pour des valeurs réelles ou imaginaires de la constante a, tant que la valeur numérique de x est inférieure au module de $\frac{1}{a}$.

On pourrait croire que la série (6) a toujours $F(x)$ pour somme, quand elle est convergente, et que, dans le cas où ses différents termes s'évanouissent l'un après l'autre, la fonction $F(x)$ s'évanouit elle-même; mais, pour s'assurer du contraire, il suffit d'observer que la seconde condition sera remplie, si l'on suppose

$$F(x) = e^{-\left(\frac{1}{x}\right)^2},$$

et la première, si l'on suppose

$$F(x) = e^{-x^2} + e^{-\left(\frac{1}{x}\right)^2}.$$

Cependant la fonction $e^{-\left(\frac{1}{x}\right)^2}$ n'est pas identiquement nulle, et la série déduite de la dernière supposition a pour somme, non pas le binôme $e^{-x^2} + e^{-\left(\frac{1}{x}\right)^2}$, mais son premier terme e^{-x^2}.

TRENTE-NEUVIÈME LEÇON.

DES EXPONENTIELLES ET DES LOGARITHMES IMAGINAIRES. USAGE DE CES EXPONENTIELLES ET DE CES LOGARITHMES DANS LA DÉTERMINATION DES INTÉGRALES SOIT DÉFINIES, SOIT INDÉFINIES.

Nous avons prouvé dans la trente-septième Leçon que l'exponentielle A^x (A désignant une constante positive, et x une variable réelle) est toujours équivalente à la somme de la série

$$(1) \qquad 1, \quad \frac{x\,lA}{1}, \quad \frac{x^2(lA)^2}{1.2}, \quad \frac{x^3(lA)^3}{1.2.3}, \quad \ldots,$$

en sorte qu'on a, pour toutes les valeurs réelles de x,

$$(2) \qquad A^x = 1 + \frac{x\,lA}{1} + \frac{x^2(lA)^2}{1.2} + \frac{x^3(lA)^3}{1.2.3} + \ldots.$$

D'autre part, comme, en vertu du théorème III de la trente-huitième Leçon, la série (1) reste convergente pour des valeurs imaginaires quelconques de la variable x, on est convenu d'étendre l'équation (2) à tous les cas possibles, et de s'en servir, dans le cas où la variable x devient imaginaire, pour fixer le sens de la notation A^x. Cette convention étant admise, on déduit facilement de l'équation (2) plusieurs formules remarquables que nous allons faire connaître.

D'abord, si l'on prend $A = e$, l'équation (2) deviendra

$$(3) \qquad e^x = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3}{1.2.3} + \ldots.$$

Si l'on pose dans cette dernière $x = z\sqrt{-1}$ (z désignant une variable réelle), on trouvera

$$e^{z\sqrt{-1}} = 1 + \frac{z\sqrt{-1}}{1} - \frac{z^2}{1.2} - \frac{z^3\sqrt{-1}}{1.2.3} + \dots$$
$$= 1 - \frac{z^2}{1.2} + \frac{z^4}{1.2.3.4} - \dots + \left(\frac{z}{1} - \frac{z^3}{1.2.3} + \dots\right)\sqrt{-1}$$

et, par suite,

$$(4) \qquad e^{z\sqrt{-1}} = \cos z + \sqrt{-1}\sin z.$$

On trouvera de même

$$(5) \qquad e^{-z\sqrt{-1}} = \cos z - \sqrt{-1}\sin z,$$

puis on conclura des équations (4) et (5) combinées entre elles

$$(6) \qquad \cos z = \frac{e^{z\sqrt{-1}} + e^{-z\sqrt{-1}}}{2}, \qquad \sin z = \frac{e^{z\sqrt{-1}} - e^{-z\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}}.$$

Soit, en second lieu, $x = (a + b\sqrt{-1})z$, a, b, désignant deux constantes réelles. Alors la série comprise dans le second membre de la formule (3) sera précisément celle que l'on déduit du théorème de Maclaurin, appliqué à la fonction imaginaire $e^{az}(\cos bz + \sqrt{-1}\sin bz)$. On aura donc

$$(7) \qquad e^{(a+b\sqrt{-1})z} = e^{az}(\cos bz + \sqrt{-1}\sin bz) = e^{az}e^{bz\sqrt{-1}}.$$

Cette dernière formule est analogue à l'équation identique

$$e^{(a+b)z} = e^{az}e^{bz},$$

de laquelle on la déduirait, mais par induction seulement, en substituant à la constante réelle b une constante imaginaire $b\sqrt{-1}$. Nous ajouterons qu'en s'appuyant sur la formule (7) on étend sans peine l'équation

$$(8) \qquad e^{x+y} = e^x e^y$$

à des valeurs imaginaires quelconques des variables x, y; et qu'en comparant la formule (2) à la formule (3) on en tire, pour une

valeur quelconque de x,

$$(9) \qquad A^x = e^{x\,\mathrm{l}A}.$$

Concevons maintenant que, u et v désignant deux quantités réelles, on cherche les diverses valeurs de x propres à résoudre les deux équations

$$(10) \qquad A^x = u + v\sqrt{-1},$$
$$(11) \qquad e^x = u + v\sqrt{-1}.$$

Ces diverses valeurs seront les divers *logarithmes* de $u + v\sqrt{-1}$, 1° dans le système dont la base est A; 2° dans le système népérien dont la base est e. De plus, comme, en vertu de la formule (9), les logarithmes de l'expression $u + v\sqrt{-1}$ dans le premier système seront égaux aux logarithmes népériens de cette même expression divisés par lA, il suffira de résoudre l'équation (11). Cela posé, faisons $x = \alpha + \beta\sqrt{-1}$, α, β désignant deux quantités réelles. La formule (11) deviendra

$$e^{\alpha+\beta\sqrt{-1}} = u + v\sqrt{-1};$$

puis l'on en tirera $e^\alpha\cos\beta = u$, $e^\alpha\sin\beta = v$ et, par conséquent,

$$(12) \qquad e^\alpha = (u^2 + v^2)^{\frac{1}{2}},$$
$$(13) \qquad \cos\beta = \frac{u}{\sqrt{u^2+v^2}}, \qquad \sin\beta = \frac{v}{\sqrt{u^2+v^2}}.$$

Or, on satisfait à l'équation (12) par une seule valeur réelle de α, savoir $\alpha = \frac{1}{2}\mathrm{l}(u^2 + v^2)$. De plus, en désignant par n un nombre entier arbitraire, on satisfera aux équations (13) par toutes les valeurs de β comprises dans la formule

$$(14) \qquad \beta = 2n\pi + \operatorname{arc\,tang}\frac{v}{u},$$

si u est positif, ou dans la suivante

$$(15) \qquad \beta = (2n+1)\pi + \operatorname{arc\,tang}\frac{v}{u},$$

si u devient négatif. Il existe donc une infinité de logarithmes imaginaires de l'expression $u+v\sqrt{-1}$. Le plus simple de tous ces logarithmes, dans le cas où la quantité u reste positive, est celui qu'on obtient en posant $n=0$, savoir $\frac{1}{2}\,\mathrm{l}(u^2+v^2)+\sqrt{-1}\,\mathrm{arc\,tang}\frac{v}{u}$. Ce même logarithme, qui, pour une valeur nulle de v, se réduit au logarithme réel de u, sera celui que nous désignerons par la notation $\mathrm{l}(u+v\sqrt{-1})$ (*voir* l'*Analyse algébrique*, Chap. IX), en sorte qu'on aura pour des valeurs positives de u

$$\mathrm{l}(u+v\sqrt{-1})=\tfrac{1}{2}\,\mathrm{l}(u^2+v^2)+\sqrt{-1}\,\mathrm{arc\,tang}\frac{v}{u}. \tag{16}$$

Par suite, si r représente une quantité positive, et t un arc réel compris entre les limites $-\frac{\pi}{2}$, $+\frac{\pi}{2}$, l'équation

$$x=r(\cos t+\sqrt{-1}\sin t)=re^{t\sqrt{-1}} \tag{17}$$

entraînera la suivante

$$\mathrm{l}x=\mathrm{l}r+t\sqrt{-1}. \tag{18}$$

Les formules qui servent à différentier les exponentielles et les logarithmes réels subsistent, lorsque ces exponentielles et ces logarithmes deviennent imaginaires. Ainsi, par exemple, on reconnaîtra sans peine que l'on a : 1° pour des valeurs imaginaires de la variable x,

$$de^x=e^x\,dx, \tag{19}$$

$$d\,\mathrm{l}(\pm x)=\frac{dx}{x}; \tag{20}$$

2° pour des valeurs réelles des variables x, y, z, et des constantes α, β, a, b,

$$de^{x+y\sqrt{-1}}=e^{x+y\sqrt{-1}}(dx+dy\sqrt{-1}), \tag{21}$$

$$d\,\mathrm{l}[\pm(x+y\sqrt{-1})]=\frac{dx+dy\sqrt{-1}}{x+y\sqrt{-1}}, \tag{22}$$

$$\left\{\begin{aligned} d\,\mathrm{l}[\pm(x-\alpha-\beta\sqrt{-1})]&=\frac{dx}{x-\alpha-\beta\sqrt{-1}},\\ d\,\mathrm{l}[\pm(x-\alpha+\beta\sqrt{-1})]&=\frac{dx}{x-\alpha+\beta\sqrt{-1}},\end{aligned}\right. \tag{23}$$

$$de^{(a+b\sqrt{-1})z}=e^{(a+b\sqrt{-1})z}(a+b\sqrt{-1})\,dz. \tag{24}$$

Dans ces diverses formules, on doit adopter, après la lettre l, le signe $+$ ou le signe $-$, suivant que l'expression imaginaire dont on prend le logarithme népérien a une partie réelle positive ou négative. De ces mêmes formules on déduira immédiatement les suivantes

$$\left\{\begin{aligned} \int\frac{(\mathrm{A}-\mathrm{B}\sqrt{-1})\,dx}{x-\alpha-\beta\sqrt{-1}}&=(\mathrm{A}-\mathrm{B}\sqrt{-1})\,\mathrm{l}[\pm(x-\alpha-\beta\sqrt{-1})]+\mathcal{C},\\ \int\frac{(\mathrm{A}+\mathrm{B}\sqrt{-1})\,dx}{x-\alpha+\beta\sqrt{-1}}&=(\mathrm{A}+\mathrm{B}\sqrt{-1})\,\mathrm{l}[\pm(x-\alpha+\beta\sqrt{-1})]+\mathcal{C},\end{aligned}\right. \tag{25}$$

$$\left\{\begin{aligned} \int e^{(a+b\sqrt{-1})z}\,dz&=\frac{e^{(a+b\sqrt{-1})z}}{a+b\sqrt{-1}}+\mathcal{C},\\ \int z^n e^{(a+b\sqrt{-1})z}\,dz&=\frac{z^n e^{(a+b\sqrt{-1})z}}{a+b\sqrt{-1}}\left[1-\frac{n}{(a+b\sqrt{-1})z}+\frac{n(n-1)}{(a+b\sqrt{-1})^2z^2}-\ldots\right],\end{aligned}\right. \tag{26}$$

lesquelles s'accordent avec les formules établies dans les vingt-huitième et trentième Leçons.

Les exponentielles et les logarithmes imaginaires peuvent encore être employés avec avantage dans la détermination des intégrales définies. Ainsi, par exemple, il résulte de la seconde des équations (26) que la formule donnée ligne 13 de la page 192 subsiste, quand on y remplace la constante a supposée réelle par la constante imaginaire $a+b\sqrt{-1}$. On obtient alors l'équation

$$\int_0^\infty z^n e^{(a+b\sqrt{-1})z}\,dz=\frac{1.2.3\ldots n}{(a+b\sqrt{-1})^{n+1}}, \tag{27}$$

laquelle coïncide avec la formule de la ligne 14 de la page citée. De plus, il est clair que la formule (18) de la trente-quatrième Leçon subsistera encore, si, au lieu de prendre pour $f(x)$ une fonction algébrique, on pose successivement

$$f(x) = e^{ax\sqrt{-1}}, \quad f(x) = (-x\sqrt{-1})^{\mu-1} e^{ax\sqrt{-1}}, \quad f(x) = \frac{(-x\sqrt{-1})e^{ax\sqrt{-1}}}{l(1 - rx\sqrt{-1})},$$

μ, a, r désignant trois constantes positives, dont la première reste comprise entre les limites 0 et 2. On trouvera, en conséquence,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ax\sqrt{-1}}}{1+x^2}\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos ax\,dx}{1+x^2} = \pi e^{-a}, \tag{28}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{(-x\sqrt{-1})^{\mu-1}}{1+x^2} e^{ax\sqrt{-1}}\,dx = 2\int_0^{\infty} x^{\mu-1} \sin\left(\frac{\mu\pi}{2} - ax\right)\frac{dx}{1+x^2} = \pi e^{-a}, \tag{29}$$

$$\left\{\begin{aligned} &\int_{-\infty}^{\infty} \frac{(-x\sqrt{-1})\,e^{ax\sqrt{-1}}}{l(1 - rx\sqrt{-1})}\,\frac{dx}{1+x^2} \\ &= \int_0^{\infty} \frac{\sin ax\, l(1 + r^2x^2) + 2\cos ax \operatorname{arc\,tang} rx}{[\frac{1}{2} l(1 + r^2x^2)]^2 + (\operatorname{arc\,tang} rx)^2}\,\frac{x\,dx}{1+x^2} = \frac{\pi e^{-a}}{l(1+r)}. \end{aligned}\right. \tag{30}$$

QUARANTIÈME LEÇON.

INTÉGRATION PAR SÉRIES.

Considérons une série

$$u_0, \quad u_1, \quad u_2, \quad u_3, \quad \ldots, \quad u_n, \quad \ldots \tag{1}$$

dont les différents termes soient des fonctions de la variable x qui restent continues entre les limites $x = x_0$, $x = X$. Si, après avoir multiplié ces mêmes termes par dx, on les intègre entre les limites dont il s'agit, on obtiendra une série nouvelle composée des intégrales définies

$$\int_{x_0}^{X} u_0\,dx, \quad \int_{x_0}^{X} u_1\,dx, \quad \int_{x_0}^{X} u_2\,dx, \quad \int_{x_0}^{X} u_3\,dx, \quad \ldots, \quad \int_{x_0}^{X} u_n\,dx, \quad \ldots. \tag{2}$$

En comparant cette nouvelle série à la première, on obtiendra sans peine le théorème que nous allons énoncer.

Théorème I. — *Supposons que, les deux limites x_0, X étant des quantités finies, la série* (1) *soit convergente, non seulement pour $x = x_0$ et pour $x = X$, mais aussi pour toutes les valeurs de x comprises entre x_0 et X. La série* (2) *sera elle-même convergente; et si l'on appelle s la somme de la série* (1), *la série* (2) *aura pour somme l'intégrale*

$$\int_{x_0}^{X} s\,dx.$$

En d'autres termes, l'équation

$$s = u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + \ldots \tag{3}$$

entraînera la suivante :

$$\int_{x_0}^{X} s\,dx = \int_{x_0}^{X} u_0\,dx + \int_{x_0}^{X} u_1\,dx + \int_{x_0}^{X} u_2\,dx + \int_{x_0}^{X} u_3\,dx + \ldots. \tag{4}$$

Démonstration. — Soit

$$s_n = u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_{n-1} \tag{5}$$

la somme de n premiers termes de la série (1) et r_n le reste à partir du $n^{\text{ième}}$ terme. On aura

$$s = s_n + r_n = u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_{n-1} + r_n, \tag{6}$$

et l'on en conclura

$$\left\{\begin{aligned} \int_{x_0}^{X} s\,dx = \int_{x_0}^{X} u_0\,dx &+ \int_{x_0}^{X} u_1\,dx + \int_{x_0}^{X} u_2\,dx + \ldots \\ &+ \int_{x_0}^{X} u_{n-1}\,dx + \int_{x_0}^{X} r_n\,dx. \end{aligned}\right. \tag{7}$$

Or, puisque, en vertu de la formule (14) (vingt-troisième Leçon), l'intégrale $\int_{x_0}^{X} r_n\,dx$ sera une valeur particulière du produit $r_n(X - x_0)$ correspondante à une valeur de x comprise entre les limites x_0, X, et que, dans l'hypothèse admise, ce produit deviendra nul pour des valeurs infinies de n, il est clair qu'on obtiendra l'équation (4) en posant, dans la formule (7), $n = \infty$.

Corollaire I. — Si dans la formule (4) on remplace X par x, on obtiendra la suivante

$$\int_{x_0}^{x} s\,dx = \int_{x_0}^{x} u_0\,dx + \int_{x_0}^{x} u_1\,dx + \int_{x_0}^{x} u_2\,dx + \ldots, \tag{8}$$

qui restera vraie, comme l'équation (3), entre les limites $x = x_0$, $x = X$.

Corollaire II. — Supposons que la série (1), étant convergente

pour $x = x_0$ et pour toutes les valeurs de x comprises entre les limites x_0, X, cesse de l'être pour $x = X$. Dans cette hypothèse, les équations (3) et (8) subsisteront encore entre les limites dont il s'agit. J'ajoute que l'équation (4) subsistera elle-même, si les intégrales comprises dans son second membre forment une série convergente. En effet, on reconnaîtra sans peine que, si cette condition est remplie, les deux membres de l'équation (8) seront des fonctions continues de la variable x dans le voisinage de la valeur particulière $x = X$ [*voir* l'*Analyse algébrique*, page 131 (1)], et qu'il suffira d'y faire converger x vers cette même valeur pour obtenir les deux membres de l'équation (4). Au contraire, l'équation (4) disparaîtra, si les intégrales que renferme son second membre forment une série divergente.

Corollaire III. — Supposons que la série (1), étant convergente entre les limites $x = x_0$, $x = X$, devienne divergente pour la première de ces deux limites ou pour toutes les deux. Alors, en désignant par ξ_0, ξ deux quantités comprises entre x_0 et X, on obtiendra l'équation

$$\int_{\xi_0}^{\xi} s\,dx = \int_{\xi_0}^{\xi} u_0\,dx + \int_{\xi_0}^{\xi} u_1\,dx + \int_{\xi_0}^{\xi} u_2\,dx + \ldots, \tag{9}$$

puis, en faisant converger ξ_0 vers la limite x_0, et ξ vers la limite X, on retrouvera encore l'équation (4), pourvu toutefois que les intégrales renfermées dans son second membre forment une série convergente.

Cette remarque s'étend aux cas mêmes où les quantités x_0, X deviennent séparément ou simultanément infinies, par exemple au cas où l'on aurait $x_0 = -\infty$, $X = \infty$.

Corollaire IV. — Si l'on prend $u_n = a_n x^n$, a_n étant un coefficient réel ou imaginaire; si, de plus, on désigne par ρ_n la valeur numérique ou le module de a_n, et par λ la plus grande valeur que reçoive l'expres-

(1) *Œuvres de Cauchy*, S. II, T. III, p. 120.

sion $(\rho_n)^{\frac{1}{n}}$ quand le nombre n devient infini, la série (1) sera convergente (*voir* le théorème III de la trente-huitième Leçon) entre les limites $x = -\frac{1}{\lambda}$, $x = +\frac{1}{\lambda}$. Donc, en laissant la variable x comprise entre ces limites et posant

$$s = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots, \tag{10}$$

on trouvera

$$\int_0^x s\,dx = a_0 x + a_1 \frac{x^2}{2} + a_2 \frac{x^3}{3} + \ldots. \tag{11}$$

Cette dernière équation subsistera encore (*voir* le corollaire II) pour les valeurs particulières $x = -\frac{1}{\lambda}$, $x = +\frac{1}{\lambda}$, si ces valeurs particulières ne cessent pas de rendre convergente la série $a_0 x$, $\frac{1}{2} a_1 x^2$, $\frac{1}{3} a_2 x^3$, ...

A l'aide des principes que nous venons d'établir, on pourra développer un grand nombre d'intégrales en séries convergentes qui fourniront des valeurs de ces intégrales aussi approchées que l'on voudra. C'est en cela que consiste l'*intégration par séries*. On peut même employer avec avantage cette méthode d'intégration pour développer en séries toutes sortes de quantités, et souvent ce qu'il y a de mieux à faire, pour y parvenir, c'est d'exprimer les quantités données par des intégrales définies auxquelles on applique ensuite la méthode dont il s'agit.

Exemples. — Pour développer en séries les fonctions $l(1+x)$, $\operatorname{arc\,tang} x$, $\operatorname{arc\,sin} x$, on aura recours aux formules

$$l(1+x) = \int_0^x \frac{dx}{1+x},$$

$$\operatorname{arc\,tang} x = \int_0^x \frac{dx}{1+x^2},$$

$$\operatorname{arc\,sin} x = \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \int_0^x (1-x^2)^{-\frac{1}{2}}\,dx;$$

et, comme on trouvera, entre les limites $x = -1$, $x = +1$,

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - \ldots,$$

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - \ldots,$$

$$(1-x^2)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1.3}{2.4}x^4 + \frac{1.3.5}{2.4.6}x^6 + \ldots,$$

l'intégration par séries donnera, entre ces mêmes limites,

$$\left\{\begin{aligned} l(1+x) &= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots, \\ \operatorname{arc\,tang} x &= x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \ldots, \\ \operatorname{arc\,sin} x &= x + \frac{1}{2}\frac{x^3}{3} + \frac{1.3}{2.4}\frac{x^5}{5} + \frac{1.3.5}{2.4.6}\frac{x^7}{7} + \ldots. \end{aligned}\right. \tag{12}$$

Si dans les équations (12) on pose $x = 1$, les séries comprises dans les seconds membres resteront convergentes, et l'on aura (en vertu du corollaire II)

$$\left\{\begin{aligned} l2 &= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \ldots, \\ \frac{\pi}{4} &= 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \ldots, \\ \frac{\pi}{2} &= 1 + \frac{1}{2}\frac{1}{3} + \frac{1.3}{2.4}\frac{1}{5} + \frac{1.3.5}{2.4.6}\frac{1}{7} + \ldots. \end{aligned}\right. \tag{13}$$

On démontre facilement (*voir* l'*Analyse algébrique*, page 163) [1] que deux séries convergentes ordonnées suivant les puissances ascendantes et entières de x ne peuvent donner la même somme, pour de très petites valeurs numériques de x, qu'autant que les coefficients des puissances semblables de x sont égaux dans les deux séries. De cette remarque et du théorème III (trente-huitième Leçon) il résulte que, si les deux séries demeurent convergentes et fournissent la même somme pour les valeurs réelles de x comprises entre

[1] *Œuvres de Cauchy*, S. I, T. III, p. 144.

les limites $-r$, $+r$ (r désignant une quantité positive), elles rempliront les mêmes conditions pour les valeurs imaginaires de x dont les modules seront inférieurs à r. Cela posé, on déduira sans peine des principes ci-dessus établis le théorème suivant :

Théorème II. — *Si, pour les valeurs réelles de z comprises entre les limites z_0, Z, et pour les valeurs réelles de x comprises entre les limites $-r$, $+r$, les fonctions*

$$f(x, z)$$

et

$$\mathrm{F}(x) = \int_{z_0}^{Z} f(x, z)\, dz \tag{14}$$

sont développables par le théorème de Maclaurin en séries convergentes ordonnées suivant les puissances ascendantes et entières de x; si d'ailleurs les sommes de ces séries, quand x devient imaginaire, continuent d'être représentées par les notations $f(x, z)$, $\mathrm{F}(x)$, l'équation (14) subsistera pour les valeurs imaginaires de x dont les modules seront inférieurs à r.

Exemple. — Comme on a, pour des valeurs quelconques de x,

$$\pi^{\frac{1}{2}} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-z^2} dz = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(z+x)^2} dz = e^{-x^2} \int_0^{\infty} e^{-z^2} (e^{-2zx} + e^{2zx})\, dz$$

et, par suite,

$$\int_0^{\infty} e^{-z^2} \frac{e^{2zx} + e^{-2zx}}{2}\, dz = \tfrac{1}{2} \pi^{\frac{1}{2}} e^{x^2}, \tag{15}$$

on en conclura, en remplaçant x par $x\sqrt{-1}$,

$$\int_0^{\infty} e^{-z^2} \cos 2zx\, dz = \tfrac{1}{2} \pi^{\frac{1}{2}} e^{-x^2}. \tag{16}$$

Cette dernière formule, que l'on doit à M. Laplace, est fort utile dans la solution de plusieurs problèmes.

ADDITION.

Depuis l'impression de cet Ouvrage, j'ai reconnu qu'à l'aide d'une formule très simple on pouvait ramener au Calcul différentiel la solution de plusieurs problèmes que j'avais renvoyés au Calcul intégral. Je vais, en premier lieu, donner cette formule; j'indiquerai ensuite ses principales applications.

D'après ce qui a été dit dans la septième Leçon, si l'on désigne par x_0, X deux valeurs de x entre lesquelles les fonctions $f(x)$ et $f(x)$ restent continues, et par θ un nombre inférieur à l'unité, on aura

$$\frac{f(\mathrm{X}) - f(x_0)}{\mathrm{X} - x_0} = f'[x_0 + \theta(\mathrm{X} - x_0)].$$

Or il est aisé de voir que des raisonnements entièrement semblables à ceux dont nous avons fait usage pour démontrer l'équation précédente suffiront pour établir la formule

$$\frac{f(\mathrm{X}) - f(x_0)}{\mathrm{F}(\mathrm{X}) - \mathrm{F}(x_0)} = \frac{f'[x_0 + \theta(\mathrm{X} - x_0)]}{\mathrm{F}'[x_0 + \theta(\mathrm{X} - x_0)]}, \tag{1}$$

θ désignant encore un nombre inférieur à l'unité, et $\mathrm{F}(x)$ une fonction nouvelle qui, toujours croissante ou décroissante depuis la limite $x = x_0$ jusqu'à la limite $x = \mathrm{X}$, reste continue, avec sa dérivée $\mathrm{F}'(x)$, entre ces mêmes limites.

On peut aussi démontrer directement la formule (1) à l'aide des principes établis dans la sixième Leçon (page 37). En effet, il résulte de ces principes que, dans l'hypothèse admise, la fonction $\mathrm{F}'(x)$ conservera constamment le même signe depuis $x = x_0$ jusqu'à $x = \mathrm{X}$. Par suite, si A et B représentent la plus petite et la plus grande des valeurs que reçoit le rapport $\frac{f'(x)}{F'(x)}$ dans cet intervalle, les deux produits

$$F'(x)\left[\frac{f'(x)}{F'(x)} - A\right] = f'(x) \quad - A\,F'(x),$$

$$F'(x)\left[B - \frac{f'(x)}{F'(x)}\right] = B\,F'(x) - f'(x)$$

resteront l'un et l'autre constamment positifs ou constamment négatifs entre les limites x_0, X de la variable x. Donc les deux fonctions

$$f(x) - A\,F(x), \quad B\,F(x) - f(x),$$

qui ont ces mêmes produits pour dérivées, croîtront ou décroîtront simultanément depuis la première limite jusqu'à la seconde. Donc la différence entre les valeurs extrêmes de la première fonction, savoir

$$f(X) - f(x_0) - A[F(X) - F(x_0)],$$

et la différence entre les valeurs extrêmes de la dernière, savoir

$$B[F(X) - F(x_0)] - [f(X) - f(x_0)],$$

seront deux quantités de même signe; d'où l'on peut conclure que la différence

$$f(X) - f(x_0)$$

sera comprise entre les deux produits

$$A[F(X) - F(x_0)], \quad B[F(X) - F(x_0)],$$

et la fraction

$$\frac{f(X) - f(x_0)}{F(X) - F(x_0)}$$

entre les limites A et B. D'ailleurs, les deux fonctions $f'(x)$, $F'(x)$ étant continues par hypothèse entre les limites $x = x_0$, $x = X$, toute quantité comprise entre A et B sera équivalente à une expression de la forme

$$\frac{f'[x_0 + \theta(x - x_0)]}{F'[x_0 + \theta(x - x_0)]},$$

θ désignant un nombre inférieur à l'unité. Il existera donc un nombre

de cette espèce propre à vérifier l'équation (1), ce qu'il fallait démontrer.

Si l'on fait $X = x_0 + h$, l'équation (1) deviendra

$$(2)\qquad \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{F(x_0 + h) - F(x_0)} = \frac{f'(x_0 + \theta h)}{F'(x_0 + \theta h)}.$$

Cette dernière, qui comprend, comme cas particulier, l'équation (6) de la septième Leçon, est susceptible de plusieurs applications importantes, ainsi qu'on va le prouver en peu de mots.

Concevons d'abord que les fonctions $f(x)$ et $F(x)$ s'évanouissent l'une et l'autre pour $x = x_0$, et faisons, pour abréger, $\theta h = h_1$. Dans ce cas, on tirera de la formule (2)

$$(3)\qquad \frac{f(x_0 + h)}{F(x_0 + h)} = \frac{f'(x_0 + h_1)}{F'(x_0 + h_1)},$$

h_1 étant une quantité de même signe que h, mais d'une valeur numérique moindre. Si les fonctions

$$f(x), \quad f'(x), \quad f''(x), \quad \ldots, \quad f^{(n-1)}(x),$$
$$F(x), \quad F'(x), \quad F''(x), \quad \ldots, \quad F^{(n-1)}(x)$$

s'évanouissaient toutes pour $x = x_0$ et demeuraient continues, aussi bien que $f^{(n)}(x)$ et $F^{(n)}(x)$, entre les limites $x = x_0$, $x = x_0 + h$, alors, en supposant chacune des fonctions

$$F(x), \quad F'(x), \quad F''(x), \quad \ldots, \quad F^{(n-1)}(x)$$

toujours croissante ou toujours décroissante depuis la première limite jusqu'à la seconde, et désignant par $h_1, h_2, \ldots, h_n$ des quantités de même signe, mais dont les valeurs numériques seraient de plus en plus petites, on obtiendrait, avec l'équation (3), une suite d'équations semblables dont la réunion composerait la formule

$$(4)\qquad \frac{f(x_0 + h)}{F(x_0 + h)} = \frac{f'(x_0 + h_1)}{F'(x_0 + h_1)} = \frac{f''(x_0 + h_2)}{F''(x_0 + h_2)} = \ldots = \frac{f^{(n)}(x_0 + h_n)}{F^{(n)}(x_0 + h_n)}.$$

Si, dans la formule (4), on se contente d'égaler la première fraction à la dernière, l'équation à laquelle on parviendra pourra s'écrire comme il suit

$$(5)\qquad \frac{f(x_0+h)}{F(x_0+h)} = \frac{f^{(n)}(x_0+\theta h)}{F^{(n)}(x_0+\theta h)},$$

θ étant toujours un nombre inférieur à l'unité. Enfin, si dans l'équation (5) on substitue à la quantité finie h une quantité infiniment petite désignée par i, on aura

$$(6)\qquad \frac{f(x_0+i)}{F(x_0+i)} = \frac{f^{(n)}(x_0+\theta i)}{F^{(n)}(x_0+\theta i)}.$$

Lorsque, dans les formules (5) et (6), on pose

$$F(x) = (x - x_0)^n,$$

on trouve

$$F^{(n)}(x) = 1.2.3\ldots n$$

et, par conséquent,

$$(7)\qquad \frac{f(x_0+h)}{h^n} = \frac{f^{(n)}(x_0+\theta h)}{1.2.3\ldots n},$$

$$(8)\qquad \frac{f(x_0+i)}{i^n} = \frac{f^{(n)}(x_0+\theta i)}{1.2.3\ldots n}.$$

Ces dernières équations s'accordent avec les formules (4) et (5) de la quinzième Leçon, et coïncident avec les formules (17), (18) de la trente-sixième. Elles peuvent être employées avec avantage, non seulement dans la recherche des maxima et minima, mais encore dans la détermination des valeurs des fractions qui se présentent sous la forme $\frac{0}{0}$. Au reste, pour résoudre ce dernier problème, il suffira le plus souvent de recourir à la formule (6). Admettons, en effet, que les deux termes de la fraction

$$\frac{f(x)}{F(x)}$$

et leurs dérivées successives, jusqu'à celles de l'ordre $n-1$, s'évanouissent pour $x = x_0$. La formule (6) subsistera généralement pour

de très petites valeurs numériques de i, parce qu'en général chacune des fonctions

$$F(x),\quad F'(x),\quad F''(x),\quad \ldots,\quad F^{(n-1)}(x)$$

croîtra ou décroîtra sans cesse depuis la valeur particulière de x représentée par x_0 jusqu'à une valeur très voisine; et l'on tirera de cette formule, en faisant converger i vers la limite zéro,

$$(9)\qquad \lim \frac{f(x_0+i)}{F(x_0+i)} = \lim \frac{f^{(n)}(x_0+\theta i)}{F^{(n)}(x_0+\theta i)} = \frac{f^{(n)}(x_0)}{F^{(n)}(x_0)}.$$

Si l'on remplace, dans la formule (7), x_0 par zéro, et la lettre f par $\mathcal{F}$, on en conclura

$$(10)\qquad \mathcal{F}(h) = \frac{h^n}{1.2.3\ldots n}\mathcal{F}^{(n)}(\theta h).$$

Cette dernière formule suppose que les fonctions

$$\mathcal{F}(h),\quad \mathcal{F}'(h),\quad \mathcal{F}''(h),\quad \ldots,\quad \mathcal{F}^{(n)}(h),$$

étant continues, à partir de la limite $h = 0$, s'évanouissent toutes, à l'exception de $\mathcal{F}^{(n)}(h)$, en même temps que la quantité h.

Soit maintenant $f(x)$ une fonction arbitraire de la variable x, mais telle que

$$f(x+h),\quad f'(x+h),\quad f''(x+h),\quad \ldots,\quad f^{(n)}(x+h)$$

restent continues par rapport à h, à partir de $h = 0$. On pourra aisément, à l'aide de la formule (10), extraire de $f(x+h)$, ou, ce qui revient au même, de la différence $f(x+h) - f(x)$ une suite de termes proportionnels aux puissances entières de h; et d'abord, puisque la différence $f(x+h) - f(x)$, considérée comme une fonction de h, s'évanouit avec h, et a pour dérivée du premier ordre $f'(x+h)$, il est clair qu'en substituant cette fonction à $\mathcal{F}(h)$, et posant $n = 1$, on tirera de la formule (10)

$$(11)\qquad f(x+h) - f(x) = \frac{h}{1} f'(x+\theta h).$$

Lorsque, dans le second membre de l'équation précédente, on remplace θ par zéro, on obtient le terme $\frac{h}{1}f'(x)$, et, en retranchant ce terme du premier membre, on trouve pour reste une nouvelle fonction de h, savoir

$$f(x+h)-f(x)-\frac{h}{1}f'(x).$$

Comme cette nouvelle fonction de h s'évanouit avec h, ainsi que sa dérivée du premier ordre, et qu'elle a pour dérivée du second ordre $f''(x+h)$, en la substituant à $\mathfrak{f}(h)$, et posant $n=2$, on tirera de la formule (10)

$$f(x+h)-f(x)-\frac{h}{1}f'(x)=\frac{h^2}{1.2}f''(x+\theta h). \tag{12}$$

Si, dans le second membre de l'équation (11), on remplace θ par zéro, on obtiendra le terme $\frac{h^2}{1.2}f''(x)$, et, en retranchant ce terme du premier membre, on trouvera pour reste une troisième fonction de h, savoir

$$f(x+h)-f(x)-\frac{h}{1}f'(x)-\frac{h^2}{1.2}f''(x).$$

Comme cette troisième fonction de h s'évanouit avec h, ainsi que ses dérivées du premier et du second ordre, et qu'elle a pour dérivée du troisième ordre $f'''(x+h)$, en la substituant à $\mathfrak{f}(h)$, et posant $n=3$, on tirera de la formule (10)

$$f(x+h)-f(x)-\frac{h}{1}f'(x)-\frac{h^2}{1.2}f''(x)=\frac{h^3}{1.2.3}f'''(x+\theta h). \tag{13}$$

etc. En continuant de la même manière, on établira généralement la formule

$$\left\{\begin{aligned}&f(x+h)-f(x)-\frac{h}{1}f'(x)-\frac{h^2}{1.2}f''(x)-\ldots\\&\qquad-\frac{h^{n-1}}{1.2.3\ldots(n-1)}f^{(n-1)}(x)=\frac{h^n}{1.2.3\ldots n}f^{(n)}(x+\theta h),\end{aligned}\right. \tag{14}$$

laquelle coïncide avec l'équation (12) de la trente-sixième Leçon. Si, dans cette formule, on remplace x par zéro, h par x, et f par F,

$F(x)$ désignant une fonction arbitraire de x, on trouvera

$$\left\{\begin{aligned}&F(x)-F(0)-\frac{x}{1}F'(0)-\frac{x^2}{1.2}F''(0)-\ldots\\&\qquad-\frac{x^{n-1}}{1.2.3\ldots(n-1)}F^{(n-1)}(0)=\frac{x^n}{1.2.3\ldots n}F^{(n)}(\theta x).\end{aligned}\right. \tag{15}$$

Cette dernière équation coïncide avec la formule (11) de la trente-sixième Leçon, et l'on peut encore y parvenir directement de la manière suivante.

Soient $F(x)$ une fonction quelconque de x, et $\varpi(x)$ un polynôme entier du degré $n-1$, assujetti à vérifier les équations de condition

$$\varpi(0)=F(0),\quad \varpi'(0)=F'(0),\quad \varpi''(0)=F''(0),\quad \ldots,\quad \varpi^{(n-1)}(0)=F^{(n-1)}(0);$$

$\varpi^{(n)}(x)$ étant alors identiquement nulle, si dans la formule (10) on remplace h par x, et $\mathfrak{f}(x)$ par $F(x)-\varpi(x)$, on trouvera

$$F(x)-\varpi(x)=\frac{x^n}{1.2.3\ldots n}F^{(n)}(\theta x); \tag{16}$$

et, comme on aura d'ailleurs (*voir* la dix-neuvième Leçon)

$$\left\{\begin{aligned}\varpi(x)&=\varpi(0)+\frac{x}{1}\varpi'(0)+\frac{x^2}{1.2}\varpi''(0)+\ldots+\frac{x^{n-1}}{1.2.3\ldots(n-1)}\varpi^{(n-1)}(0),\\&=F(0)+\frac{x}{1}F'(0)+\frac{x^2}{1.2}F''(0)+\ldots+\frac{x^{n-1}}{1.2.3\ldots(n-1)}F^{(n-1)}(0),\end{aligned}\right. \tag{17}$$

il est clair que la formule (16) entrainera l'équation (15).

Il importe d'observer que, dans tous les cas où les seconds membres des équations (14) et (15) convergent vers zéro pour des valeurs croissantes de n, on déduit immédiatement de ces formules les théorèmes de Taylor et de Maclaurin.

Si, dans la formule (8), on avait $x_0=0$, elle donnerait simplement

$$\frac{f(i)}{i^n}=\frac{f^{(n)}(\theta i)}{1.2.3\ldots n}. \tag{18}$$

Celle-ci suppose que les fonctions

$$f(i),\quad f'(i),\quad f''(i),\quad \ldots,\quad f^{(n-1)}(i),\quad f^{(n)}(i),$$

étant continues pour de très petites valeurs numériques de i, s'évanouissent toutes, à l'exception de la dernière, pour $i = 0$. Dans cette hypothèse, les rapports

$$\frac{f(i)}{i}, \quad \frac{f(i)}{i^2}, \quad \ldots, \quad \frac{f(i)}{i^{n-1}},$$

étant eux-mêmes équivalents à des expressions de la forme

$$\frac{f'(\theta i)}{1}, \quad \frac{f''(\theta i)}{1.2}, \quad \ldots, \quad \frac{f^{(n-1)}(\theta i)}{1.2.3\ldots(n-1)},$$

s'évanouiront tous avec i. Par conséquent, i et $f(i)$ représentant deux quantités infiniment petites,

$$\frac{f(i)}{i^n}$$

sera le premier terme de la progression géométrique

$$f(i), \quad \frac{f(i)}{i}, \quad \frac{f(i)}{i^2}, \quad \frac{f(i)}{i^3}, \quad \ldots \tag{19}$$

qui cesse d'être une quantité infiniment petite, si $f^{(n)}(0)$ est la première des quantités

$$f(0), \quad f'(0), \quad f''(0), \quad f'''(0), \quad \ldots \tag{20}$$

qui cesse d'être nulle. Ajoutons que, dans l'hypothèse admise,

$$\frac{f^{(n)}(0)}{1.2.3\ldots n}$$

sera, en vertu de la formule (18), la véritable valeur du rapport $\frac{f(i)}{i^n}$, correspondante à $i = 0$.

Les considérations précédentes nous conduisent naturellement à partager les quantités infiniment petites en différentes classes. Concevons, en effet, que toutes les quantités de cette espèce qui entrent dans un calcul soient des fonctions de l'une d'entre elles désignée par i, et nommons $f(i)$ l'une de ces fonctions. Plusieurs termes consécutifs de la progression (19), comptés à partir du premier terme, pourront être infiniment petits; et, suivant que le nombre de ces

termes sera 1, 2, 3, ..., nous dirons que la quantité $f(i)$ est un infiniment petit de première, de seconde, de troisième classe, etc. Cela posé, $f(i)$ sera un infiniment petit de la $n^{\text{ième}}$ *classe*, si $\frac{f(i)}{i^n}$ est le premier terme de la progression (19) qui cesse de s'évanouir avec i. Dans la même hypothèse, $f(i)$ deviendra ce qu'on appelle un *infiniment petit* de l'*ordre n*, si, pour des valeurs numériques décroissantes de i, le rapport $\frac{f(i)}{i^n}$ converge vers une limite finie différente de zéro.

Ces définitions étant admises, on déduira immédiatement des principes ci-dessus établis les propositions suivantes.

Théorème I. — *Lorsque $f(i)$ est un infiniment petit de $n^{\text{ième}}$ classe, $f^{(n)}(0)$ est le premier terme de la série (20) qui cesse d'être nul. Dans le même cas, $f(i)$ sera un infiniment petit de l'ordre n, si $f^{(n)}(0)$ obtient une valeur finie différente de zéro.*

Théorème II. — *Lorsque, $f(i)$ étant un infiniment petit de $n^{\text{ième}}$ classe, la fonction $f(x)$ et ses dérivées successives, jusqu'à celle de l'ordre n, restent continues entre les limites $x = 0$, $x = h$, on a, en désignant par m un nombre entier inférieur ou égal à n,*

$$f(h) = \frac{h^m}{1.2.3\ldots m} f^{(m)}(\theta h). \tag{21}$$

Si, dans cette dernière formule, on remplace h par i, et m par n, on retrouvera l'équation (18), à l'aide de laquelle on peut établir le théorème que nous allons énoncer.

Théorème III. — *Soit $f(i)$ une quantité infiniment petite de l'ordre n. Cette quantité changera de signe avec i, si n est un nombre impair, et sera constamment affectée du même signe que $f^{(n)}(0)$, si n est un nombre pair.*

Le théorème III suppose, comme la formule (18), que la fonction $f(i)$ et ses dérivées successives, jusqu'à celle de l'ordre n, restent continues par rapport à i dans le voisinage de la valeur particulière $i = 0$. Si cette condition n'était pas satisfaite, la quantité désignée par $f^{(n)}(0)$ pourrait admettre plusieurs valeurs, et, si ces valeurs n'étaient pas toutes de même signe, le théorème dont il s'agit cesserait d'exister. C'est ce qui arriverait, par exemple, si l'on prenait pour $f(i)$ la quantité infiniment petite $\sqrt{i^2}$. Dans cette hypothèse, la fonction dérivée

$$f'(i) = \frac{i}{\sqrt{i^2}}$$

admettrait une solution de continuité correspondante à $i = 0$, et se réduirait tantôt à $+1$, tantôt à -1, suivant que la valeur de i serait positive ou négative. Il est d'ailleurs évident que la quantité $\sqrt{i^2}$, quoique l'on se trouve naturellement porté à la considérer comme un infiniment petit du premier ordre, demeure constamment positive et ne change pas de signe avec i. La même remarque s'applique à la quantité infiniment petite $\sqrt{i^6}$, que l'on est naturellement conduit à regarder comme un infiniment petit du troisième ordre, etc.

Le théorème I fournit un moyen très simple de reconnaître la classe ou l'ordre d'une quantité infiniment petite. Ainsi, par exemple, on conclura de ce théorème que les quantités

$$\frac{1}{\mathrm{l}i}, \quad \sqrt{i}, \quad i^{\frac{2}{3}}, \quad \sin i$$

sont quatre infiniment petits de première classe, le dernier étant seul du premier ordre. On s'assurera de la même manière que les quatre quantités

$$\frac{i}{\mathrm{l}i}, \quad i^{\frac{3}{2}}, \quad \sin^2 i, \quad 1 - \cos i$$

sont des infiniment petits de seconde classe, les deux derniers étant du second ordre; que les trois quantités

$$\frac{i^2}{\mathrm{l}i}, \quad i^3, \quad i - \sin i$$

sont des infiniment petits de troisième classe, les deux derniers étant du troisième ordre, et ainsi de suite.

Lorsqu'on multiplie un infiniment petit de la $n^{\text{ième}}$ classe ou du $n^{\text{ième}}$ ordre par une quantité constante ou par une fonction de i qui a pour limite une quantité finie différente de zéro, on obtient évidemment pour produit un autre infiniment petit de la même classe ou du même ordre que le premier.

Il est encore facile de prouver que, parmi les quantités infiniment petites, celles qui appartiennent aux classes supérieures finissent par obtenir constamment les plus petites valeurs numériques. Soient, en effet, $\varphi(i)$, $\chi(i)$ deux quantités infiniment petites, la première de la $n^{\text{ième}}$ classe, la seconde de la $m^{\text{ième}}$, m étant $< n$. La première des deux fractions $\frac{\varphi(i)}{i^m}$, $\frac{\chi(i)}{i^m}$ sera la seule qui converge avec i vers la limite zéro; et par suite le rapport qu'on obtient en les divisant l'une par l'autre, ou la fraction $\frac{\varphi(i)}{\chi(i)}$, convergera également vers zéro, ce qu'elle ne peut faire, sans que sa valeur numérique s'abaisse au-dessous de l'unité, ou, en d'autres termes, sans que la valeur numérique du numérateur devienne inférieure à celle du dénominateur.

Enfin on établira facilement la proposition suivante :

Théorème IV. — *Désignons par i et par $f(i)$ deux quantités infiniment petites. Zéro sera la valeur unique ou l'une des valeurs que recevra le rapport*

$$\frac{f(i)}{f'(i)}, \tag{22}$$

lorsqu'on y fera évanouir la quantité i.

Démonstration. — Il suffit évidemment de démontrer le théorème IV, dans le cas où la fonction dérivée $f'(i)$ s'évanouit en même temps que $f(i)$ pour $i = 0$, attendu que la limite du rapport $\frac{f(i)}{f'(i)}$, nulle dans toute autre hypothèse, se présente alors seulement sous la forme indéterminée $\frac{0}{0}$. Or on y parviendra sans peine à l'aide de la formule (18), du moins lorsque les deux fonctions $f(i)$, $f'(i)$ seront continues par rapport à i, dans le voisinage de la valeur particulière $i=0$. En effet, si cette condition est remplie, on tirera de la formule (18), en posant $n=1$,

$$f(i)=i f'(\theta i), \tag{23}$$

et l'on aura, en conséquence,

$$\frac{f(i)}{f'(i)}=i\frac{f'(\theta i)}{f'(i)}, \tag{24}$$

θ désignant toujours un nombre inférieur à l'unité. Concevons maintenant que, dans la formule (24), on fasse décroître indéfiniment la valeur numérique de i, $f(0)$ étant nul par hypothèse, et θi désignant une quantité comprise entre zéro et i, $f'(\theta i)$ convergera plus rapidement que $f(i)$ vers la limite zéro, d'où il résulte que la fraction $\frac{f'(\theta i)}{f'(i)}$ obtiendra une multitude de valeurs numériques inférieures à l'unité, et le produit $i\frac{f'(\theta i)}{f'(i)}$ une multitude de valeurs sensiblement nulles. Donc la limite ou l'une des limites vers lesquelles convergeront ce même produit et le rapport qu'il représente sera égale à zéro.

Scolie I. — Le théorème IV peut être aisément vérifié à l'égard des fonctions

$$\sin i,\quad 1-\cos i,\quad e^{-\left(\frac{1}{i}\right)^2},\quad i^2\sin\frac{1}{i},\quad \ldots.$$

Il subsiste dans le cas même où la fonction $f(i)$ ne reste réelle et infiniment petite qu'autant que l'on attribue à la variable i des valeurs affectées d'un certain signe, comme il arrive, par exemple, quand on prend pour $f(i)$ l'une des fonctions

$$\mathrm{l}i,\quad \sqrt{i},\quad e^{-\frac{1}{i}},\quad e^{-\left(\frac{1}{i}\right)^3},\quad \ldots,$$

qui cessent d'être réelles ou infiniment petites, dès que l'on donne

à i des valeurs négatives. Enfin ce théorème peut subsister, quoique la fonction $f'(i)$ devienne discontinue pour $i=0$. Ainsi, en supposant

$$f(i)=i\sin\frac{1}{i}, \tag{25}$$

on trouvera que la fonction

$$f'(i)=\sin\frac{1}{i}-\frac{1}{i}\cos\frac{1}{i} \tag{26}$$

devient indéterminée, par conséquent discontinue, pour $i=0$; et, si l'on fait alors converger i vers la limite zéro, la valeur du rapport (22) tirée des équations (25) et (26), savoir

$$\frac{f(i)}{f'(i)}=\frac{i}{1-\frac{1}{i}\cot\frac{1}{i}}, \tag{27}$$

admettra un nombre infini de limites dont l'une sera égale à zéro.

Scolie II. — Supposons que, la fonction $f(i)$ et ses dérivées successives, jusqu'à celle de l'ordre de $n-1$, étant continues par rapport à i, dans le voisinage de la valeur particulière $i=0$, les n quantités

$$f(0),\quad f'(0),\quad f''(0),\quad \ldots,\quad f^{(n-1)}(0) \tag{28}$$

s'évanouissent; et concevons que la valeur numérique de i vienne à décroître indéfiniment. Zéro sera la limite ou l'une des limites vers lesquelles convergeront chacun des rapports

$$\frac{f(i)}{f'(i)},\quad \frac{f'(i)}{f''(i)},\quad \frac{f''(i)}{f'''(i)},\quad \ldots,\quad \frac{f^{(n-1)}(i)}{f^{(n)}(i)} \tag{29}$$

et, par conséquent, leur produit ou le rapport

$$\frac{f(i)}{f^{(n)}(i)}. \tag{30}$$

On peut en dire autant des expressions

$$\frac{f'(i)}{f^{(n)}(i)},\quad \frac{f''(i)}{f^{(n)}(i)},\quad \ldots,\quad \frac{f^{(n-2)}(i)}{f^{(n)}(i)} \tag{31}$$

que l'on obtient en multipliant les uns par les autres quelques-uns des rapports dont il s'agit.

SUR LES

FORMULES DE TAYLOR ET DE MACLAURIN.

On prouve facilement que, dans le cas où la fraction

$$\frac{\mathcal{F}(h)}{h^{n-1}} \tag{1}$$

s'évanouit pour $h = 0$, on a

$$\mathcal{F}(h) = \frac{h^n}{1.2.3\ldots n}\mathcal{F}^{(n)}(\theta h), \tag{2}$$

θ désignant un nombre inconnu, mais inférieur à l'unité. Or l'équation (2), à l'aide de laquelle on peut établir directement la théorie des maxima ou minima et fixer les valeurs des fractions qui se présentent sous la forme $\frac{0}{0}$, conduit aussi très simplement à la série de Taylor et à la détermination du reste qui doit compléter cette série. En effet, on tirera successivement de l'équation (2) :

1° En posant $\mathcal{F}(h) = f(x+h) - f(x)$ et $n = 1$,

$$f(x+h) - f(x) = \frac{h}{1}f'(x+\theta h); \tag{3}$$

puis, en posant $f'(x+h) = f'(x) + \mathrm{H}_1$,

$$\mathrm{H}_1 = \frac{f(x+h) - f(x) - \frac{h}{1}f'(x)}{h};$$

2° En posant $\mathcal{F}(h) = f(x+h) - f(x) - h\,f'(x)$ et $n = 2$,

$$f(x+h) - f(x) - h\,f'(x) = \frac{h^2}{1.2}f''(x+\theta h); \tag{4}$$

puis, en posant $f''(x+\theta h) = f''(x) + \text{H}_2$,

$$\frac{1}{1.2}\text{H}_2 = \frac{f(x+h) - f(x) - hf'(x) - \frac{h^2}{1.2}f''(x)}{h^2};$$

3° En posant $\zeta(h) = f(x+h) - f(x) - hf'(x) - \frac{h^2}{1.2}f''(x)$ et $n = 3$,

$$(5)\qquad f(x+h) - f(x) - hf'(x) - \frac{h^2}{1.2}f''(x) = \frac{h^3}{1.2.3}f'''(x+\theta h);$$

puis, en posant $f'''(x+\theta h) = f'''(x) + \text{H}_3$,

$$\frac{1}{1.2.3}\text{H}_3 = \frac{f(x+h) - f(x) - hf'(x) - \frac{h^2}{1.2}f''(x) - \frac{h^3}{1.2.3}f'''(x)}{h^3}.$$

En continuant de la même manière, et observant que les quantités

$$\text{H}_1,\quad \frac{1}{1.2}\text{H}_2,\quad \frac{1}{1.2.3}\text{H}_3,\quad \ldots$$

s'évanouissent toutes avec h, on établira généralement l'équation

$$(6)\qquad \left\{\begin{aligned} &f(x+h) - f(x) - hf'(x) - \frac{h^2}{1.2}f''(x) - \ldots \\ &\qquad - \frac{h^{n-1}}{1.2.3\ldots(n-1)}f^{(n-1)}(x) = \frac{h^n}{1.2\ldots n}f^{(n)}(x+\theta h) \end{aligned}\right.$$

ou

$$(7)\qquad \left\{\begin{aligned} &f(x+h) = f(x) + \frac{h}{1}f'(x) + \frac{h^2}{1.2}f''(x) + \ldots \\ &\qquad + \frac{h^{n-1}}{1.2.3\ldots(n-1)}f^{(n-1)}(x) + \frac{h^n}{1.2\ldots n}f^{(n)}(x+\theta h). \end{aligned}\right.$$

Si l'on y remplace x par o, et h par x, on trouvera

$$(8)\qquad \left\{\begin{aligned} &f(x) = f(0) + \frac{x}{1}f'(0) + \frac{x^2}{1.2}f''(0) + \ldots \\ &\qquad + \frac{x^{n-1}}{1.2.3\ldots(n-1)}f^{(n-1)}(0) + \frac{x^n}{1.2.3\ldots n}f^{(n)}(\theta x). \end{aligned}\right.$$

Il suit de la formule (7) que la fonction $f(x+h)$ peut être considérée comme composée d'une fonction entière de h, savoir

$$(9)\qquad f(x) + \frac{h}{1}f'(x) + \frac{h^2}{1.2}f''(x) + \ldots + \frac{h^{n-1}}{1.2.3\ldots(n-1)}f^{(n-1)}(x),$$

et d'un reste, savoir

$$(10)\qquad \frac{h^n}{1.2.3\ldots n}f^{(n)}(x+\theta h).$$

Lorsque ce reste devient infiniment petit pour des valeurs infiniment grandes du nombre n, on peut affirmer que la série

$$(11)\qquad f(x),\quad hf'(x),\quad \frac{h^2}{1.2}f''(x),\quad \ldots$$

est convergente, et qu'elle a pour somme $f(x+h)$. Donc alors on peut écrire l'équation

$$(12)\qquad f(x+h) = f(x) + \frac{h}{1}f'(x) + \frac{h^2}{1.2}f''(x) + \ldots,$$

qui est précisément la formule de Taylor. De même, si le reste

$$(13)\qquad \frac{x^n}{1.2.3\ldots n}f^{(n)}(\theta x)$$

devient infiniment petit pour des valeurs infinies de n, l'équation (8) entraînera la suivante

$$(14)\qquad f(x) = f(0) + \frac{x}{1}f'(0) + \frac{x^2}{1.2}f''(0) + \ldots,$$

qui est précisément la formule de Maclaurin.

Il est souvent utile de substituer aux expressions (10) et (13) d'autres expressions équivalentes. On peut y parvenir comme il suit.

Désignons par $\varphi(z)$ ce que devient le premier membre de l'équation (6) quand on y remplace h par $h - z$ et x par $x + z$, ou, en d'autres termes, le reste qu'on obtient quand on développe $f(x+h)$ suivant les puissances ascendantes et entières de $h - z$, et que l'on s'arrête à la puissance du degré $n-1$; en sorte qu'on ait

$$(15)\qquad \left\{\begin{aligned} f(x+h) &= f(x+z)+\frac{h-z}{1}f'(x+z)+\ldots \\ &\quad+\frac{(h-z)^{n-1}}{1.2.3\ldots(n-1)}f^{(n-1)}(x+z)+\varphi(z). \end{aligned}\right.$$

$\varphi(0)$ représentera la valeur commune de chacun des membres de l'équation (6). De plus, en différentiant par rapport à z la formule (15), on trouvera

$$(16)\qquad \varphi'(z)=-\frac{(h-z)^{n-1}}{1.2.3\ldots(n-1)}f^{(n)}(x+z),$$

et l'on en conclura

$$(17)\qquad \frac{\varphi(h)-\varphi(0)}{h}=-\frac{(h-\theta h)^{n-1}}{1.2.3\ldots(n-1)}f^{(n-1)}(x+\theta h)$$

ou, parce que $\varphi(h)$ se réduit évidemment à zéro,

$$(18)\qquad \varphi(0)=\frac{(h-\theta h)^{n-1}}{1.2.3\ldots(n-1)}h\,f^{(n)}(x+\theta h).$$

La valeur précédente de $\varphi(0)$ n'est autre chose que le reste de la série de Taylor présenté sous une nouvelle forme. Si, dans ce reste, on remplace x par 0, et h par x, on obtiendra le reste de la série de Maclaurin sous la forme suivante :

$$(19)\qquad x\frac{(x-\theta x)^{n-1}}{1.2.3\ldots(n-1)}f^{(n)}(\theta x).$$

Il suffit, dans plusieurs cas, de substituer ce dernier produit à l'expression (13) pour établir la formule (14). Supposons, par exemple,

$$(20)\qquad f(x)=(1+x)^{\mu},$$

μ désignant une constante réelle. Les expressions (13) et (19) deviendront respectivement

$$(21)\qquad \frac{\mu(\mu-1)\ldots(\mu-n+1)}{1.2.3\ldots n}x^n(1+\theta x)^{\mu-n}$$

et

$$(22)\qquad \frac{\mu(\mu-1)\ldots(\mu-n+1)}{1.2.3\ldots(n-1)}x^n(1-\theta)^{n-1}(1+\theta x)^{\mu-n}.$$

Cela posé, on prouvera facilement, 1° à l'aide de l'expression (21), que l'équation

$$(23)\qquad (1+x)^{\mu}=1+\frac{\mu}{1}x+\frac{\mu(\mu-1)}{1.2}x^2+\ldots$$

subsiste quand la valeur numérique du rapport

$$(24)\qquad \frac{x}{1+\theta x}$$

est inférieure à l'unité; 2° à l'aide de l'expression (22), que l'équation (23) subsiste quand le produit

$$(25)\qquad x\frac{1-\theta}{1+\theta x}$$

est compris entre les limites -1 et 1. Par suite, il suffira d'employer l'expression (21) pour établir la formule (23) entre les limites $x=0$, $x=1$. Mais il faudra revenir à l'expression (22), si l'on veut étendre la même formule à toutes les valeurs de x comprises entre les limites $x=-1$, $x=+1$.