NOTES.

NOTE I.

SUR LA THÉORIE DES QUANTITÉS POSITIVES ET NÉGATIVES.

On a beaucoup disputé sur la nature des quantités positives ou négatives, et l'on a donné à ce sujet diverses théories. Celle que nous avons adoptée (*voir* les Préliminaires, pages 2 et 3) nous paraît la plus propre à éclaircir toutes les difficultés. Nous allons d'abord la rappeler en peu de mots. Nous montrerons ensuite comment l'on en déduit la règle des signes.

De même qu'on voit l'idée de nombre naître de la mesure des grandeurs, de même on acquiert l'idée de quantité (positive ou négative) lorsque l'on considère chaque grandeur d'une espèce donnée comme devant servir à l'accroissement ou à la diminution d'une autre grandeur fixe de même espèce. Pour indiquer cette destination, on représente les grandeurs qui doivent servir d'accroissements par des nombres précédés du signe $+$, et les grandeurs qui doivent servir de diminutions par des nombres précédés du signe $-$. Cela posé, les signes $+$ ou $-$ placés devant les nombres peuvent être comparés, suivant la remarque qui en a été faite [1], à des adjectifs placés auprès de leurs substantifs. On désigne les nombres précédés du signe $+$ sous le nom de *quantités positives*, et les nombres précédés du signe $-$ sous le nom de *quantités négatives*. Enfin, l'on est convenu de ranger les nombres absolus qui ne sont précédés d'aucun signe dans la classe des quantités positives; et c'est pour cette raison qu'on se dispense quelquefois d'écrire le signe $+$ devant les nombres qui doivent représenter des quantités de cette espèce.

En Arithmétique, on opère toujours sur des nombres dont la valeur particulière est connue, et qui sont par conséquent donnés en chiffres; tandis que dans l'Algèbre, où l'on considère les propriétés générales des nombres,

[1] *Transactions philosophiques*, année 1806.

on représente ordinairement ces mêmes nombres par des lettres. Une quantité se trouve alors exprimée par une lettre précédée du signe $+$ ou $-$. Au reste, rien n'empêche de représenter les quantités par de simples lettres aussi bien que les nombres. C'est un artifice qui augmente les ressources de l'Analyse; mais, lorsqu'on veut en faire usage, il est nécessaire d'avoir égard aux conventions suivantes.

Comme, dans le cas où la lettre A représente un nombre, on peut, d'après ce qui a été dit ci-dessus, désigner la quantité positive dont la valeur numérique est égale à A, soit par $+A$, soit par A seulement, tandis que $-A$ désigne la quantité opposée, c'est-à-dire la quantité négative dont A est la valeur numérique : ainsi, dans le cas où la lettre a représente une quantité, on regarde comme synonymes les deux expressions a et $+a$, et l'on désigne par $-a$ la quantité opposée.

D'après ces conventions, si l'on représente par A soit un nombre, soit une quantité quelconque, et que l'on fasse

$$a = +A, \qquad b = -A,$$

on aura

$$+a = +A, \qquad +b = -A,$$
$$-a = -A, \qquad -b = +A.$$

Si dans les quatre dernières équations on remet pour a et b leurs valeurs entre parenthèses, on obtiendra les formules

$$(1) \qquad \begin{cases} +(+A) = +A, & +(-A) = -A, \\ -(+A) = -A, & -(-A) = +A. \end{cases}$$

Dans chacune de ces formules le signe du second membre est ce qu'on appelle le *produit* des deux signes du premier. *Multiplier* deux signes l'un par l'autre, c'est former leur produit. L'inspection seule des équations (1) suffit pour établir la *règle des signes*, comprise dans le théorème que je vais énoncer.

Théorème I. — *Le produit de deux signes semblables est toujours* $+$, *et le produit de deux signes opposés est toujours* $-$.

Il suit encore des mêmes équations que le produit de deux signes, lorsque l'un des deux est $+$, reste égal à l'autre. Si donc on a plusieurs signes à multiplier entre eux, on pourra faire abstraction de tous les signes $+$. De cette remarque on déduit facilement les propositions suivantes :

Théorème II. — *Si l'on multiplie plusieurs signes les uns par les autres dans un ordre quelconque, le produit sera toujours* $+$, *lorsque les signes* $-$ *seront en nombre pair, et le produit sera* $-$, *dans le cas contraire.*

Théorème III. — *Le produit de tant de signes que l'on voudra reste le même, dans quelque ordre qu'on les multiplie.*

Une conséquence immédiate des définitions qui précèdent, c'est que la multiplication des signes n'a aucun rapport avec la multiplication des nombres. Mais on n'en sera point étonné, si l'on observe que la notion du produit de deux signes se présente dès les premiers pas que l'on fait en Analyse, puisque dans l'addition ou la soustraction d'un monôme on multiplie réellement le signe de ce monôme par le signe $+$ ou $-$.

En partant des principes que nous venons d'établir, on lèvera facilement toutes les difficultés que peut offrir l'emploi des signes $+$ et $-$ dans les opérations de l'Algèbre et de la Trigonométrie. Seulement il faudra distinguer avec soin les opérations relatives aux nombres de celles qui se rapportent aux quantités positives ou négatives. On devra surtout s'attacher à fixer d'une manière précise le but des unes et des autres, à définir leurs résultats et à en montrer les propriétés principales. C'est ce que nous allons essayer de faire en peu de mots, pour les diverses opérations que l'on a coutume d'exécuter.

ADDITION ET SOUSTRACTION.

Sommes et différences des nombres. — Ajouter au nombre A le nombre B ou, en d'autres termes, faire subir au nombre A l'accroissement $+B$, c'est ce qu'on appelle faire une *addition arithmétique*. Le résultat de cette opération s'appelle *somme*. On l'indique en plaçant à la suite du nombre A son accroissement $+B$, ainsi qu'il suit :

$$A + B.$$

On ne démontre pas, mais on admet comme évident que la *somme de plusieurs nombres reste la même dans quelque ordre qu'on les ajoute*. C'est un axiome fondamental sur lequel reposent l'Arithmétique, l'Algèbre et toutes les sciences de calcul.

La *soustraction arithmétique* est l'inverse de l'addition. Elle consiste à retrancher d'un premier nombre A un second nombre B, c'est-à-dire à chercher un troisième nombre C qui, ajouté au second, reproduise le premier. C'est là aussi ce qu'on appelle faire subir au nombre A la diminution $-B$. Le résultat de cette opération se nomme *différence*. On l'indique en plaçant à la suite du nombre A la diminution $-$ B, ainsi qu'il suit :

$$A - B.$$

Quelquefois on désigne la différence A $-$ B sous le nom d'*excès*, ou de *reste*, ou de *rapport arithmétique* entre les deux nombres A et B.

Sommes et différences des quantités. — Nous avons expliqué dans les préliminaires ce que c'est qu'ajouter deux quantités entre elles. En ajoutant plusieurs quantités les unes aux autres, on obtient ce qu'on appelle leur *somme*. Il est facile de démontrer, en s'appuyant sur l'axiome relatif à l'addition des nombres, la proposition suivante :

Théorème IV. — *La somme de plusieurs quantités reste la même, dans quelque ordre qu'on les ajoute.*

On indique la somme unique de plusieurs quantités par la simple juxtaposition des lettres qui représentent soit leurs valeurs numériques, soit les quantités elles-mêmes, chaque lettre étant précédée du signe qu'elle doit avoir pour rester ou devenir propre à exprimer la quantité correspondante. Les différentes lettres peuvent d'ailleurs être disposées dans un ordre quelconque, et il est permis de supprimer le signe $+$ devant la première lettre. Considérons, par exemple, les quantités

$$a,\quad b,\quad c,\quad \ldots,\quad -f,\quad -g,\quad -h,\quad \ldots.$$

Leur somme pourra être représentée par l'expression

$$a-f-g+b-h+c+\ldots.$$

Dans une semblable expression, chacune des quantités

$$a,\quad b,\quad c,\quad \ldots,\quad -f,\quad -g,\quad -h,\quad \ldots$$

est ce qu'on appelle un *monôme*. L'expression elle-même est un *polynôme* dont les monômes en question sont les différents *termes*.

Lorsqu'un polynôme renferme seulement deux, trois, quatre, ... termes, il prend le nom de *binôme, trinôme, quadrinôme*, ...

On prouve aisément que deux polynômes dont tous les termes sont égaux et de signes contraires représentent deux quantités opposées.

La *différence* entre une première quantité et une seconde, c'est une troisième quantité qui, ajoutée à la seconde, reproduit la première. En partant de cette définition, on démontre que, *pour soustraire d'une première quantité une seconde quantité b, il suffit d'ajouter à la première la quantité opposée à b, c'est-à-dire $-b$*. On en conclut que la différence des deux quantités a et b doit être représentée par

$$a-b.$$

Nota. — La soustraction étant l'inverse de l'addition peut toujours s'indiquer de deux manières. Ainsi, par exemple, pour exprimer que la quantité c est la différence des deux quantités a et b, on peut écrire indifféremment

$$a-b=c \quad \text{ou} \quad a=b+c.$$

MULTIPLICATION ET DIVISION.

Produits et quotients des nombres. — *Multiplier* le nombre A par le nombre B, c'est opérer sur le nombre A précisément comme on opère sur l'unité pour obtenir B. Le résultat de cette opération est ce qu'on appelle le *produit* de A par B. Pour bien comprendre la définition précédente de la *multiplication*, il faut distinguer différents cas suivant l'espèce du nombre B. Or ce nombre peut être tantôt rationnel, c'est-à-dire entier ou fractionnaire, tantôt irrationnel, c'est-à-dire non rationnel.

Lorsque B est un nombre entier, il suffit, pour obtenir B, d'ajouter l'unité plusieurs fois de suite à elle-même. Il faudra donc alors, pour former le produit de A par B, ajouter le nombre A à lui-même un pareil nombre de fois, c'est-à-dire faire la somme d'autant de nombres égaux à A qu'il y a d'unités dans B.

Lorsque B est une fraction qui a pour numérateur m et pour dénominateur n, l'opération par laquelle on parvient au nombre B consiste à partager l'unité en n parties égales et à répéter m fois le résultat trouvé. On obtiendra donc alors le produit de A par B, en partageant le nombre A en n parties égales, et répétant l'une de ces parties m fois.

Lorsque B est un nombre irrationnel, on peut en obtenir en nombres rationnels des valeurs de plus en plus approchées. On fait voir aisément que dans la même hypothèse le produit de A par les nombres rationnels dont il s'agit s'approche de plus en plus d'une certaine limite. Cette limite sera le produit de A par B. Si l'on suppose, par exemple, B $=$ o, on trouvera une limite nulle, et l'on en conclura que le produit d'un nombre quelconque par zéro s'évanouit.

Dans la multiplication de A par B, le nombre A s'appelle *multiplicande*, et le nombre B *multiplicateur*. Ces deux nombres sont aussi désignés conjointement sous le nom de *facteurs* du produit.

Pour indiquer le produit de A par B, on emploie indifféremment l'une des trois notations suivantes :

$$B \times A, \quad B.A, \quad BA.$$

Le produit de plusieurs nombres reste le même dans quelque ordre qu'on les multiplie. Cette proposition, lorsqu'il s'agit de deux ou trois facteurs entiers seulement, se déduit de l'axiome relatif à l'addition des nombres. On peut ensuite la démontrer successivement : 1° pour deux ou trois facteurs rationnels; 2° pour deux ou trois facteurs irrationnels; 3° enfin pour un nombre quelconque de facteurs rationnels ou irrationnels.

Diviser le nombre A par le nombre B, c'est chercher un troisième nombre dont le produit par B soit égal à A. L'opération par laquelle on y parvient s'appelle *division*, et le résultat de cette opération *quotient*. De plus, le nombre A prend le nom de *dividende*, et le nombre B celui de *diviseur*.

Pour indiquer le quotient de A par B, on emploie à volonté l'une des deux notations suivantes :

$$\frac{A}{B}, \quad A:B.$$

Quelquefois on désigne le quotient A : B sous le nom de *rapport* ou *raison géométrique* des deux nombres A et B.

L'égalité de deux rapports géométriques A : B, C : D ou, en d'autres termes, l'équation

$$A:B = C:D$$

est ce qu'on appelle une *proportion géométrique*. Ordinairement au lieu du signe = on emploie le suivant :: qui a la même valeur, et l'on écrit

$$A:B::C:D.$$

Nota. — Lorsque B est un nombre entier, diviser A par B, c'est, d'après la définition, chercher un nombre qui, répété B fois, reproduise A. C'est donc partager le nombre A en autant de parties égales qu'il y a d'unités dans B. On conclut facilement de cette remarque que, si m et n désignent deux nombres entiers, la $n^{\text{ième}}$ partie de l'unité devra être représentée par

$$\frac{1}{n},$$

et la fraction, qui a pour numérateur m et pour dénominateur n, par

$$m \times \frac{1}{n}.$$

Telle est, en effet, la notation par laquelle on doit naturellement désigner la fraction dont il s'agit. Mais, comme on prouve aisément que le produit

$$m \times \frac{1}{n}$$

est équivalent au quotient de m par n, c'est-à-dire à $\frac{m}{n}$, il en résulte que la même fraction peut être représentée plus simplement par la notation

$$\frac{m}{n}.$$

Produits et quotients des quantités. — Le *produit* d'une première quantité par une seconde est une troisième quantité qui a pour valeur numérique le produit des valeurs numériques des deux autres, et pour signe le produit de leurs signes. *Multiplier* deux quantités l'une par l'autre, c'est former leur produit. L'une des deux quantités s'appelle *multiplicateur*, l'autre *multiplicande*, et toutes les deux conjointement facteurs du produit.

Ces définitions étant admises, on établira facilement la proposition suivante :

Théorème V. — *Le produit de plusieurs quantités reste le même, dans quelque ordre qu'on les multiplie.*

Pour démontrer cette proposition, il suffit de combiner la proposition semblable relative aux nombres avec le théorème III relatif aux signes (*voir* ci-dessus, page 335).

Diviser une première quantité par une seconde, c'est chercher une troisième quantité qui, multipliée par la seconde, reproduise la première. L'opération par laquelle on y parvient s'appelle *division*; la première quantité *dividende*, la seconde *diviseur*, et le résultat de l'opération *quotient*. Quelquefois on désigne le quotient sous le nom de *rapport* ou *raison géométrique* des deux quantités données. En partant des définitions précédentes, on prouve facilement que *le quotient de deux quantités a pour valeur numérique le quotient de leurs valeurs numériques, et pour signe le produit de leurs signes.*

La multiplication et la division des quantités s'indiquent tout comme la multiplication et la division des nombres.

Nous dirons que deux quantités sont *inverses* l'une de l'autre lorsque le produit de ces deux quantités sera l'unité. D'après cette définition, la quantité a aura pour inverse $\frac{1}{a}$, et réciproquement.

On a remarqué plus haut que ce qu'on appelle *fraction* en Arithmétique est égal au rapport ou quotient de deux nombres entiers. En Algèbre, on désigne aussi sous le nom de *fraction* le rapport ou quotient de deux quantités quelconques. Si donc a et b représentent deux quantités, leur rapport $\frac{a}{b}$ sera une fraction algébrique.

Nous observerons encore que la division, étant une opération inverse de la multiplication, peut toujours s'indiquer de deux manières. Ainsi, par exemple, pour exprimer que la quantité c est le quotient de deux quantités a et b, on peut écrire indifféremment

$$\frac{a}{b} = c \quad \text{ou} \quad a = bc.$$

Les produits et quotients de nombres et de quantités jouissent de propriétés générales auxquelles on a souvent recours. Nous avons déjà parlé de celle qu'a tout produit de rester le même, dans quelque ordre que l'on multiplie ses facteurs. D'autres propriétés non moins remarquables se trouvent comprises dans les formules que je vais écrire.

Soient

$$a,\ b,\ c,\ \ldots,\ k,\quad a',\ b',\ \ldots,\quad a'',\ b'',\ \ldots,\quad \ldots$$

plusieurs suites de quantités positives ou négatives. On aura, pour toutes les valeurs possibles de ces mêmes quantités,

$$(2)\quad \left\{\begin{aligned} & k(a+b+c+\ldots) = ka+kb+kc+\ldots, \\ & \frac{a+b+c+\ldots}{k} = \frac{a}{k}+\frac{b}{k}+\frac{c}{k}+\ldots, \\ & \frac{a}{b}\times\frac{a'}{b'}\times\frac{a''}{b''}\times\ldots = \frac{a\,a'\,a''\ldots}{b\,b'\,b''\ldots}, \\ & \frac{k}{\frac{a}{b}} = \frac{bk}{a} = \frac{b}{a}\times k. \end{aligned}\right.$$

Les quatre formules qui précèdent donnent lieu à une foule de conséquences

qu'il serait trop long d'énumérer ici en détail. On conclura, par exemple, de la troisième formule : 1° que les fractions

$$\frac{a}{b},\quad \frac{ka}{kb}$$

sont égales entre elles, a, b, k désignant des quantités quelconques; 2° que la fraction $\frac{a}{b}$ a pour inverse $\frac{b}{a}$; 3° que, pour diviser une quantité k par une autre quantité a, il suffit de multiplier k par la quantité inverse de a, c'est-à-dire par $\frac{1}{a}$.

ÉLÉVATION AUX PUISSANCES. EXTRACTION DES RACINES.

Puissances et racines des nombres. Exposants positifs. — *Élever* le nombre A à la *puissance* marquée par le nombre B, c'est chercher un troisième nombre qui soit formé de A par la multiplication, comme B est formé de l'unité par l'addition. Le résultat de cette opération faite sur le nombre A est ce qu'on appelle sa puissance du *degré* B. Pour bien concevoir la définition précédente de l'élévation aux puissances, il faut distinguer trois cas, suivant que le nombre B est entier, fractionnaire ou irrationnel.

Lorsque B désigne un nombre entier, ce nombre est la somme de plusieurs unités. La puissance de A, du degré B, doit donc alors être le produit d'autant de facteurs égaux à A qu'il y a d'unités dans B.

Lorsque B représente une fraction $\frac{m}{n}$ (m et n étant deux nombres entiers), il faut, pour obtenir cette fraction : 1° chercher un nombre qui, répété n fois, reproduise l'unité; 2° répéter m fois le nombre dont il s'agit. Il faudra donc alors, pour obtenir la puissance de A, du degré $\frac{m}{n}$: 1° chercher un nombre tel que la multiplication de n facteurs égaux à ce nombre reproduise A; 2° former un produit de m facteurs égaux à ce même nombre. Quand on suppose en particulier $m = 1$, la puissance de A que l'on considère se réduit à celle du degré $\frac{1}{n}$, et se trouve déterminée par la seule condition que le nombre A soit équivalent au produit de n facteurs égaux à cette même puissance.

Lorsque B est un nombre irrationnel, on peut en obtenir en nombres rationnels des valeurs de plus en plus rapprochées. On prouve facilement que dans la même hypothèse les puissances de A, marquées par les nombres rationnels dont il s'agit, s'approchent de plus en plus d'une certaine limite. Cette limite est la puissance de A du degré B.

Dans l'élévation du nombre A à la puissance du degré B, le nombre A s'appelle *racine*, et le nombre B, qui marque le degré de la puissance, *exposant*. Pour représenter la puissance de A du degré B, on se sert de la notation suivante

$$A^B.$$

D'après les définitions qui précèdent, la première puissance d'un nombre n'est autre chose que ce nombre lui-même. Sa seconde puissance est le produit de deux facteurs égaux à ce nombre, sa troisième de trois semblables facteurs, et ainsi de suite. Des considérations géométriques ont conduit à désigner la seconde puissance sous le nom de *carré*, et la troisième sous le nom de *cube*. Quant à la puissance du degré zéro, elle sera la limite vers laquelle converge la puissance du degré B, tandis que le nombre B décroît indéfiniment. Il est aisé de faire voir que cette limite se réduit à l'unité; d'où il résulte qu'on a, en général,

$$A^0 = 1.$$

Nous supposons toutefois que la valeur du nombre A reste finie et diffère de zéro.

Extraire du nombre A la *racine* marquée par le nombre B, c'est chercher un troisième nombre qui, élevé à la puissance du degré B, reproduise A. L'opération par laquelle on y parvient s'appelle *extraction*, et le résultat de l'opération est la racine de A du *degré* B. Le nombre B, qui marque le degré de la racine, se nomme *indice*. Pour la représenter, on se sert de la notation suivante :

$$\sqrt[B]{A}.$$

Les racines du second et du troisième degré sont ordinairement désignées sous le nom de *racines carrées* et *cubiques*. Lorsqu'il s'agit d'une racine carrée, on se dispense presque toujours d'écrire au-dessus du signe $\sqrt{}$ l'indice 2 de cette racine. Ainsi les deux notations

$$\sqrt[2]{A}, \quad \sqrt{A}$$

doivent être considérées comme équivalentes.

Nota. — L'extraction des racines des nombres, étant l'inverse de leur élévation aux puissances, peut toujours être indiquée de deux manières. Ainsi, par exemple, pour exprimer que le nombre C est égal à la racine de A, du

degré B, on peut écrire à volonté

$$A = C^B \quad \text{ou} \quad C = \sqrt[B]{A}.$$

Remarquons encore qu'en vertu des définitions, si l'on désigne par n un nombre entier quelconque, $A^{\frac{1}{n}}$ sera un nombre tel que la multiplication de n facteurs égaux à ce nombre reproduise A. En d'autres termes, on aura

$$\left(A^{\frac{1}{n}}\right)^n = A,$$

d'où l'on conclura

$$A^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{A}.$$

Ainsi, lorsque n est un nombre entier, la puissance de A, du degré $\frac{1}{n}$, et la racine $n^{\text{ième}}$ de A sont des expressions équivalentes. On prouve facilement qu'il en est de même dans le cas où l'on remplace le nombre entier n par un nombre quelconque.

Puissances des nombres. Exposants négatifs. — *Élever* le nombre A à la *puissance* marquée par l'*exposant négatif* $-B$, c'est diviser l'unité par A^B. La valeur de l'expression

$$A^{-B}$$

se trouve donc déterminée par l'équation

$$A^{-B} = \frac{1}{A^B},$$

qu'on peut aussi mettre sous la forme

$$A^B A^{-B} = 1.$$

Par suite, si l'on élève un même nombre à deux puissances marquées par deux quantités opposées, on obtiendra pour résultats deux quantités positives inverses l'une de l'autre.

Puissances et racines réelles des quantités. — Si, dans les définitions que nous avons données des puissances et racines des nombres correspondantes à des exposants, ou entiers, ou fractionnaires, on substitue le mot de *quantités* à celui de *nombres*, on obtiendra les définitions suivantes pour les puissances et racines réelles des quantités.

Élever la quantité a à la *puissance réelle du degré m*, m étant un nombre entier, c'est former le produit d'autant de facteurs égaux à a qu'il y a d'unités dans m.

Élever la quantité a à la *puissance réelle du degré* $\frac{m}{n}$, m et n étant deux nombres entiers, c'est, en supposant, pour éviter toute incertitude, la fraction $\frac{m}{n}$ réduite à sa plus simple expression, former un produit de m facteurs égaux et tellement choisis que la $n^{\text{ième}}$ puissance de chacun d'eux soit équivalente à la quantité a.

Extraire de la quantité a la *racine réelle du degré* m ou $\frac{m}{n}$, c'est chercher une nouvelle quantité qui, élevée à la puissance réelle du degré m ou $\frac{m}{n}$, reproduise a. D'après cette définition, la $n^{\text{ième}}$ racine réelle d'une quantité est évidemment la même chose que sa puissance réelle du degré $\frac{1}{n}$. De plus, on prouvera facilement que la racine du degré $\frac{n}{m}$ équivaut à la puissance du degré $\frac{m}{n}$.

Enfin, *élever* la quantité a à la *puissance réelle du degré* $-m$ ou $-\frac{m}{n}$, c'est diviser l'unité par cette même quantité a élevée à la puissance réelle du degré m ou $\frac{m}{n}$.

Dans les opérations dont on vient de parler, le nombre ou la quantité qui marque le degré d'une puissance réelle de a s'appelle l'*exposant* de cette puissance, tandis que le nombre qui marque le degré d'une racine réelle se nomme l'*indice* de cette racine.

Toute puissance de a qui correspond à un exposant dont la valeur numérique est entière, c'est-à-dire à un exposant de la forme $+m$ ou $-m$, m représentant un nombre entier, admet une valeur unique et réelle que l'on désigne par la notation

$$a^m \quad \text{ou} \quad a^{-m}.$$

Quant aux racines, et quant aux puissances dont la valeur numérique est fractionnaire, elles peuvent admettre ou deux valeurs réelles, ou une seule valeur réelle, ou n'en admettre aucune. Les valeurs réelles dont il est ici question sont nécessairement des quantités positives ou des quantités négatives. Mais, outre ces quantités, on emploie encore en Algèbre des symboles qui, n'ayant aucune signification par eux-mêmes, reçoivent néanmoins, à cause de leurs propriétés, les noms de *puissances* et de *racines*. Ces symboles

sont du nombre des expressions algébriques auxquelles on a donné le nom d'*imaginaires*, par opposition à celui d'*expressions réelles*, qui ne s'applique jamais qu'à des nombres ou à des quantités.

Cela posé, il résulte des principes établis dans le Chapitre VII que la racine $n^{\text{ième}}$ d'une quantité quelconque a et ses puissances des degrés $\frac{m}{n}$, $-\frac{m}{n}$, n étant un nombre entier et $\frac{m}{n}$ une fraction irréductible, admettent chacune n valeurs distinctes réelles ou imaginaires. Conformément aux notations adoptées dans le même Chapitre, on désignera l'une quelconque de ces valeurs, s'il s'agit de la racine $n^{\text{ième}}$, par la notation

$$\sqrt[n]{a} = ((a))^{\frac{1}{n}},$$

et, s'il s'agit de la puissance qui a pour exposant $\frac{m}{n}$ ou $-\frac{m}{n}$, par la notation

$$((a))^{\frac{m}{n}} \quad \text{ou} \quad ((a))^{-\frac{m}{n}}.$$

Ajoutons que l'expression $((a))^{\frac{1}{n}}$ est comprise comme cas particulier dans l'expression plus générale $((a))^{\frac{m}{n}}$, et que, en appelant A la valeur numérique de a, on trouvera pour les valeurs réelles des deux expressions

$$((a))^{\frac{m}{n}}, \quad ((a))^{-\frac{m}{n}}:$$

1° Si n désigne un nombre impair,

$$a \text{ étant } +\text{A}\ldots\ldots\ldots\ldots \quad +\text{A}^{\frac{m}{n}}, \quad +\text{A}^{-\frac{m}{n}},$$

$$a \text{ étant } -\text{A}\ldots\ldots\ldots\ldots \quad -\text{A}^{\frac{m}{n}}, \quad -\text{A}^{-\frac{m}{n}};$$

2° Si n désigne un nombre pair,

$$a \text{ étant } +\text{A}\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \pm\text{A}^{\frac{m}{n}}, \quad \pm\text{A}^{-\frac{m}{n}}.$$

Lorsque, dans le dernier cas, on suppose a négatif, toutes les valeurs de chacune des expressions $((a))^{\frac{m}{n}}$, $((a))^{-\frac{m}{n}}$ deviennent imaginaires.

Si l'on fait varier la fraction $\frac{m}{n}$ de manière qu'elle s'approche indéfiniment d'un nombre irrationnel B, le dénominateur n croissant alors au delà de toute limite assignable, il en sera de même du nombre des valeurs imaginaires qu'obtiendra chacune des expressions

$$((a))^{\frac{m}{n}}, \quad ((a))^{-\frac{m}{n}}.$$

Par suite on ne peut admettre dans le calcul les notations

$$((a))^{\mathrm{B}}, \quad ((a))^{-\mathrm{B}},$$

ou, si l'on fait $b = \pm \mathrm{B}$, la notation

$$((a))^{b},$$

à moins de considérer une semblable notation comme propre à représenter une infinité d'expressions imaginaires. Pour éviter cet inconvénient, nous n'emploierons jamais l'expression algébrique

$$((a))^{b}$$

dans le cas où la valeur numérique de b sera irrationnelle. Seulement, dans cette hypothèse, lorsque a obtiendra une valeur positive $+\mathrm{A}$, on pourra faire usage de la notation

$$a^{b} \quad \text{ou} \quad (a)^{b},$$

que l'on devra considérer comme équivalente à

$$+\mathrm{A}^{b}$$

(*voir* le Chapitre VII, § IV).

Les puissances de nombres et de quantités jouissent de plusieurs propriétés remarquables qu'il est facile de démontrer. Nous citerons entre autres celles qui se trouvent comprises dans les formules que je vais écrire.

Soient $a, a', a'', \ldots, b, b', b'', \ldots$ des quantités quelconques positives ou négatives; $\mathrm{A}, \mathrm{A}', \mathrm{A}'', \ldots$ des nombres quelconques, et $m, m', m'', \ldots$ des nombres entiers. On aura

$$(3) \quad \begin{cases} \mathrm{A}^{b}\mathrm{A}^{b'}\mathrm{A}^{b''}\ldots = \mathrm{A}^{b+b'+b''+\ldots}, \\ \mathrm{A}^{b}\mathrm{A}'^{b}\mathrm{A}''^{b}\ldots = (\mathrm{A}\mathrm{A}'\mathrm{A}''\ldots)^{b}, \\ (\mathrm{A}^{b})^{b'} = \mathrm{A}^{b'b}, \end{cases}$$

$$(4) \quad \begin{cases} a^{\pm m}a^{\pm m'}a^{\pm m''}\ldots = a^{\pm m \pm m' \pm m'' \pm \ldots} & \text{(chacun des nombres } m, m', m'', \ldots \text{ devant être affecté du même signe dans les deux membres),} \\ a^{m}\,a'^{m}\,a''^{m}\ldots = (aa'a''\ldots)^{m}, \\ a^{-m}a'^{-m}a''^{-m}\ldots = (aa'a''\ldots)^{-m}, \\ (a^{m})^{m'} = (a^{-m})^{-m'} = a^{mm'}, \\ (a^{m})^{-m'} = (a^{-m})^{m'} = a^{-mm'}. \end{cases}$$

Les formules (3) et (4) donnent lieu à une foule de conséquences, parmi lesquelles nous nous contenterons d'indiquer la suivante. On tire de la seconde des formules (3)

$$\mathrm{A}^{b}\left(\frac{1}{\mathrm{A}}\right)^{b} = 1^{b} = 1,$$

et l'on en conclut

$$\left(\frac{1}{\mathrm{A}}\right)^{b} = \frac{1}{\mathrm{A}^{b}}.$$

Donc, si l'on élève deux quantités positives inverses l'une de l'autre à une même puissance, les résultats seront encore deux quantités inverses.

FORMATION DES EXPONENTIELLES ET DES LOGARITHMES.

Lorsque dans l'expression A^{x} on regarde le nombre A comme fixe, et la quantité x comme variable, la puissance A^{x} prend le nom d'*exponentielle*. Si, dans la même hypothèse, on a, pour une valeur particulière de x,

$$\mathrm{A}^{x} = \mathrm{B},$$

cette valeur particulière sera ce qu'on appelle le *logarithme* du nombre B dans le système dont la *base* est A. On indique ce logarithme en plaçant devant le nombre la lettre initiale l ou L, ainsi qu'il suit

$$l\mathrm{B} \quad \text{ou} \quad \mathrm{LB}.$$

Toutefois, comme une semblable notation ne fait pas connaître la base du système de logarithmes auquel elle se rapporte, il est indispensable d'énoncer dans le discours la valeur de cette base. Cela posé, si l'on se sert de la caractéristique L pour désigner les logarithmes pris dans le système dont la base est A, l'équation

$$\mathrm{A}^{x} = \mathrm{B}$$

entraînera la suivante

$$x = \mathrm{LB}.$$

Quelquefois, lorsqu'on doit traiter en même temps des logarithmes pris dans différents systèmes, on distingue les uns des autres à l'aide d'un ou plusieurs accents placés à la droite de la lettre L, et l'on désigne en conséquence par cette lettre dépourvue d'accents les logarithmes d'un premier système, par la même lettre suivie d'un seul accent les logarithmes d'un second système, etc.

En s'appuyant sur les définitions qui précèdent et sur les propriétés générales des puissances des nombres, on reconnaîtra facilement : 1° que l'unité a zéro pour logarithme dans tous les systèmes; 2° que dans tout système de logarithmes dont la base surpasse l'unité, tout nombre supérieur à l'unité a un logarithme positif, et tout nombre inférieur à l'unité un logarithme négatif; 3° que dans tout système de logarithmes dont la base est au-dessous de l'unité, tout nombre inférieur à l'unité a un logarithme positif, et tout nombre supérieur à l'unité un logarithme négatif; 4° enfin que, dans deux systèmes dont les bases sont inverses l'une de l'autre, les logarithmes d'un même nombre sont égaux et de signes contraires. De plus, on démontrera sans peine les formules qui établissent les propriétés principales des logarithmes, et parmi lesquelles on doit remarquer celles que je vais écrire.

Si l'on désigne par B, B′, B″, ..., C des nombres quelconques, par les caractéristiques L, L′ des logarithmes pris dans deux systèmes différents dont les bases soient A, A′, et par k une quantité quelconque positive ou négative, on aura

$$(5)\qquad \left\{\begin{aligned} &\mathrm{LBB'B''}\ldots = \mathrm{LB}+\mathrm{LB'}+\mathrm{LB''}\ldots,\\ &\mathrm{LB}^k = k\,\mathrm{LB},\\ &\mathrm{B}^{\mathrm{LC}} = \mathrm{A}^{\mathrm{LB.LC}} = \mathrm{C}^{\mathrm{LB}},\\ &\frac{\mathrm{LC}}{\mathrm{LB}} = \frac{\mathrm{L'C}}{\mathrm{L'B}}.\end{aligned}\right.$$

On tire de la première de ces formules

$$\mathrm{LB}+\mathrm{L}\frac{1}{\mathrm{B}} = \mathrm{L}1 = 0$$

et, par suite,

$$\mathrm{L}\frac{1}{\mathrm{B}} = -\mathrm{LB},$$

d'où il résulte que deux quantités positives inverses l'une de l'autre ont des logarithmes égaux et de signes contraires. Ajoutons que la quatrième formule peut facilement se déduire de la seconde. En effet, supposons que la quantité k représente le logarithme du nombre C dans le système dont la base est B. On aura

$$\mathrm{C} = \mathrm{B}^k$$

et, par suite,

$$\mathrm{LC} = k\,\mathrm{LB},\qquad \mathrm{L'C} = k\,\mathrm{L'B},$$

d'où l'on conclura immédiatement

$$\frac{\mathrm{LC}}{\mathrm{LB}} = \frac{\mathrm{L'C}}{\mathrm{L'B}} = k.$$

On peut remarquer encore que, si l'on prend $\mathrm{B}=\mathrm{A}$, on tirera de la quatrième formule, à cause de $\mathrm{LA}=1$,

$$\mathrm{L'C} = \mathrm{L'A}.\mathrm{LC},$$

ou, en faisant, pour abréger, $\mathrm{L'A}=\mu$,

$$\mathrm{L'C} = \mu\,\mathrm{LC}.$$

Ainsi, pour passer du système de logarithmes dont la base est A à celui dont la base est A′, il suffit de multiplier les logarithmes pris dans le premier système par un certain coefficient μ égal au logarithme de A pris dans le second système.

Les logarithmes dont nous venons de parler sont ceux qu'on nomme *logarithmes réels*, parce qu'ils se réduisent toujours à des quantités positives ou négatives. Mais, outre ces quantités, il existe des expressions imaginaires qui ont également reçu, à cause de leurs propriétés, le nom de *logarithmes*. Nous renvoyons sur ce sujet au Chapitre IX, dans lequel nous avons exposé la théorie des logarithmes imaginaires.

FORMATION DES LIGNES TRIGONOMÉTRIQUES ET DES ARCS DE CERCLE.

Nous avons remarqué dans les Préliminaires qu'une longueur comptée sur une ligne droite ou courbe peut être représentée tantôt par un nombre, tantôt par une quantité, suivant qu'on a simplement égard à la mesure de cette longueur, ou qu'on la considère comme devant être portée sur la ligne donnée dans un sens ou dans un autre, à partir d'un point fixe que l'on nomme *origine*, pour servir soit à l'augmentation, soit à la diminution d'une autre longueur constante aboutissant à ce point. Nous avons ajouté que, dans un cercle dont le plan est supposé vertical, on fixe ordinairement l'origine des arcs à l'extrémité du rayon tiré horizontalement de gauche à droite, et que, à partir de cette origine, les arcs se comptent positivement ou négativement suivant que, pour les décrire, on commence par s'élever au-dessus d'elle ou par s'abaisser au-dessous. Enfin, nous avons indiqué les origines de plusieurs lignes trigonométriques qui correspondent à ces mêmes arcs dans le cas où le rayon du cercle se réduit à l'unité. Nous allons revenir un instant sur cet objet et compléter les notions qui s'y rapportent.

D'abord on établira facilement, à l'égard des longueurs comptées sur une même ligne droite ou courbe à partir d'une origine donnée, les propositions suivantes :

Théorème VI. — *Soient $a, b, c, \ldots$ des quantités quelconques positives ou négatives. Pour obtenir sur une ligne droite ou courbe l'extrémité de la longueur*

$$a+b+c+\ldots$$

comptée à partir d'une origine donnée dans le sens déterminé par le signe de la quantité

$$a+b+c+\ldots,$$

il suffira de porter sur cette ligne : 1° la longueur a à partir de l'origine, dans le sens déterminé par le signe de a; 2° la longueur b à partir de l'extrémité de a, dans le sens déterminé par le signe de b; 3° la longueur c à partir de l'extrémité de b, dans le sens déterminé par le signe de c, et ainsi de suite.

Théorème VII. — *Soient a et b deux quantités quelconques. Supposons de plus que l'on porte sur une ligne droite ou courbe et à partir d'une origine donnée : 1° une longueur égale à la valeur numérique de a, dans le sens déterminé par le signe de a; 2° une longueur égale à la valeur numérique de b, dans le sens déterminé par le signe de b. Pour passer de l'extrémité de la première longueur à celle de la seconde, ou réciproquement, en suivant la ligne que l'on considère, il suffira de parcourir une troisième longueur égale à la valeur numérique de la différence $a-b$.*

Théorème VIII. — *Les mêmes choses étant posées que dans le théorème précédent, l'extrémité de la longueur représentée par*

$$\frac{a+b}{2}$$

sera sur la ligne donnée un point situé à distances égales des extrémités des longueurs a et b (les distances étant comptées sur la ligne elle-même).

Appliquons maintenant ces théorèmes aux arcs mesurés sur la circonférence d'un cercle dont le plan est vertical, et dont le rayon équivaut à l'unité, l'origine des arcs étant fixée à l'extrémité du rayon tiré horizontalement de gauche à droite. Si l'on désigne par π, suivant l'usage, le rapport de la circonférence au diamètre, le diamètre étant égal à 2, la circonférence entière se trouvera exprimée par le nombre 2π, la moitié de la circonférence par le nombre π, et le quart par $\frac{\pi}{2}$. Si, de plus, on désigne par a un arc quelconque

positif ou négatif, on conclura du théorème VI que, pour obtenir l'extrémité de l'arc

$$a+2m\pi \quad \text{ou} \quad a-2m\pi$$

(m étant un nombre entier), il faut porter sur la circonférence, à partir de l'extrémité de l'arc a, soit dans le sens des arcs positifs, soit dans le sens des arcs négatifs, une longueur égale à $2m\pi$, c'est-à-dire parcourir m fois la circonférence entière dans un sens ou dans l'autre, ce qui ramènera nécessairement au point d'où l'on était parti. Il en résulte que les extrémités des arcs

$$a \quad \text{et} \quad a\pm 2m\pi$$

coïncident.

On conclura également des théorèmes VI ou VII : 1° que les extrémités des arcs

$$a \quad \text{et} \quad a\pm\pi$$

comprennent entre elles un arc égal à π, et se confondent par conséquent avec les extrémités d'un même diamètre; 2° que les extrémités des arcs

$$a \quad \text{et} \quad a\pm\frac{\pi}{2}$$

comprennent entre elles un quart de circonférence, en sorte qu'elles coïncident avec les extrémités de deux rayons perpendiculaires l'un à l'autre.

Enfin, on conclura du théorème VIII : 1° que les extrémités des arcs

$$a \quad \text{et} \quad \pi-a$$

sont situées à égales distances de l'extrémité de l'arc

$$\frac{\pi}{2},$$

et par conséquent placées symétriquement de part et d'autre du diamètre vertical; 2° que les extrémités des arcs

$$a \quad \text{et} \quad \frac{\pi}{2}-a$$

sont situées à égales distances de l'extrémité de l'arc

$$\frac{\pi}{4}.$$

Les arcs

$$\pi - a \quad \text{et} \quad \frac{\pi}{2} - a,$$

dont il est ici question, sont respectivement appelés le *supplément* et le *complément* de l'arc a. En d'autres termes, deux arcs représentés par deux quantités a et b sont *suppléments* ou *compléments* l'un de l'autre suivant que l'on a

$$a + b = \pi \qquad \text{ou} \qquad a + b = \frac{\pi}{2}.$$

Puisque les angles au centre qui ont pour côté commun le rayon mené par l'origine des arcs croissent ou diminuent proportionnellement aux arcs qui leur servent de mesure, et que ces angles eux-mêmes peuvent être considérés comme les accroissements ou diminutions de l'un d'eux pris à volonté, rien ne s'oppose à ce qu'ils soient désignés par les mêmes quantités que les arcs. C'est une convention que l'on a effectivement adoptée. On dit aussi que deux angles sont compléments ou suppléments l'un de l'autre, lorsque les arcs correspondants sont eux-mêmes compléments ou suppléments l'un de l'autre.

Passons maintenant à l'examen des lignes trigonométriques; et, dans ce dessein, considérons un seul arc représenté par la quantité a. Si on le projette successivement : 1° sur le diamètre vertical; 2° sur le diamètre horizontal, les deux projections seront ce qu'on appelle le *sinus* et le *sinus verse* de l'arc a. On peut observer que la première est en même temps la projection, sur le diamètre vertical, du rayon qui passe par l'extrémité de l'arc. Si l'on prolonge ce même rayon jusqu'à la rencontre de la tangente au cercle mené par l'origine des arcs, la partie de cette tangente interceptée entre l'origine et le point de rencontre sera ce qu'on appelle la *tangente* trigonométrique de l'arc a. Enfin la longueur comptée sur le rayon prolongé entre le centre et le point de rencontre sera la *sécante* de ce même arc.

Les *cosinus* et *cosinus verse* d'un arc, sa *cotangente* et sa *cosécante* ne sont autre chose que les sinus et sinus verse, la tangente et la sécante de son complément, et constituent, avec le sinus, le sinus verse, la tangente et la sécante de ce même arc, le système complet de ses *lignes trigonométriques*.

D'après ce qui a été dit ci-dessus, le sinus d'un arc se compte sur le diamètre vertical, le sinus verse sur le diamètre horizontal, la tangente sur la ligne qui touche le cercle à l'origine des arcs, et la sécante sur le diamètre mobile qui passe par l'extrémité de l'arc donné. De plus, les sinus et sécantes ont pour origine commune le centre du cercle, tandis que l'ori-

gine des tangentes et des sinus verses se confond avec celle des arcs. Enfin, on est généralement convenu de représenter par des quantités positives les lignes trigonométriques de l'arc a, dans le cas où cet arc est positif et moindre qu'un quart de circonférence; d'où il suit que l'on doit compter positivement le sinus et la tangente de bas en haut, le sinus verse de droite à gauche, et la sécante dans le sens du rayon mené à l'extrémité de l'arc a.

En partant des principes que nous venons d'adopter, on reconnaîtra immédiatement que le sinus verse, et par suite le cosinus verse, sont toujours positifs; et, de plus, on déterminera sans peine les signes qui doivent affecter les autres lignes trigonométriques d'un arc dont l'extrémité est donnée. Pour rendre cette détermination plus facile, on conçoit le cercle divisé en quatre parties égales par deux diamètres perpendiculaires entre eux, l'un horizontal, l'autre vertical; et ces quatre parties sont respectivement désignées sous les noms de premier, second, troisième et quatrième quart de cercle. Les deux premiers quarts de cercle sont situés au-dessus du diamètre horizontal, savoir le premier à droite et le second à gauche. Les deux derniers sont situés au-dessous du même diamètre, savoir le troisième à gauche et le quatrième à droite. Cela posé, comme les extrémités de deux arcs, compléments l'un de l'autre, sont également distantes de l'extrémité de l'arc $\frac{\pi}{4}$, on en conclura qu'elles sont placées symétriquement de part et d'autre du diamètre qui divise en deux parties égales le premier et le troisième quart de cercle. Si l'on cherche ensuite quels signes doivent être attribués aux diverses lignes trigonométriques d'un arc autres que le sinus verse et le cosinus verse, suivant que l'extrémité de cet arc tombe dans un quart de cercle ou dans un autre, on trouvera que ces signes sont respectivement

	Dans le 1er quart de cercle.	Dans le 2e quart de cercle.	Dans le 3e quart de cercle.	Dans le 4e quart de cercle.
Pour le sinus et la cosécante......	+	+	−	−
Pour le cosinus et la sécante......	+	−	−	+
Pour la tangente et la cotangente..	+	−	+	−

On peut remarquer à ce sujet que le signe de la tangente est toujours le produit du signe du sinus par le signe du cosinus.

Les considérations précédentes conduisent encore à reconnaître que le cosinus d'un arc se confond avec la projection du rayon qui passe par l'extrémité de cet arc sur le diamètre horizontal, et que sur ce même diamètre il doit être compté positivement de gauche à droite, à partir du centre pris pour origine; que le cosinus verse peut être mesuré sur le diamètre vertical entre le point le plus élevé de la circonférence pris pour origine et l'extrémité du sinus; que la cotangente, comptée positivement de gauche à droite sur la tangente horizontale menée au cercle par l'origine des cosinus verses, se réduit à la longueur comprise entre cette origine et le prolongement du diamètre mobile dont une moitié est le rayon mené à l'extrémité de l'arc; enfin que la cosécante, mesurée sur ce diamètre mobile, se compte positivement dans le sens du rayon dont il s'agit, et à partir du centre pris pour origine jusqu'à l'extrémité de la cotangente.

Nous avons suffisamment développé dans les préliminaires le système des notations à l'aide desquelles nous représentons les diverses lignes trigonométriques et les arcs qui leur correspondent. Nous ne reviendrons pas sur cet objet, et nous nous contenterons d'observer que les lignes trigonométriques d'un arc sont censées appartenir en même temps à l'angle au centre qu'il mesure, et que l'on désigne par la même quantité. Ainsi, par exemple, a, b, ... représentant des quantités quelconques, on peut dire également que les notations

$$\sin a, \quad \cos b, \quad \ldots$$

expriment le sinus de l'arc ou de l'angle a, le cosinus de l'arc ou de l'angle b, ...

Nous terminerons cette Note en rappelant quelques propriétés remarquables des lignes trigonométriques.

D'abord, si l'on désigne par a une quantité quelconque, on trouvera que le sinus et le cosinus de l'angle a sont toujours liés entre eux par l'équation

$$\sin^2 a + \cos^2 a = 1, \tag{6}$$

et que les autres lignes trigonométriques peuvent être exprimées au moyen de ces deux premières ainsi qu'il suit :

$$(7)\quad \begin{cases} \operatorname{siv} a = 1 - \cos a, & \operatorname{tang} a = \dfrac{\sin a}{\cos a}, & \operatorname{séc} a = \dfrac{1}{\cos a}; \\ \operatorname{cosiv} a = 1 - \sin a, & \cot a = \dfrac{\cos a}{\sin a}, & \operatorname{coséc} a = \dfrac{1}{\sin a}. \end{cases}$$

Des formules (6) et (7) on déduira facilement plusieurs autres équations, par exemple

$$(8)\quad \cot a = \frac{1}{\operatorname{tang} a}, \qquad \operatorname{séc}^2 a = 1 + \operatorname{tang}^2 a, \qquad \operatorname{coséc}^2 a = 1 + \cot^2 a, \qquad \ldots$$

Il est encore aisé de voir que, si la quantité positive R représente la longueur d'une droite entre deux points, et α l'angle aigu ou obtus que forme cette droite avec un axe fixe, la projection de la longueur donnée sur l'axe fixe sera mesurée par la valeur numérique du produit

$$R\cos\alpha,$$

et la projection de la même longueur sur une perpendiculaire à l'axe par la valeur numérique du produit

$$R\sin\alpha.$$

Enfin on reconnaîtra sans peine que, si, en partant d'un point pris au hasard sur la circonférence du cercle qui a pour rayon l'unité, on parcourt sur cette circonférence, dans un sens ou dans un autre, une longueur égale à la valeur numérique d'une quantité quelconque c, le plus petit arc compris entre les extrémités de cette longueur sera inférieur ou supérieur à $\frac{\pi}{2}$, suivant que $\cos c$ sera positif ou négatif.

Ces principes étant admis, concevons que sur la circonférence dont on vient de parler on détermine : 1° les extrémités A et B des arcs représentés par deux quantités quelconques a et b; 2° l'extrémité N d'un troisième arc représenté par $\frac{a+b}{2}$. Soit, en outre, M le milieu de la corde qui joint les points A, B, et supposons que le point M se projette sur le diamètre horizontal du cercle en un certain point P. Si les longueurs mesurées sur ce diamètre, à partir du centre pris pour origine, sont comptées positivement de gauche à droite, ainsi que les cosinus, la distance du centre au point P devra être représentée (en vertu du théorème VIII) par la quantité

$$\frac{\cos a + \cos b}{2}.$$

De plus, comme (en vertu du même théorème) le point N est situé à égales distances des points A et B, le diamètre qui passe par le point N renfermera le milieu M de la corde $\overline{AB}$; et la distance de ce milieu M au centre du cercle sera égale (abstraction faite du signe) au cosinus de chacun des arcs $\overline{NA}$, $\overline{NB}$, ou, ce qui revient au même, à

$$\cos\left(\frac{a+b}{2} - a\right) = \cos\left(\frac{a+b}{2} - b\right) = \cos\frac{a-b}{2}.$$

Pour obtenir la projection horizontale de cette distance, il suffira de la multiplier par le cosinus de l'angle aigu compris entre le rayon tiré horizontalement de gauche à droite et le diamètre qui renferme le point N, c'est-à-dire par un facteur égal (au signe près) à $\cos\frac{a+b}{2}$. En d'autres termes, la distance du centre au point P aura pour mesure la valeur numérique du produit

$$\cos\frac{a-b}{2}\cos\frac{a+b}{2}.$$

J'ajoute que ce produit sera positif ou négatif, suivant que le point M sera situé à droite ou à gauche du diamètre vertical. En effet, $\cos\frac{a+b}{2}$ est positif ou négatif, suivant que le point N est situé par rapport à ce diamètre du côté droit ou du côté gauche, et $\cos\frac{a-b}{2}$ est positif ou négatif; par suite le produit

$$\cos\frac{a-b}{2}\cos\frac{a+b}{2}$$

est de même signe que $\cos\frac{a+b}{2}$, ou de signe contraire, suivant que, chacun des arcs $\overline{NA}$, $\overline{NB}$ étant inférieur ou supérieur à $\frac{\pi}{2}$, le point M se trouve situé du même côté que le point N ou du côté opposé. Comme d'ailleurs la verticale qui passe par le point M renferme aussi le point P, il suit de la remarque précédente que la distance du centre au point P, dans le cas même où l'on a égard aux signes, peut être représentée par le produit

$$\cos\frac{a-b}{2}\cos\frac{a+b}{2}.$$

Ce produit et la quantité $\frac{\cos a+\cos b}{2}$ ont donc le même signe, avec la même valeur numérique; et l'on a, par conséquent, pour toutes les valeurs possibles des quantités a et b,

$$\cos a+\cos b=2\cos\frac{a-b}{2}\cos\frac{a+b}{2}. \tag{9}$$

Si dans l'équation (9) on remplace b par $\pi+b$, on en tirera

$$\cos a-\cos b=2\sin\frac{b-a}{2}\sin\frac{a+b}{2}. \tag{10}$$

De plus, si dans les équations (9) et (10) on substitue aux angles a et b leurs

compléments $\frac{\pi}{2}-a$, $\frac{\pi}{2}-b$, on obtiendra les suivantes :

$$\begin{cases}\sin a+\sin b=2\cos\dfrac{a-b}{2}\sin\dfrac{a+b}{2},\\[2mm] \sin a-\sin b=2\sin\dfrac{a-b}{2}\cos\dfrac{a+b}{2}.\end{cases} \tag{11}$$

Les formules (9), (10) et (11) une fois établies, on en déduira facilement un grand nombre d'autres. On trouvera, par exemple,

$$\begin{cases}\dfrac{\sin a-\sin b}{\sin a+\sin b}=\dfrac{\operatorname{tang}\frac{1}{2}(a-b)}{\operatorname{tang}\frac{1}{2}(a+b)},\\[2mm] \dfrac{\cos b-\cos a}{\cos b+\cos a}=\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(a-b)\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(a+b),\end{cases} \tag{12}$$

$$\begin{cases}\cos(a-b)+\cos(a+b)=2\cos a\cos b,\\ \cos(a-b)-\cos(a+b)=2\sin a\sin b,\end{cases} \tag{13}$$

$$\begin{cases}\sin(a+b)+\sin(a-b)=2\sin a\cos b,\\ \sin(a+b)-\sin(a-b)=2\sin b\cos a,\end{cases} \tag{14}$$

$$\begin{cases}\cos(a\pm b)=\cos a\cos b\mp\sin a\sin b,\\ \sin(a\pm b)=\sin a\cos b\pm\sin b\cos a,\end{cases} \tag{15}$$

$$\operatorname{tang}(a\pm b)=\frac{\operatorname{tang}a\pm\operatorname{tang}b}{1\mp\operatorname{tang}a\operatorname{tang}b}, \tag{16}$$

$$\begin{cases}\cos 2a=\cos^2 a-\sin^2 a=2\cos^2 a-1=1-2\sin^2 a,\\ \sin 2a=2\sin a\cos a.\end{cases} \tag{17}$$

Soient maintenant a, b, c trois angles quelconques. On tirera de la première des formules (13)

$$\begin{cases}\cos(a+b+c)+\cos(b+c-a)+\cos(c+a-b)+\cos(a+b-c)\\ \quad =4\cos a\cos b\cos c.\end{cases} \tag{18}$$

Si dans la formule précédente, au lieu de a, b, c, on écrit $\frac{1}{2}a$, $\frac{1}{2}b$, $\frac{1}{2}c$, puis que l'on suppose

$$a+b+c=\pi, \tag{19}$$

on trouvera

$$\sin a+\sin b+\sin c=4\cos\frac{a}{2}\cos\frac{b}{2}\cos\frac{c}{2}. \tag{20}$$

Dans la même hypothèse, la formule (16) donnerait

$$\operatorname{tang} a + \operatorname{tang} b + \operatorname{tang} c = \operatorname{tang} a \operatorname{tang} b \operatorname{tang} c. \tag{21}$$

L'équation (20) devant subsister, ainsi que l'équation (19), lorsque l'on y remplace deux des angles a, b, c par leurs suppléments, et qu'on change le signe du troisième, on en conclura

$$\left\{\begin{aligned} \sin b + \sin c - \sin a &= 4 \cos\frac{a}{2} \sin\frac{b}{2} \sin\frac{c}{2}, \\ \sin c + \sin a - \sin b &= 4 \sin\frac{a}{2} \cos\frac{b}{2} \sin\frac{c}{2}, \\ \sin a + \sin b - \sin c &= 4 \sin\frac{a}{2} \sin\frac{b}{2} \cos\frac{c}{2}. \end{aligned}\right. \tag{22}$$

De ces dernières formules combinées entre elles et avec l'équation (20) on déduit les suivantes :

$$\left\{\begin{aligned} \cos^2\tfrac{1}{2}a &= \frac{(\sin a + \sin b + \sin c)(\sin b + \sin c - \sin a)}{4 \sin b \sin c}, \\ \sin^2\tfrac{1}{2}a &= \frac{(\sin c + \sin a - \sin b)(\sin a + \sin b - \sin c)}{4 \sin b \sin c}. \end{aligned}\right. \tag{23}$$

Enfin, si l'on imagine que a, b, c désignent les trois angles d'un triangle, et que les côtés opposés soient respectivement A, B, C, six produits égaux deux à deux, savoir

$$B \sin c = C \sin b, \qquad C \sin a = A \sin c, \qquad A \sin b = B \sin a,$$

représenteront les perpendiculaires abaissées des sommets sur les trois côtés. On aura, par suite,

$$\frac{\sin a}{A} = \frac{\sin b}{B} = \frac{\sin c}{C}; \tag{24}$$

et les équations (23) deviendront

$$\left\{\begin{aligned} \cos^2\tfrac{1}{2}a &= \frac{(A + B + C)(B + C - A)}{4BC}, \\ \sin^2\tfrac{1}{2}a &= \frac{(C + A - B)(A + B - C)}{4BC}. \end{aligned}\right. \tag{25}$$

De plus, en ayant égard aux formules (19) et (24), on tirera de la première

des équations (12)

$$\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(a - b) = \frac{A - B}{A + B} \cot\tfrac{1}{2}c. \tag{26}$$

Les formules (19), (24), (25) et (26) suffisent pour déterminer trois des six éléments d'un triangle rectiligne, lorsque les trois autres éléments sont connus, et que cette détermination est possible. On peut remarquer en outre que les valeurs de $\cos a$ et de $\sin a$, déduites des équations (25) à l'aide des formules (17), sont respectivement

$$\left\{\begin{aligned} \cos a &= \frac{B^2 + C^2 - A^2}{2BC}, \\ \sin a &= \frac{\sqrt{(A + B + C)(B + C - A)(C + A - B)(A + B - C)}}{2BC}. \end{aligned}\right. \tag{27}$$

La première de ces valeurs peut se tirer directement d'un théorème connu de Géométrie. Quant à la seconde, elle fournit le moyen d'exprimer la surface du triangle en fonction des trois côtés. En effet, cette surface, équivalente au produit de la base C par la moitié de la hauteur correspondante $B \sin a$, sera

$$\tfrac{1}{2} BC \sin a = \tfrac{1}{4}\sqrt{(A + B + C)(B + C - A)(C + A - B)(A + B - C)}. \tag{28}$$

NOTE II.

SUR LES FORMULES QUI RÉSULTENT DE L'EMPLOI DU SIGNE $>$ OU $<$, ET SUR LES MOYENNES ENTRE PLUSIEURS QUANTITÉS.

Soient a et b deux quantités inégales. Les deux formules

$$a > b, \qquad b < a$$

serviront également à exprimer que la première quantité a surpasse la seconde b, c'est-à-dire que la différence

$$a - b$$

est positive. En partant de ce principe, on établira facilement les propositions que je vais énoncer :

THÉORÈME I. — *Si $a, a', a'', \ldots, b, b', b'', \ldots$ représentent des quantités assujetties aux conditions*

$$a > b,$$
$$a' > b',$$
$$a'' > b'',$$
$$\ldots\ldots,$$

on aura aussi

$$a + a' + a'' + \ldots > b + b' + b'' + \ldots.$$

Démonstration. — En effet, lorsque les quantités

$$a - b, \quad a' - b', \quad a'' - b'', \quad \ldots$$

sont positives, on peut assurer que leur somme

$$a + a' + a'' + \ldots - (b + b' + b'' + \ldots)$$

l'est pareillement.

THÉORÈME II. — *Si $A, A', A'', \ldots, B, B', B'', \ldots$ représentent des nombres assujettis aux conditions*

$$A > B,$$
$$A' > B',$$
$$A'' > B'',$$
$$\ldots\ldots,$$

on aura aussi

$$A A' A'' \ldots > B B' B'' \ldots.$$

Démonstration. — En effet, chacune des différences

$$A - B, \quad A' - B', \quad A'' - B'', \quad \ldots$$

étant positive par hypothèse, chacun des produits

$$(A - B) A' A'' \ldots = A A' A'' \ldots - B A' A'' \ldots,$$
$$B (A' - B') A'' \ldots = B A' A'' \ldots - B B' A'' \ldots,$$
$$B B' (A'' - B'') \ldots = B B' A'' \ldots - B B' B'' \ldots,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

sera également positif, et par suite il en sera de même de leur somme

$$A A' A'' \ldots - B B' B'' \ldots.$$

THÉORÈME III. — *Soient a, b, r trois quantités quelconques, et supposons*

$$a > b;$$

on en conclura, si r est positif,

$$ra > rb,$$

et, si r est négatif,

$$ra < rb.$$

Démonstration. — En effet, le produit

$$r(a - b) = ra - rb$$

sera positif dans le premier cas, et négatif dans le second.

Corollaire. — Si, en supposant a et b positifs, on prend successivement

$$r = \frac{1}{a}, \qquad r = \frac{1}{b},$$

on en conclura

$$1 > \frac{b}{a}, \qquad \frac{a}{b} > 1.$$

On se trouve ainsi ramené à cette proposition, évidente par elle-même, qu'une fraction est inférieure ou supérieure à l'unité, suivant que le plus grand de ses deux termes est le dénominateur ou le numérateur.

Théorème IV. — *Soient* A *et* A′ *deux nombres qui satisfassent à la condition*

$$A > A',$$

et b *une quantité quelconque. On aura, si* b *est positif,*

$$A^b > A'^b,$$

et, si b *est négatif,*

$$A^b < A'^b.$$

Démonstration. — En effet, le quotient $\frac{A}{A'}$ étant > 1, la fraction

$$\frac{A^b}{A'^b} = \left(\frac{A}{A'}\right)^b$$

sera évidemment supérieure ou inférieure à l'unité, suivant que la quantité b sera positive ou négative.

Théorème V. — *Désignons par* A *un nombre quelconque, et soient* b, b' *deux quantités assujetties à la condition*

$$b > b',$$

on en conclura, si A *est plus grand que l'unité,*

$$A^b > A^{b'},$$

et, si A *est inférieur à l'unité,*

$$A^b < A^{b'}.$$

Démonstration. — En effet, la quantité $b - b'$ étant positive, par hypothèse, la fraction

$$\frac{A^b}{A^{b'}} = A^{b-b'}$$

sera évidemment supérieure ou inférieure à l'unité, suivant que l'on aura $A > 1$ ou $A < 1$.

Théorème VI. — *Soit* L *la caractéristique des logarithmes pris dans le système dont la base est* A, *et désignons par* B, B′ *deux nombres assujettis à la condition*

$$B > B'.$$

On aura, si A *est plus grand que l'unité,*

$$LB > LB'$$

et, si A *est inférieur à l'unité,*

$$LB < LB'.$$

Démonstration. — En effet, le logarithme

$$L\frac{B}{B'} = LB - LB'$$

sera positif dans le premier cas, et négatif dans le second.

Corollaire. — Si l'on se sert de la lettre l pour indiquer les logarithmes népériens pris dans le système dont la base est

$$e = 2,7182818\ldots \tag{1}$$

[Chapitre VI, § I, équation (5)], la condition

$$B > B'$$

entraînera toujours la formule

$$lB > lB'.$$

Aux théorèmes qui précèdent nous ajouterons le suivant, duquel on peut déduire plusieurs conséquences importantes.

Théorème VII. — *Soit* x *une quantité quelconque. On aura*

$$1 + x < e^x, \tag{2}$$

la lettre e *désignant, à l'ordinaire, la base des logarithmes népériens.*

Démonstration. — Le second membre de la formule (2) restant toujours positif, le théorème énoncé sera évident par lui-même, si la quantité $1 + x$ est négative. Il suffira donc d'examiner le cas où l'on suppose

$$1 + x > 0. \tag{3}$$

Or l'équation (23) du Chapitre VI (§ IV) donne, pour toutes les valeurs réelles possibles de x,

$$\left\{\begin{aligned} e^x &= 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^4}{1.2.3.4} + \frac{x^5}{1.2.3.4.5} + \ldots \\ &= 1 + x + \frac{x^2}{2}\left(1 + \frac{x}{3}\right) + \frac{x^4}{2.3.4}\left(1 + \frac{x}{5}\right) + \ldots; \end{aligned}\right. \tag{4}$$

et, comme les produits

$$\frac{x^2}{3}\left(1+\frac{x}{3}\right),\quad \frac{x^4}{2.3.4}\left(1+\frac{x}{5}\right),\quad \ldots$$

sont positifs, non seulement lorsque la quantité x est positive, mais aussi lorsque, étant négative, elle a une valeur numérique inférieure à l'unité, on tirera de l'équation (4), toutes les fois que la condition (3) sera remplie,

$$e^x > 1 + x.$$

Corollaire I. — Si, dans le cas où $1+x$ est positif, on prend les logarithmes népériens des deux membres de la formule (2), on obtiendra la suivante

$$l(1+x) < x \tag{5}$$

(*voir* le corollaire du théorème VI). Cette dernière subsiste donc toutes les fois que son premier membre est réel.

Corollaire II. — Soient $x, y, z, \ldots$ plusieurs quantités assujetties aux conditions

$$1+x>0,\quad 1+y>0,\quad 1+z>0,\quad \ldots. \tag{6}$$

On aura, en vertu de la formule (2),

$$1+x<e^x,\quad 1+y<e^y,\quad 1+z<e^z,\quad \ldots,$$

et l'on en conclura (théorème II)

$$(1+x)(1+y)(1+z)\ldots < e^{x+y+z+\ldots}. \tag{7}$$

Cette dernière formule subsiste donc toutes les fois que son premier membre ne renferme que des facteurs positifs.

Corollaire III. — Si dans le corollaire précédent on suppose

$$x = a\alpha,\quad y = a'\alpha',\quad z = a''\alpha'',\quad \ldots,$$

$\alpha, \alpha', \alpha'', \ldots$ désignant des quantités positives, et $a, a', a'', \ldots$ d'autres quantités respectivement supérieures à

$$-\frac{1}{\alpha},\quad -\frac{1}{\alpha'},\quad -\frac{1}{\alpha''},\quad \ldots,$$

la formule (7) deviendra

$$(1+a\alpha)(1+a'\alpha')(1+a''\alpha'')\ldots < e^{a\alpha+a'\alpha'+a''\alpha''+\ldots}.$$

Si de plus les quantités $a, a', a'', \ldots$ sont toutes inférieures à une certaine limite A, on aura (en vertu des théorèmes I et III)

$$a\alpha + a'\alpha' + a''\alpha'' + \ldots < \mathrm{A}(\alpha+\alpha'+\alpha''+\ldots),$$

et par suite on trouvera définitivement

$$(1+a\alpha)(1+a'\alpha')(1+a''\alpha'')\ldots < e^{\mathrm{A}(\alpha+\alpha'+\alpha''+\ldots)}. \tag{8}$$

La formule (8) peut être employée avec avantage dans l'intégration par approximation des équations différentielles.

Passons maintenant aux théorèmes sur les moyennes. Ainsi qu'on l'a déjà dit (*Préliminaires*, p. 14), on appelle *moyenne* entre plusieurs quantités données une nouvelle quantité comprise entre la plus petite et la plus grande de celles que l'on considère. D'après cette définition, la quantité h sera moyenne entre les deux quantités g, k, ou entre plusieurs quantités parmi lesquelles l'une des deux qu'on vient de citer serait la plus grande et l'autre la plus petite, si les deux différences

$$g-h,\quad h-k$$

sont de même signe. Cela posé, si, pour désigner une moyenne entre les quantités $a, a', a'', \ldots$, on emploie, comme dans les *Préliminaires*, la notation

$$\mathrm{M}(a, a', a'', \ldots),$$

on établira sans peine les propositions suivantes :

Théorème VIII. — *Soient $a, a', a'', \ldots, h$ plusieurs quantités assujetties à la condition*

$$h = \mathrm{M}(a, a', a'', \ldots), \tag{9}$$

et r une autre quantité entièrement arbitraire. On aura toujours

$$rh = \mathrm{M}(ra, ra', ra'', \ldots). \tag{10}$$

Démonstration. — En effet, désignons par g la plus grande, et par k la plus petite des quantités $a, a', a'', \ldots$. Les deux différences

$$g-h,\quad h-k$$

seront positives, et par suite les produits

$$r(g-h), \quad r(h-k),$$

ou, en d'autres termes, les deux différences

$$rg-rh, \quad rh-rk$$

seront de même signe. On aura donc

$$rh = \mathrm{M}(rg, rk)$$

et, à plus forte raison,

$$rh = \mathrm{M}(ra, ra', ra'', \ldots),$$

attendu que rg, rk sont nécessairement deux des produits

$$ra, \quad ra', \quad ra'', \quad \ldots.$$

Théorème IX. — *Soient* A, A′, A″, ..., H *plusieurs nombres qui satisfassent à la condition*

$$\mathrm{H} = \mathrm{M}(\mathrm{A}, \mathrm{A}', \mathrm{A}'', \ldots), \tag{11}$$

et b une quantité quelconque. On aura

$$\mathrm{H}^b = \mathrm{M}(\mathrm{A}^b, \mathrm{A}'^b, \mathrm{A}''^b, \ldots). \tag{12}$$

Démonstration. — En effet, soient G et K le plus grand et le plus petit des nombres A, A′, A″, ... Les différences

$$\mathrm{G}-\mathrm{H}, \quad \mathrm{H}-\mathrm{K}$$

étant alors positives, on conclura du théorème IV que les suivantes

$$\mathrm{G}^b-\mathrm{H}^b, \quad \mathrm{H}^b-\mathrm{K}^b$$

sont de même signe. On aura donc

$$\mathrm{H}^b = \mathrm{M}(\mathrm{G}^b, \mathrm{K}^b)$$

et, à plus forte raison,

$$\mathrm{H}^b = \mathrm{M}(\mathrm{A}^b, \mathrm{A}'^b, \mathrm{A}''^b, \ldots).$$

Corollaire. — Si l'on fait en particulier $b = \frac{1}{2}$, on trouvera

$$\sqrt{\mathrm{H}} = \mathrm{M}(\sqrt{\mathrm{A}}, \sqrt{\mathrm{A}'}, \sqrt{\mathrm{A}''}, \ldots).$$

Théorème X. — *Désignons par* A *un nombre quelconque, et soient* b, b', b'', ..., h *plusieurs quantités assujetties à la condition*

$$h = \mathrm{M}(b, b', b'', \ldots). \tag{13}$$

On aura

$$\mathrm{A}^h = \mathrm{M}(\mathrm{A}^b, \mathrm{A}^{b'}, \mathrm{A}^{b''}, \ldots). \tag{14}$$

Démonstration. — Désignons par g la plus grande, et par k la plus petite des quantités b, b', b'', ... Les deux différences

$$g-h, \quad h-k$$

étant alors positives, on conclura du théorème V que les suivantes

$$\mathrm{A}^g-\mathrm{A}^h, \quad \mathrm{A}^h-\mathrm{A}^k$$

sont de même signe. On aura donc

$$\mathrm{A}^h = \mathrm{M}(\mathrm{A}^g, \mathrm{A}^k) = \mathrm{M}(\mathrm{A}^b, \mathrm{A}^{b'}, \mathrm{A}^{b''}, \ldots).$$

Théorème XI. — *Soit* L *la caractéristique des logarithmes dans le système dont la base est* A, *et désignons par* B, B′, B″, ..., H *plusieurs nombres assujettis à la condition*

$$\mathrm{H} = \mathrm{M}(\mathrm{B}, \mathrm{B}', \mathrm{B}'', \ldots). \tag{15}$$

On aura, quel que soit A,

$$\mathrm{LH} = \mathrm{M}(\mathrm{LB}, \mathrm{LB}', \mathrm{LB}'', \ldots). \tag{16}$$

Démonstration. — En effet, supposons que l'on représente par G le plus grand, et par K le plus petit des nombres B, B′, B″, ... Alors les deux fractions

$$\frac{\mathrm{G}}{\mathrm{H}}, \quad \frac{\mathrm{H}}{\mathrm{K}}$$

étant supérieures à l'unité, les logarithmes

$$\mathrm{L}\frac{\mathrm{G}}{\mathrm{H}}, \quad \mathrm{L}\frac{\mathrm{H}}{\mathrm{K}},$$

ou, en d'autres termes, les différences

$$\mathrm{LG}-\mathrm{LH}, \quad \mathrm{LH}-\mathrm{LK}$$

seront de même signe. On aura donc

$$\mathrm{LH} = \mathrm{M}(\mathrm{LG}, \mathrm{LK}) = \mathrm{M}(\mathrm{LB}, \mathrm{LB}', \mathrm{LB}'', \ldots).$$

Théorème XII. — *Soient $b, b', b'', \ldots$ plusieurs quantités de même signe, en nombre n, et $a, a', a'', \ldots$ des quantités quelconques en nombre égal à celui des premières. On aura*

$$\frac{a+a'+a''+\ldots}{b+b'+b''+\ldots} = \mathrm{M}\left(\frac{a}{b}, \frac{a'}{b'}, \frac{a''}{b''}, \ldots\right). \tag{17}$$

Démonstration. — Soit g la plus grande et k la plus petite des quantités

$$\frac{a}{b}, \quad \frac{a'}{b'}, \quad \frac{a''}{b''}, \quad \ldots.$$

Les différences

$$g - \frac{a}{b} \quad \text{et} \quad \frac{a}{b} - k,$$

$$g - \frac{a'}{b'} \quad \text{et} \quad \frac{a'}{b'} - k,$$

$$g - \frac{a''}{b''} \quad \text{et} \quad \frac{a''}{b''} - k,$$

$$\ldots\ldots \qquad \ldots\ldots$$

seront toutes positives. En multipliant les deux premières par b, les deux suivantes par b', etc., on obtiendra les produits

$$gb - a \quad \text{et} \quad a - kb,$$

$$gb' - a' \quad \text{et} \quad a' - kb',$$

$$gb'' - a'' \quad \text{et} \quad a'' - kb'',$$

$$\ldots\ldots \qquad \ldots\ldots,$$

qui seront tous de même signe, aussi bien que les quantités $b, b', b'', \ldots$. Par suite, les sommes de ces deux espèces de produits, savoir

$$g(b+b'+b''+\ldots) - (a+a'+a''+\ldots),$$

$$a+a'+a''+\ldots - k(b+b'+b''+\ldots),$$

et les quotients de ces sommes par $b+b'+b''+\ldots$, savoir

$$g - \frac{a+a'+a''+\ldots}{b+b'+b''+\ldots}, \quad \frac{a+a'+a''+\ldots}{b+b'+b''+\ldots} - k,$$

seront encore des quantités de même signe; d'où l'on conclura

$$\frac{a+a'+a''+\ldots}{b+b'+b''+\ldots} = \mathrm{M}(g, k) = \mathrm{M}\left(\frac{a}{b}, \frac{a'}{b'}, \frac{a''}{b''}, \ldots\right)$$

[*voir* dans les *Préliminaires* le théorème I et la formule (6)].

Corollaire I. — En supposant les quantités $b, b', b'', \ldots$ réduites à l'unité, on trouve

$$\frac{a+a'+a''+\ldots}{n} = \mathrm{M}(a, a', a'', \ldots). \tag{18}$$

Le premier membre de la formule précédente est ce qu'on appelle la *moyenne arithmétique* entre les quantités $a, a', a'', \ldots$.

Corollaire II. — La moyenne entre plusieurs quantités égales se confondant avec chacune d'elles, si les fractions $\frac{a}{b}, \frac{a'}{b'}, \frac{a''}{b''}, \ldots$ deviennent égales, on aura

$$\frac{a+a'+a''+\ldots}{b+b'+b''+\ldots} = \frac{a}{b} = \frac{a'}{b'} = \frac{a''}{b''} = \ldots, \tag{19}$$

ce qu'il est d'ailleurs facile de prouver directement.

Corollaire III. — Si l'on désigne par $\alpha, \alpha', \alpha'', \ldots$ de nouvelles quantités qui soient toutes de même signe, on aura, en vertu de l'équation (17),

$$\left\{\begin{aligned} \frac{\alpha a+\alpha' a'+\alpha'' a''+\ldots}{\alpha b+\alpha' b'+\alpha'' b''+\ldots} &= \mathrm{M}\left(\frac{\alpha a}{\alpha b}, \frac{\alpha' a'}{\alpha' b'}, \frac{\alpha'' a''}{\alpha'' b''}, \ldots\right) \\ &= \mathrm{M}\left(\frac{a}{b}, \frac{a'}{b'}, \frac{a''}{b''}, \ldots\right). \end{aligned}\right. \tag{20}$$

Cette dernière formule suffit pour établir le théorème III des *Préliminaires*.

Théorème XIII. — *Soient* $\mathrm{A}, \mathrm{A}', \mathrm{A}'', \ldots, \mathrm{B}, \mathrm{B}', \mathrm{B}'', \ldots$ *deux suites de nombres pris à volonté; et formons avec ces deux suites, que nous supposerons renfermer chacune un nombre n de termes, les racines*

$$\sqrt[\mathrm{B}]{\mathrm{A}}, \quad \sqrt[\mathrm{B}']{\mathrm{A}'}, \quad \sqrt[\mathrm{B}'']{\mathrm{A}''}, \quad \ldots.$$

On aura

$$\sqrt[\mathrm{B}+\mathrm{B}'+\mathrm{B}''+\ldots]{\mathrm{A}\mathrm{A}'\mathrm{A}''\ldots} = \mathrm{M}\left(\sqrt[\mathrm{B}]{\mathrm{A}}, \sqrt[\mathrm{B}']{\mathrm{A}'}, \sqrt[\mathrm{B}'']{\mathrm{A}''}, \ldots\right). \tag{21}$$

Démonstration. — Les logarithmes des quantités

$$\sqrt[\mathrm{B}+\mathrm{B}'+\mathrm{B}''+\ldots]{\mathrm{A}\mathrm{A}'\mathrm{A}''\ldots}, \quad \sqrt[\mathrm{B}]{\mathrm{A}}, \quad \sqrt[\mathrm{B}']{\mathrm{A}'}, \quad \sqrt[\mathrm{B}'']{\mathrm{A}''}, \quad \ldots$$

indiqués par la caractéristique l sont respectivement

$$\frac{l\mathrm{A}+l\mathrm{A}'+l\mathrm{A}''+\ldots}{\mathrm{B}+\mathrm{B}'+\mathrm{B}''+\ldots}, \quad \frac{l\mathrm{A}}{\mathrm{B}}, \quad \frac{l\mathrm{A}'}{\mathrm{B}'}, \quad \frac{l\mathrm{A}''}{\mathrm{B}''}, \quad \ldots,$$

et l'équation (17) fournit entre ces logarithmes la relation suivante :

$$\frac{lA + lA' + lA'' + \ldots}{B + B' + B'' + \ldots} = M\left(\frac{lA}{B}, \frac{lA'}{B'}, \frac{lA''}{B''}, \ldots\right).$$

Si maintenant on repasse des logarithmes aux nombres, ce qui est permis en vertu du théorème X, on retrouvera la formule (21).

Corollaire I. — En supposant les nombres B, B', B'', ... réduits à l'unité, on a simplement

$$\sqrt[n]{A A' A'' \ldots} = M(A, A', A'', \ldots). \tag{22}$$

Le premier membre de la formule précédente est ce qu'on appelle la *moyenne géométrique* entre les nombres A, A', A'', ...

Corollaire II. — Si toutes les racines

$$\sqrt[B]{A}, \quad \sqrt[B']{A'}, \quad \sqrt[B'']{A''}, \quad \ldots$$

deviennent égales, leur moyenne se confondra avec chacune d'elles. On aura donc alors

$$\sqrt[B+B'+B''+\ldots]{A A' A'' \ldots} = \sqrt[B]{A} = \sqrt[B']{A'} = \sqrt[B'']{A''} = \ldots, \tag{23}$$

ce qu'il serait facile de prouver directement.

La valeur numérique d'une moyenne entre plusieurs quantités données n'est pas toujours une moyenne entre leurs valeurs numériques. Ainsi, par exemple, quoique -1 soit une quantité moyenne entre -2 et $+3$, cependant l'unité n'est pas une valeur moyenne entre 2 et 3. Parmi les diverses manières d'obtenir une moyenne entre les valeurs numériques de n quantités

$$a, \quad a', \quad a'', \quad \ldots,$$

l'une des plus simples consiste à former d'abord la moyenne arithmétique entre les carrés

$$a^2, \quad a'^2, \quad a''^2, \quad \ldots,$$

et à extraire ensuite la racine carrée du résultat. En opérant ainsi, on trouvera premièrement

$$\frac{a^2 + a'^2 + a''^2 + \ldots}{n} = M(a^2, a'^2, a''^2, \ldots),$$

puis, en ayant égard au corollaire du théorème IX,

$$\frac{\sqrt{a^2 + a'^2 + a''^2 + \ldots}}{\sqrt{n}} = M(\sqrt{a^2}, \sqrt{a'^2}, \sqrt{a''^2}, \ldots). \tag{24}$$

Or les quantités positives

$$\sqrt{a^2}, \quad \sqrt{a'^2}, \quad \sqrt{a''^2}, \quad \ldots$$

représentant précisément les valeurs numériques des quantités données

$$a, \quad a', \quad a'', \quad \ldots,$$

il suit de la formule (24) qu'on obtiendra une moyenne entre ces valeurs, si l'on divise par $\sqrt{n}$ l'expression très simple

$$\sqrt{a^2 + a'^2 + a''^2 + \ldots}.$$

Cette expression, qui surpasse la plus grande des valeurs numériques dont il s'agit, est ce qu'on pourrait appeler le *module* du système des quantités a, a', a'', ... Le module du système de deux quantités a et b ne serait alors autre chose que le module même de l'expression imaginaire $a + b\sqrt{-1}$ (*voir* le Chapitre VII, § II). Quoi qu'il en soit, les expressions réelles de la forme

$$\sqrt{a^2 + a'^2 + a''^2 + \ldots}$$

jouissent de propriétés très remarquables. Dans la Géométrie, elles servent à déterminer les longueurs mesurées en ligne droite, et les aires de surfaces planes, par le moyen de leurs projections orthogonales. En Algèbre, elles fournissent le sujet de plusieurs théorèmes importants, parmi lesquels je me contenterai d'énoncer ceux qui suivent.

Théorème XIV. — *Si les fractions*

$$\frac{a}{b}, \quad \frac{a'}{b'}, \quad \frac{a''}{b''}, \quad \ldots$$

sont égales, la valeur numérique de chacune d'elles sera exprimée par le rapport

$$\frac{\sqrt{a^2 + a'^2 + a''^2 + \ldots}}{\sqrt{b^2 + b'^2 + b''^2 + \ldots}};$$

en sorte qu'on aura

$$\frac{a}{b} = \frac{a'}{b'} = \frac{a''}{b''} = \ldots = \pm\frac{\sqrt{a^2 + a'^2 + a''^2 + \ldots}}{\sqrt{b^2 + b'^2 + b''^2 + \ldots}}, \tag{25}$$

le signe + ou le signe — devant être adopté suivant que les fractions proposées sont positives ou négatives.

Démonstration. — En effet, dans l'hypothèse admise, les fractions

$$\frac{a^2}{b^2},\quad \frac{a'^2}{b'^2},\quad \frac{a''^2}{b''^2},\quad \dots$$

seront égales, et l'on aura, en conséquence,

$$\frac{a^2}{b^2}=\frac{a'^2}{b'^2}=\frac{a''^2}{b''^2}=\dots=\frac{a^2+a'^2+a''^2+\dots}{b^2+b'^2+b''^2+\dots}.$$

En extrayant les racines carrées, on retrouvera la formule (25).

Théorème XV. — *Soient $a, a', a'', \dots$ des quantités quelconques, en nombre n. Si ces quantités ne sont pas toutes égales entre elles, la valeur numérique de la somme*

$$a+a'+a''+\dots$$

sera inférieure au produit

$$\sqrt{n}\,\sqrt{a^2+a'^2+a''^2+\dots};$$

en sorte qu'on aura

$$\text{(26)}\qquad \text{val. num.}(a+a'+a''+\dots)<\sqrt{n}\,\sqrt{a^2+a'^2+a''^2+\dots}.$$

Démonstration. — En effet, si au carré de la somme

$$a+a'+a''+\dots$$

on ajoute les carrés des différences entre les quantités $a, a', a'', \dots$ combinées deux à deux de toutes les manières possibles, savoir

$$(a-a')^2,\quad (a-a'')^2,\quad \dots,\quad (a'-a'')^2,\quad \dots,$$

on trouvera

$$\text{(27)}\quad \left\{\begin{aligned}&(a+a'+a''+\dots)^2+(a-a')^2+(a-a'')^2+\dots+(a'-a'')^2+\dots\\ &\quad=n(a^2+a'^2+a''^2+\dots),\end{aligned}\right.$$

et l'on en conclura

$$(a+a'+a''+\dots)^2<n(a^2+a'^2+a''^2+\dots).$$

En extrayant les racines carrées positives des deux membres de cette dernière formule, on obtiendra précisément la formule (26).

Corollaire. — Si l'on divise par n les deux membres de la formule (26), on trouvera

$$\text{(28)}\qquad \text{val. num.}\,\frac{a+a'+a''+\dots}{n}<\frac{\sqrt{a^2+a'^2+a''^2+\dots}}{\sqrt{n}}.$$

Ainsi la valeur numérique de la moyenne arithmétique entre plusieurs quantités $a, a', a'', \dots$ est inférieure au rapport

$$\frac{\sqrt{a^2+a'^2+a''^2+\dots}}{\sqrt{n}},$$

qui représente, comme on l'a remarqué plus haut, une moyenne entre les valeurs numériques de ces mêmes quantités.

Scolie I. — Lorsque les quantités $a, a', a'', \dots$ deviennent égales, on a évidemment

$$\text{val. num.}(a+a'+a''+\dots)=\sqrt{n}\,\sqrt{a^2+a'^2+a''^2+\dots}=na.$$

Scolie II. — Si dans l'équation (27) on pose successivement $n=2$, $n=3$, ..., on en conclura

$$\text{(29)}\quad \left\{\begin{aligned}&(a+a')^2+(a-a')^2=2(a^2+a'^2),\\ &(a+a'+a'')^2+(a-a')^2+(a-a'')^2+(a'-a'')^2=3(a^2+a'^2+a''^2),\\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\end{aligned}\right.$$

Théorème XVI. — *Soient $a, a', a'', \dots, \alpha, \alpha', \alpha'', \dots$ deux suites de quantités, et supposons que chacune de ces suites renferme un nombre n de termes. Si les rapports*

$$\frac{a}{\alpha},\quad \frac{a'}{\alpha'},\quad \frac{a''}{\alpha''},\quad \dots$$

ne sont pas tous égaux entre eux, la somme

$$a\alpha+a'\alpha'+a''\alpha''+\dots$$

sera inférieure au produit

$$\sqrt{a^2+a'^2+a''^2+\dots}\,\sqrt{\alpha^2+\alpha'^2+\alpha''^2+\dots};$$

en sorte qu'on aura

$$\text{(30)}\quad \left\{\begin{aligned}&\text{val. num.}(a\alpha+a'\alpha'+a''\alpha''+\dots)\\ &\quad<\sqrt{a^2+a'^2+a''^2+\dots}\,\sqrt{\alpha^2+\alpha'^2+\alpha''^2+\dots}.\end{aligned}\right.$$

Démonstration. — En effet, si au carré de la somme

$$a\alpha + a'\alpha' + a''\alpha'' + \dots$$

on ajoute les numérateurs des fractions qui représentent les carrés des différences entre les rapports

$$\frac{a}{\alpha}, \quad \frac{a'}{\alpha'}, \quad \frac{a''}{\alpha''}, \quad \dots$$

combinés entre eux de toutes les manières possibles, savoir

$$(a\alpha' - a'\alpha)^2, \quad (a\alpha'' - a''\alpha)^2, \quad \dots, \quad (a'\alpha'' - a''\alpha')^2, \quad \dots,$$

on trouvera

$$\tag{31} \left\{ \begin{aligned} &(a\alpha + a'\alpha' + a''\alpha'' + \dots)^2 \\ &\quad + (a\alpha' - a'\alpha)^2 + (a\alpha'' - a''\alpha)^2 + \dots + (a'\alpha'' - a''\alpha')^2 + \dots \\ &= (a^2 + a'^2 + a''^2 + \dots)(\alpha^2 + \alpha'^2 + \alpha''^2 + \dots), \end{aligned} \right.$$

et l'on en conclura

$$(a\alpha + a'\alpha' + a''\alpha'' + \dots)^2 < (a^2 + a'^2 + a''^2 + \dots)(\alpha^2 + \alpha'^2 + \alpha''^2 + \dots).$$

En extrayant les racines carrées des deux membres de cette dernière formule, on obtiendra précisément la formule (30).

Corollaire. — Si l'on divise par n les deux membres de la formule (30), on trouvera

$$\tag{32} \left\{ \begin{aligned} &\text{val. num. } \frac{a\alpha + a'\alpha' + a''\alpha'' + \dots}{n} \\ &\quad < \frac{\sqrt{a^2 + a'^2 + a''^2 + \dots}}{\sqrt{n}} \, \frac{\sqrt{\alpha^2 + \alpha'^2 + \alpha''^2 + \dots}}{\sqrt{n}}. \end{aligned} \right.$$

Ainsi la moyenne arithmétique entre les produits

$$a\alpha, \quad a'\alpha', \quad a''\alpha'', \quad \dots$$

a une valeur numérique inférieure au produit de deux rapports qui représentent des moyennes entre les valeurs numériques des deux espèces de quantités comprises dans les deux suites

$$\begin{matrix} a, & a', & a'', & \dots, \\ \alpha, & \alpha', & \alpha'', & \dots. \end{matrix}$$

Scolie I. — Lorsque les rapports

$$\frac{a}{\alpha}, \quad \frac{a'}{\alpha'}, \quad \frac{a''}{\alpha''}, \quad \dots$$

deviennent égaux, on tire de la formule (31)

$$(a\alpha + a'\alpha' + a''\alpha'' + \dots)^2 = (a^2 + a'^2 + a''^2 + \dots)(\alpha^2 + \alpha'^2 + \alpha''^2 + \dots),$$

et, par suite,

$$\begin{aligned} &\text{val. num.}(a\alpha + a'\alpha' + a''\alpha'' + \dots) \\ &\quad = \sqrt{a^2 + a'^2 + a''^2 + \dots}\,\sqrt{\alpha^2 + \alpha'^2 + \alpha''^2 + \dots}. \end{aligned}$$

Il serait facile d'arriver directement au même résultat.

Scolie II. — Si dans la formule (31) on pose successivement

$$n = 2, \qquad n = 3, \qquad \dots,$$

on en conclura

$$\tag{33} \left\{ \begin{aligned} &(a\alpha + a'\alpha')^2 + (a\alpha' - a'\alpha)^2 = (a^2 + a'^2)(\alpha^2 + \alpha'^2), \\ &(a\alpha + a'\alpha' + a''\alpha'')^2 + (a\alpha' - a'\alpha)^2 + (a\alpha'' - a''\alpha)^2 + (a'\alpha'' - a''\alpha')^2 \\ &\quad = (a^2 + a'^2 + a''^2)(\alpha^2 + \alpha'^2 + \alpha''^2), \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{aligned} \right.$$

La première des équations précédentes s'accorde avec l'équation (8) du Chapitre VII (§ I). La seconde peut s'écrire ainsi qu'il suit

$$\tag{34} \left\{ \begin{aligned} &(a\alpha' - a'\alpha)^2 + (a\alpha'' - a''\alpha)^2 + (a'\alpha'' - a''\alpha')^2 \\ &\quad = (a^2 + a'^2 + a''^2)(\alpha^2 + \alpha'^2 + \alpha''^2) - (a\alpha + a'\alpha' + a''\alpha'')^2, \end{aligned} \right.$$

et sous cette forme elle peut être employée avec avantage dans la théorie des rayons de courbure des courbes tracées sur des surfaces quelconques, ainsi que dans plusieurs questions de Mécanique.

Nous terminerons cette Note par la démonstration d'un théorème digne de remarque, auquel on se trouve conduit en comparant la moyenne géométrique entre plusieurs nombres avec leur moyenne arithmétique. Voici en quoi il consiste :

Théorème XVII. — *La moyenne géométrique entre plusieurs nombres* A, B, C, D, … *est toujours inférieure à leur moyenne arithmétique.*

Démonstration. — Soit n le nombre des lettres A, B, C, D, ... Il suffira de prouver qu'on a généralement

$$\sqrt[n]{ABCD\ldots} < \frac{A+B+C+D+\ldots}{n}; \tag{35}$$

ou, ce qui revient au même,

$$ABCD\ldots < \left(\frac{A+B+C+D+\ldots}{n}\right)^n. \tag{36}$$

Or, en premier lieu, on aura évidemment, pour $n=2$,

$$AB = \left(\frac{A+B}{2}\right)^2 - \left(\frac{A-B}{2}\right)^2 < \left(\frac{A+B}{2}\right)^2,$$

et l'on en conclura, en prenant successivement $n=4$, $n=8$, ..., enfin $n=2^m$,

$$\begin{aligned}
ABCD \quad &< \left(\frac{A+B}{2}\right)^2\left(\frac{C+D}{2}\right)^2 < \left(\frac{A+B+C+D}{4}\right)^4,\\
ABCDEFGH &< \left(\frac{A+B+C+D}{4}\right)^4\left(\frac{E+F+G+H}{4}\right)^4\\
&< \left(\frac{A+B+C+D+E+F+G+H}{8}\right)^8,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,
\end{aligned}$$

$$ABCD\ldots < \left(\frac{A+B+C+D+\ldots}{2^m}\right)^{2^m}. \tag{37}$$

En second lieu, si n n'est pas un terme de la progression géométrique

$$2, \quad 4, \quad 8, \quad 16, \quad \ldots,$$

on désignera par 2^m un terme de cette progression supérieure à n, et l'on fera

$$K = \frac{A+B+C+D+\ldots}{n};$$

puis, en revenant à la formule (37), et supposant dans le premier membre de cette formule les $2^m - n$ derniers facteurs égaux à K, on trouvera

$$ABCD\ldots K^{2^m-n} < \left[\frac{A+B+C+D+\ldots+(2^m-n)K}{2^m}\right]^{2^m}$$

ou, en d'autres termes,

$$ABCD\ldots K^{2^m-n} < K^{2^m}.$$

On aura donc par suite

$$ABCD\ldots < K^n = \left(\frac{A+B+C+D+\ldots}{n}\right)^n,$$

ce qu'il fallait démontrer.

Corollaire. — On conclut généralement de la formule (36)

$$A+B+C+D+\ldots > n\sqrt[n]{ABCD\ldots}, \tag{38}$$

quel que soit le nombre des lettres A, B, C, D, ... Ainsi, par exemple,

$$\left\{\begin{aligned}
&A+B > 2\sqrt{AB},\\
&A+B+C > 3\sqrt[3]{ABC},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}\right. \tag{39}$$

NOTE III.

SUR LA RÉSOLUTION NUMÉRIQUE DES ÉQUATIONS.

Résoudre *numériquement* une ou plusieurs équations, c'est trouver les valeurs en nombres des inconnues qu'elles renferment; ce qui exige évidemment que les constantes comprises dans les équations dont il s'agit soient elles-mêmes réduites en nombres. Nous nous occuperons seulement ici des équations qui renferment une inconnue, et nous commencerons par établir, à leur égard, les théorèmes suivants.

Théorème I. — *Soit $f(x)$ une fonction réelle de la variable x, qui demeure continue par rapport à cette variable entre les limites $x = x_0$, $x = X$. Si les deux quantités $f(x_0)$, $f(X)$ sont de signes contraires, on pourra satisfaire à l'équation*

$$f(x) = 0 \tag{1}$$

par une ou plusieurs valeurs réelles de x comprises entre x_0 et X.

Démonstration. — Soit x_0 la plus petite des deux quantités x_0, X. Faisons

$$X - x_0 = h,$$

et désignons par m un nombre entier quelconque supérieur à l'unité. Comme des deux quantités $f(x_0)$, $f(X)$, l'une est positive, l'autre négative, si l'on forme la suite

$$f(x_0),\quad f\left(x_0 + \frac{h}{m}\right),\quad f\left(x_0 + 2\frac{h}{m}\right),\quad \ldots,\quad f\left(X - \frac{h}{m}\right),\quad f(X),$$

et que, dans cette suite, on compare successivement le premier terme avec le second, le second avec le troisième, le troisième avec le quatrième, etc., on finira nécessairement par trouver une ou plusieurs fois deux termes consécutifs qui seront de signes contraires. Soient

$$f(x_1),\quad f(X')$$

deux termes de cette espèce, x_1 étant la plus petite des deux valeurs correspondantes de x. On aura évidemment

$$x_0 < x_1 < X' < X$$

et

$$X' - x_1 = \frac{h}{m} = \frac{1}{m}(X - x_0).$$

Ayant déterminé x_1 et X' comme on vient de le dire, on pourra de même, entre ces deux nouvelles valeurs de x, en placer deux autres x_2, X'' qui, substituées dans $f(x)$, donnent des résultats de signes contraires, et qui soient propres à vérifier les conditions

$$x_1 < x_2 < X'' < X',$$

$$X'' - x_2 = \frac{1}{m}(X' - x_1) = \frac{1}{m^2}(X - x_0).$$

En continuant ainsi, on obtiendra : 1° une série de valeurs croissantes de x, savoir

$$x_0,\quad x_1,\quad x_2,\quad \ldots; \tag{2}$$

2° une série de valeurs décroissantes

$$X,\quad X',\quad X'',\quad \ldots, \tag{3}$$

qui, surpassant les premières de quantités respectivement égales aux produits

$$1 \times (X - x_0),\quad \frac{1}{m} \times (X - x_0),\quad \frac{1}{m^2} \times (X - x_0),\quad \ldots,$$

finiront par différer de ces premières valeurs aussi peu que l'on voudra. On doit en conclure que les termes généraux des séries (2) et (3) convergeront vers une limite commune. Soit a cette limite. Puisque la fonction $f(x)$ reste continue depuis $x = x_0$ jusqu'à $x = X$, les termes généraux des séries suivantes

$$f(x_0),\quad f(x_1),\quad f(x_2),\quad \ldots,$$
$$f(X),\quad f(X'),\quad f(X''),\quad \ldots$$

convergeront également vers la limite commune $f(a)$; et, comme en s'approchant de cette limite ils resteront toujours de signes contraires, il est clair que la quantité $f(a)$, nécessairement finie, ne pourra différer de zéro. Par conséquent on vérifiera l'équation

$$(1) \qquad f(x) = 0,$$

en attribuant à la variable x la valeur particulière a comprise entre x_0 et X. En d'autres termes,

$$(4) \qquad x = a$$

sera une *racine* de l'équation (1).

Scolie I. — Si, après avoir poussé les séries (2) et (3) jusqu'aux termes

$$x_n \quad \text{et} \quad X^{(n)}$$

(n désignant un nombre entier quelconque), on prend la demi-somme de ces deux termes pour valeur approchée de la racine a, l'erreur commise sera plus petite que leur demi-différence, savoir

$$\frac{1}{2}\,\frac{X - x_0}{m^n}.$$

Comme cette dernière expression décroît indéfiniment à mesure que n augmente, il en résulte que, en calculant un nombre suffisant de termes des deux séries, on finira par obtenir de la racine a des valeurs aussi approchées que l'on voudra.

Scolie II. — S'il existe entre les limites x_0, X plusieurs racines réelles de l'équation (1), la méthode précédente en fera connaître une partie, et quelquefois même les fournira toutes. Alors on trouvera pour x_1 et X', ou bien pour x_2 et X'', ... plusieurs systèmes de valeurs qui jouiront des mêmes propriétés.

Scolie III. — Si la fonction $f(x)$ est constamment croissante ou constamment décroissante depuis $x = x_0$ jusqu'à $x = X$, il n'existera entre ces limites qu'une seule valeur de x propre à vérifier l'équation (1).

Corollaire I. — Si l'équation (1) n'a pas de racines réelles comprises entre les limites x_0, X, les deux quantités

$$f(x_0), \quad f(X)$$

seront de même signe.

Corollaire II. — Si, dans l'énoncé du théorème I, on remplace la fonction $f(x)$ par

$$f(x) - b$$

(b désignant une quantité constante), on obtiendra précisément le théorème IV du Chapitre II (§ II). Dans la même hypothèse, en suivant la méthode ci-dessus indiquée, on déterminera numériquement les racines de l'équation

$$(5) \qquad f(x) = b$$

comprises entre x_0 et X.

Nota. — Lorsque l'équation (1) a plusieurs racines comprises entre x_0 et X, en calculant les séries (2) et (3), on n'est pas toujours assuré d'obtenir la plus petite ou la plus grande des racines dont il s'agit. Mais on peut arriver à ce but en suivant une autre méthode dont M. Legendre a fait usage dans le *Supplément à la Théorie des nombres*. Cette seconde méthode se déduit immédiatement des deux théorèmes que je vais énoncer.

Théorème II. — *Supposons, comme dans le théorème I, que la fonction $f(x)$ reste continue depuis $x = x_0$ jusqu'à $x = X$ (X étant supérieur à x_0), et désignons par $\varphi(x)$, $\chi(x)$ deux fonctions auxiliaires, également continues dans l'intervalle dont il s'agit, mais de plus assujetties : 1° à croître constamment avec x dans cet intervalle; 2° à fournir pour la différence*

$$\varphi(x) - \chi(x)$$

une expression variable qui, d'abord négative lorsqu'on attribue à x la valeur particulière x_0, demeure toujours égale (au signe près) à $f(x)$. Si l'équation

$$(1) \qquad f(x) = 0$$

a une ou plusieurs racines réelles comprises entre x_0 et X, les valeurs de x représentées par

$$(6) \qquad x_0, \quad x_1, \quad x_2, \quad x_3, \quad \ldots,$$

et déduites les unes des autres par le moyen des formules

$$(7) \qquad \varphi(x_1) = \chi(x_0), \qquad \varphi(x_2) = \chi(x_1), \qquad \varphi(x_3) = \chi(x_2), \qquad \ldots$$

composeront une série de quantités croissantes dont le terme général convergera vers la plus petite de ces racines. Si, au contraire, l'équation (1) n'a *pas de racines réelles comprises entre x_0 et X, le terme général de la série* (6) *finira par surpasser* X.

Démonstration. — Admettons en premier lieu que l'équation $f(x)=0$ ait une ou plusieurs racines réelles comprises entre les limites x_0, X; et désignons par a la plus petite de ces racines. On vérifiera l'équation dont il s'agit ou, ce qui revient au même, la suivante

$$\varphi(x)-\chi(x)=0, \tag{1}$$

en prenant $x=a$; et l'on aura en conséquence

$$\varphi(a)=\chi(a). \tag{8}$$

De plus, la fonction $\chi(x)$ étant constamment croissante avec x depuis $x=x_0$ jusqu'à $x=\mathrm{X}$, et a surpassant x_0, l'on aura encore

$$\chi(a)>\chi(x_0).$$

En combinant les deux dernières formules avec la première des équations (7), savoir

$$\chi(x_0)=\varphi(x_1),$$

on en conclura

$$\varphi(a)>\varphi(x_1)$$

et, par suite,

$$a>x_1. \tag{9}$$

De même, en combinant les trois formules

$$\varphi(a)=\chi(a),\qquad \chi(a)>\chi(x_1),\qquad \chi(x_1)=\varphi(x_2),$$

dont la seconde se déduit immédiatement de la formule (9), on trouvera

$$\varphi(a)>\varphi(x_2)$$

et, par suite,

$$a>x_2. \tag{10}$$

En continuant ainsi, on s'assurera que tous les termes de la série (6) sont inférieurs à la racine a. J'ajoute que ces différents termes composeront une suite de quantités croissantes; et, en effet, puisque la différence

$$\varphi(x)-\chi(x)$$

est négative par hypothèse pour $x=x_0$, on aura

$$\varphi(x_0)<\chi(x_0);$$

mais $\chi(x_0)=\varphi(x_1)$; donc

$$\varphi(x_0)<\varphi(x_1),$$

$$x_0<x_1. \tag{11}$$

De plus, x_1 étant compris entre x_0 et a, aucune racine réelle de l'équation

$$\varphi(x)-\chi(x)=0$$

ne se trouvera renfermée entre les limites x_0, x_1; et par conséquent (*voir* le théorème I, corollaire I)

$$\varphi(x_0)-\chi(x_0),\quad \varphi(x_1)-\chi(x_1)$$

seront des quantités de même signe, c'est-à-dire toutes deux négatives. On aura donc

$$\varphi(x_1)<\chi(x_1)$$

et, par suite, à cause de $\chi(x_1)=\varphi(x_2)$,

$$\varphi(x_1)<\varphi(x_2),$$

$$x_1<x_2; \tag{12}$$

etc. Donc enfin les quantités

$$x_0,\quad x_1,\quad x_2,\quad \ldots$$

formeront une série dont le terme général x_n, croissant constamment avec n sans pouvoir jamais surpasser la racine a, convergera nécessairement vers une limite égale ou inférieure à cette racine. Nommons l cette limite. Comme, en vertu des équations (7), on a, quel que soit n,

$$\varphi(x_{n+1})=\chi(x_n),$$

on en conclura, en faisant croître n indéfiniment, et passant aux limites,

$$\varphi(l)=\chi(l). \tag{13}$$

La quantité l sera donc elle-même une racine de l'équation (1); et, puisque cette quantité sera plus grande que x_0, sans être supérieure à la racine a, on aura évidemment

$$l=a. \tag{14}$$

Admettons, en second lieu, que l'équation (1) n'ait pas de racines réelles comprises entre x_0 et X. On prouvera encore dans cette hypothèse que le terme général x_n de la série (6) croît constamment avec n, du moins tant que ce terme reste inférieur à X. En effet, tant que cette condition sera remplie, la différence

$$\varphi(x_n) - \chi(x_n)$$

sera (théorème I, corollaire I) de même signe que

$$\varphi(x_0) - \chi(x_0),$$

c'est-à-dire négative et, par suite, on établira comme ci-dessus les formules (11), (12), ... De plus, x_n ne pourra converger vers une limite fixe l inférieure à X, puisque l'existence de cette limite entraînerait évidemment l'équation (13), et par suite l'existence d'une racine réelle comprise entre x_0 et X. Donc il faudra nécessairement, dans l'hypothèse admise, que la valeur de x_n finisse par surpasser la limite X.

Corollaire I. — Les conditions auxquelles les fonctions auxiliaires $\varphi(x)$, $\chi(x)$ sont assujetties dans l'énoncé du théorème II peuvent être remplies d'une infinité de manières. Mais, parmi le nombre infini des valeurs que l'on peut attribuer à la fonction $\varphi(x)$, il importe d'en choisir une qui permette de résoudre facilement les équations (7), c'est-à-dire, en général, toute équation de la forme

$$\varphi(x) = \text{const.}$$

La valeur de $\varphi(x)$ étant choisie, comme on vient de le dire, on calculera sans peine les différents termes de la série (6), et il suffira de chercher la limite vers laquelle ils convergent pour obtenir la plus petite des racines de l'équation (1) comprises entre x_0 et X. Si ces mêmes termes finissent par surpasser X, l'équation (1) n'aura pas de racine réelle dans l'intervalle de x_0 à X.

Corollaire II. — Si l'on prend

$$x_0 = 0,$$

et si, de plus, l'équation (1) admet des racines positives, les quantités x_1, x_2, ... seront toutes inférieures à la plus petite racine de cette espèce, et en fourniront des valeurs de plus en plus approchées.

Théorème III. — *Supposons, comme dans le théorème I, que la fonction $f(x)$ demeure continue depuis $x = x_0$ jusqu'à $x = X$ (X étant supérieur à x_0), et désignons par $\varphi(x)$, $\chi(x)$ deux fonctions auxiliaires également continues dans l'intervalle dont il s'agit, mais de plus assujetties : 1° à croître constamment avec x dans cet intervalle; 2° à fournir pour la différence*

$$\varphi(x) - \chi(x)$$

une expression variable qui devienne positive lorsqu'on attribue à x la valeur particulière X, et demeure toujours égale, au signe près, à $f(x)$. Si l'équation

$$f(x) = 0 \tag{1}$$

a une ou plusieurs racines réelles comprises entre x_0 et X, les valeurs de x représentées par

$$\text{X},\quad \text{X}',\quad \text{X}'',\quad \text{X}''',\quad \ldots \tag{15}$$

et déduites les unes des autres par le moyen des formules

$$\varphi(\text{X}') = \chi(\text{X}),\qquad \varphi(\text{X}'') = \chi(\text{X}'),\qquad \varphi(\text{X}''') = \chi(\text{X}''),\qquad \ldots \tag{16}$$

composeront une série de quantités décroissantes dont le terme général convergera vers la plus grande de ces racines. Si au contraire l'équation (1) n'a pas de racines réelles comprises entre x_0 et X, le terme général de la série (15) finira par s'abaisser au-dessous de x_0.

La démonstration de ce troisième théorème est tellement semblable à celle du second que, pour abréger, nous nous dispenserons de la rapporter ici.

Corollaire I. — Parmi le nombre infini de valeurs qu'on peut attribuer à la fonction $\varphi(x)$ de manière à remplir les conditions exigées, il importe d'en choisir une qui permette de résoudre facilement les équations (16), c'est-à-dire, en général, toute équation de la forme

$$\varphi(x) = \text{const.}$$

La valeur de $\varphi(x)$ étant choisie comme on vient de le dire, on calculera sans peine les différents termes de la série (15), et il suffira de chercher la limite vers laquelle ils convergent pour obtenir la plus grande des racines de l'équation (1) comprises entre x_0 et X. Si ces mêmes termes finissent par s'abaisser au-dessous de x_0, l'équation (1) n'aura pas de racine réelle dans l'intervalle de x_0 à X.

Corollaire II. — Si, l'équation (1) ayant des racines positives, X surpasse la plus grande racine de cette espèce, les quantités X', X'', ... resteront toutes supérieures à cette même racine et en fourniront des valeurs de plus en plus approchées.

Scolie I. — Si l'équation (1) n'a qu'une seule racine réelle a comprise entre x_0 et X, les termes généraux des séries (6) et (15), dont la première est croissante et la seconde décroissante, convergeront vers une limite commune égale à cette racine. Alors, si l'on prolonge ces séries jusqu'aux termes

$$x_n \quad \text{et} \quad X^{(n)},$$

puis que l'on prenne la demi-somme de ces deux termes pour valeur approchée de la racine a, l'erreur commise sera plus petite que

$$\frac{X^{(n)} - x_n}{2}.$$

Scolie II. — Pour montrer une application des principes que nous venons d'établir, considérons en particulier l'équation

$$x^m - A_1 x^{m-1} - A_2 x^{m-2} - \ldots - A_{m-1} x - A_m = 0, \tag{17}$$

m désignant un nombre entier quelconque, et

$$A_1, \quad A_2, \quad \ldots, \quad A_{m-1}, \quad A_m$$

des quantités positives ou nulles. Comme le premier membre de cette équation est négatif pour $x = 0$ et positif pour de très grandes valeurs de x, il en résulte qu'elle a au moins une racine positive et finie. De plus, cette même équation, ne différant pas de la suivante

$$\frac{A_1}{x} + \frac{A_2}{x^2} + \ldots + \frac{A_{m-1}}{x^{m-1}} + \frac{A_m}{x^m} = 1,$$

dont le second membre reste invariable, tandis que le premier décroît constamment pour des valeurs positives et croissantes de x, n'admettra évidemment qu'une seule racine réelle et positive. Soient a cette racine et A le plus grand des nombres

$$A_1, \quad A_2, \quad \ldots, \quad A_{m-1}, \quad A_m;$$

enfin, désignons à l'ordinaire une moyenne entre ces nombres par la notation

$$M(A_1, A_2, \ldots, A_{m-1}, A_m).$$

On tirera de l'équation (17), en y faisant $x = a$, puis ayant égard à la formule (11) des *Préliminaires*,

$$\begin{aligned} a^m &= A_1 a^{m-1} + A_2 a^{m-2} + \ldots + A_{m-1} a + A_m \\ &= (a^{m-1} + a^{m-2} + \ldots + a + 1) M(A_1, A_2, \ldots, A_{m-1}, A_m) \\ &= \frac{a^m - 1}{a - 1} M(A_1, A_2, \ldots, A_{m-1}, A_m) < A \frac{a^m - 1}{a - 1} \end{aligned}$$

et, par suite,

$$a - 1 < A \frac{a^m - 1}{a^m} < A,$$

$$a < A + 1. \tag{18}$$

Par conséquent la racine positive de l'équation (17) sera comprise entre les limites 0 et $A + 1$. D'un autre côté, comme, en désignant par

$$A_r a^{m-r} \quad \text{et} \quad A_s a^{m-s}$$

le plus petit et le plus grand des termes renfermés dans le polynôme

$$A_1 a^{m-1} + A_2 a^{m-2} + \ldots + A_{m-1} a + A_m,$$

et par $n \leqq m$ le nombre de ceux qui diffèrent de zéro, on aura évidemment

$$a^m > n A_r a^{m-r},$$

$$a^m < n A_s a^{m-s}$$

et, par suite,

$$a > (n A_r)^{\frac{1}{r}},$$

$$a < (n A_s)^{\frac{1}{s}},$$

il est clair que la racine a sera comprise entre le plus petit et le plus grand des nombres

$$n A_1, \quad (n A_2)^{\frac{1}{2}}, \quad (n A_3)^{\frac{1}{3}}, \quad \ldots, \quad (n A_m)^{\frac{1}{m}}. \tag{19}$$

Enfin, puisque, en vertu du théorème I (corollaire I), le premier membre de l'équation (17) restera négatif depuis $x = 0$ jusqu'à $x = a$, et positif depuis $x = a$ jusqu'à $x = \infty$, il en résulte qu'on pourra choisir encore pour limite inférieure de la racine a le plus grand des nombres entiers qui rendent négative l'expression

$$x^m - A_1 x^{m-1} - A_2 x^{m-2} - \ldots - A_{m-1} x - A_m, \tag{20}$$

et pour limite supérieure le plus petit de ceux qui la rendent positive. Soient maintenant

$$x_0, \quad X$$

les deux limites inférieure et supérieure calculées d'après l'une des règles que nous venons d'indiquer. Si l'on fait, en outre,

$$(21)\qquad \varphi(x) = x^m, \qquad \chi(x) = A_1 x^{m-1} + A_2 x^{m-2} + \ldots + A_{m-1} x + A_m,$$

les théorèmes II et III seront applicables à l'équation (17); et comme, dans cette hypothèse, chacune des équations (7) ou (16) se trouvera réduite à la forme

$$x^m = \text{const.},$$

il deviendra facile de calculer les quantités comprises dans les deux séries

$$X, \quad X', \quad X'', \quad X''', \quad \ldots,$$
$$x_0, \quad x_1, \quad x_2, \quad x_3, \quad \ldots,$$

dont les termes généraux seront les valeurs approchées en plus et en moins de la racine a.

Scolie III. — Considérons encore l'équation

$$(22)\qquad x^m + A_1 x^{m-1} + A_2 x^{m-2} + \ldots + A_{m-1} x - A_m = 0,$$

m désignant toujours un nombre entier, et

$$A_1, \quad A_2, \quad \ldots, \quad A_{m-1}, \quad A_m$$

des quantités positives ou nulles, dont la plus grande soit égale à A. En prenant $\frac{1}{x}$ pour inconnue, on pourra présenter cette équation sous la forme suivante

$$(23)\qquad \left(\frac{1}{x}\right)^m - \frac{A_{m-1}}{A_m}\left(\frac{1}{x}\right)^{m-1} - \frac{A_{m-2}}{A_m}\left(\frac{1}{x}\right)^{m-2} - \ldots - \frac{A_1}{A_m}\frac{1}{x} - \frac{1}{A_m} = 0,$$

qui est pareille à celle de l'équation (17). On en conclura que l'équation (22) admet une seule racine positive inférieure au quotient

$$(24)\qquad \frac{1}{\frac{A}{A_m} + 1},$$

et que cette racine est comprise, non seulement entre la plus petite et la plus grande des quantités

$$(25)\qquad \frac{A_m}{nA_{m-1}}, \quad \left(\frac{A_m}{nA_{m-2}}\right)^{\frac{1}{2}}, \quad \left(\frac{A_m}{nA_{m-3}}\right)^{\frac{1}{3}}, \quad \ldots, \quad \left(\frac{A_m}{nA_1}\right)^{\frac{1}{m-1}}, \quad \left(\frac{A_m}{n}\right)^{\frac{1}{m}},$$

$n \leqq m$ représentant le nombre des termes variables renfermés dans le premier membre de l'équation (22), mais aussi entre le plus grand des nombres entiers qui rendent négative l'expression

$$(26)\qquad x^m + A_1 x^{m-1} + A_2 x^{m-2} + \ldots + A_{m-1} x - A_m,$$

et le plus petit de ceux qui la rendent positive. Après avoir fixé, d'après ces remarques, deux limites en plus et en moins de la racine en question, il suffira, pour en approcher davantage, d'appliquer les théorèmes II et III à l'équation (23), en y regardant $\frac{1}{x}$ comme l'inconnue qu'il s'agit de déterminer.

Scolie IV. — Si l'équation (1) avait deux racines réelles comprises entre x_0 et X, mais extrêmement rapprochées l'une de l'autre, les termes généraux des séries (6) et (15) paraîtraient au premier abord converger vers la même limite, et l'on pourrait prolonger longtemps les deux séries avant de s'apercevoir de la différence entre les limites vers lesquelles ils convergent effectivement. La même remarque est applicable aux séries (2) et (3). Par conséquent les méthodes de résolution fondées uniquement sur le théorème I ou bien sur les théorèmes II et III ne sont pas propres à faire connaître, dans tous les cas, le nombre des racines réelles d'une équation numérique; mais elles fourniront toujours des valeurs aussi approchées que l'on voudra de toute racine réelle qui se trouvera seule comprise entre deux limites données.

Dans le cas particulier où l'équation numérique que l'on considère a pour premier membre une fonction réelle et entière de la variable x, on peut tout à la fois, ainsi que M. Lagrange l'a fait voir, déterminer le nombre des racines réelles et calculer leurs valeurs approchées. Pour atteindre facilement ce but, il convient de réduire d'abord l'équation proposée à n'avoir que des racines inégales, en opérant comme il suit.

Soit

$$(27)\qquad F(x) = 0$$

l'équation donnée. Désignons par a, b, c, ... ses diverses racines réelles ou imaginaires, et par m le degré de son premier membre, dans lequel nous supposerons le coefficient de la plus haute puissance de x réduit à l'unité. Enfin, soient m' le nombre des racines égales à a, m'' le nombre des racines égales à b, m''' le nombre des racines égales à c, ... On aura

$$m' + m'' + m''' + \ldots = m \tag{28}$$

et

$$\mathrm{F}(x) = (x-a)^{m'}(x-b)^{m''}(x-c)^{m'''}\ldots. \tag{29}$$

On en conclura, en désignant par z une nouvelle variable,

$$\frac{\mathrm{F}(x+z)}{\mathrm{F}(x)} = \left(1+\frac{z}{x-a}\right)^{m'}\left(1+\frac{z}{x-b}\right)^{m''}\left(1+\frac{z}{x-c}\right)^{m'''}\ldots. \tag{30}$$

Si maintenant on fait

$$\mathrm{F}(x+z) = \mathrm{F}(x) + z\,\mathrm{F}_1(x) + z^2\,\mathrm{F}_2(x) + \ldots, \tag{31}$$

et que l'on développe les expressions

$$\left(1+\frac{z}{x-a}\right)^{m'}, \quad \left(1+\frac{z}{x-b}\right)^{m''}, \quad \left(1+\frac{z}{x-c}\right)^{m'''}, \quad \ldots$$

suivant les puissances ascendantes de z, l'équation (30) deviendra

$$\begin{aligned}
&1 + z\frac{\mathrm{F}_1(x)}{\mathrm{F}(x)} + z^2\frac{\mathrm{F}_2(x)}{\mathrm{F}(x)} + \ldots \\
&= \left(1+\frac{m'}{x-a}z+\ldots\right)\left(1+\frac{m''}{x-b}z+\ldots\right)\left(1+\frac{m'''}{x-c}z+\ldots\right)\ldots \\
&= 1 + \left(\frac{m'}{x-a}+\frac{m''}{x-b}+\frac{m'''}{x-c}+\ldots\right)z + \ldots;
\end{aligned}$$

puis, en égalant de part et d'autre les coefficients de la première puissance de z, on trouvera

$$\left\{\begin{aligned}
\frac{\mathrm{F}_1(x)}{\mathrm{F}(x)} &= \frac{m'}{x-a}+\frac{m''}{x-b}+\frac{m'''}{x-c}+\ldots \\
&= \frac{m'(x-b)(x-c)\ldots+m''(x-a)(x-c)\ldots+m'''(x-a)(x-b)\ldots+\ldots}{(x-a)(x-b)(x-c)\ldots}.
\end{aligned}\right. \tag{32}$$

Comme la formule précédente a pour dernier membre une fraction algébrique évidemment irréductible, il en résulte qu'il suffit de diviser le pre-

mier membre $\mathrm{F}(x)$ de l'équation (27) par le plus grand commun diviseur des deux polynômes $\mathrm{F}(x)$, $\mathrm{F}_1(x)$ pour ramener cette équation à la suivante

$$(x-a)(x-b)(x-c)\ldots = 0, \tag{33}$$

qui n'a plus que des racines inégales.

Nous ne nous arrêterons pas à faire voir comment on pourrait déduire des mêmes principes diverses équations dont les racines, toutes inégales entre elles, seraient équivalentes, tantôt aux racines simples, tantôt aux racines doubles, tantôt aux racines triples, etc. de la proposée. Nous ajouterons seulement ici quelques remarques relatives au cas où l'on suppose immédiatement toutes les racines de l'équation (27) inégales entre elles. Chacun des nombres m', m'', m''', ... se réduisant alors à l'unité, on tire la formule (32)

$$\mathrm{F}_1(x) = (x-b)(x-c)\ldots + (x-a)(x-c)\ldots + (x-a)(x-b)\ldots + \ldots \tag{34}$$

et, par suite,

$$\left\{\begin{aligned}
\mathrm{F}_1(a) &= (a-b)(a-c)\ldots, \\
\mathrm{F}_1(b) &= (b-a)(b-c)\ldots, \\
\mathrm{F}_1(c) &= (c-a)(c-b)\ldots, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,
\end{aligned}\right. \tag{35}$$

$$\mathrm{F}_1(a)\,\mathrm{F}_1(b)\,\mathrm{F}_1(c)\ldots = (-1)^{\frac{m(m-1)}{2}}(a-b)^2(a-c)^2\ldots(b-c)^2\ldots. \tag{36}$$

Ainsi, dans l'hypothèse admise, le produit des carrés des différences entre les racines de l'équation (27) sera équivalent, abstraction faite du signe, au produit

$$\mathrm{F}_1(a)\,\mathrm{F}_1(b)\,\mathrm{F}_1(c)\ldots,$$

et par conséquent au dernier terme de l'équation en z que fournit l'élimination de x entre les deux suivantes

$$\mathrm{F}(x) = 0, \qquad z - \mathrm{F}_1(x) = 0; \tag{37}$$

de sorte que, en appelant H la valeur numérique de ce dernier terme, on aura

$$(a-b)^2(a-c)^2\ldots(b-c)^2\ldots = \pm \mathrm{H}. \tag{38}$$

Dans la même hypothèse, les valeurs de $\mathrm{F}_1(a)$, $\mathrm{F}_1(b)$, ... données par les formules (35) n'étant jamais nulles, si l'on désigne par α une racine réelle de l'équation (27), il suffira d'attribuer au nombre α des valeurs très petites pour que les deux quantités

$$\begin{aligned} F(a+\alpha) &= \quad \alpha F_1(a) + \alpha^2 F_2(a) + \ldots, \\ F(a-\alpha) &= -\alpha F_1(a) + \alpha^2 F_2(a) - \ldots \end{aligned}$$

soient de signes contraires. De plus, si l'on représente par x_0, X deux limites inférieure et supérieure entre lesquelles la seule racine réelle a se trouve comprise, en vertu du théorème I (corollaire I), F(X) sera de même signe que $F(a+\alpha)$, $F(x_0)$ de même signe que $F(a-\alpha)$, et par suite les deux quantités

$$F(x_0), \quad F(X)$$

seront de signes contraires.

Lorsque l'équation (27) n'a pas de racines égales, ou qu'elle a été débarrassée de celles qu'elle pouvait avoir, il devient facile de déterminer pour cette équation, non seulement deux limites entre lesquelles toutes les racines réelles se trouvent renfermées, mais encore une suite de quantités qui, prises deux à deux, servent de limites respectives aux différentes racines de cette espèce, et enfin les valeurs aussi approchées que l'on voudra de ces mêmes racines. C'est ce que nous allons établir, en résolvant l'un après l'autre les trois problèmes suivants.

Problème I. — *Déterminer deux limites entre lesquelles toutes les racines réelles de l'équation*

$$F(x) = 0 \tag{27}$$

se trouvent renfermées.

Solution. $F(x)$ étant par hypothèse un polynôme réel, du degré m par rapport à x, et dans lequel la plus haute puissance de x a pour coefficient l'unité, si l'on désigne les coefficients successifs des puissances inférieures par

$$a_1, \quad a_2, \quad \ldots, \quad a_{m-1}, \quad a_m,$$

et les valeurs numériques de ces mêmes coefficients par

$$A_1, \quad A_2, \quad \ldots, \quad A_{m-1}, \quad A_m,$$

on aura identiquement

$$\left\{ \begin{aligned} F(x) &= x^m + a_1 x^{m-1} + a_2 x^{m-2} + \ldots + a_{m-1} x + a_m \\ &= x^m \pm A_1 x^{m-1} \pm A_2 x^{m-2} \pm \ldots \pm A_{m-1} x \pm A_m. \end{aligned} \right. \tag{39}$$

Soit maintenant k un nombre supérieur à la racine positive unique de l'équation (17) (théorème III, scolie II). Le polynôme (20) sera positif toutes les fois qu'on supposera $x \geq k$. Par suite, il suffira d'attribuer à x une valeur numérique plus grande que le nombre k, pour que la somme des valeurs numériques des termes

$$A_1 x^{m-1}, \quad A_2 x^{m-2}, \quad \ldots, \quad A_{m-1} x, \quad A_m$$

devienne inférieure à la valeur numérique de x^m. Il en résulte que le premier membre de l'équation (27) ne pourra jamais s'évanouir, tant que la valeur de x sera située hors des limites

$$-k, \quad +k.$$

Donc toutes les racines positives ou négatives de l'équation (27) seront comprises entre ces mêmes limites.

Scolie I. — Le nombre k étant assujetti à la seule condition de surpasser la racine positive de l'équation (17), on peut le supposer égal soit à la plus grande des expressions (19), soit au plus petit des nombres entiers qui, substitués à la place de x dans le polynôme (20), donnent un résultat positif.

Scolie II. — On peut aisément s'assurer que le nombre k, déterminé comme on vient de le dire, est supérieur, non seulement aux valeurs numériques des racines réelles de l'équation (27), mais encore aux modules de toutes les racines imaginaires. En effet, soit

$$x = r(\cos t + \sqrt{-1}\sin t)$$

une semblable racine. On aura en même temps les deux équations réelles

$$\left\{ \begin{aligned} & r^m \cos mt \pm A_1 r^{m-1} \cos(m-1)t \\ & \qquad \pm A_2 r^{m-2} \cos(m-2)t \pm \ldots \pm A_{m-1} r \cos t \pm A_m = 0, \end{aligned} \right. \tag{40}$$

$$\left\{ \begin{aligned} & r^m \sin mt \pm A_1 r^{m-1} \sin(m-1)t \\ & \qquad \pm A_2 r^{m-2} \sin(m-2)t \pm \ldots \pm A_{m-1} r \sin t \qquad = 0; \end{aligned} \right. \tag{41}$$

et, en ajoutant la première équation multipliée par $\cos mt$ à la seconde multipliée par $\sin mt$, on en conclura

$$\left\{ \begin{aligned} & r^m \pm A_1 r^{m-1} \cos t \\ & \quad \pm A_2 r^{m-2} \cos 2t \pm \ldots \pm A_{m-1} r \cos(m-1)t \pm A_m \cos mt = 0. \end{aligned} \right. \tag{42}$$

Or il est clair qu'on ne saurait satisfaire à cette dernière équation en supposant $r > k$, puisque dans cette hypothèse la valeur numérique de r^m surpasse la somme des valeurs numériques des termes

$$A_1 r^{m-1}, \quad A_2 r^{m-2}, \quad \ldots, \quad A_{m-1} r, \quad A_m,$$

et à plus forte raison la somme des valeurs numériques que ces mêmes termes acquièrent lorsqu'on les multiplie par des cosinus.

Scolie III. — En comparant avec le polynôme (26) les premiers membres des équations (27) et (40), on prouverait facilement que, si l'on désigne par g un nombre inférieur à la racine positive unique de l'équation (22), g sera une limite inférieure, non seulement aux valeurs numériques de toutes les racines réelles de l'équation (27), mais encore aux modules de toutes les racines imaginaires. C'est ce qui arrivera, par exemple, si l'on prend pour g la plus petite des expressions (25); ou le plus grand des nombres entiers qui, substitués à la place de x dans le polynôme (26), donnent un résultat négatif. Le nombre g étant déterminé comme on vient de le dire, toutes les racines positives de l'équation (27) se trouveront comprises entre les limites

$$+g, \quad +k,$$

et les racines négatives de la même équation entre les limites

$$-k, \quad -g.$$

Scolie IV. — Lorsqu'on se propose seulement d'obtenir une limite inférieure à la plus petite des racines positives ou supérieure à la plus grande, on peut quelquefois y parvenir en s'appuyant sur le corollaire du théorème XVII (Note précédente). Supposons, en effet, que tous les termes du polynôme $F(x)$, à l'exception d'un seul, soient de même signe. L'équation (27) prendra la forme suivante :

$$(43) \qquad \left\{ \begin{array}{l} x^m + A_1 x^{m-1} + \ldots + A_{s-1} x^{m-s+1} \\ \qquad + A_{s+1} x^{m-s-1} + \ldots + A_{m-1} x + A_m = A_s x^{m-s}. \end{array} \right.$$

Soit maintenant n le nombre des termes qui dans le premier membre de l'équation (43) ne se réduisent pas à zéro, et

$$B x^\mu$$

la moyenne géométrique entre ces termes, B désignant la moyenne géométrique entre leurs coefficients. En vertu du corollaire du théorème XVII (Note II), toute valeur réelle et positive de x propre à vérifier l'équation pro-

posée, ou, ce qui revient au même, à lui servir de racine, satisfera nécessairement à la condition

$$A_s x^{m-s} > n B x^\mu,$$

et, par conséquent, à l'une des deux suivantes

$$(44) \qquad x > \left(\frac{nB}{A_s}\right)^{\frac{1}{m-s-\mu}},$$

$$(45) \qquad x < \left(\frac{A_s}{nB}\right)^{\frac{1}{\mu-m+s}},$$

savoir, à la première, si $m - s$ surpasse μ, et à la seconde, dans le cas contraire. Il est bon d'observer que, si le nombre s s'évanouit, A_s se réduira au coefficient de x^m, c'est-à-dire à l'unité.

Scolie V. — Il est encore facile d'obtenir deux limites, l'une inférieure, l'autre supérieure aux racines positives de l'équation (27), par la méthode que je vais indiquer. On observera d'abord que toute équation dont le premier membre n'offre qu'une variation de signe, c'est-à-dire toute équation qui se présente sous la forme

$$A_0 x^m + A_1 x^{m-1} + \ldots - A_n x^{m-n} - A_{n+1} x^{m-n-1} - \ldots = 0$$

ou sous la suivante

$$-A_0 x^m - A_1 x^{m-1} - \ldots + A_n x^{m-n} + A_{n+1} x^{m-n-1} + \ldots = 0,$$

$A_0, A_1, \ldots, A_n, A_{n+1}, \ldots$ désignant des nombres quelconques, n'admet qu'une racine positive, évidemment égale à la seule valeur positive de x pour laquelle la fraction

$$\frac{A_0 x^n + A_1 x^{n-1} + A_2 x^{n-2} + \ldots}{A_n + A_{n+1}\left(\frac{1}{x}\right) + A_{n+2}\left(\frac{1}{x}\right)^2 + \ldots},$$

qui croît sans cesse depuis $x = 0$ jusqu'à $x = \infty$, puisse se réduire à l'unité. Par conséquent le premier membre d'une semblable équation aura le même signe que ses premiers ou ses derniers termes, suivant que la valeur de x sera supérieure à la racine dont il s'agit, ou comprise entre zéro et cette même racine. Cela posé, concevons que, dans le polynôme (39), $-A_s x^s$ soit le premier terme négatif après x^m, $+A_u x^u$ le premier terme positif après $-A_s x^s$, $-A_v x^v$ le premier terme négatif après $A_u x^u$, $+A_w x_w$ le premier terme positif après $-A_v x^v$, ..., en sorte que l'équation (27) devienne

$$\begin{aligned} &x^m + A_1 x^{m-1} + \ldots \\ &\quad - A_s x^{m-s} - A_{s+1} x^{m-s-1} - \ldots + A_u x^{m-u} + A_{u+1} x^{m-u-1} + \ldots \\ &\quad - A_v x^{m-v} - A_{v+1} x^{m-v-1} - \ldots + A_w x^{m-w} + A_{w+1} x^{m-w-1} + \ldots \pm A_m = 0. \end{aligned}$$

On conclura des remarques précédentes, que toute valeur positive de x propre à vérifier l'équation (27) doit être : 1° inférieure à la plus grande des racines positives des équations

$$\begin{aligned} x^m + A_1 x^{m-1} + \ldots - A_s x^{m-s} - A_{s+1} x^{m-s-1} - \ldots &= 0, \\ A_u x^{m-u} + A_{u+1} x^{m-u-1} + \ldots - A_v x^{m-v} - A_{v+1} x^{m-v-1} - \ldots &= 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots &; \end{aligned}$$

2° supérieure à la plus petite de ces mêmes racines, lorsque A_m est précédé du signe —, et, dans le cas contraire, à la plus petite des racines positives des équations de la forme

$$\begin{aligned} -A_s x^{m-s} - A_{s+1} x^{m-s-1} - \ldots + A_u x^{m-u} + A_{u+1} x^{m-u-1} + \ldots &= 0, \\ -A_v x^{m-v} - A_{v+1} x^{m-v-1} - \ldots + A_w x^{m-w} + A_{w+1} x^{m-w-1} + \ldots &= 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \end{aligned}$$

Quelquefois les deux conditions qu'on vient d'énoncer s'excluent mutuellement, et alors on peut affirmer que l'équation (27) n'a pas de racines positives.

Problème II. — *Trouver le nombre des racines réelles de l'équation* (27), *avec une suite de quantités qui, prises deux à deux, servent de limites à ces mêmes racines.*

Solution. — Nous supposerons l'équation (27) réduite à n'avoir que des racines inégales. Alors, si l'on désigne par k (*voir* le problème précédent) une limite supérieure aux valeurs numériques de toutes les racines réelles, par h un nombre moindre que la plus petite différence entre ces racines, enfin par $k_1, k_2, \ldots, k_n$ d'autres nombres tellement choisis que, dans la suite

$$(46) \qquad -k, \quad -k_1, \quad -k_2, \quad \ldots, \quad -k_n, \quad 0, \quad k_n, \quad \ldots, \quad k_2, \quad k_1, \quad k,$$

la différence entre un terme et celui qui le précède soit toujours une quantité positive égale ou inférieure à h, il est clair que deux termes consécutifs de la suite (46) ne comprendront jamais entre eux plus d'une racine réelle. D'ailleurs, lorsqu'on substitue à la place de x dans le polynôme $F(x)$ deux quan-

tités entre lesquelles une seule racine réelle au plus se trouve renfermée, les résultats obtenus sont de même signe ou de signes contraires; pour parler autrement, la comparaison de ces deux résultats offre une permanence de signe, ou une variation de signe, suivant qu'il n'existe pas de racine réelle, ou qu'il en existe une entre les deux quantités dont il s'agit. Par conséquent, si l'on prend les termes de la suite (46) pour des valeurs successives de la variable x, et que l'on forme la suite des valeurs correspondantes du polynôme $F(x)$, cette nouvelle suite offrira précisément autant de variations de signe que l'équation (27) a de racines réelles, et chacune de ces racines sera comprise entre deux valeurs consécutives de x qui, substituées dans $F(x)$, donnent des résultats de signes contraires. Ainsi toute la difficulté consiste à trouver pour le nombre h une valeur convenable. On y parvient de la manière suivante.

Désignons par H la valeur numérique du dernier terme de l'équation en z que fournit l'élimination de x entre les formules (37). Le nombre H, ainsi qu'on l'a déjà remarqué, sera équivalent (abstraction faite du signe) au produit des carrés des différences entre les racines réelles ou imaginaires de l'équation (27). Par suite $H^{\frac{1}{2}}$ sera équivalent au produit des modules de ces différences (le module de chaque différence réelle n'étant autre chose que sa valeur numérique). Cela posé, soient a, b deux racines distinctes de l'équation (27). Si ces deux racines sont réelles, chacune d'elles ayant alors une valeur numérique inférieure à k, la valeur numérique de leur différence, c'est-à-dire la différence ou la somme de leurs valeurs numériques, ne surpassera jamais $2k$. Si, au contraire, chacune de ces racines ou l'une d'elles seulement devient imaginaire, on pourra, en désignant par r_1, r_2 leurs modules, et par t_1, t_2 deux arcs réels, supposer

$$a = r_1(\cos t_1 + \sqrt{-1}\sin t_1),$$
$$b = r_2(\cos t_2 + \sqrt{-1}\sin t_2),$$

et l'on en déduira

$$a - b = r_1\cos t_1 - r_2\cos t_2 + (r_1\sin t_1 - r_2\sin t_2)\sqrt{-1},$$

$$\begin{aligned} \text{mod.}(a-b) &= [(r_1\cos t_1 - r_2\cos t_2)^2 + (r_1\sin t_1 - r_2\sin t_2)^2]^{\frac{1}{2}} \\ &= [r_1^2 - 2r_1 r_2\cos(t_1 - t_2) + r_2^2]^{\frac{1}{2}} < (r_1^2 + 2r_1 r_2 + r_2^2)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

On aura donc

$$\text{mod.}(a-b) < r_1 + r_2,$$

et, par suite,

$$(47) \qquad \text{mod.}(a-b) < 2k,$$

pourvu que le nombre k ait été choisi, comme dans le premier problème, de manière à surpasser, non seulement les valeurs numériques de toutes les racines réelles, mais encore les modules de toutes les racines imaginaires. On prouvera de même que chacune des différences

$$a-c, \quad \ldots, \quad b-c, \quad \ldots$$

a pour module un nombre inférieur à $2k$, et l'on en conclura que, si, après avoir formé tous les modules de cette espèce en nombre égal à $\frac{m(m-1)}{2}$, on met de côté l'un d'entre eux, par exemple le module de la différence $a-b$, le produit de tous les autres sera un nombre inférieur à l'expression

$$(2k)^{\frac{m(m-1)}{2}-1}.$$

Donc, si l'on multiplie cette expression par le module de la différence $a-b$, on trouvera un résultat plus grand que le produit des modules de toutes les différences, c'est-à-dire un résultat plus grand que $\mathrm{H}^{\frac{1}{2}}$. En d'autres termes, on aura

$$(2k)^{\frac{m(m-1)}{2}-1} \times \operatorname{mod.}(a-b) > \mathrm{H}^{\frac{1}{2}}$$

ou, ce qui revient au même,

$$(48) \qquad \operatorname{mod.}(a-b) > \frac{\mathrm{H}^{\frac{1}{2}}}{(2k)^{\frac{m(m-1)}{2}-1}}.$$

Lorsque les racines a et b sont réelles, le module de la différence $a-b$ se réduit à sa valeur numérique. Par conséquent on obtiendra un nombre h inférieur à la plus petite différence entre les racines réelles de l'équation (27), si l'on pose

$$(49) \qquad h = \frac{\mathrm{H}^{\frac{1}{2}}}{(2k)^{\frac{m(m-1)}{2}-1}}.$$

Scolie I. — Il serait facile de prouver que, si chacun des nombres A_1, A_2, …, A_m (problème I) est entier, le nombre H le sera également. Par suite, dans cette hypothèse, le nombre H, qui ne peut s'évanouir tant que les racines de l'équation (27) restent inégales entre elles, aura une valeur égale ou supérieure à l'unité. Cela posé, la formule (48) donnera

$$(50) \qquad \operatorname{mod.}(a-b) > \frac{1}{(2k)^{\frac{m(m-1)}{2}-1}};$$

et l'on en conclura que, pour obtenir un nombre h inférieur à la plus petite différence entre les racines, il suffit de prendre

$$(51) \qquad h = \frac{1}{(2k)^{\frac{m(m-1)}{2}-1}}.$$

Scolie II. — Soit

$$(52) \qquad \mathrm{Z} = 0$$

l'équation en z que fournit l'élimination de x entre les formules (37). Si, par la méthode ci-dessus indiquée (problème I, scolie III), on détermine une limite G inférieure aux modules de toutes les racines réelles ou imaginaires de l'équation (52), on aura, en désignant toujours par $a, b, c, \ldots$ les racines de l'équation (27),

$$\operatorname{mod.} \mathrm{F}_1(a) > \mathrm{G},$$

ou, ce qui revient au même [*voir* les équations (35)],

$$\operatorname{mod.}(a-b)(a-c)\ldots > \mathrm{G}.$$

On en conclura

$$\operatorname{mod.}(a-b) > \frac{\mathrm{G}}{\operatorname{mod.}(a-c)\ldots}$$

et, par suite,

$$(53) \qquad \operatorname{mod.}(a-b) > \frac{\mathrm{G}}{(2k)^{m-2}},$$

puisque les différences

$$a-b, \quad a-c, \quad \ldots$$

qui renferment la racine a combinée successivement avec toutes les autres, sont au nombre de $m-1$, ou, si l'on met de côté la différence $a-b$, au nombre de $m-2$. Cela posé, il est clair que le nombre h satisfera encore aux conditions requises, si l'on prend

$$(54) \qquad h = \frac{\mathrm{G}}{(2k)^{m-2}}.$$

Scolie III. — Après avoir déterminé h par l'une des méthodes précédentes, on pourra choisir pour la suite des nombres

$$k_1, \quad k_2, \quad \ldots, \quad k_n$$

une progression arithmétique décroissante dont la différence soit égale ou inférieure à h, en se bornant toutefois aux termes de cette progression qui restent compris entre les limites o, k. De plus, si l'on désigne par g (*voir* le problème I, scolie III) une limite inférieure aux valeurs numériques de toutes les racines réelles de l'équation (27), on pourra évidemment dans la suite (46) supprimer tous les termes positifs ou négatifs dont les valeurs numériques sont plus petites que g, en écrivant à la place les deux seuls termes

$$-g, \quad +g.$$

La suite (46) étant modifiée comme on vient de le dire, on substituera successivement dans le polynôme $F(x)$: 1° les termes négatifs de cette suite depuis $-k$ jusqu'à $-g$; 2° les termes positifs depuis $+g$ jusqu'à $+k$; et, toutes les fois que deux termes consécutifs de la première ou de la seconde espèce fourniront des résultats de signes contraires, on sera certain qu'une racine réelle, négative dans le premier cas, positive dans le second, est renfermée entre ces deux termes.

Scolie IV. — Lorsque, par un moyen quelconque, on a déterminé, pour l'équation (27), une valeur approchée en plus ou en moins de la racine réelle a, on peut dans un grand nombre de cas obtenir de la même racine une valeur approchée en sens contraire, et fixer deux limites, l'une plus grande que les racines réelles inférieures à a, l'autre plus petite que les racines réelles supérieures, en s'appuyant sur la proposition que je vais énoncer.

Représentons à l'ordinaire par

$$F_1(x), \quad F_2(x), \quad F_3(x), \quad \dots$$

les coefficients des première, deuxième, troisième, ... puissances de z dans le développement de $F(x+z)$; par $a, b, c, \dots$ les diverses racines de l'équation (27), et par k un nombre supérieur à leurs modules. Supposons en outre que, la quantité ξ étant une valeur approchée de la racine réelle a, la différence $a-\xi$ et la quantité α déterminée par l'équation

$$\alpha = -\frac{F(\xi)}{F_1(\xi)} \tag{55}$$

soient assez petites, abstraction faite des signes, pour que, dans le polynôme

$$F_1(\xi) + 2(2\alpha)F_2(\xi) + 3(2\alpha)^2F_3(\xi) + 4(2\alpha)^3F_4(\xi) + \dots, \tag{56}$$

la valeur numérique du premier terme surpasse la somme des valeurs numériques de tous les autres. Enfin désignons par G un nombre inférieur à

l'excès de la première valeur numérique sur la somme dont il s'agit. On sera certain : 1° que la racine réelle a se trouve seule comprise entre les limites

$$\xi, \quad \xi + 2\alpha;$$

2° que la différence $a-b$ ou $b-a$ entre la racine a et une nouvelle racine réelle b ne peut surpasser

$$\frac{G}{(2k)^{m-2}}. \tag{57}$$

Pour démontrer la proposition précédente, nous observerons d'abord que dans l'hypothèse admise le polynôme (56) étant de même signe que son premier terme, on pourra en dire autant *a fortiori* des deux polynômes

$$\left\{ \begin{array}{l} -3F_1(\xi) + (2\alpha)F_2(\xi) - (2\alpha)^2F_3(\xi) + (2\alpha)^3F_4(\xi) - \dots, \\ F_1(\xi) + (2\alpha)F_2(\xi) + (2\alpha)^2F_3(\xi) + (2\alpha)^3F_4(\xi) + \dots, \end{array} \right. \tag{58}$$

qu'on obtient en développant les fractions

$$\frac{F(\xi - 2\alpha)}{\alpha}, \quad \frac{F(\xi + 2\alpha)}{\alpha}$$

suivant les puissances ascendantes de α, et ayant égard à l'équation (55). Par suite, les premiers termes des deux polynômes étant de signes contraires, il en sera de même des deux fractions et de leurs numérateurs

$$F(\xi - 2\alpha), \quad F(\xi + 2\alpha).$$

Il y aura donc au moins une racine réelle de l'équation (27) entre les limites

$$\xi - 2\alpha, \quad \xi + 2\alpha.$$

J'ajoute qu'il n'y en aura qu'une; et, en effet, il est facile de voir que, si plusieurs racines réelles étaient renfermées entre ces limites, en désignant par a et b deux semblables racines prises à la suite l'une de l'autre, on trouverait pour les valeurs des expressions

$$F_1(a) = (a-b)(a-c)\dots,$$
$$F_1(b) = (b-c)(b-a)\dots$$

deux quantités de signes contraires. Par conséquent l'équation

$$F_1(x) = 0 \tag{59}$$

aurait une racine réelle comprise entre a et b, laquelle serait de la forme

$$\xi + z,$$

la quantité z étant renfermée entre les limites -2α, $+2\alpha$. Or c'est ce qu'on ne peut admettre; car, si l'on remplace dans la formule (31) z par $y+z$, et que l'on développe le premier membre de cette formule ainsi modifiée suivant les puissances ascendantes de y, on en tirera

$$\begin{aligned} &F(x+z) + y\,F_1(x+z) + \ldots \\ &\quad = F(x) + (y+z)\,F_1(x) + (y+z)^2 F_2(x) + \ldots, \end{aligned}$$

puis, en égalant de part et d'autre les coefficients de la première puissance de y,

$$(60) \quad F_1(x+z) = F_1(x) + 2z\,F_2(x) + 3z^2 F_3(x) + 4z^3 F_4(x) + \ldots.$$

Par suite, le développement de

$$(61) \qquad F_1(\xi + z)$$

deviendra

$$(62) \qquad F_1(\xi) + 2z\,F_2(\xi) + 3z^2 F_3(\xi) + 4z^3 F_4(\xi) + \ldots;$$

et, comme dans le polynôme (56) la valeur numérique du premier terme surpasse la somme des valeurs numériques de tous les autres, il en sera de même *a fortiori* du polynôme (62), tant que la valeur numérique de z sera supposée inférieure à celle de 2α. Il en résulte que, dans cette hypothèse, l'expression (61) ne saurait s'évanouir. Donc l'équation (59) n'a pas de racines réelles comprises entre les limites $\xi - 2\alpha$, $\xi + 2\alpha$; et l'équation (27) n'en a qu'une entre ces limites. La racine dont il s'agit est nécessairement celle qui s'approche le plus de la quantité ξ, et que nous avons désignée par a. D'autre part, comme la fraction

$$\frac{F(\xi + 2\alpha)}{\alpha},$$

équivalente au second des deux polynômes (58), est de même signe que le premier terme de ce polynôme, savoir

$$F_1(\xi) = -\frac{F(\xi)}{\alpha},$$

on doit en conclure que

$$F(\xi) \quad \text{et} \quad F(\xi + 2\alpha)$$

sont deux quantités de signes contraires, et que la racine a se trouve resserrée entre les deux limites

$$\xi, \quad \xi + 2\alpha.$$

Quant à la seconde partie de la proposition ci-dessus énoncée, elle est une conséquence immédiate du scolie II, puisque la quantité G restera évidemment inférieure, abstraction faite du signe, au polynôme (62), c'est-à-dire au développement de $F_1(\xi + z)$, tant que la valeur numérique de z ne surpassera pas celle de 2α, et par conséquent inférieure à la quantité $F_1(a)$ qu'on déduit de $F_1(\xi + z)$, en posant

$$z = a - \xi.$$

Il suit d'ailleurs de cette seconde partie que les racines réelles plus grandes que a sont toutes supérieures à la limite

$$(63) \qquad a + \frac{G}{(2k)^{m-2}},$$

et les racines réelles plus petites que a inférieures à la limite

$$(64) \qquad a - \frac{G}{(2k)^{m-2}}.$$

Problème III. — *Trouver les valeurs aussi approchées que l'on voudra des racines réelles de l'équation* (27).

Solution. — On commencera par déterminer, à l'aide du problème précédent, deux limites, l'une en plus et l'autre en moins, de chaque racine réelle et positive. Supposons en particulier que la racine a soit de cette espèce, et désignons par x_0, X les deux limites inférieure et supérieure à cette racine. Si l'on forme deux sommes différentes, la première avec les termes positifs du polynôme $F(x)$, la seconde avec les termes négatifs pris en signe contraire, celle qui sera la plus petite pour $x = x_0$ deviendra la plus grande pour $x = X$. Représentez cette somme par $\varphi(x)$ et l'autre par $\chi(x)$. Les deux fonctions entières $\varphi(x)$, $\chi(x)$ jouiront des propriétés énoncées dans les théorèmes II et III; et, par suite, si la fonction $\varphi(x)$ est telle qu'on puisse facilement résoudre les équations de la forme

$$\varphi(x) = \text{const.},$$

les formules (7) et (16) fourniront immédiatement des valeurs de plus en plus approchées de la racine a. C'est ce qui arrivera, par exemple, toutes les fois que la fonction $\varphi(x)$ se présentera sous la forme

$$B(x+C)^n + D,$$

B, C, D étant trois nombres entiers quelconques, et n un nombre entier égal ou inférieur à m; puisqu'alors on obtiendra les termes successifs des séries (6) et (15) par des extractions de racines du degré n. Si la fonction $\varphi(x)$ n'est pas de la forme que nous venons d'indiquer, on pourra facilement l'y ramener, en ajoutant aux deux membres de l'équation

$$\varphi(x) = \chi(x)$$

un polynôme entier $\psi(x)$ dont tous les termes soient positifs. En effet, il est clair que les valeurs de $\varphi(x)$ et de $\chi(x)$, modifiées par l'addition d'un semblable polynôme, conserveront toujours les mêmes propriétés. On peut, au reste, attribuer au polynôme $\psi(x)$ une infinité de valeurs différentes. Supposons, par exemple,

$$\varphi(x) = x^3 + 3x^2 + 8.$$

La valeur de $\varphi(x)$, modifiée par l'addition du polynôme $\psi(x)$, deviendra

$$(x+1)^3 + 7,$$

si l'on suppose

$$\psi(x) = 3x,$$

ou bien

$$(x+2)^3,$$

si l'on suppose

$$\psi(x) = 3x^2 + 12x;$$

etc. Il est bon de remarquer à ce sujet : 1° qu'on peut toujours choisir la fonction entière $\psi(x)$ de manière à obtenir l'unité pour le nombre B; 2° que, dans beaucoup de cas, l'un des nombres C, D se trouvera réduit à zéro.

Après avoir déterminé par la méthode précédente les racines réelles et positives de l'équation (27), il suffira évidemment pour obtenir ses racines négatives de chercher par la même méthode les racines positives de l'équation

$$F(-x) = 0. \tag{65}$$

Scolie. — Outre la méthode d'approximation que nous venons d'indiquer, il en existe plusieurs autres, parmi lesquelles on doit remarquer celle de Newton. Elle suppose que l'on connaît déjà une valeur approchée ξ de la

racine que l'on cherche, et consiste à prendre pour correction de cette valeur la quantité α déterminée par l'équation

$$\alpha = -\frac{F(\xi)}{F_1(\xi)}. \tag{55}$$

Toutefois, cette dernière méthode n'étant pas toujours applicable, il importe d'examiner dans quels cas on peut l'employer. Nous allons établir à ce sujet les propositions suivantes :

Théorème IV. — *Supposons que, a désignant l'une quelconque des racines réelles positives ou négatives de l'équation (27), et ξ une valeur approchée de cette racine, on détermine α par le moyen de l'équation (55). Si α est assez petit, abstraction faite du signe, pour que dans le polynôme (56) la valeur numérique du premier terme surpasse la somme des valeurs numériques de tous les autres, alors, des deux quantités*

$$\xi, \quad \xi + \alpha,$$

la seconde sera plus approchée de a que la première.

Démonstration. — Nous avons déjà vu (problème II, scolie IV) que, dans l'hypothèse admise, la racine a se trouve seule renfermée entre les limites

$$\xi, \quad \xi + 2\alpha.$$

Cela posé, si l'on prend

$$a = \xi + z, \tag{66}$$

z sera une quantité comprise entre les limites 0, 2α, et propre à vérifier l'équation

$$F(\xi + z) = 0$$

ou, ce qui revient au même, la suivante :

$$F(\xi) + zF_1(\xi) + z^2F_2(\xi) + \ldots = 0. \tag{67}$$

Si maintenant on fait, pour plus de commodité,

$$q = -\frac{F_2(\xi) + zF_3(\xi) + \ldots}{F_1(\xi)} \tag{68}$$

et que l'on ait égard à la formule (55), l'équation (67) deviendra

$$z = \alpha + qz^2. \tag{69}$$

On aura, par suite,

$$a = \xi + z = \xi + \alpha + q z^2; \tag{70}$$

d'où il résulte que, en prenant $\xi + \alpha$ au lieu de ξ pour valeur approchée de a, on commettra une erreur égale, non plus à la valeur numérique de z, mais à celle de $q z^2$. D'ailleurs, le polynôme (56) étant de même signe que son premier terme $F_1(\xi)$, les deux polynômes

$$\left\{ \begin{aligned} & F_1(\xi) + 2(2\alpha) F_2(\xi) + 2(2\alpha) z F_3(\xi) + \ldots = (1 - 4\alpha q) F_1(\xi), \\ & F_1(\xi) - 2(2\alpha) F_2(\xi) - 2(2\alpha) z F_3(\xi) - \ldots = (1 + 4\alpha q) F_1(\xi) \end{aligned} \right. \tag{71}$$

jouiront évidemment de la même propriété; ce qui exige que la valeur numérique de $2\alpha q$, et *a fortiori* celle de $q z$, restent inférieures à $\frac{1}{2}$. On en conclura immédiatement que la valeur numérique de $q z^2$ est inférieure à celle de $\frac{1}{2} z$. Ainsi des deux erreurs que l'on commet en prenant

$$\xi \quad \text{et} \quad \xi + \alpha$$

pour valeurs approchées de a, la seconde est plus petite que la moitié de la première.

Scolie I. — Comme on tire de l'équation (69)

$$z = \frac{\alpha}{1 - q z},$$

et que la valeur numérique de $q z$ est inférieure à $\frac{1}{2}$, on est assuré que la valeur de z restera toujours comprise entre les limites

$$\frac{2}{3}\alpha, \quad 2\alpha.$$

Scolie II. — En résolvant l'équation (69) comme si la valeur de q était connue, on trouve

$$z = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4\alpha q}}{2q} = \frac{2\alpha}{1 \mp \sqrt{1 - 4\alpha q}}.$$

Le radical $\sqrt{1 - 4\alpha q}$ est ici affecté d'un double signe. Mais, puisque la valeur de z doit rester plus petite que celle de 2α, il est clair qu'on devra préférer le signe inférieur. On aura donc

$$z = \frac{2\alpha}{1 + \sqrt{1 - 4\alpha q}}. \tag{72}$$

Cela posé, si l'on nomme q_0, Q, deux limites dont l'une soit inférieure et l'autre supérieure à la quantité q déterminée par la formule (68), on conclura de l'équation (72) que la valeur exacte de z est comprise entre les deux expressions

$$\frac{2\alpha}{1 + \sqrt{1 - 4\alpha q_0}}, \quad \frac{2\alpha}{1 + \sqrt{1 - 4\alpha Q}}. \tag{73}$$

Par conséquent cette valeur renfermera tous les chiffres décimaux communs aux deux expressions réduites en nombres.

Scolie III. — Supposons que des deux quantités q_0, Q la seconde ait la plus grande valeur numérique, et que cette valeur numérique soit inférieure à l'unité. Alors, si la différence $a - \xi = z$ est, abstraction faite du signe, plus petite qu'une unité décimale de l'ordre n, c'est-à-dire si l'on a

$$\text{val. num. } z < \left(\frac{1}{10}\right)^n, \tag{74}$$

la différence

$$a - (\xi + \alpha) = q z^2$$

sera plus petite, abstraction faite du signe, qu'une unité décimale de l'ordre $2n$; en sorte qu'on trouvera

$$\text{val. num. } q z^2 < \left(\frac{1}{10}\right)^{2n}. \tag{75}$$

Ainsi, en prenant $\xi + \alpha$ au lieu de ξ pour valeur approchée de la racine a, on doublera le nombre des décimales exactes.

Si l'on supposait la valeur numérique de Q inférieure, non seulement à l'unité, mais encore à 0,1, on conclurait de la formule (74)

$$\text{val. num. } q z^2 < \left(\frac{1}{10}\right)^{2n+1}.$$

Plus généralement, si l'on suppose cette valeur numérique inférieure à $\left(\frac{1}{10}\right)^r$, r désignant un nombre entier quelconque, la formule (74) entraînera la suivante

$$\text{val. num. } q z^2 < \left(\frac{1}{10}\right)^{2n+r}. \tag{76}$$

Enfin, si la valeur de Q est supérieure à l'unité, mais inférieure à $(10)^r$, on trouvera

$$\text{val. num. } qz^2 < \left(\frac{1}{10}\right)^{2n-r}. \tag{77}$$

Scolie IV. — L'erreur que l'on commet en prenant $\xi+\alpha$ pour valeur approchée de a, ou la valeur numérique du produit qz^2, peut elle-même se calculer par approximation. En effet, si l'on a égard à l'équation (69), on trouvera

$$qz^2 = q(\alpha+qz^2)^2 = q\alpha^2 + (2\alpha)q^2z^2 + q^3z^4.$$

Or, supposons la valeur numérique de 2α, par conséquent celle de z, inférieure à $\left(\frac{1}{10}\right)^n$, et la valeur numérique de Q, par conséquent celle de q, inférieure à $(10)^{\mp r}$, n et r désignant deux nombres entiers. On aura évidemment

$$\text{val. num. } (2\alpha)q^2z^2 < \left(\frac{1}{10}\right)^{3n\pm 2r}$$

et

$$\text{val. num. } \quad q^3z^4 < \left(\frac{1}{10}\right)^{4n\pm 3r}.$$

De plus, si la valeur numérique de la fraction

$$\frac{F_3(\xi) + z F_4(\xi) + \ldots}{F_1(\xi)} \tag{78}$$

est reconnue inférieure à $(10)^{\mp s}$, s désignant encore un nombre entier, on pourra prendre

$$-\alpha^2\frac{F_2(\xi)}{F_1(\xi)}$$

pour valeur approchée du terme $q\alpha^2$, sans craindre une erreur plus considérable que

$$\left(\frac{1}{10}\right)^{3n\pm s}.$$

Par suite, si l'on choisit $\xi+\alpha-\alpha^2\frac{F_2(\xi)}{F_1(\xi)}$, au lieu de $\xi+\alpha$, pour valeur approchée de la racine a, c'est-à-dire si l'on pose

$$a = \xi+\alpha-\alpha^2\frac{F_2(\xi)}{F_1(\xi)}, \tag{79}$$

l'erreur commise sur la racine n'affectera plus que les unités décimales de

l'ordre marqué par le plus grand des trois nombres

$$3n\pm s, \quad 3n\pm 2r, \quad 4n\pm 3r.$$

Dans le cas particulier où la valeur numérique de Q est inférieure à $\left(\frac{1}{10}\right)^r$, et celle de la fraction (78) à $\left(\frac{1}{10}\right)^s$, la nouvelle erreur devient plus petite que

$$\left(\frac{1}{10}\right)^{3n}.$$

Il suffit donc alors de substituer le second membre de l'équation (79) à la quantité ξ pour tripler le nombre des chiffres décimaux exacts dans la valeur approchée de a. C'est ce qui arrive encore, à très peu près, quand le nombre n devient très considérable. Ces résultats sont conformes à ceux que M. Nicholson a obtenus dans un Ouvrage récemment publié à Londres, et qui a pour titre : *Essay on involution and evolution, etc.*

Théorème V. — *Les mêmes choses étant posées que dans le théorème précédent, concevons que le premier terme du polynôme* (56), *c'est-à-dire du polynôme qui représente le développement de* $F_1(\xi+2\alpha)$, *ait une valeur numérique supérieure, non seulement à la somme des valeurs numériques de tous les autres termes, mais encore au double de cette somme. Alors, si l'on désigne par* ξ_1 *une quantité comprise entre les limites*

$$\xi, \quad \xi+2\alpha,$$

la seconde des deux quantités

$$\xi_1, \quad \xi_1 - \frac{F(\xi_1)}{F_1(\xi_1)}$$

sera plus approchée de a que la première.

Démonstration. — Pour établir la proposition qu'on vient d'énoncer, il suffit de faire voir que la valeur numérique de la différence

$$a-\xi_1$$

est supérieure à celle de

$$a-\left[\xi_1-\frac{F(\xi_1)}{F_1(\xi_1)}\right] = (a-\xi_1) - \frac{F(a)-F(\xi_1)}{F_1(\xi_1)},$$

ou, ce qui revient au même, que la fraction

$$\frac{F_1(\xi_1) - \dfrac{F(a)-F(\xi_1)}{a-\xi_1}}{F_1(\xi_1)}$$

a une valeur numérique inférieure à l'unité. Représentons par $\frac{u}{v}$ cette même fraction. Il suffira de prouver que

$$v-u \quad \text{et} \quad v+u,$$

c'est-à-dire, en d'autres termes,

$$\frac{F(a)-F(\xi_1)}{a-\xi_1} \quad \text{et} \quad 2F_1(\xi_1)-\frac{F(a)-F(\xi_1)}{a-\xi_1} \tag{80}$$

sont deux expressions de même signe. Or, si l'on fait

$$a=\xi+z \quad \text{et} \quad \xi_1=\xi+\beta, \tag{81}$$

z et β seront deux quantités de même signe comprises entre les limites o, 2α; et les expressions (80), après le développement des fonctions

$$F(\xi_1+z), \quad F(\xi_1+\beta), \quad F_1(\xi+\beta),$$

deviendront respectivement

$$F_1(\xi)+(\beta+z)F_2(\xi)+(\beta^2+\beta z+z^2)F_3(\xi)+\ldots,$$
$$F_1(\xi)-(\beta+z-4\beta)F_2(\xi)-(\beta^2+\beta z+z^2-6\beta^2)F_3(\xi)-\ldots.$$

Comme, dans chacun de ces derniers polynômes, le coefficient de $F_n(\xi)$ a une valeur numérique évidemment inférieure à celle de l'une des quantités

$$nz^{n-1}, \quad 2n\beta^{n-1},$$

et par conséquent au double de la valeur numérique du produit

$$n(2\alpha)^{n-1},$$

il est clair qu'ils seront l'un et l'autre de même signe que $F_1(\xi)$, si la condition énoncée dans le théorème V se trouve remplie. Donc, etc.

Scolie I. — Les erreurs commises, lorsqu'on prend successivement

$$\xi_1 \quad \text{et} \quad \xi_1-\frac{F(\xi_1)}{F_1(\xi_1)}$$

pour valeurs approchées de la racine a, sont respectivement égales aux valeurs numériques des deux quantités

$$a-\xi_1 \quad \text{et} \quad a-\xi_1+\frac{F(\xi_1)}{F_1(\xi_1)}.$$

On trouvera d'ailleurs, en ayant égard aux formules (81),

$$a-\xi_1=z-\beta \tag{82}$$

et

$$a-\xi_1+\frac{F(\xi_1)}{F_1(\xi_1)}=a-\xi_1-\frac{F(a)-F(\xi_1)}{F_1(\xi_1)}=z-\beta-\frac{F(\xi+z)-F(\xi+\beta)}{F_1(\xi+\beta)};$$

puis, en développant les fonctions $F(\xi+z)$, $F(\xi+\beta)$, $F_1(\xi+\beta)$,

$$\begin{cases} a-\xi_1+\dfrac{F(\xi_1)}{F_1(\xi_1)} \\ \quad =-(z-\beta)^2\dfrac{F_2(\xi)+(z+2\beta)F_3(\xi)+(z^2+2\beta z+3\beta^2)F_4(\xi)+\ldots}{F_1(\xi)+2\beta F_2(\xi)+3\beta^2F_3(\xi)+\ldots}. \end{cases} \tag{83}$$

Cela posé, concevons que, pour toutes les valeurs de β et de z comprises entre o et 2α, la valeur numérique du polynôme

$$F_2(\xi)+(z+2\beta)F_3(\xi)+(z^2+2\beta z+3\beta^2)F_4(\xi)+\ldots \tag{84}$$

reste inférieure à la limite M, et celle du polynôme

$$F_1(\xi)+2\beta F_2(\xi)+3\beta^2F_3(\xi)+\ldots \tag{85}$$

supérieure à la limite N. Si l'on a

$$\text{val. num.}\,(z-\beta)<\left(\frac{1}{10}\right)^n \tag{86}$$

et

$$\frac{M}{N}<(10)^{\mp r}, \tag{87}$$

n et r désignant deux nombres entiers quelconques, on conclura de l'équation (83)

$$\text{val. num.}\left[a-\xi_1+\frac{F(\xi_1)}{F_1(\xi_1)}\right]<\left(\frac{1}{10}\right)^{2n\mp r}. \tag{88}$$

Il est essentiel de remarquer que, pour obtenir des valeurs convenables de M et de N, il suffit : 1° de remplacer dans le polynôme (84) z et β par 2α, puis de calculer la somme des valeurs numériques de tous les termes; 2° de remplacer dans le polynôme (85) β par 2α, et de chercher ensuite la différence entre la valeur numérique du premier terme et la somme des valeurs numériques de tous les autres.

Scolie II. — Les mêmes choses étant posées que dans le théorème V, si l'on fait successivement

$$(89)\qquad \xi_1 = \xi - \frac{F(\xi)}{F_1(\xi)}, \qquad \xi_2 = \xi_1 - \frac{F(\xi_1)}{F_1(\xi_1)}, \qquad \xi_3 = \xi_2 - \frac{F(\xi_2)}{F_1(\xi_2)}, \qquad \ldots,$$

les quantités $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \ldots$ seront des valeurs de plus en plus approchées de la racine a. Si d'ailleurs on attribue aux nombres M et N les mêmes valeurs que dans le scolie I, alors, en supposant

$$\text{val. num.}\,(a - \xi) < \left(\frac{1}{10}\right)^n,$$

on en conclura

$$\text{val. num.}\,(a - \xi_1) < \left(\frac{1}{10}\right)^{2n \pm r},$$

$$\text{val. num.}\,(a - \xi_2) < \left(\frac{1}{10}\right)^{4n \pm 3r},$$

$$\text{val. num.}\,(a - \xi_3) < \left(\frac{1}{10}\right)^{8n \pm 7r},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Ces dernières formules renferment la proposition énoncée par M. Fourier dans le *Bulletin de la Société philomathique* (livraison de mai 1818), relativement au nombre de décimales exactes que fournit à chaque opération nouvelle la méthode de Newton.

Toutes les fois que la fraction $\frac{M}{N}$ est inférieure à l'unité, on peut prendre $r = 0$, et par suite les différences successives entre la racine a et ses valeurs approchées

$$\xi, \quad \xi_1, \quad \xi_2, \quad \xi_3, \quad \ldots$$

sont respectivement plus petites que les nombres

$$\left(\frac{1}{10}\right)^n, \quad \left(\frac{1}{10}\right)^{2n}, \quad \left(\frac{1}{10}\right)^{4n}, \quad \left(\frac{1}{10}\right)^{8n}, \quad \ldots.$$

Donc alors le nombre des décimales exactes se trouve doublé pour le moins à chaque opération nouvelle.

Les recherches précédentes fournissent plusieurs méthodes de résolution pour les équations numériques. Afin de faire mieux sentir les avantages que présentent ces méthodes, je vais les appliquer aux deux équations

$$(90)\qquad x^3 - 2x - 5 = 0$$

et

$$(91)\qquad x^3 - 7x + 7 = 0$$

que Lagrange a choisies pour exemples (*Résolution des équations numériques*, Chap. IV), et dont la première a été plus anciennement traitée par Newton.

Si nous considérons d'abord l'équation (90), nous trouverons (théorème III, scolie II) qu'elle a une seule racine positive comprise entre les deux limites

$$\sqrt{2.2} = 2 \quad \text{et} \quad \sqrt[3]{2.5} = 2,15\ldots.$$

De plus, la valeur positive de x propre à vérifier l'équation

$$2x + 5 = x^3$$

satisfera (problème I, scolie IV) à la condition

$$2\sqrt{5.2x} < x^3,$$

ou, ce qui revient au même, à la suivante :

$$x > (40)^{\frac{1}{5}} = 2,09\ldots.$$

La racine dont il s'agit sera donc renfermée entre les nombres 2,09 et 2,15, ...; en sorte que sa valeur, approchée à moins d'un dixième près, sera 2,1. Pour obtenir une valeur plus exacte, nous observerons qu'on a dans le cas présent

$$F(x) = x^3 - 2x - 5, \qquad F_1(x) = 3x^2 - 2, \qquad F_2(x) = 3x, \qquad F_3(x) = 1,$$

et que, si l'on prend

$$\xi = 2,1,$$

la condition énoncée dans le théorème IV sera remplie. Cela posé, comme on tirera de l'équation (55)

$$\alpha = \frac{5 + \frac{4}{3}\xi}{3\xi^2 - 2} - \frac{\xi}{3} = -0,00543187 8\ldots,$$

on trouvera pour les nouvelles valeurs approchées de l'inconnue x

$$\xi + \alpha = 2,09456812 1\ldots$$

et

$$\xi + \alpha - \alpha^2 \frac{F_2(\xi)}{F_1(\xi)} = \xi + \alpha - \alpha^2 \frac{3\xi}{3\xi^2 - 2} = 2,0945515\ldots.$$

Enfin, comme, la valeur exacte de x étant présentée sous la forme $x = \xi + z$,

z sera une quantité comprise entre les limites 0, 2α, et que par suite on aura évidemment

$$-q = \frac{F_2(\xi) + z F_3(\xi)}{F_1(\xi)} = \frac{6,3 + z}{11,23} < 0,6 < 1,$$

$$\frac{F_3(\xi)}{F_1(\xi)} = \frac{1}{11,23} < 0,1,$$

$$\text{val. num. } z = \text{val. num. } (\alpha + q z^2) < \text{val. num. } \alpha + (2\alpha)^2 \text{ val. num. } q < 0,01,$$

on en conclura (théorème IV, scolies III et IV) que, en prenant

$$x = 2,0945681,$$

on commet une erreur plus petite que $0,0001$, et en prenant

$$x = 2,0945515$$

une erreur plus petite que $0,000001$.

Au lieu d'employer les formules générales, on pourrait effectuer le calcul de la manière suivante. Après avoir trouvé $2,1$ pour la valeur approchée de x, on fera dans l'équation (90)

$$x = 2,1 + z,$$

et l'on en tirera, en divisant tous les termes par le coefficient de z,

$$0,005431878\ldots + z + 0,560997328\ldots z^2 + 0,089047195\ldots z^3 = 0 \tag{92}$$

ou, ce qui revient au même,

$$z = -0,005431878\ldots + q z^2, \tag{93}$$

la valeur de q étant déterminée par la formule

$$q = -0,560997328\ldots - 0,089047195\ldots z. \tag{94}$$

Le double du premier terme de l'équation (92) est, à très peu près, $0,01$; et, comme le premier membre de cette équation fournit deux résultats de signes contraires lorsqu'on y fait successivement

$$z = 0, \qquad z = -0,01,$$

on peut affirmer qu'elle a une racine réelle comprise entre les limites 0 et $-0,01$. Pour démontrer que cette racine est unique, il suffit d'observer que, en vertu de la formule (60), l'équation

$$F_1(2,1 + z) = 0$$

se réduit à

$$1 + 2 \times 0,560997328\ldots z + 3 \times 0,089047195\ldots z^2 = 0,$$

et que cette dernière ne saurait être vérifiée par aucune valeur de z renfermée entre les limites dont il s'agit. De plus, il est clair que, pour une semblable valeur de z, la quantité q déterminée par la formule (94) reste comprise entre $-0,560$ et $-0,561$; et, comme on tire de l'équation (93)

$$\left\{ \begin{aligned} z = -0,005431878\ldots &- 0,000029505\ldots(-q) \\ &- 0,000000320\ldots(-q)^2 - \ldots, \end{aligned} \right. \tag{95}$$

on en conclura : 1° en supposant $-q = 0,560$,

$$z = -0,00544850\ldots,$$

2° en supposant $-q = 0,561$,

$$z = -0,00544853\ldots.$$

Par suite, la valeur réelle et positive de x propre à vérifier l'équation (90) sera comprise entre les limites

$$2,1 - 0,00544850 = 2,09455150$$

et

$$2,1 - 0,00544854 = 2,09455146.$$

Cette équation a donc une racine positive unique à très peu près égale à

$$2,0945515.$$

Il est d'ailleurs facile de s'assurer qu'elle n'a point de racines négatives. Car, si elle en avait une seule, on pourrait satisfaire par une valeur positive de x à la formule

$$x^3 - 2x + 5 = 0; \tag{96}$$

et cette valeur de x (*voir* le scolie V du problème I) serait en même temps inférieure à la racine positive de l'équation

$$x^3 - 2x = 0,$$

c'est-à-dire à

$$\sqrt{2} = 1,414\ldots,$$

et supérieure à la racine de l'équation

$$5 - 2x = 0,$$

c'est-à-dire à

$$\frac{5}{2} = 2,5;$$

ce qui est absurde.

Passons maintenant à l'équation (91), et cherchons en premier lieu ses racines positives. Pour avoir une limite supérieure aux racines de cette espèce, il suffira d'observer que, l'équation dont il s'agit pouvant se mettre sous la forme

$$x^3 + 7 = 7x,$$

on en tire (problème I, scolie IV), en supposant x positif,

$$2\sqrt{7x^3} < 7x$$

et, par suite,

$$x < \frac{7}{4}.$$

On peut donc prendre $\frac{7}{4}$ pour une valeur approchée de la plus grande racine positive. Cela posé, si l'on fait dans l'équation (91)

$$x = \frac{7}{4} + z,$$

on trouvera

$$0,05 + z + 2,40z^2 + \frac{32}{70}z^3 = 0 \tag{97}$$

ou, ce qui revient au même,

$$z = -0,05 + qz^2, \tag{98}$$

la valeur de q étant déterminée par la formule

$$q = -2,40 - \frac{32}{70}z. \tag{99}$$

Le double du premier terme de l'équation (97) est 0,1; et, comme le premier membre de cette équation change de signe lorsqu'on passe de $z = 0$ à $z = -0,1$, tandis que le polynôme

$$1 + 2 \times 2,40z + 3 \times \frac{32}{70}z^2$$

reste constamment positif dans cet intervalle, il en résulte qu'elle a une racine réelle, mais une seule, comprise entre les limites 0 et $-0,1$. La

valeur correspondante de q est évidemment renfermée entre les deux quantités

$$-2,354\ldots, \quad -2,40;$$

et l'on tire d'ailleurs de l'équation (98)

$$\left\{\begin{aligned} z &= -\frac{0,1}{1+\sqrt{1+0,2q}} \\ &= -0,05 - 0,0025(-q) - 0,00025(-q)^2 - 0,00003125(-q)^3 - \ldots \end{aligned}\right. \tag{100}$$

Si dans cette dernière équation on fait successivement

$$q = -2,354, \quad q = -2,40,$$

on trouvera pour les valeurs correspondantes de z

$$z = -0,05788\ldots, \quad z = -0,05810\ldots;$$

et l'on en conclura que la plus grande racine positive de l'équation proposée est renfermée entre les limites

$$\frac{7}{4} - 0,05788\ldots = 1,69211\ldots$$

et

$$\frac{7}{4} - 0,05810\ldots = 1,69189\ldots.$$

Donc, si l'on appelle a cette plus grande racine, sa valeur approchée à onze cent-millièmes près sera donnée par la formule

$$a = 1,6920. \tag{101}$$

En partant de cette première valeur approchée, on pourra par une seule opération en obtenir une seconde dans laquelle l'erreur ne portera plus que sur les décimales du douzième ordre.

Outre la racine a que nous venons de considérer, l'équation (91) admet évidemment une racine négative égale, au signe près, à la racine positive unique de l'équation

$$x^3 - 7x - 7 = 0, \tag{102}$$

et par conséquent renfermée (théorème III, scolie II) entre les limites

$$-\sqrt{14} = -3,7416\ldots \quad \text{et} \quad -\sqrt[3]{14} = -2,41\ldots.$$

Nommons c la racine négative dont il s'agit. La troisième racine b de l'équation (91) sera évidemment réelle et positive, puisque le produit abc des trois racines doit être équivalent au dernier terme pris en signe contraire, c'est-à-dire à -7. Déterminons à présent cette troisième racine. Pour y parvenir, on cherchera d'abord un nombre G égal ou inférieur à la valeur numérique de $F_1(a)$. Or, puisqu'on a dans le cas présent

$$F(x) = x^3 - 7x + 7,$$
$$F_1(x) = 3x^2 - 7,$$

on en conclura

$$F_1(a) = 3a^2 - 7.$$

On pourra donc prendre

$$G = 3(1,69189)^2 - 7 = 1,5874\ldots.$$

D'ailleurs, en vertu de ce qui précède, on a encore

$$a < 1,6922, \qquad -c < 3,7417$$

et, par suite,

$$a - c < 5,4339.$$

Cela posé, on trouvera (problème II, scolie II)

$$a - b > \frac{G}{a-c} > \frac{1,5874}{5,4339} = 0,29212\ldots,$$

et l'on aura en conséquence

$$b < 1,69211\ldots - 0,29214\ldots < 1,40.$$

Après avoir reconnu, comme on vient de le faire, que la racine b est inférieure à la limite 1,40, on supposera

$$x = 1,40 + z.$$

L'équation (91) donnera dans cette hypothèse

$$(103) \qquad 0,05 + z - 3,75\,z^2 - \frac{25}{28}z^3 = 0$$

ou, ce qui revient au même,

$$(98) \qquad z = -0,05 + qz^2,$$

la valeur de q étant déterminée par la formule

$$(104) \qquad q = 3,75 + \frac{25}{28}z.$$

Le double du premier terme de l'équation (103) est 0,1; et, comme le premier membre de cette équation change de signe lorsqu'on passe de $z = 0$ à $z = -0,1$, tandis que le polynôme

$$1 - 2 \times 3,75\,z - 3 \times \frac{25}{28}z^2$$

reste constamment positif dans l'intervalle, il en résulte qu'elle a une seule racine réelle comprise entre les limites 0, $-0,1$. La valeur correspondante de q est évidemment renfermée entre les deux quantités

$$3,66 \quad \text{et} \quad 3,75.$$

En substituant successivement ces deux quantités à la place de la lettre q dans l'équation (100), on obtiendra deux nouvelles limites de l'inconnue z, savoir

$$-\frac{0,1}{1+\sqrt{1,732}} = -0,04317\ldots$$

et

$$-\frac{0,1}{1+\sqrt{1,750}} = -0,04305\ldots;$$

puis l'on en conclura que la racine positive b est comprise entre

$$1,40 - 0,04317\ldots = 1,35682\ldots$$

et

$$1,40 - 0,04305\ldots = 1,35694\ldots.$$

On obtiendra donc la valeur approchée de cette racine à un dix-millième près, si l'on prend

$$(105) \qquad b = 1,3569.$$

Quant à la racine négative c de l'équation (91), nous savons déjà qu'elle est comprise entre les limites

$$-3,7416\ldots \quad \text{et} \quad -2,41\ldots.$$

On aura donc sa valeur approchée à une unité près, si on la suppose égale à -3. Cela posé, faisons dans l'équation (91)

$$x = -3 + z.$$

On trouvera

$$(106) \qquad 0,05 + z - 0,45\,z^2 + 0,05\,z^3 = 0$$

ou, ce qui revient au même,

(98) $$z = -0{,}05 + qz^2,$$

la valeur de q étant déterminée par la formule

(107) $$q = 0{,}45 - 0{,}05z.$$

De plus, on reconnaîtra facilement : 1° que l'équation (106) a une racine réelle, mais une seule, comprise entre les limites 0, $-0{,}1$; 2° que la valeur correspondante de q est renfermée entre les deux nombres

$$0{,}45, \quad 0{,}455;$$

3° que ces deux nombres substitués à la place de la lettre q dans l'équation (100) fournissent deux nouvelles valeurs approchées de z, savoir

$$-\frac{0{,}1}{1+\sqrt{1{,}09}} = -0{,}048922\ldots$$

et

$$-\frac{0{,}1}{1+\sqrt{1{,}091}} = -0{,}048911\ldots.$$

Par suite, la valeur approchée de c à un cent-millième près sera

(108) $$c = -3{,}04892.$$

Au reste, on aurait pu déduire immédiatement la valeur approchée de c des formules (101) et (105). En effet, puisque dans l'équation (91) le coefficient de x^2 se réduit à zéro, on en conclut

$$a + b + c = 0,$$
$$c = -a - b,$$

et, par conséquent, à très peu près,

$$c = -(1{,}6920 + 1{,}3569) = -3{,}0489.$$

Pour terminer cette Note, nous présenterons ici deux théorèmes dont le second comprend la règle énoncée par Descartes relativement à la détermination du nombre des racines positives ou négatives qui appartiennent à une équation de degré quelconque. Dans ce dessein, nous allons d'abord examiner le nombre des variations et des permanences de signes que peut offrir

une suite de quantités, lorsqu'on suppose les différents termes de cette suite comparés l'un à l'autre, dans l'ordre où ils se succèdent.

Soit

(109) $$a_0, \quad a_1, \quad a_2, \quad \ldots, \quad a_{m-1}, \quad a_m$$

la suite que l'on considère, composée de $m+1$ termes. Si aucun de ces termes ne se réduit à zéro, le nombre des variations de signe qu'on obtiendra en les comparant deux à deux, dans l'ordre où ils se succèdent, sera complètement déterminé. Mais, si quelques termes se réduisent à zéro, comme on pourra, dans cette hypothèse, fixer arbitrairement le signe de chacun d'entre eux, le nombre des variations de signe dépendra de cette fixation même, de manière cependant à ne pouvoir s'abaisser au-dessous d'un certain minimum, ni s'élever au-dessus d'un certain maximum. Une semblable remarque peut être faite sur le nombre des permanences de signe. Ajoutons que, pour obtenir le nombre maximum des variations de signe, il suffit de considérer chaque terme qui s'évanouit comme affecté d'un signe contraire à celui du terme précédent. Concevons, par exemple, que la suite (109) se compose des quatre termes

$$+1, \quad 0, \quad 0, \quad -1.$$

Le premier de ces termes étant positif, on obtiendra le nombre maximum des variations de signe, en considérant le second terme comme négatif, et le troisième comme positif, ou, ce qui revient au même, en écrivant

$$+1, \quad -0, \quad +0, \quad -1.$$

Par suite, dans ce cas particulier, le nombre maximum dont il s'agit sera égal à 3. On aurait obtenu au contraire le nombre minimum des variations de signe, égal à l'unité, en affectant chaque terme nul d'un signe semblable à celui du terme précédent, c'est-à-dire en écrivant

$$+1, \quad +0, \quad -0, \quad -1.$$

Ces principes étant admis, on établira sans difficulté les propositions suivantes :

Théorème VI. — *Supposons que, la constante h étant réelle et positive, on multiplie le polynôme*

(110) $$a_0 x^m + a_1 x^{m-1} + a_2 x^{m-2} + \ldots + a_{m-1} x + a_m$$

par le facteur linéaire $x + h$. Cette multiplication n'augmentera pas le *nombre maximum des variations de signe entre les coefficients successifs des puissances descendantes de la variable z.*

Démonstration. — En multipliant le polynôme (110) par $x+h$, on obtient un nouveau polynôme dans lequel les puissances descendantes de la variable ont pour coefficients respectifs les quantités

$$(111)\qquad a_0,\quad a_1+ha_0,\quad a_2+ha_1,\quad \ldots,\quad a_m+ha_{m-1},\quad ha_m.$$

Il suffira donc de prouver que le nombre des variations de signe ne croît pas dans le passage de la suite (109) à la suite (111), lorsqu'on a porté ce nombre au maximum dans l'une et l'autre suite, en affectant chaque terme qui s'évanouit d'un signe contraire à celui du terme précédent. Or, je dis en premier lieu que, les signes étant fixés d'après cette règle, chaque terme de la suite (111), représenté par un binôme de la forme

$$a_n+ha_{n-1},$$

prendra le même signe que l'un des termes a_n, a_{n-1} de la suite (109). Cette assertion est également évidente dans les deux cas qui peuvent se présenter, savoir : 1° lorsque les deux termes a_{n-1}, a_n sont originairement, ou en vertu de la règle adoptée, affectés de signes contraires, par exemple lorsque a_n s'évanouit; 2° lorsque, a_n ayant une valeur différente de zéro, a_{n-1} est affecté du même signe que a_n. En conséquence, si l'on attribue aux quantités

$$(112)\qquad ha_0,\quad ha_1,\quad ha_2,\quad \ldots,\quad ha_{m-1},\quad ha_m$$

les mêmes signes qu'aux termes correspondants de la suite (109), on pourra, sans altérer en aucune manière la succession des signes dans la suite (111), y remplacer chaque binôme de la forme

$$a_n+ha_{n-1}$$

par l'un des deux monômes a_n, ha_{n-1}. En opérant ainsi, on obtiendra une nouvelle suite dans laquelle chaque terme de la forme a_n se trouvera suivi d'un autre terme égal, soit au monôme a_{n+1}, soit au monôme ha_n, qui est la seconde partie du binôme $a_{n+1}+ha_n$, tandis que chaque terme de la forme ha_n se trouvera suivi du monôme ha_{n+1}, ou du monôme a_{n+2}, qui est la première partie du binôme $a_{n+2}+ha_{n+1}$. Cela posé, concevons que dans la nouvelle suite on distingue : 1° chaque terme de la forme a_n auquel succède un autre terme de la forme ha_n; 2° chaque terme de la forme ha_n auquel succède un autre terme de la forme a_{n+2}; et soient respectivement

$$a_s,\quad ha_u,\quad a_v,\quad ha_w,\quad \ldots$$

les différents termes de l'une et l'autre espèce rangés d'après l'ordre de grandeur des indices qui affectent la lettre a. La nouvelle suite, composée des monômes

$$(113)\qquad \left\{\begin{array}{l} a_0,\ a_1,\ \ldots,\ a_s,\quad ha_s,\ ha_{s+1},\ \ldots,\ ha_u,\quad a_{u+2},\ \ldots,\ a_v, \\ \qquad ha_v,\ ha_{v+1},\ \ldots,\ ha_w,\quad a_{w+2},\ a_{w+3},\ \ldots,\ ha_m, \end{array}\right.$$

ne présentera évidemment que des variations de signe propres à la suite (109) avec celles qui peuvent naître dans le passage de ha_u à a_{u+2}, de ha_w à a_{w+2}, ... D'ailleurs il est aisé de voir que, si les deux quantités

$$ha_u \quad\text{et}\quad a_{u+2},$$

ou, ce qui revient au même,

$$a_u \quad\text{et}\quad a_{u+2}$$

sont affectés de signes contraires, la variation de signe correspondante ne fera que remplacer une autre variation de signe propre à la suite (109), savoir celle qui avait lieu entre le terme a_{u+1} et l'un des deux termes a_u, a_{u+2}. Une remarque toute semblable s'applique au cas où les monômes ha_w, a_{w+2} sont affectés de signes contraires, etc. On peut donc conclure que le nombre maximum des variations de signe n'augmente pas lorsqu'on passe de la suite (109) à la suite (113), et par conséquent à la suite (111); ce qu'il fallait démontrer.

Corollaire. — Si l'on multiplie le polynôme (110) par plusieurs facteurs linéaires de la forme

$$x+h,\quad x+h',\quad x+h'',\quad \ldots,$$

h, h', h'', ... désignant des quantités positives, on n'augmentera pas le nombre maximum des variations de signes entre les coefficients successifs des puissances descendantes de la variable x.

Théorème VII. — *Soient, pour le polynôme*

$$(110)\qquad F(x)=a_0x^m+a_1x^{m-1}+\ldots+a_{m-1}x+a_m,$$

m' le nombre minimum des permanences de signes, et m'' le nombre minimum des variations de signe entre les coefficients successifs des puissances descendantes de x. Alors, dans l'équation

$$(114) \qquad F(x) = 0,$$

le nombre des racines négatives sera égal ou inférieur à m', le nombre des racines positives égal ou inférieur à m'', et le nombre des racines imaginaires égal ou supérieur à la différence

$$m - (m' + m'').$$

Démonstration. — Pour établir la première partie du théorème, j'observe que, si l'on appelle $h, h', h'', \ldots$ les racines négatives de l'équation (114), le polynôme $F(x)$ sera divisible par le produit

$$(x+h)(x+h')(x+h'')\ldots.$$

Nommons Q le quotient. D'après le corollaire du théorème précédent, le nombre maximum des variations de signe dans le polynôme $F(x)$ sera égal ou inférieur au nombre maximum de ces variations dans le polynôme Q, et par conséquent au degré de ce dernier polynôme. Par suite, le nombre minimum des permanences de signe dans le polynôme $F(x)$ sera égal ou supérieur à la différence entre le nombre m et le degré du polynôme Q, c'est-à-dire au nombre des racines réelles et négatives de l'équation

$$(114) \qquad F(x) = 0.$$

Pour démontrer la seconde partie du théorème VII, il suffira de remarquer que, en écrivant $-x$ au lieu de x dans l'équation (114), on change à la fois les racines positives en négatives, les variations de signe en permanences, et réciproquement.

Enfin, comme cette équation, étant du degré m, doit avoir m racines réelles ou imaginaires, il est clair que la troisième partie du théorème est une conséquence immédiate des deux autres.

Corollaire. — Pour montrer une application du théorème précédent, considérons en particulier l'équation

$$(115) \qquad x^m + 1 = 0.$$

On trouvera : 1° en supposant m pair,

$$m' = 0, \qquad m'' = 0;$$

2° en supposant m impair,

$$m' = 1, \qquad m'' = 0.$$

Par suite, l'équation (115) n'a point de racines réelles dans la première hypothèse, et ne peut en avoir qu'une dans la seconde, savoir, une racine réelle négative.

NOTE IV.

SUR LE DÉVELOPPEMENT DE LA FONCTION ALTERNÉE

$$(y-x)(z-y)(z-x)\ldots(v-x)(v-y)(v-z)\ldots(v-u).$$

Désignons par φ la fonction dont il s'agit. Ainsi qu'on l'a déjà remarqué (Chap. III, § II), chaque terme de son développement sera équivalent, abstraction faite du signe, au produit des diverses variables rangées dans un certain ordre et respectivement élevées aux puissances marquées par les nombres

$$0,\quad 1,\quad 2,\quad 3,\quad \ldots,\quad n-1.$$

De plus, il est aisé de voir que tous les produits de cette espèce peuvent se déduire les uns des autres à l'aide d'un ou de plusieurs échanges opérés entre les variables prises deux à deux. Ainsi, par exemple, on déduira le produit

$$x^0 y^1 z^2 \ldots u^{n-2} v^{n-1}$$

d'un quelconque des produits de même forme, en faisant passer successivement par de semblables échanges la lettre x à la première place, puis la lettre y à la seconde, puis la lettre z à la troisième, etc. Comme d'ailleurs la fonction φ change de signe, en conservant au signe près la même valeur, toutes les fois qu'on échange deux variables entre elles, on devra conclure : 1° que le développement de cette fonction renferme tous les produits ci-dessus mentionnés, pris les uns avec le signe $+$, les autres avec le signe $-$; 2° que, dans le même développement, deux produits, choisis au hasard, sont affectés du même signe, ou de signes contraires, suivant qu'on peut les déduire l'un de l'autre par un nombre pair ou par un nombre impair d'échanges. En partant de ces remarques, on établira sans difficulté la proposition suivante :

Théorème I. — *Joignez au produit*

$$x^0 y^1 z^2 \ldots u^{n-2} v^{n-1}$$

tous ceux que l'on peut en déduire à l'aide d'un ou de plusieurs échanges

successivement opérés entre les variables

$$x,\quad y,\quad z,\quad \ldots,\quad u,\quad v$$

prises deux à deux. Le nombre des produits que vous obtiendrez sera

$$1.2.3\ldots(n-1)n,$$

et ils se partageront en deux classes distinctes, de telle manière qu'on ne pourra jamais déduire l'un de l'autre deux produits d'une même classe que par un nombre pair d'échanges, ni deux produits de classe différente que par un nombre impair d'échanges. Cela posé, si l'on ajoute tous les produits d'une classe pris avec le signe $+$ *aux produits de l'autre classe pris avec le signe* $-$, *on trouvera pour somme, suivant qu'on donnera le signe* $+$ *aux produits d'une classe ou à ceux de l'autre, soit le développement de* $+\varphi$, *soit le développement de* $-\varphi$.

Il suffit évidemment d'avoir égard à la proposition précédente pour construire le développement de la fonction alternée $+\varphi$. Toutefois on doit remarquer encore un autre théorème, à l'aide duquel on peut décider immédiatement si deux produits, pris au hasard dans le développement dont il s'agit, s'y trouvent affectés du même signe ou de signes contraires. Nous nous contenterons d'énoncer ici ce second théorème, sans en donner la démonstration qu'on déduira sans peine des principes que nous avons exposés.

Théorème II. — *Pour décider si, dans le développement de la fonction alternée* $\pm\varphi$, *deux produits de la forme*

$$x^0 y^1 z^2 \ldots u^{n-2} v^{n-1}$$

sont affectés du même signe, ou de signes contraires, on distribuera les variables

$$x,\quad y,\quad z,\quad \ldots,\quad u,\quad v$$

en plusieurs groupes, en ayant soin de faire entrer deux variables dans un même groupe toutes les fois qu'elles porteront le même exposant dans les deux produits que l'on considère, et formant un groupe isolé de chaque variable qui n'aura pas changé d'exposant dans le passage du premier produit au second. Cela posé, les deux produits seront affectés du même signe, si la différence du nombre total des variables au nombre des groupes est un nombre pair, et ils seront affectés de signes contraires, si cette différence est un nombre impair.

On facilite l'usage du théorème qui précède, en écrivant les deux produits l'un sur l'autre, et rangeant dans chacun d'eux les variables d'après l'ordre de grandeur des exposants qu'elles portent.

Pour appliquer à un exemple les deux théorèmes ci-dessus énoncés, considérons en particulier cinq variables

$$x, \quad y, \quad z, \quad u, \quad v.$$

Le produit de leurs différences, ou, si l'on veut, la fonction alternée

$$(y-x)(z-x)(z-y)(u-x)(u-y)(u-z)(v-x)(v-y)(v-z)(v-u),$$

fournira un développement composé de cent vingt termes respectivement égaux à cent vingt produits dont soixante seront précédés du signe $+$, et soixante du signe $-$. L'un des produits affectés du signe $+$ sera celui qui a pour facteurs les premières lettres des binômes

$$y-x, \quad z-x, \quad z-y, \quad \ldots, \quad v-u,$$

savoir

$$x^0 y^1 z^2 u^3 v^4.$$

Pour juger si un autre produit tel que

$$x^0 z^1 v^2 u^3 y^4$$

doit être pris avec le signe $+$ ou avec le signe $-$, il suffira d'observer que, si l'on compare les deux produits dont il est ici question sous le rapport des mutations qui ont lieu entre les variables données lorsqu'on passe de l'un à l'autre, on sera conduit à partager ces mêmes variables en trois groupes, dont l'un renfermera la seule variable x, un second les trois variables y, z, v, et un troisième la seule variable u. Si du nombre des variables égal à 5 on retranche le nombre des groupes égal à 3, on aura pour reste 2, c'est-à-dire un nombre pair. Par conséquent les deux produits devront être affectés du même signe; et, puisque le premier est précédé du signe $+$, le second devra l'être également.

NOTE V.

SUR LA FORMULE DE LAGRANGE RELATIVE A L'INTERPOLATION.

Lorsqu'on veut déterminer une fonction entière de x, du degré $n-1$, d'après un certain nombre de valeurs particulières supposées connues, il suffit d'avoir égard à la formule (1) du Chapitre IV (§ I). Cette formule, donnée pour la première fois par Lagrange, pourrait facilement se déduire des principes exposés dans le paragraphe I du Chapitre III. En effet, désignons par

$$u = a + bx + cx^2 + \ldots + hx^{n-1} \tag{1}$$

la fonction cherchée, et par

$$u_0, \quad u_1, \quad u_2, \quad \ldots, \quad u_{n-1}$$

ses valeurs particulières correspondantes aux valeurs

$$x_0, \quad x_1, \quad x_2, \quad \ldots, \quad x_{n-1},$$

de la variable x. Les inconnues du problème seront les coefficients a, b, c, ..., h des diverses puissances de x dans le polynôme u; et l'on aura, pour déterminer ces inconnues, les équations de condition

$$\left\{\begin{array}{l} u_0 \;\;\;= a + bx_0 \;\;+ cx_0^2 \;\;+ \ldots + hx_0^{n-1}, \\ u_1 \;\;\;= a + bx_1 \;\;+ cx_1^2 \;\;+ \ldots + hx_1^{n-1}, \\ u_2 \;\;\;= a + bx_2 \;\;+ cx_2^2 \;\;+ \ldots + hx_2^{n-1}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ u_{n-1} = a + bx_{n-1} + cx_{n-1}^2 + \ldots + hx_{n-1}^{n-1}. \end{array}\right. \tag{2}$$

Cela posé, pour obtenir la valeur explicite de la fonction u, il s'agira uniquement d'éliminer les coefficients a, b, c, ..., h entre les formules (1) et (2). On y parviendra en ajoutant l'équation (1) aux équations (2), après avoir multiplié ces dernières par des quantités choisies de manière à faire disparaître la somme des seconds membres. Soient

$$-X_0,\quad -X_1,\quad -X_2,\quad \ldots,\quad -X_{n-1}$$

les quantités dont il s'agit. On trouvera

$$\begin{aligned}
& u - X_0 u_0 - X_1 u_1 - X_2 u_2 - \ldots - X_{n-1} u_{n-1} \\
& \quad = (1 - X_0 - X_1 - X_2 - \ldots - X_{n-1})\, a \\
& \quad + (x - x_0 X_0 - x_1 X_1 - x_2 X_2 - \ldots - x_{n-1} X_{n-1})\, b \\
& \quad + (x^2 - x_0^2 X_0 - x_1^2 X_1 - x_2^2 X_2 - \ldots - x_{n-1}^2 X_{n-1})\, c \\
& \quad + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
& \quad + (x^{n-1} - x_0^{n-1} X_0 - x_1^{n-1} X_1 - x_2^{n-1} X_2 - \ldots - x_{n-1}^{n-1} X_{n-1})\, h
\end{aligned}$$

et, par suite,

$$u = X_0 u_0 + X_1 u_1 + X_2 u_2 + \ldots + X_{n-1} u_{n-1}, \tag{3}$$

attendu que les quantités

$$X_0,\quad X_1,\quad X_2,\quad \ldots,\quad X_{n-1}$$

devront être assujetties aux équations de condition

$$\left\{\begin{aligned}
X_0 + X_1 + X_2 + \ldots + X_{n-1} &= 1, \\
x_0 X_0 + x_1 X_1 + x_2 X_2 + \ldots + x_{n-1} X_{n-1} &= x, \\
x_0^2 X_0 + x_1^2 X_1 + x_2^2 X_2 + \ldots + x_{n-1}^2 X_{n-1} &= x^2, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots&, \\
x_0^{n-1} X_0 + x_1^{n-1} X_1 + x_2^{n-1} X_2 + \ldots + x_{n-1}^{n-1} X_{n-1} &= x^{n-1}.
\end{aligned}\right. \tag{4}$$

Si l'on résout ces nouvelles équations par la méthode exposée dans le Chapitre III (§ I), on obtiendra les formules

$$\left\{\begin{aligned}
X_0 &= \frac{(x - x_1)(x - x_2)\ldots(x - x_{n-1})}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)\ldots(x_0 - x_{n-1})}, \\
X_1 &= \frac{(x - x_0)(x - x_2)\ldots(x - x_{n-1})}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)\ldots(x_1 - x_{n-1})}, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\
X_{n-1} &= \frac{(x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_{n-2})}{(x_{n-1} - x_0)(x_{n-1} - x_1)\ldots(x_{n-1} - x_{n-2})},
\end{aligned}\right. \tag{5}$$

en vertu desquelles l'équation (3) se réduit à la formule de Lagrange.

Au reste, la formule de Lagrange est comprise dans une autre plus générale à laquelle on se trouve conduit, lorsqu'on cherche à déterminer, d'après un certain nombre de valeurs particulières supposées connues, non plus une fonction entière, mais une fonction rationnelle de la variable x. Concevons, pour fixer les idées, que cette fonction rationnelle doive être de la forme

$$u = \frac{a + bx + cx^2 + \ldots + hx^{n-1}}{\alpha + 6x + \gamma x^2 + \ldots + \theta x^m}. \tag{6}$$

Alors les inconnues du problème seront les coefficients

$$a,\quad b,\quad c,\quad \ldots,\quad h,\qquad \alpha,\quad 6,\quad \gamma,\quad \ldots,\quad \theta$$

ou, pour mieux dire, les rapports

$$\frac{a}{\alpha},\quad \frac{b}{\alpha},\quad \frac{c}{\alpha},\quad \ldots,\quad \frac{h}{\alpha},\qquad \frac{\alpha}{\alpha},\quad \frac{6}{\alpha},\quad \frac{\gamma}{\alpha},\quad \ldots,\quad \frac{\theta}{\alpha},$$

dont le nombre est $n + m$. Il est aisé d'en conclure que la fonction u sera complètement déterminée, si l'on en connaît $n + m$ valeurs particulières

$$u_0,\quad u_1,\quad u_2,\quad \ldots,\quad u_{n+m-1}, \tag{7}$$

correspondantes à $n + m$ valeurs

$$x_0,\quad x_1,\quad x_2,\quad \ldots,\quad x_{n+m-1} \tag{8}$$

de la variable x. On arrive encore aux mêmes conclusions, en faisant voir qu'une seconde fonction rationnelle de la forme

$$\frac{a' + b'x + c'x^2 + \ldots + h'x^{n-1}}{\alpha' + 6'x + \gamma' x^2 + \ldots + \theta' x^m} \tag{9}$$

ne peut satisfaire aux mêmes conditions que la première, sans lui être identiquement égale. Supposons, en effet, que les fractions (6) et (9) deviennent égales entre elles pour les valeurs particulières de x comprises dans la série (8). L'équation

$$\left\{\begin{aligned}
&(a + bx + \ldots + hx^{n-1})(\alpha' + 6'x + \ldots + \theta' x^m) \\
&- (a' + b'x + \ldots + h'x^{n-1})(\alpha + 6x + \ldots + \theta x^m) = 0,
\end{aligned}\right. \tag{10}$$

subsistant alors pour $n+m$ valeurs de la variable, tandis que son degré reste inférieur à $n+m$, sera nécessairement une équation identique; d'où il suit qu'on aura identiquement

$$(11)\qquad \frac{a+bx+cx^2+\ldots+hx^{n-1}}{\alpha+6x+\gamma x^2+\ldots+\theta x^m} = \frac{a'+b'x+c'x^2+\ldots+h'x^{n-1}}{\alpha'+6'x+\gamma'x^2+\ldots+\theta'x^m}.$$

On ne peut donc résoudre que d'une seule manière la question proposée. On la résoudra effectivement en prenant pour valeur générale de u la fraction

$$\frac{u_0u_1\ldots u_m\dfrac{(x-x_{m+1})(x-x_{m+2})\ldots(x-x_{m+n-1})}{(x_0-x_{m+1})\ldots(x_0-x_{m+n-1})\ldots(x_m-x_{m+1})\ldots(x_m-x_{m+n-1})}+\ldots}{u_0u_1\ldots u_{m-1}\dfrac{(x_0-x)(x_1-x)\ldots(x_{m-1}-x)}{(x_0-x_m)\ldots(x_0-x_{m+n-1})\ldots(x_{m-1}-x_m)\ldots(x_{m-1}-x_{m+n-1})}+\ldots},$$

dans laquelle le dénominateur doit être remplacé par l'unité, lorsqu'on suppose $m=0$, et le numérateur par le produit $u_0u_1\ldots u_m$, lorsqu'on suppose $n=1$. Cela posé, on trouvera, pour $m=0$,

$$(12)\qquad u = u_0\frac{(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_{n-1})}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)\ldots(x_0-x_{n-1})}+\ldots;$$

pour $m=1$,

$$(13)\qquad u = \frac{u_0u_1\dfrac{(x-x_2)(x-x_3)\ldots(x-x_n)}{(x_0-x_2)(x_0-x_3)\ldots(x_0-x_n)(x_1-x_2)(x_1-x_3)\ldots(x_1-x_n)}+\ldots}{u_0\dfrac{x_0-x}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)\ldots(x_0-x_n)}+u_1\dfrac{x_1-x}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)\ldots(x_1-x_n)}+\ldots},$$

....;

pour $n=1$,

$$(14)\qquad u = \frac{u_0u_1\ldots u_m}{u_0u_1\ldots u_{m-1}\dfrac{(x_0-x)(x_1-x)\ldots(x_{m-1}-x)}{(x_0-x_m)(x_1-x_m)\ldots(x_{m-1}-x_m)}+\ldots}.$$

Dans chacune des formules précédentes, on complétera sans peine le numérateur ou le dénominateur de la fraction qui représente la valeur de u, en ajoutant au premier terme de ce numérateur ou de ce dénominateur tous ceux qu'on peut en déduire à l'aide d'un ou de plusieurs échanges opérés entre les indices. Par exemple, si l'on suppose en même temps $m=1$ et

$n=2$, on trouvera, pour la valeur de u complètement développée,

$$(15)\qquad u = \frac{u_0u_1\dfrac{x-x_2}{(x_0-x_2)(x_1-x_2)}+u_0u_2\dfrac{x-x_1}{(x_0-x_1)(x_2-x_1)}+u_1u_2\dfrac{x-x_0}{(x_1-x_0)(x_2-x_0)}}{u_0\dfrac{x_0-x}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}+u_1\dfrac{x_1-x}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}+u_2\dfrac{x_2-x}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}}.$$

Il est bon de remarquer que la formule (12) est celle de Lagrange, et que pour en déduire la formule (14) il suffit de remplacer $n-1$ par m, puis de prendre pour inconnue la fonction $\frac{1}{u}$, supposée entière, au lieu de la fonction u.

NOTE VI.

DES NOMBRES FIGURÉS.

On appelle nombres *figurés* du premier, du second, du troisième ordre, etc. ceux qui servent de coefficients aux puissances successives de x dans les développements des expressions

$$(1+x)^{-2},\quad (1+x)^{-3},\quad (1+x)^{-4},\quad \ldots.$$

Cette définition fournit un moyen facile de les calculer. En effet, nous avons prouvé, dans le Chapitre VI (§ IV), qu'on a, pour des valeurs réelles quelconques de μ et pour des valeurs numériques de x inférieures à l'unité,

$$(1)\qquad \begin{cases} (1+x)^{\mu} = 1 + \dfrac{\mu}{1}x + \dfrac{\mu(\mu-1)}{1.2}x^2 + \ldots \\ \qquad + \dfrac{\mu(\mu-1)\ldots(\mu-n+1)}{1.2.3\ldots n}x^n + \ldots. \end{cases}$$

Si dans l'équation précédente on pose $\mu = -(m+1)$, m désignant un nombre entier quelconque, on trouvera

$$(2)\qquad \begin{cases} (1+x)^{-m-1} = 1 - \dfrac{m+1}{1}x + \dfrac{(m+1)(m+2)}{1.2}x^2 - \ldots \\ \qquad \pm \dfrac{(m+1)(m+2)\ldots(m+n)}{1.2.3\ldots n}x^n \pm \ldots. \end{cases}$$

Comme on a d'ailleurs évidemment

$$(3)\qquad \begin{cases} \dfrac{(m+1)(m+2)\ldots(m+n)}{1.2.3\ldots n} = \dfrac{1.2.3\ldots m(m+1)\ldots(m+n)}{(1.2.3\ldots m)(1.2.3\ldots n)} \\ \qquad = \dfrac{(n+1)(n+2)\ldots(n+m)}{1.2.3\ldots m}, \end{cases}$$

il en résulte que l'équation (2) peut s'écrire ainsi qu'il suit :

$$(4)\qquad \begin{cases} (1+x)^{-m-1} = \dfrac{1.2.3\ldots m}{1.2.3\ldots m} - \dfrac{2.3.4\ldots(m+1)}{1.2.3\ldots m}x \\ \qquad + \dfrac{3.4.5\ldots(m+2)}{1.2.3\ldots m}x^2 - \ldots \mp \dfrac{n(n+1)\ldots(n+m-1)}{1.2.3\ldots m}x^{n-1} \\ \qquad \pm \dfrac{(n+1)(n+2)\ldots(n+m)}{1.2.3\ldots m}x^n \mp \ldots. \end{cases}$$

Les coefficients numériques des puissances successives de x dans le second membre de cette dernière formule, savoir

$$(5)\qquad \frac{1.2.3\ldots m}{1.2.3\ldots m},\quad \frac{2.3.4\ldots(m+1)}{1.2.3\ldots m},\quad \ldots,\quad \frac{n(n+1)\ldots(n+m-1)}{1.2.3\ldots m},\quad \ldots,$$

sont précisément les nombres figurés de l'ordre m. La suite de ces mêmes nombres ou la série (5) s'étend à l'infini. Son $n^{\text{ième}}$ terme, c'est-à-dire la fraction

$$\frac{n(n+1)\ldots(n+m-1)}{1.2.3\ldots m},$$

est à la fois le coefficient numérique de x^{n-1} dans le développement de $(1+x)^{-m-1}$, et le coefficient de x^m dans le développement de $(1+x)^{n+m-1}$. De plus, si dans la série (5) on fait successivement

$$m=1,\qquad m=2,\qquad m=3,\qquad \ldots,$$

on obtiendra : 1° la suite des nombres *naturels* ou figurés du premier ordre

$$1,\ 2,\ 3,\ 4,\ \ldots,\ n,\ \ldots;$$

2° la suite des nombres qu'on nomme *triangulaires* ou figurés du second ordre, savoir

$$1,\ 3,\ 6,\ 10,\ \ldots,\ \frac{n(n+1)}{1.2},\ \ldots;$$

3° la suite des nombres qu'on appelle *pyramidaux* ou figurés du troisième ordre, savoir

$$1,\ 4,\ 10,\ 20,\ \ldots,\ \frac{n(n+1)(n+2)}{1.2.3},\ \ldots,$$

....

Si l'on écrit ces différentes suites au-dessus les unes des autres, en les faisant précéder par une première suite composée de termes tous égaux à l'unité, et plaçant, en outre, le premier terme de chacune d'elles sous le second terme de la suite immédiatement supérieure, on obtiendra le Tableau suivant :

$$
(6)\qquad \left\{
\begin{array}{llllll}
1, & 1, & 1, & 1, & 1, & \ldots, \\
 & 1, & 2, & 3, & 4, & \ldots, \\
 & & 1, & 3, & 6, & \ldots, \\
 & & & 1, & 4, & \ldots, \\
 & & & & 1, & \ldots, \\
 & & & & & \ldots
\end{array}
\right.
$$

Les nombres renfermés dans la $(n+1)^{\text{ième}}$ colonne verticale de ce Tableau sont les coefficients de la $n^{\text{ième}}$ puissance d'un binôme. Pascal, dans son *Traité du triangle arithmétique*, a donné le premier la loi de formation de ces mêmes nombres. Newton a fait voir ensuite comment la formule établie d'après cette loi peut être étendue à des puissances fractionnaires ou négatives.

Plusieurs propriétés remarquables des nombres figurés se déduisent immédiatement de la formule (4) du Chapitre IV (§ III). Concevons, par exemple, que, après avoir remplacé dans cette formule n par $n-1$, on y suppose

$$x = m+1, \qquad y = m'+1,$$

m, m' étant deux nombres entiers quelconques, on trouvera

$$
(7)\qquad \left\{
\begin{aligned}
&\frac{(m+m'+2)(m+m'+3)\ldots(m+m'+n)}{1.2.3\ldots(n-1)} \\
&\quad = \frac{(m+1)(m+2)\ldots(m+n-1)}{1.2.3\ldots(n-1)} \\
&\qquad + \frac{(m+1)(m+2)\ldots(m+n-2)}{1.2.3\ldots(n-2)}\,\frac{m'+1}{1} \\
&\qquad + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&\qquad + \frac{m+1}{1}\,\frac{(m'+1)(m'+2)\ldots(m'+n-2)}{1.2.3\ldots(n-2)} \\
&\qquad + \frac{(m'+1)(m'+2)\ldots(m'+n-1)}{1.2.3\ldots(n-1)};
\end{aligned}
\right.
$$

puis, en faisant $m'=0$,

$$
(8)\qquad \left\{
\begin{aligned}
&\frac{(m+2)(m+3)\ldots(m+n)}{1.2.3\ldots(n-1)} \\
&\quad = \frac{(m+1)(m+2)\ldots(m+n-1)}{1.2.3\ldots(n-1)} \\
&\qquad + \frac{(m+1)(m+2)\ldots(m+n-2)}{1.2.3\ldots(n-2)} \\
&\qquad + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&\qquad + \frac{m+1}{1} + 1.
\end{aligned}
\right.
$$

De même, si, après avoir remplacé dans la formule (4) (Chap. IV, § III) n par $n-1$, on fait en outre

$$x = m+1, \qquad y = -(m'+1),$$

on en conclura

$$
(9)\qquad \left\{
\begin{aligned}
&\frac{(m-m')(m-m'+1)\ldots(m-m'+n-2)}{1.2.3\ldots(n-1)} \\
&\quad = \frac{(m+1)(m+2)\ldots(m+n-1)}{1.2.3\ldots(n-1)} \\
&\qquad - \frac{(m+1)(m+2)\ldots(m+n-2)}{1.2.3\ldots(n-2)}\,\frac{m'+1}{1} \\
&\qquad + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&\qquad \mp \frac{m+1}{1}\,\frac{(m'+1)m'\ldots(m'-n+4)}{1.2.3\ldots(n-2)} \\
&\qquad \pm \frac{(m'+1)m'\ldots(m'-n+3)}{1.2.3\ldots(n-1)}.
\end{aligned}
\right.
$$

Lorsque dans l'équation précédente on suppose $m' \geqq m$, et en même temps $n \geqq m'+2$, on trouve

$$
(10)\qquad \left\{
\begin{aligned}
0 = \frac{(m+1)\ldots(m+n-1)}{1.2.3\ldots(n-1)} &- \frac{m'+1}{1}\,\frac{(m+1)\ldots(m+n-2)}{1.2.3\ldots(n-2)} \\
&+ \frac{(m'+1)m'}{1.2}\,\frac{(m+1)\ldots(m+n-3)}{1.2.3\ldots(n-3)} \\
&- \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&\mp \frac{m'+1}{1}\,\frac{(m+1)\ldots(m+n-m'-1)}{1.2.3\ldots(n-m'-1)} \\
&\pm \frac{(m+1)\ldots(m+n-m'-2)}{1.2.3\ldots(n-m'-2)}.
\end{aligned}
\right.
$$

Enfin, comme les équations (8) et (10) peuvent s'écrire ainsi qu'il suit

$$(11)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{1.2.3\ldots m}{1.2.3\ldots m}+\frac{2.3.4\ldots(m+1)}{1.2.3\ldots m}+\ldots\\ &\qquad+\frac{n(n+1)\ldots(n+m-1)}{1.2.3\ldots m}=\frac{n(n+1)\ldots(n+m)}{1.2.3\ldots(m+1)};\end{aligned}\right.$$

$$(12)\quad \left\{\begin{aligned} 0=\frac{n\ldots(n+m-1)}{1.2.3\ldots m}&-\frac{m'+1}{1}\,\frac{(n-1)\ldots(n+m-2)}{1.2.3\ldots m}+\ldots\\ &\mp\frac{m'+1}{1}\,\frac{(n-m')\ldots(n+m-m'-1)}{1.2.3\ldots m}\\ &\pm\frac{(n-m'-1)\ldots(n+m-m'-2)}{1.2.3\ldots m},\end{aligned}\right.$$

il est clair qu'elles entraîneront les deux propositions que je vais énoncer :

Théorème I. — *Si, après avoir formé la suite des nombres figurés de l'ordre m, on ajoute les uns aux autres les n premiers termes de cette suite, on obtiendra pour somme le $n^{\text{ième}}$ nombre figuré de l'ordre $m+1$.*

Théorème II. — *Si l'on désigne par m, m' deux nombres entiers assujettis à la condition*

$$m'\geqq m,$$

et que dans le développement de $(1-x)^{m'+1}$ on remplace les puissances successives de x par $m'+2$ termes consécutifs pris dans la suite des nombres figurés de l'ordre m, on obtiendra un résultat égal à zéro.

Corollaire I. — Si l'on suppose que les différents termes de la suite

$$(13)\qquad a_0,\quad a_1,\quad a_2,\quad \ldots,\quad a_n,\quad \ldots$$

représentent successivement les nombres naturels, les nombres triangulaires et les nombres pyramidaux, on trouvera dans le premier cas

$$(14)\qquad a_n-2a_{n-1}+a_{n-2}=0,$$

dans le second

$$(15)\qquad a_n-3a_{n-1}+3a_{n-2}-a_{n-3}=0,$$

et dans le troisième

$$(16)\qquad a_n-4a_{n-1}+6a_{n-2}-4a_{n-3}+a_{n-4}=0.$$

La première des équations qui précèdent se confond avec la formule (3) du Chapitre XII (§ I).

Corollaire II. — Si l'on désigne généralement par

$$(13)\qquad a_0,\quad a_1,\quad a_2,\quad \ldots,\quad a_n,\quad \ldots$$

les nombres figurés de l'ordre m,

$$(17)\qquad a_0,\quad a_1x,\quad a_2x^2,\quad \ldots,\quad a_nx^n,\quad \ldots$$

sera une série récurrente dont l'échelle de relation aura pour termes les quantités

$$(18)\qquad 1,\quad -\frac{m+1}{1},\quad +\frac{(m+1)m}{1.2},\quad -\frac{(m+1)m(m-1)}{1.2.3},\quad +\ldots,$$

c'est-à-dire les coefficients des puissances successives de x dans le développement de $(1-x)^{m+1}$. Ainsi, par exemple, la série

$$1,\quad 3x,\quad 6x^2,\quad 10x^3,\quad \ldots,$$

dans laquelle les puissances successives de x ont pour coefficients les nombres triangulaires, est récurrente, et son échelle de relation se compose des quantités

$$1,\quad -3,\quad +3,\quad -1.$$

Parmi les propriétés principales des nombres figurés, on doit remarquer encore celles que présentent les équations (7) et (9), lorsqu'on leur donne les formes suivantes :

$$(19)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{n(n+1)\ldots(n+m+m')}{1.2.3\ldots(m+m'+1)}\\ &=\frac{n(n+1)\ldots(n+m-1)}{1.2.3\ldots m}\,\frac{1.2.3\ldots m'}{1.2.3\ldots m'}\\ &\quad+\frac{(n-1)n\ldots(n+m-2)}{1.2.3\ldots m}\,\frac{2.3.4\ldots(m'+1)}{1.2.3\ldots m'}\\ &\quad+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ &\quad+\frac{1.2.3\ldots m}{1.2.3\ldots m}\,\frac{n(n+1)\ldots(n+m'-1)}{1.2.3\ldots m'},\end{aligned}\right.$$

$$(20)\quad \left\{\begin{aligned}
&\frac{n(n+1)\ldots(n+m-m'-2)}{1.2.3\ldots(m-m'-1)}\\
&\quad=\frac{n(n+1)\ldots(n+m-1)}{1.2.3\ldots m}-\frac{m'+1}{1}\,\frac{(n-1)n\ldots(n+m-2)}{1.2.3\ldots m}\\
&\qquad+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\qquad\mp\frac{(m'+1)\ldots(m'-n+4)}{1.2.3\ldots(n-2)}\,\frac{2.3.4\ldots(m+1)}{1.2.3\ldots m}\\
&\qquad\pm\frac{(m'+1)\ldots(m'-n+3)}{1.2.3\ldots(n-1)}\,\frac{1.2.3\ldots m}{1.2.3\ldots m}.
\end{aligned}\right.$$

Ajoutons que, dans la suite des nombres figurés de l'ordre n, le $(n+1)^{\text{ième}}$ terme équivaut à la somme des carrés des coefficients que renferme la $n^{\text{ième}}$ puissance d'un binôme. En effet, si dans la formule (2) (Chap. IV, § III) on suppose à la fois $x=n$, $y=n$, on trouvera

$$(21)\quad \left\{\begin{aligned}
&\frac{2n(2n-1)\ldots(n+1)}{1.2.3\ldots(n-1)n}\\
&\quad=1+\left(\frac{n}{1}\right)^2+\left[\frac{n(n-1)}{1.2}\right]^2+\ldots+\left[\frac{n(n-1)}{1.2}\right]^2+\left(\frac{n}{1}\right)^2+1.
\end{aligned}\right.$$

NOTE VII.

DES SÉRIES DOUBLES.

Soient

$$(1)\quad \left\{\begin{matrix}
u_0, & u_1, & u_2, & \ldots,\\
u'_0, & u'_1, & u'_2, & \ldots,\\
u''_0, & u''_1, & u''_2, & \ldots,\\
\ldots, & \ldots, & \ldots, & \ldots
\end{matrix}\right.$$

des quantités quelconques rangées sur des lignes horizontales et verticales, de telle manière que chaque série horizontale ou verticale renferme une infinité de termes. Le système de toutes ces quantités sera ce qu'on peut appeler une *série double;* et ces quantités elles-mêmes seront les différents *termes* de la série, qui aura pour *terme général*

$$u_n^{(m)},$$

m, n désignant deux nombres entiers quelconques. Cela posé, concevons que l'on représente par

$$s_n^{(m)}$$

la somme des termes de la série (1) qui se trouvent compris dans le Tableau suivant

$$(2)\quad \left\{\begin{matrix}
u_0, & u_1, & u_2, & \ldots, & u_{n-1},\\
u'_0, & u'_1, & u'_2, & \ldots, & u'_{n-1},\\
u''_0, & u''_1, & u''_2, & \ldots, & u''_{n-1},\\
\ldots, & \ldots, & \ldots, & \ldots, & \ldots,\\
u_0^{(m-1)}, & u_1^{(m-1)}, & u_2^{(m-1)}, & \ldots, & u_{n-1}^{(m-1)},
\end{matrix}\right.$$

c'est-à-dire des termes qui portent à la fois un indice inférieur plus petit que n et un indice supérieur plus petit que m. Si la somme des termes restants, pris en tel ordre et en tel nombre que l'on voudra, devient infiniment petite pour des valeurs infiniment grandes de m et de n, il est clair que la somme $s_n^{(m)}$, et toutes celles qu'on pourra en déduire en ajoutant à $s_n^{(m)}$ quelques-uns des termes exclus du Tableau (2), convergeront, pour des valeurs croissantes de m et de n, vers une limite fixe s. Dans ce cas, on dira que la série (1) est *convergente*, et qu'elle a pour *somme* la limite s. Dans le cas contraire, la série (1) sera *divergente*, et n'aura plus de somme.

Lorsque les termes exclus du Tableau (2), étant ajoutés les uns aux autres en nombre arbitraire, ne donnent jamais, pour des valeurs infiniment grandes de m et de n, que des sommes infiniment petites, on peut en dire autant *a fortiori* de ceux d'entre les mêmes termes qui appartiennent à une ou à plusieurs colonnes horizontales ou verticales du Tableau (1). Il suit immédiatement de cette remarque que, si la série double comprise dans le Tableau (1) est convergente, chacune des séries simples comprises dans les colonnes horizontales ou verticales du même Tableau le sera pareillement. Désignons, dans cette hypothèse, par

$$s^{(m)}$$

le résultat qu'on obtient en ajoutant les sommes des m premières séries horizontales du Tableau (1), c'est-à-dire les m premiers termes de la série simple

$$(3)\qquad \begin{array}{lll} u_0+u_1+u_2+\ldots, & u'_0+u'_1+u'_2+\ldots, & u''_0+u''_1+u''_2+\ldots, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots, & \ldots\ldots\ldots\ldots, & \ldots\ldots\ldots\ldots, \end{array}$$

et par

$$s_n$$

le résultat qu'on obtient en ajoutant les sommes des n premières séries verticales, c'est-à-dire les n premiers termes de la série simple

$$(4)\qquad \begin{array}{lll} u_0+u'_0+u''_0+\ldots, & u_1+u'_1+u''_1+\ldots, & u_2+u'_2+u''_2+\ldots, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots, & \ldots\ldots\ldots\ldots, & \ldots\ldots\ldots\ldots, \end{array}$$

$s^{(m)}$ sera évidemment la limite de l'expression $s_n^{(m)}$ pour des valeurs croissantes de n, et s_n la limite de la même expression pour des valeurs croissantes de m. Par suite, il suffira de faire croître indéfiniment m dans $s^{(m)}$ et n dans s_n pour faire converger $s^{(m)}$ et s_n vers la limite s. On peut donc énoncer la proposition suivante :

Théorème I. — *Supposons que la série double comprise dans le Tableau* (1) *soit convergente: et désignons par s la somme de cette série. Les séries* (3) *et* (4) *seront également convergentes, et chacune d'elles aura encore pour somme la quantité s.*

Concevons maintenant que les valeurs numériques des quantités comprises

dans le Tableau (1) soient respectivement désignées par

$$(5)\qquad \left\{\begin{array}{llll} \rho_0, & \rho_1, & \rho_2, & \ldots, \\ \rho'_0, & \rho'_1, & \rho'_2, & \ldots, \\ \rho''_0, & \rho''_1, & \rho''_2, & \ldots, \\ \ldots, & \ldots, & \ldots, & \ldots. \end{array}\right.$$

Les termes du Tableau (1) qui se trouvent exclus du Tableau (2), étant ajoutés les uns aux autres en tel nombre que l'on voudra, fourniront évidemment une somme inférieure ou tout au plus égale (abstraction faite du signe) à la somme des termes correspondants du Tableau (5). Donc, si, pour des valeurs infiniment grandes des nombres m et n, cette dernière somme devient infiniment petite, il en sera de même *a fortiori* de la première; ce qu'on peut encore exprimer en disant que, si la série double comprise dans le Tableau (5) est convergente, la série (1) le sera pareillement. J'ajoute qu'on sera complètement assuré de la convergence de la série double comprise dans le Tableau (5), toutes les fois que, les séries horizontales de ce Tableau étant convergentes, leurs sommes, savoir

$$(6)\qquad \begin{array}{lll} \rho_0+\rho_1+\rho_2+\ldots, & \rho'_0+\rho'_1+\rho'_2+\ldots, & \rho''_0+\rho''_1+\rho''_2+\ldots, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots, & \ldots\ldots\ldots\ldots, & \ldots\ldots\ldots\ldots, \end{array}$$

formeront elles-mêmes une série simple convergente. En effet, soit, dans cette hypothèse, ε un nombre aussi petit que l'on voudra. On pourra choisir m assez considérable pour que l'addition des sommes

$$\begin{array}{ll} \rho_0^{(m)}+\rho_1^{(m)}+\rho_2^{(m)}+\ldots, & \rho_0^{(m+1)}+\rho_1^{(m+1)}+\rho_2^{(m+1)}+\ldots, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots, & \ldots\ldots\ldots\ldots, \end{array}$$

et, par suite, celle des termes du Tableau (5) affectés d'un indice supérieur au moins égal à m, ne produise jamais un résultat plus grand que $\frac{1}{2}\varepsilon$. De plus, le nombre m étant déterminé comme on vient de le dire, on pourra encore, puisque chacune des séries horizontales du Tableau (5) est convergente, choisir n assez considérable pour que chacune des sommes

$$\begin{array}{l} \rho_n+\rho_{n+1}+\rho_{n+2}+\ldots, \\ \rho'_n+\rho'_{n+1}+\rho'_{n+2}+\ldots, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \rho_n^{(m-1)}+\rho_{n+1}^{(m-1)}+\rho_{n+2}^{(m-1)}+\ldots \end{array}$$

soit égale ou inférieure à $\frac{1}{2m}\varepsilon$; auquel cas l'addition des termes qui, dans le

Tableau (5), portent un indice supérieur plus petit que m et un indice inférieur au moins égal à n, ne produira jamais un résultat plus grand que $\frac{1}{2}\varepsilon$. Les deux conditions précédentes étant remplies, il est clair que, dans la série (5), les termes affectés d'un indice supérieur au moins égal à m et d'un indice inférieur au moins égal à n ne pourront donner par leur addition mutuelle qu'une somme tout au plus égale à ε. Donc cette somme deviendra infiniment petite, si l'on attribue aux nombres m et n des valeurs infiniment grandes, puisque alors il sera permis de faire décroître ε au delà de toute limite assignable. Donc l'hypothèse admise entraîne la convergence de la série (5), et par suite celle de la série (1). En combinant ce principe avec le premier théorème, on en déduit une nouvelle proposition que je vais énoncer.

Théorème II. — *Supposons que, toutes les séries horizontales du Tableau* (1) *étant convergentes, leurs sommes, savoir*

$$(3)\qquad \begin{array}{lll} u_0+u_1+u_2+\ldots, & u'_0+u'_1+u'_2+\ldots, & u''_0+u''_1+u''_2+\ldots, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots, & \ldots\ldots\ldots\ldots, & \ldots\ldots\ldots\ldots, \end{array}$$

forment encore une série convergente, et que cette double propriété des séries horizontales subsiste dans le cas même où l'on remplace chaque terme du Tableau (1) *par sa valeur numérique. On pourra dès lors affirmer :* 1° *que toutes les séries verticales sont convergentes;* 2° *que leurs sommes, savoir*

$$(4)\qquad \begin{array}{lll} u_0+u'_0+u''_0+\ldots, & u_1+u'_1+u''_1+\ldots, & u_2+u'_2+u''_2+\ldots, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots, & \ldots\ldots\ldots\ldots, & \ldots\ldots\ldots\ldots, \end{array}$$

forment encore une série convergente; 3° *enfin que la somme de la série* (4) *est précisément égale à celle de la série* (3).

Corollaire I. — Le théorème précédent subsiste lors même qu'on suppose quelques-unes des séries horizontales ou verticales composées d'un nombre fini de termes. En effet, chaque série de cette espèce peut être considérée comme une série convergente indéfiniment prolongée, mais dans laquelle tous les termes dont le rang surpasse un nombre donné s'évanouissent.

Corollaire II. — Soient

$$(7)\qquad \left\{ \begin{array}{l} u_0,\quad u_1,\quad u_2,\quad u_3,\quad \ldots, \\ v_0,\quad v_1,\quad v_2,\quad v_3,\quad \ldots \end{array} \right.$$

deux séries convergentes qui aient respectivement pour sommes les deux quantités s, s', et dont chacune reste convergente lors même qu'on réduit

ses différents termes à leurs valeurs numériques. Si l'on forme le Tableau

$$(8)\qquad \left\{ \begin{array}{lllll} u_0v_0, & u_1v_0, & u_2v_0, & u_3v_0, & \ldots, \\ & u_0v_1, & u_1v_1, & u_2v_1, & \ldots, \\ & & u_0v_2, & u_1v_2, & \ldots, \\ & & & u_0v_3, & \ldots, \\ & & & & \ldots, \end{array} \right.$$

on reconnaîtra sans peine que les séries horizontales de ce Tableau jouissent des propriétés énoncées dans le théorème II, et que leurs sommes sont respectivement

$$(9)\qquad v_0s,\quad v_1s,\quad v_2s,\quad v_3s,\quad \ldots.$$

Par suite, en vertu du théorème II et de son premier corollaire, les sommes des séries verticales, savoir

$$(10)\qquad \left\{ \begin{array}{l} u_0v_0,\quad u_0v_1+u_1v_0,\quad u_0v_2+u_1v_1+u_2v_0,\quad \ldots, \\ \quad u_0v_n+u_1v_{n-1}+\ldots+u_{n-1}v_1+u_nv_0,\quad \ldots, \end{array} \right.$$

formeront une nouvelle série convergente; et la somme de cette nouvelle série sera égale à celle de la série (9), c'est-à-dire évidemment au produit ss'. On se trouve ainsi ramené par la considération des séries doubles au théorème VI du Chapitre VI (§ III).

Corollaire III. — Si l'on appelle x le sinus d'un arc compris entre les limites $-\frac{\pi}{2}$, $+\frac{\pi}{2}$, et z sa tangente, on trouvera

$$z = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} = x(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}.$$

Cela posé, puisque, en vertu de la formule (39) (Chap. IX, § II), on a, pour des valeurs numériques de z inférieures à l'unité,

$$\operatorname{arc\,tang} z = z - \frac{z^3}{3} + \frac{z^5}{5} - \frac{z^7}{7} + \ldots,$$

on en conclura, pour des valeurs numériques de x inférieures à $\frac{1}{\sqrt{2}}$,

$$\begin{aligned} \operatorname{arc\,sin} x &= \operatorname{arc\,tang} x(1-x^2)^{-\frac{1}{2}} \\ &= x(1-x^2)^{-\frac{1}{2}} - \frac{x^3}{3}(1-x^2)^{-\frac{3}{2}} + \frac{x^5}{5}(1-x^2)^{-\frac{5}{2}} - \frac{x^7}{7}(1-x^2)^{-\frac{7}{2}} + \ldots \end{aligned}$$

ou, ce qui revient au même,

$$
\begin{array}{rl}
\operatorname{arc}\sin x = x & + \dfrac{3}{2}\dfrac{x^3}{3} + \dfrac{3.5}{2.4}\dfrac{x^5}{5} + \dfrac{3.5.7}{2.4.6}\dfrac{x^7}{7} + \ldots \\
& - \dfrac{x^3}{3} - \dfrac{5}{2}\dfrac{x^5}{5} - \dfrac{5.7}{2.4}\dfrac{x^7}{7} - \ldots \\
& + \dfrac{x^5}{5} + \dfrac{7}{2}\dfrac{x^7}{7} + \ldots \\
& - \dfrac{x^7}{7} - \ldots \\
& + \ldots\ldots
\end{array}
$$

Comme les séries horizontales comprises dans le second membre de l'équation précédente remplissent évidemment les conditions énoncées dans le théorème II, tant que la variable x conserve une valeur numérique inférieure à $\frac{1}{\sqrt{2}}$, il en résulte que cette équation peut s'écrire ainsi qu'il suit :

$$
\begin{gathered}
\operatorname{arc}\sin x = x + \left(\frac{3}{2} - 1\right)\frac{x^3}{3} + \left(\frac{5.3}{2.4} - \frac{5}{2} + 1\right)\frac{x^5}{5} \\
+ \left(\frac{7.5.3}{2.4.6} - \frac{7.5}{2.4} + \frac{7}{2} - 1\right)\frac{x^7}{7} + \ldots \\
\left(x = -\frac{1}{\sqrt{2}},\quad x = +\frac{1}{\sqrt{2}}\right).
\end{gathered}
$$

De plus, si dans la formule (5) du Chapitre IV (§ III) on attribue à y la valeur négative -2, et à x l'une des valeurs positives 3, 5, 7, …, on en tirera successivement

$$
(11)\quad \left\{
\begin{aligned}
\frac{3}{2} - 1 &= \frac{1}{2}, \\
\frac{3.5}{2.4} - \frac{5}{2} + 1 &= \frac{1.3}{2.4}, \\
\frac{7.5.3}{2.4.6} - \frac{7.5}{2.4} + \frac{7}{2} - 1 &= \frac{1.3.5}{2.4.6}, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots&\ldots\ldots;
\end{aligned}
\right.
$$

et par suite on trouvera définitivement

$$
(12)\quad \left\{
\begin{gathered}
\operatorname{arc}\sin x = x + \frac{1}{2}\frac{x^3}{3} + \frac{1.3}{2.4}\frac{x^5}{5} + \frac{1.3.5}{2.4.6}\frac{x^7}{7} + \ldots \\
\left(x = -\frac{1}{\sqrt{2}},\quad x = +\frac{1}{\sqrt{2}}\right).
\end{gathered}
\right.
$$

Il est facile de prouver, à l'aide du Calcul infinitésimal, que cette dernière équation subsiste non seulement, entre les limites $x = -\frac{1}{\sqrt{2}}$, $x = +\frac{1}{\sqrt{2}}$, mais aussi entre les limites $x = -1$, $x = +1$.

Corollaire IV. — En vertu de la formule (20) (Chap. VI, § IV), on a, pour toutes les valeurs de x renfermées entre les limites -1 et $+1$,

$$
\frac{(1+x)^\mu - 1}{\mu} = x - \frac{x^2}{2}(1-\mu) + \frac{x^3}{3}(1-\mu)\left(1 - \frac{1}{2}\mu\right) + \ldots,
$$

ou, ce qui revient au même,

$$
\begin{array}{rl}
\dfrac{(1+x)^\mu - 1}{\mu} = & \dfrac{x}{1} \\
& - \dfrac{x^2}{2} + \mu\dfrac{x^2}{2} \\
& + \dfrac{x^3}{3} - \mu\left(1 + \dfrac{1}{2}\right)\dfrac{x^3}{3} + \mu^2\left(\dfrac{1}{1.2}\right)\dfrac{x^3}{3} \\
& - \dfrac{x^4}{4} + \mu\left(1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3}\right)\dfrac{x^4}{4} - \mu^2\left(\dfrac{1}{1.3} + \dfrac{1}{1.2} + \dfrac{1}{2.3}\right)\dfrac{x^4}{4} + \mu^3\left(\dfrac{1}{1.2.3}\right)\dfrac{x^4}{4} \\
& + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{array}
$$

Comme les séries horizontales que comprend le second membre de l'équation précédente remplissent les conditions énoncées dans le théorème II, tant que la variable x conserve une valeur numérique inférieure à l'unité, il en résulte que cette équation peut s'écrire ainsi qu'il suit :

$$
(13)\quad \left\{
\begin{aligned}
\frac{(1+x)^\mu - 1}{\mu} = {} & \frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots \\
& + \mu\left[\frac{x^2}{2} - \left(1 + \frac{1}{2}\right)\frac{x^3}{3} + \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right)\frac{x^4}{4} - \ldots\right] \\
& + \mu^2\left[\frac{1}{1.2}\frac{x^3}{3} - \left(\frac{1}{1.2} + \frac{1}{1.3} + \frac{1}{2.3}\right)\frac{x^4}{4} + \ldots\right] \\
& + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
& \quad (x = -1,\quad x = +1).
\end{aligned}
\right.
$$

Mais on a déjà trouvé (Chap. VI, § IV, problème I, corollaire II)

$$
(14)\qquad \frac{(1+x)^\mu - 1}{\mu} = l(1+x) + \frac{\mu}{2}[l(1+x)]^2 + \ldots,
$$

l étant la caractéristique des logarithmes népériens. Les formules (13) et

(14) devant s'accorder entre elles (*voir* le théorème VI du Chapitre VI, § IV), on en conclura, pour toutes les valeurs de x renfermées entre les limites -1 et $+1$,

$$(15)\quad \left\{\begin{aligned} l(1+x) &= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots, \\ \frac{1}{2}[l(1+x)]^2 &= \frac{x^2}{2} - \left(1+\frac{1}{2}\right)\frac{x^3}{3} + \left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)\frac{x^4}{4} - \ldots \\ &\quad \pm \left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n-1}\right)\frac{x^n}{n} \mp \ldots, \\ \frac{1}{2.3}[l(1+x)]^3 &= \frac{1}{1.2}\frac{x^3}{3} - \left(\frac{1}{1.2}+\frac{1}{1.3}+\frac{1}{2.3}\right)\frac{x^4}{4} + \ldots, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right.$$

Dans ce qui précède, nous n'avons considéré d'autres séries doubles, convergentes ou divergentes, que celles dont les différents termes sont des quantités réelles. Mais ce qui a été dit à l'égard de ces séries peut également s'appliquer au cas où leurs termes deviennent imaginaires, pourvu qu'alors on écrive partout *expression imaginaire* au lieu de *quantité*, et *module* au lieu de *valeur numérique*. Ces modifications étant admises, les théorèmes I et II subsisteront encore. C'est ce que l'on démontrera sans peine, en s'appuyant sur le principe suivant :

Le module de la somme de plusieurs expressions imaginaires est toujours inférieur à la somme de leurs modules.

Pour établir ce même principe, il suffit d'observer que, si l'on fait

$$\begin{aligned} &\rho(\cos\theta + \sqrt{-1}\sin\theta) + \rho'(\cos\theta' + \sqrt{-1}\sin\theta') + \ldots \\ &\quad = \mathrm{R}(\cos\mathrm{T} + \sqrt{-1}\sin\mathrm{T}), \end{aligned}$$

$\rho, \rho', \ldots, \mathrm{R}$ désignant des quantités positives, on en conclura

$$\begin{aligned} \mathrm{R}^2 &= (\rho\cos\theta + \rho'\cos\theta' + \ldots)^2 + (\rho\sin\theta + \rho'\sin\theta' + \ldots)^2 \\ &= \rho^2 + \rho'^2 + \ldots + 2\rho\rho'\cos(\theta - \theta') + \ldots \\ &< \rho^2 + \rho'^2 + \ldots + 2\rho\rho' + \ldots = (\rho + \rho' + \ldots)^2, \end{aligned}$$

et, par suite,

$$\mathrm{R} < \rho + \rho' + \ldots.$$

NOTE VIII.

SUR LES FORMULES QUI SERVENT A CONVERTIR LES SINUS OU COSINUS DES MULTIPLES D'UN ARC EN POLYNOMES DONT LES DIFFÉRENTS TERMES ONT POUR FACTEURS LES PUISSANCES ASCENDANTES DU SINUS OU COSINUS DE CE MÊME ARC.

Les formules dont il est ici question sont celles que nous avons construites en résolvant les deux premiers problèmes énoncés dans le paragraphe V du Chapitre VII, et qui s'y trouvent affectées des numéros (3), (4), (5), (6), (9), (10), (11) et (12). Elles donnent lieu aux remarques suivantes.

D'abord, si, dans le calcul à l'aide duquel on établit les formules (3), (4), (5) et (6), on substitue aux équations (12) du Chapitre VII (§ II) les équations (24) du Chapitre IX (§ II), on reconnaîtra immédiatement que les mêmes formules subsistent dans le cas où l'on remplace le nombre entier m par une quantité quelconque μ, tant que l'on suppose la valeur numérique de z inférieure à $\frac{\pi}{4}$. Ainsi on aura, dans cette hypothèse,

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned} \cos\mu z &= 1 - \frac{\mu.\mu}{1.2}\sin^2 z + \frac{(\mu+2)\mu.\mu(\mu-2)}{1.2.3.4}\sin^4 z \\ &\quad - \frac{(\mu+4)(\mu+2)\mu.\mu(\mu-2)(\mu-4)}{1.2.3.4.5.6}\sin^6 z + \ldots, \end{aligned}\right.$$

$$(2)\quad \left\{\begin{aligned} \sin\mu z &= \cos z\left[\mu\sin z - \frac{(\mu+2)\mu(\mu-2)}{1.2.3}\sin^3 z\right. \\ &\quad \left. + \frac{(\mu+4)(\mu+2)\mu(\mu-2)(\mu-4)}{1.2.3.4.5}\sin^5 z - \ldots\right] \end{aligned}\right.$$

et

$$(3)\quad \left\{\begin{aligned} \cos\mu z &= \cos z\left[1 - \frac{(\mu+1)(\mu-1)}{1.2}\sin^2 z\right. \\ &\quad \left. + \frac{(\mu+3)(\mu+1)(\mu-1)(\mu-3)}{1.2.3.4}\sin^4 z - \ldots\right], \end{aligned}\right.$$

$$(4)\quad \left\{\begin{aligned} \sin\mu z &= \mu\sin z - \frac{(\mu+1)\mu(\mu-1)}{1.2.3}\sin^3 z \\ &\quad + \frac{(\mu+3)(\mu+1)\mu(\mu-1)(\mu-3)}{1.2.3.4.5}\sin^5 z - \ldots. \end{aligned}\right.$$

De plus, en vertu des principes établis dans le Chapitre IX (§ II) et dans la Note précédente, on pourra développer, non seulement $\cos\mu z$ et $\sin\mu z$, mais aussi les seconds membres des formules (1), (2), (3), (4), suivant les puissances ascendantes de μ; et, comme les coefficients de ces puissances devront alors être les mêmes dans le premier et le second membre de chaque formule, on obtiendra, en comparant deux à deux les coefficients dont il s'agit, une suite d'équations parmi lesquelles on distinguera celles que je vais écrire :

$$\frac{1}{2}z^2 = \frac{\sin^2 z}{2} + \frac{2}{3}\frac{\sin^4 z}{4} + \frac{2.4}{3.5}\frac{\sin^6 z}{6} + \ldots, \tag{5}$$

$$z = \sin z + \frac{1}{2}\frac{\sin^3 z}{3} + \frac{1.3}{2.4}\frac{\sin^5 z}{5} + \ldots. \tag{6}$$

Nous supposerons toujours ici la variable z comprise entre les limites $-\frac{\pi}{4}$, $+\frac{\pi}{4}$. Mais on démontre facilement à l'aide du Calcul infinitésimal que, sans altérer les équations (1), (2), (3), (4), (5), (6), ..., on peut y faire croître la valeur numérique de z jusqu'à $\frac{\pi}{2}$. Ajoutons que, en prenant $\sin z = x$, on fait coïncider l'équation (6) avec la formule (12) de la Note VII, et l'équation (5) avec la suivante :

$$(\operatorname{arc}\sin x)^2 = x^2 + \frac{2}{3}\frac{x^4}{2} + \frac{2.4}{3.5}\frac{x^6}{3} + \frac{2.4.6}{3.5.7}\frac{x^8}{4} + \ldots.$$

Cette dernière se trouve dans les *Mélanges d'Analyse*, publiés en 1815 par M. de Stainville, répétiteur à l'École royale Polytechnique.

Concevons à présent que, dans les formules déjà citées du Chapitre VII (§ V), on attribue à la variable z une valeur imaginaire. On conclura sans peine des principes développés dans le Chapitre IX (§ III), qu'elles ne cesseront pas d'être exactes. Supposons, par exemple,

$$z = \sqrt{-1}\, lx,$$

l étant la caractéristique des logarithmes népériens. Comme on aura, dans cette hypothèse,

$$\cos z = \frac{1}{2}(e^{lx} + e^{-lx}) \quad = \frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{x}\right),$$

$$\sin z = \frac{\sqrt{-1}}{2}(e^{lx} - e^{-lx}) = \frac{\sqrt{-1}}{2}\left(x - \frac{1}{x}\right),$$

et généralement (n désignant un nombre entier quelconque)

$$\cos nz = \frac{1}{2}\left(x^n + \frac{1}{x^n}\right), \qquad \sin nz = \frac{\sqrt{-1}}{2}\left(x^n - \frac{1}{x^n}\right),$$

on tirera des équations (3), (4), (5), (6) (Chapitre VII, § V) : 1° pour des valeurs paires de m,

$$\left\{\begin{aligned} x^m + \frac{1}{x^m} = 2\Big[1 &+ \frac{m.m}{2.4}\left(x - \frac{1}{x}\right)^2 + \frac{(m+2)m.m(m-2)}{2.4.6.8}\left(x - \frac{1}{x}\right)^4 \\ &+ \frac{(m+4)(m+2)m.m(m-2)(m-4)}{2.4.6.8.10.12}\left(x - \frac{1}{x}\right)^6 + \ldots\Big], \end{aligned}\right. \tag{7}$$

$$\left\{\begin{aligned} x^m - \frac{1}{x^m} = \left(x + \frac{1}{x}\right)\Big[&\frac{m}{2}\left(x - \frac{1}{x}\right) + \frac{(m+2)m(m-2)}{2.4.6}\left(x - \frac{1}{x}\right)^3 \\ &+ \frac{(m+4)(m+2)m(m-2)(m-4)}{2.4.6.8.10}\left(x - \frac{1}{x}\right)^5 + \ldots\Big]; \end{aligned}\right. \tag{8}$$

2° pour des valeurs impaires de m,

$$\left\{\begin{aligned} x^m + \frac{1}{x^m} = \left(x + \frac{1}{x}\right)\Big[1 &+ \frac{(m+1)(m-1)}{2.4}\left(x - \frac{1}{x}\right)^2 \\ &+ \frac{(m+3)(m+1)(m-1)(m-3)}{2.4.6.8}\left(x - \frac{1}{x}\right)^4 + \ldots\Big], \end{aligned}\right. \tag{9}$$

$$\left\{\begin{aligned} x^m - \frac{1}{x^m} = 2\Big[&\frac{m}{2}\left(x - \frac{1}{x}\right) + \frac{(m+1)m(m-1)}{2.4.6}\left(x - \frac{1}{x}\right)^3 \\ &+ \frac{(m+3)(m+1)m(m-1)(m-3)}{2.4.6.8.10}\left(x - \frac{1}{x}\right)^5 + \ldots\Big]. \end{aligned}\right. \tag{10}$$

Les formules (9), (10), (11), (12) du paragraphe V (Chap. VII) fourniraient des résultats analogues.

Revenons maintenant à la formule (3) du même paragraphe. En vertu de cette formule, $\cos mz$ est, pour des valeurs paires de m, une fonction entière de $\sin z$, du degré m; et, comme cette fonction doit s'évanouir, ainsi que $\cos mz$, pour toutes les valeurs de z comprises dans la suite

$$-\frac{(m-1)\pi}{2m}, \quad \ldots, \quad -\frac{3\pi}{2m}, \quad -\frac{\pi}{2m}, \quad +\frac{\pi}{2m}, \quad +\frac{3\pi}{2m}, \quad \ldots, \quad +\frac{(m-1)\pi}{2m},$$

il est clair qu'elle sera divisible par chacun des facteurs binômes

$$\sin z + \sin\frac{(m-1)\pi}{2m},\quad \ldots,\quad \sin z + \sin\frac{3\pi}{2m},\quad \sin z + \sin\frac{\pi}{2m},$$
$$\sin z - \sin\frac{(m-1)\pi}{2m},\quad \ldots,\quad \sin z - \sin\frac{3\pi}{2m},\quad \sin z - \sin\frac{\pi}{2m},$$

et, par conséquent, égale au produit de tous ces facteurs binômes par le coefficient numérique de $\sin^m z$, savoir

$$(-1)^{\frac{m}{2}}\frac{(m+m-2)\ldots(m+2)m.m(m-2)\ldots(m-m+2)}{1.2.3\ldots(m-1).m} = (-1)^{\frac{m}{2}}2^{m-1}.$$

On aura donc, pour des valeurs paires de m,

$$(11)\quad \cos mz = 2^{m-1}\left(\sin^2\frac{\pi}{2m} - \sin^2 z\right)\left(\sin^2\frac{3\pi}{2m} - \sin^2 z\right)\ldots\left(\sin^2\frac{(m-1)\pi}{2m} - \sin^2 z\right).$$

Par des raisonnements semblables, on tirera des formules (4), (5) et (6) (Chap. VII, § V) : 1° pour des valeurs paires de m,

$$(12)\quad \sin mz = 2^{m-1}\sin z\cos z\left(\sin^2\frac{2\pi}{2m} - \sin^2 z\right)\left(\sin^2\frac{4\pi}{2m} - \sin^2 z\right)\ldots\left(\sin^2\frac{(m-2)\pi}{2m} - \sin^2 z\right);$$

2° pour des valeurs impaires de m,

$$(13)\quad \cos mz = 2^{m-1}\cos z\left(\sin^2\frac{\pi}{2m} - \sin^2 z\right)\left(\sin^2\frac{3\pi}{2m} - \sin^2 z\right)\ldots\left(\sin^2\frac{(m-2)\pi}{2m} - \sin^2 z\right)$$

et

$$(14)\quad \sin mz = 2^{m-1}\sin z\left(\sin^2\frac{2\pi}{2m} - \sin^2 z\right)\left(\sin^2\frac{4\pi}{2m} - \sin^2 z\right)\ldots\left(\sin^2\frac{(m-1)\pi}{2m} - \sin^2 z\right).$$

Si dans les quatre équations qui précèdent on réduit la partie constante de chaque facteur binôme à l'unité, en écrivant, par exemple,

$$1 - \frac{\sin^2 z}{\sin^2\frac{\pi}{2m}} \quad\text{au lieu de}\quad \sin^2\frac{\pi}{2m} - \sin^2 z,$$

les facteurs numériques des seconds membres deviendront évidemment égaux à ceux des termes qui, dans les formules (3), (4), (5), (6) du Chapitre VII (§ V), sont indépendants de $\sin z$ ou renferment sa première puissance, c'est-à-dire à l'unité ou au nombre m. En conséquence, on trouvera :

1° pour des valeurs paires de m,

$$(15)\quad \cos mz = \left(1 - \frac{\sin^2 z}{\sin^2\frac{\pi}{2m}}\right)\left(1 - \frac{\sin^2 z}{\sin^2\frac{3\pi}{2m}}\right)\cdots\left(1 - \frac{\sin^2 z}{\sin^2\frac{(m-1)\pi}{2m}}\right),$$

$$(16)\quad \sin mz = m\sin z\cos z\left(1 - \frac{\sin^2 z}{\sin^2\frac{2\pi}{2m}}\right)\left(1 - \frac{\sin^2 z}{\sin^2\frac{4\pi}{2m}}\right)\cdots\left(1 - \frac{\sin^2 z}{\sin^2\frac{(m-2)\pi}{2m}}\right);$$

2° pour des valeurs impaires de m,

$$(17)\quad \cos mz = \cos z\left(1 - \frac{\sin^2 z}{\sin^2\frac{\pi}{2m}}\right)\left(1 - \frac{\sin^2 z}{\sin^2\frac{3\pi}{2m}}\right)\cdots\left(1 - \frac{\sin^2 z}{\sin^2\frac{(m-2)\pi}{2m}}\right),$$

$$(18)\quad \sin mz = m\sin z\left(1 - \frac{\sin^2 z}{\sin^2\frac{2\pi}{2m}}\right)\left(1 - \frac{\sin^2 z}{\sin^2\frac{4\pi}{2m}}\right)\cdots\left(1 - \frac{\sin^2 z}{\sin^2\frac{(m-1)\pi}{2m}}\right).$$

De plus, si l'on observe qu'on a généralement

$$\sin^2 b - \sin^2 a = \frac{\cos 2a - \cos 2b}{2},$$

on reconnaîtra sans peine que les équations (11), (12), (13) et (14) peuvent être remplacées par celles qui suivent

$$(19)\quad \begin{cases} \cos mz = 2^{\frac{m}{2}-1}\left(\cos 2z - \cos\frac{\pi}{m}\right)\left(\cos 2z - \cos\frac{3\pi}{m}\right)\cdots\left(\cos 2z - \cos\frac{(m-1)\pi}{m}\right), \\ \sin mz = 2^{\frac{m}{2}-1}\sin 2z\left(\cos 2z - \cos\frac{2\pi}{m}\right)\left(\cos 2z - \cos\frac{4\pi}{m}\right)\cdots\left(\cos 2z - \cos\frac{(m-2)\pi}{m}\right), \end{cases}$$

$$(20)\quad \begin{cases} \cos mz = 2^{\frac{m-1}{2}}\cos z\left(\cos 2z - \cos\frac{\pi}{m}\right)\left(\cos 2z - \cos\frac{3\pi}{m}\right)\cdots\left(\cos 2z - \cos\frac{(m-2)\pi}{m}\right), \\ \sin mz = 2^{\frac{m-1}{2}}\sin z\left(\cos 2z - \cos\frac{2\pi}{m}\right)\left(\cos 2z - \cos\frac{4\pi}{m}\right)\cdots\left(\cos 2z - \cos\frac{(m-1)\pi}{m}\right), \end{cases}$$

les deux premières se rapportant au cas où m est un nombre pair, et les deux dernières au cas où m est un nombre impair.

Les douze équations qui précèdent subsistent également, quelles que soient les valeurs réelles ou imaginaires attribuées à la variable z. On peut donc y remplacer cette variable par $\frac{\pi}{2} - z$, par $\sqrt{-1}\,lx$, ... Dans le premier cas, on obtient plusieurs équations nouvelles correspondantes aux formules (9), (10), (11), (12) du Chapitre VII (§ V). Dans le second cas, les équations (19) et (20) donnent respectivement, pour des valeurs paires de m,

$$(21)\quad \begin{cases} x^m + \dfrac{1}{x^m} = \left(x^2 - 2\cos\dfrac{\pi}{m} + \dfrac{1}{x^2}\right)\left(x^2 - 2\cos\dfrac{3\pi}{m} + \dfrac{1}{x^2}\right)\cdots\left(x^2 - 2\cos\dfrac{(m-1)\pi}{m} + \dfrac{1}{x^2}\right), \\ x^m - \dfrac{1}{x^m} = \left(x^2 - \dfrac{1}{x^2}\right)\left(x^2 - 2\cos\dfrac{2\pi}{m} + \dfrac{1}{x^2}\right)\cdots\left(x^2 - 2\cos\dfrac{(m-2)\pi}{m} + \dfrac{1}{x^2}\right), \end{cases}$$

et, pour des valeurs impaires de m,

$$(22)\quad \begin{cases} x^m + \dfrac{1}{x^m} = \left(x + \dfrac{1}{x}\right)\left(x^2 - 2\cos\dfrac{\pi}{m} + \dfrac{1}{x^2}\right)\cdots\left(x^2 - 2\cos\dfrac{(m-2)\pi}{m} + \dfrac{1}{x^2}\right), \\ x^m - \dfrac{1}{x^m} = \left(x - \dfrac{1}{x}\right)\left(x^2 - 2\cos\dfrac{2\pi}{m} + \dfrac{1}{x^2}\right)\cdots\left(x^2 - 2\cos\dfrac{(m-2)\pi}{m} + \dfrac{1}{x^2}\right), \end{cases}$$

ce qui s'accorde avec les résultats obtenus dans le Chapitre X (§ II).

Il nous reste encore à indiquer plusieurs conséquences assez remarquables que fournissent les équations (11) et (15), (12) et (16), (13) et (17), (14) et (18). Lorsqu'on développe leurs seconds membres suivant les puissances ascendantes de $\sin z$, les coefficients numériques de ces puissances doivent être évidemment les mêmes que dans les formules (3), (4), (5) et (6) du Chapitre VII (§ V). De cette seule observation on déduira immédiatement plusieurs équations nouvelles auxquelles satisferont les sinus des arcs

$$\frac{\pi}{2m},\quad \frac{2\pi}{2m},\quad \frac{3\pi}{2m},\quad \frac{4\pi}{2m},\quad \ldots.$$

On trouvera, par exemple, pour des valeurs paires de m,

$$(23)\quad \begin{cases} 1 = 2^{m-1}\sin^2\dfrac{\pi}{2m}\sin^2\dfrac{3\pi}{2m}\cdots\sin^2\dfrac{(m-1)\pi}{2m}, \\ m = 2^{m-1}\sin^2\dfrac{2\pi}{2m}\sin^2\dfrac{4\pi}{2m}\cdots\sin^2\dfrac{(m-2)\pi}{2m}; \end{cases}$$

$$(24)\quad \begin{cases} \dfrac{m.m}{1.2} = \dfrac{1}{\sin^2\dfrac{\pi}{2m}} + \dfrac{1}{\sin^2\dfrac{3\pi}{2m}} + \ldots + \dfrac{1}{\sin^2\dfrac{(m-1)\pi}{2m}}, \\ \dfrac{(m+2)(m-2)}{1.2.3} = \dfrac{1}{\sin^2\dfrac{2\pi}{2m}} + \dfrac{1}{\sin^2\dfrac{4\pi}{2m}} + \ldots + \dfrac{1}{\sin^2\dfrac{(m-2)\pi}{2m}}, \end{cases}$$

et, pour des valeurs impaires de m,

$$(25)\quad \begin{cases} 1 = 2^{m-1}\sin^2\dfrac{\pi}{2m}\sin^2\dfrac{3\pi}{2m}\cdots\sin^2\dfrac{(m-2)\pi}{2m}, \\ m = 2^{m-1}\sin^2\dfrac{2\pi}{2m}\sin^2\dfrac{4\pi}{2m}\cdots\sin^2\dfrac{(m-1)\pi}{2m}; \end{cases}$$

$$(26)\quad \begin{cases} \dfrac{(m+1)(m-1)}{1.2} = \dfrac{1}{\sin^2\dfrac{\pi}{2m}} + \dfrac{1}{\sin^2\dfrac{3\pi}{2m}} + \ldots + \dfrac{1}{\sin^2\dfrac{(m-2)\pi}{2m}}, \\ \dfrac{(m+1)(m-1)}{1.2.3} = \dfrac{1}{\sin^2\dfrac{2\pi}{2m}} + \dfrac{1}{\sin^2\dfrac{4\pi}{2m}} + \ldots + \dfrac{1}{\sin^2\dfrac{(m-1)\pi}{2m}}. \end{cases}$$

J'ajoute que, si l'on multiplie par $\left(\dfrac{\pi}{m}\right)^2$ les deux membres de chacune des équations (24) ou (26), on en conclura, en faisant croître m indéfiniment,

$$(27)\qquad \frac{\pi^2}{8} = 1 + \frac{1}{9} + \frac{1}{25} + \frac{1}{49} + \ldots,$$

$$(28)\qquad \frac{\pi^2}{6} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \frac{1}{25} + \ldots.$$

En effet, considérons, pour fixer les idées, la seconde des équations (24). En multipliant ses deux membres par $\left(\dfrac{\pi}{m}\right)^2$, on trouvera

$$(29)\quad \frac{\pi^2}{6}\left(1 - \frac{4}{m^2}\right) = \frac{\left(\dfrac{\pi}{m}\right)^2}{\sin^2\dfrac{\pi}{m}} + \frac{1}{4}\,\frac{\left(\dfrac{2\pi}{m}\right)^2}{\sin^2\dfrac{2\pi}{m}} + \frac{1}{9}\,\frac{\left(\dfrac{3\pi}{m}\right)^2}{\sin^2\dfrac{3\pi}{m}} + \ldots + \frac{1}{\left(\dfrac{m}{2} - 1\right)^2}\,\frac{\left[\dfrac{(m-2)\pi}{2m}\right]^2}{\sin^2\dfrac{(m-2)\pi}{2m}}.$$

Soit d'ailleurs n un nombre entier inférieur à $\dfrac{m}{2}$. Désignons à l'ordinaire par la notation $M(a, b)$ une moyenne entre les quantités a et b. Enfin observons que le rapport $\dfrac{x}{\sin x}$ est toujours (*voir* la page 66) compris entre les limites 1, $\dfrac{1}{\cos x}$, et que l'on a par suite, pour des valeurs numériques de x inférieures à $\dfrac{\pi}{2}$,

$$\frac{x}{\sin x} = \frac{\frac{1}{2}x}{\sin\frac{1}{2}x}\,\frac{1}{\cos\frac{1}{2}x} < \frac{1}{\cos^2\frac{1}{2}x} < \frac{1}{\cos^2\dfrac{\pi}{4}} = 2.$$

Le second membre de l'équation (29) sera évidemment la somme des deux polynômes

$$\frac{\left(\frac{\pi}{m}\right)^2}{\sin^2\frac{\pi}{m}}+\frac{1}{4}\frac{\left(\frac{2\pi}{m}\right)^2}{\sin^2\frac{2\pi}{m}}+\ldots+\frac{1}{n^2}\frac{\left(\frac{n\pi}{m}\right)^2}{\sin^2\frac{n\pi}{m}},$$

$$\frac{1}{(n+1)^2}\frac{\left[\frac{(n+1)\pi}{m}\right]^2}{\sin^2\frac{(n+1)\pi}{m}}+\frac{1}{(n+2)^2}\frac{\left[\frac{(n+2)\pi}{m}\right]^2}{\sin^2\frac{(n+2)\pi}{m}}+\ldots+\frac{1}{\left(\frac{m}{2}-1\right)^2}\frac{\left[\frac{(m-2)\pi}{2m}\right]^2}{\sin^2\frac{(m-2)\pi}{2m}},$$

dont le premier, en vertu de l'équation (11) des Préliminaires, pourra être présenté sous la forme

$$\left(1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\ldots+\frac{1}{n^2}\right)\mathrm{M}\left(1,\frac{1}{\cos^2\frac{n\pi}{m}}\right),$$

tandis que le second, composé de $\frac{m}{2}-n-1$ termes, tous inférieurs à $\frac{4}{n^2}$, restera compris entre les limites 0 et $\frac{2m}{n^2}$. Cela posé, l'équation (29) deviendra

$$\frac{\pi^2}{6}\left(1-\frac{4}{m^2}\right)=\left(1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\ldots+\frac{1}{n^2}\right)\mathrm{M}\left(1,\frac{1}{\cos^2\frac{n\pi}{m}}\right)+\frac{2m}{n^2}\mathrm{M}(0,1),$$

et l'on en conclura immédiatement

$$(30)\qquad 1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\ldots+\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}\left(1-\frac{4}{m^2}\right)\mathrm{M}\left(1,\cos^2\frac{n\pi}{m}\right)-\frac{2m}{n^2}\mathrm{M}(0,1).$$

Cette dernière formule subsiste, quels que soient les nombres entiers m et n, pourvu que l'on ait $\frac{1}{2}m>n$. En outre, il est aisé de voir que, si l'on prend constamment pour $\frac{1}{2}m$ le plus petit des entiers supérieurs à n^a (a désignant un nombre compris entre 1 et 2), les rapports $\frac{n}{m}$, $\frac{m}{n^2}$ convergeront ensemble, pour des valeurs croissantes de n, vers la limite zéro, et le second membre de la formule (30) vers la limite $\frac{\pi^2}{6}$. Le premier membre devant avoir la même limite que le second, il en résulte : 1° que la série

$$1,\quad \frac{1}{4},\quad \frac{1}{9},\quad \frac{1}{16},\quad \ldots,\quad \frac{1}{n^2},\quad \ldots$$

sera convergente, ce que l'on savait déjà (*voir* le corollaire du théorème III, Chap. VI, § II); 2° que cette série aura pour somme $\frac{\pi^2}{6}$.

L'équation (28) étant ainsi démontrée, on en tirera, en divisant ses deux membres par 4,

$$\frac{\pi^2}{24}=\frac{1}{4}+\frac{1}{16}+\frac{1}{36}+\ldots.$$

On aura par suite

$$\frac{\pi^2}{6}-\frac{\pi^2}{24}=1+\frac{1}{9}+\frac{1}{25}+\ldots.$$

Cette nouvelle formule s'accorde avec l'équation (27), qu'on peut déduire directement de la première des équations (24) ou (26).

Avant de terminer cette Note, nous ferons remarquer que, pour établir les huit formules (3), (4), (5), (6), (9), (10), (11) et (12) du Chapitre VII (§ V), il suffit de démontrer les quatre dernières, et qu'on y parvient très promptement en développant les équations (10) du Chapitre IX (§ I), savoir

$$(31)\qquad 1+z\cos\theta+z^2\cos2\theta+z^3\cos3\theta+\ldots=\frac{1-z\cos\theta}{1-2z\cos\theta+z^2}\qquad (z=-1,\quad z=+1),$$

$$(32)\qquad z\sin\theta+z^2\sin2\theta+z^3\sin3\theta+\ldots=\frac{z\sin\theta}{1-2z\cos\theta+z^2}\qquad (z=-1,\quad z=+1).$$

Considérons, par exemple, l'équation (32). On en tirera, pour des valeurs numériques de z inférieures à l'unité,

$$\begin{aligned}
&z\sin\theta+z^2\sin2\theta+z^3\sin3\theta+\ldots+z^{2n}\sin2n\theta+z^{2n+1}\sin(2n+1)\theta+\ldots\\
&\quad=\frac{1}{1+z^2}\frac{z\sin\theta}{1-\frac{2z\cos\theta}{1+z^2}}\\
&\quad=\sin\theta[z(1+z^2)^{-1}+2z^2\cos\theta(1+z^2)^{-2}+4z^3\cos\theta(1+z^2)^{-3}+\ldots]\\
&\quad=\sin\theta\left\{z-z^3+z^5+\ldots\pm z^{2n+1}\mp\ldots\right.\\
&\qquad\qquad+\cos\theta(2z^2-4z^4+\ldots\mp 2nz^{2n}\pm\ldots)\\
&\qquad\qquad+\cos^2\theta\left[\frac{2.4}{1.2}z^3-\frac{4.6}{1.2}z^5+\ldots\mp\frac{2n(2n+2)}{1.2}z^{2n+1}\pm\ldots\right]\\
&\qquad\qquad+\cos^3\theta\left[\frac{2.4.6}{1.2.3}z^4-\ldots\pm\frac{(2n-2)2n(2n+2)}{1.2.3}z^{2n}\mp\ldots\right]\\
&\qquad\qquad\left.+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\right\},
\end{aligned}$$

et l'on trouvera par suite, en égalant entre eux les coefficients des puissances semblables de z,

$$\sin 2n\theta = (-1)^{n+1}\sin\theta\left[2n\cos\theta - \frac{(2n-2)2n(2n+2)}{1.2.3}\cos^3\theta + \ldots\right], \tag{33}$$

$$\sin(2n+1)\theta = (-1)^n \quad \sin\theta\left[1 - \frac{2n(2n+2)}{1.2}\cos^2\theta + \ldots\right]. \tag{34}$$

Si dans ces dernières formules on remplace θ par z, et $2n$ ou $2n+1$ par m, on obtiendra précisément les équations (10) et (11) du Chapitre VII (§ V). Les équations (9) et (12) du même paragraphe se déduiraient, par un calcul semblable, de la formule (31).

NOTE IX.

SUR LES PRODUITS COMPOSÉS D'UN NOMBRE INFINI DE FACTEURS.

Désignons par

$$u_0,\quad u_1,\quad u_2,\quad \ldots,\quad u_n,\quad \ldots \tag{1}$$

une suite infinie de termes positifs ou négatifs, dont chacun soit supérieur à -1. Si les quantités

$$l(1+u_0),\quad l(1+u_1),\quad l(1+u_2),\quad \ldots,\quad l(1+u_n),\quad \ldots \tag{2}$$

(l étant la caractéristique des logarithmes népériens), forment une série convergente dont la somme soit égale à s, le produit

$$(1+u_0)(1+u_1)(1+u_2)\ldots(1+u_{n-1}) \tag{3}$$

convergera évidemment, pour des valeurs croissantes du nombre entier n, vers une limite finie et différente de zéro, équivalente à e^s. Si, au contraire, la série (2) est divergente, le produit (3) cessera de converger vers une limite finie différente de zéro. Dans le premier cas, on est convenu d'indiquer la limite du produit que l'on considère, en écrivant le produit de ses premiers facteurs suivi de ..., comme on le voit ici,

$$(1+u_0)(1+u_1)(1+u_2)\ldots. \tag{4}$$

La même notation peut être conservée dans le cas où cette limite s'évanouit.

Pour que la série (2) soit convergente, il est d'abord nécessaire que, le nombre n venant à croître indéfiniment, chacune des expressions

$$l(1+u_n),\quad l(1+u_{n+1}),\quad l(1+u_{n+2}),\quad \ldots$$

et, par suite, chacune des quantités

$$u_n,\quad u_{n+1},\quad u_{n+2},\quad \ldots$$

devienne infiniment petite. Cette condition étant remplie, comme on a généralement

$$l(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots \tag{5}$$

$$(x = -1, \quad x = +1),$$

on trouvera, pour des valeurs de n très considérables,

$$\left\{\begin{array}{l} l(1+u_n) \;\;\;\;= u_n \;\;\;\; - \frac{1}{2}u_n^2 \;\; + \frac{1}{3}u_n^3 \;\; - \ldots = u_n \;\;\;\; - \frac{1}{2}u_n^2 \;\;\; (1 \pm \varepsilon_n), \\ l(1+u_{n+1}) = u_{n+1} - \frac{1}{2}u_{n+1}^2 + \frac{1}{3}u_{n+1}^3 - \ldots = u_{n+1} - \frac{1}{2}u_{n+1}^2 (1 \pm \varepsilon_{n+1}), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{array}\right. \tag{6}$$

$\pm \varepsilon_n$, $\pm \varepsilon_{n+1}$, ... désignant encore des quantités infiniment petites; puis l'on en conclura, en représentant par m un nombre entier quelconque, et par $1 \pm \varepsilon$ une moyenne entre les facteurs $1 \pm \varepsilon_n$, $1 \pm \varepsilon_{n+1}$, ...,

$$\left\{\begin{array}{l} l(1+u_n) + l(1+u_{n+1}) + \ldots + l(1+u_{n+m-1}) \\ \quad = u_n + u_{n+1} + \ldots + u_{n+m-1} - \frac{1}{2}(u_n^2 + u_{n+1}^2 + \ldots + u_{n+m-1}^2)(1 \pm \varepsilon). \end{array}\right. \tag{7}$$

Concevons maintenant que, dans la formule précédente, on fasse croître le nombre m au delà de toute limite. Selon que chaque membre de la formule convergera ou non vers une limite fixe, la série (2) sera convergente ou divergente. Cela posé, l'inspection seule du second membre suffira pour établir la proposition que je vais énoncer.

Théorème I. — *Si la série* (1) *et la suivante*

$$u_0^2, \quad u_1^2, \quad u_2^2, \quad \ldots, \quad u_n^2, \quad \ldots \tag{8}$$

sont l'une et l'autre convergentes, la série (2) *le sera pareillement, et par suite le produit* (3) *convergera, pour des valeurs croissantes de n, vers une limite finie différente de zéro. Mais, si, la série* (1) *étant convergente, la série* (8) *est divergente, le second membre de la formule* (7) *ayant alors pour limite l'infini négatif, le produit* (3) *convergera nécessairement vers la limite zéro.*

Corollaire I. — Si la série (2) étant convergente a tous ses termes positifs, ou si elle demeure convergente lors même qu'on réduit ses différents termes

à leurs valeurs numériques, on sera évidemment assuré de la convergence de la série (8); et, en conséquence, le produit (3) aura pour limite une quantité finie différente de zéro. C'est ce qui arrivera, par exemple, si le produit en question se réduit à l'un des suivants :

$$(1+1)\;\left(1+\frac{1}{2^2}\right)\left(1+\frac{1}{3^2}\right)\ldots\left(1+\frac{1}{n^2}\right),$$

$$(1+1)\;\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1+\frac{1}{3^2}\right)\ldots\left(1\pm\frac{1}{n^2}\right),$$

$$(1+x^2)\left(1+\frac{x^2}{2^2}\right)\left(1+\frac{x^2}{3^2}\right)\ldots\left(1+\frac{x^2}{n^2}\right).$$

Corollaire II. — Comme la série

$$1, \quad -\frac{1}{\sqrt{2}}, \quad +\frac{1}{\sqrt{3}}, \quad -\frac{1}{\sqrt{4}}, \quad \ldots$$

est convergente, tandis que les carrés de ses différents termes, savoir

$$1, \quad \frac{1}{2}, \quad \frac{1}{3}, \quad \frac{1}{4}, \quad \ldots,$$

forment une série divergente, il résulte du théorème I que le produit

$$(1+1)\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(1+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\left(1-\frac{1}{\sqrt{4}}\right)\ldots$$

a zéro pour limite.

Corollaire III. — Le théorème I subsiste évidemment dans le cas même où parmi les premiers termes de la série (1) quelques-uns deviendraient inférieurs à -1. Seulement, lorsqu'on admet cette nouvelle hypothèse, on doit remplacer dans la série (2) les logarithmes des quantités négatives par les logarithmes de leurs valeurs numériques. Cela posé, il est clair que, pour des valeurs croissantes de n, le produit

$$(1-x^2)\left(1-\frac{x^2}{2^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{3^2}\right)\ldots\left(1-\frac{x^2}{n^2}\right)$$

convergera, quel que soit x, vers une limite finie différente de zéro.

Corollaire IV. — Toutes les fois que la série (1) est convergente, le produit (3) converge, pour des valeurs croissantes de n, vers une limite finie qui peut se réduire à zéro.

Lorsque la limite du produit (3) est finie, sans être nulle, on ne peut pas toujours assigner sa valeur exacte. Dans le petit nombre de produits de cette espèce auxquels correspond une limite connue, on doit distinguer le suivant

$$(9)\qquad (1-x^2)\left(1-\frac{x^2}{2^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{3^2}\right)\cdots\left(1-\frac{x^2}{n^2}\right),$$

dont nous allons à présent nous occuper.

Quand, après avoir posé $x=\frac{z}{\pi}$, on fait croître n indéfiniment, le produit (9) converge vers une limite finie représentée par la notation

$$(10)\qquad \left(1-\frac{z^2}{\pi^2}\right)\left(1-\frac{z^2}{2^2\pi^2}\right)\left(1-\frac{z^2}{3^2\pi^2}\right)\cdots.$$

Pour déterminer cette limite, il suffira de recourir à l'équation (16) ou (18) de la Note précédente. Considérons, pour fixer les idées, l'équation (16). Si l'on y écrit partout $\frac{z}{m}$ au lieu de z, on trouvera, pour des valeurs paires de m,

$$(11)\qquad \sin z = m\sin\frac{z}{m}\cos\frac{z}{m}\left(1-\frac{\sin^2\frac{z}{m}}{\sin^2\frac{\pi}{m}}\right)\left(1-\frac{\sin^2\frac{z}{m}}{\sin^2\frac{2\pi}{m}}\right)\cdots\left(1-\frac{\sin^2\frac{z}{m}}{\sin^2\frac{(m-2)\pi}{2m}}\right)$$

et, par suite (en supposant la valeur numérique de z inférieure à π, et le nombre m égal ou supérieur à 2),

$$(12)\qquad l\frac{\sin z}{m\sin\frac{z}{m}\cos\frac{z}{m}} = l\left(1-\frac{\sin^2\frac{z}{m}}{\sin^2\frac{\pi}{m}}\right)+l\left(1-\frac{\sin^2\frac{z}{m}}{\sin^2\frac{2\pi}{m}}\right)+\ldots+l\left(1-\frac{\sin^2\frac{z}{m}}{\sin^2\frac{(m-2)\pi}{2m}}\right).$$

Soient d'ailleurs n un nombre entier inférieur à $\frac{1}{2}m$, $1+\alpha$ une quantité moyenne entre les rapports

$$\frac{l\left(1-\frac{\sin^2\frac{z}{m}}{\sin^2\frac{\pi}{m}}\right)}{l\left(1-\frac{z^2}{\pi^2}\right)},\quad \frac{l\left(1-\frac{\sin^2\frac{z}{m}}{\sin^2\frac{2\pi}{m}}\right)}{l\left(1-\frac{z^2}{2^2\pi^2}\right)},\quad \ldots,\quad \frac{l\left(1-\frac{\sin^2\frac{z}{m}}{\sin^2\frac{n\pi}{m}}\right)}{l\left(1-\frac{z^2}{n^2\pi^2}\right)},$$

et $1+\beta$ une autre quantité moyenne entre les expressions

$$-\frac{l\left(1-\frac{\sin^2\frac{z}{m}}{\sin^2\frac{(n+1)\pi}{m}}\right)}{\left(\frac{\sin^2\frac{z}{m}}{\sin^2\frac{(n+1)\pi}{m}}\right)},\quad -\frac{l\left(1-\frac{\sin^2\frac{z}{m}}{\sin^2\frac{(n+2)\pi}{m}}\right)}{\left(\frac{\sin^2\frac{z}{m}}{\sin^2\frac{(n+2)\pi}{m}}\right)},\quad \ldots,\quad -\frac{l\left(1-\frac{\sin^2\frac{z}{m}}{\sin^2\frac{(m-2)\pi}{2m}}\right)}{\left(\frac{\sin^2\frac{z}{m}}{\sin^2\frac{(m-2)\pi}{2m}}\right)}.$$

Le second membre de l'équation (12) sera évidemment la somme des deux polynômes

$$l\left(1-\frac{\sin^2\frac{z}{m}}{\sin^2\frac{\pi}{m}}\right)+l\left(1-\frac{\sin^2\frac{z}{m}}{\sin^2\frac{2\pi}{m}}\right)+\ldots+l\left(1-\frac{\sin^2\frac{z}{m}}{\sin^2\frac{n\pi}{m}}\right),$$

$$l\left(1-\frac{\sin^2\frac{z}{m}}{\sin^2\frac{(n+1)\pi}{m}}\right)+l\left(1-\frac{\sin^2\frac{z}{m}}{\sin^2\frac{(n+2)\pi}{m}}\right)+\ldots+l\left(1-\frac{\sin^2\frac{z}{m}}{\sin^2\frac{(m-2)\pi}{2m}}\right),$$

dont le premier pourra être présenté sous la forme

$$\left[l\left(1-\frac{z^2}{\pi^2}\right)+l\left(1-\frac{z^2}{2^2\pi^2}\right)+\ldots+l\left(1-\frac{z^2}{n^2\pi^2}\right)\right](1+\alpha),$$

tandis que le second prendra celle du produit

$$-\frac{\sin^2\frac{z}{m}}{\left(\frac{\pi}{m}\right)^2}\left\{\frac{1}{(n+1)^2}\frac{\left(\frac{(n+1)\pi}{m}\right)^2}{\sin^2\frac{(n+1)\pi}{m}}+\frac{1}{(n+2)^2}\frac{\left(\frac{(n+2)\pi}{m}\right)^2}{\sin^2\frac{(n+2)\pi}{m}}+\ldots+\frac{1}{\left(\frac{m}{2}-1\right)^2}\frac{\left(\frac{(n-2)\pi}{2m}\right)^2}{\sin^2\frac{(m-2)\pi}{2m}}\right\}(1+\beta)$$

que l'on peut réduire (en vertu des principes établis dans la Note précédente) à

$$-\frac{2m}{n^2}\frac{\sin^2\frac{z}{m}}{\left(\frac{\pi}{m}\right)^2}(1+\beta)\,\mathrm{M}(0,1).$$

Cela posé, l'équation (12) deviendra

$$(13)\quad \begin{cases} l\dfrac{\sin z}{m\sin\dfrac{z}{m}\cos\dfrac{z}{m}} = \left[l\left(1-\dfrac{z^2}{\pi^2}\right)+l\left(1-\dfrac{z^2}{2^2\pi^2}\right)+\ldots+l\left(1-\dfrac{z^2}{n^2\pi^2}\right)\right](1+\alpha) \\ \qquad\qquad -\dfrac{2m}{n^2}\dfrac{\sin^2\dfrac{z}{m}}{\left(\dfrac{\pi}{m}\right)^2}(1+6)\,\mathrm{M}(0,1); \end{cases}$$

et l'on en conclura, en faisant, pour abréger,

$$(14)\qquad \frac{1}{1+\alpha}=1+\gamma,\qquad \frac{\sin^2\dfrac{z}{m}}{\left(\dfrac{\pi}{m}\right)^2}\frac{1+6}{1+\alpha}=\frac{z^2}{\pi^2}(1+\delta),$$

puis, revenant des logarithmes aux nombres,

$$(15)\quad \left(1-\frac{z^2}{\pi^2}\right)\left(1-\frac{z^2}{2^2\pi^2}\right)\cdots\left(1-\frac{z^2}{n^2\pi^2}\right)=\left(\frac{\sin z}{m\sin\dfrac{z}{m}\cos\dfrac{z}{m}}\right)^{1+\gamma}e^{\frac{2mz^2}{n^2\pi^2}(1+\delta)\,\mathrm{M}(0,1)}.$$

Supposons maintenant que, la valeur de n étant choisie arbitrairement, on prenne pour $\frac{1}{2}m$ le nombre entier immédiatement supérieur à n^a (a désignant un nombre fractionnaire ou irrationnel compris entre 1 et 2). Lorsque la valeur de n deviendra très considérable, les quantités $\frac{n}{m}$, $\frac{m}{n^2}$, α, 6, γ, δ seront infiniment petites, le produit

$$m\sin\frac{z}{m}\cos\frac{z}{m}=\frac{\sin\dfrac{z}{m}}{\dfrac{z}{m}}\,z\cos\frac{z}{m}$$

différera très peu de z, et par suite le second membre de l'équation (15) s'approchera indéfiniment de la limite

$$\frac{\sin z}{z}.$$

Le premier membre devant converger vers la même limite, on aura nécessairement

$$(16)\qquad \left(1-\frac{z^2}{\pi^2}\right)\left(1-\frac{z^2}{2^2\pi^2}\right)\left(1-\frac{z^2}{3^2\pi^2}\right)\cdots=\frac{\sin z}{z}.$$

Cette dernière formule se trouve ainsi démontrée dans le cas où la valeur numérique de z reste inférieure à π. Alors les quantités dont nous avons pris les logarithmes sont toutes positives. Mais la démonstration donnée subsiste également pour des valeurs numériques de z supérieures à π, lorsque l'on convient de remplacer le logarithme de chaque quantité négative par le logarithme de sa valeur numérique. En conséquence, l'équation (16) demeure vraie, quelle que soit la valeur réelle attribuée à la variable z. On ne doit pas même excepter le cas où l'on supposerait

$$z=\pm k\pi,$$

k désignant un nombre entier quelconque, puisque, dans cette hypothèse, les deux membres de l'équation s'évanouiraient en même temps.

L'équation (16), une fois établie, en fournira immédiatement plusieurs autres. Ainsi, par exemple, on en tirera, pour des valeurs réelles quelconques des variables x, y, z,

$$(17)\quad \begin{cases} \sin z = z\left(1-\dfrac{z^2}{\pi^2}\right)\left(1-\dfrac{z^2}{2^2\pi^2}\right)\left(1-\dfrac{z^2}{3^2\pi^2}\right)\cdots \\ \quad\;\; = z\left(1-\dfrac{z}{\pi}\right)\left(1+\dfrac{z}{\pi}\right)\left(1-\dfrac{z}{2\pi}\right)\left(1+\dfrac{z}{2\pi}\right)\left(1-\dfrac{z}{3\pi}\right)\left(1+\dfrac{z}{3\pi}\right)\cdots \end{cases}$$

et

$$(18)\qquad \frac{\sin x}{\sin y}=\frac{x}{y}\,\frac{\pi-x}{\pi-y}\,\frac{\pi+x}{\pi+y}\,\frac{2\pi-x}{2\pi-y}\,\frac{2\pi+x}{2\pi+y}\,\frac{3\pi-x}{3\pi-y}\,\frac{3\pi+x}{3\pi+y}\cdots.$$

Si dans l'équation (17) on fait $z=\frac{\pi}{2}$, on trouvera

$$1=\frac{\pi}{2}\,\frac{1}{2}\,\frac{3}{2}\,\frac{3}{4}\,\frac{5}{4}\,\frac{5}{6}\,\frac{7}{6}\cdots,$$

et par suite on obtiendra le développement de $\frac{\pi}{2}$ en facteurs, découvert par le géomètre Wallis, savoir

$$(19)\qquad \frac{\pi}{2}=\frac{2}{1}\,\frac{2}{3}\,\frac{4}{3}\,\frac{4}{5}\,\frac{6}{5}\,\frac{6}{7}\,\frac{8}{7}\,\frac{8}{9}\cdots.$$

On trouverait de même, en faisant $z=\frac{\pi}{4}$,

$$(20)\qquad \frac{\pi}{4}=\frac{1}{\sqrt{2}}\,\frac{4}{3}\,\frac{4}{5}\,\frac{8}{7}\,\frac{8}{9}\,\frac{12}{11}\,\frac{12}{13}\,\frac{16}{15}\,\frac{16}{17}\cdots.$$

Si dans l'équation (18) on pose à la fois

$$x = \frac{\pi}{2} - z \quad \text{et} \quad y = \frac{\pi}{2},$$

on en conclura

$$(21)\quad \left\{\begin{aligned} \cos z &= \left(1 - \frac{2z}{\pi}\right)\left(1 + \frac{2z}{\pi}\right)\left(1 - \frac{2z}{3\pi}\right)\left(1 + \frac{2z}{3\pi}\right)\left(1 - \frac{2z}{5\pi}\right)\left(1 + \frac{2z}{5\pi}\right)\cdots \\ &= \left(1 - \frac{4z^2}{\pi^2}\right)\left(1 - \frac{4z^2}{3^2\pi^2}\right)\left(1 - \frac{4z^2}{5^2\pi^2}\right)\cdots. \end{aligned}\right.$$

On pourrait déduire directement la même formule de l'équation (15) ou (17) (Note précédente), en y remplaçant z par $\frac{z}{m}$, puis faisant converger le nombre m vers la limite ∞. Observons enfin qu'on tirera de l'équation (16), en y supposant la valeur numérique de z inférieure à π,

$$(22)\quad \left\{\begin{aligned} l\frac{\sin z}{z} &= l\left(1 - \frac{z^2}{\pi^2}\right) + l\left(1 - \frac{z^2}{2^2\pi^2}\right) + l\left(1 - \frac{z^2}{3^2\pi^2}\right) + \ldots \\ &= - \frac{z^2}{\pi^2}\left(1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots\right) \\ &\quad - \frac{1}{2}\frac{z^4}{\pi^4}\left(1 + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \ldots\right) \\ &\quad - \frac{1}{3}\frac{z^6}{\pi^6}\left(1 + \frac{1}{2^6} + \frac{1}{3^6} + \ldots\right) \\ &\quad - \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right.$$

Comme on a d'ailleurs, dans cette hypothèse,

$$\frac{\sin z}{z} < 1,$$

$$(23)\quad \left\{\begin{aligned} l\frac{\sin z}{z} &= l\left(1 - \frac{z^2}{1.2.3} + \frac{z^4}{1.2.3.4.5} - \frac{z^6}{1.2.3.4.5.6.7} + \ldots\right) \\ &= - \frac{z^2}{1.2.3}\left(1 - \frac{z^2}{4.5} + \frac{z^4}{4.5.6.7} - \ldots\right) \\ &\quad - \frac{1}{2}\left(\frac{z^2}{1.2.3}\right)^2\left(1 - \frac{z^2}{4.5} + \ldots\right)^2 \\ &\quad - \frac{1}{3}\left(\frac{z^2}{1.2.3}\right)^3\left(1 - \ldots\right)^3 \\ &\quad - \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{aligned}\right.$$

et, par suite (en vertu des principes établis dans le Chapitre VI et dans la Note VII)

$$(24)\quad l\frac{\sin z}{z} = -\frac{1}{6}\frac{2z^2}{1.2} - \frac{1}{2}\frac{1}{30}\frac{2^3 z^4}{1.2.3.4} - \frac{1}{3}\frac{1}{42}\frac{2^5 z^6}{1.2.3.4.5.6} - \ldots,$$

la comparaison des coefficients des puissances semblables de z dans les formules (22) et (24) donnera les équations

$$(25)\quad \left\{\begin{aligned} &1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \ldots = \frac{1}{6}\frac{2\pi^2}{1.2} = \frac{\pi^2}{6}, \\ &1 + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{4^4} + \ldots = \frac{1}{30}\frac{2^3\pi^4}{1.2.3.4} = \frac{\pi^4}{90}, \\ &1 + \frac{1}{2^6} + \frac{1}{3^6} + \frac{1}{4^6} + \ldots = \frac{1}{42}\frac{2^5\pi^6}{1.2.3.4.5.6} = \frac{\pi^6}{945}, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{aligned}\right.$$

dont la première s'accorde avec la formule (28) de la Note VIII. Les facteurs numériques $\frac{1}{6}, \frac{1}{30}, \frac{1}{42}, \cdots$ qui entrent dans les seconds membres de ces équations sont ce qu'on appelle *les nombres de Bernoulli*. Ajoutons que, si l'on désigne par $2m$ un nombre pair quelconque, on aura généralement

$$(26)\quad \left\{\begin{aligned} &1 + \frac{1}{3^{2m}} + \frac{1}{5^{2m}} + \frac{1}{7^{2m}} + \ldots \\ &= 1 + \frac{1}{2^{2m}} + \frac{1}{3^{2m}} + \frac{1}{4^{2m}} + \ldots - \frac{1}{2^{2m}}\left(1 + \frac{1}{2^{2m}} + \frac{1}{3^{2m}} + \ldots\right) \\ &= \left(1 - \frac{1}{2^{2m}}\right)\left(1 + \frac{1}{2^{2m}} + \frac{1}{3^{2m}} + \frac{1}{4^{2m}} + \ldots\right). \end{aligned}\right.$$

Dans ce qui précède, nous avons seulement considéré des produits dont tous les facteurs étaient des quantités réelles, et des séries dont tous les termes étaient réels. Mais on doit remarquer : 1° que, en vertu des principes établis dans le Chapitre IX [*voir* l'équation (37) du § II, et l'équation (26) du § III], la formule (5) subsiste dans le cas même où la variable x devient imaginaire, pourvu que son module reste inférieur à l'unité; 2° que le rapport

$$\frac{\sin z}{z} = 1 - \frac{z^2}{1.2.3} + \frac{z^4}{1.2.3.4.5} - \ldots$$

converge vers l'unité toutes les fois que la valeur réelle ou imaginaire attribuée à la variable z s'approche indéfiniment de zéro; 3° enfin que les équations (15), (16), (17) et (18) de la Note VIII subsistent également pour des valeurs réelles et pour des valeurs imaginaires de z. En partant de ces remarques, on parviendra bientôt à reconnaître comment on doit modifier les propositions et les formules ci-dessus démontrées dans le cas où les expressions

$$u_0, \quad u_1, \quad u_2, \quad \ldots, \quad x, \quad y, \quad z$$

deviennent imaginaires. Ainsi, par exemple, on établira sans peine, à l'aide des formules (6), la proposition suivante, analogue au corollaire I du théorème I :

Théorème II. — *Supposons que la série (1), étant imaginaire, demeure convergente quand on réduit ses différents termes à leurs modules respectifs. Le produit (3) convergera nécessairement, pour des valeurs croissantes de n, vers une limite finie réelle ou imaginaire.*

De plus, on prouvera facilement que les équations (17) et (21) subsistent, lorsqu'on attribue à z une valeur imaginaire quelconque $u + v\sqrt{-1}$; d'où il résulte : 1° qu'on peut exprimer par des produits composés d'un nombre infini de facteurs les expressions imaginaires

$$(27)\qquad \left\{\begin{aligned} &\frac{e^v + e^{-v}}{2}\sin u + \sqrt{-1}\,\frac{e^v - e^{-v}}{2}\cos u,\\ &\frac{e^v + e^{-v}}{2}\cos u - \sqrt{-1}\,\frac{e^v - e^{-v}}{2}\sin u,\end{aligned}\right.$$

et les carrés de leurs modules, savoir

$$(28)\qquad \left\{\begin{aligned} &\left(\frac{e^v + e^{-v}}{2}\right)^2 \sin^2 u + \left(\frac{e^v - e^{-v}}{2}\right)^2 \cos^2 u = \frac{e^{2v} + e^{-2v}}{2} - \cos 2u,\\ &\left(\frac{e^v + e^{-v}}{2}\right)^2 \cos^2 u + \left(\frac{e^v - e^{-v}}{2}\right)^2 \sin^2 u = \frac{e^{2v} + e^{-2v}}{2} + \cos 2u;\end{aligned}\right.$$

2° que les expressions

$$(29)\qquad \left\{\begin{aligned} &\operatorname{arc\,tang}\left(\frac{e^v - e^{-v}}{e^v + e^{-v}}\cot u\right),\\ &\operatorname{arc\,tang}\left(\frac{e^v - e^{-v}}{e^v + e^{-v}}\operatorname{tang} u\right)\end{aligned}\right.$$

sont respectivement égales aux deux sommes

$$(30)\qquad \left\{\begin{aligned} &\operatorname{arc\,tang}\frac{v}{u} - \operatorname{arc\,tang}\frac{v}{\pi - u} + \operatorname{arc\,tang}\frac{v}{\pi + u}\\ &\qquad - \operatorname{arc\,tang}\frac{v}{2\pi - u} + \operatorname{arc\,tang}\frac{v}{2\pi + u} - \ldots,\\ &\operatorname{arc\,tang}\frac{2v}{\pi - 2u} - \operatorname{arc\,tang}\frac{2v}{\pi + 2u} + \operatorname{arc\,tang}\frac{2v}{3\pi - 2u}\\ &\qquad - \operatorname{arc\,tang}\frac{2v}{3\pi + 2u} + \operatorname{arc\,tang}\frac{2v}{5\pi + 2u} + \ldots,\end{aligned}\right.$$

augmentées ou diminuées d'un multiple de la circonférence 2π. D'autre part, comme les expressions (29) et les sommes (30) sont des fonctions continues de v qui s'évanouissent toujours avec cette variable, on peut assurer que le multiple dont nous venons de parler se réduit à zéro.

Si l'on suppose en particulier $u = 0$, on trouvera

$$(31)\qquad \left\{\begin{aligned} &\frac{e^v - e^{-v}}{2} = v\left(1 + \frac{v^2}{\pi^2}\right)\left(1 + \frac{v^2}{2^2\pi^2}\right)\left(1 + \frac{v^2}{3^2\pi^2}\right)\ldots,\\ &\frac{e^v + e^{-v}}{2} = \left(1 + \frac{2^2 v^2}{\pi^2}\right)\left(1 + \frac{2^2 v^2}{3^2\pi^2}\right)\left(1 + \frac{2^2 v^2}{5^2\pi^2}\right)\ldots.\end{aligned}\right.$$

On trouvera encore, en prenant $u = \frac{\pi}{4}$,

$$(32)\qquad \left\{\begin{aligned} \operatorname{arc\,tang}\frac{e^v - e^{-v}}{e^v + e^{-v}} &= \operatorname{arc\,tang}\frac{4v}{\pi} - \operatorname{arc\,tang}\frac{4v}{3\pi}\\ &\quad + \operatorname{arc\,tang}\frac{4v}{5\pi} - \operatorname{arc\,tang}\frac{4v}{7\pi} + \ldots\end{aligned}\right.$$

et, en prenant $u = v$,

$$(33)\qquad \left\{\begin{aligned} &\frac{e^{2v} + e^{-2v}}{2} - \cos 2v = 2v^2\left(1 + \frac{2^2 v^4}{\pi^4}\right)\left(1 + \frac{2^2 v^4}{2^4\pi^4}\right)\left(1 + \frac{2^2 v^4}{3^4\pi^4}\right)\ldots,\\ &\frac{e^{2v} + e^{-2v}}{2} + \cos 2v = \left(1 + \frac{2^4 v^4}{\pi^4}\right)\left(1 + \frac{2^4 v^4}{3^4\pi^4}\right)\left(1 + \frac{2^4 v^4}{5^4\pi^4}\right)\ldots.\end{aligned}\right.$$

Enfin, si dans la formule (32) on suppose la valeur numérique de $\frac{4v}{\pi}$ inférieure à l'unité, les deux membres de cette formule pourront être développés suivant les puissances ascendantes de v, et la comparaison des coefficients des puissances semblables dans les développements dont il s'agit fournira les équations

$$(34)\qquad \begin{cases} 1-\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{5}-\dfrac{1}{7}+\ldots=\dfrac{\pi}{4}, \\ 1-\dfrac{1}{3^3}+\dfrac{1}{5^3}-\dfrac{1}{7^3}+\ldots=\dfrac{\pi^3}{32}, \\ 1-\dfrac{1}{3^5}+\dfrac{1}{5^5}-\dfrac{1}{7^5}+\ldots=\dfrac{5\pi^5}{1536}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{cases}$$

dont la première coïncide avec l'équation (40) du Chapitre IX (§ II).

Concevons maintenant que, après avoir divisé par v les expressions (29) et les sommes (30), on fasse converger la variable v vers la limite zéro; on trouvera, en passant aux limites,

$$(35)\qquad \begin{cases} \cot u = \dfrac{1}{u}-\dfrac{1}{\pi-u}+\dfrac{1}{\pi+u}-\dfrac{1}{2\pi-u}+\dfrac{1}{2\pi+u}-\ldots \\ = \dfrac{1}{u}-2u\left(\dfrac{1}{\pi^2-u^2}+\dfrac{1}{2^2\pi^2-u^2}+\dfrac{1}{3^2\pi^2-u^2}+\ldots\right), \end{cases}$$

$$(36)\qquad \begin{cases} \operatorname{tang} u = \dfrac{1}{\frac{\pi}{2}-u}-\dfrac{1}{\frac{\pi}{2}+u}+\dfrac{1}{\frac{3\pi}{2}-u}-\dfrac{1}{\frac{3\pi}{2}+u}+\dfrac{1}{\frac{5\pi}{2}-u}-\ldots \\ \phantom{\operatorname{tang} u} = 2u\left[\dfrac{1}{\left(\frac{\pi}{2}\right)^2-u^2}+\dfrac{1}{\left(\frac{3\pi}{2}\right)^2-u^2}+\dfrac{1}{\left(\frac{5\pi}{2}\right)^2-u^2}+\ldots\right]. \end{cases}$$

Comme on a d'ailleurs généralement, pour des valeurs numériques de u inférieures à celles de a,

$$\frac{1}{a^2-u^2}=\frac{1}{a^2}\left(1-\frac{u^2}{a^2}\right)^{-1}=\frac{1}{a^2}+\frac{u^2}{a^4}+\frac{u^4}{a^6}+\ldots,$$

on tirera des formules (35) et (36), en supposant la valeur numérique de u plus petite que $\frac{\pi}{2}$,

$$(37)\qquad \begin{cases} \cot u = \dfrac{1}{u}-\dfrac{2u}{\pi^2}\left(1+\dfrac{1}{2^2}+\dfrac{1}{3^2}+\dfrac{1}{4^2}+\ldots\right) \\ \qquad -\dfrac{2u^3}{\pi^4}\left(1+\dfrac{1}{2^4}+\dfrac{1}{3^4}+\dfrac{1}{4^4}+\ldots\right) \\ \qquad -\dfrac{2u^5}{\pi^6}\left(1+\dfrac{1}{2^6}+\dfrac{1}{3^6}+\dfrac{1}{4^6}+\ldots\right) \\ \qquad -\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{cases}$$

$$(38)\qquad \begin{cases} \operatorname{tang} u = \dfrac{2^3 u}{\pi^2}\left(1+\dfrac{1}{3^2}+\dfrac{1}{5^2}+\dfrac{1}{7^2}+\ldots\right) \\ \qquad +\dfrac{2^5 u^3}{\pi^4}\left(1+\dfrac{1}{3^4}+\dfrac{1}{5^4}+\dfrac{1}{7^4}+\ldots\right) \\ \qquad +\dfrac{2^7 u^5}{\pi^6}\left(1+\dfrac{1}{3^6}+\dfrac{1}{5^6}+\dfrac{1}{7^6}+\ldots\right) \\ \qquad +\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

Par suite on aura, en vertu des équations (25) et (26),

$$(39)\qquad \cot u = \frac{1}{u}-\frac{1}{6}\,\frac{2^2 u}{1.2}-\frac{1}{30}\,\frac{2^4 u^3}{1.2.3.4}-\frac{1}{42}\,\frac{2^6 u^5}{1.2.3.4.5.6}-\ldots,$$

$$(40)\qquad \begin{cases} \operatorname{tang} u = \dfrac{1}{6}(2^2-1)\dfrac{2^2 u}{1.2}+\dfrac{1}{30}(2^4-1)\dfrac{2^4 u^3}{1.2.3.4} \\ \qquad +\dfrac{1}{42}(2^6-1)\dfrac{2^6 u^5}{1.2.3.4.5.6}+\ldots. \end{cases}$$

Si l'on ajoute ces dernières, après y avoir remplacé u par $\frac{1}{2}u$, on obtiendra le développement en série de

$$\cot\tfrac{1}{2}u+\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}u=\frac{\cos\frac{1}{2}u}{\sin\frac{1}{2}u}+\frac{\sin\frac{1}{2}u}{\cos\frac{1}{2}u}=\frac{1}{\sin\frac{1}{2}u\cos\frac{1}{2}u}=2\operatorname{coséc} u,$$

et l'on en conclura

$$(41)\qquad \begin{cases} \operatorname{coséc} u = \dfrac{1}{u}+\dfrac{1}{6}(2-1)\dfrac{2u}{1.2}+\dfrac{1}{30}(2^3-1)\dfrac{2u^3}{1.2.3.4} \\ \qquad +\dfrac{1}{42}(2^5-1)\dfrac{2u^5}{1.2.3.4.5.6}+\ldots. \end{cases}$$

Nous ne nous arrêterons pas davantage sur les conséquences qui dérivent de la formule (17). On peut consulter sur cet objet l'excellent Ouvrage d'Euler, qui a pour titre *Introductio in Analysin infinitorum*.

FIN DU TOME III DE LA SECONDE SÉRIE.

TABLE DES MATIÈRES

DU TOME TROISIÈME.

SECONDE SÉRIE.

MÉMOIRES DIVERS ET OUVRAGES.

II. — OUVRAGES CLASSIQUES

COURS D'ANALYSE DE L'ÉCOLE ROYALE POLYTECHNIQUE.

ANALYSE ALGÉBRIQUE.

NOTES SUR L'ANALYSE ALGÉBRIQUE.

FIN DE LA TABLE DES MATIÈRES DU TOME III DE LA SECONDE SÉRIE.

21921 Paris. — Imprimerie GAUTHIER-VILLARS ET FILS, quai des Grands-Augustins, 55.