CHAPITRE X.

SUR LES RACINES RÉELLES OU IMAGINAIRES DES ÉQUATIONS ALGÉBRIQUES DONT LE PREMIER MEMBRE EST UNE FONCTION RATIONNELLE ET ENTIÈRE D'UNE SEULE VARIABLE. RÉSOLUTION DE QUELQUES ÉQUATIONS DE CETTE ESPÈCE PAR L'ALGÈBRE OU LA TRIGONOMÉTRIE.

---

§ I. — *On peut satisfaire à toute équation dont le premier membre est une fonction rationnelle et entière de la variable x par des valeurs réelles ou imaginaires de cette variable. Décomposition des polynômes en facteurs du premier et du second degré. Représentation géométrique des facteurs réels du second degré.*

Considérons une équation algébrique dont le premier membre soit une fonction rationnelle et entière de la variable x. Si n représente le degré de cette équation, elle pourra se mettre sous la forme

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots + a_{n-1}x + a_n = 0, \tag{1}$$

$a_0, a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n$ étant des coefficients constants réels ou imaginaires. On appelle *racine* de cette même équation toute expression réelle ou imaginaire qui, substituée à la place de l'inconnue x, rend le premier membre égal à zéro. Supposons d'abord, pour fixer les idées, que les constantes $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ se réduisent à des quantités réelles. Alors, si deux valeurs réelles de x substituées dans le premier membre de l'équation (1) fournissent deux résultats entre lesquels zéro se trouve compris, c'est-à-dire deux résultats de signes contraires, on conclura du Chapitre II (§ II, théorème IV) que l'équation (1) admet une ou plusieurs racines réelles comprises entre ces valeurs. Il en résulte que toute équation de degré impair aura au moins une racine réelle. En effet, si n est un nombre impair, le premier membre

de l'équation (1) changera de signe, avec son premier terme a_0x^n, toutes les fois qu'en attribuant à la variable x des valeurs numériques très considérables on fera passer cette variable du positif au négatif (*voir* le théorème VIII du Chapitre II, § I).

Lorsque n devient un nombre pair, la quantité x^n demeurant positive tant que la variable x est réelle, le premier membre de l'équation (1) finit par être, pour de très grandes valeurs numériques de x, constamment de même signe que a_0. Si, dans la même hypothèse, a_n et a_0 sont de signes contraires, le premier membre changera évidemment de signe, lorsqu'on passera d'une très grande valeur numérique de x à une très petite, en laissant la variable toujours positive ou toujours négative. L'équation (1) aura donc alors deux racines réelles : l'une positive et l'autre négative.

Lorsque, n étant un nombre pair, a_0 et a_n sont de même signe, il peut arriver que le premier membre de l'équation (1) reste, pour toutes les valeurs réelles de x, de même signe que a_0, sans jamais s'évanouir. C'est ce qui a lieu, par exemple, pour chacune des équations binômes

$$x^2 + 1 = 0, \qquad x^4 + 1 = 0, \qquad x^6 + 1 = 0, \qquad \ldots.$$

Dans un cas semblable, l'équation (1) n'aura plus de racines réelles ; mais on y satisfera en prenant pour x une expression imaginaire

$$u + v\sqrt{-1},$$

u, v désignant deux quantités réelles et finies. Cette proposition et celles que nous venons d'établir se trouvent renfermées dans le théorème suivant :

THÉORÈME I. — *Quelles que soient les valeurs réelles ou les valeurs imaginaires des constantes $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n$, l'équation*

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n = 0, \tag{1}$$

dans laquelle n désigne un nombre entier égal ou supérieur à l'unité, a toujours des racines réelles ou imaginaires.

Démonstration. — Désignons, pour abréger, par $f(x)$ le premier membre de l'équation (1) : $f(x)$ sera une fonction réelle ou imaginaire, mais toujours entière, de la variable x; et, puisque toute expression réelle u se trouve comprise comme cas particulier dans une expression imaginaire $u+v\sqrt{-1}$, il suffira, pour établir le théorème énoncé, de démontrer généralement qu'on peut satisfaire à l'équation

$$f(x)=0, \tag{1}$$

en prenant

$$x=u+v\sqrt{-1},$$

puis attribuant aux nouvelles variables u et v des valeurs réelles. Or, si l'on substitue la valeur précédente de x dans la fonction $f(x)$, le résultat sera de la forme

$$\varphi(u,v)+\sqrt{-1}\,\chi(u,v),$$

$\varphi(u,v)$, $\chi(u,v)$ désignant deux fonctions réelles et entières des variables u et v. Cela posé, l'équation (1) deviendra

$$\varphi(u,v)+\sqrt{-1}\,\chi(u,v)=0;$$

et, pour y satisfaire, il suffira de vérifier les deux équations réelles

$$\left\{\begin{array}{l}\varphi(u,v)=0,\\ \chi(u,v)=0\end{array}\right. \tag{2}$$

ou, ce qui revient au même, l'équation unique

$$[\varphi(u,v)]^2+[\chi(u,v)]^2=0. \tag{3}$$

Donc, si l'on pose, pour plus de commodité,

$$\mathrm{F}(u,v)=[\varphi(u,v)]^2+[\chi(u,v)]^2, \tag{4}$$

il restera seulement à montrer que l'on peut obtenir des valeurs réelles de u et de v propres à faire évanouir la fonction

$$\mathrm{F}(u,v).$$

On y parviendra sans peine à l'aide des considérations suivantes.

D'abord, pour déterminer la valeur générale de la fonction $\mathrm{F}(u,v)$, on représentera chacune des constantes réelles ou imaginaires a_0, $a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n$, ainsi que la variable imaginaire $u+v\sqrt{-1}$, par le produit d'un module et d'une expression réduite; et l'on écrira, en conséquence,

$$\left\{\begin{array}{l}
a_0 = \rho_0\ (\cos\theta_0 + \sqrt{-1}\sin\theta_0\ ),\\
a_1 = \rho_1\ (\cos\theta_1 + \sqrt{-1}\sin\theta_1\ ),\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
a_{n-1} = \rho_{n-1}(\cos\theta_{n-1} + \sqrt{-1}\sin\theta_{n-1}),\\
a_n = \rho_n\ (\cos\theta_n + \sqrt{-1}\sin\theta_n\ ),
\end{array}\right. \tag{5}$$

$$u+v\sqrt{-1}=r(\cos t+\sqrt{-1}\sin t). \tag{6}$$

On aura, par suite,

$$\left\{\begin{array}{l}
f(u+v\sqrt{-1})\\
\quad = \rho_0 r^n[\cos(nt+\theta_0)+\sqrt{-1}\sin(nt+\theta_0)]\\
\quad\quad + \rho_1 r^{n-1}[\cos(\overline{n-1}.t+\theta_1)+\sqrt{-1}\sin(\overline{n-1}.t+\theta_1)]+\ldots\\
\quad\quad + \rho_{n-1} r[\cos(t+\theta_{n-1})+\sqrt{-1}\sin(t+\theta_{n-1})]\\
\quad\quad + \rho_n(\cos\theta_n+\sqrt{-1}\sin\theta_n);
\end{array}\right. \tag{7}$$

et l'on en déduira

$$\left\{\begin{array}{l}
\varphi(u,v)=\rho_0 r^n\cos(nt+\theta_0)+\rho_1 r^{n-1}\cos(\overline{n-1}.t+\theta_1)+\ldots\\
\qquad\qquad \ldots+\rho_{n-1} r\cos(t+\theta_{n-1})+\rho_n\cos\theta_n,\\
\chi(u,v)=\rho_0 r^n\sin(nt+\theta_0)+\rho_1 r^{n-1}\sin(\overline{n-1}.t+\theta_1)+\ldots\\
\qquad\qquad \ldots+\rho_{n-1} r\sin(t+\theta_{n-1})+\rho_n\sin\theta_n,
\end{array}\right. \tag{8}$$

$$\left\{\begin{array}{l}
\mathrm{F}(u,v)= [\rho_0 r^n\cos(nt+\theta_0)+\rho_1 r^{n-1}\cos(\overline{n-1}.t+\theta_1)+\ldots\\
\qquad\qquad\qquad \ldots+\rho_{n-1} r\cos(t+\theta_{n-1})+\rho_n\cos\theta_n]^2\\
\qquad + [\rho_0 r^n\sin(nt+\theta_0)+\rho_1 r^{n-1}\sin(\overline{n-1}.t+\theta_1)+\ldots\\
\qquad\qquad\qquad \ldots+\rho_{n-1} r\sin(t+\theta_{n-1})+\rho_n\sin\theta_n]^2\\
\quad = r^{2n}\left[\rho_0^2+\dfrac{2\rho_0\rho_1\cos(t+\theta_0-\theta_1)}{r}\right.\\
\qquad\qquad \left.+\dfrac{\rho_1^2+2\rho_0\rho_2\cos(2t+\theta_0-\theta_2)}{r^2}+\ldots\right].
\end{array}\right. \tag{9}$$

Il résulte de cette dernière formule que la fonction $F(u, v)$, toujours évidemment positive, est le produit de deux facteurs, dont l'un, savoir

$$r^{2n} = (u^2 + v^2)^n,$$

croîtra indéfiniment si l'on attribue aux variables u, v, ou à l'une d'elles seulement, des valeurs numériques de plus en plus grandes, tandis que l'autre facteur convergera dans la même hypothèse vers la limite ρ_0^2, c'est-à-dire vers une limite finie différente de zéro. On en conclura que la fonction $F(u, v)$ ne peut conserver une valeur finie qu'autant que les deux quantités u, v reçoivent elles-mêmes des valeurs de cette espèce, et devient infiniment grande dès que l'une des deux quantités croît indéfiniment. De plus, comme l'équation (4) donne pour $F(u, v)$ une fonction entière, et par conséquent une fonction continue des variables u et v, il est clair que $F(u, v)$, variant avec elles par degrés insensibles, et ne pouvant s'abaisser au-dessous de zéro, atteindra une ou plusieurs fois une certaine limite inférieure qu'elle ne dépassera jamais. Représentons par A cette limite, et par u_0, v_0 un des systèmes de valeurs finies de u et de v, pour lesquels $F(u, v)$ se réduit à A, en sorte qu'on ait identiquement

$$F(u_0, v_0) = A. \tag{10}$$

La différence $F(u, v) - F(u_0, v_0)$ ne s'abaissera jamais au-dessous de zéro; par conséquent, si l'on fait

$$u = u_0 + \alpha h, \qquad v = v_0 + \alpha k, \tag{11}$$

α désignant une quantité infiniment petite, et h, k deux quantités finies, l'expression

$$F(u_0 + \alpha h, v_0 + \alpha k) - F(u_0, v_0)$$

ne sera jamais négative. En partant de ce principe, il sera facile de déterminer la valeur de la constante A, ainsi qu'on va le faire voir.

Si dans l'expression imaginaire $f(u + v\sqrt{-1})$ on substitue pour u et v leurs valeurs données par les formules (11), cette expression,

devenant alors une fonction imaginaire et entière du produit

$$\alpha(h + k\sqrt{-1}),$$

pourra être développée suivant les puissances entières et ascendantes de ce même produit. En désignant par

$$\begin{array}{l} R\,(\cos T + \sqrt{-1}\sin T\,), \\ R_1(\cos T_1 + \sqrt{-1}\sin T_1), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ R_n(\cos T_n + \sqrt{-1}\sin T_n) \end{array}$$

les coefficients imaginaires de ces puissances dont quelques-uns peuvent se réduire à zéro, et faisant, pour plus de commodité,

$$h + k\sqrt{-1} = \rho(\cos\theta + \sqrt{-1}\sin\theta), \tag{12}$$

on obtiendra l'équation

$$\left\{\begin{array}{l} f[u_0 + v_0\sqrt{-1} + \alpha(h + k\sqrt{-1})] \\ \quad = R\,(\cos T + \sqrt{-1}\sin T) \\ \qquad + \alpha R_1 \rho[\cos(T_1 + \theta) + \sqrt{-1}\sin(T_1 + \theta)] + \dots \\ \qquad \dots + \alpha^n R_n \rho^n[\cos(T_n + n\theta) + \sqrt{-1}\sin(T_n + n\theta)], \end{array}\right. \tag{13}$$

dans laquelle les termes du second membre, et par conséquent les modules

$$R, \quad R_1, \quad \dots, \quad R_n,$$

ne sauraient s'évanouir tous en même temps. Comme on aura d'ailleurs

$$\left\{\begin{array}{l} f[u_0 + \alpha h + (v_0 + \alpha k)\sqrt{-1}] \\ \quad = \varphi(u_0 + \alpha h, v_0 + \alpha k) + \sqrt{-1}\,\chi(u_0 + \alpha h, v_0 + \alpha k), \end{array}\right. \tag{14}$$

on conclura de l'équation (13)

$$\left\{\begin{array}{l} \varphi(u_0 + \alpha h, v_0 + \alpha k) \\ \quad = R\cos T + \alpha R_1 \rho\cos(T_1 + \theta) + \dots + \alpha^n R_n \rho^n \cos(T_n + n\theta), \\ \chi(u_0 + \alpha h, v_0 + \alpha k) \\ \quad = R\sin T + \alpha R_1 \rho\sin(T_1 + \theta) + \dots + \alpha^n R_n \rho^n \sin(T_n + n\theta). \end{array}\right. \tag{15}$$

et, par suite,

$$(16)\quad \left\{\begin{aligned} &\mathrm{F}(u_0+\alpha h,\ v_0+\alpha k)\\ &\quad = [\mathrm{R}\cos\mathrm{T}+\alpha\mathrm{R}_1\rho\cos(\mathrm{T}_1+\theta)+\ldots+\alpha^n\mathrm{R}_n\rho^n\cos(\mathrm{T}_n+n\theta)]^2\\ &\quad\quad +[\mathrm{R}\sin\mathrm{T}+\alpha\mathrm{R}_1\rho\sin(\mathrm{T}_1+\theta)+\ldots+\alpha^n\mathrm{R}_n\rho^n\sin(\mathrm{T}_n+n\theta)]^2. \end{aligned}\right.$$

Si dans cette dernière formule on pose $\alpha = 0$, on en tirera

$$\mathrm{F}(u_0, v_0) = \mathrm{R}^2.$$

Donc $\mathrm{R}^2 = \mathrm{A}$, $\mathrm{R} = \mathrm{A}^{\frac{1}{2}}$. Si maintenant on développe le second membre de l'équation (16) suivant les puissances descendantes de R, et que l'on y remplace ensuite R par $\mathrm{A}^{\frac{1}{2}}$, cette équation deviendra

$$(17)\quad \left\{\begin{aligned} &\mathrm{F}(u_0+\alpha h,\ v_0+\alpha k)\\ &\quad = \mathrm{A}+2\mathrm{A}^{\frac{1}{2}}\alpha\rho[\mathrm{R}_1\cos(\mathrm{T}_1-\mathrm{T}+\theta)+\ldots+\alpha^{n-1}\rho^{n-1}\mathrm{R}_n\cos(\mathrm{T}_n-\mathrm{T}+n\theta)]\\ &\quad\quad +\alpha^2\rho^2\big\{\ [\mathrm{R}_1\cos(\mathrm{T}_1+\theta)+\ldots+\alpha^{n-1}\rho^{n-1}\mathrm{R}_n\cos(\mathrm{T}_n+n\theta)]^2\\ &\quad\quad\quad +[\mathrm{R}_1\sin(\mathrm{T}_1+\theta)+\ldots+\alpha^{n-1}\rho^{n-1}\mathrm{R}_n\sin(\mathrm{T}_n+n\theta)]^2\big\}; \end{aligned}\right.$$

et, si l'on fait passer dans le premier membre la quantité $\mathrm{A} = \mathrm{F}(u_0, v_0)$, on trouvera définitivement

$$(18)\quad \left\{\begin{aligned} &\mathrm{F}(u_0+\alpha h,\ v_0+\alpha k)-\mathrm{F}(u_0, v_0)\\ &\quad = 2\mathrm{A}^{\frac{1}{2}}\alpha\rho[\mathrm{R}_1\cos(\mathrm{T}_1-\mathrm{T}+\theta)+\ldots+\alpha^{n-1}\rho^{n-1}\mathrm{R}_n\cos(\mathrm{T}_n-\mathrm{T}+n\theta)]\\ &\quad\quad +\alpha^2\rho^2\big\{\ [\mathrm{R}_1\cos(\mathrm{T}_1+\theta)+\ldots+\alpha^{n-1}\rho^{n-1}\mathrm{R}_n\cos(\mathrm{T}_n+n\theta)]^2\\ &\quad\quad\quad +[\mathrm{R}_1\sin(\mathrm{T}_1+\theta)+\ldots+\alpha^{n-1}\rho^{n-1}\mathrm{R}_n\sin(\mathrm{T}_n+n\theta)]^2\big\}. \end{aligned}\right.$$

Cela posé, puisque la différence

$$\mathrm{F}(u_0+\alpha h,\ v_0+\alpha k)-\mathrm{F}(u_0, v_0)$$

ne doit jamais s'abaisser au-dessous de la limite zéro, il faudra de toute nécessité que, pour de très petites valeurs numériques de α, le second membre de l'équation précédente, et par suite le premier terme de ce second membre, c'est-à-dire le terme qui renferme la plus petite puissance de α, ne puisse devenir négatif. Or, en désignant par R_m la première des quantités

$$\mathrm{R}_1,\quad \mathrm{R}_2,\quad \ldots,\quad \mathrm{R}_n$$

qui obtient une valeur différente de zéro, on trouvera, pour le terme dont il s'agit,

$$2\mathrm{A}^{\frac{1}{2}}\alpha^m\rho^m\mathrm{R}_m\cos(\mathrm{T}_m-\mathrm{T}+m\theta),$$

si A n'est pas nul, et

$$\alpha^{2m}\rho^{2m}\mathrm{R}_m^2$$

dans l'hypothèse contraire. De plus, comme, la valeur de l'arc θ étant tout à fait indéterminée, on peut en disposer de manière à donner au facteur

$$\cos(\mathrm{T}_m-\mathrm{T}+m\theta),$$

et par conséquent au produit

$$2\mathrm{A}^{\frac{1}{2}}\alpha^m\rho^m\mathrm{R}_m\cos(\mathrm{T}_m-\mathrm{T}+m\theta),$$

tel signe que l'on voudra, il est clair que la seconde hypothèse reste seule admissible. On aura donc nécessairement

$$(19)\qquad \mathrm{A} = 0,$$

ce qui réduira l'équation (10) à

$$(20)\qquad \mathrm{F}(u_0, v_0) = 0.$$

Il en résulte que la fonction $\mathrm{F}(u, v)$ s'évanouira si l'on attribue aux variables u, v les valeurs réelles u_0, v_0; et, par suite, que l'on vérifiera l'équation

$$(1)\qquad f(x) = 0$$

en prenant

$$x = u_0 + v_0\sqrt{-1}.$$

En d'autres termes, $u_0 + v_0\sqrt{-1}$ sera une racine de l'équation

$$(1)\qquad a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n = 0.$$

La démonstration précédente du théorème I, quoique différente en plusieurs points de celle qu'en a donnée M. Legendre (*Théorie des Nombres*, Ire Partie, § XIV), est fondée sur les mêmes principes.

Corollaire. — Le polynôme

$$f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_{n-1} x + a_n,$$

s'évanouissant, ainsi qu'on vient de le dire, pour

$$x = u_0 + v_0\sqrt{-1},$$

sera, en vertu du théorème I (Chapitre VIII, § IV), algébriquement divisible par le facteur

$$x - u_0 - v_0\sqrt{-1}.$$

Le quotient, ne pouvant être qu'un nouveau polynôme du degré $n-1$ par rapport à x, sera encore nécessairement divisible par un nouveau facteur de même forme que le précédent, c'est-à-dire du premier degré par rapport à x. Désignons par

$$x - u_1 - v_1\sqrt{-1}$$

ce nouveau facteur. Le polynôme $f(x)$ sera équivalent au produit des deux facteurs

$$x - u_0 - v_0\sqrt{-1}, \quad x - u_1 - v_1\sqrt{-1}$$

par un troisième polynôme du degré $n-2$. On prouvera que ce troisième polynôme est divisible par un troisième facteur semblable aux deux autres; et, en continuant à opérer de la même manière, on finira par obtenir n facteurs linéaires du polynôme $f(x)$. Soient respectivement

$$x - u_0 - v_0\sqrt{-1}, \quad x - u_1 - v_1\sqrt{-1}, \quad \ldots, \quad x - u_{n-1} - v_{n-1}\sqrt{-1}$$

ces mêmes facteurs. En divisant le polynôme $f(x)$ par leur produit, on trouvera pour quotient une constante évidemment égale au coefficient a_0 de la plus haute puissance de x dans $f(x)$. On aura, en conséquence,

$$(21)\quad f(x) = a_0(x - u_0 - v_0\sqrt{-1})(x - u_1 - v_1\sqrt{-1})\ldots(x - u_{n-1} - v_{n-1}\sqrt{-1}).$$

Cette dernière équation renferme un théorème que l'on peut énoncer ainsi qu'il suit :

Théorème II. — *Quelles que soient les valeurs réelles ou imaginaires des constantes $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n$, le polynôme*

$$a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_{n-1} x + a_n = f(x)$$

sera équivalent au produit de la constante a_0 par n facteurs linéaires de la forme

$$x - \alpha - 6\sqrt{-1}.$$

Déterminer les facteurs dont il est ici question, c'est ce qu'on appelle *décomposer* le polynôme $f(x)$ en ses facteurs linéaires. Il n'y a qu'une seule manière d'effectuer cette décomposition. Pour le démontrer, supposons que deux méthodes différentes aient fourni les deux équations

$$(22)\quad \begin{cases} f(x) = a_0(x - u_0 - v_0\sqrt{-1})(x - u_1 - v_1\sqrt{-1})\ldots(x - u_{n-1} - v_{n-1}\sqrt{-1}), \\ f(x) = a_0(x - \alpha_0 - 6_0\sqrt{-1})(x - \alpha_1 - 6_1\sqrt{-1})\ldots(x - a_{n-1} - 6_{n-1}\sqrt{-1}). \end{cases}$$

On en tirera

$$(23)\quad \begin{cases} (x - \alpha_0 - 6_0\sqrt{-1})(x - \alpha_1 - 6_1\sqrt{-1})\ldots(x - \alpha_{n-1} - 6_{n-1}\sqrt{-1}) \\ = (x - u_0 - v_0\sqrt{-1})(x - u_1 - v_1\sqrt{-1})\ldots(x - u_{n-1} - v_{n-1}\sqrt{-1}). \end{cases}$$

Le dernier membre de la formule précédente s'évanouissant lorsqu'on attribue à la variable x la valeur particulière $u_0 + v_0\sqrt{-1}$, il faudra de toute nécessité que, pour cette même valeur de x, le premier membre, et par conséquent l'un de ses facteurs (*voir* le Chapitre VII, § II, théorème VII, corollaire II), se réduise à zéro. Soit

$$x - \alpha_0 - 6_0\sqrt{-1}$$

le facteur dont il s'agit. On aura identiquement

$$\alpha_0 + 6_0\sqrt{-1} = u_0 + v_0\sqrt{-1}$$

et, par suite,

$$x - \alpha_0 - 6_0\sqrt{-1} = x - u_0 - v_0\sqrt{-1}.$$

Cela posé, la formule (23) pourra être remplacée par la suivante :

$$\begin{aligned}&(x-\alpha_1-\beta_1\sqrt{-1})\ldots(x-\alpha_{n-1}-\beta_{n-1}\sqrt{-1})\\ &=(x-u_1-v_1\sqrt{-1})\ldots(x-u_{n-1}-v_{n-1}\sqrt{-1}).\end{aligned}$$

Le second membre de celle-ci s'évanouissant lorsqu'on suppose

$$x=u_1+v_1\sqrt{-1},$$

l'un des facteurs du premier membre, par exemple,

$$x-\alpha_1-\beta_1\sqrt{-1},$$

devra s'évanouir dans la même hypothèse, ce qui entraînera deux nouvelles équations identiques de la forme

$$\begin{aligned}\alpha_1+\beta_1\sqrt{-1}&=u_1+v_1\sqrt{-1},\\ x-\alpha_1-\beta_1\sqrt{-1}&=x-u_1-v_1\sqrt{-1}.\end{aligned}$$

En répétant plusieurs fois le même raisonnement, on prouvera que les différents facteurs linéaires dont se composent les seconds membres des équations (22) sont absolument les mêmes dans l'une et l'autre équation. Il est essentiel d'ajouter que chaque facteur imaginaire de la forme

$$x-\alpha-\beta\sqrt{-1}$$

se change en un facteur réel $x-\alpha$, toutes les fois que la quantité β se réduit à zéro.

Le premier membre de l'équation (1), étant, d'après ce qu'on vient de dire, décomposable d'une seule manière en facteurs linéaires, ne peut s'évanouir qu'avec l'un de ces facteurs. Si donc on les égale successivement à zéro, on obtiendra toutes les valeurs possibles de x propres à vérifier l'équation (1), c'est-à-dire toutes les racines de cette équation. Le nombre de ces racines, comme celui des facteurs linéaires, sera égal à n. De plus, à chaque facteur réel de la forme $x-\alpha$ correspondra une racine réelle α, et à chaque facteur imaginaire de la forme

$$x-\alpha-\beta\sqrt{-1}$$

une racine imaginaire

$$\alpha+\beta\sqrt{-1}.$$

Ces remarques suffisent pour établir la proposition suivante :

Théorème III. — *Quelles que soient les valeurs réelles ou les valeurs imaginaires des constantes $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n$, l'équation*

$$a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_{n-1}x+a_n=0 \tag{1}$$

a toujours n racines réelles ou imaginaires, et n'en saurait avoir un plus grand nombre.

Il peut arriver que plusieurs des racines de l'équation (1) soient égales entre elles. Dans ce cas, le nombre des valeurs différentes de la variable propres à vérifier cette même équation devient nécessairement inférieur à n. Ainsi, par exemple, l'équation du second degré

$$x^2-2ax+a^2=0$$

ayant ses deux racines égales, on ne pourra y satisfaire que par une seule valeur de x, savoir

$$x=a.$$

Lorsque les constantes $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n$ sont toutes réelles, l'expression imaginaire

$$\alpha+\beta\sqrt{-1}$$

ne peut évidemment être une racine de l'équation (1), sans que l'expression conjuguée

$$\alpha-\beta\sqrt{-1}$$

soit une autre racine de la même équation. Par conséquent, dans cette hypothèse, les facteurs imaginaires et linéaires du polynôme qui forme le premier membre de l'équation (1) sont deux à deux conjugués et de la forme

$$x-\alpha-\beta\sqrt{-1},\quad x-\alpha+\sqrt{-1}.$$

Le produit de deux semblables facteurs étant un polynôme réel du second degré, savoir

$$(x-\alpha)^2+\beta^2,$$

on déduit immédiatement de l'observation qu'on vient de faire le théorème suivant :

Théorème IV. — *Lorsque $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n$ désignent des constantes réelles, le polynôme*

$$a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_{n-1} x + a_n \tag{24}$$

est décomposable en facteurs réels du premier ou du second degré.

Dans ce qui précède, nous avons présenté les racines imaginaires de l'équation (1) sous la forme

$$\alpha \pm 6\sqrt{-1}.$$

Alors, pour le polynôme (24), un facteur réel du second degré correspondant à deux racines imaginaires conjuguées

$$\alpha + 6\sqrt{-1}, \quad \alpha - 6\sqrt{-1}$$

était de la forme

$$(x-\alpha)^2 + 6^2.$$

Si l'on fait, pour plus de commodité,

$$\alpha \pm 6\sqrt{-1} = \rho(\cos\theta \pm \sqrt{-1}\sin\theta)$$

(ρ désignant une quantité positive et θ un angle que l'on pourra supposer compris entre les limites $0, \pi$), le même facteur réel du second degré deviendra

$$(x - \rho\cos\theta)^2 + (\rho\sin\theta)^2 = x^2 - 2\rho x\cos\theta + \rho^2.$$

Il est facile de construire géométriquement cette dernière expression dans le cas où l'on attribue à la variable x une valeur réelle. En effet, si l'on trace un triangle dans lequel un angle soit égal à θ, les deux côtés adjacents étant respectivement représentés l'un par la valeur numérique de x, l'autre par le module ρ, le carré du troisième côté sera (d'après un théorème connu de Trigonométrie) la valeur du trinôme

$$x^2 - 2\rho x\cos\theta + \rho^2,$$

toutes les fois que la variable x sera positive. Si la variable x devient négative, il suffira de remplacer dans la construction indiquée l'angle θ par son supplément.

Le troisième côté du triangle dont il est ici question ne peut s'évanouir que dans le cas où les deux premiers côtés tombent sur une même droite, et où leurs extrémités coïncident, ce qui exige : 1° que l'angle θ se réduise à zéro ou à π; 2° que la valeur numérique de x soit égale à ρ. Par suite, le facteur

$$x^2 - 2\rho x\cos\theta + \rho^2$$

ne pourra devenir nul pour une valeur réelle de x, à moins que l'on ne suppose

$$\cos\theta = 1 \quad \text{ou} \quad \cos\theta = -1;$$

et la seule valeur de x propre à faire évanouir ce facteur sera, dans la première hypothèse,

$$x = \rho,$$

dans la seconde,

$$x = -\rho.$$

On arriverait directement au même but en observant que l'équation

$$x^2 - 2\rho x\cos\theta + \rho^2 = 0$$

a deux racines

$$\rho(\cos\theta + \sqrt{-1}\sin\theta), \quad \rho(\cos\theta - \sqrt{-1}\sin\theta),$$

qui ne peuvent cesser d'être imaginaires sans devenir égales, et que les seules valeurs de θ capables de produire cet effet sont celles qui vérifient la formule

$$\sin\theta = 0,$$

de laquelle on tire

$$\cos\theta = \pm 1$$

et, par conséquent,

$$x = \pm\rho$$

pour la valeur commune des deux racines.

Jusqu'à présent, nous nous sommes bornés à déterminer le nombre des racines de l'équation (1), avec la forme de ces mêmes racines et celle des facteurs qui leur correspondent. Nous allons, dans les paragraphes suivants, passer en revue quelques cas particuliers dans lesquels on est parvenu à résoudre de semblables équations, sans être obligé de concevoir leurs coefficients convertis en nombres, et à exprimer les racines en fonctions algébriques ou trigonométriques de ces coefficients. Nous observerons ici à ce sujet que, dans toute équation algébrique dont le premier membre est une fonction rationnelle et entière de la variable x, on peut réduire par la division le coefficient de la plus haute puissance de x à l'unité, et celui de la puissance immédiatement inférieure à zéro par un changement de variable. En effet, si dans l'équation

$$a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_{n-1} x + a_n = 0$$

a_0 n'est pas égal à 1, il suffira de diviser l'équation par a_0 pour réduire le coefficient de x^n à l'unité; et, si dans une équation mise sous la forme

$$x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_{n-1} x + a_n = 0$$

a_1 n'est pas nul, il suffira de poser

$$x = z - \frac{a_1}{n}$$

pour obtenir une transformée en z du degré n, qui n'ait plus de second terme, c'est-à-dire une transformée dans laquelle le coefficient de z^{n-1} s'évanouisse.

§ II. — *Résolution algébrique ou trigonométrique des équations binômes et de quelques équations trinômes. Théorèmes de* Moivre *et de* Cotes.

Considérons l'équation binôme

$$x^n + p = 0, \tag{1}$$

p désignant une quantité constante. On en tirera

$$x^n = -p$$

ou, si l'on désigne par ρ la valeur numérique de p,

$$x^n = \pm \rho.$$

On aura donc à résoudre l'équation

$$x^n = \rho, \tag{2}$$

si $-p$ est positif, et la suivante

$$x^n = -\rho, \tag{3}$$

si $-p$ est négatif. On satisfait à la première en prenant

$$x = ((\rho))^{\frac{1}{n}} = \rho^{\frac{1}{n}} ((1))^{\frac{1}{n}}, \tag{4}$$

et à la seconde en prenant

$$x = ((-\rho))^{\frac{1}{n}} = \rho^{\frac{1}{n}} ((-1))^{\frac{1}{n}}. \tag{5}$$

Quant aux diverses valeurs de chacune des deux expressions $((1))^{\frac{1}{n}}$, $((-1))^{\frac{1}{n}}$, elles sont toujours en nombre égal à n (*voir* le Chapitre VII, § III), et se déduisent des deux formules

$$\left\{\begin{aligned} ((1))^{\frac{1}{n}} &= \cos\frac{2k\pi}{n} \pm \sqrt{-1}\sin\frac{2k\pi}{n}, \\ ((-1))^{\frac{1}{n}} &= \cos\frac{(2k+1)\pi}{n} \pm \sqrt{-1}\sin\frac{(2k+1)\pi}{n}, \end{aligned}\right. \tag{6}$$

dans lesquelles il suffit d'attribuer successivement à k toutes les valeurs entières qui ne surpassent pas $\frac{n}{2}$. Lorsque n est un nombre pair, la première des équations (6) fournit deux valeurs réelles de $((1))^{\frac{1}{n}}$, savoir $+1$ et -1, correspondantes l'une à $k = 0$, l'autre à $k = \frac{n}{2}$. Dans la même hypothèse, toutes les valeurs de $((-1))^{\frac{1}{n}}$ sont imaginaires. Lorsque n devient un nombre impair, l'expression $((1))^{\frac{1}{n}}$ a une seule valeur réelle $+1$ correspondante à $k = 0$, et l'expression $((-1))^{\frac{1}{n}}$ une seule valeur réelle -1 correspondante à $k=\frac{n-1}{2}$. Par suite, l'équation (1) admet deux racines réelles, ou n'en admet aucune, lorsque n est un nombre pair, et la même équation admet une seule racine réelle dans le cas contraire. De plus, on reconnaît immédiatement à l'inspection des formules (6) que les racines imaginaires sont conjuguées deux à deux, ainsi qu'on devait s'y attendre.

Considérons maintenant l'équation trinôme

$$x^{2n}+px^n+q=0, \tag{7}$$

p, q désignant deux quantités constantes choisies à volonté. On en tirera

$$x^{2n}+px^n=-q$$

et, par suite,

$$\left(x^n+\frac{p}{2}\right)^2=\frac{p^2}{4}-q. \tag{8}$$

Si $\frac{p^2}{4}-q$ est positif, l'équation qui précède entraînera l'une des deux suivantes :

$$x^n+\frac{p}{2}=+\sqrt{\frac{p^2}{4}-q},$$

$$x^n+\frac{p}{2}=-\sqrt{\frac{p^2}{4}-q};$$

en sorte que x^n admettra deux valeurs réelles comprises dans la formule

$$x^n=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}. \tag{9}$$

Lorsque le nombre n se réduit à l'unité, la formule (9) fournit immédiatement les deux racines réelles de l'équation trinôme du second degré

$$x^2+px+q=0. \tag{10}$$

Dans le cas contraire, en substituant la formule dont il s'agit à l'équation (7), on n'a plus à résoudre que deux équations binômes semblables à celles que nous avons traitées ci-dessus.

Supposons maintenant la quantité $\frac{p^2}{4}-q$ négative. L'équation (8) entraînera l'une des deux suivantes :

$$x^n+\frac{p}{2}=+\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}\sqrt{-1},$$

$$x^n+\frac{p}{2}=-\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}\sqrt{-1};$$

en sorte que x^n admettra deux valeurs imaginaires comprises dans la formule

$$x^n=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}\sqrt{-1}. \tag{11}$$

Si le nombre n se réduit à l'unité, ces valeurs seront les racines imaginaires de l'équation (10). Mais, si l'on suppose $n>1$, il restera encore à déduire des valeurs connues de x^n les valeurs de x. Désignons par ρ, dans cette hypothèse, le module de l'expression imaginaire qui sert de second membre à la formule (11). On aura évidemment

$$\rho=q^{\frac{1}{2}}. \tag{12}$$

Faisons en outre, pour plus de commodité,

$$\zeta=\operatorname{arc\,tang}\frac{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}}{-\frac{p}{2}}. \tag{13}$$

Lorsque p sera négatif, les deux valeurs de x^n données par la formule (11) deviendront

$$x^n=\rho(\cos\zeta\pm\sqrt{-1}\sin\zeta), \tag{14}$$

et l'on en conclura

$$x=\rho^{\frac{1}{n}}\left(\cos\frac{\zeta}{n}\pm\sqrt{-1}\sin\frac{\zeta}{n}\right)((1))^{\frac{1}{n}}. \tag{15}$$

Si au contraire p est positif, on trouvera

$$x^n = -\rho\left(\cos\zeta \pm \sqrt{-1}\sin\zeta\right) \tag{16}$$

et, par suite,

$$x = \rho^{\frac{1}{n}}\left(\cos\frac{\zeta}{n} \pm \sqrt{-1}\sin\frac{\zeta}{n}\right)((-1))^{\frac{1}{n}}. \tag{17}$$

Dans le cas particulier où l'on a

$$\frac{p^2}{4} - q = 0,$$

ζ devient nul; en sorte que les équations (15) et (17) prennent la forme des équations (4) et (5).

Si l'on désigne, pour abréger, $\rho^{\frac{1}{n}}$ par r, on tirera des équations (12) et (13), en supposant la quantité p négative,

$$p = -2r^n\cos\zeta, \qquad q = r^{2n},$$
$$x^{2n} + px^n + q = x^{2n} - 2r^n x^n\cos\zeta + r^{2n}.$$

Dans la même hypothèse, la formule (15) donnera

$$x = r\left(\cos\frac{\zeta}{n} \pm \sqrt{-1}\sin\frac{\zeta}{n}\right)\left(\cos\frac{2k\pi}{n} \pm \sqrt{-1}\sin\frac{2k\pi}{n}\right)$$
$$= r\left(\cos\frac{\zeta \pm 2k\pi}{n} \pm \sqrt{-1}\sin\frac{\zeta \pm 2k\pi}{n}\right),$$

k représentant un nombre entier, et l'on en conclura que le trinôme

$$x^{2n} - 2r^n x^n\cos\zeta + r^{2n}$$

est décomposable en facteurs réels du second degré de la forme

$$x^2 - 2rx\cos\frac{\zeta \pm 2k\pi}{n} + r^2.$$

Si l'on suppose au contraire la quantité p positive, le trinôme

$$x^{2n} + px^n + q$$

deviendra

$$x^{2n} + 2r^n x^n\cos\zeta + r^{2n},$$

et ses facteurs réels du second degré seront de la forme

$$x^2 - 2rx\cos\frac{\zeta \pm (2k+1)\pi}{n} + r^2.$$

Dans l'une et l'autre hypothèse, on pourra construire géométriquement les facteurs réels du second degré par la méthode ci-dessus indiquée (*voir* le § I), toutes les fois que l'on attribuera des valeurs réelles à la variable x. Si l'on prend la valeur numérique de cette variable pour base commune de tous les triangles qui correspondent aux différents facteurs, et que dans chaque triangle on fasse aboutir constamment à une même extrémité de cette base le côté connu, représenté par r, on trouvera que les sommets des divers triangles coïncident avec les points de division d'une circonférence décrite du rayon r en parties égales. Il en résulte que, *si l'on multiplie entre eux les carrés des lignes menées de la seconde extrémité de la base aux points dont il s'agit, le produit de ces carrés sera la valeur du trinôme*

$$x^{2n} + px^n + q = x^{2n} \pm 2r^n x^n\cos\zeta + r^{2n}.$$

Dans le cas particulier où $\zeta = 0$, *le produit des lignes elles-mêmes représente la valeur numérique du binôme*

$$x^n \pm r^n,$$

laquelle se confond avec la racine carrée positive du trinôme

$$x^{2n} \pm 2r^n x^n + r^{2n}.$$

Des deux propositions qu'on vient d'énoncer, la première est le théorème de *Moivre*, et la seconde celui de *Cotes*.

§ III. — *Résolution algébrique ou trigonométrique des équations du troisième et du quatrième degré.*

Considérons l'équation générale du troisième degré. On pourra toujours, en faisant disparaître le second terme de cette équation, la ramener à la forme

$$x^3 + px + q = 0, \tag{1}$$

p, q désignant deux quantités constantes. D'ailleurs, si l'on pose

$$x = u + v,$$

u, v étant deux nouvelles variables, on en conclura

$$x^3 = (u+v)^3 = u^3 + v^3 + 3uvx,$$

$$x^3 - 3uvx - (u^3 + v^3) = 0. \tag{2}$$

Pour rendre l'équation (2) identique avec la proposée, il suffira d'assujettir les inconnues u et v aux deux conditions

$$u^3 + v^3 = -q, \tag{3}$$

$$uv = -\frac{p}{3}. \tag{4}$$

La résolution de l'équation (1) se trouve ainsi réduite à la résolution simultanée des équations (3) et (4).

Cherchons d'abord les valeurs de u^3 et de v^3. Si l'on fait

$$u^3 = z_1, \qquad v^3 = z_2, \tag{5}$$

on aura, en vertu des équations (3) et (4),

$$z_1 + z_2 = -q, \qquad z_1 z_2 = -\frac{p^3}{27};$$

et, par suite, en nommant z une nouvelle variable,

$$(z - z_1)(z - z_2) = z^2 + qz - \frac{p^3}{27}.$$

Il en résulte que z_1, z_2 seront les deux racines de l'équation

$$z^2 + qz - \frac{p^3}{27} = 0. \tag{6}$$

Ces deux racines étant connues, on déduira des formules (5) trois valeurs de u et trois valeurs de v, qui se correspondront deux à deux

de manière à vérifier la formule (4). Soit U l'une quelconque des trois valeurs de u, et V la valeur correspondante de v, en sorte qu'on ait

$$\mathrm{UV} = -\frac{p}{3}.$$

Désignons en outre par α l'expression imaginaire

$$\cos\frac{2\pi}{3} + \sqrt{-1}\sin\frac{2\pi}{3};$$

les trois valeurs de l'expression $((1))^{\frac{1}{3}}$ seront respectivement

$$\alpha^0 = 1,$$

$$\alpha = \cos\frac{2\pi}{3} + \sqrt{-1}\sin\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} + \frac{3^{\frac{1}{2}}}{2}\sqrt{-1},$$

$$\alpha^2 = \cos\frac{2\pi}{3} - \sqrt{-1}\sin\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} - \frac{3^{\frac{1}{2}}}{2}\sqrt{-1},$$

et les trois valeurs de u, évidemment comprises dans la formule générale $((1))^{\frac{1}{3}}\mathrm{U}$, deviendront

$$\mathrm{U}, \quad \alpha\mathrm{U}, \quad \alpha^2\mathrm{U}.$$

On trouvera, pour les valeurs correspondantes de v,

$$\mathrm{V}, \quad \frac{\mathrm{V}}{\alpha}, \quad \frac{\mathrm{V}}{\alpha^2},$$

ou, ce qui revient au même,

$$\mathrm{V}, \quad \alpha^2\mathrm{V}, \quad \alpha\mathrm{V}.$$

Par conséquent, si l'on nomme x_0, x_1, x_2 les trois racines de l'équation (1), on aura

$$\left\{\begin{aligned} x_0 &= \mathrm{U} + \mathrm{V}, \\ x_1 &= \alpha\,\mathrm{U} + \alpha^2\mathrm{V}, \\ x_2 &= \alpha^2\mathrm{U} + \alpha\,\mathrm{V}. \end{aligned}\right. \tag{7}$$

Il est essentiel d'observer que, U, αU, α^2U étant les trois valeurs de

$u = ((z_1))^{\frac{1}{3}}$, et V, α^2V, αV les valeurs correspondantes de $v = -\frac{p}{3((z_1))^{\frac{1}{3}}}$, les racines x_0, x_1, x_2, déterminées par les équations (7), seront respectivement égales aux trois valeurs de x données par la formule

$$x = ((z_1))^{\frac{1}{3}} - \frac{p}{3((z_1))^{\frac{1}{3}}}. \tag{8}$$

Lorsque l'équation (6) a ses racines réelles, les formules (5) fournissent un système de valeurs réelles de u et de v qui se correspondent de manière à vérifier l'équation (4). Si l'on prend ces mêmes valeurs pour U et V, on reconnaîtra immédiatement que des trois racines x_0, x_1, x_2 la première est nécessairement réelle, et les deux autres réelles ou imaginaires, suivant que la quantité

$$\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}$$

est nulle ou positive, c'est-à-dire suivant que l'équation (6) a ses racines égales ou inégales. Dans le premier cas, on trouve

$$x_0 = 2\mathrm{U}, \qquad x_1 = x_2 = -\mathrm{U}.$$

Lorsque les racines de l'équation (6) deviennent imaginaires, on peut les présenter sous la forme

$$z_1 = \rho(\cos\theta + \sqrt{-1}\sin\theta), \qquad z_2 = \rho(\cos\theta - \sqrt{-1}\sin\theta),$$

le module ρ étant déterminé par l'équation

$$\rho^2 = -\frac{p^3}{27}.$$

Comme on a, dans cette hypothèse,

$$((z_1))^{\frac{1}{3}} = \rho^{\frac{1}{3}}\left(\cos\frac{\theta}{3} + \sqrt{-1}\sin\frac{\theta}{3}\right)((1))^{\frac{1}{3}},$$

la formule (8) se trouve réduite à

$$x = \rho^{\frac{1}{3}}\left[\left(\cos\frac{\theta}{3} + \sqrt{-1}\sin\frac{\theta}{3}\right)((1))^{\frac{1}{3}} + \left(\cos\frac{\theta}{3} - \sqrt{-1}\sin\frac{\theta}{3}\right)\frac{1}{((1))^{\frac{1}{3}}}\right]. \tag{9}$$

De plus, en prenant pour U l'expression imaginaire

$$\rho^{\frac{1}{3}}\left(\cos\frac{\theta}{3} + \sqrt{-1}\sin\frac{\theta}{3}\right),$$

on conclura des équations (7)

$$\left\{\begin{aligned} x_0 &= 2\rho^{\frac{1}{3}}\cos\frac{\theta}{3}, \\ x_1 &= 2\rho^{\frac{1}{3}}\cos\frac{\theta+2\pi}{3}, \\ x_2 &= 2\rho^{\frac{1}{3}}\cos\frac{\theta-2\pi}{3}. \end{aligned}\right. \tag{10}$$

Ces trois dernières valeurs de x sont toutes réelles, et coïncident avec celles que fournit la formule (9).

Dans les calculs précédents, l'équation (6), dont la solution entraîne celle de l'équation (1), est ce qu'on appelle la *réduite*. Ses racines z_1, z_2 équivalent nécessairement à certaines fonctions des racines cherchées x_0, x_1, x_2. Pour déterminer ces fonctions, il suffira d'observer que, U et V désignant des valeurs particulières de u et v, on aura, en vertu des formules (5),

$$z_1 = \mathrm{U}^3, \qquad z_2 = \mathrm{V}^3.$$

On tire d'ailleurs des équations (7)

$$3\mathrm{U} = x_0 + \alpha x_2 + \alpha^2 x_1 = \alpha(x_2 + \alpha x_1 + \alpha^2 x_0) = \alpha^2(x_1 + \alpha x_0 + \alpha^2 x_2),$$
$$3\mathrm{V} = x_0 + \alpha x_1 + \alpha^2 x_2 = \alpha(x_1 + \alpha x_2 + \alpha^2 x_0) = \alpha^2(x_2 + \alpha x_0 + \alpha^2 x_1).$$

On trouvera donc, par suite,

$$\left\{\begin{aligned} 27 z_1 &= (x_0 + \alpha x_2 + \alpha^2 x_1)^3 = (x_2 + \alpha x_1 + \alpha^2 x_0)^3 = (x_1 + \alpha x_0 + \alpha^2 x_2)^3, \\ 27 z_2 &= (x_0 + \alpha x_1 + \alpha^2 x_2)^3 = (x_1 + \alpha x_2 + \alpha^2 x_0)^3 = (x_2 + \alpha x_0 + \alpha^2 x_1)^3. \end{aligned}\right. \tag{11}$$

Il en résulte que z_1, z_2 sont respectivement égales (à un coefficient numérique près) aux deux seules valeurs distinctes que présente le cube de la fonction linéaire

$$x_0 + \alpha x_1 + \alpha^2 x_2,$$

lorsque dans cette fonction on échange entre elles les racines x_0, x_1, x_2 de toutes les manières possibles. Le coefficient numérique est évidemment $\frac{1}{27}$ ou le cube de la fraction $\frac{1}{3}$.

Considérons maintenant l'équation générale du quatrième degré. On pourra, en faisant disparaître le second terme, la ramener à la forme

$$x^4 + px^2 + qx + r = 0, \tag{12}$$

p, q, r désignant des quantités constantes. Si l'on pose, en outre,

$$x = u + v + w,$$

u, v, w étant trois nouvelles variables, on en conclura

$$x^2 = u^2 + v^2 + w^2 + 2(uv + uw + vw)$$

et, par suite,

$$[x^2 - (u^2 + v^2 + w^2)]^2 = 4(u^2v^2 + u^2w^2 + v^2w^2) + 8uvw.x$$

ou, ce qui revient au même,

$$\left\{\begin{aligned} &x^4 - 2(u^2 + v^2 + w^2)x^2 - 8uvw.x \\ &\quad + (u^2 + v^2 + w^2)^2 - 4(u^2v^2 + u^2w^2 + v^2w^2) = 0. \end{aligned}\right. \tag{13}$$

Pour rendre cette dernière équation identique avec la proposée, il suffira d'assujettir les inconnues u, v, w aux conditions

$$\left\{\begin{aligned} 4(u^2 + v^2 + w^2) &= -2p, \\ 8uvw &= -q, \\ 16(u^2v^2 + u^2w^2 + v^2w^2) &= p^2 - 4r. \end{aligned}\right. \tag{14}$$

La résolution de l'équation (12) se trouve ainsi réduite à la résolution simultanée des équations (14).

Cherchons d'abord les valeurs de $4u^2$, $4v^2$, $4w^2$. Si l'on fait

$$4u^2 = z_1, \quad 4v^2 = z_2, \quad 4w^2 = z_3, \tag{15}$$

on aura, en vertu des formules (14),

$$z_1 + z_2 + z_3 = -2p, \qquad z_1z_2 + z_1z_3 + z_2z_3 = p^2 - 4r, \qquad z_1z_2z_3 = q^2;$$

et, par suite, en nommant z une nouvelle variable,

$$(z - z_1)(z - z_2)(z - z_3) = z^3 + 2pz^2 + (p^2 - 4r)z - q^2.$$

Il en résulte que z_1, z_2, z_3 seront les trois racines de l'équation

$$z^3 + 2pz^2 + (p^2 - 4r)z - q^2 = 0; \tag{16}$$

et, puisque ces trois racines doivent vérifier la formule $z_1z_2z_3 = q^2$, on peut assurer que l'une d'elles sera positive, les deux autres étant toutes deux à la fois positives, ou négatives, ou imaginaires. Lorsqu'on aura déterminé ces mêmes racines, les deux premières des équations (15) fourniront pour chacune des variables u et v deux valeurs égales, au signe près. Soient

$$u = \pm U, \qquad v = \pm V$$

les valeurs réelles ou imaginaires dont il s'agit; et W une quantité réelle ou une expression imaginaire déterminée par l'équation

$$8UVW = -q.$$

Si dans la seconde des formules (14) on suppose

$$u = +U, \qquad v = +V$$

ou bien

$$u = -U, \qquad v = -V,$$

on en tirera

$$w = +W.$$

Si l'on y fait, au contraire,

$$u = +U, \qquad v = -V$$

ou bien

$$u = -U, \qquad w = +V,$$

on trouvera

$$u = -W.$$

De cette manière on obtiendra pour les variables u, v, w quatre systèmes de valeurs propres à vérifier les équations (14); et, si l'on représente par x_0, x_1, x_2, x_3 les quatre valeurs correspondantes de l'inconnue

$$x = u + v + w,$$

on aura

$$(17)\qquad \begin{cases} x_0 = U + V + W, \\ x_1 = -U - V + W, \\ x_2 = U - V - W, \\ x_3 = -U + V - W. \end{cases}$$

Il est aisé de reconnaître que ces quatre valeurs de x seront toutes réelles, si l'équation (16) a ses trois racines positives, et toutes imaginaires, si l'équation (16) a deux racines négatives inégales, tandis que deux valeurs seront réelles, et deux imaginaires, si l'équation (16) a deux racines négatives égales, ou deux racines imaginaires.

Par la méthode qu'on vient d'exposer, la résolution de l'équation (12) se trouve ramenée à celle de l'équation (16). Cette dernière, qu'on nomme la *réduite*, a nécessairement pour racines certaines fonctions des racines de la proposée. Si l'on veut déterminer ces fonctions, c'est-à-dire exprimer z_1, z_2, z_3 par le moyen de x_0, x_1, x_2, x_3, il suffira d'observer que, U, V, W étant des valeurs particulières de u, v, w, on a, en vertu des formules (15),

$$z_1 = 4U^2, \qquad z_2 = 4V^2, \qquad z_3 = 4W^2.$$

On tire d'ailleurs des équations (17)

$$\begin{aligned} 4U &= x_0 - x_1 + x_2 - x_3, \\ 4V &= x_0 - x_1 + x_3 - x_2, \\ 4W &= x_0 - x_2 + x_1 - x_3. \end{aligned}$$

On trouvera, en conséquence,

$$(18)\qquad \begin{cases} 4z_1 = (x_0 - x_1 + x_2 - x_3)^2 = (x_1 - x_0 + x_3 - x_2)^2, \\ 4z_2 = (x_0 - x_1 + x_3 - x_2)^2 = (x_1 - x_0 + x_2 - x_3)^2, \\ 4z_3 = (x_0 - x_2 + x_1 - x_3)^2 = (x_2 - x_0 + x_3 - x_1)^2. \end{cases}$$

Il en résulte que z_1, z_2, z_3 sont, abstraction faite du coefficient numérique $\frac{1}{4} = \left(\frac{1}{2}\right)^2$, respectivement égales aux trois seules valeurs distinctes que présente le carré de la fonction linéaire

$$x_0 - x_1 + x_2 - x_3$$

lorsque dans cette fonction on échange entre elles les racines x_0, x_1, x_2, x_3 de toutes les manières possibles. Cette même fonction linéaire, pouvant s'écrire ainsi qu'il suit

$$x_0 + (-1)x_1 + (-1)^2 x_2 + (-1)^3 x_3,$$

n'est évidemment qu'un cas particulier de la formule générale

$$x_0 + \alpha x_1 + \alpha^2 x_2 + \alpha^3 x_3,$$

lorsqu'on désigne par α une des valeurs de l'expression $((1))^{\frac{1}{4}}$.

CHAPITRE XI.

DÉCOMPOSITION DES FRACTIONS RATIONNELLES.

§ I. — *Décomposition d'une fraction rationnelle en deux autres fractions de même espèce.*

Prenons pour $f(x)$ et $F(x)$ deux fonctions entières de la variable x.

$$\frac{f(x)}{F(x)}$$

sera ce qu'on appelle une *fraction rationnelle*. Si l'on désigne par m le degré de son dénominateur $F(x)$, l'équation

$$F(x) = 0 \tag{1}$$

admettra m racines réelles ou imaginaires, égales ou inégales; et si, en les supposant d'abord toutes inégales, on les représente par

$$x_0, \quad x_1, \quad x_2, \quad \ldots, \quad x_{m-1},$$

les facteurs linéaires du polynôme $F(x)$ seront respectivement

$$x - x_0, \quad x - x_1, \quad x - x_2, \quad \ldots, \quad x - x_{m-1}.$$

Cela posé, faisons

$$F(x) = (x - x_0)\,\varphi(x) \tag{2}$$

et

$$\frac{f(x_0)}{\varphi(x_0)} = A. \tag{3}$$

$\varphi(x_0)$ n'étant pas nul, la constante A restera finie, et la différence

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)} - A = \frac{f(x) - A\,\varphi(x)}{\varphi(x)}$$

s'évanouira pour $x = x_0$. Par suite, il en sera de même du polynôme

$$f(x) - A\,\varphi(x),$$

et ce polynôme sera divisible algébriquement par $x - x_0$; en sorte qu'on aura

$$f(x) - A\,\varphi(x) = (x - x_0)\,\chi(x),$$

$$f(x) = A\,\varphi(x) + (x - x_0)\,\chi(x), \tag{4}$$

$\chi(x)$ désignant une nouvelle fonction entière de la variable x. Si l'on divise par $F(x)$ les deux membres de cette dernière équation, en ayant égard à la formule (2), on en conclura

$$\frac{f(x)}{F(x)} = \frac{A}{x - x_0} + \frac{\chi(x)}{\varphi(x)}. \tag{5}$$

Donc, si l'on partage le polynôme $F(x)$ en deux facteurs dont l'un soit linéaire, on pourra décomposer la fraction rationnelle $\frac{f(x)}{F(x)}$ en deux autres qui aient pour dénominateurs respectifs les deux facteurs dont il s'agit, et dont la plus simple ait un numérateur constant.

Concevons maintenant que l'on partage la fonction $F(x)$ en deux facteurs dont le premier, au lieu d'être linéaire, corresponde à plusieurs racines de l'équation $F(x) = 0$. Prenons, par exemple, pour ce premier facteur le facteur du second degré

$$(x - x_0)(x - x_1),$$

et posons, en conséquence,

$$F(x) = (x - x_0)(x - x_1)\,\varphi(x). \tag{6}$$

La fraction $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ conservera une valeur finie, non seulement pour $x = x_0$, mais encore pour $x = x_1$; et, si l'on désigne par u un polynôme du premier degré qui, dans l'une et l'autre hypothèse, devienne égal à $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$, on trouvera (Chapitre IV, § I)

$$u = \frac{f(x_0)}{\varphi(x_0)} \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} + \frac{f(x_1)}{\varphi(x_1)} \frac{x - x_0}{x_1 - x_0}. \tag{7}$$

Le polynôme u étant déterminé, comme on vient de le dire, l'équation

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)} - u = 0$$

ou

$$f(x) - u\,\varphi(x) = 0,$$

comptera parmi ses racines x_0 et x_1; et par suite le polynôme

$$f(x) - u\,\varphi(x)$$

sera divisible par le produit

$$(x - x_0)(x - x_1).$$

On aura donc

$$f(x) - u\,\varphi(x) = (x - x_0)(x - x_1)\chi(x),$$

$$f(x) = u\,\varphi(x) + (x - x_0)(x - x_1)\chi(x), \tag{8}$$

$\chi(x)$ désignant une nouvelle fonction entière de la variable x. Si l'on divise la dernière équation par $F(x)$, en ayant égard à la formule (6), on en conclura

$$\frac{f(x)}{F(x)} = \frac{u}{(x - x_0)(x - x_1)} + \frac{\chi(x)}{\varphi(x)}. \tag{9}$$

On prouverait de même qu'il suffit de poser

$$F(x) = (x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)\,\varphi(x) \tag{10}$$

et

$$\left\{\begin{aligned} u = {} & \frac{f(x_0)}{\varphi(x_0)} \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} \\ & + \frac{f(x_1)}{\varphi(x_1)} \frac{(x - x_0)(x - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} \\ & + \frac{f(x_2)}{\varphi(x_2)} \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} \end{aligned}\right. \tag{11}$$

pour obtenir une équation de la forme

$$\frac{f(x)}{F(x)} = \frac{u}{(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)} + \frac{\chi(x)}{\varphi(x)}, \tag{12}$$

etc.

Ainsi généralement, lorsque l'équation $F(x) = 0$ n'a pas de racines égales, si l'on partage le polynôme $F(x)$ en deux facteurs dont le premier soit le produit de plusieurs facteurs linéaires, la fraction rationnelle $\frac{f(x)}{F(x)}$ sera décomposable en deux autres fractions de même espèce qui recevront pour dénominateurs respectifs les deux facteurs ci-dessus mentionnés, et dont la première aura un numérateur d'un degré moins élevé que son dénominateur.

Je passe au cas où l'on suppose que l'équation $F(x) = 0$ a des racines égales. Soient, dans cette seconde hypothèse,

$$a, \quad b, \quad c, \quad \ldots$$

les diverses racines de cette même équation, et désignons par m' le nombre des racines égales à a; par m'' le nombre des racines égales à b; par m''' le nombre des racines égales à c, etc. La fonction $F(x)$ sera équivalente au produit

$$(x - a)^{m'}(x - b)^{m''}(x - c)^{m'''}\ldots$$

ou à ce produit multiplié par un coefficient constant, et l'on aura

$$m' + m'' + m''' + \ldots = m.$$

Cela posé, faisons

$$F(x) = (x - a)^{m'}\varphi(x) \tag{13}$$

et

$$\frac{f(a)}{\varphi(a)} = A. \tag{14}$$

$\varphi(a)$ n'étant pas nul, la constante A restera finie, et la différence

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)} - A$$

s'évanouira pour $x = a$. On en conclura que le polynôme

$$f(x) - A\varphi(x)$$

est divisible par $x - a$, et l'on aura, par suite,

$$f(x) = A\varphi(x) + (x-a)\chi(x), \tag{15}$$

$\chi(x)$ désignant une nouvelle fonction entière de la variable x. Enfin, si l'on divise par $F(x)$ les deux membres de l'équation (15) en ayant égard à la formule (13), on trouvera

$$\frac{f(x)}{F(x)} = \frac{A}{(x-a)^m} + \frac{\chi(x)}{(x-a)^{m'-1}\varphi(x)}. \tag{16}$$

On démontrerait, en raisonnant de la même manière, qu'il suffit de poser

$$F(x) = (x-a)^{m'}(x-b)^{m''}\varphi(x) \tag{17}$$

et

$$u = \frac{f(a)}{\varphi(a)}\frac{x-b}{a-b} + \frac{f(b)}{\varphi(b)}\frac{x-a}{b-a} \tag{18}$$

pour obtenir une équation de la forme

$$\frac{f(x)}{F(x)} = \frac{u}{(x-a)^{m'}(x-b)^{m''}} + \frac{\chi(x)}{(x-a)^{m'-1}(x-b)^{m''-1}\varphi(x)}, \tag{19}$$

....

§ II. — *Décomposition d'une fraction rationnelle, dont le dénominateur est le produit de plusieurs facteurs linéaires inégaux, en fractions simples qui aient pour dénominateurs respectifs ces mêmes facteurs linéaires et des numérateurs constants.*

Soit

$$\frac{f(x)}{F(x)}$$

la fraction rationnelle que l'on considère; m le degré de la fonction $F(x)$, et

$$x_0, \quad x_1, \quad x_2, \quad \ldots, \quad x_{m-1}$$

les racines de l'équation

$$F(x) = 0 \tag{1}$$

supposées inégales. On aura, en désignant par k un coefficient constant,

$$F(x) = k(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_{m-1}); \tag{2}$$

et, en vertu des principes établis dans le paragraphe qui précède, la fraction rationnelle $\frac{f(x)}{F(x)}$ pourra être décomposée en deux autres, dont la première sera de la forme

$$\frac{A_0}{x-x_0},$$

A_0 représentant une constante, tandis que la seconde aura pour dénominateur

$$\frac{F(x)}{x-x_0} = k(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_{m-1}).$$

En décomposant cette seconde fraction rationnelle par la même méthode, on obtiendra :

1° Une nouvelle fraction simple de la forme

$$\frac{A_1}{x-x_1};$$

2° Une fraction qui aura pour dénominateur

$$k(x-x_2)\ldots(x-x_{m-1}).$$

En continuant ainsi, on fera disparaître successivement du polynôme

$$F(x) = k(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_{m-1})$$

tous les facteurs linéaires qu'il renferme; en sorte qu'on réduira définitivement ce polynôme à la constante k. Donc, lorsque, par une suite de décompositions partielles semblables à celles que nous venons d'indiquer, on aura extrait de la fraction $\frac{f(x)}{F(x)}$ une suite de fractions simples de la forme

$$\frac{A_0}{x-x_0},\quad \frac{A_1}{x-x_1},\quad \frac{A_2}{x-x_2},\quad \ldots,\quad \frac{A_{m-1}}{x-x_{m-1}},$$

le reste ne pourra être qu'une fraction rationnelle à dénominateur constant, c'est-à-dire une fonction entière de la variable x. En désignant par R cette fonction entière, on trouvera

$$(3)\qquad \frac{f(x)}{F(x)} = R + \frac{A_0}{x-x_0} + \frac{A_1}{x-x_1} + \frac{A_2}{x-x_2} + \ldots + \frac{A_{m-1}}{x-x_{m-1}}.$$

Il reste maintenant à savoir quelles sont les valeurs des constantes

$$A_0,\quad A_1,\quad A_2,\quad \ldots,\quad A_{m-1}.$$

Ces valeurs se déduiraient sans difficulté de la méthode de décomposition indiquée dans le § I. Mais on parvient plus directement à leur détermination à l'aide des considérations suivantes :

Si l'on multiplie par $F(x)$ les deux membres de l'équation (3), on en tirera

$$(4)\qquad \left\{\begin{aligned} f(x) = R\,F(x) &+ A_0\frac{F(x)}{x-x_0} + A_1\frac{F(x)}{x-x_1} \\ &+ A_2\frac{F(x)}{x-x_2} + \ldots + A_{m-1}\frac{F(x)}{x-x_{m-1}}. \end{aligned}\right.$$

Si dans les deux membres de cette dernière formule on fait

$$x = x_0 + z,$$

la somme

$$R\,F(x) + A_1\frac{F(x)}{x-x_1} + A_2\frac{F(x)}{x-x_2} + \ldots + A_{m-1}\frac{F(x)}{x-x_{m-1}},$$

qui est évidemment un polynôme en x divisible par $x - x_0$, prendra la forme

$$zZ,$$

Z désignant une fonction entière de z, et l'on aura, par suite,

$$(5)\qquad f(x_0+z) = A_0\frac{F(x_0+z)}{z} + zZ.$$

Supposons maintenant que la substitution de $x+z$ au lieu de x dans la fonction $F(x)$ donne généralement

$$(6)\qquad F(x+z) = F(x) + z\,F_1(x) + z^2F_2(x) + \ldots.$$

On en déduira

$$F(x_0+z) = z\,F_1(x_0) + z^2F_2(x_0) + \ldots,$$

et l'équation (5) deviendra

$$f(x_0+z) = A_0[F_1(x_0) + z\,F_2(x_0) + \ldots] + zZ.$$

Lorsqu'on fait dans cette dernière $z = 0$, elle se réduit à

$$f(x_0) = A_0\,F_1(x_0),$$

et l'on en conclut

$$(7)\qquad A_0 = \frac{f(x_0)}{F_1(x_0)}.$$

On trouverait, par un calcul entièrement semblable,

$$(8)\qquad \left\{\begin{aligned} A_1 &= \frac{f(x_1)}{F_1(x_1)}, \\ A_2 &= \frac{f(x_2)}{F_1(x_2)}, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ A_{m-1} &= \frac{f(x_{m-1})}{F_1(x_{m-1})}. \end{aligned}\right.$$

Les valeurs qu'on vient d'obtenir pour

$$A_0,\quad A_1,\quad A_2,\quad \ldots,\quad A_{m-1}$$

sont évidemment indépendantes du mode employé pour la décomposition de la fraction rationnelle $\frac{f(x)}{F(x)}$; d'où il résulte que cette fraction ne peut être décomposée que d'une seule manière en fractions simples qui aient pour dénominateurs les facteurs linéaires du polynôme $F(x)$ avec des numérateurs constants.

Il est aisé de voir comment l'équation (7) et la formule (3) du paragraphe précédent s'accordent entre elles. En effet, $F_1(x_0)$ est ce que devient le polynôme

$$F_1(x_0) + z F_2(x_0) + \ldots = \frac{F(x_0+z)}{z} = \frac{F(x)}{x-x_0}$$

lorsqu'on y fait $z = 0$ ou $x = x_0$; et par suite, si l'on pose

$$F(x) = (x - x_0)\,\varphi(x), \tag{9}$$

on aura

$$F_1(x_0) = \varphi(x_0),$$

$$A_0 = \frac{f(x_0)}{\varphi(x_0)}. \tag{10}$$

Pour montrer une application des formules ci-dessus établies, supposons qu'il s'agisse de décomposer en fractions simples la fraction rationnelle

$$\frac{x^n}{x^m - 1},$$

n désignant un nombre entier inférieur à m. On aura, dans ce cas particulier,

$$f(x) = x^n, \qquad F(x) = x^m - 1, \qquad k = 1;$$

et, si l'on représente par h un nombre entier qui ne surpasse pas $\frac{m}{2}$, les diverses racines de l'équation $F(x) = 0$, toutes inégales entre elles, seront comprises dans la formule

$$\cos\frac{2h\pi}{m} \pm \sqrt{-1}\,\sin\frac{2h\pi}{m}.$$

Soit a l'une de ces racines, et cherchons le numérateur A de la fraction simple qui a pour dénominateur $x - a$. Ce numérateur sera

$$A = \frac{f(a)}{F_1(a)} = \frac{a^n}{F_1(a)},$$

la valeur de $F_1(a)$ étant déterminée par l'équation

$$F(a) + z F_1(a) + \ldots = F(a+z) = (a+z)^m - 1 = a^m - 1 + m a^{m-1} z + \ldots,$$

et par conséquent égale à $m a^{m-1}$. On trouvera, par suite,

$$A = \frac{a^n}{m a^{m-1}} = \frac{1}{m} a^{n+1-m}.$$

Comme on a d'ailleurs

$$\left(\cos\frac{2h\pi}{m} \pm \sqrt{-1}\,\sin\frac{2h\pi}{m}\right)^{n+1-m} = \cos\frac{2h(n+1)\pi}{m} \pm \sqrt{-1}\,\sin\frac{2h(n+1)\pi}{m},$$

on conclura de ce qui précède, en faisant, pour abréger,

$$\frac{(n+1)\pi}{m} = \theta, \tag{11}$$

$$\left\{\begin{aligned} \frac{x^n}{x^m-1} = \frac{1}{m}\Bigg(\frac{1}{x-1} &+ \frac{\cos 2\theta + \sqrt{-1}\,\sin 2\theta}{x - \cos\frac{2\pi}{m} - \sqrt{-1}\,\sin\frac{2\pi}{m}} + \frac{\cos 2\theta - \sqrt{-1}\,\sin 2\theta}{x - \cos\frac{2\pi}{m} + \sqrt{-1}\,\sin\frac{2\pi}{m}} \\ &+ \frac{\cos 4\theta + \sqrt{-1}\,\sin 4\theta}{x - \cos\frac{4\pi}{m} - \sqrt{-1}\,\sin\frac{4\pi}{m}} + \frac{\cos 4\theta - \sqrt{-1}\,\sin 4\theta}{x - \cos\frac{4\pi}{m} + \sqrt{-1}\,\sin\frac{4\pi}{m}} \\ &+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\Bigg). \end{aligned}\right. \tag{12}$$

On trouverait, en raisonnant de la même manière,

$$\left\{\begin{aligned} \frac{x^n}{x^m+1} = -\frac{1}{m}\Bigg(& \frac{\cos\theta + \sqrt{-1}\,\sin\theta}{x - \cos\frac{\pi}{m} - \sqrt{-1}\,\sin\frac{\pi}{m}} + \frac{\cos\theta - \sqrt{-1}\,\sin\theta}{x - \cos\frac{\pi}{m} + \sqrt{-1}\,\sin\frac{\pi}{m}} \\ &+ \frac{\cos 3\theta + \sqrt{-1}\,\sin 3\theta}{x - \cos\frac{3\pi}{m} - \sqrt{-1}\,\sin\frac{3\pi}{m}} + \frac{\cos 3\theta - \sqrt{-1}\,\sin 3\theta}{x - \cos\frac{3\pi}{m} + \sqrt{-1}\,\sin\frac{3\pi}{m}} \\ &+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\Bigg). \end{aligned}\right. \tag{13}$$

Il est essentiel d'observer que la dernière des fractions simples comprises dans le second membre de l'équation (12) ou (13) sera, pour des valeurs paires de m, s'il s'agit de l'équation (12), et pour des valeurs impaires de m, s'il s'agit de l'équation (13),

$$\frac{\cos m\theta}{x+1} = \frac{\cos(n+1)\pi}{x+1} = \frac{(-1)^{n+1}}{x+1}.$$

Ainsi, par exemple, on aura

$$(14) \qquad \frac{1}{x^2-1} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1}\right),$$

$$(15) \qquad \frac{x}{x^2-1} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x+1}\right),$$

$$(16) \qquad \frac{1}{x^3+1} = -\frac{1}{3}\left(\frac{\cos\frac{\pi}{3} + \sqrt{-1}\sin\frac{\pi}{3}}{x - \cos\frac{\pi}{3} - \sqrt{-1}\sin\frac{\pi}{3}} + \frac{\cos\frac{\pi}{3} - \sqrt{-1}\sin\frac{\pi}{3}}{x - \cos\frac{\pi}{3} + \sqrt{-1}\sin\frac{\pi}{3}} - \frac{1}{x+1}\right),$$

. . . .

On peut remarquer encore que, si dans les seconds membres des équations (12) ou (13) on réunit par l'addition deux fractions simples correspondantes à deux facteurs linéaires conjugués du binôme $x^m \pm 1$, la somme sera une nouvelle fraction qui aura pour dénominateur un facteur réel du second degré, et pour numérateur une fonction réelle et linéaire de la variable x. On trouvera, par exemple, en prenant $n = 0$, $m = 3$,

$$(17) \qquad \left\{\begin{aligned} \frac{1}{x^3+1} &= -\frac{1}{3}\left(\frac{2x\cos\frac{\pi}{3} - 2}{x^2 - 2x\cos\frac{\pi}{3} + 1} - \frac{1}{x+1}\right) \\ &= \frac{1}{3}\left(\frac{2-x}{x^2-x+1} + \frac{1}{x+1}\right). \end{aligned}\right.$$

Il est facile de généraliser cette remarque ainsi qu'il suit.

Supposons que, les fonctions entières $f(x)$, $F(x)$ étant réelles, on désigne par

$$\alpha + \beta\sqrt{-1}, \quad \alpha - \beta\sqrt{-1}$$

deux racines imaginaires conjuguées de l'équation (1), et prenons

pour A et B deux quantités réelles propres à vérifier la formule

$$(18) \qquad \frac{f(\alpha + \beta\sqrt{-1})}{F_1(\alpha + \beta\sqrt{-1})} = A - B\sqrt{-1},$$

$F_1(x)$ représentant toujours le coefficient de z dans le développement de $F(x+z)$. On aura nécessairement

$$\frac{f(\alpha - \beta\sqrt{-1})}{F_1(\alpha - \beta\sqrt{-1})} = A + B\sqrt{-1};$$

et par suite, si l'on décompose la fraction rationnelle $\frac{f(x)}{F(x)}$, les deux fractions simples correspondantes aux facteurs linéaires conjugués

$$x - \alpha - \beta\sqrt{-1}, \quad x - \alpha + \beta\sqrt{-1}$$

seront respectivement

$$(19) \qquad \frac{A - B\sqrt{-1}}{x - \alpha - \beta\sqrt{-1}}, \quad \frac{A + B\sqrt{-1}}{x - \alpha + \beta\sqrt{-1}}.$$

En ajoutant ces deux fractions, on obtiendra la suivante :

$$(20) \qquad \frac{2A(x-\alpha) + 2B\beta}{(x-\alpha)^2 + \beta^2}.$$

Cette dernière, qui a pour numérateur une fonction réelle et linéaire de la variable x et pour dénominateur un facteur réel du second degré du polynôme $F(x)$, ne diffère pas de la fraction

$$\frac{u}{(x - x_0)(x - x_1)}$$

que renferme la formule (9) du paragraphe I, dans le cas où l'on suppose

$$x_0 = \alpha + \beta\sqrt{-1}, \qquad x_1 = \alpha - \beta\sqrt{-1}.$$

§ III. — *Décomposition d'une fraction rationnelle donnée en d'autres plus simples qui aient pour dénominateurs respectifs les facteurs linéaires du dénominateur de la première, ou des puissances de ces mêmes facteurs, et pour numérateurs des constantes.*

Soient

$$\frac{f(x)}{F(x)}$$

la fraction rationnelle que l'on considère, m le degré du polynôme $F(x)$, et

$$a, \quad b, \quad c, \quad \ldots$$

les diverses racines de l'équation

$$F(x) = 0. \tag{1}$$

On aura, en désignant par k un coefficient constant, et par m', m'', m''', ... plusieurs nombres entiers dont la somme sera égale à m,

$$F(x) = k(x-a)^{m'}(x-b)^{m''}(x-c)^{m'''}\ldots. \tag{2}$$

Cela posé, si l'on fait usage de la méthode exposée dans le paragraphe I, on décomposera la fraction rationnelle $\frac{f(x)}{F(x)}$ en deux autres dont la première sera de la forme

$$\frac{A}{(x-a)^{m'}},$$

tandis que la seconde aura pour dénominateur

$$\frac{F(x)}{x-a} = k(x-a)^{m'-1}(x-b)^{m''}(x-c)^{m'''}\ldots.$$

En décomposant cette seconde fraction rationnelle par la même méthode, on obtiendra : 1° une nouvelle fraction simple

$$\frac{A_1}{(x-a)^{m'-1}},$$

dans laquelle A_1 représentera une constante; 2° une fraction qui aura pour dénominateur

$$k(x-a)^{m'-2}(x-b)^{m''}(x-c)^{m'''}\ldots.$$

En continuant ainsi, on fera disparaitre successivement du polynôme $F(x)$ les différents facteurs linéaires dont se compose la puissance $(x-a)^{m'}$; et, lorsqu'on aura extrait de $\frac{f(x)}{F(x)}$ une suite de fractions simples de la forme

$$\frac{A}{(x-a)^{m'}}, \quad \frac{A_1}{(x-a)^{m'-1}}, \quad \frac{A_2}{(x-a)^{m'-2}}, \quad \ldots, \quad \frac{A_{m'-1}}{x-a},$$

le reste sera une nouvelle fraction rationnelle dont le dénominateur se trouvera réduit à

$$k(x-b)^{m''}(x-c)^{m'''}\ldots.$$

Si de ce reste on extrait une seconde suite de fractions simples de la forme

$$\frac{B}{(x-b)^{m''}}, \quad \frac{B_1}{(x-b)^{m''-1}}, \quad \frac{B_2}{(x-b)^{m''-2}}, \quad \ldots, \quad \frac{B_{m''-1}}{x-b},$$

on obtiendra un second reste dont le dénominateur sera

$$k(x-c)^{m'''}\ldots.$$

Enfin, si l'on prolonge ces opérations jusqu'à ce que le polynôme $F(x)$ se trouve réduit à la constante k, lé dernier de tous les restes sera une fonction rationnelle à dénominateur constant, c'est-à-dire une fonction entière de la variable x. Appelons R cette fonction entière. On aura définitivement pour la valeur de $\frac{f(x)}{F(x)}$ décomposée en fractions simples

$$\left\{\begin{aligned}\frac{f(x)}{F(x)} = R &+ \frac{A}{(x-a)^{m'}} + \frac{A_1}{(x-a)^{m'-1}} + \ldots + \frac{A_{m'-1}}{x-a}\\ &+ \frac{B}{(x-b)^{m''}} + \frac{B_1}{(x-b)^{m''-1}} + \ldots + \frac{B_{m''-1}}{x-b}\\ &+ \frac{C}{(x-c)^{m'''}} + \frac{C_1}{(x-c)^{m'''-1}} + \ldots + \frac{C_{m'''-1}}{x-c}\\ &+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\end{aligned}\right. \tag{3}$$

A, A_1, ..., $A_{m'-1}$; B, B_1, ..., $B_{m''-1}$; C, C_1, ..., $C_{m'''-1}$; ... désignant des constantes que l'on peut facilement déduire des principes exposés dans le paragraphe I, ou calculer directement à l'aide des considérations suivantes.

Faisons, pour plus de commodité,

$$(4)\quad \left\{\begin{aligned} & R + \frac{B}{(x-b)^{m''}} + \frac{B_1}{(x-b)^{m''-1}} + \ldots + \frac{B_{m''-1}}{x-b} \\ & + \frac{C}{(x-c)^{m'''}} + \frac{C_1}{(x-c)^{m'''-1}} + \ldots + \frac{C_{m'''-1}}{x-c} \\ & + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & = \frac{Q}{(x-b)^{m''}(x-c)^{m'''}\ldots}; \end{aligned}\right.$$

Q sera une nouvelle fonction entière de la variable x, et l'équation (3) deviendra

$$\frac{f(x)}{F(x)} = \frac{A}{(x-a)^{m'}} + \frac{A_1}{(x-a)^{m'-1}} + \ldots + \frac{A_{m'-1}}{x-a} + \frac{Q}{(x-b)^{m''}(x-c)^{m'''}\ldots}.$$

Si l'on multiplie les deux membres de cette dernière par

$$F(x) = k(x-a)^{m'}(x-b)^{m''}(x-c)^{m'''}\ldots,$$

on en conclura

$$(5)\quad f(x) = [A + A_1(x-a) + \ldots + A_{m'-1}(x-a)^{m'-1}]\frac{F(x)}{(x-a)^{m'}} + k\,Q(x-a)^{m'};$$

et par suite, en faisant

$$x = a + z,$$

on trouvera

$$(6)\qquad f(a+z) = (A + A_1 z + \ldots + A_{m'-1} z^{m'+1})\frac{F(a+z)}{z^{m'}} + Z z^{m'},$$

Z désignant la valeur du polynôme kQ exprimée en fonction de z. Supposons maintenant que la substitution de $x+z$, au lieu de x, dans les fonctions $f(x)$ et $F(x)$, donne généralement

$$(7)\qquad \left\{\begin{aligned} & f(x+z) = f(x) + z f_1(x) + z^2 f_2(x) + \ldots, \\ & F(x+z) = F(x) + z F_1(x) + z^2 F_2(x) + \ldots \\ & \qquad\qquad + z^{m'} F_{m'}(x) + z^{m'+1} F_{m'+1}(x) + \ldots. \end{aligned}\right.$$

On aura, en prenant $x = a + z$, et observant que le développement de la fonction

$$F(x) = F(a+z)$$

doit être divisible par $(x-a)^{m'} = z^{m'}$,

$$(8)\qquad \left\{\begin{aligned} & f(a+z) = f(a) + z f_1(a) + z^2 f_2(a) + \ldots, \\ & F(a+z) = [F_{m'}(a) + z F_{m'+1}(a) + z^2 F_{m'+2}(a) + \ldots] z^{m'}; \end{aligned}\right.$$

$$(9)\qquad F(a) = 0, \qquad F_1(a) = 0, \qquad \ldots, \qquad F_{m'-1}(a) = 0.$$

Cela posé, la formule (6) se trouvera réduite à

$$(10)\quad \left\{\begin{aligned} & f(a) + z f_1(a) + z^2 f_2(a) + \ldots \\ & \quad = (A + A_1 z + A_2 z^2 + \ldots)[F_{m'}(a) + z F_{m'+1}(a) + z^2 F_{m'+2}(a) + \ldots] + z^{m'} Z, \end{aligned}\right.$$

et l'on en tirera, en égalant dans les deux membres les coefficients des puissances semblables de z,

$$(11)\qquad \left\{\begin{aligned} & f(a) = A\ F_{m'}(a), \\ & f_1(a) = A_1 F_{m'}(a) + A\ F_{m'+1}(a), \\ & f_2(a) = A_2 F_{m'}(a) + A_1 F_{m'+1}(a) + A F_{m'+2}(a), \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right.$$

On trouvera par un calcul entièrement semblable

$$(12)\quad \left\{\begin{aligned} & f(b) = B\,F_{m''}(b), \quad f_1(b) = B_1 F_{m''}(b) + B\,F_{m''+1}(b), \quad f_2(b) = \ldots, \\ & f(c) = C\,F_{m'''}(c), \quad f_1(c) = C_1 F_{m'''}(c) + C\,F_{m'''+1}(c), \quad f_2(c) = \ldots, \\ & \ldots\ldots\ldots, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \quad \ldots\ldots \end{aligned}\right.$$

Ces diverses équations suffiront pour fixer complètement les valeurs des constantes A, A_1, A_2, ..., B, B_1, B_2, ..., C, C_1, C_2, ... Elles donneront, par exemple,

$$(13)\qquad \left\{\begin{aligned} & A = \frac{f(a)}{F_{m'}(a)}, \\ & A_1 = \frac{f_1(a) - A\,F_{m'+1}(a)}{F_{m'}(a)}, \\ & A_2 = \frac{f_2(a) - A_1 F_{m'+1}(a) - A\,F_{m'+2}(a)}{F_{m'}(a)}, \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right.$$

Les constantes ainsi déterminées étant évidemment indépendantes du mode employé pour la décomposition de la fraction rationnelle $\frac{f(x)}{F(x)}$, il en résulte que cette fraction est décomposable d'une manière seulement en fractions simples de la forme de celles que renferme le second membre de l'équation (3).

Il est aisé de voir que la première des équations (13) s'accorde avec la formule (14) du paragraphe I. En effet, la quantité $F_{m'}(a)$ est ce que devient le polynôme

$$F_{m'}(a) + z\,F_{m'+1}(a) + z^2\,F_{m'+2}(a) + \ldots = \frac{F(a+z)}{z^{m'}} = \frac{F(x)}{(x-a)^{m'}}$$

lorsqu'on y fait $z = 0$ ou $x = a$; et par suite, si l'on pose

$$F(x) = (x-a)^{m'}\,\varphi(x), \tag{14}$$

on aura

$$F_{m'}(a) = \varphi(a),$$

$$A = \frac{f(a)}{\varphi(a)}. \tag{15}$$

Dans le cas où, les fonctions $f(x)$ et $F(x)$ étant réelles l'une et l'autre, l'équation $F(x) = 0$ admet m' racines égales à $\alpha + \beta\sqrt{-1}$, la même équation admet encore m' racines égales conjuguées aux premières, et par conséquent représentées par

$$\alpha - \beta\sqrt{-1}.$$

Dans cette hypothèse, si, après la décomposition de la fraction rationnelle

$$\frac{f(x)}{F(x)},$$

on réunit deux à deux les fractions simples qui ont pour dénominateurs

$$\begin{array}{lcl} (x-\alpha-\beta\sqrt{-1})^{m'} & \text{et} & (x-\alpha+\beta\sqrt{-1})^{m'}, \\ (x-\alpha-\beta\sqrt{-1})^{m'-1} & \text{et} & (x-\alpha+\beta\sqrt{-1})^{m'-1}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, & & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{array}$$

enfin

$$x-\alpha-\beta\sqrt{-1} \quad \text{et} \quad x-\alpha+\beta\sqrt{-1},$$

les différentes sommes obtenues seront des fractions réelles et rationnelles qui auront pour dénominateurs respectifs

$$\begin{array}{l} [(x-\alpha)^2+\beta^2]^{m'}, \\ [(x-\alpha)^2+\beta^2]^{m'-1}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ (x-\alpha)^2+\beta^2, \end{array}$$

et dont le système pourra être remplacé par une suite d'autres fractions qui, avec les mêmes dénominateurs, auraient pour numérateurs des fonctions réelles et linéaires de la variable x. Au reste, il est facile de calculer directement cette nouvelle suite de fractions, en commençant par celles qui correspondent aux plus hautes puissances de $(x-\alpha)^2+\beta^2$. Cherchons, par exemple, celle qui a pour dénominateur

$$[(x-\alpha)^2+\beta^2]^{m'} = (x-\alpha-\beta\sqrt{-1})^{m'}(x-\alpha+\beta\sqrt{-1})^{m'}.$$

D'après les principes établis dans le paragraphe I, elle sera

$$\frac{u}{[(x-\alpha)^2+\beta^2]^{m'}}, \tag{16}$$

pourvu que l'on fasse

$$\left\{\begin{aligned} u = \frac{1}{2\beta\sqrt{-1}}\Bigg[& \frac{f(\alpha+\beta\sqrt{-1})}{\varphi(\alpha+\beta\sqrt{-1})}(x-\alpha+\beta\sqrt{-1}) \\ & - \frac{f(\alpha-\beta\sqrt{-1})}{\varphi(\alpha-\beta\sqrt{-1})}(x-\alpha-\beta\sqrt{-1})\Bigg] \end{aligned}\right. \tag{17}$$

et

$$\varphi(x) = \frac{F(x)}{[(x-\alpha)^2+\beta^2]^{m'}}. \tag{18}$$

Ajoutons que, si dans la formule précédente, on pose successivement

$$x = \alpha+\beta\sqrt{-1}+z, \qquad x = \alpha-\beta\sqrt{-1}+z,$$

on en conclura, eu égard à la seconde des équations (8),

$$\varphi(\alpha+6\sqrt{-1}+z)=\frac{F_{m'}(\alpha+6\sqrt{-1})+zF_{m'+1}(\alpha+6\sqrt{-1})+\ldots}{(26\sqrt{-1}+z)^{m'}},$$

$$\varphi(\alpha-6\sqrt{-1}+z)=\frac{F_{m'}(\alpha-6\sqrt{-1})+zF_{m'+1}(\alpha-6\sqrt{-1})+\ldots}{(-26\sqrt{-1}+z)^{m'}},$$

et, par suite,

$$(19)\qquad \begin{cases} \varphi(\alpha+6\sqrt{-1})=\dfrac{F_{m'}(\alpha+6\sqrt{-1})}{(26\sqrt{-1})^{m'}}, \\ \varphi(\alpha-6\sqrt{-1})=(-1)^{m'}\dfrac{F_{m'}(\alpha-6\sqrt{-1})}{(26\sqrt{-1})^{m'}}. \end{cases}$$

CHAPITRE XII.

DES SÉRIES RÉCURRENTES.

§ I. — *Considérations générales sur les séries récurrentes.*

Une série

$$(1)\qquad a_0,\quad a_1x,\quad a_2x^2,\quad \ldots,\quad a_nx^n,\quad \ldots,$$

ordonnée suivant les puissances ascendantes et entières de la variable x, est appelée *récurrente*, lorsque dans cette série, considérée à partir d'un terme donné, le coefficient d'une puissance quelconque de la variable s'exprime en fonction linéaire des coefficients des puissances inférieures pris en nombre fixe, en sorte qu'il suffise de *recourir* aux valeurs de ces derniers coefficients pour en déduire celui que l'on cherche. Ainsi, par exemple, la série

$$(2)\qquad 1,\quad 2x,\quad 3x^2,\quad \ldots,\quad (n+1)x^n,\quad \ldots$$

est récurrente, attendu que, si l'on fait

$$a_n=n+1,$$

on aura constamment, pour des valeurs de n supérieures à l'unité,

$$(3)\qquad a_n=2a_{n-1}-a_{n-2}.$$

En général, la série (1) sera récurrente, si, pour toutes les valeurs de n supérieures à une certaine limite, les coefficients

$$a_n,\quad a_{n-1},\quad a_{n-2},\quad \ldots,\quad a_{n-m}$$

de plusieurs puissances consécutives de x se trouvent liés entre eux par une équation du premier degré. Soit

$$ka_{n-m} + la_{n-m+1} + \ldots + pa_{n-1} + qa_n = 0 \tag{4}$$

l'équation dont il s'agit, $k, l, \ldots, p, q$ désignant des constantes déterminées. La suite de ces constantes formera ce qu'on appelle l'*échelle de relation* de la série, échelle dont les constantes elles-mêmes seront les différents *termes*.

Dans la série (1), supposée récurrente, la variable x et les coefficients $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ peuvent être ou des quantités réelles, ou des expressions imaginaires. Cela posé, représentons par ρ_n le module de l'expression a_n, et par conséquent la valeur numérique de cette expression, lorsqu'elle est réelle. On conclura immédiatement des principes établis dans les Chapitres VI et IX que la série (1) sera tantôt convergente, tantôt divergente, suivant que le module ou la valeur numérique de x sera inférieur ou supérieur à la plus petite des limites vers lesquelles converge, tandis que n croît indéfiniment, l'expression $(\rho_n)^{-\frac{1}{n}}$.

§ II. — *Développement des fractions rationnelles en séries récurrentes.*

Toutes les fois qu'une fraction rationnelle peut se développer en série convergente ordonnée suivant les puissances ascendantes et entières de la variable, cette série est en même temps récurrente, ainsi qu'on va le faire voir.

Considérons d'abord la fraction rationnelle

$$\frac{A}{(x-a)^m}, \tag{1}$$

dans laquelle a, A désignent deux constantes réelles ou imaginaires, et m un nombre entier. Elle pourra se mettre sous la forme

$$(-1)^m \frac{A}{a^m}\left(1-\frac{x}{a}\right)^{-m},$$

et sera développable, aussi bien que l'expression

$$\left(1-\frac{x}{a}\right)^{-m},$$

en série convergente ordonnée suivant les puissances ascendantes et entières de la variable x, si la valeur numérique du rapport $\frac{x}{a}$ supposé réel, ou le module du même rapport supposé imaginaire, est une quantité comprise entre les limites 0 et 1. Cette condition sera remplie, si le module de la variable x, module qui se réduit à la valeur numérique de la même variable quand celle-ci devient imaginaire, est inférieur au module de la constante a; et l'on aura, dans cette hypothèse,

$$\left\{\begin{aligned} \left(1-\frac{x}{a}\right)^{-m} &= 1 + \frac{m}{1}\frac{x}{a} + \frac{m(m+1)}{1.2}\frac{x^2}{a^2} + \ldots \\ &= \frac{1.2.3\ldots(m-1)}{1.2.3\ldots(m-1)} + \frac{2.3.4\ldots m}{1.2.3\ldots(m-1)}\frac{x}{a} \\ &\quad + \frac{3.4.5\ldots(m+1)}{1.2.3\ldots(m-1)}\frac{x^2}{a^2} + \ldots. \end{aligned}\right. \tag{2}$$

On trouvera par suite

$$\frac{A}{(x-a)^m} = (-1)^m\left(\frac{A}{a^m} + \frac{m}{1}\frac{Ax}{a^{m+1}} + \frac{m(m+1)}{1.2}\frac{Ax^2}{a^{m+2}} + \ldots\right); \tag{3}$$

et si l'on fait, pour abréger,

$$\left\{\begin{aligned} &(-1)^m \frac{A}{a^m} = a_0, \\ &(-1)^m \frac{m}{1}\frac{A}{a^{m+1}} = a_1, \\ &(-1)^m \frac{m(m+1)}{1.2}\frac{A}{a^{m+2}} = a_2, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{aligned}\right. \tag{4}$$

on obtiendra l'équation

$$\frac{A}{(x-a)^m} = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + \ldots. \tag{5}$$

Concevons maintenant que l'on multiplie les deux membres de l'équation précédente par $(a-x)^m$; on en tirera

$$(6)\quad \left\{\begin{aligned}(-1)^m A &= \left[a^m - \frac{m}{1}a^{m-1}x + \frac{m(m-1)}{1.2}a^{m-2}x^2 + \ldots \pm x^m\right](a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots)\\ &= a^m(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_m x^m + a_{m+1}x^{m+1} + \ldots)\\ &\quad - \frac{m}{1}a^{m-1}(a_0 x + a_1 x^2 + \ldots + a_{m-1}x^m + a_m x^{m+1} + \ldots)\\ &\quad + \frac{m(m-1)}{1.2}a^{m-2}(a_0 x^2 + \ldots + a_{m-2}x^m + a_{m-1}x^{m+1} + \ldots)\\ &\quad - \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ &\quad \pm (a_0 x^m + a_1 x^{m+1} + \ldots)\end{aligned}\right.$$

ou, ce qui revient au même,

$$(7)\quad \left\{\begin{aligned}(-1)^m A = a^m a_0 &+ \left(a^m a_1 - \frac{m}{1}a^{m-1}a_0\right)x\\ &+ \left[a^m a_2 - \frac{m}{1}a^{m-1}a_1 + \frac{m(m-1)}{1.2}a^{m-2}a_0\right]x^2\\ &+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ &+ \left[a^m a_n - \frac{m}{1}a^{m-1}a_{n-1} + \frac{m(m-1)}{1.2}a^{m-2}a_{n-2} - \ldots \pm a_{n-m}\right]x^n\\ &+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\end{aligned}\right.$$

Cette dernière formule devant subsister toutes les fois que le module de la variable x est inférieur au module de la constante a, par conséquent toutes les fois que l'on attribue à x une valeur réelle peu différente de zéro, on en conclura, par des raisonnements semblables à ceux que nous avons employés pour démontrer le théorème VI du Chapitre VI (§ IV),

$$(8)\quad \left\{\begin{aligned}&(-1)^m A = a^m a_0,\\ &a^m a_1 - \frac{m}{1}a^{m-1}a_0 = 0,\\ &a^m a_2 - \frac{m}{1}a^{m-1}a_1 + \frac{m(m-1)}{1.2}a^{m-2}a_0 = 0,\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\end{aligned}\right.$$

et généralement

$$(9)\qquad a^m a_n - \frac{m}{1}a^{m-1}a_{n-1} + \frac{m(m-1)}{1.2}a^{m-2}a_{n-2} - \ldots \pm a_{n-m} = 0.$$

Il est essentiel de remarquer que l'équation (9) a lieu seulement pour des valeurs entières de n égales ou supérieures à m, et qu'elle doit être remplacée, lorsqu'on suppose $n < m$, par l'une des formules (8). De plus, comme l'équation (9), étant linéaire par rapport aux constantes

$$a_n,\quad a_{n-1},\quad a_{n-2},\quad \ldots,\quad a_{n-m},$$

donnera pour la première de ces constantes une fonction linéaire de toutes les autres, il en résulte que, dans la série

$$(10)\qquad a_0,\quad a_1 x,\quad a_2 x^2,\quad \ldots,\quad a_n x^n,\quad \ldots$$

considérée à partir du terme $a^m x_m$, le coefficient d'une puissance quelconque de x s'exprimera en fonction linéaire des coefficients des puissances inférieures pris consécutivement et en nombre égal à m. Cette série sera donc l'une de celles que nous avons nommées *récurrentes*.

Parmi les diverses formules particulières qu'on peut déduire de l'équation (3), il est bon de remarquer celles qui correspondent aux deux suppositions $m = 1$, $m = 2$. On trouve, dans la première hypothèse,

$$(11)\qquad \frac{A}{x-a} = -\left(\frac{A}{a} + \frac{A}{a^2}x + \frac{A}{a^3}x^2 + \ldots\right),$$

et, dans la seconde,

$$(12)\qquad \frac{A}{(x-a)^2} = \frac{A}{a^2} + 2\frac{A}{a^3}x + 3\frac{A}{a^4}x^2 + 4\frac{A}{a^5}x^3 + \ldots.$$

Les deux formules précédentes, dont la première détermine la somme d'une progression géométrique, subsistent, ainsi que l'équation (3), toutes les fois que le module de x est inférieur au module de a.

Lorsque dans l'équation (12) on fait en même temps

$$A = 1, \qquad a = 1,$$

on obtient la suivante

$$(13) \qquad \frac{1}{(x-1)^2} = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \ldots,$$

qui a pour second membre la somme de la série (2) (§ I), et suppose le module de x inférieur à l'unité.

Considérons maintenant une fraction rationnelle quelconque

$$(14) \qquad \frac{f(x)}{F(x)},$$

$f(x)$, $F(x)$ étant deux fonctions entières de la variable x. Représentons par a, b, c, ... les diverses racines de l'équation

$$(15) \qquad F(x) = 0,$$

par m' le nombre des racines égales à a, par m'' le nombre des racines égales à b, par m''' le nombre des racines égales à c, ..., et par k le coefficient de la plus haute puissance de x dans le polynôme $F(x)$, en sorte qu'on ait

$$(16) \qquad F(x) = k(x-a)^{m'}(x-b)^{m''}(x-c)^{m'''}\ldots.$$

La méthode exposée dans le Chapitre précédent fournira, pour la décomposition de la fraction rationnelle $\frac{f(x)}{F(x)}$ en fractions simples, une équation de la forme

$$(17) \qquad \left\{ \begin{aligned} \frac{f(x)}{F(x)} = \mathrm{R} &+ \frac{A}{(x-a)^{m'}} + \frac{A_1}{(x-a)^{m'-1}} + \ldots + \frac{A_{m'-1}}{x-a} \\ &+ \frac{B}{(x-b)^{m''}} + \frac{B_1}{(x-b)^{m''-1}} + \ldots + \frac{B_{m''-1}}{x-b} \\ &+ \frac{C}{(x-c)^{m'''}} + \frac{C_1}{(x-c)^{m'''-1}} + \ldots + \frac{C_{m'''-1}}{x-c} \\ &+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned} \right.$$

A, A_1, ..., B, B_1, ..., C, C_1, ..., etc., désignant des constantes détermi-

nées, et R une fonction entière de x qui s'évanouira lorsque le degré du polynôme $f(x)$ sera inférieur à celui du polynôme $F(x)$. Cela posé, concevons que le module de la variable x soit inférieur aux modules des diverses racines a, b, c, ..., et par conséquent au plus petit de ces modules. On pourra développer chacune des fractions simples que renferme le second membre de l'équation (17) en une série convergente ordonnée suivant les puissances ascendantes de la variable x; puis, en ajoutant les développements ainsi formés au polynôme R, on obtiendra une nouvelle série convergente toujours ordonnée suivant les puissances ascendantes de x, et dont la somme sera équivalente à la fraction rationnelle $\frac{f(x)}{F(x)}$. Soit

$$(18) \qquad a_0, \quad a_1 x, \quad a_2 x^2, \quad \ldots, \quad a_n x^n, \quad \ldots$$

la nouvelle série dont il est ici question. La formule

$$(19) \qquad \frac{f(x)}{F(x)} = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots$$

subsistera toutes les fois que cette nouvelle série sera convergente, c'est-à-dire toutes les fois que le module de la variable x sera inférieur au plus petit des nombres qui servent de modules aux racines de l'équation (15). J'ajoute que la série (18) sera toujours une série récurrente. C'est ce que l'on prouvera aisément ainsi qu'il suit.

Désignons par m la somme des nombres entiers m', m'', m''', ..., ou, ce qui revient au même, le degré du polynôme $F(x)$, et faisons, en conséquence,

$$(20) \qquad F(x) = kx^m + lx^{m-1} + \ldots + px + q,$$

k, l, ..., p, q représentant des constantes réelles ou imaginaires. L'équation (19) deviendra

$$(21) \qquad \frac{f(x)}{kx^m + lx^{m-1} + \ldots + px + q} = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots.$$

Après l'avoir mise sous la forme

$$(22) \qquad f(x) = (q + px + \ldots + lx^{m-1} + kx^m)(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots),$$

on en tirera, en développant le second membre comme on l'a fait pour l'équation (6),

$$(23)\quad \begin{cases} f(x) = qa_0 + (qa_1 + pa_0)x + \ldots \\ \qquad + (qa_m + pa_{m-1} + \ldots + la_1 + ka_0)x^m + \ldots \\ \qquad + (qa_n + pa_{n-1} + \ldots + la_{n-m+1} + ka_{n-m})x^n + \ldots . \end{cases}$$

Cette dernière formule devant subsister tant que le module de la variable x est inférieur aux modules des constantes $a, b, c, \ldots$, on démontrera, par des raisonnements semblables à ceux dont nous avons fait usage pour établir le théorème VI du Chapitre VI (§ IV), que les coefficients des puissances semblables de x dans les deux membres sont nécessairement égaux entre eux. Il en résulte : 1° que les coefficients des diverses puissances de x dans les différents termes du polynôme $f(x)$ sont respectivement égaux aux coefficients des mêmes puissances dans la série dont la somme constitue le second membre de l'équation (23); 2° que dans cette série les coefficients des puissances dont l'exposant surpasse le degré du polynôme $f(x)$ se réduisent à zéro. D'ailleurs, si l'on considère un terme de la série dans lequel l'exposant n de la variable x surpasse le degré du polynôme $f(x)$, et soit en même temps égal ou supérieur à m, ce terme sera de la forme

$$(qa_n + pa_{n-1} + \ldots + la_{n-m+1} + ka_{n-m})x^n.$$

Donc, toutes les fois que la valeur de n, étant supérieure au degré du polynôme $f(x)$, sera de plus égale ou supérieure au degré m du polynôme $F(x)$, les coefficients

$$a_n,\quad a_{n-1},\quad \ldots,\quad a_{n-m+1},\quad a_{n-m}$$

se trouveront assujettis à l'équation linéaire

$$(24)\qquad qa_n + pa_{n-1} + \ldots + la_{n-m+1} + ka_{n-m} = 0;$$

et par suite, pour une semblable valeur de n, le coefficient a_n de la puissance x^n s'exprimera en fonction linéaire de ceux des puissances inférieures prises consécutivement au nombre de m. La série (18)

sera donc l'une de celles que l'on nomme *récurrentes*. Son échelle de relation se composera des constantes

$$k,\quad l,\quad \ldots,\quad p,\quad q,$$

respectivement égales aux coefficients des diverses puissances de x dans le polynôme $F(x)$.

Parmi les séries qui représentent les développements des fractions renfermées dans le second membre de la formule (17), et qui sont toutes convergentes dans le cas où le module de la variable x reste inférieur aux modules des diverses racines de l'équation (15), l'une au moins deviendrait divergente si le module de la variable venait à surpasser celui de quelque racine. Par suite, la série (18), toujours convergente dans le premier cas, sera divergente dans le second. D'autre part, si l'on fait croître indéfiniment le nombre entier n, et si l'on désigne par ρ_n le module du coefficient a_n dans la série (18), cette série sera convergente ou divergente (*voir* le § I) suivant que le module de x sera inférieur ou supérieur à la plus petite des limites de $(\rho_n)^{-\frac{1}{n}}$. Comme les deux règles de convergence que nous venons d'énoncer doivent nécessairement s'accorder entre elles, on peut conclure que *le plus petit des modules qui correspondent aux racines de l'équation* (15) *est précisément égal à la plus petite des limites de l'expression* $(\rho_n)^{-\frac{1}{n}}$.

Lorsque les deux fonctions $f(x)$, $F(x)$ sont réelles, le coefficient a_n l'est aussi, et son module ρ_n ne diffère pas de sa valeur numérique. Si dans la même hypothèse l'équation $F(x) = 0$ n'a que des racines réelles, la racine qui aura la plus petite valeur numérique sera, d'après ce qu'on vient de dire, égale (au signe près) à la plus petite des limites de $(\rho_n)^{-\frac{1}{n}}$. Enfin, si le rapport $\frac{\rho_n}{\rho_{n+1}}$ converge vers une limite fixe, on pourra la substituer (Chap. II, § III, théorème II) à la limite cherchée de l'expression $(\rho)^{-\frac{1}{n}}$. Cette remarque conduit à la règle qu'a donnée Daniel Bernoulli pour déterminer numériquement la plus petite (abstraction faite du signe) de toutes les quantités qui représentent les racines supposées réelles d'une équation algébrique.

§ III. — *Sommation des séries récurrentes, et fixation de leurs termes généraux.*

Lorsqu'une série ordonnée suivant les puissances ascendantes de la variable x est à la fois convergente et récurrente, elle a toujours pour somme une fraction rationnelle. En effet, soit

$$(1)\qquad a_0,\quad a_1x,\quad a_2x^2,\quad \ldots,\quad a_nx^n,\quad \ldots$$

une semblable série, et supposons que, pour des valeurs de n supérieures à une certaine limite, le coefficient a_n de la puissance x^n soit déterminé, en fonction linéaire des coefficients des puissances inférieures pris en nombre égal à n, par une équation de la forme

$$(2)\qquad ka_{n-m}+la_{n-m+1}+\ldots+pa_{n-1}+qa_n=0,$$

en sorte que les constantes

$$k,\quad l,\quad \ldots,\quad p,\quad q$$

forment l'échelle de relation de la série. Si l'on multiplie la somme de cette série, savoir

$$a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots$$

par le polynôme

$$kx^m+lx^{m-1}+\ldots+px+q,$$

le produit obtenu sera la somme d'une nouvelle série dans laquelle le coefficient de x^n, calculé comme dans le Chapitre VI (§ IV, théorème V), s'évanouira pour des valeurs de n supérieures à la limite assignée. En d'autres termes, le produit dont il est question sera un nouveau polynôme d'un degré marqué par cette limite. Si l'on désigne ce nouveau polynôme par $f(x)$, on aura

$$(3)\qquad f(x)=(kx^m+lx^{m-1}+\ldots+px+q)(a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots)$$

et, par suite,

$$(4)\qquad a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots=\frac{f(x)}{kx^m+lx^{m-1}+\ldots+px+q}.$$

Donc toute série qui, ordonnée suivant les puissances ascendantes et entières de la variable x, est à la fois convergente et récurrente, a pour somme une fraction rationnelle, dont le dénominateur est un polynôme dans lequel les puissances successives de x ont pour coefficients les différents termes de l'échelle de relation de la série.

Lorsque pour faire connaître une série récurrente on donne seulement ses premiers termes et l'échelle de relation qui sert à déduire des premiers termes tous ceux qui les suivent, on détermine sans peine, à l'aide de la méthode que nous venons d'indiquer, la fraction rationnelle qui représente la somme de la série dans le cas où elle demeure convergente. Cette fraction rationnelle étant calculée, on pourra lui substituer une somme de fractions simples augmentée, s'il y a lieu, d'une fonction entière de la variable x; et, si l'on cherche ensuite les séries récurrentes qui, pour des valeurs de x convenablement choisies, expriment les développements des fractions simples dont il s'agit, on obtiendra, en ajoutant les termes généraux de ces mêmes séries, le terme général de la série proposée.