CHAPITRE VI.

DES SÉRIES CONVERGENTES ET DIVERGENTES. RÈGLES SUR LA CONVERGENCE DES SÉRIES. SOMMATION DE QUELQUES SÉRIES CONVERGENTES.

§ I. — *Considérations générales sur les séries.*

On appelle *série* une suite indéfinie de quantités

$$u_0,\quad u_1,\quad u_2,\quad u_3,\quad \ldots$$

qui dérivent les unes des autres suivant une loi déterminée. Ces quantités elles-mêmes sont les différents termes de la série que l'on considère. Soit

$$s_n = u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_{n-1}$$

la somme des n premiers termes, n désignant un nombre entier quelconque. Si, pour des valeurs de n toujours croissantes, la somme s_n s'approche indéfiniment d'une certaine limite s, la série sera dite *convergente*, et la limite en question s'appellera la *somme* de la série. Au contraire, si, tandis que n croît indéfiniment, la somme s_n ne s'approche d'aucune limite fixe, la série sera *divergente* et n'aura plus de somme. Dans l'un et l'autre cas, le terme qui correspond à l'indice n, savoir u_n, sera ce qu'on nomme le *terme général*. Il suffit que l'on donne ce terme général en fonction de l'indice n, pour que la série soit complètement déterminée.

L'une des séries les plus simples est la progression géométrique

$$1,\quad x,\quad x^2,\quad x^3,\quad \ldots,$$

qui a pour terme général x^n, c'est-à-dire la puissance $n^{\text{ième}}$ de la quantité x. Si dans cette série on fait la somme des n premiers termes, on trouvera

$$1 + x + x^2 + \ldots + x^{n-1} = \frac{1}{1-x} - \frac{x^n}{1-x};$$

et, comme pour des valeurs croissantes de n, la valeur numérique de la fraction $\frac{x^n}{1-x}$ converge vers la limite zéro, ou croît au delà de toute limite, suivant qu'on suppose la valeur numérique de x inférieure ou supérieure à l'unité, on doit conclure que, dans la première hypothèse, la progression

$$1,\quad x,\quad x^2,\quad x^3,\quad \ldots$$

est une série convergente qui a pour somme $\frac{1}{1-x}$, tandis que, dans la seconde hypothèse, la même progression est une série divergente qui n'a plus de somme.

D'après les principes ci-dessus établis, pour que la série

$$(1)\qquad u_0,\quad u_1,\quad u_2,\quad \ldots,\quad u_n,\quad u_{n+1},\quad \ldots$$

soit convergente, il est nécessaire et il suffit que des valeurs croissantes de n fassent converger indéfiniment la somme

$$s_n = u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_{n-1}$$

vers une limite fixe s; en d'autres termes, il est nécessaire et il suffit que, pour des valeurs infiniment grandes du nombre n, les sommes

$$s_n,\quad s_{n+1},\quad s_{n+2},\quad \ldots$$

diffèrent de la limite s, et par conséquent entre elles, de quantités infiniment petites. D'ailleurs, les différences successives entre la première somme s_n et chacune des suivantes sont respectivement déterminées par les équations

$$s_{n+1} - s_n = u_n,$$
$$s_{n+2} - s_n = u_n + u_{n+1},$$
$$s_{n+3} - s_n = u_n + u_{n+1} + u_{n+2},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Donc, pour que la série (1) soit convergente, il est d'abord nécessaire que le terme général u_n décroisse indéfiniment, tandis que n augmente; mais cette condition ne suffit pas, et il faut encore que, pour des valeurs croissantes de n, les différentes sommes

$$\begin{gathered} u_n + u_{n+1}, \\ u_n + u_{n+1} + u_{n+2}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots, \end{gathered}$$

c'est-à-dire les sommes des quantités

$$u_n, \quad u_{n+1}, \quad u_{n+2}, \quad \dots,$$

prises, à partir de la première, en tel nombre que l'on voudra, finissent par obtenir constamment des valeurs numériques inférieures à toute limite assignable. Réciproquement, lorsque ces diverses conditions sont remplies, la convergence de la série est assurée.

Prenons pour exemple la progression géométrique

$$(2) \qquad 1, \quad x, \quad x^2, \quad x^3, \quad \dots.$$

Si la valeur numérique de x est supérieure à l'unité, celle du terme général x^n croîtra indéfiniment avec n, et cette seule remarque suffira pour constater la divergence de la série. La série sera encore divergente si l'on suppose $x = \pm 1$, parce qu'alors la valeur numérique du terme général x^n, se réduisant à l'unité, ne décroîtra pas indéfiniment pour des valeurs croissantes de n. Mais, si la valeur numérique de x est inférieure à l'unité, les sommes des termes de la série pris à partir de x^n en tel nombre que l'on voudra, savoir :

$$\begin{aligned} &x^n, \\ &x^n + x^{n+1} = x^n \frac{1-x^2}{1-x}, \\ x^n + {} &x^{n+1} + x^{n+2} = x^n \frac{1-x^3}{1-x}, \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \end{aligned}$$

se trouvant toutes comprises entre les limites

$$x^n, \quad \frac{x^n}{1-x},$$

chacune d'elles deviendra infiniment petite pour des valeurs de n infiniment grandes; et par suite la série sera convergente, ce que l'on savait déjà.

Prenons pour second exemple la série numérique

$$(3) \qquad 1, \quad \frac{1}{2}, \quad \frac{1}{3}, \quad \frac{1}{4}, \quad \dots, \quad \frac{1}{n}, \quad \frac{1}{n+1}, \quad \dots.$$

Le terme général de cette série, savoir $\frac{1}{n+1}$, décroît indéfiniment à mesure que n augmente, et cependant la série n'est pas convergente; car la somme faite du terme $\frac{1}{n+1}$ et de ceux qui le suivent jusqu'au terme $\frac{1}{2n}$ inclusivement, savoir

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n-1} + \frac{1}{2n},$$

reste constamment supérieure, quel que soit n, au produit

$$n \frac{1}{2n} = \frac{1}{2};$$

et par suite cette somme ne décroît pas indéfiniment pour des valeurs croissantes de n, ainsi que cela aurait lieu si la série était convergente. Ajoutons que, si l'on désigne par s_n la somme des n premiers termes de la série (3), et par 2^m la plus haute puissance de 2 renfermée dans $n+1$, on trouvera

$$\begin{aligned} s_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n+1} > 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) \\ + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right) + \dots + \left(\frac{1}{2^{m-1}+1} + \frac{1}{2^{m-1}+2} + \dots + \frac{1}{2^m}\right), \end{aligned}$$

et, *a fortiori*,

$$s_n > 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2} = 1 + \frac{m}{2}.$$

On en conclura que la somme s_n croît indéfiniment avec le nombre entier m, et par conséquent avec n, ce qui est une nouvelle preuve de la divergence de la série.

Considérons encore la série numérique

$$(4) \qquad 1, \quad \frac{1}{1}, \quad \frac{1}{1.2}, \quad \frac{1}{1.2.3}, \quad \ldots, \quad \frac{1}{1.2.3\ldots n}, \quad \ldots.$$

Les termes de cette série, qui occupent un rang supérieur à n, savoir

$$\frac{1}{1.2.3\ldots n}, \quad \frac{1}{1.2.3\ldots n(n+1)}, \quad \frac{1}{1.2.3\ldots n(n+1)(n+2)}, \quad \ldots,$$

seront respectivement inférieurs aux termes correspondants de la progression géométrique

$$\frac{1}{1.2.3\ldots n}, \quad \frac{1}{1.2.3\ldots n}\,\frac{1}{n}, \quad \frac{1}{1.2.3\ldots n}\,\frac{1}{n^2}, \quad \ldots.$$

Par suite, la somme des premiers termes pris en tel nombre que l'on voudra sera toujours inférieure à la somme des termes correspondants de la progression géométrique, qui est une série convergente, et à plus forte raison, à la somme de cette progression, c'est-à-dire à

$$\frac{1}{1.2.3\ldots n}\,\frac{1}{1-\frac{1}{n}} = \frac{1}{1.2.3\ldots(n-1)}\,\frac{1}{n-1}.$$

Comme cette dernière somme décroît indéfiniment à mesure que n augmente, il en résulte que la série (4) est elle-même convergente. On est convenu de désigner par la lettre e la somme de cette série. En ajoutant les n premiers termes, on obtiendra, pour valeur approchée du nombre e,

$$1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{1.2.3} + \ldots + \frac{1}{1.2.3\ldots(n-1)};$$

et, d'après ce qu'on vient de dire, l'erreur commise sera inférieure au produit du $n^{\text{ième}}$ terme par $\frac{1}{n-1}$. Ainsi, par exemple, si l'on suppose $n = 11$, on trouvera pour la valeur approchée de e

$$(5) \qquad e = 2{,}7182818\ldots;$$

et l'erreur commise dans cette hypothèse sera inférieure au produit

de la fraction $\frac{1}{1.2.3.4.5.6.7.8.9.10}$ par $\frac{1}{10}$, c'est-à-dire à $\frac{1}{36288000}$, en sorte qu'elle n'altérera pas la septième décimale.

Le nombre e, déterminé comme on vient de le dire, sera souvent employé dans la sommation des suites et dans le Calcul infinitésimal. Les logarithmes pris dans le système qui a ce nombre pour base s'appellent *népériens*, du nom de *Néper*, inventeur des logarithmes, ou *hyperboliques*, parce qu'ils servent à mesurer les diverses parties de l'aire comprise entre l'hyperbole équilatère et ses asymptotes.

On indique généralement la somme d'une série convergente par la somme de ses premiers termes suivie de points. Ainsi, lorsque la série

$$u_0, \quad u_1, \quad u_2, \quad u_3, \quad \ldots$$

est convergente, la somme de cette série est représentée par

$$u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + \ldots.$$

En vertu de cette convention, la valeur du nombre e se trouvera déterminée par l'équation

$$(6) \qquad e = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{1.2.3.4} + \ldots;$$

et, si l'on considère la progression géométrique

$$1, \quad x, \quad x^2, \quad x^3, \quad \ldots,$$

on aura, pour des valeurs numériques de x inférieures à l'unité,

$$(7) \qquad 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots = \frac{1}{1-x}.$$

La série

$$u_0, \quad u_1, \quad u_2, \quad u_3, \quad \ldots$$

étant supposée convergente, si l'on désigne sa somme par s, et par s_n la somme de ses n premiers termes, on trouvera

$$s = u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_{n-1} + u_n + u_{n+1} + \ldots = s_n + u_n + u_{n+1} + \ldots$$

et, par suite,

$$s - s_n = u_n + u_{n+1} + \ldots.$$

De cette dernière équation, il résulte que les quantités

$$u_n,\quad u_{n+1},\quad u_{n+2},\quad \ldots$$

formeront une nouvelle série convergente dont la somme sera équivalente à $s - s_n$. Si l'on représente cette même somme par r_n, on aura

$$s = s_n + r_n;$$

et r_n sera ce qu'on appelle le *reste* de la série (1) à partir du $n^{\text{ième}}$ terme.

Lorsque, les termes de la série (1) renfermant une même variable x, cette série est convergente, et ses différents termes fonctions continues de x, dans le voisinage d'une valeur particulière attribuée à cette variable,

$$s_n,\quad r_n \quad \text{et} \quad s$$

sont encore trois fonctions de la variable x, dont la première est évidemment continue par rapport à x dans le voisinage de la valeur particulière dont il s'agit. Cela posé, considérons les accroissements que reçoivent ces trois fonctions, lorsqu'on fait croître x d'une quantité infiniment petite α. L'accroissement de s_n sera, pour toutes les valeurs possibles de n, une quantité infiniment petite; et celui de r_n deviendra insensible en même temps que r_n, si l'on attribue à n une valeur très considérable. Par suite, l'accroissement de la fonction s ne pourra être qu'une quantité infiniment petite. De cette remarque on déduit immédiatement la proposition suivante :

Théorème I. — *Lorsque les différents termes de la série* (1) *sont des fonctions d'une même variable x, continues par rapport à cette variable dans le voisinage d'une valeur particulière pour laquelle la série est convergente, la somme s de la série est aussi, dans le voisinage de cette valeur particulière, fonction continue de x.*

En vertu de ce théorème, la somme de la série (2) devra rester fonction continue de la variable x, entre les limites $x = -1$, $x = 1$;

ce qu'on peut vérifier à l'inspection de la valeur de s donnée par l'équation

$$s = \frac{1}{1-x}.$$

§ II. — *Des séries dont tous les termes sont positifs.*

Lorsque la série

$$(1) \qquad u_0,\quad u_1,\quad u_2,\quad \ldots,\quad u_n,\quad \ldots$$

a tous ses termes positifs, on peut ordinairement décider si elle est convergente ou divergente, à l'aide du théorème suivant :

Théorème I. — *Cherchez la limite ou les limites vers lesquelles converge, tandis que n croît indéfiniment, l'expression $(u_n)^{\frac{1}{n}}$, et désignez par k la plus grande de ces limites, ou, en d'autres termes, la limite des plus grandes valeurs de l'expression dont il s'agit. La série* (1) *sera convergente si l'on a $k < 1$, et divergente si l'on a $k > 1$.*

Démonstration. — Supposons d'abord $k < 1$, et choisissons à volonté entre les deux nombres 1 et k un troisième nombre U, en sorte qu'on ait

$$k < U < 1.$$

n venant à croître au delà de toute limite assignable, les plus grandes valeurs de $(u_n)^{\frac{1}{n}}$ ne pourront s'approcher indéfiniment de la limite k, sans finir par être constamment inférieures à U. Par suite, il sera possible d'attribuer au nombre entier n une valeur assez considérable pour que, n obtenant cette même valeur ou une valeur plus grande encore, on ait constamment

$$(u)^{\frac{1}{n}} < U,\qquad u_n < U^n.$$

Il en résulte que les termes de la série

$$u_0,\quad u_1,\quad u_2,\quad \ldots,\quad u_{n+1},\quad u_{n+2},\quad \ldots$$

finiront par être toujours inférieurs aux termes correspondants de la progression géométrique

$$1, \quad U, \quad U^2, \quad \ldots, \quad U^n, \quad U^{n+1}, \quad U^{n+2}, \quad \ldots;$$

et, comme cette progression est convergente (à cause de $U < 1$), on peut, de la remarque précédente, conclure *a fortiori* la convergence de la série (1).

Supposons, en second lieu, $k > 1$, et plaçons encore entre les deux nombres 1 et k un troisième nombre U, en sorte qu'on ait

$$k > U > 1.$$

Si n vient à croître au delà de toute limite, les plus grandes valeurs de $(u_n)^{\frac{1}{n}}$, en s'approchant indéfiniment de k, finiront par devenir supérieures à U. On pourra donc satisfaire à la condition

$$(u_n)^{\frac{1}{n}} > U$$

ou, ce qui revient au même, à la suivante

$$u_n > U^n,$$

par des valeurs de n aussi considérables que l'on voudra; et par suite, on trouvera dans la série

$$u_0, \quad u_1, \quad u_2, \quad \ldots, \quad u_n, \quad u_{n+1}, \quad u_{n+2}, \quad \ldots$$

un nombre indéfini de termes supérieurs aux termes correspondants de la progression géométrique

$$1, \quad U, \quad U^2, \quad \ldots, \quad U^n, \quad U^{n+1}, \quad U^{n+2}, \quad \ldots.$$

Comme cette progression est divergente (à cause de $U > 1$), et qu'en conséquence ses différents termes croissent à l'infini, la remarque que l'on vient de faire suffira pour établir la divergence de la série (1).

Dans un grand nombre de circonstances, on peut déterminer la valeur de la quantité k à l'aide du théorème IV (Chap. II, § III). En

effet, en vertu de ce théorème, toutes les fois que le rapport $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ convergera vers une limite fixe, cette limite sera précisément la valeur de k. On peut donc énoncer la proposition suivante :

THÉORÈME II. — *Si, pour des valeurs croissantes de* n, *le rapport*

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}$$

converge vers une limite fixe k, *la série* (1) *sera convergente toutes les fois que l'on aura* $k < 1$, *et divergente toutes les fois que l'on aura* $k > 1$.

Concevons, par exemple, que l'on considère la série

$$1, \quad \frac{1}{1}, \quad \frac{1}{1.2}, \quad \frac{1}{1.2.3}, \quad \ldots, \quad \frac{1}{1.2.3\ldots n}, \quad \ldots;$$

on trouvera

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1.2.3\ldots n}{1.2.3\ldots n(n+1)} = \frac{1}{n+1}, \qquad k = \frac{1}{\infty} = 0,$$

et par conséquent la série sera convergente, ce que l'on savait déjà.

Le premier des deux théorèmes qu'on vient d'établir ne laisse d'incertitude sur la convergence ou la divergence d'une série dont tous les termes sont positifs, que dans le cas particulier où la quantité représentée par k devient égale à l'unité. Dans ce cas particulier, il n'est pas toujours facile de décider la question. Toutefois, nous allons démontrer ici deux nouvelles propositions à l'aide desquelles on peut souvent y parvenir.

THÉORÈME III. — *Lorsque, dans la série* (1), *chaque terme est inférieur à celui qui le précède, cette série et la suivante*

$$(2) \qquad u_0, \quad 2u_1, \quad 4u_3, \quad 8u_7, \quad 16u_{15}, \quad \ldots$$

sont en même temps convergentes ou divergentes.

Démonstration. — Supposons d'abord la série (1) convergente, et désignons sa somme par s. On aura

$$\begin{aligned}
u_0 &= u_0,\\
2u_1 &= 2u_1,\\
4u_3 &< 2u_2 + 2u_3,\\
8u_7 &< 2u_4 + 2u_5 + 2u_6 + 2u_7,\\
&\dots\dots\dots\dots,
\end{aligned}$$

et par suite la somme des termes de la série (2), pris en tel nombre que l'on voudra, sera inférieure à

$$u_0 + 2u_1 + 2u_2 + 2u_3 + 2u_4 + \ldots = 2s - u_0.$$

Il en résulte que la série (2) sera convergente.

Supposons, en second lieu, la série (1) divergente. La somme de ses termes, pris en très grand nombre, finira par surpasser toute limite assignable; et, comme on aura

$$\begin{aligned}
u_0 &= u_0,\\
2u_1 &> u_1 + u_2,\\
4u_3 &> u_3 + u_4 + u_5 + u_6,\\
8u_7 &> u_7 + u_8 + u_9 + u_{10} + u_{11} + u_{12} + u_{13} + u_{14},\\
&\dots\dots\dots\dots,
\end{aligned}$$

on devra conclure que la somme des quantités

$$u_0, \quad 2u_1, \quad 4u_3, \quad 8u_7, \quad \ldots,$$

prises en très grand nombre, finit elle-même par devenir supérieure à toute quantité donnée. La série (2) sera donc alors divergente, conformément au théorème énoncé.

Corollaire. — Si pour la série (1) on prend la suivante

$$(3) \qquad 1, \quad \frac{1}{2^\mu}, \quad \frac{1}{3^\mu}, \quad \frac{1}{4^\mu}, \quad \ldots,$$

μ désignant une quantité quelconque, la série (2) deviendra

$$1, \quad 2^{1-\mu}, \quad 4^{1-\mu}, \quad 8^{1-\mu}, \quad \ldots.$$

Cette dernière est une progression géométrique, convergente lorsqu'on suppose $\mu > 1$, et divergente dans le cas contraire. Par suite, la série (3) sera elle-même convergente si μ est un nombre supérieur à l'unité, et divergente si l'on a $\mu = 1$ ou $\mu < 1$. Par exemple, des trois séries

$$(4) \qquad 1, \quad \frac{1}{2^2}, \quad \frac{1}{3^2}, \quad \frac{1}{4^2}, \quad \ldots,$$

$$(5) \qquad 1, \quad \frac{1}{2}, \quad \frac{1}{3}, \quad \frac{1}{4}, \quad \ldots,$$

$$(6) \qquad 1, \quad \frac{1}{2^{\frac{1}{2}}}, \quad \frac{1}{3^{\frac{1}{2}}}, \quad \frac{1}{4^{\frac{1}{2}}}, \quad \ldots,$$

la première sera convergente et les deux autres divergentes.

Théorème IV. — *Supposons que l'on désigne par* L *la caractéristique des logarithmes dans un système quelconque, et que, pour des valeurs croissantes de* n, *le rapport*

$$\frac{\mathrm{L}(u_n)}{\mathrm{L}\left(\frac{1}{n}\right)}$$

converge vers une limite finie h. *La série* (1) *sera convergente si l'on a* $h > 1$, *et divergente si l'on a* $h < 1$.

Démonstration. — Supposons d'abord $h > 1$, et choisissons à volonté entre les deux quantités 1 et h une troisième quantité a, en sorte qu'on ait

$$h > a > 1.$$

Le rapport $\dfrac{\mathrm{L}(u_n)}{\mathrm{L}\left(\frac{1}{n}\right)}$, ou son égal

$$\frac{\mathrm{L}\left(\frac{1}{u_n}\right)}{\mathrm{L}(n)},$$

finira par être, pour de très grandes valeurs de n, constamment supérieur à la quantité a. En d'autres termes, n venant à croître au delà d'une certaine limite, on aura toujours

$$\frac{\mathrm{L}\left(\frac{1}{u_n}\right)}{\mathrm{L}(n)} > a$$

ou, ce qui revient au même,

$$\mathrm{L}\left(\frac{1}{u_n}\right) > a\,\mathrm{L}(n),$$

et, par suite,

$$\frac{1}{u_n} > n^a, \qquad u_n < \frac{1}{n^a}.$$

Il en résulte que les termes de la série (1) finiront par être constamment inférieurs aux termes correspondants de la suivante

$$1, \quad \frac{1}{2^a}, \quad \frac{1}{3^a}, \quad \frac{1}{4^a}, \quad \dots, \quad \frac{1}{n^a}, \quad \frac{1}{(n+1)^a}, \quad \dots;$$

et, comme cette dernière sera convergente (à cause de $a > 1$), on pourra de la remarque précédente conclure *a fortiori* la convergence de la série (1).

Supposons, en second lieu, $h < 1$, et plaçons encore entre les quantités 1 et h une troisième quantité a, en sorte qu'on ait

$$h < a < 1.$$

On finira par avoir constamment, pour de très grandes valeurs de n,

$$\frac{\mathrm{L}\left(\frac{1}{u_n}\right)}{\mathrm{L}(n)} < a$$

ou, ce qui revient au même,

$$\mathrm{L}\left(\frac{1}{u_n}\right) < a\,\mathrm{L}(n),$$

et, par suite,

$$\frac{1}{u_n} < n^a, \qquad u_n > \frac{1}{n^a}.$$

Il en résulte que les termes de la série (1) finiront par être constam-

ment supérieurs aux termes correspondants de la suivante

$$1, \quad \frac{1}{2^a}, \quad \frac{1}{3^a}, \quad \frac{1}{4^a}, \quad \dots, \quad \frac{1}{n^a}, \quad \frac{1}{(n+1)^a}, \quad \dots;$$

et, comme cette dernière sera divergente (à cause de $a < 1$), on pourra de la remarque qu'on vient de faire conclure *a fortiori* la divergence de la série (1).

Étant données deux séries convergentes dont tous les termes sont positifs, on peut, en ajoutant ou multipliant ces mêmes termes, former une nouvelle série dont la somme résulte de l'addition ou de la multiplication des sommes des deux premières. Nous établirons à ce sujet les deux théorèmes suivants :

Théorème V. — *Soient*

$$(7) \qquad \begin{cases} u_0, & u_1, & u_2, & \dots, & u_n, & \dots, \\ v_0, & v_1, & v_2, & \dots, & v_n, & \dots \end{cases}$$

deux séries convergentes, qui, uniquement composées de termes positifs, aient respectivement pour sommes s et s' :

$$(8) \qquad u_0 + v_0, \quad u_1 + v_1, \quad u_2 + v_2, \quad \dots, \quad u_n + v_n, \quad \dots$$

sera une nouvelle série convergente, qui aura pour somme $s + s'$.

Démonstration. — Si l'on fait

$$s_n = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_{n-1},$$
$$s'_n = v_0 + v_1 + v_2 + \dots + v_{n-1},$$

s_n et s'_n convergeront respectivement, pour des valeurs croissantes de n, vers les limites s et s'. Par suite, $s_n + s'_n$, c'est-à-dire la somme des n premiers termes de la série (8), convergera vers la limite $s + s'$, ce qui suffit pour établir le théorème énoncé.

Théorème VI. — *Les mêmes choses étant posées que dans le théorème précédent,*

$$(9) \qquad \begin{cases} u_0 v_0, \quad u_0 v_1 + u_1 v_0, \quad u_0 v_2 + u_1 v_1 + u_2 v_0, \quad \dots \\ \dots, \quad u_0 v_n + u_1 v_{n-1} + \dots + u_{n-1} v_1 + u_n v_0, \quad \dots \end{cases}$$

sera une nouvelle série convergente, qui aura pour somme ss'.

Démonstration. — Soient toujours s_n, s'_n les sommes des n premiers termes des deux séries (7), et désignons en outre par s''_n la somme des n premiers termes de la série (9). Si l'on représente par m le plus grand nombre entier compris dans $\frac{n-1}{2}$, c'est-à-dire $\frac{n-1}{2}$ lorsque n est impair, et $\frac{n-2}{2}$ dans le cas contraire, on aura évidemment

$$u_0v_0+(u_0v_1+u_1v_0)+\ldots+(u_0v_{n-1}+u_1v_{n-2}+\ldots+u_{n-2}v_1+u_{n-1}v_0)$$
$$<(u_0+u_1+\ldots+u_{n-1})(v_0+v_1+\ldots+v_{n-1})$$

et

$$>(u_0+u_1+\ldots+u_m)\quad(v_0+v_1+\ldots+v_m),$$

ou, en d'autres termes,

$$s''_n<s_ns'_n \qquad \text{et} \qquad >s_{m+1}s'_{m+1}.$$

Concevons maintenant que l'on fasse croître n au delà de toute limite. Le nombre

$$m=\frac{n-\frac{3}{2}\pm\frac{1}{2}}{2}$$

croîtra lui-même indéfiniment, et les deux sommes s_n, s_{m+1} convergeront vers la limite s, tandis que s'_n et s'_{m+1} convergeront vers la limite s'. Par suite, les deux produits $s_ns'_n$, $s_{m+1}s'_{m+1}$ et la somme s''_n comprise entre ces deux produits convergeront vers la limite ss', ce qui suffit pour établir le théorème VI.

§ III. — *Des séries qui renferment des termes positifs et des termes négatifs.*

Supposons que la série

(1) $$u_0,\quad u_1,\quad u_2,\quad \ldots,\quad u_n,\quad \ldots$$

se compose de termes, tantôt positifs, tantôt négatifs, et soient respectivement

(2) $$\rho_0,\quad \rho_1,\quad \rho_2,\quad \ldots,\quad \rho_n,\quad \ldots$$

les valeurs numériques de ces mêmes termes, en sorte qu'on ait

$$u_0=\pm\rho_0,\quad u_1=\pm\rho_1,\quad u_2=\pm\rho_2,\quad \ldots,\quad u_n=\pm\rho_n,\quad \ldots.$$

La valeur numérique de la somme

$$u_0+u_1+u_2+\ldots+u_{n-1}$$

ne pouvant jamais surpasser

$$\rho_0+\rho_1+\rho_2+\ldots+\rho_{n-1},$$

il en résulte que la convergence de la série (2) entraînera toujours celle de la série (1). On doit ajouter que la série (1) sera divergente, si quelques termes de la série (2) finissent par croître au delà de toute limite assignable. Ce dernier cas se présente lorsque les plus grandes valeurs de $(\rho_n)^{\frac{1}{n}}$ convergent, pour des valeurs croissantes de n, vers une limite supérieure à l'unité. Au contraire, lorsque cette limite devient inférieure à l'unité, la série (2) est toujours convergente. On peut, en conséquence, énoncer le théorème suivant :

Théorème I. — *Soit ρ_n la valeur numérique du terme général u_n de la série* (1), *et désignons par k la limite vers laquelle convergent, tandis que n croît indéfiniment, les plus grandes valeurs de l'expression $(\rho_n)^{\frac{1}{n}}$. La série* (1) *sera convergente si l'on a $k<1$, et divergente si l'on a $k>1$.*

Lorsque la fraction $\frac{\rho_{n+1}}{\rho_n}$, c'est-à-dire la valeur numérique du rapport $\frac{u_{n+1}}{u_n}$, convergera vers une limite fixe, cette limite sera, en vertu du théorème IV (Chap. II, § III), la valeur cherchée de k. Cette remarque conduit à la proposition que je vais écrire :

Théorème II. — *Si, pour des valeurs croissantes de n, la valeur numérique du rapport*

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}$$

converge vers une limite fixe k, la série (1) *sera convergente toutes les fois que l'on aura $k<1$, et divergente toutes les fois que l'on aura $k>1$.*

Par exemple, si l'on considère la série

$$1,\quad -\frac{1}{1},\quad +\frac{1}{1.2},\quad -\frac{1}{1.2.3},\quad +\ldots,$$

on trouvera

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = -\frac{1}{n+1},\qquad k = \frac{1}{\infty} = 0;$$

d'où il résulte que la série sera convergente.

Le premier des deux théorèmes qu'on vient d'établir ne laisse d'incertitude sur la convergence ou la divergence d'une série que dans le cas particulier où la quantité représentée par k devient égale à l'unité. Dans ce cas particulier, on peut quelquefois constater la convergence de la série proposée, soit en s'assurant que les valeurs numériques de ses différents termes forment une série convergente, soit en ayant égard au théorème suivant :

Théorème III. — *Si dans la série* (1) *la valeur numérique du terme général u_n décroît constamment et indéfiniment, pour des valeurs croissantes de n, si de plus les différents termes sont alternativement positifs et négatifs, la série sera convergente.*

Considérons, par exemple, la série

$$(3)\qquad 1,\quad -\frac{1}{2},\quad +\frac{1}{3},\quad -\frac{1}{4},\quad +\ldots\pm\frac{1}{n},\quad \mp\frac{1}{n+1},\quad \ldots.$$

La somme des termes dont le rang surpasse n, si on les suppose pris en nombre égal à m, sera

$$\pm\left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} - \frac{1}{n+4} + \ldots \pm \frac{1}{n+m}\right).$$

Or la valeur numérique de cette somme, savoir

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} - \frac{1}{n+4} + \ldots \pm \frac{1}{n+m}\\
&= \frac{1}{n+1} - \left(\frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3}\right) - \left(\frac{1}{n+4} - \frac{1}{n+5}\right) - \ldots\\
&= \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right) + \left(\frac{1}{n+3} - \frac{1}{n+4}\right) + \left(\frac{1}{n+5} - \frac{1}{n+6}\right) + \ldots,
\end{aligned}$$

étant évidemment comprise entre

$$\frac{1}{n+1}\quad\text{et}\quad \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2},$$

décroîtra indéfiniment pour des valeurs croissantes de n, quel que soit m, ce qui suffit pour établir la convergence de la série proposée. Les mêmes raisonnements peuvent évidemment s'appliquer à toutes les séries de ce genre. Je citerai, entre autres, la suivante

$$(4)\qquad 1,\quad -\frac{1}{2^\mu},\quad +\frac{1}{3^\mu},\quad -\frac{1}{4^\mu},\quad \ldots,$$

laquelle, en vertu du théorème III, restera convergente pour toutes les valeurs positives de μ.

Si dans la série (4) on supprime le signe — devant chacun des termes de rang pair, on obtiendra la série (3) du § II, qui est divergente toutes les fois que l'on suppose $\mu = 1$ ou $\mu < 1$. Par suite, pour transformer une série convergente en série divergente, ou réciproquement, il suffit quelquefois de changer les signes de certains termes. Au reste, cette remarque est uniquement applicable aux séries pour lesquelles la quantité désignée par k dans le théorème II se réduit à l'unité.

Étant donnée une série convergente dont tous les termes sont positifs, on ne peut qu'augmenter la convergence en diminuant les valeurs numériques de ces mêmes termes, et changeant les signes de quelques-uns. Il est bon d'observer qu'on produira ce double effet si l'on multiplie chaque terme par un sinus ou par un cosinus, et cette observation suffit pour établir la proposition suivante :

Théorème IV. — *Lorsque la série*

$$(2)\qquad \rho_0,\quad \rho_1,\quad \rho_2,\quad \ldots,\quad \rho_n,\quad \ldots,$$

uniquement formée de termes positifs, est convergente, chacune des suivantes

$$(5)\qquad \begin{cases} \rho_0\cos\theta_0,\quad \rho_1\cos\theta_1,\quad \rho_2\cos\theta_2,\quad \ldots,\quad \rho_n\cos\theta_n,\quad \ldots,\\ \rho_0\sin\theta_0,\quad \rho_1\sin\theta_1,\quad \rho_2\sin\theta_2,\quad \ldots,\quad \rho_n\sin\theta_n,\quad \ldots \end{cases}$$

l'est pareillement, quelles que soient les valeurs des arcs $\theta_0, \theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_n, \ldots$.

Corollaire. — Si l'on suppose généralement

$$\theta_n = n\theta,$$

θ désignant un arc quelconque, les séries (5) deviendront respectivement

$$(6)\qquad \begin{cases} \rho_0, & \rho_1\cos\theta, & \rho_2\cos 2\theta, & \ldots, & \rho_n\cos n\theta, & \ldots, \\ & \rho_1\sin\theta, & \rho_2\sin 2\theta, & \ldots, & \rho_n\sin n\theta, & \ldots. \end{cases}$$

Ces deux dernières seront donc toujours convergentes en même temps que la série (2).

Si l'on considère à la fois deux séries dont chacune renferme des termes positifs et des termes négatifs, on démontrera facilement à leur égard les théorèmes V et VI du § II, ainsi qu'on va le voir.

Théorème V. — *Soient*

$$(7)\qquad \begin{cases} u_0, & u_1, & u_2, & \ldots, & u_n, & \ldots, \\ v_0, & v_1, & v_2, & \ldots, & v_n, & \ldots \end{cases}$$

deux séries convergentes qui aient respectivement pour sommes s et s';

$$(8)\qquad u_0+v_0,\quad u_1+v_1,\quad u_2+v_2,\quad \ldots,\quad u_n+v_n,\quad \ldots$$

sera une nouvelle série convergente, qui aura pour somme $s+s'$.

Démonstration. — Si l'on fait

$$s_n = u_0+u_1+u_2+\ldots+u_{n-1},$$
$$s'_n = v_0+v_1+v_2+\ldots+v_{n-1},$$

s_n et s'_n convergeront respectivement, pour des valeurs croissantes de n, vers les limites s et s'. Par suite, $s_n+s'_n$, c'est-à-dire la somme des n premiers termes de la série (8), convergera vers la limite $s+s'$, ce qui suffit pour établir le théorème énoncé.

Théorème VI. — *Les mêmes choses étant posées que dans le théorème*

précédent, si chacune des séries (7) reste convergente, lorsqu'on réduit ses différents termes à leurs valeurs numériques,

$$(9)\qquad \begin{cases} u_0v_0, \\ u_0v_1+u_1v_0, \\ u_0v_2+u_1v_1+u_2v_0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ u_0v_n+u_1v_{n-1}+\ldots+u_{n-1}v_1+u_nv_0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

sera une nouvelle série convergente, qui aura pour somme ss'.

Démonstration. — Soient toujours s_n, s'_n les sommes des n premiers termes des deux séries (7), et désignons en outre par s''_n la somme des n premiers termes de la série (9). On trouvera

$$\begin{aligned} s_ns'_n - s''_n = u_{n-1}v_{n-1} &+ (u_{n-1}v_{n-2}+u_{n-2}v_{n-1}) + \ldots \\ &+ (u_{n-1}v_1 + u_{n-2}v_2 + \ldots + u_2v_{n-2} + u_1v_{n-1}). \end{aligned}$$

De plus, le théorème VI ayant été démontré dans le second paragraphe pour le cas où les séries (7) ne renferment que des termes positifs, il en résulte que, dans cette hypothèse, chacune des quantités $s_ns'_n$, s''_n converge, pour des valeurs croissantes de n, vers la limite ss', et par suite la différence $s_ns'_n - s''_n$ ou, ce qui revient au même, la somme

$$\begin{aligned} u_{n-1}v_{n-1} &+ (u_{n-1}v_{n-2}+u_{n-2}v_{n-1}) + \ldots \\ &+ (u_{n-1}v_1 + u_{n-2}v_2 + \ldots + u_2v_{n-2} + u_1v_{n-1}), \end{aligned}$$

vers la limite zéro.

Concevons maintenant que, les termes des séries (7) étant les uns positifs et les autres négatifs, on désigne respectivement par

$$(10)\qquad \begin{cases} \rho_0, & \rho_1, & \rho_2, & \ldots, & \rho_n, & \ldots, \\ \rho'_0, & \rho'_1, & \rho'_2, & \ldots, & \rho'_n, & \ldots \end{cases}$$

les valeurs numériques de ces différents termes. Supposons de plus, conformément à l'énoncé du théorème, que les séries (10), composées de ces mêmes valeurs numériques, soient toutes deux convergentes. En vertu de la remarque qu'on vient de faire, la somme

$$\begin{aligned}&\rho_{n-1}\rho'_{n-1}+(\rho_{n-1}\rho'_{n-2}+\rho_{n-2}\rho'_{n-1})+\ldots\\&\quad+(\rho_{n-1}\rho'_{1}\;+\rho_{n-2}\rho'_{2}\quad+\ldots+\rho_{2}\rho'_{n-2}+\rho_{1}\rho'_{n-1})\end{aligned}$$

convergera, pour des valeurs croissantes de n, vers la limite zéro; et, comme la valeur numérique de cette somme sera évidemment supérieure à celle de la suivante

$$\begin{aligned}&u_{n-1}v_{n-1}+(u_{n-1}v_{n-2}+u_{n-2}v_{n-1})+\ldots\\&\quad+(u_{n-1}v_{1}+u_{n-2}v_{2}+\ldots+u_{2}v_{n-2}+u_{1}v_{n-1}),\end{aligned}$$

il en résulte que cette dernière ou, ce qui revient au même, la différence $s_n s'_n - s''_n$ convergera elle-même vers la limite zéro. Par suite, ss', qui est la limite du produit $s_n s'_n$, sera encore celle de s''_n. En d'autres termes, la série (9) sera convergente et aura pour somme le produit ss'.

Scolie. — Le théorème précédent pourrait ne plus subsister si les séries (7), supposées convergentes, cessaient de l'être après la réduction de chaque terme à sa valeur numérique. Concevons, par exemple, que pour chacune des séries (7) on prenne la suivante

$$(11)\qquad 1,\quad -\frac{1}{2^{\frac{1}{2}}},\quad +\frac{1}{3^{\frac{1}{2}}},\quad -\frac{1}{4^{\frac{1}{2}}},\quad +\frac{1}{5^{\frac{1}{2}}},\quad -\ldots.$$

La série (9) deviendra

$$(12)\qquad \left\{\begin{aligned}&1,\\&-\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}\right),\\&+\left(\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{2.2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}\right),\\&-\left(\frac{1}{\sqrt{4}}+\frac{1}{\sqrt{3.2}}+\frac{1}{\sqrt{2.3}}+\frac{1}{\sqrt{4}}\right),\\&+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\end{aligned}\right.$$

Cette dernière est divergente, car son terme général, savoir

$$\pm\left(\frac{1}{\sqrt{n}}+\frac{1}{\sqrt{(n-1)2}}+\frac{1}{\sqrt{(n-2)3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{2(n-1)}}+\frac{1}{\sqrt{n}}\right),$$

a une valeur numérique évidemment supérieure à

$$\frac{n}{\left[\frac{n}{2}\left(\frac{n}{2}+1\right)\right]^{\frac{1}{2}}}=\left(\frac{4n}{n+2}\right)^{\frac{1}{2}}$$

lorsque n est pair, et à

$$\frac{n}{\left[\left(\frac{n+1}{2}\right)^{2}\right]^{\frac{1}{2}}}=\frac{2n}{n+1}$$

lorsque n est impair, c'est-à-dire, dans tous les cas possibles, une valeur numérique supérieure à l'unité. Cependant la série (11) est convergente. Mais on doit observer qu'elle cesse de l'être lorsqu'on réduit chaque terme à sa valeur numérique, puisqu'elle se change alors en la série (6) du § II.

§ IV. — *Des séries ordonnées suivant les puissances ascendantes et entières d'une variable.*

Soit

$$(1)\qquad a_0,\quad a_1x,\quad a_2x^2,\quad \ldots,\quad a_nx^n,\quad \ldots$$

une série ordonnée suivant les puissances entières et ascendantes de la variable x,

$$(2)\qquad a_0,\quad a_1,\quad a_2,\quad \ldots,\quad a_n,\quad \ldots$$

désignant des coefficients constants positifs ou négatifs. Soit de plus A ce que devient pour la série (2) la quantité k du paragraphe précédent (*voir* le § III, théorème II). La même quantité, calculée pour la série (1), sera équivalente à la valeur numérique du produit

$$\mathrm{A}x.$$

Par suite, la série (1) sera convergente si cette valeur numérique est inférieure à l'unité, c'est-à-dire, en d'autres termes, si la valeur numérique de la variable x est inférieure à $\frac{1}{A}$. Au contraire, la série (1) sera divergente si la valeur numérique de x surpasse $\frac{1}{A}$. On peut donc énoncer la proposition suivante :

Théorème I. — *Soit* A *la limite vers laquelle converge, pour des valeurs croissantes de* n, *la racine* $n^{\text{ième}}$ *des plus grandes valeurs numériques de* a_n. *La série* (1) *sera convergente pour toutes les valeurs de* x *comprises entre les limites*

$$x = -\frac{1}{A}, \qquad x = +\frac{1}{A},$$

et divergente pour toutes les valeurs de x *situées hors des mêmes limites.*

Lorsque la valeur numérique du rapport $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ converge vers une limite fixe, cette limite est (en vertu du théorème IV, Chap. II, § III) la valeur cherchée de A. Cette remarque conduit à une nouvelle proposition que je vais écrire :

Théorème II. — *Si, pour des valeurs croissantes de* n, *la valeur numérique du rapport*

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}$$

converge vers la limite A, *la série* (1) *sera convergente pour toutes les valeurs de* x *comprises entre les limites*

$$-\frac{1}{A}, \quad +\frac{1}{A},$$

et divergente pour toutes les valeurs de x *situées hors des mêmes limites.*

Corollaire I. — Prenons pour exemple la série

$$(3) \qquad 1, \quad 2x, \quad 3x^2, \quad 4x^3, \quad \ldots, \quad (n+1)x^n, \quad \ldots.$$

Comme on trouvera dans cette hypothèse

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n+2}{n+1} = 1 + \frac{1}{n+1}$$

et, par suite,

$$A = 1,$$

on en conclura que la série (3) est convergente pour toutes les valeurs de x renfermées entre les limites

$$x = -1, \qquad x = +1,$$

et divergente pour les valeurs de x situées hors de ces limites.

Corollaire II. — Prenons pour second exemple la série

$$(4) \qquad \frac{x}{1}, \quad \frac{x^2}{2}, \quad \frac{x^3}{3}, \quad \ldots, \quad \frac{x^n}{n}, \quad \ldots,$$

dans laquelle le terme constant est censé réduit à zéro. On trouvera dans cette hypothèse

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n}{n+1} = \frac{1}{1+\frac{1}{n}}$$

et, par suite, $A = 1$. La série (4) sera donc encore convergente ou divergente, suivant que la valeur numérique de x sera inférieure ou supérieure à l'unité.

Corollaire III. — Si pour la série (1) on prend la suivante

$$(5) \qquad 1, \quad \frac{\mu}{1}x, \quad \frac{\mu(\mu-1)}{1.2}x^2, \quad \ldots, \quad \frac{\mu(\mu-1)(\mu-2)\ldots(\mu-n+1)}{1.2.3\ldots n}x^n, \quad \ldots,$$

μ désignant une quantité quelconque, on trouvera

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\mu-n}{n+1} = -\frac{1-\frac{\mu}{n}}{1+\frac{1}{n}}$$

et, par suite,

$$A = \lim \frac{1-\frac{\mu}{n}}{1+\frac{1}{n}} = \frac{1-\frac{1}{\infty}}{1+\frac{1}{\infty}} = 1.$$

On en conclura que la série (5) est, comme les séries (3) et (4), convergente ou divergente, suivant que l'on attribue à la variable x une valeur numérique inférieure ou supérieure à l'unité.

Corollaire IV. — Considérons encore la série

$$(6)\qquad 1,\quad \frac{x}{1},\quad \frac{x^2}{1.2},\quad \frac{x^3}{1.2.3},\quad \ldots,\quad \frac{x^n}{1.2.3\ldots n},\quad \ldots.$$

Comme on aura dans ce cas

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{n+1}$$

et, par suite,

$$A = \frac{1}{\infty} = 0,$$

on en conclura que la série est convergente entre les limites

$$x = -\frac{1}{0} = -\infty,\qquad x = +\frac{1}{0} = +\infty,$$

c'est-à-dire pour toutes les valeurs réelles possibles de la variable x.

Corollaire V. — Considérons enfin la série

$$(7)\qquad 1,\quad 1.x,\quad 1.2.x^2,\quad 1.2.3.x^3,\quad \ldots,\quad 1.2.3\ldots n.x^n,\quad \ldots.$$

En lui appliquant le théorème II, on trouvera

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = n+1,\qquad A = \infty,$$

et l'on aura par suite

$$\frac{1}{A} = 0.$$

On en conclura que la série (7) est toujours divergente, excepté lorsqu'on suppose $x = 0$, auquel cas elle se réduit à son premier terme 1.

En examinant les résultats qu'on vient d'obtenir, on reconnaît immédiatement que, parmi les séries ordonnées suivant les puissances ascendantes et entières de la variable x, les unes sont tantôt

convergentes, tantôt divergentes, selon la valeur attribuée à cette variable, tandis que d'autres restent toujours convergentes, quel que soit x, et d'autres toujours divergentes, excepté pour $x = 0$. On peut ajouter que le théorème I ne laisse d'incertitude sur la convergence d'une semblable série que dans le cas où la valeur numérique de x devient égale à la constante positive représentée par $\frac{1}{A}$, c'est-à-dire lorsqu'on suppose

$$x = \pm \frac{1}{A}.$$

Dans ce cas particulier, la série est tantôt convergente, tantôt divergente, et la convergence dépend quelquefois du signe de la variable x. Par exemple, si dans la série (4), pour laquelle $A = 1$, on fait successivement

$$x = 1,\qquad x = -1,$$

on obtiendra les deux suivantes

$$(8)\qquad 1,\quad \frac{1}{2},\quad \frac{1}{3},\quad \frac{1}{4},\quad \ldots,\quad \frac{1}{n},\quad \ldots,$$

$$(9)\qquad -1,\quad +\frac{1}{2},\quad -\frac{1}{3},\quad +\frac{1}{4},\quad \ldots,\quad \pm\frac{1}{n},\quad \ldots,$$

dont la première est divergente (*voir* dans le § II le corollaire du théorème III) et la seconde convergente, ainsi que cela résulte du théorème III (§ III).

Il est encore essentiel de remarquer que, par suite du théorème I, lorsqu'une série ordonnée suivant les puissances ascendantes et entières d'une variable x sera convergente pour une valeur numérique de x différente de zéro, elle restera convergente, si l'on vient à diminuer cette valeur numérique ou même à la faire décroître indéfiniment.

Lorsque deux séries ordonnées suivant les puissances ascendantes et entières de la variable x sont convergentes pour une même valeur de la variable, on peut leur appliquer les théorèmes V et VI du § III.

Cette remarque suffit pour établir les deux propositions que je vais énoncer :

Théorème III. — *Supposons que les deux séries*

$$(10)\qquad \left\{\begin{array}{l} a_0,\quad a_1 x,\quad a_2 x^2,\quad \ldots,\quad a_n x^n,\quad \ldots, \\ b_0,\quad b_1 x,\quad b_2 x^2,\quad \ldots,\quad b_n x^n,\quad \ldots, \end{array}\right.$$

étant à la fois convergentes, lorsqu'on attribue à la variable x une certaine valeur, aient alors pour sommes respectives s et s',

$$(11)\qquad a_0 + b_0,\quad (a_1 + b_1)x,\quad (a_2 + b_2)x^2,\quad \ldots,\quad (a_n + b_n)x^n,\quad \ldots$$

sera, dans le même cas, une nouvelle série convergente, qui aura pour somme $s + s'$.

Corollaire. — On étendra facilement ce théorème à tant de séries que l'on voudra. Par exemple, si les trois séries

$$\begin{array}{l} a_0,\quad a_1 x,\quad a_2 x^2,\quad \ldots, \\ b_0,\quad b_1 x,\quad b_2 x^2,\quad \ldots, \\ c_0,\quad c_1 x,\quad c_2 x^2,\quad \ldots \end{array}$$

sont convergentes pour une même valeur attribuée à la variable x, et que l'on désigne par s, s', s'' leurs sommes respectives,

$$a_0 + b_0 + c_0,\quad (a_1 + b_1 + c_1)x,\quad (a_2 + b_2 + c_2)x^2,\quad \ldots$$

sera une nouvelle série convergente, qui aura pour somme $s + s' + s''$.

Théorème IV. — *Les mêmes choses étant posées que dans le théorème précédent, si de plus chacune des séries* (10) *reste convergente, lorsqu'on réduit ses différents termes à leurs valeurs numériques,*

$$(12)\qquad \left\{\begin{array}{l} a_0 b_0,\quad (a_0 b_1 + a_1 b_0)x,\quad (a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0)x^2,\quad \ldots, \\ \ldots,\quad (a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \ldots + a_{n-1} b_1 + a_n b_0)x^n,\quad \ldots \end{array}\right.$$

sera une nouvelle série convergente, qui aura pour somme ss'.

Corollaire I. — Le théorème précédent se trouve compris dans la formule

$$(13)\qquad \left\{\begin{array}{l} (a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots)(b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \ldots) \\ \quad = a_0 b_0 + (a_0 b_1 + a_1 b_0)x + (a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0)x^2 + \ldots, \end{array}\right.$$

qui subsiste dans le cas où chacune des séries (10) reste convergente lors même qu'on réduit ses différents termes à leurs valeurs numériques, et qui sert à développer dans cette hypothèse le produit des sommes des deux séries en une nouvelle série de même forme.

Corollaire II. — En répétant plusieurs fois de suite l'opération indiquée par l'équation (13), on pourrait multiplier entre elles les sommes de trois ou d'un plus grand nombre de séries semblables aux séries (10), et dont chacune resterait convergente après la réduction de ses différents termes à leurs valeurs numériques. Le produit obtenu serait la somme d'une nouvelle série convergente ordonnée suivant les puissances ascendantes et entières de la variable x.

Corollaire III. — Si dans les deux corollaires précédents on suppose que toutes les séries dont on multiplie les sommes deviennent égales, on obtiendra pour produit une puissance entière de la somme de chacune d'elles, et cette puissance se trouvera encore représentée par la somme d'une série du même genre. Par exemple, si dans l'équation (13) on fait $a_0 = b_0$, $a_1 = b_1$, $a_2 = b_2$, ..., on en tirera

$$(14)\qquad (a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots)^2 = a_0^2 + 2a_0 a_1 x + (2a_0 a_2 + a_1^2)x^2 + \ldots.$$

Corollaire IV. — Si l'on prend pour termes généraux des séries (10)

$$\frac{\mu(\mu-1)(\mu-2)\ldots(\mu-n+1)}{1.2.3\ldots n}x^n$$

et

$$\frac{\mu'(\mu'-1)(\mu'-2)\ldots(\mu'-n+1)}{1.2.3\ldots n}x^n,$$

μ, μ' désignant deux quantités quelconques, et la variable x étant renfermée entre les limites $x = -1$, $x = +1$, chacune des séries (10) restera convergente, même lorsqu'on réduira ses différents termes à leurs valeurs numériques, et le terme général de la série (12) deviendra

$$\begin{aligned}&\left[\frac{\mu(\mu-1)\ldots(\mu-n+1)}{1.2.3\ldots n}+\frac{\mu(\mu-1)\ldots(\mu-n+2)}{1.2.3\ldots(n-1)}\frac{\mu'}{1}+\ldots\right.\\ &\quad\left.+\frac{\mu}{1}\frac{\mu'(\mu'-1)\ldots(\mu'-n+2)}{1.2.3\ldots(n-1)}+\frac{\mu'(\mu'-1)\ldots(\mu'-n+1)}{1.2.3\ldots n}\right]x^n\\ &=\frac{(\mu+\mu')(\mu+\mu'-1)(\mu+\mu'-2)\ldots(\mu+\mu'-n+1)}{1.2.3\ldots n}x^n.\end{aligned}$$

Cela posé, si l'on appelle $\varphi(\mu)$ la somme de la première des séries (10) dans l'hypothèse que l'on vient de faire, c'est-à-dire, si l'on pose

$$\varphi(\mu)=1+\frac{\mu}{1}x+\frac{\mu(\mu-1)}{1.2}x^2+\ldots, \tag{15}$$

les sommes des séries (10) et (12) seront respectivement désignées, dans la même hypothèse, par $\varphi(\mu)$, $\varphi(\mu')$ et $\varphi(\mu+\mu')$; en sorte que l'équation (13) deviendra

$$\varphi(\mu)\varphi(\mu')=\varphi(\mu+\mu'). \tag{16}$$

Lorsque dans l'équation (13) on remplace la somme de la série

$$b_0,\quad b_1x,\quad b_2x^2,\quad \ldots$$

par un polynôme composé d'un nombre fini de termes, on obtient une formule qui ne cesse jamais d'être exacte, tant que la série

$$a_0,\quad a_1x,\quad a_2x^2,\quad \ldots$$

demeure convergente. C'est ce que nous allons prouver directement, en établissant le théorème qui suit :

Théorème V. — *Si, la série (1) étant convergente, on multiplie la somme de cette série par le polynôme*

$$kx^m+lx^{m-1}+\ldots+px+q, \tag{17}$$

dans lequel m désigne un nombre entier, on obtiendra pour produit la

somme d'une nouvelle série convergente de même forme, dont le terme général sera

$$(qa_n+pa_{n-1}+\ldots+la_{n-m+1}+ka_{n-m})x^m,$$

pourvu que l'on considère comme nulles dans les premiers termes celles des quantités

$$a_{n-1},\quad a_{n-2},\quad \ldots,\quad a_{n-m+1},\quad a_{n-m}$$

qui se trouveront affectées d'indices négatifs : en d'autres termes, on aura

$$\left\{\begin{aligned}&(kx^m+lx^{m-1}+\ldots+px+q)(a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots)\\ &\quad=qa_0+(qa_1+pa_0)x+\ldots+(qa_m+pa_{m-1}+\ldots+la_1+ka_0)x^m\\ &\quad+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ &\quad+(qa_n+pa_{n-1}+\ldots+la_{n-m+1}+ka_{n-m})x_n+\ldots.\end{aligned}\right. \tag{18}$$

Démonstration. — Pour multiplier la somme de la série (1) par le polynôme (17), il suffira de la multiplier successivement par les différents termes de ce polynôme. On aura donc

$$\begin{aligned}&(kx^m+lx^{m-1}+\ldots+px+q)(a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots)\\ &\quad=q(a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots)+px(a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots)\\ &\quad+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ &\quad+lx^{m-1}(a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots)+kx^m(a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots).\end{aligned}$$

Comme on a de plus, pour des valeurs entières quelconques de n,

$$\begin{aligned}&q(a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_{n-1}x^{n-1})\\ &\quad=qa_0+qa_1x+qa_2x^2+\ldots+qa_{n-1}x^{n-1},\end{aligned}$$

on en conclura, en faisant croître n indéfiniment, et passant aux limites,

$$q(a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots)=qa_0+qa_1x+qa_2x^2+\ldots.$$

On trouvera de même

$$\begin{aligned}px(a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots)&=pa_0x+pa_1x^2+pa_2x^3+\ldots,\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\ lx^{m-1}(a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots)&=la_0x^{m-1}+la_1x^m+la_2x^{m+1}+\ldots,\\ kx^m(a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots)&=ka_0x^m+ka_1x^{m+1}+ka_2x^{m+2}+\ldots.\end{aligned}$$

Si l'on ajoute ces dernières équations, et qu'en formant la somme des seconds membres on réunisse les coefficients des puissances semblables de la variable x, on obtiendra précisément la formule (18).

Concevons maintenant que dans la série (1) on fasse varier la valeur de x par degrés insensibles. Tant que la série restera convergente, c'est-à-dire tant que la valeur de x demeurera comprise entre les limites

$$-\frac{1}{A}, \quad +\frac{1}{A},$$

la somme de la série sera (en vertu du théorème I, § I) une fonction continue de la variable x. Soit $\varphi(x)$ cette fonction continue. L'équation

$$\varphi(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots$$

subsistera pour toutes les valeurs de x renfermées entre les limites $-\frac{1}{A}$, $+\frac{1}{A}$, ce que nous indiquerons en écrivant ces limites à côté de la série, comme on le voit ici :

$$(19) \qquad \varphi(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots \qquad \left(x = -\frac{1}{A},\; x = +\frac{1}{A}\right).$$

Lorsque la série est supposée connue, on peut quelquefois en déduire la valeur de la fonction $\varphi(x)$ sous forme finie, et c'est là ce qu'on appelle *sommer* la série. Mais le plus souvent la fonction $\varphi(x)$ est donnée, et l'on se propose de revenir de cette fonction à la série, ou, en d'autres termes, de *développer* la fonction en série convergente ordonnée suivant les puissances ascendantes et entières de la variable x. Il est facile d'établir à ce sujet la proposition que je vais énoncer :

THÉORÈME VI. — *Une fonction continue de la variable x ne peut être développée que d'une seule manière en série convergente ordonnée suivant les puissances ascendantes et entières de cette variable.*

Démonstration. — En effet, supposons qu'on ait développé par deux

méthodes différentes la fonction $\varphi(x)$, et soient

$$a_0, \quad a_1 x, \quad a_2 x^2, \quad \ldots, \quad a_n x^n, \quad \ldots,$$
$$b_0, \quad b_1 x, \quad b_2 x^2, \quad \ldots, \quad b_n x^n, \quad \ldots$$

les deux développements, c'est-à-dire deux séries dont chacune, étant convergente pour des valeurs de x différentes de zéro, ait pour somme, tant qu'elle demeure convergente, la fonction $\varphi(x)$. Ces deux séries étant constamment convergentes pour de très petites valeurs numériques de x, on aura, pour de semblables valeurs,

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \ldots.$$

Comme, en faisant évanouir x, on tire de l'équation précédente

$$a_0 = b_0,$$

il en résulte qu'on peut la réduire généralement à

$$a_1 x + a_2 x^2 + \ldots = b_1 x + b_2 x^2 + \ldots$$

ou, ce qui revient au même, à

$$x(a_1 + a_2 x + \ldots) = x(b_1 + b_2 x + \ldots).$$

Si l'on multiplie par $\frac{1}{x}$ les deux membres de cette dernière équation, on obtiendra la suivante

$$a_1 + a_2 x + \ldots = b_1 + b_2 x + \ldots,$$

qui devra encore subsister pour de très petites valeurs numériques de la variable x, et de laquelle on conclura, en posant $x = 0$,

$$a_1 = b_1.$$

En continuant de même, on ferait voir que les constantes $a_0, a_1, a_2, \ldots$ sont respectivement égales aux constantes $b_0, b_1, b_2, \ldots$, d'où il suit que les deux développements de la fonction $\varphi(x)$ sont identiques.

Le Calcul différentiel fournit des méthodes très expéditives pour développer les fonctions en séries. Nous exposerons plus tard ces méthodes, et nous nous bornerons pour l'instant à faire connaître, avec le développement de la fonction $(1+x)^\mu$, dans laquelle μ désigne une quantité quelconque, deux autres développements que l'on ramène facilement au premier, savoir, ceux des fonctions

$$A^x \quad \text{et} \quad L(1+x),$$

A désignant une constante positive, et L la caractéristique des logarithmes dans un système choisi à volonté. En conséquence, nous allons résoudre l'un après l'autre les trois problèmes qui suivent :

Problème I. — *Développer, lorsque cela se peut, la fonction*

$$(1+x)^\mu$$

en série convergente ordonnée suivant les puissances ascendantes et entières de la variable x.

Solution. — Si d'abord on suppose $\mu = m$, m désignant un nombre entier quelconque, on aura, par la formule de Newton,

$$(1+x)^m = 1 + \frac{m}{1}x + \frac{m(m-1)}{1.2}x^2 + \ldots.$$

La série dont la somme constitue le second membre de cette formule est toujours composée d'un nombre fini de termes; mais, si l'on y remplace le nombre entier m par une quantité quelconque μ, la nouvelle série que l'on obtiendra, savoir

$$(5) \qquad 1, \quad \frac{\mu}{1}x, \quad \frac{\mu(\mu-1)}{1.2}x^2, \quad \ldots,$$

se trouvera composée en général d'un nombre indéfini de termes, et sera convergente seulement pour des valeurs numériques de x inférieures à l'unité. Soit, dans cette hypothèse, $\varphi(\mu)$ la somme de la nouvelle série, en sorte qu'on ait

$$(15) \qquad \varphi(\mu) = 1 + \frac{\mu}{1}x + \frac{\mu(\mu-1)}{1.2}x^2 + \ldots \qquad (x=-1,\ x=+1).$$

En vertu du théorème I (§ I), $\varphi(\mu)$ sera fonction continue de la variable μ entre des limites quelconques de cette variable, et l'on aura (*voir* le théorème III, corollaire IV)

$$(16) \qquad \varphi(\mu)\,\varphi(\mu') = \varphi(\mu+\mu').$$

Cette dernière équation étant entièrement semblable à l'équation (2) du Chapitre V (§ I) se résoudra de la même manière, et l'on en conclura

$$\varphi(\mu) = [\varphi(1)]^\mu = (1+x)^\mu.$$

La valeur de $\varphi(\mu)$ étant ainsi déterminée, si on la substitue dans la formule (15), on trouvera, pour toutes les valeurs de x comprises entre les limites $x=-1$, $x=+1$,

$$(20) \qquad (1+x)^\mu = 1 + \frac{\mu}{1}x + \frac{\mu(\mu-1)}{1.2}x^2 + \ldots \qquad (x=-1,\ x=+1).$$

Lorsque la valeur numérique de x devient supérieure à l'unité, la série (5), n'étant plus convergente, cesse d'avoir une somme, en sorte que l'équation (20) ne subsiste plus. Dans la même hypothèse, il devient impossible, ainsi qu'on le prouvera plus tard à l'aide du Calcul infinitésimal, de développer la fonction $(1+x)^\mu$ en série convergente ordonnée suivant les puissances ascendantes et entières de la variable x.

Corollaire I. — Si dans l'équation (20) on remplace μ par $\frac{1}{\alpha}$ et x par αx, α désignant une quantité infiniment petite, on aura, pour toutes les valeurs de αx renfermées entre les limites -1, $+1$, ou, ce qui revient au même, pour toutes les valeurs de x renfermées entre les limites $-\frac{1}{\alpha}$, $+\frac{1}{\alpha}$,

$$(1+\alpha x)^{\frac{1}{\alpha}} = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2}(1-\alpha) + \frac{x^3}{1.2.3}(1-\alpha)(1-2\alpha) + \ldots$$
$$\left(x = -\frac{1}{\alpha},\ x = +\frac{1}{\alpha}\right).$$

Cette dernière équation devant subsister, quelque petite que soit la valeur numérique de α, si l'on désigne à l'ordinaire, par l'abréviation lim placée devant une expression qui renferme la variable α, la limite vers laquelle converge cette expression, tandis que la valeur numérique de α décroît indéfiniment, on trouvera, en passant aux limites,

$$\lim(1+\alpha x)^{\frac{1}{\alpha}} = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3}{1.2.3} + \ldots \qquad (x = -\infty,\ x = +\infty). \tag{21}$$

Il reste à chercher la limite de $(1+\alpha x)^{\frac{1}{\alpha}}$. Or, en premier lieu, on tirera de la formule précédente

$$\lim(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}} = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{1.2.3} + \ldots,$$

ou, en d'autres termes,

$$\lim(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}} = e, \tag{22}$$

e désignant la base des logarithmes népériens [*voir* le § I, équat. (6)]. On en conclura immédiatement

$$\lim(1+\alpha x)^{\frac{1}{\alpha x}} = e,$$

et, par suite,

$$\lim(1+\alpha x)^{\frac{1}{\alpha}} = \lim\left[(1+\alpha x)^{\frac{1}{\alpha x}}\right]^x = e^x.$$

Si maintenant on remet la valeur de $\lim(1+\alpha x)^{\frac{1}{\alpha}}$ dans l'équation (21), on obtiendra la suivante :

$$e^x = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3}{1.2.3} + \ldots \qquad (x = -\infty,\ x = +\infty). \tag{23}$$

On pourrait arriver directement à l'équation (23) en observant que la série

$$1,\quad \frac{x}{1},\quad \frac{x^2}{1.2},\quad \frac{x^3}{1.2.3},\quad \ldots \tag{6}$$

est convergente pour toutes les valeurs possibles de la variable x, et cherchant la fonction de x qui représente la somme de cette même

série. En effet, soit $\varphi(x)$ la somme de la série (6) qui a pour terme général

$$\frac{x^n}{1.2.3\ldots n},$$

$\varphi(y)$ sera la somme de la série qui a pour terme général

$$\frac{y^n}{1.2.3\ldots n};$$

et (en vertu du théorème VI, § III) le produit de ces deux sommes sera la somme d'une nouvelle série qui aura pour terme général

$$\frac{x^n}{1.2.3\ldots n} + \frac{x^{n-1}}{1.2.3\ldots(n-1)}\frac{y}{1} + \ldots + \frac{x}{1}\frac{y^{n-1}}{1.2.3\ldots(n-1)} + \frac{y^n}{1.2.3\ldots n} = \frac{(x+y)^n}{1.2.3\ldots n}.$$

Ce produit sera donc égal à $\varphi(x+y)$, et par suite, si l'on fait

$$\varphi(x) = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3}{1.2.3} + \ldots,$$

la fonction $\varphi(x)$ vérifiera l'équation

$$\varphi(x)\,\varphi(y) = \varphi(x+y).$$

En résolvant cette équation, on en tirera

$$\varphi(x) = [\varphi(1)]^x = \left(1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{1.2.3} + \ldots\right)^x,$$

c'est-à-dire

$$\varphi(x) = e^x.$$

Corollaire II. — Si, après avoir retranché l'unité de chaque membre de l'équation (20), on divise les deux membres par μ, l'équation que l'on obtiendra pourra s'écrire ainsi qu'il suit :

$$\frac{(1+x)^\mu - 1}{\mu} = x - \frac{x^2}{2}(1-\mu) + \frac{x^3}{3}(1-\mu)\left(1-\frac{1}{2}\mu\right) - \ldots$$
$$(x = -1,\ x = +1);$$

et, si dans cette dernière on fait converger μ vers la limite zéro, on trouvera, en passant aux limites,

$$\lim \frac{(1+x)^\mu - 1}{\mu} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots \tag{24}$$

De plus, comme en désignant par l la caractéristique des logarithmes népériens pris dans le système dont la base est e, on a évidemment

$$1 + x = e^{l(1+x)},$$

$$(1+x)^\mu = e^{\mu l(1+x)} = 1 + \frac{\mu\, l(1+x)}{1} + \frac{\mu^2[l(1+x)]^2}{1.2} + \dots,$$

on en conclura

$$\frac{(1+x)^\mu - 1}{\mu} = l(1+x) + \frac{\mu}{2}[l(1+x)]^2 + \dots$$

et, par suite,

$$\lim \frac{(1+x)^\mu - 1}{\mu} = l(1+x). \tag{25}$$

Cela posé, la formule (24) deviendra

$$l(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots \qquad (x = -1,\ x = +1). \tag{26}$$

L'équation précédente subsiste tant que la valeur numérique de x reste inférieure à l'unité; et, dans ce cas, la série

$$x,\quad -\frac{x^2}{2},\quad +\frac{x^3}{3},\quad \dots,\quad \pm\frac{x^n}{n},\quad \dots \tag{27}$$

est convergente, aussi bien que la série (4), qui en diffère seulement par les signes des termes de rang impair. Les mêmes séries devenant divergentes, dès qu'on suppose la valeur numérique de x supérieure à l'unité, l'équation (26) cesse d'avoir lieu dans cette hypothèse.

Dans le cas particulier où l'on prend $x = 1$, la série (27) se réduit à la série (3) du troisième paragraphe, laquelle est convergente, comme on l'a fait voir. L'équation (26) doit donc alors subsister, en sorte qu'on a

$$l(2) = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots \tag{28}$$

Si l'on prenait au contraire $x = -1$, la série (27) deviendrait divergente et n'aurait plus de somme.

On peut remarquer encore que, si après avoir écrit $-x$ au lieu de x dans la formule (26), on change à la fois les signes des deux membres, on obtiendra la suivante

$$l\left(\frac{1}{1-x}\right) = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots \qquad (x = -1,\ x = +1). \tag{29}$$

Problème II. — *Développer la fonction*

$$A^x,$$

dans laquelle A *désigne un nombre quelconque, en série convergente ordonnée suivant les puissances ascendantes et entières de la variable* x.

Solution. — Désignons toujours par la caractéristique l les logarithmes népériens pris dans le système dont la base est e. On aura, d'après la définition même des logarithmes,

$$A = e^{l(A)},$$

et l'on en conclura

$$A^x = e^{x\,l(A)}. \tag{30}$$

Par suite, en ayant égard à l'équation (23), on trouvera

$$\left\{ \begin{aligned} A^x &= 1 + \frac{x\, l(A)}{1} + \frac{x^2[l(A)]^2}{1.2} + \frac{x^3[l(A)]^3}{1.2.3} + \dots \\ &\qquad (x = -\infty,\ x = +\infty). \end{aligned} \right. \tag{31}$$

Cette dernière formule subsiste pour toutes les valeurs réelles possibles de la variable x.

Problème III. — *La caractéristique* L *désignant les logarithmes pris* *dans le système dont la base est* A, *développer, lorsque cela se peut, la fonction*

$$L(1+x)$$

en série convergente ordonnée suivant les puissances ascendantes et entières de la variable x.

Solution. — Désignons toujours par l la caractéristique des logarithmes népériens. On aura, en vertu des propriétés connues des logarithmes,

$$L(1+x) = \frac{L(1+x)}{L(A)} = \frac{l(1+x)}{l(A)},$$

et par suite, en ayant égard à l'équation (26), on trouvera, pour toutes les valeurs de x comprises entre les limites -1, $+1$,

$$(32)\qquad L(1+x) = \frac{1}{l(A)}\left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots\right) \qquad (x = -1, x = +1).$$

Cette dernière formule subsiste dans le cas même où l'on prend $x = 1$; mais elle cesse d'avoir lieu lorsqu'on suppose $x = -1$ ou $x^2 > 1$.

CHAPITRE VII.

DES EXPRESSIONS IMAGINAIRES ET DE LEURS MODULES.

§ I. — *Considérations générales sur les expressions imaginaires.*

En Analyse, on appelle *expression symbolique* ou *symbole* toute combinaison de signes algébriques qui ne signifie rien par elle-même ou à laquelle on attribue une valeur différente de celle qu'elle doit naturellement avoir. On nomme de même *équations symboliques* toutes celles qui, prises à la lettre et interprétées d'après les conventions généralement établies, sont inexactes ou n'ont pas de sens, mais desquelles on peut déduire des résultats exacts, en modifiant et altérant selon des règles fixes, ou ces équations elles-mêmes, ou les symboles qu'elles renferment. L'emploi des expressions ou équations symboliques est souvent un moyen de simplifier les calculs et d'écrire sous une forme abrégée des résultats assez compliqués en apparence. C'est ce qu'on a déjà vu dans le second paragraphe du troisième Chapitre, où la formule (9) fournit une valeur symbolique très simple de l'inconnue x assujettie à vérifier les équations (4). Parmi les expressions ou équations symboliques dont la considération est de quelque importance en Analyse, on doit surtout distinguer celles que l'on a nommées *imaginaires*. Nous allons montrer comment on peut être conduit à en faire usage.

On sait que les sinus et cosinus de l'arc $a+b$ sont donnés en fonction des sinus et cosinus des arcs a et b par les formules

$$(1)\qquad \begin{cases} \cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b, \\ \sin(a+b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a. \end{cases}$$

Or, sans prendre la peine de retenir ces formules, on a un moyen fort simple de les retrouver à volonté. Il suffit, en effet, d'avoir égard à la remarque suivante.

Supposons que l'on multiplie l'une par l'autre les deux expressions symboliques

$$\cos a + \sqrt{-1}\sin a,$$
$$\cos b + \sqrt{-1}\sin b,$$

en opérant d'après les règles connues de la multiplication algébrique, comme si $\sqrt{-1}$ était une quantité réelle dont le carré fût égal à -1. Le produit obtenu se composera de deux parties : l'une toute réelle, l'autre ayant pour facteur $\sqrt{-1}$; et la partie réelle fournira la valeur de $\cos(a+b)$, tandis que le coefficient $\sqrt{-1}$ fournira celle de $\sin(a+b)$. Pour constater cette remarque, on écrit la formule

$$(2)\qquad \begin{cases} \cos(a+b)+\sqrt{-1}\sin(a+b) \\ \quad = (\cos a+\sqrt{-1}\sin a)(\cos b+\sqrt{-1}\sin b). \end{cases}$$

Les trois expressions que renferme l'équation précédente, savoir

$$\cos a + \sqrt{-1}\sin a,$$
$$\cos b + \sqrt{-1}\sin b,$$
$$\cos(a+b) + \sqrt{-1}\sin(a+b),$$

sont trois expressions symboliques qui ne peuvent s'interpréter d'après les conventions généralement établies, et ne représentent rien de réel. On les a nommées pour cette raison *expressions imaginaires*. L'équation (2) elle-même, prise à la lettre, se trouve inexacte et n'a pas de sens. Pour en tirer des résultats exacts, il faut, en premier lieu, développer son second membre par la multiplication algébrique, ce qui réduit cette équation à

$$(3)\qquad \begin{cases} \cos(a+b)+\sqrt{-1}\sin(a+b) \\ \quad = \cos a\cos b - \sin a \sin b + \sqrt{-1}(\sin a\cos b + \sin b\cos a). \end{cases}$$

Il faut, en second lieu, dans l'équation (3), égaler la partie réelle du

premier membre à la partie réelle du second, puis le coefficient de $\sqrt{-1}$ dans le premier membre au coefficient de $\sqrt{-1}$ dans le second. On est ainsi ramené aux équations (1) que l'on doit considérer comme implicitement renfermées l'une et l'autre dans la formule (2).

En général, on appelle *expression imaginaire* toute expression symbolique de la forme

$$\alpha + \beta\sqrt{-1},$$

α, β désignant deux quantités réelles; et l'on dit que deux expressions imaginaires

$$\alpha + \beta\sqrt{-1}, \qquad \gamma + \delta\sqrt{-1}$$

sont *égales* entre elles, lorsqu'il y a égalité de part et d'autre : 1° entre les parties réelles α et β; 2° entre les coefficients de $\sqrt{-1}$, savoir β et δ. L'égalité de deux expressions imaginaires s'indique, comme celle de deux quantités réelles, par le signe $=$, et il en résulte ce qu'on appelle une *équation imaginaire*. Cela posé, toute équation imaginaire n'est que la représentation symbolique de deux équations entre quantités réelles. Par exemple, l'équation symbolique

$$\alpha + \beta\sqrt{-1} = \gamma + \delta\sqrt{-1}$$

équivaut seule aux deux équations réelles

$$\alpha = \gamma, \qquad \beta = \delta.$$

Lorsque, dans l'expression imaginaire

$$\alpha + \beta\sqrt{-1},$$

le coefficient β de $\sqrt{-1}$ s'évanouit, le terme $\beta\sqrt{-1}$ est censé réduit à zéro, et l'expression elle-même à la quantité réelle α. En vertu de cette convention, les expressions imaginaires comprennent, comme cas particuliers, les quantités réelles.

Les expressions imaginaires peuvent être soumises, aussi bien que les quantités réelles, aux diverses opérations de l'Algèbre. Si l'on effectue en particulier l'addition, la soustraction ou la multiplication de deux ou de plusieurs expressions imaginaires, en opérant d'après les règles établies pour les quantités réelles, on obtiendra pour résultat une nouvelle expression imaginaire qui sera ce qu'on appelle la *somme*, la *différence* ou le *produit* des expressions données; et l'on se servira des notations ordinaires pour indiquer cette somme, cette différence ou ce produit. Par exemple, si l'on donne seulement deux expressions imaginaires

$$\alpha+\beta\sqrt{-1},\quad \gamma+\delta\sqrt{-1},$$

on trouvera

$$(4)\qquad (\alpha+\beta\sqrt{-1})+(\gamma+\delta\sqrt{-1})=\alpha+\gamma+(\beta+\delta)\sqrt{-1},$$

$$(5)\qquad (\alpha+\beta\sqrt{-1})-(\gamma+\delta\sqrt{-1})=\alpha-\gamma+(\beta-\delta)\sqrt{-1},$$

$$(6)\qquad (\alpha+\beta\sqrt{-1})\times(\gamma+\delta\sqrt{-1})=\alpha\gamma-\beta\delta+(\alpha\delta+\beta\gamma)\sqrt{-1}.$$

Il est bon de remarquer que le produit de deux ou plusieurs expressions imaginaires, comme celui de deux ou plusieurs binômes réels, restera le même, dans quelque ordre qu'on multiplie ses différents facteurs.

Diviser une première expression imaginaire par une seconde, c'est trouver une troisième expression imaginaire qui, multipliée par la seconde, reproduise la première. Le résultat de cette opération est le *quotient* des deux expressions données. On se sert pour l'indiquer du signe ordinaire de la division. Ainsi, par exemple,

$$\frac{\alpha+\beta\sqrt{-1}}{\gamma+\delta\sqrt{-1}}$$

représente le quotient des deux expressions imaginaires

$$\alpha+\beta\sqrt{-1},\quad \gamma+\delta\sqrt{-1}.$$

Élever une expression imaginaire à la puissance du degré m (m désignant un nombre entier), c'est former le produit de m facteurs égaux à cette expression. On indique la *puissance* $m^{\text{ième}}$ de $\alpha+\beta\sqrt{-1}$ par la notation

$$(\alpha+\beta\sqrt{-1})^m.$$

Extraire la racine $n^{\text{ième}}$ de l'expression imaginaire $\alpha+\beta\sqrt{-1}$, ou, en d'autres termes, élever cette expression à la puissance du degré $\frac{1}{n}$ (n désignant un nombre entier quelconque), c'est former une nouvelle expression imaginaire dont la puissance $n^{\text{ième}}$ reproduise $\alpha+\beta\sqrt{-1}$. Ce problème admettant plusieurs solutions (*voir* le § IV), il en résulte que l'expression imaginaire $\alpha+\beta\sqrt{-1}$ a plusieurs *racines* du degré n. Lorsque nous voudrons désigner indistinctement l'une quelconque d'entre elles, nous emploierons la notation

$$\sqrt[n]{\alpha+\beta\sqrt{-1}}$$

ou la suivante

$$((\alpha+\beta\sqrt{-1}))^{\frac{1}{n}}.$$

Dans le cas particulier où β s'évanouit, $\alpha+\beta\sqrt{-1}$ se réduit à une quantité réelle α, et parmi les valeurs de l'expression

$$\sqrt[n]{\alpha}=((\alpha))^{\frac{1}{n}}$$

il peut s'en trouver une ou deux de réelles, comme on le verra ci-après.

Outre les puissances entières et les racines correspondantes des expressions imaginaires, on a souvent à considérer ce qu'on appelle leurs puissances fractionnaires ou négatives. On doit faire à ce sujet les remarques suivantes.

Pour élever l'expression imaginaire $\alpha+\beta\sqrt{-1}$ à la puissance fractionnaire du degré $\frac{m}{n}$, il faut, en supposant la fraction $\frac{m}{n}$ réduite à sa plus simple expression : 1° extraire la racine $n^{\text{ième}}$ de l'expression donnée; 2° élever cette racine à la puissance entière du degré m. Le problème pouvant être résolu de plusieurs manières (*voir* ci-après le § IV), nous désignerons indistinctement l'une quelconque des *puissances* du degré $\frac{m}{n}$ par la notation

$$((\alpha+\beta\sqrt{-1}))^{\frac{m}{n}}.$$

Dans le cas particulier où β se réduit à zéro, une ou deux de ces puissances peuvent devenir réelles.

Élever l'expression imaginaire $\alpha+\beta\sqrt{-1}$ à la puissance négative du degré $-m$, ou $-\frac{1}{n}$, ou $-\frac{m}{n}$, c'est diviser l'unité par la puissance du degré m, ou $\frac{1}{n}$, ou $\frac{m}{n}$ de la même expression. Le problème admettant une solution seulement, dans le premier cas, et plusieurs solutions dans chacun des deux autres, on indique la puissance du degré $-m$ par la notation simple

$$(\alpha+\beta\sqrt{-1})^{-m},$$

tandis que les deux notations

$$((\alpha+\beta\sqrt{-1}))^{-\frac{1}{n}},$$
$$((\alpha+\beta\sqrt{-1}))^{-\frac{m}{n}}$$

représentent, la première, une quelconque des puissances du degré $-\frac{1}{n}$, et la seconde une quelconque des puissances du degré $-\frac{m}{n}$.

On dit que deux expressions imaginaires sont *conjuguées* l'une à l'autre, lorsque ces deux expressions ne diffèrent entre elles que par le signe du coefficient de $\sqrt{-1}$. La somme de deux semblables expressions est toujours réelle, ainsi que leur produit. En effet les deux expressions imaginaires conjuguées

$$\alpha+\beta\sqrt{-1}, \quad \alpha-\beta\sqrt{-1}$$

donnent pour somme 2α et pour produit $\alpha^2+\beta^2$. La dernière partie de cette observation conduit à un théorème relatif aux nombres, et dont voici l'énoncé :

Théorème I. — *Si l'on multiplie l'un par l'autre deux nombres entiers dont chacun soit la somme de deux carrés, le produit sera encore une somme de deux carrés.*

Démonstration. — Soient

$$\alpha^2+\beta^2, \quad \alpha'^2+\beta'^2$$

les deux nombres entiers dont il s'agit, α^2, β^2, α'^2, β'^2 désignant des carrés parfaits. On aura évidemment les deux équations

$$(\alpha+\beta\sqrt{-1})(\alpha'+\beta'\sqrt{-1})=\alpha\alpha'-\beta\beta'+(\alpha\beta'+\alpha'\beta)\sqrt{-1},$$
$$(\alpha-\beta\sqrt{-1})(\alpha'-\beta'\sqrt{-1})=\alpha\alpha'-\beta\beta'-(\alpha\beta'+\alpha'\beta)\sqrt{-1},$$

et, en multipliant celles-ci membre à membre, on obtiendra la suivante

$$(\alpha^2+\beta^2)(\alpha'^2+\beta'^2)=(\alpha\alpha'-\beta\beta')^2+(\alpha\beta'+\alpha'\beta)^2. \tag{7}$$

Si l'on échange entre elles dans cette dernière les lettres α' et β', on trouvera

$$(\alpha^2+\beta^2)(\alpha'^2+\beta'^2)=(\alpha\beta'-\alpha'\beta)^2+(\alpha\alpha'+\beta\beta')^2. \tag{8}$$

Il y a donc en général deux manières de décomposer en deux carrés le produit de deux nombres entiers dont chacun est la somme de deux carrés. Ainsi, par exemple, on tire des équations (7) et (8)

$$(2^2+1)(3^2+2^2)=4^2+7^2=1^2+8^2.$$

On voit par ces considérations que l'emploi des expressions imaginaires peut être d'une grande utilité, non seulement dans l'Algèbre ordinaire, mais encore dans la Théorie des nombres.

Quelquefois on représente une expression imaginaire par une seule lettre. C'est un artifice qui augmente les ressources de l'Analyse, et dont nous ferons usage dans ce qui va suivre.

§ II. — *Sur les modules des expressions imaginaires et sur les expressions réduites.*

Une propriété remarquable de toute expression imaginaire

$$\alpha+\beta\sqrt{-1},$$

c'est de pouvoir se mettre sous la forme

$$\rho(\cos\theta+\sqrt{-1}\sin\theta),$$

ρ désignant une quantité positive et θ un arc réel. En effet, si l'on pose l'équation symbolique

$$\alpha + \beta\sqrt{-1} = \rho(\cos\theta + \sqrt{-1}\sin\theta) \tag{1}$$

ou, ce qui revient au même, les deux équations réelles

$$\begin{cases} \alpha = \rho\cos\theta, \\ \beta = \rho\sin\theta, \end{cases} \tag{2}$$

on en tirera

$$\alpha^2 + \beta^2 = \rho^2(\cos^2\theta + \sin^2\theta) = \rho^2,$$

$$\rho = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}; \tag{3}$$

et, après avoir ainsi déterminé la valeur du nombre ρ, il ne restera, pour vérifier complètement les équations (2), qu'à trouver un arc θ dont le cosinus et le sinus soient respectivement

$$\begin{cases} \cos\theta = \dfrac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}, \\ \sin\theta = \dfrac{\beta}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}. \end{cases} \tag{4}$$

Ce dernier problème est toujours soluble, attendu que chacune des quantités $\dfrac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}$, $\dfrac{\beta}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}$ a une valeur numérique inférieure à l'unité, et que la somme de leurs carrés est égale à 1. De plus, il admet une infinité de solutions différentes, puisque, après avoir calculé une valeur convenable de l'arc θ, on pourra, sans changer ni le sinus ni le cosinus, augmenter ou diminuer cet arc d'un nombre quelconque de circonférences.

Lorsque l'expression imaginaire $\alpha + \beta\sqrt{-1}$ se trouve ramenée à la forme

$$\rho(\cos\theta + \sqrt{-1}\sin\theta),$$

la quantité positive ρ est ce qu'on appelle le *module* de cette expression imaginaire; et ce qui reste après la suppression du module, c'est-

à-dire le facteur

$$\cos\theta + \sqrt{-1}\sin\theta,$$

est ce que nous nommerons l'*expression réduite*. Comme des quantités α et β supposées connues on ne déduit pour le module ρ qu'une valeur unique déterminée par l'équation (3), il en résulte que le module reste le même pour deux expressions imaginaires égales. On peut donc énoncer le théorème suivant :

Théorème I. — *L'égalité de deux expressions imaginaires entraîne toujours l'égalité des modules et, par conséquent, celle des expressions réduites.*

Si l'on compare entre elles deux expressions imaginaires conjuguées, on trouvera encore que leurs modules sont égaux. Le carré du module commun à ces deux expressions ne sera autre chose que leur produit.

Lorsque dans l'expression imaginaire $\alpha + \beta\sqrt{-1}$ le second terme β s'évanouit, cette expression se réduit à une quantité réelle α. Dans la même hypothèse, on tire des équations (3) et (4) : 1° quand α est positif,

$$\rho = \sqrt{\alpha^2},$$

$$\cos\theta = 1, \qquad \sin\theta = 0$$

et, par suite,

$$\theta = \pm 2k\pi,$$

k désignant un nombre entier quelconque; 2° quand α est négatif,

$$\rho = \sqrt{\alpha^2},$$

$$\cos\theta = -1, \qquad \sin\theta = 0$$

et, par suite,

$$\theta = \pm(2k+1)\pi.$$

Ainsi le module d'une quantité réelle α n'est autre chose que sa valeur numérique $\sqrt{\alpha^2}$, et l'expression réduite qui correspond à une semblable quantité est toujours $+1$ ou -1, savoir

$$+1 = \cos(\pm 2k\pi) + \sqrt{-1}\sin(\pm 2k\pi),$$

lorsqu'il s'agit d'une quantité positive, et

$$-1 = \cos(\pm\overline{2k+1}\,\pi) + \sqrt{-1}\,\sin(\pm\overline{2k+1}\,\pi),$$

lorsqu'il s'agit d'une quantité négative.

Toute expression imaginaire qui a zéro pour module se réduit elle-même à zéro, puisque ses deux termes s'évanouissent. Réciproquement, comme le cosinus et le sinus d'un arc ne deviennent jamais nuls en même temps, il en résulte qu'une expression imaginaire ne peut se réduire à zéro qu'autant que son module s'évanouit.

Toute expression imaginaire qui a l'unité pour module est nécessairement une expression réduite. Ainsi, par exemple,

$$\cos a + \sqrt{-1}\,\sin a, \qquad \cos a - \sqrt{-1}\,\sin a,$$
$$-\cos a - \sqrt{-1}\,\sin a, \quad -\cos a + \sqrt{-1}\,\sin a$$

sont quatre expressions réduites conjuguées deux à deux. Effectivement, pour tirer ces quatre expressions de la formule

$$\cos\theta + \sqrt{-1}\,\sin\theta,$$

il suffira de poser successivement

$$\theta = \pm 2k\pi + a, \qquad \theta = \pm 2k\pi - a,$$
$$\theta = \pm(2k+1)\pi + a, \quad \theta = \pm(2k+1)\pi - a,$$

k désignant un nombre entier quelconque.

Les calculs relatifs aux expressions imaginaires pouvant être simplifiés par la considération des expressions réduites, il importe de faire connaître les principales propriétés de ces dernières. Ces propriétés sont comprises dans les théorèmes que je vais énoncer.

Théorème II. — *Pour multiplier l'une par l'autre deux expressions réduites*

$$\cos\theta + \sqrt{-1}\,\sin\theta, \quad \cos\theta' + \sqrt{-1}\,\sin\theta',$$

il suffit d'ajouter les arcs θ *et* θ' *qui leur correspondent.*

Démonstration. — On a, en effet,

$$(5) \quad \left\{ \begin{aligned} &(\cos\theta + \sqrt{-1}\,\sin\theta)(\cos\theta' + \sqrt{-1}\,\sin\theta') \\ &\quad = \cos(\theta+\theta') + \sqrt{-1}\,\sin(\theta+\theta'). \end{aligned} \right.$$

Corollaire. — Si dans la formule précédente on fait $\theta' = -\theta$, on trouvera, comme on devait s'y attendre,

$$(6) \qquad (\cos\theta + \sqrt{-1}\,\sin\theta)(\cos\theta - \sqrt{-1}\,\sin\theta) = 1.$$

Théorème III. — *Pour multiplier les unes par les autres plusieurs expressions réduites*

$$\cos\theta + \sqrt{-1}\,\sin\theta, \quad \cos\theta' + \sqrt{-1}\,\sin\theta', \quad \cos\theta'' + \sqrt{-1}\,\sin\theta'', \quad \ldots,$$

il suffit d'ajouter les arcs $\theta, \theta', \theta'', \ldots$ *qui leur correspondent.*

Démonstration. — En effet, on aura successivement

$$\begin{aligned} &(\cos\theta + \sqrt{-1}\,\sin\theta)(\cos\theta' + \sqrt{-1}\,\sin\theta') \\ &\quad = \cos(\theta+\theta') + \sqrt{-1}\,\sin(\theta+\theta'), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &(\cos\theta + \sqrt{-1}\,\sin\theta)(\cos\theta' + \sqrt{-1}\,\sin\theta')(\cos\theta'' + \sqrt{-1}\,\sin\theta'') \\ &\quad = [\cos(\theta+\theta' \; + \sqrt{-1}\,\sin(\theta+\theta')](\cos\theta'' + \sqrt{-1}\,\sin\theta'') \\ &\quad = \cos(\theta+\theta'+\theta'') + \sqrt{-1}\,\sin(\theta+\theta'+\theta''), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{aligned}$$

et, en continuant de même, on trouvera généralement, quel que soit le nombre des arcs $\theta, \theta', \theta'', \ldots$,

$$(7) \quad \left\{ \begin{aligned} &(\cos\theta + \sqrt{-1}\,\sin\theta)(\cos\theta' + \sqrt{-1}\,\sin\theta')(\cos\theta'' + \sqrt{-1}\,\sin\theta'')\ldots \\ &\quad = \cos(\theta+\theta'+\theta''+\ldots) + \sqrt{-1}\,\sin(\theta+\theta'+\theta''+\ldots). \end{aligned} \right.$$

Corollaire. — Si l'on développe par la multiplication immédiate le premier membre de l'équation (7), le développement se composera de deux parties, l'une toute réelle, l'autre ayant pour facteur $\sqrt{-1}$. Cela posé, la partie réelle fournira la valeur de

$$\cos(\theta+\theta'+\theta''+\ldots),$$

et le coefficient de $\sqrt{-1}$ dans la seconde partie la valeur de

$$\sin(\theta+\theta'+\theta''+\ldots).$$

Supposons, par exemple, que l'on considère seulement trois arcs θ, θ', θ''. L'équation (7) deviendra

$$\begin{aligned}&(\cos\theta+\sqrt{-1}\sin\theta)(\cos\theta'+\sqrt{-1}\sin\theta')(\cos\theta''+\sqrt{-1}\sin\theta'')\\&\quad=\cos(\theta+\theta'+\theta'')+\sqrt{-1}\sin(\theta+\theta'+\theta''),\end{aligned}$$

et, après avoir développé le premier membre de cette dernière par la multiplication algébrique, on en conclura

$$\begin{aligned}\cos(\theta+\theta'+\theta'')=&\cos\theta\cos\theta'\cos\theta''-\cos\theta\sin\theta'\sin\theta''\\&-\sin\theta\cos\theta'\sin\theta''-\sin\theta\sin\theta'\cos\theta'',\\\sin(\theta+\theta'+\theta'')=&\sin\theta\cos\theta'\cos\theta''+\cos\theta\sin\theta'\cos\theta''\\&+\cos\theta\cos\theta'\sin\theta''+\sin\theta\sin\theta'\sin\theta''.\end{aligned}$$

Théorème IV. — *Pour diviser l'expression réduite*

$$\cos\theta+\sqrt{-1}\sin\theta$$

par la suivante

$$\cos\theta'+\sqrt{-1}\sin\theta',$$

il suffit de retrancher l'arc θ', qui correspond à la seconde, de l'arc θ correspondant à la première.

Démonstration. — Soit x le quotient cherché, en sorte qu'on ait

$$x=\frac{\cos\theta+\sqrt{-1}\sin\theta}{\cos\theta'+\sqrt{-1}\sin\theta'}.$$

Ce quotient devra être une nouvelle expression imaginaire tellement choisie, que, en la multipliant par $\cos\theta'+\sqrt{-1}\sin\theta'$, on reproduise $\cos\theta+\sqrt{-1}\sin\theta$. En d'autres termes, x devra satisfaire à l'équation

$$(\cos\theta'+\sqrt{-1}\sin\theta')x=\cos\theta+\sqrt{-1}\sin\theta.$$

Pour tirer de cette équation la valeur de x, il suffira de multiplier les deux membres par

$$\cos\theta'-\sqrt{-1}\sin\theta'.$$

On réduira de cette manière le coefficient de x à l'unité (*voir* le théorème II, corollaire I), et l'on trouvera

$$\begin{aligned}x&=(\cos\theta+\sqrt{-1}\sin\theta)(\cos\theta'-\sqrt{-1}\sin\theta')\\&=(\cos\theta+\sqrt{-1}\sin\theta)[\cos(-\theta')+\sqrt{-1}\sin(-\theta')]\\&=\cos(\theta-\theta')+\sqrt{-1}\sin(\theta-\theta').\end{aligned}$$

On aura donc en définitive

$$\frac{\cos\theta+\sqrt{-1}\sin\theta}{\cos\theta'+\sqrt{-1}\sin\theta'}=\cos(\theta-\theta')+\sqrt{-1}\sin(\theta-\theta'). \tag{8}$$

Corollaire. — Si dans l'équation (8) on fait $\theta=0$, elle donnera

$$\frac{1}{\cos\theta'+\sqrt{-1}\sin\theta'}=\cos\theta'-\sqrt{-1}\sin\theta'. \tag{9}$$

Théorème V. — *Pour élever l'expression imaginaire*

$$\cos\theta+\sqrt{-1}\sin\theta$$

à la puissance du degré m (m désignant un nombre entier quelconque), il suffit de multiplier dans cette expression l'arc θ par le nombre m.

Démonstration. — En effet, les arcs θ, θ', θ'', ... pouvant être quelconques dans la formule (7), si on les suppose tous égaux à l'arc θ et en nombre m, on trouvera

$$(\cos\theta+\sqrt{-1}\sin\theta)^m=\cos m\theta+\sqrt{-1}\sin m\theta. \tag{10}$$

Corollaire. — Si dans l'équation (10) on fait successivement $\theta=z$, $\theta=-z$, on obtiendra les deux suivantes :

$$\left\{\begin{aligned}(\cos z+\sqrt{-1}\sin z)^m&=\cos mz+\sqrt{-1}\sin mz,\\(\cos z-\sqrt{-1}\sin z)^m&=\cos mz-\sqrt{-1}\sin mz.\end{aligned}\right. \tag{11}$$

Le premier membre de chacune de ces dernières, étant toujours un produit de m facteurs égaux, pourra être développé par la multiplication immédiate de ces facteurs ou, ce qui revient au même, par la formule de Newton. Si, après avoir effectué le développement dont il s'agit, on égale de part et d'autre dans chaque équation : 1° les parties réelles; 2° les coefficients de $\sqrt{-1}$, on en conclura

$$(12)\quad \left\{\begin{aligned} \cos mz &= \cos^m z - \frac{m(m-1)}{1.2}\cos^{m-2}z\sin^2 z \\ &\quad + \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{1.2.3.4}\cos^{m-4}z\sin^4 z - \ldots, \\ \sin mz &= \frac{m}{1}\cos^{m-1}z\sin z \\ &\quad - \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}\cos^{m-3}z\sin^3 z + \ldots. \end{aligned}\right.$$

On trouvera, par exemple, en supposant $m = 2$,

$$\cos 2z = \cos^2 z - \sin^2 z,$$
$$\sin 2z = 2\sin z\cos z;$$

en supposant $m = 3$,

$$\cos 3z = \cos^3 z - 3\cos z\sin^2 z,$$
$$\sin 3z = 3\cos^2 z\sin z - \sin^3 z,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Théorème VI. — *Pour élever l'expression imaginaire*

$$\cos\theta + \sqrt{-1}\sin\theta$$

à la puissance du degré $-m$ *(*m *désignant un nombre entier quelconque), il suffit de multiplier dans cette expression l'arc* θ *par le degré* $-m$.

Démonstration. — En effet, d'après la définition que nous avons donnée des puissances négatives (*voir* le § I), on aura

$$(\cos\theta + \sqrt{-1}\sin\theta)^{-m} = \frac{1}{(\cos\theta + \sqrt{-1}\sin\theta)^m} = \frac{1}{\cos m\theta + \sqrt{-1}\sin m\theta}.$$

Par suite, en ayant égard à la formule (9), on trouvera

$$(13)\qquad (\cos\theta + \sqrt{-1}\sin\theta)^{-m} = \cos m\theta - \sqrt{-1}\sin m\theta$$

ou, ce qui revient au même,

$$(14)\qquad (\cos\theta + \sqrt{-1}\sin\theta)^{-m} = \cos(-m\theta) + \sqrt{-1}\sin(-m\theta).$$

Après avoir établi, comme nous venons de le faire, les principales propriétés des expressions réduites, il devient facile de multiplier ou de diviser l'une par l'autre deux ou plusieurs expressions imaginaires, quels que soient leurs modules, aussi bien que d'élever une expression imaginaire quelconque à la puissance du degré m ou $-m$ (m désignant un nombre entier). On peut, en effet, exécuter simplement ces diverses opérations à l'aide des théorèmes suivants :

Théorème VII. — *Pour obtenir le produit de deux ou de plusieurs expressions imaginaires, il suffit de multiplier le produit des expressions réduites qui leur correspondent par le produit des modules.*

Démonstration. — Le théorème énoncé se déduit immédiatement de ce principe, que le produit de plusieurs facteurs réels ou imaginaires reste le même dans quelque ordre qu'on les multiplie. Soient effectivement

$$\rho(\cos\theta + \sqrt{-1}\sin\theta),\quad \rho'(\cos\theta' + \sqrt{-1}\sin\theta'),\quad \rho''(\cos\theta'' + \sqrt{-1}\sin\theta''),\quad \ldots$$

plusieurs expressions imaginaires, dont ρ, ρ', ρ'', ... désignent les modules. Lorsqu'on voudra multiplier entre elles ces expressions dont chacune est le produit d'un module par une expression réduite, on pourra, en vertu du principe qu'on vient de rappeler, former, d'une part, le produit de tous les modules, de l'autre, celui de toutes les expressions réduites, puis multiplier ces deux derniers produits l'un par l'autre. On trouvera de cette manière pour résultat définitif

$$(15)\qquad \rho\rho'\rho''\ldots[\cos(\theta + \theta' + \theta'' + \ldots) + \sqrt{-1}\sin(\theta + \theta' + \theta'' + \ldots)].$$

Corollaire I. — Le produit de plusieurs expressions imaginaires est une nouvelle expression imaginaire qui a pour module le produit des modules de toutes les autres.

Corollaire II. — Comme une expression imaginaire ne s'évanouit jamais qu'avec son module, et que, pour faire évanouir le produit de plusieurs modules, il faut nécessairement supposer l'un d'eux réduit à zéro, il est clair qu'on peut tirer du théorème VII la conclusion suivante :

Le produit de deux ou de plusieurs expressions imaginaires ne peut s'évanouir qu'autant que l'une d'elles se réduit à zéro.

Théorème VIII. — *Pour obtenir le quotient de deux expressions imaginaires, il suffit de multiplier le quotient des expressions réduites qui leur correspondent par le quotient des modules.*

Démonstration. — Supposons qu'il s'agisse de diviser l'expression imaginaire

$$\rho(\cos\theta+\sqrt{-1}\sin\theta),$$

dont le module est ρ, par la suivante

$$\rho'(\cos\theta'+\sqrt{-1}\sin\theta'),$$

dont le module est ρ'. Si l'on désigne par x le quotient demandé, x devra être une nouvelle expression imaginaire propre à vérifier l'équation

$$\rho'(\cos\theta'+\sqrt{-1}\sin\theta')x=\rho(\cos\theta+\sqrt{-1}\sin\theta).$$

Pour tirer de cette équation la valeur de x, on multipliera les deux membres par le produit des deux facteurs

$$\frac{1}{\rho'},\quad \cos\theta'-\sqrt{-1}\sin\theta',$$

et l'on trouvera de cette manière, en écrivant $\frac{\rho}{\rho'}$ au lieu de $\rho\frac{1}{\rho'}$,

$$x=\frac{\rho}{\rho'}[\cos(\theta-\theta')+\sqrt{-1}\sin(\theta-\theta')].$$

On aura donc en dernière analyse

$$(16)\qquad \frac{\rho(\cos\theta+\sqrt{-1}\sin\theta)}{\rho'(\cos\theta'+\sqrt{-1}\sin\theta')}=\frac{\rho}{\rho'}[\cos(\theta-\theta')+\sqrt{-1}\sin(\theta-\theta')];$$

et, puisque, en vertu du théorème IV,

$$\cos(\theta-\theta')+\sqrt{-1}\sin(\theta-\theta')$$

est précisément le quotient des deux expressions réduites

$$\cos\theta+\sqrt{-1}\sin\theta,\quad \cos\theta'+\sqrt{-1}\sin\theta',$$

il est clair que, après avoir établi la formule (16), nous devons considérer le théorème VIII comme démontré.

Corollaire. — Si dans l'équation (16) on fait $\theta=0$, elle donnera

$$(17)\qquad \frac{1}{\rho'(\cos\theta'+\sqrt{-1}\sin\theta')}=\frac{1}{\rho'}(\cos\theta'-\sqrt{-1}\sin\theta').$$

Théorème IX. — *Pour obtenir la $m^{\text{ième}}$ puissance d'une expression imaginaire (m désignant un nombre entier quelconque), il suffit de multiplier la $m^{\text{ième}}$ puissance de l'expression réduite correspondante par la $m^{\text{ième}}$ puissance du module.*

Démonstration. — En effet, si dans le théorème VII on suppose les expressions imaginaires

$$\rho(\cos\theta+\sqrt{-1}\sin\theta),$$
$$\rho'(\cos\theta'+\sqrt{-1}\sin\theta'),$$
$$\rho''(\cos\theta''+\sqrt{-1}\sin\theta''),$$
$$\dots\dots\dots\dots$$

toutes égales entre elles et en nombre m, leur produit sera équivalent à la puissance $m^{\text{ième}}$ de la première, c'est-à-dire à

$$[\rho(\cos\theta+\sqrt{-1}\sin\theta)]^m;$$

et, comme dans cette hypothèse l'expression (15) deviendra

$$\rho^m(\cos m\theta+\sqrt{-1}\sin m\theta),$$

on aura définitivement

$$(18)\qquad [\rho(\cos\theta+\sqrt{-1}\sin\theta)]^m=\rho^m(\cos m\theta+\sqrt{-1}\sin m\theta).$$

L'expression réduite

$$\cos m\theta + \sqrt{-1}\sin m\theta$$

étant égale (en vertu du théorème V) à

$$(\cos\theta + \sqrt{-1}\sin\theta)^m,$$

il en résulte que, après avoir établi la formule (18), on doit considérer le théorème IX comme démontré.

Théorème X. — *Pour élever une expression imaginaire à la puissance du degré $-m$ (m désignant un nombre entier), il suffit de former les puissances semblables du module et de l'expression réduite, puis de multiplier ces deux dernières l'une par l'autre.*

Démonstration. — Supposons qu'il s'agisse d'élever à la puissance du degré $-m$ l'expression imaginaire

$$\rho(\cos\theta + \sqrt{-1}\sin\theta),$$

dont le module est ρ. On aura, en vertu de la définition des puissances négatives,

$$[\rho(\cos\theta + \sqrt{-1}\sin\theta)]^{-m} = \frac{1}{[\rho(\cos\theta + \sqrt{-1}\sin\theta)]^m}$$
$$= \frac{1}{\rho^m(\cos m\theta + \sqrt{-1}\sin m\theta)}.$$

Par suite, en ayant égard à la formule (17), on trouvera

$$[\rho(\cos\theta + \sqrt{-1}\sin\theta)]^{-m} = \frac{1}{\rho^m}(\cos m\theta - \sqrt{-1}\sin m\theta)$$

ou, ce qui revient au même,

$$(19)\qquad [\rho(\cos\theta + \sqrt{-1}\sin\theta)]^{-m} = \rho^{-m}(\cos m\theta - \sqrt{-1}\sin m\theta).$$

Cette dernière formule réunie à l'équation (13) fournit la démonstration complète du théorème X.

§ III. — *Sur les racines réelles ou imaginaires des deux quantités $+1$, -1, et sur leurs puissances fractionnaires.*

Supposons que l'on désigne par m et n deux nombres entiers premiers entre eux. Si l'on fait usage des notations adoptées dans le § I, les racines $n^{\text{ièmes}}$ de l'unité, ou, ce qui revient au même, ses puissances du degré $\frac{1}{n}$ seront les diverses valeurs de l'expression

$$\sqrt[n]{1} = ((1))^{\frac{1}{n}};$$

et, de même, les puissances fractionnaires de l'unité, positives ou négatives, du degré $\frac{m}{n}$ ou $-\frac{m}{n}$, seront les diverses valeurs de

$$((1))^{\frac{m}{n}} \quad \text{ou} \quad ((1))^{-\frac{m}{n}}.$$

On en conclura que, pour déterminer ces racines et ces puissances, il suffit de résoudre, l'un après l'autre, les trois problèmes suivants.

Problème I. — *Trouver les diverses valeurs réelles ou imaginaires de l'expression*

$$((1))^{\frac{1}{n}}.$$

Solution. — Soit x l'une de ces valeurs; et, afin de la présenter sous la forme générale qui comprend à la fois toutes les quantités réelles et toutes les expressions imaginaires, supposons

$$x = r(\cos t + \sqrt{-1}\sin t),$$

r désignant une quantité positive, et t un arc réel. On aura, d'après la définition même de l'expression $((1))^{\frac{1}{n}}$,

$$(1)\qquad x^n = 1$$

ou, ce qui revient au même,

$$r^n(\cos nt + \sqrt{-1}\sin nt) = 1.$$

On tirera de cette dernière équation (à l'aide du théorème I, § II)

$$r^n = 1,$$

$$\cos nt + \sqrt{-1}\sin nt = 1,$$

et, par suite,

$$r = 1,$$

$$\cos nt = 1, \qquad \sin nt = 0, \qquad nt = \pm 2k\pi,$$

$$t = \pm \frac{2k\pi}{n},$$

k représentant un nombre entier quelconque. Les quantités r et t étant ainsi déterminées, les diverses valeurs propres à vérifier l'équation (1) seront évidemment comprises dans la formule

$$x = \cos\frac{2k\pi}{n} \pm \sqrt{-1}\sin\frac{2k\pi}{n}. \tag{2}$$

En d'autres termes, les diverses valeurs de $((1))^{\frac{1}{n}}$ seront données par l'équation

$$((1))^{\frac{1}{n}} = \cos\frac{2k\pi}{n} \pm \sqrt{-1}\sin\frac{2k\pi}{n}. \tag{3}$$

Soit maintenant h le nombre entier le plus rapproché du rapport $\frac{k}{n}$. La différence entre les deux nombres h, $\frac{k}{n}$ sera tout au plus égale à $\frac{1}{2}$, en sorte qu'on aura

$$\frac{k}{n} = h \pm \frac{k'}{n},$$

$\frac{k'}{n}$ désignant une fraction égale ou inférieure à $\frac{1}{2}$, et, par suite, k' un nombre entier inférieur ou tout au plus égal à $\frac{n}{2}$. On en conclura

$$\frac{2k\pi}{n} = 2h\pi \pm \frac{2k'\pi}{n},$$

$$\cos\frac{2k\pi}{n} \pm \sqrt{-1}\sin\frac{2k\pi}{n} = \cos\frac{2k'\pi}{n} \pm \sqrt{-1}\sin\frac{2k'\pi}{n}.$$

Par conséquent, toutes les valeurs de $((1))^{\frac{1}{n}}$ seront comprises dans la formule

$$\cos\frac{2k'\pi}{n} \pm \sqrt{-1}\sin\frac{2k'\pi}{n},$$

si l'on y suppose k' renfermé entre les limites 0, $\frac{n}{2}$, ou, ce qui revient au même, dans la formule (3), si l'on y suppose k renfermé entre les mêmes limites.

Corollaire I. — Lorsque n est pair, les diverses valeurs que le nombre entier k peut recevoir, sans sortir des limites 0, $\frac{n}{2}$, sont respectivement

$$0,\quad 1,\quad 2,\quad \ldots,\quad \frac{n-2}{2},\quad \frac{n}{2}.$$

Pour chacune de ces valeurs de k, la formule (3) fournit en général deux valeurs imaginaires conjuguées de l'expression $((1))^{\frac{1}{n}}$, c'est-à-dire deux racines imaginaires de l'unité conjuguées et du degré n. Seulement, on trouve, pour $k = 0$, une racine réelle $+1$, et, pour $k = \frac{n}{2}$, une autre racine réelle -1. En résumé, lorsque n est pair, l'expression

$$((1))^{\frac{1}{n}}$$

admet deux valeurs réelles, savoir

$$+1, \quad -1,$$

avec $n-2$ valeurs imaginaires conjuguées deux à deux, savoir

$$\left\{\begin{array}{ll}
\cos\frac{2\pi}{n} + \sqrt{-1}\sin\frac{2\pi}{n}, & \cos\frac{2\pi}{n} - \sqrt{-1}\sin\frac{2\pi}{n}, \\
\cos\frac{4\pi}{n} + \sqrt{-1}\sin\frac{4n}{n}, & \cos\frac{4\pi}{n} - \sqrt{-1}\sin\frac{4\pi}{n}, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\
\cos\frac{(n-2)\pi}{n} + \sqrt{-1}\sin\frac{(n-2)\pi}{n}, & \cos\frac{(n-2)\pi}{n} - \sqrt{-1}\sin\frac{(n-2)\pi}{n}.
\end{array}\right. \tag{4}$$

Le nombre total de ces valeurs réelles ou imaginaires est égal à n.

Supposons, par exemple, $n = 2$. On trouvera qu'il existe deux valeurs de l'expression

$$((1))^{\frac{1}{2}},$$

ou, ce qui revient au même, deux valeurs de x propres à vérifier l'équation

$$x^2 = 1,$$

et que ces valeurs, toutes deux réelles, sont respectivement

$$+1, \quad -1.$$

Supposons encore $n = 4$. On trouvera qu'il existe quatre valeurs de l'expression

$$((1))^{\frac{1}{4}},$$

ou, ce qui revient au même, quatre valeurs de x propres à vérifier l'équation

$$x^4 = 1.$$

Parmi ces quatre valeurs, deux sont réelles, savoir

$$+1, \quad -1.$$

Les deux autres sont imaginaires et respectivement égales, la première à

$$\cos\frac{\pi}{2} + \sqrt{-1}\sin\frac{\pi}{2} = +\sqrt{-1},$$

la seconde à

$$\cos\frac{\pi}{2} - \sqrt{-1}\sin\frac{\pi}{2} = -\sqrt{-1}.$$

Corollaire II. — Lorsque n est impair, les diverses valeurs que le nombre entier k peut recevoir, sans sortir des limites 0, $\frac{n}{2}$, sont respectivement

$$0, \quad 1, \quad 2, \quad \ldots, \quad \frac{n-1}{2}.$$

Pour chacune de ces valeurs de k, la formule (3) fournit en général deux valeurs imaginaires conjuguées de l'expression $((1))^{\frac{1}{n}}$, c'est-à-dire deux racines imaginaires conjuguées et du degré n. Seulement, on trouve, pour $k = 0$, une racine unique et réelle, savoir $+1$. En résumé, lorsque n est impair, l'expression

$$((1))^{\frac{1}{n}}$$

admet, avec la seule valeur réelle

$$+1,$$

$n-1$ valeurs imaginaires conjuguées deux à deux, savoir

$$(5)\quad \left\{ \begin{array}{ll} \cos\frac{2\pi}{n} + \sqrt{-1}\sin\frac{2\pi}{n}, & \cos\frac{2\pi}{n} - \sqrt{-1}\sin\frac{2\pi}{n}, \\ \cos\frac{4\pi}{n} + \sqrt{-1}\sin\frac{4\pi}{n}, & \cos\frac{4\pi}{n} - \sqrt{-1}\sin\frac{4\pi}{n}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots, & \ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \cos\frac{(n-1)\pi}{n} + \sqrt{-1}\sin\frac{(n-1)\pi}{n}, & \cos\frac{(n-1)\pi}{n} - \sqrt{-1}\sin\frac{(n-1)\pi}{n}. \end{array} \right.$$

Le nombre total de ces valeurs réelles ou imaginaires est égal à n.

Supposons, par exemple, $n = 3$. On trouvera qu'il existe trois valeurs de l'expression

$$((1))^{\frac{1}{3}},$$

ou, ce qui revient au même, trois valeurs de x propres à vérifier l'équation

$$x^3 = 1,$$

et que ces valeurs, dont une est réelle, sont respectivement

$$+1,$$

$$\cos\frac{2\pi}{3} + \sqrt{-1}\sin\frac{2\pi}{3}, \qquad \cos\frac{2\pi}{3} - \sqrt{-1}\sin\frac{2\pi}{3}.$$

De plus, le côté de l'hexagone étant, comme on sait, égal au rayon, et le supplément de l'arc sous-tendu par ce côté ayant pour mesure $\frac{2\pi}{3}$, on obtiendra facilement les équations

$$\cos\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2}, \qquad \sin\frac{2\pi}{3} = +\frac{3^{\frac{1}{2}}}{2},$$

en vertu desquelles les valeurs imaginaires de l'expression $((1))^{\frac{1}{3}}$ se réduisent à

$$-\frac{1}{2} + \frac{3^{\frac{1}{2}}}{2}\sqrt{-1}, \qquad -\frac{1}{2} - \frac{3^{\frac{1}{2}}}{2}\sqrt{-1}.$$

Corollaire III. — n désignant un nombre entier quelconque, le nombre des valeurs, soit réelles, soit imaginaires, de l'expression $((1))^{\frac{1}{n}}$, ou, ce qui revient au même, le nombre des valeurs de x propres à vérifier l'équation $x^n = 1$ restera toujours égal à n.

Problème II. — *Trouver les diverses valeurs réelles ou imaginaires de l'expression*

$$((1))^{\frac{m}{n}}.$$

Solution. — Les nombres m et n étant supposés premiers entre eux, on aura, d'après la définition même de l'expression $((1))^{\frac{m}{n}}$,

$$((1))^{\frac{m}{n}} = \left[((1))^{\frac{1}{n}}\right]^m;$$

puis, en remettant pour $((1))^{\frac{1}{n}}$ sa valeur générale tirée de l'équation (3), on trouvera

$$((1))^{\frac{m}{n}} = \left[\cos\frac{2k\pi}{n} \pm \sqrt{-1}\sin\frac{2k\pi}{n}\right]^m$$

et, par suite,

$$((1))^{\frac{m}{n}} = \cos\frac{m.2k\pi}{n} \pm \sqrt{-1}\sin\frac{m.2k\pi}{n}. \tag{6}$$

Pour déduire de cette dernière formule toutes les valeurs de $((1))^{\frac{m}{n}}$, il ne reste qu'à donner successivement à k toutes les valeurs entières comprises entre 0 et $\frac{n}{2}$. Soient k', k'' deux de ces valeurs supposées inégales. Je dis que les cosinus

$$\cos\frac{m.2k'\pi}{n}, \quad \cos\frac{m.2k''\pi}{n}$$

seront nécessairement différents l'un de l'autre. En effet, ces cosinus ne pourraient devenir égaux que dans le cas où les arcs qui leur correspondent seraient liés entre eux par une équation de la forme

$$\frac{m.2k'\pi}{n} = \pm 2h\pi \pm \frac{m.2k''\pi}{n},$$

h désignant un nombre entier. Or on tire de cette équation

$$h = \frac{m(\pm k' \pm k'')}{n}.$$

Il faudrait donc, puisque m est premier à n, que $\pm k' \pm k''$ fût divisible par n, ce qu'on ne saurait admettre, attendu que, les nombres k', k'' étant inégaux, et chacun d'eux ne pouvant surpasser $\frac{1}{2}n$, leur somme ou leur différence est nécessairement inférieure à n. Ainsi, deux valeurs différentes de k comprises entre les limites 0 et $\frac{1}{2}n$ fournissent deux valeurs différentes de

$$\cos\frac{m.2k\pi}{n}.$$

On conclut aisément de cette remarque, que les valeurs réelles ou imaginaires de l'expression $((1))^{\frac{m}{n}}$ données par l'équation (6) sont en même nombre que les valeurs réelles ou imaginaires de $((1))^{\frac{1}{n}}$ déterminées par l'équation (3). De plus, comme on a évidemment

$$\left(\cos\frac{m.2k\pi}{n} \pm \sqrt{-1}\sin\frac{m.2k\pi}{n}\right)^n = \cos(m.2k\pi) \pm \sqrt{-1}\sin(m.2k\pi) = 1,$$

il en résulte que toute valeur de $((1))^{\frac{m}{n}}$ est une expression réelle ou imaginaire dont la puissance n équivaut à l'unité, par conséquent une valeur de $((1))^{\frac{1}{n}}$. Ces observations conduisent à la formule

$$((1))^{\frac{m}{n}} = ((1))^{\frac{1}{n}}, \tag{7}$$

dans laquelle le signe $=$ indique seulement que l'une des valeurs du premier membre est toujours égale à l'une des valeurs du second.

Problème III. — *Trouver les diverses valeurs réelles ou imaginaires de l'expression*

$$((1))^{-\frac{m}{n}}.$$

Solution. — On aura, d'après la définition des puissances négatives,

$$((1))^{-\frac{m}{n}} = \frac{1}{((1))^{\frac{m}{n}}},$$

puis, en remettant pour $((1))^{\frac{m}{n}}$ sa valeur générale tirée de l'équation (6), et ayant égard à la formule (9) du paragraphe précédent,

$$(8)\qquad ((1))^{-\frac{m}{n}} = \cos\frac{m.2k\pi}{n} \mp \sqrt{-1}\sin\frac{m.2k\pi}{n}.$$

Il suit de cette dernière équation que les diverses valeurs de $((1))^{-\frac{m}{n}}$ sont les mêmes que celles de $((1))^{\frac{m}{n}}$, et par conséquent égales à celles de $((1))^{\frac{1}{n}}$. On a donc

$$(9)\qquad ((1))^{-\frac{m}{n}} = ((1))^{\frac{1}{n}},$$

le signe $=$ devant être interprété comme dans l'équation (7).

Corollaire. — Si l'on fait $m = 1$, la formule (9) donnera

$$(10)\qquad ((1))^{-\frac{1}{n}} = ((1))^{\frac{1}{n}}.$$

Supposons maintenant que l'on cherche les racines et puissances fractionnaires, non plus de l'unité, mais de la quantité -1. Les racines $n^{\text{ièmes}}$ de cette quantité, ou, ce qui revient au même, ses puissances du degré $\frac{1}{n}$, seront les diverses valeurs de l'expression

$$\sqrt[n]{-1} = ((-1))^{\frac{1}{n}};$$

et de même, les puissances fractionnaires de -1, positives ou négatives, du degré $\frac{m}{n}$ ou $-\frac{m}{n}$, seront les diverses valeurs de

$$((-1))^{\frac{m}{n}} \quad \text{ou} \quad ((-1))^{-\frac{m}{n}}.$$

En conséquence, pour déterminer ces racines et ces puissances, il suffira de résoudre l'un après l'autre les trois nouveaux problèmes que je vais énoncer.

Problème IV. — *Trouver les diverses valeurs réelles ou imaginaires de l'expression*

$$((-1))^{\frac{1}{n}}.$$

Solution. — Soit

$$x = r(\cos t + \sqrt{-1}\sin t)$$

l'une de ces valeurs, r désignant une quantité positive, et t un arc réel. On aura, d'après la définition même de l'expression $((-1))^{\frac{1}{n}}$,

$$(11)\qquad x^n = -1$$

ou, ce qui revient au même,

$$r^n(\cos nt + \sqrt{-1}\sin nt) = -1.$$

On tirera de cette dernière équation (à l'aide du théorème I, § II),

$$r^n = 1,$$
$$\cos nt + \sqrt{-1}\sin nt = -1,$$

et, par suite,

$$r = 1,$$
$$\cos nt = -1,\qquad \sin nt = 0,\qquad nt = \pm(2k+1)\pi,$$
$$t = \pm\frac{(2k+1)\pi}{n},$$

k représentant un nombre entier quelconque. Les quantités r et t étant ainsi déterminées, les diverses valeurs de x propres à vérifier l'équation (11) se trouveront évidemment comprises dans la formule

$$(12)\qquad x = \cos\frac{(2k+1)\pi}{n} \pm \sqrt{-1}\sin\frac{(2k+1)\pi}{n}.$$

En d'autres termes, les diverses valeurs de $((-1))^{\frac{1}{n}}$ seront données par l'équation

$$(13)\qquad ((-1))^{\frac{1}{n}} = \cos\frac{(2k+1)\pi}{n} \pm \sqrt{-1}\sin\frac{(2k+1)\pi}{n}.$$

Soit maintenant h le nombre entier le plus rapproché du rapport $\frac{2k+1}{2n}$. La différence entre les deux nombres h, $\frac{2k+1}{n}$ sera évidemment une fraction de numérateur impair, inférieure ou tout au plus égale à $\frac{1}{2}$; en sorte qu'on aura

$$\frac{2k+1}{2n} = h \pm \frac{2k'+1}{2n},$$

$2k'+1$ désignant un nombre impair égal ou inférieur à n. On en conclura

$$\frac{(2k+1)\pi}{n} = 2h\pi \pm \frac{(2k'+1)\pi}{n},$$

$$\cos\frac{(2k+1)\pi}{n} \pm \sqrt{-1}\sin\frac{(2k+1)\pi}{n} = \cos\frac{(2k'+1)\pi}{n} \pm \sqrt{-1}\sin\frac{(2k'+1)\pi}{n}.$$

Par conséquent toutes les valeurs de $((-1))^{\frac{1}{n}}$ seront comprises dans la formule

$$\cos\frac{(2k'+1)\pi}{n} \pm \sqrt{-1}\sin\frac{(2k'+1)\pi}{n},$$

si l'on y suppose $2k'+1$ renfermé entre les limites 0, n, ou, ce qui revient au même, dans la formule (13), si l'on y suppose $2k+1$ renfermé entre les mêmes limites.

Corollaire I. — Lorsque n est pair, les diverses valeurs que $2k+1$ peut recevoir, sans sortir des limites 0, n, sont respectivement

$$1,\quad 3,\quad 5,\quad \ldots,\quad \overline{n-1}.$$

Pour chacune de ces valeurs de $2k+1$, la formule (13) fournit toujours deux valeurs imaginaires conjuguées de l'expression $((-1))^{\frac{1}{n}}$. Par suite, cette expression, dans le cas que nous considérons ici, n'admet point de valeurs réelles, mais seulement n valeurs imaginaires conjuguées deux à deux, savoir :

$$(14)\quad \left\{\begin{array}{ll} \cos\frac{\pi}{n} + \sqrt{-1}\sin\frac{\pi}{n}, & \cos\frac{\pi}{n} - \sqrt{-1}\sin\frac{\pi}{n}, \\ \cos\frac{3\pi}{n} + \sqrt{-1}\sin\frac{3\pi}{n}, & \cos\frac{3\pi}{n} - \sqrt{-1}\sin\frac{3\pi}{n}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \cos\frac{(n-1)\pi}{n} + \sqrt{-1}\sin\frac{(n-1)\pi}{n}, & \cos\frac{(n-1)\pi}{n} - \sqrt{-1}\sin\frac{(n-1)\pi}{n}. \end{array}\right.$$

Supposons, par exemple, $n = 2$. On trouvera qu'il existe deux valeurs de l'expression $((-1))^{\frac{1}{2}}$, ou, ce qui revient au même, deux valeurs de x propres à vérifier l'équation

$$x^2 = -1,$$

et que ces valeurs, toutes deux imaginaires, sont respectivement

$$\cos\frac{\pi}{2} + \sqrt{-1}\sin\frac{\pi}{2} = +\sqrt{-1},$$

$$\cos\frac{\pi}{2} - \sqrt{-1}\sin\frac{\pi}{2} = -\sqrt{-1}.$$

Supposons encore $n = 4$. On verra qu'il existe quatre valeurs de l'expression $((-1))^{\frac{1}{4}}$, ou, en d'autres termes, quatre valeurs de x propres à vérifier l'équation

$$x^4 = -1;$$

et que ces quatre valeurs sont comprises dans les deux formules

$$\cos\frac{\pi}{4} \pm \sqrt{-1}\sin\frac{\pi}{4},$$

$$\cos\frac{3\pi}{4} \pm \sqrt{-1}\sin\frac{3\pi}{4},$$

ou, ce qui revient au même, dans la seule formule

$$\pm\cos\frac{\pi}{4} \pm \sqrt{-1}\sin\frac{\pi}{4}.$$

Comme on a d'ailleurs

$$\cos\frac{\pi}{4} = \sin\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

on trouvera définitivement

$$((-1))^{\frac{1}{4}} = \pm\frac{1}{2^{\frac{1}{2}}} \pm \frac{1}{2^{\frac{1}{2}}}\sqrt{-1}.$$

Corollaire II. — Lorsque n est impair, les diverses valeurs que $2k+1$ peut recevoir sans sortir des limites 0 et n sont respectivement

$$1,\quad 3,\quad 5,\quad \ldots,\quad n-2,\quad n.$$

Pour chacune de ces valeurs de $2k+1$, la formule (13) fournit en général deux valeurs imaginaires conjuguées de l'expression $((-1))^{\frac{1}{n}}$, c'est-à-dire deux racines imaginaires de -1 conjuguées et du degré n. Seulement on trouve, pour $2k+1=n$, une racine unique et réelle, savoir -1. En résumé, lorsque n est impair, l'expression $((-1))^{\frac{1}{n}}$ admet, avec la seule valeur réelle

$$-1,$$

$n-1$ valeurs imaginaires conjuguées deux à deux, savoir

$$(15)\quad \begin{cases} \cos\frac{\pi}{n}+\sqrt{-1}\sin\frac{\pi}{n}, & \cos\frac{\pi}{n}-\sqrt{-1}\sin\frac{\pi}{n}, \\ \cos\frac{3\pi}{n}+\sqrt{-1}\sin\frac{3\pi}{n}, & \cos\frac{3\pi}{n}-\sqrt{-1}\sin\frac{3\pi}{n}, \\ \dots\dots\dots\dots, & \dots\dots\dots\dots, \\ \cos\frac{(n-2)\pi}{n}+\sqrt{-1}\sin\frac{(n-2)\pi}{n}, & \cos\frac{(n-2)\pi}{n}-\sqrt{-1}\sin\frac{(n-2)\pi}{n}. \end{cases}$$

Le nombre total de ces valeurs réelles ou imaginaires est égal à n.

Supposons, par exemple, $n=3$. On trouvera qu'il existe trois valeurs de l'expression $((-1))^{\frac{1}{3}}$, ou, ce qui revient au même, trois valeurs de x propres à vérifier l'équation

$$x^3=-1,$$

et que ces valeurs, dont une est réelle, sont respectivement

$$-1,$$

$$\cos\frac{\pi}{3}+\sqrt{-1}\sin\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}+\frac{3^{\frac{1}{2}}}{2}\sqrt{-1},$$

$$\cos\frac{\pi}{3}-\sqrt{-1}\sin\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}-\frac{3^{\frac{1}{2}}}{2}\sqrt{-1}.$$

Corollaire III. — n désignant un nombre entier quelconque, le nombre des valeurs, soit réelles, soit imaginaires, de l'expression $((-1))^{\frac{1}{n}}$, ou, ce qui revient au même, le nombre des valeurs de x propres à vérifier l'équation $x^n=-1$, restera toujours égal à n.

Problème V. — *Trouver les diverses valeurs réelles ou imaginaires de l'expression*

$$((-1))^{\frac{m}{n}}.$$

Solution. — Les nombres m et n étant supposés premiers entre eux, on aura, d'après la définition même de l'expression $((-1))^{\frac{m}{n}}$,

$$((-1))^{\frac{m}{n}}=\left[((-1))^{\frac{1}{n}}\right]^m;$$

puis, en remettant pour $((-1))^{\frac{1}{n}}$ sa valeur générale tirée de l'équation (13), on trouvera

$$(16)\qquad ((-1))^{\frac{m}{n}}=\cos\frac{m(2k+1)\pi}{n}\pm\sqrt{-1}\sin\frac{m(2k+1)\pi}{n}.$$

Pour déduire de cette dernière formule toutes les valeurs de $((-1))^{\frac{m}{n}}$, il ne reste qu'à donner successivement à $2k+1$ toutes les valeurs entières et impaires comprises entre 0 et n. Soient $2k'+1$, $2k''+1$ deux de ces valeurs supposées inégales. Je dis que les cosinus

$$\cos\frac{m(2k'+1)\pi}{n},\quad \cos\frac{m(2k''+1)\pi}{n}$$

seront nécessairement différents l'un de l'autre. En effet, ces cosinus ne pourraient devenir égaux que dans le cas où les arcs qui leur correspondent seraient liés entre eux par une équation de la forme

$$\frac{m(2k'+1)\pi}{n}=\pm 2h\pi\pm\frac{m(2k''+1)\pi}{n},$$

h désignant un nombre entier. Or on tire de cette équation

$$h=\frac{m\left[\frac{\pm(2k'+1)\pm(2k''+1)}{2}\right]}{n}.$$

Il faudrait donc, puisque m est premier à n, que le nombre entier

$$\frac{\pm(2k'+1)\pm(2k''+1)}{2}$$

fût divisible par n, ce qu'on ne saurait admettre, attendu que, les nombres $2k'+1$, $2k''+1$ étant inégaux, et chacun d'eux ne pouvant surpasser n, leur demi-somme, et, à plus forte raison, leur demi-différence, est nécessairement inférieure à n. Ainsi deux valeurs différentes de $2k+1$ comprises entre les limites 0 et n fournissent deux valeurs différentes de

$$\cos\frac{m(2k+1)\pi}{n}.$$

On conclut aisément de cette remarque que les valeurs réelles ou imaginaires de l'expression $((-1))^{\frac{m}{n}}$ données par l'équation (16) sont au nombre de n, comme celles de $((1))^{\frac{1}{n}}$ et de $((-1))^{\frac{1}{n}}$. De plus, comme on a évidemment

$$\left[\cos\frac{m(2k+1)\pi}{n}\pm\sqrt{-1}\sin\frac{m(2k+1)\pi}{n}\right]^n$$
$$=\cos m(2k+1)\pi\pm\sqrt{-1}\sin m(2k+1)\pi=(-1)^m=\pm1,$$

il en résulte que toute valeur de $((-1))^{\frac{m}{n}}$ est une expression réelle ou imaginaire dont la puissance $n^{\text{ième}}$ équivaut à ±1, par conséquent, une valeur de $((1))^{\frac{1}{n}}$ ou de $((-1))^{\frac{1}{n}}$. Cette remarque conduit à l'équation

$$(17)\qquad ((-1))^{\frac{m}{n}}=((1))^{\frac{1}{n}},$$

toutes les fois que $(-1)^m=1$, c'est-à-dire toutes les fois que m est un nombre pair, et à la suivante

$$(18)\qquad ((-1))^{\frac{m}{n}}=((-1))^{\frac{1}{n}},$$

lorsque $(-1)^m=-1$, c'est-à-dire lorsque m est un nombre impair. Ajoutons que l'on peut comprendre les équations (17) et (18) dans une seule formule, en écrivant

$$(19)\qquad ((-1))^{\frac{m}{n}}=(((-1)^m))^{\frac{1}{n}}.$$

Problème VI. — *Trouver les diverses valeurs réelles ou imaginaires de l'expression*

$$((-1))^{-\frac{m}{n}}.$$

Solution. — On aura, d'après la définition des puissances négatives,

$$((-1))^{-\frac{m}{n}}=\frac{1}{((-1))^{\frac{m}{n}}};$$

puis, en remettant pour $((-1))^{\frac{m}{n}}$ sa valeur générale tirée de l'équation (16), et ayant égard à la formule (9) du paragraphe précédent,

$$(20)\qquad ((-1))^{-\frac{m}{n}}=\cos\frac{m(2k+1)\pi}{n}\mp\sqrt{-1}\sin\frac{m(2k+1)\pi}{n}.$$

Il suit de cette dernière équation que les diverses valeurs de $((-1))^{-\frac{m}{n}}$ sont les mêmes que celles de $((1))^{\frac{m}{n}}$; on aura en conséquence

$$(21)\qquad ((-1))^{-\frac{m}{n}}=((1))^{\frac{1}{n}}\quad \text{si } m \text{ est pair}$$

et

$$(22)\qquad ((-1))^{-\frac{m}{n}}=((-1))^{\frac{1}{n}}\quad \text{si } m \text{ est impair.}$$

A la place des deux formules qui précèdent, on peut se contenter d'écrire la suivante :

$$(23)\qquad ((-1))^{-\frac{m}{n}}=(((-1)^m))^{\frac{1}{n}}.$$

Corollaire. — Si l'on fait $m=1$, la formule (23) donnera

$$(24)\qquad ((-1))^{-\frac{1}{n}}=((-1))^{\frac{1}{n}}.$$

En terminant ce paragraphe, nous ferons remarquer que les équations (3), (6), (8), (13), (16) et (20), à l'aide desquelles on détermine les valeurs des expressions

$$((1))^{\frac{1}{n}},\quad ((1))^{\frac{m}{n}},\quad ((1))^{-\frac{m}{n}},$$
$$((-1))^{\frac{1}{n}},\quad ((-1))^{\frac{m}{n}},\quad ((-1))^{-\frac{m}{n}},$$

peuvent être remplacées par deux formules. En effet, si l'on désigne par a une quantité positive ou négative dont la valeur numérique soit fractionnaire, la valeur de $((1))^a$ déterminée par l'équation (3), (6) ou (8) sera évidemment

$$((1))^a = \cos 2ka\pi \pm \sqrt{-1}\sin 2ka\pi, \tag{25}$$

tandis que la valeur de $((-1))^a$ déterminée par l'équation (13), (16) ou (20) sera

$$((-1))^a = \cos(2k+1)a\pi \pm \sqrt{-1}\sin(2k+1)a\pi. \tag{26}$$

Dans les deux formules précédentes, on peut prendre pour k un nombre entier quelconque.

§ IV. — *Sur les racines des expressions imaginaires et sur leurs puissances fractionnaires et irrationnelles.*

Soit

$$\alpha + 6\sqrt{-1}$$

une expression imaginaire quelconque. On pourra toujours trouver (*voir* le § II) une valeur positive de ρ et une infinité de valeurs réelles de θ propres à vérifier l'équation

$$\alpha + 6\sqrt{-1} = \rho(\cos\theta + \sqrt{-1}\sin\theta). \tag{1}$$

Cela posé, concevons que l'on désigne par m et n deux nombres entiers premiers entre eux. Si l'on fait usage des notations adoptées dans le § I, les racines $n^{\text{ièmes}}$ de l'expression $\alpha + 6\sqrt{-1}$, ou, ce qui revient au même, ses puissances du degré $\frac{1}{n}$, seront les diverses valeurs de

$$\sqrt[n]{\alpha + 6\sqrt{-1}} = ((\alpha + 6\sqrt{-1}))^{\frac{1}{n}};$$

et, de même, les puissances fractionnaires de $\alpha + 6\sqrt{-1}$ positives ou négatives, du degré $\frac{m}{n}$ ou $-\frac{m}{n}$, seront les diverses valeurs de

$$((\alpha + 6\sqrt{-1}))^{\frac{m}{n}} \quad \text{ou} \quad ((\alpha + 6\sqrt{-1}))^{-\frac{m}{n}}.$$

En conséquence, pour déterminer ces racines et ces puissances, il suffira de résoudre l'un après l'autre les trois problèmes suivants :

Problème I. — *Trouver les diverses valeurs de l'expression*

$$((\alpha + 6\sqrt{-1}))^{\frac{1}{n}}.$$

Solution. — Soit

$$x = r(\cos t + \sqrt{-1}\sin t)$$

l'une de ces valeurs, r désignant une quantité positive et t un arc réel. On aura, d'après la définition même de l'expression $((\alpha + 6\sqrt{-1}))^{\frac{1}{n}}$,

$$x^n = \alpha + 6\sqrt{-1} = \rho(\cos\theta + \sqrt{-1}\sin\theta), \tag{2}$$

ou, ce qui revient au même,

$$r^n(\cos nt + \sqrt{-1}\sin nt) = \rho(\cos\theta + \sqrt{-1}\sin\theta).$$

On tirera de cette dernière équation, à l'aide du théorème I, § II,

$$r^n = \rho,$$
$$\cos nt + \sqrt{-1}\sin nt = \cos\theta + \sqrt{-1}\sin\theta$$

et, par suite,

$$r = \rho^{\frac{1}{n}},$$
$$\cos nt = \cos\theta, \qquad \sin nt = \sin\theta, \qquad nt = \theta \pm 2k\pi,$$
$$t = \frac{\theta \pm 2k\pi}{n},$$

k représentant un nombre entier quelconque. Les quantités r et t étant ainsi déterminées, les diverses valeurs de x propres à vérifier l'équation (1) seront évidemment comprises dans la formule

$$\begin{aligned} x &= \rho^{\frac{1}{n}}\left(\cos\frac{\theta \pm 2k\pi}{n} + \sqrt{-1}\sin\frac{\theta \pm 2k\pi}{n}\right) \\ &= \rho^{\frac{1}{n}}\left(\cos\frac{\theta}{n} + \sqrt{-1}\sin\frac{\theta}{n}\right)\left(\cos\frac{2k\pi}{n} \pm \sqrt{-1}\sin\frac{2k\pi}{n}\right) \end{aligned}$$

ou, ce qui revient au même, dans la suivante :

$$x = \rho^{\frac{1}{n}}\left(\cos\frac{\theta}{n} + \sqrt{-1}\sin\frac{\theta}{n}\right)((1))^{\frac{1}{n}}. \tag{3}$$

En d'autres termes, l'expression $((\alpha+6\sqrt{-1}))^{\frac{1}{n}}$, aussi bien que $((1))^{\frac{1}{n}}$, admettra n valeurs différentes déterminées par l'équation

$$(4)\qquad ((\alpha+6\sqrt{-1}))^{\frac{1}{n}}=\rho^{\frac{1}{n}}\left(\cos\frac{\theta}{n}+\sqrt{-1}\sin\frac{\theta}{n}\right)((1))^{\frac{1}{n}}.$$

Corollaire I. — Supposons $n=2$; on trouvera qu'il existe deux valeurs de l'expression

$$((\alpha+6\sqrt{-1}))^{\frac{1}{2}},$$

ou, ce qui revient au même, deux valeurs de x propres à vérifier l'équation

$$x^2=\alpha+6\sqrt{-1}=\rho(\cos\theta+\sqrt{-1}\sin\theta),$$

et que ces deux valeurs sont comprises dans la formule

$$\pm\rho^{\frac{1}{2}}\left(\cos\frac{\theta}{2}+\sqrt{-1}\sin\frac{\theta}{2}\right).$$

Corollaire II. — Supposons encore $n=3$; on trouvera qu'il existe trois valeurs de l'expression

$$((\alpha+6\sqrt{-1}))^{\frac{1}{3}},$$

ou, ce qui revient au même, trois valeurs de x propres à vérifier l'équation

$$x^3=\alpha+6\sqrt{-1}=\rho(\cos\theta+\sqrt{-1}\sin\theta),$$

et que ces deux valeurs sont respectivement

$$\rho^{\frac{1}{3}}\left(\cos\frac{\theta}{3}+\sqrt{-1}\sin\frac{3}{\theta}\right),$$

$$\rho^{\frac{1}{3}}\left(\cos\frac{\theta}{3}+\sqrt{-1}\sin\frac{\theta}{3}\right)\left(\cos\frac{2\pi}{3}+\sqrt{-1}\sin\frac{2\pi}{3}\right)$$
$$=\rho^{\frac{1}{3}}\left(\cos\frac{\theta+2\pi}{3}+\sqrt{-1}\sin\frac{\theta+2\pi}{3}\right),$$

$$\rho^{\frac{1}{3}}\left(\cos\frac{\theta}{3}+\sqrt{-1}\sin\frac{\theta}{3}\right)\left(\cos\frac{2\pi}{3}-\sqrt{-1}\sin\frac{2\pi}{3}\right)$$
$$=\rho^{\frac{1}{3}}\left(\cos\frac{\theta-2\pi}{3}+\sqrt{-1}\sin\frac{\theta-2\pi}{3}\right).$$

Corollaire III. — Supposons enfin $n=4$; on trouvera qu'il existe quatre valeurs de l'expression

$$((\alpha+6\sqrt{-1}))^{\frac{1}{4}},$$

ou, ce qui revient au même, quatre valeurs de x propres à vérifier l'équation

$$x^4=\alpha+6\sqrt{-1}=\rho(\cos\theta+\sqrt{-1}\sin\theta),$$

et que ces quatre valeurs sont comprises dans les deux formules

$$\pm\rho^{\frac{1}{4}}\left(\cos\frac{\theta}{4}+\sqrt{-1}\sin\frac{\theta}{4}\right),$$
$$\pm\rho^{\frac{1}{4}}\left(\sin\frac{\theta}{4}-\sqrt{-1}\cos\frac{\theta}{4}\right).$$

PROBLÈME II. — *Trouver les diverses valeurs de l'expression*

$$((\alpha+6\sqrt{-1}))^{\frac{m}{n}}.$$

Solution. — Les nombres m et n étant supposés premiers entre eux, on aura, d'après la définition même de l'expression $((\alpha+6\sqrt{-1}))^{\frac{m}{n}}$,

$$((\alpha+6\sqrt{-1}))^{\frac{m}{n}}=\left[((\alpha+6\sqrt{-1}))^{\frac{1}{n}}\right]^m;$$

puis, en remettant pour $((\alpha+6\sqrt{-1}))^{\frac{1}{n}}$ sa valeur générale tirée de l'équation (4), on trouvera

$$(5)\qquad ((\alpha+6\sqrt{-1}))^{\frac{m}{n}}=\rho^{\frac{m}{n}}\left(\cos\frac{m\theta}{n}+\sqrt{-1}\sin\frac{m\theta}{n}\right)((1))^{\frac{m}{n}}.$$

Corollaire I. — Si dans l'équation (5) on remet pour $((1))^{\frac{m}{n}}$ sa valeur tirée de la formule (6) (§ III), on obtiendra la suivante :

$$(6)\qquad ((\alpha+6\sqrt{-1}))^{\frac{m}{n}}=\rho^{\frac{m}{n}}\left[\cos\frac{m(\theta\pm 2k\pi)}{n}+\sqrt{-1}\sin\frac{m(\theta\pm 2k\pi)}{n}\right].$$

PROBLÈME III. — *Trouver les diverses valeurs de l'expression*

$$((\alpha+6\sqrt{-1}))^{-\frac{m}{n}}.$$

Solution. — On aura, d'après la définition même des puissances négatives,

$$((\alpha+\beta\sqrt{-1}))^{-\frac{m}{n}}=\frac{1}{((\alpha+\beta\sqrt{-1}))^{\frac{m}{n}}};$$

puis, en remettant pour $((\alpha+\beta\sqrt{-1}))^{\frac{m}{n}}$ sa valeur tirée de l'équation (6), et ayant égard à la formule (17) du § II, on trouvera

$$\begin{aligned}
&((\alpha+\beta\sqrt{-1}))^{-\frac{m}{n}}\\
&\quad=\rho^{-\frac{m}{n}}\left[\cos\frac{m(\theta\pm 2k\pi)}{n}-\sqrt{-1}\sin\frac{m(\theta\pm 2k\pi)}{n}\right]\\
&\quad=\rho^{-\frac{m}{n}}\left(\cos\frac{m\theta}{n}-\sqrt{-1}\sin\frac{m\theta}{n}\right)\left(\cos\frac{m.2k\pi}{n}\mp\sqrt{-1}\sin\frac{m.2k\pi}{n}\right)
\end{aligned}$$

ou, en d'autres termes,

$$(7)\qquad ((\alpha+\beta\sqrt{-1}))^{-\frac{m}{n}}=\rho^{-\frac{m}{n}}\left(\cos\frac{m\theta}{n}-\sqrt{-1}\sin\frac{m\theta}{n}\right)((1))^{-\frac{m}{n}}.$$

Corollaire I. — Si l'on fait $m=1$, l'équation (7) donnera

$$(8)\qquad ((\alpha+\beta\sqrt{-1}))^{-\frac{1}{n}}=\rho^{-\frac{1}{n}}\left(\cos\frac{\theta}{n}-\sqrt{-1}\sin\frac{\theta}{n}\right)((1))^{-\frac{1}{n}}.$$

Après avoir fixé, comme on vient de le faire, les diverses valeurs des quatre expressions

$$((\alpha+\beta\sqrt{-1}))^{\frac{1}{n}},\qquad ((\alpha+\beta\sqrt{-1}))^{\frac{m}{n}},$$
$$((\alpha+\beta\sqrt{-1}))^{-\frac{1}{n}},\qquad ((\alpha+\beta\sqrt{-1}))^{-\frac{m}{n}},$$

on reconnaîtra sans peine que les équations (4), (5), (8) et (7), à l'aide desquelles on détermine ces valeurs, peuvent être remplacées par une seule formule. Si l'on représente par a une quantité positive ou négative dont la valeur numérique soit fractionnaire, la formule dont il s'agit sera

$$(9)\qquad ((\alpha+\beta\sqrt{-1}))^{a}=\rho^{a}(\cos a\theta+\sqrt{-1}\sin a\theta)((1))^{a}.$$

Dans les calculs qui précèdent, ρ désigne toujours le module de l'expression imaginaire $\alpha+\beta\sqrt{-1}$, c'est-à-dire la quantité positive $\sqrt{\alpha^2+\beta^2}$, et θ l'un quelconque des arcs propres à vérifier l'équation (1) ou, ce qui revient au même, les équations (4) du § II, savoir

$$(10)\qquad \left\{\begin{aligned}\cos\theta&=\frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}},\\ \sin\theta&=\frac{\beta}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}.\end{aligned}\right.$$

En divisant ces deux dernières l'une par l'autre, on en conclura

$$(11)\qquad \operatorname{tang}\theta=\frac{\beta}{\alpha}.$$

Par suite, si l'on nomme ζ le plus petit arc, abstraction faite du signe, qui ait pour tangente $\frac{\beta}{\alpha}$, ou, en d'autres termes, si l'on fait

$$(12)\qquad \zeta=\operatorname{arc\,tang}\frac{\beta}{\alpha},$$

on trouvera

$$(13)\qquad \operatorname{tang}\theta=\operatorname{tang}\zeta.$$

Cela posé, il deviendra facile d'introduire au lieu de l'arc θ, dans les diverses formules rapportées plus haut, l'arc ζ, dont la valeur est complètement déterminée. On y parviendra, en effet, par les considérations suivantes.

Les arcs θ et ζ, ayant la même tangente, auront aussi, abstraction faite du signe, le même sinus et le même cosinus; et, comme d'ailleurs l'équation (13) peut se mettre sous la forme

$$\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=\frac{\sin\zeta}{\cos\zeta},$$

il est clair que, pour y satisfaire, on devra poser en même temps ou

$$(14)\qquad \cos\theta=\cos\zeta,\qquad \sin\theta=\sin\zeta$$

ou bien

$$(15)\qquad \cos\theta=-\cos\zeta,\qquad \sin\theta=-\sin\zeta.$$

De plus, la valeur de $\cos\theta$ déterminée par la première des équations (10) étant évidemment de même signe que α, tandis que l'arc ζ compris entre les limites $-\frac{\pi}{2}$, $+\frac{\pi}{2}$ a toujours un cosinus positif, il en résulte que, des équations (14) et (15), les deux premières subsisteront, si α est positif, et les deux dernières, si α est négatif. Voyons maintenant à quoi se réduisent, dans ces deux hypothèses, les formules (1) et (9).

Si d'abord on suppose α positif, les équations (10) pourront être remplacées par les équations (14), et l'on déduira de celles-ci une infinité de valeurs de θ, parmi lesquelles on doit remarquer la suivante :

$$\theta = \zeta. \tag{16}$$

Lorsqu'on fait usage de cette valeur, les formules (1) et (9) deviennent respectivement

$$\alpha + 6\sqrt{-1} = \rho(\cos\zeta + \sqrt{-1}\sin\zeta), \tag{17}$$

$$((\alpha + 6\sqrt{-1}))^a = \rho^a(\cos a\zeta + \sqrt{-1}\sin a\zeta)((1))^a. \tag{18}$$

Si l'on suppose en second lieu α négatif, les équations (10) pourront être remplacées par les équations (15), desquelles on déduira, entre autres valeurs de θ,

$$\theta = \zeta + \pi. \tag{19}$$

Par suite, on pourra, dans cette hypothèse, aux formules (1) et (9) substituer celles qui suivent :

$$\alpha + 6\sqrt{-1} = -\rho(\cos\zeta + \sqrt{-1}\sin\zeta), \tag{20}$$

$$\left\{\begin{aligned} &((\alpha + 6\sqrt{-1}))^a \\ &= \rho^a[\cos(a\zeta + a\pi) + \sqrt{-1}\sin(a\zeta + a\pi)]((1))^a \\ &= \rho^a(\cos a\zeta + \sqrt{-1}\sin a\zeta)(\cos a\pi + \sqrt{-1}\sin a\pi)((1))^a. \end{aligned}\right. \tag{21}$$

Si l'on fait en particulier $\alpha + 6\sqrt{-1} = -1$, c'est-à-dire $\alpha = -1$,

$6 = 0$, on trouvera

$$\zeta = \operatorname{arc\,tang}\frac{0}{-1} = 0,$$

et la formule (21) deviendra

$$((-1))^a = (\cos a\pi + \sqrt{-1}\sin a\pi)((1))^a. \tag{22}$$

Il en résulte qu'on aura généralement dans l'hypothèse admise

$$((\alpha + 6\sqrt{-1}))^a = \rho^a(\cos a\zeta + \sqrt{-1}\sin a\zeta)((-1))^a. \tag{23}$$

En réunissant aux formules (17), (18), (20) et (23) les équations (25) et (26) du § III, on obtiendra définitivement les conclusions suivantes.

Soient $\alpha + 6\sqrt{-1}$ une expression imaginaire quelconque, a une quantité positive ou négative dont la valeur numérique soit fractionnaire, et k un nombre entier choisi arbitrairement. Si l'on fait, de plus,

$$\rho = \sqrt{\alpha^2 + 6^2}, \qquad \zeta = \operatorname{arc\,tang}\frac{6}{\alpha}, \tag{24}$$

on aura, pour des valeurs positives de α,

$$\left\{\begin{aligned} &\alpha + 6\sqrt{-1} = \rho(\cos\zeta + \sqrt{-1}\sin\zeta), \\ &((\alpha + 6\sqrt{-1}))^a = \rho^a(\cos a\zeta + \sqrt{-1}\sin a\zeta)((1))^a, \\ &((1))^a = \cos 2ka\pi \pm \sqrt{-1}\sin 2ka\pi, \end{aligned}\right. \tag{25}$$

et, pour des valeurs négatives de α,

$$\left\{\begin{aligned} &\alpha + 6\sqrt{-1} = -\rho(\cos\zeta + \sqrt{-1}\sin\zeta), \\ &((\alpha + 6\sqrt{-1}))^a = \rho^a(\cos a\zeta + \sqrt{-1}\sin a\zeta)((-1))^a, \\ &((-1))^a = \cos(\overline{2k+1}\,a\pi) \pm \sqrt{-1}\sin(\overline{2k+1}\,a\pi). \end{aligned}\right. \tag{26}$$

On doit ajouter que, si l'on désigne par n le dénominateur de la fraction la plus simple qui représente la valeur numérique de a, n sera précisément le nombre des valeurs distinctes de chacune des expressions

$$((1))^a, \quad ((-1))^a, \quad ((\alpha + 6\sqrt{-1}))^a,$$

et que, pour déduire ces mêmes valeurs des formules (25) et (26), il suffira d'y substituer successivement, au lieu de $2k$ et de $2k+1$, tous les nombres entiers qui ne sortent pas des limites 0 et n.

Si la valeur numérique de a devenait irrationnelle, chacune des expressions réduites

$$\cos 2ka\pi \pm \sqrt{-1}\sin 2ka\pi,$$

$$\cos(\overline{2k+1}\,a\pi) \pm \sqrt{-1}\sin(\overline{2k+1}\,a\pi),$$

aurait un nombre indéfini de valeurs correspondantes aux diverses valeurs entières de k; et, par suite, on ne pourrait plus admettre dans le calcul les notations

$$((1))^a, \quad ((-1))^a, \quad ((\alpha+\beta\sqrt{-1}))^a,$$

à moins de considérer chacune d'elles comme propre à représenter une infinité d'expressions imaginaires distinctes les unes des autres. Pour éviter cet inconvénient, nous n'emploierons jamais les notations dont il s'agit que dans le cas où la valeur numérique de a sera fractionnaire.

Parmi les diverses valeurs de $((1))^a$, il en est une toujours réelle et positive, savoir, $+1$, que l'on indique par la notation $(1)^a$ ou 1^a, en faisant usage de parenthèses simples, ou même les supprimant entièrement. Si l'on substitue cette valeur particulière de $((1))^a$ dans la seconde des équations (25), on obtiendra une valeur correspondante de

$$((\alpha+\beta\sqrt{-1}))^a,$$

que l'analogie nous porte à indiquer, à l'aide de parenthèses simples, par la notation

$$(\alpha+\beta\sqrt{-1})^a.$$

C'est ce que nous ferons désormais. Par suite, on aura, en supposant α positif, et les quantités ρ, ζ déterminées par les équations (24),

$$(27) \qquad (\alpha+\beta\sqrt{-1})^a = \rho^a(\cos a\zeta + \sqrt{-1}\sin a\zeta).$$

Cette dernière équation ayant lieu toutes les fois que la valeur numérique de a est entière ou fractionnaire, l'analogie nous conduit encore à la considérer comme vraie dans le cas où cette valeur numérique

devient irrationnelle. En conséquence, nous conviendrons de désigner par

$$(\alpha+\beta\sqrt{-1})^a$$

le produit $\rho^a(\cos a\zeta + \sqrt{-1}\sin a\zeta)$, dans le cas où α sera positif, quelle que soit la valeur réelle attribuée à la quantité a. En d'autres termes, si l'on désigne par ζ un arc compris entre les limites $-\frac{\pi}{2}$, $+\frac{\pi}{2}$, on aura, quel que soit a,

$$[\rho(\cos\zeta + \sqrt{-1}\sin\zeta)]^a = \rho^a(\cos a\zeta + \sqrt{-1}\sin a\zeta).$$

Si dans l'équation précédente on fait $\rho = 1$, elle deviendra

$$(28) \qquad (\cos\zeta + \sqrt{-1}\sin\zeta)^a = \cos a\zeta + \sqrt{-1}\sin a\zeta.$$

Cette dernière formule est entièrement semblable aux équations (10) et (14) du § II, avec cette seule différence qu'elle subsiste uniquement pour des valeurs de ζ comprises entre les limites $-\frac{\pi}{2}$, $+\frac{\pi}{2}$, tandis que les équations dont il s'agit s'étendent à des valeurs quelconques de θ.

Lorsque la quantité α devient négative, on ne voit plus, même en supposant fractionnaire la valeur numérique de a, quelle est celle des valeurs de l'expression $((\alpha+\beta\sqrt{-1}))^a$ que l'on pourrait distinguer des autres et désigner par la notation

$$(\alpha+\beta\sqrt{-1})^a.$$

Mais alors, $-\alpha$ étant une quantité positive, il est facile d'établir, pour des valeurs quelconques de a, la formule

$$(29) \qquad (-\alpha-\beta\sqrt{-1})^a = \rho^a(\cos a\zeta + \sqrt{-1}\sin a\zeta).$$

Nous terminerons ce paragraphe en faisant observer que, dans le cas où la valeur numérique de a devient fractionnaire, les formules (27) et (29) réduisent les équations (18) et (23) à celles qui suivent

$$(30) \qquad ((\alpha+\beta\sqrt{-1}))^a = (\alpha+\beta\sqrt{-1})^a((1))^a,$$

$$(31) \qquad ((\alpha+\beta\sqrt{-1}))^a = (-\alpha-\beta\sqrt{-1})^a((-1))^a,$$

l'équation (30) ayant lieu seulement pour des valeurs positives de la quantité α, et l'équation (31) pour des valeurs négatives de la même quantité.

§ V. — *Applications des principes établis dans les paragraphes précédents.*

Nous allons appliquer les principes établis dans les précédents paragraphes à la résolution de trois problèmes sur les sinus et cosinus.

Problème I. — *Transformer* $\sin mz$ *et* $\cos mz$ *(m désignant un nombre entier quelconque) en un polynôme ordonné suivant les puissances ascendantes et entières de* $\sin z$, *ou du moins en un produit formé par la multiplication d'un semblable polynôme et de* $\cos z$.

Solution. — Lorsque dans les équations (12) du § II on remplace les puissances paires de $\cos z$ par des puissances entières de $1 - \sin^2 z$, ces équations deviennent, pour des valeurs paires de m,

$$\cos mz = (1-\sin^2 z)^{\frac{m}{2}} - \frac{m(m-1)}{1.2}(1-\sin^2 z)^{\frac{m-2}{2}}\sin^2 z + \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{1.2.3.4}(1-\sin^2 z)^{\frac{m-4}{2}}\sin^4 z - \ldots,$$

$$\sin mz = \cos z\left[\frac{m}{1}(1-\sin^2 z)^{\frac{m-2}{2}}\sin z - \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}(1-\sin^2 z)^{\frac{m-4}{2}}\sin^3 z + \ldots\right],$$

et, pour des valeurs impaires de m,

$$\cos mz = \cos z\left[(1-\sin^2 z)^{\frac{m-1}{2}} - \frac{m(m-1)}{1.2}(1-\sin^2 z)^{\frac{m-3}{2}}\sin^2 z + \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{1.2.3.4}(1-\sin^2 z)^{\frac{m-5}{2}}\sin^4 z - \ldots\right],$$

$$\sin mz = \frac{m}{1}(1-\sin^2 z)^{\frac{m-1}{2}}\sin z - \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}(1-\sin^2 z)^{\frac{m-3}{2}}\sin^3 z + \ldots.$$

Si l'on développe les seconds membres des quatre formules précédentes, ou du moins les coefficients de $\cos z$ dans ces seconds membres, en polynômes ordonnés suivant les puissances ascendantes et entières de $\sin z$, on trouvera, pour des valeurs paires de m,

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned} \cos mz &= 1 - \frac{m}{1}\left(\frac{m-1}{2}+\frac{1}{2}\right)\sin^2 z \\ &\quad + \frac{m(m-2)}{1.3}\left[\frac{(m-1)(m-3)}{2.4} + \frac{m-1}{2}\,\frac{3}{2} + \frac{3.1}{2.4}\right]\sin^4 z - \ldots, \\ \sin mz &= \cos z\left\{\frac{m}{1}\sin z - \frac{m(m-2)}{1.3}\left(\frac{m-1}{2}+\frac{3}{2}\right)\sin^3 z \right. \\ &\quad \left. + \frac{m(m-2)(m-4)}{1.3.5}\left[\frac{(m-1)(m-3)}{2.4} + \frac{m-1}{2}\,\frac{5}{2} + \frac{5.3}{2.4}\right]\sin^5 z - \ldots\right\}; \end{aligned}\right.$$

et, pour les valeurs impaires de m,

$$(2)\quad \left\{\begin{aligned} \cos mz &= \cos z\left\{1 - \frac{m-1}{1}\left(\frac{m}{2}+\frac{1}{2}\right)\sin^2 z \right. \\ &\quad \left. + \frac{(m-1)(m-3)}{1.3}\left[\frac{m(m-2)}{2.4} + \frac{m}{2}\,\frac{3}{2} + \frac{3.1}{2.4}\right]\sin^4 z - \ldots\right\}, \\ \sin mz &= \frac{m}{1}\sin z - \frac{m(m-1)}{1.3}\left(\frac{m-2}{2}+\frac{3}{2}\right)\sin^3 z \\ &\quad + \frac{m(m-1)(m-3)}{1.3.5}\left[\frac{(m-2)(m-4)}{2.4} + \frac{m-2}{2}\,\frac{5}{2} + \frac{5.3}{2.4}\right]\sin^5 z - \ldots. \end{aligned}\right.$$

Les équations (1) et (2) comprennent évidemment la solution de la question proposée. Il ne reste plus qu'à les présenter sous la forme la plus simple. Pour y parvenir, il suffira d'observer que le coefficient de chaque puissance entière de $\sin z$ renferme généralement une somme de fractions à laquelle l'équation (5) du Chapitre IV (§ III) permet de substituer une fraction unique. Par suite de cette réduction, les développements de $\cos mz$ et de $\sin mz$ deviendront, pour des valeurs paires de m,

$$(3)\quad \left\{\begin{aligned} \cos mz &= 1 - \frac{m.m}{1.2}\sin^2 z + \frac{(m+2)m.m(m-2)}{1.2.3.4}\sin^4 z \\ &\quad - \frac{(m+4)(m+2)m.m(m-2)(m-4)}{1.2.3.4.5.6}\sin^6 z + \ldots \end{aligned}\right.$$

et

$$(4)\quad \left\{\begin{aligned} \sin mz = \cos z\Big[\frac{m}{1}\sin z - \frac{(m+2)m(m-2)}{1.2.3}\sin^3 z \\ + \frac{(m+4)(m+2)m(m-2)(m-4)}{1.2.3.4.5}\sin^5 z - \ldots\Big]; \end{aligned}\right.$$

et, pour des valeurs impaires de m,

$$(5)\quad \left\{\begin{aligned} \cos mz = \cos z\Big[1 - \frac{(m+1)(m-1)}{1.2}\sin^2 z \\ + \frac{(m+3)(m+1)(m-1)(m-3)}{1.2.3.4}\sin^4 z - \ldots\Big], \end{aligned}\right.$$

$$(6)\quad \left\{\begin{aligned} \sin mz = \frac{m}{1}\sin z - \frac{(m+1)m(m-1)}{1.2.3}\sin^3 z \\ + \frac{(m+3)(m+1)m(m-1)(m-3)}{1.2.3.4.5}\sin^5 z - \ldots. \end{aligned}\right.$$

Corollaire I. — Si dans l'équation (3) on fait successivement

$$m = 2, \qquad m = 4, \qquad m = 6, \qquad \ldots,$$

on obtiendra les suivantes :

$$(7)\quad \left\{\begin{aligned} &\cos 2z = 1 - 2\sin^2 z, \\ &\cos 4z = 1 - 8\sin^2 z + 8\sin^4 z, \\ &\cos 6z = 1 - 18\sin^2 z + 48\sin^4 z - 32\sin^6 z, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right.$$

Corollaire II. — Si dans l'équation (6) on fait successivement

$$m = 1, \qquad m = 3, \qquad m = 5, \qquad \ldots,$$

on en tirera

$$(8)\quad \left\{\begin{aligned} &\sin z = \sin z, \\ &\sin 3z = 3\sin z - 4\sin^3 z, \\ &\sin 5z = 5\sin z - 20\sin^3 z + 16\sin^5 z, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right.$$

Problème II. — *Transformer* $\sin mz$ *et* $\cos mz$ *(m désignant un nombre entier quelconque) en un polynôme ordonné suivant les puissances ascen-*

dantes et entières de $\cos z$, *ou du moins en un produit formé par la multiplication d'un semblable polynôme et de* $\sin z$.

Solution. — Pour obtenir les formules qui résolvent la question proposée, il suffit de remplacer, dans les équations (3), (4), (5) et (6), z par $\frac{\pi}{2} - z$, et d'observer en outre qu'on a, pour des valeurs paires de m,

$$\cos\left(\frac{m\pi}{2} - mz\right) = (-1)^{\frac{m}{2}} \cos mz,$$

$$\sin\left(\frac{m\pi}{2} - mz\right) = (-1)^{\frac{m}{2}+1} \sin mz;$$

et, pour des valeurs impaires de m,

$$\cos\left(\frac{m\pi}{2} - mz\right) = (-1)^{\frac{m-1}{2}} \sin mz,$$

$$\sin\left(\frac{m\pi}{2} - mz\right) = (-1)^{\frac{m-1}{2}} \cos mz.$$

On trouvera de cette manière, si m est un nombre pair,

$$(9)\quad \left\{\begin{aligned} (-1)^{\frac{m}{2}}\cos mz = 1 - \frac{m.m}{2}\cos^2 z + \frac{(m+2)m.m(m-2)}{1.2.3.4}\cos^4 z \\ - \frac{(m+4)(m+2)m.m(m-2)(m-4)}{1.2.3.4.5.6}\cos^6 z + \ldots, \end{aligned}\right.$$

$$(10)\quad \left\{\begin{aligned} (-1)^{\frac{m}{2}+1}\sin mz = \sin z\Big[\frac{m}{1}\cos z - \frac{(m+2)m(m-2)}{1.2.3}\cos^3 z \\ + \frac{(m+4)(m+2)m(m-2)(m-4)}{1.2.3.4.5}\cos^5 z - \ldots\Big]; \end{aligned}\right.$$

et, si m est un nombre impair,

$$(11)\quad \left\{\begin{aligned} (-1)^{\frac{m-1}{2}}\sin mz = \sin z\Big[1 - \frac{(m+1)(m-1)}{1.2}\cos^2 z \\ + \frac{(m+3)(m+1)(m-1)(m-3)}{1.2.3.4}\cos^4 z - \ldots\Big], \end{aligned}\right.$$

$$(12)\quad \left\{\begin{aligned} (-1)^{\frac{m-1}{2}}\cos mz = \frac{m}{1}\cos z - \frac{(m+1)m(m-1)}{1.2.3}\cos^3 z \\ + \frac{(m+3)(m+1)m(m-1)(m-3)}{1.2.3.4.5}\cos^5 z - \ldots. \end{aligned}\right.$$

Corollaire I. — Si dans la formule (9) on fait successivement

$$m=2,\qquad m=4,\qquad m=6,\qquad \ldots,$$

on obtiendra les suivantes :

$$(13)\qquad \left\{\begin{aligned} -\cos 2z &= 1-2\cos^2 z,\\ \cos 4z &= 1-8\cos^2 z+8\cos^4 z,\\ -\cos 6z &= 1-18\cos^2 z+48\cos^4 z-32\cos^6 z,\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right.$$

Corollaire II. — Si dans l'équation (12) on fait successivement

$$m=1,\qquad m=3,\qquad m=5,\qquad \ldots,$$

on en conclura

$$(14)\qquad \left\{\begin{aligned} \cos z &= \cos z,\\ -\cos 3z &= 3\cos z-4\cos^3 z,\\ \cos 5z &= 5\cos z-20\cos^3 z+16\cos^5 z,\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right.$$

Problème III. — *Exprimer les puissances entières de* $\sin z$ *et de* $\cos z$ *en fonction linéaire des sinus et cosinus des arcs* z, $2z$, $3z$, ...

Solution. — On résout facilement ce problème, en ayant égard aux propriétés des deux expressions imaginaires conjuguées

$$\cos z+\sqrt{-1}\sin z,\qquad \cos z-\sqrt{-1}\sin z.$$

Si l'on désigne la première par u, et la seconde par v, on aura

$$2\cos z=u+v,\qquad 2\sqrt{-1}\sin z=u-v.$$

En élevant les deux membres de chacune des équations précédentes à la puissance entière du degré m, les divisant ensuite par 2 ou par $2\sqrt{-1}$, puis effectuant les réductions indiquées par les formules

$$uv=1,$$

$$\frac{u^n+v^n}{2}=\cos nz,\qquad \frac{u^n-v^n}{2\sqrt{-1}}=\sin nz,$$

dont les deux dernières subsistent pour des valeurs entières quel-

conques de n, on trouvera, si m représente un nombre pair,

$$(15)\qquad \left\{\begin{aligned} 2^{m-1}\cos^m z = \cos mz &+ \frac{m}{1}\cos(\overline{m-2}.z)\\ &+\frac{m(m-1)}{1.2}\cos(\overline{m-4}.z)+\ldots\\ &+\frac{1}{2}\,\frac{m(m-1)\ldots\left(\frac{m}{2}+1\right)}{1.2.3\ldots\frac{m}{2}}, \end{aligned}\right.$$

$$(16)\qquad \left\{\begin{aligned} (-1)^{\frac{m}{2}}2^{m-1}\sin^m z = \cos mz &- \frac{m}{1}\cos(\overline{m-2}.z)\\ &+\frac{m(m-1)}{1.2}\cos(\overline{m-4}.z)-\ldots\\ &\pm\frac{1}{2}\,\frac{m(m-1)\ldots\left(\frac{m}{2}+1\right)}{1.2.3\ldots\frac{m}{2}}; \end{aligned}\right.$$

et, si m représente un nombre impair,

$$(17)\qquad \left\{\begin{aligned} 2^{m-1}\cos^m z = \cos mz &+ \frac{m}{1}\cos(\overline{m-2}.z)\\ &+\frac{m(m-1)}{1.2}\cos(\overline{m-4}.z)+\ldots\\ &+\frac{m(m-1)\ldots\frac{m+3}{2}}{1.2.3\ldots\frac{m-1}{2}}\cos z, \end{aligned}\right.$$

$$(18)\qquad \left\{\begin{aligned} (-1)^{\frac{m-1}{2}}2^{m-1}\sin^m z = \sin mz &- \frac{m}{1}\sin(\overline{m-2}.z)\\ &+\frac{m(m-1)}{1.2}\sin(\overline{m-4}.z)-\ldots\\ &\pm\frac{m(m-1)\ldots\frac{m+3}{2}}{1.2.3\ldots\frac{m-1}{2}}\sin z. \end{aligned}\right.$$

Corollaire I. — Si dans la formule (15) on fait successivement

$$m=2,\qquad m=4,\qquad m=6,\qquad \ldots,$$

on en conclura

$$(19)\quad \left\{\begin{aligned} 2\cos^2 z &= \cos 2z + 1,\\ 8\cos^4 z &= \cos 4z + 4\cos 2z + 3,\\ 32\cos^6 z &= \cos 6z + 6\cos 4z + 15\cos 2z + 10,\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right.$$

On arriverait aux mêmes équations, si l'on cherchait à déduire des formules (13) les valeurs successives de

$$\cos^2 z,\quad \cos^4 z,\quad \cos^6 z,\quad \ldots$$

en fonctions linéaires de

$$\cos 2z,\quad \cos 4z,\quad \cos 6z,\quad \ldots.$$

Corollaire II. — Si dans la formule (16) on fait successivement

$$m = 2,\qquad m = 4,\qquad m = 6,\qquad \ldots,$$

on obtiendra les équations

$$(20)\quad \left\{\begin{aligned} -\ 2\sin^2 z &= \cos 2z - 1,\\ 8\sin^4 z &= \cos 4z - 4\cos 2z + 3,\\ -\ 32\sin^6 z &= \cos 6z - 6\cos 4z + 15\cos 2z - 10,\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{aligned}\right.$$

que l'on pourrait également déduire des formules (7), par l'élimination des quantités

$$\sin^2 z,\quad \sin^4 z,\quad \sin^6 z,\quad \ldots.$$

Corollaire III. — Si dans la formule (17) on fait successivement

$$m = 1,\qquad m = 3,\qquad m = 5,\qquad \ldots,$$

on en conclura

$$(21)\quad \left\{\begin{aligned} \cos z &= \cos z,\\ 4\cos^3 z &= \cos 3z + 3\cos z,\\ 16\cos^5 z &= \cos 5z + 5\cos 3z + 10\cos z,\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right.$$

On arriverait aux mêmes équations, si l'on cherchait à déduire des formules (14) les valeurs successives de

$$\cos z,\quad \cos^3 z,\quad \cos^5 z,\quad \ldots$$

en fonctions linéaires de

$$\cos z,\quad \cos 3z,\quad \cos 5z,\quad \ldots.$$

Corollaire IV. — Si dans la formule (18) on fait successivement

$$m = 1,\qquad m = 3,\qquad m = 5,\qquad \ldots,$$

on obtiendra les équations

$$(22)\quad \left\{\begin{aligned} \sin z &= \sin z,\\ -\ 4\sin^3 z &= \sin 3z - 3\sin z,\\ 16\sin^5 z &= \sin 5z - 5\sin 3z + 10\sin z,\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{aligned}\right.$$

que l'on pourrait également déduire des formules (8) par l'élimination des quantités

$$\sin z,\quad \sin^3 z,\quad \sin^5 z,\quad \ldots.$$

CHAPITRE VIII.

DES VARIABLES ET FES FONCTIONS IMAGINAIRES.

§ I. — *Considérations générales sur les variables et les fonctions imaginaires.*

Lorsqu'on suppose variables les deux quantités réelles u, v, ou au moins l'une d'entre elles, l'expression

$$u+v\sqrt{-1}$$

est ce qu'on appelle une *variable imaginaire*. Si, de plus, la variable u converge vers la limite U et la variable v vers la limite V,

$$\mathrm{U}+\mathrm{V}\sqrt{-1}$$

sera la *limite* vers laquelle converge l'expression imaginaire

$$u+v\sqrt{-1}.$$

Lorsque les constantes ou variables comprises dans une fonction donnée, après avoir été considérées comme réelles, sont ensuite supposées imaginaires, la notation à l'aide de laquelle on exprimait la fonction dont il s'agit ne peut être conservée dans le calcul qu'en vertu de conventions nouvelles propres à fixer le sens de cette notation dans la dernière hypothèse. Ainsi, par exemple, en vertu des conventions établies dans le Chapitre précédent, les valeurs des notations

$$a+x,\quad a-x,\quad ax,\quad \frac{a}{x}$$

se trouvent complètement déterminées dans le cas où la constante a et

la variable x deviennent imaginaires. Supposons, pour fixer les idées, que, la constante a restant réelle, la variable x reçoive la valeur imaginaire

$$\alpha+6\sqrt{-1}=\rho(\cos\theta+\sqrt{-1}\sin\theta),$$

α, 6 exprimant deux quantités réelles qui peuvent être remplacées par le module ρ et l'arc réel θ. On conclura du Chapitre VII (§§ I et II) que les quatre notations

$$a+x,\quad a-x,\quad ax,\quad \frac{a}{x}$$

désignent respectivement les quatre expressions imaginaires

$$a+\rho\cos\theta+\rho\sin\theta\sqrt{-1},$$
$$a-\rho\cos\theta-\rho\sin\theta\sqrt{-1},$$
$$a\rho\cos\theta+a\rho\sin\theta\sqrt{-1},$$
$$\frac{a}{\rho}\cos\theta-\frac{a}{\rho}\sin\theta\sqrt{-1},$$

ou, en d'autres termes, les suivantes :

$$a+\alpha+6\sqrt{-1},\quad a-\alpha-6\sqrt{-1},\quad a\alpha+a6\sqrt{-1},$$
$$\frac{a\alpha}{\alpha^2+6^2}-\frac{a6}{\alpha^2+6^2}\sqrt{-1}.$$

En général, on fixera sans difficulté, par le moyen des principes établis dans le Chapitre VII, les valeurs des expressions algébriques dans lesquelles plusieurs variables ou constantes imaginaires seraient liées entre elles par les signes de l'addition, de la soustraction, de la multiplication ou de la division; et l'on reconnaîtra sans peine que ces expressions conservent toutes les propriétés dont elles jouiraient si les variables et constantes qui s'y trouvent comprises étaient réelles. Par exemple, si l'on désigne par

$$x,\ y,\ z,\ \ldots,\ u,\ v,\ w,\ \ldots$$

plusieurs variables soit réelles, soit imaginaires, on aura, dans tous les cas possibles,

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned}
&x+y+z+\ldots-(u+v+w+\ldots)\\
&\quad=x+y+z+\ldots-u-v-w-\ldots,\\
&xy=yx,\\
&u(x+y+z+\ldots)=ux+uy+uz+\ldots,\\
&\frac{x+y+z+\ldots}{u}=\frac{x}{u}+\frac{y}{u}+\frac{z}{u}+\ldots,\\
&\frac{x}{u}\times\frac{y}{v}\times\frac{z}{w}\times\ldots=\frac{xyz\ldots}{uvw\ldots},\\
&\frac{x}{\left(\frac{u}{v}\right)}=\frac{vx}{u}=\frac{v}{u}\times x,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}\right.$$

Considérons maintenant la notation

$$x^a,$$

dans le cas où, la constante a restant réelle, la variable x obtient la valeur imaginaire

$$\alpha+6\sqrt{-1}=\rho(\cos\theta+\sqrt{-1}\sin\theta).$$

Si l'on prend pour a une quantité dont la valeur numérique soit un nombre entier m, cette même notation, savoir

$$x^a=x^{\pm m},$$

aura, pour des valeurs réelles quelconques de α et de 6, une signification précise. Elle représentera l'expression imaginaire

$$\rho^m\cos m\theta+\rho^m\sin m\theta\sqrt{-1},$$

si $a=+m$, et la suivante

$$\rho^{-m}\cos m\theta-\rho^{-m}\sin m\theta\sqrt{-1},$$

si $a=-m$ [(*voir* le Chapitre VII, § II, équations (18) et (19)]. Mais, toutes les fois que la constante a recevra une valeur numérique fractionnaire ou irrationnelle, la notation

$$x^a$$

n'aura plus de valeur précise et déterminée, à moins que la partie réelle α de l'expression imaginaire x ne soit positive. Si dans ce cas particulier on fait

$$\zeta=\operatorname{arc\,tang}\frac{6}{\alpha},$$

l'arc ζ restera compris entre les limites $-\frac{\pi}{2}$, $+\frac{\pi}{2}$; et, en écrivant x au lieu de $\alpha+6\sqrt{-1}$ dans le § IV du Chapitre VII [(équations (17) et (27)], on trouvera

$$\begin{aligned}
x&=\rho(\cos\zeta+\sqrt{-1}\sin\zeta),\\
x^a&=\rho^a(\cos a\zeta+\sqrt{-1}\sin a\zeta),
\end{aligned}$$

en sorte que la notation x^a désignera l'expression imaginaire

$$\rho^a\cos a\zeta+\rho^a\sin a\zeta\sqrt{-1}.$$

Il suit encore des conventions et des principes ci-dessus établis (Chap. VII, §§ III et IV), que, pour une valeur numérique fractionnaire de la constante a, la notation

$$((x))^a$$

représente à la fois plusieurs expressions imaginaires, dont les valeurs sont données par les deux formules

$$((x))^a=x^a((1))^a,\qquad ((1))^a=\cos 2ka\pi\pm\sqrt{-1}\sin 2ka\pi,$$

lorsque la partie réelle α de l'expression imaginaire x est positive, et par les deux suivantes

$$\begin{gathered}
((x))^a=(-x)^a((-1))^a,\\
((-1))^a=\cos(2k+1)a\pi\pm\sqrt{-1}\sin(2k+1)a\pi,
\end{gathered}$$

lorsque la quantité α devient négative [(*voir*, à ce sujet, dans le § IV du Chapitre VII, les équations (25) et (26)]. La même notation ne peut plus être employée dans le cas où la valeur numérique de a devient irrationnelle.

Les expressions de la forme

$$x^a$$

conservent les mêmes propriétés pour des valeurs réelles et pour des valeurs imaginaires de la variable, tant que l'exposant a pour valeur numérique un nombre entier; mais ces propriétés ne subsistent plus que sous certaines conditions dans le cas contraire. Soient, par exemple,

$$x = \alpha + \beta\sqrt{-1}, \qquad y = \alpha' + \beta'\sqrt{-1}, \qquad z = \alpha'' + \beta''\sqrt{-1}, \qquad \ldots$$

plusieurs expressions imaginaires, qui se réduiront à des quantités réelles si β, β', β'' s'évanouissent. Désignons, en outre, par a, b, c, ... des quantités réelles quelconques, dont les valeurs numériques soient fractionnaires ou irrationnelles, et par m, m', m'', ... plusieurs nombres entiers. On aura constamment, en vertu des principes établis dans le Chapitre VII,

$$(2)\qquad \begin{cases} x^m\, x^{m'}\, x^{m''} \ldots = x^{m+m'+m''+\ldots}, \\ x^{-m}\, x^{-m'}\, x^{-m''} \ldots = x^{-m-m'-m''-\ldots}, \\ x^{\pm m}\, x^{\pm m'}\, x^{\pm m''} \ldots = x^{\pm m \pm m' \pm m'' \pm \ldots}, \end{cases}$$

chacun des nombres m, m', m'', ... devant être affecté du même signe dans les deux membres;

$$(3)\qquad \begin{cases} x^m\, y^m\, z^m \ldots = (xyz\ldots)^m, \\ x^{-m}\, y^{-m}\, z^{-m} \ldots = (xyz\ldots)^{-m}, \end{cases}$$

$$(4)\qquad \begin{cases} (x^m)^{m'} = (x^{-m})^{-m'} = x^{mm'}, \\ (x^m)^{-m'} = (x^{-m})^{m'} = x^{-mm'}. \end{cases}$$

On trouvera, au contraire, que des trois formules

$$(5)\qquad x^a\, x^b\, x^c \ldots = x^{a+b+c+\ldots},$$

$$(6)\qquad x^a\, y^a\, z^a \ldots = (xyz\ldots)^a,$$

$$(7)\qquad (x^a)^b = x^{ab}$$

la première subsiste uniquement toutes les fois que la partie réelle α

de l'expression imaginaire x est positive; la seconde, toutes les fois que, α, α', α'', ... étant positifs, la somme

$$\operatorname{arc\,tang}\frac{\beta}{\alpha} + \operatorname{arc\,tang}\frac{\beta'}{\alpha'} + \operatorname{arc\,tang}\frac{\beta''}{\alpha''} + \ldots$$

reste comprise entre les limites $-\frac{\pi}{2}$, $+\frac{\pi}{2}$; et la dernière, toutes les fois que, α étant positif, le produit

$$a \operatorname{arc\,tang}\frac{\beta}{\alpha}$$

est compris entre ces mêmes limites.

Les conventions faites dans le Chapitre VII ne suffisent pas encore pour fixer d'une manière précise le sens des notations

$$A^x, \quad Lx, \quad \sin x, \quad \cos x, \quad \operatorname{arc\,sin} x, \quad \operatorname{arc\,cos} x,$$

dans le cas où la variable x devient imaginaire. Le moyen le plus simple d'y parvenir étant la considération des séries imaginaires, nous renvoyons ce sujet au Chapitre IX.

D'après ce qui a été dit ci-dessus, toute notation algébrique qui renfermerait, avec les variables x, y, z, ... supposées réelles, des constantes imaginaires, ne peut être employée dans le calcul que dans le cas où, en vertu des conventions établies, elle aurait pour valeur une certaine expression imaginaire. Une semblable expression, dans laquelle la partie réelle et le coefficient de $\sqrt{-1}$ sont nécessairement des fonctions réelles des variables x, y, z, ..., est ce qu'on appelle une *fonction imaginaire* de ces mêmes variables. Ainsi, par exemple, si l'on désigne par $\varphi(x)$ et $\chi(x)$ deux fonctions réelles de x, une fonction imaginaire de cette variable sera

$$\varphi(x) + \chi(x)\sqrt{-1}.$$

Quelquefois nous indiquerons une semblable fonction à l'aide d'une seule caractéristique ϖ, et nous écrirons, en conséquence,

$$\varpi(x) = \varphi(x) + \chi(x)\sqrt{-1}.$$

Pareillement, si l'on désigne par $\varphi(x, y, z, \ldots)$, $\chi(x, y, z, \ldots)$ deux fonctions réelles des variables $x, y, z, \ldots$,

$$\varpi(x, y, z, \ldots) = \varphi(x, y, z, \ldots) + \chi(x, y, z, \ldots)\sqrt{-1}$$

sera une fonction imaginaire de ces diverses variables.

La fonction imaginaire

$$\varphi(x, y, z, \ldots) + \chi(x, y, z, \ldots)\sqrt{-1}$$

prend le nom de *fonction algébrique*, ou *exponentielle*, ou *logarithmique*, ou *circulaire*, etc., et, dans le premier cas, le nom de *fonction rationnelle* ou *irrationnelle*, *entière* ou *fractionnaire*, etc., toutes les fois que les fonctions réelles $\varphi(x, y, z, \ldots)$, $\chi(x, y, z, \ldots)$ jouissent l'une et l'autre des propriétés que suppose le nom dont il s'agit. Ainsi, en particulier, la forme générale d'une fonction imaginaire et linéaire des variables $x, y, z, \ldots$ sera

$$(a + bx + cy + dz + \ldots) + (a' + b'x + c'y + d'z + \ldots)\sqrt{-1}$$

ou, ce qui revient au même,

$$(a + a'\sqrt{-1}) + (b + b'\sqrt{-1})x + (c + c'\sqrt{-1})y + (d + d'\sqrt{-1})z + \ldots,$$

$a, b, c, d, \ldots, a', b', c', d', \ldots$ désignant des constantes réelles.

On doit distinguer encore parmi les fonctions imaginaires, comme parmi les fonctions réelles, celles qu'on nomme *explicites*, et qui sont immédiatement exprimées au moyen des variables, de celles qu'on nomme *implicites*, et dont les valeurs déterminées par certaines équations ne peuvent être explicitement connues qu'après la résolution des équations dont il s'agit. Soit

$$\varpi(x) \quad \text{ou} \quad \varpi(x, y, z, \ldots)$$

une fonction imaginaire implicite déterminée par une seule équation. On pourra représenter cette fonction par $u + v\sqrt{-1}$, u, v désignant deux quantités réelles; et, si dans l'équation imaginaire qu'elle doit

vérifier, on écrit, au lieu de $\varpi(x)$ ou de $\varpi(x, y, z, \ldots)$,

$$u + v\sqrt{-1},$$

après avoir développé les deux membres, puis égalé de part et d'autre les parties réelles et les coefficients de $\sqrt{-1}$, on obtiendra deux équations réelles entre les fonctions inconnues u et v. La résolution de ces dernières équations, lorsqu'elle pourra s'effectuer, fera connaître les valeurs explicites de u et de v, et, par suite, la valeur explicite de l'expression imaginaire

$$u + v\sqrt{-1}.$$

Pour qu'une fonction imaginaire d'une seule variable soit complètement déterminée, il est nécessaire et il suffit que de chaque valeur particulière attribuée à la variable on puisse déduire la valeur correspondante de la fonction. Quelquefois, pour chaque valeur de la variable, la fonction donnée en obtient plusieurs différentes les unes des autres. Conformément aux conventions précédemment admises, nous désignerons ordinairement ces valeurs multiples d'une fonction imaginaire par des notations dans lesquelles nous ferons usage de doubles traits ou de doubles parenthèses. Ainsi, par exemple,

$$\sqrt[n]{\!\sqrt{\cos z + \sqrt{-1}\sin z}}$$

ou

$$((\cos z + \sqrt{-1}\sin z))^{\frac{1}{n}}$$

indiquera l'une quelconque des racines du degré n de l'expression imaginaire

$$\cos z + \sqrt{-1}\sin z.$$

§ II. — *Sur les expressions imaginaires infiniment petites et sur la continuité des fonctions imaginaires.*

Une expression imaginaire est appelée *infiniment petite*, lorsqu'elle converge vers la limite zéro, ce qui suppose que, dans l'expression donnée, la partie réelle et le coefficient de $\sqrt{-1}$ convergent en même temps vers cette limite. Cela posé, représentons par

$$\alpha + 6\sqrt{-1} = \rho(\cos\theta + \sqrt{-1}\sin\theta)$$

une expression imaginaire variable, α, 6 désignant deux quantités réelles auxquelles on peut substituer le module ρ et l'arc réel θ. Pour que cette expression soit infiniment petite, il sera évidemment nécessaire et suffisant que son module

$$\rho = \sqrt{\alpha^2 + 6^2}$$

soit lui-même infiniment petit.

Une fonction imaginaire de la variable x supposée réelle est appelée *continue* entre deux limites données de cette variable lorsque, entre ces limites, un accroissement infiniment petit de la variable produit toujours un accroissement infiniment petit de la fonction elle-même. Il en résulte que la fonction imaginaire

$$\varphi(x) + \chi(x)\sqrt{-1}$$

sera continue entre deux limites de x si les fonctions réelles $\varphi(x)$ et $\chi(x)$ restent continues entre ces limites.

On dit qu'une fonction imaginaire de la variable x est, dans le voisinage d'une valeur particulière de x, fonction *continue* de cette variable toutes les fois qu'elle reste continue entre deux limites même très rapprochées qui renferment la valeur dont il s'agit.

Enfin, lorsqu'une fonction imaginaire de la variable x cesse d'être continue dans le voisinage d'une valeur particulière de cette variable, on dit qu'elle devient alors *discontinue*, et qu'il y a pour cette valeur particulière *solution de continuité*.

En partant des notions qu'on vient d'établir relativement à la continuité des fonctions imaginaires, on reconnaîtra facilement que les théorèmes I, II et III du Chapitre II (§ II) subsistent dans le cas même où l'on remplace les fonctions réelles

$$f(x) \quad \text{et} \quad f(x, y, z, \ldots)$$

par des fonctions imaginaires

$$\varphi(x) + \chi(x)\sqrt{-1} \quad \text{et} \quad \varphi(x, y, z, \ldots) + \chi(x, y, z, \ldots)\sqrt{-1}.$$

On peut, en conséquence, énoncer les propositions suivantes :

Théorème I. — *Si les variables réelles $x, y, z, \ldots$ ont pour limites les quantités fixes et déterminées* X, Y, Z, ..., *et que la fonction imaginaire*

$$\varphi(x, y, z, \ldots) + \chi(x, y, z, \ldots)\sqrt{-1}$$

soit continue par rapport à chacune des variables $x, y, z, \ldots$ dans le voisinage du système des valeurs particulières

$$x = X, \quad y = Y, \quad z = Z, \quad \ldots,$$

$\varphi(x, y, z, \ldots) + \chi(x, y, z, \ldots)\sqrt{-1}$ *aura pour limite*

$$\varphi(X, Y, Z, \ldots) + \chi(X, Y, Z, \ldots)\sqrt{-1},$$

ou, si l'on fait, pour abréger,

$$\varphi(x, y, z, \ldots) + \chi(x, y, z, \ldots)\sqrt{-1} = \varpi(x, y, z, \ldots),$$

$\varpi(x, y, z, \ldots)$ *aura pour limite*

$$\varpi(X, Y, Z, \ldots).$$

Théorème II. — *Désignons par $x, y, z, \ldots$ plusieurs fonctions réelles de la variable t, qui soient continues par rapport à cette variable dans le voisinage de la valeur réelle $t = $ T. Soient de plus X, Y, Z, ... les valeurs particulières de $x, y, z, \ldots$ correspondantes à $t = $ T, et supposons que, dans le voisinage de ces valeurs particulières, la fonction imaginaire*

$$\varpi(x, y, z, \ldots) = \varphi(x, y, z, \ldots) + \chi(x, y, z, \ldots)\sqrt{-1}$$

soit en même temps continue par rapport à x, par rapport à y, par rapport à z, etc. ; $\varpi(x, y, z, \ldots)$, considérée comme une fonction imaginaire de t, sera encore continue par rapport à t, dans le voisinage de la valeur particulière $t = $ T.

Si, dans le théorème précédent, on réduit les variables $x, y, z, \ldots$ à une seule, on obtiendra l'énoncé suivant :

THÉORÈME III. — *Supposons que dans l'expression*

$$\varpi(x) = \varphi(x) + \chi(x)\sqrt{-1}$$

la variable x soit fonction réelle d'une autre variable t. Concevons de plus que la variable x soit fonction continue de t dans le voisinage de la valeur particulière $t = \mathrm{T}$, et $\varpi(x)$ fonction continue de x dans le voisinage de la valeur particulière $x = \mathrm{X}$, correspondante à $t = \mathrm{T}$. L'expression imaginaire $\varpi(x)$, considérée comme une fonction de t, sera encore continue par rapport à cette variable dans le voisinage de la valeur particulière $t = \mathrm{T}$.

§ III. — *Des fonctions imaginaires symétriques, alternées ou homogènes.*

En étendant aux fonctions imaginaires les définitions que nous avons données (Chapitre III) des fonctions symétriques, ou alternées, ou homogènes de plusieurs variables $x, y, z, \ldots$, on reconnaît immédiatement que

$$\varphi(x, y, z, \ldots) + \chi(x, y, z, \ldots)\sqrt{-1}$$

est une fonction symétrique, ou alternée, ou homogène du degré a par rapport aux variables $x, y, z, \ldots$, lorsque les fonctions réelles

$$\varphi(x, y, z, \ldots), \quad \chi(x, y, z, \ldots)$$

sont l'une et l'autre symétriques, ou alternées, ou homogènes du degré a par rapport à ces mêmes variables.

§ IV. — *Sur les fonctions imaginaires et entières d'une ou de plusieurs variables.*

En vertu de ce qui a été dit ci-dessus (§ I),

$$\varphi(x) + \chi(x)\sqrt{-1}$$

et

$$\varphi(x, y, z, \ldots) + \chi(x, y, z, \ldots)\sqrt{-1}$$

sont deux fonctions imaginaires et entières, l'une de la variable x, l'autre des variables $x, y, z, \ldots$, lorsque

$$\varphi(x) \quad \text{et} \quad \chi(x), \qquad \varphi(x, y, z, \ldots) \quad \text{et} \quad \chi(x, y, z, \ldots)$$

sont des fonctions réelles et entières de ces mêmes variables. Par suite, si $\varpi(x)$ représente une fonction imaginaire et entière de la variable x, la valeur de $\varpi(x)$ sera déterminée par une équation de la forme

$$\begin{aligned}\varpi(x) &= \varphi(x) + \chi(x)\sqrt{-1} \\ &= a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + (b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \ldots)\sqrt{-1},\end{aligned}$$

$a_0, a_1, a_2, \ldots, b_0, b_1, b_2, \ldots$ désignant des constantes réelles. On conclura de cette équation, en réunissant les coefficients des puissances semblables de x,

$$(1) \quad \varpi(x) = (a_0 + b_0\sqrt{-1}) + (a_1 + b_1\sqrt{-1})x + (a_2 + b_2\sqrt{-1})x^2 + \ldots.$$

Pour que la fonction $\varpi(x)$, déterminée par la formule précédente, s'évanouisse avec x, il faut que l'on ait

$$a_0 + b_0\sqrt{-1} = 0,$$

c'est-à-dire $a_0 = 0$ et $b_0 = 0$, auquel cas la valeur de $\varpi(x)$ se réduit à

$$\begin{aligned}\varpi(x) &= (a_1 + b_1\sqrt{-1})x + (a_2 + b_2\sqrt{-1})x^2 + \ldots \\ &= x[a_1 + b_1\sqrt{-1} \quad + (a_2 + b_2\sqrt{-1})x + \ldots].\end{aligned}$$

Ainsi, toute fonction imaginaire et entière de la variable x, lorsqu'elle s'évanouit avec cette variable, est le produit du facteur x par une seconde fonction de la même espèce ou, en d'autres termes, est divisible par x. En partant de cette remarque, on étendra facilement les théorèmes I et II du Chapitre IV (§ I) au cas où les fonctions entières qui s'y trouvent mentionnées sont en même temps imaginaires. J'ajoute que ces deux théorèmes subsisteront encore si l'on y remplace les valeurs particulières et réelles attribuées à la variable x, telles que

$$x_0, \quad x_1, \quad x_2, \quad \ldots$$

par des variables imaginaires

$$\alpha_0+\beta_0\sqrt{-1},\quad \alpha_1+\beta_1\sqrt{-1},\quad \alpha_2+\beta_2\sqrt{-1},\quad \ldots.$$

Pour démontrer cette assertion, il suffit d'établir les deux propositions suivantes :

Théorème I. — *Si une fonction imaginaire et entière de la variable x s'évanouit pour une valeur particulière de cette variable, par exemple pour*

$$x=\alpha_0+\beta_0\sqrt{-1},$$

cette fonction sera divisible algébriquement par

$$x-\alpha_0-\beta_0\sqrt{-1}.$$

Démonstration. — En effet, soit

$$\varpi(x)=\varphi(x)+\chi(x)\sqrt{-1}$$

la fonction imaginaire dont il s'agit. Si l'on y fait

$$x=\alpha_0+\beta_0\sqrt{-1}+z,$$

z désignant une nouvelle variable, on obtiendra évidemment pour résultat de la substitution une fonction imaginaire et entière de z, savoir

$$\varpi(\alpha_0+\beta_0\sqrt{-1}+z);$$

et, comme cette fonction de z devra s'évanouir pour $z=0$, on en conclura que

$$\varpi(x)=\varpi(\alpha_0+\beta_0\sqrt{-1}+z)$$

est divisible par

$$z=x-\alpha_0-\beta_0\sqrt{-1}.$$

Corollaire I. — La proposition précédente subsiste dans le cas même où la fonction $\chi(x)$ s'évanouit, c'est-à-dire dans le cas où $\varpi(x)$ se réduit à une fonction réelle $\varphi(x)$.

Corollaire II. — Le théorème précédent subsiste encore lorsqu'on

suppose $\beta=0$, et par conséquent lorsque la valeur particulière attribuée à la variable x est réelle.

Théorème II. — *Si une fonction imaginaire et entière de la variable x s'évanouit pour chacune des valeurs particulières de x comprises dans la suite*

$$\alpha_0+\beta_0\sqrt{-1},\quad \alpha_1+\beta_1\sqrt{-1},\quad \alpha_2+\beta_2\sqrt{-1},\quad \ldots,\quad \alpha_{n-1}+\beta_{n-1}\sqrt{-1},$$

n désignant un nombre entier quelconque, cette fonction sera équivalente au produit des facteurs

$$x-\alpha_0-\beta_0\sqrt{-1},\quad x-\alpha_1-\beta_1\sqrt{-1},\quad x-\alpha_2-\beta_2\sqrt{-1},\quad \ldots,\quad x-\alpha_{n-1}-\beta_{n-1}\sqrt{-1}$$

par une nouvelle fonction imaginaire et entière de la variable x.

Démonstration. — Soit

$$\varpi(x)=\varphi(x)+\chi(x)\sqrt{-1}$$

la fonction proposée. Comme elle doit s'évanouir pour

$$x=\alpha_0+\beta_0\sqrt{-1},$$

elle sera, en vertu du théorème I, algébriquement divisible par

$$x-\alpha_0-\beta_0\sqrt{-1};$$

et l'on aura, en conséquence,

$$\varpi(x)=(x-\alpha_0-\beta_0\sqrt{-1})\,Q_0, \tag{2}$$

Q_0 désignant une nouvelle fonction imaginaire et entière de la variable x. La fonction $\varpi(x)$ devant s'évanouir encore lorsqu'on suppose

$$x=\alpha_1+\beta_1\sqrt{-1},$$

cette supposition réduira nécessairement à zéro le second membre de l'équation (2), et, par conséquent, l'un des deux facteurs qui le composent (*voir* le Chapitre VII, § II, théorème VII, corollaire II). De plus, comme le premier facteur

$$x-\alpha_0-\beta_0\sqrt{-1}$$

ne peut devenir nul pour

$$x=\alpha_1+\beta_1\sqrt{-1},$$

tant que les valeurs particulières

$$\alpha_0+\beta_0\sqrt{-1}, \quad \alpha_1+\beta_1\sqrt{-1}$$

sont distinctes l'une de l'autre, il est clair qu'en attribuant à x la seconde de ces deux valeurs, on devra réduire à zéro la fonction entière Q_0, et, par suite, que cette fonction entière sera divisible algébriquement par

$$x-\alpha_1-\beta_1\sqrt{-1}.$$

On aura donc

$$Q_0=(x-\alpha_1-\beta_1\sqrt{-1})\,Q_1,$$

Q_1 désignant une nouvelle fonction imaginaire et entière de la variable x; en sorte que l'équation (2) pourra se mettre sous la forme

$$(3) \qquad \varpi(x)=(x-\alpha_0-\beta_0\sqrt{-1})(x-\alpha_1-\beta_1\sqrt{-1})\,Q_1.$$

En raisonnant comme on vient de le faire, on trouvera : 1° que, la fonction $\varpi(x)$ devant s'évanouir en vertu de la supposition

$$x=\alpha_2+\beta_2\sqrt{-1},$$

cette supposition réduit nécessairement à zéro le second membre de l'équation (3), et, par conséquent, l'un de ses trois facteurs; 2° que le facteur réduit à zéro ne peut être que la fonction entière Q_1, tant que les trois valeurs particulières de x, désignées par

$$\alpha_0+\beta_0\sqrt{-1}, \quad \alpha_1+\beta_1\sqrt{-1}, \quad \alpha_2+\beta_2\sqrt{-1},$$

sont distinctes l'une de l'autre; 3° que la fonction entière Q_1, devant s'évanouir pour

$$x=\alpha_2+\beta_2\sqrt{-1},$$

est algébriquement divisible par

$$x-\alpha_2-\beta_2\sqrt{-1}.$$

On aura, par conséquent,

$$Q_1=(x-\alpha_2-\beta_2\sqrt{-1})\,Q_2$$

et, par suite,

$$(4) \qquad \varpi(x)=(x-\alpha_0-\beta_0\sqrt{-1})(x-\alpha_1-\beta_1\sqrt{-1})(x-\alpha_2-\beta_2\sqrt{-1})\,Q_2,$$

Q_2 désignant encore une fonction imaginaire et entière de la variable x. En continuant de la même manière, on finira par reconnaître que, dans le cas où la fonction entière $\varpi(x)$ s'évanouit pour n valeurs différentes de x, respectivement désignées par

$$\alpha_0+\beta_0\sqrt{-1}, \quad \alpha_1+\beta_1\sqrt{-1}, \quad \alpha_2+\beta_2\sqrt{-1}, \quad \ldots, \quad \alpha_{n-1}+\beta_{n-1}\sqrt{-1},$$

on a nécessairement

$$(5) \qquad \varpi(x)=(x-\alpha_0-\beta_0\sqrt{-1})(x-\alpha_1-\beta_1\sqrt{-1})(x-\alpha_2-\beta_2\sqrt{-1})\ldots(x-\alpha_{n-1}-\beta_{n-1}\sqrt{-1})\,Q,$$

Q désignant une nouvelle fonction entière de la variable x.

Il est à peu près inutile d'observer que le théorème précédent subsiste lorsqu'on suppose

$$\chi(x)=0$$

ou bien

$$\beta_0=0, \quad \beta_1=0, \quad \beta_2=0, \quad \ldots, \quad \beta_{n-1}=0,$$

c'est-à-dire lorsque la fonction $\varpi(x)$ ou les valeurs particulières attribuées à la variable x deviennent réelles.

A l'aide des principes établis dans ce paragraphe, on démontrera sans difficulté que, dans le Chapitre IV (§ I), les théorèmes III et IV, avec la formule (1), peuvent être étendus au cas où les fonctions et les variables deviennent imaginaires, ainsi que les valeurs particulières attribuées aux unes et aux autres. On prouvera de même que les propositions I, II et III, avec les formules (1) et (2), dans le § II du Chapitre IV, et les formules (2), (3), (4), (5), (6) dans le § III du même Chapitre, subsistent quelles que soient les valeurs réelles ou imaginaires des variables, des fonctions et des constantes. Ainsi, par exemple, on reconnaîtra, en particulier, que l'équation (6) du § III, savoir

$$(6)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{(x+y)^n}{1.2.3\ldots n} = {} & \frac{x^n}{1.2.3\ldots n} + \frac{x^{n-1}}{1.2.3\ldots(n-1)}\,\frac{y}{1} + \ldots \\ & + \frac{x}{1}\,\frac{y^{n-1}}{1.2.3\ldots(n-1)} + \frac{y^n}{1.2.3\ldots n}, \end{aligned}\right.$$

a lieu pour des valeurs imaginaires quelconques des variables x et y.

§ V. — *Détermination des fonctions imaginaires continues d'une seule variable propres à vérifier certaines conditions.*

Soit

$$\varpi(x) = \varphi(x) + \sqrt{-1}\,\chi(x)$$

une fonction imaginaire continue de la variable x, $\varphi(x)$ et $\chi(x)$ désignant deux fonctions continues, mais réelles. La fonction imaginaire $\varpi(x)$ sera complètement déterminée, si elle est assujettie à vérifier, pour toutes les valeurs réelles possibles des variables x et y, l'une des équations

$$(1)\qquad \varpi(x+y) = \varpi(x) + \varpi(y),$$

$$(2)\qquad \varpi(x+y) = \varpi(x) \times \varpi(y),$$

ou bien, pour toutes les valeurs réelles et positives des mêmes variables, l'une des équations suivantes :

$$(3)\qquad \varpi(xy) = \varpi(x) + \varpi(y),$$

$$(4)\qquad \varpi(xy) = \varpi(x) \times \varpi(y).$$

Nous allons résoudre successivement ces quatre équations, ce qui nous fournira quatre problèmes analogues à ceux que nous avons déjà traités dans le § I du Chapitre V.

PROBLÈME I. — *Déterminer la fonction imaginaire $\varpi(x)$ de manière qu'elle reste continue entre deux limites réelles quelconques de la variable x, et que l'on ait, pour toutes les valeurs réelles des variables x et y,*

$$(1)\qquad \varpi(x+y) = \varpi(x) + \varpi(y).$$

Solution. — Si, à l'aide de la formule

$$\varpi(x) = \varphi(x) + \chi(x)\sqrt{-1},$$

on remplace dans l'équation (1) la fonction imaginaire ϖ par les fonctions réelles φ et χ, cette équation deviendra

$$\varphi(x+y) + \chi(x+y)\sqrt{-1} = \varphi(x) + \chi(x)\sqrt{-1} + \varphi(y) + \chi(y)\sqrt{-1};$$

puis l'on en conclura, en égalant de part et d'autre les parties réelles et les coefficients de $\sqrt{-1}$,

$$\varphi(x+y) = \varphi(x) + \varphi(y),$$
$$\chi(x+y) = \chi(x) + \chi(y).$$

On tirera de ces dernières formules (*voir* le Chapitre V, § I, problème I)

$$\varphi(x) = x\,\varphi(1),$$
$$\chi(x) = x\,\chi(1)$$

et, par suite,

$$(5)\qquad \varpi(x) = x\left[\varphi(1) + \chi(1)\sqrt{-1}\right]$$

ou, ce qui revient au même,

$$(6)\qquad \varpi(x) = x\,\varpi(1).$$

Il suit de l'équation (5) que toute valeur de $\varpi(x)$ propre à résoudre la question proposée est nécessairement de la forme

$$(7)\qquad \varpi(x) = \left(a + b\sqrt{-1}\right)x,$$

a, b désignant deux quantités constantes. Il est d'ailleurs facile de s'assurer qu'une semblable valeur de $\varpi(x)$ vérifie l'équation (1), quelles que soient les deux quantités a et b. Ces quantités sont donc deux constantes arbitraires.

On peut remarquer que, pour obtenir la valeur précédente de $\varpi(x)$, il suffit de remplacer, dans la valeur de $\varphi(x)$ que fournit l'équation (7) du Chapitre V (§ I), la constante arbitraire et réelle a par la constante arbitraire, mais imaginaire,

$$a + b\sqrt{-1}.$$

Problème II. — *Déterminer la fonction imaginaire $\varpi(x)$ de manière qu'elle reste continue entre deux limites réelles quelconques de la variable x, et que l'on ait, pour toutes les valeurs réelles des variables x et y,*

$$\varpi(x+y) = \varpi(x)\,\varpi(y). \tag{2}$$

Solution. — Si dans l'équation (2) on fait $x = 0$, on en tirera

$$\varpi(0) = 1$$

ou, ce qui revient au même, à cause de la formule

$$\varpi(x) = \varphi(x) + \chi(x)\sqrt{-1},$$

$$\varphi(0) + \chi(0)\sqrt{-1} = 1$$

et, par suite,

$$\varphi(0) = 1, \qquad \chi(0) = 0.$$

La fonction $\varphi(x)$ se réduira donc à l'unité pour la valeur particulière 0 attribuée à la variable x; et, puisqu'on la suppose continue entre des limites quelconques, il est clair qu'elle sera, dans le voisinage de cette valeur particulière, très peu différente de l'unité, par conséquent positive. On pourra donc, en désignant par α un nombre très petit, choisir ce nombre de manière que la fonction $\varphi(x)$ reste constamment positive entre les limites

$$x = 0, \qquad x = \alpha.$$

Cette condition étant remplie, comme la quantité $\varphi(\alpha)$ sera elle-même positive, si l'on fait

$$\rho = \sqrt{\varphi(\alpha)^2 + \chi(\alpha)^2}, \qquad \zeta = \operatorname{arc\,tang}\frac{\chi(\alpha)}{\varphi(\alpha)},$$

on en conclura

$$\varpi(\alpha) = \varphi(\alpha) + \chi(\alpha)\sqrt{-1} = \rho(\cos\zeta + \sqrt{-1}\sin\zeta).$$

Concevons maintenant que dans l'équation (2) on remplace successivement y par $y + z$, puis z par $z + u$, ..., on en déduira

$$\varpi(x+y+z+\ldots) = \varpi(x)\,\varpi(y)\,\varpi(z)\ldots,$$

quel que soit le nombre des variables $x, y, z, \ldots$; si, de plus, on désigne par m ce même nombre, et que l'on fasse

$$x = y = z = \ldots = \alpha,$$

l'équation que l'on vient de trouver donnera

$$\varpi(m\alpha) = [\varpi(\alpha)]^m = \rho^m(\cos m\zeta + \sqrt{-1}\sin m\zeta).$$

J'ajoute que la formule

$$\varpi(m\alpha) = \rho^m(\cos m\zeta + \sqrt{-1}\sin m\zeta)$$

subsistera encore si l'on y remplace le nombre entier m par une fraction ou même par un nombre quelconque μ. C'est ce que l'on prouvera facilement ainsi qu'il suit.

Si dans l'équation (2) on fait

$$x = \frac{1}{2}\alpha, \qquad y = \frac{1}{2}\alpha,$$

on en tirera

$$\left[\varpi\left(\frac{1}{2}\alpha\right)\right]^2 = \varpi(\alpha) = \rho[\cos\zeta + \sqrt{-1}\sin\zeta];$$

puis, en extrayant les racines carrées des deux membres, de manière que les parties réelles soient positives, et observant que les deux fonctions $\varphi(x)$, $\cos x$ restent positives, la première entre les limites $x = 0$, $x = \alpha$, la seconde entre les limites $x = 0$, $x = \zeta$, on trouvera

$$\varpi\left(\frac{1}{2}\alpha\right) = \varphi\left(\frac{1}{2}\alpha\right) + \chi\left(\frac{1}{2}\alpha\right)\sqrt{-1} = \rho^{\frac{1}{2}}\left(\cos\frac{\zeta}{2} + \sqrt{-1}\sin\frac{\zeta}{2}\right).$$

De même, si dans l'équation (2) on fait

$$x = \frac{1}{4}\alpha, \qquad y = \frac{1}{4}\alpha,$$

on en tirera

$$\left[\varpi\left(\frac{1}{4}\alpha\right)\right]^2 = \varpi\left(\frac{1}{2}\alpha\right) = \rho^{\frac{1}{2}}\left(\cos\frac{\zeta}{2} + \sqrt{-1}\sin\frac{\zeta}{2}\right);$$

puis, en extrayant les racines carrées des deux membres, de manière à obtenir des parties réelles positives,

$$\varpi\left(\frac{1}{4}\alpha\right) = \rho^{\frac{1}{4}}\left(\cos\frac{\zeta}{4} + \sqrt{-1}\sin\frac{\zeta}{4}\right).$$

Par des raisonnements semblables, on établira successivement les formules

$$\varpi\left(\frac{1}{8}\alpha\right) = \rho^{\frac{1}{8}}\left(\cos\frac{\zeta}{8} + \sqrt{-1}\sin\frac{\zeta}{8}\right),$$
$$\varpi\left(\frac{1}{16}\alpha\right) = \rho^{\frac{1}{16}}\left(\cos\frac{\zeta}{16} + \sqrt{-1}\sin\frac{\zeta}{16}\right),$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots;$$

et, en général, n désignant un nombre entier quelconque,

$$\varpi\left(\frac{1}{2^n}\alpha\right) = \rho^{\frac{1}{2^n}}\left[\cos\left(\frac{1}{2^n}\zeta\right) + \sqrt{-1}\sin\left(\frac{1}{2^n}\zeta\right)\right].$$

Si l'on opère sur la valeur précédente de $\varpi\left(\frac{1}{2^n}\alpha\right)$ pour en déduire celle de $\varpi\left(\frac{m}{2^n}\alpha\right)$, comme on a opéré sur la valeur de $\varpi(\alpha)$ pour en déduire celle de $\varpi(m\alpha)$, on trouvera

$$\varpi\left(\frac{m}{2^n}\alpha\right) = \rho^{\frac{m}{2^n}}\left[\cos\left(\frac{m}{2^n}\zeta\right) + \sqrt{-1}\sin\left(\frac{m}{2^n}\zeta\right)\right],$$

ou, ce qui revient au même,

$$\varphi\left(\frac{m}{2^n}\alpha\right) + \chi\left(\frac{m}{2^n}\alpha\right)\sqrt{-1} = \rho^{\frac{m}{2^n}}\left[\cos\left(\frac{m}{2^n}\zeta\right) + \sqrt{-1}\sin\left(\frac{m}{2^n}\zeta\right)\right],$$

et, par suite,

$$\varphi\left(\frac{m}{2^n}\alpha\right) = \rho^{\frac{m}{2^n}}\cos\left(\frac{m}{2^n}\zeta\right),$$
$$\chi\left(\frac{m}{2^n}\alpha\right) = \rho^{\frac{m}{2^n}}\sin\left(\frac{m}{2^n}\zeta\right);$$

puis, en supposant que la fraction $\frac{m}{2^n}$ varie de manière à s'approcher indéfiniment du nombre μ, et passant aux limites, on obtiendra les équations

$$\varphi(\mu\alpha) = \rho^\mu\cos\mu\zeta, \qquad \chi(\mu\alpha) = \rho^\mu\sin\mu\zeta,$$

desquelles on conclura

$$(8) \qquad \varpi(\mu\alpha) = \rho^\mu(\cos\mu\zeta + \sqrt{-1}\sin\mu\zeta).$$

De plus, si dans l'équation (2) on pose

$$x = \mu\alpha, \qquad y = -\mu\alpha,$$

on en tirera

$$\varpi(-\mu\alpha) = \frac{\varpi(0)}{\varpi(\mu\alpha)} = \rho^{-\mu}[\cos(-\mu\zeta) + \sqrt{-1}\sin(-\mu\zeta)].$$

La formule (8) subsistera donc lorsqu'on y remplacera μ par $-\mu$. En d'autres termes, on aura, pour des valeurs réelles quelconques positives ou négatives de la variable x,

$$(9) \qquad \varpi(\alpha x) = \rho^x[\cos\zeta x + \sqrt{-1}\sin\zeta x] = [\varpi(\alpha)]^x.$$

Si dans cette dernière formule on écrit $\frac{x}{\alpha}$ au lieu de x, elle deviendra

$$(10) \qquad \varpi(x) = \rho^{\frac{x}{\alpha}}\left[\cos\left(\frac{\zeta}{\alpha}x\right) + \sqrt{-1}\sin\left(\frac{\zeta}{\alpha}x\right)\right] = [\varpi(\alpha)]^{\frac{x}{\alpha}};$$

et si l'on fait ensuite, pour abréger,

$$(11) \qquad \rho^{\frac{1}{\alpha}} = \mathrm{A}, \qquad \frac{\zeta}{\alpha} = b,$$

on trouvera

$$(12) \qquad \varpi(x) = \mathrm{A}^x(\cos bx + \sqrt{-1}\sin bx).$$

Ainsi toute valeur de $\varpi(x)$, propre à résoudre la question proposée, sera nécessairement de la forme

$$\mathrm{A}^x(\cos bx + \sqrt{-1}\sin bx),$$

A, b désignant deux constantes réelles, dont la première ne pourra être que positive. Il est d'ailleurs facile de s'assurer qu'une semblable valeur de $\varpi(x)$ vérifie l'équation (2), quelles que soient la valeur du nombre A et celle de la quantité b. Ce nombre et cette quantité sont donc des constantes arbitraires.

Corollaire. — Dans le cas particulier où la fonction $\varphi(x)$ doit rester positive entre les limites $x=0$, $x=1$, on peut, au lieu de supposer α très petit, prendre $\alpha=1$; et l'on conclut alors immédiatement des équations (9) et (10)

$$\varpi(x)=[\varpi(1)]^x. \tag{13}$$

Problème III. — *Déterminer la fonction imaginaire $\varpi(x)$ de manière qu'elle reste continue entre deux limites positives quelconques de la variable x, et que l'on ait, pour toutes les valeurs positives des variables x et y,*

$$\varpi(xy)=\varpi(x)+\varpi(y). \tag{3}$$

Solution. — Si, à l'aide de la formule

$$\varpi(x)=\varphi(x)+\chi(x)\sqrt{-1},$$

on remplace dans l'équation (3) la fonction imaginaire ϖ par les fonctions réelles φ et χ, puis, que l'on égale de part et d'autre les parties réelles et les coefficients de $\sqrt{-1}$, on trouvera

$$\varphi(xy)=\varphi(x)+\varphi(y),$$
$$\chi(xy)=\chi(x)+\chi(y).$$

Si, de plus, on désigne par A un nombre quelconque et par L la caractéristique des logarithmes dans le système dont la base est A, on tirera des équations précédentes (*voir* le Chapitre V, § I, problème III)

$$\varphi(x)=\varphi(A)\,L(x),$$
$$\chi(x)=\chi(A)\,L(x),$$

et l'on en conclura

$$\varpi(x)=\left[\varphi(A)+\chi(A)\sqrt{-1}\right]L(x) \tag{14}$$

ou, ce qui revient au même,

$$\varpi(x)=\varpi(A)\,L(x). \tag{15}$$

Il suit de la formule (14) que toute valeur $\varpi(x)$ propre à résoudre la question proposée est nécessairement de la forme

$$\varpi(x)=\left(a+b\sqrt{-1}\right)L(x), \tag{16}$$

a, b désignant deux quantités constantes. Il est d'ailleurs facile de s'assurer qu'une semblable valeur de $\varpi(x)$ vérifie l'équation (3), quelles que soient les quantités a et b. Ces quantités sont donc deux constantes arbitraires.

On peut remarquer que, pour obtenir la valeur précédente de $\varpi(x)$, il suffit de remplacer, dans la valeur de $\varphi(x)$ que fournit l'équation (12) du Chapitre V (§ I), la constante arbitraire et réelle a par la constante arbitraire, mais imaginaire,

$$a+b\sqrt{-1}.$$

Nota. — On pourrait arriver très simplement à l'équation (15) de la manière suivante.

En vertu des formules identiques

$$x=A^{Lx},\qquad y=A^{Ly},$$

l'équation (3) devient

$$\varpi(A^{Lx+Ly})=\varpi(A^{Lx})+\varpi(A^{Ly}).$$

Comme, dans cette dernière, les quantités variables Lx, Ly admettent des valeurs réelles quelconques positives ou négatives, il en résulte qu'on aura, pour toutes les valeurs réelles possibles des variables x et y,

$$\varpi(A^{x+y})=\varpi(A^x)+\varpi(A^y).$$

On en conclura [*voir* le problème I, équation (6)]

$$\varpi(A^x)=x\,\varpi(A^1)=x\,\varpi(A)$$

et, par suite,

$$\varpi(A^{Lx})=\varpi(A)\,Lx$$

ou, ce qui revient au même,

$$\varpi(x) = \varpi(\mathrm{A})\,\mathrm{L}x.$$

PROBLÈME IV. — *Déterminer la fonction imaginaire $\varpi(x)$ de manière qu'elle reste continue entre deux limites positives quelconques de la variable x, et que l'on ait, pour toutes les valeurs positives des variables x et y,*

$$\varpi(xy) = \varpi(x)\,\varpi(y). \tag{4}$$

Solution. — Il serait facile d'appliquer à la solution de ce problème une méthode semblable à celle que nous avons employée pour résoudre le second; mais on arrivera plus promptement à la solution cherchée, si l'on observe que, en désignant par L la caractéristique des logarithmes dans le système dont la base est A, on peut mettre l'équation (4) sous la forme

$$\varpi(\mathrm{A}^{\mathrm{L}x+\mathrm{L}y}) = \varpi(\mathrm{A}^{\mathrm{L}x})\,\varpi(\mathrm{A}^{\mathrm{L}y}).$$

Comme, dans cette dernière équation, les quantités variables $\mathrm{L}x$, $\mathrm{L}y$ admettent des valeurs réelles quelconques positives ou négatives, il en résulte qu'on aura, pour toutes les valeurs réelles possibles des variables x et y,

$$\varpi(\mathrm{A}^{x+y}) = \varpi(\mathrm{A}^{x})\,\varpi(\mathrm{A}^{y}).$$

On en conclura, en représentant par α un nombre très petit et en remplaçant dans l'équation (10) du second problème $\varpi(x)$ par $\varpi(\mathrm{A}^x)$,

$$\varpi(\mathrm{A}^x) = [\varpi(\mathrm{A}^\alpha)]^{\frac{x}{\alpha}}.$$

On trouvera par suite

$$\varpi(\mathrm{A}^{\mathrm{L}x}) = [\varpi(\mathrm{A}^\alpha)]^{\frac{\mathrm{L}x}{\alpha}}$$

ou, ce qui revient au même,

$$\varpi(x) = [\varpi(\mathrm{A}^\alpha)]^{\frac{\mathrm{L}x}{\alpha}}. \tag{17}$$

Il est essentiel d'observer que la fonction imaginaire $\varpi(\mathrm{A}^x)$, et par conséquent sa partie réelle $\varphi(\mathrm{A}^x)$, se réduisent à l'unité pour $x = 0$,

ou, en d'autres termes, que la fonction imaginaire $\varpi(x)$ et sa partie réelle $\varphi(x)$ se réduisent à l'unité pour $x = 1$. C'est ce que l'on peut démontrer directement, en prenant dans l'équation (4),

$$x = \mathrm{A}^0 = 1.$$

Quant au nombre α, il doit seulement être assez petit pour que la partie réelle de la fonction imaginaire $\varpi(\mathrm{A}^x)$ reste constamment positive entre les limites $x = 0$, $x = \alpha$. Cette condition étant remplie, la partie réelle de l'expression imaginaire

$$\varpi(\mathrm{A}^\alpha) = \varphi(\mathrm{A}^\alpha) + \chi(\mathrm{A}^\alpha)\sqrt{-1}$$

sera elle-même positive; et par suite, si l'on fait

$$\rho = \sqrt{[\varphi(\mathrm{A}^\alpha)]^2 + [\chi(\mathrm{A}^\alpha)]^2}, \qquad \zeta = \operatorname{arc\,tang}\frac{\chi(\mathrm{A}^\alpha)}{\varphi(\mathrm{A}^\alpha)},$$

on aura

$$\varpi(\mathrm{A}^\alpha) = \rho(\cos\zeta + \sqrt{-1}\sin\zeta).$$

Cela posé, l'équation (17) deviendra

$$\left\{\begin{aligned} \varpi(x) &= \rho^{\frac{\mathrm{L}x}{\alpha}}\left[\cos\left(\frac{\zeta}{\alpha}\mathrm{L}x\right) + \sqrt{-1}\sin\left(\frac{\zeta}{\alpha}\mathrm{L}x\right)\right] \\ &= x^{\frac{\mathrm{L}\rho}{\alpha}}\left[\cos\left(\frac{\zeta}{\alpha}\mathrm{L}x\right) + \sqrt{-1}\sin\left(\frac{\zeta}{\alpha}\mathrm{L}x\right)\right]. \end{aligned}\right. \tag{18}$$

En vertu de cette dernière équation, toute valeur de $\varpi(x)$ propre à résoudre la question proposée sera nécessairement de la forme

$$\varpi(x) = x^a[\cos(b\,\mathrm{L}x) + \sqrt{-1}\sin(b\,\mathrm{L}x)], \tag{19}$$

a, b désignant deux quantités constantes. Il est aisé, de plus, de s'assurer que ces deux quantités constantes doivent demeurer entièrement arbitraires.

CHAPITRE IX.

DES SÉRIES IMAGINAIRES CONVERGENTES ET DIVERGENTES. SOMMATION DE QUELQUES SÉRIES IMAGINAIRES CONVERGENTES. NOTATIONS EMPLOYÉES POUR REPRÉSENTER QUELQUES FONCTIONS IMAGINAIRES AUXQUELLES ON SE TROUVE CONDUIT PAR LA SOMMATION DE CES MÊMES SÉRIES.

§ I. — *Considérations générales sur les séries imaginaires.*

Soient respectivement

$$p_0,\quad p_1,\quad p_2,\quad \ldots,\quad p_n,\quad \ldots, \tag{1}$$

$$q_0,\quad q_1,\quad q_2,\quad \ldots,\quad q_n,\quad \ldots \tag{2}$$

deux séries réelles. La suite des expressions imaginaires

$$p_0+q_0\sqrt{-1},\quad p_1+q_1\sqrt{-1},\quad p_2+q_2\sqrt{-1},\quad \ldots,\quad p_n+q_n\sqrt{-1},\quad \ldots \tag{3}$$

formera ce qu'on appelle une *série imaginaire*. Soit, de plus,

$$\left\{\begin{aligned} s_n &= (p_0+q_0\sqrt{-1})+(p_1+q_1\sqrt{-1})+\ldots+(p_{n-1}+q_{n-1}\sqrt{-1}) \\ &= (p_0+p_1+\ldots+p_{n-1})+(q_0+q_1+\ldots+q_{n-1})\sqrt{-1} \end{aligned}\right. \tag{4}$$

la somme des n premiers termes de cette série. Selon que, pour des valeurs croissantes de n, s_n convergera ou non vers une limite fixe, on dira que la série (3) est *convergente* et qu'elle a pour *somme* cette limite, ou bien qu'elle est *divergente* et n'a pas de somme. Le premier cas aura évidemment lieu si les deux sommes

$$p_0+p_1+\ldots+p_{n-1},$$
$$q_0+q_1+\ldots+q_{n-1}$$

convergent elles-mêmes, pour des valeurs croissantes de n, vers des

limites fixes, et le second, dans la supposition contraire. En d'autres termes, la série (3) sera toujours convergente en même temps que les séries réelles (1) et (2). Si ces dernières, ou l'une d'elles seulement, deviennent divergentes, la série (3) le sera également.

Dans tous les cas possibles, le terme de la série (3) qui correspond à l'indice n, savoir

$$p_n+q_n\sqrt{-1},$$

est ce qu'on nomme son *terme général.*

L'une des séries imaginaires les plus simples est celle qu'on obtient en attribuant à la variable x, dans la progression géométrique

$$1,\quad x,\quad x^2,\quad \ldots,\quad x^n,\quad \ldots,$$

une valeur imaginaire. Concevons, pour fixer les idées, que l'on fasse

$$x = z(\cos\theta+\sqrt{-1}\sin\theta),$$

z désignant une nouvelle variable supposée réelle, et θ un arc réel. La progression géométrique dont il s'agit deviendra

$$\left\{\begin{aligned} &1,\quad z(\cos\theta+\sqrt{-1}\sin\theta),\quad z^2(\cos2\theta+\sqrt{-1}\sin2\theta),\quad \ldots, \\ &\qquad \ldots,\quad z^n(\cos n\theta+\sqrt{-1}\sin n\theta),\quad \ldots. \end{aligned}\right. \tag{5}$$

Pour obtenir l'équation qui détermine la somme des n premiers termes de la série précédente, il suffit de remplacer x par $z(\cos\theta+\sqrt{-1}\sin\theta)$ dans la formule

$$1+x+x^2+\ldots+x^{n-1}=\frac{1}{1-x}-\frac{x^n}{1-x}.$$

On trouve de cette manière

$$\left\{\begin{aligned} &1+z(\cos\theta+\sqrt{-1}\sin\theta)+z^2(\cos2\theta+\sqrt{-1}\sin2\theta)+\ldots \\ &\qquad +z^{n-1}[\cos(n-1)\theta+\sqrt{-1}\sin(n-1)\theta] \\ &\quad = \frac{1}{1-z(\cos\theta+\sqrt{-1}\sin\theta)}-\frac{z^n(\cos n\theta+\sqrt{-1}\sin n\theta)}{1-z(\cos\theta+\sqrt{-1}\sin\theta)}; \end{aligned}\right. \tag{6}$$

et, comme, pour des valeurs croissantes de n, le module de l'expression imaginaire

$$\frac{z^n(\cos n\theta + \sqrt{-1}\sin n\theta)}{1 - z\cos\theta - z\sin\theta\sqrt{-1}},$$

savoir

$$\frac{\pm z^n}{(1 - 2z\cos\theta + z^2)^{\frac{1}{2}}},$$

converge vers la limite zéro ou croît au delà de toute limite, suivant qu'on suppose la valeur numérique de z inférieure ou supérieure à l'unité, on doit conclure de l'équation (6) que la série (5) est, dans la première hypothèse, une série convergente qui a pour somme

$$\frac{1}{1 - z\cos\theta - z\sin\theta\sqrt{-1}},$$

et, dans la seconde hypothèse, une série divergente qui n'a plus de somme.

La somme d'une série imaginaire convergente s'indique, comme si la série était réelle, par la somme de ses premiers termes, suivie de points....

Cela posé, si l'on appelle s la somme de la série (3) supposée convergente, et que, dans la formule (4), on fasse croître n indéfiniment, on trouvera, en passant aux limites,

$$(7)\quad \begin{cases} s = (p_0 + q_0\sqrt{-1}) + (p_1 + q_1\sqrt{-1}) + (p_2 + q_2\sqrt{-1}) + \ldots \\ = (p_0 + p_1 + p_2 + \ldots) + (q_0 + q_1 + q_2 + \ldots)\sqrt{-1}. \end{cases}$$

De même, lorsqu'on supposera la valeur numérique de z inférieure à l'unité, on tirera de l'équation (6), en faisant croître n au delà de toute limite assignable,

$$(8)\quad \begin{cases} 1 + z(\cos\theta + \sqrt{-1}\sin\theta) + z^2(\cos 2\theta + \sqrt{-1}\sin 2\theta) + \ldots \\ \quad = \dfrac{1}{1 - z\cos\theta - z\sin\theta\sqrt{-1}} = \dfrac{1 - z\cos\theta + z\sin\theta\sqrt{-1}}{1 - 2z\cos\theta + z^2}. \end{cases}$$

En vertu de la formule (7), le premier membre de l'équation (8) peut

être présenté sous la forme suivante :

$$(1 + z\cos\theta + z^2\cos 2\theta + \ldots) + (z\sin\theta + z^2\sin 2\theta + \ldots)\sqrt{-1}.$$

On aura donc, pour des valeurs numériques de z inférieures à l'unité,

$$(9)\quad \begin{cases} (1 + z\cos\theta + z^2\cos 2\theta + \ldots) + (z\sin\theta + z^2\sin 2\theta + \ldots)\sqrt{-1} \\ \quad = \dfrac{1 - z\cos\theta}{1 - 2z\cos\theta + z^2} + \dfrac{z\sin\theta}{1 - 2z\cos\theta + z^2}\sqrt{-1}. \end{cases}$$

On en conclura

$$(10)\quad \begin{cases} 1 + z\cos\theta + z^2\cos 2\theta + z^3\cos 3\theta + \ldots = \dfrac{1 - z\cos\theta}{1 - 2z\cos\theta + z^2}, \\ \quad z\sin\theta + z^2\sin 2\theta + z^3\sin 3\theta + \ldots = \dfrac{z\sin\theta}{1 - 2z\cos\theta + z^2} \\ \qquad (z = -1,\ z = +1). \end{cases}$$

Ainsi la substitution d'une valeur imaginaire de x dans la progression géométrique

$$1,\quad x,\quad x^2,\quad \ldots,\quad x^n,\quad \ldots$$

suffit pour conduire à la sommation des deux séries

$$(11)\quad \begin{cases} 1,\quad z\cos\theta,\quad z^2\cos 2\theta,\quad \ldots,\quad z^n\cos n\theta,\quad \ldots, \\ \quad z\sin\theta,\quad z^2\sin 2\theta,\quad \ldots,\quad z^n\sin n\theta,\quad \ldots \end{cases}$$

toutes les fois que la variable z reste comprise entre les limites

$$z = -1,\qquad z = +1,$$

c'est-à-dire toutes les fois que ces deux séries sont convergentes.

Les premiers membres des équations (10) étant (en vertu du théorème I, Chapitre VI, § I) fonctions continues de la variable z, dans le voisinage de toute valeur particulière comprise entre les limites

$$z = -1,\qquad z = +1,$$

le premier membre de l'équation (9) sera lui-même, dans le voisinage d'une semblable valeur, fonction continue de z. Or, ce premier membre n'est autre chose que la somme de la série (5), dont les différents termes restent fonctions continues de z entre des limites quelconques. En généralisant la remarque qu'on vient de faire, on obtient la proposition suivante :

Théorème I. — *Lorsque les différents termes de la série* (3) *sont des fonctions d'une même variable z, continues par rapport à cette variable dans le voisinage d'une valeur particulière pour laquelle cette série est convergente, la somme s de la série est aussi, dans le voisinage de cette valeur particulière, fonction continue de z.*

Démonstration. — En effet, dans le voisinage de la valeur particulière attribuée à la variable z, la série (3) ne peut être convergente et avoir pour ses différents termes des fonctions continues de z, qu'autant que les séries réelles (1) et (2) jouissent l'une et l'autre des mêmes propriétés : or, dans cette hypothèse, chacune des sommes

$$p_0 + p_1 + p_2 + \ldots,$$
$$q_0 + q_1 + q_2 + \ldots$$

étant (en vertu du théorème I, Chapitre VI, § I) fonction continue de la variable z, il en résulte que la somme de la série (3), savoir

$$s = (p_0 + p_1 + p_2 + \ldots) + (q_0 + q_1 + q_2 + \ldots)\sqrt{-1}$$

sera aussi fonction continue de cette variable.

Supposons maintenant que l'on désigne par

$$\rho_0, \quad \rho_1, \quad \rho_2, \quad \ldots$$

les modules des différents termes de la série (3), et par

$$\cos\theta_0 + \sqrt{-1}\sin\theta_0, \quad \cos\theta_1 + \sqrt{-1}\sin\theta_1, \quad \cos\theta_2 + \sqrt{-1}\sin\theta_2, \quad \ldots$$

les expressions réduites correspondantes, en sorte qu'on ait généralement

$$\rho_n = (p_n^2 + q_n^2)^{\frac{1}{2}},$$
$$p_n + q_n\sqrt{-1} = \rho_n(\cos\theta_n + \sqrt{-1}\sin\theta_n).$$

La série (3) deviendra

$$(12) \qquad \left\{\begin{array}{l} \rho_0(\cos\theta_0 + \sqrt{-1}\sin\theta_0), \\ \rho_1(\cos\theta_1 + \sqrt{-1}\sin\theta_1), \\ \rho_2(\cos\theta_2 + \sqrt{-1}\sin\theta_2), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \rho_n(\cos\theta_n + \sqrt{-1}\sin\theta_n), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{array}\right.$$

et l'on pourra ordinairement décider si cette série est convergente ou divergente, à l'aide du théorème que je vais énoncer.

Théorème II. — *Cherchez la limite ou les limites vers lesquelles converge, tandis que n croît indéfiniment, l'expression $(\rho_n)^{\frac{1}{n}}$. Suivant que la plus grande de ces limites sera inférieure ou supérieure à l'unité, la série* (3) *sera convergente ou divergente.*

Démonstration. — Considérons d'abord le cas où les plus grandes valeurs de l'expression $(\rho_n)^{\frac{1}{n}}$ convergent, tandis que n croît indéfiniment, vers une limite inférieure à l'unité. Dans ce cas, la série

$$(13) \qquad \rho_0, \quad \rho_1, \quad \rho_2, \quad \ldots, \quad \rho_n, \quad \ldots$$

étant convergente (Chapitre VI, § II, théorème I), les séries

$$(14) \qquad \left\{\begin{array}{l} \rho_0\cos\theta_0, \quad \rho_1\cos\theta_1, \quad \rho_2\cos\theta_2, \quad \ldots, \quad \rho_n\cos\theta_n, \quad \ldots, \\ \rho_0\sin\theta_0, \quad \rho_1\sin\theta_1, \quad \rho_2\sin\theta_2, \quad \ldots, \quad \rho_n\sin\theta_n, \quad \ldots \end{array}\right.$$

le seront également (Chapitre VI, § III, théorème IV), et la convergence de ces dernières entrainera celle de la série (12), qui n'est que la série (3) présentée sous une autre forme.

Supposons en second lieu que, pour des valeurs croissantes de n, les plus grandes valeurs de $(\rho_n)^{\frac{1}{n}}$ convergent vers une limite supérieure à l'unité. Dans cette hypothèse, on prouvera, par un raisonnement semblable à celui que nous avons employé dans le Chapitre VI (§ II, théorème I), que les plus grandes valeurs du module

$$\rho_n = (p_n^2 + q_n^2)^{\frac{1}{2}}$$

croissent avec n au delà de toute limite, ce qui ne peut être vrai qu'autant que les plus grandes valeurs des deux quantités p_n, q_n, ou au moins de l'une d'elles, croissent de même indéfiniment. Or, comme ces deux quantités sont les termes généraux des séries (1) et (2), on doit conclure que, de ces deux séries, l'une au moins est divergente, ce qui suffit pour assurer la divergence de la série (3).

Scolie I. — Le théorème qu'on vient d'établir ne laisse d'incertitude sur la convergence ou la divergence d'une série imaginaire que dans le cas particulier où la limite des plus grandes valeurs de $(\rho_n)^{\frac{1}{n}}$ devient égale à l'unité. Dans ce cas particulier, il n'est pas toujours facile de décider la question. Toutefois on peut affirmer que, si la série (13) est convergente, les séries (14), et par suite la série (12), le seront pareillement. La réciproque n'est pas vraie, et il pourrait arriver que, la série (12) restant convergente, la série (13) fût divergente. Ainsi, par exemple, si l'on suppose

$$\rho_n = \frac{1}{n+1}, \qquad \theta_n = \left(n+\frac{1}{2}\right)\pi,$$

on obtiendra, à la place des séries (12) et (13), les deux suivantes

$$\sqrt{-1}, \quad -\frac{1}{2}\sqrt{-1}, \quad +\frac{1}{3}\sqrt{-1}, \quad -\frac{1}{4}\sqrt{-1}, \quad \ldots,$$
$$1, \quad \frac{1}{2}, \quad \frac{1}{3}, \quad \frac{1}{4}, \quad \ldots,$$

dont la seconde est divergente, tandis que la première reste convergente et a pour somme

$$\sqrt{-1}\, l(2),$$

l désignant la caractéristique des logarithmes népériens.

Scolie II. — Lorsque, pour des valeurs croissantes de n, le rapport

$$\frac{\rho_{n+1}}{\rho_n}$$

s'approche indéfiniment d'une limite fixe, cette limite est également

celle vers laquelle convergent les plus grandes valeurs de l'expression $(\rho_n)^{\frac{1}{n}}$.

Le théorème V du § III (Chapitre VI) est évidemment applicable aux séries imaginaires aussi bien qu'aux séries réelles. Quant au théorème VI du même paragraphe, on doit, lorsqu'il est question des séries imaginaires, le remplacer par le suivant :

THÉORÈME III. — *Soient*

$$(15) \qquad \begin{cases} u_0, & u_1, & u_2, & \ldots, & u_n, & \ldots, \\ v_0, & v_1, & v_2, & \ldots, & v_n, & \ldots \end{cases}$$

deux séries convergentes, mais imaginaires, qui aient respectivement pour sommes s et s'. Si chacune de ces séries reste convergente lorsqu'on réduit ses différents termes à leurs modules respectifs,

$$(16) \qquad \begin{cases} u_0v_0, \quad u_0v_1+u_1v_0, \quad u_0v_2+u_1v_1+u_2v_0, \quad \ldots, \\ \ldots, \quad u_0v_n+u_1v_{n-1}+\ldots+u_{n-1}v_1+u_nv_0, \quad \ldots \end{cases}$$

sera une nouvelle série convergente imaginaire, qui aura pour somme ss'.

Démonstration. — Désignons respectivement par s_n, s'_n les sommes des n premiers termes des deux séries (15), et par s''_n la somme des n premiers termes de la série (16). On trouvera

$$s_n s'_n - s''_n = u_{n-1}v_{n-1} + (u_{n-1}v_{n-2} + u_{n-2}v_{n-1}) + \ldots$$
$$+ (u_{n-1}v_1 + u_{n-2}v_2 + \ldots + u_2v_{n-2} + u_1v_{n-1}).$$

Désignons encore par ρ_n et ρ'_n les modules des expressions imaginaires u_n et v_n, en sorte que ces expressions soient déterminées par des équations de la forme

$$u_n = \rho_n(\cos\theta_n + \sqrt{-1}\sin\theta_n),$$
$$v_n = \rho'_n(\cos\theta'_n + \sqrt{-1}\sin\theta'_n).$$

Les séries réelles

$$\rho_0, \quad \rho_1, \quad \rho_2, \quad \ldots, \quad \rho_n, \quad \ldots,$$
$$\rho'_0, \quad \rho'_1, \quad \rho'_2, \quad \ldots, \quad \rho'_n, \quad \ldots$$

étant convergentes par hypothèse, on en conclura, comme dans le Chapitre VI (§ III, théorème VI), que la somme

$$\begin{aligned}&\rho_{n-1}\rho'_{n-1}+(\rho_{n-1}\rho'_{n-2}+\rho_{n-2}\rho'_{n-1})+\ldots\\&\quad+(\rho_{n-1}\rho'_1+\rho_{n-2}\rho'_2+\ldots+\rho_2\rho'_{n-2}+\rho_1\rho'_{n-1})\end{aligned}$$

converge, pour des valeurs croissantes de n, vers la limite zéro. Il en sera de même *a fortiori* des deux sommes

$$\begin{aligned}&\rho_{n-1}\rho'_{n-1}\cos(\theta_{n-1}+\theta'_{n-1})\\&\quad+[\rho_{n-1}\rho'_{n-2}\cos(\theta_{n-1}+\theta'_{n-2})+\rho_{n-2}\rho'_{n-1}\cos(\theta_{n-2}+\theta'_{n-1})]\\&\quad+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\&\quad+[\rho_{n-1}\rho'_1\cos(\theta_{n-1}+\theta'_1)+\rho_{n-2}\rho'_2\cos(\theta_{n-2}+\theta'_2)+\ldots\\&\qquad+\rho_2\rho'_{n-2}\cos(\theta_2+\theta'_{n-2})+\rho_1\rho'_{n-1}\cos(\theta_1+\theta'_{n-1})]\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}&\rho_{n-1}\rho'_{n-1}\sin(\theta_{n-1}+\theta'_{n-1})\\&\quad+[\rho_{n-1}\rho'_{n-2}\sin(\theta_{n-1}+\theta'_{n-2})+\rho_{n-2}\rho'_{n-1}\sin(\theta_{n-2}+\theta'_{n-1})]\\&\quad+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\&\quad+[\rho_{n-1}\rho'_1\sin(\theta_{n-1}+\theta'_1)+\rho_{n-2}\rho'_2\sin(\theta_{n-2}+\theta'_2)+\ldots\\&\qquad+\rho_2\rho'_{n-2}\sin(\theta_2+\theta'_{n-2})+\rho_1\rho'_{n-1}\sin(\theta_1+\theta'_{n-1})],\end{aligned}$$

dont la première représente évidemment la partie réelle de l'expression imaginaire

$$s_n s'_n - s''_n,$$

tandis que la seconde représente le coefficient de $\sqrt{-1}$ dans cette expression. Par suite, $s_n s'_n - s''_n$ convergera aussi, pour des valeurs croissantes de n, vers la limite zéro; et, comme $s_n s'_n$ s'approche indéfiniment de la limite ss', il faudra de toute nécessité que l'expression s''_n, c'est-à-dire la somme des n premiers termes de la série (16), s'approche elle-même indéfiniment de cette dernière limite. Il en résulte : 1° que la série (16) est convergente; 2° que cette série convergente a pour somme ss'.

§ II. — *Des séries imaginaires ordonnées suivant les puissances ascendantes et entières d'une variable.*

Soit x une variable imaginaire. Toute série imaginaire ordonnée suivant les puissances ascendantes et entières de la variable x sera de la forme

$$\begin{aligned}&a_0+b_0\sqrt{-1},\quad (a_1+b_1\sqrt{-1})x,\quad (a_2+b_2\sqrt{-1})x^2,\quad \ldots,\\&\qquad\ldots,\quad (a_n+b_n\sqrt{-1})x^n,\quad \ldots,\end{aligned}$$

$a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots, b_0, b_1, b_2, \ldots, b_n, \ldots$ désignant deux suites de quantités constantes. Dans le cas où les constantes de la seconde suite s'évanouissent, la série précédente se réduit à

$$(1)\qquad a_0,\quad a_1x,\quad a_2x^2,\quad \ldots,\quad a_nx^n,\quad \ldots.$$

Nous considérerons en particulier dans ce paragraphe les séries de cette dernière espèce. Si, pour plus de commodité, on pose

$$(2)\qquad x = z(\cos\theta+\sqrt{-1}\sin\theta),$$

z désignant une variable réelle et θ un arc réel, la série (1) deviendra

$$(3)\quad \begin{cases} a_0,\quad a_1z(\cos\theta+\sqrt{-1}\sin\theta),\quad a_2z^2(\cos2\theta+\sqrt{-1}\sin2\theta),\quad \ldots,\\ \qquad\ldots,\quad a_nz^n(\cos n\theta+\sqrt{-1}\sin n\theta),\quad \ldots.\end{cases}$$

Soit maintenant, comme dans le Chapitre VI (§ IV), A la plus grande des limites vers lesquelles converge, tandis que n croît indéfiniment, la racine $n^{\text{ième}}$ de la valeur numérique de a_n. La plus grande des limites vers lesquelles convergera dans la même hypothèse la racine $n^{\text{ième}}$ du module de l'expression imaginaire

$$a_nx^n = a_nz^n(\cos n\theta+\sqrt{-1}\sin n\theta)$$

sera équivalente à la valeur numérique du produit

$$Az;$$

et en conséquence (*voir* ci-dessus le § I, théorème II) la série (3) sera convergente ou divergente suivant que le produit Az aura une valeur numérique inférieure ou supérieure à l'unité. On déduit immédiatement de cette remarque la proposition suivante :

Théorème I. — *La série* (3) *est convergente pour toutes les valeurs de* z *comprises entre les limites*

$$z = -\frac{1}{A}, \qquad z = +\frac{1}{A},$$

et divergente pour toutes les valeurs de z *situées hors des mêmes limites. En d'autres termes, la série* (1) *est convergente ou divergente suivant que le module de l'expression imaginaire* x *est inférieur ou supérieur à* $\frac{1}{A}$.

Scolie. — Lorsque la valeur numérique du rapport $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ converge, pour des valeurs croissantes de n, vers une limite fixe, cette limite est précisément la valeur de la quantité positive désignée par A.

Corollaire I. — En comparant le théorème précédent au théorème I du Chapitre VI (§ IV), on reconnaîtra que, si la série (1) est convergente pour une certaine valeur réelle de la variable x, elle demeurera convergente pour toute valeur imaginaire dont cette valeur réelle serait, au signe près, le module. Par suite, si la série (1) est convergente pour toutes les valeurs réelles de la variable x, elle restera convergente, quelle que soit la valeur imaginaire que l'on attribue à cette variable.

Corollaire II. — Pour appliquer le théorème I et le précédent corollaire, considérons les quatre séries

$$(4)\qquad 1,\quad x,\quad x^2,\quad \ldots,\quad x^n,\quad \ldots,$$

$$(5)\qquad 1,\quad \frac{\mu}{1}x,\quad \frac{\mu(\mu-1)}{1.2}x^2,\quad \ldots,\quad \frac{\mu(\mu-1)\ldots(\mu-n+1)}{1.2.3\ldots n}x^n,\quad \ldots,$$

$$(6)\qquad 1,\quad \frac{x}{1},\quad \frac{x^2}{1.2},\quad \ldots,\quad \frac{x^n}{1.2.3\ldots n},\quad \ldots,$$

$$(7)\qquad x,\quad -\frac{x^2}{2},\quad \ldots,\quad \pm\frac{x^n}{n},\quad \ldots,$$

μ désignant dans la seconde une quantité quelconque. De ces quatre séries les deux premières, ainsi que la dernière, restent convergentes pour toutes les valeurs réelles de x comprises entre les limites

$$x = -1, \qquad x = +1,$$

et la troisième pour des valeurs réelles quelconques de la variable x. Mais si, au lieu d'attribuer à x une valeur réelle, on suppose

$$x = z(\cos\theta + \sqrt{-1}\sin\theta),$$

à la place de ces quatre séries, on obtiendra les suivantes

$$(8)\quad \begin{cases} 1,\quad z(\cos\theta+\sqrt{-1}\sin\theta),\quad z^2(\cos 2\theta+\sqrt{-1}\sin 2\theta),\quad \ldots, \\ \qquad \ldots,\quad z^n(\cos n\theta+\sqrt{-1}\sin n\theta),\quad \ldots; \end{cases}$$

$$(9)\quad \begin{cases} 1,\quad \frac{\mu}{1}z(\cos\theta+\sqrt{-1}\sin\theta),\quad \frac{\mu(\mu-1)}{1.2}z^2(\cos 2\theta+\sqrt{-1}\sin 2\theta),\quad \ldots, \\ \qquad \ldots,\quad \frac{\mu(\mu-1)\ldots(\mu-n+1)}{1.2.3\ldots n}z^n(\cos n\theta+\sqrt{-1}\sin n\theta),\quad \ldots; \end{cases}$$

$$(10)\quad \begin{cases} 1,\quad \frac{z(\cos\theta+\sqrt{-1}\sin\theta)}{1},\quad \frac{z^2(\cos 2\theta+\sqrt{-1}\sin 2\theta)}{1.2},\quad \ldots, \\ \qquad \ldots,\quad \frac{z^n(\cos n\theta+\sqrt{-1}\sin n\theta)}{1.2.3\ldots n},\quad \ldots; \end{cases}$$

$$(11)\quad \begin{cases} \frac{z(\cos\theta+\sqrt{-1}\sin\theta)}{1},\quad -\frac{z^2(\cos 2\theta+\sqrt{-1}\sin 2\theta)}{2},\quad \ldots, \\ \qquad \ldots,\quad \pm\frac{z^n(\cos n\theta+\sqrt{-1}\sin n\theta)}{n},\quad \ldots \end{cases}$$

dont les deux premières et la dernière resteront convergentes pour toutes les valeurs de z comprises entre les limites

$$z = -1, \qquad z = +1;$$

tandis que l'avant-dernière sera toujours convergente, quelle que soit la valeur réelle de z.

Après avoir fixé les limites entre lesquelles il faut renfermer z pour rendre la série (3) convergente, nous ferons remarquer que, en vertu des principes établis dans le paragraphe précédent, les théorèmes III, IV et V du Chapitre VI (§ IV), avec leurs corollaires, peuvent être étendus au cas où la variable x devient imaginaire. On devra seulement admettre, dans l'énoncé du théorème IV, que chacune des séries

$$a_0, \quad a_1 x, \quad a_2 x^2, \quad \ldots;$$
$$b_0, \quad b_1 x, \quad b_2 x^2, \quad \ldots$$

reste convergente lorsqu'on réduit ses différents termes non plus à leurs valeurs numériques, mais à leurs modules respectifs. Cela posé, si l'on désigne par $\varpi(\mu)$ ce que devient le second membre de l'équation (15) (Chapitre VI, § IV), lorsqu'on attribue à x la valeur imaginaire

$$z(\cos\theta + \sqrt{-1}\sin\theta),$$

ou, en d'autres termes, si l'on fait

$$(12) \quad \varpi(\mu) = 1 + \frac{\mu}{1} z(\cos\theta + \sqrt{-1}\sin\theta) + \frac{\mu(\mu-1)}{1.2} z^2(\cos 2\theta + \sqrt{-1}\sin 2\theta) + \ldots,$$

on trouvera, au lieu de la formule (16) (Chapitre VI, § IV), la suivante :

$$(13) \qquad \varpi(\mu)\varpi(\mu') = \varpi(\mu + \mu').$$

Il est essentiel de remarquer que cette dernière formule subsistera uniquement pour les valeurs de z comprises entre les limites $z = -1$, $z = +1$, et qu'entre ces limites la fonction imaginaire $\varpi(\mu)$, c'est-à-dire la somme de la série (9), sera en même temps continue par rapport à z et par rapport à μ (*voir* ci-dessus le § I, théorème I).

Concevons à présent qu'au lieu de la série (9) on considère généralement la série (3), et que dans cette dernière on fasse varier la valeur de z par degrés insensibles. Tant que la série (3) sera convergente, c'est-à-dire tant que la valeur de z restera comprise entre les limites

$$-\frac{1}{A}, \quad +\frac{1}{A},$$

la somme de la série sera une fonction imaginaire continue de la variable z. Soit $\varpi(z)$ cette fonction continue. L'équation

$$\varpi(z) = a_0 + a_1 z(\cos\theta + \sqrt{-1}\sin\theta) + a_2 z^2(\cos 2\theta + \sqrt{-1}\sin 2\theta) + \ldots$$

subsistera pour toutes les valeurs de z renfermées entre les limites $-\frac{1}{A}$, $+\frac{1}{A}$, ce que nous indiquerons en écrivant ces limites à côté de la série, comme on le voit ici :

$$(14) \quad \varpi(z) = a_0 + a_1 z(\cos\theta + \sqrt{-1}\sin\theta) + a_2 z^2(\cos 2\theta + \sqrt{-1}\sin 2\theta) + \ldots$$
$$\left(z = -\frac{1}{A}, \quad z = +\frac{1}{A}\right).$$

On doit observer que l'équation précédente équivaut toujours à deux équations réelles. En effet, si l'on pose

$$(15) \qquad \varpi(z) = \varphi(z) + \chi(z)\sqrt{-1},$$

$\varphi(z)$ et $\chi(z)$ désignant deux fonctions réelles, on tirera de l'équation (14)

$$(16) \quad \begin{cases} \varphi(z) = a_0 + a_1 z\cos\theta + a_2 z^2 \cos 2\theta + \ldots, \\ \chi(z) = \phantom{a_0 + {}} a_1 z \sin\theta + a_2 z^2 \sin 2\theta + \ldots \end{cases}$$
$$\left(z = -\frac{1}{A}, \quad z = +\frac{1}{A}\right).$$

Lorsque la série (3) est donnée, on peut quelquefois en déduire la valeur de la fonction $\varpi(x)$ sous forme finie, et c'est là ce qu'on appelle *sommer* la série. Nous avons déjà, dans le § I, résolu cette question pour la série (8). Nous allons maintenant chercher à la résoudre pour les séries (9), (10), (11); et, en conséquence, nous traiterons l'un après l'autre les trois problèmes qui suivent.

PROBLÈME I. — *Trouver la somme de la série*

$$(9) \quad 1, \quad \frac{\mu}{1} z(\cos\theta + \sqrt{-1}\sin\theta), \quad \frac{\mu(\mu-1)}{1.2} z^2(\cos 2\theta + \sqrt{-1}\sin 2\theta), \quad \ldots,$$

dans le cas où l'on attribue à la variable z une valeur comprise entre les limites

$$z = -1, \qquad z = +1.$$

Solution. — Soit $\varpi(\mu)$ la somme cherchée. En désignant par μ' une quantité réelle différente de μ, on trouvera

$$\varpi(\mu)\,\varpi(\mu') = \varpi(\mu+\mu'). \tag{13}$$

L'équation précédente, étant semblable à l'équation (2) du Chapitre VIII (§ V), se résoudra de la même manière; et l'on en conclura

$$\varpi(\mu) = r^{\mu}(\cos\mu t + \sqrt{-1}\sin\mu t),$$

le module r et l'angle t étant deux quantités constantes par rapport à μ, mais qui dépendent nécessairement de z et de θ. On aura donc, entre les limites $z=-1$, $z=+1$,

$$\left\{\begin{aligned} &1+\frac{\mu}{1}z(\cos\theta+\sqrt{-1}\sin\theta)+\frac{\mu(\mu-1)}{1.2}z^2(\cos2\theta+\sqrt{-1}\sin2\theta)+\ldots \\ &\quad = r^{\mu}(\cos\mu t+\sqrt{-1}\sin\mu t). \end{aligned}\right. \tag{17}$$

Pour déterminer les valeurs inconnues de r et de t, on fera, dans l'équation (17), $\mu = 1$, et l'on en tirera

$$1+z\cos\theta+z\sin\theta\sqrt{-1} = r\cos t + r\sin t\sqrt{-1}$$

ou, ce qui revient au même,

$$1+z\cos\theta = r\cos t,$$
$$z\sin\theta = r\sin t.$$

On trouvera par suite

$$r = (1+2z\cos\theta+z^2)^{\frac{1}{2}};$$

puis, en observant que $\cos t = \dfrac{1+z\cos\theta}{r}$ reste positif pour toute valeur numérique de z inférieure à l'unité, et désignant par k un nombre entier quelconque,

$$t = \operatorname{arc\,tang}\frac{z\sin\theta}{1+z\cos\theta} \pm 2k\pi.$$

Cela posé, si l'on fait, pour abréger,

$$s = \operatorname{arc\,tang}\frac{z\sin\theta}{1+z\cos\theta}, \tag{18}$$

l'équation (17) deviendra

$$\left\{\begin{aligned} &1+\frac{\mu}{1}z(\cos\theta+\sqrt{-1}\sin\theta)+\frac{\mu(\mu-1)}{1.2}z^2(\cos2\theta+\sqrt{-1}\sin2\theta)+\ldots \\ &\quad = (1+2z\cos\theta+z^2)^{\frac{1}{2}\mu}(\cos\mu t+\sqrt{-1}\sin\mu t) \end{aligned}\right. \tag{19}$$
$$(z=-1,\quad z=+1),$$

la valeur de t étant déterminée par la formule

$$t = s \pm 2k\pi, \tag{20}$$

dans laquelle le nombre entier k ne peut dépendre que des quantités z et θ.

Remarquons à présent que le premier membre de l'équation (19) est, entre les limites $z=-1$, $z=+1$, une fonction continue de z, qui varie avec z par degrés insensibles, quelle que soit la valeur de μ. Le second membre de l'équation devra donc jouir de la même propriété, ou, en d'autres termes, les quantités

$$(1+2z\cos\theta+z^2)^{\frac{\mu}{2}}\cos\mu t,$$
$$(1+2z\cos\theta+z^2)^{\frac{\mu}{2}}\sin\mu t$$

et, par conséquent, les suivantes

$$\cos\mu t,\quad \sin\mu t$$

devront varier avec z par degrés insensibles, pour toutes les valeurs possibles de μ. Or cette condition ne peut être remplie que dans le cas où t lui-même varie avec z par degrés insensibles. En effet, si un accroissement infiniment petit de z produisait un accroissement fini de t, de manière à changer t en $t+a$, a désignant une quantité finie, les cosinus et sinus des deux arcs

$$\mu t,\quad \mu(t+a)$$

ne pourraient demeurer sensiblement égaux, qu'autant que la valeur numérique du produit μa serait à très peu près un multiple de la circonférence, ce qui ne peut être vrai que pour des valeurs particulières du coefficient μ, et non pas généralement pour des valeurs finies quelconques de ce coefficient. On doit donc conclure que l'arc $t = s \pm 2k\pi$ est fonction continue de z; et, comme des deux quantités s, k, la première, déterminée par l'équation (18), varie avec z d'une manière continue entre les limites $z = -1$, $z = +1$, tandis que la seconde, assujettie à rester toujours entière, n'admet que des variations finies d'une ou de plusieurs unités, il est clair que, pour satisfaire à la condition énoncée, la quantité s devra varier toute seule, et la quantité k demeurer constante. Cette dernière quantité sera donc indépendante de z, et, pour en connaître la valeur dans tous les cas possibles, il suffira de la chercher en supposant $z = 0$. Comme on a, dans cette hypothèse, $s = 0$, $t = \pm 2k\pi$, on tirera de l'équation (19)

$$1 = \cos(2k\mu\pi) \pm \sqrt{-1}\sin(2k\mu\pi),$$

quelle que soit la valeur de μ, et par suite

$$k = 0.$$

Cela posé, la formule (20) donnera généralement

$$t = s,$$

et l'équation (19) se trouvera réduite à

$$(21)\quad \left\{\begin{aligned} &1 + \frac{\mu}{1} z(\cos\theta + \sqrt{-1}\sin\theta) + \frac{\mu(\mu-1)}{1.2} z^2(\cos 2\theta + \sqrt{-1}\sin 2\theta) + \ldots \\ &\quad = (1 + 2z\cos\theta + z^2)^{\frac{1}{2}\mu}(\cos\mu s + \sqrt{-1}\sin\mu s), \end{aligned}\right.$$

$$(z = -1, \quad z = +1).$$

De plus, si l'on a égard à la formule (27) du Chapitre VII (§ IV), on reconnaîtra facilement que le second membre de l'équation (21) peut être représenté par la notation

$$[1 + z(\cos\theta + \sqrt{-1}\sin\theta)]^\mu.$$

On aura donc, en supposant toujours la valeur de z comprise entre les

limites -1 et $+1$,

$$(22)\quad \left\{\begin{aligned} &1 + \frac{\mu}{1} z(\cos\theta + \sqrt{-1}\sin\theta) + \frac{\mu(\mu-1)}{1.2} z^2(\cos 2\theta + \sqrt{-1}\sin 2\theta) + \ldots \\ &\quad = [1 + z(\cos\theta + \sqrt{-1}\sin\theta)]^\mu \end{aligned}\right.$$

$$(z = -1, \quad z = +1).$$

En d'autres termes, l'équation (20) du Chapitre VI (§ IV), savoir

$$1 + \frac{\mu}{1} x + \frac{\mu(\mu-1)}{1.2} x^2 + \ldots = (1 + x)^\mu$$

subsistera, non seulement si l'on attribue à la variable x des valeurs réelles comprises entre les limites -1, $+1$, mais encore si l'on fait

$$x = z(\cos\theta + \sqrt{-1}\sin\theta),$$

la valeur numérique de z étant inférieure à l'unité.

Corollaire I. — La formule (21), comme toutes les équations imaginaires, équivaut à deux équations réelles, qu'on obtient en égalant de part et d'autre les parties réelles et les coefficients de $\sqrt{-1}$. On trouvera de cette manière

$$(23)\quad \left\{\begin{aligned} &1 + \frac{\mu}{1} z\cos\theta + \frac{\mu(\mu-1)}{1.2} z^2\cos 2\theta + \ldots = (1 + 2z\cos\theta + z^2)^{\frac{1}{2}\mu}\cos\mu s, \\ &\frac{\mu}{1} z\sin\theta + \frac{\mu(\mu-1)}{1.2} z^2\sin 2\theta + \ldots = (1 + 2z\cos\theta + z^2)^{\frac{1}{2}\mu}\sin\mu s \end{aligned}\right.$$

$$(z = -1, \quad z = +1)$$

la valeur de s étant toujours déterminée par l'équation (18).

Corollaire II. — Si dans les formules (22) et (23) on pose $\mu = -1$, et que l'on y remplace z par $-z$, on obtiendra les équations (8) et (10) du § I.

Corollaire III. — Si l'on pose $\theta = \frac{\pi}{2}$ ou, ce qui revient au même,

$$\cos\theta = 0, \qquad \sin\theta = 1,$$

la valeur de s, donnée par la formule (18), deviendra

$$s = \operatorname{arc\,tang} z,$$

et restera comprise entre les limites $-\frac{\pi}{4}$, $+\frac{\pi}{4}$ pour toute valeur numérique de z inférieure à l'unité. Dans la même hypothèse, on aura évidemment

$$z = \operatorname{tang} s = \frac{\sin s}{\cos s},$$

$$(1 + 2z\cos\theta + z^2)^{\frac{\mu}{2}} = (\operatorname{séc} s)^\mu = \frac{1}{(\cos s)^\mu},$$

et l'on tirera des équations (23), mais seulement pour les valeurs de s comprises entre les limites dont il s'agit,

$$(24)\quad \left\{\begin{aligned} \cos\mu s &= \cos^\mu s - \frac{\mu(\mu-1)}{1.2}\cos^{\mu-2}s\sin^2 s \\ &\quad + \frac{\mu(\mu-1)(\mu-2)(\mu-3)}{1.2.3.4}\cos^{\mu-4}s\sin^4 s - \ldots, \\ \sin\mu s &= \frac{\mu}{1}\cos^{\mu-1}s\sin s - \frac{\mu(\mu-1)(\mu-2)}{1.2.3}\cos^{\mu-3}s\sin^3 s + \ldots \end{aligned}\right.$$

$$\left(s = -\frac{\pi}{4},\quad s = +\frac{\pi}{4}\right).$$

Par conséquent, si dans les formules (12) du Chapitre VII (§ II) on remplace le nombre entier m par une quantité quelconque μ, ces formules, qui avaient lieu pour toutes les valeurs réelles possibles de l'arc z, ne seront plus vraies généralement que pour des valeurs numériques de cet arc inférieures à $\frac{\pi}{4}$.

Problème II. — *Trouver la somme de la série*

$$(10)\quad 1,\quad \frac{z}{1}(\cos\theta + \sqrt{-1}\sin\theta),\quad \frac{z^2}{1.2}(\cos 2\theta + \sqrt{-1}\sin 2\theta),\quad \ldots,$$

quelle que soit la valeur numérique de z.

Solution. — Si dans les équations (18) et (21) on remplace z par αz et μ par $\frac{1}{\alpha}$, α désignant une quantité infiniment petite, on trouvera,

pour toutes les valeurs de αz comprises entre les limites -1, $+1$, ou, ce qui revient au même, pour toutes les valeurs de z comprises entre les limites $-\frac{1}{\alpha}$, $+\frac{1}{\alpha}$,

$$(25)\quad \left\{\begin{aligned} &1 + \frac{z}{1}(\cos\theta + \sqrt{-1}\sin\theta) + \frac{z^2}{1.2}(\cos 2\theta + \sqrt{-1}\sin 2\theta)(1-\alpha) \\ &\qquad + \frac{z^3}{1.2.3}(\cos 3\theta + \sqrt{-1}\sin 3\theta)(1-\alpha)(1-2\alpha) + \ldots \\ &= (1 + 2\alpha z\cos\theta + \alpha^2 z^2)^{\frac{1}{2\alpha}}\left(\cos\frac{s}{\alpha} + \sqrt{-1}\sin\frac{s}{\alpha}\right) \end{aligned}\right.$$

$$\left(z = -\frac{1}{\alpha},\quad z = +\frac{1}{\alpha}\right),$$

l'arc s étant déterminé par la formule

$$(26)\qquad s = \operatorname{arc\,tang}\frac{\alpha z\sin\theta}{1 + \alpha z\cos\theta}.$$

Si maintenant on fait décroître indéfiniment dans l'équation (25) la valeur numérique de α, on trouvera, en passant aux limites,

$$(27)\quad \left\{\begin{aligned} &1 + \frac{z}{1}(\cos\theta + \sqrt{-1}\sin\theta) + \frac{z^2}{1.2}(\cos 2\theta + \sqrt{-1}\sin 2\theta) \\ &\qquad + \frac{z^3}{1.2.3}(\cos 3\theta + \sqrt{-1}\sin 3\theta) + \ldots \\ &= \lim\left[(1 + 2\alpha z\cos\theta + \alpha^2 z^2)^{\frac{1}{2\alpha}}\left(\cos\frac{s}{\alpha} + \sqrt{-1}\sin\frac{s}{\alpha}\right)\right] \end{aligned}\right.$$

$$(z = -\infty,\quad z = +\infty).$$

Il reste à chercher la limite du produit

$$(1 + 2\alpha z\cos\theta + \alpha^2 z^2)^{\frac{1}{2\alpha}}\left(\cos\frac{s}{\alpha} + \sqrt{-1}\sin\frac{s}{\alpha}\right),$$

et, par conséquent, celle de chacune des quantités

$$(1 + 2\alpha z\cos\theta + \alpha^2 z^2)^{\frac{1}{2\alpha}},\quad \frac{s}{\alpha}.$$

Or, en premier lieu, si l'on fait

$$2\alpha z\cos\theta + \alpha^2 z^2 = \varepsilon,$$

on en conclura

$$(1+2\alpha z\cos\theta+\alpha^2 z^2)^{\frac{1}{2\alpha}}=(1+6)^{\frac{z\cos\theta+\frac{\alpha z^2}{2}}{6}}$$

et, par suite,

$$\lim(1+2\alpha z\cos\theta+\alpha^2 z^2)^{\frac{1}{2\alpha}}=\left[\lim(1+6)^{\frac{1}{6}}\right]^{\lim\left(z\cos\theta+\frac{\alpha z^2}{2}\right)}=e^{z\cos\theta}.$$

De plus, la valeur de s donnée par l'équation (26) étant infiniment petite, le rapport

$$\frac{s}{\operatorname{tang} s}=\frac{1}{\frac{\sin s}{s}}\cos s$$

aura pour limite l'unité; et, comme on tire de l'équation (26)

$$\frac{\operatorname{tang} s}{\alpha}=\frac{z\sin\theta}{1+\alpha z\cos\theta},$$

$$\frac{s}{\alpha}=\frac{s}{\operatorname{tang} s}\,\frac{z\sin\theta}{1+\alpha z\cos\theta},$$

on trouvera, en passant aux limites,

$$\lim\left(\frac{s}{\alpha}\right)=z\sin\theta.$$

Cela posé, il est clair que le second membre de l'équation (25) aura pour limite l'expression imaginaire

$$e^{z\cos\theta}\left[\cos(z\sin\theta)+\sqrt{-1}\sin(z\sin\theta)\right],$$

en sorte que la formule (27) deviendra

$$(28)\quad\begin{cases}1+\frac{z}{1}(\cos\theta+\sqrt{-1}\sin\theta)+\frac{z^2}{1.2}(\cos2\theta+\sqrt{-1}\sin2\theta)+\ldots\\ \quad=e^{z\cos\theta}\left[\cos(z\sin\theta)+\sqrt{-1}\sin(z\sin\theta)\right]\end{cases}$$

$$(z=-\infty,\quad z=+\infty),$$

la valeur de la variable réelle z étant complètement arbitraire, puisqu'elle peut être choisie à volonté entre les valeurs extrêmes $z=-\infty$, $z=+\infty$.

Corollaire I. — Si, en comparant les deux membres de l'équation (28), on égale de part et d'autre : 1° les parties réelles; 2° les coefficients de $\sqrt{-1}$, on obtiendra les deux équations réelles

$$(29)\quad\begin{cases}1+\frac{z}{1}\cos\theta+\frac{z^2}{1.2}\cos2\theta+\ldots=e^{z\cos\theta}\cos(z\sin\theta),\\ \quad\frac{z}{1}\sin\theta+\frac{z^2}{1.2}\sin2\theta+\ldots=e^{z\cos\theta}\sin(z\sin\theta)\end{cases}$$

$$(z=-\infty,\quad z=+\infty).$$

Corollaire II. — Si l'on suppose $\theta=\frac{\pi}{2}$ ou, ce qui revient au même,

$$\cos\theta=0,\qquad\sin\theta=1,$$

les équations (29) deviendront

$$(30)\quad\begin{cases}1-\frac{z^2}{1.2}+\frac{z^4}{1.2.3.4}-\ldots=\cos z,\\ \frac{z}{1}-\frac{z^3}{1.2.3}+\ldots=\sin z\end{cases}$$

$$(z=-\infty,\quad z=+\infty).$$

Ces dernières subsistant, aussi bien que les équations (29), pour des valeurs réelles quelconques de z, il en résulte que les fonctions $\sin z$ et $\cos z$ sont toujours développables en séries ordonnées suivant les puissances ascendantes de la variable qu'elles renferment. Comme cette proposition mérite d'être remarquée, je vais la démontrer ici directement.

La série

$$1,\quad\frac{x}{1},\quad\frac{x^2}{1.2},\quad\ldots,$$

étant convergente pour toutes les valeurs réelles possibles de la variable x, restera convergente (en vertu du théorème I, corollaire I) pour des valeurs imaginaires quelconques de cette même variable. Si l'on multiplie la somme de cette série par la somme de la série semblable

$$1,\quad \frac{y}{1},\quad \frac{y^2}{1.2},\quad \ldots,$$

en ayant égard à la fois au théorème III du § I et à la formule (6) du Chapitre VIII (§ IV), on trouvera, pour toutes les valeurs possibles réelles ou imaginaires attribuées à x et à y,

$$(31)\quad \left\{\begin{aligned} &\left(1+\frac{x}{1}+\frac{x^2}{1.2}+\ldots\right)\left(1+\frac{y}{1}+\frac{y^2}{1.2}+\ldots\right)\\ &\quad = 1+\frac{x+y}{1}+\frac{(x+y)^2}{1.2}+\ldots.\end{aligned}\right.$$

Lorsque, dans l'équation qui précède, on remplace x par $x\sqrt{-1}$ et y par $y\sqrt{-1}$, on obtient la suivante

$$(32)\quad \left\{\begin{aligned} &\left(1+\frac{x\sqrt{-1}}{1}-\frac{x^2}{1.2}-\frac{x^3\sqrt{-1}}{1.2.3}+\ldots\right)\left(1+\frac{y\sqrt{-1}}{1}-\frac{y^2}{1.2}-\frac{y^3\sqrt{-1}}{1.2.3}+\ldots\right)\\ &\quad = 1+\frac{(x+y)\sqrt{-1}}{1}-\frac{(x+y)^2}{1.2}-\ldots,\end{aligned}\right.$$

dans laquelle on pourra, si l'on veut, supposer réelles les variables x et y. Faisons, dans cette hypothèse,

$$\varpi(x) = 1+\frac{x\sqrt{-1}}{1}-\frac{x^2}{1.2}-\frac{x^3\sqrt{-1}}{1.2.3}+\ldots.$$

L'équation (32) deviendra

$$\varpi(x)\,\varpi(y) = \varpi(x+y);$$

et l'on en conclura [*voir* le Chapitre VIII, § V, équation (12)]

$$\varpi(x) = \mathrm{A}^x\left(\cos bx+\sqrt{-1}\sin bx\right)$$

ou, ce qui revient au même,

$$(33)\quad \left\{\begin{aligned} &1+\frac{x\sqrt{-1}}{1}-\frac{x^2}{1.2}-\frac{x^3\sqrt{-1}}{1.2.3}+\frac{x^4}{1.2.3.4}+\ldots\\ &\quad = \mathrm{A}^x\left(\cos bx+\sqrt{-1}\sin bx\right)\end{aligned}\right.$$
$$(x=-\infty,\quad x=+\infty),$$

les lettres A et b représentant deux constantes inconnues dont la première est nécessairement positive. On aura par suite

$$(34)\quad \left\{\begin{aligned} &1-\frac{x^2}{1.2}+\frac{x^4}{1.2.3.4}-\ldots = \mathrm{A}^x\cos bx,\\ &\frac{x}{1}-\frac{x^3}{1.2.3}+\ldots = \mathrm{A}^x\sin bx\end{aligned}\right.$$
$$(x=-\infty,\quad x=+\infty).$$

Pour déterminer les constantes inconnues A et b, il suffira d'observer : 1° que les formules (34) doivent subsister lorsqu'on y change x en $-x$, et que, pour remplir cette condition, il faut nécessairement supposer

$$\mathrm{A}^x = \mathrm{A}^{-x},$$

par conséquent

$$\mathrm{A} = 1;$$

2° que, si, après avoir divisé par x les deux membres de la seconde des formules (34), on fait converger la variable x vers la limite zéro, le premier membre convergera vers la limite 1, et le second membre, savoir

$$\mathrm{A}^x\frac{\sin bx}{x} = \mathrm{A}^x\frac{\sin bx}{bx}\times b,$$

vers la limite b; d'où résulte l'équation

$$b = 1.$$

Cela posé, les formules (33) et (34) deviendront respectivement

$$(35)\quad \left\{\begin{aligned} &1+\frac{x\sqrt{-1}}{1}-\frac{x^2}{1.2}-\frac{x^3\sqrt{-1}}{1.2.3}+\frac{x^4}{1.2.3.4}+\ldots\\ &\quad = \cos x+\sqrt{-1}\sin x\end{aligned}\right.$$
$$(x=-\infty,\quad x=+\infty);$$

$$(36)\quad \left\{\begin{aligned} &1-\frac{x^2}{1}+\frac{x^4}{1.2.3.4}-\ldots = \cos x,\\ &\frac{x}{1}-\frac{x^3}{1.2.3}+\ldots = \sin x\end{aligned}\right.$$
$$(x=-\infty,\quad x=+\infty).$$

Si dans les deux dernières on remplace la variable x par la variable z, on retrouvera les formules (30).

Il est essentiel d'observer que l'équation (35), lorsqu'on y suppose $x = z\sin\theta$, fournit le développement de

$$\cos(z\sin\theta) + \sqrt{-1}\sin(z\sin\theta)$$

suivant les puissances ascendantes de z. Si l'on multiplie ce développement par celui de

$$e^{z\cos\theta},$$

en ayant égard à la formule (31), qui subsiste pour toutes les valeurs réelles et imaginaires des variables qu'elle renferme, on obtiendra précisément l'équation (28).

Problème III. — *Trouver la somme de la série*

$$(11)\qquad \begin{cases} \frac{z}{1}(\cos\theta + \sqrt{-1}\sin\theta) - \frac{z^2}{2}(\cos 2\theta + \sqrt{-1}\sin 2\theta), \\ \quad + \frac{z^3}{3}(\cos 3\theta + \sqrt{-1}\sin 3\theta) - \ldots \end{cases}$$

dans le cas où l'on attribue à la variable z une valeur comprise entre les limites

$$z = -1, \qquad z = +1.$$

Solution. — Si l'on prend à l'ordinaire la lettre l pour la caractéristique des logarithmes népériens, on aura

$$(1 + 2z\cos\theta + z^2)^{\frac{1}{2}\mu} = e^{\frac{1}{2}\mu l(1 + 2z\cos\theta + z^2)},$$

et par suite l'équation (21) pourra être mise sous la forme

$$1 + \frac{\mu}{1} z(\cos\theta + \sqrt{-1}\sin\theta) + \frac{\mu(\mu-1)}{1.2} z^2(\cos 2\theta + \sqrt{-1}\sin 2\theta) + \ldots$$
$$= e^{\frac{1}{2}\mu l(1 + 2z\cos\theta + z^2)}(\cos\mu s + \sqrt{-1}\sin\mu s)$$
$$(z = -1, \quad z = +1),$$

la valeur de s étant toujours donnée par la formule (18). Si dans l'équation précédente on développe les deux facteurs du second membre en séries convergentes ordonnées suivant les puissances ascendantes de μ, puis, que l'on effectue le produit des deux développements à l'aide de la formule (31), on trouvera

$$1 + \frac{\mu}{1} z(\cos\theta + \sqrt{-1}\sin\theta) + \frac{\mu(\mu-1)}{1.2} z^2(\cos 2\theta + \sqrt{-1}\sin 2\theta) + \ldots$$
$$= 1 + \frac{\mu}{1}\left[\tfrac{1}{2} l(1 + 2z\cos\theta + z^2) + s\sqrt{-1}\right]$$
$$+ \frac{\mu^2}{1.2}\left[\tfrac{1}{2} l(1 + 2z\cos\theta + z^2) + s\sqrt{-1}\right]^2 + \ldots$$
$$(z = -1, \quad z = +1).$$

Enfin, si, après avoir retranché l'unité de chaque membre, puis divisé les deux membres par μ, on fait converger la quantité μ vers la limite zéro, on obtiendra l'équation

$$(37)\qquad \begin{cases} \frac{z}{1}(\cos\theta + \sqrt{-1}\sin\theta) - \frac{z^2}{2}(\cos 2\theta + \sqrt{-1}\sin 2\theta) + \ldots \\ \quad = \frac{1}{2} l(1 + 2z\cos\theta + z^2) + s\sqrt{-1} \end{cases}$$
$$(z = -1, \quad z = +1).$$

Corollaire I. — Si l'on égale, dans les deux membres de l'équation (37) : 1° les parties réelles; 2° les coefficients de $\sqrt{-1}$, et que l'on remette pour s sa valeur déterminée par la formule (18), on obtiendra les deux équations réelles

$$(38)\qquad \begin{cases} \frac{z}{1}\cos\theta - \frac{z^2}{2}\cos 2\theta + \frac{z^3}{3}\cos 3\theta - \ldots = \frac{1}{2} l(1 + 2z\cos\theta + z^2), \\ \frac{z}{1}\sin\theta - \frac{z^2}{2}\sin 2\theta + \frac{z^3}{3}\sin 3\theta - \ldots = \operatorname{arc\,tang}\frac{z\sin\theta}{1 + z\cos\theta} \end{cases}$$
$$(z = -1, \quad z = +1).$$

Corollaire II. — Si l'on suppose $\theta = \frac{\pi}{2}$ ou, ce qui revient au même,

$$\cos\theta = 0, \qquad \sin\theta = 1,$$

la seconde des équations (38) deviendra

$$(39) \qquad z - \frac{z^3}{3} + \frac{z^5}{5} - \ldots = \operatorname{arc\,tang} z \qquad (z = -1, \quad z = +1).$$

La série qui forme le premier membre de cette dernière équation étant convergente, non seulement pour toute valeur numérique de z inférieure à l'unité, mais aussi lorsqu'on suppose $z = 1$ (*voir* le Chapitre VI, § III, théorème III), il en résulte que l'équation subsistera dans cette dernière hypothèse; et, comme on a d'ailleurs

$$\operatorname{arc\,tang}(1) = \frac{\pi}{4},$$

on en conclura

$$(40) \qquad 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \ldots = \frac{\pi}{4}.$$

La formule (40) peut servir à calculer par approximation la valeur de π, c'est-à-dire le rapport de la circonférence au diamètre.

§ III. — *Notations employées pour représenter quelques fonctions imaginaires auxquelles on est conduit par la sommation des séries convergentes. Propriétés de ces mêmes fonctions.*

Considérons les six notations

$$A^x, \qquad \sin x, \qquad \cos x,$$
$$Lx, \quad \operatorname{arc\,sin} x, \quad \operatorname{arc\,cos} x.$$

Si l'on attribue à la variable x une valeur réelle, ces six notations représenteront, comme l'on sait, autant de fonctions réelles de x, qui, prises deux à deux, seront *inverses* l'une de l'autre, c'est-à-dire

données par des opérations inverses, pourvu toutefois que, A désignant un nombre, L exprime la caractéristique des logarithmes dans le système dont la base est A. Il reste à fixer le sens de ces mêmes notations, dans le cas où la variable x devient imaginaire. C'est ce que nous ferons ici, en commençant par les trois premières.

On a prouvé que, dans le cas où la variable x est supposée réelle, les trois fonctions représentées par

$$A^x, \quad \sin x, \quad \cos x$$

sont toujours développables en séries convergentes ordonnées suivant les puissances ascendantes et entières de cette variable. On aura, en effet, dans cette hypothèse,

$$(1) \qquad \begin{cases} A^x = 1 + \dfrac{x\,lA}{1} + \dfrac{x^2(lA)^2}{1.2} + \dfrac{x^3(lA)^3}{1.2.3} + \ldots, \\ \cos x = 1 - \dfrac{x^2}{1.2} + \dfrac{x^4}{1.2.3.4} - \ldots, \\ \sin x = \dfrac{x}{1} - \dfrac{x^3}{1.2.3} + \ldots, \end{cases}$$

la caractéristique l désignant un logarithme népérien. De plus, comme (en vertu du théorème I, corollaire I, § II) les séries qu'on vient de rappeler restent convergentes pour toutes les valeurs réelles ou imaginaires de la variable x, on est convenu d'étendre les équations (1) à tous les cas possibles, et de les considérer comme pouvant servir à fixer, lors même que la variable devient imaginaire, le sens des trois notations

$$A^x, \quad \sin x, \quad \cos x.$$

Observons maintenant que, si dans la première des équations (1) on fait

$$A = e,$$

e désignant la base des logarithmes népériens, on en tirera

$$(2) \qquad e^x = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} + \ldots;$$

puis, en écrivant successivement, au lieu de x, xlA, $x\sqrt{-1}$, $-x\sqrt{-1}$,

$$(3)\qquad \begin{cases} e^{xlA} = 1 + \dfrac{xlA}{1} + \dfrac{x^2(lA)^2}{1.2} + \dfrac{x^3(lA)^3}{1.2.3} + \ldots, \\ e^{x\sqrt{-1}} = 1 + \dfrac{x}{1}\sqrt{-1} - \dfrac{x^2}{1.2} - \dfrac{x^3}{1.2.3}\sqrt{-1} + \ldots, \\ e^{-x\sqrt{-1}} = 1 - \dfrac{x}{1}\sqrt{-1} - \dfrac{x^2}{1.2} + \dfrac{x^3}{1.2.3}\sqrt{-1} + \ldots. \end{cases}$$

On aura par suite

$$(4)\qquad \begin{cases} e^{xlA} = A^x, \\ e^{x\sqrt{-1}} = \cos x + \sqrt{-1}\sin x, \\ e^{-x\sqrt{-1}} = \cos x - \sqrt{-1}\sin x, \end{cases}$$

la variable x pouvant toujours être ou réelle, ou imaginaire. De plus, l'équation (31) (§ II) donnera, quels que soient x et y,

$$(5)\qquad e^x e^y = e^{x+y}.$$

Cela posé, il deviendra facile d'obtenir sous forme finie les valeurs de A^x, $\sin x$ et $\cos x$ correspondantes à des valeurs imaginaires de la variable x. En effet, si l'on suppose

$$(6)\qquad x = \alpha + 6\sqrt{-1},$$

α, 6 représentant des quantités réelles, on conclura des deux premières équations (4) jointes à l'équation (5)

$$(7)\quad A^x = e^{xlA} = e^{(\alpha+6\sqrt{-1})lA} = e^{\alpha lA}e^{6lA\sqrt{-1}} = A^\alpha(\cos 6\,lA + \sqrt{-1}\sin 6\,lA),$$

et des deux dernières équations (4)

$$(8)\qquad \begin{cases} \cos x = \dfrac{e^{x\sqrt{-1}} + e^{-x\sqrt{-1}}}{2}, \\ \sin x = \dfrac{e^{x\sqrt{-1}} - e^{-x\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}}; \end{cases}$$

puis, en remettant pour x sa valeur $\alpha + 6\sqrt{-1}$, et développant les

seconds membres,

$$(9)\qquad \begin{cases} \cos x = \dfrac{e^6 + e^{-6}}{2}\cos\alpha - \dfrac{e^6 - e^{-6}}{2}\sin\alpha\sqrt{-1}, \\ \sin x = \dfrac{e^6 + e^{-6}}{2}\sin\alpha + \dfrac{e^6 - e^{-6}}{2}\cos\alpha\sqrt{-1} \\ \qquad = \cos\left(\dfrac{\pi}{2} - \alpha - 6\sqrt{-1}\right). \end{cases}$$

Ainsi, dans l'hypothèse admise, les trois notations

$$A^x,\quad \sin x,\quad \cos x$$

désignent respectivement les trois expressions imaginaires

$$A^\alpha(\cos 6\,lA + \sqrt{-1}\sin 6\,lA),$$
$$\frac{e^6 + e^{-6}}{2}\sin\alpha + \frac{e^6 - e^{-6}}{2}\cos\alpha\sqrt{-1},$$
$$\frac{e^6 + e^{-6}}{2}\cos\alpha - \frac{e^6 - e^{-6}}{2}\sin\alpha\sqrt{-1}.$$

Dans la même hypothèse, si l'on fait

$$A = e,$$

l'équation (7) fournira pour la notation

$$e^x$$

la valeur suivante :

$$e^\alpha(\cos 6 + \sqrt{-1}\sin 6).$$

Les valeurs des trois fonctions

$$A^x,\quad \sin x,\quad \cos x$$

se trouvant fixées par ce qui précède, dans le cas où la variable x devient imaginaire, nous avons encore à chercher quelles définitions on doit donner, dans le même cas, des fonctions inverses

$$Lx,\quad \arcsin x,\quad \arccos x$$

ou plus généralement quel sens on doit alors attribuer aux notations

$$\mathrm{L}((x)),\quad \arcsin((x)),\quad \arccos((x)).$$

Supposons toujours

$$x=\alpha+6\sqrt{-1}=\rho(\cos\theta+\sqrt{-1}\sin\theta),$$

α, 6 désignant deux quantités réelles qui peuvent être remplacées par le module ρ et l'arc réel θ. Toute expression imaginaire $u+v\sqrt{-1}$ propre à vérifier l'équation

$$\mathrm{A}^{u+v\sqrt{-1}}=\alpha+6\sqrt{-1}=x \tag{10}$$

sera ce qu'on appelle un *logarithme imaginaire* de x pris dans le système dont la base est A. Comme l'équation (10) fournit, ainsi qu'on le verra ci-après, plusieurs valeurs de $u+v\sqrt{-1}$, dans le cas même où 6 se réduit à zéro, il en résulte que toute expression, soit imaginaire, soit réelle, a plusieurs logarithmes imaginaires. Lorsque l'on voudra désigner indistinctement un quelconque de ces logarithmes (parmi lesquels on doit comprendre le logarithme réel, s'il y en a), on emploiera la caractéristique L ou l suivie de doubles parenthèses, en ayant soin d'énoncer dans le discours la base du système. Nous choisirons de préférence la caractéristique l, lorsqu'il s'agira de logarithmes népériens pris dans le système dont la base est e. En vertu de ces conventions, les divers logarithmes des quantités réelles ou expressions imaginaires

$$1,\quad -1,\quad \alpha+6\sqrt{-1},\quad x$$

se trouveront respectivement désignés, dans le système dont la base est A, par

$$\mathrm{L}((1)),\quad \mathrm{L}((-1)),\quad \mathrm{L}((\alpha+6\sqrt{-1})),\quad \mathrm{L}((x))$$

et, dans le système népérien dont la base est e, par

$$l((1)),\quad l((-1)),\quad l((\alpha+6\sqrt{-1})),\quad l((x)).$$

Cela posé, pour déterminer ces divers logarithmes, il suffira de résoudre les problèmes suivants.

PROBLÈME I. — *Trouver les diverses valeurs réelles ou imaginaires de l'expression*

$$l((1)).$$

Solution. — Soit $u+v\sqrt{-1}$ l'une de ces valeurs, u, v désignant deux quantités réelles. On aura, d'après la définition même de l'expression $l((1))$,

$$e^{u+v\sqrt{-1}}=1 \tag{11}$$

ou, ce qui revient au même,

$$e^{u}(\cos v+\sqrt{-1}\sin v)=1.$$

On tirera de cette dernière équation

$$e^{u}=1,$$

$$\cos v+\sqrt{-1}\sin v=1$$

et, par suite,

$$u=0,$$

$$\cos v=1,\qquad \sin v=0,\qquad v=\pm 2k\pi,$$

k représentant un nombre entier quelconque. Les quantités u et v étant ainsi déterminées, les diverses valeurs de $u+v\sqrt{-1}$ propres à vérifier l'équation (11) seront évidemment comprises dans la formule

$$u+v\sqrt{-1}=\pm 2k\pi\sqrt{-1}.$$

En d'autres termes, les diverses valeurs de $l((1))$ seront données par l'équation

$$l((1))=\pm 2k\pi\sqrt{-1}. \tag{12}$$

Parmi ces valeurs une seule est réelle, savoir, celle qu'on obtient en posant $k=0$, et qui se réduit elle-même à zéro. C'est pour représenter cette valeur réelle qu'on emploie communément la notation simple

$$l(1)\quad \text{ou}\quad l1.$$

Quant aux valeurs imaginaires de $l((1))$, elles sont évidemment en nombre infini.

PROBLÈME II. — *Trouver les diverses valeurs de l'expression*

$$l((-1)).$$

Solution. — Soit $u+v\sqrt{-1}$ l'une de ces valeurs, u, v désignant deux quantités réelles. On aura, d'après la définition même de l'expression $l((-1))$,

$$e^{u+v\sqrt{-1}}=-1 \tag{13}$$

ou, ce qui revient au même,

$$e^u(\cos v+\sqrt{-1}\sin v)=-1.$$

On tirera de cette dernière équation

$$e^u=1,$$
$$\cos v+\sqrt{-1}\sin v=-1$$

et, par suite,

$$u=0,$$
$$\cos v=-1,\qquad \sin v=0,\qquad v=\pm(2k+1)\pi,$$

k représentant un nombre entier quelconque. Les quantités u, v étant ainsi déterminées, les diverses valeurs de $u+v\sqrt{-1}$ propres à vérifier l'équation (13) se trouveront évidemment comprises dans la formule

$$u+v\sqrt{-1}=\pm(2k+1)\pi\sqrt{-1}.$$

En d'autres termes, les diverses valeurs de $l((-1))$ seront données par l'équation

$$l((-1))=\pm(2k+1)\pi\sqrt{-1}. \tag{14}$$

Par conséquent ces valeurs seront toutes imaginaires et en nombre infini.

PROBLÈME III. — *Trouver les diverses valeurs de l'expression*

$$l((\alpha+\beta\sqrt{-1})).$$

Solution. — Soit $u+v\sqrt{-1}$ l'une de ces valeurs. On aura, d'après

la définition même de l'expression $l((\alpha+\beta\sqrt{-1}))$,

$$e^{u+v\sqrt{-1}}=\alpha+\beta\sqrt{-1}=\rho(\cos\theta+\sqrt{-1}\sin\theta) \tag{15}$$

ou, ce qui revient au même,

$$e^u(\cos v+\sqrt{-1}\sin v)=\rho(\cos\theta+\sqrt{-1}\sin\theta),$$

ρ désignant le module de $\alpha+\beta\sqrt{-1}$. On tirera de l'équation précédente

$$e^u=\rho,$$
$$\cos v+\sqrt{-1}\sin v=\cos\theta+\sqrt{-1}\sin\theta$$

et, par suite,

$$u=l(\rho),$$
$$\cos v=\cos\theta,\qquad \sin v=\sin\theta,\qquad v=\theta\pm 2k\pi,$$

k représentant un nombre entier quelconque. Les quantités u, v étant ainsi déterminées, les diverses valeurs de $u+v\sqrt{-1}$ se trouveront comprises dans la formule

$$u+v\sqrt{-1}=l(\rho)+\theta\sqrt{-1}\pm 2k\pi\sqrt{-1}.$$

En d'autres termes, les diverses valeurs de

$$l((\alpha+\beta\sqrt{-1}))$$

seront données par l'équation

$$l((\alpha+\beta\sqrt{-1}))=l(\rho)+\theta\sqrt{-1}+l((1)). \tag{16}$$

Il est bon d'observer que dans cette dernière équation la valeur de ρ est complètement déterminée et égale à

$$\sqrt{\alpha^2+\beta^2},$$

tandis que l'arc θ peut être l'un quelconque de ceux qui ont pour cosinus $\frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}$, et pour sinus $\frac{\beta}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}$.

Corollaire I. — Si l'on fait, pour plus de commodité,

$$\zeta = \text{arc tang}\,\frac{\beta}{\alpha}, \tag{17}$$

il sera facile d'introduire dans la formule (16) l'arc ζ au lieu de l'arc θ. En effet, on pourra supposer

$$\theta = \zeta$$

si α est positif, et

$$\theta = \zeta + \pi$$

si α est négatif. On trouvera, dans la première hypothèse,

$$l((\alpha + \beta\sqrt{-1})) = l(\rho) + \zeta\sqrt{-1} + l((1)) \tag{18}$$

et, dans la seconde,

$$l((\alpha + \beta\sqrt{-1})) = l(\rho) + \zeta\sqrt{-1} + \pi\sqrt{-1} + l((1)). \tag{19}$$

Si dans cette dernière équation on fait, en particulier,

$$\alpha + \beta\sqrt{-1} = -1, \quad \text{c'est-à-dire} \quad \alpha = -1, \quad \beta = 0$$

et, par suite,

$$\rho = 1, \quad \zeta = 0,$$

on obtiendra la suivante

$$l((-1)) = \pi\sqrt{-1} + l((1)). \tag{20}$$

Il en résulte qu'on aura généralement, pour des valeurs négatives de α,

$$l((\alpha + \beta\sqrt{-1})) = l(\rho) + \zeta\sqrt{-1} + l((-1)). \tag{21}$$

Supposons maintenant que dans les formules (18) et (21) on substitue à la place de ρ et de ζ leurs valeurs

$$(\alpha^2 + \beta^2)^{\frac{1}{2}} \quad \text{et} \quad \text{arc tang}\,\frac{\beta}{\alpha}.$$

On trouvera, pour les diverses valeurs de

$$l((\alpha + \beta\sqrt{-1})):$$

1° Si α est positif,

$$l((\alpha + \beta\sqrt{-1})) = \frac{1}{2}\,l(\alpha^2 + \beta^2) + \left(\text{arc tang}\,\frac{\beta}{\alpha}\right)\sqrt{-1} + l((1)); \tag{22}$$

2° Si α est négatif,

$$l((\alpha + \beta\sqrt{-1})) = \frac{1}{2}\,l(\alpha^2 + \beta^2) + \left(\text{arc tang}\,\frac{\beta}{\alpha}\right)\sqrt{-1} + l((-1)). \tag{23}$$

Corollaire II. — Si, dans les équations (22) et (23), on suppose $\beta = 0$, elles donneront respectivement, pour des valeurs positives de α,

$$l((\alpha)) = l(\alpha) + l((1)) = l(\alpha) \pm 2k\pi\sqrt{-1} \tag{24}$$

et, pour des valeurs négatives de α,

$$l((\alpha)) = l(-\alpha) + l((-1)) = l(-\alpha) \pm (2k+1)\pi\sqrt{-1}, \tag{25}$$

k devant toujours être un nombre entier. Il suit de ces dernières formules qu'une quantité réelle α a une infinité de logarithmes imaginaires, parmi lesquels se trouve un seul logarithme réel, dans le cas où α est positif. On obtient ce logarithme réel, désigné par la notation simple $l(\alpha)$ ou $l\alpha$, en posant, dans l'équation (24), $k = 0$.

Scolie I. — Parmi les diverses valeurs de $l((1))$, ainsi qu'on l'a déjà remarqué, il en est une égale à zéro, que l'on indique par la notation $l(1)$ ou $l1$, en faisant usage de parenthèses simples, ou même les supprimant tout à fait. Si l'on substitue cette valeur particulière dans l'équation (22), on obtiendra une valeur correspondante de

$$l((\alpha + \beta\sqrt{-1})),$$

que l'analogie nous porte à indiquer, à l'aide de parenthèses simples, par la notation

$$l(\alpha + \beta\sqrt{-1}).$$

C'est ce que nous ferons désormais. Par suite, on aura, en supposant α positif,

$$l(\alpha + \beta\sqrt{-1}) = \frac{1}{2}\,l(\alpha^2 + \beta^2) + \left(\text{arc tang}\,\frac{\beta}{\alpha}\right)\sqrt{-1}. \tag{26}$$

Si, au contraire, α devient négatif, $-\alpha$ étant alors positif, on trouvera

$$l(-\alpha-\beta\sqrt{-1})=\frac{1}{2}l(\alpha^2+\beta^2)+\left(\operatorname{arc\,tang}\frac{-\beta}{-\alpha}\right)\sqrt{-1}$$

ou, ce qui revient au même,

$$l(-\alpha-\beta\sqrt{-1})=\frac{1}{2}l(\alpha^2+\beta^2)+\left(\operatorname{arc\,tang}\frac{\beta}{\alpha}\right)\sqrt{-1}. \tag{27}$$

En faisant usage des notations précédentes, on réduira les équations (22) et (23) à celles qui suivent

$$l((\alpha+\beta\sqrt{-1}))=l(\alpha+\beta\sqrt{-1})+l((1)), \tag{28}$$

$$l((\alpha+\beta\sqrt{-1}))=l(-\alpha-\beta\sqrt{-1})+l((-1)), \tag{29}$$

la première se rapportant à des valeurs positives de α, et la seconde à des valeurs négatives de la même quantité. En d'autres termes, suivant que la partie réelle d'une expression imaginaire représentée par x sera positive ou négative, on aura

$$l((x))=l(x)+l((1)) \tag{30}$$

ou bien

$$l((x))=l(-x)+l((-1)). \tag{31}$$

En résumant ce qu'on vient de dire, on voit que la notation

$$l(x)$$

a une signification précise déterminée par l'équation (26), dans le cas seulement où la partie réelle de l'expression imaginaire représentée par x est positive, tandis que la notation

$$l((x))$$

a, dans tous les cas possibles, une infinité de valeurs déterminées par l'une des équations (28) et (29).

Problème IV. — *Trouver les diverses valeurs de l'expression*

$$\mathrm{L}((\alpha+\beta\sqrt{-1})),$$

la caractéristique L *indiquant un logarithme pris dans le système dont la base est* A.

Solution. — Soit toujours $u+v\sqrt{-1}$ l'une des valeurs de l'expression que l'on considère. On aura, d'après la définition même de cette expression,

$$\mathrm{A}^{u+v\sqrt{-1}}=\alpha+\beta\sqrt{-1} \tag{32}$$

ou, ce qui revient au même,

$$e^{(u+v\sqrt{-1})l\mathrm{A}}=\alpha+\beta\sqrt{-1},$$

l étant la caractéristique relative aux logarithmes népériens. On en conclura

$$(u+v\sqrt{-1})l\mathrm{A}=l((\alpha+\beta\sqrt{-1}))$$

et, par suite,

$$u+v\sqrt{-1}=\frac{l((\alpha+\beta\sqrt{-1}))}{l\mathrm{A}}$$

ou, en d'autres termes,

$$\mathrm{L}((a+\beta\sqrt{-1}))=\frac{l((\alpha+\beta\sqrt{-1}))}{l\mathrm{A}}. \tag{33}$$

Cette dernière équation subsiste dans le cas même où β s'évanouit, c'est-à-dire lorsque l'expression imaginaire $\alpha+\beta\sqrt{-1}$ se réduit à une quantité réelle.

Scolie. — Si l'on suppose la quantité α positive, à la valeur particulière de $l((\alpha+\beta\sqrt{-1}))$ représentée par $l(\alpha+\beta\sqrt{-1})$ correspondra une valeur particulière de $\mathrm{L}((\alpha+\beta\sqrt{-1}))$, que l'analogie nous porte à désigner à l'aide de parenthèses simples par la notation

$$\mathrm{L}(\alpha+\beta\sqrt{-1}).$$

Cela posé, on aura, pour des valeurs positives de α,

$$(34)\quad \mathrm{L}(\alpha+6\sqrt{-1})=\frac{l(\alpha+6\sqrt{-1})}{l\mathrm{A}}=\frac{1}{2}\mathrm{L}(\alpha^2+6^2)+\frac{\operatorname{arc\,tang}\frac{6}{\alpha}}{l\mathrm{A}}\sqrt{-1}.$$

De plus, si dans l'équation (33) on substitue pour $l((\alpha+6\sqrt{-1}))$ sa valeur tirée successivement des formules (28) et (29), on trouvera, pour des valeurs positives de la quantité α,

$$(35)\quad \mathrm{L}((\alpha+6\sqrt{-1}))=\frac{l(\alpha+6\sqrt{-1})}{l\mathrm{A}}+\frac{l((1))}{l\mathrm{A}}=\mathrm{L}(\alpha+6\sqrt{-1})+\mathrm{L}((1)),$$

et, pour des valeurs négatives de la même quantité,

$$(36)\quad \left\{\begin{aligned}\mathrm{L}(\alpha+6\sqrt{-1})&=\frac{l(-\alpha-6\sqrt{-1})}{l\mathrm{A}}+\frac{l((-1))}{l\mathrm{A}}\\&=\mathrm{L}(-\alpha-6\sqrt{-1})+\mathrm{L}((-1)).\end{aligned}\right.$$

En d'autres termes, suivant que la partie réelle d'une expression imaginaire représentée par x sera positive ou négative, on aura

$$(37)\quad \mathrm{L}((x))=\mathrm{L}(x)+\mathrm{L}((1))=\mathrm{L}(x)\pm\frac{2k\pi\sqrt{-1}}{l\mathrm{A}}$$

ou bien

$$(38)\quad \mathrm{L}((x))=\mathrm{L}(-x)+\mathrm{L}((-1))=\mathrm{L}(-x)\pm\frac{(2k+1)\pi\sqrt{-1}}{l\mathrm{A}},$$

k désignant un nombre entier quelconque. On peut ajouter que des deux formules précédentes la première subsiste pour toutes les valeurs réelles positives x, et la seconde pour toutes les valeurs réelles négatives de la même variable.

Après avoir calculé les divers logarithmes de l'expression imaginaire

$$x=\alpha+6\sqrt{-1},$$

proposons-nous de trouver les arcs imaginaires dont le cosinus est égal à x. Si l'on désigne par

$$\arccos((x))=u+v\sqrt{-1}$$

l'un quelconque de ces arcs, on aura, pour déterminer $u+v\sqrt{-1}$, l'équation

$$\cos(u+v\sqrt{-1})=\alpha+6\sqrt{-1}$$

ou, ce qui revient au même, la suivante

$$(39)\quad \frac{e^v+e^{-v}}{2}\cos u-\frac{e^v-e^{-v}}{2}\sin u\sqrt{-1}=\alpha+6\sqrt{-1},$$

laquelle se divise en deux autres, savoir

$$(40)\quad \frac{e^v+e^{-v}}{2}\cos u=\alpha,\qquad \frac{e^v-e^{-v}}{2}\sin u=-6.$$

A ces dernières on peut substituer le système équivalent des deux formules

$$(41)\quad e^v=\frac{\alpha}{\cos u}-\frac{6}{\sin u},\qquad e^{-v}=\frac{\alpha}{\cos u}+\frac{6}{\sin u}.$$

De plus, si l'on élimine v entre les formules (41), on en tirera successivement

$$\frac{\alpha^2}{\cos^2 u}-\frac{6^2}{\sin^2 u}=1,$$

$$\sin^4 u-(1-\alpha^2-6^2)\sin^2 u-6^2=0;$$

puis, en observant que $\sin^2 u$ est nécessairement une quantité positive,

$$\sin^2 u=\frac{1-\alpha^2-6^2}{2}+\sqrt{\left(\frac{1-\alpha^2-6^2}{2}\right)^2+6^2}.$$

On aura, par suite,

$$\cos^2 u=\frac{1+\alpha^2+6^2}{2}-\sqrt{\left(\frac{1+\alpha^2+6^2}{2}\right)^2-\alpha^2}$$
$$=\frac{\alpha^2}{\frac{1+\alpha^2+6^2}{2}+\sqrt{\left(\frac{1+\alpha^2+6^2}{2}\right)^2-\alpha^2}};$$

et, comme [en vertu de la première des équations (40)] $\cos u$ et α

doivent être de même signe, on trouvera, en extrayant les racines carrées,

$$\cos u = \frac{\alpha}{\left[\frac{1+\alpha^2+\beta^2}{2} + \sqrt{\left(\frac{1+\alpha^2+\beta^2}{2}\right)^2 - \alpha^2}\right]^{\frac{1}{2}}}. \tag{42}$$

Cela posé, si l'on fait, pour plus de commodité,

$$\left\{\begin{aligned} \mathrm{U} &= \arccos \frac{\alpha}{\left[\frac{1+\alpha^2+\beta^2}{2} + \sqrt{\left(\frac{1+\alpha^2+\beta^2}{2}\right)^2 - \alpha^2}\right]^{\frac{1}{2}}}, \\ \mathrm{V} &= l\left(\frac{\alpha}{\cos \mathrm{U}} - \frac{\beta}{\sin \mathrm{U}}\right), \end{aligned}\right. \tag{43}$$

on conclura des équations (41) et (42)

$$u = \pm \mathrm{U} \pm 2k\pi, \qquad v = \pm \mathrm{V}, \tag{44}$$

k désignant un nombre entier quelconque, et les deux lettres U, V devant être affectées du même signe; en sorte qu'on aura définitivement

$$\arccos((x)) = \pm 2k\pi \pm (\mathrm{U} + \mathrm{V}\sqrt{-1}). \tag{45}$$

Parmi les diverses valeurs de $\arccos((x))$ que fournit l'équation précédente, la plus simple est celle qu'on obtient en posant $k = 0$ dans le premier terme du second membre, et prenant l'autre terme avec le signe $+$. Nous la désignerons à l'aide de parenthèses simples, et nous écrirons en conséquence

$$\arccos(x) = \mathrm{U} + \mathrm{V}\sqrt{-1}$$

ou même, en supprimant tout à fait les parenthèses,

$$\arccos x = \mathrm{U} + \mathrm{V}\sqrt{-1}. \tag{46}$$

Dans le cas particulier où, β étant nul, la quantité α reste comprise entre les limites -1, $+1$, la formule (46) se réduit, comme on devait s'y attendre, à l'équation identique

$$\arccos \alpha = \arccos \alpha.$$

D'autre part, si l'on observe que $\pm 2k\pi$ représente un quelconque des arcs qui ont l'unité pour cosinus, on reconnaîtra que l'équation (45) peut être mise sous la forme

$$\arccos((x)) = \pm \arccos x + \arccos((1)). \tag{47}$$

Il est encore essentiel de remarquer que, dans le cas où l'on suppose $\beta = 0$ et la valeur numérique de α supérieure à l'unité, l'expression

$$\arccos \alpha$$

obtient toujours une valeur imaginaire. Cette valeur sera donnée par l'équation

$$\arccos \alpha = l(\alpha)\sqrt{-1} \tag{48}$$

si α est positif, et par la suivante

$$\arccos \alpha = \pi + l(-\alpha)\sqrt{-1} = \left[l(-\alpha) - \pi\sqrt{-1}\right]\sqrt{-1} \tag{49}$$

si α devient négatif.

Considérons maintenant les arcs imaginaires dont le sinus est $x = \alpha + \beta\sqrt{-1}$. Si l'on désigne un quelconque de ces arcs par

$$\arcsin((x)) = u + v\sqrt{-1},$$

on trouvera, en ayant égard à la seconde des équations (9),

$$x = \sin(u + v\sqrt{-1}) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - u - v\sqrt{-1}\right),$$

et l'on en conclura

$$\arcsin((x)) = u + v\sqrt{-1} = \frac{\pi}{2} - \arccos((x)). \tag{50}$$

Si, dans la formule précédente, on substitue les diverses valeurs de $\arccos((x))$, dont l'une a été désignée par la notation $\arccos(x)$ ou $\arccos x$, on obtiendra les diverses valeurs de $\arcsin((x))$, dont l'une sera désignée par la notation $\arcsin(x)$ ou $\arcsin x$, et déterminée par l'équation

$$(51) \qquad \arcsin x = \frac{\pi}{2} - \arccos x.$$

A l'aide des principes que nous venons d'établir, il est aisé de reconnaître les propriétés les plus essentielles dont jouissent les fonctions de la variable imaginaire x représentées par les notations

$$A^x, \quad \cos x, \quad \sin x,$$
$$Lx, \quad \arccos x, \quad \arcsin x.$$

Pour obtenir ces propriétés, il suffit d'étendre les formules que ces fonctions vérifient dans le cas où la variable x est réelle, au cas où la variable devient imaginaire. Cette extension s'effectue d'ordinaire sans difficulté pour chacune des trois fonctions

$$A^x, \quad \cos x, \quad \sin x.$$

Ainsi, par exemple, A, B, C, ... désignant plusieurs nombres, on prouvera facilement que les équations

$$(52) \qquad \begin{cases} A^x A^y A^z \ldots = A^{x+y+z+\ldots}, \\ A^x B^x C^x \ldots = (ABC\ldots)^x, \end{cases}$$

$$(53) \qquad \begin{cases} \cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y, \\ \sin(x+y) = \sin x \cos y + \sin y \cos x \end{cases}$$

subsistent également pour des valeurs réelles et pour des valeurs imaginaires quelconques des variables $x, y, z, \ldots$. Mais, si l'on considère des formules dans lesquelles entrent les fonctions inverses

$$Lx, \quad \arccos x, \quad \arcsin x,$$

on trouvera le plus souvent que ces formules, étendues au cas où les variables deviennent imaginaires, ne subsistent plus qu'avec des restrictions considérables, et pour certaines valeurs des variables dont il s'agit. Par exemple, si l'on fait

$$x = \alpha + 6\sqrt{-1}, \qquad y = \alpha' + 6'\sqrt{-1}, \qquad z = \alpha'' + 6''\sqrt{-1}, \qquad \ldots,$$

et, si l'on désigne par μ une quantité réelle quelconque, on reconnaîtra que la formule

$$(54) \qquad L(x) + L(y) + L(z) + \ldots = L(xyz\ldots)$$

subsiste seulement dans le cas où, $\alpha, \alpha', \alpha'', \ldots$ étant positifs, la somme

$$\operatorname{arc\,tang}\frac{6}{\alpha} + \operatorname{arc\,tang}\frac{6'}{\alpha'} + \operatorname{arc\,tang}\frac{6''}{\alpha''} + \ldots$$

reste comprise entre les limites $-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}$; et la formule

$$(55) \qquad L(x^\mu) = \mu L(x),$$

dans le cas où, α étant positif, le produit

$$\mu \operatorname{arc\,tang}\frac{6}{\alpha}$$

reste compris entre les mêmes limites.