ŒUVRES

COMPLÈTES

D'AUGUSTIN CAUCHY

PARIS. — IMPRIMERIE GAUTHIER-VILLARS ET FILS,
21091 Quai des Augustins, 55.

ŒUVRES

COMPLÈTES

D'AUGUSTIN CAUCHY

PUBLIÉES SOUS LA DIRECTION SCIENTIFIQUE

DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES

ET SOUS LES AUSPICES

DE M. LE MINISTRE DE L'INSTRUCTION PUBLIQUE.

IIe SÉRIE. — TOME III.

PARIS,

GAUTHIER-VILLARS ET FILS, IMPRIMEURS-LIBRAIRES

DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,

Quai des Augustins, 55

M DCCC XCVII

SECONDE SÉRIE.

I. — MÉMOIRES PUBLIÉS DANS DIVERS RECUEILS
AUTRES QUE CEUX DE L'ACADÉMIE.

II. — OUVRAGES CLASSIQUES.

III. — MÉMOIRES PUBLIÉS EN CORPS D'OUVRAGE.

IV. — MÉMOIRES PUBLIÉS SÉPARÉMENT.

II.

OUVRAGES CLASSIQUES.

COURS D'ANALYSE

DE

L'ÉCOLE ROYALE POLYTECHNIQUE

(ANALYSE ALGÉBRIQUE).

Le *Cours d'Analyse* devait comprendre plusieurs Parties dont la première seule a été publiée par Cauchy. L'indication de « Première Partie » a cependant été conservée dans cette édition afin d'éviter toute confusion.

COURS D'ANALYSE

DE

L'ÉCOLE ROYALE POLYTECHNIQUE;

PAR M. AUGUSTIN-LOUIS CAUCHY,

Ingénieur des Ponts et Chaussées, Professeur d'Analyse à l'École polytechnique, Membre de l'Académie des sciences, Chevalier de la Légion d'honneur.

I.re PARTIE. *ANALYSE ALGÉBRIQUE.*

DE L'IMPRIMERIE ROYALE.

Chez DEBURE frères, Libraires du Roi et de la Bibliothèque du Roi, rue Serpente, n.° 7.

1821

INTRODUCTION.

Quelques personnes, qui ont bien voulu guider mes premiers pas dans la carrière des sciences, et parmi lesquelles je citerai avec reconnaissance MM. *Laplace* et *Poisson*, ayant témoigné le desir de me voir publier le Cours d'analyse de l'École royale polytechnique, je me suis décidé à mettre ce Cours par écrit pour la plus grande utilité des élèves. J'en offre ici la première partie connue sous le nom d'*Analyse algébrique*, et dans laquelle je traite successivement des diverses espèces de fonctions réelles ou imaginaires, des séries convergentes ou divergentes, de la résolution des équations, et de la décomposition des fractions rationnelles. En parlant de la continuité des fonctions, je n'ai pu me dispenser de faire connaître les propriétés principales des quantités infiniment petites, propriétés qui servent de base au calcul infinitésimal. Enfin, dans les préliminaires et dans quelques notes placées à la fin du volume, j'ai présenté des développemens qui peuvent être utiles soit aux Professeurs et aux Élèves des Colléges royaux, soit à ceux qui veulent faire une étude spéciale de l'analyse.

Quant aux méthodes, j'ai cherché à leur donner toute la rigueur qu'on exige en géométrie, de manière à ne jamais recourir aux raisons tirées de la généralité de l'algèbre. Les raisons de cette espèce, quoique assez communément admises, sur-tout

dans le passage des séries convergentes aux séries divergentes, et des quantités réelles aux expressions imaginaires, ne peuvent être considérées, ce me semble, que comme des inductions propres à faire pressentir quelquefois la vérité, mais qui s'accordent peu avec l'exactitude si vantée des sciences mathématiques. On doit même observer qu'elles tendent à faire attribuer aux formules algébriques une étendue indéfinie, tandis que, dans la réalité, la plupart de ces formules subsistent uniquement sous certaines conditions, et pour certaines valeurs des quantités qu'elles renferment. En déterminant ces conditions et ces valeurs, et en fixant d'une manière précise le sens des notations dont je me sers, je fais disparaître toute incertitude; et alors les différentes formules ne présentent plus que des relations entre les quantités réelles, relations qu'il est toujours facile de vérifier par la substitution des nombres aux quantités elles-mêmes. Il est vrai que, pour rester constamment fidèle à ces principes, je me suis vu forcé d'admettre plusieurs propositions qui paraîtront peut-être un peu dures au premier abord. Par exemple, j'énonce dans le chapitre VI, qu'*une série divergente n'a pas de somme;* dans le chapitre VII, qu'*une équation imaginaire est seulement la représentation symbolique de deux équations entre quantités réelles;* dans le chapitre IX, que, *si des constantes ou des variables comprises dans une fonction, après avoir été supposées réelles, deviennent imaginaires, la notation à l'aide de laquelle la fonction se trouvait exprimée, ne peut être conservée dans le calcul qu'en vertu d'une convention nouvelle propre à fixer le sens de cette notation dans la dernière hypothèse;* &c. Mais ceux qui liront mon ouvrage reconnaîtront,

je l'espère, que les propositions de cette nature, entraînant l'heureuse nécessité de mettre plus de précision dans les théories, et d'apporter des restrictions utiles à des assertions trop étendues, tournent au profit de l'analyse, et fournissent plusieurs sujets de recherches qui ne sont pas sans importance. Ainsi, avant d'effectuer la sommation d'aucune série, j'ai dû examiner dans quels cas les séries peuvent être sommées, ou, en d'autres termes, quelles sont les conditions de leur convergence; et j'ai, à ce sujet, établi des règles générales qui me paraissent mériter quelque attention.

Au reste, si j'ai cherché, d'une part, à perfectionner l'analyse mathématique, de l'autre, je suis loin de prétendre que cette analyse doive suffire à toutes les sciences de raisonnement. Sans doute, dans les sciences qu'on nomme naturelles, la seule méthode qu'on puisse employer avec succès consiste à observer les faits et à soumettre ensuite les observations au calcul. Mais ce serait une erreur grave de penser qu'on ne trouve la certitude que dans les démonstrations géométriques, ou dans le témoignage des sens; et quoique personne jusqu'à ce jour n'ait essayé de prouver par l'analyse l'existence d'Auguste ou celle de LOUIS XIV, tout homme sensé conviendra que cette existence est aussi certaine pour lui que le carré de l'hypothénuse ou le théorème de *Maclaurin*. Je dirai plus; la démonstration de ce dernier théorème est à la portée d'un petit nombre d'esprits, et les savans eux-mêmes ne sont pas tous d'accord sur l'étendue qu'on doit lui attribuer; tandis que tout le monde sait fort bien par qui la France a été gouvernée dans le dix-septième siècle, et qu'il ne peut s'élever à ce sujet aucune contestation raisonnable. Ce que je dis ici

d'un fait historique peut s'appliquer également à une foule de questions, en religion, en morale, en politique. Soyons donc persuadés qu'il existe des vérités autres que les vérités de l'algèbre, des réalités autres que les objets sensibles. Cultivons avec ardeur les sciences mathématiques, sans vouloir les étendre au-delà de leur domaine; et n'allons pas nous imaginer qu'on puisse attaquer l'histoire avec des formules, ni donner pour sanction à la morale des théorèmes d'algèbre ou de calcul intégral.

En terminant cette Introduction, je ne puis me dispenser de reconnaître que les lumières et les conseils de plusieurs personnes m'ont été fort utiles, particulièrement ceux de MM. *Poisson*, *Ampère* et *Coriolis*. Je dois à ce dernier, entre autres choses, la règle sur la convergence des produits composés d'un nombre infini de facteurs, et j'ai profité plusieurs fois des observations de M. *Ampère,* ainsi que des méthodes qu'il développe dans ses Leçons d'analyse.

COURS D'ANALYSE

DE

L'ÉCOLE ROYALE POLYTECHNIQUE.

PRÉLIMINAIRES.

REVUE DES DIVERSES ESPÈCES DE QUANTITÉS RÉELLES QUE L'ON PEUT CONSIDÉRER, SOIT EN ALGÈBRE, SOIT EN TRIGONOMÉTRIE, ET DES NOTATIONS A L'AIDE DESQUELLES ON LES REPRÉSENTE. — DES MOYENNES ENTRE PLUSIEURS QUANTITÉS.

Pour éviter toute espèce de confusion dans le langage et l'écriture algébriques, nous allons fixer dans ces préliminaires la valeur de plusieurs termes et de plusieurs notations que nous emprunterons soit à l'Algèbre ordinaire, soit à la Trigonométrie. Les explications que nous donnerons à ce sujet sont nécessaires, pour que nous ayons la certitude d'être parfaitement compris de ceux qui liront cet Ouvrage. Nous allons indiquer d'abord quelle idée il nous paraît convenable d'attacher à ces deux mots, *nombre* et *quantité.*

Nous prendrons toujours la dénomination de *nombres* dans le sens où on l'emploie en Arithmétique, en faisant naître les nombres de la mesure absolue des grandeurs, et nous appliquerons uniquement la dénomination de *quantités* aux quantités *réelles positives* ou *négatives,* c'est-à-dire aux nombres précédés des signes + ou −. De plus, nous regarderons les quantités comme destinées à exprimer des accroissements ou des diminutions; en sorte qu'une grandeur donnée sera simplement représentée par un nombre, si l'on se contente de la comparer à une autre grandeur de même espèce prise pour unité, et par ce nombre précédé du signe + ou du signe −, si on la considère comme devant servir à l'accroissement ou à la diminution d'une grandeur fixe de la même espèce. Cela posé, le signe + ou — placé devant un nombre en modifiera la signification, à peu près comme un adjectif modifie celle du substantif. Nous appellerons *valeur numérique* d'une quantité le nombre qui en fait la base, quantités *égales* celles qui ont le même signe avec la même valeur numérique, et quantités *opposées* deux quantités égales quant à leurs valeurs numériques, mais affectées de signes contraires. En partant de ces principes, il est facile de rendre compte des diverses opérations que l'on peut faire subir aux quantités. Par exemple, deux quantités étant données, on pourra toujours en trouver une troisième qui, prise pour accroissement d'un nombre fixe, si elle est positive, et pour diminution dans le cas contraire, conduise au même résultat que les deux quantités données, employées l'une après l'autre à pareil usage. Cette troisième quantité, qui à elle seule produit le même effet que les deux autres, est ce qu'on appelle leur *somme*. Ainsi les deux quantités -10 et $+7$ ont pour somme -3, attendu qu'une diminution de 10 unités, jointe à une augmentation de 7 unités, équivaut à une diminution de 3 unités. *Ajouter* deux quantités, c'est former leur somme. La différence entre une première quantité et une seconde, c'est une troisième quantité qui, ajoutée à la seconde, reproduit la première. Enfin, on dit qu'une quantité est *plus grande* ou *plus petite* qu'une autre, suivant que la différence de la première à la seconde est positive ou négative. D'après cette définition, les quantités positives surpassent toujours les quantités négatives, et celles-ci doivent être considérées comme d'autant plus petites que leurs valeurs numériques sont plus grandes.

En Algèbre, on représente, non seulement les nombres, mais aussi les quantités, par des lettres. Comme on est convenu de ranger les nombres absolus dans la classe des quantités positives, on peut désigner la quantité positive qui a pour valeur numérique le nombre A, soit par $+A$, soit par A seulement, tandis que la quantité négative opposée se trouve représentée par $-A$. De même, dans le cas où la lettre a représente une quantité, on est convenu de regarder comme

synonymes les deux expressions a et $+a$, et de représenter par $-a$ la quantité opposée à $+a$. Ces remarques suffisent pour établir ce qu'on appelle la *règle des signes* (*voir* la Note I).

On nomme quantité *variable* celle que l'on considère comme devant recevoir successivement plusieurs valeurs différentes les unes des autres. On désigne une semblable quantité par une lettre prise ordinairement parmi les dernières de l'alphabet. On appelle au contraire quantité *constante*, et l'on désigne ordinairement par une des premières lettres de l'alphabet toute quantité qui reçoit une valeur fixe et déterminée. Lorsque les valeurs successivement attribuées à une même variable s'approchent indéfiniment d'une valeur fixe, de manière à finir par en différer aussi peu que l'on voudra, cette dernière est appelée la *limite* de toutes les autres. Ainsi, par exemple, un nombre irrationnel est la limite des diverses fractions qui en fournissent des valeurs de plus en plus approchées. En Géométrie, la surface du cercle est la limite vers laquelle convergent les surfaces des polygones inscrits, tandis que le nombre de leurs côtés croît de plus en plus, etc.

Lorsque les valeurs numériques successives d'une même variable décroissent indéfiniment, de manière à s'abaisser au-dessous de tout nombre donné, cette variable devient ce qu'on nomme un *infiniment petit* ou une quantité *infiniment petite*. Une variable de cette espèce a zéro pour limite.

Lorsque les valeurs numériques successives d'une même variable croissent de plus en plus, de manière à s'élever au-dessus de tout nombre donné, on dit que cette variable a pour limite l'*infini positif*, indiqué par le signe ∞, s'il s'agit d'une variable positive, et l'*infini négatif*, indiqué par la notation $-\infty$, s'il s'agit d'une variable négative. Les infinis positif et négatif sont désignés conjointement sous le nom de *quantités infinies*.

Les quantités qui se présentent, dans le calcul, comme résultats d'opérations faites sur une ou plusieurs autres quantités constantes ou variables, peuvent être divisées en plusieurs espèces suivant la nature des opérations qui les produisent. C'est ainsi que l'on distingue, en Algèbre, les sommes et différences, les produits et quotients, les puissances et racines, les exponentielles et les logarithmes; en Trigonométrie, les sinus et cosinus, sécantes et cosécantes, tangentes et cotangentes, et les arcs de cercle dont une ligne trigonométrique est donnée. Pour bien comprendre ce qui est relatif à ces dernières espèces de quantités, il est nécessaire de se rappeler les principes suivants.

Une longueur, comptée sur une ligne droite ou courbe, peut être, comme toute espèce de grandeurs, représentée soit par un nombre, soit par une quantité, savoir : par un nombre, lorsqu'on a simplement égard à la mesure de cette longueur, et par une quantité, c'est-à-dire par un nombre précédé du signe + ou —, lorsque l'on considère la longueur dont il s'agit comme portée, à partir d'un point fixe, sur la ligne donnée dans un sens ou dans un autre, pour servir soit à l'augmentation, soit à la diminution d'une autre longueur constante aboutissant à ce point fixe. Le point fixe dont il est ici question, et à partir duquel on doit porter les longueurs variables désignées par des quantités, est ce qu'on appelle l'*origine* de ces mêmes longueurs. Deux longueurs comptées à partir d'une origine commune, mais en sens contraires, doivent être représentées par des quantités de signes différents. On peut choisir à volonté le sens dans lequel on doit compter les longueurs désignées par des quantités positives; mais, ce choix une fois fait, il faudra nécessairement compter dans le sens opposé les longueurs qui seront désignées par des quantités négatives.

Dans un cercle dont le plan est supposé vertical, on prend ordinairement pour origine des arcs l'extrémité du rayon tiré horizontalement de gauche à droite, et c'est en s'élevant au-dessus de ce point que l'on compte les arcs positifs, c'est-à-dire ceux que l'on désigne par des quantités positives. Dans le même cercle, lorsque le rayon se réduit à l'unité, le sinus d'un arc, c'est-à-dire la projection sur le diamètre vertical du rayon qui passe par l'extrémité de cet arc, se compte

positivement de bas en haut et négativement en sens contraire, à partir du centre du cercle pris pour origine des sinus. La tangente se compte positivement dans le même sens que le sinus, mais à partir de l'origine des arcs et sur la verticale menée par cette origine. Enfin, la sécante se compte à partir du centre sur le rayon mené à l'extrémité de l'arc que l'on considère, et positivement dans le sens de ce rayon.

Souvent le résultat d'une opération effectuée sur une quantité peut avoir plusieurs valeurs différentes les unes des autres. Lorsque nous voudrons désigner indistinctement une quelconque de ces valeurs, nous nous servirons de notations dans lesquelles la quantité sera entourée de doubles traits ou de doubles parenthèses, et nous réserverons la notation ordinaire pour la valeur la plus simple ou celle qui paraîtra mériter davantage d'être remarquée. Ainsi, par exemple, a étant une quantité positive, la racine carrée de cette quantité aura deux valeurs numériquement égales, mais de signes contraires, dont l'une quelconque sera exprimée par la notation

$$((a))^{\frac{1}{2}} \quad \text{ou} \quad \sqrt{\!\sqrt{a}},$$

tandis que la valeur positive seule sera représentée par

$$a^{\frac{1}{2}} \quad \text{ou} \quad \sqrt{a};$$

en sorte qu'on aura

$$\sqrt{\!\sqrt{a}} = \pm\sqrt{a} \tag{1}$$

ou, ce qui revient au même,

$$((a))^{\frac{1}{2}} = \pm a^{\frac{1}{2}}. \tag{2}$$

De même encore, si l'on représente par a une quantité positive ou négative, la notation

$$\text{arc}\sin((a)) \quad \text{ou} \quad \text{arc}\,\text{tang}((a))$$

désignera un quelconque des arcs qui ont la quantité a pour sinus ou pour tangente, tandis que la notation

$$\text{arc}\sin(a) \quad \text{ou} \quad \text{arc}\,\text{tang}(a)$$

indiquera seulement celui de ces arcs qui a la plus petite valeur numérique. A l'aide de ces conventions, on évite la confusion que pourrait entraîner l'emploi de signes dont la valeur n'aurait pas été déterminée d'une manière assez précise. Afin de lever à cet égard toute difficulté, je vais présenter ici le Tableau des notations dont nous ferons usage pour exprimer les résultats des opérations algébriques ou trigonométriques.

La somme de deux quantités sera indiquée à l'ordinaire par la juxtaposition de ces deux quantités, chacune d'elles étant exprimée par une lettre précédée du signe $+$ ou $-$, que l'on pourra supprimer (si c'est le signe $+$) devant la première lettre seulement. Ainsi

$$+a+b \quad \text{ou simplement} \quad a+b$$

désignera la somme des deux quantités $+a$, $+b$, et

$$+a-b \quad \text{ou simplement} \quad a-b$$

désignera la somme des deux quantités $+a$, $-b$, équivalente à la différence des deux quantités $+a$, $+b$.

On indiquera l'égalité des deux quantités a et b par le signe $=$ interposé entre elles, comme il suit,

$$a=b,$$

et l'on exprimera que la première surpasse la seconde, c'est-à-dire que la différence $a-b$ est positive, en écrivant

$$a>b \quad \text{ou} \quad b<a.$$

Nous représenterons encore à l'ordinaire par

$$+a\times+b, \quad \text{ou simplement} \quad a.b \quad \text{ou} \quad ab$$

le produit des deux quantités $+a$, $+b$, et par

$$\frac{a}{b} \quad \text{ou} \quad a:b$$

leur quotient.

Soient maintenant m et n deux nombres entiers, A un nombre quelconque, et a, b deux quantités quelconques positives ou négatives.

$$A^m, \quad A^{\frac{1}{n}}=\sqrt[n]{A}, \quad A^{\pm\frac{m}{n}}, \quad A^b$$

représenteront les quantités positives qu'on obtient en élevant le nombre A à des puissances respectivement marquées par les exposants

$$m, \quad \frac{1}{n}, \quad \pm\frac{m}{n}, \quad b,$$

et

$$a^{\pm m}$$

la quantité positive ou négative que produit l'élévation de la quantité a à la puissance $\pm m$. Quant aux notations

$$((a))^{\frac{1}{n}}=\sqrt[n]{\!\sqrt{a}}, \qquad ((a))^{\pm\frac{m}{n}},$$

nous nous en servirons pour exprimer, non seulement les valeurs positives ou négatives, lorsqu'il en existe, des puissances de la quantité a marquées par les exposants

$$\frac{1}{n}, \quad \pm\frac{m}{n},$$

mais encore les valeurs imaginaires de ces mêmes puissances (*voir* ci-après, Chap. VII, ce qu'on entend par *expressions imaginaires*). Il est bon d'observer que, si l'on désigne par A la valeur numérique de a, et si l'on suppose la fraction $\frac{m}{n}$ réduite à sa plus simple expression, la puissance

$$((a))^{\frac{m}{n}}$$

aura une seule valeur réelle positive ou négative, savoir

$$+A^{\frac{m}{n}} \quad \text{ou} \quad -A^{\frac{m}{n}},$$

lorsque $\frac{m}{n}$ sera une fraction de dénominateur impair; tandis qu'elle admettra les deux valeurs réelles dont on vient de parler, ou qu'elle n'en admettra aucune, si $\frac{m}{n}$ est une fraction de dénominateur pair. On peut faire une semblable remarque à l'égard de l'expression

$$((a))^{-\frac{m}{n}}.$$

Dans le cas particulier où, la quantité a étant positive, on suppose $\frac{m}{n} = \frac{1}{2}$, l'expression $((a))^{\frac{m}{n}}$ n'a que deux valeurs réelles l'une et l'autre, et données par la formule (2) ou, ce qui revient au même, par la formule (1).

Les notations

$$l(\mathrm{B}),\quad \mathrm{L}(\mathrm{B}),\quad \mathrm{L}'(\mathrm{B}),\quad \ldots$$

indiqueront les logarithmes réels du nombre B dans différents systèmes, tandis que chacune des suivantes

$$l((b)),\quad \mathrm{L}((b)),\quad \mathrm{L}'((b)),\quad \ldots$$

pourra servir à désigner, outre le logarithme réel de la quantité b, lorsqu'il existe, un quelconque des logarithmes imaginaires de cette même quantité (*voir* ci-après, Chap. IX, ce qu'on entend par *logarithmes imaginaires*).

En Trigonométrie

$$\sin a,\quad \cos a,\quad \operatorname{tang} a,\quad \cot a,\quad \operatorname{séc} a,\quad \operatorname{coséc} a,\quad \operatorname{siv} a,\quad \operatorname{cosiv} a$$

exprimeront respectivement le *sinus*, le *cosinus*, la *tangente*, la *cotangente*, la *sécante*, la *cosecante*, le *sinus verse* ou le *cosinus verse* de l'arc a, et les notations

$$\operatorname{arc}\sin((a)),\quad \operatorname{arc}\cos((a)),\quad \operatorname{arc}\operatorname{tang}((a)),$$
$$\operatorname{arc}\cot((a)),\quad \operatorname{arc}\operatorname{séc}((a)),\quad \operatorname{arc}\operatorname{coséc}((a))$$

indiqueront un quelconque des arcs qui ont la quantité a pour sinus, ou cosinus, ou tangente, ou cotangente, ou sécante, ou cosécante. Nous nous servirons des notations simples

$$\operatorname{arc}\sin(a),\quad \operatorname{arc}\cos(a),\quad \operatorname{arc}\operatorname{tang}(a),\quad \operatorname{arc}\cot(a),\quad \operatorname{arc}\operatorname{séc}(a),\quad \operatorname{arc}\operatorname{coséc}(a),$$

ou même, en supprimant tout à fait les parenthèses, des notations suivantes

$$\operatorname{arc}\sin a,\quad \operatorname{arc}\cos a,\quad \operatorname{arc}\operatorname{tang} a,\quad \operatorname{arc}\cot a,\quad \operatorname{arc}\operatorname{séc} a,\quad \operatorname{arc}\operatorname{coséc} a,$$

lorsque, parmi les arcs dont une ligne trigonométrique est égale à a, nous voudrons désigner celui qui a la plus petite valeur numérique, ou, si ces arcs sont deux à deux égaux et de signes contraires, celui qui a la plus petite valeur positive. En conséquence,

$$\operatorname{arc}\sin a,\quad \operatorname{arc}\operatorname{tang} a,\quad \operatorname{arc}\cot a,\quad \operatorname{arc}\operatorname{coséc} a$$

indiqueront des arcs positifs ou négatifs, mais compris entre les limites

$$-\frac{\pi}{2},\quad +\frac{\pi}{2},$$

π désignant la demi-circonférence dans le cercle qui a pour rayon l'unité, tandis que

$$\operatorname{arc}\cos a,\quad \operatorname{arc}\operatorname{séc} a$$

indiqueront des arcs positifs compris entre les limites o et π.

En vertu des conventions que l'on vient d'établir, si l'on désigne par k un nombre entier arbitraire, on aura évidemment, pour des valeurs quelconques positives ou négatives de la quantité a,

$$(3)\qquad \left\{\begin{aligned} &\operatorname{arc}\sin((a)) = \frac{\pi}{2} \pm \left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arc}\sin a\right) \pm 2k\pi,\\ &\operatorname{arc}\cos((a)) = \pm \operatorname{arc}\cos a \pm 2k\pi,\\ &\operatorname{arc}\operatorname{tang}((a)) = \operatorname{arc}\operatorname{tang} a \pm k\pi,\\ &\operatorname{arc}\cos a + \operatorname{arc}\sin a = \frac{\pi}{2},\\ &\operatorname{arc}\operatorname{coséc} a + \operatorname{arc}\operatorname{séc} a = \frac{\pi}{2}. \end{aligned}\right.$$

On trouvera de plus, pour des valeurs positives de a,

$$(4)\qquad \operatorname{arc}\cot a + \operatorname{arc}\operatorname{tang} a = \frac{\pi}{2},$$

et, pour des valeurs négatives de a,

$$\text{arc}\cot a + \text{arc}\,\text{tang}\, a = -\frac{\pi}{2}. \tag{5}$$

Lorsqu'une quantité variable converge vers une limite fixe, il est souvent utile d'indiquer cette limite par une notation particulière; c'est ce que nous ferons, en plaçant l'abréviation

$$\lim$$

devant la quantité variable dont il s'agit. Quelquefois, tandis qu'une ou plusieurs variables convergent vers des limites fixes, une expression qui renferme ces variables converge à la fois vers plusieurs limites différentes les unes des autres. Nous indiquerons alors une quelconque de ces dernières limites à l'aide de doubles parenthèses placées à la suite de l'abréviation lim, de manière à entourer l'expression que l'on considère. Supposons, pour fixer les idées, qu'une variable positive ou négative représentée par x converge vers la limite o, et désignons par A un nombre constant : il sera facile de s'assurer que chacune des expressions

$$\lim A^x, \quad \lim \sin x$$

a une valeur unique déterminée par l'équation

$$\lim A^x = 1$$

ou

$$\lim \sin x = 0,$$

tandis que l'expression

$$\lim\left(\left(\frac{1}{x}\right)\right)$$

admet deux valeurs, savoir, $+\infty$, $-\infty$, et

$$\lim\left(\left(\sin\frac{1}{x}\right)\right)$$

une infinité de valeurs comprises entre les limites -1 et $+1$.

Nous allons terminer ces préliminaires en présentant, sur les quantités moyennes, plusieurs théorèmes dont la connaissance nous sera

fort utile dans la suite de cet Ouvrage. On appelle *moyenne* entre plusieurs quantités données une nouvelle quantité comprise entre la plus petite et la plus grande de celles que l'on considère. D'après cette définition, il est clair qu'il existe une infinité de moyennes entre plusieurs quantités inégales, et que la moyenne entre plusieurs quantités égales se confond avec chacune d'elles. Cela posé, on établira facilement, ainsi qu'on peut le voir dans la Note II, les propositions suivantes :

THÉORÈME I. — *Soient $b, b', b'', \ldots$ plusieurs quantités de même signe en nombre n, et $a, a', a'', \ldots$ des quantités quelconques en nombre égal à celui des premières. La fraction*

$$\frac{a + a' + a'' + \ldots}{b + b' + b'' + \ldots}$$

sera moyenne entre les suivantes

$$\frac{a}{b}, \quad \frac{a'}{b'}, \quad \frac{a''}{b''}, \quad \ldots.$$

Corollaire. — Si l'on suppose

$$b = b' = b'' = \ldots = 1,$$

on conclura du théorème précédent que la quantité

$$\frac{a + a' + a'' + \ldots}{n}$$

est moyenne entre les suivantes

$$a, \quad a', \quad a'', \quad \ldots.$$

Cette espèce particulière de moyenne est ce qu'on nomme une *moyenne arithmétique*.

THÉORÈME II. — *Soient* A, A', A'', ...; B, B', B'', ... *deux suites de nombres pris à volonté, et formons avec ces deux suites, que nous supposons renfermer chacune un nombre n de termes, les racines*

$$\sqrt[B]{A}, \quad \sqrt[B']{A'}, \quad \sqrt[B'']{A''}, \quad \ldots;$$

$\sqrt[B+B'+B''\dots]{AA'A''\dots}$ *sera une nouvelle racine moyenne entre toutes les autres.*

Corollaire. — Si l'on prend

$$B = B' = B'' = \dots = 1,$$

on trouvera que la quantité positive

$$\sqrt[n]{AA'A''\dots}$$

est moyenne entre les suivantes

$$A, \quad A', \quad A'', \quad \dots .$$

Cette moyenne, d'une espèce particulière, est celle que l'on nomme *moyenne géométrique*.

THÉORÈME III. — *Les mêmes choses étant posées que dans le théorème I, si α, α', α'', ... désignent encore des quantités de même signe, la fraction*

$$\frac{\alpha a + \alpha' a' + \alpha'' a'' + \dots}{\alpha b + \alpha' b' + \alpha'' b'' + \dots}$$

sera moyenne entre les suivantes

$$\frac{a}{b}, \quad \frac{a'}{b'}, \quad \frac{a''}{b''}, \quad \dots .$$

Corollaire. — Si l'on suppose

$$b = b' = b'' = \dots = 1,$$

on conclura du théorème précédent que la somme

$$a\alpha + a'\alpha' + a''\alpha'' + \dots$$

est équivalente au produit de

$$\alpha + \alpha' + \alpha'' + \dots$$

par une moyenne entre les quantités a, a', a'', ...

Pour abréger, lorsque nous voudrons désigner une moyenne entre

plusieurs quantités a, a', a'', ..., nous nous servirons de la notation

$$M(a, a', a'', \dots).$$

Cela posé, les théorèmes qui précèdent et leurs corollaires se trouveront compris dans les formules

$$\frac{a + a' + a'' + \dots}{b + b' + b'' + \dots} = M\left(\frac{a}{b}, \frac{a'}{b'}, \frac{a''}{b''}, \dots\right), \tag{6}$$

$$\frac{a + a' + a'' + \dots}{n} = M(a, a', a'', \dots), \tag{7}$$

$$\sqrt[B+B'+B''+\dots]{AA'A''\dots} = M(\sqrt[B]{A}, \sqrt[B']{A'}, \sqrt[B'']{A''}, \dots), \tag{8}$$

$$\sqrt[n]{AA'A''\dots} = M(A, A', A'', \dots), \tag{9}$$

$$\frac{a\alpha + a'\alpha' + a''\alpha'' + \dots}{b\alpha + b'\alpha' + b''\alpha'' + \dots} = M\left(\frac{a}{b}, \frac{a'}{b'}, \frac{a''}{b''}, \dots\right), \tag{10}$$

$$a\alpha + a'\alpha' + a''\alpha'' + \dots = (\alpha + \alpha' + \alpha'' + \dots) M(a, a', a'', \dots). \tag{11}$$

Dans ces formules,

$$a, \quad a', \quad a'', \quad \dots; \quad b, \quad b', \quad b'', \quad \dots; \quad \alpha, \quad \alpha', \quad \alpha'', \quad \dots$$

représenteront trois suites de quantités, et

$$A, \quad A', \quad A'', \quad \dots; \quad B, \quad B', \quad B'', \quad \dots$$

deux suites de nombres formées chacune de n termes différents. La troisième suite est, ainsi que la seconde, uniquement composée de quantités de même signe.

La notation que nous venons d'adopter fournit le moyen d'exprimer qu'une quantité est comprise entre deux limites données. En effet, toute quantité comprise entre les limites a, b étant une moyenne entre ces mêmes limites, on pourra la désigner par

$$M(a, b).$$

Ainsi, par exemple, toute quantité positive pourra être représentée par $M(0, \infty)$, toute quantité négative par $M(-\infty, 0)$, et toute quantité réelle par $M(-\infty, +\infty)$. Lorsque nous voudrons indiquer indistinctement une quelconque des quantités renfermées entre les limites a et b, nous doublerons les parenthèses, et nous écrirons

$$\mathrm{M}((a, b)).$$

Par exemple, si l'on suppose que la variable x converge vers zéro, on aura

$$\lim\left(\left(\sin\frac{1}{x}\right)\right) = \mathrm{M}((-1, +1)),$$

attendu que l'expression $\lim\left(\left(\sin\frac{1}{x}\right)\right)$ admettra une infinité de valeurs comprises entre les valeurs extrêmes -1 et $+1$.

PREMIÈRE PARTIE.

ANALYSE ALGÉBRIQUE.

CHAPITRE I.

DES FONCTIONS RÉELLES.

§ I. — *Considérations générales sur les fonctions.*

Lorsque des quantités variables sont tellement liées entre elles que, la valeur de l'une d'elles étant donnée, on puisse en conclure les valeurs de toutes les autres, on conçoit d'ordinaire ces diverses quantités exprimées au moyen de l'une d'entre elles, qui prend alors le nom de *variable indépendante;* et les autres quantités exprimées au moyen de la variable indépendante sont ce qu'on appelle des *fonctions* de cette variable.

Lorsque des quantités variables sont tellement liées entre elles que, les valeurs de quelques-unes étant données, on puisse en conclure celles de toutes les autres, on conçoit ces diverses quantités exprimées au moyen de plusieurs d'entre elles, qui prennent alors le nom de *variables indépendantes;* et les quantités restantes, exprimées au moyen des variables indépendantes, sont ce qu'on appelle des *fonctions* de ces mêmes variables.

Les diverses expressions que fournissent l'Algèbre et la Trigonométrie, lorsqu'elles renferment des variables considérées comme indépendantes, sont autant de fonctions de ces mêmes variables. Ainsi, par exemple,

$$\mathrm{L}(x), \quad \sin x, \quad \ldots$$

sont des fonctions de la variable x;

$$x+y,\quad x^y,\quad xyz,\quad \ldots$$

des fonctions des variables x et y ou x, y et z, ...

Lorsque des fonctions d'une ou de plusieurs variables se trouvent, comme dans les exemples précédents, immédiatement exprimées au moyen de ces mêmes variables, elles sont nommées *fonctions explicites*. Mais, lorsqu'on donne seulement les relations entre les fonctions et les variables, c'est-à-dire les équations auxquelles ces quantités doivent satisfaire, tant que ces équations ne sont pas résolues algébriquement, les fonctions, n'étant pas exprimées immédiatement au moyen des variables, sont appelées *fonctions implicites*. Pour les rendre explicites, il suffit de résoudre, lorsque cela se peut, les équations qui les déterminent. Par exemple, y étant une fonction implicite de x déterminée par l'équation

$$\mathrm{L}(y)=x,$$

si l'on nomme A la base du système de logarithmes que l'on considère, la même fonction, devenue explicite par la résolution de l'équation donnée, sera

$$y=\mathrm{A}^x.$$

Lorsqu'on veut désigner une fonction explicite d'une seule variable x ou de plusieurs variables $x, y, z, \ldots$, sans déterminer la nature de cette fonction, on emploie l'une des notations

$$f(x),\quad \mathrm{F}(x),\quad \varphi(x),\quad \chi(x),\quad \psi(x),\quad \varpi(x),\quad \ldots,$$
$$f(x,y,z,\ldots),\quad \mathrm{F}(x,y,z,\ldots),\quad \varphi(x,y,z,\ldots),\quad \ldots.$$

Pour qu'une fonction d'une seule variable soit complètement déterminée, il est nécessaire et il suffit que de chaque valeur particulière attribuée à la variable on puisse déduire la valeur correspondante de la fonction. Quelquefois, pour chaque valeur de la variable, la fonction donnée en obtient plusieurs différentes les unes des autres. Conformément aux conventions adoptées dans les préliminaires, nous désignerons d'ordinaire ces valeurs multiples d'une fonction par des notations dans lesquelles la variable sera entourée de doubles traits ou de doubles parenthèses. Ainsi, par exemple,

$$\arcsin((x))$$

indiquera un quelconque des arcs qui ont x pour sinus;

$$\sqrt{\!\sqrt{x}}=\pm\sqrt{x}$$

l'une quelconque des deux racines carrées de la variable x supposée positive, etc.

§ II. — *Des fonctions simples.*

Parmi les fonctions d'une variable x, on appelle *simples* celles qui résultent d'une seule opération effectuée sur cette variable. Les fonctions simples que l'on considère ordinairement en Analyse sont en très petit nombre, et se rapportent les unes à l'Algèbre, les autres à la Trigonométrie. L'addition et la soustraction, la multiplication et la division, l'élévation aux puissances et l'extraction des racines, enfin la formation des exponentielles et des logarithmes produisent les fonctions simples qui se rapportent à l'Algèbre. En conséquence, si l'on désigne par A un nombre constant, et par $a=\pm\mathrm{A}$ une quantité constante, les fonctions algébriques simples de la variable x seront

$$a+x,\quad a-x,\quad ax,\quad \frac{a}{x},\quad x^a,\quad \mathrm{A}^x,\quad \mathrm{L}(x).$$

Nous ne tenons pas ici compte des racines, parce qu'on peut toujours les ramener aux puissances. Quant aux fonctions simples qui se rapportent à la Trigonométrie, on pourrait en compter un grand nombre, si l'on rangeait parmi les fonctions simples toutes les lignes trigonométriques et les arcs qui correspondent à ces mêmes lignes; mais nous les réduirons aux quatre suivantes

$$\sin x,\quad \cos x,$$
$$\operatorname{arc}\sin x,\quad \operatorname{arc}\cos x,$$

et nous mettrons au nombre des fonctions composées les autres lignes trigonométriques $\operatorname{tang} x$, $\operatorname{séc} x$, ... avec les arcs correspondants $\operatorname{arc}\operatorname{tang} x$, $\operatorname{arc}\operatorname{séc} x$, ..., attendu que ces dernières lignes peuvent toujours être exprimées par le moyen du sinus et du cosinus. Nous pourrions même, à la rigueur, réduire les deux fonctions simples $\sin x$ et $\cos x$ à une seule, puisqu'elles sont liées entre elles par l'équation $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$; mais l'emploi de ces deux fonctions est si fréquent, qu'il est utile de les conserver toutes deux à la fois dans le calcul comme fonctions simples.

§ III. — *Des fonctions composées.*

Les fonctions qui se déduisent d'une variable à l'aide de plusieurs opérations prennent le nom de *fonctions composées;* et l'on distingue parmi ces dernières les *fonctions de fonctions* qui résultent de plusieurs opérations successives, la première opération étant effectuée sur la variable, et chacune des autres sur le résultat de l'opération précédente. En vertu de ces définitions,

$$x^x,\quad \sqrt[x]{x},\quad \frac{lx}{x},\quad \ldots$$

sont des fonctions composées de la variable x; et

$$l(\sin x),\quad l(\cos x),\quad \ldots$$

des fonctions de fonctions, dont chacune résulte de deux opérations successives.

Les fonctions composées se distinguent les unes des autres par la nature des opérations qui les produisent. Il semble que l'on devrait

nommer *fonctions algébriques* toutes celles que fournissent les opérations de l'Algèbre; mais on a réservé particulièrement ce nom à celles que l'on forme en n'employant que les premières opérations algébriques, savoir, l'addition et la soustraction, la multiplication et la division, enfin l'élévation à des puissances fixes; et, dès qu'une fonction renferme des exposants variables ou des logarithmes, elle prend le nom de *fonction exponentielle* ou *logarithmique*.

Les fonctions que l'on nomme algébriques se divisent en *fonctions rationnelles* et *fonctions irrationnelles*. Les fonctions rationnelles sont celles dans lesquelles la variable ne se trouve élevée qu'à des puissances entières. On appelle, en particulier, *fonction entière* tout polynôme qui ne renferme que des puissances entières de la variable, par exemple,

$$a + bx + cx^2 + \ldots,$$

et *fonction fractionnaire* ou *fraction rationnelle* le quotient de deux semblables polynômes. Le *degré* d'une fonction entière de x est l'exposant de la plus haute puissance de x dans cette même fonction. La fonction entière du premier degré, savoir

$$a + bx$$

s'appelle aussi *fonction linéaire*, parce que, dans l'application à la Géométrie, on s'en sert pour représenter l'ordonnée d'une ligne droite. Toute fonction entière ou fractionnaire est par cela même rationnelle, et toute autre espèce de fonction algébrique est irrationnelle.

Les fonctions que produisent les opérations de la Trigonométrie sont désignées sous le nom de *fonctions trigonométriques* ou *circulaires*.

Les divers noms que l'on vient d'attribuer aux fonctions composées d'une seule variable s'appliquent également aux fonctions de plusieurs variables, lorsque ces dernières fonctions jouissent, par rapport à chacune des variables qu'elles renferment, des propriétés que supposent les noms dont il s'agit. Ainsi, par exemple, tout polynôme qui ne contiendra que des puissances entières des variables x, y, z, ... sera une fonction entière de ces variables. On appelle degré de cette fonction entière la somme des exposants des variables dans le terme où cette somme est la plus grande. Une fonction entière du premier degré, telle que

$$a + bx + cy + dz + \ldots,$$

prend le nom de fonction linéaire.

CHAPITRE II.

DES QUANTITÉS INFINIMENT PETITES OU INFINIMENT GRANDES, ET DE LA CONTINUITÉ DES FONCTIONS. VALEURS SINGULIÈRES DES FONCTIONS DANS QUELQUES CAS PARTICULIERS.

§ I. — *Des quantités infiniment petites et infiniment grandes.*

On dit qu'une quantité variable devient *infiniment petite*, lorsque sa valeur numérique décroît indéfiniment de manière à converger vers la limite zéro. Il est bon de remarquer à ce sujet qu'on ne doit pas confondre un décroissement constant avec un décroissement indéfini. La surface d'un polygone régulier circonscrit à un cercle donné décroît constamment à mesure que le nombre des côtés augmente, mais non pas indéfiniment, puisqu'elle a pour limite la surface du cercle. De même encore, une variable qui n'admettrait pour valeurs successives que les différents termes de la suite

$$\frac{2}{1}, \frac{3}{2}, \frac{4}{3}, \frac{5}{4}, \frac{6}{5}, \ldots,$$

prolongée à l'infini, décroîtrait constamment, mais non pas indéfiniment, puisque ses valeurs successives convergeraient vers la limite 1. Au contraire, une variable qui n'aurait pour valeurs successives que les différents termes de la suite

$$\frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{1}{6}, \frac{1}{5}, \frac{1}{8}, \frac{1}{7}, \ldots,$$

prolongée à l'infini, ne décroîtrait pas constamment, puisque la différence entre deux termes consécutifs de cette suite est alternativement positive et négative; et, néanmoins, elle décroîtrait indéfiniment, puisque sa valeur finirait par s'abaisser au-dessous de tout nombre donné.

On dit qu'une quantité variable devient *infiniment grande*, lorsque sa valeur numérique croît indéfiniment de manière à converger vers la limite ∞. Il est encore essentiel d'observer ici qu'on ne doit pas confondre une variable qui croît indéfiniment avec une variable qui croît constamment. La surface d'un polygone régulier inscrit à un cercle donné croît constamment, mais non pas indéfiniment, à mesure que le nombre des côtés augmente. Les termes de la suite naturelle des nombres entiers

$$1,\quad 2,\quad 3,\quad 4,\quad 5,\quad \ldots$$

croissent constamment et indéfiniment.

Les quantités infiniment petites et infiniment grandes jouissent de plusieurs propriétés, qui conduisent à la solution de questions importantes, et que je vais exposer en peu de mots.

Soit α une quantité infiniment petite, c'est-à-dire une variable dont la valeur numérique décroisse indéfiniment. Lorsque dans un même calcul on fait entrer les diverses puissances entières de α, savoir

$$\alpha,\quad \alpha^2,\quad \alpha^3,\quad \ldots,$$

ces diverses puissances sont respectivement désignées sous le nom d'infiniment petits du *premier*, du *second*, du *troisième ordre*, etc. En général, on appelle infiniment petit du premier ordre toute quantité variable dont le rapport avec α converge, tandis que la valeur numérique de α diminue, vers une limite finie différente de zéro; infiniment petit du second ordre toute quantité variable avec α, et dont le rapport avec α^2 converge vers une limite finie différente de zéro, etc. Cela posé, si l'on désigne par k une quantité finie différente de zéro, et par ε un nombre variable qui décroisse indéfiniment avec la valeur numérique de α, la forme générale des quantités infiniment petites du premier ordre sera

$$k\alpha \quad \text{ou du moins} \quad k\alpha(1 \pm \varepsilon);$$

la forme générale des quantités infiniment petites du second ordre

$$k\alpha^2 \quad \text{ou du moins} \quad k\alpha^2(1 \pm \varepsilon),$$
$$\ldots \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \ldots\ldots\ldots;$$

enfin la forme générale des infiniment petits de l'ordre n (n représentant un nombre entier) sera

$$k\alpha^n \quad \text{ou du moins} \quad k\alpha^n(1 \pm \varepsilon).$$

On peut facilement établir, à l'égard de ces divers ordres de quantités infiniment petites, les théorèmes suivants :

Théorème I. — *Si l'on compare l'un à l'autre deux infiniment petits d'ordres différents, pendant que tous les deux convergeront vers la limite zéro, celui qui est de l'ordre le plus élevé finira par obtenir constamment la plus petite valeur numérique.*

Démonstration. — Soient, en effet,

$$k\alpha^n(1 \pm \varepsilon),\quad k'\alpha^{n'}(1 \pm \varepsilon')$$

deux infiniment petits, l'un de l'ordre n, l'autre de l'ordre n', et supposons $n' > n$; le rapport entre le second de ces infiniment petits et le premier, savoir

$$\frac{k'}{k}\alpha^{n'-n}\frac{1 \pm \varepsilon'}{1 \pm \varepsilon},$$

convergera indéfiniment avec α vers la limite zéro, ce qui ne peut avoir lieu qu'autant que la valeur numérique du second finit par devenir constamment inférieure à celle du premier.

Théorème II. — *Un infiniment petit de l'ordre n, c'est-à-dire de la forme*

$$k\alpha^n(1 \pm \varepsilon),$$

change de signe avec α toutes les fois que n est un nombre impair, et conserve pour de très petites valeurs numériques de α le même signe que la quantité k, lorsque n est un nombre pair.

Démonstration. — En effet, dans la première hypothèse, α^n change de signe avec α, et, dans la seconde, α^n est toujours positif. De plus, le signe du produit $k(1 \pm \varepsilon)$ est le même que celui de k, lorsque ε est très petit.

Théorème III. — *La somme de plusieurs infiniment petits des ordres*

$$n, \quad n', \quad n'', \quad \ldots$$

(n', n'', ... désignant des nombres supérieurs à n) est un nouvel infiniment petit de l'ordre n.

Démonstration. — En effet,

$$\begin{aligned} & k\alpha^n(1 \pm \varepsilon) + k'\alpha^{n'}(1 \pm \varepsilon') + k''\alpha^{n''}(1 \pm \varepsilon'') + \ldots \\ & = k\alpha^n\left[1 \pm \varepsilon + \frac{k'}{k}\alpha^{n'-n}(1 \pm \varepsilon') + \frac{k''}{k}\alpha^{n''-n}(1 \pm \varepsilon'') + \ldots\right] \\ & = k\alpha^n(1 \pm \varepsilon_1), \end{aligned}$$

ε_1 étant un nombre qui converge avec α vers la limite zéro.

Des principes qu'on vient d'énoncer on déduit aisément, comme on va le voir, plusieurs propositions remarquables qui se rapportent à des polynômes ordonnés suivant les puissances ascendantes d'une quantité infiniment petite α.

Théorème IV. — *Tout polynôme ordonné suivant les puissances ascendantes de α, par exemple*

$$a + b\alpha + c\alpha^2 + \ldots$$

ou, plus généralement,

$$a\alpha^n + b\alpha^{n'} + c\alpha^{n''} + \ldots$$

(les nombres n, n', n'', ... formant une suite croissante), finit par être, pour de très petites valeurs numériques de α, constamment de même signe que son premier terme

$$a \quad \text{ou} \quad a\alpha^n.$$

Démonstration. — En effet, la somme faite du second terme et de ceux qui le suivent est, dans le premier cas, un infiniment petit du premier ordre, dont la valeur numérique finit par être inférieure à celle de la quantité finie a, et, dans le second cas, un infiniment petit

de l'ordre n', qui finit par obtenir constamment une valeur numérique inférieure à celle d'un infiniment petit de l'ordre n.

Théorème V. — *Lorsque, dans le polynôme*

$$a\alpha^n + b\alpha^{n'} + c\alpha^{n''} + \ldots,$$

ordonné suivant les puissances ascendantes de α, le degré n' du second terme est un nombre impair, ce polynôme, pour de très petites valeurs numériques de α, est tantôt supérieur et tantôt inférieur à son premier terme $a\alpha^n$, suivant que la variable α et le coefficient b sont de même signe ou de signes contraires.

Démonstration. — En effet, dans l'hypothèse admise, la somme des termes qui suivent le premier, savoir

$$b\alpha^{n'} + c\alpha^{n''} + \ldots,$$

sera, pour de très petites valeurs numériques de α, de même signe que chacun des deux produits $b\alpha^{n'}$, $b\alpha$.

Théorème VI. — *Lorsque, dans le polynôme*

$$a\alpha^n + b\alpha^{n'} + c\alpha^{n''} + \ldots,$$

ordonné suivant les puissances ascendantes de α, le degré n' du second terme est un nombre pair, ce polynôme, pour de très petites valeurs numériques de α, finit par devenir constamment supérieur à son premier terme, toutes les fois que b est positif, et constamment inférieur, toutes les fois que b est négatif.

Démonstration. — En effet, dans l'hypothèse admise, la somme des termes qui suivent le premier aura, pour de très petites valeurs numériques de α, le signe du produit $b\alpha^{n'}$, et, par suite, le signe de b.

Corollaire. — En supposant, dans le théorème qui précède, $n = 0$, on obtiendra la proposition suivante :

Théorème VII. — *Si, dans le polynôme*

$$a + b\alpha^{n'} + c\alpha^{n} + \ldots,$$

ordonné suivant les puissances ascendantes de α, n' désigne un nombre *pair; parmi les valeurs de ce polynôme correspondantes à des valeurs infiniment petites de α, celle qui correspond à $\alpha = 0$, c'est-à-dire a, sera toujours la plus petite, lorsque b sera positif, et la plus grande, lorsque b sera négatif.*

Cette valeur particulière du polynôme, plus grande ou plus petite que toutes les valeurs voisines, est ce qu'on appelle un *maximum* ou un *minimum*.

Les propriétés des quantités infiniment petites étant établies, on en déduit les propriétés analogues des quantités infiniment grandes, en observant que toute quantité variable de cette dernière espèce peut être représentée par $\frac{1}{\alpha}$, α désignant une quantité infiniment petite. Ainsi, par exemple, lorsque, dans le polynôme

$$ax^m + bx^{m-1} + cx^{m-2} + \ldots + hx + k,$$

ordonné suivant les puissances descendantes de la variable x, cette variable devient infiniment grande; en la mettant sous la forme $\frac{1}{\alpha}$, on réduit le polynôme dont il s'agit à

$$\frac{a}{\alpha^m}\left(1 + \frac{b}{a}\alpha + \frac{c}{a}\alpha^2 + \ldots + \frac{h}{a}\alpha^{m-1} + \frac{k}{a}\alpha^m\right),$$

et l'on reconnaît alors immédiatement que, pour de très petites valeurs numériques de α, ou, ce qui revient au même, pour de très grandes valeurs numériques de x, ce polynôme est de même signe que son premier terme

$$\frac{a}{\alpha^m} = ax^m.$$

Comme cette remarque subsiste dans le cas même où quelques-unes des quantités $b, c, \ldots, h, k$ se réduisent à zéro, il en résulte qu'on peut énoncer le théorème suivant :

Théorème VIII. — *Lorsque, dans un polynôme ordonné suivant les puissances descendantes de la variable x, on fait croître indéfiniment la valeur numérique de cette variable, le polynôme finit par être constamment de même signe que son premier terme.*

§ II. — *De la continuité des fonctions.*

Parmi les objets qui se rattachent à la considération des infiniment petits, on doit placer les notions relatives à la continuité ou à la discontinuité des fonctions. Examinons d'abord sous ce point de vue les fonctions d'une seule variable.

Soit $f(x)$ une fonction de la variable x, et supposons que, pour chaque valeur de x intermédiaire entre deux limites données, cette fonction admette constamment une valeur unique et finie. Si, en partant d'une valeur de x comprise entre ces limites, on attribue à la variable x un accroissement infiniment petit α, la fonction elle-même recevra pour accroissement la différence

$$f(x+\alpha) - f(x),$$

qui dépendra en même temps de la nouvelle variable α et de la valeur de x. Cela posé, la fonction $f(x)$ sera, entre les deux limites assignées à la variable x, fonction *continue* de cette variable, si, pour chaque valeur de x intermédiaire entre ces limites, la valeur numérique de la différence

$$f(x+\alpha) - f(x)$$

décroît indéfiniment avec celle de α. En d'autres termes, *la fonction $f(x)$ restera continue par rapport à x entre les limites données, si, entre ces limites, un accroissement infiniment petit de la variable produit toujours un accroissement infiniment petit de la fonction elle-même.*

On dit encore que la fonction $f(x)$ est, dans le voisinage d'une valeur particulière attribuée à la variable x, fonction continue de cette variable, toutes les fois qu'elle est continue entre deux limites de x, même très rapprochées, qui renferment la valeur dont il s'agit.

Enfin, lorsqu'une fonction $f(x)$ cesse d'être continue dans le voisinage d'une valeur particulière de la variable x, on dit qu'elle devient alors *discontinue* et qu'il y a pour cette valeur particulière *solution de continuité*.

D'après ces explications, il sera facile de reconnaître entre quelles limites une fonction donnée de la variable x est continue par rapport à cette variable. Ainsi, par exemple, la fonction $\sin x$, admettant pour chaque valeur particulière de la variable x une valeur unique et finie, sera continue entre deux limites quelconques de cette variable, attendu que la valeur numérique de $\sin(\frac{1}{2}\alpha)$, et par suite celle de la différence

$$\sin(x+\alpha)-\sin x = 2\sin(\tfrac{1}{2}\alpha)\cos(x+\tfrac{1}{2}\alpha),$$

décroissent indéfiniment avec celle de α, quelle que soit d'ailleurs la valeur finie que l'on attribue à x. En général, si l'on envisage sous le rapport de la continuité les onze fonctions simples que nous avons considérées ci-dessus (Chap. I, § II), savoir

$$a+x,\quad a-x,\quad ax,\quad \frac{a}{x},\quad x^a,\quad A^x,\quad L(x),$$
$$\sin x,\quad \cos x,\quad \operatorname{arc}\sin x,\quad \operatorname{arc}\cos x,$$

on trouvera que chacune de ces fonctions reste continue entre deux limites finies de la variable x, toutes les fois que, étant constamment réelle entre ces deux limites, elle ne devient pas infinie dans l'intervalle.

Par suite, chacune de ces fonctions sera continue dans le voisinage d'une valeur finie attribuée à la variable x, si cette valeur finie se trouve comprise :

Pour les fonctions

$$\left.\begin{array}{c} a+x \\ a-x \\ ax \\ A^x \\ \sin x \\ \cos x \end{array}\right\}\ \text{entre les limites } x=-\infty,\ x=+\infty;$$

Pour la fonction

$$\frac{a}{x}\ \left\{\begin{array}{ll} 1^\circ \text{ entre les limites } x=-\infty, & x=0, \\ 2^\circ \text{ entre les limites } x=0, & x=\infty; \end{array}\right.$$

Pour les fonctions

$$\left.\begin{array}{c} x^a \\ L(x) \end{array}\right\}\ \text{entre les limites } x=0,\qquad x=\infty;$$

enfin

Pour les fonctions

$$\left.\begin{array}{c} \operatorname{arc}\sin x \\ \operatorname{arc}\cos x \end{array}\right\}\ \text{entre les limites } x=-1,\qquad x=+1.$$

Il est bon d'observer que, dans le cas où l'on suppose $a=\pm m$ (m désignant un nombre entier), la fonction simple

$$x^a$$

est toujours continue dans le voisinage d'une valeur finie de la variable x, pourvu que cette valeur soit comprise :

$$\text{si } a=+m,\quad \text{entre les limites}\quad x=-\infty,\ x=+\infty,$$

$$\text{si } a=-m,\ \left\{\begin{array}{l} \text{entre les limites}\quad x=-\infty,\ x=0 \\ \quad\text{ou bien} \\ \text{entre les suivantes } x=0,\qquad x=\infty. \end{array}\right.$$

Parmi les onze fonctions que l'on vient de citer, deux seulement deviennent discontinues pour une valeur de x comprise dans l'intervalle des limites entre lesquelles ces mêmes fonctions restent réelles. Les deux fonctions dont il s'agit sont

$$\frac{a}{x}\quad \text{et}\quad x^a\ (\text{lorsque } a=-m).$$

L'une et l'autre deviennent infinies, et par conséquent discontinues, pour $x=0$.

Soit maintenant

$$f(x, y, z, \ldots)$$

une fonction de plusieurs variables $x, y, z, \ldots$, et supposons que, dans le voisinage de valeurs particulières X, Y, Z, ... attribuées à ces variables, $f(x, y, z, \ldots)$ soit à la fois fonction continue de x, fonction continue de y, fonction continue de z, ... On prouvera aisément que, si l'on désigne par α, 6, γ, ... des quantités infiniment petites, et si l'on attribue à x, y, z, ... les valeurs X, Y, Z, ... ou des valeurs très voisines, la différence

$$f(x+\alpha, y+6, z+\gamma)-f(x, y, z, \ldots)$$

sera elle-même infiniment petite. En effet, il est clair que, dans l'hypothèse précédente, les valeurs numériques des différences

$$f(x+\alpha, y, z, \ldots)-f(x, y, z, \ldots),$$
$$f(x+\alpha, y+6, z, \ldots)-f(x+\alpha, y, z, \ldots),$$
$$f(x+\alpha, y+6, z+\gamma, \ldots)-f(x+\alpha, y+6, z, \ldots),$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

décroîtront indéfiniment avec celles des quantités variables α, 6, γ, ..., savoir, la valeur numérique de la première différence avec la valeur numérique de α, celle de la seconde différence avec la valeur numérique de 6, celle de la troisième avec la valeur numérique de γ, et ainsi de suite. On doit en conclure que la somme de toutes ces différences, savoir

$$f(x+\alpha, y+6, z+\gamma, \ldots)-f(x, y, z, \ldots),$$

convergera vers la limite zéro, si α, 6, γ, ... convergent vers cette même limite. En d'autres termes,

$$f(x+\alpha, y+6, z+\gamma, \ldots)$$

aura pour limite

$$f(x, y, z, \ldots).$$

La proposition qu'on vient de démontrer subsiste évidemment dans le cas même où l'on établirait entre les nouvelles variables α, 6, γ, ... certaines relations. Il suffit que ces relations permettent aux nouvelles variables de converger toutes en même temps vers la limite zéro.

Lorsque, dans la même proposition, on remplace x, y, z, ... par

X, Y, Z, ..., et $x+\alpha$, $y+6$, $z+\gamma$, ... par x, y, z, ..., on obtient l'énoncé suivant :

Théorème I. — *Si les variables x, y, z, ... ont pour limites respectives les quantités fixes et déterminées* X, Y, Z, ..., *et que la fonction $f(x, y, z, \ldots)$ soit continue par rapport à chacune des variables x, y, z, ... dans le voisinage du système des valeurs particulières*

$$x=\mathrm{X}, \quad y=\mathrm{Y}, \quad z=\mathrm{Z}, \quad \ldots,$$

$f(x, y, z, \ldots)$ aura pour limite $f(\mathrm{X}, \mathrm{Y}, \mathrm{Z}, \ldots)$.

Comme, dans ce second énoncé, les variables α, 6, γ, ... se trouvent remplacées par $x-\mathrm{X}$, $y-\mathrm{Y}$, $z-\mathrm{Z}$, ..., les relations qu'on pouvait établir, dans le premier énoncé, entre α, 6, γ, ..., pourront être établies, dans le second, entre les quantités $x-\mathrm{X}$, $y-\mathrm{Y}$, $z-\mathrm{Z}$; et il en résulte que la fonction $f(x, y, z, \ldots)$ aura pour limite $f(\mathrm{X}, \mathrm{Y}, \mathrm{Z}, \ldots)$, dans le cas même où les variables x, y, z, ... seraient assujetties à certaines relations, pourvu que ces relations leur permettent de s'approcher indéfiniment des limites X, Y, Z, ...

Supposons, pour fixer les idées, que x, y, z, ... soient fonctions d'une même variable t considérée comme indépendante, et continues par rapport à cette variable dans le voisinage de la valeur particulière

$$t=\mathrm{T}.$$

Si l'on fait, pour plus de commodité,

$$f(x, y, z, \ldots)=u,$$

u sera ce qu'on appelle une fonction composée de la variable t; et, si

$$\mathrm{X}, \quad \mathrm{Y}, \quad \mathrm{Z}, \quad \ldots, \quad \mathrm{U}$$

désignent respectivement ce que deviennent

$$x, \quad y, \quad z, \quad \ldots, \quad u$$

dans le cas où l'on suppose $t=\mathrm{T}$, il est clair, d'une part, qu'une valeur de t très voisine de T fournira pour u une valeur unique et finie; d'autre part, qu'il suffira de faire converger t vers la limite T, pour que les variables x, y, z, ... convergent vers les limites X, Y, Z, ..., et, par suite, la fonction $u = f(x, y, z, \ldots)$ vers la limite $\mathrm{U} = f(\mathrm{X}, \mathrm{Y}, \mathrm{Z}, \ldots)$. On prouverait absolument de la même manière que, si l'on attribue à t une valeur très voisine de T, la valeur correspondante de la fonction u sera la limite de laquelle cette fonction s'approchera indéfiniment, tandis que t convergera vers la valeur donnée; et l'on doit conclure que u sera fonction continue de t dans le voisinage de $t = \mathrm{T}$. On peut donc énoncer le théorème suivant :

Théorème II. — *Désignons par*

$$x,\quad y,\quad z,\quad \ldots$$

plusieurs fonctions de la variable t, qui soient continues par rapport à cette variable dans le voisinage de la valeur particulière $t = \mathrm{T}$. Soient, de plus,

$$\mathrm{X},\quad \mathrm{Y},\quad \mathrm{Z},\quad \ldots$$

les valeurs particulières de x, y, z, ... correspondantes à $t = \mathrm{T}$; et supposons que, dans le voisinage de ces valeurs particulières, la fonction

$$u = f(x, y, z, \ldots)$$

soit en même temps continue par rapport à x, continue par rapport à y, continue par rapport à z, ...; u, considérée comme une fonction de t, sera encore continue par rapport à t dans le voisinage de la valeur particulière $t = \mathrm{T}$.

Si, dans le théorème précédent, on réduit les quantités variables x, y, z, ... à une seule, x, on obtiendra un nouveau théorème, qu'on peut énoncer comme il suit :

Théorème III. — *Supposons que, dans l'équation*

$$u = f(x),$$

la variable x soit fonction d'une autre variable t. Concevons de plus que

la variable x soit fonction continue de t dans le voisinage de la valeur particulière $t = \mathrm{T}$, et u fonction continue de x dans le voisinage de la valeur particulière $x = \mathrm{X}$ correspondante à $t = \mathrm{T}$. La quantité u, considérée comme fonction de t, sera encore continue par rapport à cette variable dans le voisinage de la valeur particulière $t = \mathrm{T}$.

Supposons, par exemple,

$$u = ax \quad \text{et} \quad x = t^n,$$

a désignant une quantité constante, et n un nombre entier. On conclura du théorème III que

$$u = at^n$$

est, entre des limites quelconques de la variable t, fonction continue de cette variable.

De même, si l'on fait

$$u = \frac{x}{y}, \qquad x = \sin t, \qquad y = \cos t,$$

on conclura du théorème II que la fonction

$$u = \operatorname{tang} t$$

est continue par rapport à t dans le voisinage d'une valeur finie quelconque de cette variable, toutes les fois que la valeur dont il s'agit n'est pas comprise dans la formule

$$t = \pm 2k\pi \pm \frac{\pi}{2},$$

k désignant un nombre entier; c'est-à-dire toutes les fois qu'à cette valeur de t correspond une valeur finie de $\operatorname{tang} t$. Au contraire, la fonction $\operatorname{tang} t$ admettra une solution de continuité, en devenant infinie, pour chacune des valeurs de t comprises dans la formule précédente.

Supposons encore

$$u = a + x + y + z + \ldots,$$
$$x = bt, \qquad y = ct^2, \qquad \ldots,$$

$a, b, c, \ldots$ désignant des quantités constantes. Alors, u étant fonction continue de $x, y, z, \ldots$ entre des limites quelconques de ces variables, et $x, y, z, \ldots$ fonctions continues de la variable t entre des limites quelconques de cette dernière, on conclura du théorème III que la fonction

$$u = a + bt + ct^2 + \ldots$$

est elle-même continue par rapport à t entre des limites quelconques. Par suite, comme $t = 0$ donne $u = a$, si l'on fait converger t vers la limite zéro, la fonction u convergera vers la limite a et finira par obtenir le même signe que cette limite, ce qui s'accorde avec le théorème IV du § I.

Une propriété remarquable des fonctions continues d'une seule variable, c'est de pouvoir servir à représenter en Géométrie les ordonnées de lignes continues droites ou courbes. De cette remarque on déduit facilement la proposition suivante :

Théorème IV. — *Si la fonction $f(x)$ est continue par rapport à la variable x entre les limites $x = x_0$, $x = X$, et que l'on désigne par b une quantité intermédiaire entre $f(x_0)$ et $f(X)$, on pourra toujours satisfaire à l'équation*

$$f(x) = b$$

par une ou plusieurs valeurs réelles de x comprises entre x_0 et X.

Démonstration. — Pour établir la proposition précédente, il suffit de faire voir que la courbe qui a pour équation

$$y = f(x)$$

rencontrera une ou plusieurs fois la droite qui a pour équation

$$y = b$$

dans l'intervalle compris entre les ordonnées qui correspondent aux abscisses x_0 et X; or c'est évidemment ce qui aura lieu dans l'hypothèse admise. En effet, la fonction $f(x)$ étant continue entre les limites $x = x_0$, $x = X$, la courbe qui a pour équation $y = f(x)$ et qui passe

1° par le point correspondant aux coordonnées x_0, $f(x_0)$, 2° par le point correspondant aux coordonnées X et $f(X)$, sera continue entre ces deux points; et, comme l'ordonnée constante b de la droite qui a pour équation $y = b$ se trouve comprise entre les ordonnées $f(x_0)$, $f(X)$ des deux points que l'on considère, la droite passera nécessairement entre ces deux points, ce qu'elle ne peut faire sans rencontrer dans l'intervalle la courbe ci-dessus mentionnée.

On peut, au reste, comme on le fera dans la Note III, démontrer le théorème IV par une méthode directe et purement analytique, qui a même l'avantage de fournir la résolution numérique de l'équation

$$f(x) = b.$$

§ III. — *Valeurs singulières des fonctions dans quelques cas particuliers.*

Lorsque, pour un système de valeurs attribuées aux variables qu'elle renferme, une fonction d'une ou de plusieurs variables n'admet qu'une seule valeur, cette valeur unique se déduit ordinairement de la définition même de la fonction. S'il se présente un cas particulier dans lequel la définition donnée ne puisse plus fournir immédiatement la valeur de la fonction que l'on considère, on cherche la limite ou les limites vers lesquelles cette fonction converge, tandis que les variables s'approchent indéfiniment des valeurs particulières qui leur sont assignées; et, s'il existe une ou plusieurs limites de cette espèce, elles sont regardées comme autant de valeurs de la fonction dans l'hypothèse admise. Nous nommerons *valeurs singulières* de la fonction proposée celles qui se trouvent déterminées comme on vient de le dire. Telles sont, par exemple, celles qu'on obtient en attribuant aux variables des valeurs infinies, et souvent aussi celles qui correspondent à des solutions de continuité. La recherche des valeurs singulières des fonctions est une des questions les plus importantes et les plus délicates de l'Analyse : elle offre plus ou moins de difficultés, suivant la nature des fonctions et le nombre des variables qu'elles renferment.

Si d'abord on considère les fonctions simples d'une seule variable, on trouvera qu'il est facile de fixer leurs valeurs singulières. Ces valeurs correspondent toujours à l'une des trois hypothèses

$$x = -\infty, \qquad x = 0, \qquad x = \infty,$$

et sont respectivement

Pour les fonctions				
$a + x$	a quelconque....	$a + (-\infty) = -\infty$	....	$a + \infty = \infty$
$a - x$	a quelconque....	$a - (-\infty) = \infty$	....	$a - \infty = -\infty$
ax	a positif.........	$a \times (-\infty) = -\infty$	....	$a \times \infty = \infty$
	a négatif.........	$a \times (-\infty) = \infty$	....	$a \times \infty = -\infty$
$\frac{a}{x}$	a positif.........	$\frac{a}{-\infty} = 0$	$\frac{a}{0} = \pm\infty$	$\frac{a}{\infty} = 0$
	a négatif........	$\frac{a}{-\infty} = 0$	$\frac{a}{0} = \mp\infty$	$\frac{a}{\infty} = 0$
x^a	a positif.........	....	$0^a = 0$	$\infty^a = \infty$
	a négatif........	....	$0^a = \infty$	$\infty^a = 0$
A^x	A sup. à l'unité..	$A^{-\infty} = 0$	$A^0 = 1$	$A^\infty = \infty$
	A inf. à l'unité...	$A^{-\infty} = \infty$	$A^0 = 1$	$A^\infty = 0$
$L(x)$	Base des log. sup. à l'unité.......	....	$L(0) = -\infty$	$L(\infty) = \infty$
	Base des log. inf. à l'unité.......	....	$L(0) = \infty$	$L(\infty) = -\infty$
$\sin x$	....	$\sin(-\infty) = M((-1, +1))$	....	$\sin(\infty) = M((-1, +1))$
$\cos x$	....	$\cos(-\infty) = M((-1, +1))$	....	$\cos(\infty) = M((-1, +1))$

La notation $M((-1, +1))$ désigne ici, comme dans les préliminaires, une quelconque des quantités moyennes entre les deux limites

$$-1 \quad \text{et} \quad +1.$$

Il est bon d'observer que, dans le cas où l'on suppose $a = \pm m$,

m désignant un nombre entier, la fonction simple

$$x^a$$

admet constamment trois valeurs singulières, savoir :

lorsque $a = +m$	m étant un nombre pair.	$(-\infty)^m = \infty,$	$0^m = 0,$	$\infty^m = \infty,$
	m étant impair.........	$(-\infty)^m = -\infty,$	$0^m = 0,$	$\infty^m = \infty,$
lorsque $a = -m$	m étant pair...........	$(-\infty)^{-m} = 0,$	$0^{-m} = \infty,$	$\infty^{-m} = 0,$
	m étant impair.........	$(-\infty)^{-m} = 0,$	$((0))^{-m} = \pm\infty,$	$\infty^{-m} = 0.$

Considérons maintenant les fonctions composées d'une seule variable x. Quelquefois il est aisé de trouver leurs valeurs singulières. Ainsi, par exemple, si l'on désigne par k un nombre entier quelconque, on reconnaîtra sans peine que la fonction composée

$$\operatorname{tang} x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

a ses valeurs singulières comprises dans les trois formules

$$\operatorname{tang}((\infty)) = M((-\infty, +\infty)),$$

$$\operatorname{tang}\left(\left(2k\pi \pm \frac{\pi}{2}\right)\right) = \pm\infty,$$

$$\operatorname{tang}((-\infty)) = M((-\infty, +\infty)),$$

tandis que les valeurs singulières de la fonction inverse

$$\operatorname{arc\,tang} x = \operatorname{arc\,sin} \frac{x}{\sqrt{1 + x^2}}$$

sont respectivement

$$\operatorname{arc\,tang}(-\infty) = -\frac{\pi}{2}, \qquad \operatorname{arc\,tang}(\infty) = \frac{\pi}{2}.$$

Mais souvent aussi de semblables questions présentent de véritables difficultés. Par exemple, on n'aperçoit pas immédiatement comment on peut déterminer la valeur singulière de la fonction

$$x^x,$$

lorsqu'on y suppose $x = 0$, ou celle de la fonction

$$x^{\frac{1}{x}},$$

lorsqu'on prend $x = \infty$. Pour donner une idée des méthodes qui conduisent à la solution des questions de cette espèce, je vais établir ici deux théorèmes à l'aide desquels on peut, dans un grand nombre de cas, déterminer les valeurs singulières que reçoivent les deux fonctions

$$\frac{f(x)}{x}, \quad [f(x)]^{\frac{1}{x}},$$

lorsqu'on y suppose $x = \infty$.

Théorème I. — *Si, pour des valeurs croissantes de x, la différence*

$$f(x+1) - f(x)$$

converge vers une certaine limite k, la fraction

$$\frac{f(x)}{x}$$

convergera en même temps vers la même limite.

Démonstration. — Supposons d'abord que la quantité k ait une valeur finie, et désignons par ε un nombre aussi petit que l'on voudra. Puisque des valeurs croissantes de x font converger la différence

$$f(x+1) - f(x)$$

vers la limite k, on pourra donner au nombre h une valeur assez considérable pour que, x étant égal ou supérieur à h, la différence dont il s'agit soit constamment comprise entre les limites

$$k - \varepsilon, \quad k + \varepsilon.$$

Cela posé, si l'on désigne par n un nombre entier quelconque, cha-

cune des quantités

$$\begin{aligned} &f(h+1) - f(h),\\ &f(h+2) - f(h+1),\\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots,\\ &f(h+n) - f(h+n-1), \end{aligned}$$

et, par suite, leur moyenne arithmétique, savoir

$$\frac{f(h+n) - f(h)}{n},$$

se trouvera comprise entre les limites $k - \varepsilon$, $k + \varepsilon$. On aura donc

$$\frac{f(h+n) - f(h)}{n} = k + \alpha,$$

α étant une quantité comprise entre les limites $-\varepsilon$, $+\varepsilon$. Soit maintenant

$$h + n = x.$$

L'équation précédente deviendra

$$(1) \qquad \frac{f(x) - f(h)}{x - h} = k + \alpha,$$

et l'on en conclura

$$f(x) = f(h) + (x - h)(k + \alpha),$$

$$(2) \qquad \frac{f(x)}{x} = \frac{f(h)}{x} + \left(1 - \frac{h}{x}\right)(k + \alpha).$$

De plus, pour faire croître indéfiniment la valeur de x, il suffira de faire croître indéfiniment le nombre entier n sans changer la valeur de h. Supposons, en conséquence, que dans l'équation (2) on considère h comme une quantité constante, et x comme une quantité variable qui converge vers la limite ∞. Les quantités

$$\frac{f(h)}{x}, \quad \frac{h}{x},$$

renfermées dans le second membre, convergeront vers la limite zéro.

et le second membre lui-même vers une limite de la forme

$$k+\alpha,$$

α étant toujours compris entre $-\varepsilon$ et $+\varepsilon$. Par suite, le rapport

$$\frac{f(x)}{x}$$

aura pour limite une quantité comprise entre $k-\varepsilon$ et $k+\varepsilon$. Cette conclusion devant subsister, quelle que soit la petitesse du nombre ε, il en résulte que la limite en question sera précisément la quantité k. En d'autres termes, on aura

$$\lim\frac{f(x)}{x}=k=\lim[f(x+1)-f(x)]. \tag{3}$$

Supposons, en second lieu, $k=\infty$. En désignant alors par H un nombre aussi grand que l'on voudra, on pourra toujours attribuer au nombre h une valeur assez considérable, pour que, x étant égal ou supérieur à h, la différence

$$f(x+1)-f(x),$$

qui converge vers la limite ∞, devienne constamment supérieure à H; et, en raisonnant comme ci-dessus, on établira la formule

$$\frac{f(h+n)-f(h)}{n}>\text{H}.$$

Si maintenant on pose $h+n=x$, on trouvera, au lieu de l'équation (2), la formule suivante

$$\frac{f(x)}{x}>\frac{f(h)}{x}+\text{H}\left(1-\frac{h}{x}\right),$$

de laquelle on conclura, en faisant converger x vers la limite ∞,

$$\lim\frac{f(x)}{x}>\text{H}.$$

La limite du rapport

$$\frac{f(x)}{x}$$

sera donc supérieure au nombre H, quelque grand qu'il soit. Cette limite supérieure à tout nombre assignable ne peut être que l'infini positif.

Supposons enfin $k=-\infty$. Pour ramener ce dernier cas au précédent, il suffira d'observer que, la différence

$$f(x+1)-f(x)$$

ayant pour limite $-\infty$, la suivante

$$[-f(x+1)]-[-f(x)]$$

aura pour limite $+\infty$. On en conclura que la limite de $\frac{-f(x)}{x}$ est égale à $+\infty$, et par suite celle de $\frac{f(x)}{x}$ à $-\infty$.

Corollaire I. — Pour montrer une application du théorème précédent, supposons

$$f(x)=\text{L}(x),$$

L étant la caractéristique des logarithmes dans un système dont la base surpasse l'unité. On trouvera

$$f(x+1)-f(x)=\text{L}(x+1)-\text{L}(x)=\text{L}\left(1+\frac{1}{x}\right)$$

et, par suite,

$$k=\text{L}\left(1+\frac{1}{\infty}\right)=\text{L}(1)=0.$$

On peut donc affirmer que, x venant à croître indéfiniment, le rapport

$$\frac{\text{L}(x)}{x}$$

convergera vers la limite zéro; et il en résulte que, *dans un système dont la base est supérieure à l'unité, les logarithmes des nombres croissent beaucoup moins rapidement que les nombres eux-mêmes.*

Corollaire II. — Supposons, en second lieu,

$$f(x)=\text{A}^x,$$

A désignant un nombre supérieur à l'unité. On trouvera

$$f(x+1)-f(x)=A^{x+1}-A^x=A^x(A-1)$$

et, par suite,

$$k=A^\infty(A-1)=\infty.$$

On peut donc affirmer que, x venant à croître indéfiniment, le rapport

$$\frac{A^x}{x}$$

converge vers la limite ∞, et il en résulte que *l'exponentielle* A^x, *lorsque le nombre* A *surpasse l'unité, finit par croître beaucoup plus rapidement que la variable* x.

Corollaire III. — On doit observer, au reste, qu'il n'y a lieu à chercher par le théorème I la valeur du rapport

$$\frac{f(x)}{x},$$

correspondante à $x=\infty$, que dans le cas où la fonction $f(x)$ devient infinie avec la variable x. Si cette fonction restait finie pour $x=\infty$, le rapport $\frac{f(x)}{x}$ aurait évidemment zéro pour limite.

Je passe au théorème qui sert à déterminer dans plusieurs cas la valeur de

$$[f(x)]^{\frac{1}{x}}$$

pour $x=\infty$. Voici en quoi il consiste :

Théorème II. — *Si, la fonction $f(x)$ étant positive pour de très grandes valeurs de x, le rapport*

$$\frac{f(x+1)}{f(x)}$$

converge, tandis que x croît indéfiniment, vers la limite k, l'expression

$$[f(x)]^{\frac{1}{x}}$$

convergera en même temps vers la même limite.

Démonstration. — Supposons d'abord que la quantité k, nécessairement positive, ait une valeur finie, et désignons par ε un nombre aussi petit que l'on voudra. Puisque des valeurs croissantes de x font converger le rapport

$$\frac{f(x+1)}{f(x)}$$

vers la limite k, on pourra donner au nombre h une valeur assez considérable pour que, x étant égal ou supérieur à h, le rapport dont il s'agit soit constamment compris entre les limites

$$k-\varepsilon,\quad k+\varepsilon.$$

Cela posé, si l'on désigne par n un nombre entier quelconque, chacune des quantités

$$\frac{f(h+1)}{f(h)},\quad \frac{f(h+2)}{f(h+1)},\quad \ldots,\quad \frac{f(h+n)}{f(h+n-1)},$$

et, par suite, leur moyenne géométrique, savoir

$$\left[\frac{f(h+n)}{f(h)}\right]^{\frac{1}{n}},$$

se trouvera comprise entre les limites $k-\varepsilon$, $k+\varepsilon$. On aura donc

$$\left[\frac{f(h+n)}{f(h)}\right]^{\frac{1}{n}}=k+\alpha,$$

α étant une quantité comprise entre les limites $-\varepsilon$, $+\varepsilon$. Soit maintenant

$$h+n=x.$$

L'équation précédente deviendra

$$\left[\frac{f(x)}{f(h)}\right]^{\frac{1}{x-h}}=k+\alpha, \tag{4}$$

et l'on en conclura

$$f(x)=f(h)(k+\alpha)^{x-h},$$

$$[f(x)]^{\frac{1}{x}}=[f(h)]^{\frac{1}{x}}(k+\alpha)^{1-\frac{h}{x}}. \tag{5}$$

De plus, pour faire croître indéfiniment la valeur de x, il suffira de faire croître indéfiniment le nombre entier n, sans changer la valeur de h. Supposons, en conséquence, que dans l'équation (5) on considère h comme une quantité constante, et x comme une quantité variable qui converge vers la limite ∞. Les quantités

$$[f(h)]^{\frac{1}{x}}, \quad 1-\frac{h}{x},$$

renfermées dans le second membre, convergeront vers la limite 1, et le second membre lui-même vers une limite de la forme

$$k+\alpha,$$

α étant toujours compris entre $-\varepsilon$ et $+\varepsilon$. Par suite, l'expression

$$[f(x)]^{\frac{1}{x}}$$

aura pour limite une quantité comprise entre $k-\varepsilon$ et $k+\varepsilon$. Cette conclusion devant subsister, quelle que soit la petitesse du nombre ε, il en résulte que la limite en question sera précisément la quantité k. En d'autres termes, on aura

$$(6) \qquad \lim [f(x)]^{\frac{1}{x}} = k = \lim \frac{f(x+1)}{f(x)}.$$

Supposons, en second lieu, la quantité k infinie, c'est-à-dire, puisque cette quantité est positive, $k=\infty$. En désignant alors par H un nombre aussi grand que l'on voudra, on pourra toujours attribuer au nombre h une valeur assez considérable pour que, x étant égal ou supérieur à h, le rapport

$$\frac{f(x+1)}{f(x)},$$

qui converge vers la limite ∞, devienne constamment supérieur à H; et, en raisonnant comme ci-dessus, on établira la formule

$$\left[\frac{f(h+n)}{f(h)}\right]^{\frac{1}{n}} > \mathrm{H}.$$

Si maintenant on pose $h+n=x$, on trouvera, au lieu de l'équation (5), la formule suivante

$$[f(x)]^{\frac{1}{x}} > [f(h)]^{\frac{1}{x}} \mathrm{H}^{1-\frac{h}{x}},$$

de laquelle on conclura, en faisant converger x vers la limite ∞,

$$\lim [f(x)]^{\frac{1}{x}} > \mathrm{H}.$$

La limite de l'expression

$$[f(x)]^{\frac{1}{x}}$$

sera donc supérieure au nombre H, quelque grand qu'il soit. Cette limite, supérieure à tout nombre assignable, ne peut être que l'infini positif.

Nota. — On pourrait facilement démontrer l'équation (6), en cherchant par le théorème I la limite vers laquelle converge le logarithme

$$\mathrm{L}[f(x)]^{\frac{1}{x}} = \frac{\mathrm{L}[f(x)]}{x},$$

et repassant ensuite des logarithmes aux nombres.

Corollaire I. — Pour donner une application du théorème II, supposons

$$f(x)=x;$$

on aura

$$\frac{f(x+1)}{f(x)} = \frac{x+1}{x} = 1+\frac{1}{x},$$

et, par suite, en passant aux limites,

$$k=1.$$

Donc, si l'on fait croître indéfiniment la variable x, la fonction

$$x^{\frac{1}{x}}$$

convergera vers la limite 1.

Corollaire II. — Soit, en second lieu,

$$f(x) = ax^n + bx^{n-1} + cx^{n-2} + \ldots = \mathrm{P},$$

en sorte que P désigne un polynôme en x du degré n. On trouvera

$$\frac{f(x+1)}{f(x)} = \frac{a\left(1+\frac{1}{x}\right)^n + \frac{b}{x}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{n-1} + \frac{c}{x^2}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{n-2} + \ldots}{a + \frac{b}{x} + \frac{c}{x^2} + \ldots}$$

et, en passant aux limites,

$$k = \frac{a}{a} = 1.$$

Si donc P représente un polynôme entier quelconque, $\mathrm{P}^{\frac{1}{x}}$ aura pour limite 1.

Corollaire III. — Soit enfin

$$f(x) = \mathrm{L}(x).$$

On trouvera

$$\frac{f(x+1)}{f(x)} = \frac{\mathrm{L}(x+1)}{\mathrm{L}(x)} = \frac{\mathrm{L}(x) + \mathrm{L}\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\mathrm{L}(x)} = 1 + \frac{\mathrm{L}\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\mathrm{L}(x)}$$

et, en passant aux limites,

$$k = 1.$$

Par suite, $[\mathrm{L}(x)]^{\frac{1}{x}}$ a encore pour limite l'unité.

Les théorèmes I et II subsistent évidemment dans le cas même où la variable x est considérée comme ne pouvant admettre que des valeurs entières. En effet, pour rendre applicables à ce cas particulier les démonstrations que nous avons données des deux théorèmes, il suffit de concevoir que la quantité désignée par h dans chacune de ces démonstrations devienne un nombre entier très considérable. Si, dans le même cas, on représente les valeurs successives de la fonction $f(x)$ correspondantes aux diverses valeurs entières de x, savoir

$$f(1),\quad f(2),\quad f(3),\quad \ldots,\quad f(n),$$

par

$$\mathrm{A}_1,\quad \mathrm{A}_2,\quad \mathrm{A}_3,\quad \ldots,\quad \mathrm{A}_n,$$

on obtiendra à la place des théorèmes I et II les propositions suivantes :

Théorème III. — *Si la suite des quantités*

$$\mathrm{A}_1,\quad \mathrm{A}_2,\quad \mathrm{A}_3,\quad \ldots,\quad \mathrm{A}_n,\quad \ldots$$

est telle que la différence entre deux termes consécutifs de cette suite, savoir

$$\mathrm{A}_{n+1} - \mathrm{A}_n,$$

converge constamment, pour des valeurs croissantes de n, vers une limite fixe A, le rapport

$$\frac{\mathrm{A}_n}{n}$$

convergera en même temps vers la même limite.

Théorème IV. — *Si la suite des nombres*

$$\mathrm{A}_1,\quad \mathrm{A}_2,\quad \mathrm{A}_3,\quad \ldots,\quad \mathrm{A}_n,\quad \ldots$$

est telle que le rapport entre deux termes consécutifs, savoir

$$\frac{\mathrm{A}_{n+1}}{\mathrm{A}_n},$$

converge constamment, pour des valeurs croissantes de n, vers une limite fixe A, l'expression

$$(\mathrm{A}_n)^{\frac{1}{n}}$$

convergera en même temps vers la même limite.

Pour montrer une application du dernier théorème, supposons

$$\mathrm{A}_n = 1.2.3\ldots n.$$

La suite A_1, A_2, ... deviendra

$$1,\quad 1.2,\quad 1.2.3,\quad \ldots,\quad 1.2.3\ldots(n-1)n,\quad \ldots,$$

et le rapport entre deux termes consécutifs de la même suite, savoir

$$\frac{\mathrm{A}_{n+1}}{\mathrm{A}_n} = \frac{1.2.3\ldots n(n+1)}{1.2.3\ldots n} = n+1,$$

convergera évidemment, pour des valeurs croissantes de n, vers la limite ∞. Par suite, l'expression

$$(A_n)^{\frac{1}{n}} = (1.2.3\ldots n)^{\frac{1}{n}}$$

converge vers la même limite.

On trouverait, au contraire, que l'expression

$$\left(\frac{1}{1.2.3\ldots n}\right)^{\frac{1}{n}}$$

converge, pour des valeurs croissantes de n, vers la limite zéro.

Souvent, à l'aide des théorèmes I et II, on peut déterminer la valeur singulière que reçoit une fonction composée de la variable x, tandis que cette variable s'évanouit. Ainsi, par exemple, si l'on veut obtenir la valeur singulière de x^x correspondante à $x = 0$, il suffira de chercher la limite vers laquelle converge, pour des valeurs croissantes de x, l'expression $\left(\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{x}} = \frac{1}{x^{\frac{1}{x}}}$. Cette limite, en vertu du théorème II (corollaire I), est égale à l'unité.

De même, on conclurait du théorème I (corollaire I) que la fonction

$$x\,\mathrm{L}(x)$$

s'évanouit avec la variable x.

Lorsque les deux termes d'une fraction sont des quantités infiniment petites, dont les valeurs numériques décroissent indéfiniment avec celle de la variable α, la valeur singulière que reçoit cette fraction, pour $\alpha = 0$, est tantôt finie, tantôt nulle ou infinie. En effet, désignons par k, k' deux constantes finies qui ne soient pas nulles, et par ε, ε' deux nombres variables qui convergent avec α vers la limite zéro. Deux infiniment petits, l'un de l'ordre n, l'autre de l'ordre n', pourront être représentés respectivement par

$$k\alpha^n(1 \pm \varepsilon), \qquad k'\alpha^{n'}(1 \pm \varepsilon'),$$

et leur rapport, savoir

$$\frac{k'\alpha^{n'}(1 \pm \varepsilon')}{k\alpha^n(1 \pm \varepsilon)} = \frac{k'}{k}\,\frac{1 \pm \varepsilon'}{1 \pm \varepsilon}\,\alpha^{n'-n} = \frac{k'}{k}\,\frac{1 \pm \varepsilon'}{1 \pm \varepsilon}\,\frac{1}{\alpha^{n-n'}},$$

aura évidemment pour limite

$$\frac{k'}{k}, \quad \text{si l'on suppose} \quad n' = n,$$

$$0, \quad \text{si l'on suppose} \quad n' > n,$$

$$\pm\infty, \quad \text{si l'on suppose} \quad n' < n.$$

On prouverait de même que *la limite vers laquelle converge le rapport de deux quantités infiniment grandes, tandis que leurs valeurs numériques croissent indéfiniment avec celle d'une même variable x, peut être nulle, finie ou infinie.* Seulement, cette limite a un signe déterminé, constamment égal au produit des signes des deux quantités que l'on considère.

Parmi les fractions dont les deux termes convergent avec la variable α vers la limite zéro, on doit placer la suivante

$$\frac{f(x+\alpha) - f(x)}{\alpha},$$

toutes les fois qu'on attribue à la variable x une valeur dans le voisinage de laquelle la fonction $f(x)$ reste continue. En effet, dans cette hypothèse, la différence

$$f(x+\alpha) - f(x)$$

est une quantité infiniment petite. On peut même remarquer qu'elle est en général un infiniment petit du premier ordre, en sorte que le rapport

$$\frac{f(x+\alpha) - f(x)}{\alpha}$$

converge ordinairement, tandis que la valeur numérique de α diminue, vers une limite finie différente de zéro. Cette limite sera, par exemple,

$$2x, \quad \text{si l'on prend} \quad f(x) = x^2$$

et

$$-\frac{a}{x^2}, \quad \text{si l'on prend} \quad f(x) = \frac{a}{x}.$$

Dans le cas particulier où l'on suppose $x = 0$, le rapport

$$\frac{f(x+\alpha)-f(x)}{\alpha}$$

se réduit à cet autre

$$\frac{f(\alpha)-f(0)}{\alpha}.$$

Parmi les rapports de cette dernière espèce, nous nous bornerons ici à considérer le suivant

$$\frac{\sin\alpha}{\alpha}.$$

Comme il peut être mis sous la forme

$$\frac{\sin(-\alpha)}{-\alpha},$$

sa limite restera la même, quel que soit le signe de α. Cela posé, concevons que l'arc α reçoive une valeur positive très petite. La corde de l'arc double 2α étant représentée par $2\sin\alpha$, on aura évidemment $2\alpha > 2\sin\alpha$ et, par suite,

$$\alpha > \sin\alpha.$$

De plus, la somme des tangentes menées aux extrémités de l'arc 2α étant représentée par $2\tang\alpha$, et formant une portion de polygone qui enveloppe cet arc, on aura encore $2\tang\alpha > 2\alpha$ et, par conséquent,

$$\tang\alpha > \alpha.$$

En réunissant les deux formules qu'on vient d'établir, on trouvera

$$\sin\alpha < \alpha < \tang\alpha;$$

puis, en remettant pour $\tang\alpha$ sa valeur,

$$\sin\alpha < \alpha < \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$$

et, par suite,

$$1 < \frac{\alpha}{\sin\alpha} < \frac{1}{\cos\alpha},$$

$$1 > \frac{\sin\alpha}{\alpha} > \cos\alpha.$$

Or, tandis que α diminue, $\cos\alpha$ converge vers la limite 1 : il en sera donc de même *a fortiori* du rapport $\frac{\sin\alpha}{\alpha}$ toujours compris entre 1 et $\cos\alpha$, en sorte qu'on aura

$$(7) \qquad \lim\frac{\sin\alpha}{\alpha} = 1.$$

La recherche des limites vers lesquelles convergent les rapports $\frac{f(x+\alpha)-f(x)}{\alpha}$, $\frac{f(\alpha)-f(0)}{\alpha}$ étant un des principaux objets du Calcul infinitésimal, nous ne nous y arrêterons pas davantage.

Il nous reste à examiner les valeurs singulières des fonctions de plusieurs variables. Quelquefois ces valeurs sont complètement déterminées et indépendantes des relations que l'on pourrait établir entre les variables. Ainsi, par exemple, si l'on désigne par

$$\alpha, \quad 6, \quad x, \quad y$$

quatre variables positives, dont les deux premières convergent vers la limite zéro et les deux dernières vers la limite ∞, on reconnaîtra sans peine que les expressions

$$\alpha 6, \quad xy, \quad \frac{\alpha}{x}, \quad \frac{y}{6}, \quad \alpha^y, \quad x^y$$

ont pour limites respectives

$$0, \quad \infty, \quad 0, \quad \infty, \quad 0, \quad \infty.$$

Mais le plus souvent la valeur singulière d'une fonction de plusieurs variables ne peut être entièrement déterminée que dans le cas particulier où, en faisant converger ces variables vers leurs limites respectives, on établit entre elles certaines relations; et, tant que ces relations ne sont pas fixées, la valeur singulière dont il s'agit est une quantité ou totalement indéterminée, ou seulement assujettie à rester comprise entre des limites connues. Ainsi, comme on l'a remarqué plus haut, la valeur singulière à laquelle se réduit le rapport de deux variables infiniment petites, dans le cas où chacune de ces variables s'évanouit, peut être une quantité quelconque finie, nulle ou infinie.

En d'autres termes, cette valeur singulière sera complètement indéterminée. Si, au lieu de deux variables infiniment petites, on considère deux variables infiniment grandes, on trouvera que le rapport de ces dernières, tandis que leurs valeurs numériques croissent indéfiniment, converge encore vers une limite arbitraire, mais positive ou négative, suivant que les deux variables sont de même signe ou de signes contraires. Il est également facile de s'assurer que le produit d'une variable infiniment petite par une variable infiniment grande a pour limite une quantité complètement indéterminée.

Afin de présenter une dernière application des principes qu'on vient d'établir, cherchons quelles valeurs il faut attribuer aux variables x et y pour que la valeur de la fonction

$$y^{\frac{1}{x}}$$

devienne indéterminée. Si l'on désigne par A un nombre supérieur à l'unité, et par L la caractéristique des logarithmes dans le système dont la base est A, on aura évidemment

$$y = A^{L(y)},$$

et, par suite,

$$y^{\frac{1}{x}} = A^{\frac{L(y)}{x}}.$$

Or il est clair que l'expression

$$A^{\frac{L(y)}{x}}$$

convergera vers une limite indéterminée, lorsque le rapport

$$\frac{L(y)}{x}$$

convergera lui-même vers une semblable limite, ce qui arrivera dans deux cas différents, savoir : 1° lorsque $L(y)$ et x seront deux quantités infiniment petites, c'est-à-dire lorsque x et y auront pour limites respectives o et 1; 2° lorsque $L(y)$ et x seront deux quantités infiniment grandes, c'est-à-dire lorsque, x ayant une limite infinie, y aura

pour limite o ou ∞. Il est bon d'observer que, dans l'un et l'autre cas, la limite indéterminée de l'expression

$$A^{\frac{L(y)}{x}} = y^{\frac{1}{x}}$$

sera nécessairement positive. Il peut même arriver que cette limite soit assujettie à demeurer comprise entre les valeurs extrêmes o et 1, ou bien entre les suivantes 1 et ∞. Concevons, par exemple, que chacune des variables x et y converge vers la limite ∞. Dans ce cas, la limite du rapport

$$\frac{L(y)}{x}$$

étant une quantité positive quelconque, celle de $y^{\frac{1}{x}} = A^{\frac{L(y)}{x}}$ ne pourra être qu'une quantité moyenne entre 1 et ∞. Cette moyenne sera d'ailleurs indéterminée, tant que l'on n'établira pas entre les variables infiniment grandes x et y de relation particulière. Mais, si l'on suppose

$$y = f(x),$$

$f(y)$ désignant une fonction qui croisse indéfiniment avec la variable x, alors la moyenne dont il s'agit, n'étant autre chose que la limite de

$$[f(x)]^{\frac{1}{x}},$$

obtiendra une valeur déterminée, que l'on pourra souvent calculer à l'aide du théorème II.

Si, au lieu de la fonction $y^{\frac{1}{x}}$, on eût considéré la suivante

$$y^x,$$

on aurait trouvé que cette dernière devient indéterminée : 1° lorsque la variable y converge vers la limite 1 et la variable x vers l'une des suivantes $-\infty$, $+\infty$; 2° lorsque, la variable x ayant zéro pour limite, y converge vers zéro ou vers l'infini positif.

Quelquefois on rencontre dans le calcul des expressions singulières qui ne peuvent être considérées que comme des limites vers lesquelles convergent des fonctions de plusieurs variables, tandis que ces mêmes variables deviennent infiniment petites ou infiniment grandes, ou même, plus généralement, convergent vers des limites fixes. Telles sont, par exemple, les expressions

$$0 \times 0, \quad \frac{0}{0}, \quad \infty \times \infty, \quad \frac{\infty}{\infty}, \quad 0 \times \infty, \quad 0^0, \quad 1^\infty, \quad \ldots,$$

parmi lesquelles on doit regarder les deux premières comme les limites vers lesquelles convergent le produit et le rapport de deux variables infiniment petites, les deux suivantes comme les limites du produit et du rapport de deux variables positives infiniment grandes, etc. Si l'on considère en particulier les expressions singulières que produisent les fonctions

$$x+y, \quad xy, \quad \frac{x}{y}, \quad y^x, \quad y^{\frac{1}{x}},$$

on trouvera que les valeurs de ces mêmes expressions, lorsque les variables restent indépendantes, peuvent être aisément fixées par ce qui précède. Les équations qui serviront à déterminer ces valeurs seront respectivement

Pour les fonctions		
$x+y$	$\infty + \infty = \infty,$	$\infty - \infty = \mathrm{M}((-\infty, +\infty));$
xy	$0 \times 0 = 0,$	$0 \times \infty = 0 \times -\infty = \mathrm{M}((-\infty, +\infty)),$
	$\infty \times \infty = -\infty \times -\infty = \infty,$	$\infty \times -\infty = -\infty;$
$\frac{x}{y}$	$\frac{0}{0} = \mathrm{M}((-\infty, +\infty)),$	$\frac{0}{\infty} = \frac{0}{-\infty} = 0, \quad \frac{\infty}{0} = \frac{-\infty}{0} = \pm\infty,$
	$\frac{\infty}{\infty} = \frac{-\infty}{-\infty} = \mathrm{M}((0, \infty)),$	$\frac{\infty}{-\infty} = \frac{-\infty}{\infty} = \mathrm{M}((-\infty, 0));$
y^x	$0^0 = \infty^0 = \mathrm{M}((0, \infty)),$	$0^\infty = \infty^{-\infty} = 0,$
	$0^{-\infty} = \infty^\infty = \infty,$	$1^\infty = 1^{-\infty} = \mathrm{M}((0, \infty));$
$y^{\frac{1}{x}}$	$0^{\frac{1}{0}} = \infty^{\frac{1}{0}} = 0$ ou $\infty,$	$0^{\frac{1}{\infty}} = \infty^{\frac{1}{-\infty}} = \mathrm{M}((0, 1)),$
	$0^{\frac{1}{-\infty}} = \infty^{\frac{1}{\infty}} = \mathrm{M}((1, \infty)),$	$1^{\frac{1}{0}} = \mathrm{M}((0, \infty)).$

CHAPITRE III.

DES FONCTIONS SYMÉTRIQUES ET DES FONCTIONS ALTERNÉES. USAGE DE CES FONCTIONS POUR LA RÉSOLUTION DES ÉQUATIONS DU PREMIER DEGRÉ A UN NOMBRE QUELCONQUE D'INCONNUES. DES FONCTIONS HOMOGÈNES.

§ I. — *Des fonctions symétriques.*

Une fonction *symétrique* de plusieurs quantités est celle qui conserve la même valeur et le même signe après un échange quelconque opéré entre ces quantités. Ainsi, par exemple, chacune des fonctions

$$x+y, \quad x^y+y^x, \quad xyz, \quad \sin x + \sin y + \sin z, \quad \ldots$$

est symétrique par rapport aux variables qu'elle renferme, tandis que

$$x-y, \quad x^y, \quad \ldots$$

sont des fonctions non symétriques des variables x et y. De même encore

$$b+c, \quad b^2+c^2, \quad bc, \quad \ldots$$

sont des fonctions symétriques des deux quantités b, c;

$$b+c+d, \quad b^2+c^2+d^2, \quad bc+bd+cd, \quad bcd$$

sont des fonctions symétriques des trois quantités b, c, d; ....

Parmi les fonctions symétriques de plusieurs quantités b, c, ..., g, h, on doit distinguer celles qui servent de coefficients aux diverses puissances de a dans le développement du produit

$$(a-b)(a-c)\ldots(a-g)(a-h),$$

et dont les propriétés conduisent à une solution très élégante de plusieurs équations du premier degré entre n variables $x, y, z, \ldots, u, v$, lorsque ces équations sont de la forme

$$(1)\qquad \left\{\begin{array}{l} x + y + z + \ldots + u + v = k_0, \\ a\,x + b\,y + c\,z + \ldots + g\,u + h\,v = k_1, \\ a^2 x + b^2 y + c^2 z + \ldots + g^2 u + h^2 v = k_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ a^{n-1} x + b^{n-1} y + c^{n-1} z + \ldots + g^{n-1} u + h^{n-1} v = k_{n-1}. \end{array}\right.$$

En effet, soient

$$\begin{array}{l} A_{n-2} = -(b + c + \ldots + g + h), \\ A_{n-3} = bc + \ldots + bg + bh + \ldots + cg + ch + \ldots + gh, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ A_0 \quad = \pm\, bc \ldots gh \end{array}$$

les fonctions symétriques dont il s'agit, en sorte qu'on ait

$$a^{n-1} + A_{n-2} a^{n-2} + \ldots + A_1 a + A_0 = (a-b)(a-c)(a-d)\ldots.$$

Si, dans cette dernière formule, on remplace successivement a par b, par c, ..., par g, par h, on trouvera

$$\begin{array}{l} b^{n-1} + A_{n-2} b^{n-2} + \ldots + A_1 b + A_0 = 0, \\ c^{n-1} + A_{n-2} c^{n-2} + \ldots + A_1 c + A_0 = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ g^{n-1} + A_{n-2} g^{n-2} + \ldots + A_1 g + A_0 = 0, \\ h^{n-1} + A_{n-2} h^{n-2} + \ldots + A_1 h + A_0 = 0. \end{array}$$

Si l'on ajoute ensuite membre à membre les équations (1), après avoir multiplié la première par A_0, la seconde par A_1, ..., l'avant-dernière par A_{n-2}, et la dernière par l'unité, on obtiendra la suivante

$$(a^{n-1} + A_{n-2} a^{n-2} + \ldots + A_1 a + A_0)\, x = k_{n-1} + A_{n-2} k_{n-2} + \ldots + A_1 k_1 + A_0 k_0,$$

et l'on en conclura

$$(2)\quad x = \frac{k_{n-1} - (b + c + \ldots + g + h) k_{n-2} + (bc + \ldots + bg + bh + \ldots + cg + ch + \ldots + gh) k_{n-3} - \ldots \pm bc \ldots gh\, k_0}{(a-b)(a-c)\ldots(a-g)(a-h)}.$$

On déterminerait par un procédé analogue les valeurs des autres inconnues $y, z, \ldots, u, v$.

Lorsque, dans les équations (1), on substitue aux constantes

$$k_0,\quad k_1,\quad k_2,\quad \ldots,\quad k_{n-1}$$

les puissances entières successives d'une même quantité k, savoir

$$k^0 = 1,\quad k,\quad k^2,\quad \ldots,\quad k^{n-1},$$

la valeur trouvée pour x se réduit à

$$(3)\qquad x = \frac{(k-b)(k-c)\ldots(k-g)(k-h)}{(a-b)(a-c)\ldots(a-g)(a-h)}.$$

§ II. — *Des fonctions alternées.*

Une fonction *alternée* de plusieurs quantités est celle qui change de signe, mais en conservant au signe près la même valeur, lorsqu'on échange deux de ces quantités entre elles; en sorte que, par une suite de semblables échanges, la fonction devienne alternativement positive et négative. D'après cette définition,

$$x - y,\quad xy^2 - x^2 y,\quad \mathrm{L}\left(\frac{x}{y}\right),\quad \sin x - \sin y,\quad \ldots$$

sont des fonctions alternées des deux variables x et y;

$$(x-y)(x-z)(y-z)$$

est une fonction alternée des trois variables x, y, z, et ainsi de suite.

Parmi les fonctions alternées de plusieurs variables

$$x,\quad y,\quad z,\quad \ldots,\quad u,\quad v,$$

on doit distinguer celles qui sont rationnelles et entières par rapport à chacune de ces mêmes variables. Supposons une semblable fonction développée et mise sous la forme d'un polynôme. Un de ses termes, pris au hasard, sera de la forme

$$k x^p y^q z^r \dots u^s v^t,$$

$p, q, r, \dots, s, t$ désignant des nombres entiers, et k un coefficient quelconque. De plus, la fonction devant changer de signe, mais conserver au signe près la même valeur, après l'échange mutuel des deux variables x et y, il faudra de toute nécessité qu'au terme dont il s'agit corresponde un autre terme de signe contraire

$$-k x^q y^p z^r \dots u^s v^t,$$

déduit du premier en vertu de cet échange. La fonction se composera donc de termes alternativement positifs et négatifs, qui, réunis deux à deux, produiront des binômes de la forme

$$k x^p y^q z^r \dots u^s v^t - k x^q y^p z^r \dots u^s v^t = k(x^p y^q - x^q y^p) z^r \dots u^s v^t.$$

Dans chaque binôme de cette espèce, p, q seront nécessairement deux nombres entiers distincts l'un de l'autre, et, comme la différence

$$x^p y^q - x^q y^p$$

est évidemment divisible par $y - x$ ou, ce qui revient au même, par $x - y$, il en résulte que chaque binôme, et par suite la somme des binômes ou la fonction proposée, sera divisible par

$$\pm(y - x).$$

Comme on peut d'ailleurs, dans les raisonnements qui précèdent, substituer aux variables x, y deux autres variables quelconques x et z ou y et $z, \dots$, on obtiendra définitivement les conclusions suivantes :

1° Une fonction alternée, mais entière, de plusieurs variables $x, y, z, \dots, u, v$, est composée de termes alternativement positifs et négatifs, dans chacun desquels les diverses variables ont toutes des exposants différents;

2° Une semblable fonction est divisible par le produit des différences

$$(1)\quad \left\{\begin{array}{lllll} \pm(y-x), & \pm(z-x), & \dots, & \pm(u-x), & \pm(v-x), \\ & \pm(z-y), & \dots, & \pm(u-y), & \pm(v-y), \\ & & \dots, & \pm(u-z), & \pm(v-z), \\ & & & \dots\dots\dots, & \dots\dots\dots, \\ & & & & \pm(v-u), \end{array}\right.$$

prises chacune avec tel signe que l'on voudra.

Le produit dont il est ici question, ainsi qu'on peut aisément le reconnaître, est lui-même une fonction alternée des variables que l'on considère. Pour le prouver, il suffit de faire voir que ce produit change de signe, en conservant au signe près la même valeur, après l'échange mutuel de deux variables, x et y par exemple. Or, en effet, suivant que l'on adopte pour chaque différence le signe $+$ ou le signe $-$, ce produit se trouve égal soit à $+\varphi$, soit à $-\varphi$, la valeur de φ étant déterminée par l'équation

$$(2)\quad \varphi = (y-x)(z-x)\dots(u-x)(v-x) \times (z-y)\dots(u-y)(v-y) \times \dots \times (v-u)$$

et, comme il est évident que cette valeur de φ change seulement de signe en vertu de l'échange mutuel des variables x et y, on peut conclure qu'il en sera de même d'une fonction équivalente soit à $+\varphi$, soit à $-\varphi$.

Concevons, pour fixer les idées, que l'on prenne chacune des différences (1) avec le signe $+$. Le produit de toutes ces différences sera la fonction φ déterminée par l'équation (2) ou, ce qui revient au même, par la suivante

$$(3)\quad \varphi = (y-x) \times (z-x)(z-y) \times \dots \times (v-x)(v-y)(v-z)\dots(v-u).$$

Si, de plus, on appelle n le nombre des variables $x, y, z, \dots, u, v$, $n-1$ sera évidemment le nombre des différences qui renferment une même variable : et par suite, dans chaque terme de la fonction φ développée et mise sous la forme d'un polynôme, l'exposant d'une variable quelconque ne pourra surpasser $n-1$. Enfin, comme dans un même terme les différentes variables devront être affectées d'exposants différents, il est clair que ces exposants seront respectivement égaux aux nombres

$$0, \quad 1, \quad 2, \quad 3, \quad \ldots, \quad n-1.$$

Chaque terme, abstraction faite du signe et du coefficient numérique, sera donc équivalent au produit des diverses variables rangées dans un ordre quelconque, et respectivement élevées aux puissances marquées par les nombres $0, 1, 2, 3, \ldots, n-1$. On doit ajouter que chaque produit de cette espèce se trouvera compris une seule fois, tantôt avec le signe $+$, tantôt avec le signe $-$, dans le développement de la fonction φ. Par exemple, le produit

$$x^0 y^1 z^2 \ldots u^{n-2} v^{n-1}$$

ne pourra être formé que par la multiplication des premières lettres des facteurs binômes qui composent le second membre de l'équation (3).

A l'aide des principes que nous venons d'établir, il est facile de construire en entier le développement de la fonction φ, et de démontrer ses diverses propriétés (*voir* à ce sujet la Note IV). Nous allons maintenant faire voir comment on se trouve conduit, par la considération d'un semblable développement, à la résolution des équations générales du premier degré à plusieurs variables.

Soient

$$(4) \quad \begin{cases} a_0 x + b_0 y + c_0 z + \ldots + g_0 u + h_0 v = k_0, \\ a_1 x + b_1 y + c_1 z + \ldots + g_1 u + h_1 v = k_1, \\ a_2 x + b_2 y + c_2 z + \ldots + g_2 u + h_2 v = k_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ a_{n-1} x + b_{n-1} y + c_{n-1} z + \ldots + g_{n-1} u + h_{n-1} v = k_{n-1} \end{cases}$$

n équations linéaires entre les n variables ou inconnues

$$x, \quad y, \quad z, \quad \ldots, \quad u, \quad v,$$

et les constantes

$$\begin{array}{ccccccc} a_0, & b_0, & c_0, & \ldots, & g_0, & h_0, & k_0, \\ a_1, & b_1, & c_1, & \ldots, & g_1, & h_1, & k_1, \\ a_2, & b_2, & c_2, & \ldots, & g_2, & h_2, & k_2, \\ \ldots, & \ldots, & \ldots, & \ldots, & \ldots, & \ldots, & \ldots, \\ a_{n-1}, & b_{n-1}, & c_{n-1}, & \ldots, & g_{n-1}, & h_{n-1}, & k_{n-1}, \end{array}$$

choisies arbitrairement. Représentons, en outre, par P ce que devient la fonction φ lorsqu'on y remplace les variables

$$x, \quad y, \quad z, \quad \ldots, \quad u, \quad v$$

par les lettres

$$a, \quad b, \quad c, \quad \ldots, \quad g, \quad h$$

considérées comme autant de nouvelles quantités, en sorte qu'on ait

$$(5) \quad \mathrm{P} = (b-a) \times (c-a)(c-b) \times \ldots \times (h-a)(h-b)(h-c)\ldots(h-g).$$

Le produit P sera la fonction alternée la plus simple des quantités $a, b, c, \ldots, g, h$; et, si l'on développe cette fonction par la multiplication algébrique de ses facteurs binômes, chaque terme du développement sera équivalent, au signe près, au produit de ces mêmes quantités rangées dans un certain ordre, et respectivement élevées à des puissances marquées par les exposants $0, 1, 2, 3, \ldots, n-1$. Cela posé, concevons que dans chaque terme on remplace les exposants des lettres par des indices, en écrivant, par exemple,

$$a_0 b_1 c_2 \ldots g_{n-2} h_{n-1},$$

au lieu du terme

$$a^0 b^1 c^2 \ldots g^{n-2} h^{n-1},$$

et désignons par D ce que devient alors le développement du produit P. La quantité D aura évidemment, tout comme le produit P, la propriété de changer de signe lorsqu'on échangera entre elles deux des lettres données, par exemple les deux lettres a et b. Il est aisé d'en conclure que la valeur de D sera réduite à zéro, si l'on écrit dans tous ses termes la lettre b à la place de la lettre a, sans écrire en même temps a à la place de b. Il en serait de même si l'on écrivait partout à la place de la lettre a l'une des lettres $c, \ldots, g, h$. Par suite, si, dans le polynôme D, on désigne la somme des termes qui ont a_0 pour facteur commun par $A_0 a_0$, la somme des termes qui renferment le facteur a_1 par $A_1 a_1, \ldots$; enfin la somme des termes qui ont pour facteur a_{n-1} par $A_{n-1} a_{n-1}$, en sorte que la valeur de D soit donnée par l'équation

$$(6) \qquad D = A_0 a_0 + A_1 a_1 + A_2 a_2 + \ldots + A_{n-1} a_{n-1},$$

on trouvera, en écrivant successivement dans le second membre de cette équation les lettres $b, c, \ldots, g, h$ à la place de la lettre a,

$$(7) \qquad \begin{cases} 0 = A_0 b_0 + A_1 b_1 + A_2 b_2 + \ldots + A_{n-1} b_{n-1}, \\ 0 = A_0 c_0 + A_1 c_1 + A_2 c_2 + \ldots + A_{n-1} c_{n-1}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ 0 = A_0 g_0 + A_1 g_1 + A_2 g_2 + \ldots + A_{n-1} g_{n-1}, \\ 0 = A_0 h_0 + A_1 h_1 + A_2 h_2 + \ldots + A_{n-1} h_{n-1}. \end{cases}$$

Supposons maintenant qu'on ajoute membre à membre les équations (4), après avoir multiplié la première par A_0, la seconde par A_1, la troisième par $A_2, \ldots$, la dernière par A_{n-1}. On verra, dans cette addition, les coefficients des inconnues $y, z, \ldots, u, v$ disparaître d'eux-mêmes en vertu des formules (7), et l'on obtiendra définitivement l'équation

$$D x = A_0 k_0 + A_1 k_1 + A_2 k_2 + \ldots + A_{n-1} k_{n-1},$$

de laquelle on conclura

$$(8) \qquad x = \frac{A_0 k_0 + A_1 k_1 + A_2 k_2 + \ldots + A_{n-1} k_{n-1}}{D}.$$

Comme d'ailleurs des deux quantités

$$D \quad \text{et} \quad A_0 k_0 + A_1 k_1 + A_2 k_2 + \ldots + A_{n-1} k_{n-1}$$

la première est ce que devient le développement du produit

$$(b-a) \times (c-a)(c-b) \times \ldots \times (h-a)(h-b)(h-c)\ldots(h-g),$$

lorsque dans ce développement on remplace les exposants des lettres par des indices, et la seconde, ce que devient la quantité D, équivalente au second membre de la formule (6), lorsqu'on y substitue la lettre k à la lettre a, il en résulte que la valeur de x peut être censée déterminée par l'équation

$$(9) \qquad x = \frac{(b-k) \times (c-k)(c-b) \times \ldots \times (h-k)(h-b)(h-c)\ldots(h-g)}{(b-a) \times (c-a)(c-b) \times \ldots \times (h-a)(h-b)(h-c)\ldots(h-g)},$$

pourvu que l'on convienne de développer les deux termes de la fraction qui forme le second membre, et de remplacer dans chaque développement les exposants des lettres par des indices. La valeur que l'équation (9) prise à la lettre semble fournir pour l'inconnue x, n'étant pas exacte et ne pouvant le devenir que par suite des modifications énoncées, est ce que nous nommerons une *valeur symbolique* de cette inconnue.

La méthode qui nous a conduits à la valeur symbolique de x fournirait également celles des autres inconnues. Pour montrer une application de cette méthode, supposons qu'il s'agisse de résoudre les équations linéaires

$$(10) \qquad \begin{cases} a_0 x + b_0 y + c_0 z = k_0, \\ a_1 x + b_1 y + c_1 z = k_1, \\ a_2 x + b_2 y + c_2 z = k_2. \end{cases}$$

On trouvera dans cette hypothèse, pour la valeur symbolique de l'inconnue x,

$$(11) \qquad \begin{cases} x = \dfrac{(b-k)(c-k)(c-b)}{(b-a)(c-a)(c-b)} \\ \quad = \dfrac{k^0 b^1 c^2 - k^0 b^2 c^1 + k^1 b^2 c^0 - k^1 b^0 c^2 + k^2 b^0 c^1 - k^2 b^1 c_0}{a^0 b^1 c^2 - a^0 b^2 c^1 + a^1 b^2 c^0 - a^1 b^0 c^2 + a^2 b^0 c^1 - a^2 b^1 c_0}; \end{cases}$$

et par suite, la valeur véritable de la même inconnue sera

$$(12)\qquad x = \frac{k_0 b_1 c_2 - k_0 b_2 c_1 + k_1 b_2 c_0 - k_1 b_0 c_2 + k_2 b_0 c_1 - k_2 b_1 c_0}{a_0 b_1 c_2 - a_0 b_2 c_1 + a_1 b_2 c_0 - a_1 b_0 c_2 + a_2 b_0 c_1 - a_2 b_1 c_0}.$$

Nota. — Lorsque, dans les équations (4), on remplace les indices des lettres $a, b, c, \ldots, g, h, k$ par des exposants, la valeur symbolique de x donnée par l'équation (9) devient évidemment la valeur véritable, et coïncide, comme on devait s'y attendre, avec celle que fournit la formule (3) du § I.

§ III. — *Des fonctions homogènes.*

Une fonction de plusieurs variables $x, y, z, \ldots$ est *homogène* lorsque, t désignant une nouvelle variable indépendante des premières, le changement de x en tx, de y en ty, de z en tz, ... fait varier cette fonction dans le rapport de l'unité à une puissance déterminée de t, et l'exposant de cette puissance est ce qu'on nomme le *degré* de la fonction homogène. En d'autres termes,

$$f(x, y, z, \ldots)$$

sera une fonction homogène du degré a par rapport aux variables x, $y, z, \ldots$, si l'on a, quel que soit t,

$$(1)\qquad f(tx, ty, tz, \ldots) = t^a f(x, y, z, \ldots).$$

Ainsi, par exemple,

$$x^2 + xy + y^2, \quad \sqrt{xy}, \quad ly - lx$$

sont trois fonctions homogènes des variables x et y, la première du second degré, la deuxième du premier degré, et la troisième d'un degré nul. Une fonction entière des variables $x, y, z, \ldots$, composée de termes tellement choisis, que la somme des exposants des diverses

variables soit la même dans tous les termes, est évidemment homogène.

Si, dans la formule (1), on fait $t = \frac{1}{x}$, on en conclura

$$(2)\qquad f(x, y, z, \ldots) = x^a f\left(1, \frac{y}{x}, \frac{z}{x}, \ldots\right).$$

Cette dernière équation établit une propriété des fonctions homogènes qu'on peut énoncer de la manière suivante :

Lorsqu'une fonction de plusieurs variables $x, y, z, \ldots$ est homogène, elle équivaut au produit de l'une quelconque des variables élevée à une certaine puissance par une fonction des rapports entre ces mêmes variables combinées deux à deux.

On peut ajouter que cette propriété appartient exclusivement aux fonctions homogènes. Et, en effet, supposons $f(x, y, z, \ldots)$ équivalente au produit de x^a par une fonction des rapports entre les variables $x, y, z, \ldots$ combinées deux à deux. Comme on pourra exprimer tous ces rapports au moyen de ceux qui ont x pour dénominateur, en écrivant, par exemple, au lieu de $\frac{z}{y}$,

$$\frac{\left(\frac{z}{x}\right)}{\left(\frac{y}{x}\right)},$$

il en résulte que la valeur de $f(x, y, z, \ldots)$ sera donnée par une équation de la forme

$$f(x, y, z, \ldots) = x^a \varphi\left(\frac{y}{x}, \frac{z}{x}, \ldots\right).$$

Cette équation devra subsister, quelles que soient les valeurs de x, y, $z, \ldots$; et, si l'on y remplace

$$x \text{ par } tx, \quad y \text{ par } ty, \quad z \text{ par } tz, \quad \ldots,$$

elle deviendra

$$f(tx, ty, tz, \ldots) = t^a x^a \varphi\left(\frac{y}{x}, \frac{z}{x}, \ldots\right).$$

Par suite, on aura, quel que soit t, dans l'hypothèse admise,

$$f(tx, ty, tz, \ldots) = t^a f(x, y, z, \ldots),$$

ou, en d'autres termes,

$$f(x, y, z, \ldots)$$

sera une fonction homogène du degré a par rapport aux variables x, y, z, ...

CHAPITRE IV.

DÉTERMINATION DES FONCTIONS ENTIÈRES, D'APRÈS UN CERTAIN NOMBRE DE VALEURS PARTICULIÈRES SUPPOSÉES CONNUES. APPLICATIONS.

§ I. — *Recherche des fonctions entières d'une seule variable, pour lesquelles on connaît un certain nombre de valeurs particulières.*

Déterminer une fonction d'après un certain nombre de valeurs particulières supposées connues, c'est ce qu'on appelle *interpoler*. Lorsqu'il s'agit d'une fonction d'une ou de deux variables, cette fonction peut être considérée comme l'ordonnée d'une courbe ou d'une surface, et le problème de l'*interpolation* consiste à fixer la valeur générale de cette ordonnée d'après un certain nombre de valeurs particulières, c'est-à-dire à faire passer la courbe ou la surface par un certain nombre de points. Cette question peut être résolue d'une infinité de manières, et en général le problème de l'interpolation est indéterminé. Toutefois, l'indétermination cessera si, à la connaissance des valeurs particulières de la fonction cherchée, on ajoute la condition expresse que cette fonction soit entière, et d'un degré tel que le nombre de ses termes devienne précisément égal au nombre des valeurs particulières données.

Supposons, pour fixer les idées, que l'on considère d'abord les fonctions entières d'une seule variable x. On établira facilement à leur égard les propositions suivantes :

Théorème I. — *Si une fonction entière de la variable x s'évanouit pour* *une valeur particulière de cette variable, par exemple pour $x = x_0$, elle sera divisible algébriquement par $x - x_0$.*

Théorème II. — *Si une fonction entière de la variable x s'évanouit pour chacune des valeurs de x comprises dans la suite*

$$x_0, \quad x_1, \quad x_2, \quad \ldots, \quad x_{n-1},$$

n désignant un nombre entier quelconque, elle sera nécessairement divisible par le produit

$$(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)\ldots(x - x_{n-1}).$$

Soient maintenant $\varphi(x)$ et $\psi(x)$ deux fonctions entières de la variable x, l'une et l'autre du degré $n - 1$, et qui deviennent égales entre elles pour chacune des n valeurs particulières de x comprises dans la suite $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$. Je dis que ces deux fonctions seront identiquement égales, c'est-à-dire qu'on aura, quel que soit x,

$$\varphi(x) = \psi(x);$$

et, en effet, si cette égalité n'avait pas lieu, on trouverait dans la différence

$$\psi(x) - \varphi(x)$$

un polynôme entier dont le degré ne surpasserait pas $n - 1$, mais qui, s'évanouissant pour chacune des valeurs de x ci-dessus mentionnées, serait pourtant divisible par le produit

$$(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)\ldots(x - x_{n-1}),$$

c'est-à-dire par un polynôme du degré n, ce qui est absurde. On serait assuré *a fortiori* de l'égalité absolue des deux fonctions $\varphi(x)$ et $\psi(x)$, si l'on savait qu'elles deviennent égales entre elles pour un nombre de valeurs de x supérieur à n. On peut donc énoncer le théorème suivant :

Théorème III. — *Si deux fonctions entières de la variable x deviennent égales pour un nombre de valeurs de cette variable supérieur au degré de chacune des deux fonctions, elles seront identiquement égales, quel que soit x.*

On en déduit comme corollaire cet autre théorème :

Théorème IV. — *Deux fonctions entières de la variable x sont identiquement égales toutes les fois qu'elles deviennent égales pour des valeurs entières quelconques de cette variable, ou même pour toutes les valeurs entières qui surpassent une limite donnée.*

Dans ce cas, en effet, le nombre des valeurs de x, pour lesquelles les deux fonctions deviennent égales, est indéfini.

Il suit du théorème III qu'une fonction entière u du degré $n - 1$ sera complètement déterminée, si l'on connaît ses valeurs particulières

$$u_0, \quad u_1, \quad u_2, \quad \ldots, \quad u_{n-1}$$

correspondantes aux valeurs

$$x_0, \quad x_1, \quad x_2, \quad \ldots, \quad x_{n-1}$$

de la variable x. Cherchons dans cette hypothèse la valeur générale de la fonction u. Si l'on suppose d'abord que les valeurs particulières u_0, $u_1, \ldots, u_{n-1}$ se réduisent toutes à zéro, à l'exception de la première u_0, la fonction u, devant alors s'évanouir pour $x = x_1$, pour $x = x_2, \ldots$, enfin pour $x = x_{n-1}$, sera divisible par le produit

$$(x - x_1)(x - x_2)\ldots(x - x_{n-1}),$$

et sera par conséquent de la forme

$$u = k(x - x_1)(x - x_2)\ldots(x - x_{n-1}),$$

k ne pouvant être qu'une quantité constante. De plus, u devant se réduire à u_0 pour $x = x_0$, on en conclura

$$u_0 = k(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)\ldots(x_0 - x_{n-1})$$

et, par suite,

$$u = u_0 \frac{(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_{n-1})}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)\ldots(x_0-x_{n-1})}.$$

De même, si les valeurs particulières $u_0, u_1, u_2, \ldots, u_{n-1}$ se réduisent toutes à zéro, à l'exception de la seconde u_1, on trouvera

$$u = u_1 \frac{(x-x_0)(x-x_2)\ldots(x-x_{n-1})}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)\ldots(x_1-x_{n-1})},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Enfin, si elles se réduisent toutes à zéro, à l'exception de la dernière u_{n-1}, on trouvera

$$u = u_{n-1} \frac{(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_{n-2})}{(x_{n-1}-x_0)(x_{n-1}-x_1)\ldots(x_{n-1}-x_{n-2})}.$$

En réunissant les diverses valeurs de u correspondantes aux diverses hypothèses qu'on vient de faire, on obtiendra pour somme un polynôme en x du degré $n-1$, qui aura évidemment la propriété de se réduire à u_0 pour $x = x_0$, à u_1 pour $x = x_1$, ..., à u_{n-1} pour $x = x_{n-1}$. Ce polynôme sera donc la valeur générale de u qui résout la question proposée, en sorte que cette valeur générale se trouvera déterminée par la formule

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned} u = {} & u_0 \frac{(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_{n-1})}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)\ldots(x_0-x_{n-1})} \\ & + u_1 \frac{(x-x_0)(x-x_2)\ldots(x-x_{n-1})}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)\ldots(x_1-x_{n-1})} \\ & + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & + u_{n-1} \frac{(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_{n-2})}{(x_{n-1}-x_0)(x_{n-1}-x_1)\ldots(x_{n-1}-x_{n-2})}. \end{aligned}\right.$$

On pourrait déduire directement la même formule de la méthode que nous avons employée ci-dessus (Chap. III, § I) pour résoudre dans un cas particulier des équations linéaires à plusieurs variables (*voir* à ce sujet la Note V).

Si, en désignant par a une quantité constante, on remplace dans la formule (1) la fonction u par la fonction $u-a$, qui sera évidemment

de même degré, et les valeurs particulières de u par les valeurs particulières de $u-a$, on obtiendra l'équation

$$(2)\quad \left\{\begin{aligned} u - a = {} & (u_0-a) \frac{(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_{n-1})}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)\ldots(x_0-x_{n-1})} \\ & + (u_1-a) \frac{(x-x_0)(x-x_2)\ldots(x-x_{n-1})}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)\ldots(x_1-x_{n-1})} \\ & + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & + (u_{n-1}-a) \frac{(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_{n-2})}{(x_{n-1}-x_0)(x_{n-1}-x_1)\ldots(x_{n-1}-x_{n-2})}; \end{aligned}\right.$$

et, en comparant cette équation à la formule (1), on trouvera la suivante

$$(3)\quad \left\{\begin{aligned} 1 = {} & \frac{(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_{n-1})}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)\ldots(x_0-x_{n-1})} \\ & + \frac{(x-x_0)(x-x_2)\ldots(x-x_{n-1})}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)\ldots(x_1-x_{n-1})} \\ & + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & + \frac{(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_{n-2})}{(x_{n-1}-x_0)(x_{n-1}-x_1)\ldots(x_{n-1}-x_{n-2})}. \end{aligned}\right.$$

Cette dernière équation est identique et subsiste quel que soit x.

Les équations (1) et (2) peuvent servir l'une et l'autre à résoudre, pour les fonctions entières, le problème de l'interpolation; mais il convient, en général, de préférer pour cet objet l'équation (2), attendu qu'on peut y faire disparaître l'un des termes du second membre, en prenant la constante a équivalente à l'une des quantités

$$u_0, \quad u_1, \quad u_2, \quad \ldots, \quad u_{n-1}.$$

Supposons, par exemple, qu'il s'agisse de faire passer une droite par deux points donnés. Désignons par x_0, y_0 les coordonnées rectangulaires du premier point, par x_1, y_1 celles du second, et par y l'ordonnée variable de la droite. En remplaçant dans la formule (2) la lettre u par la lettre y, puis faisant $n = 1$ et $a = y_0$, on trouvera pour l'équation de la droite

$$(4)\qquad y - y_0 = (y_1 - y_0)\frac{x - x_0}{x_1 - x_0}.$$

Supposons, en second lieu, qu'il s'agisse de faire passer par trois points donnés une parabole dont l'axe soit parallèle à l'axe des y. Nommons

$$x_1 \text{ et } y_1, \quad x_2 \text{ et } y_2, \quad x_3 \text{ et } y_3$$

les coordonnées rectangulaires des trois points. Soit de plus y l'ordonnée variable de la parabole. En remplaçant toujours, dans la formule (2), la lettre u par la lettre y, puis faisant $n = 2$ et $a = y_1$, on trouvera pour l'équation de la parabole

$$(5)\qquad \left\{\begin{aligned} y - y_1 = {} & (y_0 - y_1)\frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} \\ & + (y_2 - y_1)\frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} \end{aligned}\right.$$

ou, ce qui revient au même,

$$(6)\qquad y - y_1 = \frac{x-x_1}{x_2-x_0}\left[(y_0-y_1)\frac{x-x_2}{x_1-x_0} + (y_2-y_1)\frac{x-x_0}{x_2-x_1}\right].$$

Lorsque dans l'équation (1) on prend $u = x^m$ (m désignant un nombre entier inférieur à n), les valeurs particulières de u représentées par

$$u_0, \quad u_1, \quad u_2, \quad \ldots, \quad u_{n-1}$$

se réduisent évidemment à

$$x_0^m, \quad x_1^m, \quad x_2^m, \quad \ldots, \quad x_{n-1}^m.$$

On aura donc, pour les valeurs entières de m qui ne surpassent pas $n - 1$,

$$(7)\qquad \left\{\begin{aligned} x^m = {} & x_0^m\frac{(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_{n-1})}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)\ldots(x_0-x_{n-1})} \\ & + x_1^m\frac{(x-x_0)(x-x_2)\ldots(x-x_{n-1})}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)\ldots(x_1-x_{n-1})} \\ & + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & + x_{n-1}^m\frac{(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_{n-2})}{(x_{n-1}-x_0(x_{n-1}-x_1)\ldots(x_{n-1}-x_{n-2})}. \end{aligned}\right.$$

Cette dernière formule comprend comme cas particulier l'équation (3). De plus, si l'on observe que chaque puissance de x, et en particulier

la puissance x^{n-1}, doit nécessairement avoir le même coefficient dans les deux membres de la formule (7), on trouvera :

1° En supposant $m < n - 1$,

$$(8)\qquad \left\{\begin{aligned} 0 = {} & \frac{x_0^m}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)\ldots(x_0-x_{n-1})} \\ & + \frac{x_1^m}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)\ldots(x_1-x_{n-1})} \\ & + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & + \frac{x_{n-1}^m}{(x_{n-1}-x_0)(x_{n-1}-x_1)\ldots(x_{n-1}-x_{n-2})}; \end{aligned}\right.$$

2° En supposant $m = n - 1$,

$$(9)\qquad \left\{\begin{aligned} 1 = {} & \frac{x_0^{n-1}}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)\ldots(x_0-x_{n-1})} \\ & + \frac{x_1^{n-1}}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)\ldots(x_1-x_{n-1})} \\ & + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & + \frac{(x_{n-1})^{n-1}}{(x_{n-1}-x_0)(x_{n-1}-x_1)\ldots(x_{n-1}-x_{n-2})}. \end{aligned}\right.$$

Il est bon de remarquer que la formule (8) subsiste dans le cas même où l'on suppose $m = 0$, et devient alors

$$(10)\qquad \left\{\begin{aligned} 0 = {} & \frac{1}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)\ldots(x_0-x_{n-1})} \\ & + \frac{1}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)\ldots(x_1-x_{n-1})} \\ & + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & + \frac{1}{(x_{n-1}-x_0)(x_{n-1}-x_1)\ldots(x_{n-1}-x_{n-2})}. \end{aligned}\right.$$

§ II. — *Détermination des fonctions entières de plusieurs variables, d'après un certain nombre de valeurs particulières supposées connues.*

Les méthodes par lesquelles on détermine les fonctions d'une seule variable, d'après un certain nombre de valeurs particulières supposées connues, peuvent être facilement étendues, comme on va le voir, aux fonctions de plusieurs variables.

Considérons d'abord, pour fixer les idées, des fonctions de deux variables x et y. Soient $\varphi(x, y)$, $\psi(x, y)$ deux semblables fonctions, l'une et l'autre du degré $n-1$ par rapport à chacune des variables, et qui deviennent égales entre elles toutes les fois que, en attribuant à la variable x une des valeurs particulières

$$x_0, \quad x_1, \quad x_2, \quad \ldots, \quad x_{n-1},$$

on attribue en même temps à la variable y l'une des suivantes

$$y_0, \quad y_1, \quad y_2, \quad \ldots, \quad y_{n-1}.$$

$\varphi(x_0, y)$, $\psi(x_0, y)$ seront deux fonctions de la seule variable y, qui deviendront égales entre elles pour n valeurs particulières de cette variable. Par suite (en vertu du théorème III, § I), ces deux fonctions seront constamment égales, quel que soit y. On aura donc identiquement

$$\varphi(x_0, y) = \psi(x_0, y).$$

On trouvera de même

$$\varphi(x_1, y) = \psi(x_1, y),$$
$$\varphi(x_2, y) = \psi(x_2, y),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$\varphi(x_{n-1}, y) = \psi(x_{n-1}, y).$$

D'ailleurs, les premiers membres des n équations précédentes sont autant de valeurs particulières de la fonction $\varphi(x, y)$ dans le cas où l'on y considère x seul comme variable, et les seconds membres représentent les valeurs particulières correspondantes de la fonction $\psi(x, y)$. Les deux fonctions

$$\varphi(x, y), \quad \psi(x, y),$$

lorsqu'on attribue à y une valeur constante choisie arbitrairement, deviennent donc égales pour n valeurs particulières de x; et, comme elles sont toutes deux du degré $n-1$ par rapport à x, il en résulte

qu'elles resteront égales, non seulement pour une valeur quelconque attribuée à la variable y, mais encore pour une valeur quelconque de x. On serait assuré, *a fortiori*, de l'égalité absolue des deux fonctions $\varphi(x, y)$, $\psi(x, y)$, si l'on savait qu'elles deviennent égales toutes les fois que les valeurs des variables x et y sont respectivement prises dans deux suites composées chacune de plus de n termes différents. On peut donc énoncer la proposition suivante :

Théorème I. — *Si deux fonctions entières des variables x et y deviennent égales toutes les fois que les valeurs de ces deux variables sont respectivement prises dans deux suites qui renferment l'une et l'autre un nombre de termes supérieur aux exposants les plus élevés de x et de y dans ces mêmes fonctions, elles seront identiquement égales.*

On en déduit, comme corollaire, cet autre théorème :

Théorème II. — *Deux fonctions entières des variables x et y sont identiquement égales, toutes les fois qu'elles deviennent égales pour des valeurs entières quelconques de ces variables, ou même pour toutes les valeurs entières qui surpassent une limite donnée.*

Dans ce cas, en effet, le nombre des valeurs de x et de y pour lesquelles les deux fonctions deviennent égales est indéfini.

Il suit du théorème I que, si la fonction $\varphi(x, y)$ est supposée entière et du degré $n-1$ par rapport à chacune des variables x et y, cette fonction sera complètement déterminée dès que l'on connaîtra les valeurs particulières qu'elle reçoit, lorsque, en prenant pour valeur de x l'une des quantités

$$x_0, \quad x_1, \quad x_2, \quad \ldots, \quad x_{n-1},$$

on prend en même temps pour valeur de y l'une des suivantes

$$y_0, \quad y_1, \quad y_2, \quad \ldots, \quad y_{n-1}.$$

Dans la même hypothèse, la valeur générale de la fonction pourra être facilement déduite de la formule (1) du paragraphe précédent. En effet, si l'on remplace dans cette formule u par $\varphi(x, y)$, on en tirera

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned} \varphi(x,y) = {} & \frac{(x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_{n-1})}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)\dots(x_0-x_{n-1})}\varphi(x_0,y) \\ & + \frac{(x-x_0)(x-x_2)\dots(x-x_{n-1})}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)\dots(x_1-x_{n-1})}\varphi(x_1,y) \\ & + \dots\dots\dots\dots \\ & + \frac{(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_{n-2})}{(x_{n-1}-x_0)(x_{n-1}-x_1)\dots(x_{n-1}-x_{n-2})}\varphi(x_{n-1},y), \end{aligned}\right.$$

et l'on aura, de plus, en désignant par m un des nombres entiers $1, 2, 3, \dots, n-1$,

$$(2)\quad \left\{\begin{aligned} \varphi(x_m,y) = {} & \frac{(y-y_1)(y-y_2)\dots(y-y_{n-1})}{(y_0-y_1)(y_0-y_2)\dots(y_0-y_{n-1})}\varphi(x_m,y_0) \\ & + \frac{(y-y_0)(y-y_2)\dots(y-y_{n-1})}{(y_1-y_0)(y_1-y_2)\dots(y_1-y_{n-1})}\varphi(x_m,y_1) \\ & + \dots\dots\dots\dots \\ & + \frac{(y-y_0)(y-y_1)\dots(y-y_{n-2})}{(y_{n-1}-y_0)(y_{n-1}-y_1)\dots(y_{n-1}-y_{n-2})}\varphi(x_m,y_{n-1}). \end{aligned}\right.$$

On conclura immédiatement des deux équations qui précèdent la valeur générale de $\varphi(x, y)$. On trouvera, par exemple, en supposant $n = 2$,

$$(3)\quad \left\{\begin{aligned} \varphi(x,y) = {} & \frac{x-x_1}{x_0-x_1}\,\frac{y-y_1}{y_0-y_1}\varphi(x_0,y_0) \\ & + \frac{x-x_0}{x_1-x_0}\,\frac{y-y_1}{y_0-y_1}\varphi(x_1,y_0) \\ & + \frac{x-x_1}{x_0-x_1}\,\frac{y-y_0}{y_1-y_0}\varphi(x_0,y_1) \\ & + \frac{x-x_0}{x_1-x_0}\,\frac{y-y_0}{y_1-y_0}\varphi(x_1,y_1). \end{aligned}\right.$$

Si l'on considérait des fonctions de trois ou d'un plus grand nombre de variables, on obtiendrait des résultats entièrement semblables à ceux auxquels on vient de parvenir pour des fonctions de deux va-

riables seulement. On trouverait, par exemple, à la place du théorème II, la proposition suivante :

Théorème III. — *Deux fonctions entières de plusieurs variables x, y, z, ... sont identiquement égales toutes les fois qu'elles deviennent égales pour des valeurs entières quelconques de ces variables, ou même pour toutes les valeurs entières qui surpassent une limite donnée.*

§ III. — *Applications.*

Pour appliquer les principes établis dans les paragraphes précédents, considérons en particulier des produits formés par la multiplication de facteurs successifs dont chacun surpasse le suivant d'une unité, le premier facteur étant l'une des variables x, y, z, ..., et cherchons à exprimer, au moyen de ces sortes de produits, le produit tout semblable qu'on obtiendrait en prenant pour premier facteur la somme des variables données, savoir

$$x + y + z + \dots.$$

Si l'on réduit toutes les variables à deux, le problème qu'il s'agit de résoudre pourra s'énoncer comme il suit :

Problème I. — *Exprimer le produit*

$$(1)\qquad (x+y)(x+y-1)(x+y-2)\dots(x+y-n+1),$$

dans lequel n désigne un nombre entier quelconque, par le moyen des produits suivants

$$x(x-1)(x-2)\dots(x-n+1),$$
$$y(y-1)(y-2)\dots(y-n+1)$$

et de tous ceux qu'on peut en déduire, en changeant seulement la valeur de n.

Solution. — Pour résoudre plus facilement la question précédente, supposons d'abord que x et y soient des nombres entiers égaux ou supérieurs à n. Alors le produit (1) ne sera autre chose que le numérateur de la fraction qui exprime le nombre des combinaisons possibles de $x+y$ lettres prises n à n, puisque ce nombre est précisément

$$\frac{(x+y)(x+y-1)(x+y-2)\dots(x+y-n+1)}{1.2.3\dots n}.$$

Cela posé, concevons que les lettres

$$a,\ b,\ c,\ \dots,\ p,\ q,\ r,\ \dots$$

étant en nombre égal à $x+y$, on les divise en deux groupes, de telle manière que les lettres $a, b, c, \dots$ du premier groupe soient en nombre égal à x, et les lettres $p, q, r, \dots$ du second groupe en nombre égal à y. Parmi les combinaisons formées avec ces différentes lettres, les unes renfermeront seulement des lettres prises dans le premier groupe. Le nombre des combinaisons de cette espèce sera

$$\frac{x(x-1)(x-2)\dots(x-n+1)}{1.2.3\dots n}.$$

D'autres renfermeront $n-1$ lettres prises dans le premier groupe, et une lettre prise dans le second. On déterminera facilement le nombre des combinaisons de cette seconde espèce, et l'on verra qu'il est égal à

$$\frac{x(x-1)(x-2)\dots(x-n+2)}{1.2.3\dots(n-1)}\,\frac{y}{1}.$$

On trouvera de même pour le nombre des combinaisons qui renferment $n-2$ lettres prises dans le premier groupe, et deux lettres prises dans le second,

$$\frac{x(x-1)(x-2)\dots(x-n+3)}{1.2.3\dots(n-2)}\,\frac{y(y-1)}{1.2},$$

etc.; enfin, pour le nombre des combinaisons qui renferment seulement des lettres prises dans le dernier groupe,

$$\frac{y(y-1)(y-2)\dots(y-n+1)}{1.2.3\dots n}.$$

La somme des nombres des combinaisons de chaque espèce devant

reproduire le nombre total des combinaisons des $x+y$ lettres données prises n à n, on en conclura

$$(2)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{(x+y)(x+y-1)\dots(x+y-n+1)}{1.2.3\dots n}\\ &\quad=\frac{x(x-1)\dots(x-n+1)}{1.2.3\dots n}+\frac{x(x-1)\dots(x-n+2)}{1.2.3\dots(n-1)}\,\frac{y}{1}\\ &\qquad+\frac{x(x-1)\dots(x-n+3)}{1.2\dots.(n-2)}\,\frac{y(y-1)}{1.2}+\dots\\ &\qquad+\frac{x}{1}\,\frac{y(y-1)\dots(y-n+2)}{1.2.3\dots(n-1)}+\frac{y(y-1)\dots(y-n+1)}{1.2.3\dots n}.\end{aligned}\right.$$

L'équation précédente, étant ainsi démontrée pour le cas où les variables x et y obtiennent des valeurs entières supérieures à n, subsistera, en vertu du théorème II (§ II), pour des valeurs quelconques de ces variables, et la valeur du produit (1) tirée de la même équation sera

$$(3)\quad \left\{\begin{aligned} &(x+y)(x+y-1)\dots(x+y-n+1)\\ &\quad=x(x-1)\dots(x-n+1)+\frac{n}{1}x(x-1)\dots(x-n+2)y\\ &\qquad+\frac{n(n-1)}{1.2}x(x-1)\dots(x-n+3)y(y-1)+\dots\\ &\qquad+\frac{n}{1}xy(y-1)\dots(y-n+2)+y(y-1)\dots(y-n+1).\end{aligned}\right.$$

Corollaire I. — Si dans l'équation (2) on remplace x par $-x$ et y par $-y$, on obtiendra la suivante :

$$(4)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{(x+y)(x+y+1)\dots(x+y+n-1)}{1.2.3\dots n}\\ &\quad=\frac{x(x+1)\dots(x+n-1)}{1.2.3\dots n}+\frac{x(x+1)\dots(x+n-2)}{1.2.3\dots n-1}\,\frac{y}{1}\\ &\qquad+\frac{x(x+1)\dots(x+n-3)}{1.2.3\dots(n-2)}\,\frac{y(y+1)}{1.2}+\dots\\ &\qquad+\frac{x}{1}\,\frac{y(y+1)\dots(y+n-2)}{1.2.3\dots(n-1)}+\frac{y(y+1)\dots(y+n-1)}{1.2.3\dots n}.\end{aligned}\right.$$

Corollaire II. — Si dans l'équation (2) on remplace x par $\frac{x}{2}$ et y

par $\frac{y}{2}$, on trouvera

$$
(5)\quad \left\{
\begin{aligned}
&\frac{(x+y)(x+y-2)\ldots(x+y-2n+2)}{2.4.6\ldots(2n)} \\
&\quad = \frac{x(x-2)\ldots(x-2n+2)}{2.4.6\ldots(2n)} + \frac{x(x-2)\ldots(x-2n+4)}{2.4.6\ldots(2n-2)}\,\frac{y}{2} \\
&\quad + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&\quad + \frac{x}{2}\,\frac{y(y-2)\ldots(y-2n+4)}{2.4.6\ldots(2n-2)} + \frac{y(y-2)\ldots(y-2n+2)}{2.4.6\ldots(2n)}.
\end{aligned}
\right.
$$

Corollaire III. — En développant les deux membres de l'équation (2), et ne conservant, de part et d'autre, que les termes dans lesquels la somme des exposants des variables est égale à n, on obtiendra la formule

$$
(6)\quad \left\{
\begin{aligned}
\frac{(x+y)^n}{1.2.3\ldots n} = {} & \frac{x^n}{1.2.3\ldots n} + \frac{x^{n-1}}{1.2.3\ldots(n-1)}\,\frac{y}{1} \\
& + \frac{x^{n-2}}{1.2.3\ldots(n-2)}\,\frac{y^2}{1.2} + \ldots \\
& + \frac{x}{1}\,\frac{y^{n-1}}{1.2.3\ldots(n-1)} + \frac{y^n}{1.2.3\ldots n}.
\end{aligned}
\right.
$$

La valeur de $(x+y)^n$ tirée de cette dernière formule est précisément celle que fournit le *binôme de Newton*.

Les formules qu'on vient d'obtenir peuvent être facilement étendues au cas où l'on considère plus de deux variables; et la méthode qui nous a conduits à la solution du problème I se trouve également applicable à la question suivante :

Problème II. — $x, y, z, \ldots$ *désignant des variables en nombres quelconques, exprimer le produit*

$$(x+y+z+\ldots)(x+y+z+\ldots-1)(x+y+z+\ldots-2)\ldots(x+y+z+\ldots-n+1)$$

en fonction des suivants

$$
\begin{gathered}
x(x-1)(x-2)\ldots(x-n+1),\\
y(y-1)(y-2)\ldots(y-n+1),\\
z(z-1)(z-2)\ldots(z-n+1),\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,
\end{gathered}
$$

et de tous ceux qu'on peut en déduire en changeant la valeur de n.

On commencera par résoudre le problème dans le cas où $x, y, z, \ldots$ désignent des nombres entiers supérieurs à n, en partant de ce principe que la fraction

$$\frac{(x+y+z+\ldots)(x+y+z+\ldots-1)(z+y+z+\ldots-2)\ldots(x+y+z+\ldots-n+1)}{1.2.3\ldots n}$$

est égale au nombre des combinaisons que l'on peut former avec $x+y+z+\ldots$ lettres prises n à n; puis on passera au cas où les variables $x, y, z, \ldots$ deviennent des quantités quelconques, en s'appuyant sur le théorème III du § II. Lorsque l'on aura ainsi démontré la formule qui résout la question proposée, on en déduira sans peine la valeur de la puissance

$$(x+y+z+\ldots)^n.$$

On y parviendra, en effet, en développant les deux membres de la formule trouvée, et ne conservant de part et d'autre que les termes dans lesquels les exposants réunis des variables $x, y, z, \ldots$ forment une somme égale à n.

CHAPITRE V.

DÉTERMINATION DES FONCTIONS CONTINUES D'UNE SEULE VARIABLE PROPRES A VÉRIFIER CERTAINES CONDITIONS.

§ I. — *Recherche d'une fonction continue formée de telle manière que deux semblables fonctions de quantités variables, étant ajoutées ou multipliées entre elles, donnent pour somme ou pour produit une fonction semblable de la somme ou du produit de ces variables.*

Lorsque, au lieu de fonctions entières, on conçoit des fonctions quelconques, dont on laisse la forme entièrement arbitraire, on ne peut plus réussir à les déterminer d'après un certain nombre de valeurs particulières, quelque grand que soit ce même nombre; mais on y parvient quelquefois dans le cas où l'on suppose connues certaines propriétés générales de ces fonctions. Par exemple, une fonction continue de x, représentée par $\varphi(x)$, peut être complètement déterminée lorsqu'elle est assujettie à vérifier, pour toutes les valeurs possibles des variables x et y, l'une des équations

$$\varphi(x+y)=\varphi(x)+\varphi(y), \tag{1}$$
$$\varphi(x+y)=\varphi(x)\times\varphi(y), \tag{2}$$

ou bien, pour toutes les valeurs réelles et positives des mêmes variables, l'une des équations suivantes :

$$\varphi(xy)=\varphi(x)+\varphi(y), \tag{3}$$
$$\varphi(xy)=\varphi(x)\times\varphi(y). \tag{4}$$

La résolution de ces quatre équations présente quatre problèmes différents que nous allons traiter l'un après l'autre.

Problème I. — *Déterminer la fonction $\varphi(x)$ de manière qu'elle reste continue entre deux limites réelles quelconques de la variable x, et que l'on ait pour toutes les valeurs réelles des variables x et y*

$$\varphi(x+y)=\varphi(x)+\varphi(y). \tag{1}$$

Solution. — Si dans l'équation (1) on remplace successivement y par $y+z$, z par $z+u$, ..., on en tirera

$$\varphi(x+y+z+u+\ldots)=\varphi(x)+\varphi(y)+\varphi(z)+\varphi(u)+\ldots,$$

quel que soit le nombre des variables x, y, z, u, ...; si, de plus, on désigne par m ce même nombre, par α une constante positive, et que l'on fasse

$$x=y=z=u=\ldots=\alpha,$$

la formule que l'on vient de trouver deviendra

$$\varphi(m\alpha)=m\,\varphi(\alpha).$$

Pour étendre cette dernière équation au cas où le nombre entier m se trouve remplacé par un nombre fractionnaire $\frac{m}{n}$, ou même par un nombre quelconque μ, on fera, en premier lieu,

$$6=\frac{m}{n}\alpha,$$

m et n désignant deux nombres entiers, et l'on en conclura

$$n6=m\alpha,$$
$$n\,\varphi(6)=m\,\varphi(\alpha),$$
$$\varphi(6)=\varphi\left(\frac{m}{n}\alpha\right)=\frac{m}{n}\varphi(\alpha);$$

puis, en supposant que la fraction $\frac{m}{n}$ varie de manière à converger vers un nombre quelconque μ, et passant aux limites, on trouvera

$$\varphi(\mu\alpha)=\mu\,\varphi(\alpha).$$

Si maintenant on prend $\alpha = 1$, on aura, pour toutes les valeurs positives de μ,

$$\varphi(\mu) = \mu\,\varphi(1) \tag{5}$$

et, par suite, en faisant converger μ vers la limite zéro,

$$\varphi(0) = 0.$$

D'ailleurs, si dans l'équation (1) on pose $x = \mu$, $y = -\mu$, on en tirera

$$\varphi(-\mu) = \varphi(0) - \varphi(\mu) = -\mu\,\varphi(1).$$

L'équation (5) subsistera donc lorsqu'on y changera μ en $-\mu$. En d'autres termes, on aura, pour des valeurs quelconques positives ou négatives de la variable x,

$$\varphi(x) = x\,\varphi(1). \tag{6}$$

Il suit de la formule (6) que toute fonction $\varphi(x)$ qui, demeurant continue entre des limites quelconques de la variable, vérifie l'équation (1), est nécessairement de la forme

$$\varphi(x) = ax, \tag{7}$$

a désignant une quantité constante. J'ajoute que la fonction ax jouira des propriétés énoncées, quelle que soit la valeur de la constante a. En effet, le produit ax est, entre des limites quelconques de la variable x, fonction continue de la variable, et, de plus, la supposition $\varphi(x) = ax$ change l'équation (1) en cette autre

$$a(x+y) = ax + ay,$$

laquelle est évidemment toujours identique. La formule (7) fournit donc une solution de la question proposée, quelle que soit la valeur attribuée à la constante a. La faculté que l'on a de choisir arbitrairement cette constante lui a fait donner le nom de *constante arbitraire*.

Problème II. — *Déterminer la fonction $\varphi(x)$ de manière qu'elle reste continue entre deux limites réelles quelconques de la variable x, et que l'on ait pour toutes les valeurs réelles des variables x et y*

$$\varphi(x+y) = \varphi(x)\,\varphi(y). \tag{2}$$

Solution. — Il est d'abord facile de s'assurer que la fonction $\varphi(x)$, assujettie à vérifier l'équation (2), n'admet que des valeurs positives; et, en effet, si dans l'équation (2) on fait $y = x$, on trouvera

$$\varphi(2x) = [\varphi(x)]^2;$$

puis on en conclura, en écrivant $\frac{1}{2}x$ au lieu de x,

$$\varphi(x) = [\varphi(\tfrac{1}{2}x)]^2.$$

La fonction $\varphi(x)$ est donc toujours équivalente à un carré, par conséquent toujours positive. Cela posé, concevons que dans l'équation (2) on remplace successivement y par $y+z$, z par $z+u$, ..., on en tirera

$$\varphi(x+y+z+u\ldots) = \varphi(x)\,\varphi(y)\,\varphi(z)\,\varphi(u)\ldots,$$

quel que soit le nombre des variables x, y, z, u, ... Si, de plus, on désigne par m ce même nombre, par α une constante positive, et que l'on fasse

$$x = y = z = u = \ldots = \alpha,$$

la formule que l'on vient de trouver deviendra

$$\varphi(m\alpha) = [\varphi(\alpha)]^m.$$

Pour étendre cette dernière formule au cas où le nombre entier m se trouve remplacé par un nombre fractionnaire $\frac{m}{n}$, ou même par un nombre quelconque μ, on fera, en premier lieu,

$$\beta = \frac{m}{n}\alpha,$$

m et n désignant deux nombres entiers, et l'on en conclura

$$n\beta = m\alpha,$$
$$[\varphi(\beta)]^n = [\varphi(\alpha)]^m,$$
$$\varphi(\beta) = \varphi\left(\frac{m}{n}\alpha\right) = [\varphi(\alpha)]^{\frac{m}{n}};$$

puis, en supposant que la fraction $\frac{m}{n}$ varie de manière à converger vers un nombre quelconque μ, et passant aux limites, on trouvera

$$\varphi(\mu\alpha) = [\varphi(\alpha)]^{\mu}.$$

Si maintenant on prend $\alpha = 1$, on aura pour toutes les valeurs positives de μ

$$\varphi(\mu) = [\varphi(1)]^{\mu} \tag{8}$$

et, par suite, en faisant converger μ vers la limite zéro,

$$\varphi(0) = 1.$$

D'ailleurs, si dans l'équation (2) on pose $x = \mu$, $y = -\mu$, on en conclura

$$\varphi(-\mu) = \frac{\varphi(0)}{\varphi(\mu)} = [\varphi(1)]^{-\mu}.$$

L'équation (8) subsistera donc lorsqu'on y changera μ en $-\mu$. En d'autres termes, on aura pour des valeurs quelconques positives ou négatives de la variable x

$$\varphi(x) = [\varphi(1)]^{x}. \tag{9}$$

Il suit de l'équation (9) que toute fonction $\varphi(x)$ propre à résoudre le second problème est nécessairement de la forme

$$\varphi(x) = A^{x}, \tag{10}$$

A désignant une constante positive. J'ajoute qu'on peut attribuer à cette constante une valeur quelconque entre les limites o et ∞. En effet, pour toute valeur positive de A, la fonction A^x reste continue depuis $x = -\infty$ jusqu'à $x = +\infty$, et l'équation

$$A^{x+y} = A^x A^y$$

est identique. La quantité A est donc une constante arbitraire qui n'admet que des valeurs positives.

Nota. — On pourrait arriver très simplement à l'équation (9) de la manière suivante.

Si l'on prend les logarithmes des deux membres de l'équation (2) dans un système quelconque, on trouvera

$$L\varphi(x+y) = L\varphi(x) + L\varphi(y);$$

et l'on en conclura (*voir* le problème I)

$$L\varphi(x) = x\,L\varphi(1),$$

puis, en repassant des logarithmes aux nombres

$$\varphi(x) = [\varphi(1)]^{x}.$$

Problème III. — *Déterminer la fonction $\varphi(x)$ de manière qu'elle reste continue entre deux limites positives quelconques de la variable x, et que l'on ait pour toutes les valeurs positives des variables x et y*

$$\varphi(xy) = \varphi(x) + \varphi(y). \tag{3}$$

Solution. — Il serait facile d'appliquer à la solution du problème III une méthode semblable à celle que nous avons employée pour résoudre le premier; mais on arrive plus promptement à la solution cherchée en mettant l'équation (3), ainsi qu'on va le faire, sous une forme analogue à celle de l'équation (1).

Si l'on désigne par A un nombre quelconque et par L la caractéristique des logarithmes dans le système dont la base est A, on aura, pour toutes les valeurs positives des variables x et y,

$$x = A^{Lx}, \qquad y = A^{Ly},$$

en sorte que l'équation (3) deviendra

$$\varphi(A^{Lx+Ly}) = \varphi(A^{Lx}) + \varphi(A^{Ly}).$$

Comme, dans cette dernière formule, les quantités variables Lx, Ly admettent des valeurs quelconques positives ou négatives, il en résulte qu'on aura, pour toutes les valeurs réelles possibles des variables x et y,

$$\varphi(\mathrm{A}^{x+y}) = \varphi(\mathrm{A}^x) + \varphi(\mathrm{A}^y).$$

On en conclura [*voir* le problème I, équat. (6)]

$$\varphi(\mathrm{A}^x) = x\,\varphi(\mathrm{A}^1) = x\,\varphi(\mathrm{A})$$

et, par suite,

$$\varphi(\mathrm{A}^{\mathrm{L}x}) = \varphi(\mathrm{A})\,\mathrm{L}x,$$

ou, ce qui revient au même,

$$\varphi(x) = \varphi(\mathrm{A})\,\mathrm{L}x. \tag{11}$$

Il suit de la formule (11) que toute fonction $\varphi(x)$, propre à résoudre le problème III, est nécessairement de la forme

$$\varphi(x) = a\,\mathrm{L}(x), \tag{12}$$

a désignant une constante. Il est d'ailleurs aisé de s'assurer : 1° que la constante a demeure entièrement arbitraire, 2° que, en choisissant convenablement le nombre A, qui est lui-même arbitraire, on peut la réduire à l'unité.

Problème IV. — *Déterminer la fonction $\varphi(x)$ de manière qu'elle reste continue entre deux limites positives quelconques de la variable x et que l'on ait, pour toutes les valeurs positives des variables x et y,*

$$\varphi(xy) = \varphi(x)\,\varphi(y). \tag{4}$$

Solution. — Il serait facile d'appliquer à la solution du problème IV une méthode semblable à celle que nous avons employée pour résoudre le second. Mais on arrivera plus promptement à la solution cherchée, si l'on observe que, en désignant par L la caractéristique des logarithmes dans le système dont la base est A, on peut mettre l'équation (4) sous la forme

$$\varphi(\mathrm{A}^{\mathrm{L}x+\mathrm{L}y}) = \varphi(\mathrm{A}^{\mathrm{L}x})\,\varphi(\mathrm{A}^{\mathrm{L}y}).$$

Comme, dans cette dernière équation, les quantités variables $\mathrm{L}(x)$,

$\mathrm{L}(y)$ admettront des valeurs quelconques positives ou négatives, il en résulte qu'on aura, pour toutes les valeurs réelles possibles des variables x et y,

$$\varphi(\mathrm{A}^{x+y}) = \varphi(\mathrm{A}^x)\,\varphi(\mathrm{A}^y).$$

On en conclura [*voir* le problème II, équat. (9)]

$$\varphi(\mathrm{A}^x) = [\varphi(\mathrm{A})]^x$$

et, par suite,

$$\varphi(\mathrm{A}^{\mathrm{L}x}) = [\varphi(\mathrm{A})]^{\mathrm{L}x} = x^{\mathrm{L}\varphi(\mathrm{A})},$$

ou, ce qui revient au même,

$$\varphi(x) = x^{\mathrm{L}\varphi(\mathrm{A})}. \tag{13}$$

Il résulte de l'équation (13) que toute fonction $\varphi(x)$, propre à résoudre le problème IV, est nécessairement de la forme

$$\varphi(x) = x^a, \tag{14}$$

a désignant une constante. Il est d'ailleurs aisé de s'assurer que cette constante doit demeurer entièrement arbitraire.

Les quatre valeurs de $\varphi(x)$ qui satisfont respectivement aux équations (1), (2), (3), (4), savoir

$$ax, \quad \mathrm{A}^x, \quad a\,\mathrm{L}x, \quad x^a,$$

ont cela de commun, que chacune d'elles renferme une constante arbitraire a ou A. On doit en conclure qu'il y a une grande différence entre les questions où il s'agit de calculer les valeurs inconnues de certaines quantités et les questions dans lesquelles on se propose de découvrir la nature inconnue de certaines fonctions d'après des propriétés données. En effet, dans le premier cas, les valeurs des quantités inconnues se trouvent finalement exprimées par le moyen d'autres quantités connues et déterminées, tandis que dans le second cas les fonctions inconnues peuvent, comme on le voit ici, admettre dans leur expression des constantes arbitraires.

§ II. — *Recherche d'une fonction continue formée de telle manière que, en multipliant deux semblables fonctions de quantités variables et doublant le produit, on trouve un résultat égal à celui qu'on obtiendrait en ajoutant les fonctions semblables de la somme et de la différence de ces variables.*

Dans chacun des problèmes du paragraphe précédent, l'équation à résoudre renfermait, avec la fonction inconnue $\varphi(x)$, deux autres fonctions semblables, savoir, $\varphi(y)$ et $\varphi(x+y)$ ou $\varphi(xy)$. Nous allons maintenant nous proposer un nouveau problème du même genre, mais dans lequel l'équation de condition, que la fonction $\varphi(x)$ doit vérifier, renferme quatre fonctions semblables au lieu de trois. Voici en quoi il consiste :

Problème. — *Déterminer la fonction $\varphi(x)$ de manière qu'elle reste continue entre deux limites réelles quelconques de la variable x, et que l'on ait, pour toutes les valeurs réelles des variables x et y,*

$$\varphi(y+x)+\varphi(y-x)=2\varphi(x)\varphi(y). \tag{1}$$

Solution. — Si dans l'équation (1) on fait $x=0$, on en tirera

$$\varphi(0)=1.$$

La fonction $\varphi(x)$ se réduit donc à l'unité, pour la valeur particulière $x=0$, et, puisqu'on la suppose continue entre des limites quelconques, il est clair qu'elle sera, dans le voisinage de cette valeur particulière, très peu différente de l'unité, par conséquent positive. On pourra donc, en désignant par α un nombre très petit, choisir ce nombre de telle manière que la fonction $\varphi(x)$ reste constamment positive entre les limites

$$x=0, \qquad x=\alpha.$$

Cela posé, il arrivera de deux choses l'une : ou la valeur positive de $\varphi(\alpha)$ sera comprise entre les limites 0 et 1, ou cette valeur sera supé-

rieure à l'unité. Nous allons examiner successivement ces deux hypothèses.

Concevons d'abord que $\varphi(\alpha)$ ait une valeur comprise entre les limites 0 et 1. On pourra représenter cette valeur par le cosinus d'un certain arc θ renfermé entre les limites $0, \frac{\pi}{2}$, et poser en conséquence

$$\varphi(\alpha)=\cos\theta.$$

De plus, si, dans l'équation (1) mise sous la forme

$$\varphi(y+x)=2\varphi(x)\varphi(y)-\varphi(y-x),$$

on fait successivement

$$\begin{array}{ll} x=\alpha, & y=\alpha, \\ x=\alpha, & y=2\alpha, \\ x=\alpha, & y=3\alpha, \\ \ldots\ldots, & \ldots\ldots, \end{array}$$

on en déduira l'une après l'autre les formules

$$\begin{aligned} \varphi(2a) &= 2\cos^2\theta-1=\cos2\theta, \\ \varphi(3\alpha) &= 2\cos\theta\cos2\theta-\cos\theta \quad =\cos3\theta, \\ \varphi(4\alpha) &= 2\cos\theta\cos3\theta-\cos2\theta=\cos4\theta, \end{aligned}$$

et en général, m désignant un nombre entier quelconque,

$$\varphi(m\alpha)=2\cos\theta\cos(m-1)\theta-\cos(m-2)\theta=\cos m\theta.$$

J'ajoute que la formule

$$\varphi(m\alpha)=\cos m\theta$$

subsistera encore, si l'on y remplace le nombre entier m par une fraction ou même par un nombre quelconque μ. C'est ce que l'on prouvera facilement, ainsi qu'il suit.

Si dans l'équation (1) on fait $x=\frac{1}{2}\alpha$, $y=\frac{1}{2}\alpha$, on en tirera

$$\left[\varphi\left(\frac{1}{2}\alpha\right)\right]^2=\frac{\varphi(0)+\varphi(\alpha)}{2}=\frac{1+\cos\theta}{2}=\left(\cos\frac{1}{2}\theta\right)^2;$$

puis, en extrayant les racines positives des deux membres et observant que les deux fonctions $\varphi(x)$, $\cos x$ restent positives, la première entre les limites $x=0$, $x=\alpha$, la seconde entre les limites $x=0$, $x=\theta$, on trouvera

$$\varphi\left(\frac{1}{2}\alpha\right)=\cos\frac{1}{2}\theta.$$

De même, si dans l'équation (1) on fait

$$x=\frac{1}{4}\alpha, \qquad y=\frac{1}{4}\theta,$$

on en tirera

$$\left[\varphi\left(\frac{1}{4}\alpha\right)\right]^2=\frac{\varphi(0)+\varphi\left(\frac{1}{2}\right)\alpha}{2}=\frac{1+\cos\frac{1}{2}\theta}{2}=\left(\cos\frac{1}{4}\theta\right)^2;$$

puis, en extrayant de part et d'autre les racines positives,

$$\varphi\left(\frac{1}{4}\alpha\right)=\cos\frac{1}{4}\theta.$$

Par des raisonnements semblables, on obtiendra successivement les formules

$$\varphi\left(\frac{1}{8}\alpha\right)=\cos\frac{1}{8}\theta,$$
$$\varphi\left(\frac{1}{16}\alpha\right)=\cos\frac{1}{16}\theta,$$
$$\dots\dots\dots\dots,$$

et en général, n désignant un nombre entier quelconque,

$$\varphi\left(\frac{1}{2^n}\alpha\right)=\cos\frac{1}{2^n}\theta.$$

Si l'on opère sur la valeur précédente de $\varphi\left(\frac{1}{2^n}\alpha\right)$ pour en déduire celle de $\varphi\left(\frac{m}{2^n}\alpha\right)$, comme on a opéré sur la valeur de $\varphi(\alpha)$ pour en déduire celle de $\varphi(m\alpha)$, on trouvera

$$\varphi\left(\frac{m}{2^n}\alpha\right)=\cos\frac{m}{2^n}\theta;$$

puis, en supposant que la fraction $\frac{m}{2^n}$ varie de manière à s'approcher

indéfiniment du nombre μ, et passant aux limites, on obtiendra l'équation

$$(2) \qquad \varphi(\mu\alpha)=\cos\mu\theta.$$

De plus, si dans la formule (1) on fait

$$x=\mu a, \qquad y=0,$$

on en conclura

$$\varphi(-\mu\alpha)=[2\varphi(0)-1]\varphi(\mu\alpha)=\cos\mu\theta=\cos(-\mu\theta).$$

L'équation (2) subsistera donc lorsqu'on y remplacera μ par $-\mu$. En d'autres termes, on aura, pour des valeurs quelconques positives ou négatives de la variable x,

$$(3) \qquad \varphi(\alpha x)=\cos\theta x.$$

Si dans cette dernière formule on change x en $\frac{x}{\alpha}$, elle donnera

$$(4) \qquad \varphi(x)=\cos\frac{\theta}{\alpha}x=\cos\left(-\frac{\theta}{\alpha}x\right).$$

La valeur précédente de $\varphi(x)$ est relative au cas où la quantité positive $\varphi(\alpha)$ reste comprise entre les limites 0 et 1. Supposons maintenant cette même quantité supérieure à l'unité. Il est facile de voir que, dans cette seconde hypothèse, on pourra satisfaire par une valeur positive de r à l'équation

$$\varphi(\alpha)=\frac{1}{2}\left(r+\frac{1}{r}\right).$$

Il suffira, en effet, de prendre

$$r=\varphi(\alpha)+\left\{[\varphi(\alpha)]^2-1\right\}^{\frac{1}{2}}.$$

Cela posé, si dans l'équation (1) on fait successivement

$$\begin{aligned} x&=\alpha, & y&=\alpha,\\ x&=\alpha, & y&=2\alpha,\\ x&=\alpha, & y&=3\alpha,\\ &\dots\dots, & &\dots\dots\dots,\end{aligned}$$

on en déduira l'une après l'autre les formules

$$\varphi(2\alpha) = \frac{1}{2}\left(r + \frac{1}{r}\right)^2 - 1 = \frac{1}{2}\left(r^2 + \frac{1}{r^2}\right),$$

$$\varphi(3\alpha) = \frac{1}{2}\left(r + \frac{1}{r}\right)\left(r^2 + \frac{1}{r^2}\right) - \frac{1}{2}\left(r + \frac{1}{r}\right) = \frac{1}{2}\left(r^3 + \frac{1}{r^3}\right),$$

$$\varphi(4\alpha) = \frac{1}{2}\left(r + \frac{1}{r}\right)\left(r^3 + \frac{1}{r^3}\right) - \frac{1}{2}\left(r^2 + \frac{1}{r^2}\right) = \frac{1}{2}\left(r^4 + \frac{1}{r^4}\right),$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots,$$

et en général, m désignant un nombre entier quelconque,

$$\varphi(m\alpha) = \frac{1}{2}\left(r + \frac{1}{r}\right)\left(r^{m-1} + \frac{1}{r^{m-1}}\right) - \frac{1}{2}\left(r^{m-2} + \frac{1}{r^{m-2}}\right) = \frac{1}{2}\left(r^m + \frac{1}{r^m}\right).$$

J'ajoute que la formule

$$\varphi(m\alpha) = \frac{1}{2}\left(r^m + \frac{1}{r^m}\right)$$

subsistera encore, si l'on y remplace le nombre entier m par une fraction, ou même par un nombre quelconque μ. C'est ce que l'on prouvera facilement, ainsi qu'il suit.

Si dans l'équation (1) on fait $x = \frac{1}{2}\alpha$, $y = \frac{1}{2}\alpha$, on en tirera

$$\left[\varphi\left(\frac{1}{2}\alpha\right)\right]^2 = \frac{\varphi(0) + \varphi(\alpha)}{2} = \frac{1 + \frac{1}{2}\left(r + \frac{1}{r}\right)}{2} = \frac{1}{4}\left(r^{\frac{1}{2}} + r^{-\frac{1}{2}}\right)^2;$$

puis, en extrayant les racines positives des deux membres, et en observant que la fonction $\varphi(x)$ reste positive entre les limites $x = 0$, $x = \alpha$, on trouvera

$$\varphi\left(\frac{1}{2}\alpha\right) = \frac{1}{2}\left(r^{\frac{1}{2}} + r^{-\frac{1}{2}}\right).$$

De même, si dans l'équation (1) on fait

$$x = \frac{1}{4}\alpha, \qquad y = \frac{1}{4}\alpha,$$

on en tirera

$$\left[\varphi\left(\frac{1}{4}\alpha\right)\right]^2 = \frac{\varphi(0) + \varphi\left(\frac{1}{2}\alpha\right)}{2} = \frac{1 + \frac{1}{2}\left(r^{\frac{1}{2}} + r^{-\frac{1}{2}}\right)}{2} = \frac{1}{4}\left(r^{\frac{1}{4}} + r^{-\frac{1}{4}}\right)^2;$$

puis, en extrayant de part et d'autre les racines positives,

$$\varphi\left(\frac{1}{4}\alpha\right) = \frac{1}{2}\left(r^{\frac{1}{4}} + r^{-\frac{1}{4}}\right).$$

Par des raisonnements semblables, on obtiendra successivement les formules

$$\varphi\left(\frac{1}{8}\alpha\right) = \frac{1}{2}\left(r^{\frac{1}{8}} + r^{-\frac{1}{8}}\right),$$

$$\varphi\left(\frac{1}{16}\alpha\right) = \frac{1}{2}\left(r^{\frac{1}{16}} + r^{-\frac{1}{16}}\right),$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots,$$

et en général, n désignant un nombre entier quelconque,

$$\varphi\left(\frac{1}{2^n}\alpha\right) = \frac{1}{2}\left(r^{\frac{1}{2^n}} + r^{-\frac{1}{2^n}}\right).$$

Si l'on opère sur la valeur précédente de $\varphi\left(\frac{1}{2^n}\alpha\right)$, pour en déduire celle de $\varphi\left(\frac{m}{2^n}\alpha\right)$, comme on a opéré sur la valeur de $\varphi(\alpha)$, pour en déduire celle $\varphi(m\alpha)$, on trouvera

$$\varphi\left(\frac{m}{2^n}\alpha\right) = \frac{1}{2}\left(r^{\frac{m}{2^n}} + r^{-\frac{m}{2^n}}\right);$$

puis, en supposant que la fraction $\frac{m}{2^n}$ varie de manière à s'approcher indéfiniment du nombre μ, et passant aux limites, on obtiendra l'équation

$$\varphi(\mu\alpha) = \frac{1}{2}\left(r^{\mu} + r^{-\mu}\right). \tag{5}$$

De plus, si dans la formule (1) on fait

$$x = \mu\alpha, \qquad y = 0,$$

on en conclura

$$\varphi(-\mu\alpha) = [2\varphi(0) - 1]\,\varphi(\mu\alpha) = \frac{1}{2}\left(r^{-\mu} + r^{\mu}\right).$$

L'équation (5) subsistera donc, lorsqu'on y remplacera μ par $-\mu$. En d'autres termes, on aura, pour des valeurs quelconques positives ou négatives de la variable x,

$$\varphi(\alpha x) = \frac{1}{2}(r^{x} + r^{-x}). \tag{6}$$

Si dans cette dernière formule on change x en $\frac{x}{\alpha}$, elle donnera

$$\varphi(x) = \frac{1}{2}\left(r^{\frac{x}{\alpha}} + r^{-\frac{x}{\alpha}}\right). \tag{7}$$

Lorsqu'on fait, dans l'équation (4), $\pm\frac{\theta}{\alpha} = a$, et, dans l'équation (7), $r^{\pm\frac{1}{\alpha}} = \mathrm{A}$, ces équations prennent respectivement les formes suivantes :

$$\varphi(x) = \cos a x, \tag{8}$$

$$\varphi(x) = \frac{1}{2}(\mathrm{A}^{x} + \mathrm{A}^{-x}). \tag{9}$$

Si donc l'on désigne par a une quantité constante, et par A un nombre constant, toute fonction $\varphi(x)$ qui, demeurant continue entre des limites quelconques de la variable, vérifiera l'équation (1), sera nécessairement comprise sous l'une des deux formes qu'on vient de rapporter. Il est d'ailleurs facile de s'assurer que les valeurs de $\varphi(x)$ fournies par les équations (8) et (9) résolvent la question proposée, quelles que soient les valeurs attribuées à la quantité a et au nombre A. Ce nombre et cette quantité sont donc deux constantes arbitraires, dont l'une ne peut admettre que des valeurs positives.

D'après ce qu'on vient de dire, les deux fonctions

$$\cos a x, \quad \frac{1}{2}(\mathrm{A}^{x} + \mathrm{A}^{-x})$$

ont la propriété commune de satisfaire à l'équation (1), ce qui établit entre elles une analogie remarquable. L'une et l'autre de ces deux

fonctions se réduisent encore à l'unité pour $x = 0$. Mais une différence essentielle entre la première et la seconde, c'est que la valeur numérique de la première est constamment au-dessous de la limite 1, lorsqu'elle n'atteint pas cette limite; tandis que, dans la même hypothèse, la valeur numérique de la seconde est constamment au-dessus.