CALCUL DES INDICES DES FONCTIONS.

Journal de l'École Polytechnique, XXV^e Cahier, Tome XV, p. 176; 1837.

§ I. C'est dans le Mémoire présenté à l'Académie de Turin, le 17 novembre 1831 (1), que j'ai fait connaître un nouveau calcul qui peut être fort utilement employé dans la résolution des équations de tous les degrés. Mais, dans le Mémoire dont il s'agit, les principes de ce calcul, que je nomme le *calcul des indices des fonctions*, se trouvent déduits de la considération des intégrales définies. Je me propose ici de montrer comment on peut établir directement ces mêmes principes sans recourir à des formules de calcul intégral.

Soit u une fonction réelle de la variable réelle x, et telle que si l'on fait croître cette variable par degrés insensibles entre deux limites données,

$$x = x_0, \qquad x = X,$$

u varie insensiblement, et ne change jamais de signe sans passer par zéro ou par l'infini. Pour une valeur a de x comprise entre les limites $x = x_0$, $x = X$, et propre à vérifier l'équation

$$\frac{1}{u} = 0, \tag{1}$$

la fonction u passera, en devenant infinie, du négatif au positif, ou

(1) *Œuvres de Cauchy*, S. II, T. XV.

du positif au négatif, ou bien elle ne changera pas de signe. La quantité $+1$ dans le premier cas, -1 dans le second, zéro dans le troisième sera ce que je nomme *l'indice de la fonction* u pour la valeur donnée x de la variable x; et *l'indice intégral de* u, pris entre les limites

$$x = x_0, \qquad x = X > x_0,$$

ne sera autre chose que la somme des indices correspondant aux diverses racines de l'équation (1) renfermées entre les limites dont il s'agit. Je désignerai cet indice intégral par la notation

$$\mathcal{J}_{x_0}^{X}((u)),$$

l'usage des doubles parenthèses étant ici le même que dans le calcul des résidus. Cela posé, on établira sans peine les propositions suivantes :

Théorème I. — *Soient u une fonction réelle de x qui, entre les limites $x = x_0$, $x = X$, ne change jamais de signe sans passer par zéro ou par l'infini, et u_0, U les deux valeurs de u correspondant aux valeurs réelles x_0, X de la variable x. La somme*

$$\mathcal{J}_{x_0}^{X}((u)) + \mathcal{J}_{x_0}^{X}\left(\left(\frac{1}{u}\right)\right) \tag{2}$$

sera équivalente à zéro si les deux quantités u_0, U sont de même signe; à $+1$ si, la première étant négative, la seconde est positive; à -1 si, la première étant positive, la seconde est négative.

Démonstration. — Si l'on fait croître x par degrés insensibles depuis la limite x_0 jusqu'à la limite X, les seules valeurs de x auxquelles correspondront des indices de u ou de $\frac{1}{u}$, différents de zéro, seront celles pour lesquelles la fonction u ou $\frac{1}{u}$ deviendra infinie en changeant de signe, et à une semblable valeur de x correspondra toujours un indice de u ou de $\frac{1}{u}$ égal à $+1$ si u passe du négatif au positif, et un indice de u ou de $\frac{1}{u}$ égal à -1 si u passe du positif au négatif. Soient maintenant

$$a, \quad b, \quad c, \quad d, \quad \ldots$$

les valeurs successives de x comprises entre les limites x_0, X et pour lesquelles la fonction u devient nulle ou infinie en changeant de signe, c'est-à-dire, en d'autres termes, les racines des deux équations

$$u = 0, \qquad \frac{1}{u} = 0 \tag{3}$$

renfermées entre les limites x_0, X, ces racines étant rangées par ordre de grandeur. Si u_0 est négatif, les indices de u ou de $\frac{1}{u}$ correspondant aux valeurs

$$a, \quad b, \quad c, \quad d, \quad \ldots$$

de la variable x seront respectivement

$$+1, \quad -1, \quad +1, \quad -1, \quad \ldots$$

et, par suite, la somme de ces indices sera équivalente à zéro ou à $+1$, suivant que leur nombre sera pair ou impair, c'est-à-dire, en d'autres termes, suivant que U sera négatif ou positif. Au contraire, si u_0 est positif, les indices de u ou de $\frac{1}{u}$, correspondant aux valeurs

$$a, \quad b, \quad c, \quad d, \quad \ldots$$

de la variable x seront respectivement

$$-1, \quad +1, \quad -1, \quad +1, \quad \ldots,$$

et, par suite, la somme de ces indices sera équivalente à zéro ou à -1, suivant que leur nombre sera pair ou impair, c'est-à-dire, en d'autres termes, suivant que U sera positif ou négatif. Donc, en définitive, l'expression (2) ou la somme des indices des fonctions

$$u, \quad \frac{1}{u}$$

correspondant aux valeurs

$$a, \quad b, \quad c, \quad d, \quad \ldots$$

de la variable x sera équivalente à $+1$, à -1, ou à zéro, suivant que la variable x, en passant brusquement de la valeur x_0 à la valeur X, fera passer la fonction u du négatif au positif ou du positif au négatif, ou cessera de produire dans cette fonction un changement de signe.

En supposant que la fonction réelle u de x ne change jamais de signe, sans passer par zéro ou par l'infini, nous désignerons par la notation

$$\mathcal{J}((u))$$

la somme des indices de u correspondant à toutes les racines de l'équation (1), en sorte que l'on aura identiquement

$$\mathcal{J}((u)) = \mathcal{J}_{-\infty}^{\infty}((u)).$$

Si la fonction u se réduit à la forme $\frac{k}{x}$, k étant une quantité constante, on trouvera

$$\mathcal{J}\left(\left(\frac{k}{x}\right)\right) = \mathcal{J}\frac{k}{((x))} = 1,$$

ou

$$\mathcal{J}\left(\left(\frac{k}{x}\right)\right) = \mathcal{J}\frac{k}{((x))} = -1,$$

suivant que la quantité k sera positive ou négative. Cela posé, le théorème I sera évidemment compris dans la formule

$$\mathcal{J}_{x_0}^{X}((u)) + \mathcal{J}_{x_0}^{X}\left(\left(\frac{1}{u}\right)\right) = \frac{1}{2}\left[\mathcal{J}\frac{U}{((x))} - \mathcal{J}\frac{u_0}{((x))}\right]. \tag{4}$$

Si à la fonction u on substitue le rapport entre deux fonctions données u, v, tellement choisies que chacune d'elles ne change jamais de signe entre les limites $x = x_0$, $x = X$, sans passer par zéro ou par l'infini, alors en nommant u_0, v_0 et U, V les valeurs de ces deux fonctions pour $x = x_0$ et pour $x = X$, on aura, en vertu de la formule (4)

$$\mathcal{J}_{x_0}^{X}\left(\left(\frac{u}{v}\right)\right)+\mathcal{J}_{x_0}^{X}\left(\left(\frac{v}{u}\right)\right)=\frac{1}{2}\left[\mathcal{J}\frac{U}{V((x))}-\mathcal{J}\frac{u_0}{u_0((x))}\right], \tag{5}$$

ou, ce qui revient au même,

$$\mathcal{J}_{x_0}^{X}\left(\left(\frac{u}{v}\right)\right)+\mathcal{J}_{x_0}^{X}\left(\left(\frac{v}{u}\right)\right)=\frac{1}{2}\left[\mathcal{J}\frac{V}{U((x))}-\mathcal{J}\frac{v_0}{v_0((x))}\right].$$

Lorsque u est algébriquement divisible par v, l'indice intégral

$$\mathcal{J}_{x_0}^{X}\left(\left(\frac{u}{v}\right)\right)$$

est évidemment nul, et la formule (5) donne

$$\mathcal{J}_{x_0}^{X}\left(\left(\frac{v}{u}\right)\right)=\frac{1}{2}\left[\mathcal{J}\frac{U}{V((x))}-\mathcal{J}\frac{u_0}{v_0((x))}\right]. \tag{6}$$

Théorème II. — *Si u, v étant deux fonctions entières de x, et le degré de la première égal ou supérieur au degré de la seconde, on nomme Q le quotient et w le reste que fournit la division de u par v, on aura*

$$\mathcal{J}_{x_0}^{X}\left(\left(\frac{u}{v}\right)\right)=\mathcal{J}_{x_0}^{X}\left(\left(\frac{w}{v}\right)\right), \tag{7}$$

quelles que soient les valeurs particulières de x représentées par x_0 et X.

Démonstration. — En effet, dans l'hypothèse admise on aura, quel que soit x,

$$\frac{u}{v}=Q+\frac{w}{v};$$

et, par suite, les rapports

$$\frac{u}{v},\quad \frac{w}{v},$$

dont la différence Q restera toujours finie en même temps que la variable x, deviendront simultanément infinis pour certaines valeurs réelles de x propres à vérifier l'équation

$$v=0. \tag{8}$$

Soit a l'une de ces valeurs. Quand x différera très peu de a, les deux rapports

$$\frac{u}{v},\quad \frac{w}{v},$$

offrant des valeurs numériques très considérables, supérieures à celle de Q, seront nécessairement des quantités de même signe. Donc, pour $x=a$, l'indice du rapport $\frac{u}{v}$ sera équivalent à l'indice du rapport $\frac{w}{v}$, et cette équivalence, subsistant pour toutes les racines de l'équation (8), entraînera la formule (7).

De la formule (7) jointe à la formule (5) on tire

$$\mathcal{J}_{x_0}^{X}\left(\left(\frac{v}{u}\right)\right)=\frac{1}{2}\left[\mathcal{J}\frac{U}{V((x))}-\mathcal{J}\frac{u_0}{v_0((x))}\right]-\mathcal{J}_{x_0}^{X}\left(\left(\frac{w}{v}\right)\right). \tag{9}$$

En vertu de cette dernière équation, la détermination de l'indice intégral d'une fraction rationnelle $\frac{v}{u}$, entre des limites données, peut être réduite à la détermination de l'indice intégral d'une autre fraction rationnelle $\frac{w}{v}$ dont le numérateur et le dénominateur soient des polynomes de degrés moindres. D'ailleurs, une réduction semblable pourra s'appliquer non seulement à la nouvelle fraction $\frac{w}{v}$, mais encore à toutes les fractions que l'on en déduira successivement, et que l'on formera en divisant l'un par l'autre deux restes consécutifs obtenus dans la recherche du plus grand commun diviseur des deux polynomes u et v. Or, comme l'avant-dernier reste sera exactement divisible par le dernier, c'est-à-dire par le plus grand commun diviseur, la formule (6) fera connaître l'indice de la dernière fraction, duquel se déduiront immédiatement les indices de toutes les autres. Ainsi l'on peut, à l'aide des formules (6) et (9), déterminer l'indice de toute fraction rationnelle. On peut au reste abréger souvent le calcul à l'aide des considérations suivantes :

Si, u étant une fonction entière de la variable x, on désigne par $\mathfrak{G}$ l'accroissement de u correspondant à l'accroissement α de la variable x, la somme $u + \mathcal{E}$ pourra être représentée par un polynome ordonné suivant les puissances ascendantes de α et de la forme

$$u + \alpha u' + \frac{\alpha^2}{1.2} u'' + \frac{\alpha^3}{1.2.3} u''' + \ldots, \tag{10}$$

et dans ce polynome les coefficients de

$$\alpha, \quad \frac{\alpha^2}{1.2}, \quad \frac{\alpha^3}{1.2.3}, \quad \ldots,$$

savoir,

$$u', \quad u'', \quad u''', \quad \ldots,$$

seront de nouvelles fonctions de x que l'on nomme *dérivées de la fonction u*, la dérivée du premier ordre u' n'étant autre chose que la limite vers laquelle converge le rapport

$$\frac{\mathcal{E}}{\alpha} = u' + \frac{\alpha}{1.2} u'' + \frac{\alpha^2}{1.2.3} u''', \qquad \ldots; \tag{11}$$

tandis que α s'approche indéfiniment de zéro, et la dérivée $u^{(x)}$ de l'ordre x étant le coefficient de $\dfrac{\alpha^x}{1.2.3.\ldots.x}$ dans le polynome (10). Si l'on suppose, pour fixer les idées,

$$u = k_0 x^m + k_1 x^{m-1} + \ldots + k_{m-2} x^2 + k_{m-1} x + k_m, \tag{12}$$

$k_0, k_1, \ldots, k_{m-2}, k_{m-1}, k_m$ étant des quantités constantes, on trouvera

$$u + \mathcal{E} = k_0(x+\alpha)^m + k_1(x+\alpha)^{m-1} + \ldots + k_{m-2}(x+\alpha)^2 + k_{m-1}(x+\alpha) + k_m, \tag{13}$$

et, par suite,

$$\left\{\begin{array}{l} u' = m k_0 x^{m-1} + (m-1) k_1 x^{m-2} + \ldots + 2 k_{m-2} x + k_{m-1}, \\ u'' = (m-1) m k_0 x^{m-2} + (m-2)(m-1) k_1 x^{m-3} + \ldots + 1.2 k_{m-2}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right. \tag{14}$$

Or il résulte des formules (14) : 1° que l'on obtiendra la dérivée du premier ordre u' en multipliant chaque terme de la fonction u par l'exposant de x dans ce terme, et diminuant ce même exposant d'une unité; 2° que, pour obtenir les dérivées de u des divers ordres, il

suffit de former successivement diverses fonctions dont chacune soit la dérivée de la précédente, la première étant la dérivée de u.

Concevons maintenant que le degré de la fonction entière u étant égal ou supérieur à m, u s'évanouisse pour une valeur donnée a de la variable x, et que $u^{(m)}$ soit alors le premier des termes de la suite

$$u, \quad u', \quad u'', \quad \ldots, \quad u^{(m)}, \quad u^{(m+1)}, \quad \ldots \tag{15}$$

qui ne se réduise pas à zéro; si l'on nomme

$$A_m, \quad A_{m+1}, \quad A_{m+2}, \quad \ldots$$

les valeurs des fonctions

$$\frac{u^{(m)}}{1.2.\ldots.m}, \quad \frac{u^{(m+1)}}{1.2.\ldots.m(m+1)}, \quad \frac{u^{(m+2)}}{1.2.\ldots.m(m+1)(m+2)}, \quad \ldots$$

pour $x = a$, la valeur de u correspondant à

$$x = a + \alpha \tag{16}$$

sera

$$A_m \alpha^m + A_{m+1} \alpha^{m+1} + A_{m+2} \alpha^{m+2} + \ldots;$$

par conséquent, l'équation (16) entraînera la suivante

$$u = A_m \alpha^m + A_{m+1} \alpha^{m+1} + A_{m+2} \alpha^{m+2} + \ldots, \tag{17}$$

de sorte que l'on aura identiquement

$$u = A_m (x-a)^m + A_{m+1}(x-a)^{m+1} + A_{m+2}(x-a)^{m+2} + \ldots,$$

ou, ce qui revient au même,

$$u = (x-a)^m [A_m + A_{m+1}(x-a) + A_{m+2}(x-a)^2 + \ldots]. \tag{18}$$

Alors l'équation

$$u = 0 \tag{19}$$

pouvant être décomposée en deux autres, savoir

$$(x-a)^m = 0, \qquad \text{et} \qquad A_m + A_{m+1}(x-a) + A_{m+2}(x-a)^2 + \ldots = 0,$$

devra être considérée comme admettant m racines égales dont a sera la valeur commune. Ajoutons que, pour des valeurs de x très rapprochées de a, le rapport

$$\frac{u}{(x-a)^m} \tag{20}$$

sera, en vertu de la formule (18), une quantité finie, mais différente de zéro, affectée du même signe que A_m, par conséquent du même signe que u_m. Cela posé, on démontrera sans peine la proposition suivante :

Théorème III. — *Soient u, v deux fonctions réelles et entières de x, et supposons que les deux équations*

$$u=0, \tag{19}$$
$$v=0, \tag{8}$$

offrent la première m racines, la seconde n racines, égales et réelles, dont a soit la valeur commune. L'indice de la fraction

$$\frac{v}{u} \tag{21}$$

correspondant à $x=a$ sera zéro, si la différence $m-n$ est paire ou négative. Mais, si cette différence est impaire et positive, le même indice sera $+1$ ou -1, suivant que la valeur du rapport

$$\frac{v^{(n)}}{u^{(m)}} \tag{22}$$

correspondant à $x=a$ sera positive ou négative.

Démonstration. — Dans l'hypothèse admise, si l'on attribue à x une valeur très rapprochée de a, les deux fractions

$$\frac{u}{(x-a)^m}, \quad \frac{v}{(x-a)^n} \tag{23}$$

acquerront des valeurs finies, mais différentes de zéro, dont la pre-

mière sera une quantité affectée du même signe que $u^{(m)}$, et la seconde une quantité affectée du même signe que $v^{(n)}$. Par suite le quotient qu'on obtient en divisant la seconde fraction par la première, savoir

$$\frac{v}{u}(x-a)^{m-n},$$

sera, pour des valeurs de x infiniment rapprochées de a, une quantité finie, mais différente de zéro et affectée du même signe que le rapport

$$\frac{v^{(n)}}{u^{(m)}}.$$

Donc alors la valeur de

$$\frac{v}{u}$$

sera infiniment petite, finie, ou infiniment grande, en même temps que le produit

$$\frac{v^{(n)}}{u^{(m)}} \frac{1}{(x-a)^{m-n}}. \tag{24}$$

Or, si la différence $x-a$ vient à changer de signe en passant par zéro, le produit (24) ne pourra changer de signe en passant par l'infini qu'autant que la différence $m-n$ sera impaire et positive et, dans ce cas, le produit (24) passera du négatif au positif ou du positif au négatif, suivant que la valeur du rapport

$$\frac{v^{(m)}}{u^{(n)}}$$

correspondant à $x=a$ sera positive ou négative. Donc l'indice de la fraction (21) s'évanouira si la différence $m-n$ est paire ou négative, et cet indice deviendra $+1$ ou -1 lorsque la différence $m-n$ sera impaire et positive, suivant que le rapport $\frac{v^{(n)}}{u^{(m)}}$ deviendra positif ou négatif pour $x=a$.

Corollaire. — Si a est une racine simple de l'équation (19), sans être racine de l'équation (8), l'indice de la fraction

$$\frac{v}{u}$$

correspondant à $x = a$, sera $+1$ ou -1, suivant que le rapport

$$\frac{v'}{u'}$$

acquerra, pour $x = a$, une valeur positive ou négative.

Lorsque u, v désignant des fonctions réelles et entières de x, la forme de la fonction u est telle qu'on puisse facilement déterminer les racines de $u = 0$ renfermées entre les limites x_0, X, le théorème III fournit le moyen de calculer immédiatement l'indice correspondant à chacune de ces racines et, par suite, l'indice intégral

$$\mathcal{J}_{x_0}^{X}\left(\left(\frac{v}{u}\right)\right).$$

Dans le cas contraire on peut, en recourant à la formule (9), remplacer la fraction $\frac{v}{u}$ par une fraction $\frac{w}{v}$, et continuer ainsi jusqu'à ce que l'on parvienne à une nouvelle fraction dont l'indice intégral entre les limites x_0, X puisse être facilement déterminé à l'aide du théorème III. On peut aussi poursuivre le calcul jusqu'à la fraction qui a pour numérateur le plus grand commun diviseur des deux polynomes u, v, fraction dont l'indice sera immédiatement déterminé par la formule (6), et alors on déduira sans peine de la formule (9) le théorème suivant :

Théorème IV. — *Soit*

$$(25) \qquad u, \quad v, \quad v_2, \quad v_3, \quad \ldots, \quad v_{r-1}, \quad v_r$$

une suite de fonctions entières de x tellement choisies que, de trois termes consécutifs de la suite (25), *le troisième soit toujours égal au reste de la division du premier par le second, ce reste étant pris en signe contraire.*

$-v_2 = w$ sera le reste de la division de u par v, $\pm v_r$ sera le plus grand commun diviseur algébrique des polynomes u, v, et, pour déterminer l'indice de la fraction

$$\frac{v}{u}$$

entre les limites $x = x_0$, $x = X$, il suffira de comparer deux à deux, sous le rapport des signes, les termes qui se suivront immédiatement dans la suite (25), *en supposant que l'on attribue à la variable x : 1° la valeur x_0, 2° la valeur X, puis de compter les variations de signe et les permanences de signe que la suite* (25) *offrira dans chacune de ces deux hypothèses. Si l'on nomme μ le nombre des variations de signe qui se changeront en permanences, et ν le nombre des permanences qui se changeront en variations dans le passage de la première hypothèse à la seconde, l'indice de la fraction*

$$\frac{v}{u}$$

pris entre les limites $x = x_0$, $x = X$ sera équivalent à la différence entre les deux nombres μ et ν, en sorte que l'on aura

$$(26) \qquad \mathcal{J}_{x_0}^{X}\left(\left(\frac{v}{u}\right)\right) = \mu - \nu.$$

Si à la fraction $\frac{v}{u}$ on substitue la suivante

$$\frac{u'}{u},$$

et si l'on suppose toujours que, a étant racine de l'équation

$$u = 0,$$

$u^{(m)}$ soit le premier terme de la suite

$$u, \quad u', \quad u''. \quad \ldots, \quad u^{(m)}, \quad u^{(m+1)}, \quad \ldots$$

qui ne s'évanouisse pas avec $x = a$, les deux équations

$$(19) \qquad u = 0,$$
$$(27) \qquad u' = 0$$

admettront, la première m racines, la seconde $m-1$ racines égales à a, et, comme la dérivée de l'ordre m de u sera en même temps la dérivée de l'ordre $m-1$ de u', on conclura du théorème III que l'indice de $\frac{u'}{u}$ se réduit à l'unité pour chaque valeur réelle de x propre à vérifier l'équation $u=0$. Par suite, si l'on nomme N le nombre des racines réelles mais distinctes de $u=0$, renfermées entre les limites $x=x_0$, $x=X$, on aura

$$N = \mathcal{J}_{x_0}^{X}\left(\left(\frac{u'}{u}\right)\right). \tag{28}$$

Si l'on veut obtenir le nombre total des racines réelles de l'équation (19), il suffira de poser, dans la formule (28), $x_0=-\infty$, $X=\infty$, ou même simplement

$$x_0=-R, \qquad X=R,$$

R désignant un nombre supérieur aux modules de toutes les racines. On pourra donc, à l'aide de la formule (28), déterminer le nombre des racines réelles d'une équation, ou plus généralement le nombre de celles de ces racines qui se trouvent comprises entre des limites données. Ajoutons que, si plusieurs racines sont renfermées entre les deux limites x_0, X, on pourra, entre ces deux limites, interposer une troisième valeur de x équivalente à leur moyenne arithmétique $\frac{x_0+X}{2}$, et déterminer le nombre des racines comprises : 1° entre $x=x_0$ et $x=\frac{x_0+X}{2}$; 2° entre $x=\frac{x_0+X}{2}$ et $x=X$; par conséquent, entre deux nouvelles limites dont la différence sera la moitié de la différence des deux premières. Or, en continuant de la sorte à resserrer les limites qui renferment les racines réelles, on finira par obtenir une suite de valeurs de x croissantes et tellement choisies que deux termes consécutifs ne comprennent jamais entre eux plus d'une valeur réelle de x propre à vérifier l'équation donnée.

Si l'on voulait obtenir le nombre des racines positives de l'équation (19), il suffirait de poser $x_0=0$ et $X=\infty$ ou $X=R$, dans la

formule (28), qui serait ainsi réduite à

$$N = \mathcal{J}_{0}^{\infty}\left(\left(\frac{u'}{u}\right)\right), \tag{29}$$

ou

$$N = \mathcal{J}_{0}^{R}\left(\left(\frac{u'}{u}\right)\right). \tag{30}$$

Si l'on nomme u_0, u'_0 et U, U' les valeurs des deux fonctions u, u' pour $x=x_0$ et pour $x=X$, on tirera de la formule (28) jointe à la formule (9),

$$N = \frac{1}{2}\left[\mathcal{J}\frac{U}{U'((x))} - \mathcal{J}\frac{u_0}{u'_0((x))}\right] - \mathcal{J}_{x_0}^{X}\left(\left(\frac{u}{u'}\right)\right). \tag{31}$$

Dans le cas particulier où l'on suppose $x_0=0$, $X=\infty$, le rapport

$$\frac{U}{U'}$$

acquiert une valeur infinie, mais positive, et l'on a, par suite,

$$\mathcal{J}\frac{U}{U'((x))} = 1.$$

Alors aussi, u_0, u'_0 n'étant autre chose que le terme constant et le coefficient de la première puissance de x dans la fonction u, l'indice

$$\mathcal{J}\frac{u_0}{u'_0((x))}$$

sera équivalent à $+1$ ou à -1 suivant que le système des deux derniers termes de u offrira une permanence ou une variation de signes. Enfin l'expression

$$-\mathcal{J}_{x_0}^{X}\left(\left(\frac{u}{u'}\right)\right)$$

réduite à

$$-\mathcal{J}_{0}^{\infty}\left(\left(\frac{u}{u'}\right)\right)$$

ne pourra surpasser le nombre des racines réelles de l'équation (27).

Cela posé, on déduira immédiatement de la formule (31) la proposition suivante :

Théorème V. — *Le nombre des racines positives de l'équation $u = 0$ ne pourra surpasser que d'une unité le nombre des racines positives de l'équation dérivée $u' = 0$, et dans le cas seulement où le système des deux derniers termes de la fonction u offrira une variation de signe.*

Corollaire. — On prouvera de même que le nombre des racines de l'équation dérivée du premier ordre $u' = 0$ ne peut surpasser que d'une unité le nombre des racines positives de l'équation dérivée du second ordre $u'' = 0$, et dans le cas seulement où le système des deux derniers termes de u', par conséquent le système des deux termes qui précèdent le dernier dans u, offre une variation de signe. Donc le nombre des racines positives de $u = 0$ surpassera d'une ou de deux unités au plus le nombre des racines positives de $u'' = 0$, et dans le cas seulement où le système des trois derniers termes de u offrira une ou deux variations de signe. En continuant ainsi, on finira par établir la règle des signes de Descartes comprise dans le théorème dont voici l'énoncé :

Théorème VI. — *Le nombre des racines positives d'une équation $u = 0$, dans laquelle u désigne une fonction entière de x, ne peut surpasser le nombre des variations de signe qu'on obtient en comparant deux à deux les termes qui se succèdent immédiatement dans la fonction u. Le nombre des racines négatives ne peut surpasser le nombre des permanences de signe fournies par le même procédé.*

Nota. — Après avoir établi, comme on l'a expliqué ci-dessus, la première partie du théorème VI, il suffira, pour déduire la seconde partie de la première, de remplacer x par $-x$.

Observons encore que, si, dans la fonction u, les coefficients de plusieurs puissances de la variable x se réduisent à zéro, il suffira, pour qu'ils cessent de s'évanouir, de remplacer x par $x \pm \varepsilon$, ε désignant un nombre infiniment petit. On s'assure aisément de cette manière que, dans l'application du théorème de Descartes, on peut ne tenir aucun compte des termes qui disparaissent.

Si, dans le théorème III, on remplace la fraction $\frac{v}{u}$ par la suivante :

$$\frac{u'x}{u},$$

et si l'on pose en même temps $x_0 = -\infty$, $X = \infty$, on trouvera

$$\mathcal{J}_{-\infty}^{\infty}\left(\left(\frac{u'x}{u}\right)\right) = N - M,$$

N désignant le nombre des racines réelles positives et M le nombre des racines réelles négatives, puis on conclura des formules (9) et (31)

$$N - M = -\mathcal{J}_{-\infty}^{\infty}\left(\left(\frac{u}{u'x}\right)\right). \tag{32}$$

La formule (32) s'accorde avec un théorème à l'aide duquel j'ai démontré le premier que, pour une équation de degré quelconque, on peut trouver des fonctions rationnelles des coefficients dont les signes fassent connaître le nombre des racines réelles positives et le nombre des racines réelles négatives.

Si l'on combine la formule (28) avec le théorème IV, on obtiendra le beau théorème dû à M. Charles Sturm.

Théorème VII. — *Soit*

$$u, \quad u', \quad u_2, \quad u_3, \quad \ldots, \quad u_{r-1}, \quad u_r, \tag{33}$$

une suite de fonctions entières de x tellement choisies que de trois termes consécutifs de la suite (33) le troisième soit toujours égal, abstraction faite des signes, au reste de la division algébrique du premier par le deuxième, mais affecté d'un signe contraire au signe de ce reste. $\pm u_r$ sera le plus grand commun diviseur algébrique des deux polynomes u, u', et le nombre des permanences de signes qu'offriront les termes de la suite (33), pris consécutivement et comparés deux à deux, ne pourra que croître pour des valeurs croissantes de x. Or l'accroissement que recevra le nombre *dont il s'agit dans le passage d'une limite donnée $x = x_0$ à une limite plus considérable $x = X$ sera précisément le nombre des racines distinctes de $u = 0$ renfermées entre ces limites.*

Nota. — On peut sans inconvénient substituer aux restes des divisions successivement opérées les produits de ces restes par des nombres entiers quelconques, ce qui permettra de faire disparaître les diviseurs numériques dans les polynomes $u_2, u_3, \ldots, u_{r-1}, u_r$ lorsque les coefficients des diverses puissances de x dans la fonction u seront des nombres entiers.

En s'appuyant sur les principes ci-dessus exposés, on pourrait encore étendre le calcul des indices à la détermination des racines imaginaires des équations, ainsi qu'à la résolution des équations simultanées, et démontrer en particulier la proposition suivante :

THÉORÈME VIII. — *Soient $f(x, y)$, $F(x, y)$ deux fonctions de x, y, qui restent continues, entre les limites $x = x_0$, $x = X$; $y = y_0$, $y = Y$. Nommons $\varphi(x, y)$, $\Phi(x, y)$ les dérivées de ces fonctions relatives à x, et $\chi(x, y)$, $X(x, y)$ leurs dérivées relatives à y. Enfin, soit N le nombre des différents systèmes de valeurs de x, y, propres à vérifier les équations simultanées $f(x, y) = 0$, $F(x, y) = 0$, et comprises entre les limites ci-dessus énoncées. On aura*

$$N = \frac{1}{2}\left[\mathcal{J}_{x_0}^{X}((\Psi(x, Y))) - \mathcal{J}_{x_0}^{X}((\Psi(x, y_0))) - \mathcal{J}_{y_0}^{Y}((\Psi(x_0, y))) + \mathcal{J}_{y_0}^{Y}(\Psi((X, y)))\right]$$

en supposant

$$\Psi(x, y) = \frac{\Phi(x, y)\chi(x, y) - \varphi(x, y)X(x, y)}{F(x, y)} f(x, y).$$

§ II. En 1833, pressé par le temps, je n'ai pu qu'indiquer les applications de la théorie aux racines imaginaires des équations à une seule inconnue, et aux équations simultanées; je vais appliquer aujourd'hui le calcul des indices à ces mêmes objets en suivant la méthode qui me paraît la plus directe.

LEMME I. — *Soient x, y deux variables que nous considérerons comme représentant deux coordonnées rectangulaires, et*

$$u = F(x, y) \tag{1}$$

une fonction de ces variables qui reste finie et continue pour tous les points (x, y) situés dans l'intérieur du contour fermé OS. Les valeurs de u correspondant à deux de ces points

$$P \quad \text{et} \quad Q$$

seront des quantités de même signe, si l'on peut joindre ces deux points par une nouvelle courbe PQ qui, renfermée dans l'intérieur du contour OS, ne rencontre pas celle que représente l'équation

$$u = F(x, y) = 0. \tag{2}$$

Démonstration. — Comme, dans l'hypothèse admise, la fonction u variera par degrés insensibles, tandis que l'on passera sur la nouvelle courbe du point P au point Q, il est clair que cette fonction, ne pouvant s'évanouir, ne pourra non plus changer de signe.

Corollaire I. — Il suit du lemme précédent que, dans l'hypothèse admise, l'aire terminée par le contour OS sera divisée, par la courbe ou par les diverses branches de courbe que représente l'équation (2), en deux ou plusieurs parties, dans chacune desquelles la fonction

$$u = F(x, y)$$

conservera partout le même signe.

LEMME II. — *La fonction u et ses dérivées du premier ordre $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$ étant supposées continues pour tous les points situés dans l'intérieur du contour OS, et l'aire terminée par ce contour se trouvant divisée en deux ou plusieurs portions par la courbe ou les branches de courbe que représente l'équation (2), si l'on passe d'une de ces portions à une portion voisine en traversant la courbe dont il s'agit ou l'une de ses branches, la fonc-*

tion u changera nécessairement de signe, à moins que l'on n'ait simultanément en chaque point de cette branche

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 0. \tag{3}$$

Démonstration. — En effet, si l'on coupe la branche dont il s'agit en un point K par une droite qui forme l'angle ϖ avec le demi-axe des x positives, la fonction u, nulle au point K, ne pourra conserver le même signe de part et d'autre de ce point, sans devenir en ce même point un maximum ou un minimum, c'est-à-dire sans que l'on ait

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{dy}{dx} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\operatorname{tang}\varpi = 0,$$

quel que soit d'ailleurs l'angle ϖ, et, par suite,

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 0. \tag{3}$$

Lemme III. — *Si un point C, dans le voisinage duquel la fonction $u = F(x, y)$ et ses dérivées du premier ordre $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$ restent finies et continues, est, dans la courbe représentée par l'équation* (2), *un point isolé, ou un point d'arrêt, ou un point saillant* (*voir* les Applications du Calcul différentiel) [1], *les coordonnées de ce point vérifieront les formules* (3).

Démonstration. — En effet, dans ces trois hypothèses, on pourra, par le point C, faire passer une droite telle que, dans le voisinage de ce point, on ne puisse trouver, d'un côté de cette droite, ou des deux côtés à la fois, aucun point qui appartienne à la courbe dont il s'agit. En conséquence, deux points situés sur la droite, de part et d'autre du point C et à de très petites distances, pouvant être joints l'un à l'autre par une nouvelle courbe très peu étendue et qui ne rencontre pas la première, les valeurs de u correspondant à ces deux points seront des quantités de même signe (lemme I). Donc la valeur de u, variable

[1] *Œuvres de Cauchy*, S. II, t. V.

d'un point à un autre sur la droite dont il s'agit, deviendra encore au point C un maximum ou un minimum, et l'on en conclura, comme dans le lemme II, que les coordonnées du point C vérifient les formules (3).

Lemme IV. — *Si la courbe représentée par l'équation* (2) *offre un point multiple C, c'est-à-dire un point dans lequel se réunissent deux ou plusieurs branches de cette courbe, les coordonnées de ce point vérifieront les formules* (3).

Démonstration. — En effet, considérons deux branches de courbe qui se réunissent au point C, et coupons ces deux branches dans le voisinage du point C par une droite PQ qui forme l'angle ϖ avec le demi-axe des x positives. On pourra satisfaire à l'équation (2), non seulement en prenant pour x, y les coordonnées du point P où la droite PQ rencontrera la première branche de courbe, mais encore en substituant aux coordonnées x, y celles du point Q situé sur la seconde branche, que je supposerai désignées par

$$x + \Delta x, \quad y + \Delta y,$$

la différence finie Δy étant de la forme

$$\Delta y = \operatorname{tang}\varpi\, \Delta x. \tag{4}$$

Cela posé, en nommant $u + \Delta u$ ce que devient la fonction u quand on y fait croître x de Δx et y de Δy, on aura non seulement

$$u = 0,$$

mais encore

$$u + \Delta u = 0,$$

et, par suite,

$$\Delta u = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\Delta u}{\Delta x} = 0; \tag{5}$$

puis, en supposant que la droite PQ se rapproche indéfiniment du point C, et qu'en conséquence Δx converge vers la limite zéro, on tirera des formules (4), (5)

$$\frac{dy}{dx} = \operatorname{tang}\varpi, \qquad \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{dy}{dx} = 0.$$

De ces dernières on déduit immédiatement l'équation

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\operatorname{tang}\varpi = 0, \tag{6}$$

qui, devant subsister pour diverses valeurs de l'angle ϖ, entraînera les formules (3).

Corollaire I. — En raisonnant toujours de la même manière, et supposant réunies au point C non plus deux, mais trois branches de courbe, alors, outre l'équation (6), on obtiendrait la suivante

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}\operatorname{tang}\varpi + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\operatorname{tang}^2\varpi = 0, \tag{7}$$

laquelle, devant subsister indépendamment de la valeur attribuée à l'angle ϖ, entraînerait les conditions

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} = 0, \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0. \tag{8}$$

Corollaire II. — En général, la réunion de n branches de courbe en un point multiple C entraînera les conditions

$$\left\{\begin{array}{llll} \dfrac{\partial u}{\partial x} = 0, & \dfrac{\partial u}{\partial y} = 0, & & \\ \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, & \dfrac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} = 0, & \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, & \\ \dots\dots, & \dots\dots\dots, & \dots\dots, & \\ \dfrac{\partial^n u}{\partial x^n} = 0, & \dfrac{\partial^n u}{\partial x^{n-1}\,\partial y} = 0, & \dots\dots, & \dfrac{\partial^n u}{\partial y^n} = 0, \end{array}\right. \tag{9}$$

qui devront toutes se vérifier pour les coordonnées x, y du point dont il s'agit.

LEMME V. — *Les variables x, y représentant des coordonnées rectangulaires, et les deux fonctions*

$$u = F(x, y), \qquad v = f(x, y),$$

étant supposées continues dans le voisinage du point C, qui répond à un système donné de valeurs de x, y, si les deux courbes représentées par l'équation (3) et par la suivante

$$v = 0 \quad \text{ou} \quad f(x, y) = 0 \tag{10}$$

se touchent au point C, on aura en ce point

$$\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial x} = 0. \tag{11}$$

Démonstration. — En effet, si les deux courbes représentées par les équations (2) et (10) ont au point C une tangente commune, leurs équations différentielles, savoir

$$\frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy = 0, \qquad \frac{\partial v}{\partial x}dx + \frac{\partial v}{\partial y}dy = 0,$$

devront fournir pour ce point la même valeur de $\frac{dy}{dx}$. Or cette condition entraînera immédiatement la formule (11).

THÉORÈME I. — *Soit $u = F(x)$ une fonction réelle de la variable x. Si $x = a$ représente une racine simple de l'équation*

$$u = 0 \quad \text{ou} \quad F(x) = 0, \tag{1}$$

l'indice de $\frac{1}{u}$, correspondant à $x = a$, et représenté par la notation

$$\mathcal{J}\frac{x-a}{u((x-a))}$$

sera $+1$ ou -1, suivant que la fonction dérivée u' acquerra pour $x = a$ une valeur positive ou négative.

Démonstration. — En effet, l'indice dont il s'agit sera $+1$ ou -1, suivant que la fonction u, en passant par zéro, sera croissante ou décroissante pour des valeurs croissantes de x. On sait d'ailleurs qu'une fonction de x croît ou décroît pour des valeurs croissantes de x, suivant que sa dérivée est positive ou négative. (*Voir* le *Calcul différentiel.*)

Corollaire I. — Les mêmes choses étant posées que dans le théorème I, si v désigne une seconde fonction de x qui ne devienne point nulle ni infinie pour $x = a$, l'indice du rapport

$$\frac{1}{uv},$$

correspondant à $x = a$, offrira le signe de la fonction dérivée

$$\frac{d(uv)}{dx} = uv' + u'v,$$

qui, en vertu de l'équation $u = 0$, se réduira au produit $u'v$, pourvu que v' conserve une valeur finie.

Corollaire II. — Si, dans le corollaire précédent, on remplace v par $\frac{1}{v}$, on en conclura que l'indice du rapport

$$\frac{v}{u},$$

correspondant à $x = a$, offre le signe de la fonction

$$\frac{v}{u'},$$

lorsque v et v' obtiennent, pour $x = a$, des valeurs finies différentes de zéro.

Cette conclusion s'accorde avec le théorème III du Mémoire de 1833 (¹).

Théorème II. — *Soient, comme au lemme I, x, y deux variables que nous considérerons comme représentant deux coordonnées rectangulaires,*

$$u = F(x, y)$$

(¹) *Œuvres de Cauchy*, S. II, t. XV.

une fonction réelle de ces deux variables et

$$x = a, \qquad y = b$$

un des systèmes de valeurs de x, y propres à vérifier l'équation

$$(2) \qquad u = 0 \quad \text{ou} \quad F(x, y) = 0.$$

Traçons d'ailleurs autour du point C, dont les coordonnées sont a et b, une courbe fermée OS dont la longueur totale soit désignée par c, et nommons s l'arc de cette courbe compté positivement à partir d'un point fixe O jusqu'à un point mobile S qui ait autour du point C un mouvement de rotation direct. Pour chacun des points situés sur la courbe OS, x, y, et par suite u, pourront être considérés comme fonctions de la variable s. Cela posé, si la courbe fermée OS est traversée en divers points par celle que représente l'équation (2), l'indice de la fonction $\frac{1}{u}$, correspondant à chacun de ces points, offrira le même signe que la fonction dérivée $\frac{du}{ds}$.

Démonstration. — Le théorème II est une conséquence immédiate du théorème I et suppose qu'en chacun des points où la courbe OS est rencontrée par celle que représente l'équation (2) cette dernière équation, exprimée à l'aide de la seule variable s, n'offre point de racines égales.

Corollaire I. — Les mêmes choses étant posées que dans le théorème II, si l'on désigne par $v = f(x, y)$ une seconde fonction de x, y, l'indice du rapport $\frac{1}{uv}$, correspondant à l'un des points de rencontre de la courbe fermée OS et de celle que représente l'équation (2), offrira le même signe que la fonction dérivée

$$\frac{d(uv)}{ds} = u\frac{dv}{ds} + v\frac{du}{ds}.$$

Corollaire II. — Si, dans le corollaire précédent, on remplace v par $\frac{1}{v}$, où en conclura que l'indice du rapport $\frac{v}{u}$, correspondant à l'un des points de rencontre de la courbe OS et de celle que représente l'équation (2), offre le même signe que la fonction dérivée

$$\frac{d\left(\frac{u}{v}\right)}{ds}=\frac{1}{v^2}\left(v\frac{du}{ds}-u\frac{dv}{ds}\right),$$

par conséquent le même signe que la différence

$$v\frac{du}{ds}-u\frac{dv}{ds}. \tag{12}$$

Théorème III. — *Les mêmes choses étant posées que dans le théorème II, désignons par $v=f(x,y)$ une seconde fonction de x, y. Admettons d'ailleurs que les deux fonctions u, v soient non seulement finies, mais continues et la seconde différente de zéro, pour tout point situé sur le contour* OS; *alors, en supposant u et v exprimés sur le contour* OS *en fonction de la seule variable s, on aura*

$$\mathcal{J}_{0}^{c}\left(\left(\frac{v}{u}\right)\right)=0. \tag{13}$$

Démonstration. — La fonction v conservera le même signe pour tous les points du contour OS, puisqu'elle y reste finie et continue sans jamais s'évanouir. Cela posé, concevons que l'extrémité de l'arc s, ou le point S, fasse le tour de la courbe OS avec un mouvement de rotation direct; pendant ce mouvement, le rapport $\frac{v}{u}$ des deux fonctions continues v et u ne pourra changer de signe qu'en passant par l'infini, et passera évidemment autant de fois du positif au négatif que du négatif au positif. Donc, parmi les indices de ce rapport qui différeront de zéro, le nombre de ceux qui se réduiront à -1 sera égal au nombre de ceux qui se réduiront à $+1$. Donc la somme de ces indices ou l'indice intégral de $\frac{v}{u}$ sera nul et vérifiera la formule (3).

Corollaire I. — En prenant $v=1$, on réduit le théorème III à la proposition suivante :

Si la fonction $u=F(x,y)$ reste finie et continue pour tous les points situés sur le contour OS, *alors, en considérant u comme fonction de la seule variable s, on aura*

$$\mathcal{J}_{0}^{c}\left(\left(\frac{1}{u}\right)\right)=0. \tag{14}$$

Corollaire II. — Soient $u=F(x,y)$ et $v=f(x,y)$ deux fonctions dont chacune reste non seulement finie, mais continue sur le contour OS, et puisse d'ailleurs s'évanouir en quelques points de ce contour. Alors, en considérant u et v comme fonctions de la seule variable s, on aura, d'après le corollaire I,

$$\mathcal{J}_{0}^{c}\left(\left(\frac{1}{uv}\right)\right)=0,$$

et, par conséquent,

$$\mathcal{J}_{0}^{c}\left(\left(\frac{u^2+v^2}{uv}\right)\right)=0. \tag{15}$$

Comme on aura d'autre part

$$\frac{u^2+v^2}{uv}=\frac{u}{v}+\frac{v}{u},$$

l'équation (15) pourra s'écrire ainsi [1]

$$\mathcal{J}_{0}^{c}\left(\left(\frac{u}{v}\right)\right)+\mathcal{J}_{0}^{c}\left(\left(\frac{v}{u}\right)\right)=0. \tag{16}$$

Corollaire III. — Soient u, v, w trois fonctions de x, y, dont chacune reste non seulement finie, mais continue sur le contour OS, et puisse d'ailleurs s'évanouir en quelques points de ce contour; alors, en considérant u, v, w comme fonctions de la seule variable s, on aura, d'après le corollaire I,

$$\mathcal{J}_{0}^{c}\left(\left(\frac{1}{uvw}\right)\right)=0,$$

[1] La méthode à l'aide de laquelle on démontre ici la formule (16) pourrait servir pareillement à établir la formule (5) du paragraphe Ier.

et, par conséquent,

$$\mathcal{J}_0^c\left(\left(\frac{v^2w^2+w^2u^2+u^2v^2}{uvw}\right)\right)=0. \tag{17}$$

Comme on aura d'autre part

$$\frac{v^2w^2+w^2u^2+u^2v^2}{uvw}=\frac{vw}{u}+\frac{wu}{v}+\frac{uv}{w},$$

l'équation (17) pourra s'écrire ainsi

$$\mathcal{J}_0^c\left(\left(\frac{vw}{u}\right)\right)+\mathcal{J}_0^c\left(\left(\frac{wu}{v}\right)\right)+\mathcal{J}_0^c\left(\left(\frac{uv}{w}\right)\right)=0. \tag{18}$$

Corollaire IV. — Des formules analogues aux équations (16) et (18) pourraient être facilement démontrées si le nombre des fonctions u, v, w, ... devenait supérieur à trois.

Théorème IV. — *Les mêmes choses étant posées que dans le théorème II, désignons par $v=f(x,y)$ une seconde fonction de x, y, et admettons que les deux fonctions u, v restent finies et continues, ainsi que leurs dérivées du premier ordre,*

$$\frac{\partial u}{\partial x},\quad \frac{\partial u}{\partial y},\quad \frac{\partial v}{\partial x},\quad \frac{\partial v}{\partial y},$$

pour tous les points renfermés dans l'intérieur du contour OS. Supposons de plus que, dans cet intérieur, les deux courbes représentées par les équations (2) et (10) se réduisent chacune à une seule branche GCH ou ICJ qui rencontre le contour OS en deux points G, H ou I, J; que ces deux courbes s'y rencontrent elles-mêmes en un seul point C; enfin que les fonctions dérivées

$$\frac{\partial u}{\partial x},\quad \frac{\partial u}{\partial y},\quad \frac{\partial v}{\partial x},\quad \frac{\partial v}{\partial y}$$

y conservent toujours des valeurs finies, mais ne vérifient pas au point C la condition (11); alors, en considérant, sur le contour OS, x, y et par suite u, v comme fonctions de la seule variable s, on aura

$$\frac{1}{2}\mathcal{J}_0^c\left(\left(\frac{v}{u}\right)\right)=\pm 1, \tag{19}$$

le double signe devant être réduit au signe + ou au signe −, suivant que la valeur du binome

$$\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y}-\frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial x}, \tag{11}$$

correspondant au point C, sera positive ou négative.

Démonstration. — Puisqu'au point C, situé sur la courbe GCH, la condition (11) n'est pas vérifiée, les conditions (3) ne pourront l'être dans l'hypothèse admise. Donc, en vertu du lemme II, la courbe GCH, représentée par l'équation (2), divisera l'aire terminée par le contour OS, et ce contour lui-même en deux portions telles que tous les points de l'une répondront à des valeurs positives et tous les points de l'autre à des valeurs négatives de la fonction u. Par la même raison, la courbe ICJ, représentée par l'équation (10), divisera l'aire terminée par le contour OS, et ce contour lui-même en deux portions telles que tous les points de l'une répondront à des valeurs positives et tous les points de l'autre à des valeurs négatives de la fonction v. Enfin, en vertu du lemme V, les deux courbes GCH, ICJ ne pourront se toucher au point C où elles se rencontrent sans que la condition (11) soit vérifiée. Elles s'y couperont donc, et il en résulte que, sur le contour OS, chacun des points I, J se trouvera situé entre les deux points G et H. Concevons, pour fixer les idées, que l'extrémité mobile de l'arc s, ou le point S, en faisant le tour de la courbe OS avec un mouvement de rotation direct, rencontre successivement les quatre points

$$\text{G},\quad \text{I},\quad \text{H},\quad \text{J},$$

chacune des fonctions u, v conservera le même signe, tandis que le point S parcourra l'un des arcs

$$\text{GI},\quad \text{IH},\quad \text{HJ},\quad \text{JG}.$$

Mais la fonction u changera de signe lorsque le point S passera par la position G ou H, et la fonction v lorsque le point S passera par la position I ou J.

Par suite le rapport

$$\frac{v}{u}$$

changera de signe chaque fois que le point S passera par l'une des positions successives

$$G, \quad I, \quad H, \quad J;$$

et le changement de signe au point H s'effectuera dans le même sens qu'au point G, le changement de signe en sens opposé ayant lieu en chacun des points I et J. Donc les indices du rapport $\frac{v}{u}$, correspondant aux deux points G, H, seront égaux entre eux et à ± 1; d'où il résulte que la demi-somme de ces indices ou la moitié de l'expression

$$\mathcal{J}_0^c\left(\left(\frac{v}{u}\right)\right)$$

se réduira encore à ± 1. D'autre part, il suit du théorème II (corollaire II) que l'indice du rapport $\frac{v}{u}$, en chacun des points G, H, offrira le signe de la différence

$$v\frac{du}{ds} - u\frac{dv}{ds}. \tag{12}$$

Donc la valeur de l'expression

$$\mathcal{J}_0^c\left(\left(\frac{v}{u}\right)\right)$$

sera déterminée par la formule (19), le signe du second membre devant être réduit au signe $+$ ou au signe $-$, suivant que la valeur du binome

$$v\frac{du}{ds} - u\frac{dv}{ds},$$

correspondant à chacun des points G, H, sera positive ou négative.

Concevons maintenant que, a, b étant les valeurs de x, y relatives au point C, l'on remplace les coordonnées rectangulaires x, y par des coordonnées polaires p, r relatives au point C pris pour origine, et

liées à x, y par les formules

$$x - a = r\cos p, \qquad y - b = r\sin p. \tag{20}$$

Supposons, de plus, que l'on resserre indéfiniment le contour OS autour du point C, en faisant décroître et rendant infiniment petite la valeur de r correspondant à chaque point de ce contour. Le point C qui répond à $r = 0$ étant celui dans lequel se coupent les deux courbes représentées par les équations (2) et (10), u et v, considérées comme fonctions du rayon vecteur r, deviendront infiniment petites avec r, ainsi que la quantité (12) à laquelle on pourra rendre une valeur finie, sans altérer le signe dont elle est affectée, en la divisant par r, c'est-à-dire en la remplaçant par la différence

$$\frac{v}{r}\frac{du}{ds} - \frac{u}{r}\frac{dv}{ds}. \tag{21}$$

D'ailleurs rien n'empêchera d'admettre que, dans le contour OS devenu infiniment petit, toutes les valeurs de r soient égales entre elles. Alors ce contour se transformera en une circonférence de cercle; et si l'on place l'origine O de l'arc s sur le demi-axe des x positives, cet arc, déterminé par la formule

$$s = rp,$$

devra être considéré comme fonction de la seule variable p; en sorte qu'on aura

$$\frac{du}{ds} = \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial p}, \qquad \frac{dv}{ds} = \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial p}.$$

Cela posé, la différence (21) deviendra

$$\frac{v}{r^2}\frac{\partial u}{\partial p} - \frac{u}{r^2}\frac{\partial v}{\partial p}. \tag{22}$$

Ce n'est pas tout : lorsque le contour OS se transforme en une circonférence de cercle dont le rayon est infiniment petit, chacun des points de cette circonférence se confond sensiblement avec le centre C; et par suite les valeurs du binome (22), qui répondent aux deux points G, H, se confondent sensiblement avec la valeur du même binome correspondant au point C (¹). Donc cette dernière sera la limite des deux autres et pourra leur être substituée. Or, on aura pour le point C, où les trois quantités r, u, v s'évanouissent simultanément,

$$\frac{u}{r} = \frac{\partial u}{\partial r}, \qquad \frac{v}{r} = \frac{\partial v}{\partial r}.$$

Donc, en ce point, la différence (22) sera équivalente au produit

$$(23) \qquad \frac{1}{r}\left(\frac{\partial v}{\partial r}\frac{\partial u}{\partial p} - \frac{\partial v}{\partial p}\frac{\partial u}{\partial r}\right).$$

D'autre part on a généralement, en vertu des formules (20),

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \cos p\frac{\partial u}{\partial x} + \sin p\frac{\partial u}{\partial y}, \qquad \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial p} = -\sin p\frac{\partial u}{\partial x} + \cos p\frac{\partial u}{\partial y},$$
$$\frac{\partial v}{\partial r} = \cos p\frac{\partial v}{\partial x} + \sin p\frac{\partial v}{\partial y}, \qquad \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial p} = -\sin p\frac{\partial v}{\partial x} + \cos p\frac{\partial v}{\partial y},$$

et, par suite,

$$(24) \qquad \frac{1}{r}\left(\frac{\partial v}{\partial r}\frac{\partial u}{\partial p} - \frac{\partial v}{\partial p}\frac{\partial u}{\partial r}\right) = \frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial x}.$$

Donc le signe de l'indice intégral

$$\mathcal{J}_{\circ}^{c}\left(\left(\frac{v}{u}\right)\right)$$

se confondra non seulement avec le signe du binome (12) ou (21) en chacun des points G, H, mais encore avec le signe de la différence

$$\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial x}$$

calculée pour le point C, c'est-à-dire pour le point où se coupent les courbes représentées par les équations (2) et (10).

(¹) Ce qui rend cette conclusion légitime, c'est que, dans l'hypothèse admise, les valeurs de u, v, $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial v}{\partial x}$, $\frac{\partial v}{\partial y}$, et, par suite, celles de $\frac{\partial u}{\partial r}$, $\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial p}$, $\frac{\partial v}{\partial r}$, $\frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial p}$, $\frac{u}{r}$, $\frac{v}{r}$ restent, dans l'intérieur du contour OS, fonctions continues des variables x, y ou r et p.

Autre démonstration. — On pourrait, dans la démonstration précédente, se dispenser de transformer les coordonnées rectangulaires en coordonnées polaires, et arriver très simplement aux mêmes conclusions de la manière suivante :

Supposons que le contour OS, en se resserrant de plus en plus autour du point C, prenne la forme non d'une circonférence de cercle, mais d'un rectangle terminé par quatre droites parallèles aux axes des x et des y; le binome (12) acquerra des formes diverses pour les points situés sur ces quatre droites. On trouvera, en particulier, pour les points situés sur l'une des droites parallèles à l'axe des y et du côté des x positives, par rapport au point C,

$$(25) \qquad s = \text{const.} + y,$$

par conséquent

$$(26) \qquad v\frac{du}{ds} - u\frac{dv}{ds} = v\frac{\partial u}{\partial y} - u\frac{\partial v}{\partial y},$$

et comme pour chacun de ces points $x - a$ sera positif, le binome (26), pour chacun d'eux, offrira le même signe que la différence

$$(27) \qquad \frac{v}{x-a}\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{u}{x-a}\frac{\partial v}{\partial y},$$

dont la limite, correspondant au point C, où $x - a$, u et v s'évanouissent, ne différera pas de la quantité w déterminée par la formule

$$(28) \qquad w = \frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial x}.$$

Au contraire, pour les points situés sur l'une des droites parallèles à l'axe des x, et du côté des y positives, relativement au point C, on aura

$$(29) \qquad s = \text{const.} - x,$$

par conséquent

$$(30) \qquad v\frac{du}{ds} - u\frac{dv}{ds} = u\frac{\partial v}{\partial x} - v\frac{\partial u}{\partial x},$$

et comme pour chacun de ces points la différence $y-b$ sera positive, le binome (30), pour chacun d'eux, offrira le même signe que la différence

$$\frac{u}{y-b}\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{v}{y-b}\frac{\partial u}{\partial x}, \tag{31}$$

dont la limite correspondant au point C, où $y-b$, u et v s'évanouissent, sera encore la quantité ϖ. Si, au lieu des droites situées par rapport au point C du côté des coordonnées positives, on considérait les droites situées par rapport au point C du côté des coordonnées négatives, il faudrait remplacer dans les formules (27) et (31) y par $-y$, x par $-x$, et substituer aux différences $x-a$, $y-b$, qui deviendraient négatives, les différences $a-x$, $b-y$. Par suite on pourrait encore substituer au binome (12) l'expression (27) ou (31), dont la limite correspondant au point C serait toujours la quantité ϖ.

Ainsi, en résumé, si le contour OS, en se resserrant autour du point C, prend la forme d'un rectangle dont les côtés deviennent infiniment petits, la valeur du binome (12), pour chacun des points situés sur ce contour, offrira le même signe qu'une quantité dont la limite sera la valeur de ϖ correspondant au point C. Donc l'indice intégral

$$\mathcal{J}_0^c\left(\left(\frac{v}{u}\right)\right)$$

qui doit se réduire à $+1$ ou à -1, et offrir le même signe que le binome (11) en deux points G, H situés sur le contour du rectangle, sera donné par la formule (19), le signe du second membre étant déterminé comme il est dit dans l'énoncé du théorème IV.

Corollaire. — Si les deux fonctions u, v, étant nulles au point C, restent, dans le voisinage de ce point, finies et continues, ainsi que leurs dérivées du premier ordre

$$\frac{\partial u}{\partial x},\quad \frac{\partial u}{\partial y},\quad \frac{\partial v}{\partial x},\quad \frac{\partial v}{\partial y},$$

sans que la valeur de ϖ relative au même point s'évanouisse, il sera impossible d'admettre que l'on ait simultanément

$$\frac{\partial u}{\partial x}=0,\qquad \frac{\partial u}{\partial y}=0,$$

ou bien

$$\frac{\partial v}{\partial x}=0,\qquad \frac{\partial v}{\partial y}=0.$$

Donc alors, en vertu des lemmes III et IV, le point C, considéré comme appartenant à l'une ou l'autre des courbes représentées par les équations

$$u=0,\qquad v=0, \tag{32}$$

ne pourra être ni un point isolé, ni un point d'arrêt, ni un point saillant, ni un point multiple. Il y a plus : en vertu des lemmes IV et V, les deux courbes, réduites chacune à une seule branche dans le voisinage du point C, ne seront point tangentes l'une à l'autre en ce point, mais s'y traverseront mutuellement. Cela posé, pour que les conditions énoncées dans le théorème IV soient remplies, il suffira de choisir arbitrairement sur chacune des courbes GCH, ICJ, représentées par les équations (32), deux points G, H ou I, J situés de part et d'autre du point C à des distances infiniment petites, puis de joindre les quatre points

G, I, H, J,

pris consécutivement, et deux à deux, par quatre arcs de courbe

GI, IH, HJ, JG,

tracés de manière qu'aucun de ces arcs ne rencontre entre ses deux extrémités l'une des deux courbes GCH, ICJ. Alors, en effet, le système des quatre arcs GI, IH, HJ, JG formera un contour OS que chacune des courbes GCH, ICJ rencontrera seulement en deux points G et H ou I et J. Donc le théorème IV entraîne la proposition suivante :

Théorème V. — *Si les deux fonctions*

$$u=F(x,y),\qquad v=f(x,y),$$

étant nulles pour les valeurs de x, y qui correspondent à un point donné C, *restent, dans le voisinage de ce point, finies et continues, ainsi que leurs dérivées du premier ordre*

$$\frac{\partial u}{\partial x},\quad \frac{\partial u}{\partial y},\quad \frac{\partial v}{\partial x},\quad \frac{\partial v}{\partial y},$$

sans que la valeur de ϖ relative au même point et déterminée par la formule (27) *s'évanouisse, on pourra tracer autour du point* C, *et dans son voisinage, un contour fermé* OS, *de telle manière que l'on ait*

$$\frac{1}{2}\mathcal{J}_0^c\left(\left(\frac{v}{u}\right)\right) = \pm 1, \tag{19}$$

s désignant l'arc de la nouvelle courbe OS *compté positivement dans le sens du mouvement de rotation direct, v, u étant considérés dans l'équation* (19) *comme fonctions de la seule variable s, et c représentant la longueur totale du contour fermé* OS. *Ajoutons que, dans le second membre de l'équation* (19), *le double signe devra être réduit au signe + ou au signe* −, *suivant que la valeur de ϖ relative au point* C *sera positive ou négative.*

Théorème VI. — *Soient x, y deux variables que nous considérerons comme représentant deux coordonnées rectangulaires, et*

$$u = F(x, y)$$

une fonction de ces deux variables. Traçons d'ailleurs dans le plan des x, y une courbe fermée OS, *dont la longueur totale soit désignée par c, et nommons s l'arc de cette courbe compté positivement dans le sens du mouvement de rotation direct, à partir d'un point fixe* O *jusqu'au point mobile* S. *Si l'on partage le périmètre c de la courbe* OS *en plusieurs parties*

$$c_1,\quad c_2,\quad \ldots,\quad c_n,$$

respectivement comprises entre les extrémités des arcs

$$s_0 = 0,\qquad s_1,\quad s_2,\quad \ldots,\quad s_{n-1},\quad s_n = c,$$

en sorte qu'on ait

$$c_1 = s_1 - s_0,\qquad c_2 = s_2 - s_1,\qquad \ldots,\qquad c_n = s_n - s_{n-1},$$

et, par suite,

$$c_1 + c_2 + \ldots + c_n = s_n - s_0 = c:$$

alors u étant considéré comme fonction de la seule variable s, l'indice intégral

$$\mathcal{J}_0^c\left(\left(\frac{1}{u}\right)\right)$$

sera la somme des indices de même forme qui correspondent aux diverses parties

$$c_1,\quad c_2,\quad \ldots,\quad c_n$$

du périmètre c, en sorte qu'on aura

$$\mathcal{J}_0^c\left(\left(\frac{1}{u}\right)\right) = \mathcal{J}_{s_0}^{s_n}\left(\left(\frac{1}{u}\right)\right) = \mathcal{J}_{s_0}^{s_1}\left(\left(\frac{1}{u}\right)\right) + \mathcal{J}_{s_1}^{s_2}\left(\left(\frac{1}{u}\right)\right) + \ldots + \mathcal{J}_{s_{n-1}}^{s_n}\left(\left(\frac{1}{u}\right)\right). \tag{33}$$

Démonstration. — En effet, dans l'équation (33), le premier membre représente la somme totale des indices de la fonction $\frac{1}{u}$ correspondant aux points du contour OS pour lesquels cette fonction devient infinie, tandis que chaque terme du second membre représente une somme semblable, mais relative seulement aux points situés sur une partie du même contour. Or il est clair qu'en réunissant les sommes partielles relatives aux diverses portions c_1, c_2, …, c_n du contour c, on obtiendra la somme totale relative au contour entier.

Corollaire I. — Si l'on nomme C l'indice intégral relatif au contour fermé OS, et

$$C_1,\quad C_2,\quad \ldots,\quad C_n$$

ce que devient cet indice quand on remplace successivement le contour entier c par ses diverses parties

$$c_1,\quad c_2,\quad \ldots,\quad c_n,$$

on aura

$$C = C_1 + C_2 + \ldots + C_n. \tag{34}$$

Corollaire II. — Les raisonnements dont nous avons fait usage suffisent évidemment pour établir la formule

$$(35)\qquad \mathcal{J}_{s_0}^{s_n}\left(\left(\frac{1}{u}\right)\right)=\mathcal{J}_{s_0}^{s_1}\left(\left(\frac{1}{u}\right)\right)+\mathcal{J}_{s_1}^{s_2}\left(\left(\frac{1}{u}\right)\right)+\ldots+\mathcal{J}_{s_{n-1}}^{s_n}\left(\left(\frac{1}{u}\right)\right),$$

dans le cas même où l'on n'aurait plus $s_0=0$, $s_n=c$, par conséquent, dans le cas où l'arc

$$s_n-s_0$$

ne serait lui-même qu'une partie du contour OS.

Si l'on suppose en particulier $n=2$, la formule (35) donnera simplement

$$(36)\qquad \mathcal{J}_{s_0}^{s_2}\left(\left(\frac{1}{u}\right)\right)=\mathcal{J}_{s_0}^{s_1}\left(\left(\frac{1}{u}\right)\right)+\mathcal{J}_{s_1}^{s_2}\left(\left(\frac{1}{u}\right)\right).$$

Corollaire III. — Si l'on veut rendre la formule (35) applicable au cas même où la fonction $\frac{1}{u}$ devient infinie pour l'une des valeurs de s représentées par

$$s_0,\quad s_1,\quad s_2,\quad \ldots,\quad s_{n-1},\quad s_n,$$

il sera nécessaire d'admettre que, dans la somme d'indices représentée par une expression de la forme

$$\mathcal{J}_{s_0}^{s_1}\left(\left(\frac{1}{u}\right)\right),$$

on doit réduire à moitié l'indice correspondant à une valeur donnée de s toutes les fois que cette valeur coïncide avec l'une des limites s_0, s_1.

Corollaire IV. — Dans ce qui précède, nous avons implicitement admis que les quantités

$$s_0,\quad s_1,\quad s_2,\quad \ldots,\quad s_{n-1},\quad s_n$$

forment une suite croissante. Si l'on veut que les formules trouvées s'étendent au cas même où cette condition ne serait pas remplie, on tirera de la formule (36), en y posant $s_2=s_0$,

$$\mathcal{J}_{s_0}^{s_1}\left(\left(\frac{1}{u}\right)\right)+\mathcal{J}_{s_1}^{s_0}\left(\left(\frac{1}{u}\right)\right)=\mathcal{J}_{s_0}^{s_0}\left(\left(\frac{1}{u}\right)\right)=0,$$

par conséquent

$$(37)\qquad \mathcal{J}_{s_1}^{s_0}\left(\left(\frac{1}{u}\right)\right)=-\mathcal{J}_{s_0}^{s_1}\left(\left(\frac{1}{u}\right)\right).$$

Au reste, pour obtenir immédiatement la formule (39), il suffit d'étendre la définition que nous avons donnée de l'indice intégral d'une fonction, dans le paragraphe I, au cas même où la variable comprise dans cette fonction décroît au lieu de croître. En effet, si une fonction d'une seule variable change de signe dans un certain sens, tandis que la variable croît en passant par une valeur donnée, elle changera de signe en sens opposé, tandis que cette variable décroît en passant par la même valeur. Donc l'indice de la fonction correspondant à une valeur donnée de la variable se réduira dans le premier et le second cas à deux quantités de signes contraires, et par suite l'indice intégral, pris entre deux limites, restera le même au signe près, mais changera de signe si l'on échange les deux limites entre elles.

La formule (37) étant obtenue comme on vient de le dire, on en conclura sans peine que la formule (35) subsiste, quel que soit l'ordre de grandeur des quantités

$$s_0,\quad s_1,\quad s_2,\quad \ldots,\quad s_{n-1},\quad s_n.$$

D'ailleurs la formule (37) comprend un théorème que l'on peut énoncer comme il suit :

Théorème VII. — *Soient x, y deux variables que nous considérerons comme représentant deux coordonnées rectangulaires; $u=\mathrm{F}(x,y)$ une fonction réelle de ces deux variables qui ne change jamais de signe sans devenir nulle ou infinie; PQ une ligne droite ou courbe tracée dans le plan des x, y entre deux points donnés P, Q et s une longueur comptée sur cette ligne à partir d'un point fixe O. Alors u étant considéré comme fonction de la variable s, si l'on nomme C, D les valeurs qu'acquiert l'indice intégral de la fonction $\frac{1}{u}$, quand on passe, en suivant la ligne PQ : 1° du point P au point Q; 2° du point Q au point P, on aura*

$$(38)\qquad \mathrm{C}=-\mathrm{D}\quad \text{ou}\quad \mathrm{C}+\mathrm{D}=0.$$

Nota. — Il est aisé de s'assurer que ce théorème s'étend au cas même où la fonction $\frac{1}{u}$ deviendrait infinie en l'un des points P, Q.

THÉORÈME VIII. — *Soient x, y deux variables qui représentent deux coordonnées rectangulaires;*

$$u = F(x, y)$$

une fonction de ces mêmes variables, et supposons tracés dans le plan des x, y deux contours PRQ, QSP *qui, offrant une partie commune* PQ, *enveloppent respectivement deux aires* A, B, *contiguës l'une à l'autre. Le système de leurs parties non communes formera un nouveau contour* RQSPR *qui servira d'enveloppe à l'aire totale* A + B. *Cela posé, nommons* A *ou* B *l'indice intégral de la fonction $\frac{1}{u}$ étendu à tous les points du contour* PRQ *ou* QSP *et calculé dans la supposition qu'un point mobile parcourra chacun de ces contours avec un mouvement de rotation direct, la somme*

$$A + B$$

représentera l'indice intégral de la même fonction $\frac{1}{u}$ étendu à tous les points du contour RQSPR *et calculé dans la supposition que ce dernier contour soit encore parcouru par un point mobile doué d'un mouvement de rotation direct.*

Démonstration. — Soient C la partie de l'indice intégral A et D la partie de l'indice intégral B, relatives à l'arc PQ, c'est-à-dire à la partie commune des deux contours PRQ, QSP. Soient au contraire R, S les parties des indices A et B qui correspondent aux parties non communes des deux contours. On aura

$$A = C + R, \qquad B = D + S, \tag{39}$$

et la somme R + S représentera évidemment l'indice intégral de $\frac{1}{u}$ étendu à tous les points du contour RQSPR, dans le cas où un point mobile parcourt ce dernier contour avec un mouvement de rotation

direct. Or, pour s'assurer que la somme R + S ne diffère pas de la somme A + B, il suffira de combiner entre elles par voie d'addition les formules (39), en ayant égard à la condition (38) qui, dans l'hypothèse admise, se trouvera évidemment vérifiée.

Corollaire. — En réunissant successivement les unes aux autres plusieurs aires contiguës terminées par divers contours qui offrent des parties communes, on déduira sans peine du théorème VIII celui que nous allons énoncer.

THÉORÈME IX. — *Soient x, y deux variables qui représentent des coordonnées rectangulaires;*

$$u = F(x, y)$$

une fonction de ces variables, et considérons dans le plan des x, y une aire finie qui soit partagée en autant d'éléments que l'on voudra. L'indice intégral de la fonction $\frac{1}{u}$, étendu à tous les points du contour qui termine cette aire, sous la condition que ce contour soit parcouru dans le sens du mouvement de rotation direct, sera la somme des indices semblables calculés sous la même condition pour les divers contours qui terminent les divers éléments.

Du théorème IX, joint aux théorèmes III et V, on déduit immédiatement la proposition suivante :

THÉORÈME X. — *Les variables x, y représentant des coordonnées rectangulaires, si, pour tous les points renfermés dans un certain contour* OS, *les deux fonctions*

$$u = F(x, y), \qquad v = f(x, y)$$

restent finies et continues aussi bien que leurs dérivées du premier ordre

$$\frac{\partial u}{\partial x}, \quad \frac{\partial u}{\partial y}, \quad \frac{\partial v}{\partial x}, \quad \frac{\partial v}{\partial y};$$

si, de plus, dans cet intérieur, la fonction

$$w = \frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial x}$$

offre une valeur différente de zéro pour tous les points où se rencontrent les courbes représentées par les équations

$$(32)\qquad u = 0, \qquad v = 0,$$

alors en nommant M *le nombre des points de rencontre qui correspondent à des valeurs négatives de* w, N le nombre de ceux qui correspondent à des valeurs positives de w, c *le périmètre du contour* OS, *enfin* s *un arc compté positivement sur ce contour dans le sens du mouvement de rotation direct, et supposant d'ailleurs le rapport* $\frac{v}{u}$ *exprimé en fonction de la seule variable* s, *on aura*

$$(40)\qquad \frac{1}{2}\mathcal{J}_0^c\left(\left(\frac{v}{u}\right)\right) = \mathrm{N} - \mathrm{M}.$$

Démonstration. — Dans l'hypothèse admise, et en vertu du théorème V, on pourra, autour de chacun des points de rencontre C, C′, ... des courbes représentées par les équations (32), tracer un contour fermé dont les dimensions soient très petites et dont la forme soit telle que la substitution de ce contour au contour OS fournisse, au lieu du premier membre de l'équation (40), une expression équivalente à l'unité, abstraction faite du signe, mais affectée du même signe que la valeur de w relative au point C, ou C′, etc. Il y a plus, les aires infiniment petites, comprises dans les contours tracés autour des points C, C′, ..., pourront être considérées comme autant d'éléments de l'aire finie comprise dans le contour OS, les autres éléments étant eux-mêmes infiniment petits et tracés de manière que chacun d'eux soit traversé par une seule des courbes (32) ou qu'il n'ait de points communs avec aucune d'elles. Or comme l'indice intégral relatif au contour qui termine l'un de ces derniers éléments sera nul dans le premier cas, en vertu du théorème III, et s'évanouira encore dans le second cas, où la fonction $\frac{v}{u}$ ne deviendra infinie pour aucun des points de ce contour, il suit du théorème IX que l'expression

$$\mathcal{J}_0^c\left(\left(\frac{v}{u}\right)\right)$$

se réduira simplement à la somme des indices relatifs aux éléments qui contiennent les points C, C′, ... D'autre part, chacun de ces indices étant le double de $+1$ ou de -1, suivant que la valeur de w correspondant au point C ou C′, etc. est positive ou négative, leur somme sera évidemment égale au double de N — M. Donc la valeur de l'expression

$$\mathcal{J}_0^c\left(\left(\frac{v}{u}\right)\right)$$

sera déterminée par la formule (40).

Corollaire I. — Lorsque u et v sont des fonctions entières de x, y, ces fonctions sont toujours finies et continues aussi bien que leurs dérivées du premier ordre

$$\frac{\partial u}{\partial x},\quad \frac{\partial u}{\partial y},\quad \frac{\partial v}{\partial x},\quad \frac{\partial v}{\partial y}$$

pour des valeurs finies des variables x, y. Donc alors la formule (40) subsiste sous la seule condition que w diffère de zéro pour tous les systèmes de valeurs de x, y propres à vérifier les équations simultanées $u = 0$, $v = 0$, et l'on obtient le théorème qu'ont énoncé MM. Sturm et Liouville dans une Note que renferme le *Compte rendu de la séance de l'Académie des Sciences* du 15 mai 1837.

Corollaire II. — Lorsque u et v cessent d'être des fonctions entières de x, y, alors pour des valeurs de x, y propres à vérifier le système des équations simultanées

$$(32)\qquad u = 0, \qquad v = 0,$$

il peut arriver que la valeur et même le signe de w soient indéterminés.

Ainsi, par exemple, si l'on a

$$u=\frac{y^2}{x}, \qquad v=x,$$

les équations (32), réduites à la forme

$$\frac{y^2}{x}=0, \qquad x=0,$$

seront vérifiées par des valeurs nulles de x, y, et ces valeurs rendront indéterminée la fonction

$$w=\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y}-\frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{2y}{x},$$

que l'on pourra supposer égale à une quantité quelconque positive ou négative. Alors le signe même de w restant indéterminé, la formule (40) cessera d'être applicable.

Mais si les fonctions u, v, étant fractionnaires ou même transcendantes, restent finies et continues, aussi bien que leurs dérivées du premier ordre relatives à x, y pour tous les points renfermés dans le contour donné, on n'aura plus à craindre que la valeur de w se présente dans l'intérieur de ce contour sous une forme indéterminée, et l'équation (40) continuera de subsister sous la condition énoncée. C'est ce qui arrivera, par exemple, si l'on suppose

$$u=y, \qquad v=x\,\mathrm{L}(x^2).$$

Concevons que, dans cette hypothèse, le contour OS se réduise à un carré dont le centre soit l'origine des coordonnées et dont le côté soit égal à 2, on trouvera

$$c=8, \qquad \mathcal{J}_0^c\left(\left(\frac{v}{u}\right)\right)=1+1=2, \qquad \frac{1}{2}\mathcal{J}_0^c\left(\left(\frac{v}{u}\right)\right)=1,$$

$$w=\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y}=2+\mathrm{L}(x^2).$$

D'autre part les équations simultanées

$$y=0, \qquad x\,\mathrm{L}(x^2)=0$$

entre les variables x, y seront vérifiées : 1° par les valeurs

$$x=0, \qquad y=0$$

pour lesquelles w deviendra négatif; 2° par les valeurs

$$x=1, \qquad y=0,$$

et

$$x=-1, \qquad y=0,$$

pour lesquelles w deviendra positif. On aura donc $\mathrm{M}=1$, $\mathrm{N}=2$, par conséquent

$$\mathrm{N}-\mathrm{M}=1=\frac{1}{2}\mathcal{J}_0^c\left(\left(\frac{v}{u}\right)\right),$$

et la formule (40) se trouvera vérifiée.

Corollaire III. — Posons, pour abréger,

$$\psi(x,y)=\frac{v}{u}=\frac{f(x,y)}{\mathrm{F}(x,y)}, \tag{41}$$

et nommons $f(s)$ ce que devient $\psi(x,y)$, quand on exprime, sur le contour OS, les coordonnées x, y en fonction de l'arc s. La formule (40) donnera

$$\frac{1}{2}\mathcal{J}_0^c((f(s)))=\mathrm{N}-\mathrm{M}. \tag{42}$$

Corollaire IV. — Si le contour OS se réduit à la circonférence d'un cercle décrit de l'origine comme centre avec le rayon R, et si, en supposant le point O situé sur le demi-axe des x positives, on nomme p l'angle polaire que forme avec ce demi-axe le rayon vecteur r mené de l'origine au point (x, y), on aura

$$x=r\cos p, \qquad y=r\sin p, \tag{43}$$

$$s=\mathrm{R}p, \tag{44}$$

$$c=2\pi\mathrm{R}, \tag{45}$$

et la formule (42) deviendra

$$\frac{1}{2}\mathcal{J}_{s=0}^{s=2\mathrm{R}}((f(s)))=\frac{1}{2}\mathcal{J}_{p=0}^{p=2}((f(\mathrm{R}p)))=\mathrm{N}-\mathrm{M}. \tag{46}$$

Comme on aura d'ailleurs pour tous les points situés sur le contour OS

$$x = \mathrm{R}\cos p, \qquad y = \mathrm{R}\sin p, \qquad s = \mathrm{R}p,$$

la formule

$$f(s) = \psi(x, y) \tag{47}$$

donnera pour chacun de ces points

$$f(\mathrm{R}p) = \psi(\mathrm{R}\cos p, \mathrm{R}\sin p).$$

Donc la formule (46) pourra être réduite à

$$\frac{1}{2}\mathcal{J}_0^{2\pi}((\psi(\mathrm{R}\cos p, \mathrm{R}\sin p))) = \mathrm{N} - \mathrm{M}, \tag{48}$$

le signe $\mathcal{J}$ étant relatif à la variable p.

Corollaire V. — Si le contour OS se réduit au périmètre du rectangle compris entre les quatre droites représentées par les équations

$$x = x_0, \qquad x = \mathrm{X}, \qquad y = y_0, \qquad y = \mathrm{Y}; \tag{49}$$

alors, en supposant

$$x_0 < \mathrm{X}, \qquad y_0 < \mathrm{Y}, \tag{50}$$

et la longueur s mesurée sur le périmètre du rectangle, à partir du sommet qui a pour coordonnées x_0, y_0, on obtiendra les formules

$$c = 2(\mathrm{X} - x_0) + 2(\mathrm{Y} - y_0), \tag{51}$$

$$\begin{cases} \mathcal{J}_0^{c}((f(s))) = \mathcal{J}_0^{\mathrm{X}-x_0}((f(s))) + \mathcal{J}_{\mathrm{X}-x_0}^{\mathrm{X}-x_0+\mathrm{Y}-y_0}((f(s))) \\ \qquad + \mathcal{J}_{\mathrm{X}-x_0+\mathrm{Y}-y_0}^{2(\mathrm{X}-x_0)+\mathrm{Y}-y_0}((f(s))) + \mathcal{J}_{2(\mathrm{X}-x_0)+\mathrm{Y}-y_0}^{2(\mathrm{X}-x_0)+2(\mathrm{Y}-y_0)}((f(s))), \end{cases} \tag{52}$$

dans lesquelles les côtés du rectangle sont représentés par les différences

$$\mathrm{X} - x_0, \qquad \mathrm{Y} - y_0.$$

D'autre part, les valeurs de x, y, exprimées en fonction de s pour

les points situés sur le premier, le deuxième, le troisième et le quatrième côté du rectangle, seront respectivement

$$\begin{cases} x = x_0 + s, & y = y_0; \\ x = \mathrm{X}, & y = y_0 + s - (\mathrm{X} - x_0); \\ x = \mathrm{X} - [s - (\mathrm{X} - x_0) - (\mathrm{Y} - y_0)], & y = \mathrm{Y}; \\ x = x_0, & y = \mathrm{Y} - [s - 2(\mathrm{X} - x_0) - (\mathrm{Y} - y_0)]; \end{cases} \tag{53}$$

et l'on aura, par suite, eu égard à la formule (47),

$$\mathcal{J}_0^{\mathrm{X}-x_0}((f(s))) = \mathcal{J}_{x_0}^{\mathrm{X}}((\psi(x, y_0))),$$

$$\mathcal{J}_{\mathrm{X}-x_0}^{\mathrm{X}-x_0+\mathrm{Y}-y_0}((f(s))) = \mathcal{J}_{y_0}^{\mathrm{Y}}((\psi(\mathrm{X}, y))) = \mathcal{J}_{\mathrm{X}-x_0+\mathrm{Y}-y_0}^{2(\mathrm{X}-x_0)+\mathrm{Y}-y_0}((f(s))) = -\mathcal{J}_{x_0}^{\mathrm{X}}((\psi(x, \mathrm{Y}))),$$

$$\mathcal{J}_{2(\mathrm{X}-x_0)+\mathrm{Y}-y_0}^{2(\mathrm{X}-x_0)+2(\mathrm{Y}-y_0)}((f(s))) = -\mathcal{J}_{y_0}^{\mathrm{Y}}((\psi(x_0, y))).$$

Donc, on tirera de l'équation (52)

$$\begin{cases} \mathcal{J}_0^{c}((f(s))) = \mathcal{J}_{x_0}^{\mathrm{X}}((\psi(x, y_0))) + \mathcal{J}_{y_0}^{\mathrm{Y}}((\psi(\mathrm{X}, y))) + \dots \\ \qquad - \mathcal{J}_{x_0}^{\mathrm{X}}((\psi(x, \mathrm{Y}))) - \mathcal{J}_{y_0}^{\mathrm{Y}}((\psi(x_0, y))), \end{cases} \tag{54}$$

et la formule (42) donnera, dans l'hypothèse admise,

$$\begin{cases} \frac{1}{2}\Big[\mathcal{J}_{x_0}^{\mathrm{X}}((\psi(x, y_0))) + \mathcal{J}_{y_0}^{\mathrm{Y}}((\psi(\mathrm{X}, y))) \\ \qquad - \mathcal{J}_{x_0}^{\mathrm{X}}((\psi(x, \mathrm{Y}))) - \mathcal{J}_{y_0}^{\mathrm{Y}}((\psi(x_0, y)))\Big] = \mathrm{N} - \mathrm{M}. \end{cases} \tag{55}$$

Au reste, pour établir directement la formule (54) et, par suite, la formule (55), il suffit d'observer que, dans le cas où le contour OS devient un rectangle, les quatre parties de l'indice intégral

$$\mathcal{J}_0^{c}((f(s)))$$

correspondant aux quatre côtés de ce rectangle sont évidemment

$$\mathcal{J}_{x_0}^{\mathrm{X}}((\psi(x, y_0))), \quad \mathcal{J}_{y_0}^{\mathrm{Y}}((\psi(\mathrm{X}, y))), \quad \mathcal{J}_{\mathrm{X}}^{x_0}((\psi(x, \mathrm{Y}))),$$
$$\mathcal{J}_{\mathrm{Y}}^{y_0}((\psi(x_0, y))),$$

et qu'en vertu de la formule (27) les deux dernières se réduisent à

$$-\mathcal{J}_{x_0}^{X}((\psi(x, Y))), \qquad -\mathcal{J}_{y_0}^{Y}((\psi(x_0, y))).$$

Théorème XI. — *Les mêmes choses étant posées que dans le théorème X, si la fonction ϖ reste positive pour tous les points renfermés dans le contour* OS, *ou du moins pour ceux où se rencontrent les courbes représentées par les équations* (32), *on aura*

$$(56) \qquad \frac{1}{2}\mathcal{J}_0^{c}\left(\left(\frac{v}{u}\right)\right) = \mathrm{N}.$$

Démonstration. — Alors, en effet, M sera évidemment nul et, par suite, la différence N — M se réduira simplement à N.

Corollaire I. — Dans le cas dont il s'agit, les formules (48) et (55) deviennent

$$(57) \qquad \frac{1}{2}\mathcal{J}_0^{2\pi}((\psi(\mathrm{R}\cos p, \mathrm{R}\sin p))) = \mathrm{N},$$

$$(58) \qquad \left\{ \begin{aligned} \mathrm{N} = \frac{1}{2}\Big[& \mathcal{J}_{x_0}^{X}((\psi(x, y_0))) + \mathcal{J}_{y_0}^{Y}((\psi(\mathrm{X}, y))) \\ & - \mathcal{J}_{x_0}^{X}((\psi(x, \mathrm{Y}))) - \mathcal{J}_{y_0}^{Y}((\psi(x_0, y)))\Big]. \end{aligned} \right.$$

Corollaire II. — $f(x)$ étant une fonction entière de x, préparée de manière que l'équation

$$(59) \qquad f(x) = 0$$

n'offre pas de racines égales, si l'on nomme u, v deux fonctions réelles de x, y déterminées par la formule

$$(60) \qquad f(x + y\sqrt{-1}) = v + u\sqrt{-1},$$

on aura

$$\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial y}\sqrt{-1} = \sqrt{-1}\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial x}\sqrt{-1}\right),$$

par conséquent

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial x}, \qquad \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\partial u}{\partial x},$$

et

$$(61) \qquad \varpi = \frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial x} = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2.$$

Or, cette dernière valeur de ϖ ne pouvant s'évanouir que dans le cas où l'on aurait

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial v}{\partial x} = 0,$$

et, par suite,

$$\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial x}\sqrt{-1} = f'(x + y\sqrt{-1}) = 0,$$

sera entièrement positive pour les valeurs de x, y propres à vérifier les équations (32) et, par suite, la formule

$$(62) \qquad f(x + y\sqrt{-1}) = 0,$$

puisque les conditions

$$f(x + y\sqrt{-1}) = 0, \qquad f'(x + y\sqrt{-1}) = 0$$

ne peuvent subsister simultanément lorsque l'équation (59) n'offre point de racines égales. Il en résulte que, dans l'hypothèse admise, le nombre N des valeurs de x, y propres à vérifier l'équation (62) et correspondant à des points situés dans l'intérieur du contour OS, sera déterminé par la formule

$$(56) \qquad \mathrm{N} = \frac{1}{2}\mathcal{J}_0^{c}\left(\left(\frac{v}{u}\right)\right).$$

Si le contour OS se réduit à une circonférence de cercle décrite de l'origine comme centre avec le rayon R, ou bien encore au périmètre du rectangle compris entre les droites que représentent les équations (49), la formule (56) devra être remplacée par la formule (57) ou (58). Alors aussi les diverses valeurs de $x + y\sqrt{-1}$, correspondant aux points où se rencontreront dans l'intérieur du contour donné les courbes représentées par les équations (32), seront précisément celles des racines réelles ou imaginaires de l'équation (59) qui remplissent certaines conditions, savoir : celles qui offrent un module inférieur à R, ou celles qui offrent une partie réelle comprise entre les limites x_0, X et un coefficient de $\sqrt{-1}$ compris entre les limites y_0, Y. Si d'ailleurs la fonction $f(x)$ est de forme réelle, l'équation (60) entraînera la suivante :

$$f(x - y\sqrt{-1}) = v - u\sqrt{-1}; \tag{63}$$

en sorte qu'on aura

$$\left\{ \begin{aligned} v &= \frac{f(x+y\sqrt{-1}) + f(x-y\sqrt{-1})}{2}, \\ u &= \frac{f(x+y\sqrt{-1}) - f(x-y\sqrt{-1})}{2\sqrt{-1}}, \end{aligned} \right. \tag{64}$$

et les formules (57), (58) coïncideront avec les formules (174), (172) du Mémoire lithographié à Turin, sous la date du 27 septembre 1831. On déduirait avec la même facilité de l'équation (56) les autres formules contenues dans le Mémoire dont il s'agit, et relatives à la détermination du nombre des racines réelles ou imaginaires des équations algébriques [1].

Théorème XII. — *Les mêmes choses étant posées que dans le théorème X, si le système des équations*

$$u = 0, \quad w = 0 \tag{65}$$

ne se vérifie pour aucun des points situés dans l'intérieur du contour OS, *alors en nommant N le nombre des points où se rencontrent, dans l'intérieur de ce contour, les courbes représentées par les équations* (32), *on aura*

$$\frac{1}{2}\mathcal{J}_0^c\left(\left(\frac{vw}{u}\right)\right) = N. \tag{66}$$

Démonstration. — Pour déduire le théorème XII du théorème X, il

[1] J'ai appris que des démonstrations élémentaires de mes théorèmes sur les racines imaginaires ont été données, pour la première fois, par MM. Sturm et Liouville, dans un Mémoire que je ne connais pas encore, l'exemplaire qu'ils ont bien voulu m'adresser ne m'étant pas encore parvenu.

suffit de remplacer la fonction v par le produit vw. Alors, en effet, les équations (32) devront être remplacées par celles-ci :

$$u = 0, \quad vw = 0, \tag{67}$$

et la différence

$$\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial x} \tag{12}$$

par la suivante

$$\frac{\partial (vw)}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial (vw)}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial x}. \tag{68}$$

D'ailleurs, les formules (65) n'étant pas simultanément vérifiées dans l'intérieur du contour OS, les équations (67) s'y réduiront à celles-ci :

$$u = 0, \quad v = 0, \tag{32}$$

et, pour chacun des points déterminés par ces dernières, la différence (68) deviendra

$$w\left(\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial x}\right) = w^2.$$

Donc, cette différence étant constamment positive, l'expression

$$\frac{1}{2}\mathcal{J}_0^c\left(\left(\frac{vw}{u}\right)\right)$$

se confondra, en vertu du théorème X, avec le nombre total N des systèmes de valeurs de x, y propres à vérifier, dans l'intérieur du contour OS, les équations (32).

On peut d'ailleurs observer que le nombre ici désigné par N est la somme des nombres représentés dans le théorème X par M et N, en sorte qu'on a

$$N = \mathrm{M} + \mathrm{N}. \tag{69}$$

Corollaire I. — Si l'on pose, pour abréger,

$$\psi(x, y) = \frac{v}{u}\left(\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial x}\right) = \frac{vw}{u}, \tag{70}$$

et si l'on nomme $\mathrm{f}(s)$ ce que devient l'expression $\psi(x, y)$, quand on exprime les coordonnées rectangulaires x, y en fonction de l'arc s, la formule (66) donnera

$$N = \frac{1}{2}\mathcal{J}_0^c((\mathrm{f}(s))). \tag{71}$$

Corollaire II. — Si le contour OS se réduit à la circonférence d'un cercle décrit de l'origine comme centre avec le rayon R, ou au périmètre du rectangle compris entre les quatre droites que représentent les équations (49), on tirera des formules (48) et (55), dans le premier cas,

$$N = \frac{1}{2}\mathcal{J}_0^{2\pi}((\psi(\mathrm{R}\cos p, \mathrm{R}\sin p))), \tag{72}$$

et, dans le second cas,

$$\left\{\begin{aligned} N = \frac{1}{2}\Big[& \mathcal{J}_{x_0}^{\mathrm{X}}((\psi(x, y_0))) + \mathcal{J}_{y_0}^{\mathrm{Y}}((\psi(\mathrm{X}, y))) + \ldots \\ & - \mathcal{J}_{x_0}^{\mathrm{X}}((\psi(x, \mathrm{Y}))) - \mathcal{J}_{y_0}^{\mathrm{Y}}((\psi(x_0, y))) \Big]. \end{aligned}\right. \tag{73}$$

La formule (73) coïncide avec celle qui termine le Mémoire du 15 juin 1833. Seulement, à l'énoncé du théorème que fournit cette même formule, et qui est le théorème VIII du paragraphe Ier, il convient de joindre la condition ci-dessus indiquée, savoir, que le système des équations

$$u = 0, \qquad w = 0$$

ne se vérifie pour aucun des points renfermés dans l'intérieur du contour donné.

MÉMOIRE SUR DIVERSES FORMULES

RELATIVES A LA

THÉORIE DES INTÉGRALES DÉFINIES,

ET SUR LA

CONVERSION DES DIFFÉRENCES FINIES DES PUISSANCES EN INTÉGRALES DE CETTE ESPÈCE (1).

Journal de l'École Polytechnique, XXVIIIe Cahier, t. XVII, p. 147; 1844.

Ce Mémoire est divisé en trois Parties dont je vais donner une idée en peu de mots.

La première Partie est relative à la détermination des intégrales définies par les intégrations doubles. On sait, depuis longtemps, que la méthode des intégrations successives peut servir à fixer la valeur d'un grand nombre de transcendantes que les procédés directs de l'intégration ne sauraient déterminer. Toutefois, il existe deux manières d'appliquer cette méthode à la théorie qui nous occupe. La première

(1) Le Mémoire qu'on va lire, présenté à l'Académie des Sciences le 2 janvier 1815, a reçu quelques additions vers la même époque. Mais, quoique cité plusieurs fois, particulièrement dans le premier Volume des *Exercices* et dans le XIXe Cahier du *Journal de l'École Polytechnique*, il n'avait pas encore été imprimé. Cependant, parmi les résultats qu'il renferme, il en est plusieurs qui paraissent pouvoir, même aujourd'hui, intéresser les géomètres; et c'est ce qui nous décide à le publier. (*Note de Cauchy.*)

consiste à chercher des intégrales doubles que l'on puisse décomposer de deux façons différentes en intégrales simples; la seconde à transformer une intégrale simple donnée en une intégrale double dont on puisse obtenir facilement la valeur. C'est sous le premier point de vue que j'ai considéré la question dans le dernier Mémoire que j'ai eu l'honneur de soumettre à la Classe et qu'elle a daigné honorer de son approbation. Envisagé sous l'autre point de vue, le problème se résoudra facilement dans plusieurs cas si l'on décompose la fonction sous le signe $\int$ en deux facteurs et si l'on remplace un de ces facteurs par une intégrale définie. Cette intégrale a souvent pour diviseur une des transcendantes que M. Legendre a désignées par la lettre Γ. On avait déjà fait ces remarques; mais il m'a semblé qu'on n'en avait pas encore tiré tout le parti possible. En suivant ces idées, je suis parvenu à quelques résultats nouveaux, ainsi qu'à la démonstration directe de plusieurs formules que M. Laplace a déduites du passage du réel à l'imaginaire, dans le troisième Chapitre du *Calcul des probabilités* [1], et qu'il vient de confirmer par des méthodes rigoureuses dans quelques additions faites à cet Ouvrage. L'une de ces formules, fondée en partie sur la considération des intégrales singulières, fournit une nouvelle preuve des avantages que peut offrir en Analyse l'emploi des intégrales dont il s'agit.

La deuxième Partie du Mémoire a pour objet la démonstration d'un théorème général assez remarquable, relatif aux intégrales simples prises entre les limites o et ∞ de la variable. On déduit facilement de ce théorème les valeurs de plusieurs intégrales définies déjà connues, et de quelques autres qui ne l'étaient pas.

La troisième Partie se rapporte à la transformation des différences finies des puissances en intégrales définies. Lorsqu'on suppose la variable positive, cette question se divise naturellement en deux autres, suivant que l'exposant de cette variable est positif ou négatif. Dans le second cas la question était depuis longtemps complètement résolue au moyen de la formule générale que M. Laplace a donnée pour la pre-

(1) *Œuvres de Laplace*, t. VII, Liv. I, 2e Partie, p. 128.

mière fois dans les *Mémoires de l'Académie des Sciences*, année 1782 [1]. Mais on peut de cette première solution en déduire une infinité d'autres, par l'application des méthodes exposées dans mon dernier Mémoire.

Dans le premier cas, c'est-à-dire lorsque l'exposant de la variable est positif, la question n'avait d'abord été résolue que pour des valeurs de ces exposants inférieures à l'indice de la différence finie que l'on considère [*voir* les Mémoires déjà cités, et la première Partie de la *Théorie analytique des probabilités*, n° 41 [2]]. Lorsque l'exposant devient supérieur à l'indice, la formule insérée dans ces Mémoires cesse d'être applicable, parce que l'intégrale relative à x qu'elle renferme, et qui doit être prise entre les limites $x = 0$, $x = \infty$, acquiert une valeur infinie. Mais je fais voir que, pour rectifier alors la formule, il suffira de diminuer dans cette intégrale le numérateur de la fonction renfermée sous le signe $\int$ d'une fonction rationnelle et entière de x, assujettie à la seule condition de rendre à l'intégrale une valeur finie. Si l'on conçoit le numérateur que l'on considère développé suivant les puissances ascendantes de x, la fonction cherchée sera toujours égale à la somme des termes qui, dans ce développement, renferment des puissances de x inférieures à l'exposant de la variable. Le nombre de ces termes croîtra donc avec ce même exposant; d'où il est aisé de conclure que, pour la facilité des calculs, on devra restreindre l'emploi de la formule à des valeurs de ces exposants, qui surpassent au plus de quelques unités l'indice de la différence finie.

M. Laplace, ayant repris dernièrement la question, a donné dans la seconde addition faite au *Calcul des probabilités* (p. 473) [3] une nouvelle formule également applicable à toutes les hypothèses possibles sur la valeur positive que l'exposant de la variable peut recevoir. Je déduis des résultats exposés dans la première Partie de ce Mémoire deux équations différentes, dont chacune peut remplacer la formule dont il s'agit, et qui, ajoutées entre elles, reproduisent une troisième

(1) *Œuvres de Laplace*, t. X.
(2) *Ibid.*, t. VII, p. 165.
(3) *Ibid.*, t. VII, p. 480.

équation équivalente à celle de M. Laplace. Cette troisième équation transforme la différence finie donnée en une intégrale définie, qui renferme une constante positive, mais indéterminée, dont on peut disposer à volonté. Seulement, lorsque l'exposant de la variable surpasse l'indice de la différence, on doit éviter de donner à cette constante des valeurs très petites. On n'est plus assujetti à la même condition dans le cas où l'exposant devient inférieur à l'indice; et, dans cette dernière hypothèse, on peut même supposer la constante tout à fait nulle. On obtient alors une formule qui renferme des sinus et cosinus sans exponentielles, et qu'on peut ainsi déduire de la formule insérée dans les Mémoires de 1782, en appliquant à cette dernière la méthode fondée sur le passage du réel à l'imaginaire.

Lorsque la différence finie donnée se rapporte à une variable négative, elle se divise en deux parties, l'une réelle, l'autre imaginaire. Mais on peut alors essayer de représenter séparément chacune d'elles par une intégrale définie. M. Laplace a résolu ce dernier problème dans le cas où l'indice de la différence donnée surpasse l'exposant de la variable. Je parviens à résoudre la même question dans tous les cas possibles, en supposant toutefois que l'exposant de la variable soit positif.

Il me reste à indiquer un corollaire assez remarquable des formules dont je viens de rendre compte. L'une de ces formules m'a conduit à l'expression générale de la transcendante, que M. Legendre a désignée par $\Gamma(a)$, en intégrale définie. On sait que pour des valeurs positives de a cette transcendante peut être représentée par l'intégrale

$$\int x^{a-1} e^{-x}\, dx$$

prise entre les limites $x = 0$, $x = \infty$. Mais, lorsque a devient négatif, la même intégrale, devenant indéfinie quel que soit a, ne peut plus servir à représenter la transcendante dont il s'agit. Pour rendre générale l'expression précédente, il suffit de diminuer l'exponentielle e^{-x} d'une fonction rationnelle et entière de x, assujettie à la seule condition de donner à l'intégrale, s'il est possible, une valeur finie. Pour

des valeurs négatives de a, cette fonction est toujours égale à la somme des termes qui, dans le développement de e^{-x}, renferment des puissances de x inférieures à $-a$. La même fonction devient nulle toutes les fois que a est positif, et la formule générale rentre alors dans la formule connue.

PREMIÈRE PARTIE.

SUR LA TRANSFORMATION DES INTÉGRALES SIMPLES PAR LE MOYEN DES INTÉGRATIONS DOUBLES.

§ I. — *Exposition générale de la méthode.*

Soit

$$\int_0^a X\, dx$$

une intégrale relative à x et à laquelle les procédés directs de l'intégration ne soient pas applicables. Supposons de plus la fonction X composée de deux facteurs P et Q, en sorte qu'on ait

$$X = PQ.$$

Si l'on désigne par z une nouvelle variable, par R une fonction de x et de z, et par A une quantité constante, on pourra donner à R et à A une infinité de valeurs différentes, de manière à satisfaire à l'équation

$$Q = A\int_0^b R\, dz. \tag{1}$$

Cela posé, si l'on peut trouver pour R une valeur telle que la différentielle

$$PR\, dx$$

soit immédiatement intégrable, en faisant

$$\int_0^a PR\, dx = Z, \tag{2}$$

on aura

$$\int_0^a X\,dx = A\int_0^b Z\,dz. \tag{3}$$

Par suite, si la valeur de l'intégrale $\int_0^b Z\,dz$ est connue, on en déduira immédiatement la valeur de l'intégrale $\int_0^a X\,dx$. Dans le cas contraire, l'équation (3) donnera simplement une transformation de l'intégrale proposée. Appliquons ces principes à quelques exemples.

§ II. — *Première application.*

Soit

$$X = \frac{P}{M^n},$$

M étant une nouvelle fonction de x; on aura

$$Q = \frac{1}{M^n} = \frac{\int_0^\infty z^{n-1}e^{-Mz}\,dz}{\int_0^\infty z^{n-1}e^{-z}\,dz}. \tag{4}$$

On pourra donc supposer, dans le cas dont il s'agit,

$$A = \frac{1}{\int_0^\infty z^{n-1}e^{-z}\,dz} = \frac{1}{\Gamma(n)},$$

$$R = z^{n-1}e^{-Mz};$$

et, par suite, si l'on fait

$$Z = z^{n-1}\int_0^a P e^{-Mz}\,dx, \tag{5}$$

on trouvera

$$\int_0^a \frac{P}{M^n}\,dx = \frac{1}{\Gamma(n)}\int_0^\infty Z\,dz. \tag{6}$$

Exemple I. — Soit proposé de trouver, entre les limites $x = 0$, $x = a$, la valeur de l'intégrale

$$\int_0^a x^{-n}e^{-x}\,dx,$$

n étant < 1; on aura

$$P = e^{-x}, \qquad M = x,$$

et, par suite, les équations (5) et (6) deviendront

$$Z = z^{n-1}\int_0^a e^{-x(1+z)}\,dx = z^{n-1}\frac{1 - e^{-a(1+z)}}{1+z}, \tag{a}$$

$$\int_0^a x^{-n}e^{-x}\,dx = \frac{1}{\Gamma(n)}\int_0^\infty \frac{z^{n-1}(1 - e^{-a(1+z)})}{1+z}\,dz. \tag{b}$$

Corollaire I. — Si dans l'équation (b) on suppose $a = \infty$, on aura

$$\int_0^\infty x^{-n}e^{-x}\,dx = \Gamma(1-n), \qquad e^{-a(1+z)} = 0,$$

et, par suite,

$$\Gamma(n)\Gamma(1-n) = \int_0^\infty \frac{z^{n-1}\,dz}{1+z} = \frac{\pi}{\sin n\pi}, \tag{c}$$

ce que l'on savait déjà.

Exemple II. — Soit proposé de transformer l'intégrale

$$\int_0^\infty \frac{x^{m-1}e^{-x}\,dx}{(\alpha+x)^n}, \tag{d}$$

m, n et α étant trois constantes arbitraires. On pourra supposer

$$\begin{cases} P = x^{m-1}e^{-x}, \\ M = \alpha + x. \end{cases} \tag{e}$$

Cela posé, les équations (5) et (6) deviendront

$$Z = z^{n-1}e^{-az}\int_0^\infty x^{m-1}e^{-x(1+z)}\,dx = \frac{z^{n-1}e^{-az}}{(1+z)^m}\Gamma(m), \tag{f}$$

$$\int_0^\infty \frac{x^{m-1}e^{-x}\,dx}{(\alpha+x)^n} = \frac{\Gamma(m)}{\Gamma(n)}\int_0^\infty \frac{z^{n-1}e^{-az}\,dz}{(1+z)^m}. \tag{g}$$

Corollaire I. — Si dans l'équation (g) on suppose $\alpha = 0$, le premier membre deviendra simplement égal à

$$\int_0^\infty x^{m-1-n} e^{-x}\, dx = \Gamma(m-n);$$

et, par suite, on obtiendra la formule connue

$$(h) \qquad \int_0^\infty \frac{z^{n-1}\, dz}{(1+z)^m} = \frac{\Gamma(n)\Gamma(m-n)}{\Gamma(m)}.$$

Corollaire II. — Comme dans les équations (g) les intégrales relatives à x et à z sont prises entre les mêmes limites, on peut y remplacer z par x; on aura en conséquence

$$\int_0^\infty \frac{z^{n-1} e^{-az}\, dz}{(1+z)^m} = \int_0^\infty \frac{x^{n-1} e^{-ax}\, dx}{(1+x)^m} = \frac{1}{\alpha^n} \int_0^\infty \frac{x^{n-1} e^{-x}\, dx}{\left(1+\frac{x}{a}\right)^m}.$$

Cela posé, l'équation (g) donnera ce résultat remarquable par sa symétrie à l'égard des deux constantes m et n

$$(i) \qquad \frac{\displaystyle\int_0^\infty \frac{x^{m-1} e^{-x}}{\left(1+\frac{x}{\alpha}\right)^n}\, dx}{\displaystyle\int_0^\infty \frac{x^{n-1} e^{-x}}{\left(1+\frac{x}{\alpha}\right)^m}\, dx} = \frac{\Gamma(m)}{\Gamma(n)}.$$

Exemple III. — Soit proposé de déterminer la valeur de l'intégrale

$$(j) \qquad \int_0^\infty e^{-sx}(e^{-x}-1)^m \frac{dx}{x^{a+1}},$$

a étant $< m$, et m étant un nombre entier.

On aura dans le cas présent

$$n = a+1, \qquad P = e^{-sx}(e^{-x}-1)^m, \qquad M = x;$$

et, par suite, l'équation (5) deviendra

$$(k) \qquad Z = z^a \int_0^\infty e^{-(s+z)x}(e^{-x}-1)^m\, dx.$$

On a d'ailleurs

$$\int_0^\infty e^{-(s+z)x}(e^{-x}-1)^m\, dx = \frac{-m}{s+z} \int_0^\infty e^{-(s+z+1)x}(e^{-x}-1)^{m-1}\, dx;$$

et, par suite,

$$\int_0^\infty e^{-(s+z)x}(e^{-x}-1)^m\, dx = \frac{(-1)^m . 1 . 2 . 3 \ldots\ldots m}{(s+z)(s+z+1)\ldots(s+z+m)}.$$

Donc

$$Z = \frac{(-1)^m . 1 . 2 . 3 \ldots\ldots m}{(s+z)(s+z+1)\ldots(s+z+m)} z^a = \frac{(-1)^m \Gamma(m+1)}{(s+z)(s+z+1)\ldots(s+z+m)} z^a;$$

et, par conséquent, l'équation (6) deviendra

$$(l) \qquad \left\{ \begin{aligned} &\int_0^\infty e^{-sx}(e^{-x}-1)^m \frac{dx}{x^{a+1}} \\ &\quad = \frac{(-1)^m \Gamma(m+1)}{\Gamma(a+1)} \int_0^\infty \frac{z^a\, dz}{(s+z)(s+z+1)\ldots(s+z+m)}. \end{aligned} \right.$$

Soit maintenant λ le plus grand nombre entier compris dans a, et faisons

$$a = \lambda + \frac{\mu}{\nu};$$

l'intégrale relative à z, qui se trouve comprise dans le second membre de l'équation (l), pourra être mise sous la forme

$$\int_0^\infty \frac{z^{\lambda+1}}{(s+z)(s+z+1)\ldots(s+z+m)} z^{\frac{\mu}{\nu}-1}\, dz.$$

On déterminera facilement la valeur de cette dernière intégrale, si l'on décompose en fractions simples la fraction

$$\frac{z^{\lambda+1}}{(s+z)(s+z+1)\ldots(s+z+m)};$$

et, par suite, on déduira de l'équation (l) la valeur de l'intégrale proposée

$$\int_0^\infty e^{-sx}(e^{-x}-1)^m \frac{dx}{x^{a+1}}.$$

Au reste on peut éviter la décomposition dont il s'agit de la manière suivante :

Si l'on suppose la caractéristique Δ des différences finies relative à la quantité s considérée comme variable, l'équation (k) donnera

$$Z = z^a \Delta^m \left(\int_0^\infty e^{-(s+z)x}\, dx \right) = z^{\lambda + \frac{\mu}{\nu}} \Delta^m \left(\frac{1}{s+z} \right)$$

ou, ce qui revient au même,

$$Z = z^{\frac{\mu}{\nu} - 1} \Delta^m \left(\frac{z^{\lambda+1}}{s+z} \right).$$

On a d'ailleurs

$$\frac{z^{\lambda+1}}{s+z} = z^\lambda - s z^{\lambda-1} + s^2 z^{\lambda-2} - \ldots + (-1)^\lambda s^\lambda - (-1)^\lambda \frac{s^{\lambda+1}}{s+z}$$

et

$$\Delta^m s = 0, \qquad \Delta^m s^2 = 0, \qquad \ldots, \qquad \Delta^m s^\lambda = 0.$$

Cela posé, la valeur de Z se trouvera réduite à

$$Z = (-1)^{\lambda+1} z^{\frac{\mu}{\nu} - 1} \Delta^m \left(\frac{s^{\lambda+1}}{s+z} \right).$$

On trouvera par suite

$$\int_0^\infty Z\, dz = (-1)^{\lambda+1} \Delta^m \left(s^{\lambda+1} \int_0^\infty \frac{z^{\frac{\mu}{\nu}-1}\, dz}{s+z} \right).$$

De plus, on a

$$\int_0^\infty \frac{z^{\frac{\mu}{\nu}-1}\, dz}{s+z} = \frac{\pi}{\sin \frac{\mu}{\nu}\pi} s^{\frac{\mu}{\nu}-1} = (-1)^\lambda \frac{\pi}{\sin a\pi} s^{\frac{\mu}{\nu}-1}.$$

Donc enfin

$$\int_0^\infty Z\, dz = - \frac{\pi}{\sin a\pi} \Delta^m s^a.$$

En vertu de cette dernière formule, l'équation (6) se réduit à

$$(m) \qquad \int_0^\infty e^{-sx} (e^{-x} - 1)^m \frac{dx}{x^{a+1}} = - \frac{\pi}{\Gamma(a+1) \sin a\pi} \Delta^m (s^a).$$

Ce résultat coïncide avec la formule (μ'') du *Calcul des probabilités*, page 163 [*voir* aussi les *Mémoires de l'Académie des Sciences*, année 1782 (1)].

Corollaire I. — Si dans l'analyse précédente on suppose $\frac{\mu}{\nu} = 0$, a deviendra un nombre entier, et l'on aura $\lambda = a$. Dans le même cas on trouvera

$$\frac{\Delta^m (s^a)}{\sin a\pi} = \frac{\frac{d\Delta^m s^a}{da}}{\frac{d \sin a\pi}{da}} = \frac{\Delta^m (s^a \log s)}{\pi \cos a\pi} = \frac{(-1)^a}{\pi} \Delta^m (s^a \log s),$$

$$\int_0^\infty Z\, dz = (-1)^{a+1} \Delta^m (s^a \log s),$$

et, par suite,

$$(n) \qquad \int_0^\infty e^{-sx} (e^{-x} - 1)^m \frac{dx}{x^{a+1}} = \frac{(-1)^{a+1}}{\Gamma(a+1)} \Delta^m (s^a \log s).$$

Si dans cette équation on suppose $a = 0$, on obtiendra la dernière formule de l'article 41 du premier Livre des *Probabilités* (p. 165) (2).

Si dans la formule (n) on fait $e^{-x} = t$, $m = r$, et que l'on remplace $\Gamma(a+1)$ par le produit $1.2.3.\ldots.a$, on trouvera

$$\int_0^1 \frac{t^{s-1} (t-1)^r}{(\log t)^{a+1}} dt = \frac{1}{1.2.3.\ldots.a} \Delta^r (s^a \log s).$$

La nouvelle intégrale étant prise entre les limites $t = 0$, $t = 1$, on pourra changer dans la formule précédente t en t^n, on aura ainsi

$$(o) \qquad \int_0^1 \frac{t^{ns-1} (t^n - 1)^r}{(\log t)^{a+1}} dt = \frac{n^a}{1.2.3.\ldots.a} \Delta^r (s^a \log s).$$

Si dans cette dernière on fait $a + 1 = r$, en ayant de plus égard à l'équation $n^a \Delta^r (s^a \log s) = \Delta^r [(ns)^a \log ns]$ qui est toujours vraie lors-

(1) *OEuvres de Laplace*, t. VII, p. 166, et t. X, p. 287.
(2) *Ibid.*, t. VII, p. 168.

qu'on suppose $a < r$, on trouvera

$$\int_0^1 \left(\frac{t^n - 1}{\log t}\right)^r t^{ns-1}\, dt = \frac{1}{1.2.3\ldots\ldots(r-1)} \Delta^r[(ns)^{r-1} \log ns],$$

ce qui s'accorde avec les formules données par M. Legendre (troisième Partie des *Exercices du Calcul intégral*, p. 372).

Corollaire II. — Si l'on compare entre elles les deux valeurs de Z trouvées ci-dessus, savoir

$$Z = \frac{(-1)^m . 1.2.3\ldots\ldots m}{(s+z)(s+z+1)\ldots(s+z+m)} z^a, \qquad Z = z^a \Delta^m\left(\frac{1}{s+z}\right),$$

on en conclura

$$\Delta^m\left(\frac{1}{s+z}\right) = \frac{(-1)^m . 1.2.3\ldots\ldots m}{(s+z)(s+z+1)\ldots(s+z+m)} = \frac{(-1)^m \Gamma(m+1)\Gamma(s+z)}{\Gamma(s+z+m+1)}.$$

Si dans cette dernière équation on fait $z = 0$, on aura

$$\Delta^m\left(\frac{1}{s}\right) = \frac{(-1)^m \Gamma(m+1)\Gamma(s)}{\Gamma(s+m+1)} = (-1)^m \int_0^\infty \frac{x^m\, dx}{(1+x)^{s+m+1}}.$$

Exemple IV. — Soit proposé de transformer les intégrales

$$\int_0^a e^{-sx} \sin rx \frac{dx}{x^n},$$

$$\int_0^a e^{-sx} \cos rx \frac{dx}{x^n},$$

n, r et s étant des constantes positives, et n étant < 1. On aura pour la première intégrale

$$Z = z^{n+1} \int_0^a e^{-(s+z)x} \sin rx\, dx = z^{n-1} \frac{r - e^{-a(s+z)}[r \cos ar + (s+z) \sin ar]}{r^2 + (s+z)^2},$$

et pour la seconde

$$Z = z^{n-1} \int_0^a e^{-(s+z)x} \cos rx\, dx = z^{n-1} \frac{s + z + e^{-a(s+z)}[r \sin ar - (s+z)\cos ar]}{r^2 + (s+z)^2}.$$

On trouvera donc par suite

$$(p) \quad \begin{cases} \displaystyle\int_0^a x^{-n} e^{-sx} \sin rx\, dx \\ \displaystyle\quad = \frac{1}{\Gamma(n)} \left[\int_0^\infty \frac{r z^{n-1}\, dz}{r^2 + (s+z)^2} - e^{-as} \int_0^\infty \frac{r \cos ar + (s+z) \sin ar}{r^2 + (s+z)^2} z^{n-1} e^{-az}\, dz\right], \\ \displaystyle\int_0^a x^{-n} e^{-sx} \cos rx\, dx \\ \displaystyle\quad = \frac{1}{\Gamma(n)} \left[\int_0^\infty \frac{(s+z) z^{n-1}\, dz}{r^2 + (s+z)^2} + e^{-as} \int_0^\infty \frac{r \sin ar - (s+z) \cos ar}{r^2 + (s+z)^2} z^{n-1} e^{-az}\, dz\right]. \end{cases}$$

Corollaire I. — Si dans les équations (p) on suppose $a = \infty$, et que l'on y change n en $1 - n$ et x en z, elles deviendront

$$(q) \quad \begin{cases} \displaystyle\int_0^\infty z^{n-1} e^{-sz} \sin rz\, dz = \frac{1}{\Gamma(1-n)} \int_0^\infty \frac{r}{r^2 + (s+z)^2} z^{-n}\, dz, \\ \displaystyle\int_0^\infty z^{n-1} e^{-sz} \cos rz\, dz = \frac{1}{\Gamma(1-n)} \int_0^\infty \frac{s+z}{r^2 + (s+z)^2} z^{-n}\, dz. \end{cases}$$

D'ailleurs, si l'on fait $\frac{r}{s} = \operatorname{tang}\theta$, on aura, en supposant $n < 1$,

$$\int_0^\infty \frac{r}{r^2 + (s+z)^2} z^{-n}\, dz = \frac{\pi}{\sin n\pi} \frac{\sin n\theta}{(r^2 + s^2)^{\frac{n}{2}}},$$

$$\int_0^\infty \frac{s+z}{r^2 + (s+z)^2} z^{-n}\, dz = \frac{\pi}{\sin n\pi} \frac{\cos n\theta}{(r^2 + s^2)^{\frac{n}{2}}},$$

et

$$\frac{\pi}{\sin n\pi} = \Gamma(n)\Gamma(1-n).$$

Cela posé, on aura

$$(r) \quad \begin{cases} \displaystyle\int_0^\infty z^{n-1} e^{-sz} \sin rz\, dz = \frac{\sin n\theta}{(r^2 + s^2)^{\frac{n}{2}}} \Gamma(n), \\ \displaystyle\int_0^\infty z^{n-1} e^{-sz} \cos rz\, dz = \frac{\cos n\theta}{(r^2 + s^2)^{\frac{n}{2}}} \Gamma(n); \end{cases}$$

ce qui s'accorde avec les formules trouvées par Euler.

Corollaire II. — Soit en général

$$\frac{1}{(s + r\sqrt{-1})^n} = R_1 - R_2\sqrt{-1};$$

on aura

$$\mathrm{R}_1 = \frac{\cos n\theta}{(r^2+s^2)^{\frac{n}{2}}} = \frac{(s-r\sqrt{-1})^{-n}+(s+r\sqrt{-1})^{-n}}{2},$$

$$\mathrm{R}_2 = \frac{\sin n\theta}{(r^2+s^2)^{\frac{n}{2}}} = \frac{(s-r\sqrt{-1})^{-n}-(s+r\sqrt{-1})^{-n}}{2\sqrt{-1}}.$$

Cela posé, si l'on change s en k et r en x, les équations (r) prendront la forme suivante

$$(s)\quad \begin{cases} \dfrac{(k-x\sqrt{-1})^{-n}+(k+x\sqrt{-1})^{-n}}{2} = \dfrac{1}{\Gamma(n)}\displaystyle\int_0^\infty z^{n-1}e^{-kz}\cos xz\,dz, \\[2ex] \dfrac{(k-x\sqrt{-1})^{-n}-(k+x\sqrt{-1})^{-n}}{2\sqrt{-1}} = \dfrac{1}{\Gamma(n)}\displaystyle\int_0^\infty z^{n-1}e^{-kz}\sin xz\,dz. \end{cases}$$

En différentiant ces dernières une ou plusieurs fois de suite par rapport à k, on prouvera facilement qu'elles s'étendent à toutes les valeurs positives de la constante n.

Exemple V. — Considérons encore les intégrales

$$\int_0^\infty (k+x)^{-n}e^{-sx}\sin rx\,dx,$$

$$\int_0^\infty (k+x)^{-n}e^{-sx}\cos rx\,dx,$$

k, s, n étant des nombres positifs quelconques. En faisant pour la première intégrale

$$\mathrm{P} = e^{-sx}\sin rx, \qquad \mathrm{M} = k+x,$$

et pour la seconde

$$\mathrm{P} = e^{-sx}\cos rx, \qquad \mathrm{M} = k+x,$$

on trouvera

$$(t)\quad \begin{cases} \displaystyle\int_0^\infty (k+x)^{-n}e^{-sx}\sin rx\,dx = \frac{1}{\Gamma(n)}\int_0^\infty \frac{r}{r^2+(s+z)^2}z^{n-1}e^{-kz}\,dz, \\[2ex] \displaystyle\int_0^\infty (k+x)^{-n}e^{-sx}\cos rx\,dx = \frac{1}{\Gamma(n)}\int_0^\infty \frac{s+z}{r^2+(s+z)^2}z^{n-1}e^{-kz}\,dz. \end{cases}$$

Exemple VI. — Soit proposé de trouver la valeur de l'intégrale

$$\int_0^\infty \frac{\sin^m x}{x^{a+1}}\,dx,$$

m étant un nombre entier quelconque, et a un nombre positif plus petit que m.

On aura dans le cas présent

$$n = a+1, \qquad \mathrm{P} = \sin^m x, \qquad \mathrm{M} = x;$$

et, par suite,

$$\mathrm{Z} = z^a\int_0^\infty e^{-xz}\sin^m x\,dx.$$

On trouvera d'ailleurs, si m est un nombre impair,

$$\int_0^\infty e^{-xz}\sin^m x\,dx = \frac{1.2.3\ldots\ldots m}{(1+z^2)(9+z^2)\ldots(m^2+z^2)}$$
$$= \frac{\Gamma(m+1)}{(1+z^2)(9+z^2)\ldots(m^2+z^2)};$$

et, si m est un nombre pair,

$$\int_0^\infty e^{-xz}\sin^m x\,dx = \frac{1.2.3\ldots\ldots m}{z(4+z^2)(16+z^2)\ldots(m^2+z^2)}$$
$$= \frac{\Gamma(m+1)}{z(4+z^2)(16+z^2)\ldots(m^2+z^2)}.$$

On aura donc par suite

$$(u)\quad \begin{cases} \displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin^m x}{x^{a+1}}\,dx = \frac{\Gamma(m+1)}{\Gamma(n)}\int_0^\infty \frac{z^a\,dz}{(1+z^2)(9+z^2)\ldots(m^2+z^2)}, \\ \qquad\qquad \text{si } m \text{ est un nombre impair} \\ \text{et} \\ \displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin^m x}{x^{a+1}}\,dx = \frac{\Gamma(m+1)}{\Gamma(n)}\int_0^\infty \frac{z^a\,dz}{z(4+z^2)(16+z^2)\ldots(m^2+z^2)}, \\ \qquad\qquad \text{dans le cas contraire.} \end{cases}$$

Soit maintenant $a = \lambda + \frac{\mu}{\nu}$, λ étant le plus grand nombre entier compris dans a. Pour déterminer la valeur de l'intégrale relative à z, que renferme la première des équations (u), il suffira de décomposer en fractions simples la fraction

$$\frac{z^\lambda}{(1+z^2)(9+z^2)\ldots(m^2+z^2)},$$

si λ est un nombre pair, et la fraction

$$\frac{z^{\lambda+1}}{(1+z^2)(9+z^2)\ldots(m^2+z^2)},$$

dans le cas contraire. On déterminera avec la même facilité la valeur de l'intégrale relative à z que renferme la seconde des équations (u); et, par suite, on obtiendra, dans tous les cas possibles, la valeur de l'intégrale cherchée

$$\int_0^\infty \frac{\sin^m x}{x^{a+1}}\,dx.$$

Au reste, on peut simplifier considérablement les calculs à l'aide des procédés que nous allons appliquer à l'intégrale

$$\int_0^\infty \cos 2sx \frac{\sin^m x}{x^{a+1}}\,dx,$$

intégrale qui se réduit à la précédente lorsqu'on suppose $s=0$.

Exemple VII. — Soit proposé de déterminer la valeur de l'intégrale

$$\int_0^\infty \cos 2sx \frac{\sin^m x}{x^{a+1}}\,dx,$$

m étant un nombre entier, a et s deux constantes arbitraires, et a étant $< m$. On aura dans le cas présent

$$n = a+1, \qquad \mathrm{P} = \cos 2sx \sin^m x, \qquad \mathrm{M} = x;$$

et, par suite,

$$\mathrm{Z} = z^a \int_0^\infty e^{-xz} \cos 2sx \sin^m x\,dx.$$

D'ailleurs, si l'on suppose la caractéristique Δ des différences finies

relative à la quantité s considérée comme variable, et que l'on développe le produit $\cos 2sx \sin^m x$ en série ordonnée suivant les sinus ou cosinus des arcs multiples de x; on reconnaîtra sans peine que, dans le cas où m est un nombre pair,

$$\cos 2sx \sin^m x = \frac{(-1)^{\frac{m}{2}}}{2^m}\Delta^m[\cos(2s-m)x];$$

et que, dans le cas où m est un nombre impair,

$$\cos 2sx \sin^m x = \frac{(-1)^{\frac{m-1}{2}}}{2^m}\Delta^m[\sin(2s-m)x].$$

Cela posé, la valeur de Z deviendra

$$(v)\qquad \left\{\begin{array}{l} \mathrm{Z} = \dfrac{(-1)^{\frac{m}{2}}}{2^m} z^a \displaystyle\int_0^\infty e^{-xz}\Delta^m[\cos(2s-m)x]\,dx, \\ \qquad\qquad \text{si } m \text{ est un nombre pair} \\ \text{et} \\ \mathrm{Z} = \dfrac{(-1)^{\frac{m-1}{2}}}{2^m} z^a \displaystyle\int_0^\infty e^{-xz}\Delta^m[\sin(2s-m)x]\,dx, \\ \qquad\qquad \text{si } m \text{ est un nombre impair.} \end{array}\right.$$

Pour achever le calcul, il est nécessaire de distinguer deux hypothèses différentes, suivant que l'on a $s > \frac{m}{2}$ ou $s < \frac{m}{2}$.

Première hypothèse. — Soit

$$s > \frac{m}{2},$$

et supposons d'abord m pair. On aura

$$\int_0^\infty e^{-xz}\Delta^m[\cos(2s-m)x]\,dx = \Delta^m\left[\int_0^\infty e^{-xz}\cos(2s-m)x\,dx\right]$$
$$= \Delta^m\left[\frac{z}{(2s-m)^2+z^2}\right],$$
$$\mathrm{Z} = \frac{(-1)^{\frac{m}{2}}}{2^m}\Delta^m\left[\frac{z^{a+1}}{(2s-m)^2+z^2}\right].$$

Soit maintenant $a = \lambda + \frac{\mu}{\nu}$, λ étant le plus grand nombre entier compris dans a; on aura, à cause de $\lambda < m$,

$$\Delta^m \left[\frac{z^{\lambda+2}}{(2s-m)^2+z^2}\right] = (-1)^{\frac{\lambda+2}{2}} \Delta^m \left[\frac{(2s-m)^{\lambda+2}}{(2s-m)^2+z^2}\right]$$

si λ est un nombre pair, et

$$\Delta^m \left[\frac{z^{\lambda+1}}{(2s-m)^2+z^2}\right] = (-1)^{\frac{\lambda+1}{2}} \Delta^m \left[\frac{(2s-m)^{\lambda+1}}{(2s-m)^2+z^2}\right]$$

si λ est un nombre impair. Par suite, on trouvera :

$$(w) \quad \begin{cases} \text{dans le premier cas} \\ Z = \dfrac{(-1)^{\frac{m+\lambda+2}{2}}}{2^m} z^{\frac{\mu}{\nu}-1} \Delta^m \left[\dfrac{(2s-m)^{\lambda+2}}{(2s-m)^2+z^2}\right], \\ \text{et, dans le second,} \\ Z = \dfrac{(-1)^{\frac{m+\lambda+1}{2}}}{2^m} z^{\frac{\mu}{\nu}} \Delta^m \left[\dfrac{(2s-m)^{\lambda+1}}{(2s-m)^2+z^2}\right]. \end{cases}$$

On a d'ailleurs

$$\int_0^\infty \frac{(2s-m)^{\lambda+2}}{(2s-m)^2+z^2} z^{\frac{\mu}{\nu}-1} dz = (2s-m)^{\lambda+\frac{\mu}{\nu}} \int_0^\infty \frac{z^{\frac{\mu}{\nu}-1} dz}{1+z^2} = \frac{\pi}{2\sin\frac{\mu\pi}{2\nu}} (2s-m)^a,$$

$$\int_0^\infty \frac{(2s-m)^{\lambda+1}}{(2s-m)^2+z^2} z^{\frac{\mu}{\nu}-1} dz = (2s-m)^{\lambda+\frac{\mu}{\nu}} \int_0^\infty \frac{z^{\frac{\mu}{\nu}} dz}{1+z^2} = \frac{\pi}{2\cos\frac{\mu\pi}{2\nu}} (2s-m)^a;$$

enfin

$$\sin\frac{a\pi}{2} = (-1)^{\frac{\lambda}{2}} \sin\frac{\mu\pi}{2\nu}$$

quand λ est pair, et

$$\sin\frac{a\pi}{2} = (-1)^{\frac{\lambda-1}{2}} \cos\frac{\mu\pi}{2}$$

dans le cas contraire. Cela posé, la valeur de l'intégrale $\int_0^\infty Z\,dz$ sera,

dans l'un et l'autre cas, déterminée par l'équation

$$\int_0^\infty Z\,dz = \frac{(-1)^{\frac{m}{2}+1}}{2^{m+1}} \frac{\pi}{\sin\frac{a\pi}{2}} \Delta^m (2s-m)^a.$$

Dans les calculs qu'on vient de faire, on a toujours supposé que m était un nombre pair. Si le contraire avait lieu, il faudrait substituer la seconde des équations (v) à la première, et l'on trouverait alors

$$\int_0^\infty Z\,dz = \frac{(-1)^{\frac{m-1}{2}}}{2^{m+1}} \frac{\pi}{\cos\frac{a\pi}{2}} \Delta^m (2s-m)^a.$$

En vertu de ce qui précède, l'équation (6) deviendra

$$(x) \quad \begin{cases} \displaystyle\int_0^\infty \cos 2sx \sin^m x \frac{dx}{x^{a+1}} = (-1)^{\frac{m-2}{2}} \frac{\pi}{2^{m+2}\Gamma(a+1)\sin\frac{a\pi}{2}} \Delta^m (2s-m)^a, \\ \qquad \text{si } m \text{ est un nombre pair} \\ \text{et} \\ \displaystyle\int_0^\infty \cos 2sx \sin^m x \frac{dx}{x^{a+1}} = (-1)^{\frac{m-1}{2}} \frac{\pi}{2^{m+1}\Gamma(a+1)\cos\frac{a\pi}{2}} \Delta^m (2s-m)^a, \\ \qquad \text{si } m \text{ est un nombre impair.} \end{cases}$$

Ces deux dernières équations peuvent être comprises dans une seule et même formule, savoir

$$(y) \quad \int_0^\infty \cos 2sx \sin^m x \frac{dx}{x^{a+1}} = -\frac{\pi}{2^{m+1}\Gamma(a+1)\sin\frac{a+m}{2}\pi} \Delta^m (2s-m)^a.$$

Seconde hypothèse. — Soit maintenant

$$s < \frac{m}{2},$$

et supposons d'abord m pair : les quantités $2s-m$, $2s-m-2$, ..., deviendront négatives, et l'on aura

$$\cos(2s-m)x = \cos(m-2s)x,$$
$$\cos(2s-m+2)x = \cos(m-2s-2)x,$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots,$$

$$\Delta^m \cos(2s-m)x = \cos(m+2s)x - \frac{m}{1}\cos(m+2s-2)x + \dots$$
$$+ \cos(m-2s)x - \frac{m}{1}\cos(m-2s-2)x + \dots.$$

On pourra en conséquence, dans toute la suite des calculs, remplacer celles des quantités

$$2s-m, \quad 2s-m+2, \quad 2s-m+4, \quad \dots,$$

qui seraient négatives, par les quantités positives correspondantes

$$m-2s, \quad m-2s-2, \quad m-2s-4, \quad \dots;$$

et, par suite, pour corriger l'équation (y), il suffira de remplacer dans le second membre de cette équation la différence finie

$$\Delta^m (2s-m)^a = (2s+m)^a - \frac{m}{1}(2s+m-2)^a + \dots$$
$$+ (2s-m)^a - \frac{m}{1}(2s-m-2)^a + \dots,$$

par la somme des deux séries

$$(m+2s)^a - \frac{m}{1}(m+2s-2)^a + \dots,$$
$$(m-2s)^a - \frac{m}{1}(m-2s-2)^a + \dots,$$

dont chacune doit être prolongée seulement jusqu'au dernier des termes qui renferment des puissances de quantités positives.

Si donc on fait, pour abréger,

$$S_a = (m+2s)^a - \frac{m}{1}(m+2s-2)^a + \dots,$$
$$T_a = (m-2s)^a - \frac{m}{1}(m-2s-2)^a + \dots,$$

en excluant de chaque série les puissances de quantités négatives; on aura, dans l'hypothèse que l'on considère,

$$(z) \qquad \int_0^\infty \cos 2sx \sin^m x \frac{dx}{x^{a+1}} = -\frac{\pi}{2^{m+1}\Gamma(a+1)\sin\frac{a+m}{2}\pi}(S_a + T_a).$$

Supposons maintenant m impair. Dans ce cas on devra substituer la seconde des équations (v) à la première, et remplacer en conséquence, dans l'intégrale relative à x,

$$\Delta^m[\cos(2s-m)x] \quad \text{par} \quad \Delta^m[\sin(2s-m)x].$$

D'ailleurs, m étant impair, le dernier terme de la différence $\Delta^m[\sin(2s-m)x]$, savoir $\sin(2s-m)x$, sera affecté du signe $-$, et comme on a de plus

$$\sin(2s-m)x = -\sin(m-2s)x,$$
$$\sin(2s-m+2)x = -\sin(m-2s-2)x,$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots,$$

on trouvera

$$\Delta^m[\sin(2s-m)x] = \sin(m+2s)x - \frac{m}{1}\sin(m+2s-2)x + \dots$$
$$+ \sin(m-2s)x - \frac{m}{1}\sin(m-2s-2)x + \dots.$$

Cela posé, il est facile de voir que dans ce cas, comme dans le précédent, il suffira, pour corriger l'équation (y), de remplacer

$$\Delta^m(2s-m)^a \quad \text{par} \quad S_a + T_a.$$

Ainsi l'équation (z) sera également vraie et dans le cas où m est un nombre pair, et dans celui où m est un nombre impair.

Corollaire I. — Si a est un nombre entier, on aura

$$\Delta^m(2s-m)^a = 0.$$

Si dans le même cas on suppose que $a+m$ soit un nombre impair, on aura

$$\sin\frac{a+m}{2}\pi = \pm 1;$$

et, par suite, l'équation (y) donnera

$$(a')\qquad \int_0^\infty \cos 2sx \sin^m x \frac{dx}{x^{a+1}} = 0.$$

Mais, si $a+m$ est un nombre pair, ou, ce qui revient au même, si les deux nombres entiers a et m sont de même espèce, on aura

$$\sin\frac{a+m}{2}\pi = 0;$$

et, par suite, le second membre de l'équation (y) se présentera sous la forme $\frac{0}{0}$. Pour déterminer sa valeur dans cette hypothèse, il suffira de différentier, par rapport à a, le numérateur et le dénominateur de la fraction

$$\frac{\Delta^m(2s-m)^a}{\sin\frac{a+m}{2}\pi},$$

qui se trouvera ainsi changée en cette autre

$$\frac{\Delta^m[(2s-m)^a \log(2s-m)]}{\frac{\pi}{2}\cos\frac{a+m}{2}\pi}.$$

Si dans cette dernière on suppose $a+m$ entier et pair, on aura

$$\cos\frac{a+m}{2}\pi = (-1)^{\frac{a+m}{2}};$$

l'équation (y) se réduira donc alors à

$$(b')\qquad \begin{cases} \displaystyle\int_0^\infty \cos 2sx \sin^m x \frac{dx}{x^{a+1}} \\ \displaystyle\quad = (-1)^{\frac{a+m+2}{2}} \frac{1}{2^m \Gamma(a+1)} \Delta^m[(2s-m)^a \log(2s-m)]. \end{cases}$$

Corollaire II. — Des remarques analogues à celles qu'on vient de faire, relativement à l'équation (y), s'appliquent à l'équation (z) : et, en effet, soit toujours a un nombre entier, et supposons d'abord que $a+m$ soit un nombre impair; on aura évidemment

$$S_a - T_a = \Delta^m(2s-m)^a = 0,$$

$$\sin\frac{a+m}{2}\pi = (-1)^{\frac{a+m-1}{2}};$$

et, par suite, l'équation (z) deviendra

$$(c')\qquad \begin{cases} \displaystyle\int_0^\infty \cos 2sx \sin^m x \frac{dx}{x^{a+1}} = (-1)^{\frac{a+m-1}{2}} \frac{\pi}{2^m \Gamma(a+1)} S_a \\ \displaystyle\qquad = (-1)^{\frac{a+m-1}{2}} \frac{\pi}{2^m \Gamma(a+1)} T_a. \end{cases}$$

Soit, en second lieu, $a+m$ un nombre pair; on aura

$$S_a + T_a = \Delta^m(2s-m)^a = 0,$$

$$\sin\frac{a+m}{2}\pi = 0.$$

Dans cette hypothèse le second membre de l'équation (z) se présentera sous la forme $\frac{0}{0}$. Mais, pour obtenir sa vraie valeur, il suffira de différentier, par rapport à a, la fraction

$$\frac{S_a + T_a}{\sin\frac{a+m}{2}\pi}.$$

On trouvera de cette manière

$$(d')\qquad \begin{cases} \displaystyle\int_0^\infty \cos 2sx \sin^m x \frac{dx}{x^{a+1}} \\ \displaystyle\quad = (-1)^{\frac{a+m+2}{2}} \frac{1}{2^m \Gamma(a+1)} \Delta^m[(2s-m)^a \log(2s-m)]; \end{cases}$$

pourvu que dans le développement de la différence finie

$$\Delta^m[(2s-m)^a \log(2s-m)]$$

on remplace les logarithmes des quantités négatives par ceux des mêmes quantités prises en signe contraire.

Corollaire III. — Si l'on donne à s une valeur nulle, on aura évidemment

$$s < \frac{m}{2}.$$

On devra donc alors employer l'équation (z); et, comme on aura dans le même cas

$$S_a = T_a = m^a - \frac{m}{1}(m-2)^a + \frac{m(m-1)}{1.2}(m-4)^a - \ldots,$$

l'équation (z) deviendra

$$(e')\quad \left\{ \begin{aligned} &\int_0^\infty \sin^m x \frac{dx}{x^{a+1}} \\ &= -\frac{\pi}{2^m \Gamma(a+1)\sin\frac{a+m}{2}\pi}\left[m^a - \frac{m}{1}(m-2)^a + \frac{m(m-1)}{2}(m-4)^a - \ldots\right]. \end{aligned} \right.$$

Dans cette formule, la série du second membre doit être seulement prolongée jusqu'au dernier des termes où la quantité renfermée entre parenthèses a une valeur positive, c'est-à-dire jusqu'au terme

$$\frac{m(m-1)\ldots\left(\frac{m}{2}+2\right)}{1.2.3\ldots\ldots\frac{m-2}{2}} 2^a,$$

dans le cas où m est un nombre pair, et jusqu'au terme

$$\frac{m(m-1)\ldots\left(\frac{m+3}{2}\right)}{1.2.3\ldots\ldots\frac{m-1}{2}} 1^a,$$

dans le cas contraire.

Corollaire IV. — Si, a étant un nombre entier, $a+m$ est un nombre impair, l'équation (e') fournira immédiatement la valeur de l'intégrale

$$\int_0^\infty \sin^m x \frac{dx}{x^{a+1}}.$$

Mais, si $a+m$ est un nombre pair, l'équation (e') devra être remplacée par la formule suivante

$$(f')\quad \int_0^\infty \sin^m x \frac{dx}{x^{a+1}} = \frac{(-1)^{\frac{a+m}{2}}}{2^m \Gamma(a+1)}\left[m^a \log m - \frac{m}{1}(m-2)^a \log(m-2) + \ldots\right].$$

Nota. — Dans les calculs précédents nous avons toujours supposé $a < m$. Cette condition est nécessaire pour que les valeurs des intégrales

$$\int_0^\infty \cos 2sx \sin^m x \frac{dx}{x^{a+1}}, \quad \int_0^\infty \sin^m x \frac{dx}{x^{a+1}}$$

ne deviennent pas infinies. En effet, pour chacune de ces intégrales, la partie comprise entre les limites $x = 0$, $x = \alpha$ (α étant une quantité très petite) est sensiblement égale à

$$\int_0^\infty x^{m-a-1}\,dx = \frac{1}{m-a}[\alpha^{m-a} - (0)^{m-a}] = \frac{1}{m-a}\left[\left(\frac{1}{\alpha}\right)^{a-m} - \left(\frac{1}{0}\right)^{a-m}\right];$$

et cette partie ne peut rester finie qu'autant que $m-a$ est une quantité positive.

Exemple VIII. — Soit proposé de déterminer la valeur de l'intégrale

$$\int_0^\infty \sin 2sx \sin^m x \frac{dx}{x^{a+1}},$$

m étant un nombre entier, a et s deux constantes arbitraires, et a étant $< m+1$.

Il serait facile d'obtenir la valeur de l'intégrale proposée par une analyse semblable à celle dont nous avons fait usage dans l'exemple précédent. Mais on arrive plus promptement au même but de la manière suivante.

Supposons d'abord $s < \frac{m}{2}$. Si l'on différentie, par rapport à s, les deux membres de la formule (y), en ayant égard à l'équation

$$\frac{a}{\Gamma(a+1)} = \frac{1}{\Gamma(a)},$$

on trouvera

$$(g') \qquad \int_0^\infty \sin 2sx \sin^m x \frac{dx}{x^a} = \frac{\pi}{2^{m+1}\Gamma(a)\sin\frac{a+m}{2}\pi}\Delta^m(2s-m)^{a-1}.$$

Si dans cette dernière équation on change a en $a+1$, on aura

$$\sin\frac{a+m+1}{2}\pi = \cos\frac{a+m}{2}\pi,$$

et, par suite,

$$(h') \qquad \int_0^\infty \sin 2sx \sin^m x \frac{dx}{x^{a+1}} = \frac{\pi}{2^{m+1}\Gamma(a+1)\cos\frac{a+m}{2}\pi}\Delta^m(2s-m)^a.$$

Comme l'équation (y) subsiste seulement dans le cas où l'on a $a < m$, et que pour obtenir l'équation (h') il a fallu changer a en $a+1$, il semble, au premier abord, que cette dernière équation exigerait la condition suivante

$$a < m - 1.$$

Néanmoins elle subsiste dans le cas où a surpasse $m-1$, et même dans celui où a surpasse m, pourvu toutefois que l'on ait

$$a < m + 1;$$

C'est ce qu'il est facile de vérifier en cherchant directement la valeur de l'intégrale

$$\int_0^\infty \sin 2sx \sin^m x \frac{dx}{x^{a+1}}$$

par la méthode que nous avons employée dans l'exemple précédent. En effet, cette méthode est applicable toutes les fois que l'intégrale proposée a une valeur finie; et, comme pour de très grandes valeurs de x, la quantité

$$\frac{\sin 2sx \sin^m x}{x^{a+1}}$$

est sensiblement égale à zéro; pour que la condition qu'on vient

d'énoncer soit remplie, il suffira que l'intégrale donnée conserve une valeur finie entre les limites $x = 0$, $x = \alpha$ (α étant une quantité très petite). D'ailleurs, comme entre ces dernières limites on a, à très peu près,

$$\int_0^\alpha \sin 2sx \sin^m x \frac{dx}{x^{a+1}} = 2s\int_0^\alpha x^{m-a}\,dx = \frac{2s}{m-a+1}[\alpha^{m-a+1} - (0)^{m-a+1}],$$

la condition dont il s'agit se trouvera réduite à la suivante

$$a < m + 1.$$

Supposons maintenant $s < \frac{m}{2}$. Si l'on différentie par rapport à s les deux membres de la formule (z), en ayant égard aux équations

$$\frac{a}{\Gamma(a+1)} = \frac{1}{\Gamma(a)}, \qquad \frac{dS_a}{ds} = 2S_{a-1}, \qquad \frac{dT_a}{ds} = -2T_{a-1},$$

et que l'on change ensuite a en $a+1$, on trouvera

$$(i') \qquad \int_0^\infty \sin 2sx \sin^m x \frac{dx}{x^{a+1}} = \frac{\pi}{2^{m+1}\Gamma(a+1)\cos\frac{a+m}{2}\pi}(S_a - T_a).$$

Cette dernière équation peut être démontrée directement, ainsi que la formule (h'); et, comme cette formule, elle exige seulement que l'on ait

$$a < m + 1.$$

Corollaire I. — L'application des formules (h') et (i') ne présente aucune difficulté dans le cas où, a étant un nombre entier, $a+m$ est un nombre pair. Mais si dans la même hypothèse $a+m$ est un nombre impair, les seconds membres des équations (h') et (i') prennent la forme indéterminée $\frac{0}{0}$. Dans ce dernier cas, il est facile de voir que chacune des équations dont il s'agit doit être remplacée par la suivante

$$(k') \qquad \int_0^\infty \sin 2sx \sin^m x \frac{dx}{x^{a+1}} = \frac{(-1)^{\frac{a+m-1}{2}}}{2^m\Gamma(a+1)}\Delta^m[(2s-m)^a\log(2s-m)],$$

pourvu que dans le développement de

$$\Delta^m[(2s-m)^a \log(2s-m)]$$

on substitue aux logarithmes qui pourraient affecter des quantités négatives les logarithmes des mêmes quantités prises en signe contraire.

Corollaire II. — Si dans l'équation (i') on suppose $s=0$, on aura

$$S_a = T_a,$$

et, par suite, l'intégrale relative à x s'évanouira; ce qui d'ailleurs est évident, puisque la supposition $s=0$ fait évanouir le facteur $\sin 2sx$.

Corollaire III. — Si l'on suppose $a=m$, on aura

$$\Delta^m(2s-m)^a = 1.2.3.\ldots.a = \Gamma(a+1),$$
$$\cos\frac{a+m}{2}\pi = (-1)^m;$$

et, par suite, l'équation (h') deviendra

$$(l') \qquad \int_0^\infty \sin 2sx \sin^m x \frac{dx}{x^{m+1}} = (-1)^m \frac{\pi}{2^{m+1}}.$$

Cette dernière équation suppose $s > \frac{m}{2}$. Ainsi l'intégrale

$$\int_0^\infty \sin 2sx \sin^m x \frac{dx}{x^{m+1}}$$

conserve la même valeur, quelle que soit d'ailleurs celle de la quantité s, pourvu que cette quantité reste comprise entre les limites

$$s = \frac{m}{2}, \qquad s = \infty.$$

Si l'on différentie $m-a$ fois de suite par rapport à s l'équation (l'),

on trouvera

$$(m') \quad \begin{cases} \displaystyle\int_0^\infty \cos 2sx \sin^m x \frac{dx}{x^{a+1}} = 0, \qquad \text{si } a+m \text{ est un nombre impair} \\ \text{et} \\ \displaystyle\int_0^\infty \sin 2sx \sin^m x \frac{dx}{x^{a+1}} = 0. \end{cases}$$

La première de ces formules coïncide avec l'équation (a'); la seconde n'est qu'un cas particulier de l'équation (h').

§ III. — *Deuxième application.*

Faisons successivement

$$X = PX_1, \qquad X = PX_2,$$

X_1 et X_2 étant respectivement déterminés par l'équation

$$(k \pm x\sqrt{-1})^{-n} = X_1 \mp X_2\sqrt{-1},$$

de laquelle on tire

$$X_1 = \frac{(k-x\sqrt{-1})^{-n} + (k+x\sqrt{-1})^{-n}}{2},$$
$$X_2 = \frac{(k-x\sqrt{-1})^{-n} - (k+x\sqrt{-1})^{-n}}{2\sqrt{-1}};$$

et n étant un nombre positif pris à volonté.

On aura, en vertu des équations (s) (§ II),

$$(7) \quad \begin{cases} X_1 = \dfrac{1}{\Gamma(n)}\displaystyle\int_0^\infty z^{n-1}e^{-kz}\cos xz\,dz, \\ X_2 = \dfrac{1}{\Gamma(n)}\displaystyle\int_0^\infty z^{n-1}e^{-kz}\sin xz\,dz. \end{cases}$$

Si donc on suppose $X = PX_1$, on aura

$$A = \frac{1}{\Gamma(n)}, \qquad R = z^{n-1}e^{-kz}\cos xz;$$

et, si l'on suppose $X = PX_2$,

$$A = \frac{1}{\Gamma(n)}, \qquad R = z^{n-1}e^{-kz}\sin xz.$$

Par suite, si l'on fait

$$(8) \qquad \begin{cases} Z_1 = z^{n-1}e^{-kz}\int_0^a P\cos xz\,dz, \\ Z_2 = z^{n-1}e^{-kz}\int_0^a P\sin xz\,dz, \end{cases}$$

on aura

$$(9) \qquad \begin{cases} \int_0^a PX_1\,dx = \frac{1}{\Gamma(n)}\int_0^\infty Z_1\,dz, \\ \int_0^a PX_2\,dx = \frac{1}{\Gamma(n)}\int_0^\infty Z_2\,dz. \end{cases}$$

Exemple I. — Considérons à la fois les deux intégrales

$$A = \int_0^\infty X_1 e^{-sx}\cos rx\,dx,$$
$$B = \int_0^\infty X_2 e^{-sx}\sin rx\,dx;$$

X_1 et X_2 ayant les mêmes valeurs que ci-dessus. On aura pour la première intégrale

$$Z_1 = z^{n-1}e^{-kz}\int_0^\infty e^{-sx}\cos zx\cos rx\,dx,$$

et pour la seconde

$$Z_2 = z^{n-1}e^{-kz}\int_0^\infty e^{-sx}\sin zx\sin rx\,dx.$$

On trouvera par suite

$$Z_1 \pm Z_2 = z^{n-1}e^{-kz}\int_0^\infty e^{-sx}\cos(r\mp z)x\,dx = \frac{s}{s^2+(r\mp z)^2}z^{n-1}e^{-kz},$$

et

$$A \pm B = \frac{1}{\Gamma(n)}\int_0^\infty (Z_1 \pm Z_2)\,dz = \frac{1}{\Gamma(n)}\int_0^\infty \frac{s}{s^2+(r\mp z)^2}z^{n-1}e^{-kz}\,dz.$$

Cette dernière équation se décompose en deux autres, savoir :

$$(n') \qquad \begin{cases} A + B = \frac{1}{\Gamma(n)}\int_0^\infty \frac{s}{s^2+(r-z)^2}z^{n-1}e^{-kz}\,dz, \\ A - B = \frac{1}{\Gamma(n)}\int_0^\infty \frac{s}{s^2+(r+z)^2}z^{n-1}e^{-kz}\,dz; \end{cases}$$

d'où l'on tire

$$(o') \qquad \begin{cases} A = \frac{1}{2\Gamma(n)}\left[\int_0^\infty \frac{s}{s^2+(r-z)^2}z^{n-1}e^{-kz}\,dz + \int_0^\infty \frac{s}{s^2+(r+z)^2}z^{n-1}e^{-kz}\,dz\right], \\ B = \frac{1}{2\Gamma(n)}\left[\int_0^\infty \frac{s}{s^2+(r-z)^2}z^{n-1}e^{-kz}\,dz - \int_0^\infty \frac{s}{s^2+(r+z)^2}z^{n-1}e^{-kz}\,dz\right]. \end{cases}$$

Ainsi les intégrales proposées qui renfermaient explicitement des imaginaires se trouvent ramenées à d'autres intégrales qui n'en renferment plus.

Corollaire I. — Si l'on suppose $r = 0$, la première des équations (o') deviendra

$$(p') \qquad \int_0^\infty X_1 e^{-sx}\,dx = \frac{1}{\Gamma(n)}\int_0^\infty \frac{s}{s^2+z^2}z^{n-1}e^{-kz}\,dz.$$

Quant à la seconde, elle donnera $B = 0$, ainsi qu'on devait s'y attendre.

Corollaire II. — Si l'on suppose $s = 0$, l'intégrale

$$\int_0^\infty \frac{s}{s^2+(r+z)^2}z^{n-1}e^{-kz}\,dz$$

s'évanouira, et, par suite, la seconde des équations (n') donnera

$$A = B.$$

D'ailleurs, si l'on suppose s très petit, l'intégrale

$$\int_0^\infty \frac{s}{s^2+(r-z)^2}z^{n-1}e^{-kz}\,dz$$

n'aura de valeur sensible qu'entre les limites

$$z = r - \alpha, \qquad z = r + \alpha,$$

α étant une quantité très petite. Par suite, si l'on désigne par ζ une nouvelle inconnue qui puisse varier seulement depuis $\zeta = -\alpha$ jusqu'à $\zeta = \alpha$, on pourra, dans le cas dont il s'agit, supposer

$$z = r + \zeta.$$

On aura à très peu près, dans cette hypothèse,

$$z^{n-1} = r^{n-1}, \qquad e^{-kz} = e^{-kr};$$

et, par suite, l'intégrale

$$\int_0^\infty \frac{s}{s^2 + (r-z)^2} z^{n-1} e^{-kz}\, dz$$

sera sensiblement égale à

$$r^{n-1} e^{-kr} \int_{-\alpha}^{\alpha} \frac{s\, d\zeta}{s^2 + \zeta^2}.$$

On a de plus, entre les limites $\zeta = -\alpha$, $\zeta = \alpha$,

$$\int_{-\alpha}^{\alpha} \frac{s\, d\zeta}{s^2 + \zeta^2} = 2 \operatorname{arc\,tang} \frac{\alpha}{s}.$$

Ainsi, dans le cas où l'on suppose s très petit, la première des équations (n') devient

$$A + B = \frac{2}{\Gamma(n)} r^{n-1} e^{-kr} \operatorname{arc\,tang} \frac{\alpha}{s}.$$

Si dans cette dernière on suppose $s = 0$, on aura

$$A = B, \qquad 2 \operatorname{arc\,tang} \frac{\alpha}{s} = \pi,$$

et, par suite,

$$A = B = \frac{\pi}{2\Gamma(n)} r^{n-1} e^{-kr}.$$

En remettant pour A et B, X_1 et X_2, leurs valeurs respectives, on trouvera

$$(q') \quad \begin{cases} \displaystyle\int_0^\infty \frac{(k - x\sqrt{-1})^{-n} + (k + x\sqrt{-1})^{-n}}{2} \cos rx\, dx = \frac{1}{2} \frac{\pi}{\Gamma(n)} r^{n-1} e^{-kr}, \\ \displaystyle\int_0^\infty \frac{(k - x\sqrt{-1})^{-n} - (k + x\sqrt{-1})^{-n}}{2\sqrt{-1}} \sin rx\, dx = \frac{1}{2} \frac{\pi}{\Gamma(n)} r^{n-1} e^{-kr}. \end{cases}$$

Le succès de l'analyse précédente tient, comme l'on voit, à cette circonstance particulière qu'entre les limites $z = 0$, $z =$ très petit, et dans le cas où l'on suppose après l'intégration $s = 0$, l'intégrale $\int \frac{s}{s^2 + (r-z)^2} z^{n-1} e^{-kz}\, dz$ obtient une valeur finie égale à $\frac{\pi}{2\Gamma(n)} r^{n-1} e^{-kr}$. L'intégrale dont il s'agit ici est une de celles que nous avons désignées dans le précédent Mémoire sous le nom d'*intégrales singulières*. On a ainsi une nouvelle preuve des avantages que peut offrir la considération de cette espèce d'intégrales.

Si l'on suppose, dans les équations (q'), $k = n$, $r = 1$, et qu'on les ajoute ensuite, on obtiendra la formule que M. Laplace a désignée par la lettre (O) [p. 134 du *Calcul des probabilités* (1)].

Corollaire III. — On peut déduire des équations (q') plusieurs conséquences dignes de remarque; et d'abord, si l'on suppose n entier, les imaginaires disparaîtront par le développement des puissances, et l'on obtiendra, en faisant successivement $n = 1$, $n = 2$, $n = 3$, ..., plusieurs équations à l'aide desquelles il sera facile de déterminer les valeurs des intégrales

$$\int_0^\infty \frac{\cos rx}{(k^2 + x^2)^n}\, dx, \qquad \int_0^\infty \frac{x \sin rx}{(k^2 + x^2)^n}\, dx.$$

Par exemple, si l'on suppose $n = 1$, on trouvera

$$\int_0^\infty \frac{\cos rx}{k^2 + x^2}\, dx = \frac{\pi}{2k} e^{-kr}, \qquad \int_0^\infty \frac{x \sin rx}{k^2 + x^2}\, dx = \frac{\pi}{2} e^{-kr};$$

et ainsi de suite.

(1) *Œuvres de Laplace*, t. VII, p. 136.

Supposons en second lieu $n = \frac{m}{2}$, m étant un nombre entier quelconque pair ou impair; si l'on fait

$$x = \frac{k}{2}\left(z - \frac{1}{z}\right), \qquad kr = 2s,$$

les limites relatives à la nouvelle variable z seront $z = 1$, $z = \infty$. On aura de plus

$$(k \pm x\sqrt{-1})^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\,\frac{k^{\frac{1}{2}}}{z^{\frac{1}{2}}}\left[z + 1 \pm (z-1)\sqrt{-1}\right], \qquad dx = \frac{1}{2}\,\frac{k}{z}\left(z + \frac{1}{z}\right)dz;$$

et, par suite, les équations (q') deviendront

$$(r')\quad \begin{cases} \displaystyle\int_1^\infty z^{\frac{m}{2}-1}\left(z+\frac{1}{z}\right)\frac{\left[z+1-(z-1)\sqrt{-1}\right]^{-m}+\left[z+1+(z-1)\sqrt{-1}\right]^{-m}}{2}\cos s\left(z-\frac{1}{z}\right)dz = \frac{\pi s^{\frac{m}{2}-1}e^{-2s}}{2^{\frac{m}{2}+1}\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)}, \\[2ex] \displaystyle\int_1^\infty z^{\frac{m}{2}-1}\left(z+\frac{1}{z}\right)\frac{\left[z+1-(z-1)\sqrt{-1}\right]^{-m}-\left[z+1+(z-1)\sqrt{-1}\right]^{-m}}{2\sqrt{-1}}\sin s\left(z-\frac{1}{z}\right)dz = \frac{\pi s^{\frac{m}{2}+1}e^{-2s}}{2^{\frac{m}{2}+1}\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)}. \end{cases}$$

Si dans celles-ci on développe les puissances, les imaginaires disparaîtront.

Ainsi, par exemple, si l'on suppose $m = 1$, on trouvera

$$\left(z+\frac{1}{z}\right)\frac{\left[z+1-(z-1)\sqrt{-1}\right]^{-1}+\left[z+1+(z-1)\sqrt{-1}\right]^{-1}}{2} = \frac{z+1}{2z},$$

$$\left(z+\frac{1}{z}\right)\frac{\left[z+1-(z-1)\sqrt{-1}\right]^{-1}-\left[z+1+(z-1)\sqrt{-1}\right]^{-1}}{2} = \frac{z-1}{2z},$$

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \pi^{\frac{1}{2}};$$

et, par suite, les équations (r') donneront

$$(s')\quad \begin{cases} \displaystyle\int_1^\infty z^{\frac{1}{2}}\left(z+\frac{1}{z}\right)\cos s\left(z-\frac{1}{z}\right)dz = \frac{\pi^{\frac{1}{2}}e^{-2s}}{2^{\frac{1}{2}}s^{\frac{1}{2}}}, \\[2ex] \displaystyle\int_1^\infty z^{\frac{1}{2}}\left(z-\frac{1}{z}\right)\sin s\left(z-\frac{1}{z}\right)dz = \frac{\pi^{\frac{1}{2}}e^{-2s}}{2^{\frac{1}{2}}s^{\frac{1}{2}}}. \end{cases}$$

Ces dernières peuvent aussi se mettre sous la forme suivante

$$(t')\quad \begin{cases} \displaystyle\int_0^\infty x^{-\frac{1}{2}}\cos s\left(x-\frac{1}{x}\right)dx = \frac{\pi^{\frac{1}{2}}e^{-2s}}{2^{\frac{1}{2}}s^{\frac{1}{2}}}, \\[2ex] \displaystyle\int_0^\infty x^{-\frac{1}{2}}\sin s\left(x-\frac{1}{x}\right)dx = \frac{\pi^{\frac{1}{2}}e^{-2s}}{2^{\frac{1}{2}}s^{\frac{1}{2}}}. \end{cases}$$

Ces résultats coïncident avec les formules que nous avons données dans notre premier Mémoire sur les intégrales définies (I^re Partie, § II, exemple III).

Si dans les équations (r') on suppose $m = 3$, on obtiendra les formules

$$(u')\quad \begin{cases} \displaystyle\int_1^\infty \left(z^{\frac{1}{2}}+\frac{1}{z^{\frac{1}{2}}}\right)\frac{4-z-\frac{1}{z}}{\left(z+\frac{1}{z}\right)^2}\cos s\left(z-\frac{1}{z}\right)\frac{dz}{z} = (2s\pi)^{\frac{1}{2}}e^{-2s}, \\[2ex] \displaystyle\int_1^\infty \left(z^{\frac{1}{2}}-\frac{1}{z^{\frac{1}{2}}}\right)\frac{4+z+\frac{1}{z}}{\left(z-\frac{1}{z}\right)^2}\sin s\left(z-\frac{1}{z}\right)\frac{dz}{z} = (2s\pi)^{\frac{1}{2}}e^{-2s}, \end{cases}$$

qu'on peut aussi présenter sous la forme suivante

$$(v')\quad \begin{cases} \displaystyle\int_0^\infty \frac{x^{\frac{1}{2}}(3-x)}{\left(x+\frac{1}{x}\right)^2}\cos s\left(x-\frac{1}{x}\right)dx = (2s\pi)^{\frac{1}{2}}e^{-2s}, \\[2ex] \displaystyle\int_0^\infty \frac{x^{\frac{1}{2}}(3+x)}{\left(x+\frac{1}{x}\right)^2}\sin s\left(x-\frac{1}{x}\right)dx = (2s\pi)^{\frac{1}{2}}e^{-2s}, \end{cases}$$

et ainsi de suite.

Revenons maintenant aux équations (q'). Si l'on désigne par m un nombre entier quelconque inférieur à n, et que l'on différentie $m - 1$ fois de suite par rapport à r les équations (q'), on trouvera, pour le cas où $m-1$ sera pair,

$$(w')\quad\left\{\begin{aligned}&\int_0^\infty \frac{(k-x\sqrt{-1})^{-n}+(k+x\sqrt{-1})^{-n}}{2}\,x^{m-1}\cos rx\,dx=\frac{(-1)^{\frac{m-1}{2}}}{2}\,\frac{\pi}{\Gamma(n)}\,\frac{d^{m-1}(r^{n-1}e^{-kr})}{dr^{m-1}},\\&\int_0^\infty \frac{(k-x\sqrt{-1})^{-n}-(k+x\sqrt{-1})^{-n}}{2\sqrt{-1}}\,x^{m-1}\sin rx\,dx=\frac{(-1)^{\frac{m-1}{2}}}{2}\,\frac{\pi}{\Gamma(n)}\,\frac{d^{m-1}(r^{n-1}e^{-kr})}{dr^{m-1}}.\end{aligned}\right.$$

Si $m-1$ était un nombre impair, il faudrait dans les premiers membres des équations précédentes changer les sinus en cosinus et réciproquement.

Si l'on suppose $r=0$, m étant inférieur à n par hypothèse, les seconds membres des équations (w') s'évanouiront. On aura de plus $\sin rx=0$, $\cos rx=1$; et comme, pour passer du cas où m est un nombre impair à celui où m est un nombre pair, il faut changer dans les premiers membres de ces équations les sinus en cosinus, en faisant successivement l'une et l'autre hypothèse, on trouvera

$$(x')\quad\left\{\begin{aligned}&\int_0^\infty \frac{(k-x\sqrt{-1})^{-n}+(k+x\sqrt{-1})^{-n}}{2}\,x^{m-1}\,dx=0,\\&\qquad\qquad \text{si } m \text{ est impair,}\\&\text{et}\\&\int_0^\infty \frac{(k-x\sqrt{-1})^{-n}-(k+x\sqrt{-1})^{-n}}{2\sqrt{-1}}\,x^{m-1}\,dx=0,\\&\qquad\qquad \text{si } m \text{ est pair.}\end{aligned}\right.$$

Au reste, il est bon de remarquer que $m<n$ est la condition nécessaire pour que les intégrales (x') conservent une valeur finie. Ainsi ces intégrales seront toujours nulles, lorsqu'elles ne seront pas infinies.

Il est facile de vérifier cette conclusion par un simple changement de variable. En effet, si dans les équations (x') on fait $x=k\tang u$, on aura

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{m-1}u\cos^{n-m-1}u\cos nu\,du=0,\qquad \text{si } m \text{ est impair}$$

et

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{m-1}u\cos^{n-m-1}u\sin nu\,du=0,\qquad \text{si } m \text{ est pair;}$$

ce qu'il est très aisé de démontrer immédiatement.

Si, au lieu de différentier par rapport à r les équations (q'), on différentie plusieurs fois de suite, par rapport à s, les équations (r'), (s'), (t'), (u'), (v'), on déduira de ces dernières plusieurs formules assez remarquables. Mais nous ne nous arrêterons pas plus longtemps sur cet objet.

Corollaire IV. — Si l'on compare la seconde des équations (n') avec la première des équations (t), on obtiendra la formule suivante

$$(y')\quad\left\{\begin{aligned}&\int_0^\infty (k+x)^{-n}e^{-sx}\sin rx\,dx\\&\quad=\int_0^\infty \frac{(k-x\sqrt{-1})^{-n}+(k+x\sqrt{-1})^{-n}}{2}\,e^{-rx}\cos sx\,dx\\&\quad\;-\int_0^\infty \frac{(k-x\sqrt{-1})^{-n}-(k+x\sqrt{-1})^{-n}}{2\sqrt{-1}}\,e^{-rx}\sin sx\,dx.\end{aligned}\right.$$

Exemple II. — Considérons à la fois les deux intégrales

$$C=\int_0^\infty X_1e^{-sx}\sin rx\,dx,$$

$$D=\int_0^\infty X_2e^{-sx}\cos rx\,dx,$$

X_1 et X_2 ayant toujours les mêmes valeurs que nous leur avons précédemment assignées. On aura pour la première intégrale

$$Z_1=z^{n-1}e^{-kz}\int_0^\infty e^{-sx}\cos zx\sin rx\,dx,$$

et pour la seconde

$$Z_2=z^{n-1}e^{-kz}\int_0^\infty e^{-sx}\sin zx\cos rx\,dx.$$

On trouvera par suite

$$Z_1 \pm Z_2 = z^{n-1} e^{-kz} \int_0^\infty e^{-sx} \sin(r \pm z) x \, dx = \frac{r \pm z}{s^2 + (r \pm z)^2} z^{n-1} e^{-kz},$$

et

$$C \pm D = \frac{1}{\Gamma(n)} \int_0^\infty (Z_1 \pm Z_2) \, dz = \frac{1}{\Gamma(n)} \int_0^\infty \frac{r \pm z}{s^2 + (r \pm z)^2} z^{n-1} e^{-kz} \, dz.$$

Cette dernière équation se décompose en deux autres, savoir :

$$(z') \quad \begin{cases} C + D = \dfrac{1}{\Gamma(n)} \displaystyle\int_0^\infty \frac{r + z}{s^2 + (r + z)^2} z^{n-1} e^{-kz} \, dz, \\ C - D = \dfrac{1}{\Gamma(n)} \displaystyle\int_0^\infty \frac{r - z}{s^2 + (r - z)^2} z^{n-1} e^{-kz} \, dz; \end{cases}$$

d'où l'on tire

$$(a'') \quad \begin{cases} C = \dfrac{1}{2\Gamma(n)} \left[\displaystyle\int_0^\infty \frac{r + z}{s^2 + (r + z)^2} z^{n-1} e^{-kz} \, dz + \int_0^\infty \frac{r - z}{s^2 + (r - z)^2} z^{n-1} e^{-kz} \, dz \right], \\ D = \dfrac{1}{2\Gamma(n)} \left[\displaystyle\int_0^\infty \frac{r + z}{s^2 + (r + z)^2} z^{n-1} e^{-kz} \, dz - \int_0^\infty \frac{r - z}{s^2 + (r - z)^2} z^{n-1} e^{-kz} \, dz \right]. \end{cases}$$

Ainsi les deux intégrales proposées, qui renfermaient explicitement des imaginaires, se trouvent ramenées à d'autres intégrales qui n'en renferment plus.

Corollaire I. — Si l'on suppose $r = 0$, la seconde des équations (a'') deviendra

$$(b'') \quad \int_0^\infty X_2 e^{-sx} \, dx = \frac{1}{\Gamma(n)} \int_0^\infty \frac{z}{s^2 + z^2} z^{n-1} e^{-kz} \, dz.$$

Quant à la première, elle donnera $C = 0$, ainsi qu'on devait s'y attendre.

Corollaire II. — Si l'on suppose $s = 0$, les équations (a'') deviendront

$$(c'') \quad \begin{cases} \displaystyle\int_0^\infty \frac{(k - x\sqrt{-1})^{-n} + (k + x\sqrt{-1})^{-n}}{2} \sin rx \, dx = \frac{1}{\Gamma(n)} \int_0^\infty \frac{r z^{n-1}}{r^2 - z^2} e^{-kz} \, dz, \\ \displaystyle\int_0^\infty \frac{(k - x\sqrt{-1})^{-n} - (k + x\sqrt{-1})^{-n}}{2\sqrt{-1}} \cos rx \, dx = \frac{1}{\Gamma(n)} \int_0^\infty \frac{z^n}{r^2 - z^2} e^{-kz} \, dz. \end{cases}$$

Corollaire III. — Si l'on compare la première des équations (z') avec la seconde des équations (t), on aura

$$(d'') \quad \begin{cases} \displaystyle\int_0^\infty (k + x)^{-n} e^{-sx} \cos rx \, dx \\ \quad = \displaystyle\int_0^\infty \frac{(k - x\sqrt{-1})^{-n} + (k + x\sqrt{-1})^{-n}}{2} e^{-rx} \sin sx \, dx \\ \quad + \displaystyle\int_0^\infty \frac{(k - x\sqrt{-1})^{-n} - (k + x\sqrt{-1})^{-n}}{2\sqrt{-1}} e^{-rx} \cos sx \, dx. \end{cases}$$

§ IV. — *Troisième application.*

Soit

$$X = P x^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{s^2}{x}}.$$

On aura

$$(10) \quad x^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{s^2}{x}} = \frac{2}{\pi^{\frac{1}{2}}} \int_0^\infty e^{-xz^2} \cos 2sz \, dz.$$

On pourra donc supposer dans le cas dont il s'agit

$$A = \frac{2}{\pi^{\frac{1}{2}}}, \qquad R = e^{-xz^2} \cos 2sz;$$

et, par suite, si l'on fait

$$(11) \quad Z = \cos 2sz \int_0^\infty P e^{-xz^2} \, dx,$$

on aura

$$(12) \quad \int_0^\infty P x^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{s^2}{x}} \, dx = \frac{2}{\pi^{\frac{1}{2}}} \int_0^\infty Z \, dz.$$

Exemple. — Soit proposé de déterminer les valeurs des deux intégrales

$$E = \int_0^\infty x^{-\frac{1}{2}} e^{-s^2\left(x + \frac{1}{x}\right)} \sin rx \, dx,$$

$$F = \int_0^\infty x^{-\frac{1}{2}} e^{-s^2\left(x + \frac{1}{x}\right)} \cos rx \, dx.$$

On aura pour la première

$$P = e^{-sx^2} \sin rx,$$

et, par suite,

$$Z = \cos 2sz \int_0^\infty e^{-(s^2+z^2)x} \sin rx\, dx = \frac{r}{r^2 + (s^2+z^2)^2} \cos 2sz.$$

On aura pour la seconde

$$P = e^{-sx^2} \cos rx,$$

et, par suite,

$$Z = \sin 2sz \int_0^\infty e^{-(s^2+z^2)x} \cos rx\, dx = \frac{s^2+z^2}{r^2 + (s^2+z^2)^2} \sin 2sz.$$

Cela posé, l'équation (12) fournira les deux suivantes

$$(e'') \quad \left\{ \begin{aligned} \int_0^\infty x^{-\frac{1}{2}} e^{-s^2\left(x+\frac{1}{x}\right)} \sin rx\, dx &= \frac{2}{\pi^{\frac{1}{2}}} \int_0^\infty \frac{r}{r^2+(s^2+z^2)^2} \cos 2sz\, dz, \\ \int_0^\infty x^{-\frac{1}{2}} e^{-s^2\left(x+\frac{1}{x}\right)} \cos rx\, dx &= \frac{2}{\pi^{\frac{1}{2}}} \int_0^\infty \frac{s^2+z^2}{r^2+(s^2+z^2)^2} \sin 2sz\, dz. \end{aligned} \right.$$

Pour obtenir en termes finis les valeurs de E et de F, il ne reste plus qu'à déterminer les valeurs des intégrales

$$\int_0^\infty \frac{\cos 2sz}{r^2+(s^2+z^2)^2} dz, \quad \int_0^\infty \frac{z^2 \cos 2sz}{r^2+(s^2+z^2)^2} dz.$$

D'ailleurs, si l'on fait

$$\int_0^\infty \frac{\cos 2sz}{r^2+(s^2+z^2)^2} dz = K,$$

on aura

$$\int_0^\infty \frac{z^2 \cos 2sz}{r^2+(s^2+z^2)^2} dz = -\frac{1}{4} \frac{d^2K}{ds^2}.$$

Tout le problème se réduit donc à la recherche de l'intégrale désignée par K. On obtiendra facilement la valeur de cette intégrale soit par les méthodes connues, soit par celles que nous avons exposées dans le

précédent Mémoire; et si l'on fait, pour abréger,

$$(f'') \quad \left\{ \begin{aligned} 2\alpha &= \left[(r^2+s^4)^{\frac{1}{2}}+r\right]^{\frac{1}{2}} - \left[(r^2+s^4)^{\frac{1}{2}}-r\right]^{\frac{1}{2}}, \\ 2\beta &= \left[(r^2+s^4)^{\frac{1}{2}}+r\right]^{\frac{1}{2}} + \left[(r^2+s^4)^{\frac{1}{2}}-r\right]^{\frac{1}{2}}, \end{aligned} \right.$$

on trouvera

$$K = \int_0^\infty \frac{\cos 2sz}{r^2+(s^2+z^2)^2} dz = \frac{\pi e^{-2\beta s}}{2r(r^2+s^4)^{\frac{1}{2}}} (\beta \sin 2\alpha s + \alpha \cos 2\alpha s).$$

Cela posé, les équations (e'') donneront

$$(g'') \quad \left\{ \begin{aligned} \int_0^\infty x^{-\frac{1}{2}} e^{-s^2\left(x+\frac{1}{x}\right)} \sin rx\, dx &= \frac{\pi^{\frac{1}{2}} e^{-2\beta s}}{(r^2+s^4)^{\frac{1}{2}}} (\beta \sin 2\alpha s + \alpha \cos 2\alpha s), \\ \int_0^\infty x^{-\frac{1}{2}} e^{-s^2\left(x+\frac{1}{x}\right)} \cos rx\, dx &= \frac{\pi^{\frac{1}{2}} e^{-2\beta s}}{r(r^2+s^4)^{\frac{1}{2}}} [(\alpha s^2 + \alpha\beta^2 - \alpha^2\beta) \cos 2\alpha s \\ &\quad + (\beta s^2 - \alpha^3 - \beta^3) \sin 2\alpha s]. \end{aligned} \right.$$

Corollaire I. — Si dans les équations (g'') on suppose r très petit, on aura, en s'arrêtant aux quantités du premier ordre,

$$\sin rx = rx, \qquad \cos rx = 1,$$

$$(r^2+s^4)^{\frac{1}{2}} = s^2, \qquad \alpha = \frac{r}{2s}, \qquad \beta = s, \qquad \sin 2\alpha s = r, \qquad \cos 2\alpha s = 1;$$

et, par suite, les équations (g'') deviendront

$$(h'') \quad \left\{ \begin{aligned} \int_0^\infty x^{\frac{1}{2}} e^{-s^2\left(x+\frac{1}{x}\right)} dx &= \frac{\pi^{\frac{1}{2}} e^{-2s^2}}{s} \left(1 + \frac{1}{2s^2}\right), \\ \int_0^\infty x^{-\frac{1}{2}} e^{-s^2\left(x+\frac{1}{x}\right)} dx &= \frac{\pi^{\frac{1}{2}} e^{-2s^2}}{s}. \end{aligned} \right.$$

Ces dernières équations s'accordent avec les formules connues. On pourrait les obtenir directement en supposant successivement dans les équations (11) et (12)

$$P = xe^{-s^2x},$$
$$P = e^{-s^2x}.$$

Corollaire II. — On peut déduire des équations (g'') plusieurs conséquences remarquables. Ainsi, par exemple, si l'on différentie les deux membres de chacune d'elles m fois par rapport à r, et n fois par rapport à s^2, on obtiendra les valeurs des intégrales définies

$$(i'') \quad \left\{ \begin{aligned} &\int_0^\infty x^{m-\frac{1}{2}}\left(x+\frac{1}{x}\right)^n e^{-s^2\left(x+\frac{1}{x}\right)} \sin rx\, dx, \\ &\int_0^\infty x^{m-\frac{1}{2}}\left(x+\frac{1}{x}\right)^n e^{-s^2\left(x+\frac{1}{x}\right)} \cos rx\, dx. \end{aligned} \right.$$

Si dans la dernière on suppose $r = 0$, $n = 0$, on obtiendra l'intégrale

$$\int x^{m-\frac{1}{2}} e^{-s^2\left(x+\frac{1}{x}\right)}\, dx,$$

dont la valeur est déjà connue : *voir* les *Exercices de Calcul intégral* (III^e Partie, p. 366).

§ V. — *Quatrième application.*

Soit

$$\mathrm{X} = \mathrm{P} \operatorname{arc\,tang} \frac{m}{x},$$

on aura

$$(13) \qquad \operatorname{arc\,tang} \frac{m}{x} = \int_0^\infty \frac{e^{-xz} \sin mz}{z}\, dz;$$

et, par suite, si l'on fait

$$(14) \qquad \mathrm{Z} = \frac{\sin mz}{z} \int_0^\infty \mathrm{P} e^{-xz}\, dx,$$

on trouvera

$$(15) \qquad \int_0^\infty \mathrm{P} \operatorname{arc\,tang} \frac{m}{x}\, dx = \int_0^\infty \mathrm{Z}\, dz.$$

Exemple. — Si l'on fait $\mathrm{P} = \sin rx$, on aura

$$(k'') \qquad \int_0^\infty \operatorname{arc\,tang} \frac{m}{x} \sin rx\, dx = \int_0^\infty \frac{r \sin mz}{z(r^2+z^2)}\, dz = \frac{\pi}{2r}(1 - e^{-mr}).$$

Il est aisé de vérifier cette dernière équation par les méthodes connues.

§ VI. — *Cinquième application.*

Soit (¹)

$$\mathrm{X} = \mathrm{P} \log \frac{1}{x}.$$

On aura

$$(16) \qquad \log \frac{1}{x} = \int_0^\infty \frac{e^{-xz} - e^{-z}}{z}\, dz.$$

De plus, si l'on désigne par c la constante dont Euler fait mention à la page 444 de son *Calcul différentiel*, et dont la valeur approchée est $0,577216\ldots$, on aura

$$(17) \qquad 0 = c + \int_0^\infty \frac{e^{-z} - \dfrac{1}{1+z}}{z}\, dz.$$

Cela posé, si l'on ajoute l'équation (17) à l'équation (16), on trouvera

$$(18) \qquad \log \frac{1}{x} = c + \int_0^\infty \frac{e^{-xz} - \dfrac{1}{1+z}}{z}\, dz;$$

et, par suite, si l'on fait

$$(19) \qquad \mathrm{Z} = \frac{1}{z}\left(\int_0^\infty \mathrm{P} e^{-xz}\, dx - \frac{1}{1+z}\int_0^\infty \mathrm{P}\, dx\right),$$

on aura

$$(20) \qquad \int_0^\infty \mathrm{P} \log \frac{1}{x}\, dx = \int_0^\infty \mathrm{Z}\, dz + c \int_0^\infty \mathrm{P}\, dx.$$

Exemple I. — Soit

$$\mathrm{P} = x^{n-1} e^{-x};$$

les équations (19) et (20) deviendront

$$(l'') \qquad \mathrm{Z} = \frac{\Gamma(n)}{z}\left[\frac{1}{(1+z)^n} + \frac{1}{1+z}\right],$$

$$(m'') \qquad \int_0^\infty x^{n-1} e^{-x} \log \frac{1}{x}\, dx = \left\{ c - \int_0^\infty \left[\frac{1}{1+z} - \frac{1}{(1+z)^n}\right] \frac{dz}{z} \right\} \Gamma(n).$$

(¹) Ici, comme dans le paragraphe II, l'abréviation log, ou même la lettre initiale l, est employée pour indiquer un logarithme népérien.

D'ailleurs, si l'on fait $1 + z = \frac{1}{t}$, on trouvera

$$\int_0^\infty \left[\frac{1}{1+z} - \frac{1}{(1+z)^n}\right]\frac{dz}{z} = \int_0^1 \frac{1 - t^{n-1}}{1-t}\,dt.$$

On pourra donc présenter l'équation (m'') sous la forme suivante

$$(n'') \qquad \int_0^\infty x^{n-1}e^{-x}\log\frac{1}{x}\,dx = \Gamma(n)\left(c - \int_0^1 \frac{1-t^{n-1}}{1-t}\,dt\right).$$

Corollaire I. — $\Gamma(n)$ étant égal à $\int_0^\infty x^{n-1}e^{-x}\,dx$, on a

$$\int_0^\infty x^{n-1}e^{-x}\log\frac{1}{x}\,dx = -\frac{d\Gamma(n)}{dn}.$$

Il est aisé d'en conclure que l'équation (n'') équivaut à cette autre

$$(o'') \qquad \frac{d\,\mathrm{l}\,\Gamma(n)}{dn} = -c + \int_0^1 \frac{1-t^{n-1}}{1-t}\,dt.$$

Cette dernière formule coïncide avec celle qu'a donnée M. Legendre [IVe Partie des *Exercices de Calcul intégral* (1), p. 45].

(1) La formule (o'') a été, il est vrai, donnée en 1814 par M. Legendre; mais dès 1812 M. Gauss avait formé l'équation

$$\frac{d\,\mathrm{l}\,\Gamma(n)}{dn} = -\int_0^1 \left(\frac{1}{\mathrm{l}t} + \frac{t^{n-1}}{1-t}\right)dt,$$

et reconnu que, pour $n = 1$, le second membre de cette équation représente, au signe près, la constante c d'Euler. Effectivement, on déduit sans peine de la formule (17) l'équation connue

$$c = \int_0^1 \left(\frac{1}{\mathrm{l}t} + \frac{1}{1-t}\right)dt,$$

qui, combinée avec la précédente par voie d'addition, donne

$$\frac{d\,\mathrm{l}\,\Gamma(n)}{dn} + c = \int_0^1 \frac{1-t^{n-1}}{1-t}\,dt.$$

Ainsi la formule obtenue par M. Legendre ne diffère pas de celle de M. Gauss, qui paraît avoir considéré le premier, sous forme d'intégrale définie, la quantité $\frac{d\,\mathrm{l}\,\Gamma(n)}{dn}$. Euler, en s'occupant des mêmes intégrales définies, n'avait pas observé qu'elles fournissaient les différentielles de la fonction $\Gamma(n)$ qu'il dénotait quelquefois par $[n-1]$.

Corollaire II. — Si l'on fait

$$\mathrm{A} = \int_0^\infty \frac{x^{n-1}\,dx}{(1+x)^m}, \qquad n \text{ étant } < m,$$

on aura

$$\mathrm{A} = \frac{\Gamma(n)\,\Gamma(m-n)}{\Gamma(m)};$$

et, par suite,

$$\mathrm{l}(\mathrm{A}) = \mathrm{l}\,\Gamma(n) + \mathrm{l}\,\Gamma(m-n) - \mathrm{l}\,\Gamma(m).$$

Si l'on différentie successivement les deux membres de cette dernière équation par rapport à n et par rapport à m, eu égard à la formule (o''), on obtiendra les deux équations

$$\frac{\partial\,\mathrm{l}\,\mathrm{A}}{\partial n} = \int_0^1 \frac{t^{m-n-1} - t^{n-1}}{1-t}\,dt,$$

$$\frac{\partial\,\mathrm{l}\,\mathrm{A}}{\partial m} = \int_0^1 \frac{t^{m-1} - t^{m-n-1}}{1-t}\,dt,$$

qu'on peut aussi mettre sous la forme suivante

$$(p'') \quad \begin{cases} \displaystyle\int_0^\infty \frac{x^{n-1}}{(1+x)^m}\log\frac{1}{x}\,dx = \int_0^\infty \frac{x^{n-1}}{(1+x)^m}\,dx \int_0^1 \frac{t^{n-1} - t^{m-n-1}}{1-t}\,dt, \\ \displaystyle\int_0^\infty \frac{x^{n-1}}{(1+x)^m}\log\frac{1}{1+x}\,dx = \int_0^\infty \frac{x^{n-1}}{(1+x)^m}\,dx \int_0^1 \frac{t^{m-1} - t^{m-n-1}}{1-t}\,dt. \end{cases}$$

On peut encore déduire de ces dernières la formule

$$(q'') \qquad \int_0^\infty \frac{x^{n-1}}{(1+x)^m}\log\frac{1+x}{x}\,dx = \int_0^\infty \frac{x^{n-1}}{(1+x)^m}\,dx \int_0^1 \frac{t^{n-1} - t^{m-1}}{1-t}\,dt.$$

Corollaire III. — Soit

$$\mathrm{B} = \int_0^1 \frac{t^{p-1}\,dt}{(1-t^n)^{1-\frac{q}{n}}},$$

on aura

$$\mathrm{B} = \frac{1}{n}\,\frac{\Gamma\left(\frac{p}{n}\right)\Gamma\left(\frac{q}{n}\right)}{\Gamma\left(\frac{p+q}{n}\right)},$$

d'où l'on conclut

$$\mathrm{l}\mathrm{B} = \mathrm{l}\left(\frac{1}{n}\right) + \mathrm{l}\Gamma\left(\frac{p}{n}\right) + \mathrm{l}\Gamma\left(\frac{q}{n}\right) - \mathrm{l}\Gamma\left(\frac{p+q}{n}\right).$$

Si l'on différentie cette dernière équation par rapport à p, en ayant égard à la formule (o''), on trouvera facilement la suivante

$$(r'') \qquad \int_0^1 \frac{t^{p-1}}{(1-t^n)^{1-\frac{q}{n}}} \log\frac{1}{t}\,dt = \int_0^1 \frac{t^{p-1}}{(1-t^n)^{1-\frac{q}{n}}}\,dt \int_0^1 \frac{1-t^q}{1-t^n}\,t^{p+n-1}\,dt.$$

Cette dernière formule est l'expression d'un théorème donné par Euler (t. IV du *Calcul intégral*, p. 166); *voir* aussi les *Exercices de Calcul intégral* de M. Legendre (IIe Partie, p. 259).

Remarque. — La valeur générale de Z, donnée par l'équation (19), est la différence des deux quantités

$$\frac{1}{z}\int_0^\infty \mathrm{P}\,e^{-xz}\,dx, \qquad \frac{1}{z(1+z)}\int_0^\infty \mathrm{P}\,dx,$$

dont chacune devient infinie du premier ordre lorsqu'on suppose $z = 0$. Par suite l'intégrale

$$\int_0^\infty \mathrm{Z}\,dz$$

est elle-même la différence de deux intégrales qui, étant toutes deux infinies, ne peuvent être calculées indépendamment l'une de l'autre. On lèvera cette difficulté si l'on fait

$$(21) \qquad \mathrm{Z} = \frac{1}{z^{1-\alpha}}\left(\int_0^\infty \mathrm{P}\,e^{-xz}\,dx - \frac{1}{1+z}\int_0^\infty \mathrm{P}\,dx\right),$$

α étant une quantité très petite. Dans cette dernière hypothèse on pourra déterminer séparément chacune des deux parties de l'intégrale $\int_0^\infty \mathrm{Z}\,dz$. Mais, après les avoir retranchées l'une de l'autre, on devra supposer dans le résultat $\alpha = 0$. Appliquons ce procédé à un exemple.

Exemple II. — Soit proposé de déterminer les valeurs des intégrales

$$\int_0^\infty x^{n-1}e^{-sx}\cos rx\log\frac{1}{x}\,dx,$$

$$\int_0^\infty x^{n-1}e^{-sx}\sin rx\log\frac{1}{x}\,dx.$$

Dans le cas présent la valeur de Z, déduite de l'équation (21), sera pour la première intégrale

$$(s'') \qquad \begin{cases} \mathrm{Z} = \dfrac{\Gamma(n)}{z^{1-\alpha}}\Bigg[\dfrac{(s+z-r\sqrt{-1})^{-n}+(s+z+r\sqrt{-1})^{-n}}{2} \\[2ex] \qquad\qquad + \dfrac{1}{1+z}\,\dfrac{(s-r\sqrt{-1})^{-n}+(s+r\sqrt{-1})^{-n}}{2}\Bigg]. \end{cases}$$

On a d'ailleurs

$$\int_0^\infty \frac{(s+z-r\sqrt{-1})^{-n}+(s+z+r\sqrt{-1})^{-n}}{z}\,\frac{dz}{z^{1-\alpha}}$$
$$= \frac{(s-r\sqrt{-1})^{-n+\alpha}+(s+r\sqrt{-1})^{-n+\alpha}}{z}\int_0^\infty \frac{z^{\alpha-1}\,dz}{(1+z)^n}.$$

De plus, si l'on fait, pour abréger,

$$\frac{r}{s} = \operatorname{tang}\theta, \qquad r^2+s^2=k^2,$$

on aura

$$\frac{(s-r\sqrt{-1})^{-n+\alpha}+(s+r\sqrt{-1})^{-n+\alpha}}{z}$$
$$= k^{-n}[\cos n\theta + \alpha(\cos n\theta\,\mathrm{l}k + \theta\sin n\theta)+\ldots];$$

Cela posé, on trouvera

$$(t'') \qquad \begin{cases} \displaystyle\int_0^\infty \mathrm{Z}\,dz = k^{-n}\,\Gamma(n)\cos n\theta\left[\int_0^\infty \frac{z^{\alpha-1}}{(1+z)^n}\,dz - \int_0^\infty \frac{z^{-1}\,dz}{1+z}\right] \\[2ex] \displaystyle\qquad + \alpha k^{-n}\,\Gamma(n)(\cos n\theta\,\mathrm{l}k+\theta\sin n\theta)\int_0^\infty \frac{z^{\alpha-1}\,dz}{(1+z)^n} \\ \qquad + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

Si dans cette dernière équation on suppose α très petit, on aura à très peu près

$$\int_0^\infty \frac{z^{\alpha-1}\,dz}{(1+z)^n} = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(n-\alpha)}{\Gamma(n)} = \Gamma(\alpha) = \frac{1}{\alpha},$$

$$\int_0^\infty \frac{z^{\alpha-1}\,dz}{(1+z)^n} - \int_0^\infty \frac{z^{-1}\,dz}{1+z} = -\int_0^1 \frac{1-t^{n-1}}{1-t}\,dt;$$

et, par suite, l'équation (t'') deviendra

$$\int_0^\infty Z\,dz = \frac{\Gamma(n)}{k^n}\left[\cos n\theta\left(\mathrm{l}k - \int_0^1 \frac{1-t^{n-1}}{1-t}\,dt\right) + \theta \sin n\theta\right].$$

On trouvera de même pour la seconde intégrale proposée

$$\int_0^\infty Z\,dz = \frac{\Gamma(n)}{k^n}\left[\sin n\theta\left(\mathrm{l}k - \int_0^1 \frac{1-t^{n-1}}{1-t}\,dt\right) - \theta \cos n\theta\right].$$

Enfin on a, en vertu des équations (r) trouvées ci-dessus (§ II),

$$\int_0^\infty x^{n-1}e^{-sx}\cos rx\,dx = \frac{\cos n\theta}{k^n}\Gamma(n),$$

$$\int_0^\infty x^{n-1}e^{-sx}\sin rx\,dx = \frac{\sin n\theta}{k^n}\Gamma(n).$$

Donc, si dans l'équation (20) on fait successivement

$$P = x^{n-1}e^{-sx}\cos rx,$$

$$P = x^{n-1}e^{-sx}\sin rx,$$

on obtiendra les deux formules suivantes

$$(u'')\quad \begin{cases} \displaystyle\int_0^\infty x^{n-1}e^{-sx}\cos rx \log\frac{1}{x}\,dx = \frac{\Gamma(n)}{k^n}\left[\cos n\theta\left(c + \mathrm{l}k - \int_0^1 \frac{1-t^{n-1}}{1-t}\,dt\right) + \theta\sin n\theta\right], \\ \displaystyle\int_0^\infty x^{n-1}e^{-sx}\sin rx \log\frac{1}{x}\,dx = \frac{\Gamma(n)}{k^n}\left[\sin n\theta\left(c + \mathrm{l}k - \int_0^1 \frac{1-t^{n-1}}{1-t}\,dt\right) - \theta\cos n\theta\right], \end{cases}$$

θ et k étant déterminés par les deux équations

$$(v'')\quad \begin{cases} k = (r^2+s^2)^{\frac{1}{2}}, \\ \theta = \operatorname{arc\,tang}\dfrac{r}{s}. \end{cases}$$

Corollaire I. — Si dans la première des équations (u'') on fait $r = 0$, on aura

$$\theta = 0, \qquad k = s,$$

et, par suite,

$$(w'')\quad \int_0^\infty x^{n-1}e^{-sx}\log\frac{1}{x}\,dx = \frac{\Gamma(n)}{s^n}\left(c + \mathrm{l}s - \int_0^1 \frac{1-t^{n-1}}{1-t}\,dt\right).$$

Si dans cette dernière on fait $s = 1$, on retrouvera la formule (n'').

Corollaire II. — Si dans l'équation (w'') on fait, pour abréger,

$$c - \int_0^1 \frac{1-t^{n-1}}{1-t}\,dt = \mathrm{N},$$

et si l'on y remplace $\mathrm{N}\frac{\Gamma(n)}{s^n}$ par $\mathrm{N}\int_0^\infty x^{n-1}e^{-sx}\,dx$, on aura

$$(x'')\quad \int_0^\infty x^{n-1}e^{-sx}\left(\log\frac{1}{x} - \mathrm{N}\right)dx = \Gamma(n)\frac{\mathrm{l}s}{s^n}.$$

Si l'on prend la différence finie $m^{\text{ième}}$ de chacun des membres de cette dernière équation relativement à s, on obtiendra la formule

$$(y'')\quad \int_0^\infty x^{n-1}e^{-sx}(e^{-x}-1)^m\left(\log\frac{1}{x} - \mathrm{N}\right)dx = \Gamma(n)\,\Delta^m\left(\frac{\mathrm{l}s}{s^n}\right).$$

Il serait facile de prouver que cette formule subsiste dans le cas où n devient négatif et égal à $-a$. Dans le même cas, on doit remplacer $\Gamma(n)$ par $-\frac{\pi}{\Gamma(a+1)\sin a\pi}$. On a donc généralement

$$(z'')\quad \int_0^\infty e^{-sx}(e^{-x}-1)^m\left(\log\frac{1}{x} - \mathrm{N}\right)\frac{dx}{x^{a+1}} = -\frac{\pi}{\Gamma(a+1)\sin a\pi}\Delta^m(s^a \log s),$$

a étant un nombre positif quelconque inférieur à m.

DEUXIÈME PARTIE.

SUR UNE FORMULE GÉNÉRALE RELATIVE A LA TRANSFORMATION DES INTÉGRALES SIMPLES PRISES ENTRE LES LIMITES O ET ∞ DE LA VARIABLE.

THÉORÈME. — *Soit* $F(x)$ *une fonction quelconque de* x, *telle qu'on puisse obtenir en termes finis la valeur de l'intégrale*

$$\int_0^\infty x^{2n} F(x^2)\, dx = A_{2n}, \tag{1}$$

pour toute les valeurs entières et positives de la constante n. *On pourra toujours en déduire la valeur de l'intégrale*

$$\int_0^\infty x^{2n} F\left(x - \frac{1}{x}\right)^2 dx = C_{2n}, \tag{2}$$

prise entre les mêmes limites, ainsi qu'on va le faire voir.

Démonstration. — Si l'on suppose l'intégrale

$$\int z^{2n} F(z^2)\, dz$$

prise entre les limites $z = -\infty$, $z = \infty$, on aura

$$\int_{-\infty}^{\infty} z^{2n} F(z^2)\, dz = 2A_{2n}. \tag{3}$$

Si dans cette dernière équation on fait

$$z = x - \frac{1}{x},$$

elle deviendra

$$\int_0^\infty \left(x - \frac{1}{x}\right)^{2n} \left(x + \frac{1}{x}\right) F\left(x - \frac{1}{x}\right)^2 \frac{dx}{x} = 2A_{2n}; \tag{4}$$

la nouvelle intégrale étant prise entre les limites $x = 0$, $x = \infty$.

Il est d'ailleurs facile de voir qu'on a

$$\int_0^\infty \frac{1}{x^{2n+1}} F\left(x - \frac{1}{x}\right)^2 \frac{dx}{x} = \int_0^\infty x^{2n+1} F\left(x - \frac{1}{x}\right)^2 \frac{dx}{x} = C_{2n};$$

et, par suite,

$$\int_0^\infty \left(x^{2n+1} + \frac{1}{x^{2n+1}}\right) F\left(x - \frac{1}{x}\right)^2 \frac{dx}{x} = 2C_{2n}. \tag{5}$$

Enfin on a généralement

$$\left\{\begin{aligned} \cos(2n+1)u = \cos u \Big[1 &- \frac{(2n+2)2n}{1.2} \sin^2 u \\ &+ \frac{(2n+4)(2n+2)2n(2n-2)}{1.2.3.4} \sin^4 u - \ldots \Big]. \end{aligned}\right. \tag{6}$$

Si dans cette dernière formule on fait

$$e^{u\sqrt{-1}} = x,$$

on trouvera

$$\sin u = \frac{x - \frac{1}{x}}{2\sqrt{-1}}, \qquad \cos u = \frac{x + \frac{1}{x}}{2}, \qquad \cos(2n+1)u = \frac{x^{2n+1} + \frac{1}{x^{2n+1}}}{2};$$

et, par suite,

$$\left\{\begin{aligned} x^{2n+1} + \frac{1}{x^{2n+1}} = \left(x + \frac{1}{x}\right) \Big[1 &+ \frac{(n+1)n}{1.2} \left(x - \frac{1}{x}\right)^2 \\ &+ \frac{(n+2)(n+1)n(n-1)}{1.2.3.4} \left(x - \frac{1}{x}\right)^4 + \ldots \Big]. \end{aligned}\right. \tag{7}$$

Si maintenant on multiplie les deux membres de l'équation (7) par $F\left(x - \frac{1}{x}\right)^2 \frac{dx}{x}$, et qu'on intègre de part et d'autre entre les limites $x = 0$, $x = \infty$, en ayant égard aux équations (4) et (5), on obtiendra la formule suivante

$$\left\{\begin{aligned} C_{2n} = A_0 &+ \frac{(n+1)n}{1.2} A_2 + \frac{(n+2)(n+1)n(n-1)}{1.2.3.4} A_4 + \ldots \\ &+ \frac{(2n-2)(2n-3)}{1.2} A_{2n-4} + \frac{2n-1}{1} A_{2n-2} + A_{2n}. \end{aligned}\right. \tag{8}$$

Cette formule déterminera la valeur de C_{2n} toutes les fois que celles de A_0, A_2, A_4, ..., A_{2n} seront connues. On peut remarquer que le coefficient de A_{2m} y est égal à

$$\frac{(n+m)(n+m-1)\ldots(n-m+1)}{1.2.3\ldots.2m} = \frac{(2m+1)(2m+2)\ldots(n+m)}{1.2.3\ldots.(n-m)}.$$

Exemple I. — Soit

$$F(x) = e^{-sx}.$$

On trouvera

$$A_{2m} = \int_0^\infty x^{2m} e^{-sx^2}\,dx = \frac{1.2.3\ldots.(2m-1)}{2^{m+1}s^{m+\frac{1}{2}}}\pi^{\frac{1}{2}}, \qquad A_0 = \int_0^\infty e^{-sx^2}\,dx = \frac{\pi^{\frac{1}{2}}}{2s^{\frac{1}{2}}};$$

et, par suite,

$$(a) \qquad A_{2m} = \frac{1.2.3\ldots.(2m-1)}{(2s)^m}A_0.$$

On aura de plus

$$(b) \qquad C_{2n} = \int_0^\infty x^{2n} e^{-s\left(x-\frac{1}{x}\right)^2}\,dx = e^{2s}\int_0^\infty x^{2n} e^{-s\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)}\,dx.$$

Cela posé, la formule (8) deviendra

$$(c) \quad \begin{cases} \displaystyle\int_0^\infty x^{2n} e^{-s\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)}\,dx \\ \displaystyle\quad = \frac{\pi^{\frac{1}{2}}e^{-2s}}{2s^{\frac{1}{2}}}\left[1 + \frac{(n+1)n}{2}\left(\frac{1}{2s}\right) + \frac{(n+2)(n+1)n(n-1)}{2.4}\left(\frac{1}{2s}\right)^2 + \ldots\right]. \end{cases}$$

Si dans cette dernière formule on change x en $x^{\frac{1}{2}}$, n en k, et s en n, on obtiendra précisément celle qu'a donnée M. Legendre dans ses *Exercices de Calcul intégral* (IIIe Partie, p. 366), et dont les équations (i''), trouvées ci-dessus (Ire Partie), n'offrent que des cas particuliers.

Exemple II. — Si l'on fait successivement

$$F(x) = e^{-sx}\sin rx,$$
$$F(x) = e^{-sx}\cos rx,$$

on déduira de la formule (8) les valeurs des intégrales

$$\int_0^\infty x^{2n} e^{-s\left(x-\frac{1}{x}\right)^2}\sin r\left(x-\frac{1}{x}\right)^2 dx,$$
$$\int_0^\infty x^{2n} e^{-s\left(x-\frac{1}{x}\right)^2}\cos r\left(x-\frac{1}{x}\right)^2 dx;$$

et, par suite, celles des intégrales

$$(d) \quad \begin{cases} \displaystyle\int_0^\infty x^{2n} e^{-s\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)}\sin r\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right) dx, \\ \displaystyle\int_0^\infty x^{2n} e^{-s\left(x^2-\frac{1}{x^2}\right)}\cos r\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right) dx. \end{cases}$$

Ces dernières sont entièrement semblables à celles que nous avons considérées dans le précédent Mémoire (Ire Partie, § III, exemple III). Si dans les mêmes intégrales on fait $n=0$, $s=0$, et que l'on change ensuite r en s et x en $x^{\frac{1}{2}}$, on obtiendra celles qui forment les premiers membres des équations (t'), divisées chacune par le nombre 2.

Exemple III. — Si l'on fait

$$F(x^2) = e^{-sx^2}\cos rx,$$

on déduira facilement de l'équation (8) la valeur de l'intégrale

$$\int_0^\infty x^{2n} e^{-s\left(x-\frac{1}{x}\right)^2}\cos r\left(x-\frac{1}{x}\right) dx,$$

et, par suite, celle de l'intégrale

$$\int_0^\infty x^{2n} e^{-s\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)}\cos r\left(x-\frac{1}{x}\right) dx.$$

TROISIÈME PARTIE.

SUR LA TRANSFORMATION DES DIFFÉRENCES FINIES DES PUISSANCES EN INTÉGRALES DÉFINIES.

---

§ I. — *Sur la transformation de la différence finie $\Delta^m s^{-a}$ en intégrale définie, s et a étant des nombres positifs pris à volonté.*

Pour transformer la différence finie $\Delta^m s^{-a}$ en intégrale définie, il faut commencer par transformer de la même manière la quantité s^{-a}. Soit en conséquence

$$s^{-a} = A \int X\,dx, \tag{1}$$

A étant une constante, X une fonction inconnue de x et de s, et $\int X\,dx$ une intégrale définie, que nous supposerons, pour plus de simplicité, prise entre les limites $x = 0$, $x = \infty$. On aura entre les mêmes limites

$$\Delta^m s^{-a} = A \int_0^\infty \Delta^m X\,dx. \tag{2}$$

Il ne reste plus maintenant qu'à déterminer X de manière que l'on puisse obtenir facilement la différence finie $\Delta^m X$, et que l'on ait de plus

$$s^{-a} = A \int_0^\infty X\,dx.$$

On satisfera à la première condition si l'on fait

$$X = P e^{-sQ},$$

P et Q étant deux fonctions de x. On satisfera à la seconde condition si l'on suppose

$$P = x^{a-1}, \qquad Q = x.$$

On trouvera dans cette hypothèse

$$\int_0^\infty X\,dx = \int_0^\infty x^{a-1} e^{-sx}\,dx = s^{-a} \int_0^\infty x^{a-1} e^{-x}\,dx = s^{-a}\,\Gamma(a).$$

Cela posé, l'équation (1) deviendra

$$s^{-a} = \frac{1}{\Gamma(a)} \int_0^\infty x^{a-1} e^{-sx}\,dx; \tag{3}$$

et comme l'on a

$$\Delta^m e^{-sx} = e^{-sx}(e^{-x} - 1)^m,$$

l'équation (2) se trouvera réduite à

$$\Delta^m(s^{-a}) = \frac{1}{\Gamma(a)} \int_0^\infty e^{-sx}(e^{-x} - 1)^m x^{a-1}\,dx. \tag{4}$$

Cette dernière formule était déjà connue; elle fournit une solution du problème. Mais on peut de cette première solution en déduire une infinité d'autres, comme on va le faire voir.

Soit, pour abréger,

$$e^{-sx}(e^{-x} - 1)^m = p,$$

et supposons que la substitution de $\alpha x + 6x\sqrt{-1}$, au lieu de x, change

$$p \quad \text{en} \quad P' - P''\sqrt{-1}.$$

Si l'on fait

$$\frac{6}{\alpha} = \operatorname{tang}\theta,$$

on aura, en vertu des formules démontrées dans le Mémoire précédent [*Mémoire sur les intégrales définies*, lu à l'Institut le 22 août 1814, Ire Partie, § III, théorème IV [1]],

$$\int_0^\infty P' x^{a-1}\,dx = \frac{\cos a\theta}{(\alpha^2 + 6^2)^{\frac{a}{2}}} \int_0^\infty p x^{a-1}\,dx,$$

$$\int_0^\infty P'' x^{a-1}\,dx = \frac{\sin a\theta}{(\alpha^2 + 6^2)^{\frac{a}{2}}} \int_0^\infty p x^{a-1}\,dx.$$

[1] *Œuvres de Cauchy*, S. I, T. I, p. 352.

D'ailleurs si l'on suppose

$$\frac{e^{-\alpha x}\sin\beta x}{e^{-\alpha x}\cos\beta x - 1} = \operatorname{tang} v,$$

on aura

$$P' = e^{-s\alpha x}(e^{-2\alpha x} - 2e^{-\alpha x}\cos\beta x + 1)^{\frac{m}{2}}\cos(\beta s x + m v),$$

$$P'' = e^{-s\alpha x}(e^{-2\alpha x} - 2e^{-\alpha x}\cos\beta x + 1)^{\frac{m}{2}}\sin(\beta s x + m v).$$

On pourra donc à la formule (4) substituer une quelconque des deux suivantes

$$(5)\quad \begin{cases} \Delta^m s^{-a} = \dfrac{(\alpha^2+\beta^2)^{\frac{m}{2}}}{\Gamma(a)\cos a\theta}\displaystyle\int_0^\infty x^{a-1}e^{-s\alpha x}(e^{-2\alpha x} - 2e^{-\alpha x}\cos\beta x + 1)^{\frac{m}{2}}\cos(\beta s x + m v)\,dx, \\ \Delta^m s^{-a} = \dfrac{(\alpha^2+\beta^2)^{\frac{m}{2}}}{\Gamma(a)\sin a\theta}\displaystyle\int_0^\infty x^{a-1}e^{-s\alpha x}(e^{-2\alpha x} - 2e^{-\alpha x}\cos\beta x + 1)^{\frac{m}{2}}\sin(\beta s x + m v)\,dx. \end{cases}$$

Si dans ces dernières formules on suppose $\alpha = 1$ et β très petit, on aura à très peu près

$$\sin a\theta = a\beta, \qquad \cos a\theta = 1,$$

$$(\alpha^2+\beta^2)^{\frac{m}{2}} = 1, \qquad v = \frac{\beta x e^{-x}}{e^{-x}-1}, \qquad \cos\beta x = 1,$$

$$\cos(\beta s x + m v) = 1, \qquad \sin(\beta s x + m v) = \beta x\left(s + \frac{m e^{-x}}{e^{-x}-1}\right).$$

Cela posé, les formules (5) deviendront

$$\Delta^m s^{-a} = \frac{1}{\Gamma(a)}\int_0^\infty x^{a-1}e^{-sx}(e^{-x}-1)^m\,dx,$$

$$\Delta^m s^{-a} = \frac{1}{\Gamma(a)}\int_0^\infty x^{a}\ e^{-sx}(e^{-x}-1)^m\left(s + \frac{m e^{-x}}{e^{-x}-1}\right)dx.$$

Ces deux dernières formules s'accordent avec l'équation (4). De plus, si on les compare entre elles, on obtiendra l'équation de condition

$$(6)\qquad s\Delta^m s^{-a-1} + m\Delta^{m-1}s^{-a-1} = \Delta^m s^{-a}.$$

Corollaire I. — Si dans l'équation (4) on suppose $a = 1$, on aura

$$\Delta^m \frac{1}{s} = \int_0^\infty e^{-sx}(e^{-x}-1)^m\,dx.$$

On peut aussi obtenir la valeur de $\Delta^m\left(\frac{1}{s}\right)$ au moyen de l'équation que nous avons trouvée ci-dessus (I^re Partie, § I, exemple III, corollaire II)

$$\Delta^m \frac{1}{s} = \frac{\Gamma(m+1)\Gamma(s)}{\Gamma(s+m+1)} = \int_0^\infty \frac{x^m\,dx}{(1+x)^{m+s+1}}.$$

Corollaire II. — Les intégrales définies dans lesquelles nous avons transformé la valeur de $\Delta^m s^{-a}$ sont toutes prises entre les limites $x = 0$, $x = \infty$. Mais, comme leurs éléments décroissent très rapidement à mesure que x augmente, on peut en obtenir des valeurs fort approchées par la méthode des quadratures. On peut aussi, pour rendre l'application de cette méthode plus facile, transformer par la substitution

$$e^{-x} = z,$$

ou, ce qui revient au même,

$$x = l\left(\frac{1}{z}\right),$$

les intégrales proposées en d'autres intégrales relatives à z et qui soient prises entre les limites $z = 0$, $z = 1$.

§ II. — *Sur la transformation de la différence $\Delta^m s^a$ en intégrale définie, s et a étant deux nombres positifs pris à volonté.*

Pour transformer la différence finie $\Delta^m s^a$ en intégrale définie, il faut commencer par transformer de la même manière la quantité s^{-a}. Pour résoudre ce dernier problème, et par suite la question proposée, on peut suivre deux méthodes différentes, que nous allons développer successivement.

Première méthode. — Si l'on suppose

$$a = \lambda + \frac{\mu}{\nu},$$

λ étant le plus grand nombre entier compris dans a, et si dans l'équation (3) (§ I) on remplace a par $1-\frac{\mu}{\nu}$, on trouvera

$$(7)\qquad s^{\frac{\mu}{\nu}-1}=\frac{1}{\Gamma\left(1-\frac{\mu}{\nu}\right)}\int_0^\infty x^{-\frac{\mu}{\nu}}e^{-sx}\,dx.$$

Pour obtenir maintenant la valeur de s^a, exprimée par une intégrale définie, il suffira d'intégrer $\lambda+1$ fois de suite, par rapport à s, les deux membres de l'équation (7). On aura ainsi la formule

$$(8)\qquad \frac{s^{\lambda+\frac{\mu}{\nu}}}{\frac{\mu}{\nu}\left(1+\frac{\mu}{\nu}\right)\cdots\left(\lambda+\frac{\mu}{\nu}\right)}=\frac{(-1)^{\lambda+1}}{\Gamma\left(1-\frac{\mu}{\nu}\right)}\int_0^\infty x^{-\frac{\mu}{\nu}}(e^{-sx}-X_0-sX_1-\ldots-s^\lambda X_\lambda)\frac{dx}{x^{\lambda+1}},$$

l'intégrale relative à x étant toujours prise entre les limites $x=0$, $x=\infty$. Dans cette dernière équation, X_0, X_1, …, X_λ désignent les $\lambda+1$ constantes introduites par les intégrations relatives à s, constantes qui peuvent être des fonctions quelconques de x.

Pour déterminer ces constantes, on observera que le premier membre de l'équation (8), divisé par s^λ, s'évanouit encore pour $s=0$. Le second membre doit donc satisfaire à la même condition; ce qui exige que l'intégrale

$$(9)\qquad \int_0^\infty x^{-\frac{\mu}{\nu}}(e^{-sx}-X_0-sX_1-\ldots-s^\lambda X_\lambda)\frac{dx}{x^{\lambda+1}}$$

et ses coefficients différentiels du premier, du deuxième, etc., enfin du $\lambda^{\text{ième}}$ ordre, pris relativement à s, s'évanouissent pour $s=0$. Cette dernière condition sera remplie, si l'on détermine

$$X_0,\quad X_1,\quad X_2,\quad \ldots,\quad X_\lambda,$$

de manière que la fonction

$$e^{-sx}-X_0-sX_1-\ldots-s^\lambda X_\lambda$$

et ses coefficients différentiels du premier, du deuxième, etc., enfin du $\lambda^{\text{ième}}$ ordre, pris relativement à s, s'évanouissent pour $s=0$; ce

qui revient à faire

$$X_0=1,\qquad X_1=-\frac{x}{1},\qquad X_2=\frac{x^2}{1.2},\qquad \ldots,\qquad X_\lambda=(-1)^\lambda\frac{x^\lambda}{1.2.3\ldots\lambda};$$

et d'ailleurs il est facile de s'assurer que les autres manières de remplir la condition exigée conduiraient toutes à la même valeur de l'intégrale (9). On est donc autorisé à remplacer dans cette dernière intégrale

$$X_0-sX_1-s^2X_2-\ldots-s^\lambda X_\lambda,$$

par

$$1-s\frac{x}{1}+s^2\frac{x^2}{1.2}-\ldots+(-1)^\lambda s^\lambda\frac{x^\lambda}{1.2\ldots\lambda};$$

c'est-à-dire par la partie du développement de e^{-sx} qui renferme des puissances de s et de x inférieures à $\lambda+1$. Si, pour abréger, l'on désigne cette partie par

$$\varphi(sx),$$

$\varphi(x)$ étant la partie du développement de e^{-x} qui renferme des puissances de x inférieures à $\lambda+1$, l'équation (8) deviendra

$$\frac{s^{\lambda+\frac{\mu}{\nu}}}{\frac{\mu}{\nu}\left(1+\frac{\mu}{\nu}\right)\cdots\left(\lambda+\frac{\mu}{\nu}\right)}=\frac{(-1)^{\lambda+1}}{\Gamma\left(1-\frac{\mu}{\nu}\right)}\int_0^\infty\frac{e^{-sx}-\varphi(sx)}{x^{\lambda-\frac{\mu}{\nu}}}\,\frac{dx}{x};$$

et comme on a d'ailleurs

$$\lambda+\frac{\mu}{\nu}=a,\qquad \frac{\mu}{\nu}\left(1+\frac{\mu}{\nu}\right)\cdots\left(\lambda+\frac{\mu}{\nu}\right)=\frac{\Gamma(a+1)}{\Gamma\left(\frac{\mu}{\nu}\right)},$$

$$\frac{(-1)^{\lambda+1}}{\Gamma\left(\frac{\mu}{\nu}\right)\Gamma\left(1-\frac{\mu}{\nu}\right)}=(-1)^{\lambda+1}\frac{\sin\frac{\mu}{\nu}\pi}{\pi}=-\frac{\sin a\pi}{\pi},$$

on trouvera enfin

$$(10)\qquad s^a=-\frac{\sin a\pi\,\Gamma(a+1)}{\pi}\int_0^\infty\frac{e^{-sx}-\varphi(sx)}{x^{a+1}}\,dx\ (^1).$$

(1) Si dans la formule (10) on fait $s=1$, et si l'on a de plus égard à l'équation

$$\Gamma(-a)=-\frac{\pi}{\sin a\pi\,\Gamma(a+1)},$$

Si l'on prend la différence finie $m^{\text{ième}}$ de chacun des membres de l'équation précédente, on obtiendra la formule

$$(11)\qquad \Delta^m s^a = -\frac{\sin a\pi\,\Gamma(a+1)}{\pi}\int_0^\infty \frac{e^{-sx}(e^{-x}-1)^m - \Delta^m \varphi(sx)}{x^{a+1}}\,dx.$$

Dans les applications que l'on peut faire de la formule précédente, il est nécessaire de distinguer deux cas différents, savoir : celui où l'on suppose

$$a < m,$$

et celui où l'on suppose

$$a > m.$$

Premier cas. — Supposons d'abord

$$a < m.$$

On aura, *a fortiori*, $\lambda < m$. Par suite,

$$\varphi(sx) = 1 - \frac{sx}{1} + \frac{s^2x^2}{1.2} - \ldots + (-1)^\lambda \frac{s^\lambda x^\lambda}{1.2.3\ldots..\lambda}.$$

on trouvera

$$\Gamma(-a) = \int_0^\infty \frac{e^{-x} - \varphi(x)}{x^{a+1}}\,dx.$$

On a par ce moyen une expression fort simple de la valeur que reçoit la fonction $\Gamma(a)$, lorsque a devient négatif. De plus, il est facile de voir que, si l'on désigne par X une fonction rationnelle et entière de x, le seul moyen de rendre finie l'intégrale

$$\int_0^\infty \frac{e^{-x} - X}{x^{a+1}}\,dx$$

sera de supposer $X = \varphi(x)$. Enfin, lorsque a est positif, on a

$$\Gamma(a) = \int_0^\infty x^{a-1} e^{-x}\,dx.$$

On conclut aisément de ces diverses remarques que, pour toutes les valeurs possibles soit positives, soit négatives de la quantité a, on aura la formule générale

$$\Gamma(a) = \int_0^\infty x^{a-1}(e^{-x} - X)\,dx,$$

X étant une fonction rationnelle et entière de X, assujettie à la seule condition de rendre finie la valeur de l'intégrale que l'on considère. Cette fonction est toujours nulle, lorsque a est positif. Mais, lorsque a devient négatif, elle est égale à la somme des premiers termes du développement de e^{-x}.

étant une fonction rationnelle et entière de s dans laquelle la plus haute puissance de s est inférieure à m, on aura

$$\Delta^m \varphi(sx) = 0.$$

Ainsi, dans ce cas, la formule (11) se réduira simplement à

$$(12)\qquad \Delta^m s^a = -\frac{\Gamma(a+1)\sin a\pi}{\pi}\int_0^\infty \frac{e^{-sx}(e^{-x}-1)^m}{x^{a+1}}\,dx.$$

Cette dernière formule coïncide parfaitement avec l'équation (m) trouvée ci-dessus (I$^{\text{re}}$ Partie, § II); ce qui confirme l'exactitude de nos calculs.

L'équation (12) fournit, pour le cas où l'on suppose $a < m$, une solution du problème que nous nous étions proposé. Mais on peut de cette solution en déduire une infinité d'autres, ainsi qu'on va le faire voir.

Soient α et β deux constantes arbitraires, et

$$\theta = \operatorname{arc\,tang}\frac{\beta}{\alpha}.$$

Si l'on fait

$$e^{-sx}(e^{-x}-1)^m = q,$$

et si l'on désigne par

$$Q' + Q''\sqrt{-1}$$

ce que devient q lorsqu'on y change x en $\alpha x + \beta x\sqrt{-1}$; on aura

$$\int_0^\infty \frac{Q'}{x^{a+1}}\,dx = (\alpha^2+\beta^2)^{\frac{a}{2}}\cos a\theta \int_0^\infty \frac{q}{x^{a+1}}\,dx,$$

$$\int_0^\infty \frac{Q''}{x^{a+1}}\,dx = (\alpha^2+\beta^2)^{\frac{a}{2}}\sin a\theta \int_0^\infty \frac{q}{x^{a+1}}\,dx.$$

On pourra donc remplacer, dans l'équation (12), l'intégrale définie

$$\int_0^\infty \frac{q\,dx}{x^{a+1}} = \int_0^\infty \frac{e^{-sx}(e^{-x}-1)^m}{x^{a+1}}\,dx$$

par un des deux produits

$$\frac{1}{(\alpha^2+6^2)^{\frac{a}{2}}\cos a\theta}\int_0^\infty \frac{Q'\,dx}{x^{a+1}},$$

$$\frac{1}{(\alpha^2+6^2)^{\frac{a}{2}}\sin a\theta}\int_0^\infty \frac{Q''\,dx}{x^{a+1}}.$$

Supposons, par exemple, $\alpha = 0$, $6 = 2$; on trouvera

$$(\alpha^2+6^2)^{\frac{a}{2}} = 2^a, \qquad \theta = \frac{\pi}{2},$$

$$\frac{\sin a\pi}{\cos a\theta} = 2\sin\frac{a\pi}{2}, \qquad \frac{\sin a\pi}{\sin a\theta} = 2\cos\frac{a\pi}{2}.$$

On aura de plus, si m est pair,

$$\begin{aligned} Q' + Q''\sqrt{-1} &= e^{-2sx\sqrt{-1}}\left(e^{-2x\sqrt{-1}} - 1\right)^m \\ &= (-1)^{\frac{m}{2}} 2^m\left[\cos(2s+m)x - \sqrt{-1}\sin(2s+m)x\right]\sin^m x, \end{aligned}$$

$$Q' = (-1)^{\frac{m}{2}} 2^m \cos(2s+m)x\sin^m x, \qquad Q'' = (-1)^{1+\frac{m}{2}} 2^m \sin(2s+m)x\sin^m x;$$

et, si m est impair,

$$\begin{aligned} Q' + Q''\sqrt{-1} &= e^{-2sx\sqrt{-1}}\left(e^{-2x\sqrt{-1}} - 1\right)^m \\ &= (-1)^{\frac{m+1}{2}} 2^m\sqrt{-1}\left[\cos(2s+m)x - \sqrt{-1}\sin(2s+m)x\right]\sin^m x, \end{aligned}$$

$$Q' = (-1)^{\frac{m+1}{2}} 2^m \sin(2s+m)x\sin^m x, \qquad Q'' = (-1)^{\frac{m+1}{2}} 2^m \cos(2s+m)x\sin^m x.$$

Cela posé, on pourra, si m est pair, substituer à la formule (12) les deux équations

$$(13)\quad \left\{\begin{aligned} \Delta^m s^a &= (-1)^{\frac{m+2}{2}} 2^{m+1}\frac{\Gamma(a+1)\sin\frac{a\pi}{2}}{2^a\pi}\int_0^\infty \frac{\cos(2s+m)x\sin^m x}{x^{a+1}}\,dx, \\ \Delta^m s^a &= (-1)^{\frac{m}{2}} 2^{m+1}\frac{\Gamma(a+1)\cos\frac{a\pi}{2}}{2^a\pi}\int_0^\infty \frac{\sin(2s+m)x\sin^m x}{x^{a+1}}\,dx; \end{aligned}\right.$$

et, si m est impair, les deux suivantes

$$(14)\quad \left\{\begin{aligned} \Delta^m s^a &= (-1)^{\frac{m+1}{2}} 2^{m+1}\frac{\Gamma(a+1)\sin\frac{a\pi}{2}}{2^a\pi}\int_0^\infty \frac{\sin(2s+m)x\sin^m x}{x^{a+1}}\,dx, \\ \Delta^m s^a &= (-1)^{\frac{m+1}{2}} 2^{m+1}\frac{\Gamma(a+1)\cos\frac{a\pi}{2}}{2^a\pi}\int_0^\infty \frac{\cos(2s+m)x\sin^m x}{x^{a+1}}\,dx. \end{aligned}\right.$$

On peut réunir les équations (13) et (14) en un seul groupe, en les mettant sous la forme

$$(15)\quad \left\{\begin{aligned} \Delta^m s^a &= -\frac{2^{m+1}\Gamma(a+1)\sin\frac{a+m}{2}\pi}{2^a\pi}\int_0^\infty \frac{\cos(2s+m)x\sin^m x}{x^{a+1}}\,dx, \\ \Delta^m s^a &= \frac{2^{m+1}\Gamma(a+1)\cos\frac{a+m}{2}\pi}{2^a\pi}\int_0^\infty \frac{\sin(2s+m)x\sin^m x}{x^{a+1}}\,dx. \end{aligned}\right.$$

Si dans ces dernières on change s en $s - \frac{1}{2}m$, et si l'on a égard à l'équation

$$\Delta^m\left(s - \frac{m}{2}\right)^a = \frac{1}{2^a}\Delta^m(2s-m)^a,$$

on obtiendra précisément les formules que nous avons désignées dans la première Partie de ce Mémoire par les lettres (y) et (h').

Second cas. — Supposons maintenant

$$a > m.$$

Alors $\varphi(sx)$ sera une fonction rationnelle et entière de x d'un degré égal ou supérieur à m; et, par suite,

$$\Delta^m \varphi(sx)$$

n'étant plus égal à zéro, l'équation (12) cessera d'être exacte; ce qui d'ailleurs est évident, puisque dans ce cas l'intégrale

$$\int_0^\infty \frac{e^{-sx}(e^{-x}-1)^m}{x^{a+1}}\,dx$$

obtiendra une valeur infinie. Dans le même cas l'équation (11) sera toujours vraie; mais la valeur de la différence finie

$$\Delta^m \varphi(sx),$$

qui entre sous le signe $\int$ dans le second membre de cette équation, dépendra de la quantité

$$\lambda - m,$$

ou, ce qui revient au même, du plus grand nombre entier compris dans $a - m$, ainsi qu'on va le faire voir.

Et d'abord, si l'on suppose $\lambda = m$, on aura

$$\varphi(sx) = 1 - \frac{sx}{1} + \frac{s^2x^2}{1.2} - \ldots + (-1)^m \frac{s^m x^m}{1.2.3\ldots\ldots m},$$

$$\Delta^m \varphi(sx) = (-1)^m x^m;$$

et, par suite, la formule (11) se trouvera réduite à

$$(16) \qquad \Delta^m s^a = -\frac{\Gamma(a+1)\sin a\pi}{\pi} \int \frac{e^{-sx}(e^{-x}-1)^m - (-x)^m}{x^{a+1}}\,dx.$$

Cette dernière formule résoudra la question proposée pour toutes les valeurs de a comprises entre les limites m et $m+1$.

Supposons, en deuxième lieu, $\lambda = m+1$, on aura

$$\varphi(sx) = 1 - \frac{sx}{1} + \frac{s^2x^2}{1.2} - \ldots + (-1)^m \left(\frac{s^m x^m}{1.2\ldots\ldots m} - \frac{s^{m+1}x^{m+1}}{1.2.3\ldots\ldots m+1}\right),$$

$$\Delta^m \varphi(sx) = (-x)^m \left(1 - \frac{2s-m}{2}x\right);$$

et, par suite,

$$(17) \quad \Delta^m s^a = -\frac{\Gamma(a+1)\sin a\pi}{\pi} \int_0^\infty \frac{e^{-sx}(e^{-x}-1)^m - (-x)^m\left(1 - \frac{2s+m}{2}x\right)}{x^{a+1}}\,dx.$$

Cette nouvelle formule résoudra la question proposée pour toutes les valeurs de a comprises entre $m+1$ et $m+2$.

Supposons, en troisième lieu, $\lambda = m+2$; on aura

$$\varphi(sx) = 1 - \frac{sx}{1} + \frac{s^2x^2}{1.2} - \ldots$$
$$+ (-1)^m \left[\frac{s^m x^m}{1.2\ldots\ldots m} - \frac{s^{m+1}x^{m+1}}{1.2\ldots\ldots(m+1)} + \frac{s^{m+2}x^{m+2}}{1.2\ldots\ldots(m+2)} - \ldots\right],$$

$$\Delta^m \varphi(sx) = (-x)^m \left[1 - \frac{2s+m}{2}x + \frac{6s(s+m)+m(3m-1)}{12}x^2\right],$$

et, par suite,

$$(18) \quad \Delta^m s^a = -\frac{\Gamma(a+1)\sin a\pi}{\pi} \int_0^\infty \frac{e^{-sx}(e^{-x}-1)^m - (-x)^m\left[1 - \frac{2s+m}{2}x + \frac{6s(s+m)+m(3m-1)}{12}x^2\right]}{x^{a+1}}\,dx.$$

Cette dernière formule pourra être employée pour toutes les valeurs de a comprises entre $m+2$ et $m+3$.

En continuant de même, on déterminerait successivement pour les diverses valeurs de la quantité désignée par λ les valeurs correspondantes de la fonction $\Delta^m \varphi(sx)$. Mais on peut trouver dans tous les cas possibles la valeur de la même fonction d'une manière plus directe. En effet, $\varphi(sx)$ désignant toujours dans l'Analyse précédente la partie du développement de

$$e^{-sx}$$

qui renferme des puissances de x inférieures à $x^{\lambda+1}$, $\Delta^m \varphi(sx)$ désignera par suite la partie du développement de $\Delta^m e^{-sx}$, ou de

$$e^{-sx}(e^{-x}-1)^m,$$

qui renferme de telles puissances. On a d'ailleurs en général

$$e^{-sx}(e^{-x}-1)^m = (-x)^m \left(1 - \frac{sx}{1} + \frac{s^2x^2}{1.2} - \ldots\right)\left(1 - \frac{x}{1.2} + \frac{x^2}{1.2.3} - \ldots\right)^m.$$

Donc, si l'on fait

$$\Delta^m \varphi(sx) = (-x)^m \psi(x),$$

$\psi(x)$ désignera la partie du produit

$$\left(1 - \frac{sx}{1} + \frac{s^2x^2}{1.2} - \ldots\right)\left(1 - \frac{x}{1.2} + \frac{x^2}{1.2.3} - \ldots\right)^m$$

qui contient des puissances de x inférieures à $x^{\lambda-m+1}$.

On aura donc

$$\psi(x) = 0,$$

si l'on suppose $\lambda < m$;

$$\psi(x) = 1,$$

si $\lambda = m$;

$$\psi(x) = 1 - \frac{2s+m}{2}x,$$

si $\lambda = m+1$;

$$\psi(x) = 1 - \frac{2s+m}{2}x + \frac{6s(s+m)+m(3m-1)}{12}x^2,$$

si $\lambda = m+2$, etc.; et ainsi de suite.

On peut remarquer que, si l'on désigne par X une fonction rationnelle et entière de x, le seul moyen de rendre finie la valeur de l'intégrale

$$\int_0^\infty \frac{e^{-sx}(e^{-x}-1)^m - X}{x^{a+1}}\,dx$$

sera de supposer

$$X = \Delta^m \varphi(sx).$$

Ainsi, pour transformer en intégrale définie la différence finie $\Delta^m s^a$, il suffira de faire en général

$$(19) \qquad \Delta^m s^a = \int_0^\infty \frac{e^{-sx}(e^{-x}-1)^m - X}{x^{a+1}}\,dx,$$

X étant une fonction rationnelle et entière de x, assujettie à la seule condition de rendre finie la valeur de l'intégrale que l'on considère.

La fonction X ou $\Delta^m \varphi(sx)$, ainsi qu'on l'a déjà remarqué, est nulle quand on suppose $a < m$. Mais lorsqu'on suppose $a > m$, le nombre des termes de cette même fonction croît indéfiniment avec la différence $\lambda - m$. C'est pourquoi la formule (19) ne peut être appliquée à la détermination de la différence finie $\Delta^m s^a$ que dans le cas où a est $< m$, et dans celui où a surpasse m d'un petit nombre d'unités. Lorsque la différence $a - m$ est très grande, les calculs qu'exige cette formule deviennent impraticables. On peut obvier à cet inconvénient, en suivant, pour la transformation de la différence finie $\Delta^m s^a$ en intégrale définie, une autre méthode que je vais développer en peu de mots, et

qui s'applique également à toutes les hypothèses que l'on peut faire sur les valeurs relatives des deux quantités a et m.

Seconde méthode. — Si, dans les équations (q') (Ire Partie), on fait $r = s$, $n = a+1$, on obtiendra les deux formules

$$(20) \quad \begin{cases} s^a = \dfrac{2\Gamma(a+1)}{\pi}\displaystyle\int_0^\infty \frac{(k-x\sqrt{-1})^{-(a+1)} + (k+x\sqrt{-1})^{-(a+1)}}{2} e^{ks}\cos sx\,dx, \\ s^a = \dfrac{2\Gamma(a+1)}{\pi}\displaystyle\int_0^\infty \frac{(k-x\sqrt{-1})^{-(a+1)} - (k+x\sqrt{-1})^{-(a+1)}}{2\sqrt{-1}} e^{ks}\sin sx\,dx. \end{cases}$$

Pour débarrasser ces formules d'imaginaires, il suffira de faire

$$k = p\cos t, \qquad x = p\sin t,$$

p et t étant deux nouvelles fonctions de x. On aura alors

$$(21) \quad \begin{cases} \dfrac{(k-x\sqrt{-1})^{-(a+1)} + (k+x\sqrt{-1})^{-(a+1)}}{2} = p^{-(a+1)}\cos(a+1)t, \\ \dfrac{(k-x\sqrt{-1})^{-(a+1)} - (k+x\sqrt{-1})^{-(a+1)}}{2\sqrt{-1}} = p^{-(a+1)}\sin(a+1)t, \end{cases}$$

$$p = (k^2+x^2)^{\frac{1}{2}}, \qquad t = \operatorname{arc\,tang}\frac{x}{k};$$

et, par suite, les formules (20) deviendront

$$(22) \quad \begin{cases} s^a = \dfrac{2\Gamma(a+1)}{\pi}\displaystyle\int_0^\infty \frac{e^{ks}\cos sx\cos(a+1)t}{(k^2+x^2)^{\frac{a+1}{2}}}\,dx, \\ s^a = \dfrac{2\Gamma(a+1)}{\pi}\displaystyle\int_0^\infty \frac{e^{ks}\sin sx\sin(a+1)t}{(k^2+x^2)^{\frac{a+1}{2}}}\,dx. \end{cases}$$

On a de plus

$$e^{ks}\cos sx = \frac{e^{(k+x\sqrt{-1})s} + e^{(k-x\sqrt{-1})s}}{2}, \qquad e^{ks}\sin sx = \frac{e^{(k+x\sqrt{-1})s} - e^{(k-x\sqrt{-1})s}}{2\sqrt{-1}};$$

et, par suite,

$$\Delta^m(e^{ks}\cos sx) = \frac{e^{(k+x\sqrt{-1})s}(e^{k+x\sqrt{-1}}-1)^m + e^{(k-x\sqrt{-1})s}(e^{k-x\sqrt{-1}}-1)^m}{2},$$

$$\Delta^m(e^{ks}\sin sx) = \frac{e^{(k+x\sqrt{-1})s}(e^{k+x\sqrt{-1}}-1)^m - e^{(k+x\sqrt{-1})s}(e^{k-x\sqrt{-1}}-1)^m}{2\sqrt{-1}}.$$

Si dans ces dernières équations on change les exponentielles imaginaires en sinus et cosinus, et si l'on fait, pour abréger,

$$e^k \cos x - 1 = u \cos v, \qquad e^k \sin x = u \sin v,$$

on trouvera

$$(23) \quad \begin{cases} \Delta^m (e^{ks} \cos s x) = e^{ks} u^m \cos (s x + m v), \\ \Delta^m (e^{ks} \sin s x) = e^{ks} u^m \sin (s x + m v), \end{cases}$$

u et v étant déterminés par les équations

$$u = (e^{2k} - 2e^k \cos x + 1)^{\frac{1}{2}}, \qquad v = \operatorname{arc\,tang} \frac{\sin x}{\cos x - e^{-k}}.$$

Cela posé, si l'on prend la différence finie des deux membres de chacune des équations (22), on obtiendra les formules suivantes

$$(24) \quad \begin{cases} \Delta^m s^a = \dfrac{2e^{ks}\Gamma(a+1)}{\pi} \displaystyle\int_0^\infty \frac{(e^{2k} - 2e^k \cos x + 1)^{\frac{m}{2}} \cos (a+1) t \cos (s x + m v)}{(k^2 + x^2)^{\frac{a+1}{2}}} dx, \\ \Delta^m s^a = \dfrac{2e^{ks}\Gamma(a+1)}{\pi} \displaystyle\int_0^\infty \frac{(e^{2k} - 2e^k \cos x + 1)^{\frac{m}{2}} \sin (a+1) t \sin (s x + m v)}{(k^2 + x^2)^{\frac{a+1}{2}}} dx, \end{cases}$$

dans lesquelles les valeurs de t et de v sont déterminées par les deux équations

$$(25) \quad \begin{cases} t = \operatorname{arc\,tang} \dfrac{x}{k}, \\ v = \operatorname{arc\,tang} \dfrac{\sin x}{\cos x - e^{-k}}. \end{cases}$$

Si l'on ajoute entre elles les équations (24), on obtiendra la suivante

$$(26) \quad \Delta^m s^a = \frac{e^{ks}\Gamma(a+1)}{\pi} \int_0^\infty \frac{(e^{2k} - 2e^k \cos x + 1)^{\frac{m}{2}} \cos (s x + m v - \overline{a+1}\, t)}{(k^2 + x^2)^{\frac{a+1}{2}}} dx.$$

Les équations (24) et (26) sont générales et subsistent quelles que

soient les valeurs respectives des quantités m et a. On peut même remarquer que les seconds membres de ces équations renferment une constante désignée par k, dont la valeur peut être choisie arbitrairement. Ainsi les trois équations dont il s'agit donnent le moyen de résoudre, d'une infinité de manières, la question proposée.

Pour que l'on puisse déterminer facilement par approximation les valeurs des intégrales définies comprises dans les seconds membres des équations (24) et (26), il est nécessaire d'attribuer à k une valeur positive qui diffère sensiblement de zéro. En effet, si l'on supposait k très petit, alors, pour de très petites valeurs de x, la fonction renfermée sous le signe $\int$, dans chacune des intégrales dont il s'agit, obtiendrait généralement une valeur très considérable; et, quoique, pour des valeurs constantes de x, celles de la fonction deviennent alternativement positives ou négatives, néanmoins, comme ces dernières ne se détruisent pas mutuellement, on serait obligé de calculer les premiers éléments de chaque intégrale avec une extrême précision. On doit toutefois excepter le cas où l'on suppose

$$m < a;$$

car dans cette hypothèse la fonction

$$\frac{(e^{2k} - 2e^k \cos x + 1)^{\frac{m}{2}}}{(k^2 + x^2)^{\frac{a+1}{2}}}$$

devient elle-même fort petite, pour des valeurs de k et de x peu différentes de zéro.

On peut même, lorsque a surpasse m, supposer dans les équations (24) et (26) k tout à fait nul. On a dans cette dernière hypothèse

$$\frac{(e^{2k} - 2e^k \cos x + 1)^{\frac{m}{2}}}{(k^2 + x^2)^{\frac{a+1}{2}}} = \frac{2^m \sin^m \frac{x}{2}}{x^{a+1}},$$

$$t = \frac{\pi}{2}, \qquad v = -\operatorname{arc\,tang}\left(\cot \frac{1}{2} x\right) = \frac{x + \pi}{2};$$

et, par suite, les équations (24) se réduisent à

$$(27)\quad \begin{cases} \Delta^m s^a = \dfrac{2^{m+1}\,\Gamma(a+1)\cos\dfrac{a+1}{2}\pi}{x^{a+1}} \displaystyle\int_0^\infty \dfrac{\sin^m \frac{1}{2}x \cos\left(\frac{2s+m}{2}x + \frac{m}{2}\pi\right)}{\pi}\,dx, \\[2ex] \Delta^m s^a = \dfrac{2^{m+1}\,\Gamma(a+1)\sin\dfrac{a+1}{2}\pi}{x^{a+1}} \displaystyle\int_0^\infty \dfrac{\sin^m \frac{1}{2}x \sin\left(\frac{2s+m}{2}x + \frac{m}{2}\pi\right)}{\pi}\,dx. \end{cases}$$

Comme dans les équations précédentes les intégrales relatives à la variable x sont prises entre les limites $x = 0$, $x = \infty$, on peut, sans nul inconvénient, y changer x en $2x$. De plus, m étant un nombre entier, chacun des produits

$$\cos\frac{a+1}{2}\pi\cos\left(\frac{2s+m}{2}x + \frac{m}{2}\pi\right),$$
$$\sin\frac{a+1}{2}\pi\sin\left(\frac{2s+m}{2}x + \frac{m}{2}\pi\right)$$

est nécessairement égal à l'un des deux suivants

$$-\sin\frac{a+m}{2}\pi\cos\frac{2s+m}{2}x,$$
$$\cos\frac{a+m}{2}\pi\sin\frac{2s+m}{2}x.$$

Il est aisé d'en conclure que les équations (27), obtenues par la seconde méthode, sont identiques avec les formules (15) obtenues par la première; ce qui confirme l'exactitude de nos calculs.

Dans les équations (24) et (26) on doit toujours prendre pour t le plus petit des arcs qui ont pour tangente $\frac{x}{k}$, ou celui qui devient nul quand on suppose $x = 0$; et en effet l'équation

$$\frac{(k - x\sqrt{-1})^{-(a+1)} - (k + x\sqrt{-1})^{-(a+1)}}{2\sqrt{-1}} = p^{a+1}\sin(a+1)t$$

donne, dans cette hypothèse,

$$\sin(a+1)t = 0$$

quel que soit a, et par conséquent $t = 0$. Quant à l'arc v, il peut être

choisi arbitrairement parmi tous ceux qui ont pour tangente

$$\frac{\sin x}{\cos x - e^{-k}};$$

car, m étant un nombre entier, tous ces arcs donnent la même valeur pour chacune des quantités

$$\cos(sx + mv), \qquad \sin(sx + mv).$$

Corollaire I. — Les intégrales définies, dans lesquelles nous avons transformé par les méthodes précédentes la différence $\Delta^m s^a$, sont toutes prises entre les limites $x = 0$, $x = \infty$. Mais, comme leurs éléments décroissent rapidement à mesure que x augmente, on peut leur appliquer la méthode des quadratures. On peut aussi, pour rendre cette application plus facile, les transformer d'abord par la substitution

$$x = l\left(\frac{1}{z}\right),$$

en de nouvelles intégrales qui soient prises entre les limites $z = 0$, $z = 1$.

Scolie. — Dans les calculs précédents nous avons toujours supposé que s était une quantité positive; et cette condition était nécessaire, du moins en général, pour que la différence finie $\Delta^m s^a$ fût réelle. Lorsque s devient négative, la même différence se compose d'une partie réelle et d'une partie imaginaire. Mais alors on peut essayer de représenter chacune de ces parties par une intégrale définie. Tel est l'objet du paragraphe suivant.

§ III. — *Sur la transformation de la différence finie $\Delta^m s^a$ en intégrales définies, a étant un nombre positif, et s un nombre négatif pris à volonté.*

Dans la question qui nous occupe, il est nécessaire de distinguer deux cas différents, suivant que m est inférieur ou supérieur au nombre positif $-s$ que nous désignerons par s'.

Si d'abord on suppose

$$m < s',$$

on substituera sous la caractéristique des différences finies la quantité positive $s' - m$ à la quantité négative s par le moyen de l'équation

$$\Delta^m s^a = (-1)^{a+m}\,\Delta^m (s' - m)^a,$$

où le signe Δ se rapporte dans le premier membre à la variable s, et dans le second à la variable s'. On transformera ensuite, par les méthodes du paragraphe précédent, la différence finie $\Delta^m (s' - m)^a$ en intégrale définie.

Si l'on suppose au contraire

$$m > s',$$

la différence finie $\Delta^m s^a$ renfermera deux espèces de termes. Dans les uns la quantité élevée à la puissance a sera positive; dans les autres elle sera négative. La somme des premiers sera

$$(m - s')^a - \frac{m}{1}(m - s' - 1)^a + \frac{m(m-1)}{1.2}(m - s' - 2)^a - \ldots,$$

la série étant continuée jusqu'au dernier des termes où la quantité affectée de l'exposant a reste positive. La somme des autres termes sera

$$(-1)^{a+m}\left[s'^a - \frac{m}{1}(s' - 1)^a + \frac{m(m-1)}{1.2}(s' - 2)^a - \ldots\right],$$

la nouvelle série étant assujettie à la même condition que la précédente. Si donc on représente la somme des premiers par

$$A_{m-s'},$$

la somme des autres se trouvera naturellement représentée par

$$(-1)^{a+m} A_{s'};$$

et l'on aura par suite

$$\Delta^m s^a = A_{m-s'} + (-1)^{a+m} A_{s'}.$$

Cela posé, pour obtenir en intégrales définies la valeur de $\Delta^m s^a$, il suffira évidemment de déterminer par de semblables intégrales la valeur de $A_{m-s'}$ et celle de $A_{s'}$. On y parvient de la manière suivante.

Les équations (20), que nous avons considérées ci-dessus (§ II), supposaient la quantité s positive. Si dans ces mêmes équations on change s en r, et si l'on fait, pour abréger,

$$\frac{(k - x\sqrt{-1})^{-(a+1)} + (k + x\sqrt{-1})^{-(a+1)}}{2} = X_1,$$

$$\frac{(k - x\sqrt{-1})^{-(a+1)} - (k + x\sqrt{-1})^{-(a+1)}}{2\sqrt{-1}} = X_2,$$

on en conclura facilement

$$\text{(28)} \qquad \int_0^\infty (X_1 e^{kr}\cos rx + X_2 e^{kr}\sin rx)\,dx = \frac{\pi}{\Gamma(a+1)}\,r^a,$$

r étant positif.

Au contraire, si l'on suppose r négatif et égal à $-r'$, on trouvera

$$\int_0^\infty X_1 e^{kr}\cos rx\,dx = e^{-2kr'}\int_0^\infty X_1 e^{kr'}\cos r'x\,dx = \frac{\pi}{\Gamma(a+1)}\,r'^a e^{-2kr'},$$

$$\int_0^\infty X_2 e^{kr}\sin rx\,dx = -e^{-2kr'}\int_0^\infty X_2 e^{kr'}\sin r'x\,dx = -\frac{\pi}{\Gamma(a+1)}\,r'^a e^{-2kr'};$$

et l'on aura par suite

$$\text{(29)} \qquad \int_0^\infty (X_1 e^{kr}\cos rx + X_2 e^{kr}\sin rx)\,dx = 0.$$

Soient maintenant m et s' deux nombres positifs dont le plus petit soit s'; en faisant successivement, dans l'équation (28),

$$r = m - s', \qquad r = m - s' - 1, \qquad \ldots$$

et, dans l'équation (29),

$$r = -s', \qquad r = -s' + 1, \qquad \ldots,$$

on obtiendra les formules suivantes

$$\int [X_1 e^{k(m-s')} \cos(m-s')x + X_2 e^{k(m-s')} \sin(m-s')x]\, dx = \frac{\pi}{\Gamma(a+1)}(m'-s')^a,$$

$$\int [X_1 e^{k(m-s'-1)} \cos(m-s'-1)x + X_2 e^{k(m-s'-1)} \sin(m-s'-1)x]\, dx = \frac{\pi}{\Gamma(a+1)}(m-s'-1)^a,$$

. . . .

$$\int [X_1 e^{k(1-s')} \cos(1-s')x + X_2 e^{k(1-s')} \sin(1-s')x]\, dx = 0,$$

$$\int (X_1 e^{-ks'} \cos s'x - X_2 e^{-ks'} \sin s'x)\, dx = 0.$$

Si l'on multiplie respectivement les deux membres de la première équation par 1, les deux membres de la deuxième par $-\frac{m}{1}$, ceux de la troisième par $\frac{m(m-1)}{1.2}$, etc., et en général ceux de la $n^{\text{ième}}$ équation par le coefficient de x^{n-1} dans le développement du binome $(1-x)^m$; on trouvera, en ajoutant toutes les équations entre elles, et remplaçant s' par $-s$,

$$\int_0^\infty [X_1 \Delta^m(e^{ks}\cos sx) + X_2 \Delta^m(e^{ks}\sin sx)]\, dx$$
$$= \frac{\pi}{\Gamma(a+1)}\left[(m+s)^a - \frac{m}{1}(m+s-1)^a + \ldots\right] = \frac{\pi}{\Gamma(a+1)} A_{m-s'};$$

d'où l'on conclura

$$(30) \quad A_{m-s'} = \frac{\Gamma(a+1)}{\pi}\int_0^\infty [X_1 \Delta^m(e^{ks}\cos sx) + X_2 \Delta^m(e^{ks}\sin sx)]\, dx.$$

Si dans le second membre de cette équation on substitue, au lieu des fonctions X_1, X_2, $\Delta^m(e^{ks}\cos sx)$, $\Delta^m(e^{ks}\sin sx)$, leurs valeurs données par les équations (21) et (23), et si l'on remplace s par $-s'$, on aura

$$(31) \quad A_{m-s'} = \frac{e^{-ks'}\Gamma(a+1)}{\pi}\int_0^\infty \frac{(e^{2k} - 2e^k \cos x + 1)^{\frac{m}{2}} \cos[mv - s'x - (a+1)t]}{(k^2+x^2)^{\frac{a+1}{2}}}\, dx,$$

les valeurs de t et de v étant toujours déterminées par les équations

$$t = \text{arc tang}\frac{x}{k},$$

$$v = \text{arc tang}\frac{\sin x}{\cos x - e^{-k}}.$$

Si dans l'équation (31) on change s' en $m-s'$, on trouvera

$$(32) \quad A_{s'} = \frac{e^{-k(m-s')}\Gamma(a+1)}{\pi}\int_0^\infty \frac{(e^{2k} - 2e^k \cos x + 1)^{\frac{m}{2}} \cos[mv - (m-s')x - (a+1)t]}{(k^2+x^2)^{\frac{a+1}{2}}}\, dx.$$

Les valeurs négatives de $A_{m-s'}$ et de $A_{s'}$ étant déterminées par les formules (31) et (32), on obtiendra la valeur cherchée de $\Delta^m s^a$, pour le cas où s est négatif et égal à $-s'$, au moyen de l'équation

$$(33) \quad \Delta^m s^a = A_{m-s'} + (-1)^{a+m} A_{s'}.$$

Corollaire I. — Les intégrales définies, qui font partie des seconds membres des équations (31) et (32), renferment une constante positive k, dont la valeur est tout à fait indéterminée. Néanmoins, pour que l'on puisse facilement obtenir des valeurs approchées de ces intégrales, il est nécessaire, dans le cas où a surpasse m, d'attribuer à cette constante une valeur sensible. Cette nécessité est suffisamment établie par les raisons que nous avons déjà exposées ci-dessus (§ II). On n'est plus assujetti à la même condition dans le cas où l'on suppose

$$a < m;$$

et, dans cette dernière hypothèse, on peut donner à k des valeurs très petites, et même, si l'on veut, faire

$$k = 0.$$

On trouve alors

$$t = \frac{\pi}{2}, \qquad v = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\pi;$$

et, par suite, les équations (31) et (32) se réduisent à

$$(34) \quad \begin{cases} A_{m-s'} = \dfrac{2^m\Gamma(a+1)}{\pi}\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin^m \frac{1}{2}x \cos\left(\frac{m-2s'}{2}x - \frac{a-m+1}{2}\pi\right)}{x^{a+1}}\, dx, \\ A_{s'} \phantom{_{m-}} = \dfrac{2^m\Gamma(a+1)}{\pi}\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin^m \frac{1}{2}x \cos\left(\frac{2s'-m}{2}x - \frac{a-m+1}{2}\pi\right)}{x^{a+1}}\, dx. \end{cases}$$

Corollaire II. — Si, au lieu de supposer dans les équations (34) $s' = -s$, on y suppose $s' = \frac{1}{2}m - s$, et si l'on fait en outre, conformément aux notations adoptées dans la première Partie de ce Mémoire (§ II, exemples VII et VIII),

$$(35)\quad \left\{\begin{aligned} S_a &= (m+2s)^a - \frac{m}{1}(m+2s-2)^a + \frac{m(m-1)}{1.2}(m+2s-4)^a - \ldots,\\ T_a &= (m-2s)^a - \frac{m}{1}(m-2s-2)^a + \frac{m(m-1)}{1.2}(m-2s-4)^a - \ldots,\end{aligned}\right.$$

en excluant de chaque série les termes qui renfermeraient des puissances de quantités négatives, on trouvera

$$A_{m-s'} = \frac{1}{2^a} S_a, \qquad A_{s'} = \frac{1}{2^a} T_a.$$

Cela posé, si dans les seconds membres des équations (34) on change x en $2x$, ces mêmes équations prendront la forme suivante

$$(36)\quad \left\{\begin{aligned} S_a &= \frac{2^m \Gamma(a+1)}{\pi} \int_0^\infty \frac{\sin^m x \cos\left[2sx - (a-m+1)\frac{\pi}{2}\right]}{x^{a+1}}\,dx,\\ T_a &= \frac{2^m \Gamma(a+1)}{\pi} \int_0^\infty \frac{\sin^m x \cos\left[2sx + (a-m+1)\frac{\pi}{2}\right]}{x^{a+1}}\,dx.\end{aligned}\right.$$

Les valeurs précédentes de S_a et de T_a coïncident parfaitement avec celles que l'on obtiendrait par la combinaison des formules (z) et (i') (Ire Partie, § II). On peut de ces mêmes valeurs déduire immédiatement celle de la différence finie $\Delta^m(2s-m)^a$, au moyen de l'équation

$$(37)\quad \Delta^m(2s-m)^a = S_a + (-1)^{a+m} T_a.$$

L'analyse qui vient de nous conduire aux formules (34), (35) et (36), fait voir en même temps que dans ces formules s est une quantité positive assujettie à la seule condition

$$s < \frac{m}{2}.$$

Si dans la première des équations (36) on suppose m égal au plus grand nombre entier compris dans $a+1$, on obtiendra la formule que M. Laplace a désignée par la lettre (p) dans le premier Livre du *Calcul des probabilités* (n° 42, p. 168) (¹).

Corollaire III. — Toutes les intégrales définies que nous avons considérées dans ce paragraphe sont prises entre les limites $x = 0$, $x = \infty$. On peut appliquer à ces intégrales, comme à celles que nous avons considérées dans les paragraphes précédents, la méthode des quadratures, et rendre cette application plus facile par la substitution préliminaire

$$x = l\left(\frac{1}{z}\right).$$

Considérations générales sur les intégrales qui deviennent infinies pour de très petites valeurs de la variable.

Soit P une fonction quelconque de la variable x, qui ne s'évanouisse pas avec x. Soit de plus a un nombre positif quelconque. L'intégrale

$$(1)\quad \int_0^{x_1} \frac{P\,dx}{x^{a+1}},$$

prise entre les limites $x = 0$, $x = x_1$, aura nécessairement une valeur infinie. Mais si l'on désigne par λ le plus grand nombre entier compris dans a, et par

$$(2)\quad X = c + c_1 x + c_2 x^2 + \ldots + c_\lambda x^\lambda$$

les premiers termes du développement de P suivant les puissances ascendantes de x, l'intégrale

$$(3)\quad \int_0^{x_1} \frac{P - X}{x^{a+1}}\,dx$$

obtiendra en général une valeur finie; et, de plus, on reconnaitra faci-

(¹) *OEuvres de Laplace*, t. VII, p. 171.

lement que le seul moyen de rendre finie l'intégrale (3), en prenant pour X une fonction rationnelle et entière de la variable x, est de supposer X déterminée par l'équation (2). La fonction rationnelle X et, par suite, l'intégrale (3) dépendent donc uniquement de la fonction donnée $\frac{P}{x^{a+1}}$. Pour abréger, je désignerai cette dernière intégrale par le signe $\int'$ placé devant le produit $\frac{P}{x^{a+1}}dx$; en sorte qu'on aura

$$\int_0^{\prime x_1} \frac{P}{x^{a+1}}dx = \int_0^{x_1} \frac{P-X}{x^{a+1}}dx. \tag{4}$$

Ainsi, tandis que l'intégrale $\int_0^{x_1} \frac{P\,dx}{x^{a+1}}$ est infinie, l'intégrale $\int_0^{\prime x_1} \frac{P\,dx}{x^{a+1}}$ aura en général une valeur finie, déterminée par la formule (4). On peut encore obtenir cette valeur en cherchant d'abord l'intégrale $\int \frac{P\,dx}{x^{a+1}}$ prise entre les limites $x = \alpha$, $x = x_1$ (α étant une quantité très petite), ordonnant cette intégrale suivant les puissances ascendantes de α, et supposant dans le développement la quantité α nulle, après avoir supprimé les termes affectés de puissances négatives de cette même quantité. Nous voici donc conduits à considérer une nouvelle espèce d'intégrales dont on ne s'était pas encore occupé d'une manière spéciale. Je désignerai ces sortes d'intégrales et les opérations qui s'y rapportent sous le nom d'*extraordinaires*. Au reste, les intégrales dont il s'agit sont soumises aux mêmes lois que les intégrales ordinaires. Ainsi, par exemple, si l'on a deux intégrations successives à effectuer, l'une ordinaire relative à la variable x, l'autre extraordinaire relative à la variable z, on pourra commencer indifféremment par l'une ou l'autre des deux intégrations dont il s'agit; et dans les deux cas on obtiendra les mêmes résultats. De même, on peut appliquer à la détermination des intégrales définies extraordinaires les procédés que nous avons employés pour déterminer les intégrales ordinaires. Souvent, à l'aide de ces procédés, on parvient à transformer l'une dans l'autre les deux espèces d'intégrales dont il s'agit, et l'on déduit

quelquefois de ces transformations des résultats dignes de remarque. Éclaircissons tout ceci par quelques exemples.

Problème I. — *Déterminer la valeur de l'intégrale extraordinaire*

$$A = \int_0^{\prime\infty} \frac{e^{-kx}}{x^{a+1}}dx. \tag{5}$$

Solution. — Soit λ le plus grand nombre entier compris dans a. Si l'on différentie $\lambda+1$ fois par rapport à k l'équation (5), on aura

$$\frac{\partial^{\lambda+1}A}{\partial k^{\lambda+1}} = (-1)^{\lambda+1}\int_0^{\prime\infty} \frac{e^{-kx}}{x^{a-\lambda}}dx.$$

D'ailleurs, le plus grand nombre entier compris dans $a-\lambda$ étant zéro, si l'on détermine l'intégrale extraordinaire $\int_0^{\prime\infty} \frac{e^{-kx}}{x^{a-\lambda}}dx$ à l'aide de l'équation (4), on trouvera $X = 0$ et, par suite,

$$\int_0^{\prime\infty} \frac{e^{-kx}}{x^{a-\lambda}}dx = \int_0^{\infty} \frac{e^{-kx}}{x^{a-\lambda}}dx = \frac{\Gamma(1+\lambda-a)}{k^{1+\lambda-a}}.$$

On aura donc

$$\frac{\partial^{\lambda+1}A}{\partial k^{\lambda+1}} = (-1)^{\lambda+1}\frac{\Gamma(1+\lambda-a)}{k^{1+\lambda-a}}. \tag{6}$$

Si l'on intègre $\lambda+1$ fois cette dernière équation par rapport à k, en déterminant convenablement les constantes arbitraires, on trouvera

$$A = \frac{\Gamma(1+\lambda-a)}{(\lambda-a)(\lambda-a-1)\ldots(-a)}k^a = k^a\,\Gamma(-a).$$

On a donc en général

$$\int_0^{\prime\infty} \frac{e^{-kx}}{x^{a+1}}dx = k^a\,\Gamma(-a). \tag{7}$$

Corollaire I. — Soit $k=1$, on aura simplement

$$\int_0^{\prime\infty} \frac{e^{-x}}{x^{a+1}}dx = \Gamma(-a). \tag{8}$$

Si dans cette dernière équation on change a en $-a$, on retrouvera la formule connue

$$\int_0^{\infty} x^{a-1} e^{-x}\,dx = \Gamma(a).$$

Corollaire II. — Si dans l'équation (7) on fait $k = s$, et que l'on remplace $\Gamma(-a)$ par $\frac{\pi}{\Gamma(a+1)\sin(a+1)\pi}$, on aura

$$s^a = \frac{\Gamma(a+1)\sin(a+1)\pi}{\pi} \int_0^{1/0} \frac{e^{-sx}}{x^{a+1}}\,dx.$$

Si l'on prend la différence finie $m^{\text{ième}}$ de chacun des membres de cette dernière équation relativement à s, on trouvera

$$(9)\qquad \Delta^m s^a = \frac{\Gamma(a+1)\sin(a+1)\pi}{\pi} \int_0^{1/0} \frac{e^{-sx}(e^{-x}-1)^m}{x^{a+1}}\,dx.$$

Lorsqu'on suppose $a < m$, l'équation précédente coïncide avec la formule (μ'') de M. Laplace.

Problème II. — *Déterminer les valeurs des intégrales extraordinaires*

$$(10)\qquad \left\{\begin{aligned} B &= \int_0^{1/0} \frac{e^{-kx}\cos zx}{x^{a+1}}\,dx, \\ C &= \int_0^{1/0} \frac{e^{-kx}\sin zx}{x^{a+1}}\,dx. \end{aligned}\right.$$

Solution. — Si l'on différentie $\lambda + 1$ fois par rapport à k chacune des équations (10), λ étant le plus grand nombre entier compris dans a, on trouvera

$$\frac{\partial^{\lambda+1} B}{\partial k^{\lambda+1}} = (-1)^{\lambda+1} \int_0^{1/0} \frac{e^{-kx}\cos zx}{x^{a-\lambda}}\,dx,$$

$$\frac{\partial^{\lambda+1} C}{\partial k^{\lambda+1}} = (-1)^{\lambda+1} \int_0^{1/0} \frac{e^{-kx}\sin zx}{x^{a-\lambda}}\,dx;$$

ou, ce qui revient au même,

$$\frac{\partial^{\lambda+1} B}{\partial k^{\lambda+1}} = (-1)^{\lambda+1} \frac{(k - z\sqrt{-1})^{a-\lambda-1} + (k + z\sqrt{-1})^{a-\lambda-1}}{2}\,\Gamma(1+\lambda-a),$$

$$\frac{\partial^{\lambda+1} C}{\partial k^{\lambda+1}} = (-1)^{\lambda+1} \frac{(k - z\sqrt{-1})^{a-\lambda-1} - (k + z\sqrt{-1})^{a-\lambda-1}}{2\sqrt{-1}}\,\Gamma(1+\lambda-a).$$

En intégrant ces dernières équations $\lambda + 1$ fois de suite par rapport à k, et déterminant convenablement les constantes arbitraires, on trouvera

$$(11)\qquad \left\{\begin{aligned} B &= \frac{(k - z\sqrt{-1})^a + (k + z\sqrt{-1})^a}{2}\,\Gamma(-a), \\ C &= \frac{(k - z\sqrt{-1})^a - (k + z\sqrt{-1})^a}{2\sqrt{-1}}\,\Gamma(-a). \end{aligned}\right.$$

Corollaire. — Si dans l'équation (11) on change x en z et z en x, on aura

$$(12)\qquad \left\{\begin{aligned} \frac{(k - x\sqrt{-1})^a + (k + x\sqrt{-1})^a}{2} &= \frac{1}{\Gamma(-a)} \int_0^{1/0} \frac{e^{-kz}\cos xz}{z^{a+1}}\,dz, \\ \frac{(k - x\sqrt{-1})^a - (k + x\sqrt{-1})^a}{2\sqrt{-1}} &= \frac{1}{\Gamma(-a)} \int_0^{1/0} \frac{e^{-kz}\sin xz}{z^{a+1}}\,dz. \end{aligned}\right.$$

D'ailleurs, si l'on fait

$$t = \text{arc tang}\,\frac{x}{k},$$

les premiers membres des équations (12) deviendront respectivement

$$(k^2 + x^2)^{\frac{a}{2}} \cos at,$$

$$-(k^2 + x^2)^{\frac{a}{2}} \sin at;$$

et comme, en supposant $k = 0$, on trouve $t = \frac{\pi}{2}$, les équations (12) se réduiront, dans cette hypothèse, à

$$(13)\qquad \left\{\begin{aligned} x^a \cos\frac{a\pi}{2} &= \frac{1}{\Gamma(-a)} \int_0^{1/0} \frac{\cos xz}{z^{a+1}}\,dz, \\ x^a \sin\frac{a\pi}{2} &= -\frac{1}{\Gamma(-a)} \int_0^{1/0} \frac{\sin xz}{z^{a+1}}\,dz. \end{aligned}\right.$$

Si dans ces dernières on remplace $\Gamma(-a)$ par $\frac{\Gamma(a+1)\sin(a+1)\pi}{\pi}$, on en déduira facilement les deux formules suivantes

$$(14)\qquad \left\{\begin{aligned} \int_0^{1/0} \cos\left(\frac{a+1}{2}\pi + xz\right)\frac{dz}{z^{a+1}} &= 0, \\ \int_0^{1/0} \cos\left(\frac{a+1}{2}\pi - xz\right)\frac{dz}{z^{a+1}} &= \frac{\pi}{\Gamma(a+1)}\,x^a. \end{aligned}\right.$$

Problème III. — *Déterminer le rapport des deux intégrales*

$$
(15)\qquad \left\{
\begin{aligned}
&\mathrm{D} = \int_0^\infty x^a e^{-x^2} \cos\left(\frac{a\pi}{2} - 2kx\right) dx,\\
&\mathrm{E} = \int_0^\infty e^{-x^2} \frac{(k - x\sqrt{-1})^a + (k + x\sqrt{-1})^a}{2}\, dx.
\end{aligned}
\right.
$$

Solution. — Pour résoudre le problème proposé, il suffit de transformer les deux intégrales ordinaires D et E en intégrales extraordinaires. On a d'abord

$$
\mathrm{D} = \int_0^\infty x^a \cos\frac{a\pi}{2} \cos 2kx\, dx + \int_0^\infty x^a \sin\frac{a\pi}{2} \sin 2kx\, dx.
$$

Si dans cette équation on substitue pour

$$
x^a \cos\frac{a\pi}{2} \qquad \text{et} \qquad x^a \sin\frac{a\pi}{2}
$$

leurs valeurs données par les formules (13), on trouvera

$$
\mathrm{D} = \frac{1}{\Gamma(a)} \int_0^{/\infty} \frac{\mathrm{Z}\, dz}{z^{a+1}},
$$

Z étant une fonction de z déterminée par l'équation

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Z} - \int_0^\infty e^{-x^2} \cos 2kx \cos zx\, dx - \int_0^\infty e^{-x^2} \sin 2kx \sin zx\, dx\\
= \int_0^\infty e^{-x^2} \cos(2k + z)x\, dx = \frac{\pi^{\frac{1}{2}}}{2} e^{-\left(k+\frac{1}{2}z\right)^2}.
\end{aligned}
$$

On aura donc par suite

$$
(16)\qquad \mathrm{D} = \frac{\pi^{\frac{1}{2}} e^{-k^2}}{2\Gamma(-a)} \int_0^{/\infty} \frac{e^{-kz-\frac{z^2}{4}}}{z^{a+1}}\, dz.
$$

Considérons, en second lieu, l'intégrale E. Si dans cette dernière on substitue à

$$
\frac{(k + x\sqrt{-1})^a + (k - x\sqrt{-1})^a}{2}
$$

sa valeur tirée de la première des équations (12), on trouvera

$$
\mathrm{E} = \frac{1}{\Gamma(-a)} \int_0^{/\infty} \frac{\mathrm{Z}' e^{-kz}\, dz}{x^{a+1}},
$$

Z′ étant une fonction de z déterminée par l'équation

$$
\mathrm{Z}' = \int_0^\infty e^{-x^2} \cos xz\, dx = \frac{\pi^{\frac{1}{2}}}{2} e^{-\frac{z^2}{4}}.
$$

On aura donc enfin

$$
(17)\qquad \mathrm{E} = \frac{\pi^{\frac{1}{2}}}{2\Gamma(-a)} \int_0^{/\infty} \frac{e^{-kz-\frac{z^2}{4}}}{z^{a+1}}\, dz.
$$

Si maintenant on compare entre elles les équations (16) et (17), on obtiendra ce résultat remarquable

$$
(18)\qquad \frac{\mathrm{D}}{\mathrm{E}} = e^{-k^2}.
$$

On a donc en général

$$
(19)\qquad \left\{
\begin{aligned}
&\int_0^\infty x^a e^{-x^2} \cos\left(\frac{a\pi}{2} - 2kx\right) dx\\
&\quad = e^{-k^2} \int_0^\infty \frac{(k + x\sqrt{-1})^a + (k - x\sqrt{-1})^a}{2} e^{-x^2}\, dx.
\end{aligned}
\right.
$$

Corollaire. — Si dans l'équation (19) on suppose $a = \lambda$, λ étant un nombre entier, on aura

$$
\cos\left(\frac{a\pi}{2} - 2kx\right) = (-1)^{\frac{\lambda}{2}} \cos 2kx
$$

si λ est un nombre pair, et

$$
\cos\left(\frac{a\pi}{2} - 2kx\right) = (-1)^{\frac{\lambda-1}{2}} \sin 2kx
$$

dans le cas contraire. Si dans la même hypothèse on développe le second membre de l'équation (18), et si l'on y remplace généralement

$$
\int_0^\infty x^{2r} e^{-x^2} dx \qquad \text{par} \qquad \frac{1.3\ldots(2r-1)}{2^r},
$$

on obtiendra les formules suivantes :

1° Si λ est un nombre pair,

$$\int_0^{\infty} x^{\lambda} e^{-x^2} \cos 2kx\, dx = (-1)^{\frac{\lambda}{2}} \frac{\pi^{\frac{1}{2}} e^{-k^2}}{2} k^{\lambda} \left[1 - \frac{\lambda(\lambda-1)}{1} \frac{1}{(2k)^2} + \frac{\lambda(\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-3)}{1.2} \frac{1}{(2k)^4} - \ldots\right];$$

(20)

2° Si λ est un nombre impair,

$$\int_0^{\infty} x^{\lambda} e^{-x^2} \sin 2kx\, dx = (-1)^{\frac{\lambda-1}{2}} \frac{\pi^{\frac{1}{2}} e^{-k^2}}{2} k^{\lambda} \left[1 - \frac{\lambda(\lambda-1)}{1} \frac{1}{(2k)^2} + \frac{\lambda(\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-3)}{1.2} \frac{1}{(2k)^4} - \ldots\right].$$

Problème IV. — *Déterminer la valeur de l'intégrale extraordinaire*

$$(21)\qquad F = \int_0^{\infty} \frac{e^{-x^2} \cos\left(\frac{a+1}{2}\pi + 2kx\right) dx}{x^{a+1}}.$$

Solution. — Si dans l'équation (21) on remplace

$$e^{-x^2} \quad \text{par} \quad \frac{2}{\pi^{\frac{1}{2}}} \int_0^{\infty} e^{-z^2} \cos 2xz\, dz,$$

on trouvera

$$(22)\qquad F = \frac{2}{\pi^{\frac{1}{2}}} \int_0^{\infty} Z e^{-z^2} dz,$$

Z étant une fonction de z déterminée par l'équation

$$Z = \int_0^{\infty} \frac{\cos\left[\frac{a+1}{2} + 2(k+z)x\right] + \cos\left[\frac{a+1}{2}\pi + 2(k-z)x\right]}{2} \frac{dx}{x^{a+1}}.$$

D'ailleurs, en vertu des équations (14), on a, quelle que soit la valeur de z, pourvu seulement que cette valeur soit positive,

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos\left[\frac{a+1}{2}\pi + 2(k+z)x\right]}{x^{a+1}} dx = 0.$$

En vertu des mêmes équations on a, pour des valeurs de z inférieures à k,

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos\left[\frac{a+1}{2}\pi + 2(k-z)x\right]}{x^{a+1}} dx = 0;$$

et, pour des valeurs de z supérieures à k,

$$\int_k^{\infty} \frac{\cos\left[\frac{a+1}{2}\pi - 2(z-k)x\right]}{x^{a+1}} dx = \frac{\pi}{\Gamma(a+1)} (2z-2k)^a.$$

Par suite la fonction de z représentée par Z sera toujours nulle entre les limites $z = 0$, $z = k$; mais, entre les limites $z = k$, $z = \infty$, elle sera représentée par

$$\frac{\pi}{2\Gamma(a+1)} (2z-2k)^a.$$

Cela posé, l'équation (22) deviendra

$$(23)\qquad \int_0^{\infty} \frac{e^{-x^2} \cos\left(\frac{a+1}{2}\pi + 2kx\right)}{x^{a+1}} dx = \frac{\pi^{\frac{1}{2}}}{\Gamma(a+1)} \int_k^{\infty} (2z-2k)^a e^{-z^2} dz.$$

Application de la théorie précédente à la détermination de la différence finie $\Delta^m s^a$; s étant négatif et $< m$, et les nombres a et m étant très considérables, mais peu différents l'un de l'autre.

Dans le cas dont il s'agit, la différence finie $\Delta^m s^a$ renfermera deux espèces de termes. Dans les uns les quantités élevées à la puissance a seront positives; dans les autres ces mêmes quantités seront négatives. Soit, pour plus de commodité, $s = -s'$, en sorte que s' représente une quantité positive; et faisons en outre

$$(24)\qquad \begin{cases} A_{m-s'} = (m-s')^a - \frac{m}{1}(m-s'-1)^a + \frac{m(m-1)}{1.2}(m-s'-2)^a - \ldots, \\ A_{s'} \quad = s'^a - \frac{m}{1}(s'-1)^a + \frac{m(m-1)}{1.2}(s'-2)^a - \ldots, \end{cases}$$

en excluant de chaque série les puissances de quantités négatives. On aura

$$(25)\qquad \Delta^m s^a = A_{m-s'} + (-1)^{a+m} A_{s'}.$$

Ainsi, pour obtenir la valeur de $\Delta^m s^a$, il suffira de déterminer séparément chacune des quantités $A_{m-s'}$, $A_{s'}$; et comme on peut déduire la seconde de la première par le simple changement de s' en $m-s'$, toute la difficulté se trouvera réduite à la détermination de la série désignée par $A_{m-s'}$. On peut d'abord transformer cette série en intégrale définie de la manière suivante :

Si l'on suppose successivement dans la seconde des équations (14)

$$x = m - s', \qquad x = m - s' - 1, \qquad \ldots,$$

et dans la première

$$x = s', \qquad x = s' - 1, \qquad \ldots,$$

et si l'on y remplace ensuite la variable z par x, on trouvera

$$\int_0^{\prime\infty} \cos\left[\frac{a+1}{2}\pi - (m-s')x\right]\frac{dx}{x^{a+1}} = \frac{\pi}{\Gamma(a+1)}(m-s')^a,$$

$$\int_0^{\prime\infty} \cos\left[\frac{a+1}{2}\pi - (m-s'-1)x\right]\frac{dx}{x^{a+1}} = \frac{\pi}{\Gamma(a+1)}(m-s'-1)^a,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,$$

$$\int_0^{\prime\infty} \cos\left[\frac{a+1}{2}\pi + (s'-1)x\right]\frac{dx}{x^{a+1}} = 0,$$

$$\int_0^{\prime\infty} \cos\left(\frac{a+1}{2}\pi + s'x\right)\frac{dx}{x^{a+1}} = 0.$$

Si l'on multiplie respectivement ces diverses équations par les coefficients du binome $(1-x)^m$, si on les ajoute ensuite, et si l'on remplace dans les premiers membres s' par $-s$, on obtiendra la formule

$$\int_0^{\prime\infty} \Delta^m \cos\left(\frac{a+1}{2}\pi - sx\right)dx$$
$$= \frac{\pi}{\Gamma(a+1)}\left[(m-s')^a - \frac{m}{1}(m-s'-1)^a + \frac{m(m-1)}{1.2}(m-s'-2)^a - \ldots\right] = \frac{\pi}{\Gamma(a+1)}A_{m-s'}.$$

On a d'ailleurs

$$\Delta^m \cos\left(\frac{a+1}{2}\pi - sx\right) = 2^m \sin^m \frac{1}{2}x \cos\left(\frac{a+1-m}{2}\pi + \frac{2s'-m}{2}x\right).$$

Cela posé, la formule obtenue donnera

$$(26)\qquad A_{m-s'} = \frac{2^m\Gamma(a+1)}{\pi}\int_0^{\prime\infty} \sin^m \frac{1}{2}x \cos\left[\frac{a+1-m}{2}\pi + \left(s' - \frac{1}{2}m\right)x\right]\frac{dx}{x^{a+1}}.$$

Si dans cette dernière équation l'on suppose $a < m$, l'intégrale extraordinaire qu'elle renferme se changera en intégrale ordinaire, et l'on retrouvera évidemment la première des équations (34) de la page 241.

Il nous reste maintenant à déduire de l'équation (26) la valeur approchée de $A_{m-s'}$, dans le cas où a et m sont de très grands nombres peu différents l'un de l'autre. Nous supposerons de plus dans cette recherche que $2s'-m$ est de l'ordre de $\sqrt{m}$, et nous ferons en conséquence

$$(27)\qquad 2s' - m = rm^{\frac{1}{2}}.$$

Cela posé, si, dans l'équation (26), on change x en $2x$, cette équation deviendra

$$(28)\qquad A_{m-s'} = \frac{2^{m-a}\Gamma(a+1)}{\pi}\int_0^{\prime\infty} \sin^m x \cos\left(\frac{a+1-m}{2}\pi + rm^{\frac{1}{2}}x\right)\frac{dx}{x^{a+1}};$$

et comme on a d'ailleurs

$$\sin^m x = x^m e^{-\frac{m}{6}x^2}\left(1 - \frac{mx^4}{180} + \ldots\right),$$

on trouvera encore

$$(29)\qquad A_{m-s'} = \frac{2^{m-a}\Gamma(a+1)}{\pi}\int_0^{\prime\infty}\left(1 - \frac{mx^4}{180} + \ldots\right)e^{-\frac{m}{6}x^2}\cos\left(\frac{a+1-m}{2}\pi + rm^{\frac{1}{2}}x\right)\frac{dx}{x^{a+1-m}}.$$

Si dans cette dernière formule on change x en $\dfrac{6^{\frac{1}{2}}}{m^{\frac{1}{2}}}x$, on obtiendra la suivante

$$(30)\qquad \left\{\begin{aligned} A_{m-s'} = {} & \frac{\Gamma(a+1)}{2^{a-m}\left(\frac{6}{m}\right)^{\frac{a-m}{2}}\pi}\int_0^{\prime\infty} e^{-x^2}\cos\left(\frac{a-m-1}{2}\pi + 6^{\frac{1}{2}}rx\right)\frac{dx}{x^{a-m+1}} \\ & - \frac{1}{5m}\int_0^{\prime\infty} e^{-x^2}\cos\left(\frac{a-m-3}{2}\pi + 6^{\frac{1}{2}}rx\right)\frac{dx}{x^{a-m-3}} + \ldots \end{aligned}\right.$$

La série renfermée dans le second membre de l'équation précédente, étant ordonnée suivant les puissances ascendantes de $\frac{1}{m}$, sera très convergente, si m est un très grand nombre; et, par suite, il suffira, dans ce cas, pour déterminer la valeur approchée de $A_{m-s'}$, de calculer un petit nombre d'intégrales de la forme

$$\int_0^{/\infty} e^{-x^2}\cos\left(\frac{1\mp k}{2}\pi+6^{\frac{1}{2}}rx\right)\frac{dx}{x^{1\mp k}},$$

k étant un nombre positif. Lorsque dans cette dernière intégrale on adopte le signe supérieur relativement à k, elle devient ordinaire et se réduit à

$$(31)\quad \begin{cases} \displaystyle\int_0^{\infty} x^{k-1}e^{-x^2}\cos\left(\frac{k-1}{2}\pi-6^{\frac{1}{2}}rx\right)dx \\ \displaystyle\qquad = e^{-\frac{3}{2}r^2}\int_0^{\infty}\frac{\left(\frac{3^{\frac{1}{2}}}{2^{\frac{1}{2}}}r+x\sqrt{-1}\right)^{k-1}+\left(\frac{3^{\frac{1}{2}}}{2^{\frac{1}{2}}}r-x\sqrt{-1}\right)^{k-1}}{2}e^{-x^2}dx. \end{cases}$$

Lorsqu'on adopte le signe inférieur, elle reste extraordinaire. Mais, dans ce cas, on peut, au moyen du problème IV, la transformer en intégrale ordinaire, et l'on trouve alors

$$\int_0^{/\infty} e^{-x^2}\cos\left(\frac{k+1}{2}\pi+6^{\frac{1}{2}}rx\right)\frac{dx}{x^{k+1}}=\frac{\pi^{\frac{1}{2}}}{\Gamma(k+1)}\int_{\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{1}{2}}r}^{\infty}\left(2z-6^{\frac{1}{2}}r\right)^k e^{-z^2}dz.$$

D'ailleurs, en supposant l'intégrale relative à z' prise entre les limites $z'=0$, $z'=\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{1}{2}}r$, on a

$$\int\left(2z-6^{\frac{1}{2}}r\right)^k e^{-z^2}dz=\int\left(2x-6^{\frac{1}{2}}r\right)^k e^{-x^2}dx-\int\left(2z'-6^{\frac{1}{2}}r\right)^k e^{-z'^2}dz'.$$

Par suite, si l'on fait, pour pour plus de commodité, $z'=\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{1}{2}}u$, on

trouvera

$$(32)\quad \begin{cases} \displaystyle\int_0^{/\infty} e^{-x^2}\cos\left(\frac{k+1}{2}\pi+6^{\frac{1}{2}}rx\right)\frac{dx}{x^{k+1}} \\ \displaystyle\quad =\frac{\pi^{\frac{1}{2}}}{\Gamma(k+1)}\left[\int_0^{\infty}\left(2x-6^{\frac{1}{2}}r\right)^k e^{-x^2}dx-\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{1}{2}}6^{\frac{k}{2}}\int_0^{r}(u-r)^k e^{-\frac{3}{2}u^2}du\right]. \end{cases}$$

Corollaire I. — Comme on a en général

$$2s'-m=rm^{\frac{1}{2}},$$

on trouvera par suite

$$A_{m-s'}=\frac{1}{2^a}\left[\left(m-rm^{\frac{1}{2}}\right)^a-\frac{m}{1}\left(m-rm^{\frac{1}{2}}-2\right)^a+\frac{m(m-1)}{1.2}\left(m-rm^{\frac{1}{2}}-4\right)^a-\ldots\right].$$

Cela posé, si l'on fait, pour abréger,

$$(33)\qquad \frac{1}{\pi}\int_0^{/\infty} e^{-x^2}\cos\left(\frac{1\pm k}{2}\pi+6^{\frac{1}{2}}rx\right)\frac{dx}{x^{1\pm k}}=M_{1\pm k},$$

la formule (30) deviendra

$$(34)\quad \begin{cases} \displaystyle\frac{\left(m-rm^{\frac{1}{2}}\right)^a-\frac{m}{1}\left(m-rm^{\frac{1}{2}}-2\right)^a+\frac{m(m-1)}{1.2}\left(m-rm^{\frac{1}{2}}-4\right)^a-\ldots}{1.2.3\ldots a.2^m} \\ \displaystyle\quad =\left(\frac{6}{m}\right)^{\frac{m-a}{2}}\left(M_{a-m+1}-\frac{1}{5m}M_{a-m-3}+\ldots\right). \end{cases}$$

Dans cette formule on suppose les puissances de quantités négatives exclues de la série

$$\left(m-rm^{\frac{1}{2}}\right)^a-\frac{m}{1}\left(m-rm^{\frac{1}{2}}-2\right)^a+\frac{m(m-1)}{1.2}\left(m-rm^{\frac{1}{2}}-4\right)^a-\ldots.$$

Corollaire II. — Si l'on veut appliquer la formule (34) aux diverses hypothèses dans lesquelles a est un nombre entier, il suffira de calculer les diverses valeurs de M_α qui correspondent à des valeurs entières positives ou négatives de l'indice α. On y parvient aisément au moyen des formules (31) et (32). En faisant successivement dans ces formules

$$1 \mp k = \alpha = -5, \quad -4, \quad -3, \quad -2, \quad -1, \quad 0, \quad 1, \quad 2, \quad 3, \quad 4, \quad 5,$$

on trouvera

$$(35) \quad \left\{ \begin{aligned}
M_{-5} &= \left(\frac{3}{2\pi}\right)^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{3}{2}r^2} \frac{3r}{8}(5 - 10r^2 + 3r^4), \\
M_{-4} &= \frac{3}{8\pi^{\frac{1}{2}}} e^{-\frac{3}{2}r^2}(1 - 6r^2 + 3r^4), \\
M_{-3} &= -\left(\frac{3}{2\pi}\right)^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{3}{2}r^2} \frac{3r}{4}(1 - r^2), \\
M_{-2} &= -\frac{1}{4\pi^{\frac{1}{2}}} e^{-\frac{3}{2}r^2}(1 - 3r^2), \\
M_{-1} &= \left(\frac{3}{2\pi}\right)^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{3}{2}r^2} \frac{r}{2}, \\
M_0 &= \frac{1}{2\pi^{\frac{1}{2}}} e^{-\frac{3}{2}r^2}, \\
M_1 &= \frac{1}{2}\left[1 - \left(\frac{6}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \int_0^r e^{-\frac{3}{2}r^2} dr\right], \\
M_2 &= \frac{1}{\pi^{\frac{1}{2}}} e^{-\frac{3}{2}r^2} - \left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{1}{2}} r \left[1 - \left(\frac{6}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \int_0^r e^{-\frac{3}{2}r^2} dr\right], \\
M_3 &= -\left(\frac{3}{2\pi}\right)^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{3}{2}r^2} r + \frac{1 + 3r^2}{2}\left[1 - \left(\frac{6}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \int_0^r e^{-\frac{3}{2}r^2} dr\right], \\
M_4 &= \frac{1}{3\pi^{\frac{1}{2}}} e^{-\frac{3}{2}r^2}(2 + 3r^2) - \left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{1}{2}} r(1 + r^2)\left[1 - \left(\frac{6}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \int_0^r e^{-\frac{3}{2}r^2} dr\right], \\
M_5 &= -\left(\frac{3}{2\pi}\right)^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{3}{2}r^2} \frac{r}{6}(5 + 3r^2) + \frac{1 + 6r^2 + 3r^4}{4}\left[1 - \left(\frac{6}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \int_0^r e^{-\frac{3}{2}r^2} dr\right].
\end{aligned} \right.$$

Exemple I. — Soit $a = m - 2$. La formule (34) donnera

$$(36) \quad \left\{ \begin{aligned}
&\frac{\left(m - rm^{\frac{1}{2}}\right)^{m-2} - \frac{m}{1}\left(m - rm^{\frac{1}{2}} - 2\right)^{m-2} + \ldots}{1.2.3\ldots(m-2).2^m} \\
&= \frac{6}{m}\left(M_{-1} - \frac{1}{5m}M_{-5} + \ldots\right) = \left(\frac{3}{2\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{3r}{m} e^{-\frac{3}{2}r^2}\left[1 - \frac{3}{20m}(5 - 10r^2 + 3r^4) + \ldots\right].
\end{aligned} \right.$$

Exemple II. — Soit $a = m - 1$. La formule (34) donnera

$$(37) \quad \left\{ \begin{aligned}
&\frac{\left(m - rm^{\frac{1}{2}}\right)^{m-1} - \frac{m}{1}\left(m - rm^{\frac{1}{2}} - 2\right)^{m-1} + \ldots}{1.2.3\ldots(m-1).2^m} \\
&= \frac{6^{\frac{1}{2}}}{m^{\frac{1}{2}}}\left(M_0 - \frac{1}{5m}M_{-4} + \ldots\right) \\
&= \left(\frac{3}{2m\pi}\right)^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{3}{2}r^2}\left[1 - \frac{3}{20m}(1 - 6r^2 + 3r^4) + \ldots\right].
\end{aligned} \right.$$

Exemple III. — Soit $a = m$. La formule (34) donnera

$$(38) \quad \left\{ \begin{aligned}
&\frac{\left(m - rm^{\frac{1}{2}}\right)^{m} - \frac{m}{1}\left(m - rm^{\frac{1}{2}} - 2\right)^{m} + \ldots}{1.2.3\ldots m.2^m} \\
&= M_1 - \frac{1}{5m}M_{-3} + \ldots \\
&= \frac{1}{2} - \left(\frac{3}{2\pi}\right)^{\frac{1}{2}}\left[\int_0^r e^{-\frac{3}{2}r^2} dr - \frac{3}{20m} r(1 - r^2) e^{-\frac{3}{2}r^2} + \ldots\right].
\end{aligned} \right.$$

Exemple IV. — Soit $a = m + 1$. — La formule (34) donnera

$$(39) \quad \left\{ \begin{aligned}
&\frac{\left(m - rm^{\frac{1}{2}}\right)^{m+1} - \frac{m}{1}\left(m - rm^{\frac{1}{2}} - 2\right)^{m+1} + \ldots}{1.2.3\ldots(m+1).2^m} \\
&= \frac{m^{\frac{1}{2}}}{6^{\frac{1}{2}}}\left(M_2 - \frac{1}{5m}M_{-2} + \ldots\right) \\
&= m^{\frac{1}{2}}\left[-\frac{r}{2} + \left(\frac{3}{2\pi}\right)^{\frac{1}{2}}\left(r\int_0^r e^{-\frac{3}{2}r^2} dr + \frac{e^{-\frac{3}{2}r^2}}{3} + \frac{1 - 3r^2}{60m} e^{-\frac{3}{2}r^2} + \ldots\right)\right].
\end{aligned} \right.$$

Exemple V. — Soit $a = m + 2$. La formule (34) donnera

$$
(40)\quad \left\{
\begin{aligned}
&\frac{\left(m - rm^{\frac{1}{2}}\right)^{m+2} - \frac{m}{1}\left(m - rm^{\frac{1}{2}} - 2\right)^{m+2} + \dots}{1.2.3\dots(m+2).2^m}\\
&= \frac{m}{6}\left(\mathrm{M}_3 - \frac{1}{5m}\mathrm{M}_{-1} + \dots\right)\\
&= m\left[-\left(\frac{3}{2\pi}\right)^{\frac{1}{2}}\frac{r}{6}e^{-\frac{3}{2}r^2} + \frac{1+3r^2}{12}\left(1 - \frac{6^{\frac{1}{2}}}{\pi^{\frac{1}{2}}}\int_0^r e^{-\frac{3}{2}r^2}dr\right) - \frac{1}{10m}\left(\frac{3}{2\pi}\right)^{\frac{1}{2}} re^{-\frac{3}{2}r^2} + \dots\right].
\end{aligned}
\right.
$$

Exemple VI. — Soit $a = m + 3$. La formule (34) donnera

$$
(41)\quad \left\{
\begin{aligned}
&\frac{\left(m - rm^{\frac{1}{2}}\right)^{m+3} - \frac{m}{1}\left(m - rm^{\frac{1}{2}} - 2\right)^{m+3} + \dots}{1.2.3\dots(m+3).2^m}\\
&= \frac{m^{\frac{3}{2}}}{6^{\frac{3}{2}}}\left(\mathrm{M}_4 - \frac{1}{5m}\mathrm{M}_0 + \dots\right)\\
&= m^{\frac{3}{2}}\left[\left(\frac{3}{2\pi}\right)^{\frac{1}{2}}\frac{2+3r^2}{54}e^{-\frac{3}{2}r^2} - \frac{r(1+r^2)}{12}\left(1 - \frac{6^{\frac{1}{2}}}{\pi^{\frac{1}{2}}}\int_0^r e^{-\frac{3}{2}r^2}dr\right) - \frac{1}{10m}\frac{e^{-\frac{3}{2}r^2}}{\pi^{\frac{1}{2}}} + \dots\right].
\end{aligned}
\right.
$$

Exemple VII. — Soit $a = m + 4$. — La formule (34) donnera

$$
(42)\quad \left\{
\begin{aligned}
&\frac{\left(m - rm^{\frac{1}{2}}\right)^{m+4} - \frac{m}{1}\left(m - rm^{\frac{1}{2}} - 2\right)^{m+4} + \dots}{1.2.3\dots(m+4).2^m}\\
&= \frac{m^2}{6^2}\left(\mathrm{M}_5 - \frac{1}{5m}\mathrm{M}_1 + \dots\right)\\
&= m^2\left[-\left(\frac{3}{2\pi}\right)^{\frac{1}{2}}\frac{r(5+3r^2)}{216}e^{-\frac{3}{2}r^2}\right.\\
&\qquad \left. + \frac{1+6r^2+3r^4}{128}\left(1 - \frac{6^{\frac{1}{2}}}{\pi^{\frac{1}{2}}}\int_0^r e^{-\frac{3}{2}r^2}dr\right) - \frac{1}{10m}\left(1 - \frac{6^{\frac{1}{2}}}{\pi^{\frac{1}{2}}}\int_0^r e^{-\frac{3}{2}r^2}dr\right) + \dots\right].
\end{aligned}
\right.
$$

Si dans les équations (36), (37), (38) et (39) on change r en $-r$, on obtiendra les formules des p. 170 et 171 du *Calcul des probabilités* (1).

(1) *Œuvres de Laplace*, t. VII, p. 173, 174.

Remarque. — On peut déduire aisément de l'équation (31) la valeur de $\mathrm{M}_{-\lambda}$, toutes les fois que λ est un nombre entier positif. Dans le même cas, la valeur de M_λ est donnée par la formule

$$\mathrm{M}_\lambda = \frac{1}{\pi^{\frac{1}{2}}\Gamma(\lambda)}\int_{\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{1}{2}}r}^{\infty}\left(2z - 6^{\frac{1}{2}}r\right)^{\lambda-1}e^{-z^2}dz,$$

l'intégrale étant prise entre les limites $z = \left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{1}{2}}r$, $z = \infty$. On a d'ailleurs entre ces mêmes limites

$$
\begin{aligned}
&\int\left(2z - 6^{\frac{1}{2}}r\right)^{\lambda-1}e^{-z^2}dz\\
&\quad = 2(\lambda-2)\int\left(2z - 6^{\frac{1}{2}}r\right)^{\lambda-3}e^{-z^2}dz - 6^{\frac{1}{2}}r\int\left(2z - 6^{\frac{1}{2}}r\right)^{\lambda-2}e^{-z^2}dz,
\end{aligned}
$$

et, par suite, si l'on fait

$$\mathrm{M}_\lambda = \frac{1}{\Gamma(\lambda)}\mathrm{N}_\lambda,$$

on aura encore

$$\mathrm{N}_\lambda = 2(\lambda-2)\mathrm{N}_{\lambda-2} - 6^{\frac{1}{2}}r\mathrm{N}_{\lambda-1}.$$

Cela posé, les valeurs générales de $\mathrm{M}_{-\lambda}$ et de M_λ (λ étant un nombre entier positif) se trouveront déterminées par les deux formules

$$
(43)\quad \mathrm{M}_{-\lambda} = \frac{e^{-\frac{3}{2}r^2}}{2^{\lambda+1}\pi^{\frac{1}{2}}}\left[\left(6^{\frac{1}{2}}r\right)^\lambda - \frac{\lambda(\lambda-1)}{1}\left(6^{\frac{1}{2}}r\right)^{\lambda-2} + \frac{\lambda(\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-3)}{1.2}\left(6^{\frac{1}{2}}r\right)^{\lambda-4} - \dots\right],
$$

$$
(44)\quad \left\{
\begin{aligned}
\mathrm{M}_\lambda = \frac{(-1)^\lambda}{\pi^{\frac{1}{2}}\Gamma(\lambda)}\Bigg(&\Bigg\{\left(6^{\frac{1}{2}}r\right)^{\lambda-2} + \left[\frac{(\lambda-1)(\lambda-2)}{1} - \frac{1.2}{1}\right]\left(6^{\frac{1}{2}}r\right)^{\lambda-4}\\
&\quad + \left[\frac{(\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-3)(\lambda-4)}{1.2} - \frac{1.2}{1}\frac{(\lambda-1)(\lambda-2)}{1}\right.\\
&\qquad\qquad \left. + \frac{1.2.3.4}{1.2}\right]\left(6^{\frac{1}{2}}r\right)^{\lambda-6} + \dots\Bigg\}e^{-\frac{3}{2}r^2}\\
&- \left[\left(6^{\frac{1}{2}}r\right)^{\lambda-1} + \frac{(\lambda-1)(\lambda-2)}{1}\left(6^{\frac{1}{2}}r\right)^{\lambda-3}\right.\\
&\quad \left. + \frac{(\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-3)(\lambda-4)}{1.2}\left(6^{\frac{1}{2}}r\right)^{\lambda-5} + \dots\right]\frac{\pi^{\frac{1}{2}}}{2}\left[1 - \left(\frac{6}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}}\int_{\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{1}{2}}r}^{\infty}e^{-\frac{3}{2}r^2}dr\right]\Bigg).
\end{aligned}
\right.
$$

Problème. — On demande la valeur approchée de la série

$$(1)\qquad (m-s')^a-\frac{m}{1}(m-s'-1)^a+\frac{m(m-1)}{1.2}(m-s'-2)^a-\ldots=\mathrm{A}_{m-s'},$$

de laquelle on suppose exclues les puissances des quantités négatives; a et m étant de très grands nombres supérieurs à s', et m étant inférieur à a.

Solution. — Nous avons donné l'expression de la série (1) au moyen d'une intégrale définie qui renferme une constante arbitraire k dont on peut disposer à volonté. L'intégrale dont il s'agit est

$$(2)\qquad \int_0^\infty \frac{(e^{2k}-2e^k\cos x+1)^{\frac{m}{2}}}{(k^2+x^2)^{\frac{a+1}{2}}}\cos[(a+1)t+s'x-mv]\,dx,$$

t et v étant déterminés par les deux équations

$$(3)\qquad \begin{cases} t=\operatorname{arc\,tang}\dfrac{x}{k}, \\ v=\operatorname{arc\,tang}\dfrac{\sin x}{\cos x-e^{-k}}. \end{cases}$$

Il ne reste plus maintenant qu'à déterminer, au moins pour une valeur particulière de k, la valeur approchée de cette intégrale.

Faisons, pour abréger,

$$(4)\qquad \begin{cases} \mathrm{P}=\dfrac{(e^{2k}-2e^k\cos x+1)^{\frac{m}{2}}}{(k^2+x^2)^{\frac{a+1}{2}}}, \\ \mathrm{Q}=(a+1)t+s'x-mv; \end{cases}$$

l'intégrale proposée deviendra

$$(5)\qquad \int_0^\infty \mathrm{P}\cos\mathrm{Q}\,dx.$$

Ici la fonction sous le signe $\int$ est composée de deux facteurs, dont

l'un, désigné par P, reste toujours positif, et dont l'autre, désigné par cosQ, est, pour des valeurs croissantes de x, alternativement positif et négatif.

La fonction P a plusieurs maxima et minima qui correspondent aux diverses valeurs de x déterminées par l'équation

$$(6)\qquad m\frac{\sin x}{e^k-2\cos x+e^{-k}}=(a+1)\frac{x}{k^2+x^2}.$$

Le premier maximum correspond à $x=0$; et sa valeur que nous désignerons par M est

$$(7)\qquad \mathrm{M}=\frac{(e^k-1)^m}{k^{a+1}}.$$

Pour chacun des autres maxima, la valeur de P peut se mettre sous la forme suivante

$$(8)\qquad \mathrm{P}=\left(\frac{me^k}{a+1}\right)^{\frac{m}{2}}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{m}{2}}\frac{1}{(k^2+x^2)^{\frac{a+1-m}{2}}}.$$

D'ailleurs, comme, pour une valeur de x différente de zéro, on a toujours, abstraction faite du signe,

$$\frac{\sin x}{x}<1,\qquad \frac{1}{k^2+x^2}<\frac{1}{k^2};$$

il en résulte que chacune des valeurs de P déterminées par l'équation (8) sera inférieure à

$$\left(\frac{mk^2e^k}{a+1}\right)^{\frac{m}{2}}\frac{1}{k^{a+1}},$$

et, par suite, à

$$\frac{k^me^{\frac{km}{2}}}{k^{a+1}}.$$

En conséquence, la valeur de $\frac{\mathrm{P}}{\mathrm{M}}$ sera toujours inférieure à

$$\frac{k^me^{\frac{km}{2}}}{(e^k-1)^m}=\frac{k}{\left(e^{\frac{k}{2}}-e^{-\frac{k}{2}}\right)^m}.$$

D'ailleurs on a, quelle que soit la valeur de k,

$$k < e^{\frac{k}{2}} - e^{-\frac{k}{2}}.$$

On aura donc aussi

$$P < M,$$

quelle que soit la valeur que l'on donne à x, pourvu que cette valeur ne soit pas nulle. Enfin $x = \infty$ donne $P = 0$. Si donc on fait varier x entre les limites $x = 0$, $x = \infty$, la fonction P obtiendra une série de valeurs qui seront comprises entre les limites extrêmes $P = M$, $P = 0$. Par suite, si l'on fait

$$P = -Me^{-z^2}, \tag{9}$$

la valeur de z sera toujours réelle et comprise entre les limites $z = 0$, $z = \infty$.

Si l'on désigne par μ une quantité du même ordre que m et a, et si l'on fait, pour abréger,

$$(10)\quad \begin{cases} \dfrac{1}{2}\left[\dfrac{a+1}{k^2} - \dfrac{m}{\left(e^{\frac{1}{2}k} - e^{-\frac{1}{2}k}\right)^2}\right] = A\mu, \\ \dfrac{a+1}{2}\,\dfrac{2}{3k^4} - \dfrac{1}{2\left(e^{\frac{1}{2}k} - e^{-\frac{1}{2}k}\right)^2}\left[\dfrac{a+1}{\left(e^{\frac{1}{2}k} - e^{-\frac{1}{2}k}\right)^2} + \dfrac{m}{12}\right] = B\mu, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots; \end{cases}$$

on tirera de l'équation (9), après y avoir remis pour P sa valeur,

$$z^2 = \mu(Ax^2 - Bx^4 + \dots), \tag{11}$$

d'où l'on conclura par le retour des séries

$$(12)\quad \begin{cases} x = \dfrac{z}{A^{\frac{1}{2}}\mu^{\frac{1}{2}}}\left(1 + \dfrac{B}{2A^2\mu}z^2 + \dots\right), \\ dx = \dfrac{1}{A^{\frac{1}{2}}\mu^{\frac{1}{2}}}\left(1 + \dfrac{3B}{2A^2\mu}z^2 + \dots\right)dz. \end{cases}$$

Pour des valeurs de z peu considérables, les séries renfermées dans les seconds membres des équations (12) seront très convergentes, au moins dans les premiers termes. D'ailleurs, pour de grandes valeurs de z, la valeur de P déterminée par l'équation (9) sera sensiblement nulle. On pourra donc, sans nul inconvénient, supposer, dans l'intégrale

$$\int_0^\infty P\cos Q\,dx,$$

$$P\,dx = -\frac{M}{A^{\frac{1}{2}}\mu^{\frac{1}{2}}}\left(1 + \frac{3Bz^2}{2A^2\mu} + \dots\right)e^{-z^2}dz, \tag{13}$$

et s'arrêter dans le second membre aux premiers termes de la série

$$1 + \frac{3Bz^2}{2A^2\mu} + \dots.$$

Il nous reste à développer, s'il est possible, suivant les puissances ascendantes de z, et en une série qui soit convergente pour des valeurs de z peu considérables, la fonction désignée par

$$\cos Q.$$

Pour qu'on puisse effectuer ce développement de manière à remplir les conditions exigées, z conservant d'ailleurs une valeur arbitraire, il est nécessaire que la fonction Q soit, pour des valeurs de z peu considérables, une quantité fort petite. Or, si l'on fait, pour abréger,

$$(14)\quad \begin{cases} \dfrac{a+1}{k} + s' - \dfrac{m}{1-e^{-k}} = C\mu, \\ \dfrac{a+1}{3k^3} - \dfrac{m}{3(1-e^{-k})^2}\left(\dfrac{1}{2} + \dfrac{e^{-2k}}{1-e^{-k}}\right) = D\mu, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \end{cases}$$

la valeur de Q, développée suivant les puissances ascendantes de x, sera

$$Q = \mu(Cx + Dx^3 + \ldots); \tag{15}$$

et, par suite, le premier terme du développement de Q suivant les puissances ascendantes de z sera

$$\frac{C}{A^{\frac{1}{2}}} \mu^{\frac{1}{2}} z.$$

Ce premier terme aura donc, en général, une valeur très considérable, et sera de l'ordre de $\mu^{\frac{1}{2}}$, à moins que l'on ne détermine la constante arbitraire k de manière que C devienne une quantité très petite d'un ordre supérieur à celui de

$$\frac{1}{\mu^{\frac{1}{2}}}.$$

Parmi les diverses manières de remplir cette condition, nous choisirons la plus simple, qui consiste à faire

$$C = 0,$$

ou, ce qui revient au même, à déterminer k par l'équation

$$\frac{a+1}{k} + s' - \frac{m}{1 - e^{-k}} = 0. \tag{16}$$

On a, dans cette hypothèse,

$$\left\{\begin{aligned} Q &= \mu D x^3 + \ldots = \frac{D}{A^{\frac{3}{2}}} \frac{z^3}{\mu^{\frac{1}{2}}} + \ldots, \\ \cos Q &= 1 - \frac{D^2}{2A^3\mu} z^6 + \ldots. \end{aligned}\right. \tag{17}$$

La dernière des équations (17), jointe à l'équation (13), donne

$$P \cos Q \, dx = \frac{M}{A^{\frac{1}{2}} \mu^{\frac{1}{2}}} \left(1 + \frac{3AB z^2 - D^2 z^6}{2A^3\mu} + \ldots\right) e^{-z^2} dz. \tag{18}$$

On a d'ailleurs

$$\int_0^\infty e^{-z^2} dz = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}, \qquad \int_0^\infty z^2 e^{-z^2} dz = \frac{1}{4}\sqrt{\pi}, \qquad \int_0^\infty z^6 e^{-z^2} dz = \frac{15}{16}\sqrt{\pi}.$$

On aura donc, par suite,

$$\int_0^\infty P \cos Q \, dx = \frac{M\pi^{\frac{1}{2}}}{2A^{\frac{1}{2}}\mu^{\frac{1}{2}}} \left(1 + \frac{12AB - 15D^2}{16A^3\mu} + \ldots\right). \tag{19}$$

Si l'on substitue la valeur précédente de $\int_0^\infty P \cos Q \, dx$ dans la valeur de $A_{m-s'}$ donnée par l'équation (31) du Mémoire, et si l'on remplace

$$\Gamma(a+1) = \int_0^\infty x^a e^{-x} dx$$

par

$$a^{a+\frac{1}{2}} e^{-a} (2\pi)^{\frac{1}{2}} \left(1 + \frac{1}{12a} + \ldots\right),$$

on trouvera

$$\left\{\begin{aligned} A_{m-s'} &= \frac{M a^{a+\frac{1}{2}} e^{-a-ks'}}{(2A\mu)^{\frac{1}{2}}} \left(1 + \frac{12AB - 15D^2}{16A^3\mu} + \frac{1}{12a} + \ldots\right) \\ &= \frac{\left(\frac{a}{k}\right)^{a+1} e^{-ks'-a}(e^k - 1)^m}{(2aA\mu)^{\frac{1}{2}}} \left(1 + \frac{12AB - 15D^2}{16A^3\mu} + \frac{1}{12a} + \ldots\right). \end{aligned}\right. \tag{20}$$

Corollaire I. — Si dans le second membre de l'équation (20) on suppose s' négatif et égal à $-s$, on aura

$$A_{m-s'} = \Delta^m s^a.$$

L'équation (20) deviendra donc alors

$$\Delta^m s^a = \frac{\left(\frac{a}{k}\right)^{a+1} e^{ks-a}(e^k - 1)^m}{(2A\mu)^{\frac{1}{2}}} \left(1 + \frac{12AB - 15D^2}{15A^3\mu} + \frac{1}{12a} + \ldots\right). \tag{21}$$

Dans le même cas, l'équation (16), qui détermine la valeur de k, deviendra

$$\frac{a+1}{k} - s' - \frac{m}{1-e^{-k}} = 0.$$

Quant aux valeurs de A, B, D, elles seront toujours déterminées par les équations (10) et (14).

On pourrait obtenir immédiatement la formule (21) en appliquant à l'équation (26) de la p. 534 les mêmes raisonnements que nous avons employés pour déduire la formule (20) de l'équation (31). Au reste, on doit observer que la formule (21), telle qu'on vient de la donner, coïncide parfaitement avec l'équation (μ') de M. Laplace.

Corollaire II. — La formule (20) suppose qu'on puisse toujours tirer de l'équation (16) une valeur positive de k. C'est ce dont il est facile de s'assurer. En effet, si dans l'équation (16) on suppose k très petit, le premier membre sera positif et égal à

$$\frac{a+1-m}{k},$$

et, si l'on suppose k infini, ce premier membre deviendra négatif et égal à

$$-(m-s').$$

Il y a donc entre les limites 0 et ∞ une valeur de k qui rend le premier membre de l'équation (16) égal à zéro. Il serait d'ailleurs facile de prouver que cette valeur est unique.

Pour que la formule (20) puisse être employée, il est nécessaire que la quantité k, déterminée par l'équation (16), ait une valeur sensible, ce qui exige que

$$a+1-m$$

ne soit pas fort petit relativement à

$$s-\frac{m}{2}.$$

Si l'on suppose, par exemple,

$$s=\frac{m}{2}+\frac{1}{2}r\sqrt{m},$$

il faudra, pour que l'on puisse faire usage de la formule (20), que la différence $a-m$ soit d'un ordre égal ou supérieur à celui de $\sqrt{m}$.

FIN DU TOME I DE LA SECONDE SÉRIE.

TABLE DES MATIÈRES

DU TOME PREMIER.

SECONDE SÉRIE.

MÉMOIRES DIVERS ET OUVRAGES.

I. — MÉMOIRES PUBLIÉS DANS DIVERS RECUEILS AUTRES QUE CEUX DE L'ACADÉMIE.

MÉMOIRES EXTRAITS DU « JOURNAL DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE ».

Pages

Recherches sur les polyèdres (Premier Mémoire) 7

Sur les polygones et les polyèdres (Second Mémoire) 26

Recherches sur les nombres.............................. 39

Mémoire sur le nombre des valeurs qu'une fonction peut acquérir lorsqu'on y permute de toutes les manières possibles les quantités qu'elle renferme.......... 64

Mémoire sur les fonctions qui ne peuvent obtenir que deux valeurs égales et de signes contraires par suite des transpositions opérées entre les variables qu'elles renferment.............................. 91

Mémoire sur la détermination du nombre des racines réelles dans les équations algébriques.............................. 170

Sur les racines imaginaires des équations.............................. 258

Mémoire sur une espèce particulière du mouvement des fluides.................. 264

Mémoire sur l'intégration des équations linéaires aux différentielles partielles et à coefficients constants.............................. 275

Mémoire sur le système de valeurs qu'il faut attribuer à divers éléments déterminés

Pages

par un grand nombre d'observations, pour que la plus grande de toutes les erreurs, abstraction faite du signe, devienne un maximum 358

Mémoire sur l'intégration d'une certaine classe d'équations aux différences partielles et sur les phénomènes dont cette intégration fait connaître les lois dans les questions de Physique mathématique 403

Calcul des indices des fonctions 416

Mémoire sur diverses formules relatives à la théorie des intégrales définies et sur la conversion des différences finies des puissances en intégrales de cette espèce 467

FIN DE LA TABLE DES MATIÈRES DU TOME I DE LA SECONDE SÉRIE.

33722 Paris. — Imprimerie GAUTHIER-VILLARS, quai des Grands-Augustins, 55.

A.C