MÉMOIRE [1]

SUR LE SYSTÈME DE VALEURS

QU'IL FAUT ATTRIBUER A DIVERS ÉLÉMENTS DÉTERMINÉS PAR UN GRAND NOMBRE D'OBSERVATIONS, POUR QUE LA PLUS GRANDE DE TOUTES LES ERREURS, ABSTRACTION FAITE DU SIGNE, DEVIENNE UN MINIMUM.

Le P. Boscowich a fait voir comment on pouvait résoudre la question précédente, dans le cas où l'on n'a qu'un seul élément à considérer. M. Laplace a examiné une question semblable dans le troisième Livre de la *Mécanique céleste,* qui traite de la figure du sphéroïde terrestre, et a donné une méthode facile pour déterminer la figure elliptique, dans laquelle le plus grand écart des degrés du méridien, abstraction faite du signe, devient un minimum. On a dans ce cas deux éléments à considérer, au lieu d'un seul. Mais la fonction des éléments qui représente les erreurs n'est pas la plus générale possible. Il restait à étendre la même théorie au cas où cette fonction devient la plus générale de son espèce, et où le nombre des éléments est supérieur à deux. M. Laplace ayant bien voulu m'indiquer ce sujet de recherches, je me suis efforcé de répondre à son attente; et je suis parvenu à une méthode générale qui renferme toutes les autres, et qui reste toujours la même, quel que soit le nombre des éléments que l'on considère. Tel est l'objet du Mémoire que j'ai l'honneur de soumettre à la Classe. Voici d'abord en quoi consiste le problème qu'il s'agit de résoudre.

[1] Présenté à la première Classe de l'Institut, le 28 février 1814.

Lorsque, pour déterminer un élément inconnu, par exemple une longueur, un angle, etc., on a fait un grand nombre d'observations ou sur ces éléments eux-mêmes, ou sur d'autres quantités qui en dépendent, alors chaque observation prise à part détermine une valeur particulière de l'élément. Si l'on a déjà conclu, soit des observations que l'on considère, soit d'autres observations faites antérieurement, une valeur approchée de l'élément, pour déduire de cette valeur la véritable, il suffira d'y ajouter une petite correction que l'on peut désigner par la variable x. Chaque observation, prise séparément et considérée comme exacte, détermine une valeur particulière de la correction. Mais si, au lieu de considérer cette équation comme exacte, on suppose qu'elle soit en erreur sur le résultat vrai d'une certaine quantité, alors la correction à faire, ou la variable x qui la représente, deviendra fonction de cette erreur, et réciproquement. Par suite, l'erreur de chaque observation pourra en général être exprimée par une série ordonnée suivant les puissances de la variable, et dans laquelle, vu la petitesse de la correction à faire, on pourra s'arrêter à la première puissance de celle-ci. Cette erreur sera donc représentée par un binome, dont le premier terme sera constant, et dont le second renfermera seulement la première puissance de la variable x. Si les observations données doivent servir à déterminer plusieurs éléments au lieu d'un seul, en désignant les corrections respectives de ceux-ci par les variables x, y, z, ..., on parviendra de la même manière à représenter chaque erreur par un polynome du premier degré en x, y, z, ... Cela posé, *il s'agit de trouver pour ces variables un système de valeurs*

$$x=\xi, \quad y=\eta, \quad z=\zeta, \quad \ldots,$$

tel que le plus grand des polynomes que l'on considère, ou, ce qui revient au même, la plus grande des erreurs qu'ils représentent, devienne, abstraction faite du signe, un minimum.

Le problème se simplifie considérablement, lorsque les polynomes qui représentent les erreurs sont deux à deux égaux et de signes contraires. Alors, en effet, pour des valeurs déterminées des variables

$x, y, z, \ldots$, la plus grande des erreurs positives est égale à la plus grande des erreurs négatives; et la question se réduit à déterminer le système des valeurs de $x, y, z, \ldots$, pour lequel la plus grande des erreurs positives devient un minimum. Si les erreurs ne sont pas deux à deux égales et de signes contraires, on pourra ramener ce cas au précédent, en doublant par la pensée le nombre des erreurs et joignant, aux polynomes qui représentent les erreurs données, d'autres polynomes égaux et de signes contraires, destinés à représenter les erreurs fictives que l'on se propose de considérer. Si parmi les erreurs données il s'en trouvait déjà plusieurs qui fussent égales et de signes contraires, il serait inutile d'en doubler le nombre. Au moyen de l'artifice précédent, on écarte les difficultés qui pouvaient naître de la distinction des signes, et l'on est alors autorisé à considérer une quantité négative plus grande comme plus petite qu'une autre quantité négative moindre. La question proposée se trouve ainsi, comme on l'a déjà remarqué, ramenée à la suivante :

$x, y, z, \ldots$ étant les corrections des éléments que l'on considère, déterminer pour ces variables un système de valeurs tel que la plus grande des erreurs positives devienne un minimum.

Je vais exposer en peu de mots la méthode qui conduit à la solution de ce nouveau problème.

Soient $x = \xi$, $y = \eta$, $z = \zeta$, ..., les valeurs des inconnues qui résolvent la question. Chacune de ces valeurs devra être choisie parmi une infinité d'autres. Il semble donc au premier abord que, pour arriver à la solution cherchée, il faudrait faire varier séparément chacune des corrections $x, y, z, \ldots$ et examiner quelle influence peut avoir la variation de chacune d'elles sur l'accroissement et la diminution des erreurs que l'on considère. On peut néanmoins atteindre le but qu'on se propose, en se contentant de faire varier une seule correction, z par exemple, ainsi qu'on va le faire voir.

Supposons un moment le problème déjà résolu pour un nombre d'éléments inférieur d'une unité à celui que l'on considère; concevons

de plus que l'on donne successivement à z toutes les valeurs possibles depuis $z = -\infty$ jusqu'à $z = +\infty$, et que pour chaque valeur de z on détermine les autres variables $x, y, \ldots$, par la condition que la plus grande erreur devienne un minimum. On obtiendra de cette manière une suite de systèmes de valeurs de $x, y, z, \ldots$, parmi lesquels se trouvera nécessairement le système cherché; et, pour obtenir ce dernier, il suffira de choisir, entre les minima des plus grandes erreurs correspondant aux diverses valeurs de z, celui qui est lui-même plus petit que tous les autres. Ce dernier correspond à la valeur ζ de z; et par suite, si cette valeur était connue, il n'y aurait plus de choix à faire, et la question se trouverait ainsi ramenée au cas où l'on a un élément de moins à considérer. Mais, comme on ne peut espérer de découvrir immédiatement la valeur ζ de z qui satisfait à la question, il faudra commencer par donner à z une valeur arbitraire, en supposant, par exemple, $z = 0$, et déterminer les valeurs correspondantes de $x, y, \ldots$, par la condition ci-dessus énoncée, savoir, que la plus grande erreur devienne un minimum. Après avoir ainsi obtenu le minimum des plus grandes erreurs pour la valeur zéro de z, il ne restera plus qu'à faire varier z de manière à faire décroître le minimum dont il s'agit, jusqu'à ce qu'il acquière la plus petite valeur possible. La méthode qu'il faut employer pour y parvenir est fondée sur le théorème suivant, démontré par M. Laplace :

Quel que soit le nombre des éléments renfermés dans les erreurs que l'on considère, si l'on fait varier, ou tous ces éléments, ou seulement quelques-uns d'entre eux, et que l'on détermine les valeurs des éléments variables qui rendent la plus grande erreur un minimum, pour les valeurs dont il s'agit, plusieurs erreurs deviendront à la fois égales entre elles et les plus grandes de toutes, et le nombre de ces dernières surpassera toujours au moins d'une unité le nombre des éléments variables.

Pour montrer comment on peut faire l'application de ce théorème à la question proposée, supposons que l'on ait trois éléments à considérer. Soient x, y et z les corrections de ces trois éléments. Soit n le nombre des erreurs, et désignons celles-ci par $e_1, e_2, \ldots, e_n$. En vertu de ce qui précède, on commencera par supposer dans toutes les erreurs $z = 0$, et l'on déterminera, dans cette hypothèse, les valeurs de x et de y qui rendent la plus grande erreur un minimum. Soient

$$x = \alpha, \quad y = \beta$$

les valeurs dont il s'agit. Il suit du théorème précédent que, pour les valeurs α, β et 0 des variables x, y, z, trois erreurs, par exemple

$$e_p, \quad e_q, \quad e_r,$$

deviendront égales entre elles et les plus grandes de toutes. De plus, la double équation

$$e_p = e_q = e_r$$

servira à déterminer les valeurs α et β de x et de y qui correspondent à $z = 0$. Si, maintenant, on fait varier z d'une très petite quantité en plus ou en moins, les trois erreurs e_p, e_q, e_r jouiront encore de la même propriété, c'est-à-dire qu'elles seront toujours les plus grandes de toutes pour les valeurs de x et de y qui rendent la plus grande erreur un minimum, et ces mêmes valeurs seront encore déterminées par l'équation double

$$e_p = e_q = e_r.$$

Seulement, pour faire en sorte que la valeur commune de ces trois erreurs diminue, il pourra arriver que l'on soit obligé ou de faire croître ou de faire diminuer z. Supposons, pour fixer les idées, que cette valeur diminue quand z augmente. z continuant à croître, les erreurs e_p, e_q, e_r diminueront simultanément, en demeurant toujours les plus grandes de toutes, jusqu'à ce qu'une nouvelle erreur e_s parvienne à les égaler pour les surpasser ensuite. Soit γ_1 la valeur de z pour laquelle les quatre erreurs e_p, e_q, e_r, e_s deviennent égales entre elles; et désignons par α_1 et β_1 les valeurs correspondantes de x et de y. Le système des valeurs

$$x = \alpha_1, \quad y = \beta_1, \quad z = \gamma_1$$

sera déterminé par la triple équation

$$e_p = e_q = e_r = e_s,$$

et, pour la valeur γ_1 de z, ce système sera celui qui rend la plus grande erreur un minimum. D'ailleurs, il suit du théorème énoncé ci-dessus que, pour les valeurs des inconnues qui résolvent la question proposée, quatre erreurs doivent être égales entre elles et les plus grandes de toutes. Cette dernière condition étant satisfaite, en même temps que la précédente, pour les trois valeurs

$$x = \alpha_1, \quad y = \beta_1, \quad z = \gamma_1,$$

il convient de rechercher si celles-ci ne résoudraient pas le problème. On y parvient de la manière suivante :

Lorsqu'on fait croître z au delà de γ_1, les trois erreurs e_p, e_q, e_r cessent d'être conjointement les plus grandes de toutes pour les valeurs de x et de y qui rendent la plus grande erreur un minimum; et cette propriété appartient alors à deux d'entre elles prises conjointement avec la nouvelle erreur e_s. On détermine facilement quelles sont, parmi les trois erreurs e_p, e_q, e_r, les deux qu'il convient de choisir pour cet objet. Soient, par exemple, e_q, e_r ces deux erreurs; si l'on fait croître z au delà de γ_1, la valeur commune des trois erreurs e_q, e_r, e_s ira en croissant ou en diminuant. Dans le premier cas, les valeurs α_1, β_1, γ_1 de x, y et z satisferont à la question proposée. Dans le second cas, les erreurs dont il s'agit continueront à décroître, en restant toujours les plus grandes de toutes pour les valeurs de x et de y qui rendent la plus grande erreur un minimum, jusqu'à ce qu'une nouvelle erreur parvienne à les égaler toutes trois pour les surpasser ensuite. Alors on obtiendra de nouveau une équation triple entre quatre erreurs. On pourra juger, comme précédemment, si le système des valeurs des inconnues déterminé par cette équation triple satisfait à la question proposée. Dans le cas contraire, en suivant toujours la même marche, on finira par arriver à la solution du problème.

Les erreurs e_p, e_q, e_r étant supposées connues, pour découvrir l'erreur e_s, il suffit évidemment de chercher celle qui, égalée aux trois premières, détermine la plus petite valeur positive de la variable z. Mais il peut arriver que, pour cette valeur de z, plusieurs erreurs, par exemple $e_s, e_t, e_u, \ldots$, deviennent à la fois égales entre elles et aux trois premières. Désignons toujours par γ_1 la valeur dont il s'agit. Si l'on fait croître z au delà de γ_1, trois des erreurs suivantes

$$e_p, \quad e_q, \quad e_r, \quad e_s, \quad e_t, \quad e_u, \quad \ldots$$

deviendront conjointement les plus grandes de toutes pour les valeurs de x et de y qui rendent la plus grande erreur un minimum; et, sur ces trois erreurs, deux au plus devront être prises parmi les trois premières e_p, e_q, e_r. Sauf cette restriction, la combinaison qui renferme les trois nouvelles erreurs pourra être l'une quelconque de celles que l'on forme en assemblant trois à trois les erreurs

$$e_p, \quad e_q, \quad e_r, \quad e_s, \quad e_t, \quad e_u, \quad \ldots.$$

Pour juger quelle est parmi ces combinaisons celle qui mérite la préférence, on supposera que la variable z croisse au delà de γ_1 d'une quantité positive, mais indéterminée, représentée par k, et que les valeurs correspondantes α_1 et 6_1 des deux autres variables x et y reçoivent en même temps les accroissements positifs ou négatifs g et h. Les accroissements des erreurs $e_p, e_q, e_r, e_s, e_t, e_u, \ldots$, qui, par hypothèse, étaient toutes égales entre elles, se trouveront alors exprimés par des polynomes homogènes du premier degré en g, h et k; et il suffira de déterminer les valeurs respectives de g et de h pour lesquelles le plus grand de tous devient un minimum. k étant une quantité essentiellement positive, on pourra, sans nul inconvénient, diviser par k chacun de ces polynomes. Les quotients ne renfermeront plus de variables que les rapports des accroissements de x et de y à celui de z, et il ne restera plus qu'à déterminer ces deux rapports de telle manière que le plus grand des quotients que l'on considère devienne un minimum. Ainsi toutes les difficultés se trouvent réduites à la solution du problème général, dans le cas où l'on n'a que deux éléments à corriger.

On réduira de même les difficultés que présente cette dernière hypothèse aux difficultés qui subsistent, dans le cas où l'on n'a qu'un seul élément à considérer. Enfin l'on réduira celles-ci à la détermination de la plus grande erreur pour une valeur donnée de la variable, et alors la question proposée se trouvera complètement résolue.

On pourra de même, en général, quel que soit le nombre des variables, ramener la question proposée au cas où l'on a une variable de moins à considérer, et abaisser ensuite continuellement la difficulté, jusqu'à ce qu'elle disparaisse entièrement. Ainsi, par exemple, si m représente le nombre des variables, on commencera par donner à l'une d'elles, que je désignerai par z, une valeur arbitraire, en déterminant les autres de manière que la plus grande erreur devienne un minimum. Alors on obtiendra un système de valeurs pour lesquelles m erreurs différentes deviendront égales entre elles et les plus grandes de toutes. On fera ensuite varier z de manière à faire décroître la valeur commune des erreurs dont il s'agit, jusqu'à ce qu'une nouvelle erreur parvienne à les égaler toutes, pour les surpasser ensuite. Alors on obtiendra une équation entre $m+1$ erreurs différentes; et l'on jugera facilement si les valeurs des variables déterminées par cette équation satisfont à la question proposée. Dans le cas contraire, si l'on continue à faire varier z toujours dans le même sens, une nouvelle combinaison de m erreurs remplacera la première; et, en suivant la même marche, on finira nécessairement par arriver à la solution du problème. Le cas où, pour une même valeur de z, le nombre des erreurs égales entre elles et les plus grandes de toutes viendrait à surpasser $m+1$, ne présente aucune difficulté qu'il ne soit toujours aisé de résoudre, au moyen de l'artifice employé pour cet objet dans l'hypothèse de trois variables.

Lorsqu'on a un seul élément à corriger, la méthode précédente se réduit à celle qu'a donnée le P. Boscowich, pourvu que l'on suppose la première valeur de z, que l'on peut choisir arbitrairement, égale à l'infini négatif. On peut néanmoins, dans ce cas, simplifier la solution, en prenant pour première valeur de z celle qui rend égales entre elles les deux erreurs où cette variable a le plus grand coefficient positif et le plus grand coefficient négatif.

Si l'on a plusieurs éléments à considérer, les calculs deviennent beaucoup plus simples, dans le cas où quelqu'un de ces éléments a le même coefficient, au signe près, dans toutes les erreurs données. Ainsi, par exemple, si l'on considère deux éléments, et que le coefficient de l'un d'entre eux soit toujours égal à $+1$ ou à -1, on arrive à une méthode semblable à celle qu'a donnée M. Laplace pour déterminer, relativement à la Terre, la figure elliptique dans laquelle le plus grand écart des degrés du méridien devient, abstraction faite du signe, un minimum (A).

Je joins ici la démonstration des théorèmes que suppose la méthode précédente, et les formules relatives aux cas les plus simples.

Je finirai par observer que, dans l'hypothèse de deux et de trois variables, la question proposée peut recevoir une interprétation géométrique assez singulière. Elle se réduit alors à l'un des deux problèmes suivants :

Problème I. — *Étant données les équations des droites qui forment les côtés d'un polygone, déterminer le sommet le plus bas du polygone.*

Problème II. — *Étant données les équations des plans qui composent les faces d'un polyèdre, déterminer le sommet le plus bas de ce même polyèdre.*

On peut encore résoudre, par la même analyse, le problème suivant :

Étant données les équations des plans qui composent les faces d'une pyramide, déterminer la plus basse de ses arêtes (B).

ADDITIONS.

(A). Nous avons remarqué ci-dessus que les valeurs des variables qui résolvent la question proposée rendent toujours égales entre elles autant d'erreurs, plus une, qu'il y a d'éléments à considérer. On pourrait donc, à la rigueur, découvrir le système de valeurs demandé, en cherchant, parmi ceux qui satisfont à la condition précédente, celui

qui rend la plus grande erreur un minimum; mais cette méthode serait longue et pénible, et le nombre des opérations qu'elle exigerait pour un nombre m d'éléments serait égal au nombre des combinaisons des erreurs prises $m+1$ à $m+1$. Il est aisé de voir quel avantage la méthode précédemment exposée a sur cette dernière. Car, au lieu d'employer tous les systèmes de valeurs des variables pour lesquels $m+1$ erreurs deviennent égales entre elles, nous avons considéré seulement une partie de ceux où les erreurs égales deviennent en même temps les plus grandes de toutes. On peut apprécier cet avantage avec quelque exactitude à l'aide d'un théorème assez remarquable, et dont voici l'énoncé :

Soit toujours m le nombre des éléments que l'on considère. Supposons que l'on combine successivement les erreurs données une à une, deux à deux, trois à trois, etc., enfin $m+1$ à $m+1$, et que l'on ait seulement égard aux combinaisons formées d'erreurs qui puissent devenir simultanément les plus grandes de toutes; le nombre total des combinaisons où les erreurs entreront en nombre impair surpassera d'une unité le nombre des combinaisons où les erreurs entreront en nombre pair.

Ainsi, par exemple, si l'on a un seul élément à considérer, le nombre des erreurs qui pourront devenir successivement les plus grandes de toutes surpassera d'une unité le nombre des combinaisons deux à deux. Si l'on a trois éléments à considérer, le nombre des erreurs, plus le nombre des combinaisons trois à trois, surpassera d'une unité le nombre des combinaisons deux à deux, et ainsi de suite, ... D'ailleurs, il est facile de prouver que le rapport du nombre des combinaisons m à m au nombre des combinaisons $m+1$ à $m+1$ surpasse toujours la moitié du nombre des éléments augmenté de l'unité. Cette inégalité, jointe au théorème ci-dessus énoncé, suffit pour faire voir que le nombre des combinaisons $m+1$ à $m+1$ n'est pas d'un ordre plus élevé que le nombre des combinaisons $m-1$ à $m-1$, lorsqu'on a seulement égard aux combinaisons formées d'erreurs qui deviennent simultanément les plus grandes de toutes. On démontre, par ce moyen, que, dans le cas de deux variables, le nombre des opérations qu'exige la méthode proposée croît seulement comme le nombre des erreurs; tandis que, par l'autre méthode, il croîtrait comme le cube de ce dernier nombre. De même, dans le cas de trois variables, le nombre d'opérations qu'exige la première méthode n'est pas d'un ordre plus élevé que le carré du nombre des observations, tandis que, par l'autre méthode, il serait du même ordre que la quatrième puissance. En général, l'ordre dont il s'agit est toujours abaissé par la première méthode au moins de deux unités. On peut même faire voir que, dans plusieurs cas particuliers, le nombre des opérations qu'elle exige croît seulement comme le nombre des observations. C'est ce qui a lieu, par exemple, toutes les fois que, dans les erreurs données, les diverses variables, à l'exception d'une ou de deux, ont partout le même coefficient numérique.

Dans le cas où l'on ne considère que deux variables, le nombre des opérations ne peut jamais surpasser le double du nombre des erreurs. Je suis parvenu à ce théorème par trois voies différentes; mais une seule m'a conduit à la détermination du nombre des opérations qu'on est obligé de faire lorsque le nombre des variables est supérieur à deux.

(B). Enfin, le théorème de la page 367 renferme, comme cas particuliers, les trois suivants :

1° *Dans un polygone ouvert par ses deux extrémités, le nombre des côtés surpasse d'une unité le nombre des sommets.*

2° *Dans un polyèdre ouvert par sa partie supérieure, le nombre des faces, augmenté du nombre des sommets, surpasse d'une unité le nombre des arêtes.*

3° *Si l'on réunit, les uns autour des autres, plusieurs polyèdres, les uns fermés, les autres ouverts, de telle manière que chaque face soit commune à deux polyèdres différents, le nombre des polyèdres, augmenté du nombre des arêtes, surpassera d'une unité le nombre des faces augmenté du nombre des sommets.*

Il résulte du premier théorème que, dans tout polygone, le nombre des sommets est égal à celui des côtés. On déduit du deuxième la relation qu'Euler a découverte entre les divers éléments d'un polyèdre convexe. Le troisième théorème coïncide avec un théorème inséré dans un Mémoire que j'ai eu l'honneur, il y a trois ans, de présenter à la Classe, et qu'elle a daigné accueillir favorablement.

La Géométrie ne saurait aller plus loin, parce qu'elle se borne à faire varier les trois dimensions de l'espace. Mais l'Analyse, en ramenant les propositions que nous venons d'énoncer à la théorie des combinaisons, fournit le moyen de les étendre à un nombre quelconque de variables.

DÉMONSTRATION DES THÉORÈMES QUE SUPPOSE LA MÉTHODE EXPOSÉE DANS CE MÉMOIRE.

Théorème I. — *Quel que soit le nombre des éléments renfermés dans les erreurs que l'on considère, si l'on fait varier, ou tous ces éléments, ou seulement quelques-uns d'entre eux, et que l'on détermine les valeurs des éléments variables qui rendent la plus grande erreur un minimum, pour les valeurs dont il s'agit, plusieurs erreurs deviendront à la fois égales entre elles et les plus grandes de toutes, et le nombre de ces dernières surpassera toujours au moins d'une unité le nombre des éléments variables.*

Nota. — On trouve, dans le calcul des probabilités, une démonstration du théorème précédent, fondée sur ce principe, que les valeurs de $x, y, z, \ldots$ qui rendent la plus grande erreur un minimum, rendent aussi un minimum la somme des puissances infinies des erreurs. Mais on peut aussi démontrer directement ce théorème à l'aide des considérations suivantes. Comme je suppose qu'on ne fait pas abstraction du signe des erreurs, je regarderai une quantité négative plus grande comme plus petite qu'une autre quantité négative moindre.

Démonstration. — Soient $x, y, z, \ldots$ les corrections des éléments que l'on suppose variables, et désignons par $\xi, \eta, \zeta, \ldots$ les valeurs des éléments qui rendent la plus grande erreur positive un minimum. Enfin soient $e_1, e_2, \ldots, e_n$ les erreurs données en nombre égal à n, et supposons généralement

$$e_r = a_r + b_r x + c_r y + d_r z + \ldots,$$

quelle que soit la valeur de r. Si l'on fait croître $x, y, z, \ldots$ de quantités arbitraires $g, h, k, \ldots$, l'accroissement de l'erreur e_r sera

$$b_r g + c_r h + d_r k + \ldots.$$

Supposons maintenant que cette erreur devienne la plus grande de toutes pour les valeurs $\xi, \eta, \zeta, \ldots$ des variables x, y, z. Il est aisé de prouver que, pour ces mêmes valeurs, plusieurs autres erreurs $e_s, e_t, \ldots$ lui seront égales : car, si cette égalité n'avait pas lieu, l'erreur e_r resterait la plus grande de toutes pour les valeurs de $x, y, z, \ldots$ très rapprochées de $\xi, \eta, \zeta, \ldots$. D'ailleurs, si l'on fait croître $\xi, \eta, \zeta, \ldots$ de quantités très petites mais arbitraires $g, h, k, \ldots$, on pourra toujours fixer les signes de ces quantités de manière que l'accroissement de e_r ou

$$b_r g + c_r h + d_r k + \ldots$$

devienne négatif, et se change en une diminution. Par suite, l'erreur e_r pourrait encore diminuer en restant la plus grande de toutes, et $\xi, \eta, \zeta, \ldots$ ne seraient pas les valeurs de $x, y, z, \ldots$, qui rendent la plus grande erreur un minimum, ce qui est contre l'hypothèse.

Il reste à faire voir que le nombre des erreurs qui deviendront égales pour les valeurs $\xi, \eta, \zeta, \ldots$ des variables $x, y, z, \ldots$, sera toujours supérieur au moins d'une unité à celui de ces mêmes variables.

En effet, désignons par m le nombre des variables que l'on considère, et soient

$$e_r, \quad e_s, \quad e_t, \quad \ldots$$

les erreurs qui deviennent à la fois égales entre elles et les plus grandes de toutes, lorsqu'on suppose

$$x = \xi, \qquad y = \eta, \qquad z = \zeta, \qquad \ldots.$$

Si le nombre de ces erreurs surpasse m d'une unité, l'équation multiple

$$e_r = e_s = e_t = \ldots$$

suffira en général pour déterminer complètement les valeurs $\xi, \eta, \zeta, \ldots$ des variables $x, y, z, \ldots$. Mais, dans le cas contraire, on pourra donner à ces mêmes variables des valeurs très rapprochées de $\xi, \eta, \zeta, \ldots$ qui satisfassent toujours à l'équation dont il s'agit, et pour lesquelles les erreurs $e_r, e_s, e_t, \ldots$ soient toujours les plus grandes de toutes. Pour obtenir ces nouvelles valeurs, on fera croître $\xi, \eta, \zeta, \ldots$ de quantités très petites mais indéterminées $g, h, k, \ldots$. Les accroissements correspondants des erreurs $e_r, e_s, e_t, \ldots$ seront

$$\begin{gathered} b_r g + c_r h + d_r k + \ldots, \\ b_s g + c_s h + d_s k + \ldots, \\ b_t g + c_t h + d_t k + \ldots, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{gathered}$$

et par hypothèse ils devront tous être égaux entre eux. Cette égalité déterminera quelques-unes des quantités $g, h, k, \ldots$ en fonction des autres; et, si l'on élimine les premières de l'un des accroissements dont il s'agit, celles qui resteront après l'élimination seront entièrement arbitraires. Au reste, le résultat sera le même, quel que soit celui des accroissements que l'on considère; et il est aisé de voir que ce résultat ne renfermera pas de terme constant. Par suite, en donnant des signes convenables à celles des quantités $g, h, k, \ldots$ qui s'y trouvent comprises, on pourra toujours faire en sorte qu'il soit négatif, c'est-à-dire qu'il représente une diminution. Ainsi, dans ce cas, les erreurs $e_r, e_s, e_t, \ldots$ pourraient encore diminuer en restant les plus grandes de toutes; et $\xi, \eta, \zeta, \ldots$ ne seraient pas les valeurs de $x, y, z, \ldots$ qui rendent la plus grande erreur un minimum; ce qui est contre l'hypothèse.

La démonstration précédente aurait lieu pareillement, si, les erreurs $e_r, e_s, e_t, \ldots$ étant en nombre égal à $m + 1$, l'équation multiple

$$e_r = e_s = e_t = \ldots$$

ne suffisait pas pour déterminer les valeurs des variables représentées

par
$$\xi, \ \eta, \ \zeta, \ \ldots.$$

Théorème II. — *Le problème qui fait l'objet du précédent Mémoire ne peut jamais admettre qu'une solution, à moins que d'en admettre un nombre infini.*

Démonstration. — Concevons que l'on donne successivement à z toutes les valeurs possibles depuis $-\infty$ jusqu'à $+\infty$, et que pour chaque valeur de z on détermine les autres variables $x, y, z, \ldots$ par la condition que la plus grande erreur devienne un minimum. On aura de cette manière les minima des plus grandes erreurs correspondant aux diverses valeurs de z, et l'on pourra toujours, par la méthode précédente, obtenir un minimum plus petit que ceux qui le précèdent et ceux qui le suivent. Cela posé, il sera facile de prouver qu'aucun autre minimum ne peut jouir de la même propriété. En effet, soit ζ la valeur de z correspondant à celui que l'on considère; et supposons que l'on donne successivement à z toutes les valeurs possibles depuis $z=\zeta$ jusqu'à $z=\infty$; je dis que le minimum des plus grandes erreurs ira toujours en croissant. Car, s'il en était autrement, ce minimum cesserait de croître pour une certaine valeur de z que je désignerai par γ. Soient maintenant $e_p, e_q, e_r, \ldots$ les erreurs qui sont égales entre elles et les plus grandes de toutes pour les valeurs de $x, y, \ldots$ qui rendent la plus grande erreur un minimum, au moment où z est sur le point d'atteindre la valeur γ. Ces erreurs seront en nombre égal à celui des variables $x, y, z, \ldots$; et, par suite, quelle que soit la valeur de z, l'équation
$$e_p = e_q = e_r = \ldots$$

déterminera toujours les valeurs de x et de y qui rendent un minimum la plus grande des erreurs $e_p, e_q, e_r, \ldots$. En vertu de cette même équation, les valeurs de $x, y, \ldots$ devenant proportionnelles à z, la valeur commune des erreurs $e_p, e_q, e_r, \ldots$ deviendra aussi proportionnelle à z; et, puisque cette valeur augmente lorsque z est sur le point d'atteindre la valeur γ, elle augmentera encore lorsqu'on fera croître z au delà

de γ. Ainsi, lorsqu'on se borne à considérer les erreurs $e_p, e_q, e_r, \ldots$, si pour la valeur γ de z le minimum des plus grandes erreurs est désigné par M, pour une valeur de z supérieure à γ, ce minimum deviendra supérieur à M. Supposons maintenant qu'au lieu de considérer seulement les erreurs $e_p, e_q, e_r, \ldots$, on ait à la fois égard à toutes les erreurs données. Le minimum des plus grandes erreurs correspondant à une valeur donnée de z ne pourra qu'augmenter lorsqu'on passera de la première hypothèse à la seconde. Par suite, dans ce dernier cas, pour des valeurs de z supérieures à γ, le minimum des plus grandes erreurs sera toujours supérieur à M. Ce minimum ne pourra donc cesser de croître pour une certaine valeur γ de z. Mais au contraire il ira toujours en croissant depuis $z=\zeta$ jusqu'à $z=\infty$. On prouverait de même qu'il croîtra toujours depuis $z=\zeta$ jusqu'à $z=-\infty$. Ainsi, parmi les minima correspondant aux diverses valeurs de z, un seul est plus petit que ceux qui le précèdent et ceux qui le suivent, et celui-là seul résout la question proposée.

La démonstration précédente suppose que, z venant à varier de part et d'autre de ζ, le minimum des plus grandes erreurs commence à croître dès que l'on donne à z une valeur plus grande ou plus petite que ζ. Mais il pourrait arriver qu'avant de croître le minimum dont il s'agit restât quelque temps stationnaire. Alors on obtiendrait une infinité de minima tous égaux entre eux, et correspondant à une infinité de valeurs de z. Dans tous les cas, dès qu'une fois le minimum des plus grandes erreurs a commencé à croître, il ne peut plus s'arrêter. Ainsi, lorsque la question devient indéterminée, toutes les valeurs de z qui la résolvent se trouvent comprises entre deux limites données, et le minimum des plus grandes erreurs conserve toujours la même valeur entre ces deux limites.

Théorème III. — *Supposons que l'erreur e_p devienne la plus grande de toutes : 1° pour les valeurs $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \ldots$ de $x, y, z, \ldots$; 2° pour les valeurs $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2, \ldots$ des mêmes variables; si l'on désigne par α une valeur de x comprise entre α_1 et α_2, et par $\beta, \gamma, \ldots$ les valeurs correspon-*

dantes qu'on obtient pour y, z, … en faisant $x=\alpha$ dans les équations

$$\frac{y-\beta_1}{\beta_2-\beta_1}=\frac{x-\alpha_1}{\alpha_2-\alpha_1},$$
$$\frac{z-\gamma_1}{\gamma_2-\gamma_1}=\frac{x-\alpha_1}{\alpha_2-\alpha_1},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

l'erreur e_p sera encore la plus grande de toutes pour les valeurs α, β, γ, … des variables x, y, z, ….

Démonstration. — En effet, supposons que l'on donne successivement à x toutes les valeurs possibles depuis $x=-\infty$ jusqu'à $x=+\infty$, et que pour chaque valeur de x on détermine les valeurs de y, z, … par les équations

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{y-\beta_1}{\beta_2-\beta_1}=\frac{x-\alpha_1}{\alpha_2-\alpha_1},\\ &\frac{z-\gamma_1}{\gamma_2-\gamma_1}=\frac{x-\alpha_1}{\alpha_2-\alpha_1},\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{aligned}\right.$$

on obtiendra une infinité de systèmes de valeurs de x, y, z, … parmi lesquels se trouveront compris les trois systèmes

$$\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \ldots,$$
$$\alpha_1,\ \beta_1,\ \gamma_1,\ \ldots,$$
$$\alpha_2,\ \beta_2,\ \gamma_2,\ \ldots.$$

De plus, quel que soit le système que l'on considère, la différence entre l'erreur e_p et une autre erreur quelconque e_q sera un polynome du premier degré en x, y, z, …; et, si l'on y substitue pour y, z, … leurs valeurs en x déduites des équations (1), cette différence deviendra simplement un polynome en x du premier degré ou de la forme

$$Ax+B.$$

Maintenant, si ce polynome reste positif pour les valeurs α_1 et α_2 de x, il est clair qu'il sera encore positif pour toute valeur de x comprise entre α_1 et α_2. Si donc l'erreur e_p est supérieure à toute autre e_q

pour les deux systèmes

$$\alpha_1,\ \beta_1,\ \gamma_1,\ \ldots,$$
$$\alpha_2,\ \beta_2,\ \gamma_2,\ \ldots,$$

elle sera encore supérieure à toutes les autres pour le système

$$\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \ldots.$$

Corollaire I. — Si deux, trois, …, ou un plus grand nombre d'erreurs e_p, e_q, e_r, … sont égales entre elles et les plus grandes de toutes : 1° pour les valeurs α_1, β_1, γ_1, … des variables x, y, z, …; 2° pour les valeurs α_2, β_2, γ_2, … des mêmes variables, elles jouiront encore de la même propriété pour les valeurs α, β, γ, … de x, y, z, pourvu toutefois que ces valeurs satisfassent aux équations (1), et que α soit comprise entre α_1 et α_2.

En effet, ce qu'on a dit ci-dessus de l'erreur e_p peut s'appliquer également aux erreurs e_q, e_r, …. De plus, chacune des différences

$$e_p-e_q,$$
$$e_p-e_r,$$
$$\ldots\ldots$$

devenant, en vertu des équations (1), un polynome en x du premier degré, ne peut être nulle pour les valeurs α_1 et α_2 de x sans être également nulle pour toute autre valeur α de la même variable. Par suite, les erreurs e_p, e_q, e_r, … restent constamment égales entre elles pour tous les systèmes de valeurs de x, y, z, … qui satisfont aux équations (1).

Corollaire II. — Si, pour la valeur α_1 de la variable x, on peut déterminer les autres variables y, z, …, de manière que l'erreur e_p devienne la plus grande de toutes, et qu'on parvienne à remplir la même condition en donnant à x la valeur α_2; on pourra encore y parvenir en donnant à x une quelconque des valeurs comprises entre α_1 et α_2.

Corollaire III. — Si, pour les valeurs α_1 et α_2 de la variable x, on peut déterminer les autres variables y, z, …, de manière que les erreurs e_p, e_q, e_r, ... deviennent simultanément supérieures à toutes les autres, on pourra encore remplir la même condition en donnant à x une quelconque des valeurs comprises entre α_1 et α_2.

Corollaire IV. — Si l'on considère une combinaison formée de l erreurs e_p, e_q, e_r, ..., et que, pour deux systèmes de valeurs différents des variables $x, y, z, \ldots$, toutes les erreurs qui forment cette combinaison deviennent égales entre elles et les plus grandes de toutes, on pourra, en passant de l'un à l'autre système par degrés insensibles, obtenir une infinité de systèmes différents tous compris entre les deux premiers, et pour lesquels les erreurs e_p, e_q, e_r, ... resteront les plus grandes de toutes. De plus, pour chacun de ces systèmes, les valeurs de $x, y, z, \ldots$ satisferont toujours à l'équation multiple

$$e_p = e_q = e_r = \ldots.$$

Cette équation multiple déterminera plusieurs des variables $x, y, z, \ldots$ en fonctions des autres, et le nombre de celles qui seront ainsi déterminées sera, en général, inférieur d'une unité au nombre des erreurs e_p, e_q, e_r, ..., c'est-à-dire égal à

$$l - 1.$$

Mais il pourra devenir moindre. Si l'on désigne ce nombre par $k - 1$, k sera ce que nous appellerons désormais l'*ordre de la combinaison formée avec les erreurs* e_p, e_q, e_r, ... Cet ordre indiquera donc, en général, le nombre des erreurs renfermées dans la combinaison que l'on considère; mais il peut lui devenir inférieur, sans être pourtant jamais nul. Il se réduirait à l'unité, si l'on avait $l = 1$, c'est-à-dire si l'on se bornait à considérer une erreur isolée.

Dans ce qui suivra, nous ne nous occuperons plus que des erreurs qui deviennent les plus grandes de toutes, ou des combinaisons formées d'erreurs qui jouissent simultanément de cette propriété. Comme pour un système quelconque de valeurs de $x, y, z, \ldots$ il est nécessaire qu'une, ou deux, ou trois, ... ou un plus grand nombre d'erreurs

deviennent supérieures à toutes les autres, à chaque système de valeurs répondra toujours une combinaison d'un certain ordre. Cela posé, il suit de ce qui précède que les différents systèmes qui correspondent à une même combinaison sont toujours réunis en un même groupe et, par conséquent, renfermés entre certaines limites. La détermination de ces limites est l'objet de la proposition suivante :

Théorème IV. — *Les systèmes de valeurs de $x, y, z, \ldots$ qui correspondent aux combinaisons de l'ordre k ont pour limites respectives les systèmes qui correspondent aux combinaisons de l'ordre $k + 1$.*

Démonstration. — En effet, considérons d'abord les erreurs simples, en ayant seulement égard à celles qui peuvent devenir, chacune séparément, supérieures à toutes les autres. Comme il est nécessaire que chaque système de valeurs corresponde au moins à l'une de ces erreurs, tous les systèmes de valeurs possibles se trouveront répartis par groupes, si je puis ainsi m'exprimer, entre les diverses erreurs dont il s'agit. Dans quelques-uns de ces groupes, les valeurs des variables resteront toujours finies. Dans d'autres, elles pourront s'étendre à l'infini. De plus, comme on ne pourra sortir d'un groupe sans passer dans un autre, chaque groupe sera nécessairement entouré de plusieurs autres, qui lui seront voisins ou contigus. Cela posé, les systèmes qui sont communs à deux groupes voisins et qui correspondent aux combinaisons du deuxième ordre seront évidemment les limites des erreurs qui correspondent aux erreurs simples ou aux combinaisons du premier ordre. Si l'on désigne sous le nom d'*erreurs contiguës* celles qui correspondent à des groupes voisins, on pourra dire encore que deux erreurs contiguës ont toujours pour limite commune une combinaison du deuxième ordre.

Les différents systèmes qui correspondent aux combinaisons du deuxième ordre, comme ceux qui correspondent aux erreurs simples, peuvent, dans certains cas, n'admettre que des valeurs finies des variables, et, dans d'autres cas, plusieurs de ces systèmes pourront s'étendre à l'infini. Si l'on désigne sous le nom d'*erreurs* et *combi-*

naisons définies celles qui ne peuvent correspondre qu'à des systèmes de valeurs finies des variables, et celles qui sont dans le cas contraire sous le nom d'*erreurs* et *combinaisons indéfinies*, on reconnaîtra sans peine qu'une combinaison indéfinie du deuxième ordre ne peut servir de limite qu'à deux erreurs indéfinies.

Considérons maintenant les diverses combinaisons du deuxième ordre qui servent de limites à une même erreur simple, et supposons que l'on parcoure les différents systèmes qui correspondent à ces combinaisons d'une manière continue, c'est-à-dire en faisant croître ou diminuer les variables par degrés insensibles. Comme, dans ce cas, on ne pourra quitter les systèmes qui correspondent à une combinaison du deuxième ordre sans rencontrer ceux qui correspondent à une autre combinaison du deuxième ordre, on trouvera dans le passage des uns aux autres des systèmes intermédiaires qui leur serviront de limites. Ces systèmes intermédiaires seront ceux qui correspondent aux combinaisons du troisième ordre. Si l'on appelle *combinaisons contiguës du deuxième ordre* celles qui correspondent à des systèmes voisins, on pourra dire que deux combinaisons contiguës du deuxième ordre ont toujours pour limite commune une combinaison du troisième ordre.

En continuant de même, on ferait voir que les systèmes correspondant à une combinaison de l'ordre k ont toujours pour limites d'autres systèmes correspondant à des combinaisons de l'ordre $k+1$; ce qu'on peut aussi exprimer en disant qu'une combinaison de l'ordre k a toujours pour limites d'autres combinaisons de l'ordre $k+1$. De plus, ces limites appartiennent à la fois à la combinaison donnée et à d'autres combinaisons voisines ou contiguës. Enfin, une combinaison indéfinie de l'ordre $k+1$ ne peut servir de limite qu'à des combinaisons indéfinies de l'ordre k.

Si l'on désigne par m le nombre des variables données, $m+1-k$ sera le nombre des variables qui restent arbitraires dans les systèmes qui correspondent à une combinaison de l'ordre k. Par suite, il ne restera qu'une seule variable arbitraire dans les systèmes correspon-

dant aux combinaisons de l'ordre m. Les diverses valeurs que cette variable pourra recevoir seront comprises entre deux limites fixes, dont l'une pourra s'étendre à l'infini; et chacune de ces limites, lorsqu'elle sera finie, déterminera, pour les variables $x, y, z, \ldots$, un système de valeurs correspondant à une combinaison de l'ordre $m+1$. Ainsi toute combinaison de l'ordre m a pour limites deux combinaisons de l'ordre $m+1$, à moins qu'à l'une de ces limites les valeurs des variables ne deviennent infinies; et, dans ce cas, l'autre limite est toujours une combinaison de l'ordre $m+1$.

Si l'on considère maintenant les combinaisons de ce dernier ordre, on trouvera que, dans les systèmes correspondants, il ne reste plus de variables arbitraires, mais que les variables y sont entièrement déterminées. Ces combinaisons sont donc de l'ordre le plus élevé que l'on puisse admettre. De plus, on a fait voir que c'était parmi les systèmes correspondant aux combinaisons de cet ordre qu'on devait chercher celui qui résout la question proposée; et la méthode que nous avons indiquée pour la solution du problème se réduit en effet à essayer successivement plusieurs des combinaisons dont il s'agit. Le nombre de ces essais a donc pour limite le nombre des combinaisons de l'ordre $m+1$, et il ne saurait croître plus rapidement que ce dernier nombre. Ainsi, pour avoir une limite du nombre d'essais que la méthode exige, il importe de savoir comment le nombre des combinaisons de l'ordre $m+1$ croît avec le nombre des erreurs simples. Nous donnerons, à cet égard, les théorèmes suivants :

Théorème V. — *Quel que soit le nombre des éléments que l'on considère, le nombre des combinaisons d'ordre impair surpassera toujours d'une unité le nombre des combinaisons d'ordre pair.*

(On suppose toujours que l'on ait seulement égard aux combinaisons formées d'erreurs qui puissent devenir simultanément les plus grandes de toutes.)

Démonstration. — Il suit du théorème précédent : 1° que les erreurs simples, comparées entre elles deux à deux, ont pour limites respectives les combinaisons du deuxième ordre; 2° que les combinaisons du deuxième ordre qui servent de limites à une même erreur, étant comparées deux à deux, ont pour limites respectives des combinaisons du troisième ordre, etc. On trouvera de même que les combinaisons du troisième ordre qui servent de limites à une même combinaison du deuxième ordre, étant comparées entre elles deux à deux, ont pour limites respectives des combinaisons du quatrième ordre, etc.; et, si l'on désigne toujours par m le nombre des éléments variables, on verra encore que les combinaisons de l'ordre m qui servent de limites à une même combinaison de l'ordre $m-1$ ont pour limites respectives des combinaisons de l'ordre $m+1$. Enfin chaque combinaison de l'ordre m aura pour limites deux combinaisons de l'ordre $m+1$, à moins que l'une de ces limites ne s'éloigne vers l'infini. Si donc on augmente d'une unité le nombre total des combinaisons de l'ordre $m+1$, pour tenir lieu des limites qui divergent vers l'infini, on se trouvera placé dans des circonstances tout à fait semblables à celles qui auraient lieu, si l'on n'avait à considérer que des erreurs et des combinaisons définies.

Cela posé, désignons respectivement par

M_1 le nombre des erreurs simples ou combinaisons du premier ordre,
M_2 le nombre des combinaisons du deuxième ordre,
. . . . ,
M_m le nombre des combinaisons du $m^{\text{ième}}$ ordre,
M_{m+1} le nombre des combinaisons du $(m+1)^{\text{ième}}$ ordre.

$M_{m+1}+1$ sera ce dernier nombre augmenté de l'unité; et, pour démontrer le théorème ci-dessus énoncé, il suffira de faire voir que l'on a

$$(1) \qquad M_1+M_3+\ldots+M_m = M_2+M_4+\ldots+(M_{m+1}+1),$$

si m est un nombre impair, et

$$(2) \qquad M_1+M_3+\ldots+(M_{m+1}+1) = M_2+M_4+\ldots+(M_m+2),$$

si m est un nombre pair.

Ces deux équations sont comprises dans la suivante

$$(3) \qquad M_1-M_2+M_3-\ldots\pm M_m \mp M_{m+1}=1,$$

dont il faut prouver l'exactitude.

J'observe d'abord que, si le théorème renfermé dans cette équation est vrai, quel que soit m, relativement au nombre total des erreurs que l'on considère et de leurs combinaisons respectives, il subsistera encore entre les combinaisons du deuxième ordre ou d'un ordre plus élevé, qui appartiennent à une même erreur indéfinie. Ainsi, par exemple, si l'on désigne par

$$P_2,\quad P_3,\quad P_4,\quad \ldots,\quad P_m,\quad P_{m+1}$$

les combinaisons des divers ordres dans lesquelles entre l'erreur indéfinie e_p, on aura

$$(4) \qquad P_2-P_3+P_4-\ldots\mp P_m \pm P_{m+1}=1.$$

On voit en effet, par ce qui a été dit plus haut, que les conditions auxquelles doivent satisfaire les quantités $P_2, P_3, \ldots, P_m, P_{m+1}$ sont entièrement semblables à celles auxquelles sont assujetties les quantités $M_1, M_2, \ldots, M_{m+1}$. Si donc ces conditions suffisent pour établir, relativement à la dernière espèce de quantités, le théorème proposé, elles suffiront aussi pour l'établir relativement à la première.

Si l'erreur e_p, au lieu d'être une erreur indéfinie, était une erreur définie, il faudrait, en vertu de la remarque faite ci-dessus, diminuer d'une unité le nombre des combinaisons de l'ordre le plus élevé et, par suite, l'équation (4) deviendrait

$$(5) \qquad P_2-P_3+P_4-\ldots\mp P_m \pm (P_{m+1}-1)=1,$$

équation dans laquelle on doit admettre le signe supérieur, si m est un nombre impair, et le signe inférieur dans le cas contraire.

Il est encore bon de remarquer que le théorème renfermé dans l'équation (3) n'est qu'un cas particulier d'un autre théorème plus général, dont voici l'énoncé :

Supposons que parmi les erreurs données on en choisisse plusieurs e_p,

e_q, e_r, …, toutes contiguës les unes aux autres, et désignons respectivement par

$$N_1,\quad N_2,\quad N_3,\quad \ldots,\quad N_m,\quad N_{m+1}$$

les nombres de ces mêmes erreurs et des combinaisons qui les renferment, en ayant soin toutefois d'augmenter le nombre des combinaisons de l'ordre $m+1$ d'une unité; si, parmi les erreurs e_p, e_q, e_r, … il s'en trouve quelques-unes d'indéfinies, on aura toujours

$$(6)\qquad N_1 - N_2 + N_3 - \ldots \pm N_m \mp N_{m+1} = \mp 1;$$

le signe supérieur devant être admis lorsque m sera un nombre impair, et le signe inférieur lorsque m sera un nombre pair.

Pour déduire l'équation (3) de l'équation (6), il suffira de supposer que la série des erreurs $e_p, e_q, e_r, \ldots$ renferme toutes les erreurs définies et indéfinies, à l'exception d'une seule. On a en effet, dans cette hypothèse,

$$N_1 = M_1 - 1,\quad N_2 = M_2,\quad N_3 = M_3,\quad \ldots,\quad N_m = M_m,\quad N_{m+1} = M_{m+1} + 1;$$

et ces valeurs, substituées dans l'équation (6), reproduisent l'équation (3).

Si l'équation (6) était une fois démontrée, en lui appliquant les raisonnements qui ont servi à déduire l'équation (4) de l'équation (3), on obtiendrait le théorème suivant :

Soit e_p une erreur quelconque. Soient e_q, e_r, e_s, … plusieurs autres erreurs définies ou indéfinies, contiguës entre elles et à l'erreur e_s, et désignons par

$$p_2,\quad p_3,\quad \ldots,\quad p_m,\quad p_{m+1}$$

les nombres de combinaisons des divers ordres où entrent, avec l'erreur e_p, une ou plusieurs des erreurs e_q, e_r, e_s, …, en ayant soin toutefois d'augmenter le dernier nombre d'une unité, si quelques-unes des combinaisons que l'on considère sont indéfinies; on aura

$$(7)\qquad p_2 - p_3 + p_4 - \ldots \mp p_m \pm p_{m+1} = \pm 1,$$

le signe supérieur devant prévaloir si m est un nombre impair, et le signe inférieur dans le cas contraire.

Il est facile de reconnaître que cette dernière équation renferme les équations (4) et (5), tout comme l'équation (6) renferme l'équation (3).

Le théorème renfermé dans l'équation (4), et tous les autres théorèmes rapportés ci-dessus, reposent uniquement, comme on vient de le voir, sur celui que renferme l'équation (6). Il suffira donc de démontrer ce dernier pour établir tous les autres.

Cela posé, concevons d'abord que le théorème renfermé dans l'équation (6) ait été démontré pour un nombre d'éléments inférieur d'une unité à celui que l'on considère, ou égal à $m-1$. Les équations (4), (5) et (7) se trouveront, par là même, suffisamment établies; et, par suite, si l'on désigne par e_p une erreur définie quelconque, et par

$$P_2,\quad P_3,\quad \ldots,\quad P_m,\quad P_{m+1},$$

les nombres de combinaisons des divers ordres qui renferment cette même erreur, on aura

$$(5)\qquad P_2 - P_3 + P_4 - \ldots \mp P_m \pm (P_{m+1} - 1) = 1.$$

Soit maintenant e_q une autre erreur définie, contiguë à l'erreur e_p; désignons par

$$Q_2,\quad Q_3,\quad Q_4,\quad \ldots,\quad Q_m,\quad Q_{m+1}$$

les nombres de combinaisons des divers ordres qui renferment l'erreur e_q, et par

$$Q_2 - Q'_2,\quad Q_3 - Q'_3,\quad \ldots,\quad Q_m - Q'_m,\quad Q_{m+1} - Q'_{m+1}$$

les nombres de celles qui renferment l'erreur e_q avec l'erreur e_p;

$$Q'_2,\quad Q'_3,\quad \ldots,\quad Q'_m,\quad Q'_{m+1}$$

seront les nombres de celles qui renferment l'erreur e_q sans l'erreur e_p. On aura d'ailleurs, en vertu de l'équation (5),

$$Q_2 - Q_3 + \ldots \mp Q_m \pm (Q_{m+1} - 1) = 1,$$

et, en vertu de l'équation (7),

$$(Q_2 - Q'_2) - (Q_3 - Q'_3) + \ldots \pm (Q_{m+1} - Q'_{m+1}) = \pm 1.$$

Si l'on retranche ces deux équations l'une de l'autre, on trouvera

$$Q'_2 - Q'_3 + Q'_4 - \ldots \mp Q'_m \pm Q'_{m+1} = 1. \tag{8}$$

Considérons encore une troisième erreur définie e_r contiguë à l'une des deux premières, ou à toutes les deux ensemble. Désignons par

$$R_2, \quad R_3, \quad \ldots, \quad R_m, \quad R_{m+1}$$

les nombres de combinaisons des divers ordres où entre l'erreur e_r, et par

$$R''_2, \quad R''_3, \quad \ldots, \quad R''_m, \quad R''_{m+1}$$

les nombres de combinaisons où elle entre sans aucune des erreurs e_p, e_q; on aura, en vertu des équations (5) et (7),

$$R_2 - R_3 + \ldots \mp R_m \pm (R_{m+1} - 1) = 1,$$
$$(R_2 - R''_2) - (R_3 - R''_3) + \ldots \mp (R_m - R''_m) \pm (R_{m+1} - R''_{m+1}) = \pm 1,$$

et, par suite,

$$R''_2 - R''_3 + R''_4 - \ldots \mp R''_m \pm R''_{m+1} = 1. \tag{9}$$

En continuant de même, et considérant successivement plusieurs erreurs définies e_p, e_q, e_r, e_s, ..., on obtiendra une suite d'équations semblables aux équations (8) et (9). D'ailleurs, si l'on désigne par N le nombre des erreurs e_p, e_q, e_r, ..., et par

$$N_2, \quad N_3, \quad \ldots, \quad N_m, \quad N_{m+1}$$

les nombres de combinaisons des divers ordres qui renferment ces mêmes erreurs, on aura évidemment

$$\begin{aligned}
N_1 &= 1 + 1 + 1 + \ldots, \\
N_2 &= P_2 + Q'_2 + R''_2 + \ldots, \\
N_3 &= P_3 + Q'_3 + R''_3 + \ldots, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\
N_m &= P_m + Q'_m + R''_m + \ldots, \\
N_{m+1} &= P_{m+1} + Q'_{m+1} + R''_{m+1} + \ldots.
\end{aligned}$$

Cela posé, si l'on ajoute entre elles les équations (5), (8), (9), ... ou

$$\begin{aligned}
P_2 - P_3 + P_4 - \ldots \mp P_m &\pm (P_{m+1} - 1) = 1, \\
Q'_2 - Q'_3 + Q'_4 - \ldots \mp Q'_m &\pm Q'_{m+1} = 1, \\
R''_2 - R''_3 + R''_4 - \ldots \mp R''_m &\pm R''_{m+1} = 1, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots,
\end{aligned}$$

on aura l'équation (6), savoir

$$N_2 - N_3 + N_4 - \ldots \mp N_m \pm (N_{m+1} - 1) = N_1,$$

ou, ce qui revient au même,

$$N_1 - N_2 + N_3 - \ldots \pm N_m \mp N_{m+1} = \mp 1.$$

Si, parmi les erreurs e_p, e_q, e_r, ... que nous avons supposées toutes définies, quelques-unes devenaient indéfinies, il suffirait, pour avoir égard à cette circonstance, d'augmenter, dans l'équation précédente, la valeur de N_{m+1} d'une unité.

Il résulte des calculs précédents que si l'équation (6) est vraie pour un nombre de variables égal à $m - 1$, elle sera encore vraie pour un nombre de variables égal à m. D'ailleurs, si le nombre de variables se réduit à l'unité, chaque erreur aura pour limites deux combinaisons du deuxième ordre; et chaque combinaison du deuxième ordre sera une limite commune à deux erreurs contiguës. Alors, si l'on considère plusieurs erreurs définies et contiguës en nombre égal à N_1, et que N_2 soit le nombre des combinaisons du deuxième ordre où elles se trouvent comprises, on aura évidemment

$$N_2 = N_1 + 1.$$

Car, toutes les erreurs dont il s'agit se trouvant alors renfermées entre deux limites déterminées, si l'on fait croître la variable unique depuis la première limite jusqu'à la seconde, les diverses valeurs de cette variable correspondront successivement : 1° à la combinaison du deuxième ordre qui forme la première limite; 2° à une des erreurs que l'on considère; 3° à une nouvelle combinaison du deuxième ordre; 4° à une autre erreur, etc.; enfin, à la combinaison du deuxième ordre qui forme la dernière limite. Mais comme, avant d'arriver à cette dernière combinaison, on aura rencontré alternativement des combinaisons et des erreurs, il en résulte que le nombre des combinaisons surpassera d'une unité celui des erreurs que l'on considère. On aura donc

$$N_2 = N_1 + 1 \quad \text{ou} \quad N_1 - N_2 = -1.$$

L'équation (6), étant ainsi vérifiée pour le cas d'une variable, sera vraie, en vertu de ce qui précède, pour le cas de deux variables et, par suite, pour le cas de trois, de quatre, etc., et, en général, d'un nombre quelconque de variables.

L'équation (6) étant vraie, l'équation (3) le sera également, puisque, pour l'obtenir, il suffira de supposer dans l'équation (6) le nombre des erreurs e_p, e_q, e_r, ... égal au nombre total des erreurs définies et indéfinies diminué d'une unité.

Scholie. — Nous avons déjà remarqué l'interprétation géométrique que pouvait recevoir le théorème (3) dans le cas où l'on considère une, deux, ou trois variables. On peut aussi présenter ce théorème sous une forme à la fois simple et analytique, quel que soit le nombre des variables, en l'énonçant comme il suit.

Supposons qu'ayant combiné entre eux, de diverses manières, un à un, deux à deux, trois à trois, ..., m à m les indices

$$1, \; 2, \; 3, \; \ldots, \; M_1,$$

on forme de ces combinaisons plusieurs séries en nombre égal à m. Soient respectivement

$$\begin{array}{ll} [1] & 1, \; 2, \; 3, \; \ldots, \; M_1, \\ [2] & a_1, \; a_2, \; a_3, \; \ldots, \; a_{M_2}, \\ [3] & b_1, \; b_2, \; b_3, \; \ldots, \; b_{M_3}, \\ & \ldots, \; \ldots, \; \ldots, \; \ldots, \; \ldots \end{array}$$

ces mêmes séries, que nous indiquerons respectivement par les numéros [1], [2], [3], ..., $[m-1]$, $[m]$, et dont chaque terme repré-

sente une des combinaisons dont il s'agit. Supposons, de plus, que, la première série étant uniquement composée des indices eux-mêmes, chaque terme de la deuxième soit formé par la réunion de deux indices, et que les termes de l'une quelconque des autres séries comprennent chacun les indices renfermés dans deux ou plusieurs termes de la série précédente, de manière qu'on finisse toujours par épuiser les termes d'une série, en écrivant successivement à côté les uns des autres ceux auxquels un ou plusieurs termes de la série précédente appartiennent en commun. Supposons ensuite que l'on supprime, dans les séries [2], [3], ..., $[m]$: 1° tous les termes qui ne renferment pas l'indice α; 2° l'indice α et tous ceux qui ne se trouvent pas avec l'indice α dans un des termes de la série [2]; et qu'après les suppressions dont il s'agit, les séries [2], [3], [4], ..., $[m]$ remplissent les mêmes conditions auxquelles satisfaisaient précédemment les séries [1], [2], [3], ..., $[m-1]$. Supposons encore que l'on supprime de nouveau, dans les séries [3], [4], ..., $[m]$: 1° tous les termes qui ne renferment pas l'indice β; 2° l'indice β et tous ceux qui ne se trouvent pas avec l'indice β dans un des termes de la série [3]; et qu'après ces nouvelles suppressions, les séries [3], [4], ..., $[m]$ remplissent les conditions auxquelles satisfaisaient en premier lieu les séries [1], [2], ..., $[m-2]$; enfin que l'on ait opéré, avec le même succès, plusieurs suppressions consécutives semblables aux précédentes, de manière à ne conserver que les séries $[m-1]$ et $[m]$, réduites, la première, à une série d'indices isolés, et la deuxième, à des combinaisons de ces mêmes indices considérés deux à deux; et concevons que, dans cette hypothèse, chaque indice de la série $[m-1]$ reparaisse dans deux termes différents de la série $[m]$. Si les suppressions ci-dessus indiquées réussissent également quels que soient les indices α, β, ..., et quel que soit l'ordre établi entre ces mêmes indices, alors, en désignant par

$$M_1, \; M_2, \; M_3, \; \ldots, \; M_{m-1}, \; M_m$$

les nombres des termes des séries

$$[1], \; [2], \; [3], \; \ldots, \; [m-1], \; [m],$$

on aura

$$M_1 - M_2 + M_3 - \ldots - \pm M_{m-1} \mp (M_m - 1) = 1, \tag{10}$$

le signe supérieur devant être admis, si m est pair, et le signe inférieur, si m est un nombre impair. Nous avons ici diminué M_m d'une unité, parce que le cas que nous considérons répond à celui où toutes les erreurs seraient définies.

Exemple. — Considérons les trois séries de combinaisons

[1]	1, 2, 3, 4, 5, 6,
[2]	(1,2), (1,3), (2,3), (4,5), (4,6), (5,6), (1,4), (2,5), (3,6),
[3]	(1,2,3), (4,5,6), (1,4,2,5), (2,5,3,6), (1,4,3,6).

Il est facile de voir que ces trois séries satisfont aux conditions exigées. Car : 1° Les termes de la deuxième résultent des combinaisons deux à deux des termes de la première, et chaque terme de la troisième renferme les indices compris dans deux termes de la deuxième. 2° Si, dans les séries [2] et [3], on supprime tous les termes qui ne renferment pas l'indice 1, et que, dans les autres termes, on conserve seulement les indices 2, 3 et 4 qui sont renfermés, avec l'indice 1, dans le premier, le deuxième et le septième terme de la série [2]; les séries [2] et [3] deviendront

[2]	2, 3, 4,
[3]	(2,3), (2,4), (3,4).

Par suite, la série [2] ne sera plus formée que d'indices isolés; la série [3], que des combinaisons deux à deux de ces mêmes indices; et, de plus, chaque terme de la série [2] sera compris dans deux termes différents de la série [3]. 3° Il est facile de s'assurer qu'on obtiendra des résultats semblables si, au lieu de supprimer les termes qui ne renferment pas l'indice 1, on supprime ceux qui ne renferment pas l'un quelconque des autres indices 2, 3, 4, ... 4° Enfin, avant ou après les suppressions, on peut épuiser tous les termes de la série [3], en

écrivant à la suite les uns des autres ceux auxquels appartiennent en commun un ou plusieurs termes de la série [2]; et les termes de la deuxième série jouissent encore de la même propriété relativement à ceux de la première. Cela posé, comme les nombres de termes des séries

$$[1], \quad [2], \quad [3]$$

sont respectivement

$$6, \quad 9, \quad 5,$$

on doit avoir, en vertu de l'équation (10),

$$6 - 9 + (5 - 1) = 1,$$

ce qui est exact.

Théorème VI. — *Si l'on désigne par m le nombre des éléments variables, chaque erreur définie se trouvera comprise au moins dans $m+1$ combinaisons de l'ordre $m+1$.*

Démonstration. — 1° Si l'on ne considère d'abord qu'un seul élément, chaque erreur définie aura pour limites deux combinaisons du deuxième ordre, ce qui vérifie le théorème énoncé.

2° Supposons que l'on considère deux éléments; et soit e_p une erreur définie quelconque. Soit (e_p, e_q) une des combinaisons du deuxième ordre qui lui servent de limites. Cette combinaison du deuxième ordre aura elle-même pour limites deux combinaisons du troisième ordre, que nous désignerons par

$$(e_p, e_q, e_r), \quad (e_p, e_q, e_s).$$

Soient $\alpha_1, \beta_1; \alpha_2, \beta_2$ les valeurs des deux variables données x, y, qui satisfont aux deux équations doubles

$$e_p = e_q = e_r, \qquad e_p = e_q = e_s;$$

l'équation $e_p = e_q$ sera équivalente à celle-ci

$$\frac{x-\alpha_1}{\alpha_2-\alpha_1} = \frac{y-\beta_1}{\beta_2-\beta_1};$$

et, si l'on donne aux variables x et y des valeurs qui satisfassent à cette équation, x étant compris entre α_1 et α_2, les deux erreurs e_p, e_q deviendront simultanément les plus grandes de toutes. Maintenant, si, au lieu de supposer $e_p = e_q$, on suppose

$$e_p = e_q + \delta,$$

δ étant une quantité positive très petite, et que l'on conçoive toujours les valeurs de x et de y comprises entre celles que déterminent les équations doubles

$$e_p = e_q + \delta = e_r, \qquad e_p = e_q + \delta = e_s;$$

il est clair que l'erreur e_p restera supérieure à toutes les autres, et qu'elle surpassera même l'erreur e_q conjointement avec l'erreur e_r, si l'on suppose

$$e_p = e_q + \delta = e_r,$$

et, conjointement avec l'erreur e_s, si l'on suppose

$$e_p = e_q + \delta = e_s.$$

Si, maintenant, on fait croître δ, en supposant toujours $e_p = e_q + \delta = e_r$, les erreurs e_p, e_r continueront à être conjointement les plus grandes de toutes, jusqu'à ce qu'une nouvelle erreur e_t ou bien l'erreur e_s elle-même finisse par les égaler toutes deux pour un même système de valeurs de x et de y; et c'est ce qui arrivera toujours nécessairement, puisque, l'erreur e_p étant supposée définie, δ ne peut croître indéfiniment sans que l'erreur e_p cesse d'être la plus grande. On obtiendra donc, par ce moyen, une nouvelle combinaison du troisième ordre, savoir (e_p, e_q, e_t), (e_t pouvant être égal à e_s), qui renfermera l'erreur e_p; et, par suite, les trois combinaisons du troisième ordre

$$(e_p, e_q, e_r), \quad (e_p, e_q, e_s), \quad (e_p, e_q, e_t)$$

renfermeront l'erreur définie e_p, ce qui vérifie le théorème énoncé.

3° Supposons que l'on considère trois éléments. Soient e_p une erreur

définie quelconque et (e_p, e_q) une des combinaisons du deuxième ordre qui renferment cette erreur. Comme l'équation $e_p = e_q$ ne laisse que deux variables arbitraires, on prouvera, comme dans le cas précédent, que la combinaison du deuxième ordre dont il s'agit appartient à trois combinaisons du quatrième ordre. Soient respectivement

$$(e_p, e_q, e_r, e_s), \quad (e_p, e_q, e_s, e_t), \quad (e_p, e_q, e_r, e_t)$$

ces trois dernières combinaisons. Si l'on donne aux trois variables x, y, z des valeurs qui satisfassent à l'équation

$$e_p = e_q,$$

et qui soient comprises entre les limites déterminées par les trois équations multiples

$$e_p = e_q = e_r = e_s, \qquad e_p = e_q = e_s = e_t, \qquad e_p = e_q = e_r = e_t,$$

c'est-à-dire des valeurs pour lesquelles on ait

$$e_p = e_q > e_r, e_s, e_t;$$

les erreurs e_p, e_q deviendront simultanément les plus grandes de toutes.

Maintenant, si, au lieu de supposer $e_p = e_q$, on suppose $e_p = e_q + \delta$, δ étant une quantité positive très petite, et que l'on donne à x, y, z des valeurs comprises entre celles que déterminent les trois équations multiples

$$e_p = e_q + \delta = e_r = e_s, \qquad e_p = e_q + \delta = e_s = e_t, \qquad e_p = e_q + \delta = e_r = e_t,$$

il est clair que l'erreur e_p restera supérieure aux autres, et qu'elle surpassera l'erreur e_q conjointement avec les erreurs e_r, e_s, si l'on suppose

$$e_p = e_q + \delta = e_r = e_s.$$

Si maintenant on fait croître δ, en supposant toujours

$$e_p = e_q + \delta = e_r = e_s,$$

les erreurs e_p, e_r, e_s continueront à être conjointement les plus grandes de toutes, jusqu'à ce que l'erreur e_t ou une nouvelle erreur e_u parvienne à les égaler; ce qui finira nécessairement par arriver, puisque l'erreur e_p est supposée définie. Alors, on obtiendra une quatrième combinaison du quatrième ordre, qui renfermera l'erreur e_p, ce qui vérifiera le théorème énoncé.

En raisonnant de la même manière, on finira par démontrer le théorème, quel que soit le nombre des éléments que l'on considère.

Nous avons supposé, dans ce qui précède, que les combinaisons du deuxième ordre renfermaient seulement deux erreurs, celles du troisième ordre, trois erreurs, etc. Mais il est aisé de voir que les mêmes conclusions subsisteraient, si le nombre des erreurs d'une ou plusieurs combinaisons devenait supérieur à leur ordre.

Théorème VII. — *Soient e_p, e_q, e_r, ... plusieurs erreurs, définies ou indéfinies, comprises dans une même combinaison de l'ordre $m+1$, chacune d'elles pouvant devenir séparément la plus grande de toutes. Soit, de plus, e_u une erreur fictive qui soit égale aux erreurs e_p, e_q, e_r, ... lorsque celles-ci deviennent égales entre elles, c'est-à-dire pour le système de valeurs de x, y, z, ... qui correspond à la combinaison que l'on considère. Si l'erreur fictive e_u devient supérieure à toutes les autres pour des systèmes de valeurs qui rendaient précédemment l'erreur e_p la plus grande de toutes, la différence $e_u - e_p$ sera nécessairement positive pour quelques-uns des systèmes de valeurs qui correspondent à celles des combinaisons de l'ordre m où les erreurs e_q, e_r, ... entrent conjointement avec l'erreur e_p.*

Démonstration. — En effet, les systèmes qui correspondaient à l'erreur e_p, c'est-à-dire ceux pour lesquels l'erreur e_p devenait supérieure à toutes les autres, se trouveront maintenant séparés en deux groupes au plus. Pour l'un de ces groupes, on aura

$$e_p > e_u$$

et, pour l'autre,

$$e_p < e_u.$$

Chacun de ces groupes aura pour limites des systèmes correspondant

à des combinaisons du deuxième ordre, ceux-ci des systèmes correspondant à des combinaisons du troisième ordre, et ainsi de suite ..., jusqu'à ce qu'enfin l'on arrive à des combinaisons de l'ordre m, qui auront elles-mêmes pour limites la combinaison de l'ordre $m+1$ que l'on considère. La différence $e_u - e_p$ sera donc positive pour quelques-uns des systèmes qui correspondent à celles des combinaisons de l'ordre m où se trouvent comprises les erreurs e_q, e_r, ... avec l'erreur e_p.

Si les deux groupes dont nous avons parlé se réunissaient en un seul, on aurait, pour ce dernier groupe, $e_u > e_p$, et les conclusions précédentes auraient lieu *a fortiori*.

Théorème VIII. — *Soit e_p une erreur qui devienne, pour certains systèmes de valeurs, supérieure à toutes les autres. Soit de plus*

$$(e_p, e_q, e_r, e_s, \ldots)$$

une des combinaisons de l'ordre $m+1$ qui renferme l'erreur e_p. On pourra toujours concevoir une erreur fictive e_u qui devienne égale à chacune des erreurs e_p, e_q, e_r, e_s, ... pour le système de valeurs qui correspond à la combinaison précédente, et qui soit inférieure à e_p pour tout autre système correspondant à cette dernière erreur.

Démonstration. — Ce théorème paraît vrai et général. Mais il suffira, pour notre objet, de le démontrer dans le cas où le nombre des combinaisons de l'ordre m, qui renferment l'erreur e_p, et qui ont pour limite la combinaison donnée de l'ordre $m+1$, ne surpasse pas m.

Cela posé, désignons par α, β, γ, ... le système de valeurs de x, y, z, ... qui correspond à la combinaison de l'ordre $m+1$

$$(e_p, e_q, e_r, e_s, \ldots).$$

Soient de plus

$$\begin{aligned} e_p &= a_p + b_p x + c_p y + d_p z + \ldots, \\ e_q &= a_q + b_q x + c_q y + d_q z + \ldots, \\ e_r &= a_r + b_r x + c_r y + d_r z + \ldots, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

Faisons de même

$$e_u = a_u + b_u x + c_u y + d_u z + \ldots;$$

a_u, b_u, c_u, d_u, ... étant des coefficients indéterminés. Enfin désignons par A la valeur commune des erreurs e_p, e_q, e_r, ... qui correspond au système de valeurs α, β, γ, ... Puisqu'on suppose, dans ce cas, l'erreur e_u égale aux autres, on aura

$$a_u + b_u\alpha + c_u\beta + d_u\gamma + \ldots = \mathrm{A}.$$

Cette équation servira à déterminer a_u, lorsqu'on connaîtra b_u, c_u, d_u, ... Il reste à déterminer ces derniers coefficients de manière que, pour tout système correspondant à l'erreur e_p et différent de α, β, γ, ..., la différence $e_p - e_u$ soit positive.

Faisons, pour plus de commodité,

$$x = \alpha + x', \qquad y = \beta + y', \qquad z = \gamma + z', \qquad \ldots.$$

On aura, dans ce cas,

$$\begin{aligned} e_p &= \mathrm{A} + b_p x' + c_p y' + d_p z' + \ldots, \\ e_q &= \mathrm{A} + b_q x' + c_q y' + d_q z' + \ldots, \\ e_r &= \mathrm{A} + b_r x' + c_r y' + d_r z' + \ldots, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ e_u &= \mathrm{A} + b_u x' + c_u y' + d_u z' + \ldots. \end{aligned}$$

Si l'on égale entre elles les valeurs précédentes de celles des erreurs e_q, e_r, e_s, ... qui entrent avec e_p dans une même combinaison de l'ordre m, on aura une équation multiple, et cette équation multiple déterminera les rapports

$$\frac{y'}{x'}, \quad \frac{z'}{x'}, \quad \ldots$$

qui conviennent à tous les systèmes correspondant à cette combinaison. Soient k, l, ... ces mêmes rapports. Si l'on suppose que les erreurs comprises dans les combinaisons dont il s'agit deviennent supérieures à toutes les autres pour des valeurs positives de $x' = x - \alpha$, la valeur

commune de ces diverses erreurs, correspondant à une valeur quelconque de x', sera de la forme

$$\mathrm{A} + \mathrm{B}x',$$

pourvu que l'on suppose

$$(1) \quad \mathrm{B} = b_p + c_p k + d_p l + \ldots = b_q + c_q k + d_q l + \ldots = b_r + c_r k + d_r l + \ldots;$$

et, comme dans le cas contraire on doit avoir

$$e_u < e_p = \mathrm{A} + \mathrm{B}x',$$

il faudra supposer

$$b_u + c_u k + d_u l + \ldots < \mathrm{B}.$$

Si donc l'on désigne par δ une quantité très petite, que l'on pourra d'ailleurs choisir à volonté, et que l'on fasse

$$\mathrm{B}(1 - \delta) = \mathrm{B}',$$

on pourra supposer

$$(2) \qquad b_u + c_u k + d_u l + \ldots = \mathrm{B}'.$$

Cette première équation établira entre les inconnues b_u, c_u, d_u, ... une relation en vertu de laquelle la différence $e_p - e_u$ restera positive pour les systèmes de valeurs correspondant à l'une des combinaisons de l'ordre m qui renferment l'erreur e_p, et qui ont pour limite la combinaison donnée de l'ordre $m + 1$.

Supposons maintenant que le nombre des combinaisons de cette espèce ne surpasse pas m; on pourra former autant d'équations pareilles à l'équation (2) qu'il y aura de semblables combinaisons, et déterminer les valeurs des inconnues b_u, c_u, d_u, ... de manière que toutes ces équations soient satisfaites. Alors on sera assuré que la différence $e_p - e_u$ reste positive pour tous les systèmes de valeurs correspondant aux combinaisons dont il s'agit. Par suite, cette différence sera positive pour tous les systèmes de valeurs qui correspondaient à l'erreur e_p. Car, si, pour quelques-uns d'entre eux, elle devenait négative, elle le serait encore, en vertu du théorème VII, pour quelques-uns des systèmes correspondant aux combinaisons de l'ordre m que l'on considère.

Corollaire I. — On pourra toujours déterminer les coefficients de l'erreur fictive e_u de manière que cette erreur soit inférieure à e_p pour tous les systèmes de valeurs qui rendent l'erreur e_p supérieure aux autres, excepté toutefois celui qui rend les erreurs e_p, e_q, e_r, ... égales entre elles, et pour lequel on aura encore $e_u = e_p$. De plus, puisque, pour des valeurs données des variables $x, y, z, \ldots$, la différence

$$e_p - e_u$$

dépendra de la différence $B - B' = B\delta$ et de toutes les différences semblables qui peuvent devenir chacune aussi petite qu'on le jugera convenable, et que les coefficients de $e_p - e_u$, savoir

$$b_p - b_u, \quad c_p - c_u, \quad d_p - d_u, \quad \ldots$$

sont, ainsi qu'on peut le conclure des équations (1) et (2), du même ordre que ces différences; on voit que la différence

$$e_p - e_u$$

pourra elle-même devenir moindre que toute quantité donnée.

Corollaire II. — Considérons un système de valeurs pour lequel on ait

$$e_q > e_p;$$

on pourra toujours déterminer les coefficients de e_u de manière que la différence

$$e_p - e_u$$

soit inférieure (abstraction faite du signe) à

$$e_q - e_p$$

et, par suite, de manière que e_u soit inférieur à e_q. Ainsi l'on pourra

toujours faire en sorte que l'erreur e_u ne devienne jamais la plus grande de toutes, si ce n'est pour le système de valeurs qui correspond à la combinaison de l'ordre $m+1$ que l'on considère, et pour lequel on aura à la fois

$$e_p = e_q = e_r = \ldots = e_u.$$

Corollaire III. — L'erreur e_u étant déterminée comme on vient de le dire, les différences

$$e_p - e_u, \quad e_q - e_u, \quad e_r - e_u, \quad \ldots$$

seront toutes égales à zéro pour le système de valeurs

$$\alpha, \quad 6, \quad \gamma, \quad \ldots$$

qui correspond à la combinaison que l'on considère. Mais, pour tout autre système, une ou plusieurs de ces différences deviendront positives, et si l'on augmente indéfiniment la valeur de $x - \alpha$, en laissant toujours les mêmes valeurs aux rapports

$$\frac{y-6}{x-\alpha}, \quad \frac{z-\gamma}{x-\alpha}, \quad \ldots,$$

celle des différences

$$e_p - e_u, \quad e_q - e_u, \quad \ldots,$$

qui seront positives, finiront par devenir plus grandes que toute quantité donnée.

Corollaire IV. — L'erreur e_u étant toujours déterminée de la même manière, soit e_v une seconde erreur fictive, et faisons

$$e_v = e_u + \varepsilon;$$

ε étant une quantité très petite, mais arbitraire. Alors, pour le système de valeurs $\alpha, 6, \gamma, \ldots$ et pour les systèmes voisins, l'erreur e_v deviendra supérieure à toutes les autres. De plus, comme pour des valeurs infinies de $x - \alpha$, $y - 6$, $z - \gamma$, ..., quelques-unes des différences

$$e_p - e_u, \quad e_q - e_u, \quad \ldots$$

deviennent positives et infinies, et qu'au contraire la différence $e_v - e_u$ est toujours constante, on voit que, pour de grandes valeurs $x - \alpha$, $y - \beta$, $z - \gamma$, ..., quelques-unes des différences

$$e_p - e_v, \quad e_q - e_v, \quad \ldots$$

deviendront positives. Par suite, les systèmes de valeurs qui rendent l'erreur e_p supérieure aux autres ne peuvent s'étendre à l'infini. Cette erreur sera donc une erreur définie. Enfin il est aisé de voir que les combinaisons de l'ordre k qui renfermeraient quelques-unes des erreurs e_p, e_q, e_r, ... comprises dans la combinaison de l'ordre $m+1$ que l'on considère, se trouveront, par l'addition de l'erreur e_v, transformées en des combinaisons de l'ordre $k+1$.

Théorème IX. — *Si l'on désigne par m le nombre des éléments variables, chaque combinaison de l'ordre m + 1 servira de limite, au moins, à m + 1 combinaisons de l'ordre m.*

Démonstration. — Soit

$$(e_p, e_q, e_r, e_s, \ldots)$$

la combinaison de l'ordre $m+1$ que l'on considère, et soit e_p une des erreurs comprises dans cette combinaison, erreur qui pourra devenir supérieure à toutes les autres. Si le nombre des combinaisons de l'ordre m qui renferment l'erreur e_p est supérieur à m, le théorème se trouvera vérifié immédiatement; mais, si ce nombre n'est pas supérieur à m, on pourra, en vertu de la proposition précédente (corollaire IV), concevoir une erreur fictive e_v qui soit définie et qui surpasse toutes les autres pour le système de valeurs

$$\alpha, \quad \beta, \quad \gamma, \quad \ldots$$

correspondant à la combinaison de l'ordre $m+1$ que l'on considère. De plus, si l'erreur fictive e_v est déterminée par la méthode que nous avons indiquée, alors chacune des combinaisons de l'ordre k qui appartenaient à la combinaison donnée de l'ordre $m+1$ deviendra, par l'addition de l'erreur e_v, une combinaison de l'ordre $k+1$. Par suite, le nombre des combinaisons de l'ordre $m+1$ qui renfermeront l'erreur définie e_v sera égal au nombre des combinaisons de l'ordre m qui avaient pour limite commune la combinaison donnée de l'ordre $m+1$. D'ailleurs, en vertu du théorème VI, le nombre des combinaisons de l'ordre $m+1$ qui renferment une même erreur définie est au moins égal à $m+1$. Il en sera de même du nombre des combinaisons de l'ordre m qui ont une même limite; ce qui vérifie le théorème énoncé.

Lorsque le nombre des erreurs renfermées dans la combinaison de l'ordre $m+1$ que l'on considère est seulement égal à $m+1$, on peut encore démontrer facilement le théorème IX de la manière suivante :

Soient e_p, e_q, e_r, ... les erreurs renfermées dans une même combinaison de l'ordre $m+1$, en nombre égal à $m+1$. Ces erreurs deviendront simultanément les plus grandes de toutes, si l'on détermine les variables x, y, z, ... par l'équation

$$e_p = e_q = e_r = \ldots.$$

Mais, si l'on désigne par δ une quantité très petite et positive, et que l'on détermine x, y, z, ... par l'équation

$$e_p + \delta = e_q = e_r = \ldots,$$

l'erreur e_p deviendra inférieure aux autres, et les erreurs e_q, e_r, e_s, ... seront simultanément les plus grandes de toutes. Dans le même cas, la combinaison

$$(e_q, e_r, e_s, \ldots)$$

sera de l'ordre m. On obtiendra donc une combinaison de l'ordre m formée d'erreurs qui deviennent simultanément les plus grandes de toutes, si dans la combinaison donnée

$$(e_p, e_q, e_r, e_s, \ldots)$$

on supprime la première erreur e_p. On arriverait encore aux mêmes conclusions si, au lieu de supprimer l'erreur e_p, on supprimait l'erreur e_q.

ou l'erreur e_r, ..., ou quelqu'une des autres erreurs données. Ces dernières étant, par hypothèse, en nombre égal à $m+1$, on obtiendra, par ces diverses suppressions, $m+1$ combinaisons de l'ordre m, qui toutes se trouveront comprises dans la combinaison donnée.

Corollaire. — Soient M_{m+1} le nombre total des combinaisons de l'ordre $m+1$, et M_m le nombre total des combinaisons de l'ordre m, tant définies qu'indéfinies. Puisque chaque combinaison de l'ordre $m+1$ renferme au moins $m+1$ combinaisons de l'ordre m, et que chaque combinaison de l'ordre m a pour limites deux combinaisons de l'ordre $m+1$, si elle est définie, et une seule, si elle est indéfinie; on aura

$$(m+1)M_{m+1} < 2M_m, \qquad \text{ou} \qquad M_m > \frac{m+1}{2} M_{m+1}.$$

Cette inégalité jointe à l'équation (3) du théorème V sert à déterminer une limite du nombre d'opérations qu'exige la méthode exposée dans ce Mémoire.

Théorème X. — *Le nombre des opérations qu'exige la méthode exposée dans ce Mémoire n'est pas d'un ordre plus élevé que le nombre des combinaisons $m-1$ à $m-1$ des erreurs données, m étant le nombre des éléments variables.*

Démonstration. — En effet, supposons qu'en ayant seulement égard aux combinaisons formées d'erreurs qui puissent devenir simultanément les plus grandes de toutes, on désigne par M_1 le nombre des erreurs simples ou combinaisons du premier ordre, et par

$$M_2, \quad M_3, \quad \ldots, \quad M_m, \quad M_{m+1},$$

les nombres de combinaisons du deuxième, du troisième, ..., enfin, du $m^{\text{ième}}$ et du $(m+1)^{\text{ième}}$ ordre. On aura, en vertu du théorème V,

$$M_{m+1} - M_m + M_{m-1} - \ldots \pm M_2 \mp M_1 \pm 1 = 0,$$

et en vertu du théorème IX,

$$M_m > \frac{m+1}{2} M_{m+1}.$$

Si l'on ajoute membre à membre l'équation et l'inégalité précédentes, on aura

$$M_{m-1} - M_{m-2} + \ldots \pm M_2 \mp M_1 \pm 1 > \frac{m-1}{2} M_{m+1},$$

d'où l'on conclut

$$M_{m+1} < \frac{2}{m-1}(M_{m-1} - M_{m-2} + \ldots \pm M_2 \mp M_1 \pm 1); \tag{1}$$

le signe supérieur devant être admis si m est un nombre impair, et le signe inférieur dans le cas contraire. D'ailleurs M_{m+1} représente, comme on l'a déjà remarqué, la limite du nombre des opérations à faire, et M_{m-1} indique le nombre des combinaisons de l'ordre $m-1$, qui est ou égal ou inférieur au nombre des combinaisons $m-1$ à $m-1$ des erreurs données ou d'une partie de ces erreurs. L'inégalité précédente vérifie donc le théorème énoncé.

Corollaire I. — Si l'on a deux éléments variables, il faudra supposer $m=2$, et l'inégalité précédente deviendra

$$M_3 < 2M_1 - 2:$$

Par suite, le nombre des opérations à faire ne pourra surpasser $2M_1$ ou le double du nombre des erreurs.

Corollaire II. — Si l'on suppose $m=3$, on aura

$$M_4 < M_2 - M_1 + 1:$$

Par suite, le nombre des opérations à faire ne pourra être d'un ordre supérieur au nombre des combinaisons deux à deux, c'est-à-dire au carré du nombre des erreurs.

Corollaire III. — Si l'on suppose $m = 4$, on aura

$$M_4 < \frac{2}{3}(M_3 - M_2 + M_1 - 1) :$$

Par suite, le nombre des opérations à faire ne pourra être d'un ordre supérieur à M_3 ou au cube du nombre des erreurs, etc.

MÉMOIRE SUR L'INTÉGRATION D'UNE CERTAINE CLASSE D'ÉQUATIONS AUX DIFFÉRENCES PARTIELLES, ET SUR LES PHÉNOMÈNES DONT CETTE INTÉGRATION FAIT CONNAITRE LES LOIS DANS LES QUESTIONS DE PHYSIQUE MATHÉMATIQUE.

Journal de l'École Polytechnique, XX^e Cahier, Tome XIII, p. 175, 287; 1831.

La solution d'un grand nombre de problèmes de Physique mathématique dépend de l'intégration d'équations aux différences partielles linéaires, et à coefficients constants, dans lesquelles les dérivées de la variable principale sont toutes du même ordre. Telles sont, en particulier, les équations qui expriment les lois de la propagation des ondes à la surface d'un liquide renfermé dans un canal dont la profondeur est très petite, et les lois de la propagation du son dans un gaz, dans un liquide, ou dans un corps solide élastique. Il était important d'obtenir les intégrales générales des équations de ce genre sous une forme telle qu'on pût en déduire aisément la connaissance des phénomènes que ces équations représentent. Tel est l'objet du Mémoire qu'on va lire. Dans les premiers paragraphes, je m'occuperai de l'intégration des équations linéaires aux différences partielles et à coefficients constants, du deuxième ordre, ou d'un ordre pair supérieur au deuxième, mais dans lesquelles toutes les dérivées sont de même ordre. J'appliquerai ensuite les formules trouvées à diverses questions de Physique mathématique.

§ I. *Sur l'intégration d'une certaine classe d'équations aux différences partielles du deuxième ordre.*

Soient x, y, z, t quatre variables indépendantes, et $\mathfrak{z}$ une fonction de ces quatre variables, déterminée par l'équation aux différences partielles

$$(1)\qquad \frac{\partial^2 \mathfrak{z}}{\partial t^2} = \mathrm{A}\frac{\partial^2 \mathfrak{z}}{\partial x^2} + \mathrm{B}\frac{\partial^2 \mathfrak{z}}{\partial y^2} + \mathrm{C}\frac{\partial^2 \mathfrak{z}}{\partial z^2} + 2\mathrm{D}\frac{\partial^2 \mathfrak{z}}{\partial y\,\partial z} + 2\mathrm{E}\frac{\partial^2 \mathfrak{z}}{\partial z\,\partial x} + 2\mathrm{F}\frac{\partial^2 \mathfrak{z}}{\partial x\,\partial y},$$

dans lesquelles A, B, C, D, E, F désignent des constantes choisies de manière que le polynome

$$(2)\qquad \mathrm{A}\alpha^2 + \mathrm{B}\beta^2 + \mathrm{C}\gamma^2 + 2\mathrm{D}\beta\gamma + 2\mathrm{E}\gamma\alpha + 2\mathrm{F}\alpha\beta$$

reste positif pour toutes les valeurs possibles des quantités α, β, γ; ou, ce qui revient au même, de manière que l'équation

$$(3)\qquad \mathrm{A}x^2 + \mathrm{B}y^2 + \mathrm{C}z^2 + 2\mathrm{D}yz + 2\mathrm{E}zx + 2\mathrm{F}xy = 1$$

représente un ellipsoïde. Supposons d'ailleurs que l'on connaisse les valeurs de $\mathfrak{z}$ et $\frac{\partial \mathfrak{z}}{\partial t}$ correspondant à $t = 0$, et que ces valeurs soient respectivement

$$(4)\qquad \mathfrak{z} = \varpi(x, y, z), \qquad \frac{\partial \mathfrak{z}}{\partial t} = \Pi(x, y, z).$$

La valeur générale de $\mathfrak{z}$ sera

$$(5)\qquad \mathfrak{z} = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^3 \int\!\!\int\!\!\int\!\!\int\!\!\int\!\!\int e^{\alpha(x-\lambda)\sqrt{-1}} e^{\beta(y-\mu)\sqrt{-1}} e^{\gamma(z-\nu)\sqrt{-1}}\, \mathrm{U}\, d\alpha\, d\beta\, d\gamma\, d\lambda\, d\mu\, d\nu,$$

e désignant la base des logarithmes népériens, l'intégration relative à chacune des variables auxiliaires α, β, γ, λ, μ, ν devant être effectuée entre les limites $-\infty$, $+\infty$, et la lettre U représentant une fonction de α, β, γ, λ, μ, ν, t, propre à vérifier : 1° quel que soit t, la formule

$$(6)\qquad (\mathrm{A}\alpha^2 + \mathrm{B}\beta^2 + \mathrm{C}\gamma^2 + 2\mathrm{D}\beta\gamma + 2\mathrm{E}\gamma\alpha + 2\mathrm{F}\alpha\beta)\mathrm{U} + \frac{\partial^2 \mathrm{U}}{\partial t^2} = 0;$$

2° Pour $t = 0$, les deux conditions

$$(7)\qquad \mathrm{U} = \varpi(\lambda, \mu, \nu), \qquad \frac{\partial \mathrm{U}}{\partial t} = \Pi(\lambda, \mu, \nu).$$

Cela posé, si l'on fait, pour abréger,

$$(8)\qquad \mathrm{A}\alpha^2 + \mathrm{B}\beta^2 + \mathrm{C}\gamma^2 + 2\mathrm{D}\beta\gamma + 2\mathrm{E}\gamma\alpha + 2\mathrm{F}\alpha\beta = \theta^2,$$

on trouvera

$$(9)\qquad \mathrm{U} = \varpi(\lambda, \mu, \nu)\cos\theta t + \Pi(\lambda, \mu, \nu)\frac{\sin\theta t}{\theta},$$

ou, ce qui revient au même,

$$(10)\qquad \mathrm{U} = \varpi(\lambda, \mu, \nu)\cos\theta t + \int_0^t \Pi(\lambda, \mu, \nu)\cos\theta t\, dt;$$

et l'on aura par suite

$$(11)\qquad \left\{\begin{aligned} \mathfrak{z} = {} & \left(\frac{1}{2\pi}\right)^3 \int\!\!\int\!\!\int\!\!\int\!\!\int\!\!\int e^{\alpha(x-\lambda)\sqrt{-1}} e^{\beta(y-\mu)\sqrt{-1}} e^{\gamma(z-\nu)\sqrt{-1}} \\ & \qquad \times \cos\theta t\, \varpi(\lambda, \mu, \nu)\, d\alpha\, d\beta\, d\gamma\, d\lambda\, d\mu\, d\nu \\ & + \left(\frac{1}{2\pi}\right)^3 \int_0^t \int\!\!\int\!\!\int\!\!\int\!\!\int\!\!\int e^{\alpha(x-\lambda)\sqrt{-1}} e^{\beta(y-\mu)\sqrt{-1}} e^{\gamma(z-\nu)\sqrt{-1}} \\ & \qquad \times \cos\theta t\, \Pi(\lambda, \mu, \nu)\, dt\, d\alpha\, d\beta\, d\gamma\, d\lambda\, d\mu\, d\nu. \end{aligned}\right.$$

Observons maintenant que l'équation (8) peut être présentée sous la forme

$$(12)\qquad \left\{\begin{aligned} \theta^2 = {} & \mathrm{A}\left(\alpha + \frac{\mathrm{F}}{\mathrm{A}}\beta + \frac{\mathrm{E}}{\mathrm{A}}\gamma\right)^2 \\ & + \left(\mathrm{B} - \frac{\mathrm{F}^2}{\mathrm{A}}\right)\left(\beta + \frac{\mathrm{D} - \frac{\mathrm{EF}}{\mathrm{A}}}{\mathrm{B} - \frac{\mathrm{F}^2}{\mathrm{A}}}\gamma\right)^2 + \left[\mathrm{C} - \frac{\mathrm{E}^2}{\mathrm{A}} - \frac{\left(\mathrm{D} - \frac{\mathrm{EF}}{\mathrm{A}}\right)^2}{\mathrm{B} - \frac{\mathrm{F}^2}{\mathrm{A}}}\right]\gamma^2. \end{aligned}\right.$$

Donc, si l'on fait

$$(13)\qquad \left\{\begin{aligned} \mathrm{G} &= \mathrm{A}, \\ \mathrm{H} &= \mathrm{B} - \frac{\mathrm{F}^2}{\mathrm{A}} = \frac{\mathrm{AB} - \mathrm{F}^2}{\mathrm{A}}, \\ \mathrm{J} &= \mathrm{C} - \frac{\mathrm{E}^2}{\mathrm{A}} - \frac{\left(\mathrm{D} - \frac{\mathrm{EF}}{\mathrm{A}}\right)^2}{\mathrm{B} - \frac{\mathrm{F}^2}{\mathrm{A}}} = \frac{\mathrm{ABC} - \mathrm{AD}^2 - \mathrm{BE}^2 - \mathrm{CF}^2 + 2\mathrm{DEF}}{\mathrm{AB} - \mathrm{F}^2}, \end{aligned}\right.$$

et de plus

$$(14)\qquad \alpha + \frac{\mathrm{F}}{\mathrm{A}}\beta + \frac{\mathrm{E}}{\mathrm{A}}\gamma = \alpha', \qquad \beta + \frac{\mathrm{AD}-\mathrm{EF}}{\mathrm{AB}-\mathrm{F}^2}\gamma = \beta', \qquad \gamma = \gamma',$$

ou, ce qui revient au même,

$$(15)\qquad \alpha = \alpha' - \frac{\mathrm{F}}{\mathrm{A}}\beta' + \frac{\mathrm{FD}-\mathrm{BE}}{\mathrm{AB}-\mathrm{F}^2}\gamma', \qquad \beta = \beta' - \frac{\mathrm{AD}-\mathrm{EF}}{\mathrm{AB}-\mathrm{F}^2}\gamma', \qquad \gamma = \gamma',$$

on aura simplement

$$(16)\qquad \theta^2 = \mathrm{G}\alpha'^2 + \mathrm{H}\beta'^2 + \mathrm{J}\gamma'^2.$$

Soient d'ailleurs

$$(17)\qquad \mathrm{X} = x, \quad \mathrm{Y} = y - \frac{\mathrm{F}}{\mathrm{A}}x, \qquad \mathrm{Z} = z - \frac{\mathrm{AD}-\mathrm{EF}}{\mathrm{AB}-\mathrm{F}^2}y + \frac{\mathrm{FD}-\mathrm{BE}}{\mathrm{AB}-\mathrm{F}^2}x,$$

et

$$(18)\qquad \lambda' = \lambda, \qquad \mu' = \mu - \frac{\mathrm{F}}{\mathrm{A}}\lambda, \qquad \nu' = \nu - \frac{\mathrm{AD}-\mathrm{EF}}{\mathrm{AB}-\mathrm{F}^2}\mu + \frac{\mathrm{FD}-\mathrm{BE}}{\mathrm{AB}-\mathrm{F}^2}\lambda.$$

On trouvera

$$(19)\qquad \alpha(x-\lambda) + \beta(y-\mu) + \gamma(z-\nu) = \alpha'(\mathrm{X}-\lambda') + \beta'(\mathrm{Y}-\mu') + \gamma'(\mathrm{Z}-\nu').$$

et, par suite,

$$(20)\qquad \left\{\begin{aligned} &\int\!\!\int\!\!\int\!\!\int\!\!\int\!\!\int e^{\alpha(x-\lambda)\sqrt{-1}}e^{\beta(y-\mu)\sqrt{-1}}e^{\gamma(z-\nu)\sqrt{-1}} \\ &\qquad\qquad \times \cos\theta t\,\varpi(\lambda,\mu,\nu)\,d\alpha\,d\beta\,d\gamma\,d\lambda\,d\mu\,d\nu \\ &= \int\!\!\int\!\!\int\!\!\int\!\!\int\!\!\int e^{\alpha'(\mathrm{X}-\lambda')\sqrt{-1}}e^{\beta'(\mathrm{Y}-\mu')\sqrt{-1}}e^{\gamma'(\mathrm{Z}-\nu')\sqrt{-1}} \\ &\qquad\qquad \times \cos\theta t\,\varpi(\lambda,\mu,\nu)\,d\alpha'\,d\beta'\,d\gamma'\,d\lambda'\,d\mu'\,d\nu' \\ &= \int\!\!\int\!\!\int\!\!\int\!\!\int\!\!\int \cos\alpha'(\mathrm{X}-\lambda')\cos\beta'(\mathrm{Y}-\mu')\cos\gamma'(\mathrm{Z}-\nu') \\ &\qquad\qquad \times \cos\theta t\,\varpi(\lambda,\mu,\nu)\,d\alpha'\,d\beta'\,d\gamma'\,d\lambda'\,d\mu'\,d\nu', \end{aligned}\right.$$

l'intégration relative à chacune des variables auxiliaires α', β', γ', λ', μ', ν' devant être effectuée entre les limites $-\infty$, $+\infty$.

Soit encore

$$(21)\qquad \left[\frac{(\mathrm{X}-\lambda')^2}{\mathrm{G}} + \frac{(\mathrm{Y}-\mu')^2}{\mathrm{H}} + \frac{(\mathrm{Z}-\nu')^2}{\mathrm{J}}\right]^{\frac{1}{2}} = r.$$

On aura, en vertu d'une formule que j'ai donnée dans le XIX^e Cahier du *Journal de l'École Polytechnique* (*voir* p. 292),

$$(22)\qquad \left\{\begin{aligned} &\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\cos\alpha'(\mathrm{X}-\lambda')\cos\beta'(\mathrm{Y}-\mu')\cos\gamma'(\mathrm{Z}-\nu') \\ &\qquad \times \cos(\mathrm{G}\alpha'^2+\mathrm{H}\beta'^2+\mathrm{J}\gamma'^2)^{\frac{1}{2}}t\,d\alpha'\,d\beta'\,d\gamma' \\ &= \frac{2\pi}{\mathrm{G}^{\frac{1}{2}}\mathrm{H}^{\frac{1}{2}}\mathrm{J}^{\frac{1}{2}}r}\int_{-\infty}^{\infty}\alpha\sin r\alpha\cos\alpha t\,d\alpha \\ &= -\frac{2\pi}{\mathrm{G}^{\frac{1}{2}}\mathrm{H}^{\frac{1}{2}}\mathrm{J}^{\frac{1}{2}}r}\frac{\partial}{\partial r}\int_{-\infty}^{\infty}\cos r\alpha\cos\alpha t\,d\alpha. \end{aligned}\right.$$

Dans l'équation (22), l'intégrale

$$\int_{-\infty}^{\infty}\cos r\alpha\cos\alpha t\,d\alpha$$

peut être remplacée par la suivante

$$\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\kappa\sqrt{\alpha^2}}\cos r\alpha\cos\alpha t\,d\alpha,$$

κ désignant une quantité positive infiniment petite; et, comme on a d'ailleurs

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty}e^{-\kappa\sqrt{\alpha^2}}\cos r\alpha\cos\alpha t\,d\alpha &= 2\int_0^{\infty}e^{-\kappa\alpha}\cos r\alpha\cos\alpha t\,d\alpha \\ &= \frac{\kappa}{\kappa^2+(r-t)^2} + \frac{\kappa}{\kappa^2+(r+t)^2} = \frac{\kappa}{\kappa^2+(r-t)^2}, \end{aligned}$$

il est clair que la formule (22) pourra être réduite à

$$(23)\qquad \left\{\begin{aligned} &\int\!\!\int\!\!\int\cos\alpha'(\mathrm{X}-\lambda')\cos\beta'(\mathrm{Y}-\mu')\cos\gamma'(\mathrm{Z}-\nu')\cos\theta t\,d\alpha'\,d\beta'\,d\gamma' \\ &\quad = -\frac{2\pi}{\mathrm{G}^{\frac{1}{2}}\mathrm{H}^{\frac{1}{2}}\mathrm{J}^{\frac{1}{2}}r}\,\frac{\partial\left[\frac{\kappa}{\kappa^2+(r-t)^2}\right]}{\partial r} = \frac{2\pi}{\mathrm{G}^{\frac{1}{2}}\mathrm{H}^{\frac{1}{2}}\mathrm{J}^{\frac{1}{2}}r}\,\frac{\partial\left[\frac{\kappa}{\kappa^2+(r-t)^2}\right]}{\partial t}. \end{aligned}\right.$$

Cela posé, les formules (11) et (20) donneront

$$(24)\quad \left\{\begin{aligned} \text{ȣ} &= \int\!\!\int\!\!\int \frac{1}{4\pi^2 \mathrm{G}^{\frac12}\mathrm{H}^{\frac12}\mathrm{J}^{\frac12} r}\,\frac{\mathrm{K}}{\mathrm{K}^2+(r-t)^2}\,\Pi(\lambda,\mu,\nu)\,d\lambda'\,d\mu'\,d\nu' \\ &+ \frac{\partial}{\partial t}\int\!\!\int\!\!\int \frac{1}{4\pi^2 \mathrm{G}^{\frac12}\mathrm{H}^{\frac12}\mathrm{J}^{\frac12} r}\,\frac{\mathrm{K}}{\mathrm{K}^2+(r-t)^2}\,\varpi(\lambda,\mu,\nu)\,d\lambda'\,d\mu'\,d\nu'. \end{aligned}\right.$$

Concevons à présent que l'on considère les trois rapports

$$\frac{\lambda'-\mathrm{X}}{\mathrm{G}^{\frac12}},\quad \frac{\mu'-\mathrm{Y}}{\mathrm{H}^{\frac12}},\quad \frac{\nu'-\mathrm{Z}}{\mathrm{J}^{\frac12}},$$

comme représentant des coordonnées rectangulaires, et que l'on transforme ces coordonnées rectangulaires en coordonnées polaires, dont l'une soit précisément la variable r, à l'aide des formules

$$(25)\quad \frac{\lambda'-\mathrm{X}}{\mathrm{G}^{\frac12}} = r\cos p,\quad \frac{\mu'-\mathrm{Y}}{\mathrm{H}^{\frac12}} = r\sin p\cos q,\quad \frac{\nu'-\mathrm{Z}}{\mathrm{J}^{\frac12}} = r\sin p\sin q.$$

On devra, dans la formule (24), à la place du produit $d\lambda'\,d\mu'\,d\nu'$, écrire le suivant $\mathrm{G}^{\frac12}\mathrm{H}^{\frac12}\mathrm{J}^{\frac12} r^2 \sin p\,dp\,dq\,dr$, et l'on tirera de cette formule

$$(26)\quad \left\{\begin{aligned} \text{ȣ} &= \frac{1}{4\pi^2}\int\!\!\int\!\!\int \frac{\mathrm{K}}{\mathrm{K}^2+(r-t)^2}\,\Pi(\lambda,\mu,\nu)\,r\sin p\,dp\,dq\,dr \\ &+ \frac{1}{4\pi^2}\frac{\partial}{\partial t}\int\!\!\int\!\!\int \frac{\mathrm{K}}{\mathrm{K}^2+(r-t)^2}\,\varpi(\lambda,\mu,\nu)\,r\sin p\,dp\,dq\,dr, \end{aligned}\right.$$

les intégrations devant être effectuées entre les limites $p=0$, $p=\pi$, $q=0$, $q=2\pi$, $r=0$, $r=\infty$. Or, K étant un nombre infiniment petit, si l'on désigne par l, m, n ce que deviennent les valeurs de λ, μ, ν, tirées des équations (18) et (25), lorsqu'on y suppose $r=t$, on aura

$$(27)\quad \int_0^\infty \frac{\mathrm{K}}{\mathrm{K}^2+(r-t)^2}\,\varpi(\lambda,\mu,\nu)\,r\,dr = \pi t\,\varpi(l,m,n);$$

et par conséquent la formule (26) donnera

$$(28)\quad \left\{\begin{aligned} \text{ȣ} &= \frac{1}{4\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} t\sin p\,\Pi(l,m,n)\,dp\,dq \\ &+ \frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial t}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} t\sin p\,\varpi(l,m,n)\,dp\,dq, \end{aligned}\right.$$

les valeurs de l, m, n étant

$$(29)\quad \left\{\begin{aligned} l &= \mathrm{X} + \mathrm{G}^{\frac12} t\cos p, \\ m &= \mathrm{Y} + \mathrm{H}^{\frac12} t\sin p\cos q + \frac{\mathrm{F}}{\mathrm{A}}\left(\mathrm{X} + \mathrm{G}^{\frac12} t\cos p\right), \\ n &= \mathrm{Z} + \mathrm{J}^{\frac12} t\sin p\sin q + \frac{\mathrm{AD}-\mathrm{EF}}{\mathrm{AB}-\mathrm{F}^2}\left(\mathrm{X} + \mathrm{H}^{\frac12} t\sin p\cos q\right) + \frac{\mathrm{E}}{\mathrm{A}}\left(\mathrm{X} + \mathrm{G}^{\frac12} t\cos p\right), \end{aligned}\right.$$

ou, ce qui revient au même,

$$(30)\quad \left\{\begin{aligned} l &= x + \mathrm{G}^{\frac12} t\cos p, \\ m &= y + \mathrm{H}^{\frac12} t\sin p\cos q + \frac{\mathrm{F}}{\mathrm{A}}\mathrm{G}^{\frac12} t\cos p. \\ n &= z + \mathrm{J}^{\frac12} t\sin p\sin q + \frac{\mathrm{AD}-\mathrm{EF}}{\mathrm{AB}-\mathrm{F}^2}\mathrm{H}^{\frac12} t\sin p\cos q + \frac{\mathrm{E}}{\mathrm{A}}\mathrm{G}^{\frac12} t\cos p. \end{aligned}\right.$$

Concevons, pour fixer les idées, que l'équation (1) se rapporte à une question de Mécanique ou de Physique, dans laquelle t représente le temps, et x, y, z des coordonnées rectilignes; supposons d'ailleurs que les valeurs initiales de ȣ et $\frac{\partial \text{ȣ}}{\partial t}$, savoir : $\varpi(x,y,z)$ et $\pi(x,y,z)$, soient sensiblement nulles pour tous les points situés à une distance sensible de l'origine. Au bout du temps t, les fonctions $\varpi(l,m,n)$, $\pi(l,m,n)$ ne cesseront d'être nulles que pour des valeurs de l, m, n, très peu différentes de celles qui vérifient les trois conditions

$$(31)\quad l=0,\qquad m=0,\qquad n=0,$$

desquelles on tire, en les combinant avec les formules (29),

$$\mathrm{X} + \mathrm{G}^{\frac12} t\cos p = 0,\qquad \mathrm{Y} + \mathrm{H}^{\frac12} t\sin p\cos q = 0,\qquad \mathrm{Z} + \mathrm{J}^{\frac12} t\sin p\sin q = 0,$$

et, par conséquent,

$$(32)\quad \frac{\mathrm{X}^2}{\mathrm{G}} + \frac{\mathrm{Y}^2}{\mathrm{H}} + \frac{\mathrm{Z}^2}{\mathrm{J}} = t^2.$$

Si dans l'équation (32) on remet, pour les valeurs X, Y, Z, leurs valeurs déduites des formules (17), elle deviendra

$$(33)\qquad \frac{\left\{\begin{array}{l}(\mathrm{BC}-\mathrm{D}^2)x^2+(\mathrm{CA}-\mathrm{E}^2)y^2+(\mathrm{AB}-\mathrm{F}^2)z^2\\ \quad +2(\mathrm{EF}-\mathrm{AD})yz+2(\mathrm{FD}-\mathrm{BE})xz+2(\mathrm{DE}-\mathrm{CF})xy\end{array}\right\}}{\mathrm{ABC}-\mathrm{AD}^2-\mathrm{BE}^2-\mathrm{CF}^2+2\,\mathrm{DEF}}=t^2.$$

Donc, au bout du temps t, la variable 8 n'aura de valeur sensible que dans le voisinage de la surface du second degré, représentée par l'équation (33). Il est d'ailleurs facile de s'assurer que cette surface est un ellipsoïde. En effet, la valeur de θ^2 fournie par l'équation (8) ou (16) devant être positive, quelles que soient les valeurs attribuées aux variables α, 6, γ et, par conséquent, aux variables α', $6'$, γ', les quantités G, H, I seront nécessairement positives. Donc, le premier membre de la formule (32) ou (33) restera positif, quelles que soient les valeurs attribuées aux variables X, Y, Z et, par conséquent, aux variables x, y, z.

Si, pour plus de simplicité, l'on pose

$$(34)\qquad \mathrm{ABC}-\mathrm{AD}^2-\mathrm{BE}^2-\mathrm{CF}^2+2\,\mathrm{DEF}=\mathrm{K},$$

et

$$(35)\qquad \left\{\begin{array}{lll}\mathrm{a}=\dfrac{\mathrm{BC}-\mathrm{D}^2}{\mathrm{K}}, & \mathrm{b}=\dfrac{\mathrm{CA}-\mathrm{E}^2}{\mathrm{K}}, & \mathrm{c}=\dfrac{\mathrm{AB}-\mathrm{F}^2}{\mathrm{K}},\\ \mathrm{d}=\dfrac{\mathrm{EF}-\mathrm{AD}}{\mathrm{K}}, & \mathrm{e}=\dfrac{\mathrm{FD}-\mathrm{BE}}{\mathrm{K}}, & \mathrm{f}=\dfrac{\mathrm{DE}-\mathrm{CF}}{\mathrm{K}},\end{array}\right.$$

l'équation (33) deviendra

$$(36)\qquad \mathrm{a}x^2+\mathrm{b}y^2+\mathrm{c}z^2+2\mathrm{d}yz+2\mathrm{e}zx+2\mathrm{f}xy=t^2.$$

Si d'ailleurs on nomme r le rayon vecteur mené de l'origine au point (x, y, z) de l'ellipsoïde représenté par l'équation (36), et α, 6, γ les angles formés par ce rayon vecteur avec les deux axes des x, y, z, supposés rectangulaires, on aura

$$(37)\qquad x=r\cos\alpha,\qquad y=r\cos6,\qquad z=r\cos\gamma,$$

et, par suite,

$$(38)\qquad r=\Omega t,$$

la valeur de Ω étant positive, et déterminée par la formule

$$(39)\qquad \left\{\begin{array}{l}\dfrac{1}{\Omega^2}=\mathrm{a}\cos^2\alpha+\mathrm{b}\cos^2 6+\mathrm{c}\cos^2\gamma\\ \qquad +2\mathrm{d}\cos6\cos\gamma+2\mathrm{e}\cos\gamma\cos\alpha+2\mathrm{f}\cos\alpha\cos6.\end{array}\right.$$

Cela posé, concevons que la quantité 8 dépende de vibrations très petites d'un corps solide, ou d'un fluide pondérable ou impondérable; et que ces vibrations, d'abord produites dans le voisinage de l'origine des coordonnées, se propagent dans l'espace et donnent ainsi naissance à une onde sonore ou lumineuse. La surface de l'onde coïncidera évidemment, au bout du temps t, avec l'ellipsoïde représenté par l'équation (36). Par suite, la vitesse du son ou de la lumière, mesurée suivant le rayon vecteur r, sera la quantité constante désignée ci-dessus par Ω, et déterminée par la formule (39).

Considérons maintenant un point dont les coordonnées x', y', z seront liées aux coordonnées x, y, z de l'ellipsoïde (33) ou (36) par les formules

$$(40)\qquad \left\{\begin{array}{l}\mathrm{A}x'+\mathrm{F}y'+\mathrm{E}z'=x,\\ \mathrm{F}x'+\mathrm{B}y'+\mathrm{D}z'=y,\\ \mathrm{E}x'+\mathrm{D}y'+\mathrm{C}z'=z.\end{array}\right.$$

On tirera de ces formules

$$(41)\qquad \left\{\begin{array}{l}x'=\dfrac{(\mathrm{BC}-\mathrm{D}^2)x+(\mathrm{DE}-\mathrm{CF})y+(\mathrm{FD}-\mathrm{BE})z}{\mathrm{ABC}-\mathrm{AD}^2-\mathrm{BE}^2-\mathrm{CF}^2+2\,\mathrm{DEF}},\\ y'=\dfrac{(\mathrm{DE}-\mathrm{CF})x+(\mathrm{CA}-\mathrm{E}^2)y+(\mathrm{EF}-\mathrm{AD})z}{\mathrm{ABC}-\mathrm{AD}^2-\mathrm{BE}^2-\mathrm{CF}^2+2\,\mathrm{DEF}},\\ z'=\dfrac{(\mathrm{FD}-\mathrm{BE})x+(\mathrm{EF}-\mathrm{AD})y+(\mathrm{AB}-\mathrm{F}^2)z}{\mathrm{ABC}-\mathrm{AD}^2-\mathrm{BE}^2-\mathrm{CF}^2+2\,\mathrm{DEF}};\end{array}\right.$$

puis, en combinant les équations (41) avec la formule (33), on trouvera

$$(42)\qquad xx'+yy'+zz'=t^2.$$

Enfin, l'on tirera des équations (40) et (42),

$$\mathrm{A}x'^2 + \mathrm{B}y'^2 + \mathrm{C}z'^2 + 2\mathrm{D}y'z' + 2\mathrm{E}z'x' + 2\mathrm{F}x'y' = t^2. \tag{43}$$

Donc, le point (x', y', z') se trouvera sur la surface d'un second ellipsoïde, représenté par l'équation (43). De plus, si l'on nomme r' le rayon vecteur mené de l'origine au point (x', y', z'), et δ l'angle compris entre les rayons vecteurs r, r', on aura

$$\cos\delta = \frac{xx' + yy' + zz'}{rr'}, \tag{44}$$

en sorte que l'équation (43) pourra être réduite à

$$rr'\cos\delta = t^2. \tag{45}$$

Donc, le produit qu'on obtiendra, au bout du temps t, en multipliant les rayons vecteurs correspondants r, r' par le cosinus de l'angle compris entre eux ou, ce qui revient au même, le premier de ces rayons vecteurs par la projection du second sur le premier, sera constamment égal à t^2. Ajoutons qu'étant donné un point (x', y', z') de l'ellipsoïde (43), on pourra facilement déterminer le point correspondant (x, y, z) de l'ellipsoïde (33). En effet, pour y parvenir, il suffira de mener par le point (x', y', z'), trois plans parallèles à ceux que représentent les équations

$$\left\{\begin{aligned} \mathrm{A}x + \mathrm{F}y + \mathrm{E}z &= 0,\\ \mathrm{F}x + \mathrm{B}y + \mathrm{D}z &= 0,\\ \mathrm{E}x + \mathrm{D}y + \mathrm{C}z &= 0. \end{aligned}\right. \tag{46}$$

Si l'on nomme x'', y'', z'' les coordonnées des points où ces trois plans rencontrent, le premier, l'axe des x, le deuxième, l'axe des y, le troisième, l'axe des z, on aura évidemment

$$\left\{\begin{aligned} \mathrm{A}x' + \mathrm{F}y' + \mathrm{E}z' &= \mathrm{A}x'',\\ \mathrm{F}x' + \mathrm{B}y' + \mathrm{D}z' &= \mathrm{B}y'',\\ \mathrm{E}x' + \mathrm{D}y' + \mathrm{C}z' &= \mathrm{C}z'', \end{aligned}\right. \tag{47}$$

et, par suite,

$$x = \mathrm{A}x'', \qquad y = \mathrm{B}y'', \qquad z = \mathrm{C}z''. \tag{48}$$

On remarquera que le point correspondant aux coordonnées x'', y'', z'' sera situé sur la surface d'un troisième ellipsoïde, dont la construction pourra servir à celle de l'ellipsoïde (33), puisqu'on passera de l'un à l'autre, en faisant croître ou décroître l'abscisse x du troisième ellipsoïde dans le rapport de 1 à A, et l'ordonnée y ou z dans le rapport de 1 à B ou de 1 à C.

Dans le cas particulier où les quantités D, E, F s'évanouissent, l'équation (1) se réduit à

$$\frac{\partial^2 8}{\partial t^2} = \mathrm{A}\frac{\partial^2 8}{\partial x^2} + \mathrm{B}\frac{\partial^2 8}{\partial y^2} + \mathrm{C}\frac{\partial^2 8}{\partial z^2}. \tag{49}$$

Alors aussi l'on tire des formules (13)

$$\mathrm{G} = \mathrm{A}, \qquad \mathrm{H} = \mathrm{B}, \qquad \mathrm{J} = \mathrm{C}, \tag{50}$$

et des formules (20)

$$l = x + \mathrm{A}^{\frac{1}{2}} t\cos p, \qquad m = y + \mathrm{B}^{\frac{1}{2}} t\sin p\cos q, \qquad n = z + \mathrm{C}^{\frac{1}{2}} t\sin p\sin q. \tag{51}$$

Donc la valeur générale de 8, déterminée par l'équation (28), devient

$$\left\{\begin{aligned} 8 = {} & \frac{1}{4\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} t\sin p \\ & \quad \times \pi\left(x + \mathrm{A}^{\frac{1}{2}} t\cos p,\ y + \mathrm{B}^{\frac{1}{2}} t\sin p\cos q,\ z + \mathrm{C}^{\frac{1}{2}} t\sin p\sin q\right) dp\,dq \\ & + \frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial t}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} t\sin p \\ & \quad \times \varpi\left(x + \mathrm{A}^{\frac{1}{2}} t\cos p,\ y + \mathrm{B}^{\frac{1}{2}} t\sin p\cos q,\ z + \mathrm{C}^{\frac{1}{2}} t\sin p\sin q\right) dp\,dq. \end{aligned}\right. \tag{52}$$

Alors aussi les axes des deux ellipsoïdes représentés par les équations (33) (43) coïncident en direction avec les axes des x, y, z, et les équations de ces deux ellipsoïdes deviennent respectivement

$$\frac{x^2}{A}+\frac{y^2}{B}+\frac{z^2}{C}=t^2, \tag{53}$$

$$Ax'^2+By'^2+Cz'^2=t^2. \tag{54}$$

Ces deux équations résultent l'une et l'autre de la formule (42) combinée avec les formules (40) qui, dans le cas présent, se réduisent à

$$Ax'=x,\qquad By'=y,\qquad Cz'=z. \tag{55}$$

De plus, l'équation (39), qui détermine la vitesse Ω, donne simplement

$$\frac{1}{\Omega^2}=\frac{\cos^2\alpha}{A}+\frac{\cos^2\beta}{B}+\frac{\cos^2\gamma}{C}. \tag{56}$$

Cela posé, si l'on nomme Ω_1, Ω_2, Ω_3 les valeurs que prend la vitesse Ω, lorsqu'on la mesure suivant l'axe des x, ou suivant l'axe des y, ou suivant l'axe des z, on trouvera

$$\Omega_1^2=A,\qquad \Omega_2^2=B,\qquad \Omega_3^2=C, \tag{57}$$

et la formule (56) donnera

$$\frac{1}{\Omega^2}=\frac{\cos^2\alpha}{\Omega_1^2}+\frac{\cos^2\beta}{\Omega_2^2}+\frac{\cos^2\gamma}{\Omega_3^2}. \tag{58}$$

Si, D, E, F étant nuls, on suppose de plus

$$A=B=C=a^2,$$

a désignant une quantité positive, la formule (49), réduite à

$$\frac{\partial^2 8}{\partial t^2}=a^2\left(\frac{\partial^2 8}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 8}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 8}{\partial z^2}\right), \tag{59}$$

sera celle qui détermine la propagation du son dans un milieu dont l'élasticité reste la même en tous sens. Alors la formule (52) de-

viendra

$$\left\{\begin{aligned} 8 = {} & \frac{1}{4\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} t\sin p \\ & \times \pi(x+at\cos p,\ y+at\sin p\cos q,\ z+at\sin p\sin q)\,dp\,dq \\ & +\frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial t}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} t\sin p \\ & \times \varpi(x+at\cos p,\ y+at\sin p\cos q,\ z+at\sin p\sin q)\,dp\,dq, \end{aligned}\right. \tag{60}$$

et les formules (53), (54), (56) deviendront

$$\frac{x^2+y^2+z^2}{a^2}=t^2, \tag{61}$$

$$a^2(x'^2+y'^2+z'^2)=t^2, \tag{62}$$

$$\Omega=a. \tag{63}$$

Donc l'onde sonore sera une onde sphérique, et la vitesse du son, qui restera la même en tous sens, sera mesurée par la constante a. La formule (60) coïncide avec l'intégrale que M. Poisson a donnée de l'équation (59).