# MÉMOIRE

SUR LA

## DÉTERMINATION DU NOMBRE DES RACINES RÉELLES

### DANS LES ÉQUATIONS ALGÉBRIQUES (1).

*Journal de l'École Polytechnique*, XVIIe Cahier, Tome X, p. 457; 1815.

## PREMIÈRE SECTION.

### EXPOSITION GÉNÉRALE DE LA THÉORIE.

§ I. Les géomètres se sont beaucoup occupés de la question qui fait l'objet de ce Mémoire et qui peut être envisagée sous deux points de vue différents, selon qu'il s'agit des équations littérales ou que l'on considère une équation dont tous les coefficients sont donnés en nombres. Dans le second cas, on résout complètement le problème en formant par les règles connues une équation auxiliaire dont les racines sont les carrés des différences entre celles de la proposée; ce qui fournit le moyen d'assigner une quantité moindre que la plus petite de ces différences et, par suite, de fixer avec le nombre des racines réelles des limites entre lesquelles chacune des racines est comprise. Mais, relativement aux équations littérales, la question consiste à trouver des fonctions rationnelles de leurs coefficients dont les signes déterminent dans chaque cas particulier le nombre et l'espèce de leurs racines réelles. Or ce n'était, jusqu'à présent, que pour un petit nombre d'équations d'une forme déterminée que l'on avait réussi à

(1) Extrait de plusieurs Mémoires lus à l'Institut dans le courant de l'année 1813.



former de semblables fonctions. Ce qu'il y avait de plus général sur cette matière avait été donné par de Gua dans les *Mémoires de l'Académie des Sciences*, année 1741. Mais, quoiqu'il eût établi la plupart des principes qui devaient conduire à la solution du problème, il paraissait désespérer que l'on pût jamais y parvenir, et les géomètres désiraient encore une méthode générale applicable aux équations littérales de tous les degrés. M. Poisson ayant bien voulu m'indiquer ce sujet de recherches, je me suis proposé de compléter, s'il était possible, cette partie de l'Algèbre et, après diverses tentatives, je suis enfin parvenu à la méthode qui fait l'objet du présent Mémoire. Afin de rendre cette méthode plus sensible, je commencerai par l'exposer d'une manière géométrique et, pour plus de simplicité, je supposerai d'abord que ni l'équation proposée ni aucune des équations auxiliaires qu'on sera obligé de considérer n'ont de racines égales entre elles ou égales à zéro.

Si l'on désigne par $x$ la variable de l'équation donnée et par X son premier membre, X étant un polynome en $x$ du degré $n$, ce polynome pourra être considéré comme représentant l'ordonnée d'une courbe parabolique dont les points d'intersection avec l'axe des $x$ auront pour abscisses les racines réelles de l'équation proposée. La parabole dont il s'agit sera une courbe continue à une seule branche composée en général : 1° de plusieurs portions finies terminées par leurs deux extrémités à l'axe des abscisses; 2° de deux portions indéfinies qui toutes deux s'élèveront au-dessus de l'axe des $x$, si l'équation proposée est de degré pair, et dont l'une s'abaissera au-dessous du côté des abscisses négatives dans le cas contraire. Toutes ces portions se réduiraient à une seule si l'équation donnée n'avait que des racines imaginaires et, dans ce cas, la courbe s'étendrait indéfiniment au-dessus de l'axe des abscisses. Dans tout autre cas, le nombre des portions finies de la parabole, augmenté de l'unité, sera toujours égal au nombre des points d'intersection de la courbe avec l'axe des $x$, c'est-à-dire au nombre des racines réelles de la proposée.

Après les points où la parabole coupe l'axe des $x$, les plus remarquables sont ceux où la tangente devient horizontale et que je désignerai sous le nom de *sommets*. Ces mêmes points sont aussi ceux où l'ordonnée de la courbe devient un *maximum* ou un *minimum*. J'appellerai *sommets de première espèce* ceux où la courbe tourne sa concavité vers l'axe des abscisses et où l'ordonnée, abstraction faite du signe, devient un *maximum*. J'appellerai *sommets de seconde espèce* ceux où la courbe tourne sa convexité vers le même axe et où l'ordonnée, abstraction faite du signe, devient un *minimum*. Si l'on parcourt une partie de la parabole située tout entière d'un même côté de l'axe des abscisses, les divers sommets que l'on rencontrera seront alternativement de l'une et de l'autre espèce et, si l'une des extrémités est un point d'intersection de la courbe avec l'axe, le sommet le plus voisin de cette extrémité sera un sommet de première espèce. Il en résulte que, dans chaque portion finie de courbe, comprise entre deux points d'intersection consécutifs, le nombre des sommets de première espèce surpasse toujours d'une unité le nombre des sommets de seconde espèce. De plus, ces deux espèces de sommets sont toujours en même nombre dans chacune des deux portions indéfinies.

Il suit de cette remarque que le nombre total des sommets de première espèce surpasse le nombre total des sommets de seconde espèce d'autant d'unités qu'il y a de portions finies dans la courbe que l'on considère. Par suite, la différence de ces deux nombres, augmentée de l'unité, sera toujours égale au nombre des points d'intersection de la courbe avec l'axe. En général, *si l'on considère une partie quelconque de la courbe, comprise entre deux points fixes, le nombre des points d'intersection et ceux des sommets de première et de seconde espèce compris dans cette même partie auront entre eux une relation qu'il est facile de déterminer. Le premier de ces trois nombres sera égal à la différence des deux autres si, en s'approchant de ses deux extrémités, la partie en question s'approche d'un côté et s'éloigne de l'autre de l'axe des abscisses. Il surpassera la même différence d'une unité, si vers ses deux extrémités la même partie s'éloigne de l'axe des $x$. Enfin il en sera surpassé d'une unité dans le cas contraire.*



Pour faire une application de ce théorème, supposons que l'on considère la moitié de la parabole située à droite de l'axe des ordonnées ou du côté des abscisses positives. Si, en s'approchant de l'axe des ordonnées, cette moitié de parabole s'approche également de l'axe des $x$, alors du côté des abscisses positives la différence entre les nombres de sommets de première et de seconde espèce sera égale au nombre des points d'intersection de la courbe avec l'axe. Si, dans le même cas, on considère l'autre moitié de parabole située du côté des abscisses négatives, on trouvera qu'en s'approchant de l'axe des ordonnées cette moitié s'éloigne de l'axe des $x$ et, par conséquent, du côté des abscisses négatives le nombre des points d'intersection de la courbe avec l'axe surpassera d'une unité la différence entre les nombres de sommets de première et de seconde espèce. On obtiendrait des résultats inverses si, en s'approchant de l'axe des ordonnées, la moitié de parabole qui correspond aux abscisses positives s'éloignait de l'axe des $x$. Par suite de ce qu'on vient de dire, *si l'on forme les différences qui existent entre les nombres des sommets de première et de seconde espèce : 1° du côté des abscisses positives, 2° du côté des abscisses négatives, la somme de ces deux différences, augmentée de l'unité, sera toujours égale au nombre total des points d'intersection de la courbe avec l'axe*, ce que l'on savait déjà, et, de plus, *l'excès de la première différence sur la seconde sera supérieur ou inférieur d'une unité à la différence qui existe entre le nombre des points d'intersection correspondant aux abscisses positives et le nombre des points d'intersection correspondant aux abscisses négatives, selon qu'en s'approchant de l'axe des ordonnées du côté des abscisses positives la parabole s'approchera ou s'éloignera de l'axe des $x$*. Ces théorèmes étant une fois établis en Géométrie, voyons comment on peut les traduire en Analyse.

§ II. Soit toujours X le premier membre de l'équation proposée et désignons par X′ et X″ ses fonctions dérivées du premier et du second ordre. X sera l'ordonnée de la parabole que nous avons considérée ci-dessus. Les points d'intersection de cette parabole avec l'axe des $x$

auront pour abscisses les racines réelles de l'équation $X = 0$, et ces mêmes points seront situés du côté des abscisses positives ou du côté des abscisses négatives, suivant que les racines correspondantes seront elles-mêmes positives ou négatives. Quant aux sommets, c'est-à-dire aux points de la courbe où l'ordonnée devient un *maximum* ou un *minimum*, ils auront évidemment pour abscisses les racines réelles de l'équation dérivée

$$X' = 0.$$

On sait de plus que la fonction X ne peut devenir un *maximum* absolu, c'est-à-dire abstraction faite du signe, qu'autant que X et X″ sont de signes différents et ne peut devenir un *minimum* absolu que dans le cas où X et X″ sont de même signe. Par suite, le produit XX″ sera toujours négatif relativement aux sommets de première espèce et positif relativement aux sommets de seconde espèce. Enfin, pour décider si, en s'approchant de l'axe des ordonnées du côté des abscisses positives, la parabole s'approche ou s'éloigne de l'axe des abscisses, il suffira évidemment de voir si, quand l'abscisse devient nulle, l'ordonnée et sa dérivée sont de même signe ou de signes contraires, c'est-à-dire si le produit des deux derniers termes de l'équation donnée est positif ou négatif.

Il suit de ces considérations que, si l'on savait résoudre l'équation $X' = 0$, il serait facile d'obtenir non seulement l'excès du nombre total des sommets de première espèce sur le nombre total des sommets de seconde espèce, mais encore l'excès de la différence entre les nombres de sommets de première et de seconde espèce situés du côté des abscisses positives sur la différence entre les nombres de sommets de première et de seconde espèce situés du côté des abscisses négatives. En effet, pour obtenir la somme de ces deux dernières différences ou le premier excès, il suffirait de substituer successivement toutes les racines réelles de l'équation $X' = 0$ dans le produit $XX''$, puis de retrancher le nombre des valeurs positives de ce produit du nombre de ses valeurs négatives et, pour obtenir l'excès de la première différence sur la seconde, il suffirait de changer préalablement les signes



de toutes les valeurs du produit $XX''$ qui correspondent à des abscisses négatives, ce qui revient à remplacer le produit $XX''$ par le suivant $xXX''$.

Supposons maintenant que, au lieu de résoudre l'équation $X' = 0$, on forme deux équations auxiliaires qui aient respectivement pour racines les diverses valeurs des deux produits $XX''$, $xXX''$, prises avec des signes contraires et correspondant à toutes les racines réelles ou imaginaires de l'équation dérivée $X' = 0$. Si, comme nous le supposerons d'abord, ces deux équations auxiliaires n'ont pas de racines égales, celles de leurs racines qui correspondront à des racines imaginaires de l'équation dérivée seront elles-mêmes imaginaires et, par suite, si l'on forme successivement pour chacune d'elles l'excès du nombre des racines positives sur le nombre des racines négatives, on aura précisément les deux excès ou quantités cherchées. Au reste, il sera facile d'obtenir par l'élimination les deux équations auxiliaires dont il s'agit; car, si l'on représente par $y$ l'inconnue de la première, par $z$ l'inconnue de la seconde et par

$$Y = 0, \qquad Z = 0$$

les équations elles-mêmes, il suffira, pour obtenir la première auxiliaire $Y = 0$, d'éliminer $x$ entre les deux équations

$$X' = 0, \qquad y + XX'' = 0,$$

et, pour obtenir la seconde auxiliaire $Z = 0$, d'éliminer $x$ entre les deux équations

$$X' = 0, \qquad z + xXX'' = 0.$$

Cela posé, les deux théorèmes de Géométrie que nous avons énoncés ci-dessus, page 173, se réduisent aux deux suivants :

Théorème I. — *Le nombre des racines réelles de la proposée $X = 0$ surpasse toujours d'une unité la différence qui existe entre les nombres de racines positives et négatives de la première auxiliaire $Y = 0$.*

Théorème II. — *La différence qui existe dans la proposée $X = 0$ entre les nombres de racines positives et négatives est supérieure ou inférieure* *d'une unité à la même différence dans la seconde équation auxiliaire* $Z = 0$, *suivant que le produit des deux derniers coefficients de l'équation proposée pris en signes contraires est positif ou négatif.*

Si l'équation proposée $X = 0$ est du degré $n$, l'équation dérivée $X' = 0$ et, par suite, les deux équations auxiliaires $Y = 0$, $Z = 0$ seront toutes trois du degré $n - 1$ inférieur d'une unité à celui de la proposée. Il est maintenant facile de voir comment les deux théorèmes précédents peuvent conduire à la solution du problème qui fait l'objet de ce Mémoire. En effet, ce que l'on cherche est le nombre et l'espèce des racines réelles ou, si l'on veut, le nombre des racines positives et le nombre des racines négatives de l'équation $X = 0$. Pour y parvenir, il suffit évidemment de résoudre séparément chacune des deux questions suivantes :

1° Déterminer le nombre total des racines réelles de l'équation $X = 0$;

2° Déterminer la différence entre les nombres de racines positives et négatives de cette même équation.

D'ailleurs, en vertu des théorèmes ci-dessus énoncés, on pourra résoudre relativement à l'équation donnée du degré $n$ les deux questions précédentes si l'on sait résoudre la seconde relativement à une équation quelconque du degré $n - 1$. Pareillement, on pourra réduire la détermination de la différence entre les nombres de racines positives et négatives dans une équation du degré $n - 1$ à la détermination de la même différence dans une équation du degré $n - 2$ et abaisser ainsi continuellement la difficulté jusqu'à ce que l'on parvienne à une équation du premier degré. Cette dernière n'ayant qu'une seule racine toujours réelle, la différence entre les nombres de racines positives et négatives y sera évidemment égale à $+1$ ou à $-1$, suivant que le produit des deux coefficients de l'équation pris en signe contraire sera positif ou négatif. Toutes les difficultés étant ainsi levées, les deux questions ci-dessus énoncées se trouveront complètement résolues.

En résumant ce qui vient d'être dit, on aura, pour déterminer la



différence qui existe entre le nombre des racines positives et le nombre des racines négatives de la proposée, la règle suivante :

*Soient* $X = 0$ *l'équation proposée du degré* $n$, $X'$ *et* $X''$ *les deux premières dérivées de* $X$. *Éliminez la variable* $x$ *entre les deux équations*

$$X' = 0, \qquad z + xXX'' = 0$$

*et soient* $Z = 0$ *l'équation auxiliaire en* $z$ *qui en résultera. Cette équation sera du degré* $n - 1$. *Soient* $Z'$ *et* $Z''$ *les deux premières dérivées de* $Z$. *Éliminez de nouveau la variable* $z$ *entre les deux équations*

$$Z' = 0, \qquad v + zZZ'' = 0$$

*et soit* $V = 0$ *l'équation auxiliaire en* $v$ *qui en résultera. Cette équation sera du degré* $n - 2$, .... *Continuez de même jusqu'à ce que vous arriviez à une équation auxiliaire du premier degré. Vous aurez en tout* $n$ *équations, y compris la proposée, savoir :*

$$X = 0, \qquad Z = 0, \qquad V = 0, \qquad \ldots.$$

*Si dans chacune d'elles vous multipliez l'un par l'autre les coefficients des deux derniers termes, vous obtiendrez* $n$ *produits différents*, et la valeur négative ou positive de chaque produit fera connaître si la différence entre les nombres de racines positives et négatives de l'équation à laquelle il se rapporte est supérieure ou inférieure d'une unité à la même différence dans l'équation suivante. Par suite, *si l'on change les signes de tous ces produits et qu'après ce changement on remplace les produits qui obtiendront une valeur positive par* $+1$ *et ceux qui obtiendront une valeur négative par* $-1$, *la somme algébrique des résultats sera précisément égale à la différence entre le nombre des racines positives et le nombre des racines négatives de l'équation proposée.*

On aura ensuite, pour déterminer le nombre total des racines réelles de l'équation donnée, cette autre règle :

*Soit toujours* $X = 0$ *l'équation proposée du degré* $n$; $X'$ *et* $X''$ *les deux* *premières dérivées de $x$. Éliminez $x$ entre les deux équations*

$$X' = 0, \qquad y + XX' = 0,$$

*et soit $Y = 0$ l'équation auxiliaire en $y$ qui en résultera. Cette équation sera du degré $n - 1$, et si l'on détermine, par la règle précédente, la différence entre les nombres de ses racines positives et négatives, cette différence, augmentée d'une unité, sera précisément égale au nombre des racines réelles de la proposée.*

Le nombre des produits que l'on forme en suivant la première règle étant égal à $n$, le nombre de ceux que l'on formera en suivant la seconde sera égal à $n - 1$ et, par suite, les signes de $2n - 1$ fonctions différentes des coefficients de l'équation donnée suffiront pour déterminer le nombre et l'espèce de ses racines réelles.

§ III. La méthode précédente suppose évidemment que ni l'équation proposée ni aucune des équations auxiliaires n'aient de racines égales entre elles ou égales à zéro; et d'abord, si l'équation proposée avait des racines réelles égales entre elles, la courbe dont l'ordonnée représente le premier membre de cette équation devenant tangente en un ou plusieurs points à l'axe des abscisses, chaque point de tangence devrait être considéré comme formé par la réunion d'autant de points d'intersection de la courbe avec l'axe et d'autant de sommets moins un qu'il y aurait, pour ce même point, de racines égales dans la proposée. De plus, les points de tangence dont il s'agit étant situés sur l'axe des abscisses, les valeurs correspondantes de l'ordonnée X et du produit $XX''$ s'évanouiraient et ce produit cesserait d'avoir un signe déterminé. Enfin, si la proposée avait une ou plusieurs racines nulles, cette équation n'ayant plus de dernier terme, le produit des deux derniers coefficients s'évanouirait et ne pourrait plus être considéré comme positif ou comme négatif.

Les racines égales des équations auxiliaires du degré $n - 1$ peuvent provenir de deux causes, savoir : 1° de racines égales dans l'équation dérivée $X' = 0$; 2° d'un ou plusieurs couples de racines imaginaires



dans l'équation dérivée qui, par suite de relations particulières entre les coefficients de cette équation, fournissent des racines réelles aux équations auxiliaires. Ainsi, par exemple, si $\alpha + \beta\sqrt{-1}$ désigne une racine imaginaire de $X' = 0$ et que la substitution de $\alpha + \beta\sqrt{-1}$ dans le produit $XX''$ donne pour résultat la quantité réelle A, la substitution de $\alpha - \beta\sqrt{-1}$ dans le même produit donnera encore le même résultat; et comme les racines imaginaires

$$\alpha + \beta\sqrt{-1}, \qquad \alpha - \beta\sqrt{-1}$$

appartiennent toutes deux à l'équation dérivée, la première équation auxiliaire aura deux racines égales à $-$A. Toutes les fois que l'équation dérivée aura des racines égales, les racines qui en proviendront dans les équations auxiliaires seront non seulement égales entre elles, mais encore égales à zéro; car, dans ce cas, la fonction $X''$ étant nulle aussi bien que la fonction $X'$, le produit $XX''$ s'évanouira nécessairement. Par suite, on ne pourra plus déterminer quel est le signe de ce produit, ni décider par ce moyen si, pour le sommet que l'on considère, l'ordonnée de la courbe devient un maximum ou un minimum absolu. Il pourra même arriver qu'elle ne soit ni l'un ni l'autre. Pour savoir dans quel cas cela aura lieu, désignons par

$$X', \quad X'', \quad X''', \quad X^{\text{IV}}, \quad X^{\text{V}}, \quad \ldots$$

les dérivées des divers ordres de l'ordonnée X, et supposons que dans toutes ces fonctions $x$ désigne l'abscisse du sommet que l'on considère. Si l'on fait croître ou diminuer cette abscisse d'une quantité indéterminée $h$, l'ordonnée X deviendra

$$X \pm hX' + \frac{h^2}{1.2}X'' \pm \frac{h^3}{1.2.3}X''' + \frac{h^4}{1.2.3.4}X^{\text{IV}} \pm \frac{h^5}{1.2.3.4.5}X^{\text{V}} + \ldots,$$

ou, parce que $X' = 0$,

$$X + \frac{h^2}{1.2}X'' \pm \frac{h^3}{1.2.3}X''' + \frac{h^4}{1.2.3.4}X^{\text{IV}} \pm \frac{h^5}{1.2.3.4.5}X^{\text{V}} + \ldots.$$

Par conséquent, la différence entre l'ordonnée correspondant à l'abscisse $x \pm h$ et l'ordonnée correspondant à l'abscisse $x$, ou, pour abréger, la différence de l'ordonnée sera

$$\frac{h^2}{1.2}X'' \pm \frac{h^3}{1.2.3}X''' + \frac{h^4}{1.2.3.4}X^{\mathrm{IV}} \pm \frac{h^5}{1.2.3.4.5}X^{\mathrm{V}} + \ldots.$$

Pour de très petites valeurs de $h$, cette différence se réduira au premier de ses termes qui ne s'évanouira pas. Elle se réduira donc à

$$\frac{h^2}{1.2}X''$$

si $X''$ n'est pas nul ou si, pour le sommet que l'on considère, l'équation dérivée n'a pas de racines égales; à

$$\pm \frac{h^3}{1.2.3}X'''$$

si l'on a $X'' = 0$, $X''' <$ ou $> 0$, c'est-à-dire si, pour le sommet que l'on considère, l'équation dérivée a deux racines égales; à

$$\frac{h^4}{1.2.3.4}X^{\mathrm{IV}}$$

si l'on a $X'' = 0$, $X''' = 0$, $X^{\mathrm{IV}} <$ ou $> 0$, c'est-à-dire si, pour le sommet que l'on considère, l'équation dérivée a trois racines égales; à

$$\pm \frac{h^5}{1.2.3.4.5}X^{\mathrm{V}}$$

si l'on a $X'' = 0$, $X''' = 0$, $X^{\mathrm{IV}} = 0$, $X^{\mathrm{V}} >$ ou $< 0$, c'est-à-dire si, pour le sommet que l'on considère, l'équation dérivée a quatre racines égales; etc., etc.

En général, on voit que la différence de l'ordonnée conservera le même signe, quel que soit d'ailleurs celui de $h$, si, pour le point que l'on considère, la dérivée a un nombre pair de racines égales. Elle changera de signe avec $h$ dans le cas contraire. Dans ce dernier cas, l'ordonnée ne pourra être ni un maximum ni un minimum. Mais, si la dérivée a un nombre pair de racines égales, l'ordonnée correspondant à l'abscisse $x \pm h$ sera représentée, pour de très petites valeurs de $h$,



par un des binomes

$$X + \frac{h^2}{1.2}X'',$$

$$X + \frac{h^4}{1.2.3.4}X^{\mathrm{IV}},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

et, par suite, l'ordonnée X correspondant à l'abscisse $x$ sera un minimum ou un maximum absolu, suivant que le second terme de ce binome aura un signe égal ou opposé à celui du premier terme, c'est-à-dire suivant que le premier des produits

$$XX'', \quad XX^{\mathrm{IV}}, \quad XX^{\mathrm{VI}}, \quad \ldots$$

qui ne s'évanouira pas sera positif ou négatif.

On vient de voir que les équations auxiliaires peuvent acquérir des racines nulles dans deux cas différents, savoir : 1° quand la proposée a des racines égales; 2° quand l'équation dérivée a des racines égales; et, en effet, la fonction X dans le premier cas, la fonction $X''$ dans le second et, par suite, les produits $XX''$, $xXX''$ dans les deux cas, s'évanouissent. Il est encore un troisième cas où la seconde équation auxiliaire seulement peut avoir des racines nulles. C'est celui où il existe déjà de telles racines dans la dérivée; car le produit $xXX''$ s'évanouit alors avec son premier facteur $x$. Dans toutes ces hypothèses, le dernier terme d'une équation auxiliaire étant nul, le produit des deux derniers termes de cette équation se réduit à zéro et, par suite, on ne peut plus décider si ce produit est positif ou négatif.

De même que des racines égales dans l'équation proposée du degré $n$ produisent des racines nulles dans les équations auxiliaires du degré $n-1$; de même, les racines égales qui pourraient se trouver dans ces dernières produiront des racines nulles dans les équations auxiliaires du degré $n-2$. En général, si, dans une des suites d'équations auxiliaires qu'on est obligé de former, quelque équation a des racines égales, la suivante aura des racines nulles et le produit de ses deux derniers coefficients se trouvera réduit à zéro.

Ainsi, toutes les hypothèses possibles, dans lesquelles la méthode générale se trouve en défaut, coïncident avec cette circonstance remarquable que, sur les produits dont les signes devaient déterminer le nombre et l'espèce des racines réelles de la proposée, un ou plusieurs s'évanouissent et ne peuvent plus par cela même servir à la détermination dont il s'agit. On voit en même temps que cela n'aura jamais lieu à moins que la proposée ou les équations auxiliaires n'aient des racines égales entre elles ou égales à zéro. Pour faire disparaître les inconvénients qui résultent de cette égalité, on peut employer diverses méthodes que je vais indiquer en peu de mots.

§ IV. La première méthode et celle qui se présente d'abord à l'esprit consiste à passer en revue tous les cas particuliers que peut offrir l'équation donnée et à fournir les moyens de lever les difficultés propres à chacun des cas dont il s'agit. Ainsi, par exemple, si la proposée a des racines nulles, il sera facile d'en constater le nombre et de s'en débarrasser ensuite. On peut éviter de même la considération des racines égales, en supposant l'équation préparée d'avance, de manière que toutes ses racines soient inégales entre elles. Après cela, il faudra examiner si la dérivée a des racines égales entre elles ou à zéro et remédier aux inconvénients qui pourraient naître de cette égalité. On y parviendra comme il suit.

Lorsque plusieurs racines de la dérivée deviennent égales entre elles, les différents sommets dont ces racines étaient les abscisses se réunissent, et de cette réunion résulte un nouveau sommet qui sera double, triple, quadruple, etc., suivant le nombre des racines qui viendront à coïncider. L'ordonnée de ce sommet sera un maximum ou un minimum absolu si les racines qui deviennent égales sont en nombre impair et, pour déterminer l'espèce du sommet dans cette hypothèse, il suffira de consulter le signe du produit $XX''$ s'il s'agit d'un sommet simple, du produit $XX^{\text{IV}}$ s'il s'agit d'un sommet triple, etc. Quant aux sommets doubles, quadruples, etc., on devra cesser d'en tenir compte, attendu que les ordonnées de ces sommets ne doivent point être rangées parmi les ordonnées maxima et minima. Cela posé, si la dérivée n'a



point de racines nulles, les théorèmes de Géométrie établis ci-dessus (p. 173) subsisteront toujours et, pour déterminer le nombre et l'espèce des racines réelles de la proposée, il suffira de calculer : 1° la somme des différences qui existent du côté des abscisses positives et du côté des abscisses négatives entre les sommets de première et de seconde espèce; 2° l'excès de la première différence sur la seconde. On y parviendra facilement en déterminant ainsi qu'il suit les diverses parties de la somme et de l'excès en question qui correspondent aux racines simples, triples, quintuples, etc. Soit toujours $X'$ l'équation dérivée; soient de plus $X'_1$ le produit de ses facteurs simples, $X'_2$ celui de ses facteurs doubles, $X'_3$ celui des facteurs triples, etc., élevés chacun à la première puissance, en sorte qu'on ait

$$X' = X'_1 (X'_2)^2 (X'_3)^3 \ldots.$$

La méthode des racines égales fera connaître chacun des polynomes $X'_1$, $X'_3$, $X'_5$, ... et, pour obtenir la différence totale entre les nombres de sommets de première espèce, il suffira d'éliminer $x$ :

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1° | Entre les équations | $X'_1 = 0$, | $y + XX'' = 0$; |
| 2° | » | $X'_3 = 0$, | $y + XX^{\text{IV}} = 0$; |
| 3° | » | $X'_5 = 0$, | $y + XX^{\text{VI}} = 0$; |
| ... | ... | ..., | ... |

On aura par ce moyen plusieurs équations auxiliaires en $y$ au lieu d'une seule et la somme des différences qui auront lieu pour ces diverses équations entre les nombres de racines positives et négatives sera égale à la différence cherchée ou à la somme des différences qui existent tant du côté des abscisses positives que du côté des abscisses négatives entre les nombres de sommets de première et de seconde espèce. On obtiendra de même l'excès de la première différence sur la seconde en substituant aux équations

$$y + XX'' = 0, \qquad y + XX^{\text{IV}} = 0, \qquad y + XX^{\text{VI}} = 0, \qquad \ldots$$

les suivantes

$$z + xXX'' = 0, \qquad z + xXX^{\text{IV}} = 0, \qquad z + xXX^{\text{VI}} = 0, \qquad \ldots$$

et cet excès, augmenté ou diminué d'une unité, fera connaître la différence qui existe entre les nombres de racines positives et négatives de la proposée. Cette dernière différence et l'excès dont il s'agit deviendraient égaux entre eux si un sommet de première ou de seconde espèce était situé sur l'axe des abscisses ou, ce qui revient au même, si la dérivée avait un nombre impair de racines nulles; mais si la dérivée n'a point de racines nulles ou si ces racines sont en nombre pair, il faudra, pour obtenir la même différence, augmenter ou diminuer l'excès en question d'une unité, suivant qu'en s'approchant de l'axe des ordonnées du côté des abscisses positives la courbe s'éloignera ou s'approchera de l'axe des $x$, c'est-à-dire suivant que le produit du dernier terme de l'équation proposée par celui des termes précédents qui renfermera la puissance la moins élevée de $x$ sera négatif ou positif.

La théorie précédente suppose évidemment que les équations auxiliaires en $y$ et $z$, qui correspondent aux facteurs simples, triples, quintuples, etc. de l'équation dérivée, n'ont pas de racines égales. S'il en était autrement, ces racines pourraient à la fois être réelles et provenir de quelques couples de racines imaginaires des équations

$$X'_1 = 0, \quad X'_3 = 0, \quad X'_5 = 0, \quad \ldots.$$

On évitera cet inconvénient si l'on multiplie chacun des produits

$$\begin{array}{cccc} XX'', & XX^{\text{IV}}, & XX^{\text{VI}}, & \ldots, \\ xXX'', & xXX^{\text{IV}}, & xXX^{\text{VI}}, & \ldots \end{array}$$

par une fonction de $x$ qui reste positive pour toutes les valeurs réelles de la variable $x$ et qui empêche ces mêmes produits de devenir réels pour les valeurs imaginaires de $x$ qui satisfont à l'équation dérivée. Telle est la fonction

$$(x + k)^2,$$

dans laquelle la constante arbitraire $k$ peut recevoir une infinité de valeurs qui remplissent la condition exigée.

En suivant la méthode précédente on finit toujours par obtenir la solution complète de la question proposée; mais s'il s'agit d'une équa-



tion littérale, cette méthode entraîne, comme on le voit, l'examen d'autant de cas particuliers que l'on peut faire d'hypothèses différentes sur le nombre des racines égales, non seulement de la proposée, mais encore des diverses équations auxiliaires. C'est pourquoi elle ne peut être employée avec avantage que dans certaines occasions où, en raison de la forme de l'équation donnée, elle devient facilement applicable.

§ V. Une autre méthode consiste à établir la distinction des diverses espèces de sommets sur la considération immédiate du signe du produit qu'on obtient en multipliant l'ordonnée X par la série

$$\frac{h^2}{1.2}X'' \pm \frac{h^3}{1.2.3}X''' + \frac{h^4}{1.2.3.4}X^{\text{IV}} \pm \frac{h^5}{1.2.3.4.5}X^{\text{V}} + \ldots,$$

laquelle représente, pour un quelconque des sommets, l'accroissement de l'ordonnée correspondant à l'accroissement très petit $\pm h$ de la variable $x$.

Si l'on fait, pour plus de commodité,

$$X = f(x)$$

et, par suite,

$$X'' = f''(x),$$

la série précédente sera toujours de même signe que

$$f''(x \pm h),$$

d'où il suit que le produit de cette série par X pourra être remplacé par le produit

$$X f''(x \pm h).$$

Supposons qu'après avoir substitué pour $x$ dans ce dernier produit une des racines réelles de la dérivée, on donne successivement à l'indéterminée $h$ les signes + et −; les deux valeurs obtenues par ce moyen seront de signes contraires si la racine réelle dont il s'agit représente l'abscisse d'un sommet double, quadruple, sextuple, etc. Elles seront de même signe si cette racine correspond à un sommet simple, triple, quintuple, etc. et, dans cette dernière hypothèse, les deux valeurs du produit seront ou négatives ou positives, suivant que le sommet en question sera de première ou de seconde espèce. De plus, la quantité $h$ restant indéterminée, il est aisé de voir que la substitution des racines imaginaires de la dérivée dans chacun des produits

$$X f''(x+h), \quad X f''(x-h)$$

fournira en général des résultats imaginaires. Cela posé, on obtiendra évidemment la différence totale entre les nombres de sommets de première et de seconde espèce si, après avoir éliminé $x$ entre les deux équations

$$X' = o, \qquad y + X f''(x \pm h) = o,$$

on détermine, pour l'équation auxiliaire en $y$ ainsi formée et pour de très petites valeurs de $h$, la différence entre les nombres de racines inégales positives et négatives : 1° dans le cas où l'on admet pour $h$ le signe supérieur; 2° dans le cas où l'on admet pour $h$ le signe inférieur et qu'on prenne ensuite la moyenne entre les deux résultats. C'est ce résultat moyen que je désignerai ici sous le nom de *différence moyenne* entre le nombre des racines inégales positives et le nombre des racines inégales négatives de l'équation auxiliaire en $y$.

De même, pour obtenir l'excès de la différence entre les nombres de sommets de première et de seconde espèce situés du côté des abscisses positives sur la différence entre les nombres de sommets de première et de seconde espèce situés du côté des abscisses négatives, il suffira d'éliminer $x$ entre les deux équations

$$X' = o, \qquad z + x X f''(x+h) = o$$

et de chercher ensuite la différence moyenne entre les nombres de racines inégales positives et négatives de l'équation auxiliaire en $z$ résultant de cette élimination.

Lorsque la dérivée a des racines nulles, un des sommets de la courbe étant situé sur l'axe des ordonnées ne peut plus être compté ni parmi ceux qui répondent aux abscisses positives ni parmi ceux qui répondent aux abscisses négatives; mais, alors aussi, le produit

$$x X f''(x+h)$$



venant à s'évanouir avec son premier facteur $x$, la racine correspondante de l'équation auxiliaire en $z$ ne fait plus partie ni des racines positives ni des racines négatives de cette même équation.

Les résultats précédents subsistent dans le cas même où la proposée a des racines égales. Dans cette hypothèse, la parabole que l'on considère devient tangente en plusieurs points à l'axe des abscisses, et ces points sont évidemment des sommets de la courbe, puisque leurs abscisses satisfont à l'équation dérivée. Mais, quoique ces sommets puissent être simples, ou triples, ou quintuples, etc., ils ne peuvent dans aucun cas être considérés comme sommets de première ou de seconde espèce, attendu que l'ordonnée de chacun d'eux étant nulle n'a plus de signe déterminé et qu'on ne peut décider par suite si cette ordonnée devient un *maximum* ou un *minimum* absolu. On ne doit donc tenir aucun compte des racines des équations auxiliaires en $y$ et $z$ qui correspondent à de semblables sommets; mais ces racines disparaissent d'elles-mêmes à cause du facteur X qui, étant égal à zéro, fait évanouir les deux produits

$$X f''(x+h), \quad x X f''(x+h).$$

Ainsi, dans tous les cas possibles, la différence moyenne entre les nombres de racines inégales positives et négatives des équations auxiliaires ci-dessus mentionnées détermine immédiatement : 1° la somme faite de la différence entre les nombres de sommets de première et de seconde espèce situés du côté des abscisses positives et de la différence semblable formée du côté des abscisses négatives; 2° l'excès de la première différence sur la seconde. D'ailleurs, si l'on veut étendre les théorèmes précédemment démontrés au cas où l'équation donnée a des racines égales entre elles, on reconnaîtra sans peine que *la somme des deux différences en question est toujours inférieure d'une unité au nombre total des points d'intersection ou de tangence de la courbe avec l'axe des x*. De plus, *l'excès de la première différence sur la seconde sera supérieur d'une unité, égal ou inférieur d'une unité à l'excès du nombre des points d'intersection ou de tangence situés du côté des abscisses positives sur le nombre de ceux qui seront situés du côté des* *abscisses négatives, selon qu'en s'approchant de l'axe des ordonnées du côté des abscisses positives et s'éloignant ensuite de ce même axe du côté des abscisses négatives, la courbe s'approchera constamment de l'axe des* $x$, *ou qu'en passant par l'axe des ordonnées, elle cessera de s'approcher de l'axe des abscisses pour s'en éloigner, ou de s'en éloigner pour s'en rapprocher, ou qu'elle s'éloignera constamment de l'axe des* $x$. Le premier ou le troisième cas aura lieu si, la proposée n'ayant pas de racines nulles, la dérivée n'en a pas non plus, ou si ces racines y sont en nombre pair, c'est-à-dire si, la proposée ayant un terme constant, le dernier terme de l'équation dérivée renferme une puissance paire de $x$. Le second cas aura lieu si la proposée a des racines nulles ou si la dérivée a des racines nulles en nombre impair, c'est-à-dire si l'équation donnée n'a pas de terme constant ou si le dernier terme de l'équation dérivée renferme une puissance impaire de $x$. Enfin, pour distinguer le premier cas du troisième, il suffira d'examiner si le produit du dernier terme de l'équation donnée par le dernier terme de la dérivée est positif ou négatif. Soient $p$ le terme constant de la proposée, qui peut être égal à zéro, et $qx^r$ le dernier terme de l'équation dérivée ou celui qui renferme la plus petite puissance de $x$. Si dans le produit

$$pqx^r$$

on donne successivement à $x$ deux valeurs égales et de signes contraires et qu'on prenne ensuite la valeur moyenne entre les deux résultats, on reconnaîtra facilement que cette valeur moyenne sera positive dans le premier cas, nulle dans le deuxième, négative dans le troisième. Ainsi, en ayant égard au produit du terme constant de la proposée par le dernier terme de la dérivée, on pourra toujours déterminer le nombre et l'espèce des racines inégales de l'équation donnée à l'aide de la différence moyenne entre le nombre des racines inégales positives et le nombre des racines inégales négatives dans chacune des équations auxiliaires en $y$ et $z$. Pour obtenir cette différence moyenne relativement à l'une d'elles, par exemple relativement à l'équation auxiliaire en $y$, il semble d'abord qu'on serait obligé de déterminer la



différence entre les nombres de racines inégales positives et négatives : 1° dans le cas où l'indéterminée $h$ a de très petites valeurs positives; 2° dans le cas où $h$ a de très petites valeurs négatives. Mais on arrivera au même but si, après avoir formé les fonctions des coefficients de l'équation auxiliaire en $y$ qui déterminent la différence dont il s'agit, en laissant le signe et la valeur de $h$ entièrement arbitraires, on substitue à ces fonctions les valeurs qu'elles obtiennent lorsque, ayant développé chacune d'elles suivant les puissances ascendantes de $h$ et réduit le développement à son premier terme vis-à-vis duquel tous les autres doivent être négligés, on donne successivement à $h$ deux valeurs égales et de signes contraires et qu'on prend la moyenne entre les deux résultats. Par suite, chacune des fonctions que l'on considère devra être remplacée par zéro si le premier terme de son développement renferme une puissance impaire de $h$. Dans le cas contraire, il faudra la considérer comme positive ou comme négative suivant que le coefficient de ce premier terme sera lui-même positif ou négatif.

Nous venons d'indiquer comment l'emploi de l'indéterminée $h$ peut servir à lever les difficultés que faisaient naître les racines égales des équations en $y$ et $z$, c'est-à-dire des équations auxiliaires du degré $n-1$. L'introduction de plusieurs autres indéterminées $h'$, $h''$, ... servirait de même à lever les difficultés qui peuvent résulter de l'égalité de quelques racines dans les équations auxiliaires des degrés

$$n-2, \quad n-3, \quad \ldots,$$

et, à l'aide de cet artifice, on finirait par déterminer dans tous les cas possibles le nombre et l'espèce des racines de l'équation donnée. Il est bon toutefois d'observer que, si plusieurs de ces racines sont égales entre elles, on obtiendra seulement de cette manière le nombre des racines inégales positives et le nombre des racines inégales négatives, c'est-à-dire le nombre des quantités réelles essentiellement différentes de valeur ou de signe qui satisfont à la proposée.

La méthode précédente se réduit, comme on le voit, à remplacer dans les deux produits

$$XX'', \quad xXX'',$$

le dernier facteur $X'' = f''(x)$ par

$$f''(x \pm h),$$

c'est-à-dire à substituer dans $f''(x)$, à l'abscisse du sommet que l'on considère, l'abscisse $x \pm h$ d'un point de la parabole très rapproché de ce même sommet. Cette nouvelle méthode, sans exiger comme la première un examen préalable de tous les cas particuliers, a néanmoins le désavantage de compliquer extrêmement les calculs par l'admission de quantités arbitraires dans les équations auxiliaires des divers degrés. On évite cet inconvénient en suivant une troisième méthode dont je vais rendre compte.

§ VI. Dans cette troisième méthode, comme dans la première, je supposerai l'équation donnée préparée de manière qu'elle n'ait pas de racines égales entre elles ou à zéro. Cette préparation faite, on lèvera facilement tous les obstacles à l'aide des considérations suivantes :

Si les équations auxiliaires n'avaient pas de racines égales entre elles ou à zéro, elles serviraient immédiatement, comme on l'a déjà fait voir, à déterminer le nombre et l'espèce des racines réelles de la proposée; mais si le contraire a lieu, pour ramener ce second cas au premier, il faudra détruire l'égalité dont il s'agit en substituant aux sommets de la courbe d'autres points très rapprochés de ces mêmes sommets. Il existe deux manières différentes d'opérer cette substitution. La première consiste à remplacer un quelconque des sommets par un autre point très voisin de ce sommet et pris sur la courbe que l'on considère. La seconde consiste à remplacer la courbe elle-même par une autre courbe très voisine et à substituer les sommets de cette dernière à ceux de la courbe donnée. Pour effectuer la première substitution il suffit d'augmenter les abscisses des sommets de quantités indéterminées supposées très petites. Pour effectuer la seconde, il faut augmenter de quantités très petites les coefficients de l'équation proposée dont les valeurs respectives déterminent la nature de la courbe. Le premier moyen coïncide avec la seconde des deux méthodes précédentes et rend



très pénible, comme on l'a remarqué, la formation des équations auxiliaires. Le second n'a pas cet inconvénient et il conduit facilement à la solution du problème proposé dans tous les cas possibles.

En effet, lorsqu'on augmente de quantités très petites mais arbitraires les coefficients de l'équation donnée, on détruit les relations qui existaient entre ces coefficients et en vertu desquelles les racines des diverses équations auxiliaires pouvaient devenir nulles ou égales entre elles. Par suite, les fonctions des coefficients qui étaient destinées en général à déterminer le nombre des racines de chaque espèce cessent d'être nulles et redeviennent propres à la détermination dont il s'agit.

Cela posé, pour obtenir le nombre des racines positives et le nombre des racines négatives d'une équation du degré $n$, dans le cas où cette équation n'a pas de racines égales entre elles ou à zéro, il suffira de former, par la méthode indiquée dans le deuxième paragraphe, $2n-1$ fonctions différentes des coefficients de cette équation. On substituera ensuite dans chaque cas particulier, à la place des coefficients dont il s'agit, leurs valeurs prises dans l'équation donnée. Si cette substitution ne fait disparaître aucune des fonctions que l'on considère, leurs signes détermineront immédiatement le nombre des racines de chaque espèce. Mais si quelques-unes de ces fonctions s'évanouissent, on augmentera chacun des coefficients de l'équation donnée d'une quantité très petite, mais arbitraire, que l'on peut supposer à volonté positive ou négative. De plus, on assignera à ces mêmes variations un ordre de grandeur déterminé, de telle manière qu'on puisse toujours négliger les unes par rapport aux autres. Les fonctions qui s'évanouissaient, étant développées suivant les variations dont il s'agit, pourront toujours être réduites à un seul terme et toutes les difficultés seront ainsi levées. On pourra même se dispenser de faire varier à la fois tous les coefficients; il suffira d'en faire varier un ou plusieurs l'un après l'autre et l'on devra toujours s'arrêter au moment où chacune des fonctions que l'on considère cessera de s'évanouir.

§ VII. Quel que soit le degré $n$ de l'équation donnée, il est possible de former, comme on le verra tout à l'heure, plusieurs systèmes d'équations auxiliaires qui jouissent des mêmes propriétés. Il convient de choisir le système pour lequel les fonctions qui déterminent le nombre et l'espèce des racines réelles sont les plus simples possibles. Ce choix étant fait, il faut encore examiner si les fonctions dont il s'agit sont décomposables en facteurs et si quelques-uns de ces facteurs peuvent être supprimés sans inconvénient. Nous ferons à cet égard les remarques suivantes :

Les deux équations auxiliaires du degré $n-1$, que nous avons appris à former dans le deuxième paragraphe, ont respectivement pour racines des fonctions rationnelles et entières des racines de la dérivée; mais on peut, sans nul inconvénient, multiplier ou diviser les fonctions dont il s'agit par d'autres fonctions qui soient toujours positives quand les racines de la dérivée sont réelles. Pour faciliter autant que possible le calcul de l'élimination, il faut représenter l'inconnue de chaque équation auxiliaire par une fraction dont les deux termes soient des polynomes entiers en $x$ choisis de telle manière que la plus haute puissance de la variable renfermée dans ces deux polynomes soit la plus petite possible. L'expérience m'a fait voir que, dans ce cas, on arrivait encore à des résultats plus simples. On satisfera à ces conditions si l'on divise par $X^2$ les deux produits

$$-XX', \quad -xXX',$$

qui représentaient, dans le paragraphe II, les valeurs respectives de $y$ et $z$, ce qui revient à prendre pour inconnue de la première équation auxiliaire la fraction

$$\frac{-X'}{X}$$

et pour inconnue de la seconde équation auxiliaire la fraction

$$\frac{-xX'}{X}.$$

Dans cette hypothèse, on peut simplifier de beaucoup la recherche des fonctions propres à déterminer le nombre des racines de chaque espèce à l'aide des théorèmes suivants :



1° *Étant donnée une équation quelconque, si l'on substitue successivement toutes ses racines dans le premier membre de l'équation dérivée et qu'on fasse le produit des résultats, ce produit sera égal, à un coefficient numérique près, au dernier terme de l'équation qui aurait pour racines les carrés des différences entre celles de la proposée. Ce même produit sera encore égal à celui qu'on aurait trouvé si l'on eût substitué successivement toutes les racines de la dérivée dans le premier membre de l'équation donnée et qu'on eût multiplié l'un ar l'autre les résultats ainsi obtenus.*

2° *Étant donnée une équation quelconque, si l'on divise par le premier membre de l'équation dérivée une fonction entière de la variable et si l'on ajoute les diverses valeurs qu'obtient ce quotient lorsqu'on y substitue successivement pour $x$ les diverses racines de l'équation donnée, la somme de ces valeurs sera toujours une fonction rationnelle et entière des coefficients de la proposée.*

3° *Si l'on divise le premier membre de l'équation donnée par le premier membre de l'équation dérivée du second ordre et que l'on substitue successivement pour $x$ dans ce quotient toutes les racines de la dérivée, la somme des valeurs obtenues, prise en signe contraire, sera égale, à un coefficient numérique près, à la somme des carrés des différences entre les racines de la proposée.*

4° *Étant données deux équations tellement liées entre elles que les racines de la seconde soient des fonctions rationnelles quelconques des racines de la première, si l'on forme respectivement les derniers termes des équations aux carrés des différences entre ces racines et qu'on divise les deux termes obtenus l'un par l'autre, le quotient sera toujours un carré parfait.*

Il suit du troisième théorème que l'une des fonctions qui déterminent le nombre des racines réelles est égale, quel que soit le degré de l'équation donnée, à la somme des carrés des différences entre les racines de cette équation. On peut encore, en appliquant à la méthode précédente un artifice d'analyse indiqué par Euler, déterminer pour tous les degrés une autre de ces fonctions. Enfin, on prouve facilement que le produit de toutes ces fonctions doit toujours avoir le même signe que le produit des carrés des différences entre les racines. Par suite, sur les $n-1$ fonctions qui déterminent le nombre des racines réelles, le nombre de celles qu'on sera obligé de former séparément pour un degré donné se trouvera réduit à $n-4$; on n'aura donc besoin d'en calculer aucune en particulier pour les équations du deuxième, du troisième et du quatrième degré; il suffira de calculer une nouvelle fonction pour le cinquième degré, deux pour le sixième, etc.

Quant aux fonctions de la seconde espèce, c'est-à-dire à celles qui déterminent la différence entre le nombre des racines positives et négatives de la proposée, on peut en déterminer une pour tous les degrés possibles en ayant égard au deuxième théorème et, de plus, on prouve facilement que le produit de toutes ces fonctions doit toujours être affecté du même signe que le produit des carrés des différences entre les racines multiplié par le produit des racines elles-mêmes. Ces dernières fonctions sont les seules qu'on soit obligé de considérer, lorsqu'on veut savoir combien l'équation donnée a de racines réelles comprises entre deux limites $\alpha$ et $\beta$, car le nombre de ces racines réelles est égal à la quantité dont le nombre des fonctions positives diminue ou dont le nombre des fonctions négatives augmente lorsqu'on passe de la transformée en $x-\alpha$ à la transformée en $x-\beta$. Par suite, les fonctions de la seconde espèce suffisent pour déterminer le nombre des racines réelles comprises, soit entre o et $-\infty$, soit entre o et $+\infty$, c'est-à-dire le nombre total des racines positives ou négatives, en sorte qu'on peut toujours se passer, si l'on veut, des fonctions de la première espèce ou bien les déduire des autres.

Je joins ici la démonstration des théorèmes ci-dessus énoncés et plusieurs développements relatifs aux méthodes exposées dans les paragraphes IV, V et VI de la présente section. Pour plus de clarté, j'appliquerai ces méthodes à divers exemples et particulièrement à la détermination du nombre des racines réelles dans les équations générales des cinq premiers degrés.



## DEUXIÈME SECTION.

### DÉVELOPPEMENTS ANALYTIQUES.

Théorème I. — *Soient $\varphi(x)=0$, $f(x)=0$ deux équations différentes, la première du degré $m$, la seconde du degré $n$. Supposons que l'on substitue successivement dans le polynome $f(x)$ toutes les racines de l'équation $\varphi(x)=0$ et qu'on fasse le produit des résultats; qu'ensuite l'on substitue dans le polynome $\varphi(x)$ toutes les racines de l'équation $f(x)=0$ et qu'on fasse encore le produit des résultats. Les deux produits ainsi obtenus seront égaux et de même signe si l'un des deux nombres $m$ et $n$ est pair; ils seront égaux et de signes contraires si les deux nombres $m$ et $n$ sont tous deux impairs.*

*Démonstration.* — En effet, soient respectivement $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ les racines de l'équation $\varphi(x)=0$ et $a, b, c, \ldots$ celles de l'équation $f(x)=0$. Supposons de plus, à l'ordinaire, que la plus haute puissance de la variable dans chacune des fonctions $f(x)$ et $\varphi(x)$ soit positive et ait l'unité pour coefficient; on aura

$$f(x)=(x-a)(x-b)(x-c)\ldots,$$
$$\varphi(x)=(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)\ldots$$

et, par suite, les deux produits

$$f(\alpha)f(\beta)f(\gamma)\ldots,$$
$$\varphi(a)\varphi(b)\varphi(c)\ldots$$

seront respectivement égaux, le premier à

$$(\alpha-a)(\alpha-b)(\alpha-c)\ldots(\beta-a)(\beta-b)\ldots(\gamma-a)\ldots$$

et le second à

$$(a-\alpha)(a-\beta)(a-\gamma)\ldots(b-\alpha)(b-\beta)\ldots(c-\alpha)\ldots.$$

Sous cette forme le second produit a ses facteurs égaux et de signes contraires à ceux du premier, et comme le nombre de ces mêmes facteurs est $mn$, on aura

$$f(\alpha)f(\beta)f(\gamma)\ldots=(-1)^{mn}\varphi(a)\varphi(b)\varphi(c)\ldots,$$

ce qui vérifie le théorème énoncé.

*Corollaire I.* — Si l'on élimine $x$ : 1° entre les équations

$$\varphi(x)=0, \qquad y+f(x)=0;$$

2° entre les équations

$$f(x)=0, \qquad y+\varphi(x)=0,$$

les deux équations en $y$ résultant de cette double élimination auront, au signe près, le même terme constant.

*Corollaire II.* — Désignons, en général, par $f_n(x)$ le polynome

$$x^n+na_1x^{n-1}+\frac{n(n-1)}{1.2}a_2x^{n-2}+\ldots+na_{n-1}x+a_n;$$

$f_{n-1}(x)$ désignera le polynome

$$x^{n-1}+(n-1)a_1x^{n-2}+\frac{(n-1)(n-2)}{1.2}a_2x^{n-3}+\ldots+(n-1)a_{n-2}x+a_{n-1},$$

et comme on aura, dans ce cas,

$$f'_n(x)=nf_{n-1}(x),$$

l'équation

$$(1) \qquad f_n(x)=0$$

aura pour dérivée la suivante

$$(2) \qquad f_{n-1}(x)=0.$$

Si maintenant on désigne par

$$X_1, \quad X_2, \quad \ldots, \quad X_{n-1}, \quad X_n$$



les racines de l'équation (1) et par

$$x_1, \quad x_2, \quad \ldots, \quad x_{n-1}$$

celles de l'équation (2); l'un des nombres $n$, $n-1$ étant nécessairement pair, on aura, en vertu du théorème précédent,

$$f_n(x_1)f_n(x_2)\ldots f_n(x_{n-1})=f_{n-1}(X_1)f_{n-1}(X_2)\ldots f_{n-1}(X_{n-1})f_{n-1}(X_n),$$

ce qui vérifie la seconde partie du premier théorème énoncé dans le paragraphe VII de la section précédente.

Théorème II. — *Conservons la même notation que dans le second corollaire du théorème précédent; soient, en conséquence,*

$$f_n(x)=0$$

*l'équation proposée et, par suite,*

$$f_{n-1}(x)=0$$

*sa dérivée. Concevons, de plus, que l'on forme une nouvelle équation qui ait pour racines les carrés des différences entre celles de la proposée. Le dernier terme de cette nouvelle équation sera égal, à un coefficient numérique près, à chacun des produits*

$$f_n(x_1)f_n(x_2)\ldots f_n(x_{n-1}), \quad f_{n-1}(X_1)f_{n-1}(X_2)\ldots f_{n-1}(X_{n-1})f_{n-1}(X_n).$$

*Démonstration.* — Le dernier terme de l'équation aux carrés des différences entre les racines de la proposée sera

$$(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}(X_1-X_2)^2(X_1-X_3)^2\ldots(X_{n-1}-X_n)^2.$$

Ce même terme pourra être considéré comme formé par la multiplication de $n$ produits différents qui seront respectivement

$$\begin{array}{l}(X_1-X_2)(X_1-X_3)\ldots(X_1-X_n),\\ (X_2-X_1)(X_2-X_3)\ldots(X_2-X_n),\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\ (X_n-X_1)(X_n-X_2)\ldots(X_n-X_{n-1});\end{array}$$

d'ailleurs, le premier de ces produits est égal à

$$f'_n(X_1) = n f_{n-1}(X_1),$$

le deuxième à

$$f'_n(X_2) = n f_{n-1}(X_2),$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

le dernier à

$$f'_n(X_n) = n f_{n-1}(X_n).$$

Le dernier terme de l'équation aux carrés des différences entre les racines de la proposée pourra donc être représenté par

$$n^n f_{n-1}(X_1) f_{n-1}(X_2) \ldots f_{n-1}(X_n).$$

Ce dernier terme sera donc égal à chacun des produits

$$f_{n-1}(X_1) f_{n-1}(X_2) \ldots f_{n-1}(X_n), \quad f_n(x_1) f_n(x_2) \ldots f_n(x_{n-1})$$

multiplié par le coefficient numérique $n^n$, ce qui vérifie en totalité le premier théorème énoncé dans le paragraphe VII de la précédente section.

*Corollaire I.* — Soit toujours $f_n(x) = 0$ l'équation proposée. Pour obtenir le dernier terme de l'équation aux carrés des différences entre les racines de celle-ci, il suffira d'éliminer $x$ entre les deux équations

$$f_{n-1}(x) = 0, \qquad y + f_n(x) = 0$$

et de multiplier ensuite le dernier terme de l'équation résultante par $n^n$. On obtiendrait encore, mais à un coefficient numérique près, le terme dont il s'agit si l'on cherchait la condition nécessaire pour que les deux équations

$$f_n(x) = 0, \qquad f_{n-1}(x) = 0$$

puissent être en même temps satisfaites.

Problème I. — *Étant donnée une équation quelconque du degré $n$, trouver le dernier terme de l'équation qui aurait pour racines les carrés des différences entre celles de la proposée.*



*Solution.* — Soit toujours

$$f_n(x) = 0$$

ou

$$x^n + n a_1 x^{n-1} + \frac{n(n-1)}{1.2} a_2 x^{n-2} + \ldots + n a_{n-1} x + a_n = 0$$

l'équation proposée. On commencera par éliminer $x$ entre les deux équations

$$f_n(x) = 0, \qquad f_{n-1}(x) = 0$$

et l'on obtiendra par ce moyen une fonction des coefficients

$$a_1, \quad a_1, \quad \ldots, \quad a_n$$

qui sera nulle toutes les fois que les deux équations précédentes seront en même temps satisfaites. Désignons par $B_n$ la fonction dont il s'agit et par $A_n$ le dernier terme cherché. Les deux quantités $A_n$, $B_n$ seront égales à un coefficient numérique près; et si l'on désigne par $\lambda$ ce coefficient, on aura

$$A_n = \lambda B_n.$$

Cette dernière équation devant être satisfaite, quels que soient les coefficients $a_1$, $a_2$, …, $a_n$ de l'équation donnée, aura encore lieu, si l'on suppose

$$a_1 = 0, \qquad a_2 = 0, \qquad \ldots, \qquad a_{n-1} = 0, \qquad a_n = 1.$$

Supposons que, dans ce cas, $B_n$ se change en $\beta$. Dans la même hypothèse, on aura évidemment

$$A_n = n^n.$$

En effet, les deux équations

$$f_{n-1}(x) = 0, \qquad y + f_n(x) = 0$$

devenant alors

$$x^{n-1} = 0, \qquad y + x^n + 1 = 0,$$

l'équation en $y$, résultant de l'élimination de $x$ entre les deux précédentes, sera

$$(y+1)^{n-1} = 0,$$

et, le dernier terme de cette équation étant égal à $+1$, en le multipliant par $n^n$ on aura

$$A_n = n^n.$$

Par suite, on trouvera

$$\lambda = \frac{n^n}{\beta},$$

et l'on aura, en général,

$$A_n = n_n \frac{B_n}{\beta},$$

$\beta$ étant ce que devient $B_n$ quand on y suppose à la fois

$$a_1 = 0, \qquad a_2 = 0, \qquad \ldots, \qquad a_{n-1} = 0, \qquad a_n = 1.$$

*Corollaire I.* — Au lieu d'éliminer $x$ entre les deux équations

$$f_n(x) = 0, \qquad f_{n-1}(x) = 0,$$

on peut l'éliminer entre les deux suivantes

$$f_n(x - a_1) = 0, \qquad f_{n-1}(x - a_1) = 0,$$

et il est clair que, dans les deux cas, on doit arriver à la même équation de condition. D'ailleurs, si l'on fait, en général,

$$f_n(-a_1) = b_n,$$

on aura

$$\begin{aligned}
f'_n(-a_1) &= n b_{n-1},\\
f''_n(-a_1) &= n(n-1) b_{n-2},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
f_n^{(n-1)}(-a_1) &= n(n-1)\ldots 3.2.b_1,\\
f_n^{(n)}(-a_1) &= n(n-1)\ldots 3.2.1.b_0.
\end{aligned}$$

De plus, comme on a

$$b_1 = f_1(-a_1) = -a_1 + a_1 = 0, \qquad b_0 = 1,$$

les deux dernières équations se réduiront à

$$f_n^{(n-1)}(-a_1) = 0, \qquad f_n^{(n)}(-a_1) = 1.2.3\ldots\ldots n.$$



Cela posé, on aura, par le théorème de Taylor,

$$\begin{aligned}
f_n(x - a_1) = x^n &+ \frac{n(n-1)}{1.2} b_2 x^{n-2}\\
&+ \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3} b_3 x^{n-3} + \ldots + \frac{n}{1} b_{n-1} x + b_n,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f_{n-1}(x - a_1) = x^{n-1} &+ \frac{(n-1)(n-2)}{1.2} b_2 x^{n-3}\\
&+ \frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2.3} b_3 x^{n-4} + \ldots + b_{n-1}
\end{aligned}$$

et, par suite,

$$\begin{aligned}
&f_n(x - a_1) - x f_{n-1}(x - a_1)\\
&= (n-1)\left[b_2 x^{n-2} + \frac{n-2}{1}\frac{b_3}{2} x^{n-3} + \frac{(n-2)(n-3)}{1.2}\frac{b_4}{3} x^{n-4} + \ldots\right.\\
&\qquad\left. + (n-2)\frac{b_{n-1}}{n-2} x + \frac{b_n}{n-1}\right].
\end{aligned}$$

Si l'on fait, pour abréger,

$$f_n(x - a_1) - x f_{n-1}(x - a_1) = (n-1)\mathfrak{f}_{n-2}(x)$$

et

$$b_r = (r-1) c_{r-1},$$

on trouvera

$$\begin{aligned}
\mathfrak{f}_{n-2}(x) = c_1 x^{n-2} &+ \frac{n-2}{1} c_2 x^{n-3} + \frac{(n-2)(n-3)}{1.2} c_3 x^{n-4} + \ldots\\
&+ (n-2) c_{n-2} x + c_{n-1}.
\end{aligned}$$

Enfin il est aisé de voir que l'élimination de la variable $x$ entre les deux équations

$$f_{n-1}(x - a_1) = 0, \qquad \mathfrak{f}_{n-2}(x) = 0$$

doit conduire au même résultat que celle de la même variable entre les deux équations

$$f_n(x - a_1) = 0, \qquad f_{n-1}(x - a_1) = 0.$$

On obtiendra donc l'équation de condition cherchée si l'on élimine $x$

entre les deux suivantes

$$(3)\quad \left\{\begin{aligned} &x^{n-1} + \frac{(n-1)(n-2)}{1.2} c_1 x^{n-3} + \frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2} 2 c_2 x^{n-4} + \ldots \\ &\qquad + \frac{n-1}{1}(n-3) c_{n-3} x + (n-2) c_{n-2} = 0, \end{aligned}\right.$$

$$(4)\quad \left\{\begin{aligned} &c_1 x^{n-2} + \frac{n-2}{1} c_2 x^{n-3} + \frac{(n-2)(n-3)}{1.2} c_3 x^{n-4} + \ldots \\ &\qquad + \frac{n-2}{1} c_{n-2} x + c_{n-1} = 0. \end{aligned}\right.$$

Si l'on désigne par $B_n = 0$ cette équation de condition et par $\beta$ ce que devient $B_n$ lorsqu'on suppose

$$a_1 = 0, \quad a_2 = 0, \quad \ldots, \quad a_{n-1} = 0, \quad a_n = 1,$$

$n^n \frac{B_n}{\beta}$ représentera le dernier terme de l'équation aux carrés des différences entre les racines de la proposée.

*Premier exemple.* — Supposons l'équation donnée du deuxième degré et soit $f_2(x) = 0$ ou $x^2 + 2a_1 x + a_2 = 0$ cette même équation. Si l'on fait comme ci-dessus

$$f_r(-a_1) = b_r = (r-1) c_{r-1},$$

on aura

$$c_1 = f_2(-a_1) = a_2 - a_1^2.$$

De plus, les équations (3) et (4) se réduiront à

$$(3)\qquad x = 0,$$

$$(4)\qquad c_1 = 0.$$

La dernière de ces deux équations, étant indépendante de $x$, sera elle-même l'équation de condition cherchée. On pourra donc supposer

$$B_2 = c_1 = a_2 - a_1^2, \qquad \beta = 1$$

et, par suite, le dernier terme de l'équation aux carrés des différences entre les racines de la proposée sera

$$A_2 = 2^2 c_1 = -4(a_1^2 - a_2).$$



*Deuxième exemple.* — Supposons l'équation donnée du troisième degré et soit $f_3(x) = 0$ ou $x^3 + 3a_1 x^2 + 3a_2 x + a_3 = 0$ cette même équation; on aura

$$c_1 = f_2(-a_1) = a_2 - a_1^2,$$

$$2c_2 = f_3(-a_1) = a_3 - 3a_1 a_2 + 2a_1^3.$$

De plus, les équations (3) et (4) se réduiront à

$$(3)\qquad x^2 + c_1 = 0,$$

$$(4)\qquad c_1 x + c_2 = 0.$$

Si l'on élimine $x$ entre ces deux dernières équations, on obtiendra l'équation de condition suivante

$$c_2^2 + c_1^3 = 0.$$

On pourra donc supposer

$$B_3 = c_2^2 + c_1^3.$$

D'ailleurs, si l'on fait

$$a_1 = 0, \quad a_2 = 0, \quad a_3 = 1,$$

on aura

$$c_1 = 0, \quad c_2 = \frac{1}{2}.$$

Par suite,

$$\beta = \frac{1}{2^2},$$

et le dernier terme de l'équation aux carrés des différences entre les racines de la proposée sera

$$A_3 = 2^2 3^3 (c_2^2 + c_1^3).$$

*Troisième exemple.* — Supposons l'équation donnée du quatrième degré et soit $f_4(x) = 0$ ou $x^4 + 4a_1 x^3 + 6a_2 x^2 + 4a_3 x + a_4 = 0$ cette même équation; on aura

$$c_1 = f_2(-a_1) = a_2 - a_1^2,$$

$$2c_2 = f_3(-a_1) = a_3 - 3a_1 a_2 + 2a_1^3,$$

$$3c_3 = f_4(-a_1) = a_4 - 4a_1 a_3 + 6a_1^2 a_2 - 3a_1^4.$$

De plus, les équations (3) et (4) deviendront respectivement

$$(3)\qquad x^3 + 3c_1 x + 2c_2 = 0,$$

$$(4)\qquad c_1 x^2 + 2c_2 x + c_3 = 0.$$

Si l'on désigne par $x_1, x_2, x_3$ les trois racines de l'équation (3) et par $B_3 = 0$ l'équation de condition cherchée, on aura

$$B_3 = (c_1 x_1^2 + 2c_2 x_1 + c_3)(c_1 x_2^2 + 2c_2 x_2 + c_3)(c_1 x_3^2 + 2c_2 x_3 + c_3).$$

D'ailleurs si l'on fait, pour abréger,

$$c_2^2 - c_1 c_3 = f,$$

on aura

$$c_1 x^2 + 2c_2 x + c_3 = \frac{1}{c_1}\left(c_1 x + c_2 + f^{\frac{1}{2}}\right)\left(c_1 x + c_2 - f^{\frac{1}{2}}\right).$$

Par suite, la valeur précédente de $B_3$ sera égale au produit des six facteurs

$$c_1 x_1 + c_2 + f^{\frac{1}{2}},\quad c_1 x_2 + c_2 + f^{\frac{1}{2}},\quad c_1 x_3 + c_2 + f^{\frac{1}{2}},$$
$$c_1 x_1 + c_2 - f^{\frac{1}{2}},\quad c_1 x_2 + c_2 - f^{\frac{1}{2}},\quad c_1 x_3 + c_2 - f^{\frac{1}{2}}$$

divisé par $c_1^3$. Le produit des trois premiers facteurs est, en vertu de l'équation (3), égal à

$$\begin{aligned}&\left(c_2 + f^{\frac{1}{2}}\right)^3 + 3c_1^3\left(c_2 + f^{\frac{1}{2}}\right) - 2c_1^3 c_2\\ &\quad = c_2(c_2^2 + c_1^3) + 3c_2 f + f^{\frac{1}{2}}[3(c_2^2 + c_1^3) + f].\end{aligned}$$

De même, le produit des trois autres facteurs sera

$$c_2(c_2^2 + c_1^3) + 3c_2 f - f^{\frac{1}{2}}[3(c_2^2 + c_1^3) + f].$$

On aura donc

$$B_3 = \frac{[c_2(c_2^2 + c_1^3) + 3c_2 f]^2 - f[3(c_2^2 + c_1^3) + f]^2}{c_1^3}$$

ou, si l'on fait

$$c_2^2 + c_1^3 = g,$$

$$\begin{aligned}B_3 &= \frac{c_2^2(g + 3f)^2 - f(3g + f)^2}{c_1^3}\\ &= \frac{g(g + 3f)^2 - f(3g + f)^2}{c_1^3} - (g + 3f)^2 = \frac{(g - f)^3}{c_1^3} - (g + 3f)^2.\end{aligned}$$



Si l'on restitue à la place des quantités $f$ et $g$ leurs valeurs

$$c_2^2 - c_1 c_3 \quad \text{et} \quad c_2^2 + c_1^3,$$

on trouvera

$$\frac{g - f}{c_1} = c_1^2 + c_3, \qquad g + 3f = 4c_2^2 - 3c_1 c_3 + c_1^3$$

et, par suite,

$$B_3 = (c_3 + c_1^2)^3 - (4c_2^2 - 3c_1 c_3 + c_1^3)^2.$$

Si l'on suppose dans cette dernière équation

$$a_1 = 0, \quad a_2 = 0, \quad a_3 = 0, \quad a_4 = 1,$$

on aura

$$c_1 = 0, \quad c_2 = 0, \quad c_3 = \frac{1}{3}$$

et, par conséquent,

$$\beta = \frac{1}{3^3}.$$

Par suite, le dernier terme de l'équation aux carrés des différences entre les racines de la proposée sera

$$A_4 = 3^3 4^4[(c_3 + c_1^2)^3 - (4c_2^2 - 3c_1 c_3 + c_1^3)^2].$$

*Corollaire II.* — Désignons, en général, par $K_n$ le produit des diverses valeurs que reçoit la fonction $f_{n-2}(x)$ lorsqu'on y substitue successivement pour $x$ les diverses racines de l'équation

$$f_{n-1}(x - a_1) = 0$$

et par $\varkappa$ ce que devient $K_n$ quand on y fait

$$a_1 = 0, \quad a_2 = 0, \quad a_3 = 0, \quad \ldots, \quad a_{n-1} = 0, \quad a_n = 1.$$

On pourra, dans l'équation

$$A_n = n^n \frac{B_n}{\beta},$$

supposer

$$B_n = K_n, \qquad \beta = \varkappa.$$

D'ailleurs, si l'on fait

$$a_1 = 0, \quad a_2 = 0, \quad a_3 = 0, \quad \ldots, \quad a_{n-1} = 0, \quad a_n = 1,$$

on aura évidemment

$$c_1 = 0, \quad c_2 = 0, \quad \ldots, \quad c_{n-2} = 0, \quad c_{n-1} = \frac{1}{n-1},$$

$$f_{n-1}(x - a_1) = f_{n-1}(x) = x^{n-1}, \quad f_{n-2}(x) = c_{n-1} = \frac{1}{n-1}$$

et, par suite,

$$\varkappa = \frac{1}{(n-1)^{n-1}}.$$

On aura donc aussi

$$A_n = n^n \frac{K_n}{\varkappa} = n^n (n-1)^{n-1} K_n.$$

On peut vérifier cette dernière équation sur chacun des exemples rapportés ci-dessus. Si l'on fait successivement

$$n = 2, \quad n = 3, \quad n = 4, \quad n = 5, \quad \ldots,$$

on trouvera

$$\begin{aligned}
&A_2 = 1^1 2^2 K_2, && K_2 = c_1,\\
&A_3 = 2^2 3^3 K_3, && K_3 = c_1^3 + c_2^2,\\
&A_4 = 3^3 4^4 K_4, && K_4 = (c_1^2 + c_3)^3 - (4c_2^2 - 3c_1c_3 + c_1^3)^2,\\
&A_5 = 4^4 5^5 K_5, && K_5 = c_4^4 - 4.15 c_1 c_2 c_4^3\\
&\ldots\ldots\ldots, && \quad + 6c_4^2(15c_1c_3^2 + 110c_1^2c_2^2 - 45c_1^3c_3 + 45c_2^2c_3 + 36c_1^5)\\
& && \quad + 4c_4(315c_1^2c_2c_3^2 + 160c_1^3c_2^3\\
& && \qquad - 135c_2c_3^3 - 945c_1c_2^3c_3 - 270c_1^4c_2c_3 + 432c_2^5)\\
& && \quad + 243c_3^5 - 810c_1^2c_3^4 + 2430c_1c_2^2c_3^3\\
& && \quad + 675c_1^4c_3^3 - 1215c_2^4c_3^2 - 450c_1^3c_2^2c_3^2,\\
& && \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

$A_2$, $A_3$, $A_4$, $A_5$ désignent ici les derniers termes des équations aux carrés des différences entre les racines des équations suivantes

$$\begin{aligned}
&x^2 + 2a_1x + a_2 = 0,\\
&x^3 + 3a_1x^2 + 3a_2x + a_3 = 0,\\
&x^4 + 4a_1x^3 + 6a_2x^2 + 4a_3x + a_4 = 0,\\
&x^5 + 5a_1x^4 + 10a_2x^3 + 10a_3x^2 + 5a_4x + a_5 = 0,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$



et l'on a de plus

$$\begin{aligned}
c_1 &= a_2 - a_1^2,\\
2c_2 &= a_3 - 3a_1a_2 + 2a_1^3,\\
3c_3 &= a_4 - 4a_1a_3 + 6a_1^2a_2 - 3a_1^4,\\
4c_4 &= a_5 - 5a_1a_4 + 10a_1^2a_3 - 10a_1^3a_2 + 4a_1^5,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

Si les équations données n'avaient pas de second terme ou si l'on supposait $a_1 = 0$, on trouverait simplement

$$c_1 = a_2, \quad c_2 = \frac{1}{2}a_3, \quad c_3 = \frac{1}{3}a_4, \quad c_4 = \frac{1}{4}a_5, \quad \ldots$$

THÉORÈME III. — *Supposons que l'on garde la même notation que dans le théorème II. Soit toujours*

$$f_n(x) = 0$$

*l'équation donnée. Soient $X_1$, $X_2$, ..., $X_n$ ses différentes racines et*

$$f_{n-1}(x) = 0$$

*l'équation dérivée. Enfin désignons par $\varphi(x)$ une nouvelle fonction rationnelle et entière de la variable $x$. La somme suivante*

$$\frac{\varphi(X_1)}{f_{n-1}(X_1)} + \frac{\varphi(X_2)}{f_{n-1}(X_2)} + \ldots + \frac{\varphi(X_n)}{f_{n-1}(X_n)}$$

*sera nécessairement une fonction rationnelle et entière des coefficients de la proposée.*

*Démonstration.* — Supposons, à l'ordinaire,

$$f_n(x) = x^n + na_1x^{n-1} + \frac{n(n-1)}{1.2}a_2x^{n-2} + \ldots + na_{n-1}x + a_n$$

et soit, de plus,

$$\varphi(x) = \alpha + \beta x + \gamma x^2 + \ldots + \zeta x^{n-2} + \lambda x^{n-1} + \mu x^n + \nu x^{n+1} + \ldots.$$

Enfin, désignons par N la somme cherchée. Si l'on réduit au même dénominateur toutes les fractions dont cette somme se compose, le dénominateur commun, multiplié par $n^n$, sera, en vertu du théorème II, égal à

$$(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}(X_1-X_2)^2(X_1-X_3)^2\ldots(X_{n-1}-X_n)^2.$$

De plus, si l'on fait usage de la notation adoptée dans l'un des précédents Mémoires (*voir* p. 95), on aura

$$(X_1-X_2)(X_1-X_3)\ldots(X_{n-1}-X_n)=S(\pm X_1^{n-1}X_2^{n-2}\ldots X_n^0)$$

et, par suite, le dénominateur commun de toutes les fractions sera représenté par

$$(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\frac{1}{n^n}[S(\pm X_1^{n-1}X_2^{n-2}\ldots X_n^0)]^2.$$

Quant au numérateur de la première fraction, il deviendra égal à

$$\varphi(X_1)f_{n-1}(X_2)f_{n-1}(X_3)\ldots f_{n-1}(X_n).$$

D'ailleurs, le produit $f_{n-1}(X_2)f_{n-1}(X_3)\ldots f_{n-1}(X_n)$, multiplié par $n^{n-1}$, se trouvera formé des mêmes facteurs que le dénominateur commun. Seulement, chacun des facteurs

$$X_1-X_2,\quad X_1-X_3,\quad \ldots,\quad X_1-X_n$$

n'y sera élevé qu'à la première puissance. Cela posé, on reconnaitra facilement que ce même produit est décomposable en deux autres, dont l'un, ayant pour facteurs toutes les différences qu'on obtient en disposant les racines de l'équation donnée suivant l'ordre de grandeur de leurs indices et retranchant successivement de chacune d'elles toutes celles qui la précèdent, peut être représenté par

$$\begin{aligned}&(X_2-X_1)(X_3-X_1)\ldots(X_n-X_1)(X_3-X_2)\ldots(X_n-X_{n-1})\\&=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}S(\pm X_1^{n-1}X_2^{n-2}\ldots X_n^0)\end{aligned}$$

et dont l'autre, ayant pour facteurs les mêmes différences prises en signe contraire, à l'exception toutefois de celles qui renferment la



racine $X_1$, pourra être désigné par

$$(X_2-X_3)(X_2-X_4)\ldots(X_2-X_n)(X_3-X_4)\ldots(X_{n-1}-X_n)=S(\pm X_2^{n-2}X_3^{n-3}\ldots X_n^0).$$

Par suite, le numérateur de la première fraction se trouvera représenté par

$$(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\frac{1}{n^{n-1}}S(\pm X_1^{n-1}X_2^{n-2}\ldots X_n^0)\varphi(X_1)S(\pm X_2^{n-2}X_3^{n-3}\ldots X_n^0),$$

et la somme des numérateurs de toutes les fractions semblables par

$$(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\frac{1}{n^{n-1}}S(\pm X_1^{n-1}X_2^{n-2}\ldots X_n^0)S[\pm\varphi(X_1)S(\pm X_2^{n-2}X_3^{n-3}\ldots X_n^0)].$$

En divisant cette somme par le dénominateur commun, on aura pour la somme de toutes les fractions

$$N=n\frac{S[\pm\varphi(X_1)S(\pm X_2^{n-2}X_3^{n-3}\ldots X_n^0)]}{S(\pm X_1^{n-1}X_2^{n-2}X_3^{n-3}\ldots X_n^0)}.$$

Il sera maintenant facile d'obtenir la valeur de N. En effet, si l'on remet pour $\varphi(X_1)$ sa valeur

$$\alpha+\beta X_1+\gamma X_1^2+\ldots+\zeta X_1^{n-2}+\lambda X_1^{n-1}+\mu X_1^n+\nu X_1^{n+1}+\ldots,$$

on trouvera

$$\begin{aligned}&S[\pm\varphi(X_1)S(\pm X_2^{n-2}X_3^{n-3}\ldots X_n^0)]\\&\quad=S[\pm(\alpha+\beta X_1+\gamma X_1^2+\ldots+\zeta X_1^{n-2}+\lambda X_1^{n-1}+\mu X_1^n+\nu X_1^{n+1}+\ldots)\\&\qquad\qquad\times S(\pm X_2^{n-2}X_3^{n-3}\ldots X_n^0)]\\&\quad=\alpha S(\pm X_1^0X_2^{n-2}X_3^{n-3}\ldots X_n^0)+\beta S(\pm X_1^1X_2^{n-2}X_3^{n-3}\ldots X_n^0)\\&\qquad+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\&\qquad+\zeta S(\pm X_1^{n-2}X_2^{n-2}X_3^{n-3}\ldots X_n^0)+\lambda S(\pm X_1^{n-1}X_2^{n-2}X_3^{n-3}\ldots X_n^0)\\&\qquad+\mu S(\pm X_1^nX_2^{n-2}X_3^{n-3}\ldots X_n^0)+\nu S(\pm X_1^{n+1}X_2^{n-2}X_3^{n-3}\ldots X_n^0)\\&\qquad+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\end{aligned}$$

Les premiers termes de la série précédente, jusqu'à celui qui a $\zeta$ pour coefficient, sont évidemment nuls; car si l'on désigne par $r$ un quelconque des indices 1, 2, 3, ..., $n-2$, on aura toujours

$$S(\pm X_1^rX_2^{n-2}X_3^{n-3}\ldots X_n^0)=0.$$

De plus, si l'on désigne par $r$ un nombre entier supérieur à $n-2$, l'expression

$$S(\pm X_1^r X_2^{n-2} X_3^{n-3} \ldots X_n^0)$$

sera, en vertu des théorèmes établis dans le Mémoire déjà cité (*voir* p. 110), divisible par

$$S(\pm X_1^{n-1} X_2^{n-2} X_3^{n-3} \ldots X_n^0);$$

et, si l'on représente par $N_r$ le quotient, on trouvera

$$\begin{aligned}
&N_{n-1} = 1,\\
&N_n \ \ = X_1 + X_2 + \ldots + X_n = S^n(X_1) = -na_1,\\
&N_{n+1} = X_1^2 + X_2^2 + \ldots + X_1 X_2 + \ldots = S^n(X_1^2) + S^n(X_1 X_2) = n^2 a_1^2 - \frac{n(n-1)}{1.2} a_2,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

Cela posé, la valeur de N précédemment trouvée deviendra

$$N = n(\lambda N_{n-1} + \mu N_n + \nu N_{n+1} + \ldots) = n\left[\lambda - na_1\mu + n\left(na_1^2 - \frac{n-1}{2} a_2\right)\nu + \ldots\right].$$

Cette valeur sera donc une fonction rationnelle et entière des coefficients de la proposée, ce qui vérifie le second théorème du paragraphe VII de la première section.

*Corollaire I.* — Si la fonction $\varphi(x)$ est, par rapport à $x$, d'un degré inférieur à $n-1$, ou si l'on a simplement

$$\varphi(x) = \alpha + \beta x + \gamma x^2 + \ldots + \zeta x^{n-2},$$

la somme N sera nulle, quelles que soient d'ailleurs les valeurs de $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, ..., $\zeta$, et l'on aura par suite

$$\frac{\varphi(X_1)}{f_{n-1}(X_1)} + \frac{\varphi(X_2)}{f_{n-1}(X_2)} + \ldots + \frac{\varphi(X_n)}{f_{n-1}(X_n)} = 0.$$

*Corollaire II.* — Si l'on suppose en même temps

$$\varphi(x) = \alpha + \beta x + \gamma x^2 + \ldots + \zeta x^{n-2} + \lambda x^{n-1} + \mu x^n + \nu x^{n+1} + \ldots$$

et

$$\psi(x) = \lambda x^{n-1} + \mu x^n + \nu x^{n+1} + \ldots,$$



il suffira, pour déterminer la valeur de N, d'avoir égard aux termes de $\varphi(x)$ qui renferment des puissances de $x$ supérieures à $n-2$, et l'on aura par suite

$$\begin{aligned}
N &= \frac{\psi(X_1)}{f_{n-1}(X_1)} + \frac{\psi(X_2)}{f_{n-1}(X_2)} + \ldots + \frac{\psi(X_n)}{f_{n-1}(X_n)}\\
&= n\left[\lambda - na_1\mu + n\left(na_1^2 - \frac{n-1}{2} a_2\right)\nu - \ldots\right].
\end{aligned}$$

*Corollaire III.* — Soient toujours $f_n(x) = 0$ l'équation proposée, $f_{n-1}(x) = 0$ sa dérivée et $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ les racines de cette dernière équation. Si l'on fait

$$N' = \frac{\varphi(x_1)}{f_{n-2}(x_1)} + \frac{\varphi(x_2)}{f_{n-2}(x_2)} + \ldots + \frac{\varphi(x_{n-1})}{f_{n-2}(x_{n-1})},$$

on aura

$$N' = (n-1)\left\{\zeta - (n-1)a_1\lambda + (n-1)\left[(n-1)a_1^2 - \frac{n-2}{2} a_2\right]\mu - \ldots\right\}.$$

En effet, pour déduire la valeur de N' de celle de N, il suffira évidemment de changer $n$ en $n-1$ et de remplacer $\lambda$ par $\zeta$, $\mu$ par $\lambda$, $\nu$ par $\mu$, etc., c'est-à-dire le coefficient d'une puissance quelconque de $x$ dans $\varphi(x)$ par le coefficient de la puissance immédiatement inférieure.

*Corollaire IV.* — Si dans le corollaire précédent on suppose

$$\varphi(x) = f_n(x),$$

on aura

$$\zeta = \frac{n(n-1)}{2} a_2, \qquad \lambda = na_1, \qquad \mu = 1$$

et, par suite,

$$\frac{f_n(x_1)}{f_{n-2}(x_1)} + \frac{f_n(x_2)}{f_{n-2}(x_2)} + \ldots + \frac{f_n(x_{n-1})}{f_{n-2}(x_{n-1})} = (n-1)^2(a_2 - a_1^2).$$

On a d'ailleurs

$$a_1 = \frac{1}{n} S^n(X_1), \qquad a_2 = \frac{2}{n(n-1)} S^n(X_1 X_2),$$

et, par suite,

$$-(n-1)^2(a_2-a_1^2)=\frac{n-1}{n^2}S^n(X_1-X_2)^2,$$

ce qui vérifie le théorème III de la section précédente (paragraphe VII).

Théorème IV. — *Soit toujours $f_n(x)=0$ l'équation proposée. Soit, de plus, $\psi(x)$ une fonction rationnelle quelconque de $x$ et supposons que l'élimination de $x$ entre les deux équations*

$$f_n(x)=0, \qquad \zeta-\psi(x)=0$$

*donne pour résultat l'équation*

$$\varphi(\zeta)=0.$$

*Si l'on désigne par $A_n$ le dernier terme de l'équation aux carrés des différences entre les racines de la proposée et par $\alpha$ le dernier terme de l'équation aux carrés des différences entre les racines de $\varphi(\zeta)=0$ : le quotient $\frac{\alpha}{A_n}$ sera toujours un carré parfait.*

*Démonstration.* — En effet, soient $X_1, X_2, \ldots, X_n$ les racines de la proposée; on aura

$$A_n=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}[(X_1-X_2)(X_1-X_3)\ldots(X_{n-1}-X_n)]^2,$$
$$\alpha=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\{[\psi(X_1)-\psi(X_2)][\psi(X_1)-\psi(X_3)]\ldots[\psi(X_{n-1})-\psi(X_n)]\}^2$$

et, par suite,

$$\frac{\alpha}{A_n}=\left[\frac{\psi(X_1)-\psi(X_2)}{X_1-X_2}\,\frac{\psi(X_1)-\psi(X_3)}{X_1-X_3}\ldots\frac{\psi(X_{n-1})-\psi(X_n)}{X_{n-1}-X_n}\right]^2.$$

D'ailleurs, le produit

$$\frac{\psi(X_1)-\psi(X_2)}{X_1-X_2}\,\frac{\psi(X_1)-\psi(X_3)}{X_1-X_3}\ldots\frac{\psi(X_{n-1})-\psi(X_n)}{X_{n-1}-X_n}$$

est évidemment une fonction symétrique des racines de la proposée;



car il ne change pas de valeur lorsqu'on échange entre elles ces mêmes racines. Il peut donc être remplacé par une fonction rationnelle des coefficients de l'équation donnée et, par suite, $\frac{\alpha}{A_n}$ sera le carré de cette même fonction.

*Corollaire.* — Quel que soit le degré de l'équation donnée, le produit des carrés des différences entre les racines de chacune des équations auxiliaires en $y$ et $z$ aura toujours le même signe que le produit des carrés des différences entre les racines de l'équation dérivée.

Problème II. — *Déterminer le nombre et l'espèce de racines réelles d'une équation du degré $n$.*

*Solution.* — Pour plus de commodité, supposons ici que ni l'équation donnée ni aucune des équations auxiliaires que l'on est obligé de former n'aient de racines égales entre elles ou à zéro. Soient toujours $f_n(x)=0$ l'équation donnée et $f_{n-1}(x)=0$ sa dérivée du premier ordre.

La fonction dérivée du second ordre de $f_n(x)$, savoir $f_n''(x)$, sera de même signe que $f_{n-2}(x)$ et, par suite de la méthode exposée dans le paragraphe II de la première section, il suffira, pour obtenir le nombre des racines réelles de la proposée, d'éliminer $x$ entre les deux équations

$$y+f_n(x)\,f_{n-2}(x)=0, \qquad f_{n-1}(x)=0$$

et d'ajouter une unité à la différence entre les nombres de racines positives et négatives de l'équation en $y$ résultant de cette élimination.

D'ailleurs, en vertu de la remarque faite plus loin, paragraphe VII, on peut remplacer le produit

$$f_n(x)\,f_{n-2}(x)$$

par la fraction

$$\frac{f_{n-2}(x)}{f_n(x)}.$$

Par suite, le nombre des racines réelles de la proposée surpassera d'une unité la différence entre les nombres de racines positives et négatives de l'équation en $y$ qu'on obtient par l'élimination de $x$ entre les deux suivantes :

$$y f_n(x) + f_{n-2}(x) = 0, \qquad f_{n-1}(x) = 0$$

ou, ce qui revient au même, entre les deux suivantes :

$$y f_n(x - a_1) + f_{n-2}(x - a_1) = 0, \qquad f_{n-1}(x - a_1) = 0.$$

De plus, si l'on fait usage de la notation adoptée ci-dessus (*voir* le problème I, corollaire I), on aura

$$f_n(x - a_1) = x f_{n-1}(x - a_1) + (n-1)\mathfrak{f}_{n-2}(x);$$

et, par conséquent, si l'on suppose $f_{n-1}(x - a_1) = 0$, on aura simplement

$$f_n(x - a_1) = (n-1)\mathfrak{f}_{n-2}(x).$$

On pourra donc, en faisant abstraction du facteur numérique $n - 1$, remplacer la fonction $f_n(x - a_1)$ par $\mathfrak{f}_{n-2}(x)$; d'où il suit que, pour obtenir l'équation auxiliaire en $y$, on pourra se contenter d'éliminer $x$ entre les deux suivantes :

$$y\,\mathfrak{f}_{n-2}(x) + f_{n-2}(x - a_1) = 0, \qquad f_{n-1}(x - a_1) = 0.$$

De même, pour obtenir l'équation auxiliaire en $z$, il suffira d'éliminer $x$ entre les deux qui suivent :

$$z\,\mathfrak{f}_{n-2}(x) + (x - a_1) f_{n-2}(x - a_1) = 0, \qquad f_{n-1}(x - a_1) = 0.$$

Les deux équations auxiliaires en $y$ et $z$ étant ainsi formées, si l'on détermine pour chacune d'elles la différence entre le nombre des racines positives et le nombre des racines négatives, la première des deux différences obtenues sera inférieure d'une unité au nombre des racines réelles de la proposée et la seconde sera inférieure ou supérieure d'une unité à l'excès du nombre des racines positives sur le nombre des racines négatives, suivant que le produit $a_{n-1} a_n$ sera négatif ou positif.



En appliquant aux équations auxiliaires les mêmes raisonnements qu'à la proposée elle-même, on finira par obtenir les fonctions des coefficients

$$a_1, \quad a_2, \quad a_3, \quad \ldots, \quad a_{n-1}, \quad a_n$$

qui déterminent le nombre et l'espèce des racines réelles de l'équation donnée.

*Premier exemple.* — Supposons l'équation donnée du second degré et soit

$$x^2 + 2a_1 x + a_2 = 0$$

cette même équation. Si l'on fait comme ci-dessus (problème I)

$$c_1 = a_2 - a_1^2,$$

on aura

$$f_{n-1}(x - a_1) = x, \qquad f_{n-2}(x - a_1) = 1, \qquad \mathfrak{f}_{n-2}(x) = c_1.$$

Ainsi, pour obtenir les équations en $y$ et $z$, il suffira d'éliminer $x$ :
1° entre les deux équations

$$c_1 y + 1 = 0, \qquad x = 0;$$

2° entre les deux équations

$$c_1 z + x - a_1 = 0, \qquad x = 0.$$

Les équations auxiliaires en $y$ et $z$ seront donc respectivement

$$y + \frac{1}{c_1} = 0, \qquad z - \frac{a_1}{c_1} = 0.$$

Par suite, la différence entre les nombres de racines positives et négatives sera, pour l'équation en $y$, $+1$ si $\frac{1}{c_1}$ ou $c_1$ est négatif et $-1$ dans le cas contraire. La même différence, pour l'équation en $z$, sera $+1$ si $\frac{a_1}{c_1}$ ou $a_1 c_1$ est positif et $-1$ dans le cas contraire. De plus, si l'on veut passer de l'équation en $z$ à la proposée, il faudra augmenter ou diminuer la dernière différence d'une unité, suivant que le produit

$a_1 a_2$ sera négatif ou positif. Cela posé, si l'on convient de remplacer constamment par $+1$ les fonctions des coefficients de la proposée, qui obtiennent des valeurs positives, et par $-1$ celles qui obtiennent des valeurs négatives, on aura, pour déterminer le nombre et l'espèce des racines réelles de l'équation

$$x^2 + 2a_1 x + a_2 = 0,$$

les quatre fonctions

$$1, \quad -c_1, \quad -a_1 a_2, \quad a_1 c_1,$$

la somme des deux premières fonctions devant toujours être, après le remplacement dont il s'agit, égale au nombre des racines réelles de l'équation donnée et la somme des deux dernières à l'excès du nombre des racines positives sur le nombre des racines négatives.

Le nombre des racines réelles étant déterminé par les deux fonctions $1$ et $-c_1 = a_1^2 - a_2$ dont la première est toujours positive, il y aura deux racines réelles si $a_1^2 - a_2$ est aussi positive; il n'y en aura point dans le cas contraire. Dans cette dernière hypothèse, $a_2$ sera nécessairement positif et, par suite, les deux fonctions $-a_1 a_2$, $+a_1 c_1$ seront de signes opposés; mais, dans le premier cas, $c_1$ étant négatif, les deux fonctions $-a_1 a_2$, $+a_1 c_1$ et, par suite, les deux racines réelles de l'équation donnée seront de même signe ou de signes contraires, suivant que $a_2$ sera positif ou négatif. Enfin ces racines, supposées de même signe, seront toutes deux positives si $a_1$ est négatif et négatives dans le cas contraire.

*Second exemple.* — Supposons l'équation donnée du troisième degré et soit

$$x^3 + 3a_1 x^2 + 3a_2 x + a_3 = 0$$

cette même équation; on aura, dans le cas présent, $n = 3$, et si l'on fait, comme dans le problème I,

$$c_1 = a_2 - a_1^2, \qquad 2c_2 = a_3 - 3a_1 a_2 + 2a_1^3,$$

on trouvera

$$f_{n-1}(x - a_1) = x^2 + c_1, \qquad f_{n-2}(x - a_1) = x, \qquad f_{n-3}(x) = c_1 x + c_2.$$



Par suite, pour obtenir les équations auxiliaires en $y$ et $z$, il suffira d'éliminer $x$ : 1° entre les deux équations

$$y(c_1 x + c_2) + x = 0, \qquad x^2 + c_1 = 0;$$

2° entre les deux équations

$$z(c_1 x + c_2) + x(x - a_1) = 0, \qquad x^2 + c_1 = 0.$$

On tire de la première

$$x = \frac{-c_2 y}{c_1 y + 1}.$$

De plus, si dans l'équation

$$z(c_1 x + c_2) + x^2 - a_1 x = 0$$

on remplace $x^2$ par $-c_1$, on en déduira

$$x = \frac{c_1 - c_2 z}{c_1 z - a_1}.$$

Si l'on substitue successivement les deux valeurs précédentes de $x$ dans l'équation

$$x^2 + c_1 = 0,$$

on aura les deux équations suivantes en $y$ et $z$

$$(c_2^2 + c_1^3) y^2 + 2c_1^2 y + c_1 = 0,$$
$$(c_2^2 + c_1^3) z^2 - 2c_1(a_1 c_1 + c_2) z + c_1(a_1^2 + c_1) = 0.$$

Il ne reste plus qu'à déterminer pour chacune d'elles la différence entre les nombres de racines positives et négatives. Or on a déjà fait voir que, relativement à l'équation

$$x^2 + 2a_1 x + a_2 = 0,$$

la même différence était déterminée par les deux fonctions

$$-a_1 a_2, \quad -a_1(a_1^2 - a_2).$$

D'ailleurs, pour passer de cette dernière équation aux équations auxiliaires en $y$ et $z$, il suffira évidemment de remplacer les deux quantités $a_1$ et $a_2$

1° par $\dfrac{2c_1^2}{c_2^2+c_1^3}$ et $\dfrac{c_1}{c_2^2+c_1^3}$;

2° par $\dfrac{-2c_1(a_1c_1+c_2)}{c_2^2+c_1^3}$ et $\dfrac{c_1(a_1^2+c_1)}{c_2^2+c_1^3}=\dfrac{c_1a_2}{c_2^2+c_1^3}$.

Quant à la quantité

$$a_1^2-a_2$$

qui, relativement à l'équation

$$x^2+2a_1x+a_2=0,$$

représentait le quart du carré de la différence entre les deux racines, elle devra être remplacée par la même fonction des racines des équations auxiliaires en $y$ et $z$; et, par suite, en vertu du théorème IV, on pourra lui substituer immédiatement le quart du carré de la différence entre les racines de l'équation

$$x^2+c_1=0,$$

c'est-à-dire la quantité $-c_1$. Cela posé, si l'on fait abstraction des facteurs carrés qui n'ont aucune influence sur les signes et que l'on change les diviseurs en multiplicateurs, les deux fonctions

$$-a_1a_2,\quad -a_1(a_1^2-a_2),$$

se trouveront remplacées, pour l'équation auxiliaire en $y$, par

$$-c_1,\quad c_1(c_2^2+c_1^3)$$

et, pour l'équation auxiliaire en $z$, par

$$a_2(a_1c_1+c_2),\quad -(a_1c_1+c_2)(c_2^2+c_1^3).$$

Il est aisé d'en conclure que le nombre et l'espèce des racines réelles de l'équation

$$x^3+3a_1x^2+3a_2x+a_3=0$$



seront déterminés par les six fonctions

$$1,\quad -c_1,\quad c_1(c_2^2+c_1^3),\quad -a_2a_3,\quad a_2(a_1c_1+c_2),\quad -(a_1c_1+c_2)(c_2^2+c_1^3).$$

Lorsque dans chaque cas particulier on aura remplacé celles des fonctions précédentes qui seront positives par $+1$ et celles qui seront négatives par $-1$, la somme des trois premières donnera le nombre des racines réelles de la proposée et la somme des trois dernières la différence entre les nombres de racines positives et négatives.

Il est bon de remarquer qu'à la fonction $a_1c_1+c_2$ on peut substituer

$$2a_1c_1+2c_2=a_3-a_1a_2,$$

en sorte que les trois fonctions qui déterminent la différence entre le nombre des racines positives et le nombre des racines négatives peuvent être présentées sous la forme suivante :

$$-a_2a_3,\quad a_2(a_3-a_1a_2),\quad -(a_3-a_1a_2)(c_2^2+c_1^3).$$

Des trois fonctions

$$1,\quad -c_1,\quad c_1(c_2^2+c_1^3)$$

qui déterminent le nombre des racines réelles, la première, 1, est toujours essentiellement positive. De plus, les deux autres ne peuvent être à la fois négatives; car, si la deuxième est négative, la troisième sera évidemment positive. Enfin, le produit des deux dernières fonctions étant égal à $-c_1^2(c_2^2+c_1^3)$, ce produit sera négatif et les deux fonctions de signes contraires si $c_2^2+c_1^3$ est positif; le même produit sera positif et, par suite, les deux fonctions seront positives si $c_2^2+c_1^3$ est négatif. Dans le premier cas, l'équation donnée n'aura qu'une racine réelle; dans le second, elle en aura trois.

La quantité $c_2^2+c_1^3$, qui suffit en général pour déterminer le nombre des racines réelles, représente, comme on l'a fait voir ci-dessus, le dernier terme de l'équation aux carrés des différences entre les racines de la proposée divisé par le carré de 2 et le cube de 3.

*Corollaire I.* — On voit, par les exemples précédents, comment le nombre et l'espèce des racines réelles d'une équation donnée du degré $n$ se trouvent déterminés à l'aide de plusieurs fonctions des coefficients de cette équation.

Les premières fonctions, ou celles qui déterminent le nombre des racines réelles, sont en nombre égal à $n$. Les autres, qui déterminent la différence entre le nombre des racines positives et le nombre des racines négatives, sont encore en nombre égal à $n$. Le nombre total des fonctions que l'on considère est donc égal à $2n$. Mais, comme la première de ces fonctions est toujours égale à l'unité, le nombre de celles qui varient avec les coefficients est seulement égal à $2n-1$, ce qui s'accorde avec le deuxième paragraphe de la première section.

*Corollaire II.* — Après l'unité, la première des fonctions qui déterminent le nombre des racines réelles a été trouvée, pour le deuxième et le troisième degré, égale à $-c_1$. Cette fonction reste la même, quel que soit le degré de l'équation proposée. En effet, elle est égale et de signe contraire au produit des deux derniers termes de l'équation en $y$; mais le produit de ces deux termes peut être remplacé par leur quotient ou par

$$\frac{f_n(x_1)}{f_{n-2}(x_1)}+\frac{f_n(x_2)}{f_{n-2}(x_2)}+\ldots+\frac{f_n(x_{n-1})}{f_{n-2}(x_{n-1})};$$

et, en vertu du théorème III, ce même quotient, pris en signe contraire, est, à un coefficient numérique près, égal à

$$a_1^2-a_2=-c_1,$$

ou encore à la somme des carrés des différences entre les racines de la proposée.

*Corollaire III.* — Dans les exemples que nous venons de parcourir, le produit des fonctions qui déterminent le nombre des racines réelles a toujours le même signe que le produit des carrés des différences entre les racines de l'équation donnée. Cette proposition reste vraie, quel que soit le degré de l'équation que l'on considère. En effet,



chacune des fonctions négatives indiquant un couple de racines imaginaires, le nombre des fonctions négatives sera pair ou impair et, par suite, le produit de toutes les fonctions cherchées sera positif ou négatif, suivant que les couples de racines imaginaires seront en nombre pair ou en nombre impair, et l'on sait d'ailleurs que, pour lever toute incertitude à cet égard, il suffit d'examiner si le produit des carrés des différences entre les racines de la proposée est positif ou négatif.

*Corollaire IV.* — Si l'on considère à la fois les diverses fonctions en nombre égal à $2n$ qui déterminent, non seulement le nombre mais encore l'espèce des racines réelles, on déterminera facilement, par l'inspection de leurs signes, le nombre des racines positives. En effet, ce dernier nombre est égal à la moitié de la somme faite du nombre des racines réelles et de l'excès du nombre des racines positives sur le nombre des racines négatives. Par suite, toutes les racines de l'équation donnée seront positives si toutes les fonctions que l'on considère le sont aussi; mais chaque fonction qui deviendra négative diminuera le nombre cherché d'une unité. Cela posé, il sera facile de reconnaître, par le signe du produit de toutes les fonctions, si le nombre des racines positives est pair ou impair. On voit, en effet, que ce nombre sera de même espèce que le degré de l'équation donnée si les fonctions négatives sont en nombre pair ou, ce qui revient au même, si le produit de toutes les fonctions est positif et qu'il sera d'espèce différente dans le cas contraire. D'ailleurs, on peut lever immédiatement toute incertitude à cet égard en examinant si le produit des racines de l'équation donnée est positif ou négatif. Ainsi, le produit des diverses fonctions qui déterminent le nombre et l'espèce des racines réelles doit toujours avoir le même signe que le produit des racines de la proposée; mais on a prouvé ci-dessus que le produit des fonctions qui déterminent seulement le nombre des racines réelles avait toujours même signe que le produit des carrés des différences entre les racines. Par suite, le produit des fonctions qui déterminent la différence entre le nombre des racines positives et le nombre des racines négatives aura même signe que le produit des racines par les carrés des différences entre les racines. Ainsi, par exemple, si l'on considère l'équation générale du troisième degré

$$x^3 + 3a_1x^2 + 3a_2x + a_3 = 0,$$

le produit des racines étant alors égal à $-a_3$ et le produit des carrés des différences entre les racines à

$$-2^2 3^3 (c_2^2 + c_1^3),$$

le produit des fonctions qui déterminent la différence entre les nombres de racines positives et négatives doit avoir même signe que le suivant :

$$a_3(c_2^2 + c_1^3),$$

ce qui s'accorde avec les résultats trouvés ci-dessus.

*Corollaire V.* — En suivant la méthode précédente, on détermine le nombre des racines réelles d'une équation du degré $n$ au moyen de la différence qui existe entre les nombres de racines positives et négatives dans une équation auxiliaire du degré $n-1$; mais, à l'aide d'un artifice indiqué par Euler (2^e partie du *Calcul différentiel*, Chap. XII), on peut abaisser d'une unité le degré de cette équation auxiliaire, ainsi qu'on va le faire voir.

Problème III. — *Réduire la recherche du nombre des racines réelles dans une équation donnée du degré $n$ à la détermination de la différence qui existe entre les nombres de racines positives et négatives dans une équation du degré $n-2$.*

*Solution.* — Conservons la même notation que dans le problème précédent et soit toujours $f_n(x) = 0$ l'équation proposée. Ses racines réelles seront en même nombre que les racines réelles de l'équation

$$f_n(x - a_1) = 0$$



ou

$$x^n + \frac{n(n-1)}{1.2}c_1x^{n-2} + \ldots$$
$$+ \frac{n(n-1)}{1.2}(n-3)c_{n-3}x^2 + \frac{n}{1}(n-2)c_{n-2}x + (n-1)c_{n-1} = 0.$$

Si dans cette dernière on change $x$ en $\frac{1}{x}$, le nombre des racines réelles restera encore le même. On pourra donc, à l'équation proposée, substituer la suivante :

$$(5)\quad \left\{\begin{array}{l} (n-1)c_{n-1}x^n + \frac{n}{1}(n-2)c_{n-2}x^{n-1} \\ \quad + \frac{n(n-1)}{1.2}(n-3)c_{n-3}x^{n-2} + \ldots + \frac{n(n-1)}{1.2}c_1x^2 + 1 = 0. \end{array}\right.$$

Pour déduire celle-ci de l'équation donnée, il suffira d'y remplacer

$$a_1 \quad \text{par} \quad \frac{(n-2)c_{n-2}}{(n-1)c_{n-1}},$$

$$a_2 \quad \text{par} \quad \frac{(n-3)c_{n-3}}{(n-1)c_{n-1}},$$

$$\ldots \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$a_{n-2} \quad \text{par} \quad \frac{c_1}{(n-1)c_{n-1}},$$

enfin

$$a_{n-1} \quad \text{par} \quad 0$$

et

$$a_n \quad \text{par} \quad \frac{1}{(n-1)c_{n-1}}$$

On pourra donc se contenter de chercher les fonctions de

$$a_1, \quad a_2, \quad \ldots, \quad a_{n-1}, \quad a_n$$

qui déterminent le nombre des racines réelles de l'équation

$$(6)\quad x^n + na_1x^{n-1} + \frac{n(n-1)}{1.2}a_2x^{n-2} + \ldots + \frac{n(n-1)}{1.2}a_{n-2}x^2 + a_n = 0,$$

pourvu qu'ensuite l'on effectue les substitutions que nous venons d'indiquer.

Pour obtenir l'équation (6) il suffit de faire $a_{n-1} = 0$ dans l'équation générale du degré $n$, savoir $f_n(x) = 0$. Par suite, pour obtenir l'équation auxiliaire en $y$ qui doit servir à déterminer le nombre des racines réelles de l'équation (6), il suffit de supposer $a_{n-1} = 0$ dans les deux fonctions ci-dessus désignées par

$$f_n(x), \quad f_{n-1}(x)$$

et d'éliminer $x$ entre les deux équations

$$y\,f_n(x) + f_{n-2}(x) = 0, \qquad f_{n-1}(x) = 0.$$

Désignons à l'ordinaire par $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ les racines de l'équation $f_{n-1}(x) = 0$. Comme on a dans le cas présent

$$f_{n-1}(x) = x^{n-1} + (n-1)a_1 x^{n-2} + \ldots + (n-1)a_{n-2}x,$$

on pourra supposer

$$x_{n-1} = 0$$

et alors $x_1, x_2, \ldots, x_{n-2}$ seront les racines de l'équation

$$x^{n-2} + (n-1)a_1 x^{n-3} + \ldots + (n-1)a_{n-2} = 0. \tag{7}$$

De plus, comme, dans la supposition où $x = 0$, l'équation

$$y\,f_n(x) + f_{n-2}(x) = 0$$

donne

$$y = -\frac{a_{n-2}}{a_n},$$

l'une des racines de l'équation en $y$ sera $-\frac{a_{n-2}}{a_n}$, et puisque, dans la recherche qui nous occupe, cette racine doit être comptée pour $+1$ si elle est positive et pour $-1$ si elle est négative, on pourra la ranger immédiatement parmi les fonctions qui déterminent le nombre des racines réelles de l'équation (6) et se contenter de calculer la différence entre les nombres de racines positives et négatives de l'équation en $y$ qu'on obtient par l'élimination de la variable $x$ entre les deux



suivantes :

$$\left\{\begin{aligned} &y\,f_n(x) + f_{n-2}(x) = 0, \\ &x^{n-2} + (n-1)a_1 x^{n-3} + \ldots + (n-1)a_{n-2} = 0. \end{aligned}\right. \tag{8}$$

Cette nouvelle équation en $y$ pourra être représentée par

$$[y\,f_n(x_1) + f_{n-2}(x_1)][y\,f_n(x_2) + f_{n-2}(x_2)]\ldots[y\,f_n(x_{n-2}) + f_{n-2}(x_{n-2})] = 0. \tag{9}$$

Dans cette dernière équation, les coefficients du premier et du dernier terme peuvent être facilement déterminés à l'aide du théorème II; car ces mêmes coefficients sont respectivement égaux aux deux produits

$$f_n(x_1)\,f_n(x_2)\ldots f_n(x_{n-2})\,f_n(x_{n-1})$$

et

$$f_{n-2}(x_1)\,f_{n-2}(x_2)\ldots f_{n-2}(x_{n-2})\,f_{n-2}(x_{n-1})$$

divisés, le premier par $f_n(x_{n-1}) = a_n$, et le second par $f_{n-2}(x_{n-1}) = a_{n-2}$. On peut encore déterminer par le théorème III le rapport des coefficients des deux derniers termes dans l'équation (9). En effet, ce rapport est égal à

$$\frac{f_n(x_1)}{f_{n-2}(x_1)} + \frac{f_n(x_2)}{f_{n-2}(x_2)} + \ldots + \frac{f_n(x_{n-2})}{f_{n-2}(x_{n-2})}$$

et l'on a de plus, en vertu du théorème III (corollaire IV),

$$\begin{aligned} \frac{f_n(x_1)}{f_{n-2}(x_1)} + \frac{f_n(x_2)}{f_{n-2}(x_2)} + \ldots + \frac{f_n(x_{n-2})}{f_{n-2}(x_{n-2})} &= -(n-1)^2(a_1^2 - a_2) - \frac{f_n(x_{n-1})}{f_{n-2}(x_{n-1})} \\ &= -(n-1)^2(a_1^2 - a_2) - \frac{a_n}{a_{n-2}}. \end{aligned}$$

D'ailleurs, le produit des deux derniers coefficients de l'équation en $y$, pris en signe contraire, est une des fonctions qui déterminent le nombre des racines réelles de la proposée et, comme le produit et le quotient de deux quantités sont toujours affectés du même signe, le rapport des deux derniers coefficients de l'équation en $y$, pris négativement, ou

$$(n-1)^2(a_1^2 - a_2) + \frac{a_n}{a_{n-2}},$$

sera encore une des fonctions cherchées. On connaîtra donc, dans tous les cas possibles, deux des fonctions qui déterminent le nombre des racines réelles de l'équation

$$x^n + na_1x^{n-1} + \frac{n(n-1)}{1.2}a_2x^{n-2} + \ldots + \frac{n(n-1)}{1.2}a_{n-2}x^2 + a_n = 0$$

et ces deux fonctions seront

$$-\frac{a_{n-2}}{a_n}, \quad (n-1)^2(a_1^2 - a_2) + \frac{a_n}{a_{n-2}}.$$

Si, dans ces mêmes fonctions, on remplace

$$\begin{array}{lll} a_1 & \text{par} & \dfrac{(n-2)c_{n-2}}{(n-1)c_{n-1}}, \\[2ex] a_2 & \text{par} & \dfrac{(n-3)c_{n-3}}{(n-1)c_{n-1}}, \\[2ex] a_{n-2} & \text{par} & \dfrac{c_1}{(n-1)c_{n-1}}, \\[2ex] a_n & \text{par} & \dfrac{1}{(n-1)c_{n-1}} \end{array}$$

et qu'après avoir changé les diviseurs en multiplicateurs on néglige les facteurs carrés, on obtiendra les deux suivantes

$$-c_1, \quad c_1\{c_1[(n-2)^2c_{n-2}^2 - (n-1)(n-3)c_{n-1}c_{n-3}] + c_{n-1}^2\}.$$

Ces deux dernières fonctions feront donc toujours partie de celles qui déterminent le nombre des racines réelles de l'équation donnée

$$x^n + na_1x^{n-1} + \frac{n(n-1)}{1.2}a_2x^{n-2} + \ldots + \frac{n(n-1)}{1.2}a_{n-2}x^2 + na_{n-1}x + a_n = 0.$$

De plus, le produit de toutes les fonctions dont il s'agit doit toujours être de même signe que le produit des carrés des différences entre les racines de la proposée. Si l'on désigne, comme nous l'avons déjà fait, par

$$A_n = n^n(n-1)^{n-1}K_n$$



le dernier terme de l'équation aux carrés des différences,

$$(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}A_n$$

sera le produit des carrés des différences entre les racines ; et, si l'on suppose déjà connues, à l'exception d'une seule, les diverses fonctions qui déterminent le nombre des racines réelles, en désignant par P le produit de ces fonctions, on pourra représenter la fonction qui reste inconnue par

$$(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}K_nP.$$

Ainsi, à l'aide des considérations précédentes, on déterminera, pour tous les degrés possibles, trois des fonctions cherchées, sans compter la première de toutes qui est toujours l'unité. L'une de ces trois fonctions, représentée par $-c_1$, est égale à

$$a_1^2 - a_2,$$

c'est-à-dire, à un coefficient numérique près, à la somme des carrés des différences entre les racines de la proposée, ce qui s'accorde avec le corollaire II du problème précédent.

*Premier exemple.* — Si l'on suppose $n = 2$, les deux fonctions

$$1, \quad -c_1$$

suffiront pour déterminer le nombre des racines réelles.

*Deuxième exemple.* — Soit $n = 3$. Il faudra, pour déterminer le nombre des racines réelles, avoir égard, non seulement aux deux fonctions $1$, $-c_1$, mais encore à la fonction

$$c_1\{c_1[(n-2)^2c_{n-2}^2 - (n-1)(n-3)c_{n-1}c_{n-3}] + c_{n-1}^2\}$$

qui, dans le cas présent, se réduit à

$$c_1(c_1^3 + c_2^2).$$

Par suite, on aura, pour déterminer le nombre des racines réelles, les trois fonctions

$$1, \quad -c_1, \quad c_1(c_2^2+c_1^3).$$

Le produit de ces trois fonctions, lorsqu'on néglige le facteur carré $c_1^2$, devient égal à

$$-(c_2^2+c_1^3)=(-1)^{\frac{3.2}{2}}\mathrm{K}_3,$$

ce qui s'accorde avec la théorie précédente.

*Troisième exemple.* — Soit $n=4$. La fonction

$$c_1\{c_1[(n-2)^2c_{n-2}^2-(n-1)(n-3)c_{n-1}c_{n-3}]+c_{n-1}^2\}$$

deviendra

$$c_1[(4c_2^2-3c_1c_3)c_1+c_3^2].$$

De plus, si l'on néglige le facteur carré $c_1^2$, le produit des trois premières fonctions multiplié par

$$(-1)^{\frac{4.3}{2}}\mathrm{K}_4=\mathrm{K}_4$$

sera

$$-[c_1(4c_2^2-3c_1c_3)+c_3^2]\mathrm{K}_4.$$

Par suite, on aura, pour déterminer le nombre des racines réelles, les quatre fonctions

$$1, \quad -c_1, \quad c_1[4c_1c_2^2-c_3(3c_1^2-c_3)], \quad -[4c_1c_2^2-c_3(3c_1^2-c_3)]\mathrm{K}_4.$$

*Quatrième exemple.* — Soit $n=5$. Trois des fonctions cherchées seront immédiatement connues par ce qui précède et ces trois fonctions seront

$$1, \quad -c_1, \quad c_1[c_1(9c_3^2-8c_2c_4)+c_4^2].$$

De plus, le produit des deux dernières fonctions devra être affecté du même signe que le produit des trois premières par le dernier terme de l'équation aux carrés des différences; mais, comme cette condition ne suffit pas pour déterminer entièrement les deux fonctions qui restent inconnues, il faudra nécessairement avoir recours à l'équation auxiliaire qui résulte de l'élimination de $y$ entre les équations (8). Si



dans ces deux dernières équations on fait $n=5$ et que l'on remplace immédiatement

$$a_1 \quad \text{par} \quad \frac{3c_3}{4c_4},$$

$$a_2 \quad \text{par} \quad \frac{2c_2}{4c_4},$$

$$a_3 \quad \text{par} \quad \frac{c_1}{4c_4},$$

$$a_5 \quad \text{par} \quad \frac{1}{4c_4},$$

elles deviendront respectivement

$$(10) \quad \begin{cases} y(4c_4x^5+15c_3x^4+20c_2x^3+10c_1x^2+1) \\ \qquad\qquad +(4c_4x^3+9c_3x^2+6c_2x+c_1)=0, \\ c_4x^3+3c_3x^2+3c_2x+c_1=0. \end{cases}$$

On peut d'ailleurs, à chacun des polynomes en $x$ renfermés dans la première équation, substituer le reste de la division de ce polynome par le premier membre de la deuxième. Si l'on suppose, pour plus de commodité,

$$p=-27c_3^3+3c_4(11c_2c_3-2c_1c_4),$$
$$q=-27c_2c_3^2+3c_4(8c_2^2+c_1c_3),$$
$$r=-9c_1c_3^2+c_4(8c_1c_2-c_4),$$

les deux polynomes dont il s'agit donneront pour restes

$$-\frac{1}{c_4^2}(px^2+qx+r), \quad -3(c_3x^2+2c_2x+c_1);$$

et, comme les multiplicateurs $\frac{1}{c_4^2}$ et 3 sont essentiellement positifs, on pourra, sans nul inconvénient, se dispenser d'en tenir compte. Cela posé, les équations (10) se réduiront à

$$(px^2+qx+r)y+c_3x^2+2c_2x+c_1=0, \qquad c_4x^3+3c_3x^2+3c_2x+c_1=0.$$

Si l'on fait, pour abréger,

$$py+c_3=y_3, \qquad qy+2c_2=y_2, \qquad ry+c_1=y_1,$$

elles deviendront

$$y_3x^2+y_2x+y_1=0, \qquad c_4x^3+3c_3x^2+3c_2x+c_1=0.$$

L'élimination de $x$ entre ces deux dernières conduit à la suivante :

$$\begin{aligned}c_4^2y_1^3+c_4[(3c_2y_1-c_1y_2)(y_2^2-2y_1y_3)-y_1y_2(3c_3y_1-c_1y_3)]\\ +y_3(3c_3y_1-c_1y_3)^2-y_3(3c_3y_2-3c_2y_3)(3c_2y_1-c_1y_2)=0.\end{aligned}$$

Si dans celle-ci on remet pour $y_1$, $y_2$, $y_3$ leurs valeurs respectives, on aura

$$\begin{aligned}3c_3y_2-3c_2y_3&=3c_2c_3-3c_4p'y,\\ 3c_3y_1-\phantom{3}c_1y_3&=2c_1c_3-3c_4q'y,\\ 3c_2y_1-\phantom{3}c_1y_2&=\phantom{2}c_1c_2-3c_4r'y,\end{aligned}$$

$p'$, $q'$, $r'$ étant déterminés par les trois équations

$$\begin{aligned}p'&=9\;c_2^2c_3-3c_1c_3^2-6c_1c_2c_4,\\ q'&=3c_1c_2c_3+\;c_3^2c_4-2\;c_1^2c_4,\\ r'&=\quad c_1^2c_3+\;c_2c_4;\end{aligned}$$

et, par suite, l'équation auxiliaire en $y$ sera

$$\begin{aligned}c_4^2(ry+c_1)^3+c_4\{[(qy+2c_2)^2-2(py+c_3)(ry+c_1)](c_1c_2-3c_4r'y)\\ -(qy+2c_2)(ry+c_1)(2c_1c_3-3c_4q'y)\}\\ +(py+c_3)[(2c_1c_3-3c_4q'y)^2-(c_1c_2-3c_4r'y)(3c_2c_3-3c_4p'y)]=0.\end{aligned}$$

Représentons par

$$\alpha y^3+3\beta y^2+3\gamma y+\delta=0$$

cette même équation, on aura

$$\begin{aligned}\alpha&=\;c_4^2[r^3+3q(q'r-qr')+3p(3q'^2-3p'r'+2rr')],\\ 3\beta&=3c_4^2[c_1(r^2+2pr'+qq')-2c_2(2qr'-q'r)+c_3(3q'^2-3p'r'+2rr')]\\ &\quad+c_4[c_1c_2(q^2-2pr+3pp')-c_1c_3(2qr+12pq')+9c_2c_3pr'],\\ 3\gamma&=3c_4^2[c_1^2r+2c_1c_2q'+2(c_1c_3-2c_2^2)r']\\ &\quad+c_4[2c_1(2c_2^2-c_1c_3)q-2c_1^2c_2p-6c_1c_2c_3r+3c_1c_2c_3p'-12c_1c_3^2q'+9c_2c_3^2r']\\ &\quad+c_1c_2(4c_1c_3-3c_2^2)p,\\ \delta&=c_1[c_1^2c_4^2+c_2c_4(4c_2^2-6c_1c_3)+c_3^2(4c_1c_3-3c_2^2)].\end{aligned}$$



Si maintenant on restitue les valeurs de $p$, $q$, $r$, $p'$, $q'$, $r'$, que l'on restitue à $K_5$ la même valeur que ci-dessus (p. 206) et qu'on fasse pour abréger

$$\begin{aligned}L_5&=c_4^2-8c_1c_2c_4+9c_1c_3^2,\\ M_5&=c_4^4c_1-4c_4^3c_2(7c_1^2+c_3)\\ &\quad+c_4^2(3c_3^4+33c_1^2c_3^2+142c_1c_2^2c_3-54c_1^4c_3+52c_1^3c_2^2-96c_2^4)\\ &\quad-2c_4(129c_1c_2c_3^3-147c_1^3c_2c_3^2-90c_2^3c_3^2+242c_1^2c_2^3c_3-96c_1c_2^5)\\ &\quad+9c_3^2(12c_1c_3^3-9c_2^2c_3^2-20c_1^3c_3^2+35c_1^2c_2^2c_3-15c_1c_2^4),\\ N_5&=c_4^2c_1^2-2c_4c_2(3c_1c_3-2c_2^2)+c_3^2(4c_1c_3-3c_2^2),\end{aligned}$$

on trouvera

$$\alpha=-c_4^4K_5, \qquad \beta=c_4^2M_5, \qquad \gamma=-L_5N_5, \qquad \delta=c_1N_5.$$

D'ailleurs, l'équation en $y$, que nous avons représentée par

$$\alpha y^3+3\beta y^2+3\gamma y+\delta=0,$$

étant du troisième degré, on obtient facilement, par le problème II, les trois fonctions qui déterminent pour cette équation la différence entre les nombres de racines positives et négatives. Les deux premières de ces fonctions sont respectivement égales à

$$-\frac{\gamma}{\alpha}\frac{\delta}{\alpha}, \quad \frac{\gamma}{\alpha}\left(\frac{\delta}{\alpha}-\frac{\beta}{\alpha}\frac{\gamma}{\alpha}\right)$$

et peuvent être évidemment remplacées par les deux suivantes :

$$-\gamma\delta, \quad \alpha\gamma(\alpha\delta-\beta\gamma).$$

De plus, si l'on désigne par $\Delta$ le produit des carrés des différences entre les racines de l'équation en $y$, le produit des trois fonctions cherchées sera de même signe que le suivant :

$$-\frac{\delta}{\alpha}\Delta,$$

d'où il résulte que la troisième fonction peut être représentée par

$$(\alpha\delta-\beta\gamma)\Delta.$$

Enfin, en vertu du théorème IV (corollaire I), on pourra remplacer $\Delta$ par le produit des carrés des différences entre les racines de l'équation

$$c_4 x^3 + 3c_3 x^2 + 3c_2 x + c_1 = 0,$$

ou, si l'on veut, de l'équation réciproque

$$c_4 + 3c_3 x + 3c_2 x^2 + c_1 x^3 = 0.$$

Soit D le produit des carrés des différences entre les racines de cette dernière équation, on aura

$$D = -27\frac{N_5}{c_1^4}.$$

D s'évanouit donc avec $N_5$, ce qu'il était facile de prévoir; car

$$N_5 = 0$$

exprime la condition nécessaire pour que les deux équations

$$c_4 x^3 + 3c_3 x^2 + 3c_2 x + c_1 = 0, \qquad c_3 x^2 + 2c_2 x + c_1 = 0,$$

ou, ce qui revient au même, les deux suivantes

$$c_4 + 3c_3 x + 3c_2 x^2 + c_1 x^3 = 0, \qquad c_3 + 2c_2 x + c_1 x^2 = 0,$$

puissent être en même temps satisfaites; et, comme la seconde de ces dernières équations est la première dérivée de l'autre, la même condition peut encore être exprimée par

$$D = 0.$$

Si dans la valeur de D on fait abstraction du facteur numérique 27 et du diviseur carré $c_1^4$, on trouvera, pour la troisième des fonctions cherchées,

$$-(\alpha\delta - \beta\gamma)N_5.$$

Ainsi, les trois fonctions qui déterminent la différence entre le nombre des racines positives et le nombre des racines négatives de l'équation en $y$ sont respectivement

$$-\gamma\delta, \quad \alpha\gamma(\alpha\delta - \beta\gamma), \quad -(\alpha\delta - \beta\gamma)N_5.$$



Si dans ces trois fonctions on substitue les valeurs de $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ données ci-dessus, on trouvera, en négligeant les facteurs carrés,

$$c_1 L_5, \quad L_5 K_5(M_5 L_5 - c_1 c_4^2 K_5), \quad -(M_5 L_5 - c_1 c_4^2 K_5).$$

Cela posé, les fonctions qui relativement à l'équation générale du cinquième degré doivent déterminer le nombre des racines réelles seront

$$1, \quad -c_1, \quad c_1 L_5, \quad -L_5 K_5(c_1 c_4^2 K_5 - L_5 M_5), \quad c_1 c_4^2 K_5 - L_5 M_5,$$

$K_5$, $L_5$, $M_5$ ayant les valeurs que nous leur avons assignées plus haut.

Le produit de toutes ces fonctions a évidemment le même signe que le produit des carrés des différences entre les racines de l'équation générale du cinquième degré, ce qui confirme l'exactitude de nos calculs.

*Corollaire I.* — Désignons à l'ordinaire par

$$x^n + na_1 x^{n-1} + \frac{n(n-1)}{1.2} a_2 x^{n-2} + \ldots + \frac{n(n-1)}{1.2} a_{n-2} x^2 + na_{n-1} x + a_n = 0$$

l'équation générale du degré $n$. Soit toujours

$$A_n = n^n (n-1)^{n-1} K_n$$

le dernier terme de l'équation aux carrés des différences entre les racines de la proposée. Enfin supposons que l'on donne à

$$c_1, \quad c_2, \quad \ldots, \quad c_{n-1}, \quad c_n$$

les mêmes valeurs que ci-dessus (problème I, corollaire II) et soit

$$L_n = c_{n-1}^2 + c_1[(n-2)^2 c_{n-2}^2 - (n-1)(n-3)c_{n-1}c_{n-3}].$$

Si l'on fait successivement $n = 3$, $n = 4$, $n = 5$, on trouvera

$$L_3 = c_2^2 + c_1^3 = K_3,$$
$$L_4 = c_3^2 + c_1(4c_2^2 - 3c_1 c_3),$$
$$L_5 = c_4^2 + c_1(9c_3^2 - 8c_2 c_4);$$

et, en vertu de la théorie qu'on vient de développer, les fonctions dont les signes détermineront le nombre des racines réelles de la proposée seront respectivement :

Pour l'équation générale du deuxième degré,

$$1, \quad -c_1;$$

pour l'équation générale du troisième degré,

$$1, \quad -c_1, \quad c_1 L_3;$$

pour l'équation générale du quatrième degré,

$$1, \quad -c_1, \quad c_1 L_4, \quad -L_4 K_4;$$

enfin, pour l'équation générale du cinquième degré,

$$1, \quad -c_1, \quad c_1 L_5, \quad -L_5 K_5 (c_1 c_4^2 K_5 - L_5 M_5), \quad c_1 c_4^2 K_5 - L_5 M_5,$$

$M_5$ ayant toujours la valeur que nous lui avons précédemment assignée.

Jusqu'ici, nous avons supposé que l'équation proposée et les équations auxiliaires des divers ordres n'avaient pas de racines égales entre elles ou égales à zéro. S'il en était autrement, parmi les fonctions dont les signes doivent déterminer le nombre et l'espèce des racines réelles, quelques-unes deviendraient nulles et, par suite, ne pourraient plus servir à la détermination dont il s'agit. Il faudrait alors avoir recours à l'une des méthodes exposées dans les paragraphes IV, V et VI de la première section. Pour faire mieux sentir l'esprit de ces méthodes, je vais les appliquer à quelques exemples.

PROBLÈME IV. — *Déterminer le nombre et l'espèce des racines réelles de l'équation binome*

$$x^n + a = 0,$$

*a étant un nombre entier quelconque positif ou négatif.*

*Première solution.* — L'équation proposée étant

$$x^n + a = 0,$$

l'équation dérivée, savoir

$$x^{n-1} = 0,$$



aura toutes ses racines égales entre elles et à zéro. Cela posé, si l'on veut faire usage de la méthode indiquée dans le paragraphe IV (première section), il faudra distinguer deux cas, suivant que $n$ sera pair ou impair.

Supposons d'abord $n$ pair. Comme l'équation dérivée n'a qu'une seule espèce de racines égales, on n'obtiendra qu'une seule équation auxiliaire en $y$ et une seule équation auxiliaire en $z$. Pour former ces équations auxiliaires il suffira, conformément au paragraphe IV (première section), d'éliminer $x$ : 1° entre les deux équations

$$y + XX^{(n)} = 0, \qquad x = 0;$$

2° entre les deux équations

$$z + xXX^{(n)} = 0, \qquad x = 0.$$

On a d'ailleurs, dans le cas présent, $X = x^n + a$, et, $X^{(n)}$ étant une quantité constante et positive, on peut, sans inconvénient, remplacer $X^{(n)}$ par l'unité. Cela posé, les équations auxiliaires cherchées seront respectivement

$$y + a = 0, \qquad z = 0.$$

La première ayant une racine positive lorsque $a$ est négatif et une racine négative dans le cas contraire, l'équation proposée aura deux racines réelles dans le premier cas et n'en aura pas dans le second. De plus, l'équation en $z$ ayant une seule racine réelle égale à zéro et les racines de l'équation dérivée étant en nombre impair, la différence entre les nombres de racines positives et négatives sera nulle dans la proposée et, par suite, si $a$ est négatif, les deux racines réelles de l'équation

$$x^n + a = 0$$

seront de signes contraires.

Supposons maintenant $n$ impair. Toutes les racines de l'équation dérivée étant égales entre elles et en nombre pair, on n'aura plus d'équations auxiliaires à former et, par suite, la proposée n'aura qu'une racine réelle. Pour savoir si cette racine est positive ou négative, il suffira d'examiner si le produit des deux termes de l'équation donnée est négatif ou positif. La racine réelle dont il s'agit sera donc positive si $a$ est négatif et négative dans le cas contraire.

Ces résultats étaient déjà bien connus; mais on voit comme ils se déduisent naturellement de la méthode exposée dans le paragraphe IV (première section). On peut encore les obtenir, ainsi qu'il suit, par la méthode du paragraphe V.

*Seconde solution.* — Si l'on veut appliquer à l'équation

$$x^n + a = 0$$

la méthode exposée dans le paragraphe V (première section), il faudra faire

$$X = f(x) = x^n + a, \qquad X' = f'(x) = n x^{n-1}, \qquad f''(x+h) = n(n-1)(x+h)^{n-2}.$$

On peut, dans la valeur de $f''(x+h)$, négliger le facteur numérique $n(n-1)$ et, par suite, pour obtenir, conformément à la méthode dont il s'agit, les équations auxiliaires en $y$ et $z$, il suffira d'éliminer $x$ : 1° entre les deux équations

$$y + (x^n + a)(x+h)^{n-2} = 0, \qquad x^{n-1} = 0;$$

2° entre les deux équations

$$z + x(x^n + a)(x+h)^{n-2} = 0, \qquad x^{n-1} = 0.$$

Cela posé, les équations auxiliaires cherchées seront respectivement

$$(y + ah^{n-2})^{n-1} = 0, \qquad z^{n-1} = 0;$$

et, comme on ne doit tenir compte que des racines inégales de ces mêmes équations, on pourra les supposer réduites à

$$y + ah^{n-2} = 0, \qquad z = 0.$$

La différence moyenne entre les nombres de racines positives et négatives de l'équation en $y$ se trouve ici déterminée par la valeur



moyenne du produit

$$-ah^{n-2},$$

valeur qu'on obtient en supposant alternativement dans ce produit l'indéterminée $h$ positive et négative et prenant ensuite la moyenne entre les deux résultats. La valeur moyenne dont il s'agit sera donc égale à

$$\frac{-ah^{n-2} + ah^{n-2}}{2},$$

c'est-à-dire nulle si $n$ est un nombre impair; mais, si $n$ est un nombre pair, elle sera positive ou négative, suivant que $a$ sera négatif ou positif. Sous cette condition, le nombre des racines réelles de l'équation

$$x^n + a = 0$$

se trouvera déterminé par les deux fonctions

$$1, \quad -ah^{n-2}.$$

La dernière de ces fonctions devant être remplacée par zéro lorsque $n$ est impair, l'équation donnée aura, dans cette hypothèse, une seule racine réelle. Dans le cas contraire, elle en aura deux si $a$ est négatif, aucune si $a$ est positif.

L'équation auxiliaire en $z$ n'ayant qu'une seule racine réelle égale à zéro et le produit du terme constant de l'équation proposée par le terme unique de l'équation dérivée étant égal à

$$ax^{n-1},$$

la valeur moyenne qu'obtient ce dernier produit, lorsqu'on y donne successivement à $x$ deux valeurs égales et de signes contraires, suffira pour déterminer la différence entre le nombre des racines positives et le nombre des racines négatives de l'équation donnée. Si $n$ est un nombre pair, cette valeur moyenne étant nulle, l'équation donnée aura, dans cette hypothèse, autant de racines positives que de négatives; mais si $n$ est un nombre impair, auquel cas la proposée a toujours une seule racine réelle, cette racine sera positive ou négative suivant que le produit $ax^{n-1}$ sera négatif ou positif, c'est-à-dire suivant que la quantité $a$ sera elle-même négative ou positive.

Il serait facile d'appliquer les méthodes précédentes aux équations trinomes de la forme

$$x^n + ax^{n-1} + b = 0.$$

En effet, une semblable équation a pour première dérivée

$$x^{n-1} + \frac{n-1}{n} ax^{n-2} = 0,$$

et l'on voit au premier abord que celle-ci a toutes ses racines réelles et nulles, à l'exception d'une seule qui est égale à

$$-\frac{n-1}{n} a.$$

Mais nous ne nous arrêterons pas plus longtemps sur cet objet et nous nous contenterons d'ajouter ici quelques développements relatifs à la méthode exposée dans le paragraphe VI de la première section.

Problème V. — *Déterminer le nombre des racines réelles dans les équations générales des cinq premiers degrés.*

*Solution.* — L'équation du premier degré ne présente aucune difficulté puisqu'elle a toujours une seule racine réelle. De plus, nous avons donné ci-dessus (problème III, corollaire I) les fonctions dont les signes déterminent ordinairement le nombre des racines réelles dans les équations générales des deuxième, troisième, quatrième et cinquième degrés; mais lorsque ces fonctions, ou du moins quelques-unes d'entre elles, viennent à s'évanouir, on ne sait plus si elles doivent être considérées comme positives ou comme négatives. Il nous reste maintenant à faire voir comment la méthode du paragraphe VI (première section) peut servir à lever cette difficulté. Je supposerai, comme dans le paragraphe dont il s'agit, que l'équation donnée n'a pas de racines égales. Si le contraire avait lieu il serait facile de l'en débarrasser par les méthodes connues.



Cela posé, désignons toujours par

$$x^n + na_1x^{n-1} + \frac{n(n-1)}{1.2} a_2x^{n-2} + \ldots + \frac{n(n-1)}{1.2} a_{n-2}x^2 + na_{n-1}x + a_n = 0$$

l'équation donnée, $n$ pouvant être un quelconque des nombres 2, 3, 4 ou 5. Faisons de plus, à l'ordinaire,

$$\begin{aligned}
c_1 &= a_2 - a_1^2,\\
2c_2 &= a_3 - 3a_1a_2 + 2a_1^3,\\
3c_3 &= a_4 - 4a_1a_3 + 6a_1^2a_2 - 3a_1^4,\\
4c_4 &= a_5 - 5a_1a_4 + 10a_1^2a_3 - 10a_1^3a_2 + 4a_1^5.
\end{aligned}$$

Comme par hypothèse l'équation donnée n'a pas de racines égales, le dernier terme de l'équation aux carrés des différences, représenté par

$$A_n = n^n(n-1)^{n-1}K_n,$$

aura nécessairement une valeur positive ou négative différente de zéro. Supposons maintenant que parmi les fonctions trouvées ci-dessus (problème III) quelques-unes s'évanouissent; alors, pour suivre la méthode du paragraphe VI (première section), il suffira d'attribuer à chacune des quantités

$$a_2, \quad a_3, \quad a_4, \quad a_5$$

ou, ce qui revient au même, à chacune des quantités suivantes

$$c_1, \quad c_2, \quad c_3, \quad c_4,$$

un accroissement très petit mais arbitraire, positif ou négatif, et d'établir entre les accroissements de ces mêmes quantités un ordre de grandeur déterminé, en sorte qu'on puisse toujours négliger les uns par rapport aux autres. Désignons par $h_1$, $h_2$, $h_3$, $h_4$ les accroissements de $c_1$, $c_2$, $c_3$, $c_4$. Si l'on fait varier ces quantités de leurs accroissements respectifs dans les fonctions qui se trouvaient réduites à zéro, ces fonctions cesseront de s'évanouir et leurs signes détermineront, à l'ordinaire, le nombre des racines réelles de la proposée. Il suffira même, dans beaucoup de cas, de faire varier seulement une ou deux des quantités que l'on considère. Appliquons ces principes aux équations générales du deuxième, du troisième, du quatrième et du cinquième degré.

*Premier exemple.* — Considérons l'équation générale du deuxième degré

$$x^2 + 2a_1x + a_2 = 0.$$

Les fonctions dont les signes déterminent ordinairement le nombre de ses racines réelles sont, comme on l'a déjà fait voir,

$$1, \quad -c_1.$$

Ici la fonction $c_1$ est la seule qui puisse devenir nulle; mais cette fonction, même étant égale à $K_2$, ne s'évanouira jamais tant que les racines de la proposée seront inégales entre elles, ainsi que nous l'avons admis ci-dessus.

*Deuxième exemple.* — Considérons l'équation générale du troisième degré

$$x^3 + 3a_1x^2 + 3a_2x + a_3 = 0.$$

Le nombre de ses racines réelles est ordinairement déterminé par les signes des trois fonctions

$$1, \quad -c_1, \quad c_1L_3.$$

Comme la fonction $K_3$ n'est pas nulle par hypothèse, il en sera de même de la fonction $L_3$ qui lui est égale; mais il peut arriver que $c_1$ s'évanouisse. Dans ce cas, on devra remplacer $c_1$ par $h_1$; d'ailleurs, puisque l'on peut supposer à volonté $h_1$ positif ou négatif et que ces deux hypothèses doivent conduire au même résultat, il sera nécessaire que les deux fonctions

$$-h_1, \quad h_1L_3$$

soient de signes contraires; car s'il en était autrement, si par exemple ces deux fonctions étaient positives dans le cas où l'on suppose $h_1$ négatif, elles deviendraient toutes deux négatives lorsque $h_1$ serait positif;



et, par suite, on arriverait à des conclusions différentes, suivant que l'on admettrait l'une ou l'autre des deux hypothèses dont il s'agit. Il suit encore de la remarque précédente que, dans le cas où $c_1$ devient nul, la quantité $L_3$ doit être positive; c'est ce dont il est facile de s'assurer directement, car $L_3$ se réduit alors à $c_2^2$. Dans le même cas, les deux fonctions

$$-h_1, \quad h_1L_3$$

étant de signes contraires, on peut en faire abstraction et il en résulte que le nombre des racines réelles de la proposée est simplement égal à l'unité.

En général, lorsque $c_1$ est positif ou nul, $L_3$ est positif et les deux fonctions

$$-c_1, \quad c_1L_3$$

doivent être considérées comme affectées de signes contraires. On peut donc alors les remplacer par les deux suivantes

$$1, \quad -L_3.$$

D'ailleurs, lorsque $c_1$ est négatif, on peut remplacer encore

$$-c_1 \quad \text{par} \quad 1$$

et

$$c_1L_3 \quad \text{par} \quad -L_3 = -K_3.$$

On pourra donc, dans tous les cas possibles, substituer aux trois fonctions données les suivantes

$$1, \quad 1, \quad -K_3.$$

Ainsi l'équation proposée aura trois racines réelles si le dernier terme de l'équation aux carrés des différences est négatif; elle n'en aura qu'une si ce terme est positif.

*Troisième exemple.* — Considérons l'équation du quatrième degré

$$x^4 + 4a_1x^3 + 6a_2x^2 + 4a_3x + a_4 = 0.$$

Le nombre de ses racines réelles est ordinairement déterminé par les signes des quatre fonctions

$$1, \quad -c_1, \quad c_1 L_4, \quad -L_4 K_4.$$

La quantité $K_4$ n'est pas nulle par hypothèse; mais les quantités $c_1$ et $L_4$ peuvent être ensemble ou séparément égales à zéro.

Supposons d'abord que $c_1$ seule s'évanouisse; $L_4$ se réduisant alors à $c_3^2$ sera nécessairement positif et, d'ailleurs, en raisonnant comme dans le deuxième exemple, on fera voir que les fonctions

$$-c_1, \quad c_1 L_4$$

doivent être considérées comme affectées de signes contraires. On pourra donc en faire abstraction et, dans ce cas, le nombre des racines réelles sera uniquement déterminé par les signes des deux fonctions

$$1, \quad -L_4 K_4$$

ou, ce qui revient au même, des deux suivantes

$$1, \quad -K_4.$$

Supposons, en second lieu, que $L_4$ seule s'évanouisse. Si l'on fait varier $c_2$ de $h_2$, la variation de $L_4$ sera

$$8 c_1 c_2 h_2.$$

On pourra donc, en négligeant les facteurs numériques et les facteurs carrés, substituer aux deux fonctions

$$c_1 L_4, \quad -L_4 K_4$$

les deux suivantes

$$c_2 h_2, \quad -c_1 c_2 K_4 h_2;$$

et, comme le signe de $h_2$ est tout à fait arbitraire, ces deux fonctions devront être de signes contraires, à moins toutefois que $c_2$ ne soit nul. Si ce dernier cas avait lieu, elles se réduiraient à zéro; mais alors, en faisant varier $c_1$ de $h_1$, on trouverait, pour la variation de $L_4$,

$$-6 c_1 c_3 h_1$$



et l'on ferait voir encore que les fonctions

$$c_1 L_4, \quad -L_4 K_4$$

doivent être considérées comme affectées de signes contraires, à moins que $c_3$ ne soit nul. D'ailleurs, comme on ne peut supposer en même temps

$$c_2 = 0, \qquad c_3 = 0$$

sans avoir aussi

$$K_4 = 0,$$

on voit que, en excluant cette dernière hypothèse, on pourra toujours faire abstraction des deux fonctions

$$c_1 L_4, \quad -L_4 K_4$$

dans le cas où $L_4$ s'évanouirait.

Il est facile d'arriver directement à la même conclusion en prouvant que, dans le cas où l'on suppose

$$L_4 = 0,$$

les deux quantités $c_1$, $K_4$ sont nécessairement de même signe; et, en effet, on a, dans cette hypothèse,

$$K_4 = \left[\frac{2 c_2 (c_1^2 + c_3)}{c_1}\right]^2 c_1.$$

Ainsi, dans le cas que l'on considère, les fonctions qui doivent déterminer le nombre des racines réelles se réduisent à

$$1, \quad -c_1$$

ou, ce qui revient au même, à

$$1, \quad -K_4.$$

Supposons enfin que l'on ait en même temps

$$c_1 = 0, \qquad L_4 = 0;$$

il sera facile de faire varier à la fois $c_1$, $c_2$ et $c_3$ de manière que, l'une des quantités $c_1$, $L_4$ restant nulle, l'autre cesse de s'évanouir. On rentrera par ce moyen dans l'une des deux hypothèses précédentes. Ainsi, par exemple, si l'on augmente $c_3$ de $h_3$ sans faire varier $c_1$, $L_4$ obtiendra une valeur différente de zéro et l'on rentrera dans le premier des deux cas que nous avons considérés ci-dessus. Il suit de cette remarque que, dans la dernière hypothèse comme dans les deux autres, le nombre des racines réelles sera déterminé par les signes des deux fonctions

$$1, \quad -K_4.$$

De plus, comme en supposant $c_1 = 0$, $L_4 = 0$, on a

$$c_3 = 0 \quad \text{et} \quad K_4 = -(4c_2^2)^2,$$

la fonction $-K_4$ sera positive et, par conséquent, la proposée aura deux racines réelles.

*Quatrième exemple.* — Considérons l'équation générale du cinquième degré

$$x^5 + 5a_1x^4 + 10a_2x^3 + 10a_3x^2 + 5a_4x + a_5 = 0.$$

Les fonctions dont les signes déterminent ordinairement le nombre de ses racines réelles sont, comme on l'a fait voir,

$$1, \quad -c_1, \quad c_1L_5, \quad -L_5K_5(c_1c_4^2K_5 - L_5M_5), \quad c_1c_4^2K_5 - L_5M_5.$$

Comme on suppose les racines de l'équation donnée inégales entre elles, $K_5$ a nécessairement une valeur différente de zéro; mais les trois quantités

$$c_1, \quad L_5, \quad c_1c_4^2K_5 - L_5M_5$$

peuvent s'évanouir ensemble ou séparément et, par suite, les fonctions données peuvent devenir nulles dans quatre hypothèses différentes que nous allons examiner successivement.

1° Supposons que, des trois quantités que l'on considère, la première seule ou $c_1$ s'évanouisse. On fera voir, comme dans le deuxième exemple, qu'on peut ne tenir aucun compte des deux fonctions

$$-c_1, \quad c_1L_5.$$



De plus, $L_5$ étant alors nécessairement positive, on pourra, dans les fonctions où cette quantité entre comme facteur, la remplacer par l'unité et, par conséquent, il suffira, pour déterminer le nombre des racines réelles de la proposée, d'avoir égard aux signes des trois fonctions

$$1, \quad K_5M_5, \quad -M_5.$$

Les deux dernières seront de signes contraires si $K_5$ est positif : la proposée n'aura donc alors qu'une racine réelle; mais si $K_5$ est négatif, les deux fonctions dont il s'agit seront de même signe et, comme le nombre des fonctions négatives ne peut évidemment surpasser le nombre des positives, les deux fonctions que l'on considère seront nécessairement positives, d'où il suit que l'équation donnée aura trois racines réelles. On conclut aisément de ces remarques que, dans le cas où $c_1 = 0$, le nombre des racines réelles peut toujours être déterminé par les signes des trois fonctions

$$1, \quad 1, \quad -K_5.$$

2° Supposons que des trois quantités

$$c_1, \quad L_5, \quad c_1c_4^2K_5 - L_5M_5$$

la deuxième seule ou $L_5$ s'évanouisse. On ne pourra supposer dans $L_5$

$$9c_3^2 - 8c_2c_4 = 0;$$

car on aurait alors nécessairement

$$c_4 = 0, \quad c_3 = 0, \quad K_5 = 0.$$

Cela posé, en faisant varier $c_1$ de $h_1$ dans la valeur générale de $L_5$, on prouvera facilement qu'on peut ne tenir aucun compte des deux fonctions

$$c_1L_5, \quad -L_5K_5(c_1c_4^2K_5 - L_5M_5)$$

et que les deux quantités

$$c_1, \quad K_5(c_1c_4^2K_5 - L_5M_5),$$

ou bien encore les deux suivantes

$$c_1 c_4^2 K_5 - L_5 M_5, \quad c_1 K_5,$$

sont nécessairement affectées de même signe. Par suite, pour déterminer le nombre des racines réelles de la proposée, il suffira d'avoir égard aux signes des trois fonctions

$$1, \quad -c_1, \quad c_1 K_5$$

ou, ce qui revient au même, des trois suivantes

$$1, \quad 1, \quad -K_5.$$

L'équation donnée aura donc une seule racine réelle si $K_5$ est positif; elle en aura trois dans le cas contraire.

3° Supposons que, chacune des quantités $c_1$, $L_5$ ayant une valeur différente de zéro, la quantité

$$c_1 c_4^2 K_5 - L_5 M_5$$

soit nulle. Dans ce cas, les coefficients de l'équation auxiliaire en $y$ que nous avons considérée ci-dessus (problème III, quatrième exemple) et que nous avons représentée par

$$\alpha y^3 + 3\beta y^2 + 3\gamma y + \delta = 0$$

satisferont à la condition suivante

$$\alpha\delta - \beta\gamma = 0.$$

Alors, des trois fonctions qui déterminent la différence entre le nombre des racines positives et le nombre des racines négatives de cette équation, deux se réduiront à zéro. Mais, en faisant varier les coefficients $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$ de quantités très petites et de signe arbitraire, on prouvera facilement qu'on peut faire abstraction des deux fonctions dont il s'agit et déterminer uniquement la différence cherchée par le signe de la fonction

$$-\gamma\delta.$$



On doit toutefois excepter le cas où l'équation en $y$ aurait des racines égales et ceux où quelqu'un des coefficients $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$ deviendrait nul. Dans tout autre cas, le produit $\alpha\gamma$ et la quantité désignée par $\Delta$ seront nécessairement de signes contraires et, par suite, les quantités $K_5$, $L_5$ seront de même signe. De plus, comme on peut, en négligeant les facteurs carrés, remplacer la fonction

$$-\gamma\delta$$

par la suivante

$$c_1 L_5,$$

on pourra encore, en vertu de la remarque précédente, lui substituer celle-ci

$$c_1 K_5;$$

et l'on aura enfin, pour déterminer le nombre des racines réelles de l'équation du cinquième degré proposée, les trois fonctions suivantes

$$1, \quad -c_1, \quad c_1 K_5$$

que l'on peut aussi remplacer par ces trois dernières

$$1, \quad 1, \quad -K_5.$$

Il reste à savoir ce qui arriverait si, dans l'hypothèse précédente, quelqu'une des quantités $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$ se réduisait à zéro ou si l'équation auxiliaire en $y$ avait des racines égales.

Il suit évidemment de l'équation

$$\alpha\delta - \beta\gamma = 0$$

qu'une des quatre quantités $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$ ne peut devenir nulle sans qu'une des quantités $\alpha$, $\delta$ le soit aussi; d'ailleurs, $c_1$ et $K_5$ n'étant pas nulles par hypothèse, on ne peut avoir

$$\alpha = 0 \quad \text{ou} \quad \delta = 0$$

sans avoir aussi

$$c_1 = 0 \quad \text{ou} \quad N_5 = 0,$$

c'est-à-dire sans que l'équation auxiliaire en $y$ acquière deux racines égales nulles ou infinies. Il suffira donc d'examiner le cas où, l'équation en $y$ ayant des racines égales entre elles, $c_1 c_4^2 K_5 - L_5 M_5$, et par suite $\alpha\delta - \beta\gamma$, s'évanouit.

Il est donc aisé de voir que, pour satisfaire aux deux conditions précédentes, on est obligé de supposer à la fois

$$\alpha = 0, \qquad c_1 c_4^2 K_5 - L_5 M_5 = 0,$$

ou bien

$$\delta = 0, \qquad c_1 c_4^2 K_5 - L_5 M_5 = 0,$$

ou bien encore

$$\beta^2 - \alpha\gamma = 0, \qquad c_1 c_4^2 K_5 - L_5 M_5 = 0.$$

Supposons d'abord

$$\alpha = 0, \qquad c_1 c_4^2 K_5 - L_5 M_5 = 0.$$

$K_5$ et $L_5$ n'étant pas nuls par hypothèse, on aura nécessairement

$$c_4 = 0, \qquad M_5 = 0.$$

De plus, lorsque $c_4$ s'évanouit, on a

$$M_5 = 9c_3^2(4c_1c_3 - 3c_2^2)(3c_3^2 - 5c_1^2 c_3 + 5c_1 c_2^2) = 9N_5(3c_3^2 - 5c_1^2 c_3 + 5c_1 c_2^2);$$

et, puisqu'on ne peut supposer à la fois

$$c_4 = 0, \qquad c_3 = 0,$$

si $4c_1c_3 - 3c_2^2$ n'est pas nul, l'équation $M_5 = 0$ se trouvera réduite à

$$3c_3^2 - 5c_1^2 c_3 + 5c_1 c_2^2 = 0.$$

Dans le même cas, si l'on fait varier $c_1$ de $h_1$, $c_2$ de $h_2$, $c_3$ de $h_3$, la variation de $M_5$ sera en général

$$9[5(c_2^2 - 2c_1c_3)h_1 + 10c_1c_2h_2 + (6c_3 - 5c_1^2)h_3]N_5;$$

et, comme on ne peut avoir en même temps

$$c_2^2 - 2c_1c_3 = 0, \qquad c_1c_2 = 0, \qquad 6c_3 - 5c_1^2 = 0$$

sans avoir aussi

$$K_5 = c^4 = 0,$$



on pourra toujours, en négligeant deux des accroissements $h_1$, $h_2$, $h_3$ vis-à-vis du troisième, réduire la variation dont il s'agit à l'une des trois suivantes

$$45(c_2^2 - 2c_1c_3)N_5h_1, \quad 90c_1c_2N_5h_2, \quad 9(6c_3 - 5c_1^2)N_5h_3.$$

Cela posé, la variation

$$c_1 c_4^2 K_5 - L_5 M_5$$

sera proportionnelle à l'un des accroissements $h_1$, $h_2$, $h_3$. Le signe de chacun d'eux étant tout à fait arbitraire, il en résulte que les deux fonctions

$$-L_5K_5(c_1 c_4^2 K_5 - L_5 M_5), \quad c_1 c_4^2 K_5 - L_5 M_5$$

devront être considérées comme affectées de signes contraires et que les deux quantités $L_5$, $K_5$ seront nécessairement de même signe. Il est aisé d'en conclure que le nombre des racines réelles de la proposée sera encore déterminé par les signes des trois fonctions

$$1, \quad 1, \quad -K_5.$$

Si, pour satisfaire l'équation $M_5 = 0$, on supposait $N_5 = 0$, la seconde des équations (10), savoir

$$c_4x^3 + 3c_3x^2 + 3c_2x + c_1 = 0,$$

ayant alors des racines égales, la proposée aurait nécessairement des racines imaginaires. On pourrait donc assurer qu'elle a trois racines réelles si $K_5$ est négatif, une seule si $K_5$ est positif; ce qui revient à déterminer le nombre des racines réelles par les signes des trois fonctions

$$1, \quad 1, \quad -K_5.$$

Supposons maintenant

$$\delta = 0, \qquad c_1 c_4^2 K_5 - L_5 M_5 = 0.$$

$c_1$ n'étant pas nul par hypothèse, l'équation $\delta = 0$ entraînera la suivante

$$N_5 = 0;$$

et, par suite, il suffira toujours, pour déterminer le nombre des racines réelles, d'avoir égard aux signes des trois fonctions

$$1, \quad 1, \quad -K_5.$$

Supposons enfin

$$\beta^2-\alpha\gamma=0, \qquad c_1c_4^2K_5-L_5M_5=0.$$

La dernière de ces deux équations pouvant être mise sous la forme

$$\alpha\delta-\beta\gamma=0,$$

on aura en même temps

$$\gamma=\frac{\beta^2}{\alpha}, \qquad \delta=\frac{\beta^3}{\alpha^2}.$$

Cela posé, l'équation auxiliaire en $y$ deviendra

$$(\alpha y+\beta)^3=0$$

ou, ce qui revient au même,

$$(c_4^2K_5y-M_5)^3=0.$$

Cette dernière équation aura ses trois racines réelles égales et positives si $M_5$ n'étant pas nul $K_5$ et $M_5$ sont de même signe et, dans ce cas seulement, la proposée pourra avoir toutes ses racines réelles. Pour qu'elles le soient en effet, il sera de plus nécessaire que $c_1$ soit négatif et que la seconde des équations (10) ait ses trois racines réelles et inégales, ce qui entraine la condition

$$N_5<0.$$

Ainsi, toutes les racines de la proposée seront réelles si l'on a en même temps

$$c_1<0, \qquad \alpha\delta-\beta\gamma=0, \qquad \beta^2-\alpha\gamma=0, \qquad K_5M_5>0, \qquad N_5<0$$

ou, ce qui revient au même, si l'on a

$$c_1<0, \qquad c_1c_4^2K_5-L_5M_5=0, \qquad K_5L_5N_5-M_5^2=0, \qquad K_5M_5>0, \qquad N_5<0.$$

Dans cette hypothèse, $K_5$ et $M_5$ étant de même signe, il faudra, pour



que l'équation $c_1c_4^2K_5-L_5M_5=0$ puisse avoir lieu, que $L_5$ soit négatif. De plus, comme $N_5$ est aussi négatif, l'équation $K_5L_5N_5-M_5^2=0$ entrainera la condition $K_5>0$ et, par suite, on aura encore $M_5>0$. Si les conditions précédentes ne sont pas satisfaites et que la quantité

$$c_1c_4^2K_5-L_5M_5$$

vienne à s'évanouir, le nombre des racines réelles de l'équation donnée, ne pouvant être égal à 5, sera nécessairement déterminé par les signes des trois fonctions

$$1, \quad 1, \quad -K_5.$$

4° Jusqu'ici nous avons supposé que des trois quantités

$$c_1, \quad L_5, \quad c_1c_4^2K_5-L_5M_5$$

une seule devenait nulle. Mais il peut arriver que deux de ces quantités ou toutes trois à la fois se réduisent à zéro. Au reste, il est facile de prouver que, dans cette hypothèse, on aura nécessairement

$$c_1=0.$$

Car, si $c_1$ n'étant pas nul les deux quantités $L_5$, $c_1c_4^2K_5-L_5M_5$ venaient à s'évanouir, on aurait en même temps les deux équations

$$c_4^2K_5=0, \qquad L_5=0,$$

auxquelles il est impossible de satisfaire tant que l'on attribue à $K_5$ une valeur différente de zéro. D'ailleurs, en faisant varier $c_2$, $c_3$ et $c_4$ de quantités très petites mais arbitraires, on ramène facilement l'hypothèse précédente à celle où, des trois quantités

$$c_1, \quad L_5, \quad c_1c_4^2K_5-L_5M_5,$$

la première toute seule s'évanouit. On peut donc assurer que, dans cette même hypothèse, le nombre des racines réelles est uniquement déterminé par les signes des trois fonctions

$$1, \quad 1, \quad -K_5.$$

*Corollaire I.* — En résumant tout ce qui a été dit ci-dessus, on arrive aux conclusions suivantes :

Lorsqu'une équation du deuxième ou du troisième degré a toutes ses racines inégales entre elles, le nombre des racines réelles se trouve déterminé, si l'équation est du deuxième degré, par les signes des deux fonctions

$$1, \quad -K_2,$$

et, si l'équation est du troisième degré, par les signes des trois fonctions

$$1, \quad 1, \quad -K_3.$$

Lorsqu'une équation du quatrième ou du cinquième degré a toutes ses racines inégales entre elles, le nombre des racines réelles de cette même équation est déterminé par les fonctions données ci-dessus (problème III, corollaire I), pourvu toutefois qu'aucune de ces fonctions ne s'évanouisse; mais si quelques-unes d'entre elles se réduisent à zéro, alors les fonctions, dont les signes déterminent le nombre des racines réelles, sont, pour l'équation générale du quatrième degré,

$$1, \quad -K_4,$$

et, pour l'équation générale du cinquième degré,

$$1, \quad 1, \quad -K_5.$$

On doit seulement excepter, relativement à l'équation générale du cinquième degré, le cas où la quantité $c_1 c_4^2 K_5 - L_5 M_5$ étant nulle on aurait de plus

$$c_1 < 0, \qquad N_5 < 0, \qquad K_5 M_5 > 0, \qquad K_5 L_5 N_5 - M_5^2 = 0,$$

auquel cas les cinq racines seraient toutes réelles.

*Corollaire II.* — On peut facilement comparer, jusqu'au quatrième degré, les résultats que nous venons d'obtenir avec les conditions à l'aide desquelles on fixe ordinairement le nombre des racines réelles; et, d'abord, il suit de la théorie précédente que, dans les équations du



deuxième et du troisième degré, le nombre de ces racines est toujours déterminé par le signe du dernier terme de l'équation aux carrés des différences, ce que l'on savait déjà.

Je passe à l'équation du quatrième degré. La méthode par laquelle on détermine ordinairement le nombre de ses racines réelles se réduit à ce qui suit. On commence par examiner si le dernier terme de l'équation aux carrés des différences est positif ou négatif. Lorsqu'il est négatif, on en conclut que la proposée a deux racines imaginaires. Lorsqu'il est positif, toutes les racines sont à la fois réelles ou imaginaires; elles sont réelles si l'on a en même temps

$$c_1 < 0, \qquad c_2 - 3c_1^2 < 0;$$

elles sont imaginaires si l'une ou l'autre des deux conditions précédentes vient à manquer.

On peut arriver aux mêmes conclusions par la considération des quatre fonctions trouvées ci-dessus, savoir

$$1, \quad -c_1, \quad c_1 L_4, \quad -L_4 K_4;$$

et, d'abord, si $K_4$ est négatif, le produit de ces quatre fonctions étant aussi négatif, les fonctions négatives seront en nombre impair. D'ailleurs, le nombre de ces dernières ne pouvant surpasser le nombre de celles qui seront positives, on aura nécessairement, dans l'hypothèse dont il s'agit, une fonction négative, trois positives, et, par suite, deux racines réelles. Ce résultat subsiste dans le cas même où quelques-unes des fonctions données s'évanouissent; car les deux fonctions

$$1, \quad -K_4,$$

qui déterminent alors le nombre des racines réelles, étant toutes deux positives, indiquent deux racines de cette espèce dans l'équation proposée.

Supposons maintenant $K_4$ positif. Les quatre fonctions données seront positives si les quantités $c_1$, $L_4$ sont toutes deux négatives; et, dans ce cas, la proposée aura ses quatre racines réelles. Mais si l'une des quantités $c_1$, $L_4$ est positive ou si ces quantités le sont toutes deux en même temps, le nombre des fonctions positives sera égal à celui des négatives; et, par suite, l'équation donnée n'aura pas de racines réelles. Il en serait encore de même si quelques-unes des fonctions que l'on considère venaient à s'évanouir; car il faudrait alors, pour fixer le nombre des racines réelles, avoir recours aux deux fonctions

$$1, \quad -K_4$$

qui, pour une valeur positive de $K_4$, sont évidemment de signes contraires. Les conditions nécessaires, mais suffisantes, pour que les racines soient toutes réelles sont donc les trois suivantes

$$K_4 > 0, \qquad c_1 < 0, \qquad L_4 < 0.$$

Il nous reste à faire voir qu'elles sont équivalentes à celles que fournissent les méthodes connues, savoir

$$K_4 > 0, \qquad c_1 < 0, \qquad c_3 - 3c_1^2 < 0.$$

On peut aisément démontrer cette assertion ainsi qu'il suit.

Il est d'abord facile de prouver que, si l'on a en même temps

$$K_4 > 0, \qquad c_1 < 0, \qquad L_4 < 0,$$

on aura aussi

$$c_3 - 3c_1^2 < 0;$$

et, en effet, la condition $K_4 > 0$ entraine la suivante

$$(c_1^2 + c_3)^3 > (4c_2^2 - 3c_1c_3 + c_1^3)^2,$$

qu'on peut aussi mettre sous la forme

$$(c_1^2 + c_3)^3 > \frac{1}{c_1^2}(c_3^2 - c_1^4 - L_4)^2.$$

Cela posé, si $c_3$ est négatif ou si $c_3$ étant positif reste inférieur à $c_1^2$, $c_3 - 3c_1^2$ sera évidemment négatif. Mais si $c_3$ est positif et supérieur à $c_1^2$, alors, les deux quantités $c_3^2 - c_1^4$ et $L_4$ étant positives, on aura

$$c_3^2 - c_1^4 - L_4 > c_3^2 - c_1^4.$$



Or on a déjà trouvé

$$(c_1^2 + c_3)^3 > \frac{1}{c_1^2}(c_3^2 - c_1^4 - L_4)^2.$$

On aura donc par suite

$$(c_1^2 + c_3)^3 > \frac{1}{c_1^2}(c_3^2 - c_1^4)^2.$$

Si l'on multiplie les deux membres de cette dernière inégalité par

$$\left(\frac{c_1}{c_1^2 + c_3}\right)^2,$$

on trouvera qu'elle se réduit à

$$c_1^2(c_1^2 + c_3) > (c_3 - c_1^2)^2,$$

ou bien encore à

$$c_3(c_3 - 3c_1^2) < 0;$$

et comme, par hypothèse, $c_3$ est positif, il faudra nécessairement que $c_3 - 3c_1^2$ soit négatif; ainsi, dans tous les cas possibles, les trois conditions

$$K_4 > 0, \qquad c_1 < 0, \qquad L_4 < 0$$

entrainent la suivante

$$c_3 - 3c_1^2 < 0.$$

Réciproquement, si l'on a en même temps

$$K_4 > 0, \qquad c_1 < 0, \qquad c_3 - 3c_1^2 < 0,$$

on devra aussi avoir nécessairement

$$L_4 < 0;$$

et, en effet, les deux quantités $c_1$ et $c_3 - 3c_1^2$ étant négatives par hypothèse, si $c_3$ est positif la valeur de $L_4$ donnée par l'équation

$$L_4 = 4c_2^2c_1 + c_3(c_3 - 3c_1^2)$$

sera évidemment négative. De plus, $K_4$ ne pouvant être positif à moins que l'on n'ait

$$c_1^2 + c_3 > 0, \qquad (c_1^2 + c_3)^3 > \frac{1}{c_1^2}(c_3^2 - c_1^4 - L_4)^2;$$

si l'on suppose $c_3$ négatif on aura

$$c_1^2(c_1^2 + c_3)^2 > (c_1^2 + c_3)^3 > \frac{1}{c_1^2}(c_3^2 - c_1^4 - L_4)^2.$$

Mais, $c_3$ étant négatif, on a aussi

$$c_1^2(c_1^2 + c_3)^2 < \frac{1}{c_1^2}(c_3^2 - c_1^4)^2.$$

On aura donc, par suite,

$$(c_3^2 - c_1^4)^2 > (c_3^2 - c_1^4 - L_4)^2.$$

Pour satisfaire à cette dernière inégalité on est obligé de supposer que

$$c_3^2 - c_1^4 \quad \text{et} \quad L_4$$

sont de même signe; d'ailleurs $c_3^2 - c_1^4$, étant le produit des deux facteurs

$$c_3 + c_1^2, \quad c_3 - c_1^2$$

dont le premier est positif et le second négatif, a nécessairement une valeur négative. Il en sera donc de même de $L_4$. On ne pourra donc avoir en même temps

$$K_4 > 0, \qquad c_1 < 0, \qquad c_3 - 3c_1^2 < 0$$

sans avoir aussi

$$L_4 < 0,$$

ce qui achève de prouver l'identité des conditions que fournissent, relativement à l'équation générale du quatrième degré, les méthodes connues et celle que nous avons précédemment exposée.

Quant à l'équation générale du cinquième degré, les conditions que nous avons trouvées pour déterminer le nombre de ses racines réelles, lorsque ces racines sont inégales, se réduisent à ce qui suit :

Les cinq racines seront réelles si les quatre quantités

$$-c_1, \quad -L_5, \quad K_5, \quad c_1 c_4^2 K_5 - L_5 M_5$$



sont toutes positives ou si, la dernière de ces quantités étant nulle, on a

$$c_1 < 0, \qquad N_5 < 0, \qquad K_5 M_5 > 0, \qquad K_5 L_5 N_5 - M_5^2 = 0.$$

Dans toute autre hypothèse, la proposée aura une seule racine réelle ou bien elle en aura trois, suivant que la condition $K_5 > 0$ sera ou ne sera pas satisfaite. Les conditions qu'on vient d'énoncer peuvent remplacer celles que fournit l'équation aux carrés des différences et leur sont nécessairement équivalentes; mais il serait peut-être difficile de les en déduire directement.

SUR

# LES RACINES IMAGINAIRES DES ÉQUATIONS.

*Journal de l'École Polytechnique*, XVIII$^e$ Cahier, Tome XI, p. 411; 1820.

Qu'il soit toujours possible de décomposer un polynome en facteurs réels du premier et du deuxième degré ou, en d'autres termes, que toute équation dont le premier membre est une fonction rationnelle et entière de la variable $x$ puisse toujours être vérifiée par des valeurs réelles ou imaginaires de cette variable : c'est une proposition que l'on a déjà prouvée de plusieurs manières. MM. Lagrange, Laplace et Gauss ont employé diverses méthodes pour l'établir et j'en ai moi-même donné une démonstration fondée sur des considérations analogues à celles dont M. Gauss a fait usage. Mais, dans chacune des méthodes que je viens de citer, on fait une attention spéciale au degré de l'équation donnée, et quelquefois même on remonte de cette dernière à d'autres équations d'un degré supérieur. Ces considérations paraissent étrangères à la question et M. Legendre est parvenu à s'en passer (*Théorie des nombres*, 1$^{re}$ Partie, § XIV) en faisant usage du développement en série. Je suis arrivé, en suivant la même idée, à une démonstration qui semble aussi directe et aussi simple qu'on puisse le désirer. Je vais, ici, l'exposer en peu de mots.

Soit $f(x)$ un polynome quelconque en $x$. Si l'on y substitue pour $x$ une valeur imaginaire $u+v\sqrt{-1}$, on aura

$$f(u+v\sqrt{-1}) = P + Q\sqrt{-1}, \tag{1}$$



P et Q étant deux fonctions réelles de $u$ et $v$. De plus, si l'on fait

$$P + Q\sqrt{-1} = R(\cos T + \sqrt{-1}\sin T), \tag{2}$$

R sera ce qu'on appelle le *module de l'expression imaginaire*

$$P + Q\sqrt{-1},$$

et sa valeur sera donnée par l'équation

$$R^2 = P^2 + Q^2. \tag{3}$$

Cela posé, le théorème à démontrer c'est que l'on pourra toujours satisfaire par des valeurs réelles de $u$ et de $v$ aux deux équations

$$P = 0, \qquad Q = 0,$$

ou, ce qui revient au même, à l'équation unique

$$R = 0.$$

Il importe donc de savoir quelles sont les diverses valeurs que peut recevoir la fonction R et comment cette fonction varie avec $u$ et $v$. On y parviendra comme il suit.

Supposons que les quantités $u$ et $v$ obtiennent à la fois les accroissements $h$ et $k$, et soient $\Delta P$, $\Delta Q$, $\Delta R$ les accroissements correspondants de P, Q, R. Les équations (3) et (1) deviendront respectivement

$$(R+\Delta R)^2 = (P+\Delta P)^2 + (Q+\Delta Q)^2, \tag{4}$$

$$\left\{\begin{aligned} P+\Delta P+(Q+\Delta Q)\sqrt{-1} &= f(u+v\sqrt{-1}+h+k\sqrt{-1}) \\ &= f(u+v\sqrt{-1}) + (h+k\sqrt{-1})\, f_1(u+v\sqrt{-1}) \\ &\qquad + (h+k\sqrt{-1})^2 f_2(u+v\sqrt{-1}) + \ldots, \end{aligned}\right. \tag{5}$$

$f_1, f_2, \ldots$ désignant de nouvelles fonctions. Pour déduire de l'équation (5) les valeurs de $P+\Delta P$ et de $Q+\Delta Q$, il suffit de ramener le second membre à la forme $p+q\sqrt{-1}$. C'est ce que l'on fera en substituant à $f(u+v\sqrt{-1})$ sa valeur $R(\cos T+\sqrt{-1}\sin T)$ et posant, en outre,

$$h + k\sqrt{-1} = \rho(\cos\theta + \sqrt{-1}\sin\theta),$$
$$f_1(u + v\sqrt{-1}) = R_1(\cos T_1 + \sqrt{-1}\sin T_1),$$
$$f_2(u + v\sqrt{-1}) = R_2(\cos T_2 + \sqrt{-1}\sin T_2),$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Après les réductions effectuées, l'équation (5) deviendra

$$(6)\quad \left\{\begin{aligned} &P + \Delta P + (Q + \Delta Q)\sqrt{-1} \\ &\quad = R\cos T + R_1\rho\cos(T_1 + \theta) + R_2\rho^2\cos(T_2 + 2\theta) + \ldots \\ &\quad + [R\sin T + R_1\rho\sin(T_1 + \theta) + R_2\rho^2\sin(T_2 + 2\theta) + \ldots]\sqrt{-1}, \end{aligned}\right.$$

et l'on en conclura

$$(7)\quad \left\{\begin{aligned} P + \Delta P &= R\cos T + R_1\rho\cos(T_1 + \theta) + R_2\rho^2\cos(T_2 + 2\theta) + \ldots, \\ Q + \Delta Q &= R\sin T + R_1\rho\sin(T_1 + \theta) + R_2\rho^2\sin(T_2 + 2\theta) + \ldots; \end{aligned}\right.$$

$$(8)\quad \left\{\begin{aligned} (R + \Delta R)^2 = {} & [R\cos T + R_1\rho\cos(T_1 + \theta) + R_2\rho^2\cos(T_2 + 2\theta) + \ldots]^2 \\ & + [R\sin T + R_1\rho\sin(T_1 + \theta) + R_2\rho^2\sin(T_2 + 2\theta) + \ldots]^2. \end{aligned}\right.$$

Supposons maintenant que, pour certaines valeurs attribuées aux variables $u$ et $v$, l'équation

$$R = 0$$

ne soit pas satisfaite. Si, dans cette hypothèse, $R_1$ n'est pas nul, le second membre de l'équation (8), ordonné suivant les puissances ascendantes de $\rho$, deviendra

$$R^2 + 2RR_1\rho\cos(T_1 - T + \theta) + \ldots;$$

et, par suite, la quantité

$$(R + \Delta R)^2 - R^2,$$

ou l'accroissement de $R^2$ ordonné suivant les puissances ascendantes de $\rho$, aura pour premier terme

$$2RR_1\rho\cos(T_1 - T + \theta).$$

Si, dans la même hypothèse, $R_1$ était nul sans que $R_2$ le fût, l'accroissement de $R^2$ aurait pour premier terme



$$2RR_2\rho^2\cos(T_2 - T + 2\theta),$$

etc., etc. Enfin ce premier terme deviendrait

$$2RR_n\rho^n\cos(T_n - T + n\theta)$$

si, pour les valeurs données de $u$ et $v$, toutes les quantités $R_1$, $R_2$, ... s'évanouissaient jusqu'à $R_{n-1}$ inclusivement. D'ailleurs, si l'on attribue à $\rho$ des valeurs positives très petites et à $\theta$ des valeurs quelconques, ou, ce qui revient au même, si l'on attribue aux quantités $h$ et $k$ des valeurs numériques très petites, l'accroissement de $R^2$, savoir

$$(R + \Delta R)^2 - R^2,$$

sera de même signe que son premier terme représenté généralement par le produit

$$(9)\qquad 2RR_n\rho^n\cos(T_n - T + n\theta);$$

et comme on peut disposer de la valeur arbitraire de $\theta$ de manière à rendre $\cos(T_n - T + n\theta)$, c'est-à-dire le dernier facteur du produit (9) et, par suite, le produit lui-même, ou positif ou négatif, il en résulte que, dans le cas où des valeurs particulières attribuées aux variables $u$ et $v$ ne vérifient pas l'équation $R = 0$, la valeur correspondante de $R^2$ ne peut être ni un maximum ni un minimum. Donc, si l'on peut s'assurer, *a priori*, que $R^2$ admet une valeur minimum, on devra en conclure que cette valeur est nulle et qu'il est possible de satisfaire à l'équation $R = 0$.

Or, $R^2$ admettra évidemment un minimum correspondant à des valeurs finies de $u$ et de $v$ si, pour de très grandes valeurs numériques de ces mêmes variables, $R^2$ finit par devenir supérieur à toute quantité donnée. D'ailleurs, si l'on fait

$$u + v\sqrt{-1} = r(\cos z + \sqrt{-1}\sin z),$$

à de très grandes valeurs numériques de $u$ et $v$ correspondront de très grandes valeurs de $r$ et réciproquement. Donc, pour que l'on puisse satisfaire à l'équation $R = 0$ par des valeurs réelles et finies des variables $u$ et $v$, il est nécessaire et il suffit que la quantité $R^2$ déterminée par les équations

$$(10)\qquad \begin{cases} R^2 = P^2 + Q^2, \\ P + Q\sqrt{-1} = f[r(\cos z + \sqrt{-1}\sin z)] \end{cases}$$

finisse par devenir constamment, pour de très grandes valeurs de $r$, supérieure à tout nombre donné.

La conclusion précédente subsiste également, que la fonction $f(x)$ soit entière ou non. Elle exige seulement que P et Q soient des fonctions continues des variables $u$ et $v$ et que les quantités $R_1$, $R_2$, ... ne deviennent jamais infinies pour des valeurs finies de ces mêmes variables.

Supposons, en particulier, que la fonction $f(x)$ soit entière et faisons en conséquence

$$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n.$$

Les équations (10) donneront

$$\begin{aligned} P + Q\sqrt{-1} &= f(r\cos z + r\sin z\sqrt{-1}) \\ &= \quad a_0r^n\cos nz + a_1r^{n-1}\cos(n-1)z + \ldots + a_{n-1}r\cos z + a_n \\ &\quad + [a_0r^n\sin nz + a_1r^{n-1}\sin(n-1)z + \ldots + a_{n-1}r\sin z]\sqrt{-1}, \end{aligned}$$

$$P = a_0r^n\left[\cos nz + \frac{a_1}{a_0}\frac{\cos(n-1)z}{r} + \ldots + \frac{a_{n-1}}{a_0}\frac{\cos z}{r^{n-1}} + \frac{a_n}{a_0}\frac{1}{r^n}\right],$$

$$Q = a_0r^n\left[\sin nz + \frac{a_1}{a_0}\frac{\sin(n-1)z}{r} + \ldots + \frac{a_{n-1}}{a_0}\frac{\sin z}{r^{n-1}}\right],$$

$$R^2 = P^2 + Q^2 = a_0^2r^{2n}\left[1 + \frac{2a_1\cos z}{a_0}\frac{1}{r} + \ldots + \left(\frac{a_n}{a_0}\right)^2\frac{1}{r^{2n}}\right].$$

Or, il est clair que, pour de très grandes valeurs de $r$, la valeur précédente de $R^2$ finira par surpasser toute quantité donnée. Donc, en vertu de ce qui a été dit plus haut, on pourra satisfaire par des valeurs réelles de $u$ et de $v$ à l'équation

$$R = 0,$$



ou, ce qui revient au même, aux deux suivantes

$$P = 0, \qquad Q = 0.$$

Au reste, la méthode ci-dessus exposée n'est pas uniquement applicable au cas où la fonction $f(x)$ est entière; et, lors même que cette fonction cesse de l'être, les raisonnements dont nous avons fait usage peuvent servir à décider s'il est possible de satisfaire à l'équation

$$f(x) = 0$$

par des valeurs réelles ou imaginaires de la variable $x$.

# MÉMOIRE

## SUR UNE ESPÈCE PARTICULIÈRE

# DE MOUVEMENT DES FLUIDES.

*Journal de l'École Polytechnique*, XIX$^e$ Cahier, t. XII, p. 204; 1823.

Lorsqu'un fluide se meut dans un vase de figure quelconque, la vitesse et la pression en chaque point varient d'un instant à l'autre, et, par conséquent, elles dépendent, en général, de quatre variables, savoir, le temps et les coordonnées du point que l'on considère. Ces quatre variables se réduiront à deux si le mouvement a lieu de telle manière que deux molécules ne puissent occuper successivement la même place sans décrire la même courbe. Nous allons nous occuper, en particulier, de cette espèce de mouvement d'une masse fluide qu'on peut appeler *mouvement par filets*. Pour le déterminer plus facilement, nous commencerons par établir un théorème qui se rapporte aux fluides en équilibre et dont voici l'énoncé :

THÉORÈME. — *Concevons que, dans un fluide en équilibre, on trace une courbe à volonté. Nommons s l'arc de cette courbe compté à partir d'un point fixe et soient, à l'extrémité de cet arc, p la pression, ρ la densité, P la force accélératrice. Enfin, désignons par α l'angle compris entre la direction de la force* P *et celle de la courbe à l'extrémité de l'arc s. On aura, en supposant toutes les variables exprimées en fonction de s,*

$$\frac{\partial p}{\partial s} = \rho \mathrm{P}\cos\alpha. \tag{1}$$



*Démonstration.* — En effet, si l'on rapporte tous les points de l'espace à trois axes rectangulaires et que l'on désigne par X, Y, Z les composantes algébriques de la force P parallèlement à ces mêmes axes, on aura, en supposant d'abord toutes les variables exprimées en fonction de $x$, $y$, $z$,

$$\left\{\begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial x} &= \rho \mathrm{X}, \\ \frac{\partial p}{\partial y} &= \rho \mathrm{Y}, \\ \frac{\partial p}{\partial z} &= \rho \mathrm{Z}. \end{aligned}\right. \tag{2}$$

D'ailleurs, pour la courbe que l'on considère, $x$, $y$, $z$ deviennent fonctions de $s$ et si l'on substitue leurs valeurs en $s$ dans la valeur générale de $p$, il en résultera une nouvelle fonction de $s$ qui vérifiera la formule

$$\frac{dp}{ds} = \frac{\partial p}{\partial x}\frac{dx}{ds} + \frac{\partial p}{\partial y}\frac{dy}{ds} + \frac{\partial p}{\partial z}\frac{dz}{ds} = \rho\left(\mathrm{X}\frac{dx}{ds} + \mathrm{Y}\frac{dy}{ds} + \mathrm{Z}\frac{dz}{ds}\right). \tag{3}$$

D'autre part, les cosinus des angles que forment avec les axes la direction de la force P et celle de la courbe proposée à l'extrémité de l'arc $s$ étant respectivement

$$\frac{\mathrm{X}}{\mathrm{P}}, \quad \frac{\mathrm{Y}}{\mathrm{P}}, \quad \frac{\mathrm{Z}}{\mathrm{P}},$$

$$\frac{dx}{ds}, \quad \frac{dy}{ds}, \quad \frac{dz}{ds},$$

on en conclura, pour l'expression du cosinus de l'angle compris entre les deux directions,

$$\cos\alpha = \frac{\mathrm{X}}{\mathrm{P}}\frac{dx}{ds} + \frac{\mathrm{Y}}{\mathrm{P}}\frac{dy}{ds} + \frac{\mathrm{Z}}{\mathrm{P}}\frac{dz}{ds}. \tag{4}$$

En vertu de cette dernière formule, l'équation (3) se trouvera réduite à

$$\frac{dp}{ds} = \rho \mathrm{P}\cos\alpha, \tag{1}$$

ce qu'il fallait démontrer.

On peut remarquer en passant que la pression sera constante dans toute l'étendue de la courbe donnée si l'on a $\cos\alpha = 0$, c'est-à-dire si cette courbe est perpendiculaire en tous ses points à la direction de la force accélératrice, ce qui s'accorde avec la propriété bien connue des surfaces de niveau.

On peut encore remarquer que $P\cos\alpha$ représente, au signe près, la projection de la force P sur la tangente à la courbe que l'on considère.

Concevons à présent que le fluide se meuve et se partage en un nombre infini de filets, de telle sorte que la courbe décrite par une molécule, à partir d'un point donné, soit constamment suivie par celles qui lui succèdent au même point. Nommons $s$ l'arc d'une semblable courbe, compté à partir d'une origine fixe dans le sens du mouvement, et $t$ le temps mesuré à partir d'une époque fixe. Soient de plus, au bout du temps $t$ et à l'extrémité de l'arc $s$,

$\rho$ la densité,
$p$ la pression,
$v$ la vitesse,
P la force accélératrice appliquée au fluide,
$\alpha$ l'angle compris entre la direction de cette force accélératrice et la direction de la vitesse,
Q la force accélératrice qui serait capable de produire le mouvement observé,
$\beta$ l'angle compris entre la direction de cette force et celle de la vitesse.

Enfin, imaginons que, la force P étant décomposée en deux autres, dont l'une soit la force Q elle-même, la direction de la seconde composante représentée par R fasse, avec la direction de la vitesse $v$, l'angle $\gamma$. Les quantités $\rho$, $p$, $v$, P, Q, R, $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ seront autant de fonctions des deux variables indépendantes $s$, $t$ et, en vertu du principe général de Dynamique, la pression $p$ sera précisément celle qui aurait lieu dans l'état d'équilibre du fluide uniquement soumis à la force accélératrice R. Par conséquent, le théorème ci-dessus démontré fournira l'équation

$$\frac{\partial p}{\partial s} = \rho R \cos\gamma. \tag{5}$$



D'ailleurs, Q et R étant les composantes de la force P, si l'on projette ces trois forces sur la direction de la vitesse, on trouvera

$$P\cos\alpha = Q\cos\beta + R\cos\gamma. \tag{6}$$

Donc, par suite,

$$\frac{\partial p}{\partial s} = \rho(P\cos\alpha - Q\cos\beta). \tag{7}$$

Observons maintenant que, si l'on appelle $x$, $y$, $z$ les coordonnées rectangulaires de la molécule située à l'extrémité de l'arc $s$ et X, Y, Z les projections algébriques sur les axes de la force accélératrice P, la valeur de $\cos\alpha$ vérifiera l'équation (4), et qu'on aura, en conséquence,

$$P\cos\alpha = X\frac{dx}{ds} + Y\frac{dy}{ds} + Z\frac{dz}{ds}. \tag{8}$$

De plus, la courbe que suit cette molécule pouvant être censée décrite en vertu de la seule force accélératrice Q, la variation de la vitesse $v$, pendant un instant très court $\Delta t$ compté à partir de la fin du temps $t$, pourra être considérée, sans erreur sensible, comme uniquement due à la force Q décomposée suivant la courbe dont il s'agit, c'est-à-dire à la force accélératrice représentée par la valeur numérique du produit $Q\cos\beta$. Il est aisé d'en conclure que ce produit sera équivalent, à très peu près, à la variation de la vitesse divisée par $\Delta t$. Or, l'espace parcouru pendant l'instant $\Delta t$ étant sensiblement égal à $v\Delta t$ et la vitesse étant fonction des deux variables $s$ et $t$, si, pour fixer les idées, on suppose

$$v = f(s, t),$$

en désignant par $\varepsilon$ un nombre très petit, on trouvera, pour la variation de la vitesse pendant l'instant $\Delta t$, une expression de la forme

$$f[s + (v+\varepsilon)\Delta t,\ t + \Delta t] - f(s, t).$$

En divisant cette variation par $\Delta t$, puis faisant converger $\Delta t$ vers la limite zéro, on obtiendra la valeur suivante de $Q\cos\beta$ :

$$Q\cos\beta = v\frac{\partial f(s,t)}{\partial s} + \frac{\partial f(s,t)}{\partial t}$$

ou, ce qui revient au même,

$$Q\cos\beta = v\frac{\partial v}{\partial s} + \frac{\partial v}{\partial t}. \tag{9}$$

Si dans l'équation (7) on remet, pour $P\cos\alpha$ et $Q\cos\beta$, leurs valeurs tirées des équations (8) et (9), on trouvera définitivement

$$\frac{\partial p}{\partial s} = \rho\left(\frac{X\,dx + Y\,dy + Z\,dz}{ds} - v\frac{\partial v}{\partial s} - \frac{\partial v}{\partial t}\right). \tag{10}$$

Telle est la formule différentielle qui exprime la relation existant entre la pression et la vitesse dans le mouvement par filets d'une masse fluide. Ajoutons que, dans ce même mouvement, la vitesse $v$ peut être décomposée en deux facteurs dont l'un dépende uniquement de la variable $s$ et l'autre de la variable $t$. Pour le démontrer, imaginons la masse fluide divisée en filets dont les sections transversales soient très petites et varient d'un bout à l'autre d'un filet donné, de manière que les mêmes molécules passent successivement par chacune d'elles. La quantité de fluide qui passera, pendant un instant très court, par une section plane faite dans ce filet perpendiculairement à sa longueur, sera proportionnelle, d'une part, à l'aire de la section, de l'autre, à la vitesse des molécules qu'elle renferme à l'instant dont il s'agit; et, comme cette quantité de fluide devra rester la même pour toutes les positions possibles du plan coupant, il est clair que, à chaque instant, les vitesses de deux molécules comprises dans deux sections différentes seront en raison inverse des aires de ces sections. Par suite, si $v$ désigne toujours la vitesse, au bout du temps $t$, de la molécule fluide située dans un certain filet à l'extrémité de l'arc $s$ et si, de plus, on représente par $v_0$ la vitesse à la même époque d'une autre molécule située dans le même filet à l'extrémité de l'arc $s_0$, $s_0$ étant une valeur particulière et constante de la variable $s$, le rapport $\frac{v}{v_0}$ dépendra uniquement de cette variable.



On pourra donc supposer

$$\frac{v}{v_0} = \mu$$

ou

$$v = v_0\mu, \tag{11}$$

$\mu$ étant une fonction de la seule variable $s$ et $v_0$ une fonction de la seule variable $t$, ce qu'il fallait démontrer. Il nous reste à faire quelques applications des formules (10) et (11).

Supposons d'abord que le mouvement du fluide soit ce qu'on appelle un *mouvement permanent*, c'est-à-dire que la vitesse de chaque molécule et la direction de cette vitesse dépendent uniquement de la position absolue de la molécule que l'on considère. Alors, la valeur de $v$ ne variant plus avec le temps, on aura

$$\frac{\partial v}{\partial t} = 0; \tag{12}$$

ce qui réduira la formule (10) à

$$\frac{dp}{ds} = \rho\left(\frac{X\,dx + Y\,dy + Z\,dz}{ds} - \frac{v\,dv}{ds}\right). \tag{13}$$

Concevons que, dans cette hypothèse, la densité $\rho$ ait une valeur constante et que l'expression

$$X\,dx + Y\,dy + Z\,dz$$

puisse être ramenée, comme il arrive dans beaucoup de cas, à la forme $d\lambda$, $\lambda$ représentant une certaine fonction des coordonnées $x$, $y$, $z$. Il deviendra facile d'intégrer l'équation (13) ou, en d'autres termes, la suivante

$$\frac{dp}{ds} = \rho\left(\frac{d\lambda}{ds} - \frac{v\,dv}{ds}\right). \tag{14}$$

En effectuant les intégrations par rapport à la variable indépendante $s$ à partir de la valeur particulière $s = s_0$ et désignant par $p_0$, $\lambda_0$, $v_0$ les valeurs particulières correspondantes des variables $p$, $\lambda$, $v$, on trouvera

$$p - p_0 = \rho\left[\lambda - \lambda_0 - \frac{1}{2}(v^2 - v_0^2)\right]. \tag{15}$$

Par suite, si la pression à l'extrémité de l'arc $s$ est la même qu'à l'extrémité de l'arc $s_0$, on aura simplement

$$\lambda - \lambda_0 - \frac{1}{2}(v^2 - v_0^2) = 0,$$

et l'on en conclura

$$v^2 - v_0^2 = 2(\lambda - \lambda_0) = 2\int (\mathrm{X}\,dx + \mathrm{Y}\,dy + \mathrm{Z}\,dz). \tag{16}$$

Il résulte de cette dernière formule que, *dans le mouvement permanent, une molécule fluide, en parcourant une courbe aux extrémités de laquelle les pressions sont égales, gagne ou perd la même quantité de force vive que gagnerait ou que perdrait dans le vide une molécule solide douée de la même masse et de la même vitesse initiale, assujettie à décrire la même courbe et soumise aux mêmes forces accélératrices.*

Le principe qu'on vient d'énoncer suffit quelquefois pour faire découvrir parmi les circonstances du mouvement celles qu'il importe le plus de connaître. Admettons, par exemple, qu'un fluide pesant et homogène s'écoule d'un vase entretenu constamment plein par un orifice très petit. Alors, au bout d'un temps plus ou moins considérable, le mouvement devient sensiblement permanent et, par conséquent, la vitesse du fluide à la sortie du vase devient à très peu près constante. Or il sera facile, à l'aide du principe établi, de calculer cette vitesse. En effet, la pression atmosphérique étant, à très peu près, la même sur la surface supérieure de la masse fluide contenue dans le vase et sur la surface latérale de la veine qui s'en échappe, la force vive acquise par une molécule, dans le passage de la première surface à la seconde, devra être, en vertu de ce principe, le produit de la masse de la molécule par le carré de la vitesse qu'acquerrait dans le vide un corps pesant descendant de la même hauteur. Donc, si l'on nomme $h$ cette hauteur, $v_0$ la vitesse de la molécule à son entrée dans le vase et $v$ sa vitesse au moment de la sortie, on trouvera, en divisant la variation de la force



vive par la masse,

$$v^2 - v_0^2 = 2gh. \tag{17}$$

On aura d'ailleurs, en vertu de la formule (11),

$$v = v_0\mu,$$

$\mu$ désignant le rapport des sections faites, dans un filet fluide qui renferme la molécule et aux extrémités de ce même filet, par des plans perpendiculaires à sa longueur. Cela posé, on tirera de l'équation (17)

$$v = \frac{\sqrt{(2gh)}}{\sqrt{\left(1 - \frac{1}{\mu^2}\right)}}. \tag{18}$$

La valeur de $\mu$ devant être très considérable lorsque l'orifice est très petit, on peut, dans une première approximation, négliger le terme $\frac{1}{\mu^2}$, ce qui réduit la formule (18) à

$$v = \sqrt{(2gh)}. \tag{19}$$

Les équations (18) et (19) sont celles que l'on déduit ordinairement des calculs fondés sur l'hypothèse du *parallélisme des tranches*. Lorsqu'on veut faire usage de l'équation (18), on prend pour valeur de $\mu$ le rapport entre la surface supérieure du fluide qui, en général, est sensiblement plane et la section minimum de la veine qui sort par l'orifice, ce qui serait exact si toutes les molécules fluides, même celles qui décrivent des courbes différentes, arrivaient dans le vase et dans la section minimum de la veine avec des vitesses communes.

Supposons maintenant que le mouvement du fluide cesse d'être permanent. Alors, en substituant dans l'équation (10) la valeur de $v$ tirée de la formule (11), on trouvera

$$\frac{\partial p}{\partial s} = \rho\left(\frac{\mathrm{X}\,dx + \mathrm{Y}\,dy + \mathrm{Z}\,dz}{ds} - v_0^2\frac{\mu\,d\mu}{ds} - \mu\frac{dv_0}{dt}\right). \tag{20}$$

Si l'on admet toujours que la densité $\rho$ soit constante et que l'expression $X\,dx + Y\,dy + Z\,dz$ se réduise à $d\lambda$, $\lambda$ étant une fonction des coordonnées $x$, $y$, $z$, on pourra intégrer, par rapport à $s$, l'équation (20) ou, ce qui revient au même, la suivante

$$\frac{\partial p}{\partial s} = \rho\left(\frac{d\lambda}{ds} - v_0^2 \frac{\mu\,d\mu}{ds} - \mu\frac{dv_0}{dt}\right); \tag{21}$$

et, en désignant par $s_0$, $p_0$, $\lambda_0$, $v_0$ des valeurs particulières correspondantes des variables $s$, $p$, $\lambda$, $v$, on obtiendra la formule

$$p - p_0 = \rho\left[\lambda - \lambda_0 - \frac{1}{2}v_0^2(\mu^2 - 1) - \frac{dv_0}{dt}\int \mu\,ds\right] \tag{22}$$

dans laquelle l'intégrale relative à $s$ est prise à partir de l'origine $s_0$. Enfin, si l'on suppose que la pression soit la même aux extrémités des arcs $s_0$ et $s$, on aura simplement

$$\lambda - \lambda_0 - \frac{1}{2}v_0^2(\mu^2 - 1) - \frac{dv_0}{dt}\int \mu\,ds = 0$$

et, par suite,

$$v_0^2(\mu^2 - 1) + 2\frac{dv_0}{dt}\int \mu\,ds = 2(\lambda - \lambda_0). \tag{23}$$

Le coefficient différentiel $\frac{dv_0}{dt}$ étant toujours positif quand la vitesse $v_0$ croit avec le temps et le binome $\lambda - \lambda_0$ représentant une quantité finie indépendante de la variable $t$, il résulte évidemment de l'équation (23) que, dans le cas où les différences $\mu^2 - 1$, $s - s_0$ sont de même signe, c'est-à-dire lorsque les filets vont en se rétrécissant dans le sens du mouvement, la vitesse $v_0$ ne saurait recevoir un accroissement indéfini. Donc alors, si cette vitesse a commencé par croître, elle ne s'élèvera pas au delà d'un certain maximum ou, du moins, ne dépassera pas une certaine limite. Lorsqu'elle aura sensiblement atteint ce maximum ou cette limite, on aura, à très peu près,

$$\frac{dv_0}{dt} = 0 \tag{24}$$

et, par suite,

$$v_0^2(\mu^2 - 1) = 2(\lambda - \lambda_0)$$



ou, en d'autres termes,

$$v^2 - v_0^2 = 2(\lambda - \lambda_0), \tag{25}$$

comme dans le cas du mouvement permanent.

Si l'on veut appliquer les formules précédentes à un fluide pesant, alors, en supposant que l'on prenne pour axe des $x$ une droite verticale et que l'on compte les $x$ positives dans le sens de la pesanteur, on trouvera

$$X = g, \qquad Y = 0, \qquad Z = 0,$$
$$d\lambda = X\,dx + Y\,dy + Z\,dz = g\,dx;$$

on en conclura

$$\lambda - \lambda_0 = g(x - x_0).$$

Cela posé, les équations (22), (23) et (25) deviendront respectivement

$$p - p_0 = \rho\left[g(x - x_0) - \frac{1}{2}v_0^2(\mu^2 - 1) - \frac{dv_0}{dt}\int \mu\,ds\right], \tag{26}$$

$$v_0^2(\mu^2 - 1) + 2\frac{dv_0}{dt}\int \mu\,ds = 2g(x - x_0), \tag{27}$$

$$v^2 - v_0^2 = 2g(x - x_0). \tag{28}$$

La dernière de celles-ci s'accorde avec l'équation (17), puisque $x - x_0$ représente précisément la hauteur verticale de laquelle descend une molécule fluide, en passant du point dont l'abscisse est $x_0$ au point dont l'abscisse est $x$.

En terminant ce Mémoire sur le mouvement par filets d'une masse fluide, nous ferons remarquer que l'espèce de mouvement désignée sous ce nom a nécessairement lieu lorsque la masse entière se réduit à un filet fluide contenu dans un tube infiniment étroit. Par conséquent, la formule (26) est applicable aux oscillations de l'eau dans un tube recourbé (*voir* la *Mécanique* de M. Poisson, Liv. V). Si dans cette même formule on attribue successivement aux variables $p$, $x$, $\mu$, $s$ les deux systèmes de valeurs particulières qu'elles acquièrent aux deux extrémités du filet fluide à la fin du temps $t$ et que l'on désigne ces valeurs particulières par $p'$, $x'$, $\mu'$, $s'$ ; $p''$, $x''$, $\mu''$, $s''$, on trouvera

$$p' - p_0 = \rho\left[g(x' - x_0) - \frac{1}{2}v_0^2(\mu'^2 - 1) - \frac{dv_0}{dt}\int \mu\, ds\right], \tag{29}$$

$$p'' - p_0 = \rho\left[g(x'' - x_0) - \frac{1}{2}v_0^2(\mu''^2 - 1) - \frac{dv_0}{dt}\int \mu\, ds\right], \tag{30}$$

l'intégration relative à $s$ devant être faite, dans la première équation, entre les limites $s_0$, $s'$, et, dans la seconde, entre les limites $s_0$, $s''$. En retranchant l'une de l'autre les deux équations qui précèdent, on obtiendra la suivante

$$p'' - p' = \rho\left[g(x'' - x') - \frac{1}{2}v_0^2(\mu''^2 - \mu'^2) - \frac{dv_0}{dt}\int \mu\, ds\right], \tag{31}$$

dans laquelle l'intégrale relative à $s$ est prise entre les limites $s'$, $s''$. Si l'on suppose d'ailleurs que la pression $p$ ait la même valeur aux deux extrémités du filet fluide, la formule (31) deviendra

$$g(x'' - x') - \frac{1}{2}v_0^2(\mu''^2 - \mu'^2) - \frac{dv_0}{dt}\int \mu\, ds = 0. \tag{32}$$

Cette dernière, dans laquelle $v_0$ désigne la vitesse au bout du temps $t$ en un point fini du tube, coïncide avec l'équation (2) de la *Mécanique* de M. Poisson (Liv. V, § II).

---

# MÉMOIRE

SUR

# L'INTÉGRATION DES ÉQUATIONS LINÉAIRES

AUX

## DIFFÉRENTIELLES PARTIELLLES ET A COEFFICIENTS CONSTANTS [1].

*Journal de l'École Polytechnique*, XIX$^e$ Cahier, Tome XII, p. 511 ; 1823.

L'objet que je me propose dans ce Mémoire est de résoudre la question suivante :

*Étant donnée, entre la variable principale $\varphi$ et les variables indépendantes $x$, $y$, $z$, ..., $t$, une équation linéaire aux différences partielles et à coefficients constants avec un dernier terme fonction des variables indépendantes, intégrer cette équation de manière que les quantités*

$$\varphi,\quad \frac{\partial\varphi}{\partial t},\quad \frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2},\quad \ldots$$

*se réduisent à des fonctions connues de $x$, $y$, $z$, ... pour $t = 0$.*

[1] Ce Mémoire, présenté à l'Académie royale des Sciences le 16 septembre 1822, est le développement de celui que M. Cauchy avait donné, sous le même titre, le 8 octobre 1821. Mais il en diffère quant à la manière d'envisager la question principale et renferme en outre des additions importantes. Plusieurs de ces additions étaient déjà indiquées par les Notes insérées, soit dans le *Bulletin de la Société philomathique* pour l'année 1821, soit dans l'Analyse des travaux de l'Académie des Sciences pendant la même année. D'autres, savoir celles qui font le sujet du quatrième paragraphe de la première Partie, ont eu pour base un théorème dont l'auteur avait signalé, il y a longtemps, les nombreuses applications, dans une lecture faite à la même Académie, et à l'aide duquel il était parvenu à exprimer par des intégrales doubles les racines réelles d'une équation quelconque algébrique ou transcendante.

La solution générale de cette question peut se déduire d'une formule qui, employée d'abord par M. Fourier dans le Mémoire sur la chaleur, a été depuis appliquée à d'autres problèmes et, en particulier, par M. Poisson et moi à la théorie des ondes. De plus, les résultats fournis par la méthode générale sont, dans beaucoup de cas, susceptibles d'être simplifiés à l'aide de quelques autres formules qu'il importe de connaître. Nous réunirons ces diverses formules dans la première Partie de notre Mémoire et, dans la seconde, nous résoudrons la question proposée.

## PREMIÈRE PARTIE.

§ I. La formule de M. Fourier, étendue à un nombre $n$ de variables $x, y, z, \ldots$ sert à remplacer une fonction quelconque de ces variables par une intégrale multiple dans laquelle $x, y, z, \ldots$ ne se trouvent plus que sous les signes sin et cos. Elle peut s'écrire comme il suit :

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned} f(x, y, z, \ldots) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^n \int\int\int \ldots \cos\alpha(x-\mu)\cos\beta(y-\nu)\cos\gamma(z-\varpi)\ldots \\ \times f(\mu, \nu, \varpi, \ldots)\, d\alpha\, d\mu\, d\beta\, d\nu\, d\gamma\, d\varpi \ldots, \end{aligned}\right.$$

les intégrations relatives à $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ étant effectuées entre les limites $-\infty, +\infty$ et celles qui se rapportent à $\mu, \nu, \varpi, \ldots$ entre des limites quelconques, pourvu que ces limites comprennent les valeurs attribuées à $x, y, z, \ldots$. Pour rendre plus faciles les applications de cette même formule, il convient de la modifier un peu en substituant aux cosinus des exponentielles imaginaires et d'écrire simplement

$$(2)\quad \left\{\begin{aligned} f(x, y, z, \ldots) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^n \int\int\int \ldots e^{\alpha(x-\mu)\sqrt{-1}} e^{\beta(y-\nu)\sqrt{-1}} e^{\gamma(z-\varpi)\sqrt{-1}} \ldots \\ \times f(\mu, \nu, \varpi, \ldots)\, d\alpha\, d\mu\, d\beta\, d\nu\, d\gamma\, d\varpi \ldots. \end{aligned}\right.$$

Il est essentiel d'observer que les fonctions renfermées sous les signes $\int\int\int \ldots$, dans les intégrales multiples qui forment les seconds membres des équations (1) et (2), passent du positif au négatif par la seule variation des quantités $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$. Il en résulte que ces intégrales



multiples pourront devenir indéterminées mais jamais infinies. Toutes les fois qu'elles deviendront effectivement indéterminées, il suffira, pour faire cesser l'indétermination, de multiplier dans chacune d'elles la fonction sous les signes $\int\int\int \ldots$ par un facteur auxiliaire de la forme

$$(3)\quad \frac{\psi(k\alpha, k'\beta, k''\gamma, \ldots)}{\psi(0, 0, 0, \ldots)},$$

la lettre $\psi$ indiquant une fonction convenablement choisie [1] et $k, k', k'', \ldots$ désignant des quantités positives infiniment petites qu'on devra réduire à zéro après les intégrations effectuées. En supposant, pour plus de commodité,

$$k = k' = k'' = \ldots,$$

on réduira le facteur auxiliaire à

$$(4)\quad \frac{\psi(k\alpha, k\beta, k\gamma, \ldots)}{\psi(0, 0, 0, \ldots)}.$$

Par suite, on pourra, dans un grand nombre de cas, prendre pour ce même facteur l'une des expressions

$$(5)\quad \frac{1}{1 + k^2(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \ldots)},$$

$$(6)\quad e^{-k\sqrt{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\ldots}},$$

$$(7)\quad e^{-k^2(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\ldots)},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Nous ajouterons que l'emploi du facteur auxiliaire suffit pour établir les formules (1) et (2) [2]. C'est ce que nous allons prouver en nous

[1] Est-il possible, dans tous les cas, de choisir la fonction $\psi$ de manière à faire cesser l'indétermination? Si cette question était résolue négativement, il est clair qu'on devrait restreindre les applications des formules (1) et (2) aux seuls cas pour lesquels la condition qu'on vient d'énoncer serait satisfaite. Mais rien jusqu'à présent ne nous porte à croire que l'on se trouve jamais dans l'impossibilité de la remplir.

[2] Lorsqu'on veut choisir le facteur de telle manière que, la formule (1) étant établie, on en déduise immédiatement la formule (2), on doit avoir soin de prendre pour

$$\psi(k\alpha, k\beta, k\gamma, \ldots)$$

une fonction des variables $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ qui ait la propriété, comme les expressions (5), (6), (7), de conserver la même valeur, tandis que toutes ces variables ou quelques-unes d'entre elles changent de signes.

arrêtant, pour simplifier les calculs, à la formule (1) et nous bornant au cas où les variables $x, y, z, \ldots$ se trouvent remplacées par la seule variable $x$. Dans ce cas, la formule (1) se réduit à

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{\mu'}^{\mu''}\cos\alpha(x-\mu)\,f(\mu)\,d\alpha\,d\mu, \tag{8}$$

l'intégration relative à $\alpha$ étant effectuée entre les limites $-\infty$, $+\infty$ et l'intégration relative à $\mu$ entre des limites $\mu'$, $\mu''$ qui comprennent la valeur attribuée à la variable $x$. Pour empêcher que le second membre de la formule (8) ne devienne indéterminé, on devra écrire généralement

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{\mu'}^{\mu''}\frac{\psi(k\alpha)}{\psi(0)}\cos\alpha(x-\mu)\,f(\mu)\,d\alpha\,d\mu, \tag{9}$$

$k$ désignant une quantité positive infiniment petite et $\psi$ une fonction convenablement choisie. Il reste à faire voir que la formule (9) subsiste toutes les fois que son second membre converge, pour des valeurs décroissantes de $k$, vers une limite fixe. Or, en effet, si l'on pose

$$\mathrm{X} = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{\mu'}^{\mu''}\frac{\psi(k\alpha)}{\psi(0)}\cos\alpha(x-\mu)\,f(\mu)\,d\alpha\,d\mu, \tag{10}$$

on en conclura, en remplaçant dans le second membre $\alpha$ par $\frac{\alpha}{k}$ et $\mu$ par $x + k\mu$,

$$\mathrm{X} = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\frac{x-\mu'}{k}}^{\frac{\mu''-x}{k}}\frac{\psi(\alpha)}{\psi(0)}\cos\alpha\mu\,f(x+k\mu)\,d\alpha\,d\mu; \tag{11}$$

puis, en faisant $k = 0$, on trouvera [1]

$$\mathrm{X} = \mathrm{A}\,f(x), \tag{12}$$

[1] Il est essentiel de se rappeler que la valeur de $x$ est par hypothèse supérieure à $\mu'$ et inférieure à $\mu''$, d'où il résulte que $\frac{x-\mu'}{k}$, $\frac{\mu''-x}{k}$ sont deux quantités positives. Pour bien voir dans cette hypothèse comment l'équation (12) se déduit de la formule (11), il convient d'employer un artifice de calcul semblable à celui dont nous avons fait usage dans le *Bulletin de la Société philomathique* de décembre 1818 et de partager l'intégrale



la valeur de A étant fournie par l'équation

$$\mathrm{A} = \frac{1}{\psi(0)}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\psi(\alpha)\cos\alpha\mu\,d\alpha\,d\mu. \tag{13}$$

La valeur précédente de A étant indépendante de $f(x)$, il suffira pour l'obtenir d'attribuer à $f(x)$ une valeur particulière. Si, pour fixer les idées, on suppose

$$f(x) = e^{-x^2},$$

et, de plus,

$$\mu' = -\infty, \qquad \mu'' = +\infty;$$

on tirera des formules (10) et (12), comparées l'une à l'autre,

$$\left\{\begin{aligned} \mathrm{A}e^{-x^2} &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\psi(k\alpha)}{\psi(0)}e^{-\mu^2}\cos\alpha(x-\mu)\,d\alpha\,d\mu \\ &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\mu^2}\cos\alpha(x-\mu)\,d\alpha\,d\mu \\ &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\mu^2}\cos\alpha\mu\cos\alpha x\,d\alpha\,d\mu. \end{aligned}\right. \tag{14}$$

Comme on a d'ailleurs généralement

$$\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\alpha^2}\cos 2b\alpha\,d\alpha = \pi^{\frac{1}{2}}e^{-b^2} \tag{15}$$

définie que renferme la formule (11) en trois autres intégrales, savoir :

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\frac{x-\mu'}{k}}^{-\frac{1}{\sqrt{k}}}\frac{\psi(\alpha)}{\psi(0)}\cos\alpha\mu\,f(x+k\mu)\,d\alpha\,d\mu,$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\frac{1}{\sqrt{k}}}^{+\frac{1}{\sqrt{k}}}\frac{\psi(\alpha)}{\psi(0)}\cos\alpha\mu\,f(x+k\mu)\,d\alpha\,d\mu,$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{+\frac{1}{\sqrt{k}}}^{\frac{\mu''-x}{k}}\frac{\psi(\alpha)}{\psi(0)}\cos\alpha\mu\,f(x+k\mu)\,d\alpha\,d\mu.$$

Lorsque dans ces trois dernières on fait converger $k$ vers la limite zéro, la deuxième se réduit au produit $\mathrm{A}\,f(x)$, la première et la troisième s'évanouissent.

Si la valeur attribuée à $x$ cessait d'être renfermée entre les limites $\mu'$ et $\mu''$, alors, en et, par suite,

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-a\alpha^2}\cos b\alpha\, d\alpha = \left(\frac{\pi}{a}\right)^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{b^2}{4a}}, \tag{16}$$

le dernier membre de l'équation (14) se réduira simplement à

$$\pi^{\frac{1}{2}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\alpha^2}{4}}\cos\alpha x\, d\alpha = 2\pi e^{-x^2}$$

et l'on conclura de cette équation

$$\mathrm{A} = 2\pi. \tag{17}$$

On serait arrivé à la même conclusion en prenant

$$f(x) = e^{-\sqrt{x^2}}$$

ou bien encore

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2},$$

etc., etc.

Cela posé, la valeur générale de X deviendra

$$\mathrm{X} = 2\pi f(x). \tag{18}$$

En substituant cette valeur de X dans l'équation (10) et divisant les deux membres par $2\pi$, on retrouvera précisément l'équation (9) qu'il s'agissait d'établir. On parviendrait avec la même facilité à démontrer la formule

$$\tag{19} \left\{\begin{aligned} f(x, y, z, \ldots) = {} & \left(\frac{1}{2\pi}\right)^n \int_{-\infty}^{\infty}\int_{\mu'}^{\mu''}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{\nu'}^{\nu''} \cdots \frac{\psi(k\alpha, k\beta, k\gamma, \ldots)}{\psi(0, 0, 0, \ldots)} \\ & \times \cos\alpha(x-\mu)\cos\beta(y-\nu)\cos\gamma(z-\varpi)\ldots \\ & \times f(\mu, \nu, \varpi, \ldots)\, d\alpha\, d\mu\, d\beta\, d\nu\, d\gamma\, d\varpi \ldots, \end{aligned}\right.$$

dans laquelle $k$ désigne une quantité infiniment petite.

faisant $k = 0$, on trouverait

$$\mathrm{X} = \frac{1}{\psi(0)} f(x) \int_{-\infty}^{\infty}\int_{\infty}^{\infty} \psi(\alpha)\cos\alpha\mu\, d\alpha\, d\mu$$

ou bien

$$\mathrm{X} = \frac{1}{\psi(0)} f(x) \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{-\infty} \psi(\alpha)\cos\alpha\mu\, d\alpha\, d\mu$$

et par suite on aurait, dans tous les cas,

$$\mathrm{X} = 0.$$



§ II. Avant d'appliquer les formules précédentes, nous allons en faire connaître quelques autres qui conduisent à des résultats dignes de remarque.

Considérons d'abord l'intégrale définie

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(\alpha^2)\, d\alpha, \tag{20}$$

la lettre $f$ indiquant une fonction réelle ou imaginaire. Je dis que, la valeur de cette intégrale étant supposée connue, on en déduira sans peine les valeurs des intégrales suivantes

$$\int_{-\infty}^{\infty} f\left(a\alpha^2 + b\alpha + \frac{b^2}{4a}\right) d\alpha, \tag{21}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f\left(a\alpha^2 - 2a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}} + \frac{b}{\alpha^2}\right) d\alpha, \tag{22}$$

dans lesquelles $a$ et $b$ désignent des constantes positives. Effectivement, si l'on établit entre les trois variables $\alpha, \beta, \gamma$ les relations

$$\beta = a^{\frac{1}{2}}\alpha + \frac{b}{2a^{\frac{1}{2}}},$$

$$\gamma = a^{\frac{1}{2}}\alpha - \frac{b^{\frac{1}{2}}}{\alpha},$$

on trouvera

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(\beta^2)\, d\beta = a^{\frac{1}{2}}\int_{-\infty}^{\infty} f\left(a\alpha^2 + b\alpha + \frac{b^2}{4a}\right) d\alpha \tag{23}$$

et

$$\tag{24} \left\{\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} f(\gamma^2)\, d\gamma = {} & a^{\frac{1}{2}}\int_0^{\infty} f\left(a\alpha^2 - 2a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}} + \frac{b}{\alpha^2}\right) d\alpha \\ & + b^{\frac{1}{2}}\int_0^{\infty} f\left(a\alpha^2 - 2a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}} + \frac{b}{\alpha^2}\right)\frac{d\alpha}{\alpha^2}. \end{aligned}\right.$$

D'ailleurs, les deux intégrales que renferme le second membre de l'équation (24) se changeant l'une dans l'autre lorsqu'on y remplace $\alpha$ par $\dfrac{b^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{1}{2}}\alpha}$ sont nécessairement égales entre elles.

On aura donc encore

$$(25)\qquad \left\{\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} f(\gamma^2)\,d\gamma &= 2a^{\frac{1}{2}}\int_{0}^{\infty} f\left(a\alpha^2 - 2a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}} + \frac{b}{\alpha^2}\right)d\alpha \\ &= a^{\frac{1}{2}}\int_{-\infty}^{\infty} f\left(a\alpha^2 - 2a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}} + \frac{b}{\alpha^2}\right)d\alpha. \end{aligned}\right.$$

Cela posé, si dans les premiers membres des équations (23) et (25) on substitue la lettre $\alpha$ aux deux lettres $\beta$ et $\gamma$, on tirera de ces équations

$$(26)\qquad \int_{-\infty}^{\infty} f\left(a\alpha^2 + b\alpha + \frac{b^2}{4a}\right)d\alpha = \frac{1}{a^{\frac{1}{2}}}\int_{-\infty}^{\infty} f(\alpha^2)\,d\alpha,$$

$$(27)\qquad \int_{-\infty}^{\infty} f\left(a\alpha^2 - 2a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}} + \frac{b}{\alpha^2}\right)d\alpha = \frac{1}{a^{\frac{1}{2}}}\int_{-\infty}^{\infty} f(\alpha^2)\,d\alpha.$$

Ajoutons que, les intégrales

$$a^{\frac{1}{2}}\int_{-\infty}^{\infty} f\left(a\alpha^2 - 2a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}} + \frac{b}{\alpha^2}\right)d\alpha, \qquad b^{\frac{1}{2}}\int_{-\infty}^{\infty} f\left(a\alpha^2 - 2a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}} + \frac{b}{\alpha^2}\right)\frac{d\alpha}{\alpha^2}$$

étant équivalentes l'une à l'autre, la formule (27) entrainera la suivante

$$(28)\qquad \int_{-\infty}^{\infty} f\left(a\alpha^2 - 2a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}} + \frac{b}{\alpha^2}\right)\frac{d\alpha}{\alpha^2} = \frac{1}{b^{\frac{1}{2}}}\int_{-\infty}^{\infty} f(\alpha^2)\,d\alpha.$$

Supposons maintenant

$$f(\alpha^2) = e^{-\alpha^2}.$$

Comme on a

$$(29)\qquad \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha^2}\,d\alpha = \pi^{\frac{1}{2}},$$

on conclura des formules (26), (27) et (28)

$$(30)\qquad \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a\alpha^2 - b\alpha}\,d\alpha = \left(\frac{\pi}{a}\right)^{\frac{1}{2}} e^{\frac{b^2}{4a}},$$

$$(31)\qquad \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\left(a\alpha^2 + \frac{b}{\alpha^2}\right)}\,d\alpha = \left(\frac{\pi}{a}\right)^{\frac{1}{2}} e^{-2a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}}},$$

$$(32)\qquad \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\left(a\alpha^2 + \frac{b}{\alpha^2}\right)}\,\frac{d\alpha}{\alpha^2} = \left(\frac{\pi}{b}\right)^{\frac{1}{2}} e^{-2a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}}}.$$



Si l'on fait $a = 1$ dans les équations (30) et (31), puis que l'on remplace dans la première $b$ par $2b$ ou par $2b\sqrt{-1}$ et dans la seconde $b$ par $\frac{b^2}{4}$, on trouvera

$$(33)\qquad \left\{\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha^2 - 2b\alpha}\,d\alpha &= \pi^{\frac{1}{2}} e^{b^2}, \\ \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha^2}\cos 2b\alpha\,d\alpha &= \pi^{\frac{1}{2}} e^{-b^2}, \\ \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\left(\alpha^2 + \frac{b^2}{4\alpha^2}\right)}\,d\alpha &= \pi^{\frac{1}{2}} e^{-b}, \end{aligned}\right.$$

ou, ce qui revient au même,

$$(34)\qquad \left\{\begin{aligned} e^{b^2} &= \left(\frac{1}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha^2 - 2b\alpha}\,d\alpha, \\ e^{-b^2} &= \left(\frac{1}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha^2}\cos 2b\alpha\,d\alpha, \\ e^{-b} &= \left(\frac{1}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\left(\alpha^2 + \frac{b^2}{4\alpha^2}\right)}\,d\alpha. \end{aligned}\right.$$

Ces dernières équations, dont la seconde coïncide avec l'équation (15), étaient déjà connues. Elles fournissent le moyen de substituer à des exponentielles de la forme $e^{b}$, $e^{\pm b^2}$ d'autres exponentielles dont les exposants sont proportionnels aux carrés ou aux racines carrées des exposants des premières.

Si l'on désigne par $n$ un nombre entier quelconque et que l'on différentie $n$ fois de suite par rapport à $b$ chacune des équations (30) et (31), on obtiendra les valeurs des intégrales

$$(35)\qquad \int_{-\infty}^{\infty} \alpha^n e^{-a\alpha^2 - b\alpha}\,d\alpha$$

et

$$(36)\qquad \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\left(a\alpha^2 + \frac{b}{\alpha^2}\right)}\,\frac{d\alpha}{\alpha^{2n}}.$$

Ces valeurs seront données par les formules

$$(37)\quad \begin{cases} \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \alpha^n e^{-a\alpha^2-b\alpha}\,d\alpha = (-1)^n \left(\frac{\pi}{a}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{\partial^n e^{\frac{b^2}{4a}}}{\partial b^n} = (-1)^n \left(\frac{\pi}{a}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{b}{2a}\right)^n e^{\frac{b^2}{4a}} \\ \qquad \times\left[1+\dfrac{n(n-1)}{1}\dfrac{a}{b^2}+\dfrac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2}\dfrac{a^2}{b^4}+\ldots\right], \\ \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\left(a\alpha^2+\frac{b}{\alpha^2}\right)}\frac{d\alpha}{\alpha^{2n}} = (-1)^n \left(\frac{\pi}{a}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{\partial^n e^{-2a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}}}}{\partial b^n} = \left(\frac{\pi}{a}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{n}{2}} e^{-2\sqrt{ab}} \\ \qquad \times\left[1+\dfrac{n(n-1)}{1}\dfrac{1}{4\sqrt{ab}}+\dfrac{(n+1)n(n-1)(n-2)}{1.2}\left(\dfrac{1}{4\sqrt{ab}}\right)^2+\ldots\right]. \end{cases}$$

Si dans la dernière on pose $n=1$, on retrouvera la formule (32).

Supposons encore

$$(38)\qquad f(\alpha^2) = e^{\pm\alpha^2\sqrt{-1}}.$$

Comme on a

$$(39)\qquad \int_{-\infty}^{\infty} \cos\alpha^2\,d\alpha = \int_{-\infty}^{\infty} \sin\alpha^2\,d\alpha = \left(\frac{\pi}{2}\right)^{\frac{1}{2}},$$

et, par suite,

$$(40)\qquad \int_{-\infty}^{\infty} e^{\pm\alpha^2\sqrt{-1}}\,d\alpha = \int_{-\infty}^{\infty} \cos\alpha^2\,d\alpha \pm \sqrt{-1}\int_{-\infty}^{\infty} \sin\alpha^2\,d\alpha = \left(\frac{\pi}{2}\right)^{\frac{1}{2}}(1\pm\sqrt{-1}),$$

on conclura des formules (26) et (27)

$$(41)\quad \begin{cases} \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{+(a\alpha^2+b\alpha)\sqrt{-1}}\,d\alpha = \left(\frac{\pi}{2a}\right)^{\frac{1}{2}}(1+\sqrt{-1})\,e^{-\frac{b^2}{4a}\sqrt{-1}}, \\ \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(a\alpha^2+b\alpha)\sqrt{-1}}\,d\alpha = \left(\frac{\pi}{2a}\right)^{\frac{1}{2}}(1-\sqrt{-1})\,e^{+\frac{b^2}{4a}\sqrt{-1}}; \end{cases}$$

$$(42)\quad \begin{cases} \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{+\left(a\alpha^2+\frac{b}{\alpha^2}\right)\sqrt{-1}}\,d\alpha = \left(\frac{\pi}{2a}\right)^{\frac{1}{2}}(1+\sqrt{-1})\,e^{2a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}}\sqrt{-1}}, \\ \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\left(a\alpha^2+\frac{b}{\alpha^2}\right)\sqrt{-1}}\,d\alpha = \left(\frac{\pi}{2a}\right)^{\frac{1}{2}}(1-\sqrt{-1})\,e^{-2a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}}\sqrt{-1}}. \end{cases}$$

Si l'on désigne par $n$ un nombre entier et que l'on différentie $n$ fois de suite par rapport à $b$ chacune des équations (41) et (42), on obtiendra



les valeurs des intégrales

$$(43)\qquad \int_{-\infty}^{\infty} \alpha^n e^{\pm(a\alpha^2+b\alpha)\sqrt{-1}}\,d\alpha$$

et

$$(44)\qquad \int_{-\infty}^{\infty} e^{\pm\left(a\alpha^2+\frac{b}{\alpha^2}\right)\sqrt{-1}}\,\frac{d\alpha}{\alpha^{2n}}.$$

Ces valeurs seront données par les formules

$$(45)\quad \begin{cases} \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \alpha^n e^{(a\alpha^2+b\alpha)\sqrt{-1}}\,d\alpha \\ \quad = \left(\dfrac{\pi}{2a}\right)^{\frac{1}{2}} \dfrac{1+\sqrt{-1}}{(\sqrt{-1})^n} \dfrac{\partial^n e^{-\frac{b^2}{4a}\sqrt{-1}}}{\partial b^n} = (-1)^n \left(\dfrac{\pi}{2a}\right)^{\frac{1}{2}}(1+\sqrt{-1})\left(\dfrac{b}{2a}\right)^n e^{-\frac{b^2}{4a}\sqrt{-1}} \\ \quad \times\left[1+\dfrac{n(n-1)}{1}\dfrac{a}{b^2}\sqrt{-1}-\dfrac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2}\dfrac{a^2}{b^4}-\ldots\right], \\ \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \alpha^n e^{-(a\alpha^2+b\alpha)\sqrt{-1}}\,d\alpha \\ \quad = \left(\dfrac{\pi}{2a}\right)^{\frac{1}{2}} \dfrac{1-\sqrt{-1}}{(-\sqrt{-1})^n} \dfrac{\partial^n e^{\frac{b^2}{4a}\sqrt{-1}}}{\partial b^n} = (-1)^n \left(\dfrac{\pi}{2a}\right)^{\frac{1}{2}}(1-\sqrt{-1})\left(\dfrac{b}{2a}\right)^n e^{\frac{b^2}{4a}\sqrt{-1}} \\ \quad \times\left[1-\dfrac{n(n-1)}{1}\dfrac{a}{b^2}\sqrt{-1}-\dfrac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2}\dfrac{a^2}{b^4}+\ldots\right]; \end{cases}$$

$$(46)\quad \begin{cases} \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{\left(a\alpha^2+\frac{b}{\alpha^2}\right)\sqrt{-1}}\,\frac{d\alpha}{\alpha^{2n}} \\ \quad = \left(\dfrac{\pi}{2a}\right)^{\frac{1}{2}} \dfrac{1+\sqrt{-1}}{(\sqrt{-1})^n} \dfrac{\partial^n e^{2a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}}\sqrt{-1}}}{\partial b^n} = \left(\dfrac{\pi}{2a}\right)^{\frac{1}{2}}(1+\sqrt{-1})\left(\dfrac{a}{b}\right)^{\frac{n}{2}} e^{2a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}}\sqrt{-1}} \\ \quad \times\left[1+\dfrac{n(n-1)}{1}\dfrac{1}{4\sqrt{ab}}\sqrt{-1}-\dfrac{(n+1)n(n-1)(n-2)}{1.2}\left(\dfrac{1}{4\sqrt{ab}}\right)^2-\ldots\right], \\ \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\left(a\alpha^2+\frac{b}{\alpha^2}\right)\sqrt{-1}}\,\frac{d\alpha}{\alpha^{2n}} \\ \quad = \left(\dfrac{\pi}{2a}\right)^{\frac{1}{2}} \dfrac{1-\sqrt{-1}}{(-\sqrt{-1})^n} \dfrac{\partial^n e^{-2a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}}\sqrt{-1}}}{\partial b^n} = \left(\dfrac{\pi}{2a}\right)^{\frac{1}{2}}(1-\sqrt{-1})\left(\dfrac{a}{b}\right)^{\frac{n}{2}} e^{-2a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}}\sqrt{-1}} \\ \quad \times\left[1-\dfrac{n(n-1)}{1}\dfrac{1}{4\sqrt{ab}}\sqrt{-1}-\dfrac{(n+1)n(n-1)(n-2)}{1.2}\left(\dfrac{1}{4\sqrt{ab}}\right)^2+\ldots\right]. \end{cases}$$

§ III. A l'aide des principes établis dans les paragraphes précédents il sera facile de transformer l'intégrale multiple

$$(47)\qquad \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\ldots f(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\ldots)\cos a\alpha\cos b\beta\cos c\gamma\ldots\,d\alpha\,d\beta\,d\gamma\ldots$$

en une intégrale double, quelquefois même en une intégrale simple. Pour y parvenir, j'observe d'abord que, si dans l'équation (8) on suppose $x$ positif, on pourra prendre pour limites de l'intégration relative à $\mu$

$$\mu=0,\qquad \mu=\infty;$$

ce qui donnera

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{0}^{\infty}\cos\alpha(x-\mu)\,f(\mu)\,d\alpha\,d\mu$$
$$=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty}\int_{0}^{\infty}\cos\alpha(x-\mu)\,f(\mu)\,d\alpha\,d\mu.$$

Si maintenant on remplace $\alpha$ par $\theta^2$ et $\mu$ par $\tau^2$, on trouvera

$$f(x)=\frac{4}{\pi}\int_{0}^{\infty}\int_{0}^{\infty}\cos\theta^2(x-\tau^2)\,f(\tau^2)\,\theta\,d\theta\,\tau\,d\tau,$$

puis, en écrivant $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\ldots$ au lieu de $x$,

$$(48)\qquad f(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\ldots)=\frac{4}{\pi}\int_{0}^{\infty}\int_{0}^{\infty}\cos\theta^2(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\ldots-\tau^2)\,f(\tau^2)\,\theta\,d\theta\,\tau\,d\tau.$$

Cela posé, l'intégrale (47) prendra la forme

$$(49)\qquad \left\{\begin{aligned}&\frac{4}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{0}^{\infty}\int_{0}^{\infty}\cos\theta^2(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\ldots-\tau^2)\\&\quad\times\cos a\alpha\cos b\beta\cos c\gamma\ldots f(\tau^2)\,d\alpha\,d\beta\,d\gamma\ldots\theta\,d\theta\,\tau\,d\tau,\end{aligned}\right.$$

et, par suite, elle ne sera autre chose que la partie réelle F de l'expression imaginaire $F+G\sqrt{-1}$ déterminée par l'équation

$$(50)\qquad \left\{\begin{aligned}F+G\sqrt{-1}=&\frac{4}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{0}^{\infty}\int_{0}^{\infty}e^{\theta^2(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\ldots-\tau^2)\sqrt{-1}}\\&\times\cos a\alpha\cos b\beta\cos c\gamma\ldots f(\tau^2)\,d\alpha\,d\beta\,d\gamma\ldots\theta\,d\theta\,\tau\,d\tau.\end{aligned}\right.$$



D'ailleurs, en ayant égard à la première des formules (41), on trouve

$$(51)\qquad \int_{-\infty}^{\infty}e^{\theta^2\alpha^2\sqrt{-1}}\cos a\alpha\,d\alpha=\int_{-\infty}^{\infty}e^{(\theta^2\alpha^2+a\alpha)\sqrt{-1}}\,d\alpha=\left(\frac{\pi}{2}\right)^{\frac{1}{2}}\frac{1+\sqrt{-1}}{\theta}\,e^{-\frac{a^2}{4\theta^2}\sqrt{-1}}.$$

On aura de même

$$\int_{-\infty}^{\infty}e^{\theta^2\beta^2\sqrt{-1}}\cos b\beta\,d\beta=\left(\frac{\pi}{2}\right)^{\frac{1}{2}}\frac{1+\sqrt{-1}}{\theta}\,e^{-\frac{b^2}{4\theta^2}\sqrt{-1}},$$
$$\int_{-\infty}^{\infty}e^{\theta^2\gamma^2\sqrt{-1}}\cos c\gamma\,d\gamma=\left(\frac{\pi}{2}\right)^{\frac{1}{2}}\frac{1+\sqrt{-1}}{\theta}\,e^{-\frac{c^2}{4\theta^2}\sqrt{-1}},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Donc, si l'on désigne par $n$ le nombre des variables $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, …, on tirera de l'équation (50)

$$(52)\qquad \left\{\begin{aligned}&F+G\sqrt{-1}\\&\quad=\frac{4}{\pi}\pi^{\frac{n}{2}}\left(\frac{1+\sqrt{-1}}{\sqrt{2}}\right)^n\int_{0}^{\infty}\int_{0}^{\infty}e^{-\left(\theta^2\tau^2+\frac{a^2+b^2+c^2+\ldots}{4\theta^2}\right)\sqrt{-1}}f(\tau^2)\,\frac{d\theta}{\theta^{n-1}}\,\tau\,d\tau.\end{aligned}\right.$$

Comme on a d'autre part

$$\frac{1+\sqrt{-1}}{\sqrt{2}}=\cos\frac{\pi}{4}+\sqrt{-1}\sin\frac{\pi}{4},$$

on en conclura

$$\left(\frac{1+\sqrt{-1}}{\sqrt{2}}\right)^n=e^{\frac{n\pi}{4}\sqrt{-1}}$$

et, par suite,

$$(53)\qquad F+G\sqrt{-1}=4\pi^{\frac{n}{2}-1}\int_{0}^{\infty}\int_{0}^{\infty}e^{\left(\frac{n\pi}{4}-\theta^2\tau^2-\frac{a^2+b^2+c^2+\ldots}{4\theta^2}\right)\sqrt{-1}}f(\tau^2)\,\frac{d\theta}{\theta^{n-1}}\,\tau\,d\tau.$$

En égalant entre elles les parties réelles des deux membres de cette dernière équation, puis écrivant à la place de la lettre F l'intégrale qu'elle représente, on trouvera

$$(54)\qquad \left\{\begin{aligned}&\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\ldots f(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\ldots)\cos a\alpha\cos b\beta\cos c\gamma\ldots\,d\alpha\,d\beta\,d\gamma\ldots\\&\quad=4\pi^{\frac{n}{2}-1}\int_{0}^{\infty}\int_{0}^{\infty}\cos\left(\frac{n\pi}{4}-\theta^2\tau^2-\frac{a^2+b^2+c^2+\ldots}{4\theta^2}\right)f(\tau^2)\,\frac{d\theta}{\theta^{n-1}}\,\tau\,d\tau.\end{aligned}\right.$$

Il est donc démontré que l'expression (47) peut être généralement transformée en une intégrale double. J'ajoute qu'il est possible de la réduire à une intégrale simple, lorsque $n$ désigne un nombre impair. En effet, dans cette dernière hypothèse, $n-1$ étant nécessairement un nombre pair, on déduira de la seconde des formules (46) la valeur de l'intégrale

$$\int_0^\infty e^{-\left(\theta^2\tau^2+\frac{a^2+b^2+c^2+\dots}{4\theta^2}\right)\sqrt{-1}}\,\frac{d\theta}{\theta^{n-1}},$$

et en faisant, pour abréger,

$$a^2+b^2+c^2+\dots=\rho^2, \tag{55}$$

on trouvera

$$\begin{aligned}
&\int_0^\infty e^{-\left(\theta^2\tau^2+\frac{\rho^2}{4\theta^2}\right)\sqrt{-1}}\,\frac{d\theta}{\theta^{n-1}}\\
&\quad=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^\infty e^{-\left(\theta^2\tau^2+\frac{\rho^2}{4\theta^2}\right)\sqrt{-1}}\,\frac{d\theta}{\theta^{n-1}}\\
&\quad=\frac{\pi^{\frac12}}{2\tau}\left(\frac{2\tau}{\rho}\right)^{\frac{n-1}{2}}\left(\frac{1-\sqrt{-1}}{\sqrt{2}}\right)e^{-\tau\rho\sqrt{-1}}\\
&\qquad\times\left[1-\frac{(n-1)(n-3)}{4}\,\frac{1}{2\tau\rho}\sqrt{-1}-\frac{(n+1)(n-1)(n-3)(n-5)}{4.8}\left(\frac{1}{2\tau\rho}\right)^2+\dots\right].
\end{aligned}$$

Cela posé, l'équation (52) donnera

$$\left\{\begin{aligned}
&\mathrm{F}+\mathrm{G}\sqrt{-1}\\
&\quad=\frac{2^{\frac{n+1}{2}}\pi^{\frac{n-1}{2}}}{\rho^{\frac{n-1}{2}}}\left(\sqrt{-1}\right)^{\frac{n-1}{2}}\int_0^\infty \tau^{\frac{n-1}{2}}e^{-\tau\rho\sqrt{-1}}\\
&\qquad\times\left[1-\frac{(n-1)(n-3)}{4}\,\frac{1}{2\tau\rho}\sqrt{-1}-\frac{(n+1)(n-1)(n-3)(n-5)}{4.8}\left(\frac{1}{2\tau\rho}\right)^2+\dots\right]f(\tau^2)\,d\tau\\
&\quad=2\left(\frac{2\pi}{\rho}\right)^{\frac{n-1}{2}}\int_0^\infty \tau^{\frac{n-1}{2}}e^{\left[\frac{(n-1)\pi}{4}-\tau\rho\right]\sqrt{-1}}\\
&\qquad\times\left[1-\frac{(n-1)(n-3)}{4}\,\frac{1}{2\tau\rho}\sqrt{-1}-\frac{(n+1)(n-1)(n-3)(n-5)}{4.8}\left(\frac{1}{2\tau\rho}\right)^2+\dots\right]f(\tau^2)\,d\tau;
\end{aligned}\right. \tag{56}$$



et l'on aura en conséquence, pour des valeurs impaires de $n$,

$$\left\{\begin{aligned}
\mathrm{F}&=\int_{-\infty}^\infty\int_{-\infty}^\infty\int_{-\infty}^\infty\dots f(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\dots)\cos a\alpha\cos b\beta\cos c\gamma\dots d\alpha\,d\beta\,d\gamma\dots\\
&=2\left(\frac{2\pi}{\rho}\right)^{\frac{n-1}{2}}\int_0^\infty \tau^{\frac{n-1}{2}}\left[1-\frac{(n+1)(n-1)(n-3)(n-5)}{4.8}\left(\frac{1}{2\tau\rho}\right)^2+\dots\right]\\
&\quad\times\cos\left[\frac{(n-1)\pi}{4}-\tau\rho\right]f(\tau^2)\,d\tau+2\left(\frac{2\pi}{\rho}\right)^{\frac{n-1}{2}}\int_0^\infty \tau^{\frac{n-1}{2}}\\
&\quad\times\left[\frac{(n-1)(n-3)}{4}\,\frac{1}{2\tau\rho}-\frac{(n+3)(n+1)(n-1)(n-3)(n-5)(n-7)}{4.8.12}\left(\frac{1}{2\tau\rho}\right)^3+\dots\right]\\
&\quad\times\sin\left[\frac{(n-1)\pi}{4}-\tau\rho\right]f(\tau^2)\,d\tau.
\end{aligned}\right. \tag{57}$$

Si, au lieu d'introduire dans le calcul la quantité $\rho$ déterminée par l'équation (55), on avait supposé

$$a^2+b^2+c^2+\dots=s; \tag{58}$$

alors on aurait trouvé

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty e^{-\left(\theta^2\tau^2+\frac{a^2+b^2+c^2+\dots}{4\theta^2}\right)\sqrt{-1}}\,\frac{d\theta}{\theta^{n-1}}&=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^\infty e^{-\left(\theta^2\tau^2+\frac{s}{4\theta^2}\right)\sqrt{-1}}\,\frac{d\theta}{\theta^{n-1}}\\
&=\frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}2^{n-1}}{\left(\sqrt{-1}\right)^{\frac{n-1}{2}}}\left(\frac{1-\sqrt{-1}}{\sqrt{2}}\right)\frac{\pi^{\frac12}}{2\tau}\,\frac{\partial^{\frac{n-1}{2}}e^{-\tau s^{\frac12}\sqrt{-1}}}{\partial s^{\frac{n-1}{2}}},
\end{aligned}$$

et, par suite, on aurait conclu de la formule (52),

$$\mathrm{F}+\mathrm{G}\sqrt{-1}=(-1)^{\frac{n-1}{2}}2^n\pi^{\frac{n-1}{2}}\int_0^\infty \frac{\partial^{\frac{n-1}{2}}e^{-\tau s^{\frac12}\sqrt{-1}}}{\partial s^{\frac{n-1}{2}}}f(\tau^2)\,d\tau, \tag{59}$$

$$\mathrm{F}=(-1)^{\frac{n-1}{2}}2^n\pi^{\frac{n-1}{2}}\int_0^\infty \frac{\partial^{\frac{n-1}{2}}\cos\tau s^{\frac12}}{\partial s^{\frac{n-1}{2}}}f(\tau^2)\,d\tau. \tag{60}$$

Il suffit de développer cette dernière valeur de F, et de remplacer dans le développement obtenu $s$ par $\rho^2$, pour revenir à la formule (57).

Si dans l'équation (60) on substitue à la quantité F l'intégrale multiple que cette quantité représente, et à l'expression

$$\int_0^\infty \frac{\partial^{\frac{n-1}{2}} \cos \tau s^{\frac{1}{2}}}{\partial s^{\frac{n-1}{2}}} f(\tau^2)\, d\tau$$

l'expression équivalente

$$\frac{1}{2} \frac{d^{\frac{n-1}{2}}}{ds^{\frac{n-1}{2}}} \int_{-\infty}^\infty \cos s^{\frac{1}{2}} \alpha\, f(\alpha^2)\, d\alpha,$$

on aura définitivement, pour des valeurs impaires de $n$,

$$(61)\quad \left\{ \begin{aligned} &\int_{-\infty}^\infty \int_{-\infty}^\infty \int_{-\infty}^\infty \ldots f(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\ldots) \cos a\alpha \cos b\beta \cos c\gamma \ldots d\alpha\, d\beta\, d\gamma \ldots \\ &= (-1)^{\frac{n-1}{2}} 2^{n-1} \pi^{\frac{n-1}{2}} \frac{d^{\frac{n-1}{2}}}{ds^{\frac{n-1}{2}}} \int_{-\infty}^\infty \cos s^{\frac{1}{2}} \alpha\, f(\alpha^2)\, d\alpha, \end{aligned} \right.$$

$s$ désignant toujours la somme $a^2+b^2+c^2+\ldots$. A l'aide de la formule précédente, l'évaluation de l'intégrale multiple

$$\int_{-\infty}^\infty \int_{-\infty}^\infty \int_{-\infty}^\infty \ldots f(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\ldots) \cos a\alpha \cos b\beta \cos c\gamma \ldots d\alpha\, d\beta\, d\gamma \ldots,$$

dans le cas où les variables $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ sont en nombre impair, se réduit à la détermination d'une intégrale simple de même espèce, c'est-à-dire de la forme

$$\int_{-\infty}^\infty f(\alpha^2) \cos a\alpha\, d\alpha.$$

Si l'on fait $n=1$, l'équation (61) deviendra identique. Si l'on pose $n=3$, elle donnera

$$(62)\quad \left\{ \begin{aligned} &\int_{-\infty}^\infty \int_{-\infty}^\infty \int_{-\infty}^\infty f(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2) \cos a\alpha \cos b\beta \cos c\gamma\, d\alpha\, d\beta\, d\gamma \\ &= -4\pi \frac{d}{ds} \int_{-\infty}^\infty \cos s^{\frac{1}{2}} \alpha\, f(\alpha^2)\, d\alpha \\ &= \frac{2\pi}{(a^2+b^2+c^2)^{\frac{1}{2}}} \int_{-\infty}^\infty \alpha\, f(\alpha^2) \sin (a^2+b^2+c^2)^{\frac{1}{2}} \alpha\, d\alpha. \end{aligned} \right.$$



Les intégrations indiquées dans l'équation (62) devant s'effectuer entre les limites $-\infty$, $+\infty$ de chaque variable, on peut, sans altérer cette équation, y substituer aux cosinus des exponentielles imaginaires. On trouvera ainsi

$$(63)\quad \left\{ \begin{aligned} &\int_{-\infty}^\infty \int_{-\infty}^\infty \int_{-\infty}^\infty f(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2) e^{(a\alpha+b\beta+c\gamma)\sqrt{-1}}\, d\alpha\, d\beta\, d\gamma \\ &= -4\pi \frac{d}{ds} \int_{-\infty}^\infty e^{s^{\frac{1}{2}}\alpha\sqrt{-1}} f(\alpha^2)\, d\alpha \\ &= -\frac{2\pi\sqrt{-1}}{(a^2+b^2+c^2)^{\frac{1}{2}}} \int_{-\infty}^\infty \alpha e^{(a^2+b^2+c^2)^{\frac{1}{2}}\alpha\sqrt{-1}} f(\alpha^2)\, d\alpha. \end{aligned} \right.$$

Si maintenant on remplace les variables $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ considérées comme représentant des coordonnées rectangulaires par trois coordonnées polaires $p$, $q$, $r$, en sorte qu'on ait

$$(64)\qquad \alpha = r\cos p, \qquad \beta = r \sin p \cos q, \qquad \gamma = r \sin p \sin q,$$

la formule (63) deviendra

$$(65)\quad \left\{ \begin{aligned} &\int_0^\pi \int_0^{2\pi} \int_0^\infty r^2 f(r^2) e^{(a\cos p + b \sin p \cos q + c \sin p \sin q) r\sqrt{-1}} \sin p\, dp\, dq\, dr \\ &= -\frac{2\pi\sqrt{-1}}{(a^2+b^2+c^2)^{\frac{1}{2}}} \int_{-\infty}^\infty \alpha e^{(a^2+b^2+c^2)^{\frac{1}{2}}\alpha\sqrt{-1}} f(\alpha^2)\, d\alpha. \end{aligned} \right.$$

On en conclura, en posant $b=0$, $c=0$,

$$(66)\quad 2\pi \int_0^\pi \int_0^\infty r^2 f(r^2) e^{ar\cos p\sqrt{-1}} \sin p\, dp\, dr = -\frac{2\pi\sqrt{-1}}{a} \int_{-\infty}^\infty \alpha e^{a\alpha\sqrt{-1}} f(\alpha^2)\, d\alpha.$$

On aura par suite

$$\begin{aligned} &2\pi \int_0^\pi \int_0^\infty r^2 f(r^2) e^{(a^2+b^2+c^2)^{\frac{1}{2}} r \cos p \sqrt{-1}} \sin p\, dp\, dr \\ &= -\frac{2\pi\sqrt{-1}}{(a^2+b^2+c^2)^{\frac{1}{2}}} \int_{-\infty}^\infty \alpha e^{(a^2+b^2+c^2)^{\frac{1}{2}}\alpha\sqrt{-1}} f(\alpha^2)\, d\alpha; \end{aligned}$$

d'où il résulte que l'équation (67) pourra être présentée sous la forme

$$(67)\quad \begin{cases} \displaystyle\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{\infty} r^2 f(r^2)\, e^{(a\cos p + b\sin p\cos q + c\sin p\sin q)\, r\sqrt{-1}} \sin p\, dp\, dq\, dr \\ \displaystyle\quad = 2\pi\int_0^{\pi}\int_0^{\infty} r^2 f(r^2)\, e^{(a^2+b^2+c^2)^{\frac{1}{2}} r\cos p\sqrt{-1}} \sin p\, dp\, dr. \end{cases}$$

Cette dernière équation se simplifie, lorsqu'on fait, pour abréger,

$$(68)\qquad \int_0^{\infty} r^2 f(r^2)\, e^{ar\sqrt{-1}}\, dr = \mathrm{F}(a),$$

et se réduit à

$$(69)\quad \begin{cases} \displaystyle\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} \mathrm{F}(a\cos p + b\sin p\cos q + c\sin p\sin q)\sin p\, dp\, dq \\ \displaystyle\quad = 2\pi\int_0^{\pi} \mathrm{F}\left[(a^2+b^2+c^2)^{\frac{1}{2}}\cos p\right]\sin p\, dp. \end{cases}$$

Elle se trouve ainsi ramenée à la formule générale établie par M. Poisson, à l'aide de considérations purement géométriques, dans un Mémoire lu à l'Institut le 19 juillet 1819.

On pourrait encore déduire de la formule (63) plusieurs conséquences dignes de remarque. Je me contenterai d'en offrir une nouvelle. Concevons que, dans la formule dont il s'agit, on remplace $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ par $\mathrm{A}^{\frac{1}{2}}\alpha$, $\mathrm{B}^{\frac{1}{2}}\beta$, $\mathrm{C}^{\frac{1}{2}}\gamma$, et $a$, $b$, $c$ par $\dfrac{a}{\mathrm{A}^{\frac{1}{2}}}$, $\dfrac{b}{\mathrm{B}^{\frac{1}{2}}}$, $\dfrac{c}{\mathrm{C}^{\frac{1}{2}}}$; A, B, C désignant trois nombres quelconques. On trouvera

$$(70)\quad \begin{cases} \displaystyle \mathrm{A}^{\frac{1}{2}}\mathrm{B}^{\frac{1}{2}}\mathrm{C}^{\frac{1}{2}}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(\mathrm{A}\alpha^2+\mathrm{B}\beta^2+\mathrm{C}\gamma^2)\, e^{(a\alpha+b\beta+c\gamma)\sqrt{-1}}\, d\alpha\, d\beta\, d\gamma \\ \displaystyle\quad = -\frac{2\pi\sqrt{-1}}{\left(\frac{a^2}{\mathrm{A}}+\frac{b^2}{\mathrm{B}}+\frac{c^2}{\mathrm{C}}\right)^{\frac{1}{2}}}\int_{-\infty}^{\infty} \alpha\, e^{\left(\frac{a^2}{\mathrm{A}}+\frac{b^2}{\mathrm{B}}+\frac{c^2}{\mathrm{C}}\right)^{\frac{1}{2}}\alpha\sqrt{-1}} f(\alpha^2)\, d\alpha. \end{cases}$$

En opérant sur cette dernière équation comme sur la formule (63)



elle-même, puis ayant égard à l'équation (68), on obtiendra la suivante

$$(71)\quad \begin{cases} \displaystyle\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} \mathrm{F}\left[\frac{a\cos p + b\sin p\cos q + c\sin p\sin q}{(\mathrm{A}\cos^2 p + \mathrm{B}\sin^2 p\cos^2 q + \mathrm{C}\sin^2 p\sin^2 q)^{\frac{1}{2}}}\right] \\ \displaystyle\qquad \times\frac{\sin p\, dp\, dq}{(\mathrm{A}\cos^2 p + \mathrm{B}\sin^2 p\cos^2 q + \mathrm{C}\sin^2 p\sin^2 q)^{\frac{3}{2}}} \\ \displaystyle\quad = \frac{2\pi}{(\mathrm{ABC})^{\frac{1}{2}}}\int_0^{\pi} \mathrm{F}\left[\left(\frac{a^2}{\mathrm{A}}+\frac{b^2}{\mathrm{B}}+\frac{c^2}{\mathrm{C}}\right)^{\frac{1}{2}}\cos p\right]\sin p\, dp. \end{cases}$$

Si l'on suppose en particulier que la fonction indiquée par la caractéristique F se réduise à l'unité, on aura simplement la formule

$$(72)\qquad \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\sin p\, dp\, dq}{(\mathrm{A}\cos^2 p + \mathrm{B}\sin^2 p\cos^2 q + \mathrm{C}\sin^2 p\sin^2 q)^{\frac{3}{2}}} = \frac{4\pi}{(\mathrm{ABC})^{\frac{1}{2}}},$$

qu'il est facile de vérifier directement.

Les formules (57) et (61) cessant d'être applicables, lorsqu'on prend pour $n$ un nombre impair, il ne parait pas possible de réduire dans ce cas l'expression (47) à une intégrale simple. Mais on peut alors la changer par le moyen de l'équation (54) en une intégrale double qui renferme, à la place des quantités $a, b, c, \ldots$, la somme de leurs carrés, savoir,

$$a^2 + b^2 + c^2 + \ldots.$$

Quand on suppose $n = 2$, l'équation (54) devient

$$(73)\quad \begin{cases} \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(\alpha^2+\beta^2)\cos a\alpha\cos b\beta\, d\alpha\, d\beta \\ \displaystyle\quad = 4\int_0^{\infty}\int_0^{\infty} \sin\left(\theta^2\tau^2 + \frac{a^2+b^2}{4\theta^2}\right) f(\tau^2)\,\frac{d\theta}{\theta}\,\tau\, d\tau. \end{cases}$$

Si l'on fait en outre

$$\theta^2 = \frac{1}{\mu}, \qquad \tau^2 = \mu\nu,$$

on trouvera

$$(74)\quad \begin{cases} \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(\alpha^2+\beta^2)\cos a\alpha\cos b\beta\, d\alpha\, d\beta \\ \displaystyle\quad =\int_0^{\infty}\int_0^{\infty}\sin\left(\nu+\frac{a^2+b^2}{4}\mu\right)f(\mu\nu)\,d\mu\,d\nu. \end{cases}$$

Ajoutons que le second membre de l'équation (74) est la somme des deux expressions

$$\int_0^{\infty}\int_0^{\infty}\sin\nu\cos\frac{a^2+b^2}{4}\mu\, f(\mu\nu)\,d\mu\,d\nu,$$

$$\int_0^{\infty}\int_0^{\infty}\cos\nu\sin\frac{a^2+b^2}{4}\mu\, f(\mu\nu)\,d\mu\,d\nu,$$

dont chacune équivaut à la suivante

$$\int_0^{\infty}\int_0^{\infty}\sin\frac{(a^2+b^2)^{\frac{1}{2}}\alpha}{2}\cos\frac{(a^2+b^2)^{\frac{1}{2}}\beta}{2}f(\alpha\beta)\,d\alpha\,d\beta.$$

Il en résulte que l'équation (74) peut être présentée sous la forme

$$(75)\quad \begin{cases} \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(\alpha^2+\beta^2)\cos a\alpha\cos b\beta\, d\alpha\, d\beta \\ \displaystyle\quad =2\int_0^{\infty}\int_0^{\infty}\sin\nu\cos\frac{a^2+b^2}{4}\mu\, f(\mu\nu)\,d\mu\,d\nu. \end{cases}$$

§ IV. L'intégrale multiple que renferme le second membre de l'équation (1) (§ I) est comprise, comme cas particulier, dans une autre intégrale que nous allons faire connaître, et qui jouit de propriétés remarquables. Supposons que, le nombre $n$ des variables $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, ... étant toujours égal à celui des variables $\mu$, $\nu$, $\varpi$, ..., on désigne par

$$\mathrm{M},\quad \mathrm{N},\quad \mathrm{P},\quad \ldots$$

$n$ fonctions différentes de ces dernières. Concevons en outre que, parmi les divers systèmes de valeurs des variables $\mu$, $\nu$, $\varpi$, ... qui se composent de valeurs de $\mu$ renfermées entre les limites $\mu'$, $\mu''$, de valeurs de $\nu$ renfermées entre les limites $\nu'$, $\nu''$, de valeurs de $\varpi$ renfermées entre les limites $\varpi'$, $\varpi''$, etc., on recherche tous ceux qui satisfont aux équations simultanées



$$(76)\qquad \mathrm{M}=0,\quad \mathrm{N}=0,\quad \mathrm{P}=0,\quad \ldots.$$

Soient respectivement

$$(77)\quad \begin{cases} \mu=\mu_0, & \nu=\nu_0, & \varpi=\varpi_0, & \ldots, \\ \mu=\mu_1, & \nu=\nu_1, & \varpi=\varpi_1, & \ldots, \\ \ldots\ldots, & \ldots\ldots, & \ldots\ldots, & \ldots, \\ \mu=\mu_{m-1}, & \nu=\nu_{m-1}, & \varpi=\varpi_{m-1}, & \ldots \end{cases}$$

les systèmes dont il s'agit, en nombre égal à $m$; et construisons l'intégrale multiple

$$(78)\quad \int_{-\infty}^{\infty}\int_{\mu'}^{\mu''}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{\nu'}^{\nu''}\ldots\cos\alpha\mathrm{M}\cos\beta\mathrm{N}\cos\gamma\mathrm{P}\ldots f(\mu,\nu,\varpi,\ldots)\,d\alpha\,d\mu\,d\beta\,d\nu\,d\gamma\,d\varpi\ldots,$$

en ayant soin, toutes les fois qu'elle devient indéterminée, de multiplier la fonction sous les signes $\int\int\int\ldots$ par un facteur auxiliaire de la forme

$$(4)\qquad \frac{\psi(k\alpha,k\beta,k\gamma,\ldots)}{\psi(0,0,0,\ldots)},$$

dans lequel $\psi$ désigne une nouvelle fonction convenablement choisie, et $k$ une quantité positive infiniment petite. Je dis que l'intégrale (78), ou celle qui prendra sa place, savoir,

$$(79)\quad \begin{cases} \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\int_{\mu'}^{\mu''}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{\nu'}^{\nu''}\ldots\frac{\psi(k\alpha,k\beta,k\gamma,\ldots)}{\psi(0,0,0,\ldots)}\cos\alpha\mathrm{M}\cos\beta\mathrm{N}\cos\gamma\mathrm{P}\ldots \\ \quad\times f(\mu,\nu,\varpi,\ldots)\,d\alpha\,d\mu\,d\beta\,d\nu\,d\gamma\,d\varpi\ldots, \end{cases}$$

aura une valeur en termes finis qu'il sera facile de calculer. Pour le démontrer, supposons d'abord que la limite $\mu''$ de la variable $\mu$ soit très peu différente de la limite $\mu'$, que $\nu''$ diffère aussi très peu de $\nu'$, $\varpi''$ de $\varpi'$, etc., et que, parmi les valeurs de $\mu$, $\nu$, $\varpi$, ... renfermées entre ces limites respectives, les seules qui puissent à la fois satisfaire aux équations (76) soient les suivantes

$$(80)\qquad \mu = \mu_0, \qquad \nu = \nu_0, \qquad \varpi = \varpi_0, \qquad \ldots.$$

Alors, si l'on remplace $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ par $\frac{\alpha}{k}, \frac{\beta}{k}, \frac{\gamma}{k}, \ldots$, et si l'on fait de plus

$$(81)\qquad \mu = \mu_0 + ku, \qquad \nu = \nu_0 + kv, \qquad \varpi = \varpi_0 + kw, \qquad \ldots,$$

l'intégrale (79) prendra la forme

$$(82)\quad \left\{\begin{aligned} &\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\frac{\mu_0-\mu'}{k}}^{\frac{\mu''-\mu_0}{k}}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\frac{\nu_0-\nu'}{k}}^{\frac{\nu''-\nu_0}{k}}\cdots\frac{\psi(\alpha,\beta,\gamma,\ldots)}{\psi(0,0,0,\ldots)}\cos\alpha(au+bv+cw+\ldots\pm\varepsilon)\\ &\quad\times\cos\beta(a'u+b'v+c'w+\ldots\pm\varepsilon')\cos\gamma(a''u+b''v+c''w+\ldots\pm\varepsilon'')\ldots\\ &\quad\times f(\mu_0+ku,\nu_0+kv,\varpi+kw,\ldots)\,d\alpha\,du\,d\beta\,dv\,d\gamma\,dw\ldots,\end{aligned}\right.$$

$\varepsilon, \varepsilon', \varepsilon'', \ldots$ désignant des variables qui s'évanouissent avec la quantité $k$, et

$$a, \quad b, \quad c, \quad \ldots, \quad a', \quad b', \quad c', \quad \ldots, \quad a'', \quad b'', \quad c'', \quad \ldots$$

les valeurs que reçoivent les fonctions

$$\frac{\partial \mathrm{M}}{\partial \mu}, \quad \frac{\partial \mathrm{M}}{\partial \nu}, \quad \frac{\partial \mathrm{M}}{\partial \varpi}, \quad \ldots, \quad \frac{\partial \mathrm{N}}{\partial \mu}, \quad \frac{\partial \mathrm{N}}{\partial \nu}, \quad \frac{\partial \mathrm{N}}{\partial \varpi}, \quad \ldots, \quad \frac{\partial \mathrm{P}}{\partial \mu}, \quad \frac{\partial \mathrm{P}}{\partial \nu}, \quad \frac{\partial \mathrm{P}}{\partial \varpi}, \quad \ldots$$

quand on attribue les valeurs particulières $\mu_0, \nu_0, \varpi_0, \ldots$ aux variables $\mu, \nu, \varpi, \ldots$. Si l'on pose maintenant $k = 0$, l'intégrale (82) deviendra

$$(83)\quad \left\{\begin{aligned} &f(\mu_0,\nu_0,\varpi_0,\ldots)\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\frac{\psi(\alpha,\beta,\gamma,\ldots)}{\psi(0,0,0,\ldots)}\cos\alpha(au+bv+cw+\ldots)\\ &\quad\times\cos\beta(a'u+b'v+c'w+\ldots)\cos\gamma(a''u+b''v+c''w+\ldots)\ldots\\ &\quad\times d\alpha\,du\,d\beta\,dv\,d\gamma\,dw\ldots.\end{aligned}\right.$$

Toutefois il est essentiel d'observer que cette dernière expression équivaut à l'intégrale (79), dans le cas seulement où la quantité $\mu_0$ se trouve renfermée entre les limites $\mu', \mu''$, la quantité $\nu_0$ entre les limites $\nu', \nu''$, la quantité $\varpi_0$ entre les limites $\varpi', \varpi''$, etc. Si une seule de ces conditions n'était pas remplie, par exemple, si $\mu_0$ était située hors



des limites $\mu', \mu''$, les deux quantités

$$-\frac{\mu_0-\mu'}{k}, \qquad +\frac{\mu''-\mu_0}{k},$$

étant alors de même signe, se réduiraient l'une et l'autre à $+\infty$, ou l'une et l'autre à $-\infty$; et par conséquent, les deux limites de $u$ venant à se confondre pour des valeurs infiniment petites de $k$, l'intégrale (82) aurait une valeur nulle.

Il reste à exprimer en termes finis la valeur de l'intégrale

$$(84)\quad \left\{\begin{aligned} &\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\frac{\psi(\alpha,\beta,\gamma,\ldots)}{\psi(0,0,0,\ldots)}\cos\alpha(au+bv+cw+\ldots)\\ &\quad\times\cos\beta(a'u+b'v+c'w+\ldots)\cos\gamma(a''u+b''v+c''w+\ldots)\ldots\\ &\quad\times d\alpha\,du\,d\beta\,dv\,d\gamma\,dw\ldots.\end{aligned}\right.$$

Cette valeur peut être facilement calculée dans le cas particulier où l'on suppose

$$\begin{array}{llll} a = 1, & b = 0, & c = 0, & \ldots, \\ a' = 0, & b' = 1, & c' = 0, & \ldots, \\ a'' = 0, & b'' = 0, & c'' = 1, & \ldots, \\ \ldots\ldots, & \ldots\ldots, & \ldots\ldots, & \ldots \end{array}$$

En effet, si dans la formule (19) on remplace la fonction $f(x, y, z, \ldots)$ par l'unité, les variables $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ par $\frac{\alpha}{k}, \frac{\beta}{k}, \frac{\gamma}{k}, \ldots$ et les variables $\mu, \nu, \varpi$ par $x + ku$, $y + kv$, $z + kw$, ..., on tirera de cette formule

$$(85)\quad \left\{\begin{aligned} &\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\frac{\psi(\alpha,\beta,\gamma,\ldots)}{\psi(0,0,0,\ldots)}\cos\alpha u\cos\beta v\cos\gamma w\ldots\\ &\qquad\qquad\times d\alpha\,du\,d\beta\,dv\,d\gamma\,dw\ldots = (2\pi)^n.\end{aligned}\right.$$

On aura, par exemple, dans le cas de $n = 1$,

$$(86)\qquad \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\psi(\alpha)}{\psi(0)}\cos\alpha u\,d\alpha\,du = 2\pi;$$

dans le cas de $n = 2$,

$$(87)\qquad \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\psi(\alpha,\beta)}{\psi(0,0)}\cos\alpha u\cos\beta v\,d\alpha\,du\,d\beta\,dv = 4\pi^2.$$

Etc., etc.

De plus, si dans l'intégrale (84) on fait successivement $n = 1$, $n = 2$, …, on obtiendra les suivantes

$$\text{(88)} \qquad \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\psi(\alpha)}{\psi(0)} \cos a\alpha u \, d\alpha \, du,$$

$$\text{(89)} \qquad \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\psi(\alpha, \beta)}{\psi(0, 0)} \cos\alpha(au + bv) \cos\beta(a'u + b'v) \, d\alpha \, du \, d\beta \, dv.$$

Etc., etc.

Pour fixer la valeur de l'intégrale (88), on posera

$$au = \mu \qquad \text{ou} \qquad u = \frac{\mu}{a},$$

ce qui réduira cette intégrale à la forme

$$\frac{1}{a}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{\mp\infty}^{\pm\infty} \frac{\psi(\alpha)}{\psi(0)} \cos\alpha\mu \, d\alpha \, d\mu = \pm \frac{2\pi}{a},$$

les signes supérieurs ou inférieurs devant être adoptés, selon que la quantité $a$ sera positive ou négative. On aura par suite

$$\text{(90)} \qquad \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\psi(\alpha)}{\psi(0)} \cos a\alpha u \, d\alpha \, du = \frac{2\pi}{\sqrt{a^2}},$$

$\sqrt{a^2}$ désignant la valeur numérique de $a$. Pour fixer la valeur de l'intégrale (89), on posera successivement

$$au + bv = \mu, \qquad \text{ou} \qquad u = \frac{\mu - bv}{a},$$

puis

$$a'\frac{\mu - bv}{a} + b'v = \nu, \qquad \text{ou} \qquad v = \frac{a\nu - a'\mu}{ab' - a'b};$$

et l'on reconnaitra ainsi que l'intégrale (89) est équivalente aux deux expressions

$$\frac{1}{a}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{\mp\infty}^{\pm\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\psi(\alpha, \beta)}{\psi(0, 0)} \cos\alpha\mu \cos\beta\left(a'\frac{\mu - bv}{a} + b'v\right) d\alpha \, d\mu \, d\beta \, d\nu,$$

$$\frac{1}{ab' - a'b}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{\mp\infty}^{\pm\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{\mp\infty}^{\pm\infty} \frac{\psi(\alpha, \beta)}{\psi(0, 0)} \cos\alpha\mu \cos\beta\nu \, d\alpha \, d\mu \, d\beta \, d\nu,$$



dont la dernière se réduit à

$$\pm \frac{4\pi^2}{ab' - a'b},$$

le signe supérieur ou inférieur devant être adopté, selon que la différence $ab' - a'b$ est positive ou négative. Donc, si, pour éviter le double signe, on substitue à la différence dont il s'agit sa valeur numérique, c'est-à-dire la quantité positive

$$\sqrt{(ab' - a'b)^2},$$

on aura définitivement

$$\text{(91)} \qquad \left\{ \begin{aligned} &\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\psi(\alpha, \beta)}{\psi(0, 0)} \cos\alpha(au + bv) \cos(a'u + b'v) \, d\alpha \, du \, d\beta \, dv \\ &\quad = \frac{(2\pi)^2}{\sqrt{(ab' - a'b)^2}}. \end{aligned} \right.$$

On prouverait de la même manière que l'intégrale (84) se réduit, pour $n = 3$, à

$$\frac{(2\pi)^3}{\sqrt{(ab'c'' - ab''c' + a'b''c - a'bc'' + a''bc' - a''b'c)^2}},$$

et généralement, pour une valeur quelconque de $n$, à

$$\text{(92)} \qquad \frac{(2\pi)^n}{\sqrt{D^2}},$$

D étant le dénominateur commun des fractions propres à représenter les valeurs particulières qu'on obtient pour $u$, $v$, $w$, … en résolvant les équations linéaires

$$\text{(93)} \qquad \left\{ \begin{array}{l} au + bv + cw + \ldots = 1, \\ a'u + b'v + c'w + \ldots = 1, \\ a''u + b''v + c''w + \ldots = 1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array} \right.$$

Il est essentiel d'observer que si l'on désigne par L le dénominateur commun des fractions qui représentent les valeurs de $u$, $v$, $w$, ... tirées des équations

$$(94)\qquad \begin{cases} u\dfrac{\partial M}{\partial \mu}+v\dfrac{\partial M}{\partial \nu}+w\dfrac{\partial M}{\partial \varpi}+\ldots=1,\\ u\dfrac{\partial N}{\partial \mu}+v\dfrac{\partial N}{\partial \nu}+w\dfrac{\partial N}{\partial \varpi}+\ldots=1,\\ u\dfrac{\partial P}{\partial \mu}+v\dfrac{\partial P}{\partial \nu}+w\dfrac{\partial P}{\partial \varpi}+\ldots=1,\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

et par $L_0$ ce que devient L quand on y pose

$$\mu=\mu_0,\qquad \nu=\nu_0,\qquad \varpi=\varpi_0,\qquad \ldots,$$

on aura identiquement

$$D=L_0.$$

Par suite, l'expression (92) deviendra

$$\frac{(2\pi)^n}{\sqrt{L_0^2}},$$

et l'on trouvera pour la valeur en termes finis de l'expression (83)

$$(95)\qquad \frac{(2\pi)^n}{\sqrt{L_0^2}}f(\mu_0,\nu_0,\varpi_0,\ldots).$$

Cette valeur est également celle de l'intégrale (79) dans l'hypothèse admise, c'est-à-dire dans le cas où, les deux limites de chacune des variables $\mu$, $\nu$, $\varpi$, ... étant très rapprochées l'une de l'autre, les quantités

$$\mu_0,\quad \nu_0,\quad \varpi_0,\quad \ldots$$

sont les seules valeurs de ces variables qui remplissent la double condition de rester comprises entre les limites données, et de vérifier les équations (76). Dans l'hypothèse contraire, cette double condition pouvant être remplie par plusieurs systèmes de valeurs des variables $\mu$, $\nu$, $\varpi$, ...; par exemple, par tous ceux que renferme le Tableau (77), on



divisera l'intervalle entre les deux limites de chaque variable en éléments très petits et inférieurs aux différences entre les valeurs de cette variable qui se trouvent dans le Tableau; puis, on partagera l'intégrale (79) en plusieurs autres de même forme, en substituant aux intervalles entre les limites des diverses intégrales, c'est-à-dire aux quantités

$$\mu''-\mu',\quad \nu''-\nu',\quad \varpi''-\varpi',\quad \ldots,$$

leurs éléments respectifs combinés $n$ à $n$ de toutes les manières possibles. Parmi les intégrales partielles ainsi obtenues, celle qui remplira les conditions précédemment énoncées à l'égard des valeurs de $\mu$, $\nu$, $\varpi$, ... désignées par

$$\mu_0,\quad \nu_0,\quad \varpi_0,\quad \ldots$$

sera équivalente à l'expression (95). Celle qui remplira les mêmes conditions, à l'égard d'autres valeurs toujours comprises dans une des lignes horizontales du Tableau (77) sera représentée par l'une des expressions

$$\frac{(2\pi)^n}{\sqrt{L_1^2}}f(\mu_1,\nu_1,\varpi_1,\ldots),$$
$$\frac{(2\pi)^n}{\sqrt{L_2^2}}f(\mu_2,\nu_2,\varpi_2,\ldots),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$\frac{(2\pi)^n}{\sqrt{L_{m-1}^2}}f(\mu_{m-1},\nu_{m-1},\varpi_{m-1},\ldots),$$

$L_1$, $L_2$, ..., $L_{m-1}$ désignant ce que devient la fonction L pour les valeurs dont il s'agit. Enfin, les autres intégrales partielles se réduisant à zéro en vertu d'une observation précédemment faite, nous devons conclure que la somme totale des intégrales partielles, ou l'intégrale (79), aura pour valeur, dans la nouvelle hypothèse,

$$(96)\qquad (2\pi)^n\left[\frac{f(\mu_0,\nu_0,\varpi_0,\ldots)}{\sqrt{L_0^2}}+\frac{f(\mu_1,\nu_1,\varpi_1,\ldots)}{\sqrt{L_1^2}}+\ldots+\frac{f(\mu_{m-1},\nu_{m-1},\varpi_{m-1},\ldots)}{\sqrt{L_{m-1}^2}}\right].$$

Ainsi, l'on trouvera généralement

$$(97)\quad \left\{\begin{aligned} &\int_{-\infty}^{\infty}\int_{\mu'}^{\mu''}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{\nu'}^{\nu''}\ldots\cos\alpha M\cos\beta N\cos\gamma P\ldots f(\mu,\nu,\varpi,\ldots)\,d\alpha\,d\mu\,d\beta\,d\nu\,d\gamma\,d\varpi\ldots \\ &\quad =(2\pi)^n\left[\frac{f(\mu_0,\nu_0,\varpi_0,\ldots)}{\sqrt{L_0^2}}+\frac{f(\mu_1,\nu_1,\varpi_1,\ldots)}{\sqrt{L_1^2}}+\ldots+\frac{f(\mu_{m-1},\nu_{m-1},\varpi_{m-1},\ldots)}{\sqrt{L_{m-1}^2}}\right],\end{aligned}\right.$$

la fonction sous les signes $\int\int\int\ldots$ devant être, dans certains cas, multipliée par le facteur 4, comme il a été dit plus haut.

Si dans l'équation (97) on pose

$$(98)\qquad f(\mu,\nu,\varpi,\ldots)=\sqrt{L^2}\,F(\mu,\nu,\varpi,\ldots),$$

cette équation prendra la forme

$$(99)\quad \left\{\begin{aligned} &\int_{-\infty}^{\infty}\int_{\mu'}^{\mu''}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{\nu'}^{\nu''}\ldots\cos\alpha M\cos\beta N\cos\gamma P\ldots\sqrt{L^2}\,F(\mu,\nu,\varpi,\ldots)\,d\alpha\,d\mu\,d\beta\,d\nu\,d\gamma\,d\varpi\ldots \\ &\quad =(2\pi)^n[F(\mu_0,\nu_0,\varpi_0,\ldots)+\ldots+F(\mu_{m-1},\nu_{m-1},\varpi_{m-1},\ldots)],\end{aligned}\right.$$

les limites des diverses intégrations étant toujours les mêmes aussi bien que la fonction L. On aura en conséquence, pour $n=1$,

$$(100)\qquad \int_{-\infty}^{\infty}\int_{\mu'}^{\mu''}\cos\alpha M\sqrt{L^2}\,F(\mu)\,d\alpha\,d\mu\ldots=2\pi[F(\mu_0)+F(\mu_1)+\ldots+F(\mu_{m-1})],$$

la valeur de L étant

$$(101)\qquad L=\pm\frac{dM}{d\mu},$$

M représentant une fonction quelconque de la variable $\mu$, et

$$\mu_0,\quad \mu_1,\quad \ldots,\quad \mu_{m-1}$$

désignant les diverses racines réelles de l'équation

$$(102)\qquad M=0$$

comprises entre les deux limites $\mu'$, $\mu''$. On trouvera ensuite, pour $n=2$,



$$(103)\quad \left\{\begin{aligned} &\int_{-\infty}^{\infty}\int_{\mu'}^{\mu''}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{\nu'}^{\nu''}\cos\alpha M\cos\beta N\sqrt{L^2}\,F(\mu,\nu)\,d\alpha\,d\mu\,d\beta\,d\nu \\ &\quad =4\pi^2[F(\mu_0,\nu_0)+F(\mu_1,\nu_1)+\ldots+F(\mu_{m-1},\nu_{m-1})],\end{aligned}\right.$$

M, N désignant des fonctions des variables $\mu$ et $\nu$, la valeur de L étant déterminée par la formule

$$(104)\qquad L=\pm\left(\frac{\partial M}{\partial\mu}\frac{\partial N}{\partial\nu}-\frac{\partial M}{\partial\nu}\frac{\partial N}{\partial\mu}\right),$$

et les quantités

$$\mu_0,\ \nu_0;\quad \mu_1,\ \nu_1;\quad \ldots;\quad \mu_{m-1},\ \nu_{m-1}$$

étant les seules valeurs de $\mu$ et de $\nu$, qui, sans cesser d'être comprises entre les limites des intégrations relatives à ces variables, vérifient les deux équations simultanées

$$(105)\qquad M=0,\qquad N=0.$$

En continuant de la même manière, on déduirait successivement de l'équation (99) les formules particulières qui se rapportent au cas où l'on suppose $n=3$, $n=4$, ....

Il ne sera pas inutile d'observer que les équations (99), (100), (103), etc. subsistent, non seulement lorsque les fonctions

$$F(\mu,\nu,\varpi,\ldots),\quad F(\mu),\quad F(\mu,\nu),\quad \ldots$$

sont réelles, mais aussi lorsque ces fonctions deviennent imaginaires.

Concevons maintenant que, $f(x)$ désignant une fonction réelle de la variable $x$, les quantités M et N de la formule (103) soient des fonctions réelles de $\mu$ et de $\nu$, déterminées par l'équation

$$(106)\qquad f(\mu+\nu\sqrt{-1})=M+N\sqrt{-1},$$

ou, ce qui revient au même, par la suivante

$$(107)\qquad f(\mu-\nu\sqrt{-1})=M-N\sqrt{-1}.$$

Comme on aura dans cette hypothèse

$$\frac{\partial M}{\partial \nu} + \frac{\partial N}{\partial \nu}\sqrt{-1} = \sqrt{-1}\, f'(\mu + \nu\sqrt{-1}) = \sqrt{-1}\left(\frac{\partial M}{\partial \mu} + \frac{\partial N}{\partial \mu}\sqrt{-1}\right),$$

on en conclura

$$(108)\qquad \frac{\partial M}{\partial \nu} = -\frac{\partial N}{\partial \mu}, \qquad \frac{\partial N}{\partial \nu} = \frac{\partial M}{\partial \mu},$$

et, par suite,

$$L = \pm\left[\left(\frac{\partial M}{\partial \mu}\right)^2 + \left(\frac{\partial N}{\partial \mu}\right)^2\right],$$

$$(109)\qquad \left\{\begin{aligned} \sqrt{L^2} &= \left(\frac{\partial M}{\partial \mu}\right)^2 + \left(\frac{\partial N}{\partial \mu}\right)^2 = \left(\frac{\partial M}{\partial \mu} + \frac{\partial N}{\partial \mu}\sqrt{-1}\right)\left(\frac{\partial M}{\partial \mu} - \frac{\partial N}{\partial \mu}\sqrt{-1}\right) \\ &= f'(\mu + \nu\sqrt{-1})\, f'(\mu - \nu\sqrt{-1}). \end{aligned}\right.$$

Imaginons de plus qu'à la fonction quelconque $F(\mu, \nu)$ on substitue la fonction imaginaire $F(\mu + \nu\sqrt{-1})$, et désignons par

$$\begin{aligned} x_0 &= \mu_0 + \nu_0 \sqrt{-1}, \\ x_1 &= \mu_1 + \nu_1 \sqrt{-1}, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ x_{m-1} &= \mu_{m-1} + \nu_{m-1}\sqrt{-1} \end{aligned}$$

les diverses racines de l'équation

$$(110)\qquad f(x) = 0,$$

dans lesquelles les parties réelles demeurent comprises entre les limites $\mu'$, $\mu''$, et les coefficients de $\sqrt{-1}$ entre les limites $\nu'$, $\nu''$. La formule (103) donnera évidemment

$$(111)\qquad \left\{\begin{aligned} &\int_{-\infty}^{\infty}\int_{\mu'}^{\mu''}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{\nu'}^{\nu''} \cos\alpha M \cos\beta N \\ &\qquad \times f'(\mu + \nu\sqrt{-1})\, f'(\mu - \nu\sqrt{-1})\, F(\mu + \nu\sqrt{-1})\, d\alpha\, d\mu\, d\beta\, d\nu \\ &= 4\pi^2[F(x_0) + F(x_1) + \ldots + F(x_{m-1})]. \end{aligned}\right.$$

Si l'on veut que la suite

$$x_0, \quad x_1, \quad x_2, \quad \ldots, \quad x_{m-1}$$



comprenne toutes les racines réelles ou imaginaires de l'équation (110), il suffira de supposer dans la formule (111)

$$\mu' = -\infty, \quad \mu'' = +\infty; \quad \nu' = -\infty, \quad \nu'' = +\infty \text{ (1)}.$$

Alors on tirera de cette formule

$$(112)\qquad \left\{\begin{aligned} &F(x_0) + F(x_1) + \ldots + F(x_{m-1}) \\ &\quad = \frac{1}{4\pi^2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \cos\alpha M \cos\beta N \\ &\qquad \times f'(\mu + \nu\sqrt{-1})\, f'(\mu - \nu\sqrt{-1})\, F(\mu + \nu\sqrt{-1})\, d\alpha\, d\mu\, d\beta\, d\nu. \end{aligned}\right.$$

Si, au contraire, on attribue à $\mu'$, $\mu''$, $\nu'$, $\nu''$ des valeurs finies choisies de telle manière que, pour une seule racine $x_0$, la partie réelle demeure comprise entre les limites $\mu'$, $\mu''$, et le coefficient de $\sqrt{-1}$ entre les limites $\nu'$, $\nu''$, la formule (111) donnera

$$(113)\qquad \left\{\begin{aligned} F(x_0) &= \frac{1}{4\pi^2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{\mu'}^{\mu''}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{\nu'}^{\nu''} \cos\alpha M \cos\beta N \\ &\qquad \times f'(\mu + \nu\sqrt{-1})\, f'(\mu - \nu\sqrt{-1})\, F(\mu + \nu\sqrt{-1})\, d\alpha\, d\mu\, d\beta\, d\nu, \end{aligned}\right.$$

et, en faisant

$$F(x) = x,$$

on en conclura

$$(114)\qquad \left\{\begin{aligned} x_0 &= \frac{1}{4\pi^2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{\mu'}^{\mu''}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{\nu'}^{\nu''} \cos\alpha M \cos\beta N \\ &\qquad \times f'(\mu + \nu\sqrt{-1})\, f'(\mu - \nu\sqrt{-1})(\mu + \nu\sqrt{-1})\, d\alpha\, d\mu\, d\beta\, d\nu. \end{aligned}\right.$$

(1) Il suffira même de supposer

$$\mu' = -\rho, \quad \mu'' = +\rho; \quad \nu' = -\rho, \quad \nu'' = +\rho,$$

$\rho$ désignant un nombre dont le carré surpasse non seulement les carrés de toutes les racines réelles, mais encore les produits réels et positifs qu'on obtient en multipliant deux à deux les racines imaginaires. On évitera ainsi l'indétermination que présente, dans certains cas, le second membre de la formule (112). Au reste, on pourrait remédier directement à l'indétermination dont il s'agit, en faisant usage, comme dans le Paragraphe Ier, d'un facteur auxiliaire qui renfermerait, avec une constante infiniment petite $k$, les variables $\alpha$ et $\beta$, ou bien les variables $\mu$ et $\nu$.

Cette dernière formule peut servir à déterminer l'une quelconque des racines réelles ou imaginaires d'une équation algébrique, ou même transcendante [1]. Si l'on se propose, en particulier, de déterminer une racine réelle, on pourra prendre pour $\nu'$ et $\nu''$ deux quantités, l'une positive, l'autre négative, et très peu différentes de zéro. Alors, la valeur numérique de la variable $\nu$ devant rester très petite entre les limites de l'intégration, on aura à très peu près entre ces limites

$$\mu+\nu\sqrt{-1}=\mu,$$

$$f'(\mu+\nu\sqrt{-1})=f'(\mu-\nu\sqrt{-1})=f'(\mu),$$

$$\mathrm{M}=\tfrac{1}{2}\left[f(\mu+\nu\sqrt{-1})+f(\mu-\nu\sqrt{-1})\right]=f(\mu),$$

$$\mathrm{N}=\frac{1}{2\sqrt{-1}}\left[f(\mu+\nu\sqrt{-1})-f(\mu-\nu\sqrt{-1})\right]=\nu f'(\mu),$$

et, par suite, la valeur de $x_0$ se trouvera réduite à

$$(115)\qquad x_0=\frac{1}{4\pi^2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{\mu'}^{\mu''}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{\nu'}^{\nu''}\cos\alpha f(\mu)\cos\beta\nu f'(\mu)[f'(\mu)]^2\mu\,d\alpha\,d\mu\,d\beta\,d\nu.$$

On aura d'ailleurs, entre les limites $\beta=-\infty$, $\beta=+\infty$, $\nu=\nu'$, $\nu=\nu''$,

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{\nu'}^{\nu''}\cos\beta\nu f'(\mu)\,d\beta\,d\nu=\frac{1}{\sqrt{[f'(\mu)]^2}}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{\nu'}^{\nu''}\cos\beta\nu\,d\beta\,d\nu=\frac{2\pi}{\sqrt{[f'(\mu)]^2}}.$$

Donc la racine $x_0$, supposée réelle, sera donnée simplement par l'équation

$$(116)\qquad x_0=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{\mu'}^{\mu''}\cos\alpha f(\mu)\sqrt{[f'(\mu)]^2}\,\mu\,d\alpha\,d\mu.$$

La même équation se déduit de la formule (100), lorsqu'on pose $m=1$ dans cette formule, et que l'on y remplace $\mu_0$ par $x_0$, $\mathrm{F}(\mu)$ par $\mu$, et M par $f(\mu)$. Nous ne nous arrêterons pas davantage aux

[1] On trouvera, dans les additions placées à la suite du Mémoire, d'autres formules plus simples qui conduisent au même but.



conséquences remarquables que présentent les diverses formules ci-dessus établies, et nous allons passer à la seconde Partie de notre Mémoire, dans laquelle nous appliquerons ces mêmes formules à l'intégration des équations linéaires aux différences partielles et à coefficients constants.

## SECONDE PARTIE.

§ Ier. Soit donnée une équation linéaire aux différences partielles et à coefficients constants entre la variable principale $\varphi$ et les variables indépendantes $x, y, z, \ldots, t$ dont nous désignerons le nombre par $n+1$. Si, pour plus de simplicité, l'on commence par admettre que cette équation ne renferme pas de terme indépendant de $\varphi$, elle sera de la forme

$$(1)\qquad \nabla\varphi=0,$$

$\nabla\varphi$ désignant une fonction linéaire des quantités

$$\begin{array}{ccccc}
 & & \varphi, & & \\
\dfrac{\partial\varphi}{\partial x}, & \dfrac{\partial\varphi}{\partial y}, & \dfrac{\partial\varphi}{\partial z}, & \ldots, & \dfrac{\partial\varphi}{\partial t}, \\
\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}, & \dfrac{\partial^2\varphi}{\partial x\,\partial y}, & \dfrac{\partial^2\varphi}{\partial x\,\partial z}, & \ldots, & \dfrac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}, \\
\dfrac{\partial^3\varphi}{\partial x^3}, & \dfrac{\partial^3\varphi}{\partial x^2\,\partial y}, & \dfrac{\partial^3\varphi}{\partial x^2\,\partial z}, & \ldots, & \dfrac{\partial^3\varphi}{\partial t^3}, \\
\ldots, & \ldots\ldots, & \ldots\ldots, & \ldots, & \ldots,
\end{array}$$

c'est-à-dire, de la variable principale $\varphi$ et de ses dérivées des divers ordres, prises par rapport aux variables indépendantes. Supposons d'ailleurs que, parmi les dérivées relatives à $t$ qui entrent dans la composition de $\nabla\varphi$, celle de l'ordre le plus élevé soit $\frac{\partial^m\varphi}{\partial t^m}$. On aura identiquement

$$(2)\qquad \nabla\varphi=\nabla_0\varphi+\nabla_1\frac{\partial\varphi}{\partial t}+\nabla_2\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}+\ldots+\nabla_m\frac{\partial^m\varphi}{\partial t^m},$$

les caractéristiques $\nabla_0, \nabla_1, \nabla_2, \ldots, \nabla_m$ indiquant des opérations relatives aux seules variables $x, y, z, \ldots$; et l'on pourra intégrer l'équation (1) de manière que les quantités

$$\varphi,\quad \frac{\partial\varphi}{\partial t},\quad \frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2},\quad \ldots,\quad \frac{\partial^{m-1}\varphi}{\partial t^{m-1}} \tag{3}$$

se réduisent, pour $t = 0$, à des fonctions connues de $x, y, z, \ldots$; par exemple, aux suivantes

$$f_0(x, y, z, \ldots),\quad f_1(x, y, z, \ldots),\quad f_2(x, y, z, \ldots),\quad \ldots,\quad f_{m-1}(x, y, z, \ldots). \tag{4}$$

On y parviendra, en effet, par la méthode que je vais indiquer.

Lorsqu'on veut uniquement satisfaire à cette condition, que les quantités

$$\varphi,\quad \frac{\partial\varphi}{\partial t},\quad \frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2},\quad \ldots,\quad \frac{\partial^{m-1}\varphi}{\partial t^{m-1}}$$

se réduisent aux fonctions

$$f_0(x, y, z, \ldots),\quad f_1(x, y, z, \ldots),\quad f_2(x, y, z, \ldots),\quad \ldots,\quad f_{m-1}(x, y, z, \ldots)$$

pour $t = 0$, il suffit (*voir* la I^re^ partie, § I) de prendre pour $\varphi$ une expression de la forme

$$\left\{\begin{aligned}
\varphi = {} & \left(\frac{1}{2\pi}\right)^n \int_{-\infty}^{\infty}\int_{\mu'}^{\mu''}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{\nu'}^{\nu''} \ldots T_0 e^{\alpha(x-\mu)\sqrt{-1}} e^{\beta(y-\nu)\sqrt{-1}} e^{\gamma(z-\varpi)\sqrt{-1}} \ldots \\
& \times f_0(\mu, \nu, \varpi, \ldots)\, d\alpha\, d\mu\, d\beta\, d\nu\, d\gamma\, d\varpi \ldots \\
& + \left(\frac{1}{2\pi}\right)^n \int_{-\infty}^{\infty}\int_{\mu'}^{\mu''}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{\nu'}^{\nu''} \ldots T_1 e^{\alpha(x-\mu)\sqrt{-1}} e^{\beta(y-\nu)\sqrt{-1}} e^{\gamma(z-\varpi)\sqrt{-1}} \ldots \\
& \times f_1(\mu, \nu, \varpi, \ldots)\, d\alpha\, d\mu\, d\beta\, d\nu\, d\gamma\, d\varpi \ldots \\
& + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
& + \left(\frac{1}{2\pi}\right)^n \int_{-\infty}^{\infty}\int_{\mu'}^{\mu''}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{\nu'}^{\nu''} \ldots T_{m-1} e^{\alpha(x-\mu)\sqrt{-1}} e^{\beta(y-\nu)\sqrt{-1}} e^{\gamma(z-\varpi)\sqrt{-1}} \ldots \\
& \times f_{m-1}(\mu, \nu, \varpi, \ldots)\, d\alpha\, d\mu\, d\beta\, d\nu\, d\gamma\, d\varpi \ldots,
\end{aligned}\right. \tag{5}$$

les limites des intégrations étant les mêmes que dans la formule (1)



(I^re^ partie), et d'assujettir les quantités

$$T_0,\quad T_1,\quad T_2,\quad \ldots,\quad T_{m-1},$$

supposées fonctions de $t$ et des variables auxiliaires $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$, à vérifier, pour une valeur nulle de $t$, les équations de condition

$$\left\{\begin{array}{lllll}
T_0 = 1, & \dfrac{\partial T_0}{\partial t} = 0, & \dfrac{\partial^2 T_0}{\partial t^2} = 0, & \ldots, & \dfrac{\partial^{m-1} T_0}{\partial t^{m-1}} = 0; \\
T_1 = 0, & \dfrac{\partial T_1}{\partial t} = 1, & \dfrac{\partial^2 T_1}{\partial t^2} = 0, & \ldots, & \dfrac{\partial^{m-1} T_1}{\partial t^{m-1}} = 0; \\
\ldots\ldots, & \ldots\ldots, & \ldots\ldots, & \ldots, & \ldots\ldots; \\
T_{m-1} = 0, & \dfrac{\partial T_{m-1}}{\partial t} = 0, & \dfrac{\partial^2 T_{m-1}}{\partial t^2} = 0, & \ldots, & \dfrac{\partial^{m-1} T_{m-1}}{\partial t^{m-1}} = 1.
\end{array}\right. \tag{6}$$

Or, concevons qu'en désignant par $u$ une nouvelle variable, on pose

$$S = T_0 + T_1 u + T_2 u^2 + \ldots + T_{m-1} u^{m-1}; \tag{7}$$

il est clair que les conditions (6) seront remplies, si la quantité S, considérée comme fonction de $u$ et de $t$, vérifie, pour $t = 0$, les équations

$$S = 1,\quad \frac{\partial S}{\partial t} = u,\quad \frac{\partial^2 S}{\partial t^2} = u^2,\quad \ldots,\quad \frac{\partial^{m-1} S}{\partial t^{m-1}} = u^{m-1}. \tag{8}$$

Soient d'ailleurs

$$A_0,\quad A_1,\quad A_2,\quad \ldots,\quad A_{m-1},\quad A_m \tag{9}$$

ce que deviennent les expressions

$$\nabla_0\varphi,\quad \nabla_1\varphi,\quad \nabla_2\varphi,\quad \ldots,\quad \nabla_{m-1}\varphi,\quad \nabla_m\varphi \tag{10}$$

quand on y remplace $\varphi$ par 1, $\frac{\partial\varphi}{\partial x}$ par $\alpha\sqrt{-1}$, $\frac{\partial\varphi}{\partial y}$ par $\beta\sqrt{-1}$, $\frac{\partial\varphi}{\partial z}$ par $\gamma\sqrt{-1}$, ..., et généralement

$$\frac{\partial^{p+q+r+\ldots}\varphi}{\partial x^p\, \partial y^q\, \partial z^r \ldots}$$

par

$$(\alpha\sqrt{-1})^p (\beta\sqrt{-1})^q (\gamma\sqrt{-1})^r \ldots.$$

Pour que la valeur de $\varphi$ donnée par la formule (5) satisfasse à l'équation (1), il suffira que les quantités

$$\mathrm{T}_0,\quad \mathrm{T}_1,\quad \mathrm{T}_2,\quad \ldots,\quad \mathrm{T}_{m-1},$$

considérées comme fonctions de $t$, satisfassent à des équations différentielles de la forme

$$\mathrm{A}_0\mathrm{T}_0 + \mathrm{A}_1\frac{\partial \mathrm{T}_0}{\partial t} + \mathrm{A}_2\frac{\partial^2 \mathrm{T}_0}{\partial t^2} + \ldots + \mathrm{A}_m\frac{\partial^m \mathrm{T}_0}{\partial t^m} = 0;$$

ou, ce qui revient au même, que la fonction S vérifie, quel que soit $u$, l'équation différentielle

$$\mathrm{A}_0\mathrm{S} + \mathrm{A}_1\frac{\partial \mathrm{S}}{\partial t} + \mathrm{A}_2\frac{\partial^2 \mathrm{S}}{\partial t^2} + \ldots + \mathrm{A}_m\frac{\partial^m \mathrm{S}}{\partial t^m} = 0. \tag{11}$$

Cette dernière équation, réunie aux conditions (8) qui doivent être remplies pour $t = 0$, détermine complètement la valeur de S. Pour obtenir cette même valeur, on observera qu'on satisfait à la formule (11) en posant

$$\mathrm{S} = e^{\theta t},$$

et prenant pour $\theta$ une des racines de l'équation algébrique

$$\mathrm{A}_0 + \mathrm{A}_1\theta + \mathrm{A}_2\theta^2 + \ldots + \mathrm{A}_m\theta^m = 0.$$

Par suite, si l'on fait

$$\mathrm{F}(\theta) = \mathrm{A}_0 + \mathrm{A}_1\theta + \mathrm{A}_2\theta^2 + \ldots + \mathrm{A}_m\theta^m, \tag{12}$$

et si l'on appelle

$$\theta_0,\quad \theta_1,\quad \theta_2,\quad \ldots,\quad \theta_{m-1}, \tag{13}$$

les $m$ racines de l'équation

$$\mathrm{F}(\theta) = 0, \tag{14}$$

les formules

$$\mathrm{S} = e^{\theta_0 t},\qquad \mathrm{S} = e^{\theta_1 t},\qquad \ldots,\qquad \mathrm{S} = e^{\theta_{m-1} t}$$



seront des intégrales particulières de l'équation différentielle en S, et son intégrale générale, assujettie aux conditions (8), pourra être présentée sous l'une ou l'autre de ces deux formes

$$\left\{\begin{aligned} \mathrm{S} &= \frac{(u-\theta_1)(u-\theta_2)\ldots(u-\theta_{m-1})}{(\theta_0-\theta_1)(\theta_0-\theta_2)\ldots(\theta_0-\theta_{m-1})}e^{\theta_0 t} + \ldots \\ &\quad + \frac{(u-\theta_0)(u-\theta_1)\ldots(u-\theta_{m-2})}{(\theta_{m-1}-\theta_0)(\theta_{m-1}-\theta_1)\ldots(\theta_{m-1}-\theta_{m-2})}e^{\theta_{m-1} t}, \end{aligned}\right. \tag{15}$$

$$\mathrm{S} = \mathrm{F}(u)\left[\frac{e^{\theta_0 t}}{(u-\theta_0)\,\mathrm{F}'(\theta_0)} + \frac{e^{\theta_1 t}}{(u-\theta_1)\,\mathrm{F}'(\theta_1)} + \ldots + \frac{e^{\theta_{m-1} t}}{(u-\theta_{m-1})\,\mathrm{F}'(\theta_{m-1})}\right]. \tag{16}$$

Si l'on développe cette intégrale générale suivant les puissances ascendantes et entières de $u$, les coefficients des diverses puissances seront précisément les valeurs de

$$\mathrm{T}_0,\quad \mathrm{T}_1,\quad \ldots,\quad \mathrm{T}_{m-1}.$$

Cela posé, comme on aura

$$\mathrm{F}(u) = \mathrm{A}_0 + \mathrm{A}_1 u + \mathrm{A}_2 u^2 + \ldots + \mathrm{A}_m u^m,$$

$$\frac{1}{u-\theta_0} = -\frac{1}{\theta_0\left(1-\frac{u}{\theta_0}\right)} = -\frac{1}{\theta_0} - \frac{u}{\theta_0^2} - \frac{u^2}{\theta_0^3} - \ldots - \frac{u_0^{m-1}}{\theta_1^m} - \ldots,$$

on en conclura

$$\begin{aligned} \mathrm{T}_0 &= -\mathrm{A}_0\left[\frac{e^{\theta_0 t}}{\theta_0\,\mathrm{F}'(\theta_0)} + \frac{e^{\theta_1 t}}{\theta_1\,\mathrm{F}'(\theta_1)} + \ldots + \frac{e^{\theta_{m-1} t}}{\theta_{m-1}\,\mathrm{F}'(\theta_{m-1})}\right], \\ \mathrm{T}_1 &= -\mathrm{A}_1\left[\frac{e^{\theta_0 t}}{\theta_0\,\mathrm{F}'(\theta_0)} + \frac{e^{\theta_1 t}}{\theta_1\,\mathrm{F}'(\theta_1)} + \ldots + \frac{e^{\theta_{m-1} t}}{\theta_{m-1}\,\mathrm{F}'(\theta_{m-1})}\right] \\ &\quad -\mathrm{A}_0\left[\frac{e^{\theta_0 t}}{\theta_0^2\,\mathrm{F}'(\theta_0)} + \frac{e^{\theta_1 t}}{\theta_1^2\,\mathrm{F}'(\theta_1)} + \ldots + \frac{e^{\theta_{m-1} t}}{\theta_{m-1}^2\,\mathrm{F}'(\theta_{m-1})}\right], \\ \mathrm{T}_2 &= -\mathrm{A}_2\left[\frac{e^{\theta_0 t}}{\theta_0\,\mathrm{F}'(\theta_0)} + \frac{e^{\theta_1 t}}{\theta_1\,\mathrm{F}'(\theta_1)} + \ldots + \frac{e^{\theta_{m-1} t}}{\theta_{m-1}\,\mathrm{F}'(\theta_{m-1})}\right] \\ &\quad -\mathrm{A}_1\left[\frac{e^{\theta_0 t}}{\theta_0^2\,\mathrm{F}'(\theta_0)} + \frac{e^{\theta_1 t}}{\theta_1^2\,\mathrm{F}'(\theta_1)} + \ldots + \frac{e^{\theta_{m-1} t}}{\theta_{m-1}^2\,\mathrm{F}'(\theta_{m-1})}\right] \\ &\quad -\mathrm{A}_0\left[\frac{e^{\theta_0 t}}{\theta_0^3\,\mathrm{F}'(\theta_0)} + \frac{e^{\theta_1 t}}{\theta_1^3\,\mathrm{F}'(\theta_1)} + \ldots + \frac{e^{\theta_{m-1} t}}{\theta_{m-1}^3\,\mathrm{F}'(\theta_{m-1})}\right], \end{aligned}$$

.................................................., et

$$\begin{aligned}
\mathrm{T}_{m-1} = &-\mathrm{A}_{m-1}\left[\frac{e^{\theta_0 t}}{\theta_0\,\mathrm{F}'(\theta_0)} + \frac{e^{\theta_1 t}}{\theta_1\,\mathrm{F}'(\theta_1)} + \ldots + \frac{e^{\theta_{m-1} t}}{\theta_{m-1}\,\mathrm{F}'(\theta_{m-1})}\right] \\
&-\mathrm{A}_{m-2}\left[\frac{e^{\theta_0 t}}{\theta_0^2\,\mathrm{F}'(\theta_0)} + \frac{e^{\theta_1 t}}{\theta_1^2\,\mathrm{F}'(\theta_1)} + \ldots + \frac{e^{\theta_{m-1} t}}{\theta_{m-1}^2\,\mathrm{F}'(\theta_{m-1})}\right] \\
&-\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&-\mathrm{A}_0\left[\frac{e^{\theta_0 t}}{\theta_0^m\,\mathrm{F}'(\theta_0)} + \frac{e^{\theta_1 t}}{\theta_1^m\,\mathrm{F}'(\theta_1)} + \ldots + \frac{e^{\theta_{m-1} t}}{\theta_{m-1}^m\,\mathrm{F}'(\theta_{m-1})}\right];
\end{aligned}$$

puis, en faisant pour plus de commodité

$$\mathrm{R} = -\left[\frac{e^{\theta_0 t}}{\theta_0^m\,\mathrm{F}'(\theta_0)} + \frac{e^{\theta_1 t}}{\theta_1^m\,\mathrm{F}'(\theta_1)} + \ldots + \frac{e^{\theta_{m-1} t}}{\theta_{m-1}^m\,\mathrm{F}'(\theta_{m-1})}\right], \tag{17}$$

on trouvera

$$\left\{\begin{aligned}
\mathrm{T}_0 &= \mathrm{A}_0\frac{\partial^{m-1}\mathrm{R}}{\partial t^{m-1}}, \\
\mathrm{T}_1 &= \mathrm{A}_0\frac{\partial^{m-2}\mathrm{R}}{\partial t^{m-2}} + \mathrm{A}_1\frac{\partial^{m-1}\mathrm{R}}{\partial t^{m-1}}, \\
\mathrm{T}_2 &= \mathrm{A}_0\frac{\partial^{m-3}\mathrm{R}}{\partial t^{m-3}} + \mathrm{A}_1\frac{\partial^{m-2}\mathrm{R}}{\partial t^{m-2}} + \mathrm{A}_2\frac{\partial^{m-1}\mathrm{R}}{\partial t^{m-1}}, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\
\mathrm{T}_{m-1} &= \mathrm{A}_0\mathrm{R} + \mathrm{A}_1\frac{\partial\mathrm{R}}{\partial t} + \mathrm{A}_2\frac{\partial^2\mathrm{R}}{\partial t^2} + \ldots + \mathrm{A}_{m-1}\frac{\partial^{m-1}\mathrm{R}}{\partial t^{m-1}}.
\end{aligned}\right. \tag{18}$$

Si maintenant on pose

$$\mathrm{Q} = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^n \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\ldots\mathrm{R}\,e^{\alpha(x-\mu)\sqrt{-1}}\,e^{\beta(y-\nu)\sqrt{-1}}\,e^{\gamma(z-\varpi)\sqrt{-1}}\ldots d\alpha\,d\beta\,d\gamma\ldots, \tag{19}$$

on aura évidemment

$$\begin{aligned}
\nabla_0\mathrm{Q} &= \left(\frac{1}{2\pi}\right)^n \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\ldots\ \mathrm{A}_0\mathrm{R}\,e^{\alpha(x-\mu)\sqrt{-1}}\,e^{\beta(y-\nu)\sqrt{-1}}\,e^{\gamma(z-\varpi)\sqrt{-1}}\ldots d\alpha\,d\beta\,d\gamma\ldots, \\
\nabla_1\mathrm{Q} &= \left(\frac{1}{2\pi}\right)^n \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\ldots\ \mathrm{A}_1\mathrm{R}\,e^{\alpha(x-\mu)\sqrt{-1}}\,e^{\beta(y-\nu)\sqrt{-1}}\,e^{\gamma(z-\varpi)\sqrt{-1}}\ldots d\alpha\,d\beta\,d\gamma\ldots, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\
\nabla_{m-1}\mathrm{Q} &= \left(\frac{1}{2\pi}\right)^n \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\ldots\mathrm{A}_{m-1}\mathrm{R}\,e^{\alpha(x-\mu)\sqrt{-1}}\,e^{\beta(y-\nu)\sqrt{-1}}\,e^{\gamma(z-\varpi)\sqrt{-1}}\ldots d\alpha\,d\beta\,d\gamma\ldots;
\end{aligned}$$



et en conséquence, la valeur de $\varphi$ déduite des équations (5) et (18) deviendra

$$\left\{\begin{aligned}
\varphi = &\ \nabla_0\ \frac{\partial^{m-1}}{\partial t^{m-1}}\int\!\!\int\!\!\int\ldots\mathrm{Q}\,f_0(\mu,\nu,\varpi,\ldots)\,d\mu\,d\nu\,d\varpi\ldots \\
&+\nabla_0\ \frac{\partial^{m-2}}{\partial t^{m-2}}\int\!\!\int\!\!\int\ldots\mathrm{Q}\,f_1(\mu,\nu,\varpi,\ldots)\,d\mu\,d\nu\,d\varpi\ldots \\
&+\nabla_1\ \frac{\partial^{m-1}}{\partial t^{m-1}}\int\!\!\int\!\!\int\ldots\mathrm{Q}\,f_1(\mu,\nu,\varpi,\ldots)\,d\mu\,d\nu\,d\varpi\ldots \\
&+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&+\nabla_0\ \int\!\!\int\!\!\int\ldots\mathrm{Q}\,f_{m-1}(\mu,\nu,\varpi,\ldots)\,d\mu\,d\nu\,d\varpi\ldots \\
&+\nabla_1\ \frac{\partial}{\partial t}\int\!\!\int\!\!\int\ldots\mathrm{Q}\,f_{m-1}(\mu,\nu,\varpi,\ldots)\,d\mu\,d\nu\,d\varpi\ldots \\
&+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&+\nabla_{m-1}\frac{\partial^{m-1}}{\partial t^{m-1}}\int\!\!\int\!\!\int\ldots\mathrm{Q}\,f_{m-1}(\mu,\nu,\varpi,\ldots)\,d\mu\,d\nu\,d\varpi\ldots.
\end{aligned}\right. \tag{20}$$

Il est important d'observer que la quantité Q donnée par la formule (19) est une fonction des variables $x, y, z, \ldots, t$, qui satisfait à l'équation aux différences partielles

$$\nabla\mathrm{Q} = 0. \tag{21}$$

Quant à la valeur de $\varphi$ donnée par la formule (20), elle n'est le plus souvent qu'une intégrale particulière de l'équation proposée

$$\nabla\varphi = 0. \tag{1}$$

Si l'on représente par U cette intégrale particulière, l'intégrale générale sera de la forme

$$\varphi = \mathrm{U} + \mathrm{V}, \tag{22}$$

V désignant une fonction $x, y, z, \ldots, t$ assujettie à la double condition de vérifier l'équation

$$\nabla\mathrm{V} = 0 \tag{23}$$

et de s'évanouir pour $t = 0$, avec ses dérivées relatives à $t$, depuis la dérivée du premier ordre jusqu'à celle de l'ordre $m-1$ inclusivement. Quelquefois il est impossible de remplir ces deux conditions autrement qu'en supposant

$$V = 0. \tag{24}$$

Alors la formule (20) devient elle-même l'intégrale générale de l'équation (1). Il semble, au premier abord, qu'il doit toujours en être ainsi, quand les différents termes du développement en série de la fonction V s'évanouissent, ce qui a lieu, par exemple, dans le cas où les expressions

$$\nabla_m \frac{\partial^m \varphi}{\partial t^m}, \quad \nabla_m \frac{\partial^m V}{\partial t^m}$$

se réduisent aux coefficients différentiels

$$\frac{\partial^m \varphi}{\partial t^m}, \quad \frac{\partial^m V}{\partial t^m},$$

multipliés par une quantité constante. Néanmoins, dans l'état actuel de l'Analyse, il est permis de concevoir à ce sujet des doutes légitimes fondés sur la remarque que nous avons faite dans un autre Mémoire, savoir, que les différents termes d'un développement peuvent s'évanouir, sans que la fonction développée s'évanouisse elle-même.

§ II. Admettons maintenant que l'équation aux différences partielles dont on cherche l'intégrale renferme un terme indépendant de $\varphi$, et fonction des seules variables

$$x, \quad y, \quad z, \quad \ldots, \quad t.$$

Si l'on fait passer ce terme dans le second membre, l'équation donnée prendra la forme

$$\nabla\varphi = f(x, y, z, \ldots, t), \tag{25}$$

et, pour ramener son intégration à celle de l'équation (1), il suffira, comme l'on sait, de connaître une valeur particulière de $\varphi$, pour la-



quelle $\nabla\varphi$ devienne égale à $f(x, y, z, \ldots, t)$. Or, on obtiendra évidemment une semblable valeur si l'on pose

$$\left\{\begin{aligned} \varphi = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{n+1} \int\!\!\int\!\!\int \ldots e^{\alpha(x-\mu)\sqrt{-1}} e^{\beta(y-\nu)\sqrt{-1}} e^{\gamma(z-\varpi)\sqrt{-1}} \ldots e^{\theta(t-\tau)\sqrt{-1}} \\ \times \frac{f(\mu, \nu, \varpi, \ldots, \tau)}{A} d\alpha\, d\mu\, d\beta\, d\nu\, d\gamma\, d\varpi \ldots d\theta\, d\tau, \end{aligned}\right. \tag{26}$$

les intégrations devant être effectuées comme dans la formule (1) (Ire Partie), et la lettre A représentant ce que devient l'expression $\nabla\varphi$ quand on y remplace $\varphi$ par $1$, $\frac{\partial\varphi}{\partial x}$ par $\alpha\sqrt{-1}$, $\frac{\partial\varphi}{\partial y}$ par $\beta\sqrt{-1}$, ..., $\frac{\partial\varphi}{\partial t}$ par $\theta\sqrt{-1}$, ... et généralement

$$\frac{\partial^{p+q+r+\ldots+s}\varphi}{\partial x^p\, \partial y^q\, \partial z^r \ldots \partial t^s}$$

par

$$(\alpha\sqrt{-1})^p (\beta\sqrt{-1})^q (\gamma\sqrt{-1})^r \ldots (\theta\sqrt{-1})^s.$$

§ III. Parmi les équations linéaires qui s'intègrent à l'aide des méthodes précédentes, on doit distinguer celles dans lesquelles se change l'équation (1), lorsqu'on prend pour $\nabla\varphi$ une expression de la forme

$$\nabla_0\varphi - \frac{\partial^m \varphi}{\partial t^m}, \tag{27}$$

la caractéristique $\nabla_0$ indiquant des opérations relatives aux seules variables $x, y, z, \ldots$. Alors la fonction $\varphi$ obtient une valeur très simple qu'il est bon de connaître. Supposons, en effet, qu'il s'agisse d'intégrer l'équation aux différences partielles

$$\nabla_0\varphi - \frac{\partial^m \varphi}{\partial t^m} = 0,$$

ou, ce qui revient au même, la suivante

$$\frac{\partial^m \varphi}{\partial t^m} = \nabla_0\varphi. \tag{28}$$

Dans cette hypothèse, en adoptant les notations du paragraphe I, on trouvera

$$F(\theta) = A_0 - \theta^m,$$
$$F'(\theta) = -m\theta^{m-1},$$

et, par suite,

$$(29) \qquad R = \frac{1}{m}\left(\frac{e^{\theta_0 t}}{\theta_0^{2m-1}} + \frac{e^{\theta_1 t}}{\theta_1^{2m-1}} + \ldots + \frac{e^{\theta_{m-1} t}}{\theta_{m-1}^{2m-1}}\right),$$

$\theta_0, \theta_1, \ldots, \theta_{m-1}$ désignant les $m$ racines de l'équation

$$(30) \qquad \theta^m = A_0,$$

dont le second membre représente la fonction de $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ qui se tire de l'expression $\nabla_0 \varphi$, quand on y remplace $\varphi$ par $1$, $\frac{\partial \varphi}{\partial x}$ par $\alpha\sqrt{-1}, \ldots$, et généralement

$$\frac{\partial^{p+q+r\ldots}\varphi}{\partial x^p\, \partial y^q\, \partial z^r \ldots}$$

par

$$(\alpha\sqrt{-1})^p (\beta\sqrt{-1})^q (\gamma\sqrt{-1})^r \ldots.$$

Cela posé, la valeur de Q étant toujours déterminée par la formule

$$(19) \quad Q = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^n \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \ldots R\, e^{\alpha(x-\mu)\sqrt{-1}} e^{\beta(y-\nu)\sqrt{-1}} e^{\gamma(z-\varpi)\sqrt{-1}} \ldots d\alpha\, d\beta\, d\gamma \ldots,$$

la valeur de $\varphi$ deviendra

$$(31) \quad \left\{\begin{aligned} \varphi = {} & \nabla_0 \frac{d^{m-1}}{dt^{m-1}} \int\int\int \cdots Q\, f_0(\mu, \nu, \varpi, \ldots)\, d\mu\, d\nu\, d\varpi \ldots \\ & + \nabla_0 \frac{d^{m-2}}{dt^{m-2}} \int\int\int \cdots Q\, f_1(\mu, \nu, \varpi, \ldots)\, d\mu\, d\nu\, d\varpi \ldots \\ & + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & + \nabla_0 \int\int\int \cdots Q\, f_{m-1}(\mu, \nu, \varpi, \ldots)\, d\mu\, d\nu\, d\varpi \ldots. \end{aligned}\right.$$

Observons d'ailleurs que, dans le cas présent, on tirera de l'équation (21)

$$(32) \qquad \nabla_0 Q = \frac{\partial^m Q}{\partial t^m},$$



et, par suite,

$$\begin{aligned} \nabla_0 \frac{\partial^{m-1} Q}{\partial t^{m-1}} = {} & \frac{\partial^{2m-1} Q}{\partial t^{2m-1}} \\ = {} & \left(\frac{1}{2\pi}\right)^n \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \cdots \frac{\partial^{2m-1} R}{\partial t^{2m-1}} e^{\alpha(x-\mu)\sqrt{-1}} e^{\beta(y-\nu)\sqrt{-1}} e^{\gamma(z-\varpi)\sqrt{-1}} \ldots d\alpha\, d\beta\, d\gamma \ldots \\ = {} & \left(\frac{1}{2\pi}\right)^n \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{\theta_0 t} + e^{\theta_1 t} + \ldots + e^{\theta_{m-1} t}}{m} e^{\alpha(x-\mu)\sqrt{-1}} e^{\beta(y-\nu)\sqrt{-1}} e^{\gamma(z-\varpi)\sqrt{-1}} \ldots d\alpha\, d\beta\, d\gamma \ldots. \end{aligned}$$

En conséquence, si l'on fait

$$(33) \qquad T = \frac{e^{\theta_0 t} + e^{\theta_1 t} + \ldots + e^{\theta_{m-1} t}}{m},$$

et

$$(34) \quad P = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^n \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \cdots T\, e^{\alpha(x-\mu)\sqrt{-1}} e^{\beta(y-\nu)\sqrt{-1}} e^{\gamma(z-\varpi)\sqrt{-1}} \ldots d\alpha\, d\beta\, d\gamma \ldots,$$

on aura

$$(35) \qquad \nabla_0 \frac{\partial^{m-1} Q}{\partial t^{m-1}} = P,$$

et la valeur générale de $\varphi$ prendra la forme

$$(36) \quad \left\{\begin{aligned} \varphi = {} & \int\int\int \cdots P\, f_0(\mu, \nu, \varpi, \ldots)\, d\mu\, d\nu\, d\varpi \ldots \\ & + \int dt \int\int\int \cdots P\, f_1(\mu, \nu, \varpi, \ldots)\, d\mu\, d\nu\, d\varpi \ldots \\ & + \int^{(2)} dt^2 \int\int\int \cdots P\, f_2(\mu, \nu, \varpi, \ldots)\, d\mu\, d\nu\, d\varpi \ldots \\ & + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & + \int^{(m-1)} dt^{m-1} \int\int\int \cdots P\, f_{m-1}(\mu, \nu, \varpi, \ldots)\, d\mu\, d\nu\, d\varpi, \ldots, \end{aligned}\right.$$

les intégrations relatives à $t$ étant effectuées à partir de $t = 0$. On s'assurera facilement que la fonction P comprise dans le second membre de l'équation précédente a la propriété de vérifier l'équation aux différences partielles

$$(37) \qquad \nabla_0 P = \frac{\partial^m P}{\partial t^m}.$$

§ IV. Les formules établies dans les paragraphes précédents ramènent l'intégration des équations linéaires (1), (25) et (28) à la résolution des équations algébriques (14) et (30) dont les racines

$$\theta_0,\quad \theta_1,\quad \theta_2,\quad \dots,\quad \theta_{m-1}$$

se trouvent comprises dans les valeurs générales des fonctions R et T. Mais cette résolution n'est pas nécessaire, et l'on peut y suppléer en déterminant [1] immédiatement les valeurs de R et de T à l'aide de la formule (111) (Ire Partie).

§ V. Pour montrer une application des principes établis dans ce Mémoire, supposons qu'il s'agisse d'intégrer l'équation linéaire aux différences partielles que l'on déduit de la formule symbolique

$$a\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}+\dots\right)^l\varphi=\frac{\partial^m\varphi}{\partial t^m}, \tag{38}$$

lorsque, après avoir développé le premier membre de cette formule, dans lequel $a$ désigne une quantité constante, on remplace

$$\begin{array}{ccc}
\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)\varphi & \text{par} & \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}, \\
\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)^2\varphi & \text{par} & \frac{\partial^4\varphi}{\partial x^4}, \\
\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)^3\varphi & \text{par} & \frac{\partial^6\varphi}{\partial x^6}, \\
\dots\dots & & \dots, \\
\left(\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\varphi & \text{par} & \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}, \\
\dots\dots & & \dots, \\
\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}\,\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\varphi & \text{par} & \frac{\partial^4\varphi}{\partial x^2\,\partial y^2}, \\
\dots\dots\dots & & \dots\dots,
\end{array}$$

[1] Cette détermination présente quelques difficultés dont l'examen détaillé nous entraînerait au delà des bornes prescrites à ce Mémoire. Nous avons supprimé pour cette raison les développements qui se trouvaient ici dans le manuscrit, et qui formaient la fin du paragraphe IV. D'ailleurs ce qu'il y a de mieux à faire pour obtenir la valeur de $\varphi$, sans être obligé de résoudre aucune équation, c'est d'exprimer les valeurs de $T_0, T_1, \dots, T_{m-1}$, T, par des intégrales définies simples à l'aide des formules que renferment les additions placées à la suite du paragraphe VI.



et ainsi de suite. Dans cette hypothèse, l'équation (14) prendra la forme

$$A_0=\theta^m, \tag{30}$$

la valeur de $A_0$ étant

$$A_0=a(-\alpha^2-\beta^2-\gamma^2-\dots)^l. \tag{39}$$

En conséquence

$$\theta_0,\quad \theta_1,\quad \theta_2,\quad \dots,\quad \theta_{m-1}$$

seront les racines de l'équation binome

$$\theta^m=(-1)^l a(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\dots)^l. \tag{40}$$

Or, on vérifiera généralement cette dernière, en supposant

$$\theta=\lambda(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\dots)^{\frac{l}{m}},$$

et prenant pour $\lambda$ une des racines de l'équation

$$\lambda^m=(-1)^l a. \tag{41}$$

Par suite, si l'on appelle

$$\lambda_0,\quad \lambda_1,\quad \lambda_2,\quad \dots,\quad \lambda_{m-1}$$

les $m$ racines de l'équation (41), et si l'on fait, pour abréger,

$$\frac{e^{\lambda_0 t}+e^{\lambda_1 t}+\dots+e^{\lambda_{m-1}t}}{m}=f(t), \tag{42}$$

on tirera des formules (33) et (34)

$$T=f\left[(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\dots)^{\frac{l}{m}}t\right], \tag{43}$$

$$\left\{\begin{aligned}
P&=\left(\frac{1}{2\pi}\right)^n\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\dots f\left[(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\dots)^{\frac{l}{m}}t\right]\\
&\quad\times e^{\alpha(x-\mu)\sqrt{-1}}e^{\beta(y-\nu)\sqrt{-1}}e^{\gamma(z-\varpi)\sqrt{-1}}\dots d\alpha\,d\beta\,d\gamma\dots\\
&=\left(\frac{1}{2\pi}\right)^n\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\dots f\left[(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\dots)^{\frac{l}{m}}t\right]\\
&\quad\times\cos\alpha(x-\mu)\cos\beta(y-\nu)\cos\gamma(z-\varpi)\dots d\alpha\,d\beta\,d\gamma\dots.
\end{aligned}\right. \tag{44}$$

Soit maintenant

$$(x-\mu)^2+(y-\nu)^2+(z-\varpi)^2+\ldots=s, \tag{45}$$

et désignons à l'ordinaire par $n$ le nombre des variables $x, y, z, \ldots,$ c'est-à-dire, des variables indépendantes autres que la variable $t$. La valeur de P donnée par l'équation (44) admettra évidemment des réductions semblables à celles qui sont indiquées par les formules (54) et (61) de la première Partie. Effectivement, si l'on a égard à la formule (61), on trouvera, pour des valeurs impaires de $n$,

$$P=(-1)^{\frac{n-1}{2}}\frac{1}{2\pi^{\frac{n+1}{2}}}\frac{\partial^{\frac{n-1}{2}}}{\partial s^{\frac{n-1}{2}}}\int_{-\infty}^{\infty}\cos s^{\frac{1}{2}}\alpha\, f\left(\alpha^{\frac{2l}{m}}t\right)d\alpha,$$

puis, en remettant pour $f\left(\alpha^{\frac{2l}{m}}t\right)$ sa valeur déduite de l'équation (42) [1],

$$P=\frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{2\pi^{\frac{n+1}{2}}}\frac{\partial^{\frac{n-1}{2}}}{\partial s^{\frac{n-1}{2}}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{\alpha^{\frac{2l}{m}}\lambda_0 t}+e^{\alpha^{\frac{2l}{m}}\lambda_1 t}+\ldots+e^{\alpha^{\frac{2l}{m}}\lambda_{m-1} t}}{m}\cos s^{\frac{1}{2}}\alpha\, d\alpha. \tag{46}$$

De même, en ayant égard à la formule (54) de la première Partie, on trouvera, pour les valeurs paires de $n$,

$$\left\{\begin{aligned}P&=\frac{1}{2^{n-2}\pi^{\frac{n}{2}+1}}\int_0^{\infty}\int_0^{\infty}\frac{e^{\alpha^{\frac{2l}{m}}\lambda_0 t}+e^{\alpha^{\frac{2l}{m}}\lambda_1 t}+\ldots+e^{\alpha^{\frac{2l}{m}}\lambda_{m-1} t}}{m}\\&\quad\times\cos\left(\frac{n\pi}{4}-\alpha^2\beta^2-\frac{s}{4\beta^2}\right)\frac{d\beta}{\beta^{n-1}}\alpha\, d\alpha.\end{aligned}\right. \tag{47}$$

La valeur de P étant déterminée par l'une des équations (44), (46) ou (47), il ne restera plus qu'à substituer cette valeur dans la formule (36), pour obtenir l'intégrale générale de l'équation (38).

[1] Dans les équations (46) et (47), et dans celles qui s'en déduisent, la notation $\alpha^{\frac{2l}{m}}$ est censée représenter la valeur réelle et positive de l'expression

$$\sqrt[m]{\alpha^{2l}}.$$



Dans le cas particulier où l'on suppose $n=0$, l'équation (38) se réduit à

$$a\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)^l\varphi=\frac{\partial^m\varphi}{\partial t^m}. \tag{48}$$

Dans cette hypothèse, la valeur de P donnée par la formule (44) devient

$$\left\{\begin{aligned}P&=\frac{1}{4\pi^2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{(\alpha^2+\beta^2)^{\frac{l}{m}}\lambda_0 t}+e^{(\alpha^2+\beta^2)^{\frac{l}{m}}\lambda_1 t}+\ldots+e^{(\alpha^2+\beta^2)^{\frac{l}{m}}\lambda_{m-1} t}}{m}\\&\quad\times\cos\alpha(x-\mu)\cos\beta(y-\nu)\,d\alpha\, d\beta.\end{aligned}\right. \tag{49}$$

On peut faire servir à la réduction de cette valeur la formule (75) de la première Partie, et l'on trouve alors

$$P=\frac{1}{2\pi^2}\int_0^{\infty}\int_0^{\infty}\frac{e^{(\alpha\beta)^{\frac{l}{m}}\lambda_0 t}+e^{(\alpha\beta)^{\frac{l}{m}}\lambda_1 t}+\ldots+e^{(\alpha\beta)^{\frac{l}{m}}\lambda_{m-1} t}}{m}\sin\beta\cos\frac{s\alpha}{4}\,d\alpha\, d\beta, \tag{50}$$

la valeur de $s$ étant donnée par l'équation

$$s=(x-\mu)^2+(y-\nu)^2. \tag{51}$$

Dans le cas particulier où l'on a $n=3$, les équations (38) et (46) deviennent

$$a\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)^l\varphi=\frac{\partial^m\varphi}{\partial t^m} \tag{52}$$

et

$$P=-\frac{1}{2\pi^2}\frac{\partial}{\partial s}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{\alpha^{\frac{2l}{m}}\lambda_0 t}+e^{\alpha^{\frac{2l}{m}}\lambda_1 t}+\ldots+e^{\alpha^{\frac{2l}{m}}\lambda_{m-1} t}}{m}\cos s^{\frac{1}{2}}\alpha\, d\alpha, \tag{53}$$

les valeurs de $s$ étant

$$s=(x-\mu)^2+(y-\nu)^2+(z-\varpi)^2. \tag{54}$$

Il est essentiel de se rappeler que dans les formules (49), (50) et (53)

$$\lambda_0,\quad \lambda_1,\quad \ldots,\quad \lambda_{m-1}$$

désignent les racines de l'équation binome

$$\lambda^m = (-1)^l a.$$

Plusieurs questions de Physique et de Mécanique, et entre autres les problèmes du *son*, de la *chaleur*, des *ondes*, des *cordes vibrantes*, des *plaques élastiques*, etc., conduisent à des équations aux différences partielles qui se trouvent comprises, comme cas particuliers, dans les formules (48) et (52). Ces équations pourront donc être intégrées à l'aide des formules (50) et (53) réunies à l'équation (36). C'est ce que nous allons faire voir par quelques exemples dans lesquels nous nous trouverons naturellement ramenés à des résultats déjà connus.

La loi, suivant laquelle la chaleur se distribue dans un corps solide et homogène, dépend de l'équation

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = a\left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2}\right), \tag{55}$$

dans laquelle $a$ désigne une quantité positive. Pour déduire cette équation de la formule (52), il suffit de poser

$$l = 1, \qquad m = 1.$$

Alors l'équation (41) devient

$$\lambda = -a;$$

et, par suite, on tire de la formule (53)

$$P = -\frac{1}{2\pi^2}\frac{\partial}{\partial s}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha^2 a t}\cos s^{\frac{1}{2}}\alpha \, d\alpha,$$

puis, en ayant égard à l'équation (16) de la première Partie,

$$P = -\frac{1}{2\pi^2}\frac{\partial\left[\left(\frac{\pi}{at}\right)^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{s}{4at}}\right]}{\partial s} = \frac{1}{2^3(a\pi t)^{\frac{3}{2}}} e^{-\frac{s}{4at}},$$



ou, ce qui revient au même,

$$P = \frac{1}{2^3(a\pi)^{\frac{3}{2}}} t^{-\frac{3}{2}} e^{-\frac{(\mu - x)^2 + (\nu - y)^2 + (\varpi - z)^2}{4at}}. \tag{56}$$

En adoptant cette valeur de P, on trouvera pour l'intégrale générale de l'équation (55)

$$\varphi = \iiint P f_0(\mu, \nu, \varpi)\, d\mu\, d\nu\, d\varpi. \tag{57}$$

Les petites vibrations des plaques sonores, homogènes et d'une épaisseur constante, se rapportent à l'équation

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} + b^2\left(\frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^2\,\partial y^2} + \frac{\partial^4 \varphi}{\partial y^4}\right) = 0, \tag{58}$$

dans laquelle $b$ désigne une constante positive, et $\varphi$ une ordonnée de surface courbe. Pour déduire cette équation de la formule (48), il suffit de prendre

$$l = 2, \qquad m = 2 \qquad \text{et} \qquad a = -b^2.$$

Alors l'équation (41) devient

$$\lambda^2 = -b^2,$$

et l'on en tire

$$\lambda_0 = +b\sqrt{-1}, \qquad \lambda_1 = -b\sqrt{-1}.$$

Cela posé, la formule (50) donnera

$$\begin{aligned} P &= \frac{1}{2\pi^2}\int_0^\infty\int_0^\infty \cos\alpha\beta bt \sin\beta \cos\frac{s\alpha}{4}\, d\alpha\, d\beta \\ &= \frac{1}{2\pi^2 bt}\int_0^\infty\int_0^\infty \cos\alpha\beta \sin\beta \cos\frac{s\alpha}{4bt}\, d\alpha\, d\beta, \end{aligned}$$

ou, ce qui revient au même,

$$\begin{aligned} P &= \frac{1}{4\pi^2 bt}\int_{-\infty}^\infty\int_0^\infty \cos\alpha\beta \sin\beta \cos\frac{s\alpha}{4bt}\, d\alpha\, d\beta \\ &= \frac{1}{8\pi^2 bt}\int_{-\infty}^\infty\int_0^\infty \cos\alpha\left(\beta - \frac{s}{4bt}\right)\sin\beta\, d\alpha\, d\beta \\ &\quad + \frac{1}{8\pi^2 bt}\int_{-\infty}^\infty\int_0^\infty \cos\alpha\left(\beta + \frac{s}{4bt}\right)\sin\beta\, d\alpha\, d\beta. \end{aligned}$$

D'ailleurs, $\frac{s}{4bt}$ étant une quantité positive comprise entre les limites $\beta = 0$, $\beta = \infty$, on conclut de la formule (8) (I$^{re}$ Partie), en y remplaçant $\mu$ par $\beta$ et $x$ par $\frac{s}{4bt}$,

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{0}^{\infty} \sin\beta \cos\alpha\left(\beta - \frac{s}{4bt}\right) d\alpha\, d\beta = 2\pi \sin\left(\frac{s}{4bt}\right).$$

Quant à l'intégrale

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{0}^{\infty} \sin\beta \cos\alpha\left(\beta + \frac{s}{4bt}\right) d\alpha\, d\beta,$$

il est clair qu'elle sera nulle. En conséquence, la valeur de P deviendra

$$P = \frac{1}{4\pi bt}\sin\frac{s}{4bt},$$

ou, si l'on écrit $(\mu - x)^2 + (\nu - y)^2$ au lieu de $s$,

(59) $$P = \frac{1}{4\pi bt}\sin\frac{(\mu - x)^2 + (\nu - y)^2}{4bt}.$$

En adoptant cette dernière valeur de P, on tirera de la formule (36) l'intégrale générale de l'équation (58), et l'on trouvera

(60) $$\varphi = \int\int P f_0(\mu, \nu)\, d\mu\, d\nu + \int dt \int\int P f_1(\mu, \nu)\, d\mu\, d\nu,$$

les fonctions $f_0(x, y)$, $f_1(x, y)$ désignant les valeurs particulières de $\varphi$ et $\frac{\partial\varphi}{\partial t}$ pour $t = 0$.

Le mouvement des fluides élastiques est déterminé par une équation linéaire de la forme

(61) $$\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = b^2\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}\right),$$

$b$ désignant une constante réelle que l'on peut considérer comme



positive. On déduit cette équation de la formule (52) en supposant

$$l = 1, \quad m = 2, \quad a = b^2.$$

On aura donc encore dans le cas présent

$$\lambda^2 = -b^2,$$
$$\lambda_0 = +b\sqrt{-1}, \quad \lambda_1 = -b\sqrt{-1}.$$

Cela posé, la formule (53) donnera

$$P = -\frac{1}{2\pi^2}\frac{\partial}{\partial s}\int_{-\infty}^{\infty} \cos\alpha bt \cos s^{\frac{1}{2}}\alpha\, d\alpha,$$

ou, si l'on fait pour abréger $s^{\frac{1}{2}} = r$, et par conséquent $s = r^2$,

$$P = -\frac{1}{4\pi^2 r}\frac{\partial}{\partial r}\int_{-\infty}^{\infty} \cos\alpha bt \cos r\alpha\, d\alpha.$$

Pour déterminer la valeur de l'intégrale que renferme l'équation précédente, il faut recourir à l'artifice de calcul indiqué dans la première Partie de ce Mémoire (§ I$^{er}$), et multiplier la fonction sous le signe $\int$ par un facteur auxiliaire de la forme $\frac{\psi(k\alpha)}{\psi(0)}$, $k$ désignant une quantité positive infiniment petite, et $\psi$ une fonction convenablement choisie. On peut prendre pour ce facteur auxiliaire l'une des expressions

$$e^{-k\sqrt{\alpha^2}}, \quad e^{-k^2\alpha^2}, \quad \frac{1}{1 + k^2\alpha^2}, \quad \dots$$

Concevons, pour fixer les idées, que l'on s'arrête à la première. L'intégrale comprise dans la valeur de P deviendra

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-k\sqrt{\alpha^2}} \cos\alpha bt \cos r\alpha\, d\alpha &= 2\int_{0}^{\infty} e^{-k\alpha} \cos\alpha bt \cos r\alpha\, d\alpha \\ &= \int_{0}^{\infty} e^{-k\alpha}[\cos\alpha(r - bt) + \cos\alpha(r + bt)]\, d\alpha \\ &= \frac{k}{k^2 + (r - bt)^2} + \frac{k}{k^2 + (r + bt)^2}.\end{aligned}$$

D'ailleurs, la variable $r = s^{\frac{1}{2}}$, étant liée aux variables $\mu$, $\nu$, $\varpi$ par l'équation

$$r = [(\mu - x)^2 + (\nu - y)^2 + (\varpi - z)^2]^{\frac{1}{2}}, \tag{62}$$

n'admettra que des valeurs positives comprises entre les limites $0$, $\infty$; et comme, des deux binomes $r - bt$, $r + bt$, celui dont le second terme est négatif sera le seul qui s'évanouisse entre ces limites, il est clair que, si l'on attribue à $t$ des valeurs positives différentes de zéro, la seconde des deux fractions $\frac{k}{k^2 + (r - bt)^2}$, $\frac{k}{k^2 + (r + bt)^2}$ restera infiniment petite, tandis que la première cessera de l'être pour des valeurs de $r$ très voisines de $bt$. On pourra donc négliger dans le calcul la fraction $\frac{k}{k^2 + (r + bt)^2}$, et substituer à l'intégrale comprise dans la valeur de P la fraction unique $\frac{k}{k^2 + (r - bt)^2}$. On trouvera ainsi

$$\mathrm{P} = -\frac{1}{4\pi^2 r} \frac{\partial \left[\frac{k}{k^2 + (r - bt)^2}\right]}{\partial r},$$

ou, ce qui revient au même,

$$\mathrm{P} = \frac{1}{4\pi^2 br} \frac{\partial \left[\frac{k}{k^2 + (r - bt)^2}\right]}{\partial t}. \tag{63}$$

En adoptant cette dernière valeur de P, on tirera de la formule (36)

$$\varphi = \iiint \mathrm{P} f_0(\mu, \nu, \varpi)\, d\mu\, d\nu\, d\varpi + \int dt \iiint \mathrm{P} f_1(\mu, \nu, \varpi)\, d\mu\, d\nu\, d\varpi, \tag{64}$$

les fonctions $f_0(x, y, z)$, $f_1(x, y, z)$ désignant les valeurs particulières de $\varphi$ et de $\frac{\partial \varphi}{\partial t}$ pour $t = 0$. En remettant pour P sa valeur, on aura définitivement

$$\left\{\begin{aligned} \varphi = & \iiint \frac{1}{4\pi^2 br} \frac{k}{k^2 + (r - bt)^2} f_1(\mu, \nu, \varpi)\, d\mu\, d\nu\, d\varpi \\ & + \frac{\partial}{\partial t} \iiint \frac{1}{4\pi^2 br} \frac{k}{k^2 + (r - bt)^2} f_0(\mu, \nu, \varpi)\, d\mu\, d\nu\, d\varpi, \end{aligned}\right. \tag{65}$$



les limites des variables $\mu$, $\nu$, $\varpi$ étant choisies de manière à comprendre les valeurs attribuées à $x$, $y$, $z$, et $k$ désignant toujours une quantité positive infiniment petite qu'on devra réduire à zéro après les intégrations effectuées. Si l'on veut que les valeurs particulières de $\varphi$ et de $\frac{\partial \varphi}{\partial t}$, correspondant à $t = 0$, coïncident avec les fonctions $f_0(x, y, z)$, $f_1(x, y, z)$, quelles que soient les quantités $x$, $y$, $z$, il faudra, dans l'équation (65), prendre pour limites de chacune des variables $\mu$, $\nu$, $\varpi$, les deux quantités $-\infty$, $+\infty$.

Supposons maintenant que l'on considère les trois variables $\mu$, $\nu$, $\varpi$ comme représentant des coordonnées rectangulaires, et qu'après avoir transporté l'origine au point pour lequel on a $\mu = x$, $\nu = y$, $\varpi = z$, on substitue aux coordonnées rectangulaires $\mu$, $\nu$, $\varpi$ des coordonnées polaires $p$, $q$, $r$, relatives à la nouvelle origine, et déterminées par les formules

$$\mu = x + r\cos p, \qquad \nu = y + r\sin p\cos q, \qquad \varpi = z + r\sin p\sin q. \tag{66}$$

La valeur de $r$ sera précisément celle que fournit l'équation (62); et comme, à la place du produit $d\mu\, d\nu\, d\varpi$, on devra écrire le suivant $r^2 \sin p\, dp\, dq\, dr$, la formule (65) donnera

$$\left\{\begin{aligned} \varphi = & \frac{1}{4\pi^2 b} \iiint \frac{k}{k^2 + (r - bt)^2} \\ & \quad \times f_1(x + r\cos p, y + r\sin p\cos q, z + r\sin p\sin q)\, r\sin p\, dp\, dq\, dr \\ & + \frac{1}{4\pi^2 b} \frac{\partial}{\partial t} \iiint \frac{k}{k^2 + (r - bt)^2} \\ & \quad \times f_0(x + r\cos p, y + r\sin p\cos q, z + r\sin p\sin q)\, r\sin p\, dp\, dq\, dr. \end{aligned}\right. \tag{67}$$

De plus, si dans le second membre de la formule (65) chaque intégration est effectuée entre les limites $-\infty$, $+\infty$, les intégrales multiples que renferme l'équation (67) devront être prises entre les limites $p = 0$, $p = \pi$; $q = 0$, $q = 2\pi$; $r = 0$, $r = \infty$. D'autre part, la fraction $\frac{k}{k^2 + (r - bt)^2}$ n'ayant de valeur sensible que dans le cas où l'on attribue à $r$ une valeur très peu différente de $bt$, et l'expression

$$f_1(x + r\cos p, y + r\sin p\cos q, z + r\sin p\sin q)\, r\sin p$$

devenant alors sensiblement égale à

$$f_1(x+bt\cos p,\ y+bt\sin p\cos q,\ z+bt\sin p\sin q)\,bt\sin p,$$

on pourra évidemment remplacer l'intégrale

$$\int_0^{\infty}\frac{k}{k^2+(r-bt)^2}f_1(x+r\cos p,\ y+r\sin p\cos q,\ z+r\sin p\sin q)\,r\sin p\,dr$$

par le produit

$$\begin{aligned}&f_1(x+bt\cos p,\ y+bt\sin p\cos q,\ z+bt\sin p\sin q)\,bt\sin p\int_0^{\infty}\frac{k\,dr}{k^2+(r-bt)^2}\\&\quad=\pi bt\sin p\,f_1(x+bt\cos p,\ y+bt\sin p\cos q,\ z+bt\sin p\sin q).\end{aligned}$$

Par la même raison, à l'intégrale

$$\int_0^{\infty}\frac{k}{k^2+(r-bt)^2}f_0(x+r\cos p,\ y+r\sin p\cos q,\ z+r\sin p\sin q)\,r\sin p\,dr$$

on pourra substituer le produit

$$\pi bt\sin p\,f_0(x+bt\cos p,\ y+bt\sin p\cos q,\ z+bt\sin p\sin q).$$

Cela posé, la valeur de $\varphi$ déterminée par l'équation (67) deviendra

$$(68)\quad\left\{\begin{aligned}\varphi=&\frac{1}{4\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}t\sin p\,f_1(x+bt\cos p,\ y+bt\sin p\cos q,\ z+bt\sin p\sin q)\,dp\,dq\\&+\frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial t}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}t\sin p\,f_0(x+bt\cos p,\ y+bt\sin p\cos q,\ z+bt\sin p\sin q)\,dp\,dq.\end{aligned}\right.$$

Cette dernière formule coïncide avec celle que M. Poisson a donnée dans un Mémoire lu à l'Académie le 19 juillet 1819.

§ VI [1]. Si, à la place de l'équation (38), on considérait la suivante

$$(69)\qquad\frac{\partial^m\varphi}{\partial t^m}=a\frac{\partial^l\varphi}{\partial x^l},$$

[1] Ce qui suit a été ajouté au Mémoire depuis sa présentation à l'Académie.



alors on tirerait des formules (33), (34) et (36)

$$(70)\qquad P=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{\theta_0 t}+e^{\theta_1 t}+\ldots+e^{\theta_{m-1}t}}{m}e^{\alpha(x-\mu)\sqrt{-1}}\,d\alpha,$$

et

$$(71)\quad\varphi=\int P f_0(\mu)\,d\mu+\int dt\int P f_1(\mu)\,d\mu+\ldots+\int^{m-1}dt^{m-1}\int P f_{m-1}(\mu)\,d\mu,$$

$\theta_0, \theta_1, \ldots, \theta_{m-1}$ désignant les racines de l'équation

$$(72)\qquad\theta^m=a\left(\alpha\sqrt{-1}\right)^l.$$

Dans le cas particulier où l'on suppose $l=m=2$, $a=-1$, l'équation (69) devient

$$(73)\qquad\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}=0,$$

et l'on trouve

$$(74)\quad P=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{\alpha t}+e^{-\alpha t}}{2}e^{\alpha(x-\mu)\sqrt{-1}}\,d\alpha=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{\alpha t}+e^{-\alpha t}}{2}\cos\alpha(x-\mu)\,d\alpha,$$

$$(75)\quad\left\{\begin{aligned}\varphi=&\frac{1}{2\pi}\iint\frac{e^{\alpha t}+e^{-\alpha t}}{2}\cos\alpha(x-\mu)\,f_0(\mu)\,d\alpha\,d\mu\\&+\frac{1}{2\pi}\int dt\iint\frac{e^{\alpha t}+e^{-\alpha t}}{2}\cos\alpha(x-\mu)\,f_1(\mu)\,d\alpha\,d\mu.\end{aligned}\right.$$

La valeur précédente de $\varphi$ est indéterminée. Mais l'indétermination cessera pour l'ordinaire, si, dans chaque intégrale relative à la variable $\alpha$, on multiplie la fonction sous le signe $\int$ par $e^{-k\alpha^2}$, $k$ désignant un nombre infiniment petit. Alors, en effectuant les intégrations relatives à cette variable, et posant $\mu=x+2k^{\frac{1}{2}}u$, on obtiendra la formule

$$(76)\quad\left\{\begin{aligned}\varphi=&\left(\frac{1}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}}e^{\frac{t^2}{4k}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-u^2}\cos\left(\frac{ut}{k^{\frac{1}{2}}}\right)f_0\left(x+2k^{\frac{1}{2}}u\right)du\\&+\left(\frac{1}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}}\int e^{\frac{t^2}{4k}}dt\int_{-\infty}^{\infty}e^{-u^2}\cos\left(\frac{ut}{k^{\frac{1}{2}}}\right)f_1\left(x+2k^{\frac{1}{2}}u\right)du,\end{aligned}\right.$$

dans laquelle le nombre $k$ ne devra être annulé qu'après l'intégration relative à $u$. On pourrait au reste (ainsi que je l'ai fait voir dans le *Bulletin de la Société philomathique* de 1821) introduire les imaginaires dans le second membre de l'équation (75), de manière à obtenir la formule

$$(77)\qquad \begin{cases} \varphi = \dfrac{f_0(x+t\sqrt{-1})+f_0(x-t\sqrt{-1})}{2} \\ \qquad + \displaystyle\int \dfrac{f_1(x+t\sqrt{-1})+f_1(x-t\sqrt{-1})}{2}\,dt. \end{cases}$$

Mais, quoique cette dernière valeur de $\varphi$, substituée dans l'équation (73), paraisse la vérifier dans tous les cas, néanmoins on ne saurait la considérer comme générale, tant que l'on n'aura pas donné de l'expression imaginaire $f(x+t\sqrt{-1})$ une définition indépendante de la forme de la fonction $f(x)$ supposée réelle. A la vérité, cette expression imaginaire se trouverait suffisamment définie, si l'on convenait de représenter par la notation $f(x+t\sqrt{-1})$ une fonction $\varphi$ de $x$ et de $t$, qui, étant continue par rapport à ces deux variables, fût propre à remplir la double condition de se réduire à $f(x)$ pour $t=0$, et de vérifier l'équation

$$(78)\qquad \frac{\partial\varphi}{\partial t} = \frac{\partial\varphi}{\partial x}\sqrt{-1}.$$

Mais il est facile de voir que, dans ce cas, la fonction $\varphi$ serait celle qui vérifie l'équation (73) pour toutes les valeurs possibles de $t$, et les équations de condition $\varphi = f(x)$, $\dfrac{\partial\varphi}{\partial t}=0$, pour la valeur particulière $t=0$. Ainsi, la recherche de la fonction $f(x+t\sqrt{-1})$ se trouverait ramenée à l'intégration de la formule (73) et l'on ne pourrait plus donner pour intégrale de cette formule l'équation (77), sans tomber dans un cercle vicieux.

Lorsqu'on suppose $m=2$, $l=1$ et $a=b^2$, l'équation (69) devient

$$(79)\qquad \frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = b^2\frac{\partial\varphi}{\partial x},$$



et l'on trouve

$$(80)\qquad \mathrm{P} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{(\alpha\sqrt{-1})^{\frac12}bt}+e^{-(\alpha\sqrt{-1})^{\frac12}bt}}{2}\, e^{\alpha(x-\mu)\sqrt{-1}}\,d\alpha,$$

$$(81)\qquad \varphi = \int \mathrm{P}\, f_0(\mu)\,d\mu + \int dt \int \mathrm{P}\, f_1(\mu)\,d\mu.$$

Dans ce cas, la valeur de $\varphi$ se présente encore sous une forme indéterminée. Mais on fera ordinairement cesser l'indétermination, en multipliant, dans chaque intégrale relative à la variable $\alpha$, la fonction sous le signe $\int$ par $e^{-k\alpha^2}$, $k$ désignant un nombre infiniment petit. De plus, on pourra faire subir à la fonction P une transformation qu'il est bon de connaître, et que je vais établir en peu de mots.

Si, en désignant par $h$ une constante positive, et par $\alpha$, $\beta$ deux quantités variables, on pose

$$\mathrm{A} = (h+\beta\sqrt{-1})^{\frac12} + \frac{(\alpha\sqrt{-1})^{\frac12}}{2(h+\beta\sqrt{-1})^{\frac12}},$$

puis, que l'on intègre deux fois chaque membre de l'équation identique

$$\frac{\partial\left(e^{\mathrm{A}^2}\dfrac{\partial\mathrm{A}}{\partial\beta}\right)}{\partial\alpha} = \frac{\partial\left(e^{\mathrm{A}^2}\dfrac{\partial\mathrm{A}}{\partial\alpha}\right)}{\partial\beta},$$

savoir, une fois par rapport à la variable $\alpha$, entre les limites $0$ et $\alpha$, et une fois par rapport à la variable $\beta$ entre les limites $-\infty$, $+\infty$, on obtiendra une nouvelle équation dont le second membre sera nul, attendu que $e^{\mathrm{A}^2}\dfrac{\partial\mathrm{A}}{\partial\alpha}$ s'évanouit pour $\beta=\pm\infty$, et de laquelle il résultera que l'intégrale

$$\begin{aligned}&\int_{-\infty}^{\infty} e^{\mathrm{A}^2}\frac{\partial\mathrm{A}}{\partial\beta}\,d\beta \\ &\quad = e^{(\alpha\sqrt{-1})^{\frac12}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{h+\beta\sqrt{-1}+\frac{\alpha\sqrt{-1}}{4(h+\beta\sqrt{-1})}}\,\frac12\left[\frac{1}{(h+\beta\sqrt{-1})^{\frac12}} - \frac{(\alpha\sqrt{-1})^{\frac12}}{2(h+\beta\sqrt{-1})^{\frac32}}\right]d\beta\end{aligned}$$

conserve la même valeur, quel que soit $\alpha$. D'ailleurs, cette intégrale se réduit, pour $\alpha = 0$, à la suivante

$$\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} e^{h+\beta\sqrt{-1}} \frac{d\beta}{(h+\beta\sqrt{-1})^{\frac{1}{2}}}, \tag{82}$$

et il est facile de prouver que celle-ci a pour valeur $\pi^{\frac{1}{2}}$ (¹). On aura donc

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{h+\beta\sqrt{-1}+\frac{\alpha\sqrt{-1}}{4(h+\beta\sqrt{-1})}} \frac{1}{2}\left[\frac{1}{(h+\beta\sqrt{-1})^{\frac{1}{2}}} - \frac{(\alpha\sqrt{-1})^{\frac{1}{2}}}{2(h+\beta\sqrt{-1})^{\frac{3}{2}}}\right] d\beta = \pi^{\frac{1}{2}} e^{-(\alpha\sqrt{-1})^{\frac{1}{2}}}. \tag{83}$$

Si dans la formule (83) on remplace $(\alpha\sqrt{-1})^{\frac{1}{2}}$ par $-(\alpha\sqrt{-1})^{\frac{1}{2}}$, on en obtiendra une seconde qui, ajoutée à la première, donnera

$$\frac{e^{(\alpha\sqrt{-1})^{\frac{1}{2}}} + e^{-(\alpha\sqrt{-1})^{\frac{1}{2}}}}{2} = \frac{1}{2\pi^{\frac{1}{2}}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{h+\beta\sqrt{-1}+\frac{\alpha\sqrt{-1}}{4(h+\beta\sqrt{-1})}} \frac{d\beta}{(h+\beta\sqrt{-1})^{\frac{1}{2}}}. \tag{84}$$

Si maintenant on remplace $\alpha$ par $\alpha b^2 t^2$, on reconnaîtra que la valeur de P, fournie par l'équation (80), peut être présentée sous la forme

$$\mathrm{P} = \frac{1}{2\pi^{\frac{3}{2}}}\int\int\int e^{h+\beta\sqrt{-1}} e^{\alpha\left[x+\frac{b^2t^2}{4(h+\beta\sqrt{-1})}-\mu\right]\sqrt{-1}} \frac{d\alpha\, d\beta\, d\mu}{(h+\beta\sqrt{-1})^{\frac{1}{2}}}. \tag{85}$$

Lorsqu'on substitue cette valeur de P dans l'équation (81), après avoir

(¹) La valeur de l'intégrale (82) se déduit facilement de l'équation (86). En effet, si dans cette équation on prend l'intégrale relative à $\mu$ entre les limites $\mu = 0$, $\mu = \infty$, et que l'on pose $f(\mu) = \mu^{a-1}e^{-h\mu}$, on trouvera

$$2\pi x^{a-1}e^{-hx} = \int\int e^{\alpha x\sqrt{-1}} e^{-\mu(h+\alpha\sqrt{-1})} \mu^{a-1}\, d\mu\, d\alpha = \int \mu^{a-1}e^{-\mu}\, d\mu \times \int \frac{e^{\alpha x\sqrt{-1}}\, d\alpha}{(h+\alpha\sqrt{-1})^a},$$

puis, en faisant d'abord $x = 1$, et ensuite $a = \frac{1}{2}$,

$$\int \frac{e^{\alpha\sqrt{-1}}\, d\alpha}{(h+\alpha\sqrt{-1})^a} = \frac{2\pi e^{-h}}{\int \mu^{a-1}e^{-\mu}\, d\mu},$$

$$\int \frac{e^{\alpha\sqrt{-1}}\, d\alpha}{(h+\alpha\sqrt{-1})^{\frac{1}{2}}} = \frac{2\pi e^{-h}}{\pi^{\frac{1}{2}}},$$

$$\int \frac{e^{h+\alpha\sqrt{-1}}\, d\alpha}{(h+\alpha\sqrt{-1})^{\frac{1}{2}}} = 2\pi^{\frac{1}{2}}.$$



multiplié la fonction renfermée sous les signes $\int\int\int$ par $e^{-k\alpha^2}$ ($k$ désignant toujours une quantité positive infiniment petite), on obtient l'intégrale de l'équation (79). Si l'on voulait, dans cette intégrale, introduire les imaginaires sous les fonctions $f_0$ et $f_1$, il suffirait d'avoir égard à l'équation (8) (Iʳᵉ partie) que l'on présenterait sous la forme

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{\mu'}^{\mu''} e^{\alpha(x-\mu)\sqrt{-1}} f(\mu)\, d\alpha\, d\mu, \tag{86}$$

et de laquelle on conclurait par analogie

$$f\left[x + \frac{b^2t^2}{4(h+\beta\sqrt{-1})}\right] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{\mu'}^{\mu''} e^{\alpha\left[x+\frac{b^2t^2}{4(h+\beta\sqrt{-1})}-\mu\right]\sqrt{-1}}\, d\alpha\, d\mu. \tag{87}$$

On aurait par suite

$$\left\{\begin{aligned} \varphi = {} & \frac{1}{2\pi^{\frac{1}{2}}}\int_{-\infty}^{\infty} f_0\left[x + \frac{b^2t^2}{4(h+\beta\sqrt{-1})}\right] \frac{e^{h+\beta\sqrt{-1}}\, d\beta}{(h+\beta\sqrt{-1})^{\frac{1}{2}}} \\ & + \frac{1}{2\pi^{\frac{1}{2}}}\int_0^t dt \int_{-\infty}^{\infty} f_1\left[x + \frac{b^2t^2}{4(h+\beta\sqrt{-1})}\right] \frac{e^{h+\beta\sqrt{-1}}\, d\beta}{(h+\beta\sqrt{-1})^{\frac{1}{2}}}. \end{aligned}\right. \tag{88}$$

Cette dernière formule est précisément celle que l'on déduirait du développement de l'intégrale en série, et que M. Poisson a citée dans le *Bulletin de la Société philomathique* de septembre 1822. Mais elle fait naître les mêmes difficultés que l'équation (77), et l'on peut en dire autant de toutes les formules dans lesquelles des expressions imaginaires se trouvent renfermées sous des fonctions arbitraires.

## OBSERVATIONS GÉNÉRALES ET ADDITIONS.

Dans le Mémoire qu'on vient de lire, nous considérons chaque intégrale définie, prise entre deux limites données, comme n'étant autre chose que la somme des valeurs infiniment petites de l'expression différentielle placée sous le signe $\int$, qui correspondent aux diverses valeurs de la variable renfermées entre les limites dont il s'agit. Lorsqu'on adopte cette manière d'envisager les intégrales définies, on démontre aisément qu'une semblable intégrale a une valeur unique et finie, toutes les fois que, les deux limites de la variable étant des quantités finies, la fonction sous le signe $\int$ demeure elle-même finie et continue dans tout l'intervalle compris entre ces limites. Supposons que, ces dernières conditions étant remplies pour l'intégrale $\int f(x)\,dx$ prise entre les limites $x = x'$, $x = x''$, on représente par $x_0, x_1, \ldots, x_{m-1}$ des valeurs de $x$ intermédiaires entre les valeurs extrêmes $x'$, $x''$, et par

$$\xi' = \chi(x', k), \qquad \xi'' = \psi(x'', k)$$

deux fonctions de $k$, $x'$, $x''$, qui convergent respectivement vers les deux limites $x'$, $x''$, tandis que l'on fait converger $k$ vers la limite zéro. Si l'on désigne, avec M. Fourier, l'intégrale proposée par la notation $\int_{x'}^{x''} f(x)\,dx$, on établira facilement les deux équations

$$\lim \int_{\xi'}^{\xi''} f(x)\,dx = \int_{x'}^{x''} f(x)\,dx,$$

$$\int_{x'}^{x''} f(x)\,dx = \int_{x'}^{x_0} f(x)\,dx + \int_{x_0}^{x_1} f(x)\,dx + \ldots + \int_{x_{m-1}}^{x''} f(x)\,dx.$$

Il suffit d'étendre, par analogie, ces deux équations au cas même où les conditions ci-dessus énoncées ne sont plus satisfaites, pour être en état de fixer, dans toutes les suppositions possibles, le sens que l'on doit attacher à la notation $\int_{x'}^{x''} f(x)\,dx$, ou, en d'autres termes, la valeur de l'intégrale définie qu'elle exprime. [*Voir*, pour plus de détail, le résumé des leçons que j'ai données à l'École royale polytechnique, sur le Calcul infinitésimal (¹).] Il faut seulement observer que cette valeur sera, dans beaucoup de cas, infinie ou indéterminée. Or, il importe, non seulement de reconnaître les cas de cette espèce, mais encore de fixer le nombre et la nature des quantités arbitraires que comporte une

(¹) *Œuvres de Cauchy*, S. II, T. IV.



intégrale définie indéterminée. On parvient à ce double résultat par la considération des intégrales définies *singulières*, dont j'ai fait usage pour la première fois dans un Mémoire (¹) présenté à l'Institut le 22 août 1814, et dont j'ai développé la théorie dans une Note que renferme le *Bulletin de la Société philomathique* de novembre 1822 (²). Au reste, l'indétermination qui affecte une intégrale définie simple ou multiple cesse, pour l'ordinaire, lorsque cette intégrale est censée représenter la limite vers laquelle converge une autre intégrale définie, ou la somme de plusieurs intégrales de cette espèce, tandis que certaines constantes renfermées sous les signes d'intégration s'évanouissent. Ainsi, par exemple, quoique, pour des valeurs entières de $m$ supérieures à l'unité, et pour des valeurs positives de $b$, les quatre intégrales

$$\int_0^m \frac{dx}{x-1}, \quad \int_0^\infty x^{m-1} \cos bx\,dx,$$

$$\int_0^\infty x^{m-1} \sin bx\,dx, \quad \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{e^{b\alpha} + e^{-b\alpha}}{2} \cos \alpha\mu\,d\alpha\,d\mu$$

soient effectivement indéterminées, néanmoins si, $k$ désignant un nombre infiniment petit, elles entrent dans un calcul comme limites

(¹) Ce Mémoire, qui sera publié dans le Cahier prochain, a été approuvé par l'Institut, sur un rapport de M. Legendre, daté du 7 novembre 1814, et dont les conclusions se trouvent imprimées dans l'Analyse des travaux de l'Institut pendant la même année. De plus, M. Poisson a donné un extrait de ce Mémoire dans le *Bulletin de la Société philomathique* de décembre 1814.

(²) J'appelle *intégrale définie singulière* une intégrale prise relativement à une ou à plusieurs variables entre des limites infiniment rapprochées de certaines valeurs attribuées à ces mêmes variables, savoir, de valeurs infiniment grandes, ou de valeurs pour lesquelles la fonction sous le signe $\int$ devient infinie ou indéterminée. Ces sortes d'intégrales ne sont pas nécessairement nulles et peuvent obtenir des valeurs finies ou même infinies qu'il est ordinairement facile de calculer. Ainsi, par exemple, $k$ désignant un nombre infiniment petit, et $\mu$, $\nu$ deux constantes positives, on fixera sans peine les valeurs des deux intégrales définies singulières

$$(a) \qquad \int_{k\nu}^{k\mu} \frac{\mathfrak{f}(x)}{x}\,dx = \mathfrak{f}(0)\, l\left(\frac{\mu}{\nu}\right),$$

$$(b) \qquad \int_{1-k\mu}^{1-k\nu} \frac{\mathfrak{f}(x)}{1-x}\,dx = \mathfrak{f}(1)\, l\left(\frac{\mu}{\nu}\right).$$

des suivantes

$$\int_0^m \frac{(x-1)\,dx}{k^2+(x-1)^2}, \quad \int_0^\infty x^{m-1}e^{-kx}\cos bx\,dx,$$

$$\int_0 x^{m-1}e^{-kx}\sin bx\,dx, \quad \int_0^\infty\int_0^\infty e^{-k\alpha^2}\frac{e^{b\alpha}+e^{-b\alpha}}{2}\cos\alpha\mu\,d\alpha\,d\mu,$$

elles reprendront des valeurs fixes, et se réduiront à

$$\log(m-1), \quad \frac{1.2.3\ldots\ldots(m-1)}{b^m}\cos\frac{m\pi}{2}, \quad \frac{1.2.3\ldots\ldots(m-1)}{b^m}\sin\frac{m\pi}{2}; \quad \frac{\pi}{2}.$$

Il est remarquable que, dans la dernière de ces quatre intégrales, on doit attendre, pour annuler le nombre $k$, que la seconde intégration soit effectuée. La même remarque s'étend à une grande partie des formules que nous avons données dans le présent Mémoire.

Concevons encore que, dans l'intégrale définie $\int_{x'}^{x''} f(x)\,dx$, la fonction sous le signe $\int$, savoir, $f(x)$, devienne infinie pour des valeurs de $x$ comprises entre les limites $x'$, $x''$, et représentées par $x_0$, $x_1$, $x_2$, ..., $x_{m-1}$. Cette intégrale sera le plus ordinairement indéterminée. Mais, si elle entre dans le calcul comme limite de la somme

$$\int_{x'}^{x_0-k} f(x)\,dx + \int_{x_0+k}^{x_1-k} f(x)\,dx + \ldots + \int_{x_{m-1}+k}^{x''} f(x)\,dx,$$

elle reprendra en général une valeur fixe à laquelle nous avons donné le nom de *valeur principale*. (*Voir* le résumé des leçons données à l'École royale polytechnique.)

Les considérations précédentes conduisent à plusieurs formules que l'on peut employer avec avantage, soit dans l'évaluation des intégrales définies, soit dans la résolution des équations algébriques ou même transcendantes, et que nous allons faire connaître.

Soient U, V deux fonctions réelles des variables $u$, $v$; et désignons par $x_0$, $x_1$, ..., $x_{m-1}$ celles des racines de l'équation

$$(1) \qquad f(x) = \pm\infty$$



qui, substituées dans la formule

$$(2) \qquad x = \mathrm{U} + \mathrm{V}\sqrt{-1},$$

déterminent des valeurs de $u$ renfermées entre les limites $u'$, $u''$, et des valeurs de $v$ renfermées entre les limites $v'$, $v''$. Posons, d'ailleurs,

$$(3) \qquad \begin{cases} \chi(u,v) = f(\mathrm{U}+\mathrm{V}\sqrt{-1})\dfrac{\partial(\mathrm{U}+\mathrm{V}\sqrt{-1})}{\partial u}, \\ \psi(u,v) = f(\mathrm{U}+\mathrm{V}\sqrt{-1})\dfrac{\partial(\mathrm{U}+\mathrm{V}\sqrt{-1})}{\partial v}. \end{cases}$$

Enfin, représentons par $f_0$, $f_1$, ..., $f_{m-1}$ les véritables valeurs des produits $k\,f(x_0+k)$, $k\,f(x_1+k)$, ..., $k\,f(x_{m-1}+k)$ correspondant à $k=0$ [1]. Si l'on intègre par rapport à $u$ et à $v$ les deux membres de l'équation identique

$$(4) \qquad \frac{\partial\chi(u,v)}{\partial v} = \frac{\partial\psi(u,v)}{\partial u}$$

entre les limites $u=u'$, $u=u''$; $v=v'$, $v=v''$, et que l'on remplace dans chaque membre l'intégrale relative à $u$ par sa valeur principale, on trouvera

$$(5) \qquad \begin{cases} \displaystyle\int_{u'}^{u''} [\chi(u,v'')-\chi(u,v')]\,du \\ \displaystyle\quad = \int_{v'}^{v''} [\psi(u'',v)-\psi(u',v)]\,dv - 2\pi(\pm f_0 \pm f_1 \pm \ldots \pm f_{m-1})\sqrt{-1}, \end{cases}$$

chaque terme de la somme $\pm f_0 \pm f_1 \pm \ldots \pm f_{m-1}$ devant être affecté du signe + ou du signe −, suivant que les valeurs de $u$ et de $v$ correspondant à ce terme déterminent une valeur positive ou négative de la fonction réelle $\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial u}\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial v} - \frac{\partial \mathrm{U}}{\partial v}\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial u}$. Ajoutons que chacun de ces mêmes

[1] Si l'équation (1) avait plusieurs racines égales à $x_0$, $p$ étant le nombre de ces racines, il faudrait, pour obtenir la valeur de $f_0$, substituer au produit $k\,f(x_0+k)$ la fonction

$$\frac{1}{1.2.3\ldots\ldots(p-1)}\frac{\partial^{p-1}[k^p f(x_0+k)]}{\partial k^{p-1}}.$$

termes devra être réduit à moitié, si la valeur correspondante de $u$ coïncide avec une des limites $u'$, $u''$, ou la valeur correspondante de $v$ avec l'une des limites $v'$, $v''$. La formule (5) résulte des calculs développés dans le Mémoire de 1814 déjà cité. Si l'on prend successivement

$$\mathrm{U}+\mathrm{V}\sqrt{-1}=u+v\sqrt{-1}, \qquad \mathrm{U}+\mathrm{V}\sqrt{-1}=u(\cos v+\sqrt{-1}\sin v),$$

et que dans le second cas on suppose la quantité $u$ toujours positive, on obtiendra les équations

$$(6)\quad \left\{\begin{aligned}&\int_{u'}^{u''}\left[f(u+v''\sqrt{-1})-f(u+v'\sqrt{-1})\right]du\\ &\quad=\sqrt{-1}\int_{v'}^{v''}\left[f(u''+v\sqrt{-1})-f(u'+v\sqrt{-1})\right]dv-2\pi(f_0+f_1+\ldots+f_{m-1})\sqrt{-1},\end{aligned}\right.$$

$$(7)\quad \left\{\begin{aligned}&\int_{u'}^{u''}\left[e^{v''\sqrt{-1}}f(ue^{v''\sqrt{-1}})-e^{v'\sqrt{-1}}f(ue^{v'\sqrt{-1}})\right]du\\ &\quad=\sqrt{-1}\int_{v'}^{v''}\left[u''f(u''e^{v\sqrt{-1}})-u'f(u'e^{v\sqrt{-1}})\right]e^{v\sqrt{-1}}\,dv-2\pi(f_0+f_1+\ldots+f_{m-1})\sqrt{-1}.\end{aligned}\right.$$

Lorsque la fonction $f(u+v\sqrt{-1})$ ne varie jamais d'une manière brusque entre les limites $u=-\infty$, $u=\infty$; $v=-\infty$, $v=0$, et qu'elle s'évanouit, 1° pour $u=\pm\infty$, quel que soit $v$, 2° pour $v=-\infty$, quel que soit $u$, alors, en posant $u'=-\infty$, $u''=\infty$, $v'=-\infty$, $v''=0$, et remplaçant $u$ par $x$, on tire de la formule (6)

$$(8)\qquad \int_{-\infty}^{\infty}f(x)\,dx=2\pi(f_0+f_1+\ldots+f_{m-1})\sqrt{-1}.$$

Lorsque la fonction $f(ue^{v\sqrt{-1}})$ ne varie point d'une manière brusque entre les limites $u=0$, $u=1$; $v=-\pi$, $v=+\pi$, en prenant ces mêmes limites pour valeurs respectives de $u'$, $u''$, $v'$, $v''$, on tire de la formule (7)

$$(9)\qquad \int_{-\pi}^{\pi}e^{v\sqrt{-1}}f(e^{v\sqrt{-1}})\,dv=2\pi(f_0+f_1+\ldots+f_{m-1}).$$

Il importe de remarquer que les quantités $f_0, f_1, \ldots, f_{m-1}$ correspondent, dans la formule (8), aux racines de l'équation (1) pour lesquelles le coefficient de $\sqrt{-1}$ est nul ou négatif, et, dans la formule (9), aux racines réelles ou imaginaires dont la valeur numérique ou le module est inférieur à l'unité. Ajoutons que l'on devra toujours réduire à moitié celles des quantités $f_0, f_1, \ldots, f_{m-1}$ qui correspondraient, dans la formule (8), à des racines réelles de l'équation (1), ou, dans la formule (9), à des racines dont la valeur numérique ou le module serait l'unité. Alors ces équations ne fourniraient plus que les valeurs principales des intégrales comprises dans les premiers membres, et non leurs valeurs générales qui deviendraient indéterminées. Observons, au reste, qu'il sera toujours facile de convertir ces valeurs principales en intégrales déterminées [1].



La formule (8) s'accorde avec celles que j'ai présentées dans le Mémoire de 1814, et dans des leçons données en 1817, au Collège royal de France [2]. Elle fournit une grande partie des intégrales définies

(1) Il est aisé de convertir en intégrales déterminées, non seulement les valeurs principales des intégrales définies indéterminées, mais encore toutes leurs autres valeurs, et même les intégrales définies singulières. Ces transformations conduisent souvent à des résultats dignes de remarque. Ainsi, par exemple, lorsque la fonction $\mathrm{f}(x)$ demeure finie et continue entre les limites $x=0$, $x=\infty$, l'équation $(a)$ (p. 335) entraîne la suivante

$$(c)\qquad \int_k^{\infty}\frac{\mathrm{f}(\nu z)}{z}\,dz-\int_k^{\infty}\frac{\mathrm{f}(\mu z)}{z}\,dz=\int_0^{\infty}\frac{\mathrm{f}(\nu z)-\mathrm{f}(\mu z)}{z}\,dz=\mathrm{f}(0)\,l\left(\frac{\mu}{\nu}\right),$$

laquelle comprend, comme cas particulier, la formule connue $\int_0^{\infty}\frac{e^{-\nu z}-e^{-\mu z}}{z}\,dz=l\left(\frac{\mu}{\nu}\right)$. De même, si l'on suppose que $\mathrm{f}(x)$ demeure finie et continue depuis $x=0$ jusqu'à $x=1$, et si l'on désigne par $\chi(z)$, $\psi(z)$ deux fonctions qui, croissant et décroissant avec la variable $z$ d'une manière continue, convergent en même temps que cette variable vers les limites 0 et 1, on tirera sans peine de la formule $(b)$

$$(d)\qquad \int_0^1\left[\frac{\psi'(z)\,\mathrm{f}(\psi z)}{1-\psi(z)}-\frac{\chi'(z)\,\mathrm{f}(\chi z)}{1-\chi(z)}\right]dz=\mathrm{f}(1)\,l\left[\frac{\chi'(1)}{\psi'(1)}\right].$$

(2) Dans l'une de ces leçons j'avais déduit, d'une formule générale qui s'accorde avec l'équation (8), les valeurs des quatre intégrales

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{f}(x)}{\mathrm{F}(x)}\sin rx\,dx,\quad \int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{f}(x)}{\mathrm{F}(x)}\cos rx\,dx,$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{f}(x)}{\mathrm{F}(x)}\,l(1+r^2x^2)\,dx,\quad \int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{f}(x)}{\mathrm{F}(x)}\,\mathrm{arc\,tang}\,rx\,dx,$$

$r$ désignant une constante positive et $\frac{\mathrm{f}(x)}{\mathrm{F}(x)}$ une fraction rationnelle.

simples dont les valeurs avaient été fixées par d'autres méthodes, et beaucoup d'intégrales nouvelles. D'abord, il est aisé de voir que l'on ramène immédiatement l'équation (9) à l'équation (8) en posant

$$\operatorname{tang}\frac{v}{2} = x,$$

afin de convertir l'intégrale $\int_{-\pi}^{\pi} e^{v\sqrt{-1}} f(e^{v\sqrt{-1}})\,dv$ en une autre de la forme $\int_{-\infty}^{\infty} \mathfrak{F}(x)\,dx$. De plus, il est clair que les équations (8) et (9) fourniront les valeurs en termes finis des deux intégrales qu'elles renferment, toutes les fois que les racines de l'équation (1), ou, du moins, celles dont les modules resteront inférieurs à l'unité, seront en nombre fini. Dans le cas contraire, les seconds membres des formules (8) et (9) se changeraient en séries dont les sommes seraient équivalentes à ces mêmes intégrales. Je me contenterai, pour le moment, d'appliquer ces formules à quelques exemples.

Si l'on désigne par $a$, $b$, $r$ trois quantités positives, on tirera de la formule (8), en supposant $a$ inférieur ou tout au plus égal à 2,

$$(10)\quad \begin{cases} \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} (x\sqrt{-1})^{a-1} e^{-bx\sqrt{-1}} \frac{dx}{r^2+x^2} \\ \displaystyle\quad = 2\int_0^{\infty} x^{a-1} \sin\left(\frac{a\pi}{2} - bx\right)\frac{dx}{r^2+x^2} = \pi r^{a-2} e^{-br}, \end{cases}$$

$$(11)\quad \begin{cases} \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} (x\sqrt{-1})^{a-1} e^{-bx\sqrt{-1}} \frac{dx}{r^2-x^2} \\ \displaystyle\quad = 2\int_0^{\infty} x^{a-1} \sin\left(\frac{a\pi}{2} - bx\right)\frac{dx}{r^2-x^2} = \pi r^{a-2} \cos\left(\frac{a\pi}{2} - br\right). \end{cases}$$

L'équation (10) comprend, comme cas particuliers, les formules

$$\int_0^{\infty} \frac{x^{a-1}\,dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{2\sin\frac{a\pi}{2}}, \qquad \int_0^{\infty} \frac{r\cos bx}{r^2+x^2}\,dx = \int_0^{\infty} \frac{x\sin bx}{r^2+x^2}\,dx = \frac{\pi}{2} e^{-br}$$

données par Euler et M. de Laplace. La formule (11) fournit seulement la valeur principale de l'intégrale qu'elle renferme. Mais, si l'on transforme cette valeur principale en une intégrale déterminée, et que l'on



fasse, pour abréger, $br = c$, on trouvera

$$(12)\quad \int_0^{r} \frac{\left(\frac{x}{r}\right)^{1-a} \sin\left(\frac{a\pi}{2} - c\frac{r}{x}\right) - \left(\frac{r}{x}\right)^{1-a} \sin\left(\frac{a\pi}{2} - c\frac{x}{r}\right)}{\frac{x}{r} - \frac{r}{x}} \frac{dx}{x} = \frac{\pi}{2}\cos\left(\frac{a\pi}{2} - c\right).$$

Cette dernière équation comprend plusieurs formules connues, entre autres la suivante

$$\int_0^{1} \frac{x^{1-a} - \left(\frac{1}{x}\right)^{1-a}}{x - \frac{1}{x}} \frac{dx}{x} = \frac{\pi}{2\operatorname{tang}\frac{a\pi}{2}}.$$

Si l'on pose $a = 0$, les formules (10), (11) et (12) cesseront d'être exactes; mais, en opérant toujours de la même manière, on trouvera

$$(13)\quad \begin{cases} \displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\sin bx}{x} \frac{dx}{r^2+x^2} = \frac{\pi}{2r^2}(1 - e^{-br}), \\ \displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\sin bx}{x} \frac{dx}{r^2-x^2} = \frac{\pi}{2r^2}(1 - \cos br), \end{cases}$$

$$(14)\quad \int_0^{r} \frac{\frac{x}{r}\sin\left(c\frac{r}{x}\right) - \frac{r}{x}\sin\left(c\frac{x}{r}\right)}{\frac{x}{r} - \frac{r}{x}} \frac{dx}{x} = \frac{\pi}{2}(1 - \cos c).$$

On tire encore de la formule (8), en supposant $a$ positif, mais inférieur, ou tout au plus égal à l'unité,

$$(15)\quad \begin{cases} \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{(x\sqrt{-1})^a e^{-bx\sqrt{-1}}}{l(1+x\sqrt{-1})} \frac{dx}{r^2+x^2} \\ \displaystyle\quad = \int_0^{\infty} \frac{\cos\left(\frac{a\pi}{2} - bx\right) l(1+x^2) + 2\sin\left(\frac{a\pi}{2} - bx\right)\operatorname{arc\,tang} x}{\left[\frac{1}{2}l(1+x^2)\right]^2 + (\operatorname{arc\,tang} x)^2} \frac{x^a\,dx}{r^2+x^2} = \frac{\pi r^{a-1} e^{-br}}{l(1+r)}, \end{cases}$$

et, en supposant $a = 0$,

$$(16)\quad \begin{cases} \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-bx\sqrt{-1}}}{l(1+x\sqrt{-1})} \frac{dx}{r^2+x^2} \\ \displaystyle\quad = \int_0^{\infty} \frac{\cos bx\, l(1+x^2) - 2\sin bx \operatorname{arc\,tang} x}{\left[\frac{1}{2}l(1+x^2)\right]^2 + (\operatorname{arc\,tang} x)^2} \frac{dx}{r^2+x^2} = \frac{\pi}{r}\left[\frac{e^{-br}}{l(1+r)} - \frac{1}{r}\right]. \end{cases}$$

Si l'on fait, dans ces dernières formules, $b=0$, $r=1$, $x=\operatorname{tang} z$, et de plus $a=1$ dans l'équation (15), on obtiendra les intégrales

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{z \operatorname{tang} z\, dz}{z^2+(l\cos z)^2} = \frac{\pi}{2\,l(2)}, \qquad \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{l\cos z\, dz}{z^2+(l\cos z)^2} = \frac{\pi}{2}\left(1-\frac{1}{l(2)}\right)$$

citées par M. Poisson dans le *Bulletin de la Société philomathique* de septembre 1822.

On déterminerait avec la même facilité les valeurs des intégrales définies imaginaires

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{f}(x)}{\mathrm{F}(x)} e^{-bx\sqrt{-1}}\, dx, \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{f}(x)}{\mathrm{F}(x)}\, l\big[r\sin\theta + (x + r\cos\theta)\sqrt{-1}\big]\, dx,$$
$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{f}(x)}{\mathrm{F}(x)} \frac{dx}{l(1+x\sqrt{-1})}, \quad \ldots,$$

et par suite celles des intégrales réelles

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{f}(x)}{\mathrm{F}(x)} \cos bx\, dx, \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{f}(x)}{\mathrm{F}(x)} \sin bx\, dx, \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{f}(x)}{\mathrm{F}(x)}\, l(r^2+2rx\cos\theta+x^2)\, dx,$$
$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{f}(x)}{\mathrm{F}(x)} \operatorname{arc\,tang} \frac{x+r\cos\theta}{r\sin\theta}\, dx, \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{f}(x)}{\mathrm{F}(x)} \frac{\frac{1}{2}l(1+x^2)}{[\frac{1}{2}l(1+x^2)]^2+(\operatorname{arc\,tang} x)^2}\, dx,$$
$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{f}(x)}{\mathrm{F}(x)} \frac{\operatorname{arc\,tang} x}{[\frac{1}{2}l(1+x^2)^2]^2+(\operatorname{arc\,tang} x)^2}\, dx, \quad \ldots,$$

$\frac{\mathrm{f}(x)}{\mathrm{F}(x)}$ désignant une fraction rationnelle, $b$, $r$ des constantes positives et $\theta$ un arc compris entre les limites $0$, $\pi$. Nous ne nous arrêterons pas davantage aux diverses applications de la formule (8) que l'on pourrait multiplier à l'infini.

Si l'on fait, dans la formule (9), $f(x) = \frac{\mathrm{f}(x)}{x\,\mathrm{F}(x)}$, la fonction $\mathrm{f}(x)$ étant choisie de telle manière que l'expression $\mathrm{f}(ue^{v\sqrt{-1}})$ reste finie et déterminée entre les limites $u=0$, $u=1$; $v=-\pi$, $v=+\pi$, on en conclura

$$(17) \qquad \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\mathrm{f}(e^{v\sqrt{-1}})}{\mathrm{F}(e^{v\sqrt{-1}})}\, dv = 2\pi\left[\frac{\mathrm{f}(0)}{\mathrm{F}(0)} + \frac{\mathrm{f}(x_0)}{x_0\,\mathrm{F}'(x_0)} + \frac{\mathrm{f}(x_1)}{x_1\,\mathrm{F}'(x_1)} + \ldots\right],$$



$x_0$, $x_1$, ... désignant les racines réelles ou imaginaires de l'équation $\mathrm{F}(x)=0$, qui auront pour valeur numérique ou pour module un nombre inférieur à l'unité. Ainsi, par exemple, en posant

$$\mathrm{F}(x) = 1 - ax,$$

on trouvera :

Pour $a^2<1$,

$$(18) \qquad \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\mathrm{f}(e^{v\sqrt{-1}})}{1-ae^{v\sqrt{-1}}}\, dv = 2\pi\,\mathrm{f}(0),$$

et, pour $a^2>1$,

$$(19) \qquad \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\mathrm{f}(e^{v\sqrt{-1}})}{1-ae^{v\sqrt{-1}}}\, dv = 2\pi\left[\mathrm{f}(0) - \mathrm{f}\left(\frac{1}{a}\right)\right].$$

Ces formules s'accordent encore avec deux autres que M. Poisson a citées dans le *Bulletin* qu'on vient de rappeler.

Concevons maintenant que l'on prenne

$$(20) \qquad f(x) = \frac{\varphi(x)\,\mathrm{F}'(x) - \varpi(x)\,\mathrm{F}(x)}{\mathrm{F}(x)},$$

$\mathrm{F}(x)$, $\varphi(x)$ et $\varpi(x)$ désignant des fonctions arbitraires, mais telles, cependant, que les racines $x_0$, $x_1$, ..., $x_{m-1}$ appartiennent toutes à l'équation

$$(21) \qquad \mathrm{F}(x) = 0.$$

On conclura des formules (5), (6), (7),

$$(22) \qquad \left\{ \begin{aligned} &\pm\varphi(x_0)\pm\varphi(x_1)\pm\ldots\pm\varphi(x_{m-1}) \\ &\quad = \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\int_{v'}^{v''} [\psi(u'',v)-\psi(u',v)]\,dv \\ &\qquad - \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\int_{u'}^{u''} [\chi(u,v'')-\chi(u,v')]\,du, \end{aligned} \right.$$

$$(23) \qquad \left\{ \begin{aligned} &\varphi(x_0)+\varphi(x_1)+\ldots+\varphi(x_{m-1}) \\ &\quad = \frac{1}{2\pi}\int_{v'}^{v''} [f(u''+v\sqrt{-1})-f(u'+v\sqrt{-1})]\,dv \\ &\qquad + \frac{\sqrt{-1}}{2\pi}\int_{u'}^{u''} [f(u+v''\sqrt{-1})-f(u+v'\sqrt{-1})]\,du, \end{aligned} \right.$$

et

$$(24)\quad \left\{\begin{aligned} &\varphi(x_0)+\varphi(x_1)+\ldots+\varphi(x_{m-1})\\ &\quad= \frac{1}{2\pi}\int_{v'}^{v''}\left[u''f\left(u''e^{v\sqrt{-1}}\right)-u'f\left(u'e^{v\sqrt{-1}}\right)\right]e^{v\sqrt{-1}}\,dv\\ &\qquad+\frac{\sqrt{-1}}{2\pi}\int_{u'}^{u''}\left[e^{v''\sqrt{-1}}f\left(ue^{v''\sqrt{-1}}\right)-e^{v'\sqrt{-1}}f\left(ue^{v'\sqrt{-1}}\right)\right]du.\end{aligned}\right.$$

Les racines de l'équation (21) qui entrent dans ces dernières formules, savoir, $x_0, x_1, \ldots, x_{m-1}$, se réduiront à une seule, si l'on choisit convenablement les limites $u'$, $u''$, $v'$, $v''$. On peut donc obtenir par ce moyen la valeur de $\varphi(x_0)$, puis, en posant $\varphi(x)=x$, la valeur de $x_0$, c'est-à-dire, d'une quelconque des racines exprimée à l'aide d'intégrales définies simples. On doit même remarquer que ces intégrales renfermeront des constantes arbitraires $u'$, $u''$, $v'$, $v''$, avec une fonction arbitraire $\varpi(x)$ assujettie seulement à certaines conditions.

Lorsque la fonction $f(u+v\sqrt{-1})$ s'évanouit pour $v=\pm\infty$, quel que soit $u$, alors, en supposant $v'=-\infty$, $v''=\infty$, on réduit la formule (23) à

$$(25)\quad \left\{\begin{aligned} &\varphi(x_0)+\varphi(x_1)+\ldots+\varphi(x_{m-1})\\ &\quad=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left[f\left(u''+v\sqrt{-1}\right)-f\left(u'+v\sqrt{-1}\right)\right]dv.\end{aligned}\right.$$

Lorsque dans la formule (24) on suppose $v'=-\pi$, $v''=+\pi$, $u'=0$, $u''=r$ ($r$ étant une quantité positive), on trouve

$$(26)\quad \varphi(x_0)+\varphi(x_1)+\ldots+\varphi(x_{m-1})=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}re^{v\sqrt{-1}}f\left(re^{v\sqrt{-1}}\right)dv.$$

Si l'on veut que $x_0, x_1, \ldots, x_{m-1}$ représentent toutes les racines de l'équation (21), il suffira de concevoir que dans la formule (25) les deux quantités $u'$, $u''$ deviennent, la première inférieure, la seconde supérieure aux parties réelles de toutes ces racines, et que dans la formule (26) la quantité $r$ surpasse à la fois les valeurs numériques des racines réelles et les modules des racines imaginaires.

Les formules (23) et (25) comprennent, comme cas particuliers, celles que j'ai données dans un Mémoire sur la résolution des équations par les intégrales définies, présenté à l'Académie des Sciences le 22 novembre 1819.



Dans tous les cas où l'on peut réduire à zéro la fonction arbitraire $\varpi(x)$, la formule (20) donne simplement

$$f(x)=\frac{\varphi(x)\,F'(x)}{F(x)}.$$

Alors, en faisant, pour abréger, $\varphi(x)F'(x)=\mathrm{f}(x)$, on tire des équations (25) et (26)

$$(27)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{\mathrm{f}(x_0)}{F'(x_0)}+\frac{\mathrm{f}(x_1)}{F'(x_1)}+\ldots+\frac{\mathrm{f}(x_{m-1})}{F'(x_{m-1})}\\ &\quad=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\frac{\mathrm{f}\left(u''+v\sqrt{-1}\right)}{F\left(u''+v\sqrt{-1}\right)}-\frac{\mathrm{f}\left(u'+v\sqrt{-1}\right)}{F\left(u'+v\sqrt{-1}\right)}\right]dv,\end{aligned}\right.$$

$$(28)\quad \frac{\mathrm{f}(x_0)}{F'(x_0)}+\frac{\mathrm{f}(x_1)}{F'(x_1)}+\ldots+\frac{\mathrm{f}(x_{m-1})}{F'(x_{m-1})}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}re^{v\sqrt{-1}}\frac{\mathrm{f}\left(re^{v\sqrt{-1}}\right)}{F\left(re^{v\sqrt{-1}}\right)}dv.$$

L'équation (27) suppose : 1° que la fonction $\dfrac{\mathrm{f}(u+v\sqrt{-1})}{F(u+v\sqrt{-1})}$ s'évanouit pour $v=\pm\infty$, quel que soit $u$; 2° qu'elle ne varie jamais d'une manière brusque entre les limites $v=-\infty$, $v=+\infty$; $u=u'$, $u=u''$; 3° qu'entre ces limites la fonction $\mathrm{f}(u+v\sqrt{-1})$ ne devient jamais infinie. Dans l'équation (28), les deux dernières conditions subsistent pour les fonctions $\dfrac{\mathrm{f}(ue^{v\sqrt{-1}})}{F(ue^{v\sqrt{-1}})}$, $\mathrm{f}(ue^{v\sqrt{-1}})$, mais seulement entre les limites $v=-\pi$, $v=\pi$, $u=0$, $u=r$. Ajoutons que $x_0, x_1, \ldots, x_{m-1}$ représentent, dans la formule (27), celles des racines de l'équation (21) dont les parties réelles demeurent comprises entre les limites $u=u'$, $u=u''$; et, dans la formule (28), celles de ces racines dont les valeurs numériques ou les modules sont inférieurs à $r$.

Dans le cas particulier où l'intégrale $\int_{-\infty}^{\infty}\dfrac{\mathrm{f}(u+v\sqrt{-1})}{F(u+v\sqrt{-1})}dv$ s'évanouit pour $u=-\infty$, alors, en prenant $u'=-\infty$, $u''=\mathrm{U}$, on réduit la formule (27) à

$$(29)\qquad \frac{f(x_0)}{F'(x_0)}+\frac{f(x_1)}{F'(x_1)}+\ldots+\frac{f(x_{m-1})}{F'(x_{m-1})}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f(U+v\sqrt{-1})}{F(U+v\sqrt{-1})}\,dv.$$

Le premier membre de celle-ci renfermera toutes les racines de l'équation (21), si la quantité U surpasse les parties réelles de toutes ces racines.

Lorsque la fraction $\frac{f(x)}{F(x)}$ devient rationnelle ou de la forme

$$\frac{a_0+a_1x+\ldots+a_px^p}{A_0+A_1x+\ldots+A_mx^m},$$

et que le nombre $p$ est inférieur à $m-1$, alors, en prenant $u=-\infty$, $u''=\infty$, on réduit à zéro les intégrales que renferme le second membre de l'équation (27), et l'on trouve

$$(30)\qquad \frac{f(x_0)}{F'(x_0)}+\frac{f(x_1)}{F'(x_1)}+\ldots+\frac{f(x_{m-1})}{F'(x_{m-1})}=0.$$

Si, au contraire, l'on suppose $p=m-1$, alors, en faisant $u'=-U$, $u''=U$, et attribuant à U des valeurs infiniment grandes, on réduira le second membre de la formule (27) à

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{a_{m-1}}{A_m}\left(\frac{1}{U+v\sqrt{-1}}-\frac{1}{-U+v\sqrt{-1}}\right)dv=\frac{a_{m-1}}{\pi A_m}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{U\,dv}{U^2+v^2}=\frac{a_{m-1}}{A_m},$$

et par suite cette formule donnera

$$(31)\qquad \frac{f(x_0)}{F'(x_0)}+\frac{f(x_1)}{F'(x_1)}+\ldots+\frac{f(x_{m-1})}{F'(x_{m-1})}=\frac{a_{m-1}}{A_m}.$$

Les équations (30) et (31) s'accordent avec un théorème que j'ai démontré dans le XVII$^e$ Cahier de ce Journal, page 207.

Les diverses formules que nous venons d'établir fournissent le moyen d'exprimer, par des intégrales définies, non seulement les racines d'une équation algébrique ou transcendante, mais encore les sommes de fonctions semblables de ces mêmes racines, ou de quelques-



unes d'entre elles; et par suite les intégrales générales des équations linéaires aux différences finies ou infiniment petites à coefficients constants, et souvent même à coefficients variables. C'est ce que nous allons faire voir, en peu de mots, pour les équations différentielles et aux différences partielles.

Supposons d'abord que, $A_0, A_1, \ldots, A_m$, $\Psi$ désignant des quantités constantes, et $\psi$ une fonction inconnue de $t$, on veuille intégrer l'équation différentielle

$$(32)\qquad A_0\psi+A_1\frac{d\psi}{dt}+\ldots+A_m\frac{d^m\psi}{dt^m}=0,$$

avec la condition que

$$(33)\qquad \psi,\quad \frac{d\psi}{dt},\quad \ldots,\quad \frac{d^{m-1}\psi}{dt^{m-1}}$$

se réduisent respectivement à

$$(34)\qquad \Psi^0,\quad \Psi^1,\quad \ldots,\quad \Psi^{m-1}$$

pour $t=0$. Alors, en posant

$$(35)\qquad F(\theta)=A_0+A_1\theta+\ldots+A_m\theta^m,$$

et nommant $\theta_0, \theta_1, \ldots, \theta_{m-1}$ les racines de l'équation

$$(36)\qquad F(\theta)=0,$$

on trouvera

$$(37)\qquad \left\{\begin{aligned}\psi &= \frac{(\Psi-\theta_1)(\Psi-\theta_2)\ldots(\Psi-\theta_{m-1})}{(\theta_0-\theta_1)(\theta_0-\theta_2)\ldots(\theta_0-\theta_{m-1})}e^{\theta_0 t}+\ldots\\ &\quad+\frac{(\Psi-\theta_0)(\Psi-\theta_1)\ldots(\Psi-\theta_{m-2})}{(\theta_{m-1}-\theta_0)(\theta_{m-1}-\theta_1)\ldots(\theta_{m-1}-\theta_{m-2})}e^{\theta_{m-1}t}\\ &= \frac{F(\Psi)-F(\theta_0)}{\Psi-\theta_0}\,\frac{e^{\theta_0 t}}{F'(\theta_0)}+\ldots+\frac{F(\Psi)-F(\theta_{m-1})}{\Psi-\theta_{m-1}}\,\frac{e^{\theta_{m-1}t}}{F'(\theta_{m-1})}.\end{aligned}\right.$$

Or, si l'on désigne par $\Theta$ une limite supérieure aux parties réelles de toutes les racines de l'équation (36), la valeur précédente de $\psi$ pourra être, en vertu de l'équation (29), présentée sous la forme très simple

$$\psi = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{F(\Psi) - F(\Theta + \theta\sqrt{-1})}{\Psi - (\Theta + \theta\sqrt{-1})} \frac{e^{(\Theta+\theta\sqrt{-1})t}}{F(\Theta + \theta\sqrt{-1})} d\theta. \tag{38}$$

Si l'on voulait intégrer l'équation (32) de manière que les expressions (33) se trouvassent réduites par la supposition $t = 0$, non plus aux puissances successives d'une même quantité $\Psi$, mais à des quantités différentes

$$\Psi_0, \quad \Psi_1, \quad \ldots, \quad \Psi_{m-1}, \tag{39}$$

on pourrait toujours employer la formule (38), pourvu qu'après avoir développé le second membre suivant les puissances ascendantes de $\Psi$, on convînt de remplacer $\Psi^0$ par $\Psi_0$, $\Psi^1$ par $\Psi_1$, ..., $\Psi^{m-1}$ par $\Psi_{m-1}$. Lorsque les quantités (39) sont arbitraires, le développement de la fraction $\frac{F(\Psi) - F(x)}{\Psi - x}$, modifié conformément aux conventions dont il s'agit, se change en une fonction entière mais arbitraire de $x$, du degré $m - 1$. Donc, en désignant par $\varpi(x)$ une fonction de cette nature, on aura pour l'intégrale générale de l'équation (32)

$$\psi = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varpi(\Theta + \theta\sqrt{-1})}{F(\Theta + \theta\sqrt{-1})} e^{(\Theta+\theta\sqrt{-1})t} d\theta. \tag{40}$$

Supposons, en second lieu, que l'on veuille intégrer l'équation

$$A_0 + A_1\frac{d\psi}{dt} + A_2\frac{d^2\psi}{dt^2} + \ldots + A_m\frac{d^m\psi}{dt^m} = f(t), \tag{41}$$

avec la condition que les expressions (33) s'évanouissent pour $t = 0$. On aura

$$\left\{\begin{aligned} \psi &= \frac{e^{\theta_0 t}}{F'(\theta_0)}\int_0^t e^{-\theta_0 t} f(t)\,dt + \ldots + \frac{e^{\theta_{m-1} t}}{F'(\theta_{m-1})}\int_0^t e^{-\theta_{m-1} t} f(t)\,dt \\ &= \frac{1}{F'(\theta_0)}\int_0^t e^{\theta_0(t-\tau)} f(\tau)\,d\tau + \ldots + \frac{1}{F'(\theta_{m-1})}\int_0^t e^{\theta_{m-1}(t-\tau)} f(\tau)\,d\tau, \end{aligned}\right. \tag{42}$$



et, par suite,

$$\psi = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_0^t \frac{e^{(\Theta+\theta\sqrt{-1})(t-\tau)}}{F(\Theta + \theta\sqrt{-1})} f(\tau)\,d\theta\,d\tau. \tag{43}$$

Si l'on voulait, au contraire, que les expressions (33) fussent réduites, par la supposition $t = 0$, aux quantités (39), alors il faudrait réunir les valeurs de $\psi$ données par les formules (38) et (43); et l'on trouverait, en ayant égard aux conventions ci-dessus énoncées,

$$\psi = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\frac{F(\Psi) - F(\Theta + \theta\sqrt{-1})}{\Psi - (\Theta + \theta\sqrt{-1})} + \int_0^t \frac{f(\tau)\,d\tau}{e^{(\Theta+\theta\sqrt{-1})\tau}}\right]\frac{e^{(\Theta+\theta\sqrt{-1})t}\,d\theta}{F(\Theta + \theta\sqrt{-1})}. \tag{44}$$

Si à la formule (29) on eût substitué la formule (27), alors, en désignant par $\theta'$, $\theta''$ deux quantités, l'une inférieure, l'autre supérieure aux parties réelles de toutes les racines de l'équation (36), on aurait trouvé

$$\left\{\begin{aligned} \psi = {} & \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\frac{F(\Psi) - F(\theta'' + \theta\sqrt{-1})}{\Psi - (\theta'' + \theta\sqrt{-1})} + \int_0^t \frac{f(\tau)\,d\tau}{e^{(\theta''+\theta\sqrt{-1})\tau}}\right]\frac{e^{(\theta''+\theta\sqrt{-1})t}\,d\theta}{F(\theta'' + \theta\sqrt{-1})} \\ & - \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\frac{F(\Psi) - F(\theta' + \theta\sqrt{-1})}{\Psi - (\theta' + \theta\sqrt{-1})} + \int_0^t \frac{f(\tau)\,d\tau}{e^{(\theta'+\theta\sqrt{-1})\tau}}\right]\frac{e^{(\theta'+\theta\sqrt{-1})t}\,d\theta}{F(\theta' + \theta\sqrt{-1})}. \end{aligned}\right. \tag{45}$$

On revient immédiatement de la formule (45) à la formule (44), en posant $\theta' = -\infty$, $\theta'' = \Theta$. Ajoutons que la formule (45) peut être vérifiée directement par la substitution de la valeur de $\psi$ qu'elle donne, dans l'équation (41).

Il est essentiel de remarquer que, si dans la formule (43) on prend l'intégrale relative à $\tau$, non plus entre les limites $\tau = 0$, $\tau = t$, mais entre deux limites $\tau'$, $\tau''$, l'une inférieure, l'autre supérieure à $t$, la valeur de $\psi$ qui en résultera satisfera généralement à la formule (41), puisqu'en la substituant dans le premier membre on obtiendra l'équation exacte

$$\frac{1}{2\pi}\int_{\tau'}^{\tau''}\int_{-\infty}^{\infty} e^{(\Theta+\theta\sqrt{-1})(t-\tau)} f(\tau)\,d\tau\,d\theta = f(t). \tag{46}$$

Concevons maintenant qu'il s'agisse d'intégrer l'équation différentielle

$$(47)\qquad \frac{A_0}{(1+t)^m}\psi+\frac{A_1}{(1+t)^{m-1}}\frac{d\psi}{dt}+\ldots+\frac{A_{m-1}}{1+t}\frac{d^{m-1}\psi}{dt^{m-1}}+A_m\frac{d^m\psi}{dt^m}=f(t),$$

avec la condition que les expressions (33) se réduisent respectivement aux quantités

$$(48)\qquad \Psi^0,\quad \Psi,\quad \Psi(\Psi-1),\quad \ldots,\quad \Psi(\Psi-1)\ldots(\Psi-m+2),$$

pour $t=0$. Alors, en supposant la fonction $F(\theta)$ déterminée, non plus par la formule (35), mais par la suivante

$$(49)\qquad F(\theta)=A_0+A_1\theta+A_2\theta(\theta-1)+\ldots+A_m\theta(\theta-1)\ldots(\theta-m+1),$$

on trouvera, en vertu de l'équation (29),

$$(50)\qquad \left\{\begin{aligned}\psi=&\ \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{F(\Psi)-F(\Theta+\theta\sqrt{-1})}{\Psi-(\Theta+\theta\sqrt{-1})}(1+t)^{\Theta+\theta\sqrt{-1}}\frac{d\theta}{F(\Theta+\theta\sqrt{-1})}\\&+\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_0^t\left(\frac{1+t}{1+\tau}\right)^{\Theta+\theta\sqrt{-1}}(1+\tau)^{m-1}\frac{f(\tau)\,d\theta\,d\tau}{F(\Theta+\theta\sqrt{-1})},\end{aligned}\right.$$

et, en vertu de l'équation (27),

$$(51)\qquad \left\{\begin{aligned}\psi=&\ \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{F(\Psi)-F(\theta''+\theta\sqrt{-1})}{\Psi-(\theta''+\theta\sqrt{-1})}(1+t)^{\theta''+\theta\sqrt{-1}}\frac{d\theta}{F(\theta''+\theta\sqrt{-1})}\\&+\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_0^t\left(\frac{1+t}{1+\tau}\right)^{\theta''+\theta\sqrt{-1}}(1+\tau)^{m-1}\frac{f(\tau)\,d\theta\,d\tau}{F(\theta''+\theta\sqrt{-1})}\\&-\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{F(\Psi)-F(\theta'+\theta\sqrt{-1})}{\Psi-(\theta'+\theta\sqrt{-1})}(1+t)^{\theta'+\theta\sqrt{-1}}\frac{d\theta}{F(\theta'+\theta\sqrt{-1})}\\&-\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_0^t\left(\frac{1+t}{1+\tau}\right)^{\theta'+\theta\sqrt{-1}}(1+\tau)^{m-1}\frac{f(\tau)\,d\theta\,d\tau}{F(\theta'+\theta\sqrt{-1})}.\end{aligned}\right.$$

Si l'on voulait que les expressions (33) fussent réduites par la supposition $t=0$, non plus aux produits (48), mais aux quantités (39), on pourrait encore employer la formule (50) ou (51), pourvu que l'on convînt de développer le second membre en une série de termes proportionnels aux produits dont il s'agit, et de remplacer ensuite



dans le développement ces mêmes produits par les quantités $\Psi_0$, $\Psi_1$, ..., $\Psi_{m-1}$.

Considérons à présent une équation linéaire aux différences partielles, par exemple, l'équation (1) de la seconde Partie. Les valeurs des quantités $T_0$, $T_1$, ..., $T_{m-1}$ comprises dans l'intégrale générale de cette équation dépendront, comme on l'a vu, de la fonction S assujettie à vérifier la formule (11) (p. 310), avec les conditions (8) (p. 309). Or, en vertu de ce qui précède, la fonction S, déterminée de manière à remplir les conditions prescrites, pourra être présentée sous la forme

$$(52)\qquad S=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{F(u)-F(\Theta+\theta\sqrt{-1})}{u-(\Theta+\theta\sqrt{-1})}\,\frac{e^{(\Theta+\theta\sqrt{-1})t}\,d\theta}{F(\Theta+\theta\sqrt{-1})},$$

$\Theta$ désignant une limite supérieure aux parties réelles de toutes les racines de l'équation $F(\theta)=0$. Si l'on développe la valeur qu'on vient d'obtenir pour S, suivant les puissances ascendantes de $u$, on trouvera pour les coefficients respectifs de ces mêmes puissances

$$(53)\qquad \left\{\begin{aligned}T_0\ &=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{A_1+A_2(\Theta+\theta\sqrt{-1})+\ldots+A_m(\Theta+\theta\sqrt{-1})^{m-1}}{F(\Theta+\theta\sqrt{-1})}e^{(\Theta+\theta\sqrt{-1})t}\,d\theta,\\T_1\ &=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{A_2+\ldots+A_m(\Theta+\theta\sqrt{-1})^{m-2}}{F(\Theta+\theta\sqrt{-1})}e^{(\Theta+\theta\sqrt{-1})t}\,d\theta,\\&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\T_{m-1}&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{A_m}{F(\Theta+\theta\sqrt{-1})}e^{(\Theta+\theta\sqrt{-1})t}\,d\theta.\end{aligned}\right.$$

Ces dernières valeurs de $T_0$, $T_1$, ..., $T_{m-1}$ s'accordent, en vertu de la formule (29), avec celles que nous avons données dans la seconde Partie (p. 311 et 312).

Si l'on remplace l'équation (1) du paragraphe I$^{er}$ (II$^e$ Partie) par l'équation (28) du paragraphe III, la valeur de $\varphi$ sera donnée par les équations (34) et (36), dans lesquelles on aura

$$(54)\qquad T=\frac{e^{\theta_0 t}+e^{\theta_1 t}+\ldots+e^{\theta_{m-1}t}}{m}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{(\Theta+\theta\sqrt{-1})^{m-1}}{(\Theta+\theta\sqrt{-1})^m-A_0}e^{(\Theta+\theta\sqrt{-1})t}\,d\theta.$$

Dans un autre Mémoire, je reviendrai sur l'application de ces diverses formules, soit à la résolution des équations algébriques, soit à l'intégration des équations linéaires aux différences finies ou infiniment petites à coefficients constants, ou à coefficients variables, et je les comparerai avec celles qui ont été présentées par MM. Parseval et Brisson, sur les mêmes sujets. Je finirai en observant que, si dans la formule (2) (Ire Partie) on remplace la fonction $f(\mu, \nu, \varpi, \ldots)$ par le produit $e^{a(x-\mu)}e^{b(y-\nu)}e^{c(z-\varpi)}\ldots f(\mu, \nu, \varpi, \ldots)$, a, b, c, ... désignant des constantes réelles mais arbitraires, on trouvera

$$(55)\quad \left\{\begin{aligned} f(x, y, z, \ldots) &= \left(\frac{1}{2\pi}\right)^n \int\int\ldots e^{(a+\alpha\sqrt{-1})(x-\mu)}e^{(b+\beta\sqrt{-1})(y-\nu)}\ldots \\ &\quad\times f(\mu, \nu, \varpi, \ldots)\ldots d\alpha\, d\mu\, d\beta\, d\nu\ldots. \end{aligned}\right.$$

Il en résulte que dans tous les calculs de la seconde Partie, et dans les fonctions $A_0, A_1, \ldots, A_{m-1}, F(\theta), \ldots$ on peut écrire $a + \alpha\sqrt{-1}$, $b + \beta\sqrt{-1}, \ldots$ au lieu de $\alpha\sqrt{-1}, \beta\sqrt{-1}, \ldots$. Par la même raison, à la formule (26) de la page 315, on peut substituer la suivante

$$(56)\quad \left\{\begin{aligned} \varphi &= \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{n+1} \int\int\int\ldots e^{(a+\alpha\sqrt{-1})(x-\mu)}e^{(b+\beta\sqrt{-1})(y-\nu)}\ldots e^{(\Theta+\theta\sqrt{-1})(t-\tau)} \\ &\quad\times \frac{f(\mu, \nu, \ldots, \tau)}{F(\Theta+\theta\sqrt{-1})}\, d\alpha\, d\mu\, d\beta\, d\nu\ldots d\theta\, d\tau, \end{aligned}\right.$$

a, b, ..., $\Theta$ représentant des constantes arbitraires dont la dernière pourra même être remplacée par une fonction quelconque de $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$, par exemple par une quantité supérieure aux parties réelles de toutes les racines de l'équation $F(\theta) = 0$. Ajoutons que, pour obtenir la valeur de $F(\Theta + \theta\sqrt{-1})$ qui convient à la formule (56), il suffira de substituer dans la valeur générale de $\nabla\varphi$ un produit de la forme

$$(a+\alpha\sqrt{-1})^p(b+\beta\sqrt{-1})^q\ldots(\Theta+\theta\sqrt{-1})^s$$

à chaque terme de la forme

$$\frac{\partial^{p+q+r+\ldots+s}\varphi}{\partial x^p\, \partial y^q\, \partial z^r\ldots \partial t^s}.$$



Remarquons enfin que, si dans la formule (56) on suppose l'intégration relative à $\tau$ effectuée, non plus entre les limites $\tau = \tau'$, $\tau = \tau''$, mais entre les suivantes $\tau = 0$, $\tau = t$, la valeur de $\varphi$ qu'on obtiendra sera précisément l'intégrale de l'équation (25) (IIe Partie), cette intégrale étant déterminée de manière que les expressions

$$(57)\qquad \varphi,\quad \frac{\partial\varphi}{\partial t},\quad \ldots,\quad \frac{\partial^{m-1}\varphi}{\partial t^{m-1}}$$

s'évanouissent toutes pour $t = 0$.

Au reste, il suit évidemment de la formule (55) que, si l'on donne une équation linéaire aux différences partielles et de l'ordre $m$ par rapport à $t$, dont le premier membre ne renferme que des coefficients constants ou fonctions de $t$, et dont le second membre se réduise à un terme variable ou de la forme $f(x, y, z, \ldots, t)$ on pourra facilement intégrer cette équation de manière que les expressions (57) se réduisent respectivement à

$$f_0(x, y, z, \ldots),\quad f_1(x, y, z, \ldots),\quad \ldots,\quad f_{m-1}(x, y, z, \ldots),$$

pour $t = 0$. En effet, pour y parvenir, il suffira de poser

$$(58)\quad \varphi = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^n \int_{-\infty}^{\infty}\int_{\mu'}^{\mu''}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{\nu'}^{\nu''}\ldots e^{(a+\alpha\sqrt{-1})(x-\mu)}e^{(b+\beta\sqrt{-1})(y-\nu)}\ldots\psi\, d\alpha\, d\mu\, d\beta\, d\nu\ldots,$$

en assujettissant l'inconnue $\psi$, considérée comme fonction de $t$, à une équation différentielle de la forme

$$(59)\qquad A_0 + A_1\frac{d\psi}{dt} + \ldots + A_m\frac{d^m\psi}{dt^m} = f(\mu, \nu, \varpi, \ldots, t),$$

dans laquelle $A_0, A_1, \ldots, A_m$ représenteront des fonctions connues de $a + \alpha\sqrt{-1}$, $b + \beta\sqrt{-1}, \ldots$ et de la variable $t$. Alors il ne restera plus qu'à intégrer cette équation différentielle de manière que les expressions

$$\psi,\quad \frac{d\psi}{dt},\quad \ldots,\quad \frac{d^{m-1}\psi}{dt^{m-1}}$$

se réduisent respectivement à

$$f_0(\mu, \nu, \varpi, \ldots),\quad f_1(\mu, \nu, \varpi, \ldots),\quad \ldots,\quad f_{m-1}(\mu, \nu, \varpi, \ldots),$$

pour $t = 0$. Ce dernier problème se résoudra très simplement par les méthodes précédentes, si les coefficients $A_0$, $A_1$, ..., $A_m$ sont constants, c'est-à-dire indépendants de la variable $t$, ou réciproquement proportionnels aux puissances entières et descendantes d'une fonction linéaire de cette variable.

*P.-S.* — On se trouve naturellement conduit par la théorie des quadratures à considérer chaque intégrale définie, prise entre deux limites réelles, comme n'étant autre chose que la somme des valeurs infiniment petites de l'expression différentielle placée sous le signe $\int$, qui correspondent aux diverses valeurs réelles de la variable, renfermées entre les limites dont il s'agit. Or, cette manière d'envisager une intégrale définie nous paraît devoir être adoptée de préférence, ainsi que nous venons de le faire, parce qu'elle convient également à tous les cas, même à ceux dans lesquels on ne sait point passer généralement de la fonction placée sous le signe $\int$ à la fonction primitive. Elle a, de plus, l'avantage de fournir toujours des valeurs réelles pour les intégrales qui correspondent à des fonctions réelles. Enfin, elle permet de séparer facilement chaque équation imaginaire en deux équations réelles. Tout cela n'aurait plus lieu, si l'on considérait une intégrale définie prise entre deux limites réelles, comme nécessairement équivalente à la différence des valeurs extrêmes d'une fonction primitive même discontinue, ou si l'on faisait passer la variable d'une limite à l'autre par une série de valeurs imaginaires. Dans ces deux derniers cas, on obtiendrait souvent, pour les intégrales elles-mêmes, des valeurs imaginaires semblables à celle que M. Poisson a donnée pour la suivante

$$\int_0^\infty \frac{\cos ax}{x^2 - b^2}\,dx$$

(*voir* le XVIII^e Cahier de ce *Journal*, p. 329). Si l'on applique à cette intégrale les méthodes ci-dessus indiquées, on trouvera pour sa valeur principale $-\frac{\pi}{2b}\sin ab$, tandis que sa valeur générale, considérée



comme limite de la somme

$$\int_0^{b-k\mu} \frac{\cos ax}{x^2 - b^2}\,dx + \int_{b+k\nu}^\infty \frac{\cos ax}{x^2 - b^2}\,dx,$$

sera déterminée par la formule

$$\int_0^\infty \frac{\cos ax\,dx}{x^2 - b^2} = \frac{\pi}{2b}(\cos ab\,\mathrm{l}m - \sin ab),$$

$m$ désignant, pour abréger, une constante arbitraire égale au rapport $\frac{\mu}{\nu}$. De cette formule on tire immédiatement les suivantes

$$\int_0^1 \left( \frac{\cos ax}{x - \frac{1}{x}} - m \frac{\cos \frac{a}{x^m}}{x^m - \frac{1}{x^m}} \right) \frac{dx}{x} = \frac{\pi}{2}(\cos a\,\mathrm{l}m - \sin a),$$

$$\int_0^1 \frac{\cos ax - \cos \frac{a}{x}}{x - \frac{1}{x}}\,\frac{dx}{x} = -\frac{\pi}{2}\sin a,$$

dans lesquelles les fonctions sous le signe $\int$ cessent de passer par l'infini entre les limites des intégrations.

Au reste, il peut arriver qu'à une même intégrale correspondent plusieurs fonctions primitives, dont les unes conduisent à des valeurs réelles de l'intégrale, les autres à des valeurs imaginaires. Ainsi, par exemple, si l'on considère l'intégrale

$$\int_{-1}^{+2} \frac{dx}{x} = \int_{-1}^{+2} \frac{x\,dx}{x^2} = \int_{-1}^{+2} \frac{\frac{1}{2}\,dx^2}{x^2},$$

on pourra prendre pour fonction primitive ou le logarithme népérien de $x$, tantôt réel, tantôt imaginaire, ou la fonction $\frac{1}{2}\mathrm{l}x^2$ supposée toujours réelle. La différence des valeurs extrêmes, qui sera imaginaire dans le premier cas, se réduira dans le second à la quantité réelle $\frac{1}{2}\mathrm{l}4$, ou $\mathrm{l}2$, laquelle est précisément la valeur principale de l'intégrale proposée.

Il importe d'observer que, pour différentier la valeur principale d'une intégrale indéterminée par rapport à une quantité distincte de la variable à laquelle l'intégration est relative, il ne suffit pas toujours d'effectuer la différentiation sous le signe $\int$. Mais toutes les questions et les difficultés que l'on pourrait proposer à ce sujet seront aisément résolues, si l'on a eu soin de remplacer l'intégrale indéterminée par la somme dont sa valeur principale est la limite. Concevons, par exemple, qu'en attribuant au nombre $k$ une valeur infiniment petite, et supposant la quantité $a$ positive, mais inférieure à l'unité, on veuille différentier $n$ fois par rapport à la quantité $a$ l'équation qui fournit la valeur principale de l'intégrale indéterminée $\int_0^1 \frac{dx}{x-a}$. On présentera cette équation sous la forme

$$\int_0^{a-k} \frac{dx}{x-a} + \int_{a+k}^1 \frac{dx}{x-a} = \mathrm{l}\left(\frac{1-a}{a}\right),$$

et, en la différentiant $n$ fois, on trouvera

$$\int_0^{a-k} \frac{d^n\left(\frac{1}{x-a}\right)}{da^n}\,dx + \int_{a+k}^1 \frac{d^n\left(\frac{1}{x-a}\right)}{da^n}\,dx - 1.2.3\ldots\ldots(n-1)\left[\left(\frac{1}{k}\right)^n - \left(\frac{1}{-k}\right)^n\right] = \frac{d^n\,\mathrm{l}\left(\frac{1-a}{a}\right)}{da^n}.$$

Par suite, en réduisant chaque intégrale indéterminée à sa valeur principale, on aura, pour des valeurs paires de $n$,

$$\int_0^1 \frac{d^n\left(\frac{1}{x-a}\right)}{da^n}\,dx = \frac{d^n\,\mathrm{l}\left(\frac{1-a}{a}\right)}{da^n},$$

et, pour des valeurs impaires de $n$,

$$\int_0^1 \frac{d^n\left(\frac{1}{x-a}\right)}{da^n}\,dx = \frac{d^n\,\mathrm{l}\left(\frac{1-a}{a}\right)}{da^n} + 1.2.3\ldots\ldots(n-1).\frac{2}{k^n} = \infty,$$

ce qui est exact.



Nous ajouterons, pour ne laisser aucune incertitude sur la valeur des signes algébriques dont nous nous sommes servis, que, dans ce Mémoire, comme dans le *Cours d'Analyse de l'École royale polytechnique*, nous avons toujours employé la notation $\operatorname{arc\,tang} x$, pour indiquer le plus petit arc (abstraction faite du signe) dont la tangente soit égale à $x$, et les notations $(u+v\sqrt{-1})^\mu$, $\mathrm{l}(u+v\sqrt{-1})$ ($u$ désignant une quantité positive ou nulle), pour représenter les expressions imaginaires

$$(u^2+v^2)^{\frac{\mu}{2}}\left[\cos\left(\mu \operatorname{arc\,tang}\frac{v}{u}\right) + \sqrt{-1}\sin\left(\mu \operatorname{arc\,tang}\frac{v}{u}\right)\right],$$

$$\frac{1}{2}\mathrm{l}(u^2+v^2) + \sqrt{-1}\operatorname{arc\,tang}\frac{u}{v}.$$