SUR

LES POLYGONES ET LES POLYÈDRES.

SECOND MÉMOIRE [1].

Journal de l'École Polytechnique, XVI^e Cahier, Tome IX, p. 87; 1813.

Dans le Mémoire que j'eus l'honneur de présenter l'année dernière à la Classe, j'avais réuni quelques recherches sur les polygones et les polyèdres réguliers et irréguliers, et j'avais généralisé le théorème d'Euler sur le nombre des éléments qui constituent un polyèdre quelconque. MM. Legendre et Malus, dont le rapport a déterminé, en faveur de ce Mémoire, l'approbation de la Classe, m'engagèrent dès lors à poursuivre mon travail et à chercher la démonstration du théorème renfermé dans la définition 9, placée à la tête du onzième Livre des *Éléments d'Euclide*, savoir que deux polyèdres convexes sont égaux lorsqu'ils sont compris sous un même nombre de faces égales chacune à chacune. J'ai examiné, en conséquence, avec beaucoup de soin, les démonstrations que M. Legendre avait déjà données de ce théorème dans plusieurs cas particuliers; et, en développant les principes dont il avait fait usage, je suis parvenu à démontrer, d'une manière générale, le théorème dont il s'agit et quelques autres qui s'y rapportent. Ces théorèmes sont de deux espèces : les uns sont relatifs aux polygones

([1]) Lu à la première Classe de l'Institut, dans la séance du 20 janvier 1812, par A.-L. Cauchy, ingénieur des Ponts et Chaussées.

convexes rectilignes et sphériques; les autres aux angles solides et aux polyèdres convexes. Je vais les exposer successivement dans les deux Parties de ce Mémoire.

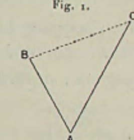
PREMIÈRE PARTIE.

Théorèmes sur les polygones convexes rectilignes et sphériques.

M. Legendre a démontré, dans ses *Éléments de Géométrie sur les triangles rectilignes et sphériques*, un théorème qu'on peut énoncer de la manière suivante :

Théorème I. — *Si, dans un triangle rectiligne ou sphérique* ABC (*fig.* 1) *dont deux côtés* AB, AC *sont invariables, on fait croître ou diminuer l'angle* A *compris entre ces côtés, le côté opposé* BC *croîtra dans le premier cas et diminuera dans le second.*

Fig. 1.

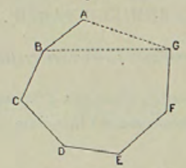


On peut généraliser ce théorème de la manière suivante :

Théorème II. — *Si, dans un polygone convexe rectiligne ou sphérique* ABCDEFG (*fig.* 2), *dont tous les côtés* AB, BC, CD, ..., FG, *à l'exception d'un seul* AG, *sont supposés invariables, on fait croître ou décroître simultanément les angles* B, C, D, E, F, G *compris entre ces mêmes côtés, le côté variable* AG *croîtra dans le premier cas et décroîtra dans le second.*

Démonstration. — Supposons d'abord que l'on fasse croître l'angle ABC tout seul; alors, dans tout le polygone ABCDEFG, il n'y aura que le triangle ABC de variable; et, dans ce triangle même, il n'y aura de variable que le côté AG et les angles : mais l'angle ABG devant croître par l'hypothèse, le côté variable AG croîtra nécessairement. On ferait voir de même que les angles C, D, E, ... venant à croître successivement, le côté AG ira toujours en croissant. L'accroissement simultané

Fig. 2.

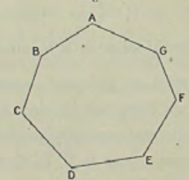


de ces mêmes angles devant produire le même effet que leur accroissement successif, ne pourra qu'augmenter la droite en question.

On prouverait de même que la diminution simultanée des angles B, C, D, E, F entraînerait celle du côté variable AG.

Théorème III. — *Si, dans un polygone convexe rectiligne ou sphérique* ABCDEFG (*fig.* 3) *dont les côtés sont invariables, on fait varier tous les angles, ceux-ci ne pourront tous varier dans le même sens, soit en plus, soit en moins.*

Fig. 3.



Démonstration. — En effet, on vient de voir, dans le théorème précédent, que tous les angles non adjacents à un même côté ne peuvent varier dans le même sens sans que le côté lui-même augmente ou diminue.

Théorème IV. — *Si, dans un polygone convexe rectiligne ou sphérique, dont les côtés sont invariables, on fait varier tous les angles et que,*

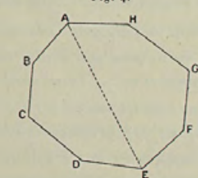
passant ensuite en revue ces mêmes angles, on les classe en différentes séries en plaçant dans une même série tous les angles qui, pris consécutivement, varient dans le même sens, les séries composées d'angles qui varieront en plus seront toujours en même nombre que les séries composées d'angles qui varieront en moins et, par suite, le nombre total des séries sera pair.

Démonstration. — On vient de prouver que tous les angles ne peuvent varier dans le même sens. Cela posé, il est facile de voir que, si l'on fait le tour du polygone, on trouvera les différentes séries alternativement composées d'angles qui varieront en plus et d'angles qui varieront en moins. Si, par exemple, la première série est composée d'angles qui varient en plus, la troisième, la cinquième, la septième, ... séries seront aussi composées d'angles qui varieront en plus et, en général, toutes les séries d'ordre impair seront de même nature que la première série. Il est donc impossible que la dernière série soit une série de rang impair; car, étant de même nature que la première, elle se confondrait avec elle. La dernière série est donc une série de rang pair et, par suite, le nombre total des séries est pair.

Théorème V. — *Les mêmes choses étant posées que dans le théorème précédent, le nombre des séries sera toujours au moins égal à* 4.

Démonstration. — Nous venons de prouver qu'il est nécessairement

Fig. 4.



pair; il reste à faire voir qu'il ne peut être égal à 2. Et, en effet, si dans le polygone ABCDEFGH (*fig.* 4), dont les côtés sont invariables, tous les angles que l'on suppose variables pouvaient être classés en deux séries, savoir : une série d'angles A, B, C, D variables en plus et une série d'angles E, F, G, H variables en moins, la diagonale AE, qui ne laisse d'un côté que des angles B, C, D variables en plus et, de l'autre, que des angles F, G, H variables en moins, devrait à la fois croître et décroître, ce qui est absurde.

Il y aura donc toujours au moins quatre séries, savoir : deux séries d'angles qui varieront en plus et deux séries d'angles qui varieront en moins.

Théorème VI. — *Les mêmes choses étant posées que dans les deux théorèmes précédents, si l'on passe en revue tous les angles du polygone et qu'on les compare deux à deux dans l'ordre où ils se présentent relativement aux signes de leurs variations, on trouvera, en faisant le tour du polygone, au moins quatre changements de signes.*

Démonstration. — En effet, on vient de voir qu'il y aura toujours au moins deux séries d'angles qui varieront en plus et deux séries d'angles qui varieront en moins. La variation du dernier angle de chaque série étant toujours de signe contraire à celui de la variation du premier angle de la série suivante, les quatre séries dont il est question fourniront évidemment quatre changements de signes.

Nota. — Les trois théorèmes précédents n'ont lieu que pour des polygones de plus de trois côtés et non pour des triangles dans lesquels l'invariabilité des angles entraîne celle des côtés.

Théorème VII. — *Si, dans un polygone convexe rectiligne ou sphérique de plus de quatre côtés, on suppose non seulement les côtés, mais aussi plusieurs angles invariables et qu'on fasse varier les angles restants, puis que, passant en revue tous les angles variables du polygone, on les classe en différentes séries, en plaçant dans une même série tous ceux qui, pris consécutivement ou séparés les uns des autres par les angles invariables, varient dans le même sens, on trouvera toujours au moins quatre séries d'angles variables : savoir, deux séries d'angles variables en plus et deux séries d'angles variables en moins.*

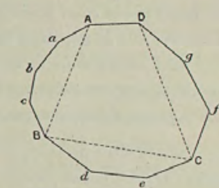
Démonstration. — Avec les sommets qui correspondent aux angles variables du polygone donné formez un second polygone. Il est facile de voir que les côtés de ce second polygone seront invariables et que ses angles seront en même nombre et éprouveront les mêmes variations que les angles variables du premier polygone.

Supposons, par exemple, que, dans le polygone donné

$$AabcBdeCfgD\ (fig.\ 5),$$

A, B, C, D soient les seuls angles variables. Joignez AB, BC, CD, ..., vous diviserez le polygone donné en plusieurs parties dont la princi-

Fig. 5.



pale sera le polygone intérieur ABCD, composé d'autant de côtés que le polygone donné avait d'angles variables. De plus, il est facile de voir que ce second polygone sera la seule partie variable dans le polygone donné. Et, en effet, les angles a, b, c, ..., d, e, ... étant invariables, ainsi que les côtés adjacents, les polygones extérieurs AabcB, BdeC, ... sont nécessairement invariables. Il suit de là :

1° Que les côtés AB, BC, CD, ... qui font partie de ces polygones extérieurs sont invariables;

2° Que la différence de chacun des angles variables du polygone donné avec l'angle du polygone intérieur qui a même sommet étant toujours représentée, ou par l'angle d'un polygone extérieur tel que CDg, ou par la somme de deux angles de cette espèce tels que DCf, BCe, cette différence est nécessairement constante et, par suite, que les angles du polygone ABCD varient de la même quantité que les angles variables du polygone donné.

Cela posé, il est évident que les séries d'angles variables, soit en plus, soit en moins, seront en même nombre de part et d'autre. D'ailleurs (d'après le théorème V), les angles du polygone ABCD doivent former au moins quatre séries : savoir, deux séries d'angles variables en plus et deux séries d'angles variables en moins. Il en sera donc de même des angles variables du polygone donné.

Nota. — Le polygone ABCD ne pouvant avoir moins de quatre côtés, puisque l'on suppose ses angles variables, le polygone donné ne peut avoir moins de cinq côtés ni moins de quatre angles variables.

Théorème VIII. — *Les mêmes choses étant posées que dans le théorème précédent, si l'on passe en revue tous les angles variables du polygone et qu'on les compare deux à deux dans l'ordre où ils se présentent relativement aux signes de leurs variations, on trouvera toujours, en faisant le tour du polygone, au moins quatre changements de signes.*

Démonstration. — En effet, on vient de voir qu'il y aura toujours au moins deux séries d'angles qui varieront en plus et deux séries d'angles qui varieront en moins. La variation du dernier angle de chaque série étant toujours de signe contraire à celui de la variation du premier angle de la série suivante, les quatre séries dont il est question fourniront quatre changements de signes.

SECONDE PARTIE.

Théorèmes sur les angles solides et les polyèdres convexes.

On sait qu'un angle solide peut toujours être représenté par le polygone sphérique qu'on obtient en coupant cet angle solide par une sphère décrite de son sommet comme centre avec un rayon pris à volonté. Les côtés du polygone sphérique mesurent les angles plans qui composent l'angle solide, et les angles du polygone mesurent les coins

compris entre leurs plans ou, si l'on veut, les inclinaisons sur les différentes arêtes de l'angle solide. Cela posé, il est facile de voir que si, dans les théorèmes I, II, III, IV, V, VI, VII et VIII, on substitue les noms d'angles solides, d'angles plans et d'inclinaisons sur les arêtes à ceux de polygone sphérique, de côtés et d'angles, on obtiendra autant de théorèmes sur les angles solides. Nous nous contenterons d'énoncer ici ceux qui correspondent aux théorèmes VI et VIII démontrés ci-dessus.

Théorème IX. — *Si, dans un angle solide à plus de trois faces et dont les angles plans sont invariables, on fait varier les inclinaisons sur toutes les arêtes et que, passant ensuite en revue ces mêmes inclinaisons, on les compare deux à deux dans l'ordre où elles se présentent relativement aux signes de leurs variations, on trouvera toujours, en faisant le tour de l'angle solide, au moins quatre changements de signes.*

Théorème X. — *Si, dans un angle solide à plus de quatre faces, on suppose non seulement les angles plans, mais encore les inclinaisons sur quelques arêtes invariables et qu'on fasse varier les inclinaisons sur les arêtes restantes, dont le nombre doit être au moins égal à 4, puis que, passant en revue les arêtes sur lesquelles les inclinaisons varient, on compare ces inclinaisons deux à deux dans l'ordre où elles se présentent relativement aux signes de leurs variations, on trouvera toujours, en faisant le tour de l'angle solide, au moins quatre changements de signes.*

Théorème XI. — *Dans un polyèdre quelconque, la somme faite du nombre des faces et de celui des sommets surpasse de deux unités le nombre des arêtes.*

Ce théorème a été découvert par Euler. On en peut voir une démonstration ingénieuse dans les *Éléments de Géométrie* de M. Legendre.

Si l'on représente par S le nombre des sommets d'un polyèdre quelconque, par H le nombre de ses faces, par A le nombre de ses arêtes, le théorème précédent fournira l'équation

$$S + H = A + 2,$$

ou

$$A - H = S - 2.$$

Corollaire. — Soient :

a le nombre des triangles;
b le nombre des quadrilatères;
c le nombre des pentagones;
d le nombre des hexagones;
e le nombre des heptagones, etc.,

qui composent la surface d'un polyèdre, on aura

$$H = a + b + c + d + e + \ldots,$$
$$2A = 3a + 4b + 5c + 6d + 7e + \ldots$$

et, par suite,

$$4(A - H) = 2a + 4b + 6c + 8d + 10e + \ldots;$$

d'ailleurs, par ce qui précède,

$$A - H = S - 2;$$

on aura donc aussi

$$4S - 8 = 2a + 4b + 6c + 8d + 10e + \ldots.$$

THÉORÈME XII. — *Si l'on conçoit la surface d'un polyèdre décomposée en plusieurs portions, chaque portion du polyèdre pouvant être, à volonté, ou une face seule, ou le système de plusieurs faces voisines considérées comme ne formant qu'un seul groupe, le théorème d'Euler aura lieu entre le nombre des portions dont il s'agit, le nombre des arêtes qui servent de limites à ces mêmes portions et le nombre des sommets compris entre ces arêtes; c'est-à-dire que la somme faite du nombre des portions et de celui des arêtes qui les terminent surpassera de deux unités le nombre de ces mêmes arêtes.*

Démonstration. — Le théorème dont il s'agit aurait évidemment lieu, si les droites qui terminent chaque portion du polyèdre se trouvaient dans un même plan; car alors on pourrait former un nouveau polyèdre

en substituant à chaque portion une face plane terminée au même contour.

Cela posé, il est facile de sentir que le théorème doit encore avoir lieu dans l'hypothèse contraire à celle que l'on vient de faire; car le nombre des portions, celui des arêtes qui leur servent de contour et celui des sommets compris entre ces arêtes restent les mêmes dans les deux cas.

Si l'on représente par H le nombre des portions dont il s'agit, par A le nombre des arêtes qui les terminent, par S le nombre des sommets compris entre ces arêtes, on aura, comme précédemment,

$$S + H = A + 2,$$

ou

$$A - H = S - 2.$$

Corollaire. — Soient :

a le nombre des portions du polyèdre terminées par un contour de trois arêtes;
b le nombre des portions terminées par un contour de quatre arêtes;
$c, d, e, \ldots$ le nombre des portions terminées par un contour de cinq, de six, de sept, ... arêtes;

on aura

$$H = a + b + c + d + e + \ldots,$$
$$2A = 3a + 4b + 5c + 6d + 7e + \ldots,$$
$$4(A - H) = 2a + 4b + 6c + 8d + 10e + \ldots$$

et, par suite,

$$4S - 8 = 2a + 4b + 6c + 8d + 10e + \ldots.$$

Les théorèmes précédents vont nous donner les moyens de démontrer le théorème renfermé dans la définition IX du onzième Livre d'Euclide. Ce dernier peut être énoncé de la manière suivante :

THÉORÈME XIII. — *Dans un polyèdre convexe dont toutes les faces sont invariables, les coins compris entre les faces ou, ce qui revient au même, les inclinaisons sur les différentes arêtes sont aussi invariables; en sorte* *que, avec les mêmes faces, on ne peut construire qu'un second polyèdre convexe symétrique du premier.*

Démonstration. — En effet, supposons, contre l'énoncé ci-dessus, que l'on puisse faire varier les inclinaisons des faces adjacentes sans détruire le polyèdre et, pour simplifier encore la question, supposons d'abord que l'on puisse faire varier toutes les inclinaisons à la fois. Les inclinaisons sur certaines arêtes varieront en plus; les inclinaisons sur d'autres arêtes varieront en moins, et en comparant deux à deux, relativement aux signes de leurs variations, les inclinaisons des arêtes qui, dans chaque face, aboutissent aux mêmes sommets, on trouvera, en passant successivement d'une arête à l'autre, plusieurs changements de signes. C'est le nombre de ces changements que nous allons chercher à déterminer.

Soient (comme ci-dessus, théorème XI) :

S le nombre des angles solides du polyèdre;
H le nombre de ses faces;
A le nombre de ses arêtes;

on aura (par le théorème XI)

$$4S - 8 = 2a + 4b + 6c + 8d + 10e + \dots .$$

Cela posé, il suit du théorème IX que chaque angle solide doit fournir au moins quatre changements de signes entre les variations d'inclinaison sur les arêtes qui le composent. La surface totale du polyèdre devra donc fournir un nombre de changements de signes au moins égal à $4S$; reste à savoir si cela est possible.

Or, si l'on compare successivement deux à deux les différentes arêtes qui composent une même face, on trouvera que chaque face triangulaire contenant toujours au moins deux arêtes sur lesquelles les variations d'inclinaison sont de même signe, ne pourra fournir au plus que deux changements de signes. Les quadrilatères pourront fournir chacun quatre changements de signes; mais les pentagones se trouvant dans le même cas que les triangles n'en fourniront chacun que quatre

au plus, comme les quadrilatères. En continuant de même, on fera voir que les hexagones et les heptagones ne pourraient fournir chacun plus de six changements de signes, que les octogones et les ennéagones n'en pourraient fournir chacun plus de huit et ainsi de suite. Il suit de là que toutes les faces du polyèdre ne pourront fournir ensemble plus de changements de signes qu'il n'y a d'unités dans la somme faite de deux fois le nombre des triangles, de quatre fois celui des quadrilatères, de quatre fois celui des pentagones, de six fois celui des hexagones, etc., ou dans

$$2a + 4b + 4c + 6d + 6e + \dots .$$

Mais, si l'on compare ce résultat à la valeur de $4S - 8$ trouvée plus haut, il sera facile de voir qu'il ne peut jamais la surpasser. Il est donc impossible d'obtenir entre les variations d'inclinaison sur toutes les arêtes un nombre de changements de signes au moins égal à $4S$; on ne peut donc changer à la fois les inclinaisons sur toutes les arêtes.

Si l'on suppose, en second lieu, que dans le polyèdre donné, non seulement les faces, mais encore les inclinaisons sur plusieurs arêtes restent invariables et que cependant on puisse, sans détruire le polyèdre, faire varier les inclinaisons sur les arêtes restantes, alors, pour démontrer l'absurdité de l'hypothèse, il suffira de concevoir la surface du polyèdre décomposée en autant de portions que les arêtes sur lesquelles les inclinaisons varient forment de contours différents, et d'appliquer aux portions, aux arêtes qui les terminent et aux sommets compris entre ces arêtes, les mêmes raisonnements que nous avons appliqués dans l'hypothèse précédente aux faces, aux arêtes et aux sommets du polyèdre. On y parviendra en substituant, dans le cours de la démonstration, les théorèmes X et XII aux théorèmes IX et XI sur lesquels on s'est appuyé dans le premier cas.

Corollaire I. — Il suit du théorème précédent que *deux polyèdres convexes, compris sous un même nombre de faces égales et semblablement placées, sont ou superposables ou symétriques et, dans les deux cas, ils* *sont nécessairement égaux.* C'est en quoi consiste le théorème renfermé dans la définition IX du onzième Livre d'Euclide.

Corollaire II. — Il suit encore du théorème précédent que, *lorsque deux polyèdres convexes sont compris sous un même nombre de faces semblables et semblablement placées, le deuxième est semblable au premier ou à un troisième polyèdre symétrique du premier.* C'est en quoi consiste le théorème renfermé dans la définition X du Livre déjà cité.

RECHERCHES SUR LES NOMBRES.

Journal de l'École Polytechnique, XVI[e] Cahier, t. IX, p. 99; 1813.

M. Lagrange a démontré, le premier, dans les *Mémoires de Berlin* (année 1770), le théorème suivant :

Étant donnés un nombre premier p et deux autres nombres entiers B *et* C *positifs ou négatifs, mais non divisibles par p, on peut toujours trouver deux nombres t et u, tels que la formule*

$$t^2 + Bu^2 + C$$

soit divisible par p.

Ce théorème a quelque analogie avec un autre plus simple et dont voici l'énoncé :

Étant donnés un nombre premier p et deux autres nombres entiers A *et* B *positifs ou négatifs, mais non divisibles par p, on peut toujours trouver un nombre x tel que la formule*

$$Ax + B$$

soit divisible par p.

Ce dernier théorème ayant été démontré très simplement par M. Legendre dans son *Introduction à la théorie des nombres*, l'analogie m'a porté à croire qu'il devait exister une démonstration semblable du théorème de M. Lagrange. Le travail que j'avais entrepris dans le dessein de parvenir à cette démonstration m'a conduit, en outre, à la démonstration de quelques autres théorèmes que je vais exposer successivement, et dont plusieurs me paraissent nouveaux.

Pour simplifier les énoncés des théorèmes, j'appellerai *nombres de même forme*, relativement à un diviseur donné, des nombres entiers qui, étant divisés par ce diviseur, donneront des restes entiers et positifs égaux. Par opposition, j'appellerai *nombres de forme différente* des nombres entiers qui, étant divisés par le diviseur donné, donneront des restes entiers et positifs différents.

Supposons que

$$a_0,\quad a_1,\quad a_2,\quad \ldots,\quad a_\alpha$$

soient une série de nombres entiers positifs ou négatifs, composée de $\alpha+1$ termes différents; nous représenterons par a_x le terme général de cette série et nous dirons alors que la formule a_x peut prendre successivement $\alpha+1$ valeurs différentes. Si, de plus, les valeurs particulières

$$a_0,\quad a_1,\quad a_2,\quad \ldots,\quad a_\alpha,$$

de la formule a_x, sont toutes de formes différentes relativement à un diviseur donné, nous dirons alors que la formule a_x peut fournir $\alpha+1$ valeurs de formes différentes.

Soient de même

$$b_0,\quad b_1,\quad b_2,\quad \ldots,\quad b_\beta;\qquad c_0,\quad c_1,\quad c_2,\quad \ldots,\quad c_\gamma;\qquad \ldots$$

des séries composées chacune de termes de formes différentes relativement à un diviseur donné; nous représenterons par b_y, c_z, ... les termes généraux de ces séries et nous dirons que les formules b_y, c_z, ... peuvent fournir, l'une $\beta+1$, l'autre $\gamma+1$ valeurs de formes différentes.

Cela posé, je vais passer à la démonstration des théorèmes, en commençant par ceux qui sont déjà connus.

THÉORÈME I. — *Soit, pris pour diviseur, un nombre entier quelconque n, premier ou non premier; soit*

$$\alpha+1 \leqq n,$$

et supposons que la formule a_x puisse fournir $\alpha+1$ valeurs de formes différentes relativement au diviseur n; soit, de plus, k un nombre entier quelconque positif ou négatif; je dis que les formules

$$k+a_x \qquad \text{et} \qquad k-a_x$$

fourniront chacune $\alpha+1$ valeurs de formes différentes relativement au diviseur n.

Démonstration. — Soient a_r et a_s deux valeurs de la formule a_x, les deux valeurs correspondantes de la double formule $k \pm a_x$ seront

$$k \pm a_r,\quad k \pm a_s;$$

d'ailleurs, la différence des valeurs a_r, a_s de la première formule ne pouvant être ni nulle ni divisible par n, il en sera de même de la différence des valeurs

$$k \pm a_r,\quad k \pm a_s$$

de la double formule $k \pm a_x$, puisque cette dernière différence est, au signe près, égale à la première. Il résulte de là que deux valeurs de la formule

$$k+a_x \qquad \text{ou} \qquad k-a_x$$

sont nécessairement de formes différentes relativement à n.

THÉORÈME II. — *Soit, pris pour diviseur, un nombre premier p; soit*

$$\alpha+1 \leqq p,$$

et supposons que la formule a_x puisse fournir $\alpha+1$ valeurs de formes différentes relativement à p; soit, de plus, A un nombre entier quelconque positif ou négatif, non divisible par p; je dis que la formule $\mathrm{A}a_x$ fournira aussi $\alpha+1$ valeurs de formes différentes.

Démonstration. — Soient a_r et a_s deux valeurs de la formule a_x. Les deux valeurs correspondantes de la formule Aa_x seront

$$Aa_r \quad \text{et} \quad Aa_s;$$

d'ailleurs, les deux quantités A et $a_r - a_s$ n'étant point, par l'hypothèse, divisibles par p, la différence

$$A(a_r - a_s)$$

des deux valeurs Aa_r, Aa_s de la formule Aa_x ne pourra être non plus divisible par p. Il suit de là que deux valeurs de la formule Aa_x sont nécessairement de formes différentes relativement à n.

Théorème III. — *Les mêmes choses étant posées que dans le théorème précédent et k étant un nombre entier quelconque positif ou négatif, la formule*

$$k + Aa_x \quad \text{ou} \quad k - Aa_x$$

fournira $\alpha + 1$ valeurs de formes différentes relativement à p.

Démonstration. — En effet, il suit du théorème I que la formule

$$k + Aa_x \quad \text{ou} \quad k - Aa_x$$

fournira autant de valeurs de formes différentes que la formule Aa_x, et il suit du théorème II que celle-ci fournira autant de valeurs de formes différentes que la valeur a_x.

Théorème IV. — *Les mêmes choses étant posées que dans le théorème précédent, si, de plus, le nombre $\alpha + 1$ des valeurs de la formule a_x est égal à p, l'une des valeurs de la formule*

$$k + Aa_x \quad \text{ou} \quad k - Aa_x$$

sera divisible par p.

Démonstration. — En effet, dans le cas dont il s'agit, la formule

$$k + Aa_x \quad \text{ou} \quad k - Aa_x,$$

étant divisée par p, doit donner p restes différents, c'est-à-dire tous les

restes possibles; elle doit donc donner aussi le reste zéro. La valeur de la formule qui correspond à ce reste sera évidemment divisible par p.

Théorème V. — *Soit, pris pour diviseur, un nombre premier p; soit*

$$\alpha + 2 \leqq p,$$

et supposons que la formule a_x puisse fournir $\alpha + 1$ valeurs de formes différentes relativement à p; soit, de plus, k un nombre entier quelconque positif ou négatif; je dis que les deux formules

$$a_x \quad \text{et} \quad a_x + k$$

fourniront ensemble au moins $\alpha + 2$ valeurs de formes différentes relativement à p.

Démonstration. — Supposons, contre l'énoncé ci-dessus, que les deux formules

$$a_x \quad \text{et} \quad a_x + k$$

ne puissent fournir ensemble plus de $\alpha + 1$ formes différentes. Dans ce cas, toutes les valeurs de la seconde formule devront être de mêmes formes que celles de la première. Il suit de là que a_r étant une valeur quelconque de la première formule et $a_r + k$ la valeur correspondante de la seconde, l'une des valeurs de la première formule sera nécessairement de la forme $a_r + k$. En substituant cette valeur à a_r on prouvera, par un raisonnement semblable à celui qu'on vient de faire, que la formule a_x doit nécessairement fournir une valeur de la forme

$$(a_r + k) + k \quad \text{ou} \quad a_r + 2k,$$

et, en continuant de même, on fera voir, en général, que la formule a_x, dans l'hypothèse présente, devra fournir des valeurs de toutes les formes suivantes :

$$a_r, \quad a_r + k, \quad a_r + 2k, \quad a_r + 3k, \quad \ldots, \quad a_r + (p-1)k,$$

et comme les formes dont il s'agit sont toutes différentes entre elles et en nombre égal à p, la formule a_x devrait fournir p valeurs de formes différentes; ce qui ne peut être, puisqu'on suppose p plus grand que $\alpha+2$, ou tout au plus égal à $\alpha+2$.

Théorème VI. — *Soit, pris pour diviseur, un nombre premier p; soit*

$$\alpha+2 \leqq p,$$

et supposons que la formule a_x puisse fournir $\alpha+1$ valeurs de formes différentes relativement à p; soient, de plus, b_0, b_1 deux nombres entiers de formes différentes relativement au même diviseur; je dis que les formules

$$a_x+b_0, \quad a_x+b_1$$

fourniront ensemble au moins $\alpha+2$ valeurs de formes différentes.

Démonstration. — Pour déduire ce théorème du précédent il suffit de substituer la formule a_x+b_0 à la formule a_x et de faire ensuite

$$b_1-b_0=k.$$

Théorème VII. — *Soit, pris pour diviseur, un nombre premier p et soient α et β deux nombres entiers tels que l'on ait*

$$\alpha+\beta+1 \leqq p;$$

supposons que la formule a_x puisse fournir $\alpha+1$ valeurs de formes différentes et la formule b_y, $\beta+1$ valeurs de formes différentes; je dis que la formule a_x+b_y fournira au moins $\alpha+\beta+1$ valeurs de formes différentes.

Démonstration. — On peut toujours supposer que la formule a_x soit celle qui fournisse le plus de valeurs. Cela posé, l'on aura $\beta \leqq \alpha$. De plus, il pourra arriver, ou que les valeurs de la formule a_x et celles de la formule b_y soient toutes de formes différentes, ou que les formes des valeurs de la formule b_y soient toutes comprises parmi les formes des valeurs de la formule a_x, ou que les formes des valeurs de la formule b_y soient en partie comprises et en partie non comprises parmi celles

des valeurs de la formule a_x. Nous allons examiner chacun de ces trois cas séparément.

Premier cas. — Et d'abord, pour ramener le premier cas à l'un des deux suivants, il suffit de substituer à la formule b_y la formule b_y-k, en prenant pour k un nombre entier positif ou négatif, tel que l'une des valeurs de la formule b_y-k soit égale à l'une des valeurs de la formule a_x. La formule a_x+b_y devant fournir autant de valeurs différentes que la formule

$$a_x+b_y-k,$$

il suffira de démontrer le théorème relativement aux formules

$$a_x \quad \text{et} \quad b_y-k$$

qui fourniront au moins deux valeurs de même forme.

Deuxième cas. — Supposons que les formes des valeurs de b_y soient toutes comprises parmi les formes des valeurs de la formule a_x. Il pourra arriver, ou que la formule a_x+b_y fournisse p valeurs de formes différentes, c'est-à-dire des valeurs de toutes les formes possibles déterminées par les restes

$$0, \ 1, \ 2, \ 3, \ \ldots, \ p-1,$$

ou que le nombre des valeurs de formes différentes fournies par la formule a_x+b_y soit plus petit que p. Dans la première hypothèse, le théorème se trouve vérifié, puisque l'on suppose

$$\alpha+\beta+1$$

tout au plus égal à p. Soit, dans la seconde hypothèse, $1+\gamma$ le nombre des formes qui ne sont pas comprises parmi celles de la formule a_x+b_y, et soit c_z le terme général d'une série composée de $1+\gamma$ termes qui présentent successivement ces mêmes formes. Les deux formules

$$a_x+b_y \quad \text{et} \quad c_z$$

comprendront à elles deux toutes les formes possibles. Soient, de plus,

b_m, b_n deux valeurs de la formule b_y ; $b_m - b_n$ ne pourra être ni nulle ni divisible par p et, par suite, les deux formules

$$c_z \quad \text{et} \quad c_z + b_m - b_n$$

devront fournir $\gamma + 2$ valeurs de formes différentes. La formule

$$c_z + b_m - b_n$$

devra donc fournir une valeur dont la forme ne soit pas comprise parmi celles de la formule c_z et soit comprise parmi celles de la formule $a_x + b_y$. Soient c_k, a_r, b_s les valeurs de c_z, a_x, b_y qui rendent la formule

$$c_z + b_m - b_n$$

de même forme que la formule $a_x + b_y$. Substituez aux formules a_x et b_y les deux formules

$$a_x + b_s \quad \text{et} \quad b_y + c_k - b_n.$$

Il est facile de voir que ces deux dernières formules contiendront au moins deux termes de même forme, savoir :

$$a_r + b_s \quad \text{et} \quad b_m + c_k - b_n.$$

De plus, la formule

$$b_y + c_k - b_n$$

contiendra au moins un terme c_k dont la forme ne sera point comprise parmi celles des valeurs de la formule $a_x + b_s$. Les deux formules

$$a_x + b_s, \quad b_y + c_k - b_n$$

fourniront donc des valeurs de même forme et des valeurs de formes différentes ; d'ailleurs, il suffit de démontrer le théorème relativement à ces deux dernières formules, pour qu'il soit démontré relativement aux formules a_x et b_y. La question pourra donc être toujours ramenée au troisième cas que nous allons examiner.

Troisième cas. — Supposons que les formes des valeurs de la for-

mule b_y soient en partie comprises et en partie non comprises parmi celles des valeurs de la formule a_x. Soit

$$(1) \qquad a_0, \quad a_1, \quad a_2, \quad \ldots, \quad a_\alpha$$

la série des valeurs de la formule a_x au nombre de $\alpha + 1$, et soit

$$(2) \qquad b_0, \quad b_1, \quad b_2, \quad \ldots, \quad b_\alpha$$

la série des valeurs de la formule b_y au nombre de $\beta + 1$.

Comme il ne s'agit ici que des formes des valeurs que l'on considère, c'est-à-dire des restes qu'on obtient en les divisant par p, on pourra supposer les termes des séries (1) et (2) plus petits que p, parce que, dans tous les cas, on peut les rendre tels en retranchant p de chacun d'eux autant de fois que possible. Alors, les termes qui étaient de même forme dans les deux séries deviendront égaux de part et d'autre. Soit $1 + \gamma$ le nombre de ces termes et soient respectivement

$$a_0, \quad a_1, \quad a_2, \quad \ldots, \quad a_\gamma, \quad b_0, \quad b_1, \quad b_2, \quad \ldots, \quad b_\gamma$$

les termes égaux, en sorte que l'on ait

$$a_0 = b_0, \qquad a_1 = b_1, \qquad \ldots, \qquad a_\gamma = b_\gamma ;$$

soient, de plus,

$$a_{\gamma+1}, \quad a_{\gamma+2}, \quad \ldots, \quad a_\alpha, \quad b_{\gamma+1} \quad b_{\gamma+2}, \quad \ldots, \quad b_\beta$$

les autres termes des séries (1) et (2), qui seront tous de formes différentes ; les séries (1) et (2) seront respectivement

$$(1) \qquad a_0, \quad a_1, \quad a_2, \quad \ldots, \quad a_\gamma, \quad a_{\gamma+1}, \quad a_{\gamma+2}, \quad \ldots, \quad a_\alpha,$$
$$(2) \qquad a_0, \quad a_1, \quad a_2, \quad \ldots, \quad a_\gamma, \quad b_{\gamma+1}, \quad b_{\gamma+2}, \quad \ldots, \quad b_\beta.$$

Cela posé, je dis que, pour démontrer le théorème relativement aux séries (1) et (2), il suffira de le démontrer relativement aux deux séries

$$(3) \quad a_0, \quad a_1, \quad a_2, \quad \ldots, \quad a_\gamma, \quad a_{\gamma+1}, \quad a_{\gamma+2}, \quad \ldots, \quad a_\alpha, \quad b_{\gamma+1}, \quad b_{\gamma+2}, \quad \ldots, \quad b_\beta,$$
$$(4) \quad a_0, \quad a_1, \quad a_2, \quad \ldots, \quad a_\gamma,$$

qui ne diffèrent des deux séries données que parce qu'on a fait passer dans la première tous les termes de la seconde qui n'étaient pas communs aux deux séries. Pour prouver cette proposition il suffira de faire voir que toutes les sommes que l'on peut obtenir, en ajoutant successivement les termes de la série (4) à ceux de la série (3), sont nécessairement de la forme $a_x + b_y$; en sorte qu'on peut les obtenir également en ajoutant successivement les termes de la série (2) à ceux de la série (1). Et, en effet, les sommes dont il s'agit sont de deux espèces. Les unes résultent de l'addition des termes $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_\gamma$ de la série (4) aux termes

$$b_{\gamma+1},\quad b_{\gamma+2},\quad b_{\gamma+3},\quad \ldots,\quad b_\beta$$

de la série (3), et sont évidemment de la forme $a_x + b_y$. Les autres résultent de l'addition des termes de la série (4) avec les termes

$$a_0,\quad a_1,\quad a_2,\quad \ldots,\quad a_\gamma,\quad a_{\gamma+1},\quad \ldots,\quad a_\alpha$$

de la série (3); d'ailleurs, les termes

$$a_0,\quad a_1,\quad a_2,\quad \ldots,\quad a_\gamma,\quad a_{\gamma+1},\quad \ldots,\quad a_\alpha$$

étant de la forme a_x, et les termes de la série (4) pouvant être considérés comme étant de la forme b_y, parce qu'ils sont communs aux séries (1) et (2), les sommes dont il s'agit seront encore de la forme $a_x + b_y$. Ainsi, pour démontrer le théorème relativement aux séries (1) et (2), il suffira de le démontrer relativement aux séries (3) et (4) composées : l'une de

$$1 + \alpha + \beta - \gamma$$

termes de formes différentes, l'autre de

$$1 + \gamma$$

termes dont les formes sont comprises parmi celles des termes de la série (3).

Cela posé, on pourra, par le moyen des transformations employées dans le deuxième cas, augmenter les séries (3) et (4) de quantités

telles que les formes des termes de la série (4) soient en partie comprises et en partie non comprises parmi les formes des termes de la série (3). Soit $\delta + 1$ le nombre des termes qui, après ces transformations, seront de même forme dans les deux séries; on pourra, en opérant comme ci-dessus, substituer aux séries (3) et (4) deux nouvelles séries (5) et (6) composées, l'une de

$$1 + \alpha + \beta - \gamma + (\gamma - \delta) = 1 + \alpha + \beta - \delta$$

termes de formes différentes, l'autre de

$$1 + \delta$$

termes dont les formes se trouveront comprises parmi celles des termes de la série (5), et l'on prouvera, comme précédemment, que, pour démontrer le théorème relativement aux séries (3) et (4), il suffira de le démontrer relativement aux séries (5) et (6).

En continuant de même, on fera voir, en général, que l'on peut substituer aux séries données, dont les nombres de termes sont respectivement

$$\alpha + 1,\quad \beta + 1,$$

plusieurs autres systèmes de séries semblables, dont les nombres de termes soient respectivement

$$\begin{array}{ll} 1 + \alpha + \beta - \gamma, & 1 + \gamma, \\ 1 + \alpha + \beta - \delta, & 1 + \delta, \\ 1 + \alpha + \beta - \varepsilon, & 1 + \varepsilon, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots, & \ldots\ldots, \end{array}$$

les nombres entiers $\beta, \gamma, \delta, \varepsilon$ formant une série décroissante, et qu'il suffit de démontrer le théorème relativement au dernier de ces systèmes pour qu'il soit démontré relativement à tous les autres. D'ailleurs, les nombres entiers $\beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \ldots$ formant une série décroissante et ne pouvant jamais être nuls, la série dont il s'agit se terminera nécessairement par l'unité, et alors on obtiendra deux séries dont les nombres de termes seront respectivement

$$\alpha + \beta \quad \text{et} \quad 2.$$

Mais, d'après le théorème VI, les additions faites des termes de ces deux séries doivent fournir un nombre de sommes de formes différentes au moins égal à

$$\alpha+\beta+1.$$

Le théorème VII se trouvant ainsi vérifié par rapport à ces deux dernières séries, sera également vrai relativement aux deux séries données.

Scholie. — Il est facile de voir que le théorème que nous venons de démontrer n'a lieu, en général, que relativement à un diviseur premier. En effet, si, au lieu de prendre pour diviseur un nombre premier p, on prenait pour diviseur le nombre composé np, alors, en supposant

$$\alpha+1=n$$

et faisant

$$\begin{array}{lllll} a_0=0, & a_1=p, & a_2=2p, & \dots, & a_{n-1}=(n-1)p, \\ b_0=0, & b_1=p, & & \dots, & b_\beta\ =\beta p, \end{array}$$

et divisant la formule a_x+b_y par np, on ne pourrait obtenir pour restes que des nombres divisibles par p et, par suite, le nombre de ces restes, ne pouvant surpasser n ou $\alpha+1$, serait nécessairement au-dessous de $\alpha+\beta+1$.

Il existe pourtant un cas où le théorème VII a lieu relativement à un diviseur quelconque : c'est celui où

$$\alpha+\beta+1=p,$$

comme nous le ferons voir ci-après.

Corollaire. — Rien n'empêche, dans ce qui précède, de supposer la série (2) égale à la série (1); alors on a $\alpha=\beta$ et l'on peut énoncer le théorème de la manière suivante :

Théorème VIII. — *Soit, pris pour diviseur, un nombre premier p; soit*

$$2\alpha+1\leqq p,$$

et supposons que la formule a_x puisse fournir $\alpha+1$ valeurs de formes différentes relativement à p, les sommes qui résulteront de toutes les combinaisons possibles de ces valeurs, prises deux à deux, fourniront au moins $2\alpha+1$ termes de formes différentes.

Théorème IX. — *Soit, pris pour diviseur, un nombre entier quelconque n, premier ou non premier; soient α et β deux autres nombres entiers tels que l'on ait*

$$\alpha+\beta+1=n;$$

supposons que la formule a_x puisse fournir $\alpha+1$ valeurs de formes différentes et la formule b_y, $\beta+1$ valeurs de formes différentes, la formule a_x+b_y fournira

$$\alpha+\beta+1=n$$

valeurs de formes différentes, c'est-à-dire des valeurs de toutes les formes possibles.

Ce théorème, qui est un cas particulier du théorème VII, lorsque n est un nombre premier, peut se démontrer en général de la manière suivante.

Démonstration. — Soit k un reste quelconque plus petit que n; pour prouver que la formule a_x+b_y donne au moins une valeur de la forme k, il suffira de prouver que la formule a_x+b_y-k fournira au moins une valeur de la forme zéro ou, ce qui revient au même, que les formules a_x et $k-b_y$ fournissent au moins deux valeurs de mêmes formes. Et, en effet, la formule a_x devant fournir $\alpha+1$ valeurs de formes différentes et la formule b_y, $\beta+1$ valeurs de formes différentes; si les deux formules ne pouvaient fournir deux valeurs de même forme, on aurait en tout

$$\alpha+\beta+2 \quad \text{ou} \quad n+1$$

valeurs de formes différentes, ce qui est absurde.

Théorème X. — *Soit, pris pour diviseur, un nombre quelconque n;*

soient α et β deux nombres entiers tels que l'on ait

$$\alpha+\beta+1=n;$$

si la formule a_x fournit $\alpha+1$ valeurs de formes différentes et la formule b_y, $\beta+1$ valeurs de formes différentes, une des valeurs de la formule a_x+b_y sera de la forme zéro, c'est-à-dire divisible par p.

En effet, d'après le théorème précédent, la formule a_x+b_y doit fournir des valeurs de toutes les formes possibles.

Théorème XI. — *Soit, pris pour diviseur, un nombre premier p; soient α, β, γ des nombres entiers tels que l'on ait*

$$\alpha+\beta+1\leqq p;$$

supposons que la formule a_x fournisse $\alpha+1$ valeurs de formes différentes, la formule b_y, $\beta+1$ valeurs de formes différentes et la formule c_z, $\gamma+1$ valeurs de formes différentes; $\alpha+\beta+\gamma+1$ étant supposé ou plus petit que p ou tout au plus égal à p, la formule $a_x+b_y+c_z$ fournira au moins

$$\alpha+\beta+\gamma+1$$

valeurs de formes différentes.

Démonstration. — En effet, il suit du théorème VII que la formule a_x+b_y fournira au moins $\alpha+\beta+1$ valeurs de formes différentes. La formule c_z fournissant, d'ailleurs, $\gamma+1$ valeurs de formes différentes, les deux formules a_x+b_y et c_z réunies devront fournir, d'après le théorème VII,

$$(\alpha+\beta)+\gamma+1$$

valeurs de formes différentes.

Corollaire. — Si l'on suppose que la formule d_u fournisse un nombre δ de valeurs de formes différentes et que l'on ait

$$\alpha+\beta+\gamma+\delta+1\leqq p,$$

on fera voir, par un raisonnement semblable à ceux que l'on vient d'établir, que la formule

$$a_x+b_y+c_z+d_u$$

doit fournir au moins

$$\alpha'+\beta+\gamma+\delta+1$$

valeurs de formes différentes. En continuant de même, on démontrera, en général, le théorème suivant :

Théorème XII. — *Soit, pris pour diviseur, un nombre premier p; soient α, β, γ, δ, ε, ... des nombres entiers tels que l'on ait*

$$\alpha+\beta+\gamma+\delta+\varepsilon+\ldots+1\leqq p;$$

supposons, de plus, que les formules

$$a_x,\quad b_y,\quad c_z,\quad d_u,\quad e_v,\quad \ldots$$

puissent fournir, la première, $\alpha+1$ valeurs de formes différentes; la deuxième, $\beta+1$ valeurs de formes différentes; la troisième, $\gamma+1$ valeurs de formes différentes, etc., la formule

$$a_x+b_y+c_z+d_u+e_v+\ldots$$

fournira au moins

$$\alpha+\beta+\gamma+\delta+\varepsilon+\ldots+1$$

valeurs de formes différentes.

Corollaire. — Si l'on suppose

$$\alpha+\beta+\gamma+\delta+\varepsilon+\ldots+1=p,$$

alors la formule

$$a_x+b_y+c_z+d_u+e_v+\ldots$$

fournira p valeurs de formes différentes, c'est-à-dire des valeurs de toutes les formes possibles; elle fournira donc aussi une valeur de la forme zéro, c'est-à-dire divisible par p, d'où résulte le théorème suivant :

THÉORÈME XIII. — *Soit, pris pour diviseur, un nombre premier quelconque p; soient $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \ldots, \varepsilon, \ldots$ des nombres entiers tels que l'on ait*

$$\alpha+\beta+\gamma+\delta+\varepsilon+\ldots+1=p;$$

supposons que les formules

$$a_x,\quad b_y,\quad c_z,\quad d_u,\quad e_v,\quad \ldots$$

puissent fournir, la première, $\alpha+1$ valeurs de formes différentes; la deuxième, $\beta+1$ valeurs de formes différentes; la troisième, $\gamma+1$ valeurs de formes différentes; la quatrième, $\delta+1$ valeurs de formes différentes; la cinquième, $\varepsilon+1$ valeurs de formes différentes, etc.; une des valeurs de la formule

$$a_x+b_y+c_z+d_u+\ldots$$

sera nécessairement divisible par p.

Corollaire. — Le théorème précédent aurait lieu, *a fortiori*, si l'on avait

$$1+\alpha+\beta+\gamma+\delta+\varepsilon+\ldots>p.$$

THÉORÈME XIV. — *Soit, pris pour diviseur, un nombre premier $p>2$ et considérons la formule x^2 comme représentant le carré d'un nombre entier pris à volonté. Je dis que la formule x^2 pourra fournir $\frac{p+1}{2}$ valeurs de formes différentes.*

Démonstration. — Substituez successivement à la place de x les différents termes de la suite

$$0,\quad 1,\quad 2,\quad 3,\quad \ldots,\quad \frac{p-1}{2}$$

qui sont en nombre égal à $\frac{p+1}{2}$. Il est facile de voir que ces substitutions donneront pour x^2 autant de valeurs de formes différentes. Et, en effet, soient r^2 et s^2 deux de ces valeurs. Pour que r^2 et s^2 fussent de même forme, il faudrait que leur différence

$$r^2-s^2=(r-s)(r+s)$$

fût divisible par p. Or, c'est ce qui ne peut être, puisque le plus grand des facteurs de cette différence, savoir $r+s$, est tout au plus égal à

$$\frac{p-3}{2}+\frac{p-1}{2}=p-2$$

et, par conséquent, plus petit que p.

Corollaire I. — Il est facile de voir que, si, dans la formule x^2, on substitue successivement, à la place de x, les termes de la suite

$$\frac{p+1}{2},\quad \frac{p+3}{2},\quad \ldots,\quad p-1,$$

on aura des valeurs de mêmes formes que celles qu'on avait déjà obtenues par la substitution des nombres

$$0,\quad 1,\quad 2,\quad 3,\quad \ldots,\quad \frac{p-1}{2}$$

à la place de x; seulement, les mêmes formes se trouveront reproduites dans un ordre inverse. En effet, la différence des carrés

$$\left(\frac{p+m}{2}\right)^2 \quad \text{et} \quad \left(\frac{p-m}{2}\right)^2$$

est mp et, par conséquent, divisible par p.

Corollaire II. — La formule x^2 pouvant fournir $\frac{p+1}{2}$ restes de formes différentes, les formules

$$Ax^2,\quad By^2\quad \text{et}\quad By^2+C$$

pourront fournir chacune $\frac{p+1}{2}$ restes de formes différentes, pourvu que A, B et C soient des nombres entiers non divisibles par p. Par suite, la formule

$$Ax^2+By^2+C$$

pourra fournir p valeurs de formes différentes, c'est-à-dire des valeurs de toutes les formes possibles; elle fournira donc aussi une valeur de la forme zéro, c'est-à-dire divisible par p, d'où résulte le théorème suivant :

Théorème XV. — *Soit, pris pour diviseur, un nombre premier p, et soient* A, B, C *des nombres entiers positifs ou négatifs, mais non divisibles par p; on pourra toujours trouver, pour x et y, des valeurs telles que la formule*

$$Ax^2 + By^2 + C$$

soit divisible par p.

Nota. — Il suit de la théorie précédente qu'on pourra toujours satisfaire à la question en prenant pour x et pour y des valeurs entières plus petites que $\frac{p}{2}$.

Théorème XVI. — *Désignons par $\overline{x^m}$ la somme des x premiers termes de la progression arithmétique*

$$1,\quad 1+m,\quad 1+2m,\quad \ldots,\quad 1+m(x-1);$$

$\overline{x^m}$ sera le terme général des nombres polygones de l'ordre $m+2$ et l'on aura

$$\overline{x^m} = \frac{x(x-1)}{2}m + x.$$

Supposons d'abord m pair, et soit p un nombre premier quelconque > 2. On pourra toujours supposer

$$p - 1 = m\alpha + n,$$

α étant le quotient de $\frac{p-1}{m}$ et n étant ou zéro ou un nombre entier plus petit que m. Cela posé, je dis que la formule $\overline{x^m}$ pourra fournir $\alpha+1$ valeurs de formes différentes, si l'on a $n = 0$ et $\alpha + 2$ valeurs de formes différentes dans le cas contraire.

Démonstration. — Supposons d'abord $n = 0$; on aura

$$p - 1 = m\alpha \quad \text{et} \quad p = m\alpha + 1.$$

Substituez successivement, à la place de n, dans la formule $\overline{x^m}$, les

termes de la suite

$$0,\quad 1,\quad 2,\quad 3,\quad \ldots,\quad \alpha,$$

qui sont en nombre égal à $\alpha + 1$. Il est facile de voir que ces substitutions donneront, pour $\overline{x^m}$, autant de valeurs de formes différentes et, en effet, soient $\overline{r^m}$ et $\overline{s^m}$ deux de ces valeurs. Pour que $\overline{r^m}$ et $\overline{s^m}$ fussent de même forme il faudrait que leur différence

$$m\frac{r(r-1)}{2} + r - m\frac{s(s-1)}{2} - s = (r-s)\left[\frac{m}{2}(r+s-1)+1\right]$$

fût divisible par p; or, c'est ce qui ne peut être, puisque le plus grand facteur de cette différence, savoir

$$\frac{m}{2}(r+s-1)+1,$$

est tout au plus égal à

$$\frac{m}{2}(\alpha+\alpha-1-1)+1 = m(\alpha-1)-1$$

et, par conséquent, plus petit que $m\alpha+1$ ou p.

Supposons, en second lieu, que n ne soit pas nul; alors on aura

$$p = m\alpha + 2 \quad \text{ou} \quad p > m\alpha + 2.$$

Dans ce cas, substituez successivement, à la place de x, dans la formule $\overline{x^m}$ les termes de la suite

$$0,\quad 1,\quad 2,\quad 3,\quad \ldots,\quad \alpha+1,$$

qui sont en nombre égal à $\alpha + 2$. Il est facile de voir que ces substitutions donneront, pour $\overline{x^m}$, autant de valeurs de formes différentes. Et, en effet, soient $\overline{r^m}$, $\overline{s^m}$ deux de ces valeurs. Pour que $\overline{r^m}$ et $\overline{s^m}$ fussent de même forme il faudrait que leur différence

$$(r-s)\left[\frac{m}{2}(r+s-1)+1\right]$$

fût divisible par p; or, c'est ce qui ne peut être, puisque le plus grand facteur de cette différence, savoir

$$\frac{m}{2}(r+s-1)+1,$$

est tout au plus égal à

$$\frac{m}{2}(\alpha+1+\alpha-1)+1=m\alpha+1$$

et, par conséquent, plus petit que $m\alpha+2$ ou p.

Corollaire. — Soient $\overline{x^m}$, $\overline{y^m}$, $\overline{z^m}$, ... différents nombres polygones de l'ordre $m+2$, m étant un nombre pair. Soit, de plus, p un nombre premier, et soient α le quotient et n le reste de la division de $p-1$ par m. Soient encore A, B, C, D, ... des nombres entiers positifs ou négatifs non divisibles par p. Il suit de ce qu'on vient de dire :

1° Que les formules

$$\overline{x^m}, \quad A\overline{x^m}, \quad A\overline{x^m}+B$$

fourniront nécessairement $\alpha+1$ restes de formes différentes relativement à p, si n est égal à zéro, et $\alpha+2$ restes de formes différentes dans le cas contraire;

2° Que la formule

$$A\overline{x^m}+B\overline{y^m}+C$$

fournira au moins $2\alpha+1$ valeurs de formes différentes relativement à p, si n est égal à zéro, et $2\alpha+3$ valeurs de formes différentes dans le cas contraire;

3° Que la formule

$$A\overline{x^m}+B\overline{y^m}+C\overline{z^m}+D$$

fournira au moins $3\alpha+1$ valeurs de formes différentes, si n est égal à zéro, et $3\alpha+4$ valeurs de formes différentes dans le cas contraire, etc.

En continuant de même, on fera voir, en général, que, si la formule

$$A\overline{x^m}+B\overline{y^m}+C\overline{z^m}+D\overline{u^m}+E\overline{v^m}+\ldots+F$$

est composée d'autant de termes variables qu'il y a d'unités dans m, cette formule fournira $m\alpha+1$ valeurs de formes différentes, si n est égal à zéro ou, ce qui revient au même, si l'on a $p=m\alpha+1$ et $m(\alpha+1)+1$ valeurs de formes différentes, s'il est possible, dans le cas contraire; d'ailleurs, $m(\alpha+1)+1$ étant toujours plus grand que $m\alpha+n$ ou p, il est clair que la formule dont il s'agit devra fournir p valeurs de formes différentes, c'est-à-dire des valeurs de toutes les formes possibles et, par suite, une de ses valeurs devra être divisible par p, d'où résulte le théorème suivant :

Théorème XVII. — *Soient m un nombre pair et p un nombre premier quelconque* >2.

Soient, de plus, A, B, C, ..., F *plusieurs nombres entiers positifs ou négatifs mais non divisibles par p. Représentons par* $\overline{x^m}$, $\overline{y^m}$, $\overline{z^m}$, ... *des nombres polygones de l'ordre* $m+2$ *et en nombre égal à m. On pourra toujours trouver, pour* x, y, z, *des valeurs telles que la formule*

$$A\overline{x^m}+B\overline{y^m}+C\overline{z^m}+\ldots+F$$

soit divisible par p.

Nota. — Il suit de la théorie précédente qu'on pourra toujours satisfaire à la question en prenant pour $x, y, z, \ldots$ des valeurs entières plus petites que $1+\frac{p}{m}$.

Corollaire I. — Si l'on suppose $m=2$, la formule que l'on considère se réduira à trois termes de la forme

$$Ax^2+By^2+C$$

et l'on sera ramené au théorème XV, qui n'est qu'un cas particulier du précédent.

Corollaire II. — Si l'on suppose

$$A=B=C=\ldots=1,$$

on trouvera que la formule

$$\overline{x^m}+\overline{y^m}+\overline{z^m}+\ldots+\mathrm{F},$$

composée d'autant de nombres polygones qu'il y a d'unités dans m, est toujours divisible par un nombre premier donné.

THÉORÈME XVIII. — *Désignons par $\overline{x^1}$ la suite des x premiers termes de la progression arithmétique*

$$1.2.3\ldots x,$$

$\overline{x^1}$ sera la formule générale des nombres triangulaires et l'on aura

$$\overline{x^1}=\frac{x(x+1)}{2}.$$

Soit, de plus, p un nombre premier quelconque >2 et soit

$$p-1=2\alpha.$$

Je dis que la formule $\overline{x^1}$ fournira nécessairement $\alpha+1$ valeurs de formes différentes.

Démonstration. — Substituez successivement à la place de x, dans la formule $\overline{x^1}$, les termes de la suite

$$0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ \alpha,$$

qui sont en nombre égal à $\alpha+1$. Il est facile de voir que ces substitutions donneront, pour $\overline{x^1}$, autant de valeurs de formes différentes. Et, en effet, soient $\overline{r^1}$ et $\overline{s^1}$ deux de ces valeurs. Pour qu'elles fussent de même forme, il faudrait que leur différence

$$\overline{r^1}-\overline{s^1}=\frac{(r-s)(r+s+1)}{2}$$

fût divisible par p; or, c'est ce qui ne peut être, puisque le plus grand facteur de cette différence, savoir $r+s+1$, peut tout au plus devenir égal à

$$\alpha+\alpha-1+1 \quad \text{ou à} \quad 2\alpha=p-1.$$

Corollaire. — Il suit du théorème précédent que, si l'on représente par A, B, C des nombres entiers non divisibles par p, les formules

$$\mathrm{A}\overline{x^1} \quad \text{et} \quad \mathrm{B}\overline{y^1}+\mathrm{C}$$

fourniront chacune $\alpha+1$ valeurs de formes différentes. Par suite, la formule

$$\mathrm{A}\overline{x^1}+\mathrm{B}\overline{y^1}+\mathrm{C}$$

fournira $2\alpha+1$ valeurs de formes différentes, c'est-à-dire des valeurs de toutes les formes possibles. Elle devra donc fournir une valeur divisible par p, d'où l'on conclut le théorème suivant :

THÉORÈME XIX. — *Soit p un nombre premier quelconque >2; soient A, B, C des nombres entiers positifs ou négatifs mais non divisibles par p; on pourra toujours trouver, pour x et y, des valeurs telles que la formule*

$$\mathrm{A}\overline{x^1}+\mathrm{B}\overline{y^1}+\mathrm{C}$$

soit divisible par p.

THÉORÈME XX. — *Soient m un nombre impair et p un nombre premier quelconque; soit α le quotient de la division de p par $2m$, en sorte qu'on ait*

$$p=2m\alpha+n,$$

n étant un nombre entier plus petit que $2m$; soit, de plus, $\overline{x^m}$ la formule générale des nombres polygones de l'ordre $m+2$; je dis que la formule $\overline{x^m}$ fournira au moins $\alpha+2$ valeurs de formes différentes.

Démonstration. — Substituez successivement, à la place de x, dans la formule $\overline{x^m}$, les termes de la suite

$$0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ \alpha,\ \alpha+1,$$

qui sont en nombre égal à $\alpha+2$. Je dis que ces substitutions fourniront, pour $\overline{x^m}$, autant de valeurs de formes différentes. Et, en effet, soient $\overline{r^m}$ et $\overline{s^m}$ deux de ces valeurs; pour qu'elles fussent de même forme, il faudrait que leur différence

$$\frac{1}{2}(r-s)[m(r+s-1)+2]$$

fût divisible par p. Or, c'est ce qui ne peut être, puisque le plus grand facteur de cette différence, étant

$$\frac{m}{2}(r+s-1)+1$$

dans le cas où $r-s$ est impair et

$$m(r+s-1)+2$$

dans le cas où $r-s$ est pair, sera tout au plus égal à

$$m(\alpha+1+\alpha-1-1)+2 \quad \text{ou à} \quad 2m\alpha-(m-2)$$

et, par conséquent, plus petit que p.

Corollaire. — Soient $\overline{x^m}$, $\overline{y^m}$, $\overline{z^m}$, ... des nombres polygones de l'ordre impair $m+2$; soient, de plus, p un nombre premier et α le quotient de la division $\frac{p}{2m}$; enfin, soient A, B, C, ... des nombres entiers non divisibles par p; il suit du théorème précédent :

1° Que les formules

$$\overline{x^m}, \quad A\overline{x^m}, \quad A\overline{x^m}+B$$

fourniront nécessairement $\alpha+2$ valeurs de formes différentes relativement à p;

2° Que la formule

$$A\overline{x^m}+B\overline{y^m}+C$$

fournira $2\alpha+3$ valeurs de formes différentes relativement à p, ...

En continuant de même, on fera voir, en général, que, si la formule

$$A\overline{x^m}+B\overline{y^m}+C\overline{z^m}+\ldots+F$$

est composée d'autant de termes variables qu'il y a d'unités dans $2m$,

cette formule fournira, s'il est possible,

$$2m(\alpha+1)+1$$

valeurs de formes différentes. Mais

$$2m(\alpha+1)+1$$

étant plus grand que p, il est clair que la formule dont il s'agit fournira p valeurs de formes différentes, c'est-à-dire des valeurs de toutes les formes possibles; elle fournira donc une valeur divisible par p et, par suite, on aura le théorème suivant :

Théorème XXI. — *Soient m un nombre impair et p un nombre premier quelconque; soient, de plus,* A, B, C, D, ..., F *plusieurs nombres entiers positifs ou négatifs non divisibles par p; enfin, soient $\overline{x^m}$, $\overline{y^m}$, $\overline{z^m}$, ... des nombres polygones de l'ordre $m+2$ et en nombre égal à $2m$; on pourra toujours trouver, pour x, y, z, ..., des nombres tels que la formule*

$$A\overline{x^m}+B\overline{y^m}+C\overline{z^m}+\ldots+F,$$

composée de $2m$ termes variables et d'un terme constant, soit divisible par p.

MÉMOIRE

SUR LE

NOMBRE DES VALEURS QU'UNE FONCTION PEUT ACQUÉRIR,

LORSQU'ON Y PERMUTE DE TOUTES LES MANIÈRES POSSIBLES LES QUANTITÉS QU'ELLE RENFERME.

Journal de l'École Polytechnique, XVII^e Cahier, Tome X, p. 1; 1815.

MM. Lagrange et Vandermonde sont, je crois, les premiers qui aient considéré les fonctions de plusieurs variables relativement au nombre de valeurs qu'elles peuvent obtenir, lorsqu'on substitue ces variables à la place les unes des autres. Ils ont donné plusieurs théorèmes intéressants relatifs à ce sujet dans deux Mémoires imprimés en 1771, l'un à Berlin, l'autre à Paris. Depuis ce temps, quelques géomètres italiens se sont occupés avec succès de cette matière et, particulièrement, M. Ruffini, qui a consigné le résultat de ses recherches dans le Tome XII des *Mémoires de la Société italienne* et dans sa *Théorie des équations numériques*. Une des conséquences les plus remarquables des travaux de ces divers géomètres est que, avec un nombre donné de lettres, on ne peut pas toujours former une fonction qui ait un nombre déterminé de valeurs. Les caractères par lesquels cette impossibilité se manifeste ne sont pas toujours faciles à saisir; mais on peut du moins, pour un nombre donné de lettres, assigner des limites que le nombre des valeurs ne peut dépasser et déterminer en outre un grand nombre de cas d'exclusion. Je vais exposer dans ce Mémoire ce qu'on avait déjà trouvé de plus important sur cet objet et ce que mes propres recherches

m'ont permis d'y ajouter. J'examinerai plus particulièrement le cas où le nombre des valeurs d'une fonction est supposé plus petit que le nombre des lettres, parce que les fonctions de cette nature sont celles dont la connaissance est la plus utile en Analyse.

Considérons une fonction de plusieurs quantités et supposons que l'on échange entre elles ces mêmes quantités une ou plusieurs fois de suite. Si la fonction est du genre de celles qu'on appelle *symétriques*, elle ne changera pas de valeur par suite des transpositions opérées entre les quantités qu'elle renferme; mais si elle n'est pas symétrique, elle pourra obtenir, en vertu de ces mêmes transpositions, plusieurs valeurs différentes les unes des autres dont le nombre se trouvera déterminé par la nature de la fonction dont il s'agit. Si l'on partage les fonctions en divers ordres, suivant le nombre des quantités qu'elles renferment, en sorte qu'une fonction du deuxième ordre soit celle qui renferme deux quantités, une fonction du troisième ordre celle qui en renferme trois, etc., il sera facile de reconnaître qu'il existe une liaison nécessaire entre le nombre des valeurs que peut obtenir une fonction non symétrique et l'ordre de cette même fonction. Ainsi, par exemple, une fonction du deuxième ordre ne pourra jamais obtenir que deux valeurs que l'on déduira l'une de l'autre par la transposition des deux quantités qui la composent. De même, une fonction du troisième ordre ne pourra obtenir plus de six valeurs; une fonction du quatrième ordre, plus de vingt-quatre valeurs, etc. En général, le maximum du nombre des valeurs que peut obtenir une fonction de l'ordre n sera évidemment égal au produit

$$1.2.3\ldots\ldots n$$

car ce produit représente le nombre des manières différentes dont on peut disposer, à la suite les unes des autres, les quantités dont la fonction se compose. On a donc déjà, par ce moyen, une limite que le nombre des valeurs en question ne peut dépasser; mais il s'en faut de beaucoup que dans chaque ordre on puisse former des fonctions dont le nombre des valeurs soit égal à l'un des nombres entiers situés au-dessous de cette limite. Un peu de réflexion suffit pour faire voir qu'aucun nombre au-dessous de la limite ne peut remplir la condition exigée, à moins qu'il ne soit diviseur de cette limite. On peut s'en assurer facilement à l'aide des considérations suivantes :

Soit K une fonction quelconque de l'ordre n et désignons par a_1, a_2, ..., a_n les quantités qu'elle renferme. Si l'on écrit à la suite les unes des autres les quantités dont il s'agit ou, ce qui revient au même, les indices qui les affectent, dans l'ordre où ils se présentent lorsqu'on les passe en revue en allant de gauche à droite et en ayant soin de n'écrire qu'une seule fois chaque indice, on aura une permutation de ces mêmes indices qui aura une relation nécessaire avec la fonction K. Par exemple, si la fonction K était du quatrième ordre et égale à

$$a_1 a_2^m \cos a_4 + a_4 \sin a_3,$$

la permutation relative à K serait

$$1.2.4.3.$$

Si, au-dessous de la permutation relative à K, on écrit une autre permutation formée avec les indices 1, 2, 3, ..., n, et que l'on remplace successivement dans la fonction K chacun des indices qui composent la permutation supérieure par l'indice correspondant de la permutation inférieure, on aura une nouvelle valeur de K qui sera ou ne sera pas équivalente à la première et la permutation relative à cette nouvelle valeur de K sera évidemment la permutation inférieure dont on vient de parler. On pourra obtenir, par ce moyen, les valeurs de K relatives aux diverses permutations que l'on peut former avec les indices 1, 2, 3, ..., n; et, si l'on représente par

$$K, \quad K', \quad K'', \quad \ldots$$

les valeurs dont il s'agit, leur nombre sera égal au produit

$$1.2.3.\ldots.n,$$

et leur ensemble fournira toutes les valeurs possibles de la fonction K. Pour déduire deux de ces valeurs l'une de l'autre, il suffira de former les permutations relatives à ces deux valeurs et de substituer aux indices de la première permutation les indices correspondants pris dans la seconde. Pour indiquer cette *substitution*, j'écrirai les deux permutations entre parenthèses en plaçant la première au-dessus de la seconde; ainsi, par exemple, la substitution

$$\begin{pmatrix} 1.2.4.3 \\ 2.4.3.1 \end{pmatrix}$$

indiquera que l'on doit substituer, dans K, l'indice 2 à l'indice 1, l'indice 4 à l'indice 2, l'indice 3 à l'indice 4 et l'indice 1 à l'indice 3. Si donc on supposait, comme ci-dessus,

$$K = a_1 a_2^m \cos a_4 + a_4 \sin a_3,$$

en désignant par K' la nouvelle valeur de K obtenue par la substitution

$$\begin{pmatrix} 1.2.4.3 \\ 2.4.3.1 \end{pmatrix},$$

on aurait

$$K' = a_2 a_4^m \cos a_3 + a_3 \sin a_1.$$

Afin d'abréger je représenterai, dans la suite, les permutations elles-mêmes par des lettres majuscules. Ainsi, si l'on désigne la permutation

$$1.2.4.3 \quad \text{par} \quad A_1$$

et la permutation

$$2.4.3.1 \quad \text{par} \quad A_2,$$

la substitution

$$\begin{pmatrix} 1.2.4.3 \\ 2.4.3.1 \end{pmatrix}$$

se trouvera indiquée de la manière suivante :

$$\begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix}.$$

Cela posé, K étant une fonction quelconque de l'ordre n, désignons par N le produit 1.2.3.....n et par

$$A_1,\quad A_2,\quad A_3,\quad \ldots,\quad A_N$$

les diverses permutations en nombre égal à N que l'on peut former avec les indices 1, 2, 3, ..., n; N sera le nombre total des valeurs de la fonction K relatives à ces diverses permutations. Soient

$$K_1,\quad K_2,\quad K_3,\quad \ldots,\quad K_N$$

ces mêmes valeurs. Si elles sont toutes différentes les unes des autres, N exprimera le nombre des valeurs différentes de la fonction donnée; mais, dans le cas contraire, le nombre de ces valeurs, étant plus petit que N, sera nécessairement un diviseur de N, comme on va le faire voir.

Supposons que, parmi les valeurs possibles

$$K_1,\quad K_2,\quad K_3,\quad \ldots,\quad K_N$$

de la fonction donnée, plusieurs deviennent égales entre elles, en sorte qu'on ait, par exemple,

$$K_\alpha = K_\beta = K_\gamma = \ldots.$$

Désignons par M le nombre total des valeurs K_α, K_β, K_γ, ... que l'on suppose ici égales entre elles. Les permutations relatives à ces valeurs, ou A_α, A_β, A_γ, ..., seront aussi en nombre égal à M. Pour déduire toutes ces permutations d'une seule, par exemple de A_α, il suffira d'échanger entre eux, d'une certaine manière, les indices qui, dans cette permutation, occupent certaines places, et l'on conçoit facilement que si ces changements n'altèrent en rien la valeur correspondante K_α de la fonction K, cela tient non pas à la valeur même des indices, mais à la place que chacun d'eux occupe dans la permutation dont il s'agit.

Cela posé, soit K_λ une nouvelle valeur de K qui ne soit pas égale à K_α, et désignons toujours par A_λ la permutation relative à K_λ. Si l'on fait subir simultanément, aux indices qui occupent les mêmes places dans les permutations A_α et A_λ, les changements dont on vient de parler, la deuxième permutation de A_λ se trouvera successivement changée en plusieurs autres A_μ, A_ν, ..., pendant que la première, A_α, deviendra successivement A_β, A_γ, ... et, d'après le principe énoncé ci-dessus, il est évident que les équations

$$K_\alpha = K_\beta = K_\gamma = \ldots$$

entraineront celles-ci

$$K_\lambda = K_\mu = K_\nu = \ldots.$$

Il est aisé d'en conclure que, parmi les valeurs de K relatives à toutes les permutations possibles, savoir

$$K_1,\quad K_2,\quad K_3,\quad \ldots,\quad K_N,$$

le nombre de celles qui seront équivalentes à K_λ sera le même que le nombre des valeurs équivalentes à K_α. Par suite, si l'on représente par R le nombre total des valeurs essentiellement différentes de la fonction K, M étant le nombre des valeurs équivalentes à K_α, RM sera le nombre total des valeurs relatives aux diverses permutations. On aura donc

$$RM = N$$

et, par suite,

$$R = \frac{N}{M}.$$

Ainsi R, ou le nombre des valeurs différentes de la fonction K, ne peut être qu'un diviseur de N, c'est-à-dire du produit 1.2.3.....n. Ce théorème, qui se présente dès les premiers pas que l'on veut faire dans la théorie des combinaisons, était déjà connu; mais il était nécessaire de le rappeler ici pour l'intelligence de ce qui va suivre. Afin d'abréger, j'appellerai désormais *indice de la fonction* K le nombre R qui indique combien cette fonction peut obtenir de valeurs essentiellement différentes et j'appellerai *diviseur indicatif* le nombre M par lequel on doit diviser N, ou le produit des indices 1, 2, 3, ..., n renfermés dans la fonction, pour obtenir l'indice de la fonction elle-même.

On vient de voir que le nombre des valeurs différentes d'une fonction de l'ordre n est nécessairement un diviseur du produit

$$N = 1.2.3\ldots\ldots n.$$

Le plus petit diviseur de ce produit est toujours égal à 2 et il est facile de s'assurer que, dans un ordre quelconque, on peut former des fonctions qui n'aient que deux valeurs différentes. Vandermonde a donné les moyens de composer des fonctions de cette espèce. En général, pour former avec les quantités

$$a_1, \quad a_2, \quad \ldots, \quad a_n$$

une fonction de l'ordre n dont l'indice soit égal à 2, il suffira de considérer la partie positive ou la partie négative du produit

$$(a_1 - a_2)(a_1 - a_3)\ldots(a_1 - a_n)(a_2 - a_3)\ldots(a_2 - a_n)\ldots(a_{n-1} - a_n)$$

qui a pour facteurs les différences des quantités $a_1, a_2, \ldots, a_n$ prises deux à deux.

En effet, supposons que, après avoir développé ce produit, on représente par P la somme des termes positifs et par Q la somme des termes négatifs, le produit dont il s'agit sera représenté par

$$P - Q,$$

et comme ce produit ne peut jamais changer de valeur mais seulement de signe, en vertu de substitutions quelconques opérées entre les indices des quantités qu'il renferme, les substitutions dont il s'agit pourront seulement transformer $P - Q$ en $Q - P$, c'est-à-dire changer P en Q, et réciproquement. P et Q seront donc les deux valeurs d'une fonction qui ne pourra en obtenir d'autres. En supposant $n = 3$, on trouve

$$P = a_1^2 a_2 + a_2^2 a_3 + a_3^2 a_1,$$
$$Q = a_1 a_2^2 + a_2 a_3^2 + a_3 a_1^2.$$

On serait encore arrivé à de semblables conclusions si l'on eût multiplié le produit

$$(a_1 - a_2)(a_1 - a_3)\ldots(a_1 - a_n)(a_2 - a_3)\ldots(a_2 - a_n)\ldots(a_{n-1} - a_n)$$

par une fonction symétrique quelconque des quantités

$$a_1, \quad a_2, \quad \ldots, \quad a_n.$$

Ce qu'on vient de remarquer relativement au diviseur 2 du produit $1.2.3\ldots\ldots n$ n'est pas vrai, en général, relativement à l'un quelconque des diviseurs de ce produit, et il n'est pas toujours possible de former une fonction de l'ordre n dont les valeurs différentes soient en nombre égal à l'un de ces diviseurs pris à volonté. Supposons, par exemple, qu'il s'agisse de former une fonction K qui ait seulement trois valeurs différentes. Si n est égal à 3, on trouvera une infinité de fonctions qui rempliront la condition exigée, telles que

$$a_1 a_2 + a_3,$$
$$a_1(a_2 + a_3),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

On pourra encore former des fonctions de cette espèce si n est égal à 4; par exemple,

$$a_1 a_2 + a_3 a_4,$$
$$(a_1 + a_2)(a_3 + a_4),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Mais si n est égal à 5 ou surpasse 5, on n'en pourra plus former de semblables; on ne peut pas même, dans ce cas, former de fonctions qui n'aient que quatre valeurs. Ces deux propositions ont été démontrées par M. Paolo Ruffini dans les *Mémoires de la Société italienne*, Tome XII, et dans sa *Théorie des équations*. Ayant été conduit, par des recherches sur les nombres, à m'occuper de la théorie des combinaisons, je suis arrivé à la démonstration d'un théorème plus général qui renferme les deux précédents et qui détermine une limite au-dessous de laquelle le nombre des valeurs d'une fonction non symétrique de l'ordre n ne peut jamais s'abaisser sans devenir égal à 2. Ce théorème peut s'énoncer ainsi qu'il suit :

Le nombre des valeurs différentes d'une fonction non symétrique de

n quantités ne peut s'abaisser au-dessous du plus grand nombre premier p contenu dans n sans devenir égal à 2.

PREMIÈRE PARTIE DE LA DÉMONSTRATION.

On fait voir que, si l'on suppose $R < p$, chaque valeur de K ne pourra être changée par aucune substitution du degré p.

Comme pour démontrer le théorème précédent il est nécessaire de bien connaître la nature de l'opération que j'ai désignée sous le nom de *substitution*, je commencerai par donner sur cet objet de nouveaux développements.

Soit K la fonction donnée de l'ordre n; soit R son indice ou le nombre des valeurs essentiellement différentes qu'elle peut recevoir par des substitutions opérées entre les quantités dont elle se compose. Enfin désignons par N le produit $1.2.3.\ldots.n$; R sera nécessairement un diviseur de N que je pourrai représenter par

$$\frac{N}{M},$$

M étant ainsi le diviseur indicatif de la fonction K. Cela posé, soient A_1, A_2, …, A_N les permutations en nombre égal à N que l'on peut former avec les indices renfermés dans K, et désignons par

$$K_1, \quad K_2, \quad \ldots, \quad K_N$$

les valeurs correspondantes de cette même fonction; pour déduire l'une de l'autre deux de ces valeurs ou, ce qui revient au même, les permutations qui leur correspondent, par exemple A_1 et A_2, il suffira de remplacer respectivement les indices compris dans la permutation A_1 par les indices correspondants compris dans la permutation A_2. Cette opération, que j'appelle *substitution*, sera, d'après les conventions établies, indiquée de la manière suivante :

$$\binom{A_1}{A_2}.$$

Les deux permutations A_1 et A_2 seront appelées respectivement *premier* et *second terme* de cette substitution. On peut, dans le premier terme A_1 de cette substitution, intervertir, de telle manière que l'on voudra, l'ordre des indices $1, 2, 3, \ldots, n$, pourvu que l'on intervertisse de la même manière l'ordre des indices correspondants compris dans le second terme A_2. On pourra, en conséquence, donner successivement pour premier terme à la substitution proposée chacune des permutations $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_N$, et la mettre ainsi sous un nombre égal à N de formes différentes qui seront toutes équivalentes entre elles.

Je dirai qu'une substitution est le *produit* de plusieurs autres, lorsqu'elle donnera le même résultat que ces dernières opérées successivement. Par exemple, si en appliquant successivement à la permutation A_1 les deux substitutions $\binom{A_2}{A_3}$ et $\binom{A_4}{A_5}$ on obtient pour résultat la permutation A_6, la substitution $\binom{A_1}{A_6}$ sera équivalente au produit des deux autres, et j'indiquerai cette équivalence comme il suit :

$$\binom{A_1}{A_6} = \binom{A_2}{A_3}\binom{A_4}{A_5}.$$

Une substitution *identique* est celle dont les deux termes sont égaux entre eux. Les substitutions

$$\binom{A_1}{A_1}, \quad \binom{A_2}{A_2}, \quad \ldots, \quad \binom{A_N}{A_N}$$

sont toutes identiques.

Je dirai que deux substitutions sont *contiguës* lorsque le second terme de la première sera égal au premier terme de la seconde. Les deux substitutions contiguës $\binom{A_1}{A_2}$, $\binom{A_2}{A_3}$, opérées successivement, donnent le même résultat que la substitution unique $\binom{A_1}{A_3}$; on a donc

$$\binom{A_1}{A_3} = \binom{A_1}{A_2}\binom{A_2}{A_3}.$$

On a de même, en général,

$$\begin{pmatrix} A_1 \\ A_r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_2 \\ A_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_3 \\ A_4 \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} A_{r-1} \\ A_r \end{pmatrix}.$$

Enfin, je dirai qu'une substitution est dérivée d'une autre, ou est une *puissance* d'une autre, si elle est équivalente à cette autre répétée plusieurs fois de suite. J'indiquerai la puissance r de la substitution $\begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix}$ de la manière suivante :

$$\begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix}^r.$$

Lorsque les substitutions contiguës

$$\begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} A_2 \\ A_3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} A_3 \\ A_4 \end{pmatrix}, \quad \ldots, \quad \begin{pmatrix} A_{r-1} \\ A_r \end{pmatrix}$$

sont toutes équivalentes entre elles, on a

$$\begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix}^r = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_2 \\ A_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_3 \\ A_4 \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} A_{r-1} \\ A_r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_r \end{pmatrix}.$$

Supposons que l'on applique plusieurs fois de suite à la permutation A_1 la substitution $\begin{pmatrix} A_s \\ A_t \end{pmatrix}$, en sorte que cette substitution étant appliquée à la permutation A_1 donne pour résultat la permutation A_2; qu'étant appliquée à la permutation A_2, elle donne pour résultat la permutation A_3, etc. La série des permutations

$$A_1, \quad A_2, \quad A_3, \quad \ldots$$

sera nécessairement composée d'un nombre fini de termes, et si l'on représente par m ce même nombre et par A_m la dernière des permutations obtenues, la substitution $\begin{pmatrix} A_s \\ A_t \end{pmatrix}$ appliquée à cette dernière permutation reproduira de nouveau le terme A_1. Cela posé, si l'on range en cercle ou plutôt en polygone régulier les permutations

$$A_1, \quad A_2, \quad A_3, \quad \ldots, \quad A_{m-1}, \quad A_m$$

de la manière suivante :

$$\begin{array}{ccc} & A_1 & \\ A_m & & A_2 \\ A_{m-1} & & A_3, \\ & \cdots & \end{array}$$

toutes les substitutions que l'on pourra former avec deux permutations prises à la suite l'une de l'autre, et d'orient en occident dans le polygone dont il s'agit, seront équivalentes entre elles et à $\begin{pmatrix} A_s \\ A_t \end{pmatrix}$, et toutes celles que l'on pourra former avec deux permutations séparées l'une de l'autre par un nombre r de côtés dans ce même polygone seront équivalentes à la puissance r de la substitution $\begin{pmatrix} A_s \\ A_t \end{pmatrix}$. On aura, de cette manière,

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} A_s \\ A_t \end{pmatrix} \;\; &= \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_2 \\ A_3 \end{pmatrix} = \ldots = \begin{pmatrix} A_m \\ A_1 \end{pmatrix}, \\
\begin{pmatrix} A_s \\ A_t \end{pmatrix}^2 &= \begin{pmatrix} A_1 \\ A_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_2 \\ A_4 \end{pmatrix} = \ldots = \begin{pmatrix} A_m \\ A_2 \end{pmatrix}, \\
\begin{pmatrix} A_s \\ A_t \end{pmatrix}^3 &= \begin{pmatrix} A_1 \\ A_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_2 \\ A_5 \end{pmatrix} = \ldots = \begin{pmatrix} A_m \\ A_3 \end{pmatrix}, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\
\begin{pmatrix} A_s \\ A_t \end{pmatrix}^m &= \begin{pmatrix} A_1 \\ A_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_2 \\ A_2 \end{pmatrix} = \ldots = \begin{pmatrix} A_m \\ A_m \end{pmatrix}, \\
\begin{pmatrix} A_s \\ A_t \end{pmatrix}^{m+1} &= \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_2 \\ A_3 \end{pmatrix} = \ldots = \begin{pmatrix} A_m \\ A_1 \end{pmatrix}, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

Il suit de ces considérations : 1° que la puissance m de la substitution $\begin{pmatrix} A_s \\ A_t \end{pmatrix}$ est équivalente à la substitution identique $\begin{pmatrix} A_1 \\ A_1 \end{pmatrix}$; 2° que x étant un nombre entier quelconque, $\begin{pmatrix} A_s \\ A_t \end{pmatrix}^{mx}$ sera encore une substitution identique; 3° que, dans la même hypothèse, les substitutions $\begin{pmatrix} A_s \\ A_t \end{pmatrix}^{mx+r}$ et $\begin{pmatrix} A_s \\ A_t \end{pmatrix}^r$ sont équivalentes; 4° que la notation $\begin{pmatrix} A_s \\ A_t \end{pmatrix}^0$

indique une substitution identique; 5° que, parmi les substitutions dérivées de $\binom{A_s}{A_t}$, les seules qui soient différentes entre elles sont les puissances dont l'exposant est plus petit que m ou, ce qui revient au même, les substitutions équivalentes à ces puissances, savoir :

$$\binom{A_1}{A_1},\quad \binom{A_1}{A_2},\quad \binom{A_1}{A_3},\quad \ldots,\quad \binom{A_1}{A_m}.$$

Le nombre de ces substitutions est, comme celui des permutations A_1, $A_2, A_3, \ldots, A_m$, égal à m. Ce nombre sera appelé le *degré* de la substitution $\binom{A_s}{A_t}$. Si l'on applique plusieurs fois de suite la substitution $\binom{A_s}{A_t}$ à la permutation A_1, on commencera par obtenir la suite des permutations $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_m$ et, lorsqu'on sera parvenu à ce point, les mêmes permutations se reproduiront dans le même ordre d'une manière périodique. C'est pourquoi je dirai que les permutations précédentes forment une période qui correspond à la substitution $\binom{A_s}{A_t}$.

Cela posé, le degré d'une substitution $\binom{A_s}{A_t}$ indique à la fois la plus petite de ses puissances positives qui soit équivalente à une substitution identique et le nombre des permutations comprises dans la période qui résulte de l'application de la substitution donnée à une permutation déterminée.

La manière la plus simple de représenter une période est de ranger en cercle, ou plutôt en polygone régulier, les permutations qui la composent, ainsi qu'on l'a déjà fait plus haut.

Je dirai que le cercle suivant

$$\begin{array}{ccc} & A_1 & \\ A_m & & A_2 \\ A_{m-1} & & A_3, \\ \cdot & & \cdot \\ & \cdots & \end{array}$$

formé comme on vient de le dire, est un des cercles de permutations

qui correspondent à la substitution $\binom{A_s}{A_t}$. Toute substitution qui a pour termes deux permutations comprises dans ce cercle est une des puissances de la substitution $\binom{A_s}{A_t}$.

Étant donné le cercle ou polygone précédent qui correspond à la substitution $\binom{A_s}{A_t}$, pour en déduire un polygone qui corresponde à la substitution $\binom{A_s}{A_t}^r$, il suffit de joindre de r en r, en allant d'orient en occident, les sommets du polygone donné et d'écrire les permutations que l'on y rencontre dans l'ordre où elles se présentent. Lorsque r et m sont premiers entre eux, on passe de cette manière sur tous les sommets du premier polygone et le second polygone renferme toutes les permutations comprises dans le premier; par suite, la substitution $\binom{A_s}{A_t}^r$ est du degré m, ainsi que la substitution donnée $\binom{A_s}{A_t}$, et cette seconde substitution peut alors être considérée comme une puissance de l'autre. Cette circonstance a toujours lieu lorsque m est un nombre premier, quelle que soit d'ailleurs la valeur de r.

Si l'on applique successivement la substitution $\binom{A_s}{A_t}$ aux différentes valeurs de la fonction K ou, ce qui revient au même, aux permutations

$$A_1,\quad A_2,\quad A_3,\quad \ldots,\quad A_N$$

qui leur correspondent, on obtiendra en tout un nombre égal à $\frac{N}{m}$ de polygones ou cercles différents les uns des autres qui seront composés chacun de m permutations différentes.

Cela posé, désignons sous le nom de *permutations équivalentes* celles qui correspondent à des valeurs équivalentes de la fonction K; les permutations équivalentes à A_1 étant, par hypothèse, en nombre égal à M, il est visible que, si l'on a $M > \frac{N}{m}$, on pourra, parmi les cercles que l'on vient de former, en trouver au moins un qui renferme deux des permutations équivalentes dont il s'agit. Soient A_x, A_y ces deux permutations; la substitution $\begin{pmatrix} A_x \\ A_y \end{pmatrix}$ sera une des puissances de la substitution $\begin{pmatrix} A_s \\ A_t \end{pmatrix}$, et si, en outre, m est un nombre premier, $\begin{pmatrix} A_s \\ A_t \end{pmatrix}$ sera encore une puissance de la substitution $\begin{pmatrix} A_x \\ A_y \end{pmatrix}$. D'ailleurs, les deux permutations A_x, A_y étant équivalentes entre elles et à la permutation A_1, la substitution $\begin{pmatrix} A_x \\ A_y \end{pmatrix}$ ne changera pas la valeur K_1 de la fonction K. Par suite, cette même valeur ne sera pas changée par la substitution $\begin{pmatrix} A_s \\ A_t \end{pmatrix}$ plusieurs fois répétée; elle ne sera donc pas changée par la substitution $\begin{pmatrix} A_s \\ A_t \end{pmatrix}$ si m est un nombre premier. Si l'on représente par p le plus grand des nombres premiers compris dans n, on pourra supposer, dans ce qui précède,

$$m = p.$$

Nous sommes donc conduits, par les considérations précédentes, à ce résultat remarquable que, relativement à la fonction K, on ne peut supposer $M > \frac{N}{p}$ ou, ce qui revient au même, $R < p$, à moins de supposer en même temps que la valeur K_1 de cette fonction ne peut être changée par aucune des substitutions du degré p. Il nous reste à faire voir que, pour satisfaire à cette dernière condition, on est obligé de rendre la fonction symétrique ou de supposer

$$R = 2.$$

DEUXIÈME PARTIE DE LA DÉMONSTRATION.

On fait voir que, si une valeur de K *ne peut être changée par aucune substitution du degré p, elle ne pourra être changée par aucune des substitutions circulaires du troisième degré.*

Avant d'aller plus loin, il est nécessaire d'examiner avec quelque attention la nature des substitutions du degré p que l'on peut former avec les indices $1, 2, 3, \ldots, n$.

Nous observerons d'abord que, si dans la substitution $\begin{pmatrix} A_s \\ A_t \end{pmatrix}$ formée par deux permutations prises à volonté dans la suite

$$A_1, \quad A_2, \quad A_3, \quad \ldots, \quad A_N,$$

les deux termes A_s, A_t renferment des indices correspondants qui soient respectivement égaux, on pourra, sans inconvénient, supprimer les mêmes indices pour ne conserver que ceux des indices correspondants qui sont respectivement inégaux. Ainsi, par exemple, si l'on fait $n = 5$, les deux substitutions

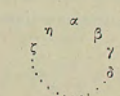
$$\begin{pmatrix} 1.2.3.4.5 \\ 2.3.1.4.5 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} 1.2.3 \\ 2.3.1 \end{pmatrix}$$

seront équivalentes entre elles. Je dirai qu'une substitution aura été réduite à sa plus simple expression lorsqu'on aura supprimé, dans les deux termes, tous les indices correspondants égaux.

Soient maintenant $\alpha, \beta, \gamma, \ldots, \zeta, \eta$ plusieurs des indices $1, 2, 3, \ldots, n$ en nombre égal à p, et supposons que la substitution $\begin{pmatrix} A_s \\ A_t \end{pmatrix}$ réduite à sa plus simple expression prenne la forme

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta & \gamma & \ldots & \zeta & \eta \\ \beta & \gamma & \delta & \ldots & \eta & \alpha \end{pmatrix},$$

en sorte que, pour déduire le second terme du premier, il suffise de ranger en cercle, ou plutôt en polygone régulier, les indices $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \ldots, \zeta, \eta$ de la manière suivante :



et de remplacer ensuite chaque indice par celui qui, le premier, vient prendre sa place lorsqu'on fait tourner d'orient en occident le polygone dont il s'agit. Il est aisé de voir que, pour obtenir la puissance r de la substitution donnée, il suffira de remplacer chaque indice du polygone par celui qui, le premier, vient prendre sa place après avoir passé sur un nombre de côtés égal à r, lorsqu'on fait tourner le polygone d'orient en occident. Si l'on veut obtenir de cette manière une substitution identique, il faudra supposer r égal à p ou à un multiple de p; car chaque indice ne peut revenir à sa place primitive qu'après avoir fait une ou plusieurs fois le tour du polygone. Il suit de là que le degré de la substitution donnée est égal à p. J'appellerai *polygone indicatif* ou *cercle indicatif* le polygone ou cercle formé par les indices compris dans cette substitution et je la désignerai elle-même sous le nom de *substitution circulaire*. Pour qu'une substitution soit circulaire, il suffit que, après l'avoir réduite à sa plus simple expression, on puisse passer en revue tous les indices qu'elle comprend, en comparant deux à deux les indices qui se correspondent dans les deux termes. Le degré d'une substitution circulaire est toujours égal au nombre des indices qu'elle renferme.

Soit

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta & \gamma & \delta & \ldots & \zeta & \eta \\ \beta & \gamma & \delta & \varepsilon & \ldots & \eta & \alpha \end{pmatrix}$$

une substitution circulaire du degré p;

$$\begin{pmatrix} \beta & \gamma & \delta & \varepsilon & \ldots & \eta & \alpha \\ \gamma & \alpha & \beta & \delta & \ldots & \zeta & \eta \end{pmatrix}$$

sera encore une substitution circulaire du degré p, et, comme elle est contiguë à la première, ces deux substitutions opérées successivement seront équivalentes à la substitution unique

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta & \gamma & \delta & \ldots & \zeta & \eta \\ \gamma & \alpha & \beta & \delta & \ldots & \zeta & \eta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \gamma & \alpha & \beta \end{pmatrix}.$$

Si donc les deux premières substitutions ne changent pas la valeur K_1 de la fonction K, cette valeur ne sera pas non plus changée par la substitution circulaire du troisième degré

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \gamma & \alpha & \beta \end{pmatrix}.$$

Il suit de là que, si la valeur K_1 n'est changée par aucune des substitutions circulaires du degré p, elle ne pourra être changée par aucune des substitutions circulaires du troisième degré; il ne reste plus qu'à développer les conséquences de cette dernière condition.

TROISIÈME PARTIE DE LA DÉMONSTRATION.

On fait voir que, si une valeur de K n'est changée par aucune des substitutions circulaires du troisième degré, cette fonction sera symétrique ou n'aura que deux valeurs.

Si l'on désigne sous le nom de *transposition* une substitution circulaire du deuxième degré, telle que $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}$ ou, ce qui revient au même, l'opération qui consiste à échanger l'un contre l'autre deux indices α et β, et que nous indiquerons comme il suit (α, β) : chaque substitution circulaire du troisième degré sera équivalente à deux transpositions successivement opérées. Ainsi, par exemple, la substitution

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \gamma & \alpha & \beta \end{pmatrix}$$

sera équivalente au produit des deux substitutions contiguës

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \beta & \alpha & \gamma \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \beta & \alpha & \gamma \\ \gamma & \alpha & \beta \end{pmatrix},$$

que l'on peut représenter aussi par

$$(\alpha, \beta), \quad (\beta, \gamma).$$

Si donc la valeur K_1 n'est pas changée par la substitution circulaire $\begin{pmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \beta & \gamma & \alpha \end{pmatrix}$, la même valeur ne sera pas changée par les transpositions (α, β), (β, γ) opérées successivement et, par suite, la transposition (α, β) ne pourra changer K_1 en K_2 sans que la transposition (β, γ) change réciproquement K_2 en K_1 et, par conséquent aussi, K_1 en K_2; ainsi les deux transpositions (α, β), (β, γ), qui ont un indice commun β, étant appliquées à K_1, donneront le même résultat K_2. On fera voir de même que, si la valeur K_1 n'est pas changée par la substitution circulaire du troisième degré

$$\begin{pmatrix}\beta & \gamma & \delta \\ \delta & \beta & \gamma\end{pmatrix},$$

les transpositions (β, γ) et (γ, δ), qui ont un indice commun γ, changeront toutes deux K_1 en K_2. Par suite, les transpositions

$$(\alpha, \beta), \quad (\gamma, \delta),$$

qui n'ont pas d'indices communs, conduiront encore au même résultat.

Il suit de ce qu'on vient de dire que, si la valeur K_1 de la fonction K n'est changée par aucune des substitutions circulaires du troisième degré opérées entre les indices $1, 2, 3, \ldots, n$ et que l'on représente par K_2 la valeur déduite de K_1 par la transposition $(1, 2)$, toutes les autres transpositions changeront encore K_1 en K_2 et, par conséquent, K_2 en K_1. Par suite, deux transpositions successives ne changeront pas la valeur K_1. Ainsi, dans le cas que l'on considère, le nombre des valeurs différentes de la fonction K, valeurs que l'on peut toujours déduire de K_1 par des transpositions opérées entre les indices $1, 2, 3, \ldots, n$, sera tout au plus égal à 2; d'ailleurs, il ne pourrait se réduire à l'unité que dans le cas où cette fonction deviendrait symétrique. Il est donc prouvé par ce qui précède que, si la fonction K n'est pas symétrique, le nombre de ses valeurs ne pourra être inférieur à p sans devenir égal à 2.

Ainsi, par exemple, en excluant les fonctions symétriques et celles qui ont deux valeurs seulement, on trouvera qu'une fonction du cinquième ou du sixième ordre ne peut obtenir moins de cinq valeurs; une fonction du septième, du huitième, du neuvième ou du dixième

ordre, moins de sept valeurs; une fonction du onzième ou du douzième ordre, moins de onze valeurs, etc. Au reste, comme en supposant $n = 3$ ou $n = 4$, on trouve $p = 3$, on voit que le théorème précédent, dans le troisième et le quatrième ordre, n'exclut pas les fonctions de trois valeurs.

Lorsque l'ordre de la fonction est lui-même un nombre premier, on a $p = n$; ainsi, toute fonction dont l'ordre est un nombre premier ne peut obtenir moins de valeurs qu'elle ne renferme de quantités, pourvu que l'on suppose toujours exclues les fonctions qui n'ont pas plus de deux valeurs.

Au reste, il n'est pas toujours possible d'abaisser l'indice, c'est-à-dire le nombre des valeurs d'une fonction jusqu'à la limite que nous venons d'assigner, et, si l'on en excepte les fonctions du quatrième ordre qui peuvent obtenir trois valeurs, je ne connais pas de fonctions non symétriques dont l'indice soit inférieur à l'ordre, sans être égal à 2. Le théorème ci-dessus démontré prouve du moins qu'il n'en existe pas de semblables quand l'ordre n de la fonction est un nombre premier, puisque alors la limite trouvée se confond avec ce nombre. On peut encore démontrer cette assertion, lorsque n est égal à 6, en faisant voir qu'une fonction de six lettres ne peut obtenir moins de six valeurs quand elle en a plus de deux. On y parvient à l'aide des considérations suivantes.

Soit K une fonction du sixième ordre, et désignons toujours par $1, 2, 3, 4, 5, 6$ les indices qui affectent les six quantités qu'elle renferme; le nombre total des valeurs possibles de la fonction K sera égal au produit

$$1.2.3.4.5.6 = 720.$$

Soient maintenant α, β, γ trois des six indices pris à volonté et K_1 une des valeurs de K. Le nombre des permutations que l'on peut former avec les trois indices α, β, γ étant égal au produit

$$1.2.3 = 6,$$

on pourra toujours déduire de la valeur K_1 cinq autres valeurs de la fonction K au moyen de transpositions ou de substitutions circulaires du troisième degré opérées entre les indices α, β, γ. Soient

$$K_2,\quad K_3,\quad K_4,\quad K_5,\quad K_6$$

les nouvelles valeurs dont il s'agit; les six valeurs

$$K_1,\quad K_2,\quad K_3,\quad K_4,\quad K_5,\quad K_6$$

seront toutes différentes les unes des autres ou bien elles seront égales deux à deux, trois à trois, ou toutes égales entre elles. Dans la première hypothèse, le nombre des valeurs différentes de la fonction donnée sera au moins égal à 6. Dans les trois autres hypothèses, une au moins des valeurs

$$K_2,\quad K_3,\quad K_4,\quad K_5,\quad K_6$$

sera égale à K_1; et, par suite, on pourra, sans altérer la valeur K_1, échanger entre eux dans cette valeur deux ou trois des indices α, β, γ, soit au moyen d'une simple transposition, soit au moyen d'une substitution circulaire du troisième degré.

Supposons maintenant que l'on partage en plusieurs groupes les six indices 1, 2, 3, 4, 5, 6, de manière à renfermer dans un même groupe deux indices qui sont à la fois compris, soit dans une transposition, soit dans une substitution circulaire du troisième degré qui ne change pas la valeur K_1. D'après ce qui précède, pour que la fonction donnée puisse obtenir moins de six valeurs, il est nécessaire que, sur trois indices α, β, γ pris à volonté, deux au moins se trouvent compris dans un même groupe et, dans ce cas, on ne pourra évidemment former que deux groupes différents, l'un de ces deux groupes pouvant être composé d'un seul indice. Il reste à savoir combien la fonction K peut obtenir de valeurs différentes quand le nombre des groupes ainsi formé est égal à 2 et quand ce même nombre se réduit à l'unité; l'ordre établi entre trois indices pris à volonté pouvant être interverti d'une certaine manière sans que la valeur K_1 soit altérée.

Supposons d'abord que les indices se partagent en deux groupes.

Soient α et β deux indices pris dans l'un des groupes et γ un indice pris dans l'autre groupe. Puisqu'on peut échanger entre eux deux de ces trois indices sans altérer la valeur K_1 et que l'indice γ ne peut être échangé avec l'un des deux autres, il est clair que la valeur K_1 ne sera pas altérée par la transposition (α, β). Par suite, cette valeur ne pourra être changée par aucune substitution opérée entre les indices d'un même groupe, mais elle sera nécessairement altérée par les transpositions ou substitutions qui feront passer dans un des groupes une partie des indices de l'autre; on peut même assurer que deux valeurs de K, pour lesquelles la composition des deux groupes sera différente, seront nécessairement inégales; car, si cela n'avait pas lieu, les valeurs de K relatives aux diverses manières dont on peut composer les deux groupes dont il s'agit seraient égales deux à deux, trois à trois, etc., ou toutes égales entre elles. L'une d'elles serait donc égale à la valeur K_1 de la fonction K et, relativement à cette même valeur, il y aurait plusieurs manières de composer les deux groupes, ce qui est absurde. Ainsi, pour obtenir les valeurs différentes, il suffira de faire passer successivement tous les indices d'un groupe dans l'autre ou d'échanger les deux groupes entre eux. Cela posé, on obtiendra les résultats suivants.

Si l'un des groupes est composé de cinq indices et l'autre d'un seul, comme on pourra faire passer successivement dans ce dernier groupe chacun des indices 1, 2, 3, 4, 5, 6, on obtiendra en tout six valeurs différentes de la fonction K.

Si l'un des groupes est composé de quatre indices et l'autre de deux, comme on pourra faire passer successivement dans ce dernier groupe toutes les combinaisons des six indices pris deux à deux, on obtiendra en tout quinze valeurs différentes de la fonction.

Enfin, si les deux groupes sont formés chacun de trois indices et qu'on ne puisse échanger ces deux groupes, en faisant passer successivement dans l'un d'eux toutes les combinaisons des indices pris trois à trois, on obtiendra en tout vingt valeurs différentes de la fonction donnée. Le nombre de ces valeurs deviendrait moitié moindre et se réduirait à dix si l'on pouvait échanger entre eux les deux groupes, c'est-à-dire substituer en même temps tous les indices du premier groupe à ceux du deuxième et réciproquement.

Ainsi, lorsque les indices peuvent être partagés en deux groupes, de telle manière que la transposition de deux indices renfermés dans un même groupe ne change pas la valeur K_1, le nombre des valeurs différentes que la fonction K peut recevoir est nécessairement un de ceux-ci

$$6,\quad 15,\quad 20,\quad 10.$$

Pour offrir des exemples de ces différents cas, il suffit de citer les quatre fonctions suivantes :

$$\begin{array}{ll} a_1a_2a_3a_4a_5 + & a_6, \\ a_1a_2a_3a_4 \quad + & a_5a_6, \\ a_1a_2a_3 \quad\quad + & 2a_4a_5a_6, \\ a_1a_2a_3 \quad\quad + & a_4a_5a_6. \end{array}$$

Dans chacune de ces fonctions, les indices se partagent en deux groupes lorsqu'on rassemble dans un même groupe ceux qui sont à la fois compris dans des transpositions ou substitutions circulaires du troisième degré qui ne changent pas la valeur de la fonction. Voyons maintenant ce qui arriverait si tous les indices se trouvaient alors renfermés dans un seul groupe.

Dans cette dernière hypothèse, étant donnée une substitution circulaire du deuxième ou du troisième degré qui ne change pas la valeur K_1 de la fonction K, on pourra toujours trouver une autre substitution de même espèce qui ne change pas cette valeur et qui ait un ou deux indices communs avec la première. Cela posé, il est facile de voir que toutes les transpositions opérées sur K_1, entre deux indices pris à volonté dans les deux substitutions dont il s'agit, conduiront à une même valeur de la fonction K. Et, en effet, si les deux substitutions dont il s'agit ont deux indices communs α et β, il pourra arriver, ou que l'une d'elles soit du deuxième degré et l'autre du troisième, ou qu'elles soient toutes deux du troisième degré. Dans le premier cas,

elles pourront être représentées par

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \beta & \gamma & \alpha \end{pmatrix},$$

γ étant un troisième indice et, puisque la deuxième ne change pas la valeur K_1, on prouvera, par un raisonnement semblable à ceux qu'on a déjà faits en pareille circonstance, que les trois substitutions ou transpositions

$$(\alpha, \beta),\quad (\alpha, \gamma),\quad (\beta, \gamma)$$

donnent la même valeur de K. Dans le deuxième cas, les deux substitutions données pourront être représentées par

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \beta & \gamma & \alpha \end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix} \alpha & \beta & \delta \\ \beta & \delta & \alpha \end{pmatrix},$$

γ et δ étant deux nouveaux indices. En vertu de la première, les trois transpositions

$$(\alpha, \beta),\quad (\alpha, \gamma),\quad (\beta, \gamma)$$

donneront la même valeur de K. En vertu de la deuxième, les trois transpositions

$$(\alpha, \beta),\quad (\alpha, \delta),\quad (\beta, \delta)$$

donneront aussi la même valeur de K et, comme la transposition (α, β) ne peut donner qu'une seule valeur de K, il en résulte que les cinq transpositions

$$(\alpha, \beta),\quad (\alpha, \gamma),\quad (\beta, \gamma),\quad (\alpha, \delta),\quad (\beta, \delta)$$

conduiront au même résultat.

Supposons maintenant que les deux substitutions données aient un seul indice commun. Il pourra arriver, ou que ces deux substitutions soient du deuxième degré, ou que l'une soit du deuxième degré et l'autre du troisième, ou que toutes deux soient du troisième degré.

Pour donner un exemple du premier cas, soient

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix} \alpha & \gamma \\ \gamma & \alpha \end{pmatrix}$$

deux substitutions qui ne changent pas la valeur K_1; ces deux substitutions équivalent aux deux transpositions (α, β) (α, γ) et, comme en vertu de la première on peut faire passer l'indice β à la place de l'indice α sans déplacer l'indice γ, il est clair que les indices β et γ jouiront respectivement des mêmes propriétés que les indices α et γ, en sorte que la transposition

$$(\beta, \gamma)$$

ne changera pas la valeur K_1.

Soient, dans le deuxième cas,

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \alpha & \gamma & \delta \\ \gamma & \delta & \alpha \end{pmatrix}$$

les deux substitutions données; on pourra, en opérant une ou deux fois de suite la deuxième substitution, faire passer successivement l'indice γ et l'indice δ à la place de l'indice α sans déplacer l'indice β. Par suite, les trois transpositions

$$(\alpha, \beta), \quad (\beta, \gamma), \quad (\beta, \delta)$$

ne changeront pas la valeur K_1, et l'on en conclura, comme dans le cas précédent, que les transpositions

$$(\alpha, \gamma), \quad (\alpha, \delta), \quad (\gamma, \delta)$$

ne la changeront pas non plus.

Enfin, soient, dans le troisième cas,

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \beta & \gamma & \alpha \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \alpha & \delta & \varepsilon \\ \delta & \varepsilon & \alpha \end{pmatrix}$$

les deux substitutions données; on pourra, en opérant une ou deux fois de suite la deuxième substitution, faire passer successivement les indices δ et ε à la place de l'indice α sans déplacer les indices β et γ, et l'on en conclura que les substitutions

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \beta & \gamma & \alpha \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \delta & \beta & \gamma \\ \beta & \gamma & \delta \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \varepsilon & \beta & \gamma \\ \beta & \gamma & \varepsilon \end{pmatrix}$$

ne changent pas la valeur K_1; par suite, les transpositions opérées entre deux quelconques des indices $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon$ donneront une même valeur de la fonction K.

Si l'on étend de proche en proche les raisonnements que l'on vient de faire aux indices compris dans les diverses substitutions qui, par hypothèse, ne changent pas la valeur K_1, on en conclura que les transpositions effectuées sur K_1 entre les six indices 1, 2, 3, 4, 5, 6, considérés deux à deux, conduisent toutes à une même valeur de la fonction K, que je désignerai par K_2; par suite, K_1 conservera la même valeur après un nombre pair de transpositions successives et sera changé en K_2 après un nombre impair de transpositions. La fonction aura donc deux valeurs si K_1 et K_2 sont différents l'un de l'autre; elle n'en aura qu'une seule, c'est-à-dire qu'elle deviendra symétrique, si l'on a

$$K_2 = K_1.$$

En résumant ce qui a été dit ci-dessus, on voit qu'une fonction du sixième ordre ne peut avoir moins de six valeurs, à moins que le nombre de ces valeurs ne devienne égal à 2 ou à l'unité.

Tous les théorèmes énoncés dans le présent Mémoire subsisteraient encore si quelques-unes des quantités renfermées dans les fonctions que l'on considère s'y trouvaient multipliées par zéro; mais alors ces dernières quantités venant à disparaître, il faudrait, pour déterminer l'ordre de chaque fonction, avoir égard, non pas au nombre des quantités qu'elle renferme, mais au nombre de ces quantités augmenté du nombre de celles qu'on peut substituer à leur place. Ainsi, par exemple, si l'on désigne par a_1, a_2, a_3, a_4 les quatre racines d'une équation du quatrième degré, la quantité

$$a_3 + a_4,$$

considérée comme une fonction de ces racines, sera du quatrième ordre, et cette fonction sera susceptible de six valeurs qui seront respectivement

$$a_1 + a_2, \quad a_1 + a_3, \quad a_1 + a_4, \quad a_2 + a_3, \quad a_2 + a_4, \quad a_3 + a_4.$$

Il ne sera peut-être pas inutile d'indiquer ici les conditions auxquelles une fonction doit satisfaire pour que le nombre de ses valeurs se réduise à 2. Soit K une fonction de cette nature et désignons par K_1, K_2 les deux valeurs dont il s'agit. Le nombre de ces valeurs étant égal à 2 et, par conséquent, inférieur à 6, si l'on partage en plusieurs groupes les indices contenus dans la fonction, de manière à renfermer dans un même groupe deux indices qui sont à la fois compris, soit dans une transposition, soit dans une substitution circulaire du troisième degré qui ne change pas la valeur K_1; on fera voir, comme ci-dessus, que, sur trois indices pris à volonté, deux au moins seront compris dans un même groupe, d'où il suit qu'on ne pourra former plus de deux groupes différents. D'ailleurs, en appliquant ici les raisonnements dont nous avons déjà fait usage, on prouvera que le nombre des groupes ne saurait être égal à 2, à moins que les diverses valeurs de la fonction, relatives aux différentes manières dont on peut composer ces deux groupes en faisant passer les indices de l'un dans l'autre, ne soient toutes inégales et, dans ce cas, le nombre des valeurs de la fonction serait nécessairement supérieur à 2, ce qui est contre l'hypothèse. Par suite, pour que cette hypothèse subsiste, il est nécessaire que tous les indices soient renfermés dans un seul groupe; d'où l'on peut conclure, au moyen de la théorie précédemment exposée, que K_1 doit conserver le même signe après un nombre pair de transpositions d'indices et se changer en K_2 après un nombre impair de transpositions. Ainsi, par exemple, toute fonction qui, comme la suivante,

$$(a_1-a_2)(a_1-a_3)\ldots(a_1-a_n)(a_2-a_3)\ldots(a_2-a_n)\ldots(a_{n-1}-a_n),$$

ne peut obtenir que deux valeurs égales et de signes contraires, conservera toujours le même signe après un nombre pair de transpositions d'indices et changera toujours de signe après un nombre impair de transpositions; d'où il suit que chacun de ses termes, soumis aux transpositions que l'on considère, recevra alternativement le signe + et le signe −.

MÉMOIRE

SUR LES

FONCTIONS QUI NE PEUVENT OBTENIR QUE DEUX VALEURS

ÉGALES ET DE SIGNES CONTRAIRES PAR SUITE DES TRANSPOSITIONS OPÉRÉES ENTRE LES VARIABLES QU'ELLES RENFERMENT (¹).

Journal de l'École Polytechnique, XVIIᵉ Cahier, Tome X, p. 29; 1815.

PREMIÈRE PARTIE.

CONSIDÉRATIONS GÉNÉRALES SUR LES FONCTIONS SYMÉTRIQUES ALTERNÉES.

§ Iᵉʳ. Après les fonctions qu'on appelle ordinairement *symétriques* et qui ne changent ni de valeur ni de signe, par suite des transpositions opérées entre les variables qu'elles renferment, les plus remarquables sont celles qui peuvent changer de signe, mais non pas de valeur, en vertu des mêmes transpositions. Lorsqu'on développe ces dernières, on les trouve composées de plusieurs termes alternativement positifs et négatifs et, pour les transformer en fonctions symétriques ordinaires, il suffirait de changer le signe des termes négatifs. En faveur de cette analogie, je comprendrai sous la dénomination commune de *fonctions symétriques* toutes les fonctions qui ne changent pas de valeur, mais tout au plus de signe en vertu de transpositions opérées entre les

(¹) Lu à l'Institut, le 30 novembre 1812.

variables qu'elles renferment, et, pour distinguer les fonctions dont les différents termes conservent le même signe après chaque transposition de celles dont les termes deviennent alternativement positifs et négatifs, j'appellerai les premières *fonctions symétriques permanentes* et les secondes *fonctions symétriques alternées*. Il suit du précédent Mémoire que ces deux espèces de fonctions sont les seules dont la valeur absolue ne change pas. Je partagerai encore ici les fonctions en plusieurs ordres, suivant le nombre des quantités qu'elles renferment, et je désignerai toujours par des lettres affectées d'indices, telles que

$$a_1,\quad a_2,\quad \ldots,\quad a_n,$$

les n variables que renferme une fonction symétrique de l'ordre n.

Cela posé, concevons les diverses suites de quantités

$$\begin{array}{llll} a_1, & a_2, & \ldots, & a_n, \\ b_1, & b_2, & \ldots, & b_n, \\ c_1, & c_2, & \ldots, & c_n, \\ \ldots, & \ldots, & \ldots, & \ldots \end{array}$$

tellement liées entre elles que la transposition de deux indices pris dans l'une des suites nécessite la même transposition dans toutes les autres; alors les quantités

$$b_1,\ c_1,\ \ldots,\ b_2,\ c_2,\ \ldots,\ b_3,\ c_3,\ \ldots$$

pourront être considérées comme des fonctions semblables de

$$a_1,\quad a_2,\quad a_3,\quad \ldots$$

et, par suite, les fonctions de

$$a_1,\ b_1,\ c_1,\ \ldots;\ a_2,\ b_2,\ c_2,\ \ldots;\ a_n,\ b_n,\ c_n,\ \ldots,$$

qui ne changeront pas de valeur, mais tout au plus de signe, en vertu de transpositions opérées entre les indices 1, 2, 3, ..., n, devront être rangées parmi les fonctions symétriques de $a_1, a_2, \ldots, a_n$ ou, ce qui

revient au même, des indices 1, 2, 3, ..., n. Ainsi

$$\begin{gathered} a_1^2 + a_2^2 + 4a_1a_2, \\ a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 + 2c_1c_2c_3, \\ a_1b_2 + a_2b_3 + a_3b_1 + a_2b_1 + a_1b_3 + a_3b_2, \\ \cos(a_1 - a_2)\cos(a_1 - a_3)\cos(a_2 - a_3) \end{gathered}$$

seront des fonctions symétriques permanentes, la première du deuxième ordre et les autres du troisième et, au contraire,

$$\begin{gathered} a_1b_2 + a_2b_3 + a_3b_1 - a_2b_1 - a_1b_3 - a_3b_2, \\ \sin(a_1 - a_2)\sin(a_1 - a_3)\sin(a_2 - a_3) \end{gathered}$$

seront des fonctions symétriques alternées du troisième ordre.

Lorsqu'une fonction n'est pas symétrique, elle peut obtenir un nombre déterminé de valeurs différentes les unes des autres, lorsque l'on échange entre elles les quantités qui la composent; mais alors la somme de ces valeurs est une fonction symétrique permanente, et si en ajoutant ces mêmes valeurs on leur donne alternativement le signe + et le signe −, suivant une loi que nous déterminerons ci-après, on obtiendra pour l'ordinaire une fonction symétrique alternée.

On peut généraliser cette définition des fonctions symétriques en supposant que non seulement on échange entre elles les quantités qui composent la fonction non symétrique dont il s'agit, mais qu'on les échange encore avec d'autres quantités qui ne soient pas comprises dans cette même fonction. Cela posé, on pourra considérer, en général, une fonction symétrique comme formée de plusieurs termes que l'on déduit les uns des autres par des transpositions opérées entre les quantités qu'elle renferme ou, ce qui revient au même, entre les indices qui affectent ces quantités, et l'on conçoit que, pour déterminer une fonction symétrique permanente ou alternée, il suffira de connaître, avec l'un de ses termes, le nombre d'indices qu'elle doit renfermer, c'est-à-dire l'ordre de la fonction donnée.

Il suit de ce qui précède que la théorie des fonctions symétriques doit embrasser deux espèces d'opérations différentes.

Les unes ont pour objet de déduire les uns des autres les termes de même espèce qui composent une fonction symétrique donnée. Ce sont les opérations que j'ai désignées dans le précédent Mémoire sous le nom de *substitutions* et de *transpositions*.

Les autres ont pour objet de déterminer une fonction symétrique permanente ou alternée, formée de plusieurs termes de même espèce, au moyen de l'un des termes dont il s'agit. J'indiquerai ces dernières opérations par le signe S et de la manière suivante :

Soit K une fonction non symétrique prise à volonté. Désignons par des lettres grecques, $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ les indices renfermés dans K, et soit m le nombre de ces indices; enfin, soit n un nombre entier quelconque supérieur ou égal au plus grand des indices dont il s'agit. La somme des valeurs différentes que l'on peut déduire de la fonction K par des transpositions opérées entre les indices $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ sera désignée par la notation

$$S(K)$$

et la somme des valeurs différentes que l'on déduira de la fonction K, si l'on échange les indices $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$, non seulement entre eux, mais encore avec les autres indices compris dans la suite

$$1, \quad 2, \quad 3, \quad \ldots, \quad n-1, \quad n,$$

sera désignée par la notation

$$S''(K).$$

Des deux fonctions symétriques permanentes $S(K)$, $S''(K)$, l'une renfermera seulement les indices $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$, l'autre renfermera tous les indices $1, 2, 3, \ldots, n$. La première sera de l'ordre m et la seconde de l'ordre n; elles deviendraient toutes deux égales entre elles si l'on supposait $m = n$; mais, dans tout autre cas, la première ne sera qu'une partie de la seconde.

Supposons maintenant, ce qui bientôt sera démontré possible, que les valeurs déduites de la fonction K par un nombre pair de transpositions opérées entre les indices $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ soient différentes des valeurs

déduites de la même fonction par un nombre impair de transpositions. Désignons les premières valeurs, entre lesquelles la fonction K se trouve comprise, par

$$K_\alpha, \quad K_\beta, \quad K_\gamma, \quad \ldots$$

et les autres valeurs par

$$K_\lambda, \quad K_\mu, \quad K_\nu, \quad \ldots;$$

l'expression

$$K_\alpha + K_\beta + K_\gamma + \ldots - K_\lambda - K_\mu - K_\nu - \ldots$$

sera une fonction symétrique alternée que je désignerai par

$$S(\pm K)$$

et

$$-K_\alpha - K_\beta - K_\gamma - \ldots + K_\lambda + K_\mu + K_\nu + \ldots$$

sera encore une fonction symétrique alternée égale, mais de signe contraire à la première, et que je désignerai par

$$S(\mp K).$$

De même, si les valeurs déduites de la fonction K par un nombre pair de transpositions opérées entre les indices $1, 2, 3, \ldots, n$ sont différentes des valeurs obtenues par un nombre impair de transpositions opérées entre les mêmes indices et que l'on représente par

$$K_\zeta, \quad K_\eta, \quad K_\theta, \quad \ldots$$

les premières valeurs dont il s'agit et les secondes par

$$K_\rho, \quad K_\sigma, \quad K_\tau, \quad \ldots;$$

les expressions

$$K_\zeta + K_\eta + K_\theta + \ldots - K_\rho - K_\sigma - K_\tau - \ldots$$

et

$$-K_\zeta - K_\eta - K_\theta - \ldots + K_\rho + K_\sigma + K_\tau + \ldots$$

seront deux fonctions symétriques égales, mais de signes contraires, que je désignerai respectivement par

$$S''(\pm K),$$
$$S''(\mp K).$$

Des deux fonctions symétriques alternées $S(\pm K)$, $S^n(\pm K)$, la première est de l'ordre m et la seconde de l'ordre n. Ces deux fonctions deviendraient égales entre elles si l'on avait $m = n$; mais, dans le cas contraire, la première ne sera qu'une partie de la seconde. Quant aux deux notations $S(\mp K)$, $S^n(\mp K)$, on les déduit évidemment des deux précédentes en y changeant le signe de K; d'où il suit que les quatre notations relatives aux fonctions symétriques alternées se réduisent effectivement à 2.

Si dans ce qui précède on suppose, pour abréger,

$$K_\alpha + K_\beta + K_\gamma + \ldots = E,$$
$$K_\lambda + K_\mu + K_\nu + \ldots = F,$$

chacune des fonctions E, F ne pourra obtenir que deux valeurs par suite des transpositions opérées entre les indices α, β, γ, ... compris dans la fonction K, et l'on aura

$$S(K) = E + F, \qquad S(\pm K) = -S(\mp K) = E - F.$$

De même, si l'on suppose

$$K_\zeta + K_\eta + K_\theta + \ldots = G,$$
$$K_\rho + K_\sigma + K_\tau + \ldots = H,$$

chacune des fonctions G, H ne pourra obtenir que deux valeurs par suite des transpositions opérées entre les indices 1, 2, 3, ..., n, et l'on aura

$$S^n(K) = G + H, \qquad S^n(\pm K) = -S^n(\mp K) = G - H.$$

Pour comprendre dans un seul exemple les quatre notations précédentes, supposons

$$K = a_1 b_2$$

et l'on trouvera, dans ce cas,

$$S(a_1 b_2) = a_1 b_2 + a_2 b_1,$$
$$S^3(a_1 b_2) = a_1 b_2 + a_2 b_3 + a_3 b_1 + a_2 b_1 + a_1 b_3 + a_3 b_2,$$
$$S(\pm a_1 b_2) = a_1 b_2 - a_2 b_1,$$
$$S^3(\pm a_1 b_2) = a_1 b_2 + a_2 b_3 + a_3 b_1 - a_2 b_1 - a_1 b_3 - a_3 b_2.$$

Pour représenter, au moyen des notations précédentes, une fonction symétrique permanente ou alternée, on n'est obligé d'écrire qu'un seul de ses termes. Je désignerai celui-ci sous le nom de *terme indicatif*, parce qu'il suffit pour indiquer la valeur de la fonction tout entière. Dans l'exemple précédent, $a_1 b_2$ est le terme indicatif des quatre fonctions symétriques

$$S(a_1 b_2), \quad S^3(a_1 b_2), \quad S(\pm a_1 b_2), \quad S^3(\pm a_1 b_2).$$

Au reste, on peut choisir pour terme indicatif un quelconque de ceux dont la fonction se compose. Seulement, lorsqu'il s'agit d'une fonction symétrique alternée, on doit placer le signe $\pm$ devant ce terme s'il se trouve affecté du signe $+$ dans le développement de la fonction donnée et le signe $\mp$ dans le cas contraire. On trouvera, de cette manière,

$$S(a_1 b_2) = S(a_2 b_1),$$
$$S^3(a_1 b_2) = S^3(a_2 b_1) = S^3(a_1 b_3) = \ldots,$$
$$S(\pm a_1 b_2) = S(\mp a_2 b_1),$$
$$S^3(\pm a_1 b_2) = S^3(\mp a_2 b_1) = S^3(\mp a_1 b_3) = \ldots.$$

§ II. Toute fonction K qui n'est pas symétrique peut devenir le terme indicatif d'une fonction symétrique permanente $S(K)$ ou $S^n(K)$. Si la fonction K est elle-même symétrique et permanente relativement aux indices qu'elle renferme, on aura

$$S(K) = K,$$

et si elle est symétrique et permanente relativement aux indices 1, 2, 3, ..., on aura

$$S^n(K) = K.$$

La même remarque ne peut pas s'étendre aux fonctions symétriques alternées, et pour qu'une fonction, qui n'est pas symétrique, puisse devenir le terme indicatif d'une fonction symétrique alternée, il est nécessaire qu'elle satisfasse à certaines conditions que nous allons déterminer tout à l'heure.

Soit toujours K une fonction quelconque non symétrique. Soient

$$\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \delta,\ \ldots,\ \zeta,\ \eta$$

les indices qu'elle renferme. Désignons par m le nombre de ces indices et par Q le produit

$$1.2.3\ldots..m.$$

On a fait voir, dans le précédent Mémoire, comment les diverses valeurs que l'on peut déduire de la fonction K, par des transpositions opérées entre les indices α, β, γ, δ, ..., ζ, η, correspondaient aux diverses permutations que l'on peut former avec ces mêmes indices et dont le nombre est égal à Q. Soient

$$A_1,\ A_2,\ A_3,\ \ldots,\ A_Q$$

les permutations dont il s'agit et désignons par

$$K_1,\ K_2,\ K_3,\ \ldots,\ K_Q$$

la série des valeurs K qui leur correspondent. La somme des valeurs inégales comprises dans cette série sera équivalente à la fonction symétrique permanente S(K). Mais, pour obtenir s'il y a lieu, au moyen des termes de la série, la fonction symétrique alternée $S(\pm K)$, il sera nécessaire d'établir une distinction entre les termes qui devront être considérés comme positifs et ceux qui devront être considérés comme négatifs. Par suite, on devra faire un partage entre les termes dont il s'agit ou, ce qui revient au même, entre les permutations

$$A_1,\ A_2,\ A_3,\ \ldots,\ A_Q$$

qui leur correspondent. On peut effectuer ce partage à l'aide des considérations suivantes :

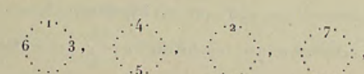
Soit A_t une quelconque des permutations formées avec les indices $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \ldots, \zeta, \eta$, et désignons comme à l'ordinaire par

$$\begin{pmatrix} A_1 \\ A_t \end{pmatrix}$$

la substitution qui sert à déduire la permutation A_t de la permutation A_1. Si cette substitution est du genre de celles que j'ai nommées *substitutions circulaires*, on pourra passer en revue tous les indices qu'elle renferme en comparant deux à deux les indices qui se correspondent dans ses deux termes et, dans ce cas, l'on pourra ranger en cercle tous les indices donnés $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$, de manière que deux indices pris dans le cercle à la suite l'un de l'autre, et d'orient en occident, soient toujours ceux qui sont situés l'un au-dessus de l'autre dans la substitution donnée, savoir : le premier dans le terme supérieur et le second dans le terme inférieur de cette substitution. Dans le cas contraire, si l'on compare deux à deux les indices correspondants en partant d'un indice déterminé pris dans le terme supérieur, on se trouvera ramené à cet indice avant d'avoir passé tous les autres en revue, et l'on sera ainsi conduit à ranger les indices donnés en plusieurs cercles et à former des cercles d'un seul indice toutes les fois qu'on trouvera dans les deux termes de la substitution des indices correspondants égaux entre eux. Alors la substitution $\begin{pmatrix} A_1 \\ A_t \end{pmatrix}$ sera équivalente au produit des substitutions circulaires correspondant à ces différents cercles. Ainsi, par exemple, si l'on suppose $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ respectivement égaux à 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 et que l'on suppose en outre

$$\begin{pmatrix} A_1 \\ A_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.2.3.4.5.6.7 \\ 3.2.6.5.4.1.7 \end{pmatrix},$$

on sera conduit, par la comparaison des indices correspondants pris dans les deux termes de la substitution précédente, à former les quatre cercles



dont les deux derniers ne comprennent qu'un seul indice. Par suite, la substitution donnée sera équivalente au produit des quatre substitutions circulaires

$$\begin{pmatrix} 1.3.6 \\ 3.6.1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 4.5 \\ 5.4 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 7 \\ 7 \end{pmatrix},$$

dont les deux dernières sont identiques, et l'on aura

$$\begin{pmatrix} 1.2.3.4.5.6.7 \\ 3.2.6.5.4.1.7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.3.6 \\ 3.6.1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4.5 \\ 5.4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 \\ 7 \end{pmatrix},$$

ce dont il est facile de s'assurer immédiatement.

Si l'on supposait $A_s = A_1$, la substitution $\begin{pmatrix} A_1 \\ A_s \end{pmatrix}$ deviendrait identique et, par suite, serait décomposable en autant de substitutions circulaires identiques qu'elle renferme d'indices. La comparaison des indices correspondants conduirait donc alors à former un nombre égal à m de cercles différents composés chacun d'un seul indice.

Si l'on suppose les deux permutations A_1, A_s différentes l'une de l'autre, le nombre des cercles obtenus par la méthode précédente sera inférieur à m. Désignons par g ce même nombre. Supposons, de plus, que la transposition de deux indices pris à volonté dans la permutation A_s change celle-ci en A_t, et soit h le nombre des cercles que l'on obtient par la comparaison des indices correspondants de la substitution

$$\begin{pmatrix} A_1 \\ A_t \end{pmatrix};$$

il est facile de prouver que l'on aura toujours

$$h = g \pm 1.$$

En effet, la transposition (α, β) qui, par hypothèse, change la permutation A_s en A_t, changera aussi la substitution $\begin{pmatrix} A_1 \\ A_s \end{pmatrix}$ en celle-ci $\begin{pmatrix} A_1 \\ A_t \end{pmatrix}$; d'ailleurs, cette transposition n'ayant évidemment aucune influence sur les cercles qui ne renferment ni l'indice α ni l'indice β, il suffira de considérer les cercles qui renferment les deux indices en question.

Cela posé, il peut arriver, ou que les indices α et β soient tous deux compris dans un des cercles relatifs à la substitution $\begin{pmatrix} A_1 \\ A_s \end{pmatrix}$, ou qu'ils soient compris dans deux cercles différents. Nous allons examiner chacun de ces deux cas séparément.

Supposons d'abord que les indices α et β soient compris dans un seul des cercles que fournit la décomposition de $\begin{pmatrix} A_1 \\ A_s \end{pmatrix}$ en substitutions circulaires, et soit

$$\begin{array}{ccc} & \alpha & \\ \zeta & & \gamma \\ \vdots & & \vdots \\ \varepsilon & & \delta \\ & \beta & \end{array}$$

le cercle dont il s'agit; alors $\begin{pmatrix} A_1 \\ A_s \end{pmatrix}$ sera équivalente au produit de plusieurs substitutions circulaires dont l'une sera

$$\begin{pmatrix} \alpha & \gamma & \dots & . & \delta & \beta & \varepsilon & \dots & . & \zeta \\ \gamma & . & \dots & \delta & \beta & \varepsilon & . & \dots & \zeta & \alpha \end{pmatrix}.$$

En vertu de la transposition (α, β) effectuée sur le second terme de la substitution $\begin{pmatrix} A_1 \\ A_s \end{pmatrix}$, la substitution circulaire dont il s'agit se changera dans la substitution suivante

$$\begin{pmatrix} \alpha & \gamma & \dots & . & \delta & \beta & \varepsilon & \dots & . & \zeta \\ \gamma & . & \dots & \delta & \alpha & \varepsilon & . & \dots & \zeta & \beta \end{pmatrix}$$

qui est elle-même décomposable en deux substitutions circulaires, savoir

$$\begin{pmatrix} \alpha & \gamma & \dots & . & \delta \\ \gamma & . & \dots & \delta & \alpha \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \beta & \varepsilon & \dots & . & \zeta \\ \varepsilon & . & \dots & \zeta & \beta \end{pmatrix}.$$

Ainsi, dans le cas que l'on considère, la transposition (α, β) décompose le cercle qui renferme les indices α et β en deux cercles distincts. La valeur de g se trouve donc par ce moyen augmentée d'une unité et, par suite, on a

$$h=g+1.$$

Supposons, en second lieu, que les indices α et β soient compris dans deux cercles différents, et soit

$$\begin{matrix} & \alpha & \\ \varepsilon & & \gamma \\ & \dots & \end{matrix}$$

le cercle qui renferme l'indice α et

$$\begin{matrix} & \beta & \\ \zeta & & \delta \\ & \dots & \end{matrix}$$

le cercle qui renferme l'indice β; alors, parmi les diverses substitutions circulaires dont le produit équivaut à $\begin{pmatrix} A_1 \\ A_s \end{pmatrix}$, se trouveront comprises les deux suivantes :

$$\begin{pmatrix} \alpha & \gamma & \dots & . & \varepsilon \\ \gamma & . & \dots & \varepsilon & \alpha \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \beta & \delta & \dots & . & \zeta \\ \delta & . & \dots & \zeta & \beta \end{pmatrix};$$

mais celles-ci, en vertu de la transposition (α, β) effectuée sur le second terme de la substitution $\begin{pmatrix} A_1 \\ A_s \end{pmatrix}$, se réuniront en une seule substitution circulaire qui sera

$$\begin{pmatrix} \alpha & \gamma & \dots & . & \varepsilon & \beta & \delta & \dots & . & \zeta \\ \gamma & . & \dots & \varepsilon & \beta & \delta & . & \dots & \zeta & \alpha \end{pmatrix}.$$

Ainsi, dans le second cas, le nombre des cercles relatifs à la substitution $\begin{pmatrix} A_1 \\ A_t \end{pmatrix}$ sera inférieur d'une unité au nombre des cercles relatifs à la substitution $\begin{pmatrix} A_1 \\ A_s \end{pmatrix}$, et l'on aura

$$h=g-1.$$

La démonstration précédente subsiste dans le cas même où chacun

des indices α, β formerait à lui seul un cercle. En effet, la substitution $\begin{pmatrix} A_1 \\ A_s \end{pmatrix}$ renfermerait alors les deux substitutions identiques $\begin{pmatrix} \alpha \\ \alpha \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} \beta \\ \beta \end{pmatrix}$ qui, en vertu de la transposition (α, β) opérée sur A_s, se trouveraient converties en une seule substitution circulaire, savoir

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix};$$

on aura donc toujours, ou $h=g+1$, ou $h=g-1$.

Par suite de la proposition qu'on vient d'établir, h sera nécessairement un nombre pair si g est un nombre impair, et réciproquement. Cela posé, partageons en deux classes toutes les substitutions qui ont pour termes deux permutations prises dans la suite

$$A_1, \quad A_2, \quad A_3, \quad \dots, \quad A_s,$$

de manière à renfermer dans l'une des classes toutes les substitutions qui correspondent à un nombre pair de cercles et, dans l'autre classe, toutes les substitutions qui correspondent à un nombre impair de cercles. Enfin, supposons que la première des deux classes soit celle qui renferme les substitutions identiques

$$\begin{pmatrix} A_1 \\ A_1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} A_2 \\ A_2 \end{pmatrix}, \quad \dots.$$

La substitution $\begin{pmatrix} A_1 \\ A_s \end{pmatrix}$ sera de première classe si m et g sont deux nombres pairs ou deux nombres impairs ou, ce qui revient au même, si $m-g$ est un nombre pair; la même substitution sera de seconde classe dans le cas contraire. Il suit de cette définition et du théorème démontré ci-dessus que, si l'on effectue sur le second terme d'une substitution de première classe plusieurs transpositions successives, les nouvelles substitutions obtenues par ce moyen seront alternativement de seconde et de première classe; de sorte qu'on obtiendra toujours une substitution de première classe après un nombre pair de transpositions et une substitution de seconde classe après un nombre impair de transpositions. Supposons, par exemple, que l'on ait déduit la substitution $\begin{pmatrix} A_s \\ A_t \end{pmatrix}$ de la substitution identique $\begin{pmatrix} A_s \\ A_s \end{pmatrix}$ au moyen de plusieurs transpositions opérées sur le second terme de cette dernière; le nombre de ces transpositions sera nécessairement pair si la substitution $\begin{pmatrix} A_s \\ A_t \end{pmatrix}$ est de première classe; il sera nécessairement impair dans le cas contraire. Ainsi, deux permutations A_s, A_t ne peuvent être déduites l'une de l'autre par un nombre pair de transpositions que dans le cas où la substitution qui les a pour termes est de première classe; elles ne peuvent être déduites l'une de l'autre par un nombre impair de transpositions que dans le cas où cette substitution est de seconde classe. Il est au reste indifférent de prendre pour premier terme de la substitution l'une ou l'autre des permutations dont il s'agit. En vertu de la remarque qu'on vient de faire, les permutations

$$A_1, \quad A_2, \quad A_3, \quad \ldots, \quad A_Q$$

se partageront naturellement en deux classes dont la première comprendra, par exemple, la permutation A_1 avec toutes celles que l'on peut en déduire par un nombre pair de transpositions, et dont la seconde renfermera toutes les autres. Le partage étant ainsi fait, on sera toujours obligé d'effectuer un nombre pair de transpositions pour déduire deux permutations l'une de l'autre si ces permutations sont comprises dans la même classe, et un nombre impair de transpositions si ces permutations sont respectivement comprises dans les deux classes que l'on considère. De plus, on reconnaîtra facilement si deux permutations données A_1, A_s sont de même classe ou de classes opposées à l'aide de la règle suivante :

Soit g le nombre des cercles résultant de la comparaison des indices qui se correspondent dans les deux termes de la substitution $\begin{pmatrix} A_1 \\ A_s \end{pmatrix}$. Les deux permutations A_1, A_s seront de même classe si $m-g$ est un nombre pair et de classes opposées dans le cas contraire.

Ainsi, par exemple, si les indices $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ sont respectivement égaux à 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, la substitution

$$\begin{pmatrix} 1.2.3.4.5.6.7 \\ 3.2.6.5.4.1.7 \end{pmatrix}$$

étant équivalente au produit de quatre substitutions circulaires, on aura

$$m=7, \qquad g=4, \qquad m-g=3$$

et, par suite, les deux permutations

$$1.2.3.4.5.6.7,$$
$$3.2.6.5.4.1.7$$

seront de classes opposées.

Désignons toujours par

$$K_1, \quad K_2, \quad \ldots, \quad K_Q$$

la série des valeurs de K qui correspondent aux diverses permutations des indices donnés et supposons $K_1 = K$. Les termes de la série précédente se partageront en deux classes distinctes ainsi que les permutations qui leur correspondent. La première classe renfermera le terme K et tous ceux que l'on peut en déduire par un nombre pair de transpositions; la seconde renfermera tous les termes que l'on peut déduire de K par un nombre impair de transpositions. Soient respectivement

$$K_\alpha, \quad K_\beta, \quad K_\gamma, \quad \ldots$$

les termes inégaux compris dans la première classe et

$$K_\lambda, \quad K_\mu, \quad K_\nu, \quad \ldots$$

les termes inégaux compris dans la seconde classe. Si les deux suites précédentes n'ont pas de termes qui leur soient communs, on aura

$$K_\alpha + K_\beta + K_\gamma + \ldots - K_\lambda - K_\mu - K_\nu - \ldots = S(\pm K).$$

Mais si deux termes, pris l'un dans la première suite, l'autre dans la seconde, par exemple K_α et K_λ, sont égaux entre eux, alors chacun des termes de la première suite deviendra égal à l'un des termes de la seconde. En effet, K_β étant un terme quelconque de la première suite différent de K_α, si l'on effectue simultanément sur les indices correspondants de ces deux termes un nombre impair de transpositions, au moyen desquelles K_α soit changé en K_λ, K_β se trouvera de cette manière changé en un terme K_μ de la seconde suite, et l'équation $K_\lambda = K_\alpha$ entraînera celle-ci : $K_\mu = K_\beta$. On démontre aisément cette proposition à l'aide des principes établis dans le précédent Mémoire. Cela posé, l'expression $S(\pm K)$, qui désignait en général une fonction symétrique alternée, se trouvera, dans l'hypothèse que l'on considère, réduite à zéro. Dans tout autre cas, cette expression aura une valeur algébrique déterminée. Ainsi, la seule condition nécessaire pour que la fonction K puisse devenir le terme indicatif d'une fonction symétrique alternée de la forme

$$S(\pm K)$$

est que deux valeurs de cette fonction, obtenues l'une par un nombre pair et l'autre par un nombre impair de transpositions des indices renfermés dans K, soient toujours différentes l'une de l'autre. Si les indices $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ renfermés dans K deviennent respectivement égaux à

$$1, \quad 2, \quad 3, \quad \ldots, \quad n$$

et si l'on suppose, en outre, que les quantités affectées de quelqu'un de ces indices puissent avoir zéro pour coefficient dans la fonction K, l'expression $S(\pm K)$ se trouvera transformée en celle-ci

$$S^n(\pm K)$$

et, par conséquent, la seule condition nécessaire pour qu'une fonction non symétrique puisse devenir le terme indicatif d'une fonction symé-

trique alternée de la forme $S^n(\pm K)$ est que deux valeurs de la fonction, obtenues l'une par un nombre pair de transpositions des indices $1, 2, 3, \ldots, n$, l'autre par un nombre impair de transpositions des mêmes indices, soient toujours différentes l'une de l'autre. Cette condition exige que le nombre des indices renfermés ostensiblement dans la fonction K soit égal à n ou à $n-1$. Si donc on représente à l'ordinaire par m le nombre de ces indices, on aura nécessairement

$$m = n - 1 \quad \text{ou} \quad m = n.$$

Dans ce dernier cas, les deux expressions $S(\pm K)$, $S^n(\pm K)$ deviennent équivalentes. Au reste, on pourra toujours reconnaître si deux termes pris à volonté dans une fonction symétrique alternée y sont affectés de même signe ou de signes contraires, au moyen de la règle qui sert à distinguer entre elles les permutations de première et de seconde classe. Ainsi, l'on pourra obtenir immédiatement le signe de chacun des termes en le comparant au terme indicatif.

§ III. D'après la définition que nous avons donnée des fonctions symétriques permanentes ou alternées, il est aisé de voir que le produit ou le quotient de deux fonctions symétriques alternées de l'ordre n est une fonction symétrique permanente de même ordre que les deux premières. Réciproquement, le produit ou le quotient de deux fonctions symétriques, l'une permanente et l'autre alternée, du même ordre est une fonction symétrique alternée de même ordre qu'elles.

Lorsque, dans une fonction symétrique alternée, on transpose deux indices α, β pris à volonté, la fonction changeant alors de signe, il est nécessaire que tous les termes positifs deviennent respectivement égaux à ceux qui étaient négatifs et réciproquement. Cela posé, concevons que l'on développe cette fonction suivant les puissances et les produits des quantités qu'elle renferme. Il suit de la remarque précédente : 1° que les termes positifs du développement seront en nombre égal à celui des termes négatifs; 2° que tous les termes qui ne changent pas de valeur par la transposition de deux indices pris à volonté disparaîtront nécessairement; 3° que si l'on remplace dans tous les termes l'indice α par l'indice β, sans remplacer en même temps l'indice β par l'indice α, la fonction symétrique alternée se trouvera réduite à zéro. En effet, de cette manière, on rendra équivalents entre eux les termes que l'on déduisait les uns des autres par la transposition (α, β), c'est-à-dire les termes positifs et les termes négatifs. Ainsi, par exemple, si, dans l'expression

$$S(\pm a_1 b_2) = a_1 b_2 - a_2 b_1$$

on remplace 2 par 1, cette expression deviendra

$$S(\pm a_1 b_1) = a_1 b_1 - a_1 b_1 = 0.$$

On peut encore déduire, des considérations précédentes, le théorème suivant :

Soit $S(\pm K)$ *une fonction symétrique alternée quelconque. Désignons par* $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ *les indices qu'elle renferme et par*

$$\begin{array}{llll} a_\alpha, & a_\beta, & a_\gamma, & \ldots, \\ b_\alpha, & b_\beta, & b_\gamma, & \ldots, \\ c_\alpha, & c_\beta, & c_\gamma, & \ldots, \\ \ldots, & \ldots, & \ldots, & \ldots \end{array}$$

les quantités qui, dans cette fonction, se trouvent affectées des indices $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$. *Si l'on remplace*

$$b_\alpha,\quad c_\alpha,\quad \ldots;\quad b_\beta,\quad c_\beta,\quad \ldots;\quad b_\gamma,\quad c_\gamma,\quad \ldots$$

par des fonctions semblables des quantités $a_\alpha, a_\beta, a_\gamma, \ldots$, *la fonction symétrique alternée deviendra divisible par chacune des quantités*

$$\begin{array}{l} a_\alpha - a_\beta, \\ a_\alpha - a_\gamma, \\ \ldots\ldots, \\ a_\beta - a_\gamma, \\ \ldots\ldots \end{array}$$

En effet, soient α et β deux indices pris à volonté. En vertu de ce qui précède, la fonction deviendra nulle si l'on suppose

$$a_\alpha = a_\beta.$$

Elle sera donc divisible par

$$a_\alpha - a_\beta.$$

Il suit de ce théorème que toute fonction symétrique alternée, qui ne renferme qu'une seule espèce de quantités telles que

$$a_\alpha,\quad a_\beta,\quad a_\gamma,\quad \ldots,$$

est divisible par les différences respectives des quantités dont il s'agit. Elle est donc aussi divisible par le produit de ces différences. Ainsi, par exemple, si l'on désigne par $p, q, r, \ldots$ des nombres entiers pris à volonté, la fonction symétrique alternée

$$S(\pm a_\alpha^p a_\beta^q a_\gamma^r \ldots)$$

sera toujours divisible par le produit

$$(a_\beta - a_\alpha)(a_\gamma - a_\alpha)\ldots(a_\beta - a_\gamma)\ldots.$$

Cette même fonction deviendrait nulle si deux des nombres $p, q, r, \ldots$ étaient égaux entre eux.

De même, $p, q, r, \ldots, s, t$ désignant des nombres entiers quelconques inégaux,

$$S^n(\pm a_1^p a_2^q a_3^r \ldots, a_{n-1}^s a_n^t)$$

sera une fonction symétrique alternée divisible par le produit

$$A = (a_2 - a_1)(a_3 - a_1)\ldots(a_n - a_1)(a_3 - a_2)\ldots(a_n - a_2)\ldots(a_n - a_{n-1}).$$

Si l'on suppose

$$p = 0,\quad q = 1,\quad r = 2,\quad \ldots,\quad s = n-2,\quad t = n-1,$$

la somme des exposants des lettres $a_1, a_2, \ldots, a_n$, dans chaque terme de la fonction symétrique alternée

$$S^n(\pm a_1^0 a_2^1 a_3^2 \ldots a_{n-1}^{n-2} a_n^{n-1}),$$

sera

$$0+1+2+\ldots+(n-2)+(n-1)=\frac{n(n-1)}{2}.$$

Mais les facteurs du produit A étant aussi en nombre égal à $\frac{n(n-1)}{2}$, la somme des exposants des lettres $a_1, a_2, \ldots, a_n$, dans chaque terme du développement de ce produit, sera encore égale à ce nombre; par suite, le quotient qu'on obtiendra, en divisant la fonction symétrique alternée par le produit, sera une quantité constante. Soit c la quantité dont il s'agit, on aura

$$S^n(\pm a_1^0 a_2^1 a_3^2 \ldots a_{n-1}^{n-2} a_n^{n-1}) = c\mathrm{A}.$$

Pour déterminer c on observera que le terme

$$a_1^0 a_2^1 a_3^2 \ldots a_{n-1}^{n-2} a_n^{n-1}$$

a pour coefficient l'unité dans la fonction donnée et dans le produit A; on doit donc avoir $c=1$ et, par suite, a_1^0 étant égal à 1,

$$(1)\quad \begin{cases} S^n(\pm a_2 a_3^2 \ldots a_{n-1}^{n-2} a_n^{n-1}) \\ \quad = (a_2-a_1)(a_3-a_1)\ldots(a_n-a_1)(a_3-a_2)\ldots(a_n-a_2)\ldots(a_n-a_{n-1}). \end{cases}$$

Ainsi, par exemple, si l'on suppose $n=3$, on trouvera

$$\begin{aligned} S^3(\pm a_2 a_3^2) &= a_2 a_3^2 + a_3 a_1^2 + a_1 a_2^2 - a_3 a_2^2 - a_2 a_1^2 - a_1 a_3^2 \\ &= (a_2-a_1)(a_3-a_1)(a_3-a_2). \end{aligned}$$

Cette dernière équation a été donnée par Vandermonde dans son Mémoire sur la résolution des équations.

Nous avons fait voir ci-dessus que la fonction symétrique alternée

$$S^n(\pm a_1^p a_2^q a_3^r \ldots a_{n-1}^s a_n^t)$$

était toujours divisible par le produit A. Elle sera donc aussi divisible par la fonction symétrique alternée

$$S^n(\pm a_2 a_3^2 \ldots a_{n-1}^{n-2} a_n^{n-1}).$$

Soit P le quotient; P sera nécessairement une fonction symétrique permanente des quantités $a_1, a_2, \ldots, a_n$ et l'on aura, en général,

$$(2)\qquad \frac{S^n(\pm a_1^p a_2^q a_3^r \ldots a_{n-1}^s a_n^t)}{S^n(\pm a_2 a_3^2 \ldots a_n^{n-1})} = \mathrm{P}.$$

Si dans l'équation précédente on suppose

$$p=0,\quad q=1,\quad r=2,\quad \ldots,\quad s=n-2,\quad t=n,$$

la fonction P sera nécessairement du premier degré par rapport aux quantités $a_1, a_2, \ldots, a_n$ et, comme elle doit être symétrique et permanente par rapport à ces quantités, on sera obligé de supposer P égale à

$$c(a_1+a_2+\ldots+a_n) = c\,S^n(a_1),$$

c étant une constante qui ne peut différer ici de l'unité; on aura donc, en général,

$$(3)\qquad S^n(\pm a_2 a_3^2 a_n^3 \ldots a_{n-1}^{n-2} a_n^n) = S^n(a_1)\,S^n(\pm a_2 a_3^2 a_n^3 \ldots a_{n-1}^{n-2} a_n^{n-1}).$$

Ainsi, par exemple, si l'on suppose $n=3$, on aura

$$\begin{aligned} & a_2 a_3^3 + a_3 a_1^3 + a_1 a_2^3 - a_3 a_2^3 - a_2 a_1^3 + a_1 a_3^3 \\ & \quad = (a_1+a_2+a_3)(a_2 a_3^2 + a_3 a_1^2 + a_1 a_2^2 - a_3 a_2^2 - a_2 a_1^2 - a_1 a_3^2) \\ & \quad = (a_1+a_2+a_3)(a_2-a_1)(a_3-a_1)(a_3-a_2). \end{aligned}$$

Si dans l'équation (2) on suppose

$$p=1,\quad q=2,\quad r=3,\quad \ldots,\quad s=n-1,\quad t=n,$$

on aura évidemment

$$\mathrm{P} = a_1 a_2 a_3 \ldots a_{n-1} a_n.$$

On a donc, en général,

$$(4)\quad \begin{cases} S^n(\pm a_1 a_2^2 a_3^3 \ldots a_{n-1}^{n-1} a_n^n) = S(\pm a_1 a_2^2 a_3^3 \ldots a_{n-1}^{n-1} a_n^n) \\ \quad = a_1 a_2 a_3 \ldots a_{n-1} a_n\, S^n(\pm a_2 a_3^2 \ldots a_{n-1}^{n-2} a_n^{n-1}) \\ \quad = a_1 a_2 a_3 \ldots a_{n-1} a_n (a_2-a_1)(a_3-a_1)\ldots(a_n-a_1)(a_3-a_2)\ldots(a_n-a_2)\ldots(a_n-a_{n-1}). \end{cases}$$

Ainsi, par exemple, en supposant $n=3$, on trouvera

$$a_1a_2^2a_3^3 + a_2a_3^2a_1^3 + a_3a_1^2a_2^3 - a_1a_3^2a_2^3 - a_3a_2^2a_1^3 - a_2a_1^2a_3^3$$
$$= a_1a_2a_3(a_2-a_1)(a_3-a_1)(a_3-a_2).$$

Lorsqu'on suppose $p=0$, $n=2$ et que l'on remplace les quantités a_1, a_2 par des lettres différentes x et y, l'équation (2) se réduit à

$$\frac{x^q-y^q}{x-y} = \mathrm{P};$$

d'où il suit que x^q-y^q est, en général, divisible par $x-y$.

De même, si l'on suppose $p=0$, $n=3$, on trouvera que

$$x^qy^r + y^qz^r + z^qx^r - x^ry^q - y^rz^q - z^rx^q$$

est toujours divisible par le produit

$$(x-y)(x-z)(y-z).$$

Etc., etc.

Pour être certain que deux fonctions symétriques alternées sont égales entre elles, il suffit de s'assurer : 1° que tous les termes renfermés dans la première sont aussi renfermés dans la seconde; 2° que ces termes ont les mêmes coefficients numériques dans l'une et dans l'autre; 3° qu'un des termes de la première a le même signe que le terme correspondant pris dans la seconde.

Je vais maintenant examiner particulièrement une certaine espèce de fonctions symétriques alternées qui s'offrent d'elles-mêmes dans un grand nombre de recherches analytiques. C'est au moyen de ces fonctions qu'on exprime les valeurs générales des inconnues que renferment plusieurs équations du premier degré. Elles se représentent toutes les fois qu'on a des équations de condition à former, ainsi que dans la théorie générale de l'élimination. MM. Laplace et Vandermonde les ont considérées sous ce rapport dans les *Mémoires de l'Académie des Sciences* (année 1772) et M. Bézout les a encore examinées depuis sous le même point de vue dans sa *Théorie des équations*. M. Gauss s'en est servi avec avantage dans ses *Recherches analytiques* pour découvrir

les propriétés générales des formes du second degré, c'est-à-dire des polynomes du second degré à deux ou à plusieurs variables, et il a désigné ces mêmes fonctions sous le nom de *déterminants*. Je conserverai cette dénomination qui fournit un moyen facile d'énoncer les résultats; j'observerai seulement qu'on donne aussi quelquefois aux fonctions dont il s'agit le nom de *résultantes* à deux ou à plusieurs lettres. Ainsi les deux expressions suivantes, *déterminant* et *résultante*, devront être regardées comme synonymes.

DEUXIÈME PARTIE.

DES FONCTIONS SYMÉTRIQUES ALTERNÉES DÉSIGNÉES SOUS LE NOM DE *DÉTERMINANTS*.

PREMIÈRE SECTION.

Des déterminants en général et des systèmes symétriques.

§ I$^{\text{er}}$. Soient $a_1, a_2, \ldots, a_n$ plusieurs quantités différentes en nombre égal à n. On a fait voir ci-dessus que, en multipliant le produit de ces quantités ou

$$a_1a_2a_3\ldots a_n$$

par le produit de leurs différences respectives, ou par

$$(a_2-a_1)(a_3-a_1)\ldots(a_n-a_1)(a_3-a_2)\ldots(a_n-a_2)\ldots(a_n-a_{n-1}),$$

on obtenait pour résultat la fonction symétrique alternée

$$\mathrm{S}(\pm a_1a_2^2a_3^3\ldots a_n^n)$$

qui, par conséquent, se trouve toujours égale au produit

$$a_1a_2a_3\ldots a_n(a_2-a_1)(a_3-a_1)\ldots(a_n-a_1)(a_3-a_2)\ldots(a_n-a_2)\ldots(a_n-a_{n-1}).$$

Supposons maintenant que l'on développe ce dernier produit et que, dans chaque terme du développement, on remplace l'exposant de chaque lettre par un second indice égal à l'exposant dont il s'agit; en écrivant, par exemple, $a_{r,s}$ au lieu de a_r^s et $a_{s,r}$ au lieu de a_s^r, on obtiendra pour résultat une nouvelle fonction symétrique alternée qui, au lieu d'être représentée par

$$S(\pm a_1^1 a_2^2 a_3^3 \ldots a_n^n),$$

sera représentée par

$$S(\pm a_{1,1} a_{2,2} a_{3,3} \ldots a_{n,n}),$$

le signe S étant relatif aux premiers indices de chaque lettre. Telle est la forme la plus générale des fonctions que je désignerai dans la suite sous le nom de *déterminants*. Si l'on suppose successivement

$$n = 1, \quad n = 2, \quad \ldots,$$

on trouvera

$$\begin{aligned}
S(\pm a_{1,1} a_{2,2}) &= a_{1,1} a_{2,2} - a_{2,1} a_{1,2}, \\
S(\pm a_{1,1} a_{2,2} a_{3,3}) &= a_{1,1} a_{2,2} a_{3,3} + a_{2,1} a_{3,2} a_{1,3} + a_{3,1} a_{1,2} a_{2,3} \\
&\quad - a_{1,1} a_{3,2} a_{2,3} - a_{3,1} a_{2,2} a_{1,3} - a_{2,1} a_{1,2} a_{3,3} \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

pour les déterminants du deuxième, du troisième ordre, etc. Les quantités affectées d'indices différents devant être généralement considérées comme inégales, on voit que le déterminant du deuxième ordre renfermera quatre quantités différentes, savoir :

$$\begin{matrix} a_{1,1}, & a_{1,2}, \\ a_{2,1}, & a_{2,2}, \end{matrix}$$

que le déterminant du troisième ordre en renfermera neuf, savoir :

$$\begin{matrix} a_{1,1}, & a_{1,2}, & a_{1,3}, \\ a_{2,1}, & a_{2,2}, & a_{2,3}, \\ a_{3,1}, & a_{3,2}, & a_{3,3}. \end{matrix}$$

Etc., etc.

En général, le déterminant du $n^{\text{ième}}$ ordre ou

$$S(\pm a_{1,1} a_{2,2} \ldots a_{n,n})$$

renfermera un nombre égal à n^2 de quantités différentes qui seront respectivement

$$(1) \qquad \left\{ \begin{matrix} a_{1,1}, & a_{1,2}, & a_{1,3}, & \ldots, & a_{1,n}, \\ a_{2,1}, & a_{2,2}, & a_{2,3}, & \ldots, & a_{2,n}, \\ a_{3,1}, & a_{3,2}, & a_{3,3}, & \ldots, & a_{3,n}, \\ \ldots, & \ldots, & \ldots, & \ldots, & \ldots, \\ a_{n,1}, & a_{n,2}, & a_{n,3}, & \ldots, & a_{n,n}. \end{matrix} \right.$$

Supposons ces mêmes quantités disposées en carré, comme on vient de le voir, sur un nombre égal à n de lignes horizontales et sur autant de colonnes verticales, de manière que, des deux indices qui affectent chaque quantité, le premier varie seul dans chaque colonne verticale et que le second varie seul dans chaque ligne horizontale, l'ensemble des quantités dont il s'agit formera un système que j'appellerai *système symétrique* de l'ordre n. Les quantités $a_{1,1}, a_{1,2}, \ldots, a_{2,2}, \ldots, a_{n,n}$ seront les différents termes du système et la lettre a, dépouillée d'accents, en sera la caractéristique. Enfin, les quantités comprises dans une même ligne, soit horizontale, soit verticale, seront en nombre égal à n et formeront une suite que j'appellerai, dans le premier cas, *suite horizontale* et, dans le second, *suite verticale*. L'indice de chaque suite sera celui qui reste invariable dans tous les termes de la suite. Ainsi, par exemple, les indices des suites horizontales et ceux des suites verticales du système (1) sont respectivement égaux à

$$1, \quad 2, \quad 3, \quad \ldots, \quad n.$$

J'appellerai *termes conjugués* ceux que l'on peut déduire l'un de l'autre par une transposition opérée entre le premier et le second indice; ainsi $a_{2,3}$ et $a_{3,2}$ sont deux termes conjugués. Il existe des termes qui sont eux-mêmes leurs conjugués. Ce sont les termes dans lesquels les deux indices sont égaux entre eux, savoir :

$$a_{1,1}, \quad a_{2,2}, \quad \ldots, \quad a_{n,n};$$

je les appellerai *termes principaux*; ils sont tous situés, dans le système (1), sur une diagonale du carré formé par le système.

Pour indiquer la relation qui existe entre le système (1) et le déterminant

$$S(\pm a_{1,1} a_{2,2} \ldots a_{n,n}),$$

je dirai que ce dernier appartient au système en question ou, ce qui revient au même, que la fonction symétrique alternée

$$S(\pm a_{1,1} a_{2,2} \ldots a_{n,n})$$

est le déterminant de ce système.

Pour obtenir le déterminant du système (1) il suffit, comme on l'a dit ci-dessus, de remplacer les exposants des lettres par des indices dans le développement du produit

$$a_1 a_2 a_3 \ldots a_n (a_2 - a_1)(a_3 - a_1) \ldots (a_n - a_{n-1}).$$

On peut aussi former directement le déterminant dont il s'agit à l'aide des considérations suivantes :

Chaque terme du déterminant

$$S(\pm a_{1,1} a_{2,2} \ldots a_{n,n})$$

est le produit de n quantités différentes. Les seconds indices qui affectent ces quantités sont respectivement égaux aux nombres

$$1, \quad 2, \quad 3, \quad \ldots, \quad n$$

que l'on peut considérer comme étant, dans tous les termes, disposés suivant l'ordre naturel. Quant aux premiers indices, ils sont encore égaux à ces mêmes nombres; mais l'ordre dans lequel ils se suivent varie d'un terme à l'autre et présente, dans les différents termes, toutes les permutations possibles des nombres

$$1, \quad 2, \quad 3, \quad \ldots, \quad n.$$

Il suit de ces considérations que, pour former chacun des termes dont il s'agit, il suffira de multiplier entre elles n quantités différentes prises respectivement dans les différentes colonnes verticales du système (1) et situées en même temps dans les diverses lignes horizon-

tales de ce système. Les produits que l'on pourra former de cette manière seront en nombre égal à celui des permutations possibles des indices 1, 2, 3, ..., n, c'est-à-dire en nombre égal au produit

$$1.2.3 \ldots . n;$$

je les appellerai *produits symétriques*. Le produit de tous les termes principaux du système (1), savoir :

$$a_{1,1}, \quad a_{2,2}, \quad a_{3,3}, \quad \ldots, \quad a_{n,n},$$

est évidemment un produit symétrique; il sera désigné sous le nom de *produit principal* et employé de préférence comme terme indicatif dans le déterminant du système. D'après la définition que nous avons donnée des notations $S(\pm K)$, $S(\mp K)$, le terme indicatif

$$a_{1,1} a_{2,2} a_{3,3} \ldots a_{n,n}$$

sera affecté du signe + dans le déterminant

$$S(\pm a_{1,1} a_{2,2} \ldots a_{n,n})$$

et du signe − dans le même déterminant pris en signe contraire, c'est-à-dire dans la fonction

$$S(\mp a_{1,1} a_{2,2} \ldots a_{n,n}).$$

Étant donné un produit symétrique quelconque, pour obtenir le signe dont il est affecté dans le déterminant

$$S(\pm a_{1,1} a_{2,2} \ldots a_{n,n}),$$

il suffira d'appliquer la règle qui sert à déterminer le signe d'un terme pris à volonté dans une fonction symétrique alternée. Soit

$$a_{\alpha,1} a_{\beta,2} \ldots a_{\zeta,n}$$

le produit symétrique dont il s'agit et désignons par g le nombre des substitutions circulaires équivalentes à la substitution

$$\begin{pmatrix} 1.2.3 \ldots . n \\ \alpha \beta \gamma \ldots \zeta \end{pmatrix}.$$

Ce produit devra être affecté du signe $+$ si $n-g$ est un nombre pair, et du signe $-$ dans le cas contraire.

Il est aisé de voir que la règle précédente subsisterait dans le cas même où l'on aurait interverti l'ordre des facteurs

$$a_{\alpha,1}, \quad a_{\beta,2}, \quad \ldots, \quad a_{\zeta,n}$$

ou, ce qui revient au même, l'ordre des indices compris dans les deux termes de la substitution

$$\begin{pmatrix} 1.2.3.\ldots..n \\ \alpha\,\beta\,\gamma\,\ldots\,\zeta \end{pmatrix},$$

pourvu que dans cette substitution on place toujours l'un au-dessus de l'autre les deux indices qui, dans le produit symétrique donné, affectent la même quantité.

Supposons, par exemple, $n=7$ et cherchons quel signe doit avoir, dans le déterminant

$$S(\pm a_{1,1}a_{2,2}a_{3,3}a_{4,4}a_{5,5}a_{6,6}a_{7,7}),$$

le produit symétrique

$$a_{1,3}a_{3,6}a_{6,1}a_{4,5}a_{5,4}a_{2,2}a_{7,7}.$$

La substitution que l'on obtient, par la comparaison des indices qui affectent en première et en seconde ligne chacun des facteurs du produit, est

$$\begin{pmatrix} 1.3.6.4.5.2.7 \\ 3.6.1.5.4.2.7 \end{pmatrix}$$

et cette substitution équivaut aux quatre substitutions circulaires

$$\begin{pmatrix} 1.3.6 \\ 3.6.1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 4.5 \\ 5.4 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 7 \\ 7 \end{pmatrix};$$

on a donc ici

$$g=4, \qquad n=7$$

et, par suite,

$$n-g=3.$$

Ce dernier nombre étant impair, le produit symétrique donné devra être affecté du signe $-$ dans le déterminant du septième ordre.

La règle précédente suppose que le produit principal $a_{1,1}a_{2,2}\ldots a_{n,n}$ est affecté du signe $+$; dans le cas contraire, il faudrait changer les signes de tous les termes. On peut encore déterminer le signe que doit avoir, dans le déterminant

$$S(\pm a_{1,1}a_{2,2}\ldots a_{n,n}),$$

un produit symétrique pris à volonté à l'aide d'une règle donnée par Gabriel Cramer dans un Appendice à l'*Analyse des lignes courbes* et que l'on peut énoncer de la manière suivante :

Soit toujours $a_{\alpha,1}a_{\beta,2}\ldots a_{\zeta,n}$ le produit symétrique donné et

$$\alpha\beta\gamma\ldots\zeta$$

la permutation formée avec les premiers indices des différents facteurs; enfin, soient

$$\begin{gathered} \beta-\alpha, \\ \gamma-\alpha, \\ \ldots\ldots, \\ \zeta-\alpha, \\ \gamma-\beta, \\ \ldots\ldots \end{gathered}$$

les différences respectives de ces mêmes indices considérés deux à deux de toutes les manières possibles et supposons que, en prenant la différence de deux indices, on donne toujours le signe $-$ à celui qui se présente le premier dans la permutation

$$\alpha\beta\gamma\ldots\zeta.$$

Le produit symétrique donné aura le même signe que le produit de toutes les différences, savoir :

$$(\beta-\alpha)(\gamma-\alpha)\ldots(\zeta-\alpha)(\gamma-\beta)\ldots.$$

On démontre facilement cette règle par ce qui précède, attendu qu'une transposition opérée entre deux indices change toujours, comme on l'a fait voir, le signe du produit

$$(a_\beta - a_\alpha)(a_\gamma - a_\alpha)\ldots(a_\zeta - a_\alpha)(a_\gamma - a_\beta)\ldots$$

et, par conséquent, celui du produit

$$(\beta - \alpha)(\gamma - \alpha)\ldots(\zeta - \alpha)(\gamma - \beta)\ldots$$

§ II. Si dans chacun des termes du système (1) on remplace le premier indice par le second, et réciproquement, on aura un nouveau système relativement auquel le premier indice restera invariable dans chaque suite verticale et le second indice dans chaque suite horizontale. Le système ainsi formé sera

$$(2)\qquad \left\{\begin{array}{lllll} a_{1,1}, & a_{2,1}, & a_{3,1}, & \ldots, & a_{n,1}, \\ a_{1,2}, & a_{2,2}, & a_{3,2}, & \ldots, & a_{n,2}, \\ a_{1,3}, & a_{2,3}, & a_{3,3}, & \ldots, & a_{n,3}, \\ \ldots, & \ldots, & \ldots, & \ldots, & \ldots, \\ a_{1,n}, & a_{2,n}, & a_{3,n}, & \ldots, & a_{n,n}. \end{array}\right.$$

Je dirai que les systèmes (1) et (2) sont respectivement conjugués l'un à l'autre. Pour abréger, je désignerai dorénavant chacun de ces deux systèmes par le dernier terme de la première suite horizontale renfermé entre deux parenthèses; ainsi le système (1) sera désigné par $(a_{1,n})$ et le système (2) par $(a_{n,1})$.

Les produits symétriques des systèmes $(a_{1,n})$ et $(a_{n,1})$ sont évidemment égaux entre eux. Le produit principal $a_{1,1}a_{2,2}\ldots a_{n,n}$ est aussi le même dans ces deux systèmes. Par suite, le déterminant du système $(a_{n,1})$ est égal à celui du système $(a_{1,n})$ ou à

$$S(\pm a_{1,1}a_{2,2}\ldots a_{n,n}),$$

le signe S étant toujours relatif aux premiers indices. Mais le déterminant du système $(a_{n,1})$ peut aussi être représenté par

$$S(\pm a_{1,1}a_{2,2}\ldots a_{n,n}),$$

le signe S étant relatif aux seconds indices; car on peut déduire le système $(a_{n,1})$ du système $(a_{1,n})$ et, par suite, le second déterminant du premier, en écrivant les premiers indices à la place des seconds et réciproquement. En conséquence, dans l'expression

$$S(\pm a_{1,1}a_{2,2}\ldots a_{n,n}),$$

on peut supposer indifféremment, ou que le signe S se rapporte aux premiers indices, ou qu'il se rapporte aux seconds, ce qui lève toute incertitude sur la valeur de l'expression dont il s'agit.

Si l'on échange entre elles deux suites horizontales ou deux suites verticales du système $(a_{1,n})$, de manière à faire passer dans une des suites tous les termes de l'autre et réciproquement, on obtiendra un nouveau système symétrique dont le déterminant sera évidemment égal mais de signe contraire à celui du système $(a_{1,n})$. Si l'on répète la même opération plusieurs fois de suite, on obtiendra divers systèmes symétriques dont les déterminants seront égaux entre eux, mais alternativement positifs et négatifs. On peut faire la même remarque à l'égard du système $(a_{n,1})$.

Si, au lieu de faire varier d'une colonne verticale à l'autre les seconds indices qui affectent les termes du système (1), on représentait par des lettres différentes, $a, b, c, \ldots, e, f$, les termes de ce système situés dans les diverses colonnes verticales, en ne conservant de variable que le premier indice, le système (1) se trouverait transformé dans le suivant :

$$(3)\qquad \left\{\begin{array}{llllll} a_1, & b_1, & c_1, & \ldots, & e_1, & f_1, \\ a_2, & b_2, & c_2, & \ldots, & e_2, & f_2, \\ \ldots, & \ldots, & \ldots, & \ldots, & \ldots, & \ldots, \\ a_n, & b_n, & c_n, & \ldots, & e_n, & f_n; \end{array}\right.$$

et son déterminant deviendrait égal à

$$S(\pm a_1 b_2 c_3 \ldots e_{n-1} f_n)$$

ou, ce qui revient au même, au produit

$$abc\ldots ef(b-a)(c-a)\ldots(f-a)(c-b)\ldots(f-b)\ldots(f-e),$$

dans le développement duquel on doit toujours remplacer les exposants des lettres par des indices.

§ III. Désignons maintenant par D_n le déterminant de l'ordre n ou celui des deux systèmes $(a_{1,n})$, $(a_{n,1})$, en sorte qu'on ait

$$D_n = S(\pm a_{1,1} a_{2,2} \ldots a_{n-1,n-1} a_{n,n}),$$

et supposons, pour fixer les idées, que le signe S soit relatif aux premiers indices, Le déterminant de l'ordre $n-1$ ou D_{n-1} sera donné par l'équation

$$D_{n-1} = S(\pm a_{1,1} a_{2,2} \ldots a_{n-1,n-1}).$$

Si l'on multiplie ce dernier par $a_{n,n}$, on aura la somme algébrique des produits symétriques qui, dans le déterminant D_n, ont pour facteur $a_{n,n}$, ces produits étant pris alternativement avec le signe $+$ et avec le signe $-$ dans la somme dont il s'agit. De plus, il est aisé de voir que ces mêmes produits sont affectés des mêmes signes dans le déterminant D_n et dans le déterminant D_{n-1} multiplié par $a_{n,n}$. En effet, le produit principal

$$a_{1,1} a_{2,2} a_{3,3} \ldots a_{n,n}$$

se trouve de part et d'autre affecté du signe $+$ et le signe de l'un quelconque des autres produits est déterminé, dans les deux cas, par le nombre des transpositions qu'on est obligé d'effectuer sur les premiers indices $1, 2, 3, \ldots, n-1$ pour le déduire du produit principal. Cela posé, l'expression

$$a_{n,n} S(\pm a_{1,1} a_{2,2} \ldots a_{n-1,n-1}),$$

considérée comme fonction des premiers indices $1, 2, 3, \ldots, n$, ne sera plus, en général, une fonction symétrique alternée. Mais si, dans cette même fonction, on transpose de toutes les manières possibles les indices dont il s'agit, elle obtiendra une série de valeurs dont plusieurs seront différentes entre elles, et si, de la somme des valeurs différentes obtenues par un nombre pair de transpositions, on retranche la somme des valeurs différentes obtenues par un nombre impair de transpo-

sitions, on aura une fonction symétrique alternée que l'on pourra désigner par

$$S[\pm a_{n,n} S(\pm a_{1,1} a_{2,2} a_{3,3} \ldots a_{n-1,n-1})],$$

le nouveau signe S étant toujours relatif aux premiers indices. Pour obtenir les diverses valeurs du produit

$$a_{n,n} S(\pm a_{1,1} a_{2,2} a_{3,3} \ldots a_{n-1,n-1}),$$

il suffira évidemment de changer successivement le premier indice n du facteur $a_{n,n}$ contre les indices $1, 2, 3, \ldots, n-1$ qui affectent en première ligne les quantités renfermées dans le second facteur

$$S(\pm a_{1,1} a_{2,2} a_{3,3} \ldots a_{n-1,n-1}).$$

Cela posé, le premier facteur deviendra successivement égal à chacune des quantités

$$a_{n,n}, \quad a_{n-1,n}, \quad a_{n-2,n}, \quad \ldots, \quad a_{2,n}, \quad a_{1,n};$$

et, si l'on représente respectivement par

$$b_{n,n}, \quad -b_{n-1,n}, \quad -b_{n-2,n}, \quad \ldots, \quad -b_{2,n}, \quad -b_{1,n},$$

les valeurs correspondantes du second facteur, on aura

$$\begin{aligned} &S[\pm a_{n,n} S(\pm a_{1,1} a_{2,2} \ldots a_{n-1,n-1})] \\ &\quad = a_{n,n} b_{n,n} + a_{n-1,n} b_{n-1,n} + \ldots + a_{2,n} b_{2,n} + a_{1,n} b_{1,n}. \end{aligned}$$

On aura d'ailleurs, par ce qui précède,

$$(4) \qquad \left\{ \begin{aligned} b_{n,n} &= S(\pm a_{1,1} a_{2,2} \ldots a_{n-1,n-1}) = D_{n-1}, \\ b_{n-1,n} &= S(\mp a_{1,1} a_{2,2} \ldots a_{n,n-1}), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ b_{2,n} &= S(\mp a_{1,1} a_{n,2} \ldots a_{n-1,n-1}), \\ b_{1,n} &= S(\mp a_{n,1} a_{2,2} \ldots a_{n-1,n-1}), \end{aligned} \right.$$

le signe S, dans toutes ces équations, pouvant être considéré comme relatif, soit aux premiers, soit aux seconds indices.

De ce qu'on vient de dire il est aisé de conclure que, si l'on développe la fonction symétrique alternée

$$S[\pm a_{n,n} S(\pm a_{1,1} a_{2,2} \ldots a_{n-1,n-1})],$$

tous les termes du développement seront des produits symétriques de l'ordre n qui auront l'unité pour coefficient. Ces termes seront donc respectivement égaux à ceux qu'on obtient en développant le déterminant

$$D_n = S(\pm a_{1,1} a_{2,2} \ldots a_{n,n}),$$

et comme le produit principal $a_{1,1} a_{2,2} \ldots a_{n,n}$ est positif de part et d'autre, on aura nécessairement

$$\begin{aligned} D_n &= S[\pm a_{n,n} S(\pm a_{1,1} a_{2,2} \ldots a_{n-1,n-1})] \\ &= a_{n,n} b_{n,n} + a_{n-1,n} b_{n-1,n} + \ldots + a_{2,n} b_{2,n} + a_{1,n} b_{1,n}. \end{aligned}$$

En général, si l'on désigne par μ l'un des indices $1, 2, 3, \ldots, n$, on trouvera de la même manière

$$D_n = S[\pm a_{\mu,\mu} S(\pm a_{1,1} a_{2,2} \ldots a_{\mu-1,\mu-1} a_{\mu+1,\mu+1} \ldots a_{n,n})].$$

Soit ν un autre indice différent de μ. Représentons par $b_{\mu,\mu}$ le coefficient du facteur $a_{\mu,\mu}$, dans le terme indicatif de la fonction symétrique alternée

$$S[\pm a_{\mu,\mu} S(\pm a_{1,1} a_{2,2} \ldots a_{\mu-1,\mu-1} a_{\mu+1,\mu+1} \ldots a_{n,n})]$$

et par $-b_{\nu,\mu}$ ce que devient $b_{\mu,\mu}$, lorsqu'on y remplace le premier indice ν par μ. Si l'on suppose successivement

$$\nu = 1, \quad \nu = 2, \quad \ldots, \quad \nu = \mu - 1, \quad \nu = \mu + 1, \quad \ldots, \quad \nu = n,$$

$b_{\mu,\mu}$ deviendra

$$-b_{1,\mu}, \quad -b_{2,\mu}, \quad \ldots, \quad -b_{\mu-1,\mu}, \quad -b_{\mu+1,\mu}, \quad \ldots, \quad -b_{n,\mu}$$

et la valeur de D_n sera donnée par l'équation

$$D_n = a_{1,\mu} b_{1,\mu} + a_{2,\mu} b_{2\mu} + \ldots + a_{\mu,\mu} b_{\mu,\mu} + \ldots + a_{n,\mu} b_{n,\mu}.$$

Si, dans cette équation, on donne successivement à μ toutes les valeurs

$$1, \quad 2, \quad 3, \quad \ldots, \quad n,$$

on obtiendra les équations suivantes :

$$(5) \qquad \begin{cases} D_n = a_{1,1} b_{1,1} + a_{2,1} b_{2,1} + \ldots + a_{n,1} b_{n,1}, \\ D_n = a_{1,2} b_{1,2} + a_{2,2} b_{2,2} + \ldots + a_{n,2} b_{n,2}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ D_n = a_{1,n} b_{1,n} + a_{2,n} b_{2,n} + \ldots + a_{n,n} b_{n,n}, \end{cases}$$

dans lesquelles on doit supposer, en général,

$$(6) \qquad \begin{cases} b_{\mu,\mu} = S(\pm a_{1,1} a_{2,2} \ldots a_{\mu-1,\mu-1} a_{\mu+1,\mu+1} \ldots a_{n,n}), \\ b_{\nu,\mu} = S(\mp a_{1,1} a_{2,2} \ldots a_{\mu-1,\mu-1} a_{\mu+1,\mu+1} \ldots a_{\nu-1,\nu-1} a_{\mu,\nu} a_{\nu+1,\nu+1} \ldots a_{n,n}). \end{cases}$$

Les quantités $b_{1,1}, b_{1,2}, \ldots$ sont, dans les équations précédentes, en nombre égal à celui des quantités $a_{1,1}, a_{1,2}, \ldots$ qu'elles multiplient, c'est-à-dire en nombre égal à n^2. Elles peuvent donc être disposées en carré, de manière à former deux nouveaux systèmes de l'ordre n qui soient respectivement conjugués l'un à l'autre. L'un de ces systèmes sera le suivant :

$$(7) \qquad \begin{cases} b_{1,1}, & b_{1,2}, & \ldots, & b_{1,n}, \\ b_{2,1}, & b_{2,2}, & \ldots, & b_{2,n}, \\ \ldots, & \ldots, & \ldots, & \ldots, \\ b_{n,1}, & b_{n,2}, & \ldots, & b_{n,n}, \end{cases}$$

que je désignerai par $(b_{1,n})$ d'après les conventions établies; en remplaçant dans celui-ci les premiers indices par les seconds et réciproquement, on obtiendra l'autre système qui sera représenté par $(b_{n,1})$.

Après avoir désigné sous le nom de *forme ternaire* un polynome homogène du second degré à trois variables, M. Gauss a nommé *forme adjointe* un second polynome dont les coefficients ont avec ceux du premier les relations qu'on vient de remarquer entre les termes du système $(b_{n,1})$ et ceux du système $(a_{n,1})$. Je suivrai cette dénomination et, lorsque j'aurai à comparer entre elles les quantités

$$a_{1,1}, \quad a_{1,2}, \quad \ldots \quad \text{et} \quad b_{1,1}, \quad b_{1,2}, \quad \ldots,$$

je dirai que les secondes sont adjointes aux premières; de sorte que, en général, la quantité adjointe à $a_{\mu,\mu}$ sera $b_{\mu,\mu}$ et la quantité adjointe à $a_{\mu,\nu}$ sera $b_{\mu,\nu}$. Par la même raison, le système $(b_{1,n})$ sera dit *adjoint au système* $(a_{1,n})$ et le système $(b_{n,1})$ *adjoint au système* $(a_{n,1})$. Le système $(b_{n,1})$ sera en même temps adjoint et conjugué au système $(a_{1,n})$.

La quantité $b_{n,n}$ adjointe à $a_{n,n}$ est toujours égale au déterminant de l'ordre $n-1$ ou à

$$S(\pm a_{1,1}a_{2,2}\ldots a_{n-1,n-1}).$$

Pour déduire de cette expression la valeur de $b_{\mu,\mu}$, il suffira de remplacer dans ce déterminant ou, ce qui revient au même, dans tous les termes du système de l'ordre $n-1$, le premier indice égal à μ par un autre indice égal à n et le second indice égal à μ par un autre indice égal à n. Enfin, pour transformer $b_{\mu,\mu}$ en $b_{\nu,\mu}$, il suffira de remplacer encore le premier indice égal à ν par un autre indice égal à μ et de changer le signe du résultat. Il suit de ces considérations que, pour obtenir au signe près la quantité $b_{\mu,\nu}$ adjointe à $a_{\mu,\nu}$, il suffit de convertir le système $(a_{1,n})$ de l'ordre n en un système de l'ordre $n-1$ par la suppression de tous les termes situés dans la même ligne horizontale ou dans la même ligne verticale que $a_{\mu,\nu}$ et de former le déterminant du nouveau système dont il s'agit. Ce déterminant serait de même valeur et de même signe que $b_{\mu,\mu}$ si l'on supposait $\nu=\mu$.

Dans l'équation

$$D_n = S(\pm a_{1,1}a_{2,2}\ldots a_{n,n})$$

on peut indifféremment considérer le signe S comme relatif, soit aux premiers, soit aux seconds indices; d'ailleurs on a fait voir, dans la première Partie de ce Mémoire, que toute fonction symétrique alternée devient nulle lorsqu'on y remplace un indice par un autre indice; D_n se réduira donc à zéro si, dans l'expression de ce déterminant, on remplace un des indices qui occupent la seconde place par un autre indice, par exemple si l'on remplace les termes

$$a_{1,\mu},\quad a_{2,\mu},\quad \ldots,\quad a_{n,\mu}$$

par

$$a_{1,\nu},\quad a_{2,\nu},\quad \ldots,\quad a_{n,\nu},$$

ν étant différent de μ. D'ailleurs, la valeur de D_n, exprimée au moyen

des termes $a_{1,\mu}, a_{2,\mu}, \ldots, a_{n,\mu}$, est, par ce qui précède,

$$(8)\qquad D_n = a_{1,\mu}b_{1,\mu} + a_{2,\mu}b_{2,\mu} + \ldots + a_{n,\mu}b_{n,\mu};$$

on aura donc généralement

$$(9)\qquad o = a_{1,\nu}b_{1,\mu} + a_{2,\nu}b_{2,\mu} + \ldots + a_{n,\nu}b_{n,\mu}.$$

Cette dernière équation sera satisfaite toutes les fois que ν et μ seront deux nombres différents l'un de l'autre.

Si l'on donne successivement à μ et à ν, dans les équations (8) et (9), toutes les valeurs entières, depuis 1 jusqu'à n, on aura le système d'équations suivant :

$$(10)\qquad \left\{\begin{array}{l}
D_n = a_{1,1}b_{1,1} + a_{2,1}b_{2,1} + \ldots + a_{n,1}b_{n,1},\\
o = a_{1,1}b_{1,2} + a_{2,1}b_{2,2} + \ldots + a_{n,1}b_{n,2},\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
o = a_{1,1}b_{1,n} + a_{2,1}b_{2,n} + \ldots + a_{n,1}b_{n,n};\\
o = a_{1,2}b_{1,1} + a_{2,2}b_{2,1} + \ldots + a_{n,2}b_{n,1},\\
D_n = a_{1,2}b_{1,2} + a_{2,2}b_{2,2} + \ldots + a_{n,2}b_{n,2},\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
o = a_{1,2}b_{1,n} + a_{2,2}b_{2,n} + \ldots + a_{n,2}b_{n,n};\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots;\\
o = a_{1,n}b_{1,1} + a_{2,n}b_{2,1} + \ldots + a_{n,n}b_{n,1},\\
o = a_{1,n}b_{1,2} + a_{2,n}b_{2,2} + \ldots + a_{n,n}b_{n,2},\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
D_n = a_{1,n}b_{1,n} + a_{2,n}b_{2,n} + \ldots + a_{n,n}b_{n,n}.
\end{array}\right.$$

Si l'on désigne, en général,

$$a_{1,\mu}b_{1,\mu} + a_{2,\mu}b_{2,\mu} + \ldots + a_{n,\mu}b_{n,\mu}$$

par

$$S^n(a_{1,\mu}b_{1,\mu})$$

et

$$a_{1,\nu}b_{1,\mu} + a_{2,\nu}b_{2,\mu} + \ldots + a_{n,\nu}b_{n,\mu}$$

par

$$S^n(a_{1,\nu}b_{1,\mu}),$$

le signe S étant, dans les deux cas, relatif aux indices 1 qui occupent la première place, on pourra mettre les équations (10) sous la forme suivante :

$$(11)\quad \begin{cases} D_n = S^n(a_{1,1}\,b_{1,1}), & o = S^n(a_{1,1}\,b_{1,2}), & \ldots, & o = S^n(a_{1,1}\,b_{1,n}), \\ o = S^n(a_{1,2}\,b_{1,1}), & D_n = S^n(a_{1,2}\,b_{1,2}), & \ldots, & o = S^n(a_{1,2}\,b_{1,n}), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots, & \ldots\ldots\ldots\ldots, & \ldots, & \ldots\ldots\ldots\ldots, \\ o = S^n(a_{1,n}\,b_{1,1}), & o = S^n(a_{1,n}\,b_{1,2}), & \ldots, & D_n = S^n(a_{1,n}\,b_{1,n}); \end{cases}$$

et les formules générales (8) et (9) deviendront

$$(12)\quad \begin{cases} D_n = S^n(a_{1,\mu}\,b_{1,\mu}), \\ o = S^n(a_{1,\nu}\,b_{1,\mu}). \end{cases}$$

La seconde des équations (6), ou

$$b_{\nu,\mu} = S(\mp a_{1,1}\,a_{2,2}\ldots a_{\mu-1,\mu-1}\,a_{\mu+1,\mu+1}\ldots a_{\nu-1,\nu-1}\,a_{\mu,\nu}\,a_{\nu+1,\nu+1}\ldots a_{n,n}),$$

ayant lieu toutes les fois que μ et ν sont différents l'un de l'autre, elle subsistera encore si l'on y change μ en ν et ν en μ; on aura donc

$$b_{\mu,\nu} = S(\mp a_{1,1}\,a_{2,2}\ldots a_{\nu-1,\nu-1}\,a_{\nu+1,\nu+1}\ldots a_{\mu-1,\mu-1}\,a_{\nu,\mu}\,a_{\mu+1,\mu+1}\ldots a_{n,n}).$$

Si l'on compare entre elles les deux valeurs précédentes de $b_{\nu,\mu}$ et de $b_{\mu,\nu}$, on trouvera que, pour déduire l'une de l'autre, il suffit d'échanger entre eux les indices qui occupent la première et la seconde place dans les termes du système $(a_{1,n})$. Il en résulte que les relations établies par les équations (8) et (9) entre les termes du système $(a_{1,n})$ et les termes du système adjoint $(b_{1,n})$ subsisteront encore si l'on échange entre elles, dans ces deux équations, les deux espèces d'indices; on aura donc aussi

$$(13)\quad D_n = a_{\mu,1}\,b_{\mu,1} + a_{\mu,}\,b_{\mu,2} + \ldots + a_{\mu,n}\,b_{\mu,n},$$

$$(14)\quad o = a_{\nu,1}\,b_{\mu,1} + a_{\nu,2}\,b_{\mu,2} + \ldots + a_{\nu,n}\,b_{\mu,n},$$

les indices μ et ν étant censés inégaux.

On peut encore mettre ces deux dernières équations sous la forme suivante :

$$(15)\quad \begin{cases} D_n = S^n(a_{\mu,1}\,b_{\mu,1}), \\ o = S^n(a_{\nu,1}\,b_{\mu,1}), \end{cases}$$

le signe S étant relatif aux indices 1 qui occupent la seconde place.

En donnant à μ et à ν, dans les équations (13) et (14), toutes les valeurs entières depuis 1 jusqu'à n, on obtiendrait un système d'équations semblable au système (10). On peut déduire immédiatement ce second système d'équations du premier, en remplaçant dans celui-ci les termes des systèmes symétriques $(a_{1,n})$, $(b_{1,n})$ par les termes correspondants des systèmes conjugués $(a_{n,1})$, $(b_{n,1})$. On pourrait encore donner au nouveau système d'équations dont il s'agit la forme (11) et il suffirait pour cela d'employer les équations (15) au lieu des équations (13) et (14).

Si dans le système de quantités $(a_{1,n})$ on supprime la dernière suite horizontale et la dernière suite verticale, on aura le système suivant :

$$(16)\quad \begin{cases} a_{1,1}, & a_{1,2}, & \ldots, & a_{1,n-1}, \\ a_{2,1}, & a_{2,2}, & \ldots, & a_{2,n-1}, \\ \ldots, & \ldots, & \ldots, & \ldots\ldots, \\ a_{n-1,1}, & a_{n-1,2}, & \ldots, & a_{n-1,n-1}, \end{cases}$$

que je désignerai à l'ordinaire par $(a_{1,n-1})$.

Soit maintenant $(e_{1,n-1})$ le système adjoint au précédent. Si dans l'équation (13) on change b en e et n en $n-1$, on aura, en général,

$$(17)\quad D_{n,1} = b_{n,n} = a_{\mu,1}\,e_{\mu,1} + a_{\mu,2}\,e_{\mu,2} + \ldots + a_{\mu,n-1}\,e_{\mu,n-1}.$$

Pour déduire de cette dernière équation la valeur de $b_{\mu,n}$ il suffira, en vertu des règles établies, de changer $a_{\mu,\nu}$ en $a_{n,\nu}$ dans l'expression précédente de $b_{n,n}$ et de changer en outre le signe du second membre; on aura donc généralement

$$(18)\quad b_{\mu,n} = -(a_{n,1}\,e_{\mu,1} + a_{n,2}\,e_{\mu,2} + \ldots + a_{n,n-1}\,e_{\mu,n-1}).$$

Si dans cette équation on donne successivement à μ toutes les valeurs entières depuis 1 jusqu'à $n-1$ et que l'on substitue les valeurs qui en résulteront pour $b_{1,n}$, $b_{2,n}$, ..., $b_{n-1,n}$ dans l'équation

$$D_n = a_{1,n}\,b_{1,n} + a_{2,n}\,b_{2,n} + \ldots + a_{n,n}\,b_{n,n},$$

on obtiendra la formule suivante :

$$\begin{aligned}D_n = a_{n,n} b_{n,n} - [&a_{1,n} a_{n,1} e_{1,1} + a_{2,n} a_{n,2} e_{2,2} + \ldots + a_{n-1,n} a_{n,n-1} e_{n-1,n-1}\\ &+ a_{1,n}(a_{n,2} e_{1,2} + a_{n,3} e_{1,3} + \ldots + a_{n,n-1} e_{1,n-1})\\ &+ a_{2,n}(a_{n,1} e_{2,1} + a_{n,3} e_{2,3} + \ldots + a_{n,n-1} e_{2,n-1})\\ &+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ &+ a_{n-1,n}(a_{n,1} e_{n-1,1} + a_{n,2} a_{n-1,2} + \ldots + a_{n,n-2} e_{n-1,n-2})].\end{aligned}$$

Cette équation peut être mise sous la forme

$$D_n = a_{n,n} D_{n,1} - S^{n-1} S^{n-1}(a_{\nu,n} a_{n,\mu} e_{\nu,\mu}), \tag{19}$$

les deux signes S étant relatifs, le premier à l'indice μ et le second à l'indice ν. M. Gauss a employé avec avantage, dans ses *Recherches arithmétiques*, une formule qui n'est qu'un cas particulier de celle-ci.

§ IV. Les principaux théorèmes compris dans le paragraphe précédent ont été démontrés pour la première fois, d'une manière générale, par M. Laplace, dans les *Mémoires de l'Académie des Sciences* de l'année 1772 (seconde Partie). Il a fait voir comment on pouvait les appliquer à la recherche des valeurs des inconnues que renferment plusieurs équations du premier degré. Soient

$$x_1, \quad x_2, \quad \ldots, \quad x_n$$

les inconnues dont il s'agit en nombre égal à n. Supposons que l'on ait entre elles autant d'équations du premier degré et que les coefficients des inconnues y soient représentés respectivement par les différents termes du système $(a_{1,n})$. Les équations dont il s'agit seront de la forme

$$\left\{\begin{aligned}&a_{1,1} x_1 + a_{1,2} x_2 + \ldots + a_{1,n} x_n = m_1,\\ &a_{2,1} x_1 + a_{2,2} x_2 + \ldots + a_{2,n} x_n = m_2,\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\ &a_{n,1} x_1 + a_{n,2} x_2 + \ldots + a_{n,n} x_n = m_n.\end{aligned}\right. \tag{20}$$

Cela posé, les relations établies par les équations (10) entre les termes du système $(a_{1,n})$ et ceux du système adjoint $(b_{1,n})$ fournissent un moyen facile d'obtenir la valeur d'une inconnue prise à volonté. Ainsi,

par exemple, si l'on multiplie la première des équations (20) par $b_{1,1}$, la deuxième par $b_{2,1}$, ..., enfin la dernière par $b_{n,1}$, et qu'on les ajoute entre elles en ayant égard aux équations (10), on aura, pour déterminer la valeur de x_1, l'équation suivante :

$$D_n x_1 = m_1 b_{1,1} + m_2 b_{2,1} + \ldots + m_n b_{n,1}.$$

En général, si l'on multiplie la première des équations (20) par $b_{1,\mu}$, la deuxième par $b_{2,\mu}$, ..., enfin la dernière par $b_{n,\mu}$, et qu'ensuite on les ajoute entre elles, on aura, en vertu des équations (10),

$$D_n x_\mu = m_1 b_{1,\mu} + m_2 b_{2,\mu} + \ldots + m_n b_{n,\mu}. \tag{21}$$

Par suite, la valeur générale de l'une quelconque des inconnues sera

$$x_\mu = \frac{m_1 b_{1,\mu} + m_2 b_{2,\mu} + \ldots + m_n b_{n,\mu}}{D_n} = \frac{m_1 b_{1,\mu} + m_2 b_{2,\mu} + \ldots + m_n b_{n,\mu}}{a_{1,\mu} b_{1,\mu} + a_{2,\mu} b_{2,\mu} + \ldots + a_{n,\mu} b_{n,\mu}}.$$

Cette valeur se présente donc sous la forme d'une fraction qui a pour dénominateur le déterminant

$$D_n = S(\pm a_{1,1} a_{2,2} \ldots a_{n,n})$$

et pour numérateur ce que devient ce déterminant quand on y remplace les coefficients de l'inconnue pris dans les équations (20) par les seconds membres de ces mêmes équations.

Si les coefficients des diverses inconnues dans les équations (20), au lieu d'être représentés par une seule lettre affectée de deux indices, étaient représentés par diverses lettres a, b, c, ..., e, f affectées de l'indice 1 dans la première équation, de l'indice 2 dans la deuxième, ..., les équations données étant alors

$$\left\{\begin{aligned}&a_1 x_1 + b_1 x_2 + c_1 x_3 + \ldots + e_1 x_{n-1} + f_1 x_n = m_1,\\ &a_2 x_1 + b_2 x_2 + c_2 x_3 + \ldots + e_2 x_{n-1} + f_2 x_n = m_2,\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\ &a_n x_1 + b_n x_2 + c_n x_3 + \ldots + e_n x_{n-1} + f_n x_n = m_n,\end{aligned}\right. \tag{A}$$

la valeur d'une inconnue aurait pour dénominateur la fonction symétrique alternée

$$S(\pm a_1 b_2 c_3 \ldots e_{n-1} f_n)$$

et pour numérateur ce que devient cette fonction lorsqu'on y substitue la lettre m à celle qui désigne les coefficients de l'inconnue. Ainsi, par exemple, la valeur de x_1 serait donnée par l'équation

$$(\mathrm{B}) \qquad x_1 = \frac{\mathrm{S}(\pm m_1 b_2 c_3 \ldots e_{n-1} f_n)}{\mathrm{S}(\pm a_1 b_2 c_3 \ldots e_{n-1} f_n)}.$$

Tel est le résultat auquel M. Laplace est parvenu. Il a fait voir aussi que deux termes déduits l'un de l'autre par un nombre impair de transpositions étaient toujours de signes contraires et a démontré par ce moyen la règle de Cramer que nous avons rapportée ci-dessus. Enfin il a prouvé qu'une transposition opérée entre deux des lettres $a, b, c, \ldots$ changeait le signe de la fonction

$$\mathrm{S}(\pm a_1 b_2 \ldots e_{n-1} f_n)$$

et a donné les moyens de la décomposer en d'autres fonctions semblables d'un ordre inférieur. Nous reviendrons plus tard sur ce dernier objet.

On peut encore, en vertu du paragraphe II, mettre la valeur de x_1 sous la forme suivante :

$$(\mathrm{C}) \quad x_1 = \frac{mbc\ldots ef(b-m)(c-m)\ldots(f-m)(c-b)\ldots(f-b)\ldots(f-e)}{abc\ldots ef(b-a)(c-a)\ldots(f-a)(c-b)\ldots(f-b)\ldots(f-e)},$$

pourvu que, après avoir développé séparément le numérateur et le dénominateur de la fraction précédente, on remplace les exposants des lettres par des indices.

Si l'on suppose $n = 2$, les équations (A) se réduiront à

$$a_1 x_1 + b_1 x_2 = m_1,$$
$$a_2 x_1 + b_2 x_2 = m_2,$$

et l'on aura, en vertu de ce qui précède,

$$x_1 = \frac{mb(b-m)}{ab(b-a)} = \frac{m_1 b_2 - m_2 b_1}{a_1 b_2 - a_2 b_1},$$
$$x_2 = \frac{am(m-a)}{ab(b-a)} = \frac{a_1 m_2 - a_2 m_1}{a_1 b_2 - a_2 b_1}.$$

Si l'on suppose $n = 3$, les équations (A) se réduiront à

$$a_1 x_1 + b_1 x_2 + c_1 x_3 = m_1,$$
$$a_2 x_1 + b_2 x_2 + c_2 x_3 = m_2,$$
$$a_3 x_1 + b_3 x_2 + c_3 x_3 = m_3,$$

et les valeurs des inconnues seront respectivement

$$x_1 = \frac{mbc(b-m)(c-m)(c-b)}{abc(b-a)(c-a)(c-b)}$$
$$= \frac{m_1 b_2 c_3 - m_1 b_3 c_2 + m_2 b_3 c_1 - m_2 b_1 c_3 + m_3 b_1 c_2 - m_3 b_2 c_1}{a_1 b_2 c_3 - a_1 b_3 c_2 + a_2 b_3 c_1 - a_2 b_1 c_3 + a_3 b_1 c_2 - a_3 b_2 c_1},$$

$$x_2 = \frac{amc(m-a)(c-a)(c-m)}{abc(b-a)(c-a)(c-b)}$$
$$= \frac{a_1 m_2 c_3 - a_1 m_3 c_2 + a_2 m_3 c_1 - a_2 m_1 c_3 + a_3 m_1 c_2 - a_3 m_2 c_1}{a_1 b_2 c_3 - a_1 b_3 c_2 + a_2 b_3 c_1 - a_2 b_1 c_3 + a_3 b_1 c_2 - a_3 b_2 c_1},$$

$$x_3 = \frac{abm(b-a)(m-a)(m-b)}{abc(b-a)(c-a)(c-b)}$$
$$= \frac{a_1 b_2 m_3 - a_1 b_3 m_2 + a_2 b_3 m_1 - a_2 b_1 m_3 + a_3 b_1 m_2 - a_3 b_2 m_1}{a_1 b_2 c_3 - a_1 b_3 c_2 + a_2 b_3 c_1 - a_2 b_1 c_3 + a_3 b_1 c_2 - a_3 b_2 c_1},$$

et ainsi de suite.

On arriverait aux mêmes résultats en partant de l'équation (B) et, dans ce cas, on peut déterminer immédiatement le signe d'un terme pris à volonté, soit dans le numérateur, soit dans le dénominateur de la fraction qui représente la valeur d'une inconnue, au moyen de la règle établie dans le paragraphe II de la première Partie de ce Mémoire.

Si les équations données étaient de la forme

$$(\mathrm{D}) \qquad \begin{cases} a x_1 + b x_2 + c x_3 + \ldots + e x_{n-1} + f x_n = m, \\ a^2 x_1 + b^2 x_2 + c^2 x_3 + \ldots + e^2 x_{n-1} + f^2 x_n = m^2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ a^n x_1 + b^n x_2 + c^n x_3 + \ldots + e^n x_{n-1} + f^n x_n = m^n, \end{cases}$$

l'équation (C) deviendrait exacte sans qu'il fût besoin de développer le numérateur et le dénominateur de la fraction qui forme le second membre et l'on pourrait sans aucun inconvénient supprimer les facteurs communs aux deux termes de cette fraction. Ainsi la valeur de x_1, tirée des équations (D), se réduit à

$$x_1 = \frac{m(b-m)(c-m)\ldots(f-m)}{a(b-a)(c-a)\ldots(f-a)} = \frac{m(m-b)(m-c)\ldots(m-f)}{a(a-b)(a-c)\ldots(a-f)}.$$

Les valeurs des autres inconnues, tirées des équations (D), peuvent être présentées sous une forme semblable à celle-ci.

Si les équations données étaient de la forme

$$(\mathrm{E}) \qquad \left\{ \begin{array}{l} a x_1 + a^2 x_2 + \ldots + a^n x_n = a^m, \\ b x_1 + b^2 x_2 + \ldots + b^n x_n = b^m, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ f x_1 + f^2 x_2 + \ldots + f^n x_n = f^m, \end{array} \right.$$

la valeur de x_n serait donnée par l'équation

$$x_n = \frac{\mathrm{S}(\pm a b^2 c^3 \ldots e^{n-1} f^m)}{\mathrm{S}(\pm a b^2 c^3 \ldots e^{n-1} f^n)} = \frac{\mathrm{S}(\pm b c^2 \ldots e^{n-2} f^{m-1})}{\mathrm{S}(\pm b c^2 \ldots e^{n-2} f^{n-1})}.$$

Cette valeur deviendrait nulle si l'on supposait $m < n$. Elle se réduit à l'unité lorsque $m = n$. Enfin, lorsque m surpasse n, le numérateur de la fraction précédente est divisible par le dénominateur, ainsi qu'on l'a prouvé dans le dernier paragraphe de la première Partie de ce Mémoire, et x_n devient une fonction symétrique permanente des quantités

$$a, \quad b, \quad c, \quad \ldots, \quad e, \quad f.$$

On peut faire des remarques analogues relativement aux valeurs des autres inconnues.

Revenons maintenant à l'équation (21). Si l'on y fait successivement

$$\mu = 1, 2, 3, \ldots, n,$$

on aura, pour déterminer les valeurs des inconnues

$$x_1, \quad x_2, \quad \ldots, \quad x_n,$$

les équations suivantes que nous allons comparer aux équations (20),

$$(22) \qquad \left\{ \begin{array}{l} m_1 b_{1,1} + m_2 b_{2,1} + \ldots + m_n b_{n,1} = \mathrm{D}_n x_1, \\ m_1 b_{1,2} + m_2 b_{2,2} + \ldots + m_n b_{n,2} = \mathrm{D}_n x_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ m_1 b_{1,n} + m_2 b_{2,n} + \ldots + m_n b_{n,n} = \mathrm{D}_n x_n. \end{array} \right.$$

Les équations (20) renferment : 1° deux suites de quantités, savoir :

$$x_1, \quad x_2, \quad \ldots, \quad x_n,$$
$$m_1, \quad m_2, \quad \ldots, \quad m_n;$$

2° tous les termes du système $(a_{1,n})$ qui servent de coefficients aux termes de la première suite. Les termes de la seconde suite étant les seuls qui se présentent isolément dans les équations dont il s'agit, je dirai que les quantités

$$m_1, \quad m_2, \quad \ldots, \quad m_n$$

s'y trouvent dégagées et que, au contraire, les quantités

$$x_1, \quad x_2, \quad \ldots, \quad x_n$$

s'y trouvent engagées. Je désignerai, de plus, la suite des équations (20) sous le nom de *suite d'équations symétriques*.

Les équations (22) sont de la même forme que les équations (20), à cette différence près que la suite engagée dans les équations (20) se trouve dégagée dans les équations (22) et que les termes de cette même suite y sont tous multipliés par D_n. Pour déduire les équations (22) des équations (20) il suffit : 1° d'échanger entre elles les deux lettres m et x, c'est-à-dire de dégager la suite engagée et d'engager celle qui était dégagée ; 2° de multiplier les termes de la suite dégagée par le déterminant D_n du système dont les différents termes servaient de coefficients à la suite engagée ; 3° de remplacer les termes du système symétrique $(a_{1,n})$ par les termes correspondants du système adjoint et conjugué $(b_{n,1})$. Je dirai, pour cette raison, que les équations (22) sont *adjointes* aux équations (20).

Les équations (20) se trouvant toutes comprises dans la formule générale

$$m_\mu = a_{\mu,1}x_1 + a_{\mu,2}x_2 + \ldots + a_{\mu,n}x_n = S^n(a_{\mu,1}x_1),$$

dans laquelle le signe S est supposé relatif à l'indice 1, je désignerai l'ensemble de ces mêmes équations par le symbole

$$\Sigma[S^n(a_{\mu,1}x_1) = m_\mu], \tag{23}$$

le signe Σ indiquant ici non pas une somme de quantités mais une suite d'équations semblables à celle que renferment les deux crochets.

Je désignerai de même l'ensemble des équations (22) par le symbole

$$\Sigma[S^n(b_{1,\mu}m_1) = D_n x_\mu]. \tag{24}$$

Ces deux symboles se déduisent l'un de l'autre par les mêmes règles qui servent à déduire l'une de l'autre les deux suites d'équations qu'ils représentent.

Désignons par $(c_{1,n})$ le système de quantités adjoint à $(b_{1,n})$. Je dirai que $(c_{1,n})$ est adjoint du second ordre au système $(a_{1,n})$. Le même système $(c_{1,n})$ sera adjoint et conjugué au système $(b_{n,1})$. Soit encore B_n le déterminant du système $(b_{1,n})$. Si dans les équations (12) et (15) on change a en b, on devra changer aussi b en c et D_n en B_n et, par suite, on aura

$$\begin{cases} B_n = S^n(b_{1,\mu}c_{1,\mu}), \\ 0 = S^n(b_{1,\nu}c_{1,\mu}); \end{cases} \tag{25}$$

$$\begin{cases} B_n = S^n(b_{\mu,1}c_{\mu,1}), \\ 0 = S^n(b_{\nu,1}c_{\mu,1}). \end{cases} \tag{26}$$

Si maintenant on dégage des équations (22) les termes de la suite m_1, $m_2, \ldots, m_n$, en suivant les mêmes règles qui ont servi à dégager des équations (20) les termes de la suite $x_1, x_2, \ldots, x_n$, on obtiendra les équations suivantes :

$$\begin{cases} c_{1,1}D_n x_1 + c_{1,2}D_n x_2 + \ldots + c_{1,n}D_n x_n = B_n m_1, \\ c_{2,1}D_n x_1 + c_{2,2}D_n x_2 + \ldots + c_{2,n}D_n x_n = B_n m_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ c_{n,1}D_n x_1 + c_{n,2}D_n x_2 + \ldots + c_{n,n}D_n x_n = B_n m_n \end{cases} \tag{27}$$

qui pourront être représentées par le symbole

$$\Sigma[S^n(D_n c_{\mu,1}x_1) = B_n m_\mu]. \tag{28}$$

Les équations (27) peuvent encore être mises sous la forme suivante :

$$\begin{cases} c_{1,1}\frac{D_n}{B_n}x_1 + c_{1,2}\frac{D_n}{B_n}x_2 + \ldots + c_{1,n}\frac{D_n}{B_n}x_n = m_1, \\ c_{2,1}\frac{D_n}{B_n}x_1 + c_{2,2}\frac{D_n}{B_n}x_2 + \ldots + c_{2,n}\frac{D_n}{B_n}x_n = m_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ c_{n,1}\frac{D_n}{B_n}x_1 + c_{n,2}\frac{D_n}{B_n}x_2 + \ldots + c_{n,n}\frac{D_n}{B_n}x_n = m_n; \end{cases} \tag{29}$$

et comme celles-ci doivent avoir lieu en même temps que les équations (20), sans que l'on suppose d'ailleurs entre les termes de la suite $x_1, x_2, \ldots, x_n$ et ceux du système $(a_{1,n})$ aucune relation particulière, il faudra nécessairement que l'on ait, quels que soient μ et ν,

$$c_{\mu,\nu}\frac{D_n}{B_n} = a_{\mu,\nu}$$

ou

$$c_{\mu,\nu} = \frac{B_n}{D_n}a_{\mu,\nu}. \tag{30}$$

Cette équation établit un rapport constant entre les termes du système $(a_{1,n})$ et les termes du système adjoint du second ordre $(c_{1,n})$.

Les équations (27) étant adjointes aux équations (22) et celles-ci aux équations (20), je dirai que les équations (27) sont *adjointes du second ordre* aux équations (20) dont elles ne diffèrent que par un facteur commun à tous leurs termes.

DEUXIÈME SECTION.

Des systèmes d'équations symétriques et de leurs déterminants.

§ V. Considérons maintenant un système d'équations de la forme

$$
(31)\quad \left\{
\begin{array}{l}
\alpha_{1,1}a_{1,1}+\alpha_{1,2}a_{1,2}+\ldots+\alpha_{1,n}a_{1,n}=m_{1,1},\\
\alpha_{2,1}a_{1,1}+\alpha_{2,2}a_{1,2}+\ldots+\alpha_{2,n}a_{1,n}=m_{1,2},\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
\alpha_{n,1}a_{1,1}+\alpha_{n,2}a_{1,2}+\ldots+\alpha_{n,n}a_{1,n}=m_{1,n};\\
\alpha_{1,1}a_{2,1}+\alpha_{1,2}a_{2,2}+\ldots+\alpha_{1,n}a_{2,n}=m_{2,1},\\
\alpha_{2,1}a_{2,1}+\alpha_{2,2}a_{2,2}+\ldots+\alpha_{2,n}a_{2,n}=m_{2,2},\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
\alpha_{n,1}a_{2,1}+\alpha_{n,2}a_{2,2}+\ldots+\alpha_{n,n}a_{2,n}=m_{2,n};\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots;\\
\alpha_{1,1}a_{n,1}+\alpha_{1,2}a_{n,2}+\ldots+\alpha_{1,n}a_{n,n}=m_{n,1},\\
\alpha_{2,1}a_{n,1}+\alpha_{2,2}a_{n,2}+\ldots+\alpha_{2,n}a_{n,n}=m_{n,2},\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
\alpha_{n,1}a_{n,1}+\alpha_{n,2}a_{n,2}+\ldots+\alpha_{n,n}a_{n,n}=m_{n,n}.
\end{array}
\right.
$$

Ce système d'équations renferme trois systèmes de quantités symétriques, savoir : $(a_{1,n})$, $(\alpha_{1,n})$ et $(m_{1,n})$.

De plus, il est facile de voir que, parmi les équations (31), celles qui se trouvent dans un même groupe forment une suite d'équations symétriques, dans lesquelles les quantités engagées de la forme $a_{\mu,1}$, $a_{\mu,2}$, ..., $a_{\mu,n}$ ont pour coefficients les termes du système $(\alpha_{1,n})$. De même, si l'on imagine que les équations de chaque groupe soient distribuées sur une même ligne horizontale, celles des équations (31) qui se trouveront comprises dans une même colonne verticale formeront une suite d'équations symétriques dans lesquelles les quantités engagées $\alpha_{\mu,1}$, $\alpha_{\mu,2}$, ..., $\alpha_{\mu,n}$ auront pour coefficients les termes du système $(a_{1,n})$. J'appellerai *suite horizontale* ou *suite verticale* une suite d'équations comprises dans une même ligne, soit horizontale, soit verticale, du

Tableau ainsi formé et j'appellerai l'ensemble des équations (31) un *système d'équations symétriques*. Chaque équation de ce système pouvant être mise sous la forme

$$(32)\qquad S^n(\alpha_{\nu,1}a_{\mu,1})=m_{\mu,\nu},$$

où le signe S est relatif aux indices 1 qui occupent la seconde place dans $\alpha_{\nu,1}$ et $a_{\mu,1}$, je désignerai le système entier des équations dont il s'agit par le symbole

$$(33)\qquad \Sigma[S^n(\alpha_{\nu,1}a_{\mu,1})=m_{\mu,\nu}].$$

J'appellerai *systèmes engagés* les deux systèmes de quantités $(a_{1,n})$, $(\alpha_{1,n})$ dont les termes se trouvent engagés dans les équations dont il s'agit et *système dégagé* le système de quantités $(m_{1,n})$ dont les termes sont isolés dans les seconds membres. Je désignerai aussi les deux systèmes engagés sous le nom de *systèmes composants* et le système dégagé sous le nom de *système résultant*. Enfin, je dirai que, dans les équations (31), représentées par le symbole (33), le système résultant $(m_{1,n})$ se trouve déterminé symétriquement au moyen des deux systèmes composants $(a_{1,n})$ et $(\alpha_{1,n})$.

Désignons respectivement par

$$D_n,\quad \delta_n,\quad M_n$$

les déterminants des trois systèmes

$$(a_{1,n}),\quad (\alpha_{1,n}),\quad (m_{1,n});$$

on aura

$$
(34)\quad \left\{
\begin{array}{l}
D_n=S(\pm a_{1,1}a_{2,2}\ldots a_{n,n}),\\
\delta_n=S(\pm \alpha_{1,1}\alpha_{2,2}\ldots \alpha_{n,n}),\\
M_n=S(\pm m_{1,1}m_{2,2}\ldots m_{n,n}).
\end{array}
\right.
$$

Dans chacune des trois équations précédentes, le signe S peut être considéré comme relatif, soit aux indices qui occupent la première place, soit à ceux qui occupent la seconde. Ainsi,

$$S(\pm m_{1,1}m_{2,2}\ldots m_{n,n})$$

est une fonction symétrique alternée à l'égard des deux espèces d'indices qui affectent les termes du système $(m_{1,n})$. D'ailleurs, les équations (33) étant toutes comprises dans la formule générale

$$S^n(\alpha_{\nu,1} a_{\mu,1}) = m_{\mu,\nu},$$

les deux indices, qui dans chacune de ces équations affectent la lettre m, sont respectivement égaux aux premiers indices qui, dans ces mêmes équations, affectent les deux lettres a et α, c'est-à-dire les termes des deux systèmes $(a_{1,n})$ et $(\alpha_{1,n})$. Il suit de cette remarque que, si, dans le second membre de l'équation

$$M_n = S(\pm m_{1,1} m_{2,2} \ldots m_{n,n}),$$

on substitue aux termes du système $(m_{1,n})$ leurs valeurs en a et en α tirées des équations (31), on obtiendra pour résultat une fonction des termes des systèmes $(a_{1,n})$ et $(\alpha_{1,n})$ qui sera symétrique alternée par rapport aux indices qui occupent la première place dans a et par rapport à ceux qui occupent la première place dans α. D'ailleurs, chacune des quantités m étant du premier degré par rapport aux quantités a et par rapport aux quantités α, chaque terme du développement de

$$S(\pm m_{1,1} m_{2,2} \ldots m_{n,n})$$

sera évidemment de la forme

$$\pm \alpha_{1,\mu} \alpha_{2,\nu} \ldots \alpha_{n,\pi} a_{1,\mu'} a_{2,\nu'} \ldots a_{n,\pi'}.$$

Comme ce développement doit être une fonction symétrique alternée par rapport aux indices qui occupent la première place dans a et par rapport à ceux qui occupent la première place dans α, il ne pourra renfermer le terme qu'on vient de considérer sans renfermer en même temps le produit

$$\pm S(\pm \alpha_{1,\mu} \alpha_{2,\nu} \ldots \alpha_{n,\pi}) S(\pm a_{1,\mu'} a_{2,\nu'} \ldots a_{n,\pi'}),$$

il sera donc équivalent à un ou à plusieurs produits de cette espèce.

Si dans le produit précédent on suppose les indices $\mu, \nu, \ldots, \pi$ tous

différents les uns des autres, on aura

$$S(\pm \alpha_{1,\mu} \alpha_{2,\nu} \ldots \alpha_{n,\pi}) = \pm S(\pm \alpha_{1,1} \alpha_{2,2} \ldots \alpha_{n,n}) = \pm \delta_n.$$

De même, si l'on y suppose les indices $\mu', \nu', \ldots, \pi'$ tous différents les uns des autres, on aura

$$S(\pm a_{1,\mu'} a_{2,\nu'} \ldots a_{n,\pi'}) = \pm S(\pm a_{1,1} a_{2,2} \ldots a_{n,n}) = \pm D_n.$$

D'ailleurs, on ne peut supposer deux des indices $\mu, \nu, \ldots, \pi$ égaux entre eux sans avoir

$$S(\pm \alpha_{1,\mu} \alpha_{2,\nu} \ldots \alpha_{n,\pi}) = 0,$$

ni deux des indices $\mu', \nu', \ldots, \pi'$ égaux entre eux sans avoir

$$S(\pm a_{1,\mu'} a_{2,\nu'} \ldots a_{n,\pi'}) = 0.$$

Le développement de M_n se réduira donc à un ou à plusieurs produits de la forme

$$\pm D_n \delta_n;$$

on a donc

$$M_n = c D_n \delta_n,$$

c étant une quantité constante. Pour déterminer la constante, il suffit d'observer que l'équation précédente étant identique devra encore avoir lieu si l'on suppose généralement

$$\alpha_{\mu,\mu} = 1, \quad a_{\mu,\mu} = 1, \quad \alpha_{\mu,\nu} = 0, \quad a_{\mu,\nu} = 0;$$

mais alors on a par les équations (31)

$$m_{\mu,\mu} = 1, \quad m_{\mu,\nu} = 0,$$

et, par suite,

$$M_n = 1, \quad D_n = 1, \quad \delta_n = 1;$$

on doit donc avoir aussi

$$c = 1,$$

et, par suite, on aura, en général,

$$M_n = D_n \delta_n. \tag{35}$$

Cette équation renferme un théorème très remarquable qu'on peut énoncer de la manière suivante :

Lorsqu'un système de quantités est déterminé symétriquement au moyen de deux autres systèmes, le déterminant du système résultant est toujours égal au produit des déterminants des deux systèmes composants.

Si dans les équations (31) on remplace les systèmes de quantités $(a_{1,n})$ et $(\alpha_{1,n})$ par les systèmes $(a_{n,1})$ et $(b_{n,1})$ et que l'on suppose généralement

$$m_{\mu,\mu} = \mathrm{D}_n, \qquad m_{\mu,\nu} = 0,$$

on obtiendra les équations (10). Dans le même cas, on aura

$$\mathrm{M}_n = m_{1,1}\, m_{2,2} \ldots m_{n,n} = \mathrm{D}_n^n, \qquad \delta_n = \mathrm{S}(\pm\, b_{1,1}\, b_{2,2} \ldots b_{n,n}) = \mathrm{B}_n,$$

et, par suite, l'équation (35) deviendra

$$\mathrm{D}_n^n = \mathrm{B}_n \mathrm{D}_n;$$

d'où l'on conclut

$$\mathrm{B}_n = \mathrm{D}_n^{n-1}. \tag{36}$$

On voit par cette dernière équation que *le déterminant du système $(b_{1,n})$ adjoint au système $(a_{1,n})$ est égal à la $(n-1)^{\text{ième}}$ puissance du déterminant de ce dernier système.*

En vertu de l'équation (36), l'équation (30) devient

$$c_{\mu,\nu} = \mathrm{D}_n^{n-2}\, a_{\mu,\nu}. \tag{37}$$

Ainsi, *étant donné un terme quelconque $a_{\mu,\nu}$ du système $(a_{1,n})$, pour obtenir le terme correspondant du système adjoint du second ordre $(c_{1,n})$, il suffira de multiplier le terme donné par la $(n-2)^{\text{ième}}$ puissance du déterminant du premier système.*

On a vu que le déterminant d'un système quelconque est toujours égal à celui du système conjugué. Il suit de là que l'équation (35) subsistera encore si dans les équations (31) on remplace l'un des systèmes composants $(a_{1,n})$, $(\alpha_{1,n})$, ou tous les deux ensemble, par les systèmes qui leur sont conjugués, savoir $(a_{n,1})$, $(\alpha_{n,1})$. L'équation (35) convient donc également aux quatre systèmes d'équations symétriques

désignés par les quatre symboles suivants :

$$\left\{\begin{array}{l} \Sigma[\mathrm{S}^n(\alpha_{\nu,1} a_{\mu,1}) = m_{\mu,\nu}], \\ \Sigma[\mathrm{S}^n(\alpha_{1,\nu} a_{\mu,1}) = m_{\mu,\nu}], \\ \Sigma[\mathrm{S}^n(\alpha_{\nu,1} a_{1,\mu}) = m_{\mu,\nu}], \\ \Sigma[\mathrm{S}^n(\alpha_{1,\nu} a_{1,\mu}) = m_{\mu,\nu}], \end{array}\right. \tag{38}$$

le signe S étant relatif dans tous les cas aux indices de α et de a qui sont égaux à l'unité.

Dans les quatre systèmes d'équations que représentent les quatre symboles précédents, le premier indice de la lettre m est toujours égal à l'indice de a qui reste constant dans chaque équation et le second indice de m est toujours égal à l'indice de α qui reste constant dans cette même équation. Le contraire aurait lieu si dans les équations (38) on remplaçait le système $(m_{1,n})$ par son conjugué $(m_{n,1})$; ces équations deviendraient alors

$$\left\{\begin{array}{l} \Sigma[\mathrm{S}^n(\alpha_{\nu,1} a_{\mu,1}) = m_{\nu,\mu}], \\ \Sigma[\mathrm{S}^n(\alpha_{1,\nu} a_{\mu,1}) = m_{\nu,\mu}], \\ \Sigma[\mathrm{S}^n(\alpha_{\nu,1} a_{1,\mu}) = m_{\nu,\mu}], \\ \Sigma[\mathrm{S}^n(\alpha_{1,\nu} a_{1,\mu}) = m_{\nu,\mu}]. \end{array}\right. \tag{39}$$

Pour suivre les dénominations jusqu'à présent adoptées, je dirai que, dans chacun des systèmes d'équations représentés par les symboles (38) et (39), le système $(m_{1,n})$ résulte de la composition des deux systèmes $(a_{1,n})$ et $(\alpha_{1,n})$. J'appellerai *premier système composant* celui dont l'indice constant dans chaque équation détermine le premier indice de m et *second système composant* celui dont l'indice constant détermine le second indice de m. Ainsi, le système $(a_{1,n})$ est premier composant dans chacune des équations (38) et le système $(\alpha_{1,n})$ est premier composant dans chacune des équations (39). Enfin je dirai que la composition est *directe* par rapport à l'un des systèmes composants si les indices, qui sont constamment égaux dans le système composant et dans le système résultant $(m_{1,n})$, occupent tous deux la première place ou tous deux la seconde, et je dirai que la composition est *indirecte* si de ces deux indices l'un occupe la première place et l'autre la seconde.

Cela posé, si l'on examine successivement les quatre systèmes d'équations symétriques représentés par les symboles (38), on reconnaîtra sans peine :

1° Que, dans le premier système d'équations, la composition est directe par rapport au système $(a_{1,n})$ et indirecte par rapport au système $(\alpha_{1,n})$;

2° Que, dans le deuxième système d'équations, la composition est directe par rapport aux deux systèmes $(a_{1,n})$, $(\alpha_{1,n})$;

3° Que, dans le troisième système d'équations, la composition est indirecte par rapport aux deux systèmes $(a_{1,n})$, $(\alpha_{1,n})$;

4° Que, dans le quatrième système d'équations, la composition est indirecte par rapport au système $(a_{1,n})$ et directe par rapport au système $(\alpha_{1,n})$.

En examinant les systèmes d'équations représentés par les symboles (39), on trouverait des résultats contraires aux précédents. Ainsi, par exemple, dans le deuxième des symboles (39), la composition est indirecte par rapport aux deux systèmes de quantités $(a_{1,n})$ et $(\alpha_{1,n})$, tandis qu'elle était directe dans le deuxième des symboles (38).

L'équation (35) n'a pas seulement lieu relativement aux systèmes d'équations représentés par les symboles (38) et (39); mais la valeur de M_n déterminée par cette équation restera encore la même au signe près si, dans un des systèmes de quantités $(a_{1,n})$, $(\alpha_{1,n})$ ou dans tous les deux à la fois, on substitue l'une à l'autre deux suites horizontales ou deux suites verticales et même si l'on répète cette opération plusieurs fois de suite. En effet, une ou plusieurs substitutions de cette espèce ne changent point la valeur mais tout au plus le signe des déterminants D_n et δ_n.

§ VI. Si dans l'équation (32) on suppose l'indice ν invariable et que l'on donne successivement à μ toutes les valeurs entières depuis 1 jusqu'à n, on obtiendra une des suites verticales d'équations comprises

sous le numéro (31), laquelle pourra être représentée par le symbole

$$\Sigma[S^n(\alpha_{\nu,1}a_{\mu,1}) = m_{\mu,\nu}],$$

pourvu que l'on y considère l'indice ν comme invariable.

Cela posé, en suivant la méthode qui a servi à passer des équations (23) aux équations (24), on obtiendra une nouvelle suite d'équations adjointes à celles que l'on vient de considérer et qui seront représentées par le symbole

$$\Sigma[S^n(b_{1,\mu}m_{1,\nu}) = D_n\alpha_{\nu,\mu}],$$

pourvu que l'on y suppose toujours l'indice ν invariable.

Si dans ce dernier symbole on donne successivement à ν toutes les valeurs entières depuis 1 jusqu'à n, on obtiendra plusieurs suites d'équations dont l'ensemble formera un nouveau système d'équations symétriques que l'on pourra représenter par le même symbole

$$\Sigma[S^n(b_{1,\mu}m_{1,\nu}) = D_n\alpha_{\nu,\mu}], \tag{40}$$

dans lequel on supposera désormais les deux indices μ et ν variables lorsqu'on passe d'une équation à une autre.

Le symbole (40) représente, ainsi que le symbole (33), un nombre d'équations égal à n^2. Les deux systèmes d'équations symétriques représentés par ces deux symboles étant respectivement composés de plusieurs suites d'équations tellement liées entre elles que les suites du système (40) sont respectivement adjointes à celles du système (33); je dirai que le système des équations (40) est *adjoint* au système des équations (33). En comparant ces deux systèmes d'équations l'un à l'autre, on trouve que le système de quantités $(\alpha_{1,n})$, qui était engagé dans les équations (33), se trouve dégagé dans les équations (40), tandis que le système de quantités $m_{1,n}$, qui était dégagé dans les premières, se trouve engagé dans les secondes. Ainsi, le passage des équations (33) aux équations (40) sert à dégager le système composant $(\alpha_{1,n})$. La comparaison des symboles (33) et (40) suffit pour établir à ce sujet la règle suivante :

Lorsqu'un système de quantités $(m_{1,n})$ résulte de la composition de deux autres systèmes $(a_{1,n})$ et $(\alpha_{1,n})$, pour dégager l'un des systèmes composants $(\alpha_{1,n})$ il faut :

1° Échanger entre eux le système composant que l'on veut dégager $(\alpha_{1,n})$ et le système résultant $(m_{1,n})$, en ayant soin de laisser respectivement à leurs places les indices qui étaient communs aux lettres a et m;

2° Multiplier tous les termes du système composant que l'on dégage par le déterminant du système composant qu'on laisse engagé;

3° Remplacer ce dernier système $(a_{1,n})$ par le système adjoint et conjugué $(b_{n,1})$.

Si dans l'équation

$$S^n(\alpha_{\nu,1}a_{\mu,1}) = m_{\mu,\nu}$$

on suppose l'indice μ invariable et que l'on donne successivement à ν toutes les valeurs entières depuis 1 jusqu'à n, on obtiendra une des suites horizontales d'équations comprises sous le numéro (31), laquelle pourra être représentée par le symbole

$$\Sigma[S^n(\alpha_{\nu,1}a_{\mu,1}) = m_{\mu,\nu}],$$

pourvu que l'on y considère l'indice μ comme invariable.

Soit maintenant $(\beta_{n,1})$ le système adjoint et conjugué à $(\alpha_{1,n})$, δ_n étant le déterminant de ce dernier système; la suite des équations adjointes à celles que l'on vient de considérer sera représentée par le symbole

$$\Sigma[S^n(m_{\mu,1}\beta_{1,\nu}) = \delta_n a_{\mu,\nu}],$$

μ étant supposé invariable relativement à une même suite d'équations. Si maintenant on donne successivement à μ, dans ce même symbole, toutes les valeurs entières depuis 1 jusqu'à n, on aura un nouveau système d'équations que l'on pourra représenter par le même symbole

$$\Sigma[S^n(m_{\mu,1}\beta_{1,\nu}) = \delta_n a_{\mu,\nu}], \tag{41}$$

en y supposant désormais variables les deux indices μ et ν. Ce dernier

système d'équations est, ainsi que le système (40), adjoint au système d'équations (33). Les deux systèmes d'équations (40) et (41) seront appelés tous deux *adjoints du premier ordre* au système d'équations (33). On a vu qu'il suffisait, pour obtenir le premier, de dégager du système d'équations (33) le système composant $(\alpha_{1,n})$. Il suffit de même, pour obtenir le second, de dégager l'autre système composant $(a_{1,n})$; d'ailleurs, pour dégager ce dernier système composant des équations

$$\Sigma[S^n(\alpha_{\nu,1}a_{\mu,1}) = m_{\mu,1}],$$

il faut, en suivant la règle établie ci-dessus :

1° Remplacer $m_{\mu,\nu}$ par $a_{\mu,\nu}$ et $a_{\mu,1}$ par $m_{\mu,1}$;

2° Multiplier $a_{\mu,\nu}$ par δ_n;

3° Remplacer $\alpha_{\nu,1}$ par $\beta_{1,\nu}$.

On obtient donc immédiatement par cette règle le système d'équations

$$\Sigma[S^n(m_{\mu,1}\beta_{1,\nu}) = \delta_n a_{\mu,\nu}]. \tag{41}$$

On a vu dans la section précédente que, si après avoir dégagé d'une suite d'équations symétriques la suite des quantités engagées au moyen des équations adjointes du premier ordre on dégageait de nouveau la suite que la première opération avait engagée, les équations adjointes du second ordre obtenues par cette seconde opération ne différaient des équations primitives que par un facteur commun à tous leurs termes. De même si, après avoir dégagé du système d'équations (33) les systèmes de quantités $(\alpha_{1,n})$ et $(a_{1,n})$ au moyen des équations (40) et (41), on voulait de nouveau dégager des équations (40) ou des équations (41) le système de quantités $(m_{1,n})$, les équations adjointes du second ordre obtenues par ce moyen ne différeraient des équations (33) que par un facteur commun à tous leurs termes. Mais, si l'on dégage des équations (40) le système de quantités $(b_{1,n})$ et des équations (41) le système de quantités $(\beta_{1,n})$, on obtiendra deux nouveaux systèmes d'équations symétriques qui seront *adjoints du second ordre* au système des équations (33) et qui seront différents des trois systèmes d'équations (33), (40) et (41).

Soit $(r_{1,n})$ le système de quantités adjoint au système $(m_{1,n})$. M_n étant toujours le déterminant du système $(m_{1,n})$, on aura, en vertu de l'équation (35),

$$M_n = D_n \delta_n.$$

Cela posé, pour dégager des équations

$$\Sigma[S^n(b_{1,\mu} m_{1,\nu}) = D_n \alpha_{\nu,\mu}] \tag{40}$$

le système de quantités $(b_{1,n})$, il faudra, d'après la règle établie ci-dessus :

1° Remplacer $D_n \alpha_{\nu,\mu}$ par $b_{\nu,\mu}$ et $b_{1,\mu}$ par $D_n \alpha_{1,\mu}$;
2° Multiplier $b_{\nu,\mu}$ par M_n;
3° Remplacer $m_{1,\nu}$ par $r_{\nu,1}$.

On obtiendra de cette manière le système d'équations représenté par le symbole

$$\Sigma[S^n(D_n \alpha_{1,\mu} r_{\nu,1}) = M_n b_{\nu,\mu}].$$

Si dans ce système on divise les deux membres de chaque équation par D_n, en observant que $\frac{M_n}{D_n} = \delta_n$, le symbole précédent deviendra

$$\Sigma[S^n(\alpha_{1,\mu} r_{\nu,1}) = \delta_n b_{\nu,\mu}]. \tag{42}$$

Le système d'équations représenté par ce dernier symbole est un des deux systèmes adjoints du second ordre aux équations (33). Pour obtenir l'autre système adjoint, il suffira de dégager le système de quantités $(\beta_{1,\nu})$ des équations

$$\Sigma[S^n(m_{\mu,1} \beta_{1,\nu}) = \delta_n a_{\mu,\nu}]. \tag{41}$$

Pour y parvenir il faut, en vertu de la règle citée :

1° Remplacer $\delta_n a_{\mu,\nu}$ par $\beta_{\mu,\nu}$ et $\beta_{1,\nu}$ par $\delta_n a_{1,\nu}$;
2° Multiplier $\beta_{\mu,\nu}$ par M_n;
3° Remplacer $m_{\mu,1}$ par $r_{1,\mu}$.

Le symbole qui représente le système d'équations cherché sera donc

$$\Sigma[S^n(r_{1,\mu} \delta_n a_{1,\nu}) = M_n \beta_{\mu,\nu}].$$

Si l'on divise les deux membres de chacune des équations comprises dans ce système par δ_n, en observant que $\frac{M_n}{\delta_n} = D_n$, le symbole précédent deviendra

$$\Sigma[S^n(r_{1,\mu} a_{1,\nu}) = D_n \beta_{\mu,\nu}]. \tag{43}$$

Ainsi, le système des équations (33) a pour systèmes adjoints du second ordre ceux qui sont représentés par les symboles (42) et (43).

Si maintenant on voulait dégager des équations (42) le système de quantités $(\alpha_{1,n})$ ou des équations (43) le système de quantités $(a_{1,n})$, on retrouverait les équations (40) et (41) multipliées par un facteur commun à tous leurs termes; mais, si l'on dégage des équations (42) ou des équations (43) le système de quantités $(r_{1,n})$, on obtiendra un nouveau système d'équations symétriques que j'appellerai *adjoint du troisième ordre* au système des équations (33). Pour obtenir ce nouveau système il faut, dans les équations

$$\Sigma[S^n(\alpha_{1,\mu} r_{\nu,1}) = \delta_n b_{\nu,\mu}] : \tag{42}$$

1° Remplacer $\delta_n b_{\nu,\mu}$ par $r_{\nu,\mu}$ et $r_{\nu,1}$ par $\delta_n b_{\nu,1}$;
2° Multiplier $r_{\nu,\mu}$ par δ_n;
3° Remplacer $\alpha_{1,\mu}$ par $\beta_{\mu,1}$.

On obtient de cette manière le symbole

$$\Sigma[S^n(\beta_{\mu,1} \delta_n b_{\nu,1}) = \delta_n r_{\nu,\mu}].$$

En divisant chacune des équations qui s'y trouvent comprises par δ_n, on aura le symbole suivant :

$$\Sigma[S^n(\beta_{\mu,1} b_{\nu,1}) = r_{\nu,\mu}] \tag{44}$$

qui représente le système des équations adjointes du troisième ordre aux équations (33). Il est à remarquer que, pour déduire les équations (40) des équations (33), il suffit de remplacer dans ces dernières les trois systèmes de quantités

$$(\alpha_{1,n}), \quad (a_{1,n}), \quad (m_{1,n})$$

par les systèmes adjoints du premier ordre

$$(\beta_{1,n}),\quad (b_{1,n}),\quad (r_{1,n}).$$

Ainsi, les relations établies par les équations (33) entre les trois premiers systèmes de quantités subsistent encore entre les trois autres.

§ VII. Avant de passer à de nouvelles recherches, il ne sera pas inutile de réunir en un seul tableau les principaux résultats que fournit l'analyse précédente relativement à trois systèmes de quantités liés entre eux par un système d'équations symétriques.

Soient respectivement

$$(\alpha_{1,n}),\quad (a_{1,n}),\quad (m_{1,n})$$

les trois systèmes de quantités dont il s'agit. Désignons par

$$(\beta_{1,n}),\quad (b_{1,n}),\quad (r_{1,n})$$

les systèmes adjoints du premier ordre aux trois systèmes donnés et par

$$(\gamma_{1,n}),\quad (c_{1,n}),\quad (t_{1,n})$$

les trois systèmes adjoints du deuxième ordre.

Enfin représentons, comme ci-dessus, par

$$\Sigma[S^n(\alpha_{\nu,1}a_{\mu,1}) = m_{\mu,\nu}] \tag{33}$$

le système d'équations symétriques par lequel les trois systèmes donnés se trouvent liés entre eux et désignons respectivement les déterminants des systèmes

$$(\alpha_{1,n}),\quad (\beta_{1,n}),\quad (\gamma_{1,n}),\quad (a_{1,n}),\quad (b_{1,n}),\quad (c_{1,n}),\quad (m_{1,n}),\quad (r_{1,n}),\quad (t_{1,n})$$

par

$$\delta_n,\quad \zeta_n,\quad \theta_n,\quad D_n,\quad B_n,\quad C_n,\quad M_n,\quad R_n,\quad T_n;$$

on aura entre les termes et les déterminants des systèmes dont il s'agit

les équations suivantes :

$$\left\{\begin{array}{lll} & M_n = D_n\delta_n, & \\ \zeta_n = \delta_n^{n-1}, & B_n = D_n^{n-1}, & R_n = M_n^{n-1}, \\ & R_n = B_n\zeta_n, & \\ \theta_n = \delta_n^{2(n-1)}, & C_n = D_n^{2(n-1)}, & T_n = M_n^{2(n-1)}, \\ & T_n = C_n\theta_n; & \end{array}\right. \tag{45}$$

$$\left\{\begin{array}{lll} \gamma_{\mu,\nu} = \delta_n^{n-2}\alpha_{\mu,\nu}, & c_{\mu,\nu} = D_n^{n-2}a_{\mu,\nu}, & t_{\mu,\nu} = M_n^{n-2}m_{\mu,\nu}, \\ \gamma_{\mu,\nu}\delta_n = \zeta_n\alpha_{\mu,\nu}, & c_{\mu,\nu}D_n = B_n a_{\mu,\nu}, & t_{\mu,\nu}M_n = R_n m_{\mu,\nu}; \end{array}\right. \tag{46}$$

$$\left\{\begin{array}{lll} \delta_n = S^n(\alpha_{\mu,1}\beta_{\mu,1}), & D_n = S^n(a_{\mu,1}b_{\mu,1}), & M_n = S^n(m_{\mu,1}r_{\mu,1}), \\ \delta_n = S^n(\alpha_{1,\mu}\beta_{1,\mu}), & D_n = S^n(a_{1,\mu}b_{1,\mu}), & M_n = S^n(m_{1,\mu}r_{1,\mu}), \\ 0 = S^n(\alpha_{\mu,1}\beta_{\nu,1}), & 0 = S^n(a_{\mu,1}b_{\nu,1}), & 0 = S^n(m_{\mu,1}r_{\nu,1}), \\ 0 = S^n(\alpha_{1,\mu}\beta_{1,\nu}), & 0 = S^n(a_{1,\mu}b_{1,\nu}), & 0 = S^n(m_{1,\mu}r_{1,\nu}), \\ \zeta_n = S^n(\beta_{\mu,1}\gamma_{\mu,1}), & C_n = S^n(b_{\mu,1}c_{\mu,1}), & T_n = S^n(r_{\mu,1}t_{\mu,1}), \\ \zeta_n = S^n(\beta_{1,\mu}\gamma_{1,\mu}), & C_n = S^n(b_{1,\mu}c_{1,\mu}), & T_n = S^n(r_{1,\mu}t_{1,\mu}), \\ 0 = S^n(\beta_{\mu,1}\gamma_{\nu,1}), & 0 = S^n(b_{\mu,1}c_{\nu,1}), & 0 = S^n(r_{\mu,1}t_{\nu,1}), \\ 0 = S^n(\beta_{1,\mu}\gamma_{1,\nu}), & 0 = S^n(b_{1,\mu}c_{1,\nu}), & 0 = S^n(r_{1,\mu}t_{1,\nu}); \end{array}\right. \tag{47}$$

$$\left\{\begin{array}{ll} \multicolumn{2}{c}{\Sigma[S^n(\alpha_{\nu,1}a_{\mu,1}) = m_{\mu,\nu}],} \\ \Sigma[S^n(b_{1,\mu}m_{1,\nu}) = D_n\alpha_{\nu,\mu}], & \Sigma[S^n(m_{\mu,1}\beta_{1,\nu}) = \delta_n a_{\mu,\nu}], \\ \Sigma[S^n(\alpha_{1,\mu}r_{\nu,1}) = \delta_n b_{\nu,\mu}], & \Sigma[S^n(r_{1,\mu}a_{1,\nu}) = D_n\beta_{\mu,\nu}], \\ \multicolumn{2}{c}{\Sigma[S^n(\beta_{\mu,1}b_{\nu,1}) = r_{\mu,\nu}].} \end{array}\right. \tag{48}$$

Lorsque dans ces deux équations on suppose successivement

$$n = 2 \quad \text{et} \quad n = 3,$$

on obtient diverses formules qui ont été données par M. Gauss et appliquées par ce géomètre à la théorie des formes binaires et ternaires du deuxième degré.

Les systèmes d'équations (48) sont les mêmes que les systèmes (33), (40), (41), (42), (43) et (44). Les cinq derniers sont adjoints du premier, du deuxième et du troisième ordre au système (33). Pour les obtenir tous les cinq il suffit de dégager successivement des équations (33) :

1° Les deux systèmes de quantités $(\alpha_{1,n})$ et $(a_{1,n})$;
2° Les deux systèmes adjoints aux précédents, savoir $(\beta_{1,n})$ et $(b_{1,n})$;
3° Le système de quantités $(r_{1,n})$ adjoint au système $(m_{1,n})$.

Si l'on voulait des équations (44) dégager l'un des systèmes $(\beta_{1,n})$, $(b_{1,n})$, en ayant égard aux relations établies par les équations (46), on retrouverait les équations (42) et (43). Ainsi, d'un système d'équations symétriques de l'ordre n, on peut toujours déduire cinq autres systèmes semblables, savoir : deux systèmes adjoints du premier ordre, deux systèmes adjoints du deuxième ordre, un seul système adjoint du troisième ordre; mais on n'en saurait déduire un plus grand nombre.

§ VIII. Je reviens maintenant aux équations (31) qui se trouvent représentées par le symbole (33). Lorsqu'on les ajoute entre elles, on a l'équation suivante :

$$(49)\quad \left\{\begin{aligned} &(\alpha_{1,1}+\alpha_{2,1}+\ldots+\alpha_{n,1})(a_{1,1}+a_{2,1}+\ldots+a_{n,1})\\ &+(\alpha_{1,2}+\alpha_{2,2}+\ldots+\alpha_{n,2})(a_{1,2}+a_{2,2}+\ldots+a_{n,2})\\ &+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ &+(\alpha_{1,n}+\alpha_{2,n}+\ldots+\alpha_{n,n})(a_{1,n}+a_{2,n}+\ldots+a_{n,n})\\ &=m_{1,1}+m_{2,1}+\ldots+m_{n,1}+m_{1,2}+\ldots+m_{n,2}+\ldots+m_{n,n}.\end{aligned}\right.$$

On peut mettre cette équation sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} &S^n(\alpha_{\mu,1})S^n(a_{\mu,1})+S^n(\alpha_{\mu,2})S^n(a_{\mu,2})+\ldots+S^n(\alpha_{\mu,n})S^n(a_{\mu,n})\\ &\quad=S^n(m_{\mu,1})+S^n(m_{\mu,2})+\ldots+S^n(m_{\mu,n}),\end{aligned}$$

le signe S étant relatif aux indices μ qui occupent la première place dans les termes des systèmes

$$(\alpha_{1,n}),\quad (a_{1,n}),\quad (m_{1,n}).$$

On peut encore mettre la même équation sous la forme

$$(50)\qquad S^n[S^n(\alpha_{\mu,\nu})S^n(a_{\mu,\nu})]=S^nS^n(m_{\mu,\nu}),$$

le premier signe S dans chaque membre étant relatif à l'indice ν et les autres à l'indice μ.

Si au lieu d'ajouter entre elles les équations (33) on ajoute les équa-

tions (44), on obtiendra une équation semblable à l'équation (50), et qui pourra être mise sous la forme

$$(51)\qquad S^n[S^n(\beta_{\mu,\nu})S^n(b_{\mu,\nu})]=S^nS^n(r_{\mu,\nu}),$$

pourvu que les opérations indiquées par le signe S dans

$$S^n(\beta_{\mu,\nu}),\quad S^n(b_{\mu,\nu}),\quad S^n(r_{\mu,\nu})$$

soient relatives aux indices μ qui occupent la première place et que les deux autres signes S employés dans l'équation (51) soient relatifs aux indices ν qui occupent la seconde place.

On obtiendrait de la même manière, par l'addition des équations (40), (41), (42), (43), les valeurs de

$$S^nS^n(\alpha_{\nu,\mu}),\quad S^nS^n(a_{\mu,\nu}),\quad S^nS^n(b_{\nu,\mu}),\quad S^nS^n(\beta_{\mu,\nu}).$$

TROISIÈME SECTION.

Des systèmes de quantités dérivées et de leurs déterminants.

§ IX. Soit $(a_{1,n})$ un système quelconque de l'ordre n. Les indices qui affectent les différents termes de ce système étant respectivement égaux aux nombres 1, 2, 3, ..., n; supposons qu'on les assemble p à p de toutes les manières possibles; le nombre des combinaisons que l'on pourra former par ce moyen sera égal à la fraction

$$\frac{n(n-1)\ldots(n-p+1)}{1.2.3\ldots\ldots p}$$

que je désignerai par P.

Supposons maintenant que, après avoir écrit ces combinaisons à la suite les unes des autres en commençant par celles où le produit des indices est le plus petit possible et finissant par celles où le produit des indices est le plus grand possible, on leur fasse correspondre les numéros (1), (2), (3), ..., (P − 1), (P). Le numéro (1) correspondra à la combinaison

$$1.2.3\ldots\ldots p$$

et le numéro (P) à la combinaison

$$n-p+1.n-p+2.\ldots.n-1.n,$$

dans laquelle le produit des indices est évidemment plus grand que dans tous les autres.

Soient maintenant (μ) et (ν) deux des numéros affectés aux combinaisons dont il s'agit. Si dans le système donné $(a_{1,n})$ on supprime tous les termes à l'exception de ceux qui ont leur premier indice compris dans la combinaison (μ) et leur second indice compris dans la combinaison (ν), les termes restants formeront un système de quantités symétriques de l'ordre p. Ainsi, par exemple, si $\mu=\nu=1$, les combinaisons (μ) et (ν) se réduiront à une seule combinaison formée des indices

$$1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ p$$

et, dans ce cas, les termes conservés du système $(a_{1,n})$ formeront le système $(a_{1,p})$ de l'ordre p, savoir

$$(52)\qquad \begin{cases} a_{1,1}, & a_{1,2}, & \ldots, & a_{1,p}, \\ a_{2,1}, & a_{2,2}, & \ldots, & a_{2,p}, \\ \ldots, & \ldots, & \ldots, & \ldots, \\ a_{p,1}, & a_{p,2}, & \ldots, & a_{p,p}, \end{cases}$$

dont le déterminant sera D_p.

Si l'on n'a pas $\mu=1$, $\nu=1$; alors, au lieu du système (52), on aura un autre système de l'ordre (p) dans lequel les indices des suites horizontales seront égaux à ceux que renferme la combinaison (μ) et les indices des suites verticales égaux à ceux que renferme la combinaison (ν). Je désignerai le déterminant de ce dernier système par $a^{(p)}_{\mu,\nu}$. Sa valeur absolue dépend uniquement des indices compris dans les combinaisons (μ) et (ν); mais son signe reste arbitraire, à moins que l'on n'introduise de nouvelles conditions dans le calcul.

Si dans $a^{(p)}_{\mu,\nu}$ on donne successivement à μ et à ν toutes les valeurs possibles depuis 1 jusqu'à P, on aura en tout un nombre de déterminants égal à P^2. Ces déterminants, rangés en carré de la manière

suivante

$$(53)\qquad \begin{cases} a^{(p)}_{1,1}, & a^{(p)}_{1,2}, & \ldots, & a^{(p)}_{1,P}, \\ a^{(p)}_{2,1}, & a^{(p)}_{2,2}, & \ldots, & a^{(p)}_{2,P}, \\ \ldots, & \ldots, & \ldots, & \ldots, \\ a^{(p)}_{P,1}, & a^{(p)}_{P,2}, & \ldots, & a^{(p)}_{P,P}, \end{cases}$$

formeront un système symétrique de l'ordre P dont le premier terme $a^{(p)}_{1,1}$ sera égal à D_p et dont les autres termes pourront être déduits du premier à l'aide de substitutions opérées entre les indices qui affectent les termes du système $(a_{1,n})$. Pour suivre la notation précédemment adoptée, je désignerai le système (53) par

$$(a^{(p)}_{1,P}).$$

Si l'on donne successivement à p toutes les valeurs

$$1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ n-3,\ n-2,\ n-1,$$

P prendra les valeurs suivantes :

$$n,\quad \frac{n(n-1)}{1.2},\quad \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3},\quad \ldots,\quad \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3},\quad \frac{n(n-1)}{1.2},\quad n,$$

et l'on obtiendra par suite un nombre égal à $n-1$ de systèmes symétriques différents les uns des autres dont le premier sera le système donné $(a_{1,n})$. Ces différents systèmes seront désignés respectivement par

$$(a_{1,n}),\quad \left(a^{(2)}_{1,\frac{n(n-1)}{2}}\right),\quad \left(a^{(3)}_{1,\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}}\right),\quad \ldots,$$
$$\left(a^{(n-3)}_{1,\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}}\right),\quad \left(a^{(n-2)}_{1,\frac{n(n-1)}{1.2}}\right),\quad \left(a^{(n-1)}_{1,n}\right);$$

je les appellerai *systèmes dérivés* de $(a_{1,n})$. Parmi ces systèmes, ceux qui correspondent à des valeurs de p dont la somme est égale à n sont toujours de même ordre; je les appellerai *systèmes dérivés complémentaires*. Ainsi, en général,

$$(a^{(p)}_{1,P})\quad \text{et}\quad (a^{(n-p)}_{1,P})$$

sont deux systèmes dérivés complémentaires l'un de l'autre dont l'ordre est égal à

$$\mathrm{P} = \frac{n(n-1)\ldots(n-p+1)}{1.2.3\ldots\ldots p}.$$

Les différents termes du système (53) représentant autant de déterminants de l'ordre p, on peut supposer à volonté chacun de ces termes positif ou négatif. De plus, les numéros correspondant aux diverses combinaisons des indices 1, 2, 3, ..., n ne sont pas entièrement déterminés par cette seule condition que l'on donne de moindres numéros aux combinaisons dans lesquelles les produits des indices sont plus petits. Quoi qu'il en soit, on pourra, sans détruire les propositions que nous allons démontrer, régler à volonté ce qu'il y a d'arbitraire dans la détermination des signes et des numéros dont il s'agit, pourvu qu'après avoir fixé d'une certaine manière les signes et les numéros relatifs aux termes du système dérivé $(a_{1,\mathrm{P}}^{(p)})$, on fixe de la manière suivante les signes et les numéros relatifs aux termes du système dérivé complémentaire $(a_{1,\mathrm{P}}^{(n-p)})$:

1° Soit (μ) le numéro correspondant à l'une des combinaisons formées avec un nombre égal à p d'indices pris dans la suite

$$1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ n;$$

on désignera par $(\mathrm{P}-\mu+1)$ le numéro qui correspond à la combinaison formée avec ceux des indices 1, 2, 3, ..., n qui sont exclus de la combinaison μ en nombre égal à $(n-p)$. Par suite, si l'on compare entre eux les deux termes

$$a_{\mu,\pi}^{(p)},\quad a_{\mathrm{P}-\mu+1,\mathrm{P}-\pi+1}^{(n-p)},$$

dont l'un est pris dans le système $(a_{1,\mathrm{P}}^{(p)})$ et l'autre dans le système complémentaire $(a_{1,\mathrm{P}}^{(n-p)})$ et que l'on examine les indices qui, dans ces deux déterminants, affectent les termes du système $(a_{1,n})$, on trouvera que les indices compris dans le déterminant $a_{\mu,\pi}^{(p)}$ sont exclus du déterminant $a_{\mathrm{P}-\mu+1,\mathrm{P}-\pi+1}^{(n-p)}$ et réciproquement. Je désignerai les deux quantités

$$a_{\mu,\pi}^{(p)},\quad a_{\mathrm{P}-\mu+1,\mathrm{P}-\pi+1}^{(n-p)}$$

sous le nom de *termes complémentaires* des deux systèmes

$$(a_{1,\mathrm{P}}^{(p)}),\quad (a_{1,\mathrm{P}}^{(n-p)}).$$

Le premier terme du système (53) étant

$$a_{1,1}^{(p)} = \mathrm{D}_p = \pm\,\mathrm{S}(\pm\, a_{1,1}\, a_{2,2}\ldots a_{p,p}),$$

le terme complémentaire pris dans le système $(a_{1,\mathrm{P}}^{(n-p)})$ sera

$$a_{\mathrm{P},\mathrm{P}}^{(n-p)} = \pm\,\mathrm{S}(\pm\, a_{p+1,p+1}\, a_{p+2,p+2}\ldots a_{n,n}).$$

2° Le produit des deux termes précédents ou

$$\pm\,\mathrm{S}(\pm\, a_{1,1}\, a_{2,2}\ldots a_{p,p})\,\mathrm{S}(\pm\, a_{p+1,p+1}\, a_{p+2,p+2}\ldots a_{n,n})$$

est, abstraction faite du signe, évidemment égal à la somme de plusieurs produits symétriques affectés des mêmes signes que dans le déterminant D_n, c'est-à-dire à une portion de ce déterminant. En général, il est facile de voir que le produit de deux termes complémentaires pris à volonté est toujours, au signe près, une portion de ce même déterminant. Cela posé, étant donné le signe de l'un de ces deux termes, on déterminera celui de l'autre par la condition que leur produit soit affecté du même signe que la portion correspondante du déterminant D_n.

Si l'on suppose $p=1$, on aura $\mathrm{P}=n$ et la quantité $a_{\mu,\pi}^{(p)}$ deviendra généralement égale à

$$a_{\mu,\pi}.$$

Dans le même cas, la quantité complémentaire $a_{\mathrm{P}-\mu+1,\mathrm{P}-\pi+1}^{(n-p)}$ deviendra égale à

$$b_{\mu,\pi}.$$

§ X. On a fait voir dans le paragraphe III que la fonction symétrique alternée

$$\mathrm{S}(\pm\, a_{1,1}\, a_{2,2}\, a_{3,3}\ldots a_{n,n}) = \mathrm{D}_n$$

était équivalente à celle-ci

$$\mathrm{S}[\pm\,\mathrm{S}(\pm\, a_{1,1}\, a_{2,2}\ldots a_{n-1,n-1})\, a_{n,n}].$$

On fera voir de même qu'elle est encore équivalente à

$$S[\pm S(\pm a_{1,1} a_{2,2} \ldots a_{p,p}) S(\pm a_{p+1,p+1} \ldots a_{n-1,n-1} a_{n,n})],$$

les opérations indiquées par le signe S pouvant être considérées comme relatives soit aux premiers, soit aux seconds indices. On a d'ailleurs par ce qui précède

$$S(\pm a_{1,1} a_{2,2} \ldots a_{p,p}) = \pm a^{(p)}_{1,1},$$
$$S(\pm a_{p+1,p+1} \ldots a_{n,n}) = \pm a^{(n-p)}_{P,P}.$$

Enfin les signes des quantités de la forme $a^{(p)}_{1,1}$, $a^{(n-p)}_{P,P}$ doivent être tels que les produits semblables à $a^{(p)}_{1,1} a^{(n-p)}_{P,P}$ soient, dans le déterminant D_n, affectés du signe $+$. Cela posé, il résulte de l'équation

$$D_n = S[\pm S(\pm a_{1,1} a_{2,2} \ldots a_{p,p}) S(\pm a_{p+1,p+1} \ldots a_{n-1,n-1} a_{n,n})],$$

que D_n est la somme de plusieurs produits de la forme

$$a^{(p)}_{1,1} a^{(n-p)}_{P,P}.$$

Selon que pour obtenir ces différents produits on échangera entre eux les premiers ou les seconds indices du système $(a_{1,n})$, on trouvera ou l'équation

$$D_n = a^{(p)}_{1,1} a^{(n-p)}_{P,P} + a^{(p)}_{2,1} a^{(n-p)}_{P-1,P} + \ldots + a^{(p)}_{P,1} a^{(n-p)}_{1,P}$$

ou celle-ci

$$D_n = a^{(p)}_{1,1} a^{(n-p)}_{P,P} + a^{(p)}_{1,2} a^{(n-p)}_{P,P-1} + \ldots + a^{(p)}_{1,P} a^{(n-p)}_{P,1}.$$

On aura de même, en général, les deux équations

$$D_n = a^{(p)}_{1,\pi} a^{(n-p)}_{P,P-\pi+1} + a^{(p)}_{2,\pi} a^{(n-p)}_{P-1,P-\pi+1} + \ldots + a^{(p)}_{P,\pi} a^{(n-p)}_{1,P-\pi+1},$$
$$D_n = a^{(p)}_{\mu,1} a^{(n-p)}_{P-\mu+1,P} + a^{(p)}_{\mu,2} a^{(n-p)}_{P-\mu+1,P} + \ldots + a^{(p)}_{\mu,P} a^{(n-p)}_{P-\mu+1,1}.$$

Ces deux équations sont comprises dans la suivante :

$$(54) \qquad D_n = S^P(a^{(p)}_{\mu,\pi} a^{(n-p)}_{P-\mu+1,P-\pi+1})$$

qui a lieu également, soit que l'on considère le signe S comme relatif à l'indice μ, soit qu'on le considère comme relatif à l'indice π.

Si dans l'équation (54) on suppose $p = 1$, elle deviendra

$$D_n = S^n(a_{\mu,\pi} b_{\mu,\pi}).$$

Suivant que l'on suppose dans cette dernière le signe S relatif à l'indice π ou à l'indice μ, on obtient l'une où l'autre des deux équations

$$D_n = S^n(a_{\mu,1} b_{\mu,1}),$$
$$D_n = S^n(a_{1,\pi} b_{1,\pi}) = S^n(a_{1,\mu} b_{1,\mu}),$$

qui ont déjà été trouvées dans le paragraphe III.

D_n étant une fonction symétrique alternée des indices du système $(a_{1,n})$ doit se réduire à zéro lorsqu'on y remplace un de ces indices par un autre. Si l'on opère de semblables remplacements à l'égard des indices qui occupent la première place dans le système $(a_{1,n})$ et qui entrent dans la combinaison (μ), cette même combinaison se trouvera transformée en une autre que je désignerai par (ν) et $a^{(p)}_{\mu,\pi}$ sera changé en $a^{(p)}_{\nu,\pi}$. D'ailleurs, en supposant le signe S relatif à π, on a

$$(54) \qquad D_n = S^P(a^{(p)}_{\mu,\pi} a^{(n-p)}_{P-\mu+1,P-\pi+1});$$

on aura donc par suite

$$(55) \qquad 0 = S^P(a^{(p)}_{\nu,\pi} a^{(n-p)}_{P-\mu+1,P-\pi+1}).$$

On aurait de même, en supposant le signe S relatif à l'indice μ et en désignant par (τ) une nouvelle combinaison différente de (π),

$$(56) \qquad 0 = S^P(a^{(p)}_{\mu,\tau} a^{(n-p)}_{P-\mu+1,P-\pi+1}).$$

Si dans les équations (55) et (56) on suppose $p = 1$, on retrouvera les équations

$$0 = S^n(a_{\nu,1} b_{\mu,1}),$$
$$0 = S^n(a_{1,\tau} b_{1,\pi}) = S^n(a_{1,\nu} b_{1,\mu})$$

que nous avons déjà obtenues dans le paragraphe III.

Si dans les équations (54) et (56) on suppose le signe S relatif à l'indice μ et que l'on donne successivement à π et à τ toutes les valeurs entières depuis 1 jusqu'à P, on obtiendra le système d'équations suivant dont l'ordre est égal à P :

$$(57)\quad \left\{\begin{array}{l}
D_n = a_{1,1}^{(p)} a_{P,P}^{(n-p)} + a_{2,1}^{(p)} a_{P-1,P}^{(n-p)} + \ldots + a_{P,1}^{(p)} a_{1,P}^{(n-p)}, \\
0 \;\; = a_{1,1}^{(p)} a_{P,P-1}^{(n-p)} \qquad\qquad\qquad + \ldots + a_{P,1}^{(p)} a_{1,P-1}^{(n-p)}, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\
0 \;\; = a_{1,1}^{(p)} a_{P,1}^{(n-p)} \qquad\qquad\qquad + \ldots + a_{P,1}^{(p)} a_{1,1}^{(n-p)}; \\[1ex]
0 \;\; = a_{1,2}^{(p)} a_{P,P}^{(n-p)} + a_{2,2}^{(p)} a_{P-1,P}^{(n-p)} + \ldots + a_{P,2}^{(p)} a_{1,P}^{(n-p)}, \\
D_n = a_{1,2}^{(p)} a_{P,P-1}^{(n-p)} \qquad\qquad\qquad + \ldots + a_{P,2}^{(p)} a_{1,P-1}^{(n-p)}, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\
0 \;\; = a_{1,2}^{(p)} a_{P,1}^{(n-p)} \qquad\qquad\qquad + \ldots + a_{P,2}^{(p)} a_{1,1}^{(n-p)}; \\[1ex]
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots; \\[1ex]
0 \;\; = a_{1,P}^{(p)} a_{P,P}^{(n-p)} + a_{2,P}^{(p)} a_{P-1,P}^{(n-p)} + \ldots + a_{P,P}^{(p)} a_{1,P}^{(n-p)}, \\
0 \;\; = a_{1,P}^{(p)} a_{P,P-1}^{(n-p)} \qquad\qquad\qquad + \ldots + a_{P,P}^{(p)} a_{1,P-1}^{(n-p)}, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\
D_n = a_{1,P}^{(p)} a_{P,1}^{(n-p)} \qquad\qquad\qquad + \ldots + a_{P,P}^{(p)} a_{1,1}^{(n-p)}.
\end{array}\right.$$

Ce système d'équations peut être représenté par le symbole

$$\Sigma[S^P(a_{\mu,\tau}^{(p)} a_{P-\mu+1,P-\pi+1}^{(n-p)}) = D_{\pi,\tau}],$$

pourvu que l'on suppose généralement

$$D_{\pi,\tau} = 0$$

lorsque π et τ sont inégaux et

$$D_{\pi,\pi} = D_{\tau,\tau} = D_n$$

dans le cas contraire.

Cela posé, désignons généralement par

$$D_1^{(p)}$$

le déterminant du système $(a_{1,P}^{(p)})$;

$$D_P^{(n-p)}$$

sera le déterminant du système complémentaire $(a_{1,P}^{(n-p)})$. D'ailleurs dans les équations (57) le déterminant du système dégagé doit être égal au produit des déterminants des deux systèmes engagés et comme

le système dégagé a pour déterminant

$$D_n^P,$$

on aura

$$(58)\qquad D_n^P = D_1^{(p)} D_P^{(n-p)}.$$

Lorsqu'on suppose $p = 1$, les équations (57) se confondent avec les équations (10) obtenues dans le paragraphe III, et l'équation (58) se change en la suivante :

$$D_n^n = D_n B_n$$

qui était déjà connue..

Si n est un nombre pair et que l'on suppose $p = \frac{n}{2}$, on aura

$$D_1^{(p)} = D_P^{(n-p)} = D_P^{\left(\frac{n}{2}\right)},$$

P étant égal à

$$\frac{n(n-1)\ldots\left(\frac{n}{2}+1\right)}{1.2.3\ldots\ldots\frac{n}{2}}.$$

L'équation (58) deviendra donc alors

$$D_n^P = \left(D_P^{\left(\frac{n}{2}\right)}\right)^2$$

ou

$$(59)\qquad D_P^{\left(\frac{n}{2}\right)} = D_n^{\frac{P}{2}}.$$

Elle fera ainsi connaître la valeur du déterminant $D_P^{\left(\frac{n}{2}\right)}$.

QUATRIÈME SECTION.

Des systèmes d'équations dérivées et de leurs déterminants.

§. XI. Les trois systèmes de quantités $(\alpha_{1,n})$, $(a_{1,n})$, $(m_{1,n})$ étan supposés liés entre eux par les équations

$$(33)\qquad \Sigma[S^n(\alpha_{\nu,1} a_{\mu,1}) = m_{\mu,\nu}],$$

les systèmes de même ordre dérivés des trois premiers, par exemple

$$(\alpha_{1,\mathrm{P}}^{(p)}),\quad (a_{1,\mathrm{P}}^{(p)}),\quad (m_{1,\mathrm{P}}^{(p)}),$$

seront liés entre eux par des équations semblables, ainsi qu'on va le faire voir.

Soient $\pi, \rho, \ldots, \tau$ plusieurs indices pris à volonté parmi ceux qui occupent la première place dans le système $(a_{1,n})$. Soit p le nombre de ces mêmes indices, et désignons par

$$(\mu)$$

la combinaison qui les renferme tous. Soient de même $\pi', \rho', \ldots, \tau'$ des indices en nombre égal à p pris parmi ceux qui occupent la première place dans le système $(\alpha_{1,n})$, et désignons par

$$(\nu)$$

la combinaison qui renferme ces derniers. On aura en général

$$m_{\mu,\nu}^{(p)} = \pm\, \mathrm{S}(\pm\, m_{\pi,\pi'}\, m_{\rho,\rho'} \ldots m_{\tau,\tau'}). \tag{60}$$

Si l'on développe le second membre de l'équation précédente, après y avoir substitué pour

$$m_{\pi,\pi'},\quad m_{\rho,\rho'},\quad \ldots,\quad m_{\tau,\tau'}$$

leurs valeurs données par les équations

$$\left\{\begin{aligned} m_{\pi,\pi'} &= \alpha_{\pi',1}\, a_{\pi,1} + \alpha_{\pi',2}\, a_{\pi,2} + \ldots + \alpha_{\pi',n}\, a_{\pi,n}, \\ m_{\rho,\rho'} &= \alpha_{\rho',1}\, a_{\rho,1} + \alpha_{\rho',2}\, a_{\rho,2} + \ldots + \alpha_{\rho',n}\, a_{\rho,n}, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ m_{\tau,\tau'} &= \alpha_{\tau',1}\, a_{\tau,1} + \alpha_{\tau',2}\, a_{\tau,2} + \ldots + \alpha_{\tau',n}\, a_{\tau,n}, \end{aligned}\right. \tag{61}$$

on trouvera que le développement ainsi formé renferme avec le produit

$$\alpha_{\pi',1}\,\alpha_{\rho',2} \ldots \alpha_{\tau',p}\, a_{\pi,1}\, a_{\rho,2} \ldots a_{\tau,p}:$$

1° tous les produits que l'on peut déduire de celui-ci par des transpositions opérées entre les indices

$$\pi,\quad \rho,\quad \ldots,\quad \tau$$

qui occupent la première place dans a et par des transpositions opérées entre les indices

$$\pi',\quad \rho',\quad \ldots,\quad \tau'$$

qui occupent la première place dans α; 2° tous les produits que l'on peut en déduire par des transpositions opérées entre les indices

$$1,\quad 2,\quad 3,\quad \ldots,\quad p,\quad \ldots,\quad n-1,\quad n$$

qui occupent la seconde place dans les deux systèmes $(a_{1,n})$ et $(\alpha_{1,n})$.

Cela posé, le développement de

$$\mathrm{S}(\pm\, m_{\pi,\pi'}\, m_{\rho,\rho'} \ldots m_{\tau,\tau'})$$

devant être une fonction symétrique alternée relativement aux indices $\pi, \rho, \ldots, \tau$ qui occupent la première place dans a, et relativement aux indices $\pi', \rho', \ldots, \tau'$ qui occupent la première place dans α, ne pourra renfermer le produit

$$\alpha_{\pi',1}\,\alpha_{\rho',2} \ldots \alpha_{\tau',p}\, a_{\pi,1}\, a_{\rho,2} \ldots a_{\tau,p}$$

sans renfermer en même temps le produit

$$\mathrm{S}(\pm\, \alpha_{\pi',1}\,\alpha_{\rho',2} \ldots \alpha_{\tau',p})\, \mathrm{S}(\pm\, a_{\pi,1}\, a_{\rho,2} \ldots a_{\tau,p}),$$

qui d'après les conventions établies doit être désigné par

$$\pm\, \alpha_{\nu,1}^{(p)}\, a_{\mu,1}^{(p)},$$

puisque les trois combinaisons

$$\pi'.\rho'.\ldots.\tau',\quad \pi.\rho.\ldots.\tau,\quad 1.2.3.\ldots.p$$

correspondent aux trois numéros

$$(\nu),\qquad (\mu),\qquad (1).$$

Le même développement, devant être une fonction symétrique permanente relativement aux indices toujours égaux qui affectent en seconde ligne a et α dans chacune des équations (61), ne pourra renfermer le produit

$$\alpha_{\nu,1}^{(p)}\, a_{\mu,1}^{(p)} = \pm\, \mathrm{S}(\pm\, \alpha_{\pi',1}\,\alpha_{\rho',2} \ldots \alpha_{\tau',p})\, \mathrm{S}(\pm\, a_{\pi,1}\, a_{\rho,2} \ldots a_{\tau,p})$$

sans renfermer la somme de tous ceux que l'on peut déduire du précédent par des transpositions opérées entre les seconds indices des deux systèmes $(a_{1,n})$ et $(\alpha_{1,n})$; et comme pour opérer ces diverses transpositions il suffit de remplacer successivement la combinaison (1) par les suivantes (2), (3), ..., (P) ou, ce qui revient au même, le produit $\alpha_{\nu,1}^{(p)} a_{\mu,1}^{(p)}$ par les produits

$$\alpha_{\nu,2}^{(p)} a_{\mu,2}^{(p)},\quad \alpha_{\nu,3}^{(p)} a_{\mu,3}^{(p)},\quad \ldots,\quad \alpha_{\nu,\mathrm{P}}^{(p)} a_{\mu,\mathrm{P}}^{(p)},$$

le développement cherché sera nécessairement de la forme

$$c(\alpha_{\nu,1}^{(p)} a_{\mu,1}^{(p)} + \alpha_{\nu,2}^{(p)} a_{\mu,2}^{(p)} + \ldots + \alpha_{\nu,\mathrm{P}}^{(p)} a_{\mu,\mathrm{P}}^{(p)}) = c\,\mathrm{S}^{\mathrm{P}}(\alpha_{\nu,1}^{(p)} a_{\mu,1}^{(p)})$$

et par suite on aura

$$m_{\mu,\nu}^{(p)} = c\,\mathrm{S}^{\mathrm{P}}(\alpha_{\nu,1}^{(p)} a_{\mu,1}^{(p)}),$$

le signe S étant relatif à l'indice 1 et c désignant une constante arbitraire que l'on déterminera de la manière suivante. Si l'on développe le produit

$$\alpha_{\nu,1}^{(p)} a_{\mu,1}^{(p)} = \pm\,\mathrm{S}(\pm\,\alpha_{\pi',1}\alpha_{\rho',2}\ldots\alpha_{\tau',p})\,\mathrm{S}(\pm\,a_{\pi,1}a_{\rho,2}\ldots a_{\tau,p}),$$

on trouvera pour premier terme le produit suivant :

$$\pm\,\alpha_{\pi',1}\alpha_{\rho',2}\ldots\alpha_{\tau',p}\,a_{\pi,1}a_{\rho,2}\ldots a_{\tau,p}.$$

D'ailleurs l'inspection des équations (61) suffit pour faire voir que ce dernier produit doit être compris une seule fois dans le développement de

$$m_{\mu,\nu}^{(p)} = \pm\,\mathrm{S}(\pm\,m_{\pi,\pi'}m_{\rho,\rho'}\ldots m_{\tau,\tau'}).$$

On a donc nécessairement $c = \pm 1$. Le choix que l'on doit faire ici entre les deux signes + et − dépend de la manière dont on aura déterminé les signes respectifs des trois quantités

$$m_{\mu,\nu}^{(p)},\quad a_{\mu,1}^{(p)},\quad \alpha_{\nu,1}^{(p)}$$

ou, ce qui revient au même, les signes des trois suivantes :

$$\begin{aligned}
\alpha_{\mu,\nu}^{(p)} &= \pm\,\mathrm{S}(\alpha_{\pi,\pi'}\alpha_{\rho,\rho'}\ldots\alpha_{\tau,\tau'}),\\
\alpha_{\mu,1}^{(p)} &= \pm\,\mathrm{S}(\pm\,\alpha_{\pi,1}\alpha_{\rho,2}\ldots\alpha_{\tau,p}),\\
\alpha_{\nu,1}^{(p)} &= \pm\,\mathrm{S}(\pm\,\alpha_{\pi',1}\alpha_{\rho',2}\ldots\alpha_{\tau',p}).
\end{aligned}$$

Il est facile de voir que l'on aura $c = 1$ si l'on suppose que le signe du produit

$$\alpha_{\pi,\pi'}\alpha_{\rho,\rho'}\ldots\alpha_{\tau,\tau'}$$

dans $\alpha_{\mu,\nu}^{(p)}$ soit égal au produit du signe de

$$\alpha_{\pi,1}\alpha_{\rho,2}\ldots\alpha_{\tau,p}$$

dans $\alpha_{\mu,1}^{(p)}$ par le signe de

$$\alpha_{\pi',1}\alpha_{\rho',2}\ldots\alpha_{\tau',p}$$

dans $\alpha_{\nu,1}^{(p)}$. Si l'on admet cette hypothèse, l'équation rapportée plus haut deviendra

$$m_{\mu,\nu}^{(p)} = \mathrm{S}^{\mathrm{P}}(\alpha_{\nu,1}^{(p)} a_{\mu,1}^{(p)}). \tag{62}$$

Si dans cette équation on donne successivement à μ et à ν toutes les valeurs entières depuis 1 jusqu'à P, on aura un système d'équations symétriques de l'ordre P, que l'on pourra représenter par le symbole

$$\Sigma[\mathrm{S}^{\mathrm{P}}(\alpha_{\nu,1}^{(p)} a_{\mu,1}^{(p)}) = m_{\mu,\nu}^{(p)}], \tag{63}$$

P étant toujours égal à

$$\frac{n(n-1)\ldots(n-p+1)}{1.2.3.\ldots.p}.$$

Pour déduire des équations (33) les équations (63), il suffit évidemment de remplacer les trois systèmes de quantités

$$(a_{1,n}),\quad (\alpha_{1,n}),\quad (m_{1,n})$$

par les systèmes dérivés de même ordre

$$(a_{1,\mathrm{P}}^{(p)}),\quad (\alpha_{1,\mathrm{P}}^{(p)}),\quad (m_{1,\mathrm{P}}^{(p)}).$$

Je dirai pour cette raison que le second système d'équations est dérivé du premier.

Si dans le symbole précédent on suppose $p = 1$, on retrouvera les équations (33). Si dans le même symbole on change

$$\mu \text{ en } \mathrm{P}-\mu+1,\quad \nu \text{ en } \mathrm{P}-\nu+1,\quad 1 \text{ en } \mathrm{P}$$

et que l'on fasse ensuite $p = n - 1$, on aura

$$\mathrm{P} = n, \quad \alpha^{(p)}_{1,\mathrm{P}-\nu+1,\mathrm{P}} = \beta_{\nu,1}, \quad a^{(p)}_{1,\mathrm{P}-\mu+1,\mathrm{P}} = b_{\mu,1}, \quad m^{(p)}_{\mathrm{P}-\mu+1,\mathrm{P}-\nu+1} = r_{\mu,\nu}$$

et par suite le symbole (63) se changera dans le suivant :

$$\Sigma[\mathrm{S}^n(\beta_{\nu,1}\, b_{\mu,1}) = m_{\mu,\nu}],$$

auquel on était déjà parvenu directement.

Si dans les équations (63) on change p en $n-p$, on aura

$$(64)\qquad \Sigma[\mathrm{S}^{\mathrm{P}}(\alpha^{(n-p)}_{\nu,1}\, a^{(n-p)}_{\mu,1}) = m^{(n-p)}_{\mu,\nu}].$$

Désignons par

$$\delta^{(p)}_1, \quad \mathrm{D}^{(p)}_1, \quad \mathrm{M}^{(p)}_1$$

les déterminants des trois systèmes

$$(\alpha^{(p)}_{1,\mathrm{P}}), \quad (a^{(p)}_{1,\mathrm{P}}), \quad (m^{(p)}_{1,\mathrm{P}});$$

on aura, en vertu des équations (63),

$$(65)\qquad \mathrm{M}^{(p)}_1 = \mathrm{D}^{(p)}_1\, \delta^{(p)}_1.$$

On aura de même

$$\mathrm{M}^{(n-p)}_{\mathrm{P}} = \mathrm{D}^{(n-p)}_{\mathrm{P}}\, \delta^{(n-p)}_{\mathrm{P}}.$$

Si l'on multiplie ces deux équations l'une par l'autre, on aura en vertu de l'équation (58)

$$\mathrm{M}^{\mathrm{P}}_n = \mathrm{D}^{\mathrm{P}}_n\, \delta^{\mathrm{P}}_n$$

et par suite

$$\mathrm{M}_n = \mathrm{D}_n\, \delta_n.$$

On obtient aussi ce dernier résultat en supposant, dans l'équation (65), $p = 1$.

Si l'on ajoute entre elles les équations (63), on aura la suivante :

$$(66)\qquad \mathrm{S}^{\mathrm{P}}[\mathrm{S}^{\mathrm{P}}(\alpha^{(p)}_{\mu,\nu})\, \mathrm{S}^{\mathrm{P}}(a^{(p)}_{\mu,\nu})] = \mathrm{S}^{\mathrm{P}}\mathrm{S}^{\mathrm{P}}(m^{(p)}_{\mu,\nu}),$$

le premier signe S, c'est-à-dire le signe extérieur, étant relatif à l'in-

dice ν et les autres, c'est-à-dire les signes intérieurs, étant relatifs à l'indice μ.

§ XII. En réunissant ce que la théorie précédente offre de plus remarquable relativement aux systèmes d'équations dérivées, on formera le Tableau suivant :

Soient toujours $(\alpha_{1,n})$, $(a_{1,n})$, $(m_{1,n})$ trois systèmes de quantités liés entre eux par les équations symétriques

$$(33)\qquad \Sigma[\mathrm{S}^n(\alpha_{\nu,1}\, a_{\mu,1}) = m_{\mu,\nu}].$$

Faisons à l'ordinaire

$$\mathrm{P} = \frac{n(n-1)\ldots(n-p+1)}{1.2.3\ldots\ldots p},$$

et désignons par

$$(\alpha^{(p)}_{1,\mathrm{P}}), \quad (\alpha^{(n-p)}_{1,\mathrm{P}}), \quad (a^{(p)}_{1,\mathrm{P}}), \quad (a^{(n-p)}_{1,\mathrm{P}}), \quad (m^{(p)}_{1,\mathrm{P}}), \quad (m^{(n-p)}_{1,\mathrm{P}})$$

les systèmes de l'ordre P, dérivés des trois systèmes donnés, et qui deux à deux sont complémentaires l'un de l'autre. Enfin, soient respectivement

$$\delta^{(p)}_1, \quad \delta^{(n-p)}_{\mathrm{P}}, \quad \mathrm{D}^{(p)}_1, \quad \mathrm{D}^{(n-p)}_{\mathrm{P}}, \quad \mathrm{M}^{(p)}_1, \quad \mathrm{M}^{(n-p)}_{\mathrm{P}}$$

les déterminants de ces différents systèmes; on aura les équations suivantes :

$$(67)\qquad \left\{\begin{array}{l} \mathrm{M}^{(p)}_1 = \mathrm{D}^{(p)}_1\, \delta^{(p)}_1, \qquad \mathrm{M}^{(n-p)}_{\mathrm{P}} = \mathrm{D}^{(n-p)}_{\mathrm{P}}\, \delta^{(n-p)}_{\mathrm{P}}, \\ \delta^{\mathrm{P}}_n = \delta^{(p)}_1\, \delta^{(n-p)}_{\mathrm{P}}, \qquad \mathrm{D}^{\mathrm{P}}_n = \mathrm{D}^{(p)}_1\, \mathrm{D}^{(n-p)}_{\mathrm{P}}, \qquad \mathrm{M}^{\mathrm{P}}_n = \mathrm{M}^{(p)}_1\, \mathrm{M}^{(n-p)}_{\mathrm{P}}; \end{array}\right.$$

$$(68)\qquad \left\{\begin{array}{l} \delta_n = \mathrm{S}^{\mathrm{P}}(\alpha^{(p)}_{\mu,\pi}\, \alpha^{(n-p)}_{\mathrm{P}-\mu+1,\mathrm{P}-\pi+1}), \qquad \mathrm{D}_n = \mathrm{S}^{\mathrm{P}}(a^{(p)}_{\mu,\pi}\, a^{(n-p)}_{\mathrm{P}-\mu+1,\mathrm{P}-\pi+1}), \\ \qquad \mathrm{M}_n = \mathrm{S}^{\mathrm{P}}(m^{(p)}_{\mu,\pi}\, m^{(n-p)}_{\mathrm{P}-\mu+1,\mathrm{P}-\pi+1}); \\ 0 = \mathrm{S}^{\mathrm{P}}(\alpha^{(p)}_{\mu,\pi}\, \alpha^{(n-p)}_{\mathrm{P}-\nu+1,\mathrm{P}-\pi+1}), \qquad 0 = \mathrm{S}^{\mathrm{P}}(a^{(p)}_{\mu,\pi}\, a^{(n-p)}_{\mathrm{P}-\nu+1,\mathrm{P}-\pi+1}), \\ \qquad 0 = \mathrm{S}^{\mathrm{P}}(m^{(p)}_{\mu,\pi}\, m^{(n-p)}_{\mathrm{P}-\nu+1,\mathrm{P}-\pi+1}); \\ 0 = \mathrm{S}^{\mathrm{P}}(\alpha^{(p)}_{\mu,\pi}\, \alpha^{(n-p)}_{\mathrm{P}-\mu+1,\mathrm{P}-\tau+1}), \qquad 0 = \mathrm{S}^{\mathrm{P}}(a^{(p)}_{\mu,\pi}\, a^{(n-p)}_{\mathrm{P}-\mu+1,\mathrm{P}-\tau+1}), \\ \qquad 0 = \mathrm{S}^{\mathrm{P}}(m^{(p)}_{\mu,\pi}\, m^{(n-p)}_{\mathrm{P}-\mu+1,\mathrm{P}-\tau+1}); \end{array}\right.$$

$$(69)\qquad \Sigma[\mathrm{S}^{\mathrm{P}}(\alpha^{(p)}_{\nu,1}\, a^{(p)}_{\mu,1}) = m^{(p)}_{\mu,\nu}], \qquad \Sigma[\mathrm{S}^{\mathrm{P}}(\alpha^{(n-p)}_{\nu,1}\, a^{(n-p)}_{\mu,1}) = m^{(n-p)}_{\mu,\nu}];$$

$$(70)\qquad \left\{\begin{array}{l} \mathrm{S}^{\mathrm{P}}[\mathrm{S}^{\mathrm{P}}(a^{(p)}_{\mu,\nu})\, \mathrm{S}^{\mathrm{P}}(a^{(p)}_{\mu,\nu})] \quad = \mathrm{S}^{\mathrm{P}}\mathrm{S}^{\mathrm{P}}(m^{(p)}_{\mu,\nu}), \\ \mathrm{S}^{\mathrm{P}}[\mathrm{S}^{\mathrm{P}}(\alpha^{(n-p)}_{\mu,\nu})\, \mathrm{S}^{\mathrm{P}}(a^{(n-p)}_{\mu,\nu})] = \mathrm{S}^{\mathrm{P}}\mathrm{S}^{\mathrm{P}}(m^{(n-p)}_{\mu,\nu}). \end{array}\right.$$

Si l'on suppose n pair et $p = \frac{n}{2}$, alors on aura

$$p = n - p = \frac{n}{2}, \qquad P = \frac{n(n-1)\ldots\left(\frac{n}{2}+1\right)}{1.2.3\ldots\ldots\frac{n}{2}},$$

$$\delta_P^{(p)} = \delta_P^{(n-p)}, \qquad D_P^{(p)} = D_P^{(n-p)}, \qquad M_P^{(p)} = M_P^{(n-p)}$$

et, par suite, les équations (67) donneront pour

$$\delta_P^{(p)}, \quad D_P^{(p)}, \quad M_P^{(p)}$$

les valeurs suivantes :

$$\delta_P^{\left(\frac{n}{2}\right)} = \delta_n^{\frac{P}{2}}, \qquad D_P^{\left(\frac{n}{2}\right)} = D_n^{\frac{P}{2}}, \qquad M_P^{\left(\frac{n}{2}\right)} = M_n^{\frac{P}{2}}. \tag{71}$$

On vient de voir combien de transformations analytiques différentes peuvent se déduire de la considération des systèmes d'équations symétriques. On doit surtout remarquer le théorème renfermé dans l'équation

$$M_n = D_n \delta_n,$$

en vertu duquel le produit de deux déterminants est encore un déterminant et dont les recherches faites par M. Gauss sur les polynomes du deuxième degré à deux et à trois variables offrent de nombreuses applications. J'avais rencontré l'été dernier, à Cherbourg, où j'étais fixé par les travaux de mon état, ce théorème et quelques autres du même genre, en cherchant à généraliser les formules de M. Gauss. M. Binet, dont je me félicite d'être l'ami, avait été conduit aux mêmes résultats par des recherches différentes. De retour à Paris, j'étais occupé de poursuivre mon travail, lorsque j'allai le voir. Il me montra son théorème qui était semblable au mien. Seulement il désignait sous le nom de *résultante* ce que j'avais appelé *déterminant*. Il me dit en outre qu'il avait généralisé le théorème dont il s'agit en substituant au produit de deux résultantes des sommes de produits de même espèce. J'avais dès lors déjà démontré le théorème suivant :

D'un système quelconque d'équations symétriques on peut déduire cinq

autres systèmes du même ordre; mais on n'en saurait déduire un plus grand nombre.

J'ai démontré depuis, à l'aide des méthodes précédentes, cet autre théorème :

D'un système quelconque d'équations symétriques de l'ordre n on peut toujours déduire deux systèmes d'équations symétriques de l'ordre

$$\frac{n(n-1)}{2},$$

deux systèmes d'équations symétriques de l'ordre

$$\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

En ajoutant entre elles les équations symétriques comprises dans un même système, on obtient, comme on l'a vu, les formules (50), (51) et (70) qui me paraissent devoir être semblables à celles dont M. Binet m'a parlé.