569.

Fonctions symboliques. — *Sur les produits symboliques et les fonctions symboliques.*

C. R., T. XLIII, p. 169 (28 juillet 1856).

La lettre s désignant une fonction d'une ou de plusieurs variables indépendantes, concevons que l'on multiplie ses différences, ses différentielles ou ses dérivées des divers ordres par d'autres fonctions de ces mêmes variables, puis que l'on renferme entre deux parenthèses la somme des produits ainsi obtenus, et qu'après avoir effacé partout la lettre s, on se contente d'écrire cette lettre une seule fois à la suite de la dernière parenthèse, on obtiendra une expression qui se présentera sous la forme d'un produit, et qui sera effectivement appelée *produit symbolique*. Les deux *facteurs* de ce produit symbolique seront le multiplicande s et un *polynôme symbolique* dont chaque *terme* sera le produit d'une lettre caractéristique par une fonction des variables indépendantes. Si les termes disparaissent tous à l'exception d'un seul, on pourra omettre les parenthèses. Alors aussi le multiplicateur symbolique deviendra un monôme qui pourra se réduire, dans certains cas, à une lettre caractéristique indiquant une opération à laquelle on soumet la fonction s.

Comme on l'a fait quelquefois, nous n'hésiterons pas à simplifier souvent les formules à l'aide du procédé qui consiste à représenter un polynôme symbolique par une seule lettre ou par un seul caractère. Nous affecterons spécialement à cet usage les deux caractères ∇, $\square$, que j'appellerai *trigone* et *tétragone*, parce que leurs formes sont celles d'un triangle et d'un carré.

La nature d'un facteur ou multiplicateur symbolique dépend de la nature des opérations indiquées par les lettres caractéristiques qu'il renferme. On peut dire qu'il est une fonction symbolique de ces lettres. On peut même dire généralement qu'il en est une fonction entière, attendu que, si aux divers signes d'opérations, c'est-à-dire aux diverses lettres caractéristiques, on substituait des quantités véritables, le multiplicateur symbolique deviendrait une fonction entière de ces quantités.

D'ailleurs rien n'empêche de faire croître indéfiniment le nombre des termes dont se compose un facteur symbolique. Mais alors, tandis que ce nombre devient de plus en plus grand, le produit d'une fonction donnée s par ce facteur symbolique peut converger ou ne pas converger vers une limite finie. Si la limite existe, le multiplicateur de s dans cette limite sera encore un facteur symbolique; mais ce facteur, composé d'un nombre infini de termes, sera la *somme d'une série symbolique* qui sera dite *convergente*. Toutefois, et il importe de le remarquer, la série pourra être convergente pour certaines valeurs ou formes de la fonction s, et cesser d'être convergente, par conséquent devenir divergente, pour d'autres valeurs ou formes de s. Ainsi, pour une série symbolique, la convergence peut dépendre, non seulement des valeurs attribuées aux variables comprises dans la série, mais en outre de la nature de la fonction qui doit être multipliée par la somme de cette série.

Supposons maintenant qu'une série symbolique soit convergente et que la somme de la série puisse être exprimée en termes finis par une certaine fonction algébrique ou transcendante, dans le cas où l'on remplace les lettres caractéristiques par des quantités variables. La somme de la série symbolique sera naturellement exprimée par la même fonction algébrique ou transcendante, si l'on substitue à ces quantités variables les lettres par lesquelles on les avait d'abord remplacées, et l'on obtiendra ainsi ce que nous appellerons une fonction symbolique *algébrique* ou *transcendante*. Toutefois, cette fonction ne pourra pas être appliquée sans restriction, comme facteur symbolique, à un multiplicande quelconque s, quelles que soient les valeurs attribuées aux variables indépendantes comprises dans ce multiplicande; et, le plus ordinairement, il faudra renfermer ces valeurs entre certaines limites, pour qu'il soit permis de multiplier s par la fonction symbolique.

Les fonctions symboliques, telles que je viens de les définir, ont déjà été introduites par les géomètres dans quelques formules de haute Analyse. L'usage habituel de ces fonctions dans les Calculs différentiel et intégral offrirait de grands avantages; mais ces avantages seraient contrebalancés par de graves inconvénients, si l'on ne commençait par déterminer les conditions de convergence des séries symboliques, ou, ce qui revient au même, par rechercher dans quel cas on peut à un multiplicande donné appliquer une fonction symbolique donnée algébrique ou transcendante.

J'ai déjà, dans le Mémoire lithographié de 1835 [1], traité cette question, en m'appuyant pour la résoudre sur une formule générale que j'avais donnée dans le Mémoire du 11 octobre 1831 [2]. Mais il m'a semblé qu'on pouvait simplifier et perfectionner encore, même après les travaux récents de quelques géomètres sur des sujets analogues, les résultats auxquels j'avais été conduit. Comme, parmi les fonctions transcendantes, les exponentielles sont celles qui reparaissent le plus souvent dans l'Analyse, il était nécessaire de considérer spécialement les exponentielles symboliques, et de rechercher avec soin leur nature, leurs propriétés et les conditions de convergence des séries symboliques dont elles représentent les sommes. Ces motifs ont dû m'engager à fixer particulièrement sur ces exponentielles l'attention du lecteur.

Analyse.

§ I. — *Produits symboliques.*

Soit s une fonction donnée d'une ou de plusieurs variables indépendantes. Pour indiquer les différentielles totales et partielles de s, je joindrai à la notation de Leibnitz celle dont je me suis constamment

[1] *Œuvres de Cauchy*, S. II, T. XV.
[2] *Ibid.*, S. I, T. XI.

servi dans mes Leçons à l'École Polytechnique. En conséquence, j'indiquerai la *différentielle totale* par la lettre caractéristique d, et les *différentielles partielles* relatives aux variables $x, y, z, \ldots$, par cette même lettre au bas de laquelle j'écrirai comme indices ces mêmes variables. Alors, les différentielles partielles étant indiquées par les lettres caractéristiques

$$\mathrm{d}_x, \quad \mathrm{d}_y, \quad \mathrm{d}_z, \quad \ldots,$$

on aura généralement

$$\mathrm{d}s = \mathrm{d}_x s + \mathrm{d}_y s + \mathrm{d}_z s + \ldots. \tag{1}$$

De plus, en appelant *dérivée totale* et *dérivées partielles* ce que deviennent la différentielle totale et les différentielles partielles quand on réduit à l'unité la différentielle de chacune des variables indépendantes, je remplacerai la lettre d par la lettre D, quand il s'agira de représenter, non plus des différentielles, mais des dérivées. Cela posé, l'équation (1) entraînera évidemment la suivante :

$$\mathrm{D}s = \mathrm{D}_x s + \mathrm{D}_y s + \mathrm{D}_z s + \ldots. \tag{2}$$

Enfin je désignerai par

$$\Delta s$$

la différence ou variation finie de s, correspondante à des variations finies et simultanées

$$\Delta x, \quad \Delta y, \quad \Delta z, \quad \ldots$$

des variables

$$x, \quad y, \quad z, \quad \ldots;$$

et, quand il s'agira de représenter une variation finie de s correspondante à une variation finie Δx, ou Δy, ou Δz, etc., d'une seule variable x, ou y, ou z, etc., je placerai cette variable comme indice au bas de la lettre caractéristique Δ, en substituant à la notation Δs l'une des notations

$$\Delta_x s, \quad \Delta_y s, \quad \Delta_z s, \quad \ldots.$$

Quant aux différentielles, dérivées et différences des divers ordres, je suivrai, pour les représenter, le procédé universellement admis, et quand il s'agira d'indiquer une différentielle, une dérivée ou une différence de l'ordre n, relative à toutes les variables ou à l'une d'elles, je remplacerai la lettre caractéristique adoptée pour le premier ordre par la *puissance* $n^{\text{ième}}$ de cette lettre caractéristique. Ainsi, par exemple, la dérivée du sixième ordre de la fonction s différentiée une fois par rapport à x, deux fois par rapport à y, trois fois par rapport à z, sera représentée par la notation

$$D_x D_y^2 D_z^3 s.$$

Ces conventions étant adoptées, concevons que les différentielles, dérivées et différences finies des divers ordres de la fonction s soient respectivement multipliées par de nouvelles fonctions X, Y, Z, ..., des variables indépendantes x, y, z, ..., puis qu'après avoir renfermé entre deux parenthèses la somme des produits ainsi obtenus, on enlève la lettre s à chacun de ces produits en la transportant à la suite de la seconde parenthèse et l'y écrivant une seule fois. On obtiendra une expression par laquelle nous représenterons encore la somme trouvée; et cette expression sera un *produit symbolique*. Ainsi, par exemple, en opérant comme on vient de le dire, on transformera la somme

$$X d_x s + Y d_y s + Z d_z s + \ldots$$

en un produit symbolique, et dans ce produit, représenté par la notation

$$(X d_x + Y d_y + Z d_z + \ldots) s,$$

le multiplicateur sera le polynôme symbolique

$$X d_x + Y d_y + Z d_z + \ldots.$$

Si l'on représente ce multiplicateur par le trigone ∇, l'équation symbolique

$$(3) \qquad \nabla = X d_x + Y d_y + Z d_z + \ldots$$

entraînera toujours avec elle la formule

$$(4) \qquad \nabla s = X d_x s + Y d_y s + Z d_z s + \ldots.$$

Si la quantité variable ∇s que détermine l'équation (4) est à son tour soumise une ou plusieurs fois de suite au système d'opérations qu'indique le trigone ∇, alors, à la place de ∇s, on obtiendra successivement le troisième, le quatrième, ... terme de la série

$$(5) \qquad s, \quad \nabla s, \quad \nabla\nabla s, \quad \nabla\nabla\nabla s, \quad \ldots.$$

En suivant encore ici le procédé à l'aide duquel on exprime les différences, différentielles et dérivées des divers ordres, j'écrirai simplement

$$\nabla^2, \quad \nabla^3, \quad \ldots$$

au lieu de

$$\nabla\nabla, \quad \nabla\nabla\nabla, \quad \ldots.$$

Cela posé, les divers termes de la série (5), exprimés par les notations

$$(6) \qquad s, \quad \nabla s, \quad \nabla^2 s, \quad \nabla^3 s, \quad \ldots,$$

seront les produits symboliques de la fonction s par les diverses puissances entières, nulle et positives du facteur symbolique ∇, ou, ce qui revient au même, par les divers termes de la progression symbolique

$$(7) \qquad 1, \quad \nabla, \quad \nabla^2, \quad \nabla^3, \quad \ldots.$$

Dans le cas particulier où l'on a

$$X = 1, \qquad Y = 1, \qquad Z = 1, \qquad \ldots,$$

le trigone ∇ déterminé par la formule (3) se réduit à d, et le produit symbolique ∇s à la différentielle totale ds. Alors aussi ∇^n et $\nabla^n s$ se réduisent à d^n et $d^n s$.

Le cas où la fonction s est monodrome et monogène par rapport aux variables x, y, z, ... pour des valeurs quelconques attribuées à ces variables, ou du moins tant que ces valeurs restent comprises entre certaines limites, mérite une attention spéciale. On a, dans ce cas,

$$(8) \qquad \begin{cases} d_x s = D_x s\, dx, & d_y s = D_y s\, dy, \\ d_x = dx\, D_x, & d_y = dy\, D_y, \quad \ldots, \end{cases}$$

et par suite, en nommant a, b, c, ... les valeurs attribuées aux différentielles dx, dy, dz, ..., on tire de l'équation (4)

$$\nabla s = aX\mathrm{D}_x s + bY\mathrm{D}_y s + cZ\mathrm{D}_z s + \ldots. \tag{9}$$

Alors aussi la formule (3) donne

$$\nabla = aX\mathrm{D}_x + bY\mathrm{D}_y + cZ\mathrm{D}_z + \ldots. \tag{10}$$

Si chacune des constantes a, b, c, ... se réduit à l'unité, on aura simplement

$$\nabla = X\mathrm{D}_x + Y\mathrm{D}_y + Z\mathrm{D}_z, \quad \ldots. \tag{11}$$

Enfin, si chacune des fonctions X, Y, Z, ... se réduit aussi à l'unité, on aura

$$\nabla = \mathrm{D}_x + \mathrm{D}_y + \mathrm{D}_z + \ldots = \mathrm{D}.$$

Le facteur ∇, défini par l'une des équations symboliques (9), (10), (11), est une fonction symbolique, non seulement entière, mais linéaire et homogène des lettres caractéristiques d_x, d_y, d_z, ..., ou D_x, D_y, D_z, ... La $n^{\text{ième}}$ puissance du facteur où ∇^n est encore une fonction entière et homogène de ces lettres, non linéaire, mais du degré n.

Le produit de deux ou de plusieurs facteurs symboliques dépend généralement de l'ordre dans lequel les multiplications s'effectuent. Ainsi, par exemple, si l'on pose

$$\nabla = X\mathrm{D}_x, \qquad \Box = \mathrm{D}_y,$$

on aura, en vertu des règles de la différentiation,

$$\nabla\Box s = X\mathrm{D}_x\mathrm{D}_y s,$$

par conséquent

$$\nabla\Box = X\mathrm{D}_x\mathrm{D}_y;$$

et

$$\Box\nabla s = X\mathrm{D}_y\mathrm{D}_x s + \mathrm{D}_y X\mathrm{D}_x s,$$

par conséquent

$$\Box\nabla = X\mathrm{D}_y\mathrm{D}_x + \mathrm{D}_y X\mathrm{D}_x,$$

et

$$\Box\nabla = \nabla\Box + \mathrm{D}_y X\mathrm{D}_x.$$

Donc alors les produits $\Box\nabla$, $\Box\nabla$ ne deviendront égaux entre eux que si la fonction X cesse de renfermer la variable y.

Lorsqu'un facteur symbolique est la somme de plusieurs termes respectivement proportionnels aux lettres caractéristiques d_x, d_y, d_z, ... ou D_x, D_y, D_z, ..., les règles connues de la différentiation suffisent à la détermination des termes dont se compose une puissance quelconque de ce facteur. Les mêmes règles déterminent aussi les divers termes dont se compose le produit de plusieurs facteurs symboliques de l'espèce indiquée. Il y a plus : ces règles fourniront encore le produit de plusieurs facteurs symboliques dont chacun serait la somme de plusieurs autres. Les formules ainsi obtenues seront précisément celles qui se rapportent à la multiplication des sommes de quantités, avec cette différence toutefois que, dans le cas où les quantités sont remplacées par les facteurs symboliques, on doit tenir compte de l'ordre dans lequel les multiplications s'effectuent. Ainsi, par exemple, si la somme ∇ de plusieurs facteurs symboliques ∇_1, ∇_2, ∇_3, ... est multipliée par un autre facteur symbolique $\Box$, l'équation

$$\nabla = \nabla_1 + \nabla_2 + \nabla_3 + \ldots \tag{12}$$

entrainera la suivante

$$\Box\nabla = \Box\nabla_1 + \Box\nabla_2 + \Box\nabla_3 + \ldots, \tag{13}$$

et l'on aura aussi

$$\nabla\Box = \nabla_1\Box + \nabla_2\Box + \nabla_3\Box + \ldots. \tag{14}$$

Mais la formule (13) ou (14) deviendrait généralement inexacte si, dans l'un des produits qu'offre le premier ou le second membre, on renversait l'ordre des multiplications. Pareillement, si l'on suppose

$$\nabla = \nabla_1 + \nabla_2, \tag{15}$$

on en conclura

$$\nabla^2 = \nabla_1^2 + \nabla_1\nabla_2 + \nabla_2\nabla_1 + \nabla_2^2. \tag{16}$$

Mais, le produit $\nabla_1 \nabla_2$ étant généralement distinct du produit $\nabla_2 \nabla_1$, la réduction de la formule (16) à la suivante

$$\nabla^2 = \nabla_1^2 + 2\nabla_1\nabla_2 + \nabla_2^2 \tag{17}$$

ne sera permise que dans certains cas spéciaux. Les réductions de ce genre s'effectueront, par exemple, si l'on emploie des facteurs symboliques dont chacun, exprimé à l'aide des lettres caractéristiques, en soit une fonction linéaire à coefficients constants.

Ainsi, en particulier, en élevant à la puissance du degré n les deux membres de chacune des formules symboliques

$$\left\{\begin{array}{l} \mathrm{d} = \mathrm{d}_x + \mathrm{d}_y + \mathrm{d}_z + \ldots, \\ \mathrm{D} = \mathrm{D}_x + \mathrm{D}_y + \mathrm{D}_z + \ldots, \end{array}\right. \tag{18}$$

on obtiendra, pour déterminer d^n ou D^n considérés comme fonctions entières des lettres caractéristiques $\mathrm{d}_x, \mathrm{d}_y, \mathrm{d}_z, \ldots$ ou $\mathrm{D}_x, \mathrm{D}_y, \mathrm{D}_z, \ldots$, des formules parfaitement semblables à celles auxquelles on parviendrait si ces lettres représentaient de véritables quantités.

Concevons maintenant que,

$$s, \quad S, \quad S_1, \quad S_2, \quad \ldots$$

étant des fonctions entières monodromes et monogènes des variables indépendantes

$$x, \quad y, \quad z, \quad \ldots,$$

on pose

$$\Box s = Ss + S_1 \,\mathrm{d}s + S_2 \,\mathrm{d}^2 s + \ldots + S_n \,\mathrm{d}^n s, \tag{19}$$

et que l'on demande la valeur s de $\Box s$ correspondante, non seulement à des valeurs données $a, b, c, \ldots$ des variables $x, y, z, \ldots$, mais encore à des valeurs données $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ de leurs différentielles dx, dy, dz, ... Pour obtenir s, il suffira évidemment de poser, dans s, $S, S_1, S_2, \ldots$,

$$x = \alpha t + a, \qquad y = \beta t + b, \qquad z = \gamma t + c, \qquad \ldots, \tag{20}$$

puis d'effectuer les différentiations relatives à t, et de prendre ensuite

$$t = 0, \qquad dt = 1. \tag{21}$$

D'ailleurs $\Box s$ sera de la forme indiquée par l'équation (19) si l'on a

$$\Box = \nabla^n \tag{22}$$

et

$$\nabla = \omega \mathrm{d}, \tag{23}$$

ω étant une fonction monodrome et monogène des variables indépendantes $x, y, z, \ldots$.

Si les différentielles dx, dy, dz, ... se réduisent toutes à l'unité, la formule (19) sera réduite à

$$\Box s = Ss + S_1 \mathrm{D}s + S_2 \mathrm{D}^2 s + \ldots + S_n \mathrm{D}^n s, \tag{24}$$

et la formule (23) à

$$\nabla = \omega \mathrm{D}. \tag{25}$$

Dans cette dernière hypothèse, les valeurs données de dx, dy, dz, ... ne pourront différer de l'unité : par conséquent les formules (20) devront être réduites aux suivantes :

$$x = t + a, \qquad y = t + b, \qquad z = t + c, \qquad \ldots. \tag{26}$$

Enfin, si les valeurs données des variables $x, y, z, \ldots$ se réduisent toutes à l'unité comme celles de leurs différentielles dx, dy, dz, ..., alors, pour obtenir la valeur s de $\nabla^n s$, en supposant $\nabla = \omega \mathrm{D}$, il suffira de poser, dans les fonctions s et ω,

$$x = y = z = \ldots,$$

et de réduire ainsi $\nabla^n s$ à une fonction de la seule variable x, puis de réduire ensuite cette variable à l'unité.

Concevons, pour fixer les idées, que, m étant le nombre des variables $x, y, z, \ldots$, on ait

$$\omega = s = x^{-1} y^{-1} z^{-1} \ldots \tag{27}$$

Alors, en posant

$$x = y = z \ldots,$$

on aura

$$\begin{aligned} \omega &= s &&= x^{-m},\\ \nabla s &= s\,\mathrm{D}s &&= -m x^{-2m-1},\\ \nabla^2 s &= s\,\mathrm{D}\nabla s &&= m(2m+1)x^{-3m-2},\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

et généralement

$$\nabla^n s = s\,\mathrm{D}\nabla^{n-1} s = (-1)^{n-1} m(2m+1)\ldots(nm+n-1)x^{-(n+1)m-n+1}.$$

Donc, en réduisant x à l'unité, on trouvera

$$(28)\qquad \mathrm{S} = (-1)^{n-1} m(2m+1)(3m+2)\ldots(nm+n-1).$$

§ II. — *Réduction du nombre des variables dans les fonctions symboliques. Limites supérieures aux modules de ces fonctions.*

Le procédé dont je me suis servi à la fin du § I, et des procédés analogues, permettent de transformer des fonctions symboliques de plusieurs variables en fonctions symboliques d'une seule variable. Les transformations de ce genre offrant le moyen de rendre plus facile la détermination symbolique, je vais un instant y revenir.

Considérons un produit symbolique

$$\square s$$

dans lequel chacun des deux facteurs $\square$, s représente une fonction des variables indépendantes $x, y, z, \ldots$ qui demeure monodrome, monogène et finie, du moins entre certaines limites, le premier facteur $\square$ étant en outre une fonction entière de l'une des deux caractéristiques D, d. Si $\square$ renferme seulement la caractéristique D, alors, pour transformer $\square s$ en une fonction symbolique d'une variable auxiliaire t, il suffira d'écrire partout, dans les facteurs $\square$ et s, à la place des variables indépendantes

$$x,\ y,\ z,\ \ldots$$

les binômes

$$x+t,\ y+t,\ z+t,\ \ldots,$$

et, à la place de la caractéristique D, la caractéristique D_t, sauf à poser, après les différentiations,

$$t = 0.$$

Si $\square$ renfermait seulement la caractéristique d, alors, pour transformer $\square s$ en une fonction symbolique de t, il suffirait de remplacer, dans les facteurs $\square$ et s, les variables

$$x,\ y,\ z,\ \ldots$$

par les binômes

$$x+t\,\mathrm{d}x,\ y+t\,\mathrm{d}x,\ z+t\,\mathrm{d}x,\ \ldots,$$

puis chacune des caractéristiques

$$\mathrm{d},\ \mathrm{d}_x,\ \mathrm{d}_y,\ \mathrm{d}_z,\ \ldots$$

par la seule caractéristique D_t, sauf à poser ensuite $t = 0$.

Concevons, pour fixer les idées, que la fonction s se réduise à la fonction ω déterminée par la formule

$$(1)\qquad \omega = \left(1-\frac{x}{\mathfrak{x}}\right)^{-1}\left(1-\frac{y}{\mathfrak{y}}\right)^{-1}\left(1-\frac{z}{\mathfrak{z}}\right)^{-1}\ldots,$$

$\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}, \ldots$ désignant des quantités qui ne dépendent pas de $x, y, z, \ldots$. Supposons encore que $\square$ renferme la seule caractéristique d, et soit de la forme

$$(2)\qquad \square = \nabla^n,$$

∇ étant déterminé par la formule

$$(3)\qquad \nabla = \omega\,\mathrm{d};$$

on aura

$$(4)\qquad \square\,\omega = \nabla^n\omega$$

ou, ce qui revient au même,

$$(5)\qquad \square\,\omega = (\omega\,\mathrm{d})^n\omega;$$

de plus, en opérant comme on vient de le dire, et posant

$$\frac{dx}{\xi - x} = \frac{1}{\theta'}, \qquad \frac{dy}{\eta - y} = \frac{1}{\theta''}, \qquad \frac{dz}{\zeta - z} = \frac{1}{\theta'''}, \qquad \ldots, \tag{6}$$

$$T = \left(1 - \frac{t}{\theta'}\right)^{-1}\left(1 - \frac{t}{\theta''}\right)^{-1}\left(1 - \frac{t}{\theta'''}\right)^{-1}\ldots, \tag{6 bis}$$

on devra, dans l'équation (5), remplacer ω par ωT, d par D_t, et l'on trouvera, en conséquence,

$$\square\omega = \omega^{n+1}(T\mathrm{D}_t)^n T, \tag{7}$$

t devant être annulé après les différentiations. Si, pour abréger, on pose

$$\Omega_n = (T\mathrm{D}_t)^n T, \tag{8}$$

t étant réduit à zéro après les différentiations, on aura simplement

$$\square\omega = \Omega_n \omega^{n+1}. \tag{9}$$

Des deux facteurs que renferme le second membre de la formule (9), l'un ω^{n+1} est une fonction connue des quantités $x, y, z, \ldots, \xi, \eta, \zeta, \ldots$, et pour qu'il conserve une valeur finie, il suffit que les modules des variables

$$x, \quad y, \quad z, \quad \ldots$$

soient respectivement inférieurs aux modules des quantités

$$\xi, \quad \eta, \quad \zeta, \quad \ldots.$$

J'ajoute que, si cette condition est remplie, l'autre facteur Ω_n aura lui-même une valeur finie, et qu'il sera facile d'assigner une limite supérieure à son module. Effectivement, eu égard à la formule (7), la fonction symbolique

$$(T\mathrm{D}_t)^n T$$

sera une somme de termes dont chacun sera le produit de T pour des facteurs de la forme

$$\mathrm{D}_t^{h'}\left(1 - \frac{t}{\theta'}\right)^{-k'}, \quad \mathrm{D}_t^{h''}\left(1 - \frac{t}{\theta''}\right)^{-k''}, \quad \ldots,$$

$h', h'', \ldots$ étant des nombres entiers qui vérifieront la condition

$$h' + h'' + \ldots = n.$$

Comme d'ailleurs, en posant

$$t = 0,$$

après les différentiations, on aura

$$T = 1, \qquad \mathrm{D}_t^{h'}\left(1 - \frac{t}{\theta'}\right)^{-k'} = \frac{k'(k'+1)\ldots(k'+h'-1)}{\theta'}, \qquad \ldots,$$

il est clair que, si l'on nomme $\frac{1}{\theta}$ le plus grand des modules qui appartiennent aux rapports $\frac{1}{\theta'}, \frac{1}{\theta''}, \frac{1}{\theta'''}, \ldots$, le module de Ω_n sera inférieur au produit

$$\frac{N}{\theta^n},$$

N étant le nombre entier auquel se réduit Ω_n quand on suppose

$$\theta' = \theta'' = \theta''' = \ldots = 1.$$

Mais, dans cette supposition, on a

$$T = (1 - t)^{-m},$$

m désignant le nombre des variables $x, y, z, \ldots$, et par suite

$$\Omega_n = m(2m+1)(3m+2)\ldots(nm+n-1).$$

Donc, si l'on nomme ε le module de ω, la formule (9) fournira pour le module de $\square\omega$ un nombre égal ou inférieur au produit

$$N\varepsilon\left(\frac{\varepsilon}{\theta}\right)^n, \tag{10}$$

N étant le nombre entier que détermine la formule

$$N = m(2m+1)(3m+2)\ldots(nm+n-1). \tag{11}$$

Il importe d'observer que, dans les formules (3) et (5), on a

$$\mathrm{d} = \mathrm{d}x\,\mathrm{D}_x + \mathrm{d}y\,\mathrm{D}_y + \mathrm{d}z\,\mathrm{D}_z + \ldots, \tag{12}$$

et que les différentielles

$$dx, \quad dy, \quad dz, \quad \ldots$$

des variables indépendantes $x, y, z, \ldots$ peuvent être des fonctions données

$$\mathfrak{X}, \quad \mathfrak{Y}, \quad \mathfrak{Z}, \quad \ldots$$

des quantités $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}, \ldots$ qui ne dépendent pas de $x, y, z, \ldots$. Admettons cette hypothèse, et désignons par la lettre caractéristique $\mathfrak{D}$ ce que devient alors d. On aura

$$\mathfrak{D} = \mathfrak{X}\,\mathrm{D}_x + \mathfrak{Y}\,\mathrm{D}_y + \mathfrak{Z}\,\mathrm{D}_z + \ldots, \tag{13}$$

et les formules (3), (5) seront remplacées par les suivantes :

$$\nabla = \omega\mathfrak{D}, \tag{14}$$

$$\square\,\omega = (\omega\mathfrak{D})^n\omega. \tag{15}$$

D'ailleurs, dans l'expression (10), qui représentera toujours une limite supérieure au module de $\square\,\omega$, le rapport $\frac{1}{\theta}$ sera le plus grand des modules qui appartiendront aux rapports

$$\frac{\mathfrak{X}}{\mathfrak{x} - x}, \quad \frac{\mathfrak{Y}}{\mathfrak{y} - y}, \quad \frac{\mathfrak{Z}}{\mathfrak{z} - z}, \quad \ldots. \tag{16}$$

Concevons maintenant que, l étant l'un quelconque des nombres entiers

$$1, \quad 2, \quad 3, \quad \ldots, \quad n,$$

on nomme

$$\omega_l, \quad \mathfrak{D}_l, \quad \nabla_l$$

ce que deviennent

$$\omega, \quad \mathfrak{D} \quad \text{et} \quad \nabla = \omega\mathfrak{D},$$

quand, au système des quantités

$$\mathfrak{x}, \quad \mathfrak{y}, \quad \mathfrak{z}, \quad \ldots, \qquad \mathfrak{X}, \quad \mathfrak{Y}, \quad \mathfrak{Z}, \quad \ldots,$$

on substitue un système analogue de quantités désignées par les mêmes lettres affectées de l'indice l. Soient encore

$$\varkappa_l, \quad \theta_l$$

ce que deviennent

$$\varkappa \quad \text{et} \quad \theta.$$

pour le nouveau système. On aura

$$\nabla_l = \omega_l\mathfrak{D}_l; \tag{17}$$

et, si l'on détermine la fonction symbolique $\square\,\omega$, non plus par la formule (4), mais par la suivante

$$\square\,\omega = \nabla_n\nabla_{n-1}\ldots\nabla_2\nabla_1\,\omega, \tag{18}$$

le module de $\square\,\omega$ sera inférieur à l'expression

$$N\varkappa\frac{\varkappa_1\varkappa_2\ldots\varkappa_n}{\theta_1\theta_2\ldots\theta_n}, \tag{19}$$

qui, dans ce cas, remplacera évidemment le produit (10). Par suite, ce module sera encore inférieur au produit

$$N\varkappa\left(\frac{\varkappa}{\theta}\right)^n, \tag{20}$$

si l'on désigne par $\varkappa$, non plus le module de ω, mais le plus grand des modules appartenant aux termes de la suite

$$\omega, \quad \omega_1, \quad \omega_2, \quad \ldots, \quad \omega_n,$$

et par $\frac{1}{\theta}$ le plus grand des rapports

$$\frac{1}{\theta_1}, \quad \frac{1}{\theta_2}, \quad \ldots, \quad \frac{1}{\theta_n}.$$

Concevons à présent que les fonctions

$$s, \quad X, \quad Y, \quad Z, \quad \ldots$$

des variables indépendantes

$$x, \quad y, \quad z$$

restent monodromes, monogènes et finies tant que les modules de ces variables sont inférieurs à certaines limites

$$\mathrm{x}, \quad \mathrm{y}, \quad \mathrm{z}, \quad \ldots,$$

et, en les supposant tels, prenons dans la formule (2)

$$\nabla = X\,\mathrm{D}_x + Y\,\mathrm{D}_y + Z\,\mathrm{D}_z + \ldots. \tag{21}$$

La fonction symbolique

$$\square s = \nabla^n s \tag{22}$$

aura une valeur finie dont le module sera inférieur à une certaine limite que nous allons déterminer.

Nommons

$$\mathfrak{r},\quad \mathfrak{y},\quad \mathfrak{z},\quad \ldots$$

des variables auxiliaires dont les modules soient constants, mais respectivement inférieurs aux limites

$$\mathrm{x},\quad \mathrm{y},\quad \mathrm{z},\quad \ldots,$$

ω une fonction de

$$x,\quad y,\quad z,\quad \ldots,\quad \mathfrak{r},\quad \mathfrak{y},\quad \mathfrak{r},\quad \ldots,$$

déterminée par la formule (1), et $\mathfrak{s}$ ce que devient s quand on y remplace $x, y, z, \ldots$ par $\mathfrak{r}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}, \ldots$. Supposons, en outre, que, l étant l'un quelconque des entiers

$$1,\quad 2,\quad 3,\quad \ldots,\quad n,$$

on désigne par

$$\mathfrak{r}_l,\quad \mathfrak{y}_l,\quad \mathfrak{z}_l,\quad \ldots$$

d'autres variables auxiliaires dont les modules respectifs soient encore inférieurs aux limites

$$\mathrm{x},\quad \mathrm{y},\quad \mathrm{z},\quad \ldots,$$

et par

$$\mathfrak{X}_l,\quad \mathfrak{Y}_l,\quad \mathfrak{Z}_l,\quad \ldots$$

ce que deviennent

$$X,\quad Y,\quad Z,\quad \ldots$$

quand on y remplace $x, y, z, \ldots$ par $\mathfrak{r}_l, \mathfrak{y}_l, \mathfrak{z}_l, \ldots$. Enfin, nommons ω_l ce que devient ω quand on y remplace $\mathfrak{r}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}, \ldots$ par $\mathfrak{r}_l, \mathfrak{y}_l, \mathfrak{z}_l, \ldots$; conservons aux notations $\mathfrak{D}_l$, ∇_l les significations ci-dessus admises, en sorte qu'on ait

$$\nabla_l = \omega_l \mathfrak{D}_l, \tag{17}$$

$\mathfrak{D}_l$ étant déterminé par la formule

$$\mathfrak{D}_l = \mathfrak{X}_l\,\mathrm{D}_x + \mathfrak{Y}_l\,\mathrm{D}_y + \mathfrak{Z}_l\,\mathrm{D}_z + \ldots, \tag{23}$$

et concevons que l'on attribue aux variables

$$x,\quad y,\quad z,\quad \ldots$$

des modules respectivement inférieurs à ceux de

$$\mathfrak{r},\quad \mathfrak{y},\quad \mathfrak{z},\quad \ldots$$

et de

$$\mathfrak{r}_l,\quad \mathfrak{y}_l,\quad \mathfrak{z}_l,\quad \ldots.$$

La formule (5) de la page 336 donnera

$$s = \mathfrak{M}(\omega \mathfrak{s}), \tag{24}$$

et l'on trouvera pareillement

$$\nabla = \mathfrak{M}(\omega_l \mathfrak{D}_l) = \mathfrak{M}\,\nabla_l, \tag{25}$$

la moyenne isotropique qu'indique la lettre caractéristique $\mathfrak{M}$ étant relative, dans la formule (24), aux arguments des variables auxiliaires

$$\mathfrak{r},\quad \mathfrak{y},\quad \mathfrak{z},\quad \ldots,$$

et dans la formule (25) aux arguments des variables auxiliaires

$$\mathfrak{r}_l,\quad \mathfrak{y}_l,\quad \mathfrak{z}_l,\quad \ldots.$$

Cela posé, on aura non seulement

$$\nabla s = \mathfrak{M}(\mathfrak{s}\,\nabla\omega), \tag{26}$$

mais encore

$$\nabla\omega = \mathfrak{M}(\nabla_1 \omega), \qquad \nabla\nabla_1\omega = \mathfrak{M}(\nabla_2\nabla_1\omega), \qquad \ldots, \tag{27}$$

et de l'équation (26) jointe aux formules (27) on tirera

$$\nabla^n s = \mathfrak{M}(\mathfrak{s}\,\nabla_n\nabla_{n-1}\ldots\nabla_2\nabla_1\omega), \tag{28}$$

la moyenne isotropique qu'indique le signe $\mathfrak{M}$ étant relative aux arguments de toutes les variables auxiliaires. D'ailleurs, si l'on attribue aux nombres N, θ, $\varkappa$ les valeurs qui leur ont été assignées dans l'expression (20), le module du produit symbolique

$$\nabla_{n}\nabla_{n-1}\ldots\nabla_2\nabla_1\omega$$

sera constamment inférieur à cette même expression. Donc, en vertu de la formule (28), le module de la fonction symbolique

$$\Box s = \nabla^n s$$

sera inférieur au produit de l'expression (20) par la limite s que ne peut dépasser le module de s. Ainsi le module de $\Box s = \nabla^n s$ sera inférieur au produit

$$N \mathrm{s} \varkappa \left(\frac{\varkappa}{\theta}\right)^n. \tag{29}$$

Concevons maintenant que, t étant une nouvelle variable distincte de $x, y, z, \ldots$, et ∇ étant toujours déterminé par la formule (21), on construise la série

$$s, \quad \frac{t}{1}\nabla s, \quad \frac{t^2}{1.2}\nabla^2 s, \quad \ldots, \tag{30}$$

dont le terme général est

$$\frac{t^n}{1.2\ldots n}\nabla^n s. \tag{31}$$

D'après ce qu'on vient de dire, le coefficient de t^n dans l'expression (31) offrira un module inférieur au produit

$$\frac{N}{1.2\ldots n}\mathrm{s}\varkappa\left(\frac{\varkappa}{\theta}\right)^n. \tag{32}$$

D'ailleurs, la valeur de N étant donnée par la formule (11), le module de la série qui aura pour terme général le rapport

$$\frac{N}{1.2\ldots n}$$

sera

$$m+1.$$

Donc la série dont le terme général est l'expression (31) aura pour module le produit

$$\frac{(m+1)\varkappa}{\theta}, \tag{33}$$

et la série (30) sera certainement convergente, si le module de t est inférieur à l'inverse du rapport (33), c'est-à-dire à

$$\frac{\theta}{(m+1)\varkappa}. \tag{34}$$

Si, dans cette hypothèse, on nomme $\Box s$ la somme de la série, on aura

$$\Box = 1 + \frac{t}{1}\nabla + \frac{t^2}{1.2}\nabla^2 + \ldots. \tag{35}$$

D'ailleurs, lorsque ∇ représente une quantité, on a identiquement

$$1 + \frac{t}{1}\nabla + \frac{t^2}{1.2}\nabla^2 + \ldots = e^{t\nabla}, \tag{36}$$

et par suite l'équation (35) se réduit à

$$\Box = e^{t\nabla}. \tag{37}$$

Donc, si l'on étend la formule (36) au cas où, ∇ étant un facteur symbolique, la série (30) est convergente, la somme $\Box s$ de cette série sera déterminée par l'équation symbolique

$$\Box s = e^{t\nabla}s. \tag{38}$$

Mais cette équation ne subsistera que dans le cas où la série (30) sera convergente, et c'est dans ce cas seulement qu'il sera permis d'appliquer à la fonction s le multiplicateur symbolique

$$e^{t\nabla}.$$

Lorsque, $\varkappa$ et θ étant des quantités finies, θ ne s'évanouira pas, on pourra toujours, en attribuant au module de t une valeur suffisamment grande, choisir ce module de manière que la série (30) soit convergente. Donc alors il sera possible d'appliquer à la fonction s le multiplicateur symbolique $e^{t\nabla}$, au moins pour des valeurs de t suffisamment rapprochées de zéro.

Si dans la formule (21) les fonctions

$$X, \quad Y, \quad Z, \quad \ldots$$

se réduisent à des constantes, alors en représentant ces constantes par

$$dx, \quad dy, \quad dz, \quad \ldots,$$

on réduira cette formule à l'équation

$$\nabla = d, \tag{39}$$

et l'équation (38) donnera simplement

$$\square s = e^{td} s = s + \frac{t}{1} ds + \frac{t^2}{1.2} d^2 s + \ldots. \tag{40}$$

Le dernier membre de cette dernière formule reproduit, lorsqu'on suppose $t = 1$, la série de Taylor qui sera convergente tant que les accroissements attribués aux variables $x, y, z, \ldots$ n'offriront pas des modules pour lesquels la fonction s cesse d'être monodrome, monogène et finie.

Dans un prochain article, je donnerai l'application des principes ici exposés à l'intégration des équations différentielles simultanées et des équations aux dérivées partielles. On retrouve ainsi des conditions du genre de celles que j'ai données le premier dans le Mémoire de 1835, c'est-à-dire des conditions auxquelles un système d'équations différentielles doit satisfaire pour que ces équations admettent des intégrales qui, du moins entre certaines limites, demeurent monodromes et monogènes.

570.

FONCTIONS SYMBOLIQUES. — *Sur la transformation des fonctions symboliques en moyennes isotropiques.*

C. R., T. XLIII, p. 261 (4 août 1856).

La transformation d'une fonction symbolique donnée en une moyenne isotropique peut être avantageusement appliquée à la recherche des propriétés de cette fonction. Ainsi, par exemple, une limite que ne pourra dépasser dans la moyenne isotropique le module de la quantité renfermée sous le signe $\mathfrak{M}$ sera encore évidemment une limite supérieure au module de la fonction symbolique, et, si cette fonction est le terme général d'une série ordonnée suivant les puissances ascendantes d'une variable, il sera possible d'assigner au module de cette variable une limite au-dessous de laquelle il pourra varier sans que la série cesse d'être convergente. Dès lors, on conçoit l'utilité de toute formule qui convertit une fonction symbolique en moyenne isotropique. J'ai déjà, dans la dernière séance, donné une formule de ce genre, l'équation (28) de la page 361. Mais à cette formule je vais en joindre deux autres qui paraissent dignes d'attention, et offrent même cette particularité remarquable qu'elles ne renferment plus sous le signe $\mathfrak{M}$ aucune lettre caractéristique. Je commencerai par établir les deux nouvelles formules, puis j'exposerai les conséquences importantes qui s'en déduisent.

ANALYSE.

Soient

x une variable indépendante;

$f(x)$ une fonction de cette variable.

Soit encore r un accroissement fini attribué à la variable, et supposons que la fonction reste monodrome, monogène et finie, tant que le module de l'accroissement ne dépasse pas une certaine limite. On aura, dans cette hypothèse,

$$\mathfrak{f}(x) = \mathcal{M}\,\frac{\mathfrak{r}\,\mathfrak{f}(\mathfrak{r})}{\mathfrak{r} - x}, \tag{1}$$

et l'on en conclura, en désignant par n un nombre entier,

$$D_x^n\,\mathfrak{f}(x) = 1.2\ldots n\,\mathcal{M}\,\frac{\mathfrak{r}\,\mathfrak{f}(\mathfrak{r})}{(\mathfrak{r} - x)^{n+1}}; \tag{2}$$

puis, en réduisant x à zéro,

$$\mathfrak{f}^{(n)}(0) = 1.2\ldots n\,\mathcal{M}\,\frac{\mathfrak{f}(\mathfrak{r})}{\mathfrak{r}^n}. \tag{3}$$

Si, dans cette dernière formule, on remplace $\mathfrak{f}(\mathfrak{r})$ par $\mathfrak{f}(x + \mathfrak{r})$, elle donnera

$$D_x^n\,\mathfrak{f}(x) = 1.2\ldots n\,\mathcal{M}\,\frac{\mathfrak{f}(x + \mathfrak{r})}{\mathfrak{r}^n} \tag{4}$$

ou, ce qui revient au même,

$$D_x^n\,\mathfrak{f}(x) = \Gamma(n + 1)\,\mathcal{M}\,\frac{\mathfrak{f}(x + \mathfrak{r})}{\mathfrak{r}^n}. \tag{5}$$

Si l'on suppose en particulier $n = 1$, on aura simplement

$$D_x\,\mathfrak{f}(x) = \mathcal{M}\,\frac{\mathfrak{f}(x + \mathfrak{r})}{\mathfrak{r}}. \tag{6}$$

D'ailleurs, la formule (5) s'étend au cas même où l'on aurait $n = 0$, et donne alors

$$\mathfrak{f}(x) = \mathcal{M}\,\mathfrak{f}(x + \mathfrak{r}). \tag{7}$$

Les formules (5), (6), (7) offrent le moyen de transformer une fonction symbolique d'une ou de plusieurs variables en moyenne isotropique. Entrons à ce sujet dans quelques détails.

Soient

$$x,\quad y,\quad z,\quad \ldots$$

m variables indépendantes. Soient encore

$$s,\quad X,\quad Y,\quad Z,\quad \ldots$$

des fonctions de ces variables, qui restent monodromes, monogènes

et finies, tandis que l'on attribue à ces variables des accroissements dont les modules demeurent inférieurs à certaines limites

$$\mathbf{x},\quad \mathbf{y},\quad \mathbf{z},\quad \ldots.$$

Enfin posons

$$\nabla = X\,D_x + Y\,D_y + Z\,D_z + \ldots \tag{8}$$

et

$$\square = \nabla^n. \tag{9}$$

Pour transformer en moyenne isotropique la fonction symbolique

$$\square s = \nabla^n s, \tag{10}$$

il suffira d'opérer comme il suit.

Désignons par

$$\mathfrak{r},\quad \mathfrak{y},\quad \mathfrak{z},\quad \ldots$$

des accroissements simultanément attribués aux variables

$$x,\quad y,\quad z,\quad \ldots;$$

soit encore $\mathfrak{s}$ ce que devient s, quand on attribue à $x, y, z, \ldots$ les accroissements $\mathfrak{r}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}, \ldots$, et posons

$$\omega = \frac{X}{\mathfrak{r}} + \frac{Y}{\mathfrak{y}} + \frac{Z}{\mathfrak{z}} + \ldots. \tag{11}$$

Si les modules de $\mathfrak{r}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}, \ldots$ sont respectivement inférieurs aux limites $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}, \ldots$, alors, en vertu des formules (8) et (6), on aura évidemment

$$\nabla s = \mathcal{M}(\omega\mathfrak{s}). \tag{12}$$

Concevons maintenant qu'aux accroissements

$$\mathfrak{r},\quad \mathfrak{y},\quad \mathfrak{z},\quad \ldots$$

des variables $x, y, z, \ldots$ on ajoute successivement et à diverses époques d'autres accroissements

$$\mathfrak{r}_1,\ \mathfrak{y}_1,\ \mathfrak{z}_1,\ \ldots;\quad \mathfrak{r}_2,\ \mathfrak{y}_2,\ \mathfrak{z}_2,\ \ldots;\quad \mathfrak{r}_{n-1},\ \mathfrak{y}_{n-1},\ \mathfrak{z}_{n-1},\ \ldots,$$

et que ces divers accroissements offrent des modules constants. Supposons d'ailleurs les accroissements primitifs

$$\mathfrak{x},\quad \mathfrak{y},\quad \mathfrak{z},\quad \ldots$$

et ceux qu'on leur ajoute, choisis de manière que les modules des accroissements successifs d'une même variable fournissent une somme inférieure

pour la variable x, à la limite x,
pour la variable y, à la limite y,
pour la variable z, à la limite z,
................, ...

Soient

$$\mathfrak{s},\quad \mathfrak{X},\quad \mathfrak{Y},\quad \mathfrak{Z},\quad \ldots$$

ce que deviennent

$$s,\quad X,\quad Y,\quad Z,\quad \ldots$$

quand on attribue aux variables $x, y, z, \ldots$ les accroissements $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}, \ldots$. Enfin, l étant l'un quelconque des entiers

$$0,\quad 1,\quad 2,\quad 3,\quad \ldots,\quad n-1,$$

désignons par

$$\mathfrak{s}_l,\quad \mathfrak{X}_l,\quad \mathfrak{Y}_l,\quad \mathfrak{Z}_l,\quad \ldots$$

ce que deviennent

$$\mathfrak{s}_{l-1},\quad \mathfrak{X}_{l-1},\quad \mathfrak{Y}_{l-1},\quad \mathfrak{Z}_{l-1},\quad \ldots,$$

lorsqu'on attribue à $x, y, z, \ldots$ les accroissements $\mathfrak{x}_l, \mathfrak{y}_l, \mathfrak{z}_l, \ldots$, en effaçant l'indice $l-1$ dans le cas où l'on a

$$l=1,\qquad l-1=0;$$

et posons généralement

$$\omega_l = \frac{\mathfrak{X}_l}{\mathfrak{x}_l} + \frac{\mathfrak{Y}_l}{\mathfrak{y}_l} + \frac{\mathfrak{Z}_l}{\mathfrak{z}_l} + \ldots. \tag{13}$$

Pour convertir en moyenne isotropique non plus ∇s, mais $\nabla^2 s, \nabla^3 s, \ldots$, il suffira de substituer à l'équation (12) les formules

$$\nabla^2 s = \mathfrak{M}(\omega\,\omega_1\,\mathfrak{s}_1), \tag{14}$$

$$\nabla^3 s = \mathfrak{M}(\omega\,\omega_1\,\omega_2\,\mathfrak{s}_2), \tag{15}$$

et l'on trouvera généralement

$$\Box s = \nabla^n s = \mathfrak{M}(\omega\,\omega_1\,\omega_2, \ldots, \omega_{n-1}\,\mathfrak{s}_{n-1}). \tag{16}$$

On peut encore, avec succès, appliquer la formule (5) à la question ici traitée en opérant comme il suit :

Concevons d'abord que, s étant toujours fonction des variables

$$x,\quad y,\quad z,\quad \ldots,$$

le tétragone $\Box$ renferme, avec les lettres caractéristiques

$$\mathrm{D}_x,\quad \mathrm{D}_y,\quad \mathrm{D}_z,\quad \ldots,$$

de nouveaux systèmes de variables

$$x_1, y_1, z_1, \ldots,\quad x_2, y_2, z_2, \ldots,\quad \ldots,\quad x_n, y_n, z_n, \ldots$$

distincts du système

$$x;\quad y,\quad z,\quad \ldots,$$

et les lettres caractéristiques

$$\mathrm{D}_{x_1}, \mathrm{D}_{y_1}, \mathrm{D}_{z_1}, \ldots,\quad \mathrm{D}_{x_2}, \mathrm{D}_{y_2}, \mathrm{D}_{z_2}, \ldots,\quad \ldots,\quad \mathrm{D}_{x_n}, \mathrm{D}_{y_n}, \mathrm{D}_{z_n}, \ldots.$$

Concevons encore que, l étant l'un quelconque des entiers

$$1,\quad 2,\quad 3,\quad \ldots,\quad n,$$

on désigne par

$$X_l,\quad Y_l,\quad Z_l,\quad \ldots$$

ce que deviennent les fonctions ci-dessus nommées

$$X,\quad Y,\quad Z,\quad \ldots,$$

quand on y remplace $x, y, z, \ldots$ par $x_l, y_l, z_l, \ldots$; prenons

$$\left\{\begin{aligned} \nabla_l = {} & X_l(\mathrm{D}_x + \mathrm{D}_{x_1} + \ldots + \mathrm{D}_{x_{l-1}}) \\ & + Y_l(\mathrm{D}_y + \mathrm{D}_{y_1} + \ldots + \mathrm{D}_{y_{l-1}}) \\ & + Z_l(\mathrm{D}_z + \mathrm{D}_{z_1} + \ldots + \mathrm{D}_{z_{l-1}}) \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{aligned}\right. \tag{17}$$

l'indice $l-1$ devant être effacé dans le cas où l'on a

$$l=1,\qquad l-1=0;$$

et posons

$$\Box s = \nabla_n \nabla_{n-1} \ldots \nabla_2 \nabla_1 s. \tag{18}$$

Représentons d'ailleurs par

$$\mathfrak{r}_l, \quad \mathfrak{y}_l, \quad \mathfrak{z}_l, \quad \ldots$$

des accroissements attribués aux variables

$$x_l, \quad y_l, \quad z_l, \quad \ldots;$$

par

$$\mathfrak{x}_l, \quad \mathfrak{y}_l, \quad \mathfrak{z}_l, \quad \ldots$$

ce que deviennent, quand on tient compte de ces accroissements, les fonctions

$$X_l, \quad Y_l, \quad Z_l, \quad \ldots;$$

et supposons les modules de

$$\mathfrak{r}_l, \quad \mathfrak{y}_l, \quad \mathfrak{z}_l, \quad \ldots$$

constants, mais tellement choisis que, pour ces modules ou pour des modules plus petits, les fonctions

$$\mathfrak{x}_l, \quad \mathfrak{y}_l, \quad \mathfrak{z}_l, \quad \ldots$$

ne cessent pas d'être monodromes, monogènes et finies. Enfin soient

$$\alpha, \; \alpha_1, \; \alpha_2, \; \ldots, \; \alpha_n, \quad \beta, \; \beta_1, \; \beta_2, \; \ldots, \; \beta_n, \quad \gamma, \; \gamma_1, \; \gamma_2, \; \ldots, \; \gamma_n$$

des clefs analytiques assujetties à la seule condition que, dans une fonction entière de ces clefs, l'on substitue finalement à la $n^{\text{ième}}$ puissance de chacune d'elles le produit

$$1.2.3\ldots n = \Gamma(n+1),$$

et posons

$$\left\{\begin{aligned} \omega_l = {} & \left(\frac{\alpha}{\mathfrak{r}} + \frac{\alpha_1}{\mathfrak{r}_1} + \ldots + \frac{\alpha_{l-1}}{\mathfrak{r}_{l-1}}\right)\mathfrak{x}_l \\ & + \left(\frac{\beta}{\mathfrak{y}} + \frac{\beta_1}{\mathfrak{y}_1} + \ldots + \frac{\beta_{l-1}}{\mathfrak{y}_{l-1}}\right)\mathfrak{y}_l \\ & + \left(\frac{\gamma}{\mathfrak{z}} + \frac{\gamma_1}{\mathfrak{z}_1} + \ldots + \frac{\gamma_{l-1}}{\mathfrak{z}_{l-1}}\right)\mathfrak{z}_l \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right. \tag{19}$$

On aura évidemment, en vertu de l'équation (18) jointe aux formules (5) et (19),

$$\Box s = \mathfrak{M}(\omega_n \omega_{n-1} \ldots \omega_2 \omega_1 s). \tag{20}$$

Si maintenant on veut que la formule (20) fournisse une valeur de la fonction $\Box s$ déterminée par l'équation (10), il suffira de poser

$$\begin{aligned} x_n &= x_{n-1} = \ldots = x_1 = x, \\ y_n &= y_{n-1} = \ldots = y_1 = y, \\ z_n &= z_{n-1} = \ldots = z_1 = z, \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots; \end{aligned}$$

par conséquent, il suffira d'admettre que, dans l'équation (19),

$$\mathfrak{x}_l, \quad \mathfrak{y}_l, \quad \mathfrak{z}_l, \quad \ldots$$

représentent ce que deviennent les fonctions

$$X, \quad Y, \quad Z, \quad \ldots$$

quand on attribue aux variables

$$x, \quad y, \quad z, \quad \ldots$$

des accroissements

$$\mathfrak{r}_l, \quad \mathfrak{y}_l, \quad \mathfrak{z}_l, \quad \ldots$$

dont les modules constants sont respectivement inférieurs aux limites ci-dessus exprimées par les lettres

$$\mathrm{x}, \quad \mathrm{y}, \quad \mathrm{z}, \quad \ldots.$$

Les formules (16) et (20) sont celles que nous nous étions proposé d'établir. Dans la seconde comme dans la première, on peut supposer égaux entre eux les modules constants des divers accroissements relatifs à une même variable, par exemple des accroissements

$$\mathfrak{r}, \quad \mathfrak{r}_1, \quad \mathfrak{r}_2, \quad \ldots, \quad \mathfrak{r}_n$$

relatifs à la variable x. Mais, tandis que dans la formule (20), chacun de ces modules est seulement assujetti à rester au-dessous de la limite x, c'est leur somme qui, dans la formule (16), doit rester inférieure à la limite x; et il est clair que cette condition abaisse chacun des modules égaux au-dessous de la limite $\frac{\mathrm{x}}{n}$. D'ailleurs, la formule (20) renferme des clefs analytiques qui doivent en être finalement exclues à l'aide des transmutations de la forme

$$|\alpha^n| = \Gamma(n). \tag{21}$$

Mais, la transmutation (21) pouvant s'écrire comme il suit

$$|\alpha_n| = \int_0^\infty \alpha^{n-1} e^{-\alpha} d\alpha, \tag{22}$$

on pourra évidemment supposer que dans la formule (19)

$$\alpha,\ 6,\ \gamma,\ \ldots,\quad \alpha_1,\ 6_1,\ \gamma_1,\ \ldots,\quad \alpha_n,\ 6_n,\ \gamma_n,\ \ldots$$

représentent non plus des clefs analytiques, mais de véritables quantités, pourvu qu'en même temps à la formule (20) on substitue la suivante :

$$\square s = \int_0^\infty \int_0^\infty \ldots e^{-\alpha-6-\ldots-\alpha_n-6_n-\ldots}\, \mathfrak{M}(\omega_1 \ldots \omega_n s)\, \frac{d\alpha\, d6 \ldots d\alpha_n\, d6_n \ldots}{\alpha 6 \ldots \alpha_n 6_n \ldots}. \tag{23}$$

On peut aisément de chacune des formules (16), (20) déduire une limite supérieure au module de la fonction symbolique

$$\square s = \nabla^n s.$$

Effectivement, soient

$$\mathrm{a},\ \mathrm{b},\ \mathrm{c},\ \ldots$$

des nombres respectivement inférieurs aux limites

$$\mathrm{x},\ \mathrm{y},\ \mathrm{z},\ \ldots;$$

et

$$\varsigma,\ \mathrm{X},\ \mathrm{Y},\ \mathrm{Z},\ \ldots$$

les plus grandes valeurs que puissent atteindre les modules des fonctions

$$s,\ X,\ Y,\ Z,\ \ldots,$$

lorsque dans ces fonctions on attribue à $x, y, z, \ldots$ des accroisse-

ments dont les modules ne dépassent pas les limites

$$\mathrm{a},\ \mathrm{b},\ \mathrm{c},\ \ldots;$$

enfin réduisons aux rapports

$$\frac{\mathrm{a}}{n},\ \frac{\mathrm{b}}{n},\ \frac{\mathrm{c}}{n},\ \ldots$$

les modules des accroissements représentés dans la formule (11) par

$$\mathfrak{x},\ \mathfrak{y},\ \mathfrak{z},\ \ldots,$$

et dans la formule (13) par

$$\mathfrak{x}_{\prime},\ \mathfrak{y}_{\prime},\ \mathfrak{z}_{\prime},\ \ldots;$$

ω et $\omega_{\prime}$ offriront, en vertu de ces formules, des modules inférieurs à la limite

$$n\mathrm{K},$$

la valeur de K étant

$$\mathrm{K} = \frac{\mathrm{X}}{\mathrm{a}} + \frac{\mathrm{Y}}{\mathrm{b}} + \frac{\mathrm{Z}}{\mathrm{c}} + \ldots; \tag{24}$$

et par suite le module de la fonction symbolique

$$\square s = \nabla^n s$$

sera, en vertu de la formule (16), inférieur à la limite

$$n^n \mathrm{K}^n \varsigma. \tag{25}$$

Soient maintenant

$$\mathrm{s},\ \mathrm{A},\ \mathrm{B},\ \mathrm{C},\ \ldots$$

les plus grandes valeurs que puissent acquérir les modules des fonctions

$$s,\ X,\ Y,\ Z,\ \ldots,$$

lorsque dans ces fonctions on attribue à $x, y, z, \ldots$ des accroissements dont les modules sont précisément a, b, c, ...; nommons $\frac{1}{\theta}$ le plus grand des rapports

$$\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{a}},\ \frac{\mathrm{B}}{\mathrm{b}},\ \frac{\mathrm{C}}{\mathrm{c}},\ \ldots,$$

et posons

$$H = \frac{A}{a} + \frac{B}{b} + \frac{C}{c} + \ldots. \tag{26}$$

En vertu de la formule (20), le module de $\square s = \nabla^n s$ sera évidemment inférieur à

$$\frac{N}{\theta^n} s, \tag{27}$$

N étant le nombre entier déterminé par la formule

$$N = m(2m+1)\ldots(nm+n-1), \tag{28}$$

c'est-à-dire le nombre auquel se réduit $\nabla^n s$ lorsqu'on y pose

$$s = (1-t)^{-1}, \qquad \nabla = (1-t)^{-1} D_t,$$

et qu'après les différentiations on réduit à zéro la variable t. De plus, comme on augmentera toujours le nombre par lequel on doit remplacer définitivement le produit de plusieurs des clefs

$$\alpha, \ \alpha_1, \ \ldots, \ \alpha_n, \quad \beta, \ \beta_1, \ \ldots, \ \beta_n, \quad \gamma, \ \gamma_1, \ \ldots, \ \gamma_n,$$

si l'on égale ces clefs à l'une d'elles, la fonction symbolique $\square s = \nabla^n s$ offrira encore, en vertu de l'équation (20), un module inférieur à la limite

$$1.3.5\ldots(2n+1)H^n s, \tag{29}$$

que l'on déduit de la formule (20), en posant dans la formule (19)

$$\alpha = \beta = \gamma = \ldots, \qquad \alpha_1 = \beta_1 = \gamma_1 = \ldots, \qquad \ldots.$$

En résumé, le module de la fonction symbolique

$$\square s = \nabla^n s,$$

dans laquelle ∇ est donné par la formule (10), sera inférieur à chacune des trois limites

$$n^n K^n \varsigma, \quad \frac{N}{\theta^n} s, \quad 1.3.5\ldots(2n+1)H^n s. \tag{30}$$

Par suite, le module de la série qui a pour terme général le produit

$$\frac{t^n}{1.2\ldots n} \nabla^n s$$

sera inférieur aux produits du module de t par les trois limites

$$Ke, \quad \frac{m+1}{\theta}, \quad 2H, \tag{31}$$

e désignant la base des logarithmes népériens. Donc cette série sera convergente, et le facteur symbolique

$$e^{t\nabla}$$

pourra être appliqué à la fonction s, si le module de t est inférieur à l'une des trois limites

$$\frac{1}{Ke}, \quad \frac{\theta}{m+1}, \quad \frac{1}{2H}. \tag{32}$$

De ces trois limites, la première et la dernière sont celles que j'ai données dans un Mémoire présenté à l'Académie le 30 juillet 1849, et dans le Mémoire lithographié de 1835; la seconde est précisément celle à laquelle se réduit l'expression (33) de la page 363 lorsqu'on pose

$$\kappa = 1.$$

Pour la déduire immédiatement de cette expression, à l'aide des formules établies dans la dernière séance, il suffit de remplacer, dans ces formules,

$$x, \ y, \ z, \ \ldots \quad \text{par} \quad x+\xi, \ y+\eta, \ z+\zeta, \ \ldots,$$

et de réduire ensuite

$$x, \ y, \ z, \ \ldots, \quad \text{à} \quad \text{zéro},$$

puis

$$\xi, \ \eta, \ \zeta, \ \ldots, \quad \text{à} \quad x, \ y, \ z, \ \ldots.$$

Ajoutons que dans la formule (26) on pourrait prendre pour A, B, C, ... non les plus grandes valeurs que puissent acquérir les modules des fonctions

$$X, \ Y, \ Z, \ \ldots,$$

lorsque dans ces fonctions on attribue à $x, y, z, \ldots$ des accroissements $\mathfrak{r}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}, \ldots$, dont les modules sont $\mathrm{a}, \mathrm{b}, \mathrm{c}, \ldots$, mais les valeurs qu'acquièrent, dans cette hypothèse, et pour un seul système de valeurs de $\mathfrak{r}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}, \ldots$, les modules de

$$X, \ Y, \ Z, \ \ldots,$$

au moment où la somme

$$\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{a}} + \frac{\mathrm{B}}{\mathrm{b}} + \frac{\mathrm{C}}{\mathrm{c}} + \ldots$$

devient la plus grande possible.

571.

Calcul intégral. — *Sur l'intégration définie d'un système d'équations différentielles.*

C. R., T. XLIII, p. 497 (8 septembre 1856).

Étant donné un système d'équations différentielles, on peut toujours réduire ces équations au premier ordre, en augmentant, s'il est nécessaire, le nombre des inconnues. Supposons que, les équations étant du premier ordre, m soit le nombre des inconnues $x, y, z, \ldots$. Pour que celles-ci puissent être complètement déterminées en fonction de la variable indépendante t, il est nécessaire que les équations différentielles soient en nombre égal à celui des inconnues, et que, en vertu de ces équations, les dérivées des inconnues relatives à la variable indépendante soient des fonctions des diverses variables, savoir de la variable indépendante et des inconnues elles-mêmes. Ces conditions étant supposées remplies, l'*intégration définie* des équations proposées consiste à déduire d'un système donné de

valeurs correspondantes des diverses variables un autre système de valeurs correspondantes de ces mêmes variables. Les *intégrales* que fournit l'intégration définie sont dites *générales*, lorsque la valeur primitive et la valeur finale de la variable indépendante peuvent être arbitrairement choisies.

Dans les applications du Calcul intégral à la Mécanique, à l'Astronomie, à la Physique mathématique, etc., les fonctions des diverses variables auxquelles se réduisent, en vertu des équations différentielles, les dérivées des inconnues, demeurent ordinairement monodromes et monogènes par rapport à ces mêmes variables, du moins entre certaines limites. Or je démontre que, si cette condition est remplie pour les valeurs primitives des diverses variables, on pourra satisfaire aux équations différentielles données en prenant, pour représenter les inconnues, des fonctions de la variable indépendante qui seront elles-mêmes monodromes et monogènes par rapport à cette variable, du moins entre certaines limites. J'y parviens, en effet, à l'aide des considérations suivantes.

Lorsque, dans le voisinage de la valeur primitive attribuée à la variable t, une fonction s de cette variable demeure monodrome et monogène, du moins entre certaines limites, alors l'accroissement de la fonction correspondant à un accroissement donné θ de la valeur primitive de t est, pour une valeur de θ voisine de zéro, développable, par la formule de Taylor, en une série ordonnée suivant les puissances ascendantes de θ; et la nouvelle valeur qu'acquiert la fonction, quand on attribue l'accroissement θ à la valeur primitive de t, peut être exprimée par une exponentielle symbolique. D'ailleurs cette exponentielle peut être présentée sous diverses formes, dont l'une convient spécialement au cas où s dépend de plusieurs variables $t, x, y, z, \ldots$, mais se réduit en définitive à une fonction de la seule variable t, parce que $x, y, z, \ldots$ sont elles-mêmes des fonctions de t, déterminées par un système d'équations différentielles du premier ordre entre les variables $x, y, z, \ldots$ et t. Or, la fonction s pouvant être l'une quelconque des inconnues $x, y, z, \ldots$, on pourra, en opérant comme on vient de le dire, déduire des valeurs primitives des diverses variables, et de la valeur finale de t, les valeurs finales des inconnues, si ces valeurs finales peuvent être des fonctions monodromes et monogènes de la variable t. Ajoutons que les valeurs finales ainsi obtenues se présenteront sous la forme abrégée d'exponentielles symboliques, et qu'elles satisferont certainement aux équations différentielles proposées tant que le module de l'accroissement attribué à la valeur primitive de la variable t ne deviendra pas assez considérable pour que les séries, dont ces exponentielles symboliques représenteront les sommes, cessent d'être convergentes. Remarquons d'ailleurs que, à l'aide des principes exposés dans le précédent Mémoire, on pourra déterminer une limite au-dessous de laquelle il suffira d'abaisser ce module pour que la condition énoncée se trouve remplie.

Analyse.

Des principes exposés dans les précédents Mémoires, on déduit immédiatement le théorème suivant :

Théorème I. — *Désignons par les lettres italiques*

$$s, \quad t$$

deux variables dont la première soit fonction de la seconde, et par les lettres romaines

$$\mathrm{s}, \quad \mathrm{t}$$

des valeurs primitives correspondantes de ces deux variables. Posons d'ailleurs

$$t = \mathrm{t} + \theta,$$

en sorte que θ *représente l'accroissement qu'il faut faire subir à* t *pour obtenir* t. *Si* s *est une fonction monodrome et monogène de la variable indépendante* t, *dans le voisinage de la valeur primitive* t *attribuée à cette variable, alors, pour un module suffisamment petit de*

$$\theta = t - \mathrm{t},$$

on aura

$$(1) \qquad s = e^{\theta \mathrm{D}_{\mathrm{t}}}\mathrm{s};$$

et l'on pourra encore présenter l'équation (1) *sous la forme*

$$(2) \qquad s = e^{\mathrm{d}}\mathrm{s},$$

pourvu que, la lettre d *indiquant une différentiation relative à* t, *on pose*

$$\mathrm{dt} = \theta = t - \mathrm{t}.$$

Concevons maintenant que s dépende de plusieurs variables

$$t, \quad x, \quad y, \quad z, \quad \ldots,$$

mais se réduise en définitive à une fonction de la seule variable t, parce que $x, y, z, \ldots$ sont des fonctions de t. Admettons encore que ces fonctions satisfassent à des équations de la forme

$$(3) \qquad dx = X\,dt, \quad dy = Y\,dt, \quad dz = Z\,dt, \quad \ldots;$$

X, Y, Z étant de nouvelles fonctions des variables

$$t, \quad x, \quad y, \quad z, \quad \ldots,$$

et la lettre d indiquant une différentiation appliquée à l'une de ces variables. Soit, d'autre part, t une valeur primitivement attribuée à t; nommons

$$\mathrm{x}, \quad \mathrm{y}, \quad \mathrm{z}, \quad \ldots$$

ce que deviennent

$$x, \quad y, \quad z, \quad \ldots$$

quand on y remplace t par t, et désignons par

$$\mathrm{s}, \quad \mathrm{X}, \quad \mathrm{Y}, \quad \mathrm{Z}, \quad \ldots$$

ce que deviennent

$$s, \quad X, \quad Y, \quad Z, \quad \ldots$$

quand on y remplace $t, x, y, z, \ldots$ par $\mathrm{t}, \mathrm{x}, \mathrm{y}, \mathrm{z}, \ldots$. Enfin, supposons que, pour une valeur de t suffisamment rapprochée de t, les fonctions de t représentées par $x, y, z, \ldots$, et les fonctions de $t, x,$

y, z, ... représentées par X, Y, Z, ..., demeurent monodromes et monogènes. La formule (2) continuera de subsister, pourvu que, la lettre d indiquant toujours une différentiation relative à t, on considère x, y, z, ... comme des fonctions de t, et que l'on pose encore après les différentiations effectuées

$$\mathrm{dt} = t - \mathrm{t}.$$

D'ailleurs, puisque x, y, z, ..., considérées comme fonctions de t, satisfont aux équations (3), x, y, z, ..., considérées comme fonctions de t, vérifieront les formules

$$(4) \qquad \mathrm{dx} = \mathrm{X\,dt}, \qquad \mathrm{dy} = \mathrm{Y\,dt}, \qquad \mathrm{dz} = \mathrm{Z\,dt}, \qquad \dots;$$

et par suite l'équation

$$(5) \qquad \mathrm{ds} = \mathrm{D_t s\,dt} + \mathrm{D_x s\,dx} + \mathrm{D_y s\,dy} + \mathrm{D_z s\,dz} + \dots$$

donnera

$$(6) \qquad \mathrm{ds} = \nabla \mathrm{s\,dt},$$

la fonction symbolique $\nabla\mathrm{s}$ étant déterminée par la formule

$$(7) \qquad \nabla\mathrm{s} = (\mathrm{D_t} + \mathrm{X\,D_x} + \mathrm{Y\,D_y} + \mathrm{Z\,D_z} + \dots)\mathrm{s}.$$

Il y a plus : en remplaçant s par $\nabla\mathrm{s}$ dans la formule (6), on trouvera

$$\mathrm{d}\nabla\mathrm{s} = \nabla\nabla\mathrm{s\,dt},$$

et l'on aura, par suite,

$$\mathrm{d^2 s} = \mathrm{d}\nabla\mathrm{s\,dt} = \nabla\nabla\mathrm{s\,dt^2}.$$

On trouvera de même

$$\mathrm{d^3 s} = \nabla\nabla\nabla\mathrm{s\,dt^3}.$$

Donc, en écrivant, pour abréger,

$$\nabla^2\mathrm{s}, \quad \nabla^3\mathrm{s}, \quad \dots,$$

au lieu de

$$\nabla\nabla\mathrm{s}, \quad \nabla\nabla\nabla\mathrm{s}, \quad \dots,$$

on aura

$$\mathrm{d^2 s} = \nabla^2\mathrm{s\,dt^2}, \qquad \mathrm{d^3 s} = \nabla^3\mathrm{s\,dt^3}, \qquad \dots,$$

et l'on trouvera généralement, en désignant par n un nombre entier quelconque,

$$(8) \qquad \mathrm{d}^n s = \nabla^n \mathrm{s\,dt}^n.$$

Cela posé, la fonction symbolique

$$e^{\mathrm{d}}\mathrm{s} = \mathrm{s} + \frac{\mathrm{ds}}{1} + \frac{\mathrm{d^2 s}}{1.2} + \dots$$

pourra être présentée sous la forme

$$e^{\mathrm{dt}\nabla}\mathrm{s} = \mathrm{s} + \frac{\mathrm{dt}}{1}\nabla\mathrm{s} + \frac{\mathrm{dt}^2}{1.2}\nabla^2\mathrm{s} + \dots,$$

et sera réduite, quand on remplacera dt par $t - \mathrm{t}$, à l'expression symbolique

$$(9) \qquad e^{(t-\mathrm{t})\nabla}\mathrm{s} = \mathrm{s} + \frac{t-\mathrm{t}}{1}\nabla\mathrm{s} + \frac{(t-\mathrm{t})^2}{1.2}\nabla^2\mathrm{s} + \dots.$$

Donc, dans l'hypothèse admise, l'équation (2) donnera

$$(10) \qquad s = e^{(t-\mathrm{t})\nabla}\mathrm{s}.$$

Si, dans cette dernière formule, s se réduit à l'une des variables x, y, z, ..., on obtiendra la valeur de cette variable sous l'une des formes

$$(11) \qquad x = e^{(t-\mathrm{t})\nabla}\mathrm{x}, \qquad y = e^{(t-\mathrm{t})\nabla}\mathrm{y}, \qquad z = e^{(t-\mathrm{t})\nabla}\mathrm{z}, \qquad \dots.$$

En conséquence, on pourra énoncer la proposition suivante :

Théorème II. — *Soient données, entre la variable indépendante t et m inconnues x, y, z, ..., m équations différentielles de la forme*

$$(3) \qquad dx = X\,dt, \qquad dy = Y\,dt, \qquad dz = Z\,dt, \qquad \dots,$$

dans lesquelles X, Y, Z, ... représentent des fonctions des $m+1$ variables

$$t, \quad x, \quad y, \quad z, \quad \dots,$$

et désignons par s une autre fonction de ces variables. Soient d'ailleurs

$$\mathrm{t}, \quad \mathrm{x}, \quad \mathrm{y}, \quad \mathrm{z}, \quad \dots$$

des valeurs primitivement attribuées aux variables

$$t,\ x,\ y,\ z,\ \ldots,$$

et désignons par

$$\mathrm{s},\ \mathrm{X},\ \mathrm{Y},\ \mathrm{Z},\ \ldots$$

ce que deviennent les fonctions

$$s,\ X,\ Y,\ Z,\ \ldots$$

quand on y remplace $t, x, y, z, \ldots$ *par* $\mathrm{t}, \mathrm{x}, \mathrm{y}, \mathrm{z}, \ldots$. *Enfin supposons que les fonctions*

$$s,\ X,\ Y,\ Z,\ \ldots$$

restent monodromes et monogènes dans le voisinage des valeurs $\mathrm{t}, \mathrm{x}, \mathrm{y}, \mathrm{z}, \ldots$, *primitivement attribuées aux variables* $t, x, y, z, \ldots$. *Si l'on peut satisfaire aux équations* (3) *par des valeurs de* $x, y, z, \ldots$, *qui, se réduisant à* $x, y, z, \ldots$ *pour la valeur* t *de* t, *soient dans le voisinage de cette valeur fonctions monodromes et monogènes de* t, *ces valeurs seront*

$$x = e^{(t-\mathrm{t})\nabla}\mathrm{x}, \qquad y = e^{(t-\mathrm{t})\nabla}\mathrm{y}, \qquad z = e^{(t-\mathrm{t})\nabla}\mathrm{z}, \qquad \ldots, \tag{11}$$

pourvu que la lettre caractéristique ∇ *placée devant une fonction de* $\mathrm{t}, \mathrm{x}, \mathrm{y}, \mathrm{z}, \ldots$ *soit définie par la formule*

$$\nabla = \mathrm{D}_{\mathrm{t}} + \mathrm{X}\,\mathrm{D}_{\mathrm{x}} + \mathrm{Y}\,\mathrm{D}_{\mathrm{y}} + \mathrm{Z}\,\mathrm{D}_{\mathrm{z}} + \ldots, \tag{12}$$

dans laquelle $\mathrm{X}, \mathrm{Y}, \mathrm{Z}, \ldots$ *sont ce que deviennent les fonctions* $X, Y, Z, \ldots$ *quand on y remplace* $t, x, y, z, \ldots$ *par* $\mathrm{t}, \mathrm{x}, \mathrm{y}, \mathrm{z}, \ldots$. *Alors aussi, en supposant qu'une fonction* s *des variables*

$$t,\ x,\ y,\ z,\ \ldots$$

reste monodrome et monogène dans le voisinage des valeurs

$$\mathrm{t},\ \mathrm{x},\ \mathrm{y},\ \mathrm{z},\ \ldots$$

attribuées à ces variables, et en nommant s *ce que devient* s *pour ces mêmes valeurs, on aura, pour une valeur de* t *voisine de* t,

$$s = e^{(t-\mathrm{t})\nabla}\mathrm{s}. \tag{10}$$

Dans l'hypothèse admise, le second membre de chacune des formules (10) et (11) représente la somme d'une série convergente; l'expression

$$e^{(t-\mathrm{t})\nabla}\mathrm{s}$$

en particulier représente la somme de la série

$$\mathrm{s},\quad \frac{t-\mathrm{t}}{1}\nabla\mathrm{s},\quad \frac{(t-\mathrm{t})^2}{1.2}\nabla^2\mathrm{s},\quad \ldots. \tag{13}$$

D'ailleurs, en vertu des principes établis dans le précédent Mémoire, si les fonctions de $t, x, y, z, \ldots$, représentées par

$$s,\ X,\ Y,\ Z,\ \ldots \tag{14}$$

sont monodromes et monogènes dans le voisinage des valeurs $\mathrm{t}, \mathrm{x}, \mathrm{y}, \mathrm{z}, \ldots$, primitivement attribuées aux variables $t, x, y, z, \ldots$, la série (13) sera convergente, tant que le module de $t - \mathrm{t}$ ne dépassera pas une certaine limite supérieure, correspondante à l'une des trois limites que nous avons calculées (page 375); et l'on peut ajouter qu'alors les valeurs de $x, y, z, \ldots$, données par les formules (11), vérifieront certainement les équations (3). Pour le démontrer, nous commencerons par établir les propositions suivantes :

Théorème III. — *Supposons que les fonctions*

$$X,\ Y,\ Z,\ \ldots$$

soient monodromes et monogènes dans le voisinage des valeurs $\mathrm{t}, \mathrm{x}, \mathrm{y}, \mathrm{z}, \ldots$, *primitivement attribuées aux variables* $t, x, y, z, \ldots$, *et concevons que la lettre caractéristique* d *appliquée à une fonction de* $t, \mathrm{t}, \mathrm{x}, \mathrm{y}, \mathrm{z}, \ldots$, *indique une différentiation relative à la variable* t. *Alors,* n *étant un nombre entier quelconque, les valeurs des différentielles*

$$d^n x,\quad d^n y,\quad d^n z,\quad \ldots,$$

tirées des formules (11), *se réduiront, quand on posera* $t = \mathrm{t}$, *aux produits*

$$\nabla^n \mathrm{x}\, dt^n,\quad \nabla^n \mathrm{y}\, dt^n,\quad \nabla^n \mathrm{z}\, dt^n,\quad \ldots.$$

Démonstration. — En effet, comme on aura par exemple, en vertu de la première des formules (11),

$$(15)\qquad x = \mathrm{x} + \frac{t-\mathrm{t}}{1}\nabla\mathrm{x} + \frac{(t-\mathrm{t})^2}{1.2}\nabla^2\mathrm{x} + \ldots,$$

il est clair que le coefficient de dt^n, dans la valeur de $d^n x$, se réduira pour $t = \mathrm{t}$ au facteur multiplié dans le second membre de la formule (15) par le rapport $\frac{(t-\mathrm{t})^n}{1.2\ldots n}$, c'est-à-dire à

$$\nabla^n \mathrm{x}.$$

Théorème IV. — *La fonction s étant supposée, ainsi que X, Y, Z, ..., monodrome et monogène dans le voisinage des valeurs* $\mathrm{t}, \mathrm{x}, \mathrm{y}, \mathrm{z}, \ldots,$ *primitivement attribuées aux variables* $t, x, y, z, \ldots,$ *et* s *étant ce que devient s quand on attribue à ces variables leurs valeurs primitives, si l'on substitue à* $x, y, z, \ldots,$ *dans la fonction s, les seconds membres des formules* (11), *cette fonction différentiée par rapport à t fournira une différentielle ds qui se réduira au produit*

$$\nabla\mathrm{s}\,dt.$$

Démonstration. — En effet, on aura, dans l'hypothèse admise,

$$(16)\qquad ds = \mathrm{D}_t s\,dt + \mathrm{D}_x s\,dx + \mathrm{D}_y s\,dy + \mathrm{D}_z s\,dz + \ldots.$$

D'ailleurs, pour $t = \mathrm{t}$, les différentielles

$$dx,\quad dy,\quad dz,\quad \ldots,$$

se réduiront, en vertu du théorème II, aux produits

$$\nabla\mathrm{x}\,dt,\quad \nabla\mathrm{y}\,dt,\quad \nabla\mathrm{z}\,dt,\quad \ldots,$$

par conséquent, aux produits

$$\mathrm{X}\,dt,\quad \mathrm{Y}\,dt,\quad \mathrm{Z}\,dt,\quad \ldots,$$

tandis que les diverses dérivées de s relatives aux variables $t, x, y, z, \ldots,$ savoir

$$\mathrm{D}_t s,\quad \mathrm{D}_x s,\quad \mathrm{D}_y s,\quad \mathrm{D}_z s,\quad \ldots,$$

se réduiront aux diverses dérivées de s relatives à t, x, y, z, ..., c'est-à-dire à

$$\mathrm{D_t s},\quad \mathrm{D_x s},\quad \mathrm{D_y s},\quad \mathrm{D_z s},\quad \ldots.$$

Donc, pour $t = \mathrm{t}$, la différentielle ds se réduira au produit

$$(\mathrm{D_t s} + \mathrm{X\,D_x s} + \mathrm{Y\,D_y s} + \mathrm{Z\,D_z s} + \ldots)\,dt$$

qui peut être présenté sous la forme

$$\nabla\mathrm{s}\,dt.$$

Théorème V. — *Les mêmes choses étant posées que dans le théorème IV, si l'on désigne par*

$$u,\quad v,\quad w,\quad \ldots$$

divers facteurs dont chacun soit ou une différentielle de x, *ou de* y, *ou de* $z, \ldots,$ *relative à* t, *cette différentielle pouvant d'ailleurs être d'un ordre quelconque, ou bien encore une fonction donnée d'une ou de plusieurs des variables* $t, x, y, z, \ldots;$ *alors, en considérant* $x, y, z, \ldots$ *comme des fonctions de t déterminées par les formules* (11), *et nommant*

$$\mathrm{u},\quad \mathrm{v},\quad \mathrm{w},\quad \ldots$$

ce que deviennent

$$u,\quad v,\quad w,\quad \ldots,$$

quand on réduit t à t, *on aura, pour* $t = \mathrm{t}$,

$$d(uvw\ldots) = \nabla(\mathrm{uvw}\ldots)\,dt.$$

Démonstration. — En effet, on aura identiquement, d'une part,

$$(17)\qquad d(uvw\ldots) = uvw\ldots\left(\frac{du}{u} + \frac{dv}{v} + \frac{dw}{w} + \ldots\right);$$

d'autre part,

$$(18)\qquad \nabla(\mathrm{uvw}\ldots) = \mathrm{uvw}\ldots\left(\frac{\nabla\mathrm{u}}{\mathrm{u}} + \frac{\nabla\mathrm{v}}{\mathrm{v}} + \frac{\nabla\mathrm{w}}{\mathrm{w}} + \ldots\right).$$

On aura, par exemple, si les facteurs se réduisent à deux, d'une part,

$$d(uv) = u\,dv + v\,du,$$

d'autre part,

$$\nabla(\mathrm{uv}) = \mathrm{u}\nabla\mathrm{v} + \mathrm{v}\nabla\mathrm{u}.$$

Cela posé, comme en vertu des théorèmes III et IV les différentielles

$$du, \quad dv, \quad dw, \quad \ldots$$

se réduiront, pour $t = \mathrm{t}$, aux produits

$$\nabla \mathrm{u}\, dt, \quad \nabla \mathrm{v}\, dt, \quad \nabla \mathrm{w}\, dt, \quad \ldots,$$

il est clair qu'en prenant $t = \mathrm{t}$ on réduira l'expression (17) au produit de l'expression (18) par la différentielle dt.

Corollaire. — Concevons maintenant que l'on représente par s, non plus le produit $uvw\ldots$, mais une somme de produits de cette espèce, et par s ce que devient s quand on pose $t = \mathrm{t}$. Le théorème V, étant applicable à chacun des produits dont l'addition fournira la somme s, pourra être appliqué à cette somme elle-même. En conséquence, la différentielle

$$ds$$

se réduira, pour $t = \mathrm{t}$, au produit

$$\nabla \mathrm{s}\, dt.$$

D'ailleurs la différentielle

$$ds,$$

déterminée par l'équation (16), et les différentielles

$$d^2 s, \quad d^3 s, \quad \ldots,$$

déterminées par des équations du même genre, sont précisément de la forme ici indiquée par la lettre s. Donc, puisque ds se réduit, pour $t = \mathrm{t}$, au produit $\nabla \mathrm{s}\, dt$, la différentielle du second ordre $d^2 s$ se réduira, pour $t = \mathrm{t}$, au produit

$$\nabla(\nabla \mathrm{s}\, dt)\, dt = {}^2\nabla \mathrm{s}\, dt^2;$$

par suite aussi, la différentielle du troisième ordre $d^3 s$ se réduira, pour $t = \mathrm{t}$, au produit

$$\nabla(\nabla^2 \mathrm{s}\, dt^2)\, dt = \nabla^3 \mathrm{s}\, dt^3, \qquad \ldots,$$

et l'on pourra énoncer généralement la proposition suivante :

Théorème VI. — *Les mêmes choses étant posées que dans le théorème IV, si l'on désigne par n un nombre entier quelconque, la différentielle $d^n s$ se réduira, pour $t = \mathrm{t}$, au produit*

$$\nabla^n \mathrm{s}\, dt^n.$$

Du théorème I joint au théorème VI, on déduit immédiatement celui que nous allons énoncer :

Théorème VII. — *Les mêmes choses étant posées que dans le théorème IV, lorsqu'on substituera dans s, à la place de $x, y, z, \ldots$, les seconds membres des formules* (11), *on trouvera, pour une valeur de t suffisamment rapprochée de* t,

$$s = e^{(t-\mathrm{t})\nabla} \mathrm{s}. \tag{10}$$

Corollaire. — Si, dans la formule (10), on prend successivement pour s les diverses fonctions

$$\mathcal{X}, \quad \mathcal{Y}, \quad \mathcal{Z}, \quad \ldots,$$

on obtiendra les formules

$$\mathcal{X} = e^{(t-\mathrm{t})\nabla}\mathrm{X}, \qquad \mathcal{Y} = e^{(t-\mathrm{t})\nabla}\mathrm{Y}, \qquad \mathcal{Z} = e^{(t-\mathrm{t})\nabla}\mathrm{Z}, \qquad \ldots \tag{19}$$

D'ailleurs la première des formules (11), ou, ce qui revient au même, l'équation (15) donne

$$\mathrm{D}_t x = \nabla \mathrm{x} + \frac{t-\mathrm{t}}{1}\nabla^2 \mathrm{x} + \frac{(t-\mathrm{t})^2}{1.2}\nabla^3 \mathrm{x} + \ldots$$

ou, ce qui revient au même,

$$\mathrm{D}_t x = \mathrm{X} + \frac{t-\mathrm{t}}{1}\nabla \mathrm{X} + \frac{(t-\mathrm{t})^2}{1.2}\nabla^2 \mathrm{X} + \ldots = e^{(t-\mathrm{t})\nabla}\mathrm{X}.$$

Donc, eu égard à la première des formules (19), on aura

$$\mathrm{D}_t x = \mathcal{X},$$

et l'on se trouvera ainsi ramené à la première des équations (3). On pourra pareillement, de la seconde ou de la troisième, ... des formules (11), déduire la seconde ou la troisième, ... des équations (3).

et l'on arrivera ainsi définitivement au théorème que nous allons énoncer :

THÉORÈME VIII. — *Les mêmes choses étant posées que dans le théorème IV, les valeurs de $x, y, z, \ldots$ données par les formules* (11) *vérifieront les équations* (3).

En vertu du théorème VIII, si l'on applique l'intégration définie aux équations (3), en assujettissant les inconnues $x, y, z, \ldots$ à prendre pour $t = \mathrm{t}$ les valeurs particulières $\mathrm{x}, \mathrm{y}, \mathrm{z}, \ldots$, les intégrales que l'on obtiendra, et qui détermineront les valeurs générales des inconnues quand t sera peu différent de t, seront précisément les formules (11). Ajoutons que les valeurs de $x, y, z, \ldots$ données par ces formules continueront de représenter les intégrales dont il s'agit et de vérifier les équations (3) tant que le module de la différence $t - \mathrm{t}$ ne deviendra pas assez considérable pour que les séries dont les seconds membres des formules (8) représentent les sommes cessent d'être convergentes.

Si l'on considère la valeur de s fournie par la formule (10), ou, ce qui revient au même, par la suivante

$$s = \mathrm{s} + \frac{t - \mathrm{t}}{1} \nabla \mathrm{s} + \frac{(t - \mathrm{t})^2}{1.2} \nabla^2 \mathrm{s} + \ldots, \tag{20}$$

non plus comme une fonction de t, mais comme une fonction de $\mathrm{t}, \mathrm{x}, \mathrm{y}, \mathrm{z}, \ldots$, cette fonction vérifiera évidemment la condition

$$\nabla s = 0, \tag{21}$$

c'est-à-dire l'équation aux dérivées partielles

$$\mathrm{D_t} s + \mathrm{X}\,\mathrm{D}\ s + \mathrm{Y}\,\mathrm{D_y} s + \mathrm{Z}\,\mathrm{D_z} s + \ldots = 0. \tag{22}$$

D'ailleurs la différentielle totale de s considérée comme fonction de $\mathrm{t}, \mathrm{x}, \mathrm{y}, \ldots$ sera

$$ds = \mathrm{D_t} s\, d\mathrm{t} + \mathrm{D_x} s\, d\mathrm{x} + \mathrm{D_y} s\, d\mathrm{y} + \mathrm{D_z} s\, d\mathrm{z} + \ldots. \tag{23}$$

Donc, eu égard à l'équation (22), cette différentielle pourra être

réduite à la forme

$$ds = \mathrm{D_x} s(d\mathrm{x} - \mathrm{X}\, d\mathrm{t}) + \mathrm{D_y} s(d\mathrm{y} - \mathrm{Y}\, d\mathrm{t}) + \mathrm{D_z} s(d\mathrm{z} - \mathrm{Z}\, d\mathrm{t}) + \ldots. \tag{24}$$

La formule (24) fournit du théorème VIII une seconde démonstration qui est moins directe que la première, mais pourtant digne d'attention, et que nous allons indiquer en peu de mots.

L'intégration définie des équations (3), qui sont du premier ordre par rapport aux variables

$$t, \quad x, \quad y, \quad z, \quad \ldots,$$

consiste à déduire d'un système de valeurs simultanément attribuées à ces variables un autre système de valeurs correspondantes de ces mêmes variables. Supposons le premier système exprimé à l'aide des lettres romaines

$$\mathrm{t}, \quad \mathrm{x}, \quad \mathrm{y}, \quad \mathrm{z}, \quad \ldots,$$

et le second à l'aide des lettres italiques

$$t, \quad x, \quad y, \quad z, \quad \ldots.$$

Si l'on donne, non plus le premier système, mais le second, alors $t, x, y, z, \ldots$ devront être supposées constantes, et $\mathrm{t}, \mathrm{x}, \mathrm{y}, \mathrm{z}, \ldots$, devenues variables, devront vérifier non les équations (3), mais les équations (4). Donc, pour effectuer l'intégration définie, on devra ou intégrer les équations (3) entre $t, x, y, z, \ldots$, supposées variables, de manière que, pour $t = \mathrm{t}$, on ait

$$x = \mathrm{x}, \quad y = \mathrm{y}, \quad z = \mathrm{z}, \quad \ldots,$$

ou intégrer les équations (4) entre $\mathrm{t}, \mathrm{x}, \mathrm{y}, \mathrm{z}, \ldots$, supposées variables, de manière que, pour $\mathrm{t} = t$, on ait

$$\mathrm{x} = x, \quad \mathrm{y} = y, \quad \mathrm{z} = z, \quad \ldots.$$

Dans la dernière hypothèse, $t, x, y, z, \ldots$ étant regardées comme constantes, on devra aussi considérer comme constante une fonction s de $t, x, y, z, \ldots$. Donc l'équation (24), à laquelle satisfait la valeur de s déduite des formules (11) fournies par l'intégration définie des équations (3), devra se vérifier, en même temps que les équations (4), si l'on y suppose s constante, et par suite

$$(25)\qquad d\mathrm{s} = 0.$$

Or, effectivement, cette supposition réduit la formule (24) à la suivante :

$$(26)\qquad D_{\mathrm{x}}s(d\mathrm{x} - \mathrm{X}\,d\mathrm{t}) + D_{\mathrm{y}}s(d\mathrm{y} - \mathrm{Y}\,d\mathrm{t}) + D_{\mathrm{z}}s(d\mathrm{z} - \mathrm{Z}\,d\mathrm{t}) + \ldots = 0,$$

qu'entraînent avec elles les équations (4). Il y a plus : on établira sans peine la proposition suivante :

THÉORÈME IX. — *Si l'on veut intégrer les équations* (4), *qui sont du premier ordre entre les variables* t, x, y, z, ..., *de manière que, pour une valeur donnée t de la variable indépendante* t, *les inconnues* x, y, z, ... *acquièrent elles-mêmes des valeurs données x, y, z, ..., et vérifient en conséquence les conditions*

$$\mathrm{x} = x, \qquad \mathrm{y} = y, \qquad \mathrm{z} = z, \qquad \ldots,$$

il suffira d'assujettir t, x, y, z, ..., *considérées comme variables, à vérifier les formules* (11).

Démonstration. — Effectivement, si dans les formules (11) on suppose t, x, y, z, ... variables et t, x, y, z, ... constantes, on aura

$$(27)\qquad dx = 0, \qquad dy = 0, \qquad dz = 0, \qquad \ldots.$$

Mais ici les valeurs de dx, dy, dz, ... étant celles que déterminent les formules (11), il suffira, pour les obtenir, de remplacer successivement dans l'équation (24) la lettre s par les lettres x, y, z, ... Donc les équations (27) donneront

$$(28)\qquad \left\{\begin{array}{l}
D_{\mathrm{x}}x(d\mathrm{x} - \mathrm{X}\,d\mathrm{t}) + D_{\mathrm{y}}x(d\mathrm{y} - \mathrm{Y}\,d\mathrm{t}) + D_{\mathrm{z}}x(d\mathrm{z} - \mathrm{Z}\,d\mathrm{t}) + \ldots = 0,\\
D_{\mathrm{x}}y(d\mathrm{x} - \mathrm{X}\,d\mathrm{t}) + D_{\mathrm{y}}y(d\mathrm{y} - \mathrm{Y}\,d\mathrm{t}) + D_{\mathrm{z}}y(d\mathrm{z} - \mathrm{Z}\,d\mathrm{t}) + \ldots = 0,\\
D_{\mathrm{x}}z(d\mathrm{x} - \mathrm{X}\,d\mathrm{t}) + D_{\mathrm{y}}z(d\mathrm{y} - \mathrm{Y}\,d\mathrm{t}) + D_{\mathrm{z}}z(d\mathrm{z} - \mathrm{Z}\,d\mathrm{t}) + \ldots = 0,\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,
\end{array}\right.$$

et l'on en conclura

$$(29)\qquad \mathrm{K}(d\mathrm{x} - \mathrm{X}\,d\mathrm{t}) = 0, \qquad \mathrm{K}(d\mathrm{y} - \mathrm{Y}\,d\mathrm{t}) = 0, \qquad \mathrm{K}(d\mathrm{z} - \mathrm{Z}\,d\mathrm{t}) = 0, \qquad \ldots,$$

K étant la résultante analytique des termes compris dans le Tableau

$$\begin{array}{llll}
D_{\mathrm{x}}x, & D_{\mathrm{y}}x, & D_{\mathrm{z}}x, & \ldots,\\
D_{\mathrm{x}}y, & D_{\mathrm{y}}y, & D_{\mathrm{z}}y, & \ldots,\\
D_{\mathrm{x}}z, & D_{\mathrm{y}}z, & D_{\mathrm{z}}z, & \ldots,\\
\ldots, & \ldots, & \ldots, & \ldots
\end{array}$$

Or cette résultante, qui se réduit à l'unité quand on pose

$$\mathrm{t} = t,$$

conservera par suite, pour une valeur de t voisine de t, une valeur finie distincte de zéro. Donc les formules (29) se réduisent aux équations (4), que vérifieront les valeurs de x, y, z, ... tirées des formules (11).

Le théorème IX étant ainsi démontré, il suffira, pour revenir au théorème VIII, d'observer que, dans l'intégration définie d'équations différentielles du premier ordre, on peut à volonté prendre pour représenter ou les valeurs primitives, ou les valeurs finales des inconnues, l'un quelconque des deux systèmes de quantités qui se déduisent l'un de l'autre à l'aide de ces équations différentielles.

572.

MATHÉMATIQUES. — *Observations de M.* AUGUSTIN CAUCHY *sur une Note publiée dans le* Compte rendu *de la dernière séance par* M. CATALAN.

C. R., T. XLIII, p. 627 (29 septembre 1856).

Les conditions que l'auteur de la Note présente sous le titre *Nouvelles règles de convergence*, et qu'il dit lui-même avoir tirées d'un théorème énoncé par M. Bertrand dans le Tome VII du *Journal de M. Liouville*, peuvent être réduites à la proposition suivante :

THÉORÈME I. — *Soit u_n le terme général, supposé réel et positif, de la* *série*

$$(1)\qquad u_0,\quad u_1,\quad u_2,\quad u_3,\quad \ldots;$$

cette série sera convergente si u_n est de l'une des formes

$$(2)\qquad \frac{A_n}{n^{1+k}},\quad \frac{A_n}{n(\mathrm{l}n)^{1+k}},\quad \frac{A_n}{n\,\mathrm{l}n(\mathrm{l}\mathrm{l}n)^{1+k}},\quad \ldots,$$

k étant positif, et A_n s'approchant indéfiniment, pour des valeurs croissantes de n, d'une limite finie A.

Ce théorème et le théorème cité de M. Bertrand peuvent être évidemment remplacés par la proposition suivante :

Théorème II. — *Si, N étant l'un des rapports*

$$(3)\qquad \frac{\mathrm{l}u_n}{n},\quad \frac{\mathrm{l}(nu_n)}{\mathrm{l}n},\quad \frac{\mathrm{l}(n\,\mathrm{l}n.u_n)}{\mathrm{l}\mathrm{l}n},\quad \ldots,$$

N s'approche indéfiniment, pour des valeurs croissantes de n, d'une certaine limite h, la série dont le terme général est u_n sera convergente quand h sera négatif, divergente quand h sera positif.

D'ailleurs, dans un Mémoire que renferme le *Journal de M. Crelle* (Tome XLII, année 1851), M. Paücker observe que le théorème II et une règle de M. de Morgan, avec laquelle ce théorème s'accorde, sont *une conséquence très simple d'un théorème général sur la convergence des séries que M. Cauchy a donné depuis longtemps dans son* Analyse algébrique.

Effectivement, la limite vers laquelle converge la première des expressions (3), pour des valeurs croissantes de n, n'est autre chose que le logarithme du module de la série (1). Or, en vertu du théorème énoncé à la page 132 de l'*Analyse algébrique* ([1]), publiée en 1821, et reproduit à la page 388 du III[e] Volume des *Exercices d'Analyse et de Physique mathématique* ([2]), *la série* (1) *sera convergente si son module est inférieur à l'unité, ou, en d'autres termes, si le logarithme de ce module est négatif; divergente, si le même module est supérieur à l'unité, ou, en d'autres termes, si le logarithme de ce module est positif.*

([1]) *Œuvres de Cauchy*, S. II, T. III, p. 121.
([2]) *Œuvres de Cauchy*, S. II, T. XIII.

D'autre part, en vertu du théorème énoncé à la page 135 de l'*Analyse algébrique*, si, u_n étant positif et $u_{n+1} < u_n$, on prend

$$(4)\qquad v_n = 2^n u_{2^n-1},\qquad w_n = 2^n v_{2^n-1},\qquad \ldots,$$

les séries qui auront pour termes généraux les quantités

$$(5)\qquad u_n,\quad v_n,\quad w_n,\quad \ldots$$

seront en même temps convergentes ou divergentes; et, en vertu de la première des équations (4), le module de la série dont v_n est le terme général sera précisément le produit de la quantité positive l2 par la limite vers laquelle converge, pour des valeurs croissantes de n, la seconde des expressions (3). Donc la série dont u_n est le terme général sera convergente quand cette limite sera négative, divergente quand elle sera positive. En continuant ainsi, on reconnaîtra immédiatement dans tous les cas l'exactitude de l'assertion émise par M. Paucker.

Au reste, le théorème I est une conséquence immédiate des propositions générales établies dans le second Volume des *Exercices de Mathématiques* (page 221, année 1827), spécialement du théorème énoncé à la page 226 ([1]), et c'est effectivement de ce dernier théorème que M. Bertrand a déduit la proposition avec laquelle coïncide le théorème II, en faisant voir que, si l'on pose

$$k = 1 - h = \lim(1 - N)$$

(les valeurs de h, N étant celles qui ont été indiquées), la série dont u_n est le terme général sera convergente ou divergente suivant que la limite k sera supérieure ou inférieure à l'unité. Ainsi, par exemple,

([1]) *Œuvres de Cauchy*, S. II, T. VII, p. 272 et 273.

si N est la seconde des expressions (3), k sera la limite de

$$\frac{\mathrm{l}\left(\frac{1}{u_n}\right)}{\mathrm{l}\,n} = \frac{\mathrm{l}(u_n)}{\mathrm{l}\left(\frac{1}{n}\right)},$$

et l'on se trouvera immédiatement ramené au théorème énoncé à la page 137 de l'*Analyse algébrique* (¹).

573.

Mécanique analytique. — *Remarques faites à propos des observations présentées par M.* Joseph Bertrand (²) *sur un Mémoire de M.* Ostrogradski.

C. R., T. XLIII, p. 1066 (8 décembre 1856).

Comme vient de me le rappeler un de nos confrères, M. de Senarmont, et comme le constatent les notes qu'il a prises en suivant à l'École Polytechnique les cours que j'y faisais en 1828, j'avais traité moi-même à cette époque la question relative à la perte de forces vives

(¹) *Œuvres de Cauchy*, S. II, T. III, p. 125.

(²) *Observations de M. Bertrand.* — M. Ostrogradski a publié en 1854 un Mémoire sur les changements brusques de vitesse dans les systèmes en mouvement. J'ai eu connaissance aujourd'hui seulement de ce nouveau travail, et je crois devoir faire remarquer que le savant géomètre de Saint-Pétersbourg s'est rencontré sans le savoir avec M. Sturm pour l'une des propositions qui s'y trouvent démontrées. M. Ostrogradski examine en effet la diminution de forces vives qu'éprouve un système quelconque lorsqu'on y introduit brusquement des liaisons nouvelles, et il prouve que cette diminution est égale précisément à la somme des forces vives dues aux vitesses perdues par chaque point du système. Or ce théorème, analogue au principe bien connu de Carnot, mais plus général et surtout beaucoup plus net, a été présenté précisément sous la même forme par M. Sturm; on peut consulter à ce sujet un Mémoire sur quelques propositions de Mécanique rationnelle, dont l'extrait a été imprimé dans les *Comptes rendus* de 1841, second semestre, page 1046. M. Sturm énonce précisément, et sous la même forme, la proposition à laquelle a été récemment conduit M. Ostrogradski. La démonstration n'est pas insérée dans les *Comptes rendus* de 1841; mais sans aucun doute elle se trouve dans les papiers laissés par M. Sturm, et il serait désirable qu'elle fût publiée avec celle de plusieurs autres propositions remarquables annoncées au même endroit.

dans un système de points matériels dont les vitesses varient brusquement. C'est aussi à ce sujet que se rapporte un article qui a pour titre : *Sur un nouveau principe de Mécanique*, et qui a été inséré dans le *Bulletin* de Férussac de 1829 (¹). A la vérité, les énoncés des théorèmes donnés par moi-même dans les années 1828, 1829, et par M. Sturm en 1841, diffèrent quant aux conditions qu'ils supposent remplies, et il en résulte qu'au premier abord ces théorèmes paraissent entièrement distincts. Mais il n'est pas sans intérêt de les rapprocher l'un de l'autre, et de voir comment le second peut être déduit du premier. C'est ce que j'expliquerai dans un prochain article.

574.

Mécanique. — *Note sur les variations brusques de vitesses dans un système de points matériels.*

C. R., T. XLIII, p. 1137 (22 décembre 1856).

Dans un Mémoire que j'ai lu à l'Académie le 21 juillet 1828, et que renferme le *Bulletin des Sciences mathématiques* publié par M. de Férussac (Tome XII, année 1829, page 119), j'ai donné les deux théorèmes suivants :

Théorème I. — *Lorsque dans un système de points matériels les vitesses varient brusquement en vertu d'actions moléculaires développées par les chocs de quelques parties du système, la somme des moments virtuels des quantités de mouvement acquises ou perdues pendant le choc est nulle toutes les fois que l'on considère un mouvement virtuel dans lequel les vitesses de deux molécules qui réagissent l'une sur l'autre sont égales entre elles.*

(¹) *Œuvres de Cauchy*, S. II, T. II.

Théorème II. — *S'il arrive que, après le choc tout point matériel qui a exercé une action moléculaire sur un autre point se réunisse à ce dernier, le principe que nous venons d'énoncer fournira toutes les équations nécessaires pour déterminer, après le choc, le mouvement de toutes les molécules ou de tous les corps dont se compose le système proposé. Dans le même cas, l'une de ces équations, savoir celle qu'on obtient en faisant coïncider les vitesses virtuelles avec les vitesses effectives après le choc, exprimera que la perte de forces vives est la somme des forces vives dues aux vitesses perdues.*

Les vitesses virtuelles qui, dans l'énoncé du premier théorème, sont supposées égales entre elles, sont évidemment les vitesses dont il est question à la page 118, c'est-à-dire les vitesses virtuelles des molécules projetées sur les directions des forces. C'est aussi ce que montrent les applications faites du premier théorème (pages 120 et 121).

Les deux théorèmes que je viens de rappeler sont immédiatement déduits, dans le Mémoire cité, de l'équation générale qu'on obtient quand on égale entre elles les deux sommes de moments virtuels, relatives aux deux systèmes de forces motrices que l'on considère en Dynamique, savoir, au système des forces motrices appliquées aux divers points, et au système de celles qui seraient capables de produire les mouvements observés, si ces points étaient libres et indépendants les uns des autres. J'observe que, à proprement parler, les vitesses ne varient jamais brusquement; ce qu'on a quelquefois nommé un changement brusque de direction ou d'intensité dans les vitesses n'étant autre chose qu'un changement survenu dans l'intervalle de temps compris entre deux époques très rapprochées l'une de l'autre.

Une intégration relative au temps, effectuée entre ces deux époques, introduit dans le calcul à la place de la somme des moments virtuels des forces qui seraient capables de produire les mouvements observés, la somme des moments virtuels des quantités de mouvement acquises

ou perdues dans l'instant dont il s'agit, et à la place des moments virtuels des forces appliquées, une intégrale du genre de celles que j'ai nommées intégrales *singulières*, cette intégrale étant pour l'ordinaire sensiblement distincte de zéro, quoique prise entre deux limites très voisines. C'est ainsi que j'ai obtenu, dans le Mémoire cité, l'équation (3) qui, *dans le cas où l'intégrale singulière est nulle*, se réduit à l'équation (4), c'est-à-dire à une équation qui exprime que *la somme des moments virtuels des quantités de mouvement acquises ou perdues s'évanouit*. D'ailleurs l'intégrale singulière peut être décomposée en plusieurs termes relatifs, les uns à des forces finies, telles que les attractions ou répulsions provenant de corps étrangers au système que l'on considère; les autres à des forces très considérables, telles que les forces moléculaires développées par des chocs : et les termes de la seconde espèce sont évidemment les seuls dont on doit tenir compte. Or ces termes disparaissent sous la condition énoncée dans le premier théorème : donc, sous cette condition, la somme des moments virtuels des quantités de mouvement acquises ou perdues pendant le choc s'évanouira, et l'on pourra poser l'équation (4) qui entraîne avec elle le théorème II.

Lorsque le système donné de points matériels se réduit à une machine dans laquelle les mouvements des pièces sont obligés et solidaires, on est ramené par les considérations précédentes aux résultats énoncés par M. Poncelet dans le *Bulletin des Sciences* de 1829, p. 332, et dans son *Cours de Mécanique appliquée aux machines*.

Ajoutons encore une remarque qui n'est pas sans intérêt. On sait que, à des liaisons établies entre des points matériels, on peut substituer les résistances qu'elles opposent aux mouvements de ces points. Donc si, au moment du choc, de nouvelles liaisons sont établies entre ces mêmes points, on pourra en faire abstraction et poser encore l'équation (3), pourvu que l'on introduise dans l'intégrale singulière qu'elle renferme les résistances dont il s'agit. Alors aussi la réduction de cette intégrale à zéro sera toujours la condition nécessaire pour que l'on retrouve l'équation (4). C'est donc sous cette condition seulement que pourra subsister le théorème énoncé par M. Sturm en 1841, savoir que *la perte des forces vives dans un système de points entre lesquels on établit de nouvelles liaisons est la somme des forces vives dues aux vitesses perdues* (¹).

Dire que deux molécules se réunissent après le choc, c'est dire qu'elles sont alors invariablement liées l'une à l'autre. Donc la dernière partie du second théorème présente un des cas dans lesquels se vérifie le théorème énoncé par M. Sturm.

575.

Observations sur la Note insérée par M. Cauchy *dans le* Compte rendu *de la dernière séance; par M.* Duhamel.

C. R., T. XLIII, p. 1165 (29 décembre 1856).

M. Cauchy a rappelé dans la dernière séance des théorèmes dont il a donné la démonstration dans le *Bulletin* de Férussac, de 1829; mais, dans la Note qu'il a insérée à ce sujet dans le *Compte rendu*, il s'est glissé quelques passages inexacts que je crois devoir rectifier.

L'énoncé du premier théorème suppose que deux molécules qui se sont choquées ont acquis des vitesses égales; et, par les développements qui précèdent et qui suivent, dans le Mémoire de l'auteur, il est clair qu'il entend expressément que ces vitesses ont la même valeur et la même direction. Cependant, dans le *Compte rendu*, il dit qu'il faut entendre que ce sont simplement leurs projections sur la normale commune aux deux surfaces en contact, qui sont égales.

Cette interprétation étendrait beaucoup le théorème de M. Cauchy, et m'enlèverait une partie de celui que j'ai démontré dans une Note présentée à l'Académie, le 29 octobre 1832, et imprimée en 1835 dans le *Journal de l'École Polytechnique*.

Pour justifier cette interprétation, M. Cauchy renvoie à la page 118 du *Bulletin*. Je n'ai rien trouvé dans cette page qui ait rapport à ce point; mais à la page 119 je trouve cette phrase :

(¹) *Voir* le Tome XIII des *Comptes rendus*, page 1046.

« Or, dans cette dernière somme, les seules forces qui auront des valeurs très considérables, seront les forces moléculaires développées par les chocs, et elles disparaîtront de la somme dont il s'agit, si le mouvement virtuel est tellement choisi, que deux molécules qui réagissent l'une sur l'autre offrent des vitesses *égales et parallèles*. Donc, pourvu que cette condition soit remplie.... Il en résulte qu'on peut énoncer généralement la proposition suivante. »

Cette proposition est le théorème I du *Compte rendu*.

A la page 120 je trouve cette autre phrase :

« Ajoutons que les termes relatifs à ces forces moléculaires disparaîtront si le mouvement virtuel est tellement choisi, que deux molécules, qui réagissent l'une sur l'autre, aient des vitesses virtuelles *égales et parallèles*. »

Il est donc évident que M. Cauchy n'entendait alors son théorème comme applicable qu'au cas où les points où s'est exercé le choc ont acquis des vitesses égales et parallèles. C'est pour cela que j'avais jugé à propos de reprendre la même question, en considérant le cas le plus général du choc des corps mous, celui où la compression cesse au moment précis où les composantes normales des points en contact sont devenues égales et de même sens. Les composantes tangentielles, après le choc, peuvent d'ailleurs être très différentes, et les corps se séparer.

Ainsi, comme l'a dit avec raison M. Bertrand, j'ai démontré le théorème de Carnot dans un cas plus général que M. Cauchy; et l'inexactitude de la Note de notre honorable confrère ne peut tenir qu'à une inadvertance qu'il s'empressera sans doute de reconnaître. Quant au théorème énoncé par M. Sturm, et qui a amené cette discussion, je me propose de faire à ce sujet une Communication spéciale à l'Académie.

Réponse de M. Cauchy.

Notre honorable confrère me trouvera toujours disposé à lui rendre justice, et comprendra sans peine comment nous avons pu n'être pas entièrement d'accord sur l'étendue de deux théorèmes énoncés dans le Mémoire que j'ai lu à l'Académie le 21 juillet 1828. Ayant relu ce Mémoire, sans connaître le sien, j'y ai trouvé quelques expressions qui, n'étant pas assez précises, avaient besoin d'être interprétées ou même corrigées; j'ai reconnu que, à la page 118, le mot *projeté* devait être complété par un *e* muet, et appliqué, non à un point, mais à une vitesse; et pour que les applications faites de la formule (4) à la page 121 subsistassent sous la seule condition énoncée en cet endroit, savoir que les distances entre les molécules fussent invariables, il était nécessaire qu'à la page 120, comme dans le principe général de Dynamique rappelé à la page 118, à la place de ces mots, *les vitesses*, on lût *les vitesses projetées*. Quoi qu'il en soit de ces remarques, je ne fais nulle difficulté de reconnaître que notre confrère a pu légitimement attribuer le sens qu'il indique aux deux passages qu'il a cités. Mais il reconnaîtra certainement à son tour que le théorème énoncé par lui avec précision se déduit, comme les deux miens, de la formule (3) de la page 120 de mon Mémoire, et que, pour obtenir la formule (4), à l'aide de laquelle on peut les exprimer tous trois, par conséquent aussi, pour obtenir l'équation (13), qui n'est qu'une transformation de l'équation (4), il suffit de se placer dans des conditions telles, que l'intégrale singulière comprise dans la formule (4) s'évanouisse. Or c'est ce qui aura lieu, dans le choc des corps, pour un mouvement virtuel donné, *si ce mouvement est tel, que la somme des moments virtuels des forces moléculaires développées par le choc se réduise à zéro* (1).

(1) Pour la suite de cette polémique, *voir*, dans le Tome XLIV des *Comptes rendus*, les articles suivants :

Observations faites par M. Duhamel *au sujet d'un théorème de Mécanique* (p. 3);
Réponse de M. Augustin Cauchy *aux dernières observations de M.* Duhamel (p. 80);
Réplique de M. Duhamel (p. 81);
Observations générales sur la question relative au choc, par M. Poncelet (p. 82);
Observations de M. Morin (p. 89);
Sur quelques propositions de Mécanique rationnelle, par M. Augustin Cauchy (p. 101).

576.

Théorie des nombres. — *Recherches nouvelles sur la théorie des nombres.*

C. R., T. XLIV, p. 77 (19 janvier 1857).

Trois Mémoires que j'ai présentés à l'Académie, le 2 février 1824, puis le 31 mai (1) et le 5 juillet 1830, renferment sur la théorie des nombres, spécialement sur les communs diviseurs des polynômes à coefficients entiers, sur les rapports qui existent entre les équations et les équivalences ou congruences, sur l'usage que l'on peut faire des nombres figurés et des nombres de Bernoulli, soit pour résoudre des équations du second degré en nombres entiers, soit pour déterminer le nombre des résidus quadratiques, enfin sur la détermination des racines primitives des nombres premiers, divers théorèmes qui ont paru dignes d'attention. De ces trois Mémoires, paraphés, le premier par M. Fourier, le second par M. Cuvier, le troisième par M. Arago, un seul, le second, a été publié dans le Tome XVII des *Mémoires de l'Académie*. Parmi les propositions que renferme le premier Mémoire, l'une détermine un nombre entier que doit toujours diviser le plus grand commun diviseur de deux polynômes à coefficients entiers; et, dans le cas où, le coefficient de la plus haute puissance de la variable dans le premier polynôme étant l'unité, le second polynôme est la dérivée du premier, cette proposition assigne au nombre entier que doit diviser tout diviseur entier des deux polynômes une valeur égale, au signe près, au produit des carrés des différences entre les racines de l'équation que l'on forme en égalant le premier polynôme à zéro. De cette proposition, que j'ai reproduite dans le premier Volume des *Exercices de Mathématiques* (2), se tirent, comme on peut le voir dans le premier Volume et dans le quatrième, un grand nombre de conséquences qui intéressent la théorie des

(1) *Œuvres de Cauchy*, S. I, T. III.
(2) *Œuvres de Cauchy*, S. II, T. VI.

nombres. J'ajoute que, de cette même proposition combinée avec le théorème de Fermat, suivant lequel tout nombre premier p divise la différence $x^p - x$, on peut immédiatement déduire le théorème général dont voici l'énoncé :

Théorème. — *Soient*

p, q deux nombres premiers;

θ une racine primitive de l'équation

$$\theta^p = 1, \tag{1}$$

ou, ce qui revient au même, une racine de

$$1 + \theta + \theta^2 + \ldots + \theta^{p-1} = 0, \tag{2}$$

et Θ une fonction entière de θ, à coefficients entiers, toujours évidemment réductible, en vertu de la formule (2), au degré $p - 2$. Soit encore n le nombre des valeurs distinctes que la fonction Θ peut acquérir, quand on remplace la racine primitive θ par une autre; nommons

$$\Theta_1, \quad \Theta_2, \quad \ldots, \quad \Theta_n$$

ces valeurs de Θ, et posons

$$f(x) = (x - \Theta_1)(x - \Theta_2)\ldots(x - \Theta_n); \tag{3}$$

enfin soit H le produit des carrés des différences entre les quantités Θ_1, Θ_2, ..., Θ_n, déterminé par la formule

$$H = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} f'(\Theta_1) f'(\Theta_2) \ldots f'(\Theta_n). \tag{4}$$

Si q est supérieur à n, premier à H, et diviseur (¹) du binôme

$$\Theta^q - \Theta, \tag{5}$$

l'équivalence du degré n

$$f(x) \equiv 0 \pmod{q} \tag{6}$$

aura n racines inégales et distinctes.

(¹) Le binôme $\Theta^q - \Theta$ est une fonction entière de θ à coefficients entiers, et q est nommé *diviseur* de cette fonction, lorsqu'il divise tous les coefficients dans cette fonction réduite au degré $p - 2$.

Démonstration. — Si l'on pose

$$\varphi(x, \Theta) = (x - \Theta)(x - 1 - \Theta)\ldots(x - q + 1 - \Theta),$$

on aura, dans l'hypothèse admise, pour toute valeur entière de x,

$$\varphi(x, \Theta) = qQ,$$

Q désignant une fonction entière de θ à coefficients entiers. Cela posé, l'équation identique

$$f(x) f(x-1) \ldots f(x-q+1) = \varphi(x, \Theta_1)\varphi(x, \Theta_2)\ldots\varphi(x, \Theta_n)$$

donnera

$$f(x) f(x-1)\ldots f(x-q+1) \equiv 0 \pmod{q^n}. \tag{7}$$

Si, dans la formule (7), on remplace x par $x + kq$, k étant un nombre premier à q, et si l'on pose, pour abréger,

$$f(x + kq) = F(x),$$

on aura encore

$$F(x) F(x-1)\ldots F(x-q+1) \equiv 0 \pmod{q^n}. \tag{8}$$

Cela posé, l'équivalence

$$f(x) \equiv 0 \pmod{q} \tag{9}$$

admettra évidemment une ou plusieurs racines, et le nombre des racines distinctes de cette équivalence sera le nombre des facteurs qui, dans chacun des produits

$$f(x)\, f(x+1)\ldots f(x-q+1), \tag{10}$$

$$F(x) F(x+1)\ldots F(x-q+1), \tag{11}$$

seront divisibles par q. D'ailleurs q, n'étant pas diviseur de H, ne pourra être diviseur commun de $f(x)$ et de $f'(x)$. Donc, si $f(x)$ est divisible par q^2, le polynôme

$$F(x) = f(x) + kq\, f'(x) + \ldots$$

sera, comme le produit

$$kq\,f'(x),$$

divisible par q seulement. De plus, si $f(x)$ est premier à q, on pourra en dire autant de $F(x)$. Enfin, si $f(x)$ est divisible une seule fois par q, une seule valeur de k, prise dans la suite

$$1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ q-1$$

rendra la somme

$$\frac{f(x)}{q}+k\,f'(x)$$

divisible par q, et $F(x)$ divisible par q^2; et, pour toute autre valeur de k prise dans la même suite, $F(x)$ sera divisible par q seulement.

Des remarques semblables s'appliquant à chacun des facteurs du produit (11), si l'on prend successivement pour k les divers termes de la suite

$$1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ q-1,$$

le nombre des valeurs de k pour lesquelles un des facteurs du produit (11) sera divisible par q^2 ne pourra surpasser le nombre des racines distinctes de l'équivalence (9). Soit l ce dernier nombre, qui ne pourra surpasser n. On aura nécessairement $l=n$. Car, si l était inférieur à n, alors la condition $q>n$ entraînerait la suivante $q-1>l$; et, parmi les valeurs

$$1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ q-1$$

successivement attribuées au nombre k, il y en aurait au moins une qui, en rendant divisible une seule fois par q chacun des facteurs du produit (11) correspondants aux diverses racines de la formule (6), rendrait ce même produit divisible l fois seulement par q, tandis que, en vertu de la formule (8), il devrait être divisible par q^n et non pas seulement par q^l.

Corollaire. — Du théorème de Fermat, rappelé à la page 402, il résulte que le nombre premier q est effectivement un diviseur du binôme

$$\Theta^q-\Theta$$

lorsque, n étant diviseur de $p-1$, q est racine de l'équivalence

$$q^m \equiv 1 \quad (\text{mod.}\,p), \tag{12}$$

dans laquelle on suppose $m=\frac{p-1}{n}$, et lorsque d'ailleurs Θ est une fonction linéaire des périodes à m termes formées avec les racines primitives de l'équation (1).

577.

MÉCANIQUE. — *Mémoire sur le choc des corps élastiques, présenté à l'Académie le 19 février 1827.*

C. R., T. XLIV, p. 80 (19 janvier 1857).

Ce Mémoire sera publié dans le prochain *Compte rendu* [1].

578.

ANALYSE MATHÉMATIQUE. — *Sur les compteurs logarithmiques appliqués au dénombrement et à la séparation des racines des équations transcendantes.*

C. R., T. XLIV, p. 257 (16 février 1857).

Dans la théorie des équations algébriques à une seule inconnue, c'est-à-dire des équations qu'on obtient en égalant à zéro des fonctions entières de cette inconnue, l'une des questions qui, les premières, ont justement préoccupé les géomètres, a été d'énumérer les racines et de les séparer les unes des autres. Quand on considère seulement les racines réelles, le problème consiste à déterminer le nombre des racines comprises entre deux limites données, et pour qu'on soit en état de la résoudre, il suffit que l'on sache déterminer le nombre

(1) Cette publication n'a pas été faite.

des racines inférieures et le nombre des racines supérieures à chaque limite, par conséquent à une quantité réelle donnée. On peut même, en prenant pour inconnue la différence entre une racine et cette quantité réelle, réduire le problème à la détermination du nombre des racines positives et du nombre des racines négatives d'une équation algébrique. Ramenée à ces termes, la question peut se résoudre par la seule inspection des signes dont se trouvent affectées, quand on les réduit en nombres, certaines fonctions des coefficients. Elle n'était pas résolue par la règle de Descartes, qui, se bornant à considérer les coefficients eux-mêmes, fournit seulement une limite supérieure au nombre des racines réelles de chaque espèce, et, quant aux autres méthodes proposées pour cet objet dans les siècles précédents, Lagrange a observé qu'elles étaient ou insuffisantes, ou impraticables (¹). Mais cette lacune, signalée par Lagrange en 1808, a été comblée, et l'on connait aujourd'hui diverses solutions du problème. La première de ces solutions est celle que j'ai donnée dans un Mémoire présenté à l'Institut, dans la séance du 17 mai 1812. Plus tard, la question a été reprise par M. Sturm, qui l'a rattachée à la recherche du plus grand commun diviseur entre les premiers membres d'une équation algébrique et de l'équation dérivée. Plus tard encore elle a été de nouveau traitée, soit par moi-même, soit par d'autres auteurs, spécialement par MM. Sylvester, Hermite et Faa de Bruno, et l'on est arrivé à cette conclusion remarquable, que le nombre des racines réelles peut être fourni par l'application de la règle de Descartes aux seules quantités qui, *dans l'équation des différences*, servent de coefficients aux puissances de l'inconnue dont les degrés sont les *nombres triangulaires*.

Mais les équations auxquelles on est conduit dans les applications de l'Analyse à la Mécanique, à la Physique, à l'Astronomie, ne sont pas toujours algébriques; elles peuvent être, elles sont souvent transcendantes, et souvent aussi les racines imaginaires de ces équations algébriques ou transcendantes jouent un grand rôle dans la solution des problèmes. Il était donc important d'établir des principes généraux pour le dénombrement et la séparation des racines réelles ou imaginaires dans les équations algébriques ou transcendantes. C'est ce que j'ai fait dans le Mémoire lithographié du 27 novembre 1831 (¹) et dans quelques autres, spécialement dans un Mémoire que renferme le Tome XL des *Comptes rendus*. Dans ce dernier Mémoire, le dénombrement des racines qui représentent les affixes de points renfermés dans un contour donné a été réduit à la détermination de la quantité que je nomme le *compteur logarithmique*. D'ailleurs cette détermination peut être aisément effectuée à l'aide des formules que fournit le *calcul des indices des fonctions*, quand, l'équation proposée étant algébrique, le contour donné est un polygone rectiligne, ou même un polygone curviligne dont les côtés sont des arcs de cercle. J'ajoute que les mêmes formules peuvent être employées avec succès pour le dénombrement et la séparation des racines réelles ou imaginaires d'équations transcendantes. C'est ce que l'on verra dans le présent Mémoire, où ces formules sont appliquées à deux équations fondamentales que présente la théorie du mouvement elliptique des planètes, savoir à l'équation qui détermine l'anomalie excentrique et à celle qu'on obtient lorsque, entre cette équation et sa dérivée, on élimine l'excentricité.

(¹) *Voir* le *Traité de la résolution des équations numériques*, par Lagrange, édition de 1808, page 43. — *Œuvres de Lagrange*, T. VIII, p. 66.

ANALYSE.

§ I. — *Formules générales.*

Soient

x, y les deux coordonnées rectangulaires d'un point qui se meut dans un plan;

$z = x + yi$ l'affixe de ce point;

S une aire comprise dans le plan donné, et limitée par un certain contour;

(¹) *Œuvres de Cauchy*, S. II, T. XV.

$Z = \mathrm{f}(z)$ une fonction de z qui ne s'évanouisse en aucun point de ce contour, et qui demeure finie et continue, tandis que le point dont z est l'affixe se meut sans sortir de l'aire S;

X, Y les coordonnées rectangulaires du point dont l'affixe est Z, en sorte qu'on ait

$$Z = X + Y\mathrm{i}.$$

Concevons d'ailleurs que l'on cherche les racines de l'équation

$$(1) \qquad Z = 0$$

propres à représenter les affixes de points renfermés dans l'aire S; supposons que toutes ces racines soient du nombre de celles qu'on nomme racines *simples*, ou *doubles*, ou *triples*, etc., c'est-à-dire que, la lettre c désignant l'une quelconque de ces racines, le rapport de Z à la première, ou à la deuxième, ou à la troisième, ... puissance de la différence $z - c$ conserve, pour $z = c$, une valeur finie distincte de zéro. Si l'on nomme m le nombre total des racines dont il s'agit, égales ou inégales, c'est-à-dire la somme de plusieurs nombres entiers correspondants à ces racines et respectivement égaux à l'unité pour une racine simple, à deux pour une racine double, à trois pour une racine triple, ..., on aura

$$(2) \qquad m = \frac{\Delta\,\bar{\mathrm{l}}Z}{\mathrm{I}};$$

la valeur de I étant

$$\mathrm{I} = 2\pi\mathrm{i},$$

et la variation logarithmique qu'indique la lettre Δ s'étendant au contour entier de l'aire S.

Ajoutons que, si ce contour est décomposé en éléments divers, la variation logarithmique $\Delta\,\bar{\mathrm{l}}Z$ et le nombre m, exprimé par le *compteur logarithmique*

$$\frac{\Delta\,\bar{\mathrm{l}}Z}{\mathrm{I}},$$

se décomposeront à leur tour en éléments correspondants.

D'autre part, si par la notation $[u]$ on désigne la clef d'une quantité réelle u, c'est-à-dire une autre quantité qui se réduise à l'unité quand u est positif, à -1 quand u est négatif, alors, en étendant les opérations qu'indiquent les deux lettres Δ et $\mathcal{J}$ soit au contour entier de l'aire S, soit à une partie seulement de ce contour, on aura

$$(3) \qquad \Delta\,\bar{\mathrm{l}}Z = \Delta\frac{\mathrm{l}Z + \mathrm{l}(-Z)}{2} + \frac{1}{2}\mathcal{J}\left(\frac{X}{Y}\right)$$

et

$$(4) \qquad \frac{\mathrm{l}Z + \mathrm{l}(-Z)}{2} = \frac{1}{2}\mathrm{l}(X^2 + Y^2) + \mathrm{i}\,\mathrm{arc\,tang}\frac{Y}{X} - \frac{1}{4}\left[\frac{Y}{X}\right].$$

Lorsque la variation logarithmique $\Delta\,\bar{\mathrm{l}}Z$ s'étend au contour entier de l'aire S, la formule (3) se réduit à

$$(5) \qquad \Delta\,\bar{\mathrm{l}}Z = \frac{1}{2}\mathcal{J}\left(\frac{X}{Y}\right),$$

et par suite le nombre m peut être déterminé à l'aide de l'équation

$$(6) \qquad m = \frac{1}{2}\mathcal{J}\left(\frac{X}{Y}\right),$$

l'indice intégral s'étendant au contour entier de l'aire S.

Si le contour de l'aire S est un rectangle, ou même un polygone rectiligne quelconque, l'indice intégral se décomposera en plusieurs autres, qui correspondront aux divers côtés de ce polygone, et les quantités Z, X, Y pourront être exprimées en fonction de longueurs mesurées sur ces mêmes côtés.

Concevons à présent que, dans le cas où x et $\mathrm{F}(x)$ sont réels, on désigne par

$$\mathop{\Delta}_{x=x'}^{x=x''}\mathrm{F}(x)$$

la différence entre les valeurs de $\mathrm{F}(x)$ correspondantes aux valeurs x'' et x' de x, en sorte qu'on ait

$$\mathop{\Delta}_{x=x'}^{x=x''}\mathrm{F}(x) = \mathrm{F}(x'') - \mathrm{F}(x').$$

Alors, en réduisant l'aire S à celle d'un rectangle compris entre les quatre droites représentées par les équations

$$x = x', \qquad x = x'',$$
$$y = y', \qquad y = y'',$$

on tirera de la formule (6)

$$(7) \qquad m = \frac{1}{2} \mathfrak{J}_{y=y'}^{y=y''} \left(\Delta_{x=x'}^{x=x''} \frac{X}{Y} \right) - \frac{1}{2} \mathfrak{J}_{x=x'}^{x=x''} \left(\Delta_{y=y'}^{y=y''} \frac{X}{Y} \right).$$

Pour que, dans le cas où

$$Z = \mathrm{f}(z)$$

est une fonction réelle de z, la formule (7) fournisse le nombre m des racines réelles de l'équation (1), ou, ce qui revient au même, de la suivante

$$(8) \qquad \mathrm{f}(x) = 0,$$

renfermées entre les limites x', x'', il suffit de poser

$$y' = -\varepsilon, \qquad y'' = \varepsilon,$$

ε étant un nombre infiniment petit. Si d'ailleurs les racines dont il s'agit sont toutes inégales, le rapport

$$\frac{X}{Y}$$

pourra être remplacé par le rapport

$$\frac{\mathrm{f}(x)}{y\,\mathrm{f}'(x)}$$

dont il différera très peu pour des valeurs de y voisines de zéro, et la formule (7) donnera

$$(9) \qquad m = \frac{1}{2} \Delta_{x=x'}^{x=x''} \left[\frac{\mathrm{f}(x)}{\mathrm{f}'(x)} \right] - \mathfrak{J}_{x=x'}^{x=x''} \left(\frac{\mathrm{f}(x)}{\mathrm{f}'(x)} \right).$$

Concevons, pour fixer les idées, qu'on veuille déterminer le nombre

total des racines réelles de l'équation (8). On devra poser

$$x' = -\infty, \qquad x'' = \infty,$$

dans la formule (9), qui donnera simplement

$$(10) \qquad m = 1 - \mathfrak{J}_{x=-\infty}^{x=\infty} \left(\frac{\mathrm{f}(x)}{\mathrm{f}'(x)} \right),$$

si $\mathrm{f}(x)$ est une fonction entière de x.

Si le contour de l'aire S était composé, non plus de droites, mais d'arcs de cercle, alors, dans la détermination des divers éléments du nombre m, on pourrait considérer Z, X, Y comme fonctions de longueurs mesurées sur ces arcs de cercle, ou d'angles proportionnels à ces longueurs, ou de lignes trigonométriques dans lesquelles entreraient ces mêmes angles.

Si, pour fixer les idées, on réduisait l'aire S à celle d'un cercle qui aurait pour rayon r, et pour centre le point dont l'affixe est c, alors, en posant

$$z = c + r_p \qquad \text{et} \qquad \theta = \operatorname{tang} \frac{p}{2},$$

on pourrait considérer X, Y, Z comme fonctions de p ou de θ. Dans cette même hypothèse, si Z est une fonction entière de degré n, pour déterminer le nombre m des racines de l'équation (1) qui représentent les affixes de points situés dans l'intérieur du cercle, il suffira de poser

$$(1 - \theta i)^n Z = V + Wi,$$

V, W étant réels, puis de recourir, si n est impair, à la formule

$$(11) \qquad m = \frac{n}{2} + \frac{1}{2} \mathfrak{J}_{\theta=-\infty}^{\theta=\infty} \left(\frac{V}{W} \right),$$

et si n est pair, à la formule

$$(12) \qquad m = \frac{n}{2} - \frac{1}{4} \Delta_{\theta=-\infty}^{\theta=\infty} \left[\frac{W}{V} \right] + \frac{1}{2} \mathfrak{J}_{\theta=-\infty}^{\theta=\infty} \left(\frac{V}{W} \right).$$

§ II. — *Application des formules établies dans le* § I.

Si, dans le mouvement elliptique d'une planète, on désigne par les lettres ψ, ε l'anomalie excentrique et l'excentricité de l'orbite, on aura

$$\psi - \varepsilon \sin\psi = T,$$

T désignant une fonction linéaire du temps. L'anomalie excentrique sera donc une racine réelle d'une équation de la forme

$$z - \varepsilon \sin z - T = 0, \tag{1}$$

ε, T étant des quantités réelles dont la première est inférieure à l'unité.

D'autre part, pour que l'équation (1) acquière des racines égales, il est nécessaire que l'inconnue z vérifie simultanément cette équation et sa dérivée

$$1 - \varepsilon \cos z = 0, \tag{2}$$

par conséquent aussi la formule

$$z - \operatorname{tang} z - T = 0, \tag{3}$$

que fournit l'élimination de ε entre les équations (1) et (2).

ε étant positif et inférieur à l'unité, toutes les racines de l'équation (2) sont nécessairement imaginaires. Mais il n'en est plus de même des équations transcendantes (1) et (3). Celles-ci admettent deux sortes de racines, les unes réelles, les autres imaginaires. D'ailleurs, pour séparer ces racines les unes des autres, pour assigner même des limites entre lesquelles chaque racine est comprise, il suffira, comme on va le voir, de recourir aux formules établies dans le § I.

Parlons d'abord de l'équation (1). Si l'on y suppose l'affixe z réduite à une quantité réelle x, elle deviendra

$$x - \varepsilon \sin x - T = 0; \tag{4}$$

et, pour déterminer le nombre m des racines réelles de l'équation (4) comprises entre deux limites données

$$x', \quad x'',$$

il suffira de recourir à la formule (9) du § I, et de poser, dans cette formule,

$$f(x) = x - \varepsilon \sin x - T,$$

par conséquent

$$f'(x) = 1 - \varepsilon \cos x.$$

Or, en vertu de ces dernières équations, la seconde des fonctions

$$f(x), \quad f'(x)$$

sera toujours positive, et la première se réduira simplement à $x - T$, pour toute valeur de x propre à vérifier la condition

$$\sin x = 0, \tag{5}$$

c'est-à-dire toutes les fois que l'on prendra pour x un des termes de la progression

$$\ldots -3\pi, \quad -2\pi, \quad -\pi, \quad 0, \quad \pi, \quad 2\pi, \quad 3\pi, \quad \ldots, \tag{6}$$

indéfiniment prolongée dans les deux sens. Cela posé, concevons que l'on réduise les limites x', x'' à deux termes consécutifs de cette progression, et que l'on pose en conséquence

$$x' = k\pi, \qquad x'' = (k+1)\pi,$$

k étant une quantité entière. La formule (9) du § I donnera

$$m = \frac{1}{2} \mathop{\Delta}_{x=x'}^{x=x''} [x - T] = [x'' - T] - [x' - T]; \tag{7}$$

par conséquent le nombre m des racines de l'équation (4) comprises entre les limites dont il s'agit sera égal à 1, si T est compris entre ces mêmes limites, à zéro dans le cas contraire. Donc *l'équation* (4) *offrira une seule racine réelle; et, si l'on nomme $k\pi$ le plus grand des multiples de π inférieurs à T, cette racine unique sera comprise entre les limites*

$$k\pi, \quad (k+1)\pi.$$

Parlons maintenant des racines imaginaires de l'équation (1). Ces racines seront de la forme

$$z = x + y\mathrm{i},$$

x, y étant des quantités réelles dont la seconde ne sera pas nulle, et ces racines seront conjuguées deux à deux : car, si l'on pose

$$z - \varepsilon \sin z - T = X + Y\mathrm{i},$$

X, Y étant réels, on trouvera

$$X = x - T - \varepsilon \frac{e^y + e^{-y}}{2} \sin x, \qquad Y = y - \varepsilon \frac{e^y - e^{-y}}{2} \cos x; \tag{8}$$

et par suite, si les équations

$$X = 0, \qquad Y = 0$$

se vérifient pour un système donné de valeurs de x et de y, elles se vérifieront encore quand y changera de signe, x demeurant invariable. Donc la recherche des racines imaginaires de l'équation (1) peut être réduite à la recherche de celles dans lesquelles y est positif. Cela posé, nommons m le nombre de celles dans lesquelles, y étant positif et compris entre deux limites données

$$y', \quad y'',$$

x est lui-même renfermé entre deux autres limites

$$x', \quad x''.$$

Pour obtenir le nombre m, il suffira de recourir à la formule (7) du § I, et d'y substituer les valeurs de X, Y fournies par les équations (8). D'ailleurs la seconde de ces équations donnera simplement

$$Y = y,$$

pour toute valeur de x propre à vérifier la condition

$$\cos x = 0, \tag{9}$$

c'est-à-dire toutes les fois que l'on prendra pour x un des termes de la progression

$$\ldots -\frac{5\pi}{2}, \quad -\frac{3\pi}{2}, \quad -\frac{\pi}{2}, \quad \frac{\pi}{2}, \quad \frac{3\pi}{2}, \quad \frac{5\pi}{2}, \quad \ldots, \tag{10}$$

indéfiniment prolongée dans les deux sens; et, dans cette hypothèse, on aura, en supposant y' et y'' positifs,

$$\mathop{\mathfrak{J}}\limits_{y=y'}^{y=y''} \left(\frac{X}{Y}\right) = \mathop{\mathfrak{J}}\limits_{y=y'}^{y=y''} \left(\frac{X}{y}\right) = 0.$$

Donc, si l'on prend pour x', x'' deux termes consécutifs de la progression (10), la formule (7) du § I donnera simplement

$$m = -\frac{1}{2} \mathop{\mathfrak{J}}\limits_{x=x'}^{x=x''} \left(\mathop{\Delta}\limits_{y=y'}^{y=y''} \frac{X}{Y}\right). \tag{11}$$

Si dans cette dernière formule on attribue à y une valeur positive très petite, on aura sensiblement

$$Y = y\,\mathrm{f}'(x) = y(1 - \varepsilon \cos x),$$

par conséquent $Y > 0$, et

$$\mathop{\mathfrak{J}}\limits_{x=x'}^{x=x''} \left(\frac{X}{Y}\right) = 0.$$

Donc alors, en vertu de la formule (11), il suffira, pour obtenir m, de poser $y = y''$ dans l'équation

$$m = -\frac{1}{2} \mathop{\mathfrak{J}}\limits_{x=x'}^{x=x''} \left(\frac{X}{Y}\right). \tag{12}$$

D'ailleurs, eu égard aux formules (8), l'équation

$$Y = 0$$

donne

$$\cos x = \frac{2y}{\varepsilon(e^y - e^{-y})}; \tag{13}$$

et, pour qu'une valeur réelle de x puisse vérifier la formule (13), y étant positif, il est nécessaire que la valeur positive attribuée à y soit égale ou supérieure à la racine positive unique $\mathcal{E}$ de l'équation

$$\frac{e^y - e^{-y}}{2y} = \frac{1}{\varepsilon}. \tag{14}$$

Ajoutons que si, cette condition étant remplie, on pose

$$\alpha = \operatorname{arc\,cos} \frac{2y}{\varepsilon(e^y - e^{-y})}, \tag{15}$$

deux termes consécutifs de la progression (10) comprendront entre eux deux racines de l'équation (13), ou n'en comprendront aucune. Le dernier cas aura lieu si x', x'' sont de la forme

$$x' = (2k+1)\pi - \frac{\pi}{2}, \qquad x' = (2k+1)\pi + \frac{\pi}{2},$$

k étant une quantité entière. Si au contraire x', x'' sont de la forme

$$x' = 2k\pi - \frac{\pi}{2}, \qquad x'' = 2k\pi + \frac{\pi}{2},$$

l'équation admettra deux racines $x_{,}$, $x_{,,}$ comprises entre les limites x', x'', et déterminées par les formules

$$x_{,} = x' + \left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right), \qquad x_{,,} = x'' - \left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right),$$

ou, ce qui revient au même, par les formules

$$x_{,} = 2k\pi - \alpha, \qquad x_{,,} = 2k\pi + \alpha.$$

Alors aussi la formule (12) donnera

$$m = \frac{1}{2} \overset{x=x_{,,}}{\underset{x=x_{,}}{\Delta}} \left[\varepsilon \frac{e^y + e^{-y}}{2} - \frac{x - T}{\sin x}\right], \tag{16}$$

ou, ce qui revient au même,

$$m = \frac{[A - B] + [A + B]}{2}, \tag{17}$$

les valeurs de A, B étant

$$A = \varepsilon \frac{e^y + e^{-y}}{2} - \frac{\alpha}{\sin \alpha}, \qquad B = \frac{2k\pi - T}{\sin \alpha}. \tag{18}$$

Or, en vertu de l'équation (15), on aura

$$\varepsilon \frac{e^y - e^{-y}}{2y} - \frac{1}{\cos \alpha} = 0,$$

et, comme on a d'ailleurs

$$\frac{e^y + e^{-y}}{2} > \frac{e^y - e^{-y}}{2y}, \qquad \frac{\alpha}{\sin \alpha} < \frac{1}{\cos \alpha},$$

la première des équations (18) donnera $A > 0$. Donc la formule (17) donnera $m = 0$ si y est assez petit pour que A reste inférieur à la valeur numérique de B, et $m = 1$ si A surpasse la valeur numérique de B, ce qui arrivera certainement pour une valeur de y suffisamment grande, puisque, y venant à croître indéfiniment, A converge vers la limite ∞ et B vers la limite $2k\pi - T$. Il suffira même, pour que A surpasse la valeur numérique de B, d'attribuer à y une valeur égale ou supérieure à la racine positive unique de l'équation

$$\left(\frac{e^y + e^{-y}}{2} - \frac{e^y - e^{-y}}{2y}\right)\left[1 - \frac{1}{\varepsilon^2}\left(\frac{2y}{e^y - e^{-y}}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}} - \frac{\theta}{\varepsilon} = 0, \tag{19}$$

θ étant la valeur numérique de $2k\pi - T$.

En résumé, on peut énoncer la proposition suivante :

THÉORÈME. — *L'équation* (1) *offre une infinité de racines imaginaires et de la forme $x + y\mathrm{i}$. Parmi ces racines conjuguées deux à deux, une seule au plus de celles qui répondent à des valeurs positives de y offre une partie réelle x comprise entre les limites $k\pi - \frac{\pi}{2}$, $k\pi + \frac{\pi}{2}$, k étant une quantité entière; et même l'équation n'admet une telle racine que dans le cas où la valeur numérique de k est un nombre pair. D'ailleurs, dans cette même* *racine, le coefficient y de i est supérieur à la racine positive unique $\mathcal{E}$ de l'équation* (14), *et inférieur à la racine positive unique γ de l'équation* (19).

En appliquant les formules du § I, non plus à l'équation (1), mais à l'équation (3), on s'assurera : 1° que cette équation offre une infinité de racines réelles dont une seule est comprise entre deux termes consécutifs de la progression (6); 2° qu'elle offre seulement, comme l'a reconnu M. Serret, deux racines imaginaires conjuguées l'une à l'autre, et que, dans chacune de ces deux racines, la partie réelle est renfermée entre les deux termes de la progression qui comprennent entre eux le nombre T.

579.

Analyse mathématique. — *Sur la résolution des équations algébriques.*

C. R., T. XLIV, p. 268 (16 février 1857).

J'ai, il y a vingt ans, adressé à l'Académie plusieurs Mémoires sur la résolution des équations algébriques. L'un de ces Mémoires, publié dans le Tome IV des *Comptes rendus* [1], renferme divers théorèmes qui paraissent dignes de quelque attention, entre autres le suivant :

Théorème I. — *Lorsqu'une équation a toutes ses racines réelles et inégales, on peut obtenir chacune de ces racines développée en série convergente.*

D'autre part, en suivant diverses méthodes que j'ai développées dans le IVe Volume des *Exercices de Mathématiques* [2], et dont l'une a été indiquée par Lagrange, on peut établir encore le théorème dont voici l'énoncé :

Théorème II. — *n variables étant assujetties à cette condition que leurs*

[1] *Œuvres de Cauchy*, S. I, T. IV, p. 66.
[2] *Ibid.*, S. II, T. IX.

carrés donnent pour somme l'unité, l'équation du degré n qui détermine les maxima d'une fonction de ces variables, entière, homogène et du second degré, a toutes ses racines réelles.

Enfin, aux deux théorèmes qui précèdent, on peut joindre le suivant :

Théorème III. — *Une fonction rationnelle de l'une quelconque des racines d'une équation algébrique du degré n peut être généralement réduite à une fonction entière de la même racine du degré $n-1$.*

Cela posé, soit $f(x)$ une fonction entière de la variable x à coefficients réels et du degré n. Désignons par

$$u, \quad v, \quad w, \quad \ldots$$

n autres variables assujetties à la condition

$$u^2+v^2+w^2+\ldots=1,$$

et par

$$y=F(u, v, w, \ldots)$$

une fonction de $u, v, w, \ldots$ entière, homogène et du second degré, les coefficients des carrés $u^2, v^2, w^2, \ldots$ et des produits $uv, uw, \ldots, vw, \ldots$, dans la fonction y, étant eux-mêmes des fonctions entières de x à coefficients réels, et choisis de manière que les diverses racines de l'équation

$$f(x)=0 \tag{1}$$

vérifient encore l'équation produite par l'élimination de $u, v, w, \ldots$ entre les formules

$$D_u y=0, \quad D_v y=0, \quad D_w y=0, \quad \ldots$$

Les maxima et minima de y, considéré comme fonction de $u, v, w, \ldots$, seront déterminés par une équation nouvelle

$$Y=0, \tag{2}$$

dans laquelle Y sera une fonction entière de x et de y, du degré n par rapport à y; et, pour une valeur réelle quelconque de la variable x, l'équation (2), résolue par rapport à y, offrira n racines réelles

$$y_1, \ y_2, \ \ldots, \ y_n$$

développables en séries convergentes dont les divers termes seront des fonctions rationnelles de x. Quand on prendra pour x une racine réelle de l'équation (1), une racine y de l'équation (2) s'évanouira; et, eu égard au théorème III, la somme de la série qui représentera le développement de cette racine pourra être, avec les divers termes, réduite à une fonction entière de x du degré $n-1$. Soit X cette fonction entière. Si le développement de y est tel que cette fonction entière ne soit pas identiquement nulle, la racine réelle x, qui vérifiait l'équation (1), devra vérifier encore l'équation

$$X = 0, \tag{3}$$

dont le degré est $n-1$; elle sera même la seule racine commune à ces deux équations, s'il n'arrive jamais que pour une valeur réelle de x deux racines de l'équation (2) soient égales entre elles, et alors, pour déterminer la racine x, il suffira de chercher la racine commune aux équations (1) et (3).

Des principes que je viens d'exposer résulte évidemment, pour la résolution des équations algébriques, une méthode nouvelle, et qui semble devoir être remarquée. Dans les prochaines séances, je développerai cette méthode et j'examinerai comment on doit s'y prendre pour que la formule (3) ne se réduise pas à une équation identique. En raison de l'intérêt qui s'attache à cette question, l'Académie me permettra de laisser dormir pour l'instant la discussion relative aux forces instantanées. Je la reprendrai plus tard, en m'efforçant d'être tellement clair, tellement précis, que mes assertions, par leur évidence, entraînent l'assentiment de tous nos confrères.

580.

Analyse mathématique. — *Sur les fonctions quadratiques et homogènes de plusieurs variables.*

C. R., T. XLIV, p. 361 (23 février 1857).

§ I. — *Propriétés générales des fonctions quadratiques et homogènes.*

Lorsqu'une fonction homogène de plusieurs variables est en même temps *quadratique*, c'est-à-dire du second degré, elle jouit de propriétés diverses d'autant plus dignes d'être remarquées qu'on peut en déduire une méthode générale pour la résolution des équations algébriques. Ces propriétés constituent les théorèmes que nous allons énoncer.

Théorème I. — *Soit*

$$y = F(\alpha, \beta, \ldots, \eta, \theta) \tag{1}$$

une fonction quadratique et homogène de n variables

$$\alpha, \ \beta, \ \ldots, \ \eta, \ \theta.$$

Soient encore

$$A, \ B, \ \ldots, \ H, \ \Theta$$

les demi-dérivées de cette fonction relatives à ces mêmes variables. Si l'on multiplie chacune de ces demi-dérivées par la variable correspondante, la somme des produits obtenus sera la fonction elle-même, en sorte qu'on aura

$$y = A\alpha + B\beta + \ldots + H\eta + \Theta\theta. \tag{2}$$

Démonstration. — Si le théorème est vrai quand on prend pour y certaines fonctions quadratiques et homogènes

$$u, \ v, \ w, \ \ldots$$

des variables

$$\alpha, \ \beta, \ \ldots, \ \eta, \ \theta,$$

il continue évidemment de subsister quand on prendra pour y une fonction linéaire de u, v, w, ... D'ailleurs le théorème énoncé est évidemment exact, quand la fonction y se réduit au carré α^2 d'une seule variable, ou au double produit $2\alpha 6$ de deux variables, attendu qu'on a, dans le premier cas

$$A = \alpha,$$

dans le second cas

$$A = 6, \qquad B = \alpha,$$

et que, par suite, la formule (2) se réduit, dans le premier cas, à l'équation identique

$$\alpha^2 = \alpha\alpha,$$

dans le second cas, à l'équation identique

$$2\alpha 6 = 6\alpha + \alpha 6.$$

Donc le théorème énoncé sera généralement vrai.

Ce théorème, déjà connu, constitue pour les fonctions quadratiques ce qu'on nomme le *théorème des fonctions homogènes*. La démonstration très simple que nous venons d'en donner offre cet avantage qu'elle s'applique encore aux deux théorèmes suivants :

Théorème II. — *Les mêmes choses étant posées que dans le théorème I, désignons par*

$$\alpha_{\prime},\ 6_{\prime},\ \ldots,\ \eta_{\prime},\ \theta_{\prime},$$
$$\alpha_{\prime\prime},\ 6_{\prime\prime},\ \ldots,\ \eta_{\prime\prime},\ \theta_{\prime\prime}$$

deux systèmes de valeurs successivement attribuées aux variables

$$\alpha,\ 6,\ \ldots,\ \eta,\ \theta,$$

et par

$$A_{\prime},\ B_{\prime},\ \ldots,\ H_{\prime},\ \Theta_{\prime},$$
$$A_{\prime\prime},\ B_{\prime\prime},\ \ldots,\ H_{\prime\prime},\ \Theta_{\prime\prime}$$

les valeurs correspondantes des demi-dérivées

$$A,\ B,\ \ldots,\ H,\ \Theta.$$

Si l'on multiplie les valeurs des variables dans l'un des systèmes donnés par les valeurs des demi-dérivées correspondantes dans l'autre système, la somme des produits obtenus ne changera pas de valeur quand on échangera les deux systèmes entre eux; en sorte qu'on aura

$$(3)\quad A_{\prime}\alpha_{\prime\prime} + B_{\prime}6_{\prime\prime} + \ldots + H_{\prime}\eta_{\prime\prime} + \Theta_{\prime}\theta_{\prime\prime} = A_{\prime\prime}\alpha_{\prime} + B_{\prime\prime}6_{\prime} + \ldots + H_{\prime\prime}\eta_{\prime} + \Theta_{\prime\prime}\theta_{\prime}.$$

Démonstration. — Le théorème II est évidemment exact quand la fonction y se réduit à α^2 ou à $2\alpha 6$, attendu que la formule (3) se réduit, dans le premier cas, à l'équation identique

$$\alpha_{\prime}\alpha_{\prime\prime} = \alpha_{\prime\prime}\alpha_{\prime},$$

dans le second cas à l'équation identique

$$6_{\prime}\alpha_{\prime\prime} + \alpha_{\prime}6_{\prime\prime} = 6_{\prime\prime}\alpha_{\prime} + \alpha_{\prime\prime}6_{\prime}.$$

Donc ce théorème sera généralement vrai.

Théorème III. — *Les mêmes choses étant posées que dans le théorème I, si l'on multiplie par le carré de chaque variable la différentielle du rapport qu'on obtient quand on divise par cette même variable la demi-dérivée correspondante, la somme des produits formés s'évanouira; en sorte qu'on aura*

$$(4)\qquad \alpha^2\, d\frac{A}{\alpha} + 6^2\, d\frac{B}{6} + \ldots + \eta^2\, d\frac{H}{\eta} + \theta^2\, d\frac{\Theta}{\theta} = 0.$$

Démonstration. — Le théorème III est évidemment exact quand la fonction y se réduit à α^2 ou à $2\alpha 6$, attendu que la formule (4) se réduit, dans le premier cas, à l'équation identique

$$\alpha^2\, d\frac{\alpha}{\alpha} = 0,$$

dans le second cas à l'équation identique

$$\alpha^2\, d\frac{6}{\alpha} + 6^2\, d\frac{\alpha}{6} = 0.$$

Donc ce théorème sera généralement vrai.

§ II. — *Sur l'équation qui détermine les maxima et minima d'une fonction réelle quadratique et homogène de plusieurs variables dont les carrés donnent pour somme l'unité.*

Soient, comme dans le § I,

$$y = F(\alpha, \beta, \ldots, \eta, \theta) \tag{1}$$

une fonction quadratique et homogène de n variables

$$\alpha, \quad \beta, \quad \ldots, \quad \eta, \quad \theta,$$

et

$$A, \quad B, \quad \ldots, \quad H, \quad \Theta$$

les demi-dérivées de cette fonction relatives à ces mêmes variables. Si, la fonction étant réelle, c'est-à-dire à coefficients réels, on assujettit les $\alpha, \beta, \ldots, \eta, \theta$ à la condition

$$\alpha^2 + \beta^2 + \ldots + \eta^2 + \theta^2 = 1, \tag{2}$$

les maxima et minima de cette fonction y seront déterminés par la formule

$$y = \frac{A}{\alpha} = \frac{B}{\beta} = \ldots = \frac{H}{\eta} = \frac{\Theta}{\theta}, \tag{3}$$

ou, ce qui revient au même, par les équations

$$\alpha y - A = 0, \quad \beta y - B = 0, \quad \ldots, \quad \eta y - H = 0, \quad \theta y - \Theta = 0. \tag{4}$$

Ces dernières équations étant linéaires et homogènes par rapport aux variables

$$\alpha, \quad \beta, \quad \ldots, \quad \eta, \quad \theta,$$

on pourra en déduire, par l'élimination de ces variables, et sans qu'il soit nécessaire de recourir à la condition (2), une équation finale

$$Y = 0, \tag{5}$$

dans laquelle Y sera fonction de y seulement. D'ailleurs, pour obtenir cette équation finale, il suffira de substituer dans la première des

équations (4) des valeurs de $\alpha, \beta, \ldots, \eta, \theta$ propres à vérifier les suivantes; par conséquent il suffira de prendre

$$Y = \alpha y - A, \tag{6}$$

$\alpha, \beta, \ldots, \eta, \theta$ étant choisis de manière à vérifier les équations

$$\beta y - B = 0, \quad \ldots, \quad \eta y - H = 0, \quad \theta y - \Theta = 0. \tag{7}$$

Or on satisfera aux équations (7) en prenant pour $\alpha, \beta, \ldots, \eta, \theta$ des fonctions entières de y déterminées par les formules

$$\alpha = |\alpha\Omega|, \quad \beta = |\beta\Omega|, \quad \ldots, \quad \eta = |\eta\Omega|, \quad \theta = |\theta\Omega|, \tag{8}$$

jointes à l'équation

$$\Omega = (\beta y - B)\ldots(\eta y - H)(\theta y - \Theta), \tag{9}$$

et en considérant, dans les seconds membres des formules (8), $\alpha, \beta, \ldots, \eta, \theta$ comme des *clefs anastrophiques* assujetties à la condition

$$|\alpha\beta\ldots\eta\theta| = 1. \tag{10}$$

Il importe d'observer qu'en vertu des formules (6) et (8) on aura

$$Y = |(\alpha y - A)\Omega|, \tag{11}$$

par conséquent

$$Y = |(\alpha y - A)(\beta y - B)\ldots(\eta y - H)(\theta y - \Theta)|, \tag{12}$$

$\alpha, \beta, \ldots, \eta, \theta$ étant des clefs anastrophiques assujetties à la condition

$$|\alpha\beta\ldots\eta\theta| = 1.$$

D'autre part, en vertu de la première des formules (8), on aura

$$\alpha = |(\beta y - B)\ldots(\eta y - H)(\theta y - \Theta)|, \tag{13}$$

pourvu qu'après avoir posé $\alpha = 0$ dans la fonction $F(\alpha, \beta, \ldots, \eta, \theta)$, et, par suite, dans les demi-dérivées $B, \ldots, H, \Theta$, on considère, dans le second membre de la formule (13), $\beta, \ldots, \eta, \theta$ comme des clefs anastrophiques assujetties à la condition

$$|\beta\ldots\eta\theta| = 1.$$

Cela posé, la fonction α de y, déterminée par la première des formules (8), sera évidemment ce que devient Y lorsqu'on réduit la fonction $F(\alpha, \beta, \ldots, \eta, \theta)$ à $F(0, \beta, \ldots, \eta, \theta)$ en posant $\alpha = 0$.

Observons encore que, dans la fonction Y déterminée par l'équation (12), le terme qui renfermera la plus haute puissance de y sera évidemment y^n. Donc l'équation (5), résolue par rapport à y, offrira n racines. J'ajoute que la fonction Y, déterminée par l'équation (12), jouira de plusieurs propriétés remarquables, desquelles se déduira aisément la nature des racines de l'équation (5). C'est ce que je vais faire voir.

Remarquons d'abord que les équations (6) et (7) peuvent être remplacées par la seule formule

$$(14) \qquad y = \frac{A + Y}{\alpha} = \frac{B}{\beta} = \ldots = \frac{H}{\eta} = \frac{\Theta}{\theta}.$$

Cela posé, soient

$$y_{\prime}, \quad y_{\prime\prime}$$

deux valeurs distinctes successivement attribuées à y, et, pour désigner les valeurs correspondantes des quantités représentées par les lettres

$$\alpha, \quad \beta, \quad \ldots, \quad \theta, \quad \eta, \qquad A, \quad B, \quad \ldots, \quad H, \quad \Theta, \qquad Y,$$

et déterminées par les équations (6) et (8), plaçons au bas de ces lettres un accent simple ou double. La formule (14) donnera, pour $y = y_{\prime}$,

$$(15) \qquad y_{\prime} = \frac{A_{\prime} + Y_{\prime}}{\alpha_{\prime}} = \frac{B_{\prime}}{\beta_{\prime}} = \ldots = \frac{H_{\prime}}{\eta_{\prime}} = \frac{\Theta_{\prime}}{\theta_{\prime}};$$

puis en posant, pour abréger,

$$(16) \qquad s = \alpha_{\prime}\alpha_{\prime\prime} + \beta_{\prime}\beta_{\prime\prime} + \ldots + \eta_{\prime}\eta_{\prime\prime} + \theta_{\prime}\theta_{\prime\prime},$$

$$(17) \qquad S = A_{\prime}\alpha_{\prime\prime} + B_{\prime}\beta_{\prime\prime} + \ldots + H_{\prime}\eta_{\prime\prime} + \Theta_{\prime}\theta_{\prime\prime},$$

on tirera de la formule (15)

$$(18) \qquad y_{\prime} = \frac{S + Y_{\prime}\alpha_{\prime\prime}}{s}.$$

Mais s ne change pas de valeur quand on échange entre eux $y_{\prime}$, $y_{\prime\prime}$, et en vertu du second théorème du § I, on pourra en dire autant de S. On aura donc encore

$$(19) \qquad y_{\prime\prime} = \frac{S + Y_{\prime\prime}\alpha_{\prime}}{s}$$

et, par suite,

$$(20) \qquad y_{\prime\prime} - y_{\prime} = \frac{Y_{\prime\prime}\alpha_{\prime} - Y_{\prime}\alpha_{\prime\prime}}{s},$$

ou, ce qui revient au même,

$$(21) \qquad s(y_{\prime\prime} - y_{\prime}) = Y_{\prime\prime}\alpha_{\prime} - Y_{\prime}\alpha_{\prime\prime},$$

ou bien encore

$$(22) \qquad \alpha_{\prime}\alpha_{\prime\prime}\frac{\dfrac{Y_{\prime\prime}}{\alpha_{\prime\prime}} - \dfrac{Y_{\prime}}{\alpha_{\prime}}}{y_{\prime\prime} - y_{\prime}} = s.$$

Si, dans cette dernière formule, on pose

$$y_{\prime\prime} = y_{\prime} = y,$$

elle donnera simplement

$$(23) \qquad \alpha^2 D_y \frac{Y}{\alpha} = s,$$

la valeur de s étant déterminée par l'équation

$$(24) \qquad s = \alpha^2 + \beta^2 + \ldots + \eta^2 + \theta^2.$$

On peut, au reste, déduire directement l'équation (23) de la formule (14), de laquelle on tire

$$1 = D_y \frac{A}{\alpha} + D_y \frac{Y}{\alpha} = D_y \frac{B}{\beta} = \ldots = D_y \frac{H}{\eta} = D_y \frac{\Theta}{\theta}$$

et, par suite, eu égard au théorème III du § I,

$$(25) \qquad \alpha^2 D_y \frac{Y}{\alpha} = \alpha^2 + \beta^2 + \ldots + \eta^2 + \theta^2.$$

Les formules (21) et (25) permettent de reconnaître aisément la nature des racines de l'équation (5). On peut conclure de la formule (21) que toutes ces racines sont réelles. En effet, la fonction $F(\alpha, \beta, \ldots, \theta, \eta)$ étant supposée réelle, c'est-à-dire à coefficients réels, la fonction de y représentée par Y sera pareillement réelle, et, si l'équation (5) admet des racines imaginaires, ces racines seront conjuguées deux à deux. D'ailleurs, si l'on nomme

$$y_{\prime}, \quad y_{\prime\prime}$$

deux racines conjuguées de l'équation (5), les valeurs

$$Y_{\prime}, \quad Y_{\prime\prime}$$

de Y correspondantes à ces deux racines s'évanouiront. On aura donc

$$Y_{\prime} = Y_{\prime\prime} = 0,$$

et, comme la différence

$$y_{\prime\prime} - y_{\prime}$$

sera le double du coefficient de i dans l'une des racines, par conséquent une quantité distincte de zéro, l'équation (21) donnera

$$s = 0$$

ou, ce qui revient au même,

$$\alpha_{\prime}\alpha_{\prime\prime} + \beta_{\prime}\beta_{\prime\prime} + \ldots + \eta_{\prime}\eta_{\prime\prime} + \theta_{\prime}\theta_{\prime\prime} = 0. \tag{26}$$

D'ailleurs,

$$y_{\prime}, \quad y_{\prime\prime}$$

étant deux expressions imaginaires conjuguées, on pourra en dire autant de

$$\alpha_{\prime} \text{ et } \alpha_{\prime\prime}, \quad \beta_{\prime} \text{ et } \beta_{\prime\prime}, \quad \ldots, \quad \eta_{\prime} \text{ et } \eta_{\prime\prime}, \quad \theta_{\prime} \text{ et } \theta_{\prime\prime}.$$

Donc chacun des produits

$$\alpha_{\prime}\alpha_{\prime\prime}, \quad \beta_{\prime}\beta_{\prime\prime}, \quad \ldots, \quad \eta_{\prime}\eta_{\prime\prime}, \quad \theta_{\prime}\theta_{\prime\prime}$$

sera positif, à moins que ses deux facteurs ne s'évanouissent simultanément, et l'équation (26) ne pourra subsister à moins que l'on n'ait en même temps

$$\begin{cases} \alpha_{\prime} = 0, & \beta_{\prime} = 0, & \ldots, & \eta_{\prime} = 0, & \theta_{\prime} = 0, \\ \alpha_{\prime\prime} = 0, & \beta_{\prime\prime} = 0, & \ldots, & \eta_{\prime\prime} = 0, & \theta_{\prime\prime} = 0. \end{cases} \tag{27}$$

Donc toutes les racines de l'équation (5) seront certainement réelles si aucune d'elles ne vérifie avec la formule (5) les n équations

$$\alpha = 0, \quad \beta = 0, \quad \ldots, \quad \eta = 0, \quad \theta = 0. \tag{28}$$

D'ailleurs cette dernière condition ne pourrait être remplie que pour des cas exceptionnels correspondants à des valeurs particulières des coefficients que renferme la fonction $F(\alpha, \beta, \ldots, \eta, \theta)$, et les valeurs qu'acquerraient, dans ces cas exceptionnels, les racines de l'équation (5), seraient certainement des limites vers lesquelles convergeraient des valeurs très voisines qu'on obtiendrait en altérant très peu une ou plusieurs des valeurs particulières attribuées aux divers coefficients. Ces valeurs voisines étant réelles, leurs limites seraient nécessairement réelles; d'où il résulte que, même dans les cas exceptionnels, l'équation (5) n'admettra point de racines imaginaires. Ainsi la formule (21) entraîne la proposition qui a été rappelée aux pages 418, 419, et que l'on peut énoncer comme il suit :

Théorème I. — *n variables étant assujetties à cette condition, que la somme de leurs carrés soit l'unité, l'équation du degré n qui détermine les maxima et les minima d'une fonction quadratique homogène et réelle de ces variables, a toutes ses racines réelles.*

Les n racines réelles de l'équation (5) seront généralement inégales, et ne pourront cesser d'être inégales que dans le cas où une même valeur de y vérifiera simultanément cette équation et sa dérivée

$$D_y Y = 0. \tag{29}$$

Dans ce cas particulier, les coefficients que renferme la fonction

$F(\alpha, 6, \ldots, \eta, \theta)$ devront satisfaire à l'équation de condition que produira l'élimination de y entre les formules (5) et (29). Soit

$$K = 0 \tag{30}$$

cette équation de condition. On pourrait croire au premier abord qu'elle servira uniquement à déterminer un des coefficients renfermés dans $F(\alpha, 6, \ldots, \eta, \theta)$ quand on connaîtra tous les autres. Mais il n'en est pas ainsi. Effectivement, lorsqu'une même valeur de y vérifiera les formules (5) et (29), l'équation (25) donnera

$$\alpha^2 + 6^2 + \ldots + \eta^2 + \theta^2 = 0, \tag{31}$$

et entraînera nécessairement avec elle les conditions (28). Il y a plus : ces conditions devront encore être vérifiées lorsque, dans les formules (8), on supposera la fonction Ω déterminée, non plus par l'équation (9), mais par l'une de celles qu'on en déduit à l'aide d'échanges opérés entre les clefs $\alpha, 6, \ldots, \theta, \eta$. En conséquence, on peut énoncer la proposition suivante :

Théorème II. — *Pour qu'une racine y de l'équation (5) soit une racine double ou multiple, il est nécessaire que cette racine vérifie chacune des équations (28), les valeurs de $\alpha, 6, \ldots, \eta, \theta$ étant déterminées par les formules (8) jointes ou à l'équation (9), ou à l'une de celles qu'on en déduit quand on échange entre elles les clefs $\alpha, 6, \ldots, \eta, \theta$. Par suite, pour qu'une racine réelle de l'équation (5) soit double ou multiple, il est nécessaire qu'elle soit commune à cette équation et à toutes celles qu'on en déduit quand on remplace la fonction $F(\alpha, 6, \ldots, \eta, \theta)$ par une des fonctions*

$$F(0, 6, \ldots, \eta, \theta), \quad F(\alpha, 0, \ldots, \eta, \theta), \quad \ldots, \quad F(\alpha, 6, \ldots, 0, \theta), \quad F(\alpha, 6, \ldots, \eta, 0).$$

Observons encore qu'en vertu de la formule (25) la dérivée du rapport $\frac{Y}{\alpha}$, prise par rapport à α, sera toujours positive quand elle ne sera pas nulle. Donc, pour des valeurs croissantes de y, ce rapport croîtra sans cesse, tant qu'il conservera une valeur finie, et, quand il changera de signe avec Y en passant par zéro, la valeur de α devra

être positive si Y passe du négatif au positif; elle devra être négative si Y passe du positif au négatif. Si d'ailleurs on nomme

$$y_1, \quad y_2, \quad \ldots, \quad y_{n-1}, \quad y_n \tag{32}$$

les racines de l'équation (5) rangées par ordre de grandeur, de manière qu'elles forment une suite croissante, et si l'on fait croître y par degrés insensibles depuis une limite inférieure à y_1 jusqu'à une limite supérieure à y_n, Y ne changera de signe qu'au moment où Y acquerra une valeur représentée par l'un des deux termes de la suite (32), et à deux termes consécutifs de cette suite correspondront deux changements de signe de la fonction Y en sens opposés, par conséquent deux valeurs de α, dont l'une sera positive, l'autre négative. Donc, si l'on nomme

$$\alpha_1, \quad \alpha_2, \quad \alpha_{n-1}, \quad \alpha_n \tag{33}$$

les valeurs de α correspondantes aux racines

$$y_1, \quad y_2, \quad \ldots, \quad y_{n-1}, \quad y_n$$

de l'équation (5), deux termes consécutifs de la suite (33) seront toujours deux quantités affectées de signes contraires. En conséquence, deux termes consécutifs de la suite (32) comprendront toujours entre eux l'une des $n-1$ racines de l'équation

$$\alpha = 0, \tag{34}$$

et réciproquement deux racines consécutives de l'équation (34) comprendront toujours entre elles un terme de la suite (32). D'ailleurs, comme on l'a remarqué, α, dans l'équation (34), sera ce que devient Y lorsque, dans la fonction $F(\alpha, 6, \ldots, \eta, \theta)$, on pose $\alpha = 0$. On peut donc énoncer la proposition suivante :

Théorème III. — *Soit $y = F(\alpha, 6, \ldots, \eta, \theta)$ une fonction quadratique réelle et homogène de n variables $\alpha, 6, \ldots, \eta, \theta$ dont les carrés donnent pour somme l'unité. Soit encore*

$$Y = 0 \tag{5}$$

l'équation en y du degré n, qui détermine les maxima et minima de cette fonction, et nommons

$$(32)\qquad y_1,\ y_2,\ \ldots,\ y_{n-1},\ y_n$$

les n racines réelles de cette équation. Enfin soient

$$(35)\qquad y',\ y'',\ \ldots,\ y^{(n-1)}$$

les $n-1$ racines de l'équation analogue à laquelle on parvient lorsque, dans la fonction $F(\alpha, 6, \ldots, \eta, \theta)$, *on réduit à zéro l'une des variables; et supposons les racines de chaque équation rangées par ordre de grandeur, de manière à former une suite croissante. Chacune des racines de l'équation* (5) *sera comprise entre deux termes consécutifs de la suite*

$$(36)\qquad -\infty,\ y',\ y'',\ \ldots,\ y^{(n-1)},\ \infty.$$

Le troisième théorème, duquel on pourrait déduire le deuxième, était déjà énoncé dans le Mémoire sur l'équation à l'aide de laquelle on détermine les inégalités séculaires du mouvement des planètes (*voir* le Volume IV des *Exercices de Mathématiques*, p. 152) [1]. Les principes ci-dessus exposés, en fournissant, comme on vient de le voir, une démonstration très simple de ce théorème, reproduisent avec la même facilité les autres propositions énoncées dans ce Mémoire.

581.

Analyse mathématique. — *Note sur les résultantes anastrophiques.*

C. R., T. XLIV, p. 370 (23 février 1857).

Les résultats obtenus par l'auteur seront développés dans une prochaine séance.

[1] *Œuvres de Cauchy*, S. II, T. IX, p. 174.

582.

Analyse mathématique. — *Théorie nouvelle des résidus.*

C. R., T. XLIV, p. 406 (2 mars 1857).

§ I. — *Considérations générales.*

C'est dans le premier Volume des *Exercices de Mathématiques*, publié en 1826 [1], que j'ai, pour la première fois, exposé les principes du *Calcul des résidus*, qui, comme je l'ai fait voir et comme l'ont aussi montré divers auteurs, entre autres MM. Blanchet et Tortolini, s'applique avec succès, non seulement à la décomposition des fonctions rationnelles et à la détermination des intégrales définies, mais encore à l'intégration des équations différentielles ou aux dérivées partielles, et à la solution d'un grand nombre de problèmes, spécialement de ceux que présente la Physique mathématique. Toutefois la définition que j'avais d'abord donnée du *résidu partiel ou intégral* d'une fonction laissait quelque chose à désirer. A la vérité, cette définition était analogue à celle que Lagrange a donnée de la *fonction dérivée*; et de même que, suivant Lagrange, la *dérivée* d'une fonction y de x est le coefficient de la première puissance d'un accroissement ε attribué à la variable x, dans le développement de l'accroissement correspondant de y suivant les puissances ascendantes de ε, j'appelais *résidu partiel* de la fonction y, relatif à une valeur pour laquelle cette fonction devenait infinie, le coefficient de ε^{-1} dans le développement de la variation de y suivant les puissances descendantes de ε.

Mais les définitions précédentes de la dérivée d'une fonction et de son résidu partiel relatif à une valeur donnée de la variable s'appuient sur la considération des développements en séries; et, comme je l'ai remarqué dans l'*Analyse algébrique*, il convient d'éviter l'emploi des séries dont la convergence n'est pas assurée. On y parvient dans le

[1] *Œuvres de Cauchy*, S. II, T. VI.

Calcul infinitésimal, en substituant à la définition de Lagrange la notion claire et précise du *rapport différentiel* de deux quantités variables, et en désignant sous ce nom la limite vers laquelle converge le rapport entre les variations infiniment petites et correspondantes de ces deux quantités.

Il était à désirer qu'on pût aussi appuyer le *Calcul des résidus* sur une notion claire, précise et facile à saisir, qui fût indépendante de la considération des séries. Après y avoir mûrement réfléchi, j'ai reconnu que les principes établis, d'une part dans mon Mémoire de 1825 *sur les intégrales prises entre des limites imaginaires*, et dans le Mémoire lithographié du 27 novembre 1831, d'autre part dans les Mémoires que j'ai publiés *sur les fonctions monodromes et monogènes*, permettraient d'atteindre ce but. C'est ce que je vais expliquer en peu de mots.

Supposons qu'un point mobile dont l'affixe est z se meuve dans l'intérieur d'une certaine aire S ou sur le contour de cette aire, et que, dans le dernier cas, en décrivant ce contour, il tourne autour de l'aire S dans le sens indiqué par la rotation d'une affixe dont l'argument croît avec le temps. Soit d'ailleurs Z une fonction de l'affixe z, qui reste *monodrome* dans toute l'étendue de l'aire, et conserve une valeur finie en chaque point du contour. Enfin, le contour étant partagé en éléments très petits, multiplions la variation que z subit quand on passe de l'origine d'un élément à son extrémité par une valeur de Z correspondante à un point de cet élément. La somme des produits ainsi formés aura pour limite une certaine intégrale (S). Or cette intégrale, qui dépendra en général non seulement de la fonction Z, mais aussi de la forme attribuée au contour de l'aire S, deviendra, du moins entre certaines limites, indépendante de ce contour, si la fonction Z, supposée déjà monodrome dans toute l'étendue de l'aire S, est de plus *monogène* en chaque point de cette aire. En effet, dans cette hypothèse, l'intégrale (S) ne changera pas de valeur si, le contour venant à se modifier par degrés insensibles et à changer de forme, la fonction Z reste non seulement monodrome et monogène,

mais encore finie en chacun des points successivement occupés par ce contour. Cela posé, nommons *points singuliers* ceux dont les affixes rendent infinie la fonction Z, ou, en d'autres termes, ceux dont les affixes sont racines de l'équation

$$\frac{1}{Z} = 0. \tag{1}$$

Quand la fonction Z sera monodrome et monogène dans toute l'étendue de l'aire S, l'intégrale (S) dépendra uniquement de cette fonction Z et de la position des points singuliers renfermés dans l'aire S. Il est aisé de voir, par exemple, qu'elle sera toujours nulle si l'aire S ne renferme aucun point singulier, et qu'elle aura pour valeur la constante

$$I = 2\pi i,$$

si, le pôle étant le seul point singulier que renferme l'aire S, l'équation

$$\frac{1}{Z} = 0$$

se réduit à l'équation linéaire

$$z = 0,$$

c'est-à-dire, en d'autres termes, si l'on a

$$Z = \frac{1}{z}.$$

Le rapport

$$\frac{(S)}{I}, \tag{2}$$

qui se réduira dans le premier cas à zéro, dans le second cas à l'unité, est ce que nous nommerons, dans tous les cas, le *résidu intégral* de la fonction Z relatif à l'aire S. Si l'on substitue à la fonction Z la dérivée de son logarithme népérien prise par rapport à la variable z, l'intégrale (S) ne sera autre chose que la variation logarithmique de Z, et le résidu intégral

$$\frac{(S)}{I}$$

se réduira au compteur logarithmique

$$\frac{\Delta \bar{l} Z}{1}, \tag{3}$$

à l'aide duquel s'exprime la différence entre les deux entiers qui énumèrent les racines des deux équations

$$Z = 0, \tag{4}$$

$$\frac{1}{Z} = 0, \tag{1}$$

correspondantes à des points singuliers renfermés dans l'aire S.

Concevons à présent que le contour de l'aire S s'étende et se dilate, de manière à se transformer en un nouveau contour qui enveloppe le premier de toutes parts. L'aire S croîtra, et sa variation ΔS sera une nouvelle aire renfermée entre les deux contours. Si d'ailleurs une fonction Z, monodrome et monogène dans toute l'étendue de l'aire ΔS, conserve une valeur finie en chaque point de chaque contour, à la variation ΔS de l'aire S correspondra une variation Δ(S) de l'intégrale (S), et cette dernière variation dépendra uniquement de la fonction Z et de la position des points singuliers renfermés dans l'aire ΔS. Alors aussi le rapport

$$\frac{\Delta(\mathrm{S})}{1}$$

sera ce que nous nommerons le *résidu intégral* de la fonction Z relatif à l'aire ΔS.

Les définitions précédentes étant admises, si l'on décompose l'aire S ou ΔS en éléments finis ou infiniment petits, mais tels que la fonction Z conserve en chaque point de leurs contours une valeur finie, le résidu intégral

$$\frac{(\mathrm{S})}{1} \quad \text{ou} \quad \frac{\Delta(\mathrm{S})}{1}$$

sera la somme des résidus partiels correspondants à ces divers éléments, et, si les éléments sont choisis de manière que chacun d'eux

ne renferme jamais plus d'un point singulier, un résidu partiel, quand il ne s'évanouira pas, sera un résidu relatif à un seul point singulier, par conséquent une quantité qui dépendra uniquement de la fonction Z et de l'affixe de ce point. Cela posé, on pourra dire que le résidu intégral relatif à une aire donnée est la somme des *résidus partiels* relatifs aux divers points singuliers que renferme cette aire.

Comme on le voit, dans cette nouvelle théorie des résidus, la considération des développements en séries est entièrement mise à l'écart et remplacée par la notion fondamentale de l'intégrale $\int Z\,dz$ étendue à tous les points situés sur le contour d'une certaine aire, de cette même intégrale sur laquelle j'ai appelé l'attention des géomètres dans le Mémoire lithographié du 27 novembre 1831 ([1]). D'ailleurs cette notion se trouve maintenant complétée par la condition à laquelle j'assujettis la fonction Z, en supposant que cette fonction est tout à la fois monodrome et monogène, et l'on reconnaît ici combien il est utile de définir nettement les fonctions de quantités géométriques, ou, en d'autres termes, les fonctions de variables imaginaires, en distinguant non seulement les fonctions monodromes des fonctions non monodromes, mais aussi les fonctions monogènes des fonctions non monogènes.

Lorsque l'on adopte les définitions ci-dessus proposées, et que l'aire S se réduit à celle d'un cercle dont le pôle est le centre, le résidu intégral

$$\frac{(\mathrm{S})}{1}$$

se réduit à la moyenne isotropique

$$\mathcal{M}(Zz) \tag{5}$$

du produit Zz considéré comme fonction de z.

Si l'aire S est celle d'un cercle qui ait pour centre le point dont l'affixe est c et pour rayon r, on devra évidemment, dans l'expres-

([1]) *Œuvres de Cauchy*, S. II, T. XV.

sion (5), substituer à la variable z la quantité

$$\zeta = z - c; \tag{6}$$

le module de ζ étant le rayon r, et alors le résidu intégral $\frac{(S)}{I}$ sera la moyenne isotropique

$$\mathcal{M}(Z\zeta) \tag{7}$$

du produit $Z\zeta$ considéré comme fonction de ζ.

Si d'ailleurs on suppose

$$Z = \frac{f(z)}{z - c}, \tag{8}$$

c désignant une constante, et $f(z)$ une fonction de z qui demeure monodrome, monogène et finie dans toute l'étendue de l'aire S, on aura

$$Z\zeta = f(z) = f(c + \zeta);$$

par conséquent l'expression (7) sera réduite à la moyenne isotropique

$$\mathcal{M}\, f(c + \zeta); \tag{9}$$

et, comme, sans altérer cette moyenne, on pourra faire décroître indéfiniment le rayon du cercle que l'on considère, ou, en d'autres termes, le module de ζ, elle ne pourra différer de la quantité $f(c)$ avec laquelle on la fait coïncider en posant $\zeta = 0$. Donc, en supposant la fonction Z déterminée par la formule (8), et le point dont c est l'affixe intérieur à l'aire S, on aura, si la fonction $f(z)$ est monodrome, monogène et finie dans toute l'étendue de l'aire S,

$$\frac{(S)}{I} = f(c). \tag{10}$$

§ II. — *Équations fondamentales.*

Soient, comme dans le § I,

S et ΔS une aire plane et l'accroissement de cette aire compris entre deux contours, l'un intérieur, l'autre extérieur;

z l'affixe d'un point qui se meut dans le plan de l'aire S;

Z une fonction de z qui, toujours monodrome et monogène dans toute l'étendue de l'aire S, conserve une valeur finie en chaque point de l'un et l'autre contour;

(S) et Δ(S) l'intégrale $\int Z\,dz$ étendue, suivant les principes posés dans le § I, au contour entier de l'aire S, et la variation de cette intégrale correspondante à la variation ΔS de cette aire.

Concevons d'ailleurs que, pour rendre les notations plus précises, on nomme

u, v les affixes de deux points mobiles assujettis à décrire les deux contours qui limitent intérieurement et extérieurement l'aire ΔS;

U, V ce que devient Z quand on y écrit u ou v à la place de z.

La variation Δ(S) ne sera autre chose que la différence des intégrales

$$\int V\,dv, \quad \int U\,du,$$

étendues à tous les points des deux contours, ou, en d'autres termes, la différence entre les deux valeurs de l'intégrale

$$(S) = \int Z\,dz$$

correspondantes à

$$z = v, \qquad z = u.$$

En conséquence, on pourra dire que u et v sont les deux limites de z dans la variation Δ(S), ce que nous indiquerons en écrivant ces deux limites au-dessous et au-dessus du signe Δ comme il suit :

$$\overset{z=v}{\underset{z=u}{\Delta}}(S).$$

Cela posé, le rapport

$$\frac{\overset{z=v}{\underset{z=u}{\Delta}}(\mathrm{S})}{\mathrm{I}}$$

sera le résidu intégral de Z relatif à l'aire $\Delta\mathrm{S}$, et si l'on nomme *extraction* l'opération par laquelle on extrait de la fonction Z le résidu intégral relatif à une aire donnée, si d'ailleurs on indique cette opération à l'aide de la lettre caractéristique $\mathcal{E}$, en écrivant cette lettre devant la fonction Z renfermée entre deux crochets trapézoïdaux et en plaçant au-dessous et au-dessus de la lettre $\mathcal{E}$ les deux limites de z, on aura

$$(1)\qquad \frac{\overset{z=v}{\underset{z=u}{\Delta}}(\mathrm{S})}{\mathrm{I}} = \overset{z=v}{\underset{z=u}{\mathcal{E}}}(Z)$$

ou, ce qui revient au même,

$$(2)\qquad \frac{\int V\,dv - \int U\,du}{\mathrm{I}} = \overset{z=v}{\underset{z=u}{\mathcal{E}}}(Z).$$

Si l'aire S est comprise entre deux circonférences de cercle qui aient pour centre commun le pôle, l'équation (1) donnera

$$(3)\qquad \overset{z=v}{\underset{z=u}{\Delta}}\mathcal{M}(Zz) = \overset{z=v}{\underset{z=u}{\mathcal{E}}}(Z)$$

ou, ce qui revient au même,

$$(4)\qquad \mathcal{M}(Vv) - \mathcal{M}(Uu) = \overset{z=v}{\underset{z=u}{\mathcal{E}}}(Z).$$

Comme on le voit, les équations fondamentales (1) et (3) se déduisent immédiatement des définitions claires et précises que nous avons adoptées. Ajoutons que pour tirer de ces équations les propriétés diverses des fonctions monodromes et monogènes, explicites ou implicites, leur décomposition en fractions rationnelles, leur transformation en produits composés d'un nombre fini ou infini de

facteurs, et leurs développements en séries périodiques ou non périodiques, spécialement les théorèmes de Taylor, de Lagrange et de Paoli, avec les conditions sous lesquelles ces théorèmes subsistent, il suffit de s'appuyer sur le principe général énoncé dans le § I, savoir que le résidu intégral relatif à une aire limitée par un contour unique, ou comprise entre deux contours, équivaut à la somme des résidus partiels relatifs aux diverses parties de cette aire décomposée en éléments et à la somme des résidus partiels relatifs aux points singuliers que renferme l'aire dont il s'agit. Ces points singuliers seront de deux espèces distinctes, si la fonction Z se présente sous la forme d'un rapport, en sorte qu'on ait

$$(5)\qquad Z = \frac{f(z)}{F(z)},$$

$f(z)$, $F(z)$ étant deux fonctions qui demeurent monodromes et monogènes dans toute l'étendue de l'aire $\Delta\mathrm{S}$. Alors, en effet, on vérifiera l'équation

$$(6)\qquad \frac{1}{Z} = 0,$$

soit en posant

$$(7)\qquad F(z) = 0,$$

soit en posant

$$(8)\qquad \frac{1}{f(z)} = 0,$$

et par suite l'affixe d'un point singulier pourra être racine ou de l'équation (7) ou de l'équation (8). Alors aussi la somme des résidus partiels relatifs aux racines de l'équation (7) ou de l'équation (8) sera ce que nous nommerons le *résidu intégral* de Z relatif aux racines de l'une ou l'autre équation, et ce que nous désignerons à l'aide de la notation

$$\overset{z=v}{\underset{z=u}{\mathcal{E}}}\frac{f(z)}{(F(z))} \quad \text{ou} \quad \overset{z=v}{\underset{z=u}{\mathcal{E}}}\frac{(f(z))}{F(z)},$$

les crochets trapézoïdaux étant appliqués ou au dénominateur ou au numérateur du rapport $\frac{f(z)}{F(z)}$, suivant que les racines considérées vérifieront, ou l'équation (7), ou l'équation (8). Lorsque ces deux équations n'auront pas de racines communes, on aura évidemment

$$\underset{z=u}{\overset{z=v}{\mathcal{E}}}\left(\frac{f(z)}{F(z)}\right)=\underset{z=u}{\overset{z=v}{\mathcal{E}}}\frac{f(z)}{(F(z))}+\underset{z=u}{\overset{z=v}{\mathcal{E}}}\frac{(f(z))}{F(z)}. \tag{9}$$

Pour montrer une application très simple des formules ici établies, considérons spécialement le cas où, $F(z)$ étant réduit à une fonction linéaire de z, on aurait

$$F(z)=z-w,$$

w étant l'affixe d'un point renfermé dans l'aire ΔS. Alors le facteur Z étant de la forme

$$\frac{f(z)}{z-w},$$

l'équation (3) donnerait

$$\underset{z=u}{\overset{z=v}{\mathcal{M}}}\frac{z\,f(z)}{z-w}=\underset{z=u}{\overset{z=v}{\mathcal{E}}}\left(\frac{f(z)}{z-w}\right); \tag{10}$$

par conséquent, eu égard à la formule (9) et à l'équation (10) du § I,

$$\mathcal{M}\frac{v\,f(v)}{v-w}-\mathcal{M}\frac{u\,f(u)}{u-w}=f(w)+\underset{z=u}{\overset{z=v}{\mathcal{E}}}\frac{(f(z))}{z-w}. \tag{11}$$

De cette dernière formule on tire

$$f(w)=\mathcal{M}\frac{v\,f(v)}{v-w}+\mathcal{M}\frac{u\,f(u)}{w-u}+\underset{z=u}{\overset{z=v}{\mathcal{E}}}\frac{(f(z))}{w-z}; \tag{12}$$

puis, en échangeant entre elles les deux lettres z et w,

$$f(z)=\mathcal{M}\frac{v\,f(v)}{v-z}+\mathcal{M}\frac{u\,f(u)}{z-u}+\underset{w=u}{\overset{w=v}{\mathcal{E}}}\frac{(f(w))}{z-w}. \tag{13}$$

Ajoutons que, si l'on nomme

$$c,\quad c',\quad c'',\quad \ldots$$

les affixes des points singuliers renfermés dans l'aire ΔS, c'est-à-dire les racines de l'équation

$$\frac{1}{f(z)}=0, \tag{14}$$

qui offrent des modules compris entre les rayons des deux cercles limitateurs, le résidu intégral

$$\underset{w=u}{\overset{w=v}{\mathcal{E}}}\frac{(f(w))}{z-w},$$

composé de résidus partiels correspondants à ces racines, sera une somme de termes de la forme

$$\mathcal{M}\frac{\zeta\,f(c+\zeta)}{z-c-\zeta}, \tag{15}$$

le module de ζ pouvant être supposé aussi petit que l'on voudra. Cela posé, l'équation (13) aura la vertu de transformer une fonction monodrome et monogène quelconque $f(z)$ de la variable z en une somme de moyennes isotropiques dans chacune desquelles la fonction sous le signe $\int$ sera proportionnelle à un rapport de l'une des trois formes

$$\frac{v}{v-z},\quad \frac{u}{z-u},\quad \frac{\zeta}{z-c-\zeta}, \tag{16}$$

le module de z étant compris entre les modules de u et de v, et le module de ζ pouvant être supposé infiniment petit. Or les dérivées de ces trois rapports différentiés une ou plusieurs fois par rapport à z, étant aussi bien que ces rapports eux-mêmes des fonctions rationnelles, par conséquent des fonctions monodromes et monogènes de z, on déduit immédiatement de la formule (13) la proposition suivante :

Théorème. — *Les dérivées des divers ordres de fonctions monodromes et monogènes d'une variable sont encore des fonctions monodromes et monogènes.*

Au reste, les formules (1) et (13) étant pareilles à celles que nous avons déjà obtenues dans de précédents Mémoires, spécialement aux formules (15) et (20) du Mémoire sur l'application du Calcul des résidus à plusieurs questions importantes d'Analyse (*voir* le Tome XXXII des *Comptes rendus*, page 207) ([1]), il est clair que la nouvelle théorie, appuyée sur des bases dont la solidité est manifeste, reproduira les résultats déjà trouvés par moi-même ou par d'autres auteurs, par exemple les théorèmes énoncés à la page 212 et à la page 704 du Tome XXXII déjà cité ([2]).

583.

ANALYSE MATHÉMATIQUE. — *Addition au Mémoire sur les fonctions quadratiques et homogènes.*

C. R., T. XLIV, p. 416 (2 mars 1857).

On a pu remarquer la facilité avec laquelle, des formules (3) et (4) du premier paragraphe (page 423), se déduisent, dans le second, les théorèmes I, II, III dont le premier est connu depuis longtemps, et dont le troisième était déjà énoncé dans le Mémoire *sur l'équation qui détermine les inégalités séculaires du mouvement des planètes*. Ajoutons que la dernière partie du second théorème est une conséquence immédiate du troisième. En effet, deux racines y_1, y_2 de l'équation $Y = 0$, qui comprennent entre elles une racine y' de l'équation $\alpha = 0$, ne pourront évidemment devenir égales sans coïncider avec y'. Il y a plus : la formule (31) de laquelle se tire le second théorème, pourrait être déduite de la formule (26) par un raisonnement analogue à celui qui sert à démontrer le premier théorème (page 368), et, pour y parvenir, il suffirait de considérer les valeurs des variables α, β, ..., η, θ, correspondantes au cas exceptionnel où deux racines y_1, y_2 sont

([1]) *Œuvres de Cauchy*, S. I, T. XI, p. 306.
([2]) *Ibid.*, S. I, T. XI, p. 311 et 384.

égales, comme les limites de valeurs que ces variables acquièrent quand la différence $y_2 - y_1$ devient infiniment petite.

Je remarquerai encore que la formule (25), avec le second théorème qui en est une conséquence immédiate, s'était déjà produite, démontrée il est vrai d'une autre manière, dans le Mémoire de M. Duhamel qui a pour titre : *Sur le mouvement de la chaleur dans un système quelconque de points.*

584.

CALCUL INTÉGRAL. — *Mémoire sur l'intégration d'un système d'équations différentielles.*

C. R., T. XLIV, p. 528 (16 mars 1857).

Aujourd'hui absorbé par les préoccupations douloureuses qui le retiennent près du lit d'un frère bien-aimé, très gravement malade, l'auteur reproduira plus tard les résultats auxquels il est parvenu.

585.

C. R., T. XLIV, p. 595 (23 mars 1857).

CALCUL INTÉGRAL. — M. AUGUSTIN CAUCHY présente à l'Académie la suite de ses recherches sur l'intégration d'un système d'équations différentielles.

586.

CALCUL INTÉGRAL. — *Sur l'intégration des systèmes d'équations différentielles, et spécialement de ceux qui expriment les mouvements des astres.*

C. R., T. XLIV, p. 805 (20 avril 1857).

Supposons données n équations différentielles entre n inconnues x, y, z, ..., u, v, w et le temps t. Les valeurs de ces inconnues, fournies par les intégrales générales de ces équations différentielles, seront des fonctions de t qui resteront *monodromes* et *monogènes* dans le voisinage d'une valeur donnée de t, si, dans ce voisinage, les dérivées des inconnues sont elles-mêmes, en vertu des équations différentielles, des fonctions *monodromes* et *monogènes* de ces inconnues, et si, pour la valeur donnée de t, ces dérivées ne s'évanouissent pas. Il y a plus : dans le cas dont il s'agit, les valeurs des inconnues seront développables en séries convergentes ordonnées suivant les puissances entières et positives de la variation attribuée à t, pourvu que le module de cette variation ne dépasse pas une certaine limite supérieure.

Ajoutons que les valeurs des inconnues, fournies par les intégrales générales, ne peuvent généralement vérifier, pour une même valeur de t, deux équations de condition qui ne renfermeraient aucune constante arbitraire.

De ces principes appliqués au système des équations qui représentent les mouvements simultanés de plusieurs astres, on conclut que les valeurs des inconnues comprises dans ces équations seront généralement développables en séries ordonnées suivant les puissances entières et positives de t, dans le voisinage de toute valeur finie de t à laquelle correspondront des valeurs finies des inconnues, à moins que cette valeur ne fasse évanouir l'une des variables qui représentent les distances mutuelles des astres donnés.

Toutefois les développements des inconnues en séries ordonnées suivant les puissances entières et positives du temps offrent l'inconvénient très grave d'exiger, dans le cas même où ils sont convergents, des calculs très pénibles, vu que la convergence est très lente quand le temps a une grande valeur. Pour ce motif, il convient de substituer au temps d'autres variables qui permettent d'obtenir à toutes les époques, et surtout pour de grandes valeurs de t, des développements dont la convergence soit assez rapide pour que les calculs puissent s'effectuer sans un immense labeur. On y parvient, dans le mouvement elliptique, en considérant les inconnues qui déterminent l'orbite décrite par une planète autour du Soleil, ou par un satellite autour de la planète qu'il accompagne, comme fonctions d'une variable que nous appellerons la *clef de l'orbite*, et qui n'est autre chose que l'exponentielle trigonométrique dont l'argument est l'anomalie moyenne. Comme on peut aisément le démontrer, les diverses inconnues, dans le mouvement elliptique, sont des fonctions monodromes et monogènes de la variable qui représente la clef de l'orbite, dans le voisinage de toute valeur de cette variable qui a pour module l'unité.

Dans le cas où l'on considère, non plus une planète tournant autour du Soleil, ou un satellite tournant autour d'une planète, mais plusieurs planètes circulant autour du Soleil, et un ou plusieurs satellites tournant autour de chaque planète, la première approximation donne encore pour chaque orbite une ellipse à laquelle correspond une clef spéciale. On peut d'ailleurs supposer que, dans chaque équation différentielle, la fonction perturbatrice est multipliée par un coefficient que nous appellerons le *régulateur*, et qui passe de la valeur zéro à la valeur 1 quand on passe du mouvement elliptique au mouvement troublé.

Cela dit, supposons toutes les inconnues développées suivant les puissances ascendantes du régulateur. Les premiers termes des développements, c'est-à-dire ceux que fournit la première approximation et qui répondent aux mouvements elliptiques, seront des fonctions monodromes et monogènes des *clefs* des diverses orbites décrites par les diverses planètes autour du Soleil et par les divers satellites autour de leurs planètes. Ces premiers termes seront donc développables suivant les puissances entières positives, nulles ou négatives des diverses clefs. Je me suis demandé si les termes suivants n'étaient pas susceptibles, sous certaines conditions, de développements du même genre; et pour éclaircir cette question, j'ai soumis à l'analyse le problème qui consiste à déterminer les mouvements simultanés du Soleil, d'une planète et d'un satellite de cette planète circulant dans un même plan, de telle sorte que les orbites décrites par la planète autour du

Soleil, et par le satellite autour de la planète, soient à peu près circulaires. En supposant ma présomption fondée, je devais obtenir, pour les seconds termes des développements des inconnues, des fonctions monodromes et monogènes des clefs des deux orbites. Or c'est ce qui est effectivement arrivé. D'ailleurs la méthode qui m'a conduit à ce résultat peut s'appliquer à la détermination des divers termes des développements des inconnues, aussi bien qu'à la détermination des seconds termes. Il y a donc lieu de croire que les grands problèmes de l'Astronomie pourront être traités avec succès par cette nouvelle méthode, qui d'ailleurs peut être utilement appliquée à l'intégration d'un grand nombre de systèmes d'équations différentielles, et que je me réserve d'exposer, avec les développements qu'elle comporte, dans les prochaines séances.

587.

Analyse mathématique. — *Sur les avantages que présente l'emploi des régulateurs dans l'Analyse mathématique.*

C. R., T. XLIV, p. 849 (27 avril 1857).

Des principes établis dans les divers Mémoires que j'ai publiés depuis 1831, résulte le théorème suivant :

Théorème I. — *Si une fonction ω de plusieurs variables*

$$x,\ y,\ z,\ \ldots$$

reste, par rapport à chacune d'elles, monodrome, monogène et finie pour des modules de ces variables inférieures à des limites données, elle sera, pour de tels modules, développable en une série multiple, ordonnée suivant les puissances ascendantes et entières de ces mêmes variables.

Un artifice de calcul, auquel il est souvent utile de recourir, permet non seulement de réduire la série multiple à une série simple, mais encore de calculer avec facilité les divers termes. Cet artifice con-

siste à multiplier chacune des variables que comprend la fonction donnée ω par une variable auxiliaire θ, que l'on fait passer de la limite zéro à la limite 1. La fonction ainsi transformée peut être considérée comme une fonction de θ. Si d'ailleurs on désigne à l'aide de la lettre caractéristique $\mathcal{A}$ et de ses puissances entières $\mathcal{A}^2$, $\mathcal{A}^3$, ... ce que deviennent, quand la variable θ s'évanouit, les dérivées de la fonction ω transformée comme on vient de le dire et différentiée une ou plusieurs fois par rapport à θ, on reproduira la fonction ω en la multipliant par l'exponentielle symbolique $e^{\mathcal{A}}$, en sorte qu'on aura identiquement

$$(1)\qquad \omega = e^{\mathcal{A}}\omega = \mathcal{A}^0\omega + \mathcal{A}\omega + \frac{\mathcal{A}^2\omega}{1.2} + \frac{\mathcal{A}^3\omega}{1.2.3} + \ldots$$

Ajoutons que, dans la formule (1), on ne devra pas remplacer $\mathcal{A}^0$ par l'unité, attendu que $\mathcal{A}^0\omega$ représentera, non la valeur générale de la fonction ω, mais la valeur particulière qu'elle acquiert quand les variables

$$x,\ y,\ z,\ \ldots$$

s'évanouissent simultanément.

Les divers termes que comprenait le développement de ω en série multiple ordonnée suivant les puissances ascendantes des variables x, y, z, ... se trouvent réunis par groupes dans le dernier membre de la formule (1), où la somme des termes que renferme un seul groupe est représentée par une expression de la forme

$$\frac{\mathcal{A}^n\omega}{1.2.3\ldots n}.$$

La variable auxiliaire θ, qui a été transitoirement introduite dans le calcul, mais qui a fini par disparaître et que ne renferme plus la formule (1), a servi à *régler* la répartition opérée des divers termes de la série multiple entre les divers groupes, par conséquent entre les divers termes de la série simple; et c'est pour ce motif que nous donnons à cette variable le nom de *régulateur*.

Au reste, pour que la formule (1) subsiste, il n'est pas absolument nécessaire que la fonction des variables x, y, z, ..., représentée par ω, soit monodrome, monogène et finie par rapport à chacune d'elles, pour tous les modules inférieurs à ceux que l'on assigne à la variable, et l'on peut évidemment énoncer la proposition suivante :

THÉORÈME II. — *Pour qu'un régulateur θ permette de développer une fonction ω en une série simple, il suffit que l'introduction de ce régulateur dans la fonction donnée la transforme en une fonction de θ qui reste monodrome, monogène et finie pour tout module de θ inférieur à l'unité.*

Il pourra d'ailleurs arriver que le développement fourni par l'introduction du régulateur reste convergent dans des cas où le développement ordonné suivant les puissances ascendantes d'une variable x, ou y, ou z, ... deviendrait divergent.

La formule (1) continuerait évidemment de subsister sous la condition indiquée par le théorème II, si la fonction donnée ω renfermait avec les variables x, y, z, ... divers paramètres α, β, γ, ..., et si le régulateur θ était introduit dans la fonction comme multiplicateur, non plus des variables x, y, z, ..., mais des paramètres α, β, γ, ..., ou de quelques-uns d'entre eux. Il y a plus : on peut considérer comme régulateur toute variable auxiliaire que l'on introduit dans une fonction ω, en assujettissant cette variable à la seule condition que la fonction reprenne, pour $\theta = 1$, la valeur assignée. Le choix à faire de ce régulateur mérite une attention spéciale, puisque de ce choix dépendent tout à la fois et l'existence de la formule (1) et la convergence plus ou moins rapide de la série qui représente dans cette formule le développement de ω.

L'intervention des régulateurs et de la formule (1) peut être appliquée avec succès à la détermination des fonctions implicites aussi bien qu'à celle des fonctions explicites.

Effectivement, considérons une ou plusieurs inconnues assujetties à vérifier ou des équations finies, ou des équations différentielles données, ou même des équations aux dérivées partielles. Ces inconnues seront généralement des fonctions des variables et des paramètres renfermés dans les équations dont il s'agit. Si d'ailleurs on ne peut arriver à obtenir les valeurs des inconnues en termes finis, on devra chercher à développer ces valeurs en séries convergentes. On y parviendra pour l'ordinaire à l'aide de la formule (1), en suivant la marche que nous allons indiquer.

Il arrive très souvent qu'il devient facile d'assigner les valeurs qu'acquièrent les inconnues pour des valeurs particulières de paramètres compris dans les équations données ou dans leurs intégrales. Alors on pourra prendre pour régulateur une variable auxiliaire θ, par laquelle on multipliera ces paramètres. Ainsi, par exemple, en Astronomie, quand il s'agira de déterminer les coordonnées de l'orbite qu'une planète décrit autour du centre du Soleil, on pourra prendre pour régulateur une variable θ par laquelle on multipliera les masses perturbatrices, et même, si l'on veut, les excentricités des diverses orbites. Cela posé, les développements que fournira la formule (1) auront pour premiers termes les valeurs des coordonnées dans une première approximation, c'est-à-dire dans le mouvement elliptique, ou même dans le mouvement circulaire d'une planète qui tournerait seule autour du Soleil.

Ajoutons que si un même paramètre reparaît à diverses places, soit dans les premiers membres des équations données, soit dans les intégrales de ces équations, on pourra le supposer multiplié par le régulateur, non dans toutes les places dont il s'agit, mais seulement dans quelques-unes de ces places. Cette remarque est importante, comme nous le verrons plus tard, et permet de simplifier notablement la solution des problèmes que présente l'Astronomie mathématique.

Remarquons enfin que, dans un grand nombre de cas, il peut être utile d'employer successivement ou même simultanément, deux, trois, quatre, ..., régulateurs distincts.

Si, pour fixer les idées, on emploie, outre le régulateur θ, un autre régulateur η, alors, en appliquant les deux régulateurs à la détermination de ω, et nommant δ ce que devient Δ quand on passe du premier régulateur au second, on obtiendra, au lieu de la formule (1), la suivante :

$$\omega = e^{\partial + \mathcal{A}}\omega. \tag{2}$$

588.

Astronomie mathématique. — *Méthode nouvelle pour la détermination du mouvement des astres.*

C. R., T. XLIV, p. 851 (27 avril 1857).

Pour calculer les mouvements des astres dont se compose notre système planétaire, savoir le mouvement des planètes autour du Soleil et des satellites autour des planètes, j'aurai recours à des approximations successives. Je prendrai pour inconnues les distances des planètes au Soleil et des satellites d'une planète à cette planète même, ou plutôt les coordonnées relatives qui expriment les projections algébriques de ces distances sur trois axes fixes rectangulaires. Alors, la dérivée du second ordre de chaque inconnue différentiée deux fois par rapport au temps se composera de deux parties, dont l'une se rapportera au mouvement elliptique, l'autre étant la fonction perturbatrice. D'ailleurs, je développerai chaque inconnue en une série simple ordonnée suivant les puissances ascendantes d'un régulateur θ, par lequel je multiplierai toutes les fonctions perturbatrices, et que je réduirai définitivement à l'unité. Cela posé, ω étant l'une quelconque des inconnues, et $\mathcal{A}$ la lettre caractéristique qui correspond au régulateur θ, j'aurai

$$\omega = \mathcal{A}^0\omega + \mathcal{A}\omega + \frac{\mathcal{A}^2\omega}{1.2} + \frac{\mathcal{A}^3\omega}{1.2.3} + \dots. \tag{1}$$

Le premier terme

$$\mathcal{A}^0\omega$$

de cette série sera la valeur de ω qui correspond au mouvement elliptique.

Ce n'est pas tout : on peut très aisément déduire le mouvement elliptique lui-même du mouvement circulaire. En effet, considérons une planète dont la distance au Soleil ne puisse ni croître, ni décroître indéfiniment; cette distance r étant alors nécessairement comprise entre deux limites, l'une supérieure, l'autre inférieure, nommons a la demi-somme de ces limites, et ε le rapport de leur demi-différence à leur demi-somme; a sera ce qu'on nomme la *distance moyenne*, ε ce qu'on nomme l'*excentricité* de l'orbite, et la différence entre le rapport $\frac{r}{a}$ et l'unité, étant numériquement inférieureà ε, sera le produit de ε par une quantité numériquement inférieure à l'unité. Cette quantité sera donc le cosinus d'un certain angle ψ, qu'on nomme l'*anomalie excentrique*, en sorte qu'on aura

$$r = a(1 - \varepsilon\cos\psi). \tag{2}$$

Il est aisé d'en conclure que ψ est lié à t par une équation de la forme

$$\psi - \varepsilon\sin\psi = T, \tag{3}$$

T étant une fonction linéaire de t, qu'on nomme l'*anomalie moyenne*, en sorte qu'on a

$$D_t\psi = \frac{a\aleph}{r} = \frac{\aleph}{1 - \varepsilon\cos\psi}, \tag{4}$$

$\aleph$ désignant une constante qui représente la vitesse angulaire moyenne. Cela posé, pour déterminer les coordonnées de la planète dans le mouvement elliptique, et même pour les exprimer en termes finis, il suffira de substituer à la variable indépendante t l'exponentielle trigonométrique qui a pour argument l'anomalie moyenne ψ, en posant

$$\varsigma = e^{\psi i}, \tag{5}$$

et d'introduire dans les équations du mouvement un nouveau régulateur η considéré comme multiplicateur de l'excentricité ε. En désignant par ∂ la lettre caractéristique relative à ce nouveau régulateur, et nommant υ une inconnue quelconque, on aura

$$\upsilon = e^{\partial}\upsilon = \partial^0\upsilon + \partial\upsilon + \frac{\partial^2\upsilon}{1.2} + \frac{\partial^3\upsilon}{1.2.3} + \dots \tag{6}$$

et cette dernière formule, appliquée à la détermination des coordonnées, donnera simplement

$$\upsilon = \partial^{\circ}\upsilon + \delta\upsilon, \tag{7}$$

$\delta\upsilon$ étant alors une quantité constante.

J'ajouterai que la formule (6) fournit le développement en série simple de chacun des termes compris dans le second membre de la formule (1), quand on considère le régulateur η comme multiplicateur, non seulement de l'excentricité ε de l'orbite de l'astre dont on cherche les coordonnées, mais encore des excentricités $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots$ des autres orbites. Alors, en nommant

$$\psi_1, \quad \psi_2, \quad \psi_3, \quad \ldots$$

ce que devient ψ quand on passe de la première orbite aux autres, et en prenant pour variables indépendantes $\psi, \psi_1, \psi_2, \ldots$, je déduis les variations des coordonnées d'équations à coefficients constants, du second et du troisième ordre, qui paraissent dignes de remarque. Dans un prochain article, je donnerai ces équations et je rechercherai si l'on peut toujours développer leurs intégrales en séries de termes proportionnels à des produits de la forme

$$\varsigma^h \varsigma_1^k \varsigma_2^l \ldots, \tag{8}$$

$h, k, l, \ldots$ étant des quantités entières, et $\varsigma, \varsigma_1, \varsigma_2, \ldots$ les exponentielles trigonométriques qui ont pour arguments les anomalies excentriques. Si, d'ailleurs, on pose

$$s = e^{Ti},$$

s sera la *clef de l'orbite* de la planète dont la distance moyenne au Soleil est représentée par a, et si l'on nomme $s_1, s_2, \ldots$ les clefs des autres orbites, le produit (8) pourra toujours être développé suivant les puissances ascendantes et descendantes des clefs

$$s, \quad s_1, \quad s_2, \quad \ldots.$$

Enfin, après avoir discuté la question relative au développement des coordonnées des divers astres en séries ordonnées suivant les puissances ascendantes et descendantes des clefs des diverses orbites, je rechercherai les conditions de convergence des séries obtenues, lesquelles seront aussi évidemment les conditions de stabilité du système planétaire.

589.

Astronomie mathématique. — *Sur l'emploi des régulateurs en Astronomie.*

C. R., T. XLIV, p. 896 (4 mai 1857).

J'ai indiqué dans la séance précédente les avantages que présente l'emploi des régulateurs dans l'Analyse mathématique. J'ajouterai que l'on peut supposer développés suivant les puissances ascendantes d'un régulateur donné, non seulement les variables, mais encore les paramètres que renferment les équations données, finies ou différentielles, ou même aux dérivées partielles. Cette dernière remarque permet, dans un grand nombre de questions, et particulièrement en Astronomie, de rendre monodromes et monogènes les variations des divers ordres d'inconnues développées en séries suivant les puissances ascendantes d'un même régulateur. Ainsi se trouve résolue la question soulevée dans mon dernier Mémoire, relativement à la possibilité de développer les coordonnées qui déterminent les orbites des planètes tournant autour du Soleil, ou des satellites tournant autour des planètes, suivant les puissances ascendantes et descendantes des exponentielles trigonométriques qui ont pour arguments les anomalies excentriques ou les anomalies moyennes, et par suite suivant les puissances ascendantes et descendantes des clefs des orbites. C'est ce que j'expliquerai plus au long dans un prochain Mémoire.

SÉANCE DU LUNDI 25 MAI 1857.

PRÉSIDENCE DE M. PONCELET.

En l'absence de M. Isidore Geoffroy-Saint-Hilaire, appelé à présider la députation qui assiste aux funérailles de M. Augustin Cauchy, M. Poncelet ouvre la séance à $3^h 30^m$.

« M. Poncelet annonce la perte douloureuse, inopinée et irréparable pour la Science, que vient de faire l'Académie dans la personne de l'un des plus illustres géomètres de notre époque, et dont le merveilleux talent d'analyse s'est tour à tour exercé avec succès sur les questions les plus variées des Mathématiques pures et des Mathématiques appliquées à la Mécanique, à la Physique et à l'Astronomie. »

FIN DU TOME XII DE LA PREMIÈRE SÉRIE.

TABLE DES MATIÈRES

DU TOME DOUZIÈME.

PREMIÈRE SÉRIE.

MÉMOIRES EXTRAITS DES RECUEILS DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES
DE L'INSTITUT DE FRANCE.

NOTES ET ARTICLES EXTRAITS DES COMPTES RENDUS HEBDOMADAIRES
DES SÉANCES DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES.

FIN DE LA TABLE DES MATIÈRES DU TOME XII DE LA PREMIÈRE SÉRIE.

PARIS. — IMPRIMERIE GAUTHIER-VILLARS,
26225 Quai des Grands-Augustins, 55.

TABLE

DES

EXTRAITS DES COMPTES RENDUS

AVEC L'INDICATION

DE LEUR CLASSIFICATION DANS LE RÉPERTOIRE BIBLIOGRAPHIQUE (¹).

Numéros des extraits.	Indication du répertoire.	Tomes des *C. R.*
Tome IV des Œuvres.		
1	[H]	II
2 à 7	[T3b]	»
8	[T3b]	III
9	[D3bα]	IV
10 à 13	[D3cβ]	»
14	[A3d]	V
15	[D3cβ]	»
16 à 18	[A3g]	»
19 à 24	[T3b]	VII
25 à 32	[T3b]	VIII
33 à 35	[T1a]	»
36	[H5d]	»
37 à 41	[T2a]	»
42	[T3b]	»
43	[T2a]	»
44, 45	[T3b]	»
46 à 48	[T1b]	»
49 à 52	[H5a]	»
53, 54	[T3b]	»
55 à 57	[Tβb]	IX
58	[D3bα]	»
59	[T3b]	»
60	[H10b]	»
61	[T3b]	IX
62	[V9]	»
63, 64	[I13b]	»
65, 66	[T1a]	»
67	[D3cβ]	»
68	[T1b]	»
Tome V des Œuvres.		
69	[H10b]	IX
70 à 73	[T3b]	»
74 à 78	[I13b]	X
79	[T2c]	»
80	[T3b]	»
81	[I4]	»
82	[I7aα]	»
83	[I7c]	»
84	[D3bα]	»
85	[I7aα]	»
86	[T2c]	»
87	[T2a]	»
88	[H1c]	»
89	[H7a]	»
90	[H7a]	XI
91 à 94	[U3]	»

(¹) Dans cette Table auxiliaire, les *Extraits des Comptes rendus* sont rangés par ordre chronologique. On a indiqué dans une colonne spéciale le Tome des *Comptes rendus* dans lequel se trouve chaque Extrait; cette indication, destinée à faciliter les recherches, permet, en outre, de connaître immédiatement la date approximative de l'Extrait, les Tomes $2n$ et $2n+1$ des *Comptes rendus* correspondant respectivement au premier et au second semestre de l'année $1835+n$. On a donné seulement ici l'indication principale du *Répertoire*. (*Voir* la Note de la page 473.)

Numéros des extraits.	Indication du répertoire.	Tomes des C. R.
95, 96	[U4]	XI
97 à 99	[U3]	»
100 à 102	[H1c]	»
103, 104	[A5b]	»
105, 106	[I1]	»
107 à 109	[A3g]	»
110	[T2c]	»
111	[V9]	»

Tome VI des Œuvres.

Numéros des extraits.	Indication du répertoire.	Tomes des C. R.
112	[C2j]	XI
113, 114	[U4]	XII
115, 116	[V9]	»
117	[I1]	»
118	[A5b]	»
119	[D6bβ]	»
120	[B3a]	»
121	[B1a]	»
122, 123	[I12b]	»
124	[V9]	»
125	[D3c]	»
126	[G1e]	»
127	[A3]	»
128	[C2k]	»
129	[H10b]	XIII
130, 131	[C2j]	»
132 à 134	[H10b]	»
135	[C2k]	»
136, 137	[T3b]	»
138	[V9]	»
139	[U4]	»
140	[T3b]	»
141 à 145	[H10b]	»
146	[U4]	»
147	[D3bα]	»
148	[U4]	»
149	[D2bα]	»
150	[A1b]	»
151	[T3b]	»
152	[O2a]	»
153	[C2h]	»
154, 155	[H10b]	»
156, 157	[H10b]	XIV
158 à 160	[V9]	»
161 à 163	[H8d]	»
164	[H9hα]	»
165	[H8d]	»

Numéros des extraits.	Indication du répertoire.	Tomes des C. R.
166	[H9hα]	XIV
167	[H1a]	»
168	[H8d]	»

Tome VII des Œuvres.

Numéros des extraits.	Indication du répertoire.	Tomes des C. R.
169	[H13]	XV
170, 171	[H7a]	»
172	[H1c]	»
173	[H9h]	»
174	[H13]	»
175	[H1c]	»
176	[U3]	»
177	[H1c]	»
178	[H2a]	»
179 à 183	[U4]	»
184 à 190	[T3b]	»
191, 192	[T2c]	»
193	[T3b]	»
194	[V9]	»
195	[T3b]	»
196	[V9]	»
197	[T3b]	»
198	[R1h]	»
199	[R1h]	XVI
200	[T1b]	»
201	[T2a]	»
202	[O2n]	»
203	[E1]	»
204	[H10]	»
205	[T4c]	»
206	[H10]	»
207 à 209	[L²9a]	»
210 à 212	[K]	»
213, 214	[T1b]	»
215	[M¹1c]	XVII

Tome VIII des Œuvres.

Numéros des extraits.	Indication du répertoire.	Tomes des C. R.
216	[D3bα]	XVII
217	[V9]	»
218	[C1a]	»
219	[A3d]	»
220	[E1e]	»
221	[E1a]	»
222, 223	[H12b]	»
224	[V9]	»
225 à 228	[F1c]	»
229 à 232	[F3]	»

Numéros des extraits.	Indication du répertoire.	Tomes des C. R.
233	[V9]	XVII
234	[D3bα]	»
235	[U4]	»
236	[F3]	»
237	[C1f]	»
238	[D2aα]	»
239, 240	[T2aβ]	»
241	[U4]	XVIII
242	[V9]	»
243	[D3bα]	»
244	[V9]	»
245	[D3bα]	»
246	[U4]	»
247	[T2a]	»
248, 249	[K18g]	»
250, 251	[V9]	»
252	[T3b]	»
253	[D3cα]	»
254	[U4]	XIX
255	[E1]	»
256	[D2bα]	»
257	[U4]	»
258	[D2bα]	»
259, 260	[U4]	»
261	[D2c]	»
262	[D1b]	»
263	[H12b]	»
264	[D1b]	»
265	[U4]	»
266	[D1b]	»
267	[D3a]	»
268	[D2aα]	»
269	[D3a]	»
270	[D3d]	»
271	[D2b]	»
272	[D2c]	XX
273	[V9]	»
274	[D3bα]	»
275, 276	[D3d]	»

Tome IX des Œuvres.

Numéros des extraits.	Indication du répertoire.	Tomes des C. R.
277	[D2]	XX
278	[D2aδ]	»
279	[D3bα]	»
280	[D3d]	»
281 à 284	[D3cα]	»
285	[V9]	»
286	[U4]	XX
287	[U3]	»
288	[C2]	»
289	[V9]	»
290 à 292	[U4]	»
293	[T2]	»
294, 295	[T1b]	XXI
296, 297	[K6a]	»
298	[C2g]	»
299	[V9]	»
300 à 303	[J4c]	»
304 à 308	[J4a]	»
309	[V9]	»
310	[J4c]	»
311 à 317	[J4a]	»
318, 319	[J4c]	»

Tome X des Œuvres.

Numéros des extraits.	Indication du répertoire.	Tomes des C. R.
320	[J4c]	XXII
321, 322	[J4d]	»
323 à 325	[J4b]	»
326, 327	[J4d]	»
328, 329	»	XXIII
330	[K6a]	»
331	[C21]	»
332	[D3a]	»
333 à 335	[G1e]	»
336	[V9]	»
337	[D3cγ]	»
338	[V9]	»
339	[G1e]	»
340	[C21]	»
341	[V9]	»
342	[D3cα]	»
343, 344	[H1g]	»
345	[D3g]	»
346, 347	[H1g]	»
348	[C2h]	»
349	[H1g]	»
350, 351	[U2]	»
352, 353	[U2]	»
354	[I22b]	XXIV
355	[T2a]	»
356	[I22b]	»
357	[T2a]	»
358 à 362	[I22b]	»
363	[C1f]	»

Numéros des extraits.	Indication du répertoire.	Tomes des *C. R.*
364 à 367	[I22b]	XXIV
368, 369	[I3c]	»
370 à 373	[I22b]	XXV
374	[B12c]	»
375 à 378	[I22b]	»
379	[T3b]	»
380 à 390	[U2]	»
391 à 393	[U2]	XXVI
394	[T3b]	»
395	[V9]	»
396 à 398	[U2]	»

Tome XI des Œuvres.

Numéros des extraits.	Indication du répertoire.	Tomes des *C. R.*
399	[K14c]	XXVI
400	[V9]	»
401	[K14c]	»
402, 403	[C2h]	»
404 à 407	[T2a]	»
408, 409	[V9]	»
410	[C2h]	XXVII
411	[T2a]	»
412	[C5]	»
413	[T2a]	»
414	[T3b]	»
415	[T2a]	»
416	[V9]	»
417 à 420	[H10b]	»
421	[E5]	»
422	[D3cα]	»
423 à 427	[H10b]	»
428, 429	[T3b]	»
430 à 432	[T3b]	XXVIII
433	[V9]	»
434 à 436	[T3b]	»
437	[D3cα]	XXIX
438, 439	[H1c]	»
440	[V9]	»
441	[B12b]	»
442	[C2h]	»
443	[V9]	»
444, 445	[T2a]	»
446	[H5d]	»
447	[T2a]	»
448	[T3b]	»
449	[H5d]	»
450, 451	[T3b]	»
452 à 457	[T3b]	XXX

Numéros des extraits.	Indication du répertoire.	Tomes des *C. R.*
458	[D2bα]	XXX
459, 460	[D2c]	»
461	[V9]	»
462	[T3b]	»
463	[V9]	»
464, 465	[T3b]	XXXI
466	[V9]	»
467 à 477	[T3b]	»
478, 479	[D3g]	XXXII
480	[D3a]	»
481	[D3g]	»
482, 483	[D3c]	»
484, 485	[V9]	»
486	[T2a]	»
487	[V9]	»
488	[D3c]	»
489	[D2b]	»
490, 491	[V9]	»
492	[D3a]	»
493, 494	[V9]	»
495	[D3b]	»
496	[D3cα]	»
497	[D3cγ]	XXXIII
498	[U3]	»
499 à 502	[D3c]	XXXIV
503	[D3b]	»
504	[H1a]	»
505	[V9]	»
506, 507	[D3cγ]	»
508 à 511	[H10b]	XXXV
512	[R8c]	»
513	[R8c]	XXXVI
514	[B12c]	»

Tome XII des Œuvres.

Numéros des extraits.	Indication du répertoire.	Tomes des *C. R.*
515	[R8c]	XXXVI
516, 517	[B12c]	»
518	[D2aγ]	»
519	[J2e]	»
520, 521	[C1c]	XXXVII
522, 523	[J2e]	»
524	[H8b]	»
525 à 530	[J2e]	»
531	[T2a]	»
532	[T3b]	XXXVIII
533, 534	[T2aβ]	»
535	[V9]	»

Numéros des extraits.	Indication du répertoire.	Tomes des *C. R.*
536 à 538	[D3c]	XXXVIII
539, 540	[U2]	»
541	[D6a]	»
542	[D6e]	XXXIX
543	[E1c]	»
544	[H12b]	»
545	[D2bα]	XL
546	[H8]	»
547	[H1c]	»
548, 549	[H1a]	»
550	[H1g]	»
551	[D5a]	»
552, 553	[H1g]	»
554, 555	[V9]	»
556 à 558	[D3cβ]	»
559	[D6a]	»
560, 561	[D3cβ]	»
562	[D3b]	XLI
563	[I12b]	»

Numéros des extraits.	Indication du répertoire.	Tomes des *C. R.*
564	[D6a]	XLI
565	[D3f]	XLIII
566	[V9]	»
567	[D3a]	»
568	[H1c]	»
569, 570	[C5]	»
571	[H1g]	»
572	[D2aα]	»
573	[V9]	»
574, 575	[R9b]	»
576	[I22b]	XLIV
577	[R9b]	»
578	[D3cβ]	»
579	[A3]	»
580	[A3j]	»
581	[A1]	»
582	[D3a]	»
583	[A1]	»
584 à 589	[H1c]	»

TABLE GÉNÉRALE DES MATIÈRES

CONTENUES

DANS LES DOUZE VOLUMES DE LA PREMIÈRE SÉRIE.

I. — Mémoires extraits des *Mémoires présentés par divers savants à l'Académie des Sciences.*

II. — Mémoires extraits des *Mémoires de l'Académie des Sciences.*

III. — Notes et articles extraits des *Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des Sciences* (¹).

CLASSE A.

(Algèbre élémentaire; théorie des équations algébriques et transcendantes; groupes de Galois; fractions rationnelles; interpolation.)

(¹) Ces Notes et articles ont été classés d'après des indications de l'*Index du Répertoire bibliographique des Sciences mathématiques*. On a reproduit, d'après l'*Index*, le titre de chaque classe et, dans les classes les plus chargées, la signification des divisions les plus importantes. Lorsqu'une Note se rangeait à la fois dans plusieurs divisions, on n'a reproduit son titre qu'à l'une d'elles (en principe, à celle qui a paru la plus importante); mais on a fait suivre ce titre d'un renvoi, qui permet de connaître plus complètement la nature du sujet traité. De plus, à la fin de chaque division de la Table, on a classé les renvois qui y sont relatifs de la manière qui a paru la plus commode pour permettre de retrouver rapidement dans les autres classes les énoncés correspondants.

CLASSE B.

(Déterminants; substitutions linéaires; élimination; théorie algébrique des formes: invariants et covariants; quaternions; équipollences et quantités complexes.)

CLASSE C.

(Principes du Calcul différentiel et intégral; applications analytiques; quadratures; intégrales multiples; déterminants fonctionnels; formes différentielles; opérateurs différentiels.)

CLASSE D.

(Théorie générale des fonctions et son application aux fonctions algébriques et circulaires; séries et développements infinis, comprenant en particulier les produits infinis et les fractions continues considérées au point de vue algébrique; nombres de Bernoulli; fonctions sphériques et analogues.)

1, 2. — *Fonctions de variables réelles. Séries et développements infinis.*

3, 4, 5. — *Théorie des fonctions au point de vue de Cauchy, de Weierstrass, de Riemann.*

6. — *Fonctions algébriques, circulaires et diverses.*

CLASSE E.

(Intégrales définies, et en particulier intégrales eulériennes.)

CLASSE F.

(Fonctions elliptiques avec leurs applications.)

CLASSE G.

(Fonctions hyperelliptiques, abéliennes, fuchsiennes.)

CLASSE H.

(Équations différentielles et aux différences partielles; équations fonctionnelles; équations aux différences finies; suites récurrentes.)

1, 2, 3, 4, 5. — *Équations différentielles ordinaires.*

CLASSE I.

(Arithmétique et théorie des nombres; analyse indéterminée; théorie arithmétique des formes et des fractions continues; division du cercle; nombres complexes, idéaux, transcendants.)

[I1] *Voir* **[V9]** 116. — **[I13b]** *Voir* **[D3a]** 269. — **[I19b]** *Voir* **[I22b]**; **[V9]** 62, 115.

CLASSE J.

(Analyse combinatoire; Calcul des probabilités; Calcul des variations; Théorie générale des groupes de transformations [en laissant de côté les groupes de Galois (A), les groupes de substitutions linéaires (B) et les groupes de transformations géométriques (P)]; Théorie des ensembles de M. Cantor.)

2. — *Calcul des probabilités.*

4. — *Théorie générale des groupes de transformations* (*Cf.* **A4a**).

CLASSE K.

(Géométrie et Trigonométrie [étude des figures formées de droites, plans, cercles et sphères]; Géométrie du point, de la droite, du plan, du cercle et de la sphère; Géométrie descriptive; perspective.)

CLASSE L.

(Coniques et surfaces du second degré.)

CLASSE M.

(Courbes et surfaces algébriques; courbes et surfaces transcendantes spéciales.)

CLASSE O.

(Géométrie infinitésimale et Géométrie cinématique; applications géométriques du Calcul différentiel et du Calcul intégral à la théorie des courbes et des surfaces; quadrature et rectification; courbure; lignes asymptotiques, géodésiques, lignes de courbure; aires; volumes; surfaces minima; systèmes orthogonaux.)

CLASSE R.

(Mécanique générale; Cinématique; Statique comprenant les centres de gravité et les moments d'inertie; Dynamique; mécanique des solides; frottement; attraction des ellipsoïdes.)

CLASSE T.

(Physique mathématique; élasticité; résistance des matériaux; capillarité; lumière; chaleur; électricité.)

1. — *Généralités, action des corps voisins;* 2. — *Élasticité.*

3. — *Lumière*; 4. — *Chaleur*.

CLASSE U.

(Astronomie, Mécanique céleste et Géodésie.)

2. — *Détermination des éléments elliptiques. — Theoria motus.*

3. — *Théorie générale des perturbations. Problème des n corps.*

4. — *Développement de la fonction perturbatrice.*

CLASSE V.

(Philosophie et histoire des Sciences mathématiques; Biographie.)

9. — *XIX^e siècle.*

[V9] *Voir* [D2aα] 572; [L²9a] 207; [R9b] 575, [U4] 286.

CLASSE X.

(Procédés de calcul.)

[X3a] *Voir* [V9] 224. — [X7] *Voir* [V9] 111.

NOTES DIVERSES NE RENTRANT DANS AUCUNE CLASSE DU RÉPERTOIRE.

FIN DE LA TABLE DE LA PREMIÈRE SÉRIE.

26225 Paris. — Imprimerie Gauthier-Villars, quai des Grands-Augustins, 55.